UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Carolina da Silva Teotónio

SER PROFESSOR É DAR O EXEMPLO

Relatório de Estágio no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, orientado pela Professora Doutora Helena Maria Mamede Albuquerque e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Junho de 2023

Ser professor é dar o exemplo

Carolina da Silva Teotónio

UNIVERSIDADE Đ
COIMBRA

Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Master in Mathematics Teaching in the 3rd Cycle of Basic and Secondary Education

Relatório de Estágio | Report of Stage

junho 2023

Resumo

No âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3. º ciclo do Ensino Básico e no Secundário da Universidade de Coimbra, foi redigido o presente Relatório de Estágio que contempla as atividades desenvolvidas ao longo do ano letivo 2022/2023, no decorrer do Estágio Pedagógico na Escola Secundária José Falcão, em Coimbra, orientado cientificamente pela Professora Doutora Helena Albuquerque e orientado pedagogicamente pela Professora Natividade Correia.

A autora deste relatório desenvolveu a sua prática de ensino supervisionado na turma 5 do 11.º ano, na disciplina de Matemática A, tendo acompanhado o trabalho da Orientadora Cooperante na outra turma que lhe foi atribuída (a turma 7 do 11.º ano, na disciplina de Matemática A). A Professora Estagiária lecionou algumas aulas, desenvolveu atividades, participou em diversas reuniões e acompanhou o trabalho realizado no âmbito da direção de turma.

O Estágio Pedagógico é um processo e uma fase de desenvolvimento extremamente importante na preparação de um aluno de um Mestrado em Ensino. Este relatório tem como objetivo descrever as aprendizagens adquiridas e as tarefas realizadas pela Professora Estagiária ao longo deste ano.

Palavras-chave: Estágio Pedagógico; Professor; Aluno; Matemática; Ensino; Aprendizagem.

Abstract

Within the scope of the Master in Mathematics Teaching in the 3rd cycle of Basic and Secondary Education at the University of Coimbra, this Internship Report, includes the activities carried out throughout the academic year of 2022/2023, during the Pedagogical Internship at Escola Secundária José Falcão, in Coimbra, scientifically guided by Professor Helena Albuquerque and pedagogically guided by Professor Natividade Correia.

The author of this report developed her supervised teaching practice in class 5 of the 11th grade, in the subject of Mathematics A, having accompanied the work of the Cooperating Advisor in the other class assigned to her (class 7 of the 11th grade, in the subject of Mathematics A). The Intern Teacher taught some classes, developed activities, participated in several meetings and accompanied the work carried out by a class director.

The Pedagogical Internship is an extremely important process and stage of development in preparing a student for a Master's Degree in Teaching. This report aims to describe the lessons learned and the tasks carried out by the Trainee Professor during this valuable period.

Keywords: Pedagogical Internship; Teacher; Student; Math; Teaching; Learning.

Conteúdo

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Após o primeiro ano do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, os alunos deste mestrado têm contacto com o mundo escolar sob a perspetiva do professor no Estágio que ocupa o segundo ano deste ciclo de estudos. Quando entramos na escola temos já uma bagagem científica que nos permite seguir com alguma confiança para a sala de aula no sentido de apoiar os alunos na sua aprendizagem, apesar da inexperiência.

No âmbito da disciplina "Estágio e Relatório" realizei um Estágio Pedagógico na Escola Secundária José Falcão no ano letivo 2022/2023 e escrevi o presente relatório, onde se inclui a descrição de todo o trabalho realizado ao longo deste ano letivo e é feita uma reflexão acerca do mesmo.

No ensino, o Professor pode influenciar de forma negativa ou positiva um aluno. Dentro da sala de aula, o Professor está numa posição de destaque e por isso é um centro da atenção dos discentes. Assim, o docente deve ser um exemplo a vários níveis: no rigor que coloca em cada tarefa; no empenho que emprega na preparação de cada aula; na capacidade de assumir os seus erros ou na relação com as pessoas. Com isto em mente, mas sem deixar que isso me impedisse de arriscar ou experimentar algo diferente, comecei este Estágio Pedagógico.

Este meu ano de trabalho foi acompanhado pela Orientadora Cooperante, a Professora Natividade Correia e pela Orientadora Científica, a Professora Helena Albuquerque, junto das turmas 5 e 7 do 11.º ano. A prática de ensino supervisionada foi na turma 11.º5.

Este relatório está dividido em capítulos, iniciando-se com o Enquadramento do Estágio, no qual se inclui a caracterização das turmas que acompanhei. Segue-se uma descrição de toda a prática pedagógica e dos processos envolvidos. De seguida são apresentadas as Estruturas de Orientação Pedagógica e Educativa e a minha participação nessas estruturas. O relatório termina com as atividades desenvolvidas ao longo do ano letivo e uma avaliação geral do ano percorrido.

Capítulo 2

Enquadramento do Estágio Pedagógico

2.1 Escola Secundária José Falcão ESJF [5]

2.1.1 Contextualização Histórica

O estágio pedagógico decorreu na Escola Secundária José Falcão (ESJF), que se localiza no centro da cidade de Coimbra. Esta cidade do centro de Portugal é muito rica a nível histórico e cultural e, para além de ser capital de distrito é sede de um município de 18 freguesias. Culturalmente, a cidade tem uma oferta variada como a Casa-Museu Miguel Torga, o Exploratório Ciência Viva, a Casa Municipal da Cultura, o Teatro Académico Gil Vicente e, academicamente, conta com vários estabelecimentos de ensino público e privado do ensino básico, secundário e superior, com destaque para a Universidade de Coimbra. Perto da ESJF existem diversas paragens do Serviços Municipalizados de Transportes Urbanos de Coimbra, facilitando o acesso a alunos provenientes dos arredores da cidade.

A Escola tem uma longa história e ocupa um lugar de grande importância para a educação em Portugal, quer ao nível da formação inicial de professores, quer ao nível da sua oferta educativa ao longo do tempo. Inicialmente fundado por D. João III, em 1548, a Escola designava-se Colégio das Artes. Posteriormente, em 1836, por decreto de Passos Manuel, passa a ser o Liceu de Coimbra, um dos três únicos liceus de Portugal, a par de Lisboa e do Porto. Após a Implementação da República, o Liceu passa a designar-se Liceu José Falcão e é apenas masculino. Em 1978 este estabelecimento de ensino adota o seu nome atual: Escola Secundária José Falcão e entre 1931 e 1936 é contruído o atual edifício, na Avenida Dom Afonso Henriques.

De acordo com os dados obtidos através dos Serviços Administrativos da Escola, no ano letivo 2022/2023, este estabelecimento de ensino conta com cerca de 970 alunos, distribuídos da seguinte forma: aproximadamente 190 a frequentar o 3.º Ciclo do Ensino Básico; cerca de 680 a frequentar o Ensino Secundário Regular e cerca de 100 no Ensino Secundário Profissional.

2.1.2 Oferta Educativa

A Escola Secundária José Falcão (ESJF) no ano letivo 2022/2023, de acordo com o seu *site* oficial, apresentou uma vasta oferta educativa, que inclui diversas áreas, a saber:

- Ensino Básico - 3º ciclo

- Ensino Secundário:
  - Artes Visuais
  - Ciências e Tecnologias
  - Ciências Socioeconómicas
  - Línguas e Humanidades
- Cursos Profissionais:
  - Técnico de Turismo
  - Técnico de Multimédia
  - Técnico Auxiliar de Saúde
  - Técnico de Gestão e Programação de Sistemas Informáticos

2.2 Núcleo de Estágio

No presente ano letivo, o Núcleo de Estágio de Matemática (NEM) da Escola Secundária José Falcão foi formado pela Orientadora Cooperante, a Professora Natividade Correia e pela Professora Estagiária Carolina Teotónio.

À Orientadora Cooperante foram atribuídas duas turmas de 11.º ano de Matemática A e a Direção de Turma de uma delas. Uma das turmas é do curso de Ciências e Tecnologias – 11º5 - e a outra é do Curso de Ciências Socioeconómicas – 11º7. A Direção de Turma atribuída é a da turma 11º5. O Núcleo de Estágio decidiu que a Professora Estagiária iria lecionar algumas aulas e acompanhar todos os trabalhos da turma 11º5 e, assim, seguir de forma mais próxima o trabalho da Direção de Turma da Orientadora Cooperante. Daqui em diante, esta turma também será designada Turma principal.

2.3 Caracterização das turmas

Quando um docente vai lecionar uma turma pela primeira vez, a caracterização dessa turma inclui informações que podem ser importantes para um conhecimento geral dos alunos, procurando prever algumas barreiras decorrentes de dificuldades de aprendizagem já identificadas ou resultante dos contextos social e familiar dos discentes.

Segue-se a caracterização das duas turmas atribuídas à Orientadora Cooperante, sendo que a turma 5 do 11.º Ano é apresentada com mais profundidade, já que é a turma que a Professora Estagiária acompanhou com mais detalhe.

2.3.1 Turma 5 do 11.º Ano

No início do ano letivo 2022/2023, a turma era constituída por 24 alunos, 12 raparigas e 12 rapazes. Com uma idade média de 15,71 anos, as idades dos alunos da turma situavam-se entre os 15 e os 17 anos, com a distribuição entre rapazes e raparigas como indicado na figura 2.1.

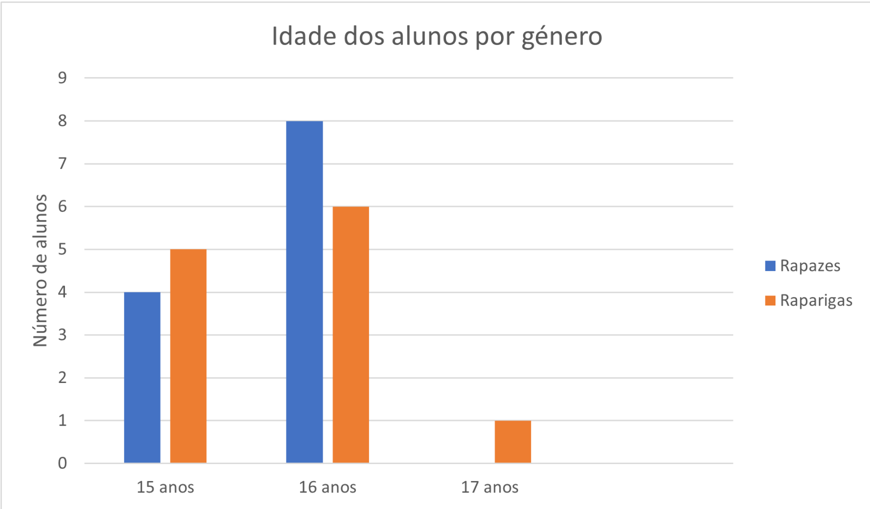


Fig. 2.1 Distribuição da idade dos alunos por género

Os alunos da turma têm todos nacionalidade portuguesa, à exceção de um discente que é natural de Angola. Para a maioria dos educandos, o papel de Encarregado de Educação é assumido pela mãe. De notar, ainda, que metade dos Encarregados de Educação da turma tem uma formação do ensino superior, o que antevê uma maior exigência destes para com os seus educandos, prevendo-se, assim, que os alunos possuem algum apoio no estudo em casa.

No início do ano letivo, os alunos foram questionados acerca da sua disciplina favorita e da que gostavam menos. Nos gráficos seguintes observamos as respostas de 20 dos 24 alunos da turma, nos quais se destaca Matemática como sendo a disciplina favorita de mais de metade dos alunos (Fig. 2.2) e, ainda, que existem apenas dois alunos que admitem que esta é das disciplinas que menos gosta (Fig. 2.3).

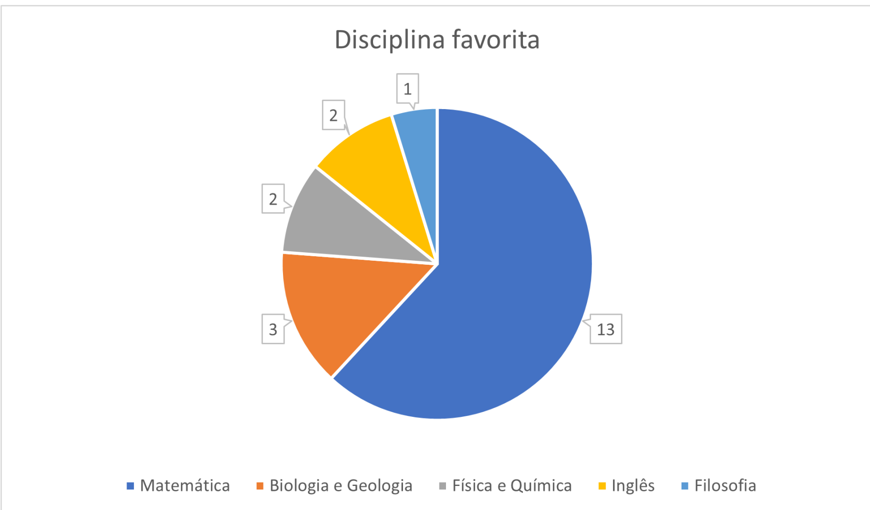


Fig. 2.2 Disciplinas favoritas dos alunos

Fig. 2.3 Disciplinas que os alunos menos gostam

Estas informações permitiram intuir, tal como se verificou ao longo do ano, que existe uma elevada percentagem de alunos da turma que tem gosto pela Matemática e que trabalha para alcançar os seus objetivos. Em relação ao aproveitamento, a turma no geral tem bons resultados, conseguidos com trabalho e empenho dentro e fora da aula. No entanto, comparando as classificações obtidas no último período deste ano e do ano transato, a turma desceu os seus resultados, passando de uma média de 16 para 13,87 valores. Os alunos sentiram uma maior exigência nos conteúdos e muitos estudantes não trabalharam o suficiente para suprimir as suas dificuldades. De destacar, também, que quatro discentes obtiveram negativa nos três períodos, mas, em sentido contrário, no fim deste ano, houve quatro alunos com classificações iguais a 20.

O Conselho de Turma, avaliou a turma com um nível de comportamento Bom em todos os períodos, já que não havia alunos que perturbassem as aulas ou impedissem a aprendizagens dos seus pares.

No final do 1º período, a turma sofreu pequenas alterações: uma aluna deixou a turma porque foi transferida de escola e uma aluna começou a participar nas aulas da turma, já que ao longo do período se encontrou em Itália ao abrigo do Programa Erasmus.

2.3.2 Turma 7 do 11.º Ano

A turma 11º7 foi constituída por vinte alunos, dez rapazes e dez raparigas. A média das idades dos alunos era igual a 16,05 anos, variando entre os 15 e os 17 anos. No início do ano letivo, cinco alunos usufruíam de Medidas Universais de Suporte à Aprendizagem e Inclusão, sendo que três acumulavam Medidas Seletivas.

Na turma existia um grupo de pessoas que não mostrava qualquer interesse na disciplina nem vontade de aprender, perturbando, por vezes a aula ou outros colegas. No entanto, havia também alunos trabalhadores que, apesar da exigência que sentiam, procuravam aprender e superar as suas dificuldades.

Capítulo 3

Prática Pedagógica

3.1 Planificações

Na atividade de docente, as planificações tornam-se uma ferramenta importante para organizar o trabalho do professor.

3.1.1 Planificação anual

No início do ano letivo, as professoras do grupo de matemática da ESJF elaboraram as planificações anuais de todas as disciplinas de matemática para os diferentes níveis de ensino com os conteúdos a serem lecionados. No anexo A encontra-se a planificação para o 11.º Ano de Matemática A que, embora a Professora Estagiária não tenha participado na sua elaboração, usou como um documento de consulta ao longo do ano. Esta planificação tem por base as Aprendizagens Essenciais ([3]) e o manual adotado pela Escola ([6]).

3.1.2 Planificação de Período

A par da planificação anual, as planificações por período foram elaboradas pelo grupo de matemática no início do ano letivo. No anexo B encontra-se a planificação do 3.º Período elaborada pelo Grupo disciplinar com os respetivos tempos letivos previstos para cada conteúdo. A Professora Estagiária, antes do início do 3.º Período elaborou uma planificação informal tendo em conta os conteúdos que faltavam lecionar, distribuindo pelas aulas restantes, que se encontra no anexo C.

3.2 Aulas

As aulas ocupam uma grande parte da atividade docente e é no início do Estágio Pedagógico que o Professor Estagiário volta a entrar numa sala de aula com um lugar diferente do que sempre esteve. Assim, foi no início deste ano letivo que a Professora Estagiária entrou na sala de aula com o foco nos alunos e nas suas aprendizagens e não no professor e no que ele teria para ensinar.

A Professora Estagiária esteve presente em todas as aulas da sua turma principal, e marcou presença em grande parte das aulas da outra turma atribuída à Orientadora Cooperante. Todas as aulas lecionadas pela autora deste relatório foram supervisionadas pela Orientadora Cooperante.

Ao longo das primeiras semanas do ano letivo, a Professora Estagiária observou as aulas lecionadas pela Orientadora Cooperante e foi aprendendo a tomar atenção a pormenores que podem escapar aos alunos, tais como: a organização da escrita no quadro; a linguagem adotada, procurando sempre o rigor científico; a importância de observar os alunos no que diz respeito à sua postura e empenho na sala, não esquecendo o fio condutor da aula e a clareza na apresentação dos conteúdos.

Nas aulas em que a Professora Estagiária era apenas observadora, para além de estar a aprender como dirigir as suas lições, auxiliava os alunos de forma mais individualizada no esclarecimento de dúvidas.

Na preparação das suas aulas, a Professora Estagiária serviu-se de diversas fontes: manuais escolares ([6]; [2]); plataformas digitais de ensino ([1], [9], [7]), entre outros, de acordo com a temática da aula.

3.2.1 Aulas lecionadas

No 11.º ano de Matemática A, o nível das turmas acompanhadas pela Professora Estagiária, os conteúdos iniciam-se com Trigonometria. As primeiras aulas lecionadas pela autora deste relatório foram acerca desta temática, nomeadamente a função seno. Para tal, a Professora Estagiária construiu um pequeno livro no GeoGebra com o objetivo de mostrar a representação gráfica desta função e algumas das suas propriedades. Na figura 3.1 encontramos parte desse material usado.

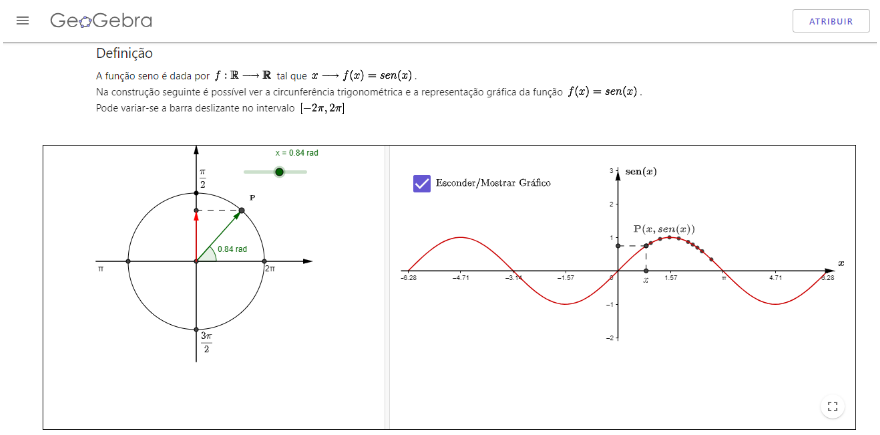


Fig. 3.1 Representação gráfica da função Seno

Ainda no 1.º Período, a Professora Estagiária iniciou a unidade “Geometria analítica no plano e no espaço”, com a revisão dos vetores e as suas propriedades, conteúdos lecionados no 3.º Ciclo do Ensino Básico. Seguiu-se a lecionação do Produto Escalar de vetores pela autora deste relatório, conteúdo importante para toda a restante geometria lecionada neste nível de ensino.

Seguindo sempre a ordem apresentada pelo manual adotado, para ajudar os alunos no acompanhamento da matéria, após a conclusão da temática “Geometria analítica no plano e no espaço” e a introdução do tema “Sucessões”, a Professora Estagiária lecionou o subtema “limites de sucessões”, abordando esse conteúdo na aula assistida no 2.º Período.

Aula assistida 2.º Período

Embora o conceito de série não seja objeto de estudo no Ensino Secundário, é possível estudar algumas somas infinitas com recurso à fórmula da soma de n termos de uma progressão geométrica e aos limites de sucessões.

Na preparação desta aula, a Professora Estagiária pesquisou o assunto, encontrando algumas séries convergentes que poderiam suscitar interesse nos alunos e cuja demonstração fosse possível realizar, analiticamente, com recurso às progressões geométricas, mas que também fosse possível usar elementos visuais na desconstrução da soma em estudo.

Assim, no trabalho preparatório, foi elaborado o plano de aula (anexo D) e uma apresentação em *PowerPoint* para guiar a aula (anexo E); foram escolhidos vídeos para ilustrar algumas séries ([8], [10]) e foram ainda selecionados alguns limites de sucessões que iriam ser resolvidos pelos alunos na segunda parte da aula.

Seguindo a apresentação preparada, no início da aula de 7 de março de 2023 a Professora Estagiária introduziu a notação de somatório, para que o símbolo que ia aparecer nos vídeos não fosse estranho aos alunos.

Posteriormente foram apresentados dois exercícios, que se traduzem matematicamente pela série:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$$

E foi visualizado um vídeo que evidenciava essa conclusão (Fig. 3.2).

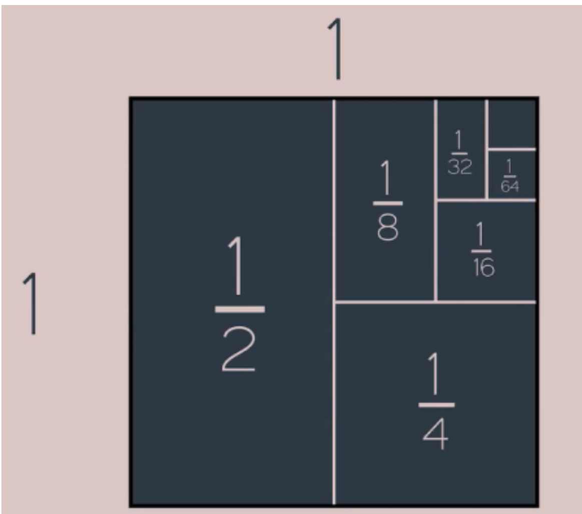


Fig. 3.2 Visualização da convergência da série para 1

De seguida foi apresentado, com base no primeiro exercício, outro exemplo que matematicamente se escreve na forma da série:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{4}$$

E foi exibido um vídeo que ilustrava essa conclusão (Fig. 3.3).

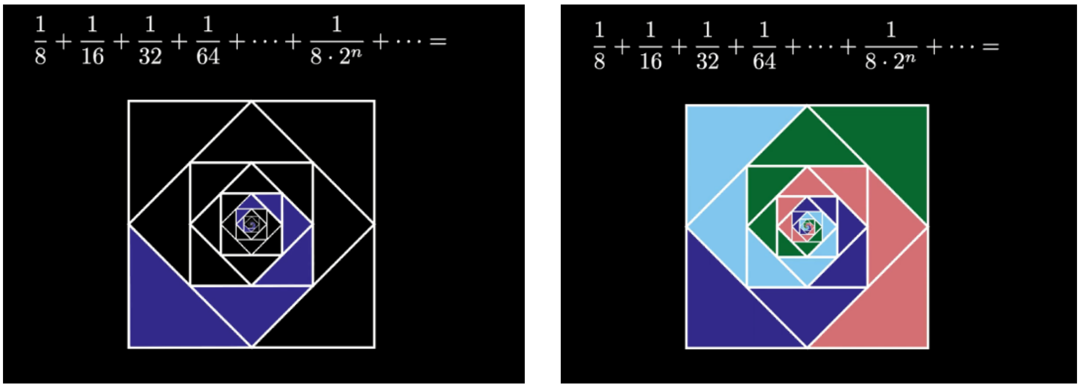


Fig. 3.3 Visualização da convergência da série para $\frac{1}{4}$

Foi mostrada outra soma infinita, na qual cada parcela é um termo de uma progressão geométrica, tal como aconteceu nas somas restantes. Visualmente a conclusão está na Figura 3.4 e a soma é traduzida matematicamente por:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}$$

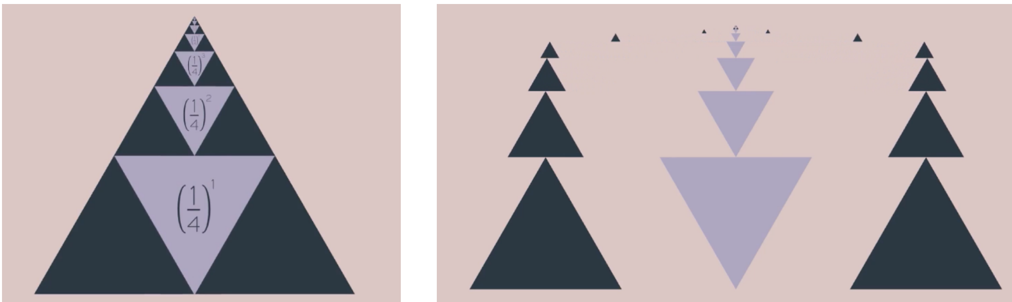


Fig. 3.4 Visualização da convergência da série para $\frac{1}{3}$

A última série apresentada pretendia responder à questão: Será 0,9999... igual a 1? Novamente usando as progressões geométricas, foi possível obter a resposta afirmativa a esta questão, tal como descrito em anexo.

Na segunda parte da aula, os alunos foram convidados, num ambiente de competição, a resolver limites de sucessões. Assim, os alunos foram divididos em três grupos, e a cada grupo foi distribuída uma lista de limites de sucessões (anexo F), um miniquadro com caneta e, ainda, um frasco.

De forma rotativa, um grupo escolhia um dos 12 limites que tinham na folha recebida, registava no miniquadro e os outros grupos tinham de resolver e escrever a sua resposta no seu miniquadro. Depois, o grupo que escrevia o limite dava a solução. Se este grupo desse a resposta certa tinha um ponto e, dos outros dois grupos, quem respondesse corretamente mais rápido somava também outro ponto. Os pontos eram contabilizados sob a forma de rebuçados que iam sendo incluídos no frasco. Este procedimento foi realizado com a alternância entre os vários grupos na segunda parte da aula, sob orientação da Professora Estagiária.

Após esta aula, foi lecionado o tema "Funções", que incluiu limites e continuidade de funções, assíntotas e derivadas. Este último subtema foi introduzido pela Professora Estagiária.

O último assunto a abordar no 11.º ano de Matemática A é "Estatística". Assim, como aula inicial desta temática, que coincidiu com a aula assistida do 3.º Período, a Professora Estagiária lecionou sobre amostras enviesadas, procurando mostrar a importância da análise estatística quando são retiradas conclusões. Ao fazer um estudo estatístico, precisamos de estar cientes que os resultados são corretos quando temos um bom ponto de partida, assegurado por uma amostra realmente representativa; caso contrário podem ser tiradas conclusões que estão longe de refletir a realidade da população em estudo.

Aula assistida 3.º Período

Esta lição teve como tema "Amostras enviesadas". Como trabalho prévio, foi realizado o plano de aula (anexo G) e foram construídos um *puzzle* de síntese do tema da aula e um jogo didático.

Plano de aula

O plano de aula foi construído após a decisão do tema. Esta aula tinha como objetivo mostrar a estatística como ferramanta poderosa para tirarmos conclusões, mas que tem de ser aliada a um forte espírito crítico, para que as inferências sejam corretas.

Apresentação *Power Point*

A autora deste relatório elaborou uma apresentação em *Power Point*, com o objetivo de guiar a aula (anexo H).

Puzzle

De forma a esquematizar a importância da Estatística na análise de populações, a Professora Estagiária elaborou um mapa mental acerca da Inferência Estatística (Fig. 3.5), que depois imprimiu e plastificou. Posteriormente, recortou em peças de puzzle e dividiu o conjunto de peças em quatro de forma a dividir a imagem e colocou cada conjunto numa pequena caixa.

Jogo didático

De forma a tornar a aula interativa, foi criado um jogo. Este jogo era constituído por um caixote de cartão que estava dividida em 9 secções. Externamente, é visível esta divisão com um valor correspondente a cada parte e uma seccção inferior aberta. Internamente, a caixa é dividida com cartão, e em cada uma das partes é possível colocar uma pequena caixa. O sistema interno permite que quando é empurrada a pequena caixa do lado de fora, ela caia por trás e seja possível agarrar na parte inferior caixa (Fig. 3.6) Assim, os alunos, após descobrirem qual o valor correto, que corresponde ao seu código, terão de furar a seccção com esse número e recolher a pequena caixa correspondente.

A aula seguiu a apresentação preparada com exemplos de estudos estatísticos onde as amostras escolhidas podem ter enviesamentos, que por vezes não são tidos em consideração e têm influência na interpretação dos resultados obtidos. Após alguma exposição por parte da Professora Estagiária foi distribuída a atividade presente no anexo I.

Na aula, tal como está descrito em anexo, foi, ainda, apresentada uma abordagem histórica, apelando a uma atitude crítica dos alunos.

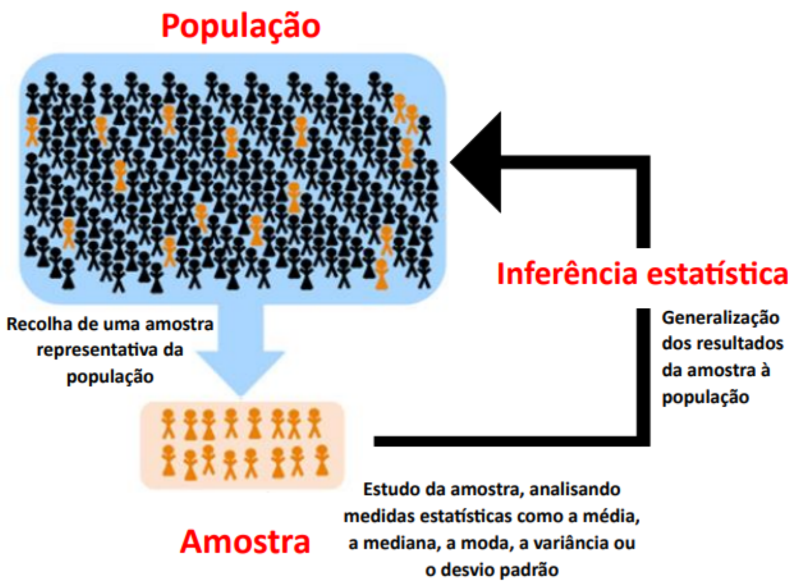


Fig. 3.5 Esquema: Inferência Estatística

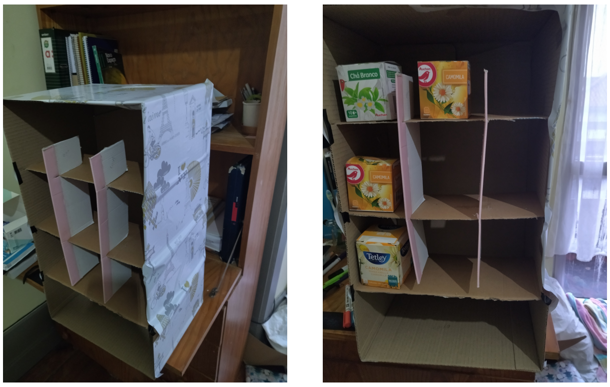
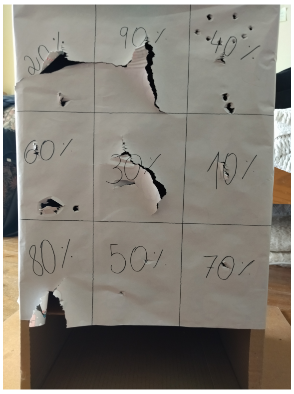


Fig. 3.6 Construção do Jogo Didático

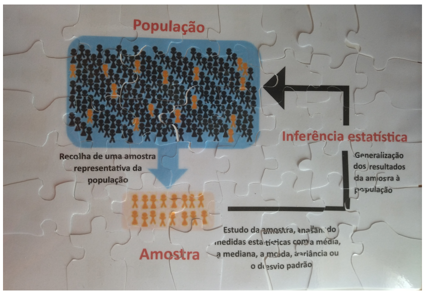
Na segunda parte da aula, os alunos foram divididos em quatro grupos e receberam uma folha com perguntas de escolha múltipla acerca de conteúdos de estatística (anexo J) que originava um código. Esse código era um número que correspondia à "casa" do jogo que deviam furar de modo a obter as peças do puzzle. Na figura 3.7a observamos o resultado deste momento da aula, no qual os alunos recolhiam a pequena caixa correspondente ao seu grupo.

Depois de todos os grupos obterem corretamente o código e recolherem a caixa com as peças correspondentes à sua parte do puzzle, montaram-nas. Por fim, cada grupo colou as suas peças no suporte para o efeito, originando a imagem pretendida (Fig. 3.7b).

Para as aulas finais do ano, subordinadas ao tema "Estatística", devido ao pouco tempo que restava para lecionar toda a matéria, a Professora Estagiária elaborou várias fichas que condensavam



(a) Jogo didático após encontrado o código



(b) *Puzzle* montado

Fig. 3.7 Resultados das atividades propostas

toda a informação importante deste conteúdo, sendo um guia para os alunos aprenderem acerca deste tópico.

Em anexo podemos encontrar as seguintes fichas disponibilizadas aos alunos:

1. ficha formativa com a explicação da matéria (anexo K);
2. ficha de trabalho que inclui exercícios de todos os tópicos (anexo L);
3. resolução manual dessa mesma ficha (anexo M);
4. ficha formativa acerca da utilização da máquina gráfica no estudo estatístico, que foi baseada nos materiais disponibilizados pela editora *Santilhana* (anexo N).

3.3 Apoios – Reforço das Aprendizagens

Durante todo o ano, a Escola ofereceu aos seus alunos um horário para Reforço das Aprendizagens, que decorria, maioritariamente, às quartas-feiras da parte da tarde. Havia alunos que estavam indicados pelos Conselhos de Turma para frequentarem os citados apoios, no entanto, qualquer aluno podia beneficiar desses tempos onde estava destacado um professor da disciplina para apoiar esses alunos.

A professora Estagiária, desde o início do ano letivo, acompanhou a Professora Isabel Costa e esteve presente nesses momentos de Reforço de Aprendizagem com o objetivo de apoiar de forma mais personalizada alguns alunos das turmas 11.º5 e 11.º7. Nesses apoios, que não tiveram muita adesão por parte dos alunos ao longo do ano, a Professora Estagiária optou por esclarecer as dúvidas colocadas e ajudou a orientar o estudo destes, nomeadamente na seleção de exercícios que mais se adequavam às dificuldades reveladas. Apesar da pouca participação por parte dos discentes, a Professora Estagiária considerou positivo e eficaz este apoio facultado a quem demonstrou interesse.

Ocasionalmente, a Professora Estagiária também se deslocou à sala dirigida pela Professora Graça Antunes e, assim, ajudou alguns alunos do 3º Ciclo do Ensino Básico, sobretudo do 8.º ano de escolaridade.

3.4 Avaliação

A avaliação dos alunos é uma parte importante no trabalho de um docente, procurando que estes sejam avaliados de acordo com as suas capacidades, o seu empenho, o seu trabalho e os seus conhecimentos, indo ao encontro de uma avaliação justa, que não é tarefa fácil, já que se está a avaliar pessoas.

3.4.1 Projeto M.A.I.A. e avaliação por domínios

O Projeto de M.A.I.A. (Monitorização, Acompanhamento e Investigação em Avaliação Pedagógica) tem como objetivo levar às escolas outra forma de avaliar os alunos que pretende ser mais justa e transparente. A ESJF, no ano letivo 2022/2023, estava a aplicar este projeto pelo segundo ano consecutivo.

Neste modelo, a avaliação deixa de ser por elemento de avaliação, mas sim por domínio. Na disciplina de Matemática A, existiam quatro domínios, com as seguintes descrições:

- D1 - Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental
- D2 - Raciocínio e Resolução de problemas
- D3 - Investigação e Comunicação
- D4 - Respeito, autonomia, Cooperação, Espírito Crítico e Autoavaliação

Os pesos dos domínios na classificação final eram, respetivamente, 40%, 40%, 10% e 10%. Os domínios 1, 2 e 3 eram avaliados em todos os momentos formais de avaliação e o domínio 4 resultava da observação direta em sala de aula do trabalho realizado pelo aluno, bem como o trabalho autónomo fora da aula.

3.4.2 Momentos formais de avaliação

Na sequência do Projeto M.A.I.A. implementado na escola, foram diversificados os momentos de avaliação. A seguir são descritos os que foram aplicados à turma 11.º5, turma de iniciação à prática docente da autora deste relatório.

Prova global de avaliação

Durante o ano foram realizadas quatro provas globais de avaliação. Cada uma das provas pretendia avaliar os conhecimentos lecionados desde o início do ano e tinha a duração de dois tempos letivos, ou seja, 100 minutos. Para estes momentos era necessária a elaboração de uma matriz que era disponibilizada aos alunos. Nos anexo O, P e Q encontram-se, respetivamente, a matriz, o enunciado e os critérios de correções da primeira Prova Global, que foram elaborados pela Professora Estagiária.

Cada uma das provas era cotada para 200 pontos. De modo a incluir os três domínios na proporção da avaliação final, ao domínio 1 eram atribuídos 88 pontos, ao domínio 2 também eram atribuídos 88 pontos e eram distribuídos 24 pontos ao domínio 3. Esta distribuição mantinha a proporção dos 3 domínios em relação à avaliação final.

A Professora Estagiária colaborou ativamente com a Orientadora Cooperante na elaboração de todos os enunciados das provas, das respetivas matrizes, assim como na distribuição das cotações por domínios.

Prova parcelar de avaliação

Estas provas diferem das provas globais no conteúdo, já que, regra geral, incidem apenas num tema. Diferem ainda na duração, já que cada prova dura até 50 minutos e é cotada para 100 pontos com uma distribuição de 44, 44 e 12 pontos pelos domínios 1, 2 e 3, respetivamente. No anexo R encontra-se o enunciado da primeira prova parcelar.

Trabalho de grupo em sala de aula

Ao longo do ano foram realizados dois trabalhos de grupo em sala de aula.

3.4.3 Avaliação na disciplina de Matemática A

De modo a cumprir aquilo que foi decidido em reunião de Grupo Disciplinar no que diz respeito à avaliação por domínios, a Professora Estagiária elaborou algumas grelhas no *Excel* de modo a organizar as classificações dos alunos: uma tabela para cada momento formal de avaliação (Fig. 3.8) e uma tabela para o fim do período, apresentando a evolução do discente (Fig. 3.9).

Também fez parte da avaliação as Fichas Síntese, que consistiam em fichas enviadas aos Diretores de turma com as percentagens atribuídas a cada domínio e em cada momento de avaliação, como apresentado na figura 3.10.

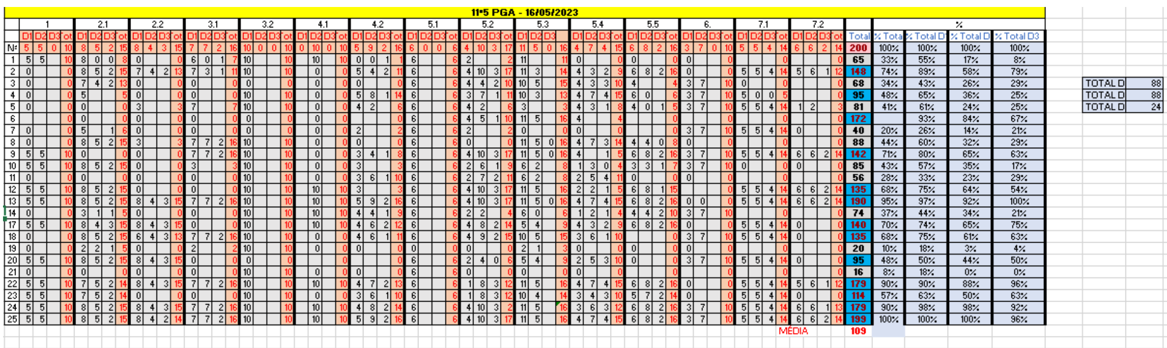


Fig. 3.8 Grelha de avaliação de uma Prova Global

3.4.4 Autoavaliação

Na educação, é importante fomentar nos alunos uma avaliação do seu trabalho para, por um lado o professor perceber que visão tem o aluno do seu próprio trabalho, e, por outro, para que o aluno faça uma reflexão sobre as suas capacidades.

Assim, o Grupo de Matemática construiu uma ficha de autoavaliação presente no anexo S, para ajudar os alunos a refletirem sobre o seu desempenho em cada período.

AVALIAÇÃO 11º5 2022/2023																									
	1º PERÍODO								2ºPERÍODO								3ºPERÍODO								
Nº	MedD1	MedD2	MedD3	D4	MedPond	A.A.	10º	1ºPer	MedD1	MedD2	MedD3	D4	MedPond	WCID 5%	A.A.	2ºPer	MedD1	MedD2	MedD3	D4	MedPond	W EST 5%	somaW	A.A.	3ºPer
1	25%	12%	18%	70%	4,7	**5**	14	**7**	32%	21%	18%	60%	5,8	0,33	**6**	**7**	38%	19%	16%	60%	6,11	0,85	6,96	**8**	**8**
2	93%	76%	80%	88%	16,9	**17**	18	**17**	88%	76%	76%	100%	16,7	0,80	**16**	**17**	87%	73%	77%	100%	16,34	1,00	17,34	**16**	**17**
3	44%	30%	45%	83%	8,5	**8**	12	**9**	38%	26%	34%	80%	7,3	0,47	**6**	**8**	39%	26%	35%	60%	7,13	0,75	7,88	**7**	**8**
4	57%	53%	63%	90%	11,8	**12**	14	**13**	60%	52%	56%	80%	11,7	0,40	**12**	**12**	61%	50%	51%	80%	11,43	0,75	12,18		**13**
5	0%	0%	25%	43%	1,4		14		47%	34%	53%	100%	9,5	1,00	**9**	**11**	50%	36%	48%	100%	9,88	1,00	10,88	**10**	**11**
6	92%	83%	83%	83%	17,3	**18**	18	**18**	86%	78%	78%	80%	16,2	0,47	**16**	**17**	85%	78%	74%	80%	16,09	0,75	16,84	**16**	**17**
7	67%	46%	49%	83%	11,7	**11**	15	**12**	59%	43%	42%	80%	10,6	0,80	**10**	**11**	53%	38%	38%	80%	9,70	1,00	10,70	**9**	**11**
8	83%	72%	79%	90%	15,8	**16**	17	**17**	83%	77%	83%	100%	16,5	1,00	**17**	**18**	79%	68%	71%	100%	15,14	0,90	16,04	**16**	**17**
9	73%	68%	76%	93%	14,6	**16**	18	**17**	76%	71%	78%	100%	15,3	1,00	**16**	**17**	77%	71%	73%	100%	15,34	0,90	16,24	**17**	**17**
10	59%	47%	44%	88%	11,1	**13**	15	**12**	58%	47%	43%	80%	10,9	0,80	**12**	**12**	62%	48%	43%	80%	11,24	1,00	12,24	**12**	**12**
11	55%	33%	48%	83%	9,6	**9**	12	**10**	57%	37%	45%	60%	9,6	0,00	**10**	**10**	54%	34%	41%	80%	9,38	0,90	10,28	**8**	**10**
12	77%	62%	51%	90%	13,9	**14**	19	**15**	82%	66%	54%	80%	14,5	0,60	**15**	**15**	78%	65%	58%	80%	14,18	0,85	15,03	**15**	**15**
13	100%	99%	96%	98%	19,8	**19**	20	**20**	96%	97%	94%	100%	19,4	1,00	**19**	**20**	97%	97%	96%	100%	19,42	1,00	20,42	**20**	**20**
14	31%	16%	26%	85%	6,0	**7**	9	**7**	30%	17%	21%	80%	5,8	0,33	**7**	**8**	31%	20%	20%	80%	6,08	0,85	6,93	**8**	**8**
17	81%	57%	80%	93%	14,5	**14**	17	**15**	78%	63%	76%	80%	14,5	0,60	**15**	**15**	80%	68%	79%	80%	14,99	0,85	15,84	**15**	**16**
18	67%	51%	66%	90%	12,5	**12**	16	**13**	67%	55%	58%	80%	12,5	0,60	**13**	**13**	72%	57%	59%	90%	13,26	0,85	14,11	**13**	**14**
19	10%	5%	25%	90%	3,5	**3**	8	**7**	19%	8%	21%	80%	4,2	0,40	**8 OU 9**	**7**	19%	9%	20%	80%	4,19	0,75	4,94	**8**	**6**
20	73%	61%	68%	88%	13,8	**14**	16	**14**	64%	55%	56%	80%	12,2	0,60	**13**	**13**	65%	55%	54%	80%	12,31	0,85	13,16	**13**	**13**
21	63%	51%	59%	88%	12,0	**12**	13	**13**	49%	41%	42%	95%	10,0	0,80	**8**	**11**	38%	30%	32%	95%	7,91	0,75	8,66	**9**	**10**
22	89%	86%	83%	95%	17,6	**18**	19	**18**	90%	84%	85%	100%	17,7	1,00	**18**	**19**	92%	87%	87%	100%	18,03	1,00	19,03	**19**	**20**
23	72%	58%	35%	95%	13,0	**13**	18	**16**	77%	68%	46%	100%	14,4	1,00	**16**	**16**	75%	65%	51%	100%	14,17	1,00	15,17	**14**	**16**
24	98%	98%	98%	98%	19,5	**19**	19	**20**	98%	97%	95%	100%	19,5	1,00	**19**	**20**	98%	95%	94%	100%	19,29	1,00	20,29	**20**	**20**
25	95%	88%	85%	98%	18,3	**18**	19	**19**	92%	85%	86%	100%	17,9	0,80	**18**	**19**	94%	87%	87%	100%	18,26	1,00	19,26	**19**	**20**
							16	14,05							Média	13,74								**Média**	13,87
															desvio	4,13								**desvio**	4,26

Fig. 3.9 Grelha de avaliação de fim de Período

FICHA SINTESE DE INFORMAÇÃO PERIÓDICA DE AVALIAÇÃO

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

ANO
TURMA
DISCIPLINA

Professor	**Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental**						**Raciocínio e Resolução de Problemas**						**Investigação e Comunicação**						**Desenvolvimento Pessoal e Interpessoal**
	40%						**40%**						**10%**						**10% por observação direta**
	D1· Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental						D2. Raciocínio e Resolução de problemas						D3. Investigação e Comunicação						Respeito, autonomia, Cooperação, Espírito Crítico e Autoavaliação
Data	11/out	26/out	22/nov	07/dez	24/jan	**28/fev**	11/out	26/out	22/nov	07/dez	24/jan	28/fev	11/out	26/out	22/nov	07/dez	24/jan	28/fev	
1	18%	91%	8%	48%	36%	48%	9%	0%	7%	20%	49%	20%	0%	0%	0%	0%	17%	21%	Bom -
2	100%	100%	95%	84%	75%	86%	81%	91%	98%	50%	66%	86%	71%	0%	83%	75%	58%	79%	Muito Bom
3	50%	9%	26%	55%	16%	41%	31%	82%	19%	41%	11%	26%	0%	0%	21%	58%	0%	25%	Bom
4	80%	91%	32%	59%	72%	57%	74%	0%	25%	59%	57%	44%	67%	0%	33%	50%	50%	38%	Bom
5	0%	0%	0%	0%	30%	64%	0%	0%	0%	0%	24%	43%	0%	0%	0%	0%	21%	38%	Muito Bom
6	100%	0%	76%	100%	78%	74%	92%	0%	68%	89%	67%	72%	92%	0%	79%	92%	63%	71%	Muito Bom
7	76%	91%	47%	80%	42%	49%	61%	55%	27%	50%	34%	44%	54%	0%	38%	33%	13%	42%	Bom+
8	85%	100%	63%	100%	86%	83%	83%	100%	57%	77%	88%	81%	71%	100%	63%	83%	88%	92%	Muito Bom
9	80%	91%	48%	91%	82%	80%	75%	100%	39%	91%	77%	74%	67%	100%	42%	100%	83%	83%	Muito Bom
10	98%	18%	41%	39%	52%	61%	88%	91%	35%	18%	58%	35%	33%	0%	29%	25%	38%	42%	Bom
11	39%	91%	53%	73%	70%	50%	7%	0%	35%	57%	53%	34%	33%	0%	46%	42%	38%	42%	Bom -
12	77%	77%	69%	84%	77%	100%	70%	86%	44%	70%	74%	73%	33%	50%	42%	58%	46%	75%	Bom+
13	100%	100%	100%	100%	97%	85%	100%	100%	100%	98%	89%	100%	100%	100%	92%	92%	83%	100%	Muito Bom
14	60%	0%	33%	0%	31%	27%	33%	0%	15%	0%	22%	16%	13%	0%	0%	0%	13%	8%	Bom+
17	67%	9%	84%	91%	75%	74%	53%	45%	65%	52%	82%	65%	71%	0%	83%	67%	67%	71%	Bom +
18	64%	100%	61%	75%	73%	64%	48%	59%	45%	59%	74%	47%	54%	0%	50%	58%	33%	54%	Bom +
19	11%	0%	3%	16%	28%	36%	0%	0%	0%	14%	19%	6%	0%	0%	0%	8%	17%	13%	Bom+
20	77%	32%	45%	95%	64%	39%	58%	64%	36%	89%	56%	34%	58%	0%	29%	83%	38%	29%	Bom +
21	64%	91%	58%	66%	32%	26%	57%	0%	49%	48%	40%	14%	42%	0%	38%	58%	8%	8%	Muito Bom
22	93%	32%	84%	91%	91%	92%	93%	59%	75%	89%	80%	85%	63%	0%	79%	92%	83%	92%	Muito Bom
23	64%	91%	67%	86%	83%	83%	60%	64%	53%	59%	85%	80%	33%	0%	42%	67%	63%	71%	Muito Bom
24	98%	100%	100%	95%	100%	98%	98%	100%	100%	95%	99%	91%	96%	100%	96%	100%	100%	79%	Muito Bom
25	100%	77%	85%	100%	95%	80%	100%	82%	83%	82%	91%	72%	92%	0%	83%	67%	96%	79%	Muito Bom

Fig. 3.10 Ficha Síntese de abril de 2023

3.5 Ações de formação

Ao longo deste ano letivo, a Professora Estagiária participou em momentos de formação de professores, já que a formação contínua é importante ao longo da carreira de docente. A autora esteve presente nas seguintes acções:

- Ações de Sensibilização do Programa Nacional +Contigo
- Ação de formação Para a Melhoria das Práticas de Avaliação Pedagógica (Cfae Minerva)

Capítulo 4

Participação nas Estruturas de Orientação Pedagógica e Educativa

De acordo com o Decreto-Lei 75/2008 [4], a escola é constituída por órgãos de direção, administração e gestão, sendo os de maior relevo o Conselho Geral, a Direção e o Conselho Pedagógico.

O Conselho Geral é constituído por membros de toda a comunidade educativa, fazendo-se presente também a comunidade local tendo como objetivo desenvolver linhas que orientem a atividade da Escola. Assim, na Escola Secundária José Falcão (ESJF), este órgão é formado por representantes do Pessoal Docente, dos Alunos, do Pessoal Não Docente, dos Pais e Encarregados de Educação, do Município e da Comunidade Local.

A Direção inclui o cargo de diretor, ocupado na ESJF pela Dr.ª Isabel Achando Amoroso Lopes, que é auxiliada por um subdiretor, dois Adjuntos e por uma Assessora. Este órgão é, ainda, responsável pela administração e gestão da Escola, nas vertentes administrativa, financeira, patrimonial, cultural e pedagógica.

O Conselho Pedagógico assume, também, um papel importante nas decisões da Escola. Este é "o órgão de coordenação e supervisão pedagógica e orientação educativa da escola, nomeadamente nos domínios pedagógico-didático, da orientação e acompanhamento dos alunos e da formação inicial e contínua do pessoal docente e não docente" (Decreto-Lei 75/2008, Seccção II, Capítulo III, Secção I, Subsecção III, artigo 31º).

A Professora Estagiária participou nas Estruturas de Orientação Pedagógica e Educativa da ESJF através do acompanhamento dos trabalhos de Direção de Turma e da participação nas reuniões para as quais foi convocada.

4.1 Direção de Turma

O papel de Diretor de Turma é muito importante para estabelecer um ambiente favorável às aprendizagens dos alunos, procurando que haja sempre uma boa relação entre os Docentes do Conselho de Turma, que os Encarregados de Educação estejam a par e colaborem na educação dos seus educandos e que exista harmonia entre a Turma e cada docente.

Dado que a Orientadora Cooperante tinha na sua distribuição de serviço uma Direção de Turma, que correspondia à turma principal da Professora Estagiária, esta acompanhou ao longo do ano todo o trabalho que esta função exige. Assim, ao longo do ano letivo, a Professora Estagiária teve oportunidade de:

- aceder à plataforma *Inovar*, permitindo escrever sumários, justificar as faltas dos alunos ou recolher dados para elaborar a caracterização da turma;
- estar presente nas reuniões entre a Diretora de Turma e os Encarregados de Educação;
- recolher documentos dos alunos, assinados pelos seus Encarregados de Educação;
- apoiar a Diretora de Turma na mediação de pequenos conflitos existentes na Turma;
- ajudar na preparação de cada Conselho de Turma (CT) realizado, nomeadamente:
  - na redação da ata;
  - na preparação de documentos necessários para a reunião, como os planos de Medidas Universais de Suporte à Aprendizagem e Inclusão; os planos de Mentorias feitos na turma; os alunos a constar no Quadro de mérito.
- enviar as classificações de cada Período aos Encarregado de Educação após o CT de avaliação de fim de Período;
- auxiliar na organização do dossiê digital da Turma, ferramenta presente na ESJF que condensa a informação principal da Turma.

4.2 Reuniões

Desde o início do ano letivo, foi possível à Professora Estagiária estar presente nas reuniões para as quais a Orientadora Cooperante foi convocada e assim, estar ciente do trabalho de um professor.

4.2.1 Reunião Geral

No início do ano letivo, antes do começo das atividades letivas, a ESJF convocou todos os docentes da Escola para uma reunião de apresentação, presidida pela Diretora, na qual foram dadas as boas-vindas a todos os professores e foram apresentadas palavras-chave que a direção pretendia que fossem como que um lema da Escola: Confiança, Comunicação e Colaboração.

O Núcleo de Estágio foi apresentado aos docentes, permitindo existir, desde o início uma boa relação entre as duas partes.

4.2.2 Departamento de Matemática e Ciências Experimentais

Os docentes da Escola integram, de acordo com as disciplinas que lecionam, o seu respetivo Departamento Curricular. O Departamento de Matemática e Ciências Experimentais é formado por Professores das áreas de Matemática, Física e Química, Biologia e Geologia e Informática.

Estas reuniões foram conduzidas pela coordenadora de Departamento, Dr.ª Céu Correia e tiveram como principais objetivos: transmitir as informações decorrentes das reuniões do Conselho Pedagógico; aprovar documentos a aplicar em todas as disciplinas do grupo, como as Fichas

Síntese; discutir e aprovar atividades para os alunos no âmbito das disciplinas do Grupo disciplinar em causa. No início de cada Período, eram analisados os resultados obtidos pelos alunos no Período anterior.

4.2.3 Grupo Disciplinar

As reuniões de Grupo disciplinar têm como membros todos os docentes de Matemática da Escola. Esta foi das primeiras reuniões que o Núcleo de Estágio participou e foi muito bem recebido. A Professora Estagiária não tinha voto, mas foi sempre possível expressar a sua opinião nos assuntos tratados.

Estas reuniões foram presididas pela coordenadora do grupo, a Professora Helena Fernandes. Tinham a mesma Ordem de Trabalhos da reunião de Departamento que se seguia e, assim, era analisada com mais pormenor a área de Matemática, nomeadamente os critérios de avaliação, as dificuldades na sua implementação ou as propostas de atividades.

4.2.4 Articulação Curricular

Sempre que possível, na ESJF, existem reuniões de Articulação Curricular, nas quais as docentes que lecionam a mesma disciplina e o mesmo ano de escolaridade se juntam e discutem sobre a lecionação dos conteúdos. Como a Orientadora Cooperante lecionava apenas 11.º ano de Matemática A, esta articulação ocorria com as docentes que lecionavam esta disciplina no mesmo nível. As reuniões permitiam comparar métodos de lecionação, partilhar exercícios a constar em momentos de avaliação e partilhar experiências de cada turma, nas suas dificuldades e sucessos.

Estas reuniões revelaram-se importantes para a Professora Estagiária, que procurou intervir e dar a sua opinião sempre que considerava oportuno e, por outro lado, entender realidades de outras turmas assim como métodos de ensino de outros professores.

4.2.5 Diretores de Turma

As reuniões de Diretores de Turma (DT) eram orientadas pela coordenadora de Diretores de Turma, a Professora Maria João Dinis e era constituída por todos os DT´s da Escola. Estas reuniões tinham como objetivo uniformizar os processos burocráticos para todas as turmas. Estes momentos, que eram anteriores às reuniões de Conselho de Turma, permitiam dar a conhecer aos docentes presentes como conduzir as suas reuniões de Conselho de Turma, quais os documentos necessários e esclarecer dúvidas para situações mais peculiares.

Estas reuniões permitiam, também, que a Coordenadora dos Diretores de Turma levasse ao Conselho Pedagógico algumas dúvidas levantadas pelos Diretores de Turma.

A Professora Estagiária esteve presente em todas as reuniões, na sequência do acompanhamento da Direção de Turma da sua turma principal.

4.2.6 Conselho de Turma

As reuniões de Conselho de Turma são constituídas por todos os docentes que lecionam a referida turma. De acordo com o que foi decido no início do ano pelo NEM, a Professora Estagiária esteve presente em todos os Conselhos de Turma das duas turmas atribuídas à sua Orientadora Cooperante.

Estas reuniões são presididas pela Diretora de Turma e secretariadas por um docente da turma. Têm como objetivos: acompanhar as aprendizagens da Turma; adotar estratégias para os alunos com dificuldades e avaliar a eficácia das medidas tomadas. Na turma 11.º7, o CT é ainda constituído pela professora de Educação Especial, porque esta turma tem três alunas com Medidas Seletivas de Apoio à Aprendizagem e Inclusão.

Reunião Intercalar do 1.ºPeríodo

A reunião intercalar do 1.º Período foi o primeiro momento em que os docentes da turma se juntaram. Nas reuniões intercalares está prevista a presença de representantes dos Encarregados de Educação e dos alunos da turma na primeira parte da reunião. Nesta primeira parte foi avaliado o comportamento da turma bem como o seu aproveitamento de forma geral. Nas duas turmas foi possível verificar uma colaboração entre todas as partes tendo sempre em vista o sucesso e a aprendizagem dos alunos.

Na segunda parte da reunião, foram discutidas estratégias a adotar para alunos com mais dificuldade de aprendizagem e que suscitavam nos docentes mais preocupação, quer por motivos de comportamento e de postura na sala de aula, quer por dificuldades de aprendizagem identificadas.

Reuniões de Avaliação Final

Estas reuniões decorrem no fim de cada Período após a conclusão das aulas. Nelas os docentes propõem as classificações das suas respetivas disciplinas, que são ratificadas pelo Conselho de Turma. São, ainda, avaliadas as estratégias de apoio para os alunos que revelaram dificuldades de aprendizagem ou que obtiveram classificações negativas. São discutidos também comportamentos de alunos que inspirem maior preocupação por parte dos docentes, com influência no seu desempenho escolar.

Nestas reuniões também se procede à discussão das atividades a desenvolver na turma no âmbito da Cidadania e Desenvolvimento. Nas reuniões de avaliação dos 1.º e 2.º Períodos também se procedia à marcação dos momentos formais de avaliação da turma no período seguinte.

4.2.7 Núcleo de Estágio de Matemática

Nos oito tempos letivos semanais previstos no horário da Orientadora Cooperante, o NEM reunia com o intuito de avaliar o trabalho realizado e planear o que se seguia.

Estas reuniões tinham como foco as aulas de cada turma, visando planeá-las e avaliar as estratégias a adotar. Outro aspeto principal destas reuniões era a avaliação dos alunos, permitindo realizar fichas de trabalho, construir provas de avaliação e os seus respetivos critérios, corrigir as citadas provas e posteriormente examinar com atenção as dificuldades reveladas por alguns alunos.

Nestes momentos a Professora Estagiária analisava com a Orientadora Cooperante as aulas a lecionar. Antes de cada aula, eram trocadas impressões sobre a forma como se previa conduzir a aula, a estratégia pensada para abordar os conteúdos e os materiais a apresentar aos alunos. Depois de cada aula era feita uma autoavaliação pela Professora Estagiária e eram apresentados, pela Orientadora Cooperante os pontos fortes, os pontos fracos, aspetos a melhorar e estratégias de ultrapassar os erros cometidos.

Capítulo 5

Atividades na ESJF

Ao longo deste ano letivo, para além da componente letiva, a professora estagiária esteve presente em algumas atividades da ESJF, tendo sido a dinamizadora de algumas delas.

5.1 Atividades dinamizadas pela Professora Estagiária

Cartaz informativo

Na sequência do Projeto Educacional realizado pela Professora Estagiária, esta elaborou um cartaz que foi afixado na ESJF. Neste cartaz constava uma explicação acerca da formação de códigos de barras, incluia, sucintamente, a regra que permite encontrar o algarismo de controlo de um código de barras e apresentava um código QR que permitia abrir no telemóvel uma pequena aplicação em *Scratch*, permitindo testar a segurança dos códigos de barras que encontramos em praticamente todos os produtos (Fig. 5.1).

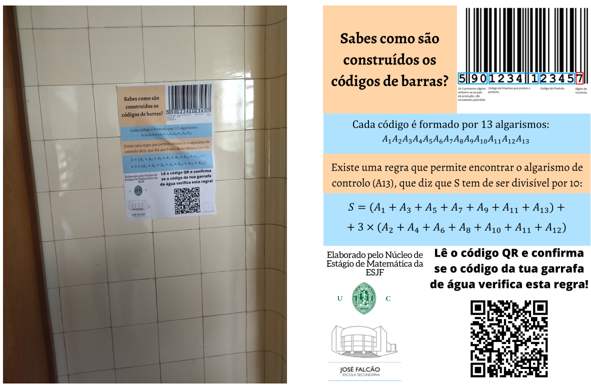


Fig. 5.1 Cartaz informativo afixado na ESJF

Manual de apoio ao Python para as docentes de Matemática da ESJF

No âmbito da teoria dos números inerente aos códigos de barras, a Professora Estagiária decidiu desenvolver algo direcionado às docentes de matemática da ESJF, pretendendo dar o seu contributo às colegas que sempre a apoiaram durante o ano.

Assim, e dado que a linguagem de programação *Python* é um conteúdo que em breve fará parte das matérias a lecionar no Ensino Secundário, a Professora Estagiária elaborou um programa nesta linguagem de programação com o objetivo de ser um pequeno guia para as docentes, mas numa linguagem simples para que os alunos, no seu primeiro contacto com programação também pudessem entender o código escrito. O documento partilhado com as docentes encontra-se no Anexo T.

Aula na turma de MACS

Na ESJF ao longo deste ano letivo, para além de Matemática A também foi lecionada a disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS) e Matemática no Ensino Profissional. Como a Professora Estagiária lecionou Matemática A na sua turma principal, a autora deste relatório procurou, junto dos professores do grupo, lecionar uma aula na disciplina de MACS.

Assim, subordinada ao tema dos códigos de barras, resultante de uma aplicação da Teoria dos Números, a Professora Estagiária deu uma aula de MACS de 11.º ano onde expôs a teoria por trás dos códigos de barras e pôde testar o seu programa de *Scratch* apresentando o algoritmo necessário para a sua construção.

Os alunos puderam verificar de imediato como se aplicava este programa. Houve uma reação bastante positiva da turma que acolheu a Professora Estagiária muito bem. Um agradecimento especial à professora Maria João Letra, que possibilitou a ida da Professora Estagiária à sua aula, tendo a oportunidade de contactar com alunos de MACS.

5.2 Atividades dinamizadas pelo NEM

5.2.1 Semana da Matemática

Uma das atividades propostas pelo Núcleo de Estágio de Matemática foi a dinamização da semana da matemática, realizada entre os dias 13 e 17 de março. O objetivo era assinalar o dia da Matemática com atividades direcionadas para os alunos dos vários anos de escolaridade da Escola ao longo de toda a semana. A seguir encontram-se descritas as atividades desenvolvidas.

Atividades para o 3.º Ciclo

O NEM decidiu que iria proporcionar a todas as 9 turmas do ensino Básico uma aula de Matemática diferente. Com este objetivo, em comunicação com as docentes que lecionam as turmas do ensino básico na escola, marcou um horário diferente para cada turma estar presente na sala combinada. Na sala, cada turma foi dividida em dois grupos, que estavam simultaneamente a realizar um jogo diferente: o jogo da roda ou o tradicional jogo do Sudoku.

No jogo da roda, (Fig.5.2) os alunos estavam com a professora titular da turma a responder a algumas perguntas de uma das seguintes temáticas da matemática: números, álgebra, geometria,

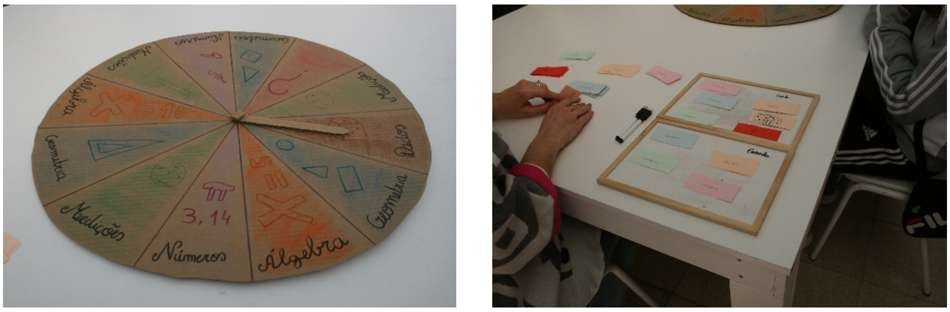


Fig. 5.2 Jogo da roda

medições ou estatística . Para este jogo, o NEM selecionou perguntas adequadas para o 3.ºCiclo do Ensino Básico, dividiu-as por temas e atribuiu uma cor a cada um. Construiu também uma roda, que permitia aos alunos rodarem o ponteiro até ficar a indicar uma secção que tinha uma área da matemática associada.

No jogo do Sudoku (Fig.5.3), os alunos teriam de completar um destes enigmas. As regras destes jogo tradicional consistem em preencher uma grelha 9 x 9 com números de 1 a 9 de modo que não haja repetições em cada linha, coluna e secção 3 x 3.

O NEM construiu em cartão e em tamanho grande uma grelha onde colou os números fixos. Os restantes números nescessários para completar o sudoku foram escritos, individualmente, num cartão quadrangular. Assim, os discentes teriam de inserir corretamente o número em falta nos lugares vazios.

A Professora Estagiária auxiliava os alunos a resolver o sudoku, sobretudo junto daqueles que não conheciam o jogo e por isso explicava-lhes as regras para que também eles pudessem jogar.

Fig. 5.3 Jogo do Sudoku

Palestra

Direcionada para alunos do Ensino Secundário, o Professor Adérito Araújo, que leciona no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, proferiu uma palestra intitulada “Trocas altruístas num mundo competitivo” (Fig. 5.4).

Fig. 5.4 Cartaz publicitário da palestra e exposição por parte do Professor Adérito Araújo

Pi Humano

No Dia Internacional da Matemática, dia 14 de março, o NEM organizou, em conjunto com os docentes das turmas do 3.º Ciclo do Ensino Básico a construção do Pi Humano no campo de jogos da escola. O NEM organizou os alunos de modo a formar, com os seus corpos, o símbolo do Pi, que foi captado com a ajuda de um drone, cujo resultado é apresentado na Figura 5.5.

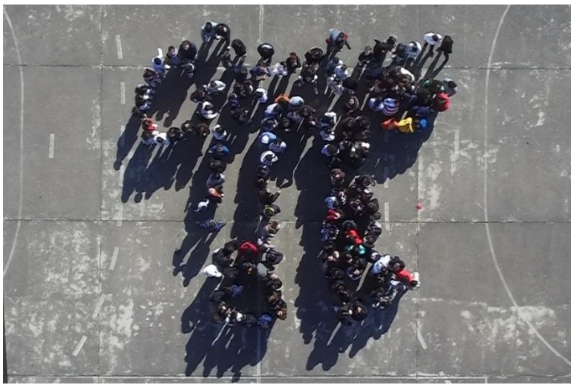


Fig. 5.5 Fotografia captada por um *drone* do Pi Humano

Exposição

O NEM contou com a colaboração de alguns docentes do grupo de Matemática na dinamização de uma Exposição na Biblioteca Escolar na Semana da Matemática (Fig. 5.6). Para essa Exposição, os alunos dos 7.º e 8.º anos formam convidados a construir o símbolo Pi com materiais recicláveis.

Posteriormente, os trabalhos foram avaliados e foram escolhidos 4 alunos que foram premiados, num pequeno momento que contou com a presença da Diretora da Escola.

Fig. 5.6 Exposição trabalhos na Biblioteca e entrega de prémios

Esta exposição, contou, ainda, com três trabalhos subordinados ao tema "A Geometria e o Desenvolvimento Sustentável" (Fig. 5.7). Estes trabalhos surgiram no âmbito da disciplina de Cidadania e Desenvolvimento, na qual a Orientadora Cooperante e a Professora Estagiária propuseram aos alunos da sua turma principal a elaboração de um trabalho que interligasse a Geometria e o Desenvolvimento Sustentável. Foram construídas maquetas de casas com capacidade de rentabilizar recursos naturais.

Fig. 5.7 Exposição casas sustentáveis

O NEM teve ainda a colaboração de alguns docentes do grupo de Matemática para decorar o recinto da escola na Semana da Matemática, tal como apresentado na figura 5.8.

Fig. 5.8 Decoração da Escola na Semana da Matemática

5.3 Outras atividades

Ao longo deste ano letivo, a Professora Estagiária foi envolvida nas atividades planeadas pelo Grupo de Matemática, colaborando na organização, vigilância e correção das provas da competição das 41.ª Olimpíadas Portuguesas de Matemática e no concurso Canguru Matemático sem Fronteiras (Fig. 5.9).

Fig. 5.9 Certificados de colaboração

A Professora Estagiária participou, também, no dia 19 de janeiro, num Workshop intitulado "Gráficos enganadores" promovido pela docente Isabel Costa, que contou com o docente da Universidade de Coimbra Jaime Silva. A Professora Estagiária auxiliou os alunos nas tarefas propostas pelo orador, após a sua exposição acerca da importância de uma correta análise e interpretação de gráficos.

A Professora Estagiária foi convidada pelas professoras Graça Antunes e Isabel Costa a integrar o trabalho de preparação e implementação de uma aula no 7.º ano de escolaridade, no âmbito da ação de formação "Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 3.º ciclo do Ensino Básico", frequentada pelas duas docentes. Nesta aula foi implementada uma atividade que exigia a utilização da folha de cálculo. Assim, durante a aula, as professoras presentes ajudaram os alunos a compreender o problema, esclarecendo as dúvidas colocadas e auxiliaram os discentes a aproveitar as funcionalidades da folha de cálculo (Fig. 5.10).

Fig. 5.10 Professora Estagária junto dos alunos da turma do 7.º ano

A convite de alguns docentes da ESJF, a Professora Estagiária teve, ainda, a oportunidade de acompanhar alunos do Ensino Secundário, entre os quais discentes das turmas que acompanha, a atividades realizadas fora da Escola, nomeadamente:

- à Universidade de Coimbra, no dia 28 de março, na sequência do evento final do Projeto Erasmus+ "ECI: From A to Z";

- à Universidade de Aveiro, no dia 28 de abril, para as Competições Nacionais da Ciência, PmatE;
- ao Centro de Neurociências de Coimbra – Universidade de Coimbra, no dia 16 de maio, no âmbito do Dia aberto da Microscopia.

Capítulo 6

Conclusão

Este ano letivo foi muito desafiante para mim a muitos níveis, mas sobretudo na gestão de tempo e de trabalho. Devido à sua falta de experiência, um Professor Estagiário tem um esforço acrescido no desempenho da sua função. Ensinar pela primeira vez é especialmente desafiante, porque se entra num território desconhecido que requer adaptação a novos contextos e práticas.

Como Professora Estagiária não lecionei todas as aulas de uma turma ao longo do ano como um professor titular tem de fazer, no entanto o trabalho de preparação de lições ocupou grande parte deste ano, já que havia uma preocupação de apresentar as aulas de forma compreensível para os alunos, obrigando a um discernimento constante acerca das opções a tomar.

Fui muito bem acolhida por toda a comunidade educativa da ESJF desde o primeiro dia, desde a Professora Orientadora, aos restantes docentes da Escola ou pelos seus funcionários, o que se revelou muito importante para aumentar a minha confiança no trabalho que ia realizando.

A nível profissional, este ano foi muito importante por ser um ano de crescimento. O facto de estar em constante comunicação com a Professora Natividade Correia, que ia supervisionando o meu trabalho, permitiu que fosse corrigindo e aperfeiçoando estratégias de lecionação. Este estágio também foi significativo para me aperceber das reais funções, responsabilidades e trabalho de um professor, preparando-me para ser uma professora consciente e munida de ferramentas necessárias para ultrapassar algumas dificuldades que possa enfrentar no caminho.

Este ano fez-me compreender e vivenciar a importância que o exemplo do professor tem para os seus alunos. O professor deve-se preocupar com as aprendizagens dos alunos dando-lhes as melhores condições para aprenderem com eficácia. Assim, como professora fui percebendo que se for rigorosa e exigente em cada tarefa que apresento, os alunos vão estar atentos e procurar pôr em prática essa exigência; se for responsável e cumprir as minhas obrigações, os alunos tendem a ser mais responsáveis; se tratar com respeito os outros e assumir os meus erros, os discentes farão o mesmo com mais facilidade.

Bibliografia

[1] Khan Academy. Matemática 11.º ano. URL https://pt-pt.khanacademy.org/math/11ano.

[2] Rodrigues E. Costa, B. *Novo Espaço 11.ºano*. Porto Editora, 2016.

[3] Direção-Geral da Educação. Aprendizagens essenciais matemática a - 11.ºano, 2018. URL https://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario.

[4] Ministério da Educação. Decreto-lei n.º 75/2008, de 22 de abril, 2008. URL https://diariodarepublica.pt/dr/detalhe/decreto-lei/75-2008-249866.

[5] ESJF. Escola secundária josé falcão, 2021. URL https://esjf.edu.pt/. Acedido a 1 de junho de 2023.

[6] Martinho E. Martins H Negra, C. *Dimensões 11*. Santilhana, 2016.

[7] University of Nottingham. Formative assessment lessons. URL https://www.map.mathshell.org/lessons.php.

[8] Mathematical Visual Proofs. A nonstandard geometric series (visual proof), 2022. URL https://www.youtube.com/watch?v=nwiWoDNMLyk&list=PLZh9gzIvXQUsgw8W5TUVDtF0q4jEJ3iaw&index=21.

[9] RTP. Estudo em casa 11.º ano, 2020.

[10] Think Twice. Infinite sums | geometric series | explained visually, 2017. URL https://www.youtube.com/watch?v=-y1Ob0K63hc&t=2s.

Anexo A

Planificação Anual para a disciplina de Matemática A para o 11º ano de escolaridade da Escola Secundária José Falcão

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

ANO LETIVO 2022-2023
PLANIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA A
11º ANO

Anual

Período de Planificação	DOMÍNIOS	N.º DE TEMPOS DE (50 MINUTOS)	
		POR TEMA	**POR PERÍODO**
16 de setembro 2022 a 07 de junho de 2023	▪ **TEMA TRANSVERSAL: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (CONSOLIDAÇÃO APRENDIZAGENS DO 3.º CICLO)**	4	1º Período (4+22+22+6+2+16) 72
	▪ **TRIGONOMETRIA**	22	
	▪ **GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO E NO ESPAÇO**	22	
	▪ **SUCESSÕES**	6	
	▪ **CIDADANIA E DESENVOLVIMENTO**	2	
	▪ **SUCESSÕES**	25	2º Período (25+33+2+13) 73
	▪ **FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL**	33	
	▪ **CIDADANIA E DESENVOLVIMENTO**	2	
	▪ **FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL (CONCLUSÃO)**	22	3º Período (22+12+2+7) 43
	▪ **ESTATÍSTICA**	12	
	▪ **CIDADANIA E DESENVOLVIMENTO**	2	
	TOTAL	**152**	**188**

Outras Atividades	N.º de tempos Letivos (de 50 minutos)			TOTAL
	1.ºP	**2.ºP**	**3.ºP**	
Apresentação. Avaliação diagnóstica.	3	-	-	3
Momentos Formais de avaliação, revisões e correção.	12	12	6	30
Auto e heteroavaliação	1	1	1	3
TOTAL	**16**	**13**	**7**	**36**

Anexo B

Planificação 3.º Período para a disciplina de Matemática A para o 11º ano de escolaridade da Escola Secundária José Falcão

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

ANO LETIVO 2022-2023
PLANIFICAÇÃO DE MATEMÁTICA A
11º ANO

3º Período

TEMA	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS: CONHECIMENTOS, CAPACIDADES E ATITUDES	N.º aulas (50 min)	ESTRATÉGIAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS	DESCRITORES DO PERFIL DOS ALUNOS
Funções **Funções** **(conclusão)**	**Derivadas e monotonia de funções.** • Calcular e interpretar geometricamente a taxa média de variação de uma função e a derivada de uma função num ponto. • Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função. • Resolver problemas envolvendo a derivada e a taxa média de variação de uma função, nomeadamente sobre velocidades média e instantânea. • Caraterizar a função derivada de uma função e interpretá-la graficamente; • Conhecer e aplicar a derivada da soma, da diferença, do produto e do quociente de funções diferenciáveis; • Conhecer e aplicar a derivada de funções do tipo $f(x) = x^a$ (com a racional e $x > 0$); • Relacionar o sinal e os zeros da função derivada com a monotonia e extremos da função e interpretar graficamente. • Resolver problemas envolvendo a aplicação do cálculo diferencial ao estudo de funções reais de variável real, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia, extremos relativos e absolutos.	22	Estabelecer conexões entre diversos temas matemáticos e de outras disciplinas. Enquadrar, do ponto de vista da História da Matemática, os conteúdos abordados que para o efeito se revelem particularmente adequados. Comunicar, utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar e justificar procedimentos, raciocínios e conclusões. Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem. Apreciar o papel da matemática no desenvolvimento das outras ciências e o seu contributo para a compreensão e resolução dos problemas da humanidade através dos tempos. Resolver problemas, atividades de modelação ou desenvolver projetos que mobilizem os conhecimentos adquiridos ou fomentem novas aprendizagens. Utilizar a tecnologia gráfica no estudo de funções.	Questionador (A, F, G, I, J) Comunicador (A, B, D, E, H) Auto avaliador (transversal às áreas) Participativo/ colaborador (B, C, D, E, F) Responsável/ autónomo (C, D, E, F, G, I, J) Saber trabalhar em equipa (B, E, F, G) Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) Indagador/Investigador (C, D, F, H, I)

Estatística	• Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento abordando nomeadamente os conceitos de Recenseamento e Sondagem (população e amostra); • Organizar e interpretar dados de natureza quantitativa e qualitativa, variáveis discretas e contínuas; • Interpretar medidas de localização de uma amostra: moda, média, mediana, quartis e percentis; • Interpretar medidas de dispersão: amplitude interquartil, variância, desvio padrão; • Abordar gráfica e intuitivamente distribuições bidimensionais, nomeadamente o diagrama de dispersão, o coeficiente de correlação e reta de regressão.	12	Apreciar o papel da matemática no desenvolvimento das outras ciências e o seu contributo para a compreensão e resolução dos problemas da humanidade através dos tempos. Resolver problemas, atividades de modelação ou desenvolver projetos que mobilizem os conhecimentos adquiridos ou fomentem novas aprendizagens. Utilizar a tecnologia gráfica e folhas de cálculo no estudo da estatística. Avaliar o próprio trabalho para identificar progressos, lacunas e dificuldades na sua aprendizagem.	Conhecedor/ sabedor/ culto/ informado (A, B, G, I, J) Questionador (A, F, G, I, J) Participativo/ colaborador (B, C, D, E, F) Indagador/Investigador (C, D, F, H, I) Saber trabalhar em equipa (B, E, F, G)
Momentos formais de avaliação, revisões e correção. Auto e Heteroavaliação. Cidadania e Desenvolvimento.		9		

TOTAL = 43 aulas

Esta planificação tem como referencial de base as *Aprendizagens Essenciais* (homologadas a 31 agosto de 2018) em conjunto com o *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória e do* Plano 21/23 Escola+. A recuperação/consolidação das aprendizagens far-se-á ao longo de todo o ano letivo.

Anexo C

Planificação 3.º Período elaborada pela Professora Estagiária

Planificação 3.º Período **11.º5**

17 abril	18 abril	19 abril	20 abril
Função racional: zeros, domínio, quadro de sinal	Função racional: problemas de interpretação	Resolução de problemas acerca da função racional.	Taxa média de variação e o seu limite.

24 abril	25 abril	26 abril	27 abril
Prova Parcelar de Avaliação (PPA). Derivada de uma função num ponto.		Função derivada.	Regras de derivação.

1 maio	2 maio	3 maio	4 maio
	Entrega e correção PPA. Resolução de exercícios acerca da função derivada.	Resolução de exercícios acerca das regras de derivação.	Monotonia e extremos de uma função real de variável real.

8 maio	9 maio	10 maio	11 maio
Monotonia e extremos de uma função r. v. r.	Resolução de exercícios.	Resolução de exercícios.	Problemas de otimização.

15 maio	16 maio	17 maio	18 maio
Revisões.	Prova Global de Avaliação (PGA)	Problemas de otimização.	Conclusão dos Problemas de otimização.

22 maio	23 maio	24 maio	25 maio
Entrega e correção da PGA.	Resolução de exercícios.	Resolução de exercícios.	Introdução à unidade de Estatística.

29 maio	30maio	31 maio	1 junho
Trabalho de grupo de estatística.	Amostras enviesadas.	Trabalho de grupo de estatística.	Estatística: resolução da ficha formativa.

5 junho	6 junho	7 junho	8 junho
Estatística: resolução da ficha formativa.	Autoavaliação.	Encerramento do ano.	

Professora Estagiária Carolina Teotónio

Anexo D

Plano de aula da Aula assistida do 2.º Período

PLANO DE AULA		
Disciplina: Matemática A	**Ano:** 11.ºAno	**Turma:** 05
Estagiária: Carolina da Silva Teotónio **Orientadora Cooperante:** Natividade Correia **Orientadora Científica:** Helena Albuquerque		
7 de março de 2023	**Hora:** 10:25-12:15 (100 min)	**Sala:** 24
Tema: Sucessões	**Subtema**: Limites de sucessões	
Sumário		
Soma de infinitos termos de uma progressão geométrica. Cálculo de limites de sucessões.		
Objetivos		
Reconhecer que uma soma infinita de termos pode ter um valor real. Compreender a aplicação do conceito de limite em somas infinitas convergentes (séries convergentes). Resolver limites de sucessões		

Desenvolvimento da aula				
5 min	Clarificar o objetivo da aula.			
15 min	Apresentação do Power Point. • Símbolo do Somatório e alguns exemplos			
20 min	• Resolução da série geométrica seguinte como um problema, com recurso ao *Power Point* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$			
10 min	• Resolução da série geométrica seguinte como um problema semelhante ao primeiro, com recurso ao *Power Point* $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{4}$			
INTERVALO				
5 min	Reentrada dos alunos na sala com a reorganização das mesas, junção por grupos e distribuição dos miniquadros brancos.			
	Grupo A: João Inês Tomás Beatriz Santos Hugo Lara	Grupo B: Simão Catarino Francisco Costa Carolina Beatriz Pimenta Rafaela Matilde	Grupo C: Simão Costa Simão Gonçalves Leonor Guilherme Ana Jasmim Sílvio	Grupo D: António Gonçalo Mariana Francisco Rodrigues Beatriz Neves
15 min	• Resolução da série geométrica seguinte em grupos, com recurso ao *Power Point*			

	$0{,}999(9) = 1$
3 min	Explicação da dinâmica a realizar seguidamente: - Cada grupo terá uma folha com 12 limites de sucessões; - À vez, um grupo escolhe uma sucessão, escreve-a no quadro e mostra aos restantes grupos; - De seguida todos os grupos resolvem a sucessão em causa. Quando acabarem, escrevem o resultado no quadro e viram-no para baixo; - Após todos terminarem, o grupo que deu o limite dá a resposta certa; - O grupo que tiver respondido primeiro corretamente recebe um rebuçado; se o grupo que deu o limite tiver a resposta certa também recebe um rebuçado; - De seguida, o grupo seguinte dará um novo limite e repete-se o procedimento;
25 min	Realização da dinâmica com limites.
2 min	Encerramento da aula.

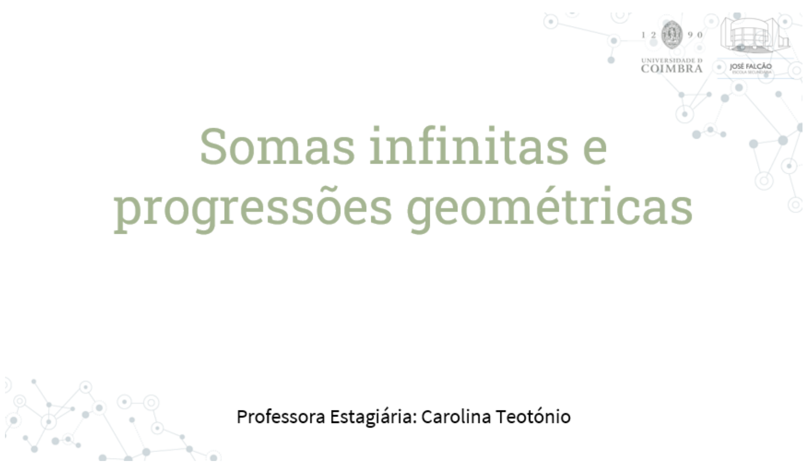
Avaliação

A avaliação centra-se na observação e registo do comportamento, participação e respeito dos alunos durante a aula e, em particular durante o trabalho em grupo.

Bibliografia

- Negra, C., Martinho, E., Martins, H. *Dimensões 11* (volume 2). SANTILLANA. (manual adotado)
- Costa, B., Rodrigues, E. *Novo Espaço* (parte 2) 11º ano. Porto Editora.
- Khan Academy https://pt-pt.khanacademy.org/math/11ano
-Math is Fun, *Geometric Sequences and Sums*, disponível em https://www.mathsisfun.com/algebra/sequences-sums-geometric.html
- Mathematical Visual Proofs, *Geometric Sums*, disponível em https://www.youtube.com/playlist?list=PLZh9gzIvXQUsgw8W5TUVDtF0q4jEJ3iaw

Anexo I – *Power Point*



Anexo E

Apresentação da Aula assistida do 2.º Período

Somas infinitas e progressões geométricas

Professora Estagiária: Carolina Teotónio

- $2+4+6+8+10=?$
- $2, 4, 6, 8, 10$ são termos de que sucessão?

- $u_n = 2n$
- $u_1 = 2$
- $u_2 = 4$
- $u_3 = 6$
- $u_4 = 8$
- $u_5 = 10$

$$2+4+6+8+10=\sum_{n=1}^{5} 2n$$

- $1+3+5+7=?$
- $1, 3, 5, 7$ são termos de que sucessão?

- $u_n = 2n-1$
- $u_1 = 1$
- $u_2 = 3$
- $u_3 = 5$
- $u_4 = 7$

$$1+3+5+7=\sum_{n=1}^{4} 2n-1$$

- $2+4+8+16=?$
- $2, 4, 8, 16$ são termos de que sucessão?

- $u_n = 2^n$
- $u_1 = 2$
- $u_2 = 4$
- $u_3 = 8$
- $u_4 = 16$

$$2+4+8+16=\sum_{n=1}^{4} 2^n$$

Somatório:

A letra grega *sigma* é usada para denotar uma soma.

acaba em n=25

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{25} = \sum_{n=1}^{25} a_n$$

Expressão para cada termo do somatório

começa em n=1

Escreve as parcelas dos seguintes somatórios

$$\sum_{n=1}^{5} n^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17}$$

$$\sum_{n=5}^{10} \frac{1}{n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$

Escreve o somatório que simplifica a soma seguinte:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \sum_{n=1}^{100} n$$

- Suponhamos que uma pessoa parte de sua casa, corre <u>meio quilómetro</u> e para.
- De seguida corre metade do que correu desde a sua última paragem e descansa outra vez.
- A seguir, corre metade da distância anterior, ou seja, desde o último descanso, e para.
- E continua com este procedimento: corre metade do que correu desde a última paragem e para.
- O que acontece se este procedimento for repetido <u>infinitamente</u>?

\- Faz um esboço que te permita compreender o problema

\- Como traduzir matematicamente o que é pedido?

Somas infinitas

- O que são somas infinitas?

Por exemplo:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n$$

indica a soma de todos os inteiros consecutivos infinitamente.

Podemos reescrever esta soma como um limite, em duas etapas:

<u>**1ª etapa**</u>: $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

<u>**2ª etapa**</u>: $S = \lim(S_n)$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = ?$$

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots \qquad \times\frac{1}{2}$$

Logo, estes são termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ com o primeiro termo igual a $\frac{1}{2}$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

1ª etapa:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2ª etapa:

$$\mathrm{S} = \lim\,(S_n) = lim\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) = 1 - 0 = 1$$

Conclui-se que

$$S = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots = ?$$

- Suponhamos, agora, que uma pessoa parte de sua casa, mas começa por correr 125 m (que é um oitavo de quilómetro) e para.
- De seguida corre metade do que correu desde a sua última paragem e descansa outra vez.
- A seguir, corre metade da distância anterior, ou seja, desde o último descanso, e para.
- E continua com este procedimento: corre metade do que correu desde a última paragem e para.
- O que acontece se este procedimento for repetido infinitamente?

- Faz um esboço que te permita compreender o problema
- Como traduzir matematicamente o que é pedido?

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = ?$$

$$\frac{1}{8} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{16} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{32} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \frac{1}{64};\ \ldots$$

Logo, estes são termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ com o primeiro termo igual a $\frac{1}{8}$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

1ª etapa:

$$S_n = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

2ª etapa:

$$\mathrm{S} = \lim\,(S_n) = lim\left(\frac{1}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right) = \frac{1}{4} \times (1 - 0) = \frac{1}{4}.$$

Conclui-se que

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = ?$$

$$\frac{1}{4} \xrightarrow{\times\frac{1}{4}} \frac{1}{16} \xrightarrow{\times\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{4};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{64};\ \ldots$$

Logo, estes são termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$ com o primeiro termo igual a $\frac{1}{4}$

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

1ª etapa:

$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots \frac{1}{4^n} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

2ª etapa:

$$\mathrm{S} = \lim\,(S_n) = lim\left(\frac{1}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right) = \frac{1}{3} \times (1-0) = \frac{1}{3}.$$

conclui-se que

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Será 0,9999… igual a 1?

0,(9) = 1?

Seja

$$\mathrm{S} = 0{,}9999\ldots. = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots$$

1ª etapa:

$$S_n = \frac{9}{10^1} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots + \frac{9}{10^n} = 9 \times \left(\frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^n}\right) =$$

$$= 9 \times \left(\frac{1}{10} \times \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{10}\right)}\right) = 9 \times \frac{1}{10} \times \frac{10}{9} \times \left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

2ª etapa:

$$\mathrm{S} = \lim\,(S_n) = lim\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right) = (1-0) = 1$$

Logo,

0,9999…=1

Anexo F

Limites de Sucessões usados na Aula assistida do 2.º Período

Grupo A: ____

1. $lim\ \left(\frac{4n-3}{2n+7}+\frac{6n}{n+4}\right)$
2. $lim\ \left(\frac{n^3+3n-1}{2n^2}\right)$
3. $lim\ \left(\frac{n^2-(-1)^n n}{2n^2-1}\right)$
4. $lim\ \left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{5n}\right)$
5. $lim\ (6^{n+2}-3^n)$
6. $lim\ \left(\frac{4^{2n}+4^n}{4^{3n+1}}\right)$
7. $lim\ \left(\frac{n^2\cos(n+1)}{n\sqrt{n^3+3n}}\right)$
8. $lim\ \left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^3}}\right)$
9. $lim\ \left(\frac{2^{2n}+3^n}{5^{n+2}}\right)$
10. $lim\ \left(\frac{\sqrt{n^2+8n}+4n}{5-6n}\right)$
11. $lim\ \left(\frac{1-n}{\sqrt{2n+1}}\right)$
12. $lim\ \sqrt{\frac{5n^2-1}{n+1}}$

Grupo B:____

1. $lim\left(\frac{n^3+1}{1-2n-5n^3}\right)$
2. $lim\left(\frac{n^4-n^2+2}{n^3+4n^2-1}\right)$
3. $lim\left(\frac{n^3-(-1)^n}{2n^3-1}\right)$
4. $lim\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{3n}\right)$
5. $lim\left(3^{n+2}-5^n\right)$
6. $lim\ \frac{4^{2n}+4^n}{4^{n+1}}$
7. $lim\left(\frac{sin(n-1)}{\sqrt{n^2+3n}}\right)$
8. $lim\ \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{n^2}}$
9. $lim\left(\frac{2^{3n}+6^n}{5^{n+1}}\right)$
10. $lim\left(\frac{\sqrt{n^2+3n}-5n}{1-2n}\right)$
11. $lim\left(\frac{3n+6}{\sqrt{1+n^3}}\right)$
12. $lim\left(\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n-1}}\right)$

Grupo C: ____

1. $lim\left(\frac{5-3n}{n+1}\times\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

2. $lim\left(\frac{n^3-3n^2+2}{n^4-n^2+1}\right)$

3. $lim\left(\frac{2-(-1)^n}{n+1}\right)$

4. $lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{n}\right)$

5. $lim\ 4^{n+1}-3^n$

6. $lim\ \frac{5^n+5^{2n}}{5^{3n}}$

7. $lim\left(\frac{cos(n+1)}{n+1}\right)$

8. $lim\left(\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^4}}\right)$

9. $lim\left(\frac{3^{2n}+4^n}{8^{n+2}}\right)$

10. $lim\ \frac{\sqrt{n^2+2n}-3n}{1-4n}$

11. $lim\left(\frac{n}{\sqrt{1+n^3}}\right)$

12. $lim\left(\sqrt[3]{\frac{8n-14}{n+23}}\right)$

Anexo G

Plano de aula da Aula assistida do 3.º Período

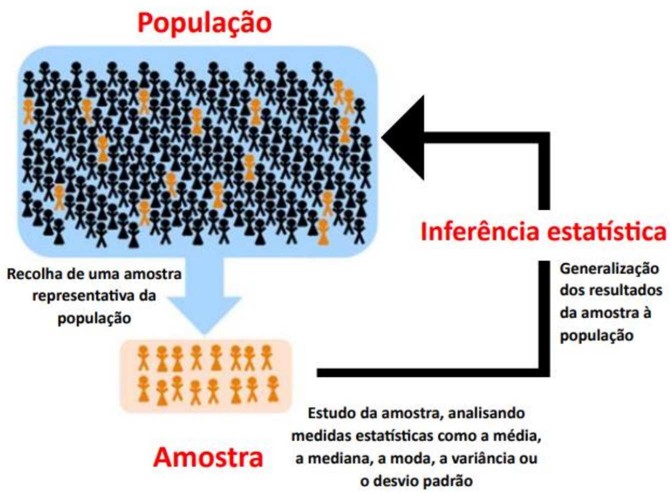
PLANO DE AULA		
Disciplina: Matemática A	**Ano:** 11.ºAno	**Turma:** 05
Estagiária: Carolina da Silva Teotónio **Orientadora Cooperante:** Natividade Correia **Orientadora Científica:** Helena Albuquerque		
30 de maio de 2023	**Hora:** 10:25-12:15 (100 min)	**Sala:** 24
Tema: Estatística	**Subtema**: Amostras enviesadas	
Sumário		
Estudo de amostras enviesadas.		
Objetivos		
Compreender os motivos de enviesamento de uma amostra. Calcular medidas de dispersão estatística.		

Desenvolvimento da aula
Clarificar o objetivo da aula.
Apresentação do *Power Point*. • Estatística e amostras enviesadas (exemplos)
Entrega aos alunos de um exemplo de amostra enviesada para que seja resolvido individualmente.
Correção da tarefa entregue aos alunos.
Continuação da apresentação Power Point: • Amostras enviesadas no dia a dia e a sua influência na nossa perceção da realidade
Apresentação do enunciado do problema que permite relacionar a estatística e a história da aviação: Durante a segunda guerra mundial, quando os aviões regressavam de combate, era efetuada uma cuidadosa análise dos danos. Isto era feito de forma a identificar os pontos mais frágeis e encontrar a melhor forma de reforçar o avião. Reforçar todo o avião seria o mais simples, mas isso implicaria que o avião ficasse demasiado pesado e não fosse capaz de descolar da pista. O mais óbvio seria reforçar o avião nas partes mais danificadas pelas balas, aquelas que apresentavam problemas mais graves. No entanto, Abraham Wald, um matemático judeu, austro-húngaro, refugiado nos EUA teve uma ideia genial que consistia em reforçar o avião precisamente nas partes não atingidas pelas balas. Porque é uma ideia de génio?
Dar a conhecer aos alunos que estarão a trabalhar em grupo na segunda parte da aula, com os seguintes grupos: <u>Grupo 1:</u> João, Inês, Beatriz Santos, Hugo, Lara <u>Grupo 2:</u> Simão Catarino, Francisco Costa, Carolina, Beatriz Pimenta, Rafaela, Matilde <u>Grupo 3:</u> Simão Costa, Simão Gonçalves, Leonor, Guilherme, Ana Jasmim, Sílvio <u>Grupo 4:</u> António, Gonçalo, Mariana, Francisco Rodrigues, Beatriz Neves, Tomás
Intervalo
Reentrada dos alunos na sala com a reorganização das mesas e junção por grupos.

Distribuição de uma ficha de trabalho por grupo, com perguntas de escolha múltipla.

Após a conclusão da ficha, cada grupo terá um código que corresponde a uma percentagem. Esse código será o número que um elemento do grupo terá de furar na caixa que a professora terá consigo. Ao furar a caixa obterão um conjunto de peças de uma parte de um puzzle que o grupo irá montar.

Após cada grupo montar a sua parte do puzzle, um elemento do grupo levará essa parte para a mesa central da sala onde será montado todo o puzzle:



Discussão e resolução do problema da história da aviação.

Encerramento da aula.

Bibliografia

- Negra, C., Martinho, E., Martins, H. *Dimensões 11* (volume 2). SANTILLANA. (manual adotado)
- Costa, B., Rodrigues, E. *Novo Espaço* (parte 2) 11º ano. Porto Editora.
- Khan Academy, https://pt-pt.khanacademy.org/math/11ano
- Khan Academy, MACS 10 ano *Questões estatísticas*, https://pt-pt.khanacademy.org/math/macs-10-ano/xd19567a5b62cb755:estatistica/xd19567a5b62cb755:introducao/v/understanding-statistical-questions
-Math is Fun, *Using and Handling Data*, disponível Data, Probability and Statistics (mathsisfun.com)
- Isto é matemática, *Amostras enviesadas*, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=3g_LruYERf0

Anexo I – *Power Point*

Anexo H

Apresentação da Aula assistida do 3.º Período

Estatística

Estatística

Qual a relação entre a estatística e a História da Aviação?

População e amostra

População

conjunto de elementos sobre os quais podem ser recolhidos dados relativos a uma característica comum

O que queremos estudar?

Amostra

subconjunto de uma população formado pelos elementos relativamente aos quais são recolhidos dados

Onde recolhemos dados?

Exemplo:

A administradora de uma fábrica pretende analisar a qualidade das suas torneiras na primeira semana de maio. Para isso, seleciona, ao acaso, 40 torneiras das que foram produzidas na fábrica durante aquela semana e testou a sua qualidade.

População: torneiras produzidas na fábrica durante a primeira semana de maio

Amostra: 40 torneiras selecionadas

Amostra representativa

=

Amostra <u>não enviesada</u>

Exemplo

O David produz um podcast e pretende conhecer a opinião dos seus ouvintes acerca do programa. Vamos analisar duas opções tomadas pelo David para saber o que acham as pessoas que o ouvem.

1.Um dia, o David decide realizar uma sondagem online, pedindo aos seus ouvintes que visitem o seu site e participem na sondagem. A sondagem mostra que 89% dos 200 inquiridos "gostam muito" do programa.

Qual é a nossa população?

Qual é a nossa amostra?

População: ouvintes do podcast

Amostra: 200 ouvintes inquiridos

1.1. Qual poderá ser a maior fonte de enviesamento neste cenário?
- Enviesamento das respostas
- Amostragem não considera toda a população
- **Amostragem de resposta voluntária**

1.2. Qual é a direção de enviesamento mais provável neste cenário?
- 89% provavelmente é uma estimativa <u>por defeito</u> dos ouvintes que gostam muito do programa.
- **89% provavelmente é uma estimativa <u>por excesso</u> da percentagem de ouvintes que gostam muito do programa.**
- 89% é provavelmente uma estimativa <u>não enviesada.</u>

Exemplo

O David produz um podcast e pretende conhecer a opinião dos seus ouvintes acerca do programa. Vamos analisar duas opções tomadas pelo David para saber o que acham as pessoas que o ouvem.

2.O David decide enviar uma sondagem aos próximos 100 fãs que lhe enviarem um e-mail. Nem todos responderam, mas 94 dos 97 ouvintes que responderam disseram que "gostavam muito" do programa.

Qual é a nossa população?

Qual é a nossa amostra?

População: ouvintes do podcast

Amostra: 100 fãs que foram inquiridos

1.1. Qual poderá ser **a maior** fonte de enviesamento neste cenário?

- **Amostragem por conveniência**
- Ausência de resposta
- Amostragem de resposta voluntária

1.2. Qual é a direção de enviesamento mais provável neste cenário?

- Os resultados são, provavelmente, uma estimativa <u>por defeito</u> dos ouvintes que gostam muito do programa.
- **Os resultados são, provavelmente, uma estimativa <u>por excesso</u> da percentagem de ouvintes que gostam muito do programa.**
- Os resultados são, provavelmente, uma estimativa <u>não enviesada.</u>

1. Uma deputada municipal pretende saber qual é a opinião das pessoas do seu distrito sobre a questão da privacidade da internet. Ela realizou uma sondagem inquirindo 100 pessoas cujos nomes foram escolhidos aleatoriamente da lista telefónica (esta lista inclui os números de telefone fixo, excluindo, portanto, os números de telemóveis e os números privados). A partir do gabinete da deputada, telefonaram para esses números até obterem uma resposta de todas as 100 pessoas selecionadas.
A sondagem mostrou que 42% dos inquiridos estão "muitos preocupados" com a privacidade da internet.

1.1. Indique, sobre este estudo estatístico:
A população: <u>todos os habitantes do distrito</u>
A amostra: <u>100 pessoas inquiridas</u>

1.2. A amostra em estudo não é representativa. Qual será a sua maior fonte de enviesamento?

a. Ausência de resposta.
b. **Amostragem não considera toda a população**
c. Amostragem de resposta voluntária

1.3. Qual é a direção de enviesamento mais provável neste cenário?

a. 42% é provavelmente uma estimativa <u>por defeito</u> da percentagem de pessoas naquele distrito que estão preocupadas com a privacidade na internet.
b. 42% é provavelmente uma estimativa <u>por excesso</u> da percentagem de pessoas naquele distrito que estão preocupadas com a privacidade na internet.
c. 42% é provavelmente uma estimativa não enviesada.

2. Uma deputada municipal pretende saber a opinião das pessoas do seu distrito sobre a privacidade na internet. Ela fez uma sondagem em que telefonou a pessoas gerando números aleatórios com um computador, de modo que os números privados e os telemóveis também pudessem ser contactados. Telefonaram a mais de 1000 números de telefone aleatórios —a maioria das pessoas não atendeu—até obterem 100 respostas. A sondagem mostrou que 46% dos inquiridos estão "muitos preocupados" com a privacidade da internet.

2.1. A amostra em estudo não é representativa. Qual será a sua **principal** causa de enviesamento?

a. Ausência de resposta

b. A amostragem não considerou toda a população

c. Amostra com resposta voluntária

2.2 Qual é a direção de enviesamento mais provável neste cenário?

a. 46% é provavelmente uma estimativa por defeito da percentagem de pessoas naquele distrito que estão preocupadas com a privacidade na internet.

b. 46% é provavelmente uma estimativa por excesso da percentagem de pessoas naquele distrito que estão preocupadas com a privacidade na internet.

c. 46% é provavelmente uma estimativa não enviesada

Qual a relação entre a estatística e a História da Aviação?

Durante a segunda guerra mundial, quando os aviões regressavam de combate, era efetuada uma cuidadosa análise dos danos. Isto era feito de forma a identificar os pontos mais frágeis e encontrar a melhor forma de reforçar o avião. Reforçar todo o avião seria o mais simples, mas isso implicaria que o avião ficasse demasiado pesado e não fosse capaz de descolar da pista.

O mais óbvio seria reforçar o avião nas partes mais danificadas pelas balas, aquelas que apresentavam problemas mais graves. No entanto, Abraham Wald, um matemático judeu, austro-húngaro, refugiado nos EUA teve uma ideia genial que consistia em reforçar o avião precisamente nas partes não atingidas pelas balas.

Porquê de génio?

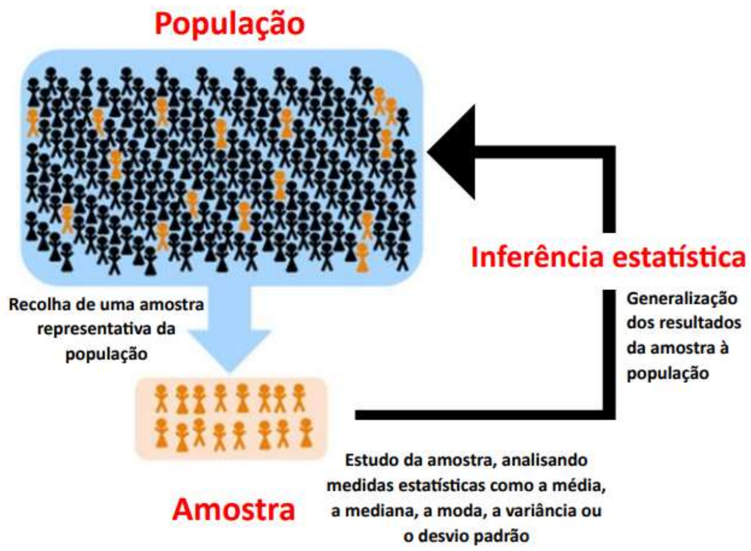
Divisão por grupos:

Grupo 1:
João
Inês
Beatriz Santos
Hugo
Lara

Grupo 2:
Simão Catarino
Francisco Costa
Carolina
Beatriz Pimenta
Rafaela
Matilde

Grupo 3:
Simão Costa
Simão Gonçalves
Leonor
Guilherme
Ana Jasmim
Sílvio

Grupo 4:
António
Gonçalo
Mariana
Francisco Rodrigues
Beatriz Neves
Tomás

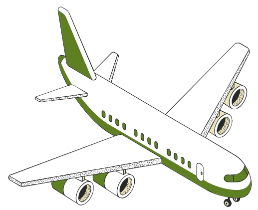


Qual a relação entre a estatística e a História da Aviação?

Durante a segunda guerra mundial, quando os aviões regressavam de combate, era efetuada uma cuidadosa análise dos danos. Isto era feito de forma a identificar os pontos mais frágeis e encontrar a melhor forma de reforçar o avião. Reforçar todo o avião seria o mais simples, mas isso implicaria que o avião ficasse demasiado pesado e não fosse capaz de descolar da pista.

O mais óbvio seria reforçar o avião nas partes mais danificadas pelas balas, aquelas que apresentavam problemas mais graves. No entanto, Abraham Wald, um matemático judeu, austro-húngaro, refugiado nos EUA teve uma ideia genial que consistia em reforçar o avião precisamente nas partes não atingidas pelas balas.

Porquê de génio?



Qual a relação entre a estatística e a História da Aviação?

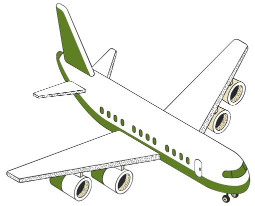
- Abraham Wald percebeu que a sua amostra de aviões era **enviesada**.
- A população em estudo são todos os aviões que partiram para combate, porque são todos os aviões que se pretendem reforçar
- A amostra é o conjunto de aviões que regressa da guerra, com danos

Porquê de génio?

Qual a relação entre a estatística e a História da Aviação?

- Supondo que as balas acertavam nos aviões mais ou menos ao acaso, o facto de o avião ter dados numa certa zona e ter voltado era sinal que essa parte afinal até estava a resistir às balas.
- Por outro lado, se sistematicamente os aviões que voltassem de combate não apresentassem danos numa certa zona queria simplesmente dizer que os aviões atingidos nessa parte não regressaram.
- E era exatamente aí que os aviões deviam ser reforçados.

Porquê de génio?



Qual a relação entre a estatística e a História da Aviação?

- A melhor opção nem sempre é a mais obvia.
- Devemos parar e considerar a amostra que temos só para ter a certeza que não é enviesada.

Porquê de génio?

Anexo I

Atividade 1 Aula assistida do 3.º Período

Amostras enviesadas: exemplos **Data:** maio de 2023

1. Uma deputada municipal pretende saber qual é a opinião das pessoas do seu distrito sobre a questão da privacidade da internet. Ela realizou uma sondagem inquirindo 100 pessoas cujos nomes foram escolhidos aleatoriamente da lista telefónica (esta lista inclui os números de telefone fixo, excluindo, portanto, os números de telemóveis e os números privados). A partir do gabinete da deputada, telefonaram para esses números até obterem uma resposta de todas as 100 pessoas selecionadas.
A sondagem mostrou que 42% dos inquiridos estão "muitos preocupados" com a privacidade da internet.

1.1. Indique, sobre este estudo estatístico:
A população: ____
A amostra: ____

1.2. A amostra em estudo não é representativa. Qual será a sua maior fonte de enviesamento?

a. Ausência de resposta.
b. Amostragem não considera toda a população
c. Amostragem de resposta voluntária

1.3. Qual é a direção de enviesamento mais provável neste cenário?

a. 42% é provavelmente uma estimativa <u>por defeito</u> da percentagem de pessoas naquele distrito que estão preocupadas com a privacidade na internet.
b. 42% é provavelmente uma estimativa <u>por excesso</u> da percentagem de pessoas naquele distrito que estão preocupadas com a privacidade na internet.
c. 42% é provavelmente uma estimativa não enviesada.

2. Uma deputada municipal pretende saber a opinião das pessoas do seu distrito sobre a privacidade na internet. Ela fez uma sondagem em que telefonou a pessoas gerando números aleatórios com um computador, de modo que os números privados e os telemóveis também pudessem ser contactados. Telefonaram a mais de 1000 números de telefone aleatórios—a maioria das pessoas não atendeu—até obterem 100 respostas.
A sondagem mostrou que 46% dos inquiridos estão "muitos preocupados" com a privacidade da internet.

2.1. A amostra em estudo não é representativa. Qual será a sua principal causa de enviesamento?

a. Ausência de resposta
b. A amostragem não considerou toda a população
c. Amostra com resposta voluntária

2.2 Qual é a direção de enviesamento mais provável neste cenário?

a. 46% é provavelmente uma estimativa por defeito da percentagem de pessoas naquele distrito que estão preocupadas com a privacidade na internet.
b. 46% é provavelmente uma estimativa por excesso da percentagem de pessoas naquele distrito que estão preocupadas com a privacidade na internet.
c. 46% é provavelmente uma estimativa não enviesada.

Qual a relação entre a estatística e a História da Aviação?

Durante a segunda guerra mundial, quando os aviões regressavam de combate, era efetuada uma cuidadosa análise dos danos. Isto era feito de forma a identificar os pontos mais frágeis e encontrar a melhor forma de reforçar o avião. Reforçar todo o avião seria o mais simples, mas isso implicaria que o avião ficasse demasiado pesado e não fosse capaz de descolar da pista.

O mais óbvio seria reforçar o avião nas partes mais danificadas pelas balas, aquelas que apresentavam problemas mais graves. No entanto, Abraham Wald, um matemático judeu, austro-húngaro, refugiado nos EUA teve uma ideia genial que consistia em reforçar o avião precisamente nas partes não atingidas pelas balas.

Por que razão esta é uma ideia de génio?

Anexo J

Atividade 2 Aula assistida do 3.º Período

Grupo 1

1. Seja *k* um número natural. Sabe-se que 9 é o valor exato da média dos números 7, 8, 12 e k^2 . Qual é o valor de *k*?

(A) 3 **(B)** 2 **(C)** 1 **(D)** 4

2. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ x_2,\ \ x_3, x_4)$ uma amostra de dimensão 4 e d_io desvio de x_i em relação à média. Sabe-se que $d_1 + d_2 + d_3 = 2{,}5$ e $\bar{x} = 3$. O valor de x_4 é:

(A) $-2{,}5$ **(B)** $2{,}5$ **(C)** $5{,}5$ **(D)** $0{,}5$

3. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ x_2,\ \ \ldots, x_{20})$ uma amostra de dimensão 20 em que $\bar{x} = 50$ e $S_x = 4$. O valor de SS_x é:

(A) 304 **(B)** 100 **(C)** 76 **(D)** 320

4. A média das seguintes pontuações $\underset{\sim}{x}$ = (3,5,2,3,1,4,6,5,7) é:

(A) 5 **(B)** 4 **(C)** 3 **(D)** $4{,}5$

5. A mediana da amostra $\underset{\sim}{x} = (25, 42, 69, 32, 15, 78, 65, 45,\ \ 96)$ é:

(A) 42 **(B)** 45 **(C)** 38 **(D)** 65

Código: A percentagem de respostas com a opção (A) é: ___________

Grupo 2

1. Seja *k* um número natural. Sabe-se que 9 é o valor exato da média dos números 7, 8, 12 e k^2 . Qual é o valor de *k*?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 1 **(D)** 4

2. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ x_2,\ \ x_3, x_4)$ uma amostra de dimensão 4 e d_io desvio de x_i em relação à média. Sabe-se que $d_1 + d_2 + d_3 = 2{,}5$ e $\bar{x} = 3$. O valor de x_4 é:

(A) $-2{,}5$ **(B)** $0{,}5$ **(C)** $5{,}5$ **(D)** $2{,}5$

3. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ x_2,\ \ \ldots, x_{20})$ uma amostra de dimensão 20 em que $\bar{x} = 50$ e $S_x = 4$. O valor de SS_x é:

(A) 76 **(B)** 100 **(C)** 304 **(D)** 320

4. A média das seguintes pontuações $\underset{\sim}{x}$ = (3,5,2,3,1,4,6,5,6)é:

(A) 5 **(B)** 4 **(C)** 3 **(D)** $4{,}5$

5. A mediana da amostra $\underset{\sim}{x} = (25, 42, 69, 32, 15, 78, 65, 45,\ \ 96)$ é:

(A) 54 **(B)** 40 **(C)** 38 **(D)** 45

Código: A percentagem de respostas com a opção (B) é: ___________

Grupo 3

1. Seja *k* um número natural. Sabe-se que 9 é o valor exato da média dos números 7, 8, 12 e k^2 . Qual é o valor de *k*?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

2. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ x_2,\ \ x_3, x_4)$ uma amostra de dimensão 4 e d_i o desvio de x_i em relação à média. Sabe-se que $d_1 + d_2 + d_3 = 2{,}5$ e $\bar{x} = 3$. O valor de x_4 é:

(A) $-2{,}5$ **(B)** $2{,}5$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $5{,}5$

3. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ x_2,\ \ \ldots, x_{20})$ uma amostra de dimensão 20 em que $\bar{x} = 50$ e $S_x = 4$. O valor de SS_x é:

(A) 76 **(B)** 100 **(C)** 304 **(D)** 320

4. A média das seguintes pontuações $\underset{\sim}{x}$ = (3,5,2,3,1,4,6,5,6)é:

(A) 5 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** $4{,}5$

5. A mediana da amostra $\underset{\sim}{x} = (25, 42, 69, 32, 15, 78, 65, 45,\ 96)$ é:

(A) 45 **(B)** 54 **(C)** 38 **(D)** 40

Código: A percentagem de respostas com a opção (C) é: ___________

Grupo 4

1. Seja *k* um número natural. Sabe-se que 9 é o valor exato da média dos números 7, 8, 12 e k^2 . Qual é o valor de *k*?

(A) 3 **(B)** 2 **(C)** 1 **(D)** 4

2. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ x_2,\ \ x_3, x_4)$ uma amostra de dimensão 4 e d_i o desvio de x_i em relação à média. Sabe-se que $d_1 + d_2 + d_3 = 2{,}5$ e $\bar{x} = 3$. O valor de x_4 é:

(A) $-2{,}5$ **(B)** $2{,}5$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $5{,}5$

3. Seja $\underset{\sim}{x} = (x_1,\ x_2,\ \ \ldots, x_{20})$ uma amostra de dimensão 20 em que $\bar{x} = 50$ e $S_x = 4$. O valor de SS_x é:

(A) 320 **(B)** 100 **(C)** 76 **(D)** 304

4. A média das seguintes pontuações $\underset{\sim}{x}$ = (3,5,2,3,1,4,6,5,6)é:

(A) 5 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** $4{,}5$

5. A mediana da amostra $\underset{\sim}{x} = (25, 42, 69, 32, 15, 78, 65, 45,\ 96)$ é:

(A) 45 **(B)** 54 **(C)** 38 **(D)** 40

Código: A percentagem de respostas com a opção (D) é: ___________

Anexo K

Ficha Formativa sobre Estatística

Ficha Formativa n.º 19	Estatística	Data: maio de 2023

Definições iniciais de estatística

Estatística: conjunto de métodos que permitem recolher, organizar, analisar e interpretar dados.

População: conjunto de elementos sobre os quais podem ser recolhidos dados relativos a uma característica comum.

Unidade estatística: elemento de uma população

Amostra: subconjunto de uma população formado pelos elementos relativamente aos quais são recolhidos dados. Na prática estuda-se uma amostra e não a população, porque a população pode ser infinita; o estudo da população pode levar à sua destruição; o estudo da população pode ser demasiado dispendioso. A escolha de uma **amostra representativa** é muito importante, para que seja possível generalizar os resultados do estudo à população. Por exemplo: suponhamos que queremos estudar o grau de conhecimentos a nível financeiro de todos os trabalhadores de uma empresa, que tem três departamentos: financeiro, marketing e vendas. Se para uma amostra utilizarmos apenas um grupo de trabalhadores do departamento financeiro não temos uma amostra representativa, já que vamos concluir que todos têm bons conhecimentos a nível financeiro, o que pode não corresponder à realidade.

Dimensão da amostra: número de unidades estatísticas pertencentes à amostra.

Exemplo:

Consideremos um estudo sobre as características do cavalo lusitano. Neste estudo:

- *a **população** é o conjunto de todos os cavalos lusitanos;*
- *uma **unidade estatística** é cada um dos cavalos lusitano;*
- *a **amostra** é o conjunto de cavalos lusitanos utilizados para a recolha dos dados;*
- *a **dimensão da amostra** é o número de cavalos utilizados no conjunto observado.*

Para se caracterizar esta raça de cavalos podem registar-se, por exemplo, a "massa", o "comprimento", a "cor da pelagem", o "tipo de alimentação", entre outras características. Cada uma destas características constitui uma variável estatística que pode tomar valores diferentes para diferentes cavalos.

Recenseamento: Estudo estatístico que recolhe dados de **todos** os elementos da população em estudo.

Sondagem: Estudo estatístico que recolhe dados de parte dos elementos da população em estudo, ou seja, é estudada uma amostra da população.

Um recenseamento conhecido é o chamado "Censos 2021"; são um estudo estatístico da população portuguesa, onde todos os portugueses foram questionados com o objetivo de caracterizar os habitantes de Portugal. Neste caso todos os elementos da população em estudo foram objetos de estudo.

Uma sondagem, conceito também conhecido, é utilizado por exemplo nas eleições. Apesar de os votos serem todos contados, há uma sondagem prévia, na qual algumas pessoas, escolhidas aleatoriamente e de diferentes lugares geográficos, são questionadas acerca da sua intenção de voto para que seja possível prever o resultado eleitoral, que normalmente coincide com aquele que é apresentado após a contagem dos votos. Mais uma vez, numa sondagem, é muito importante a representatividade da população em estudo para que se obtenham resultados fidedignos.

Variável Estatística: característica que admite valores distintos (número ou modalidade).

1. **Quantitativa** (dados mensuráveis)
   - **Contínua:** é aquela que pode tomar todos os valores numéricos de um dado intervalo (por exemplo: "altura dos alunos" de uma turma).
   - **Discreta:** é aquela que só toma valores isolados (por exemplo: "número de irmãos").
2. **Qualitativa** (dados não contáveis) (por exemplo: cor dos olhos)

Exemplo (continuação do exemplo anterior: características do cavalo lusitano)

Exemplos de variáveis quantitativas ou numéricas:

Contínuas: "comprimento da cabeça"; "idade"; "comprimento da cauda";

Discretas: "número de descendentes"; "número de manchas";

Exemplos de variáveis qualitativas: "cor da pelagem"; "tipo de alimentos"; "temperamento".

Uma amostra deve ser representada por uma sequência de valores.

Por exemplo, se considerarmos x a variável "número de descendentes", podemos recolher a amostra $\underset{\sim}{x} = (1,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 5)$ *. Se considerarmos y a variável "serra onde vive", podemos recolher a amostra* $\underset{\sim}{y} = (Gerês,\ \ Gerês,\ \ Gerês,\ \ Peneda,\ \ Peneda,\ \ Amarela)$.

Média de uma amostra

Dados $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de uma variável estatística, a média da amostra $\underset{\sim}{x}$ representa-se por $\bar{x}$ e é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

consideremos a amostra $\underset{\sim}{x} = (2, 4, 4, 5, 8, 10, 10, 13)$;

$$\bar{x} = \frac{2+4+4+5+8+10+10+13}{8} = 7$$

<u>Fórmula da média para dados agrupados:</u>

Dados $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m$, com $(1 \leq m \leq n)$, são os m valores distintos da amostra $\underset{\sim}{x}$, e representa-se por $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{x}_1 n_1 + \tilde{x}_2 n_2 + \cdots + \tilde{x}_{m-1} n_{m-1} + \tilde{x}_m n_m}{n}$$

onde n_j com $(1 \leq m \leq n)$ é a frequência absoluta do valor $\tilde{x}_j$.

A amostra acima, $\underset{\sim}{x} = (2, 4, 4, 5, 8, 10, 10, 13)$, tem dados agrupados, ou seja, que estão repetidos e, por isso, pode ser apresenta na forma de tabela de frequência:

$\tilde{x}_j$	n_j
2	1
4	2
5	1
8	1
10	2
13	1

	$\tilde{x} = \frac{2+4\times2+5+8+10\times2+13}{8} = 7$
<u>Propriedades da média de uma amostra:</u> Dados $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, temos que:	Consideremos a amostra $\underset{\sim}{x} = (1,2,3,3)$ $\bar{x} = \frac{1+2+3+3}{4} = \frac{9}{4}$
1. Sendo a amostra $\underset{\sim}{y} = (ax_1 + h,\ ax_2 + h,\ \dots,\ ax_n + h)$, então $\bar{y} = a\bar{x} + h$, onde h e a são dois números reais;	Considerando $a = 3$ e $h = 1$, obtemos a amostra $\underset{\sim}{y} = (4,7,10,10) =$ $= (3\times1+1, 3\times2+1, 3\times3+1, 3\times3+1)$ $\bar{y} = 3\times\bar{x}+1 = 3\times\frac{9}{4}+1 = \frac{31}{4}$

2. O valor da média está entre o máximo e o mínimo da amostra e não pode ser igual ao mínimo sem ser também igual ao máximo (o que acontece quando a amostra é constante).

A média é uma medida de localização que transmite alguma informação sobre a amostra em estudo, mas apresenta algumas limitações, já que apenas com a média não temos noção, por exemplo, se os valores da amostra são próximos ou não da média. Assim, surge a necessidade de usar as medidas de dispersão.

Desvio em relação à média

Dados $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ designa-se por desvio em relação à média a quantidade $\boldsymbol{x_i - \bar{x}}$ e representa-se por d_i.

A soma dos desvios em relação à média dos valores observados é nula $(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\dots+(x_n-\bar{x}) =$ $= d_1 + d_2 + \dots + d_n = 0$	**Consideremos a amostra** $\underset{\sim}{x} = (2, 4, 4, 5, 8, 10, 10, 13)$, e $\bar{x} = 7$ $(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\dots+(x_n-\bar{x}) =$ $(2-7)+(4-7)+(4-7)+(5-7)+(8-7)$ $+(10-7)+(10-7)+(13-7)$ $= -5-3-3-2+1+3+3+5$ $= 0$

De modo a evitar as diferenças negativas em relação à média, elevamos os desvios ao quadrado.

<u>Soma dos quadrados dos desvios</u>

Dados $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a soma dos quadrados dos desvios dos x_i	$\underset{\sim}{x} = (2, 4, 4, 5, 8, 10, 10, 13)$

em relação à média representa-se por SS_x e é dada por: $$\boldsymbol{SS_x = (x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}$$ $$=({x_1}^2-2x_1\bar{x}+\bar{x}^2)+({x_2}^2-2x_2\bar{x}+\bar{x}^2)+\cdots+({x_n}^2-2x_n\bar{x}+\bar{x}^2)=$$ $$=({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)\bar{x}+n\bar{x}^{\,2}$$ $$=({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)-2(n\bar{x})\bar{x}+n\bar{x}^{\,2}$$ $$\boldsymbol{=({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)-n\bar{x}^{\,2}}$$	$SS_x=(2-7)^2+(4-7)^2+(4-7)^2+(5-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(10-7)^2+(13-7)^2=25+9+9+4+1+9+9+36=102$ $$SS_x=[(2^2+4^2+4^2+5^2+8^2+10^2+10^2+13^2)-8\times 7^2=494-392=102$$
Soma dos quadrados dos desvios para dados agrupados	
Dados $n\in\mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, a soma dos quadrados dos desvios para dados agrupados é dada por: $$SS_x=(\tilde{x}_1-\bar{x}\,)^2n_1+(\tilde{x}_2-\bar{x}\,)^2n_2+\cdots(\tilde{x}_m-\bar{x}\,)^2n_m$$ Onde $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_m$ representam os m valores distintos da amostra $\underset{\sim}{x}$ **e** n_j a frequência absoluta de $\tilde{x}_j$.	$$SS_x=(2-7)^2+(4-7)^2\times 2+(5-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2\times 2+(13-7)^2$$ $$=25+9\times 2+4+1+9\times 2+36$$ $$=102$$
Propriedades da soma dos quadrados dos desvios Dados $n\in\mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, e os números reais h e a temos que: 1. $SS_x=0$ se e só se $x_1=x_2=\cdots=x_n$;	
2. Se $\underset{\sim}{y}=\underset{\sim}{x}+\boldsymbol{h}$ então $SS_y=SS_x$;	$\underset{\sim}{x}=(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{3})$ $\underset{\sim}{y}=(\mathbf{8},\mathbf{9},\mathbf{10},\mathbf{10})=(\mathbf{1}+\mathbf{7},\mathbf{2}+\mathbf{7},\mathbf{3}+\mathbf{7},\mathbf{3}+\mathbf{7})$ **Então** $$SS_y=SS_x$$
3. Se $\underset{\sim}{y}=\boldsymbol{a}\underset{\sim}{x}$ então $SS_y=a^2SS_x$	$\underset{\sim}{x}=(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{3})$ $\underset{\sim}{y}=(-\mathbf{2},-\mathbf{4},-\mathbf{6},-\mathbf{6})=$ $=(-\mathbf{2}\times\mathbf{1},-\mathbf{2}\times\mathbf{2},-\mathbf{2}\times\mathbf{3},-\mathbf{2}\times\mathbf{3})$ então $SS_y=a^2SS_x=(-2)^2SS_x=4SS_x$

Variância e desvio-padrão de uma amostra

A variância e o desvio padrão são duas medidas de dispersão que permitem inferir se os dados estão ou não próximos da média, permitindo assim, recolher mais informações da amostra em estudo.

Dados $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, temos que:

• ${S_x}^2 = \frac{SS_x}{n-1}$ diz-se a *variância* da amostra $\underset{\sim}{x}$; • No cálculo da variância populacional a variância obtém-se da divisão da soma dos quadrados dos desvios por n, ao contrário da variância amostral em que a divisão é por $n-1$. Esta diferença tem como objetivo obter uma melhor estimativa da variância populacional e com um menor erro médio.	${S_x}^2 = \frac{102}{7} = 14{,}57$
• $S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$ diz-se o ***desvio-padrão*** da amostra $\underset{\sim}{x}$**;** • $Desvio\ padrão$ é uma medida de dispersão que permite analisar se os valores da amostra estão próximos da média. Quanto menor o valor do desvio, mais próximos da média estão os valores da amostra. Quanto maior for o desvio padrão, maior a dispersão dos valores em relação à média.	$S_x = \sqrt{\frac{102}{7}} = 3{,}82$

<u>Propriedades da variância e do desvio-padrão de uma amostra</u>

Dados $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, e os números reais h e a temos que:

1. $S_x = 0$ se e só se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$;

2. Se $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + \boldsymbol{h}$ então $S_y = S_x$;	$\underset{\sim}{x} = (1,2,3,3)$ $\underset{\sim}{y} = (8,9,10,10) = (1+7, 2+7, 3+7, 3+7)$ Então $S_y = S_x$
3. Se $\underset{\sim}{y} = a\,\underset{\sim}{x}$ então $S_y = \lvert a \rvert S_x$	$\underset{\sim}{x} = (1,2,3,3)$ $\underset{\sim}{y} = (-2,-4,-6,-6) =$ $= (-2\times 1, -2\times 2, -2\times 3, -2\times 3)$ então $S_y = \lvert a\rvert S_x = \lvert -2\rvert S_x = 2S_x$

Quartis e percentis

Outras medidas de dispersão muito úteis são os percentis, que permitem localizar uma percentagem dos dados da amostra abaixo de um determinado valor, permitindo assim conhecer e analisar melhor a amostra.

Chama-se mediana ao valor que separa a quantidade de dados em duas partes iguais: 50% dos dados abaixo dela e 50% acima. Assim como a mediana, existem outros valores que separam os dados em partes iguais.

Quartis: dividem os dados em quatro partes (cada parte tem 25% dos dados).

Percentis: dividem a amostra ordenada em 100 partes onde cada parte tem 1% dos dados. São indicados por $P_1, P_2, \dots, P_{99,}, P_{100}$.

Percentil de ordem k

Dados $n \in \mathbb{N}$, uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e um número natural $k \in]0{,}100]$, designa-se **por percentil de ordem k** e representa-se por P_k o valor tal que:

- O valor máximo da amostra é igual ao percentil 100 ou seja P_{100};
- O 1º e o 3º quartis também são conhecidos como P_{25} e P_{75}, respetivamente;
- A mediana de $\underset{\sim}{x}$ é igual ao percentil 50 (P_{50});
- k % dos dados da amostra são inferiores ou iguais a P_k.

Processo para determinar o percentil de ordem k

1. Calcular o valor $\frac{k\,n}{100}$;
2. Para $k \neq 100$ se o valor $\frac{kn}{100}$ for inteiro então P_k é a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$,na amostra ordenada, ou seja $P_k = \frac{x_{\left(\frac{kn}{100}\right)} + x_{\left(\frac{kn}{100}+1\right)}}{2}$;
3. Para $k \neq 100$ se $\frac{kn}{100}$ não for inteiro então $P_k = x_{\left(\left[\frac{kn}{100}\right]+1\right)}$

Considera a amostra $\underset{\sim}{x} = (0, 10, 3, 4, 2, 0, 14, 3)$.

Ordenando os dados da amostra ficamos com $\underset{\sim}{x} = (0, 0, 2, 3, 3, 4, 10, 14)$

A mediana de $\underset{\sim}{x}$ é igual P_{50}

Tem-se que $\frac{kn}{100} = \frac{50 \times 8}{100} = 4$. Como 4 é um número inteiro então $P_{50} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$;

50 % dos dados da amostra inferiores ou iguais a $P_{50} = 3$.

Consideremos a amostra $\underset{\sim}{y} = (6, 3, 4, 6, 8, 9, 6)$. Determinemos $P_{100}, P_{50}\ e\ P_{85}$.

A amostra ordenada é $\underset{\sim}{y} = (3, 4, 6, 6, 6, 8, 9)$.

$P_{100} = 9$

Como $\frac{50 \times 7}{100} = 3{,}5$ não é inteiro, $P_{50} = y_{\left(\left[\frac{50\times7}{100}\right]+1\right)} = y_{([3{,}5]+1)} = y_{(4)} = 6.$

Como $\frac{85 \times 7}{100} = 5{,}95$ não é inteiro $P_{85} = y_{\left(\left[\frac{85\times7}{100}\right]+1\right)} = y_{([5{,}95]+1)} = y_{(6)} = 8$

Num estudo estatístico, por vezes, sobre cada unidade estatística são recolhidos dados de duas variáveis estatísticas, por exemplo, o preço de venda de um carro usado e o número de quilómetros efetuados pelo mesmo. Assim, é necessário analisar amostras relacionando as duas variáveis em estudo e verificar a sua relação.

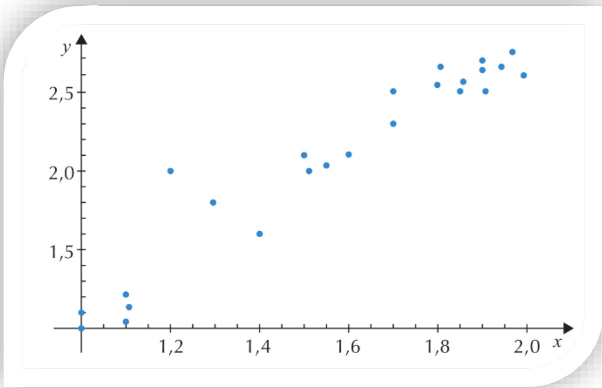
AMOSTRAS BIVARIADAS

Dados uma amostra A, de dimensão $n \in \mathbb{N}$, de uma população cujos elementos estão numerados de 1 a n, e duas variáveis estatísticas x e y dessa população, a sequência $\left((\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{y_1}),\ (\boldsymbol{x_2},\ \boldsymbol{y_2}),\ \ldots,\ (\boldsymbol{x_n},\ \boldsymbol{y_n})\right)$ designa-se por **amostra bivariada das variáveis $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$** ou **amostra de dados bivariados** e representa-se por $\underset{\sim}{(x,y)}$.

Esta amostra tem também **dimensão $\boldsymbol{n}$**.

Nuvem de pontos

Uma amostra pode representar-se graficamente por uma nuvem de pontos (ou **diagrama de dispersão**), onde cada elemento (x_i, y_i) da amostra é representado pelo ponto $P_i(x_i, y_i)$ do plano ortogonal.



<u>Variável explicativa e variável resposta</u>

Em casos concretos da vida real tem sentido definir uma das variáveis como sendo a variável independente (**variável explicativa**) e a outra como sendo a variável dependente (**variável resposta**).

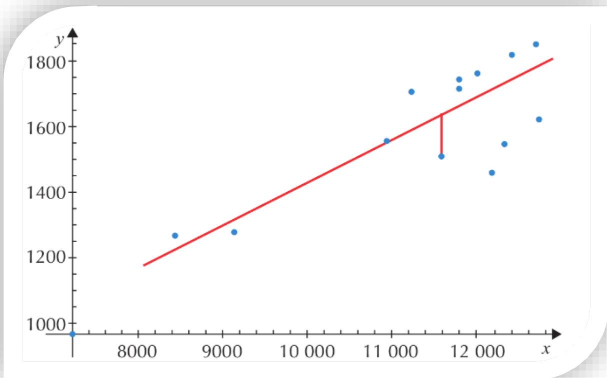
Esta escolha não tem por base qualquer conceito estatístico e deve ser feita tendo em conta o conhecimento empírico da situação em causa.

Desvio vertical de um ponto em relação a uma reta

Fixado um referencial ortogonal do plano e considerada uma sequência $(P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$, o valor de

$$y_i - ax_i - b,\ i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$$

designa-se por **desvio vertical do ponto $\boldsymbol{P_i(x_i, y_i)}$ em relação à reta $\boldsymbol{t}$** e representa-se por e_i



<u>Propriedade</u>

Fixado um referencial ortogonal do plano e dados um número natural n, uma sequência $(P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$, as condições

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 0 \text{ e } \boldsymbol{b = \overline{y} - a\overline{x}} \text{ são } \underline{\text{equivalentes}}.$$

Se o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta t de equação $y = ax + b$ então $\boldsymbol{b = \bar{y} - a\bar{x}}$.

Reta dos mínimos quadrados

A **equação reduzida da reta dos mínimos quadrados** é dada por
$y = ax + b$, onde

$$\left(a = \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_{n)} - n\bar{x}\,\bar{y}}{SS_x}\right)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

$\underset{\sim}{x} = (1{,}2; 2{,}3; 3{,}7; 4{,}2)$ $\quad \underset{\sim}{y} = (2{,}3; 3; 2{,}7; 2{,}8)$

$$\bar{x} = \frac{1{,}2 + 2{,}3 + 3{,}7 + 4{,}2}{4} = 2{,}85$$

$$\bar{y} = \frac{2{,}3 + 3 + 2{,}7 + 2{,}8}{4} = 2{,}7$$

$$a = \frac{1{,}2 \times 2{,}3 + 2{,}3 \times 3 + 3{,}7 \times 2{,}7 + 4{,}2 \times 2{,}8 - 4 \times 2{,}85 \times 2{,}7}{1{,}2^2 + 2{,}3^2 + 3{,}7^2 + 4{,}2^2 - 4 \times 2{,}85^2}$$

$\approx 0{,}11$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2{,}7 - 0{,}11312 \times 2{,}85 \approx 2{,}38$

A equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é

$\boldsymbol{y = 0{,}11x + 2{,}38}$

1. A reta dos mínimos quadrados é aquela cujo valor da soma dos quadrados dos desvios verticais:

   ${e_1}^2 + {e_2}^2 + \cdots + {e_n}^2$ é mínimo

2. O ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta dos mínimos quadrados.

3. A reta dos mínimos quadrados permite encontrar uma aproximação para o valor da variável y (variável resposta) sabendo um valor da variável x (variável explicativa). Por exemplo, se x é uma amostra das alturas dos alunos de uma turma e y é uma amostra das suas massas corporais, através da reta dos mínimos quadrados, é possível saber, aproximadamente, o valor da massa corporal de um aluno a partir da sua altura.

4. A reta dos mínimos quadrados não deve ser usada para encontrar aproximações da variável x (altura) sabendo o valor da variável y (massa), uma vez que a equação desta reta foi encontrada usando a variável x como variável explicativa e a variável y como variável resposta.

Coeficiente de correlação linear

O **coeficiente de correlação linear** das variáveis x e y é dado por:

$$\boldsymbol{r = \frac{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}}$$

$$= \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_{n)-\bar{x}\bar{y}}}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_{n)} - \bar{x}\bar{y}}{SS_x} \times \frac{SS_x}{\sqrt{SS_x SS_y}} =$$

$\boldsymbol{= a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}}$, sendo a o declive da reta dos mínimos quadrados.

Este coeficiente toma valores no intervalo $[-1,\ 1]$.

1. Um coeficiente de correlação linear com um valor próximo de 0 indica que **não existe associação linear** entre as variáveis.
2. Quanto mais perto de 1 estiver $|r|$ mais forte é a associação linear entre as variáveis.
3.

Usando a amostra anterior, temos que:

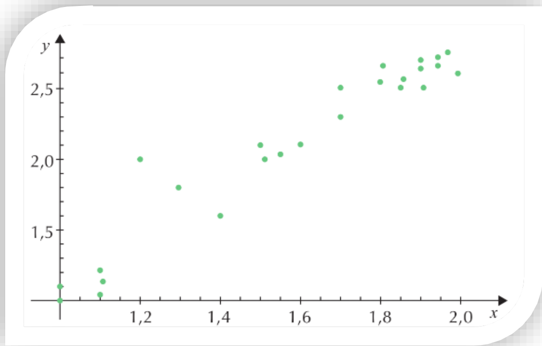
$$r = a\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}} =$$

$$= 0{,}11\sqrt{\frac{1{,}2^2 + 2{,}3^2 + 3{,}7^2 + 4{,}2^2 - 4 \times 2{,}85^2}{2{,}3^2 + 3^2 + 2{,}7^2 + 2{,}8^2 - 4 \times 2{,}7^2}} \approx 0{,}52$$

Associação linear positiva

Se os pontos se encontram dispersos de forma aproximadamente linear, de modo que aos maiores valores de x correspondem os maiores valores de y.

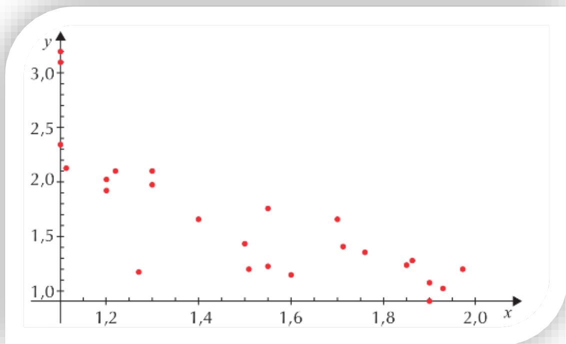
Um coeficiente de correlação linear positivo indica que as variáveis têm uma **associação linear positiva**.



Associação linear negativa

Se os pontos se encontram dispersos de forma aproximadamente linear, de modo que aos maiores valores de x correspondem os menores valores de y.

Um coeficiente de correlação linear negativo indica que as variáveis têm uma **associação linear negativa**.



Anexo L

Ficha de Trabalho de Estatística

Ficha Formativa n.º 20 **Estatística** **Data:** maio de 2023

1. Num controlo das dimensões do peixe, foi recolhida uma amostra no sentido de analisar o comprimento das sardinhas pescadas por uma pequena embarcação, tendo-se registado os seguintes valores (em mm):

201	183	176	211	168	192	175	203	250	185
225	230	260	240	190	255	147	225	283	200

1.1 Deste estudo estatístico indique a população em estudo, a unidade estatística, a amostra, a sua dimensão, e a variável em estudo.

1.2 Calcule a média da amostra.

1.3 Determine a soma dos quadrados dos desvios, a variância e o desvio padrão da amostra.

2. As classificações no exame de Matemática dos 24 alunos da turma A foram:

12	12	14	12	14	10	10	12	14	10	8	10
8	18	6	6	10	10	10	18	10	8	10	16

enquanto as dos 20 alunos da turma B foram:

14	12	12	6	20	6	10	10	4	10
8	6	18	8	18	10	12	12	12	14

2.1 Qual das duas turmas tem a melhor média das classificações? Justifique.

2.2 Determine o desvio-padrão das duas distribuições e indique em que turma as classificações estão mais dispersas.

2.3 Determine para cada uma das duas turmas os valores de P_{10}, P_{40}, P_{85} .

2.4 Indique a percentagem de alunos que na turma B obtiveram classificação superior a 15 valores.

3. Uma empresa fez um estudo sobre o investimento em publicidade usando uma amostra de um grupo de empresas de um determinado setor de atividade. Os dados apurados encontram-se na tabela seguinte.

Empresa	A	B	C	D	E	F	G	H
Investimento (milhares de euros)	7	9	13	16	18	21	23	27
Vendas (milhares de euros)	84	101	142	165	221	275	296	349

3.1 Marque, num referencial ortogonal, os pontos que representam os elementos da amostra.

3.2 Indique a variável explicativa e a variável resposta.

3.3 Pela observação da nuvem de pontos construída em 3.1, indique qual a associação entre as variáveis em estudo que lhe parece mais adequada.

3.4 Determine o coeficiente de correlação entre as variáveis e conclua sobre o tipo de associação entre as variáveis investimento e vendas.

3.5 Calcule a média e o desvio-padrão de cada variável.

4. Num estudo sobre o teor de fósforo na água, em mg/L , à entrada e à saída de estações de tratamento de águas residuais (ETAR), obteve-se os seguintes resultados de uma amostra com cinco elementos.

ETAR	A	B	C	D	E	F	G	H
X (teor de fósforo à entrada)	4,4	6,6	7,3	6,5	5,8	5,3	6,1	7,1
y (teor de fósforo à saída)	3,1	4,7	5,4	4,6	4,2	3,9	4,3	5,1

4.1 Represente, num referencial ortogonal, os pontos correspondentes aos pares de valores indicados na tabela.

4.2 Que tipo de associação se pode estabelecer entre as variáveis?

4.3 Deduza a equação reduzida de uma reta que melhor se ajuste aos pontos. Apresente valores aproximados às centésimas.

4.4 Utilize a equação da reta obtida em 4.3 para prever o teor de fósforo à saída de uma ETAR se o teor de fósforo à entrada for 5,1 mg/L .

4.5 Determine o valor do coeficiente de correlação linear.

4.6 Tendo em conta o valor obtido em 4.5, o que pode referir sobre a qualidade da previsão obtida em 4.4?

4.7 Comente a seguinte afirmação: «Podemos utilizar a equação reduzida da reta obtida em 4.2 para prever o teor de fósforo à entrada de uma ETAR se à saída ele for de 6,1 mg/L . »

4.8 De acordo com o Decreto-lei 236/98 de 1 de agosto, o valor máximo admitido (VMA) para o teor de fósforo na água para consumo humano é de 5,0 mg/L . Qual será a previsão para o máximo de teor de fósforo na água à entrada da ETAR de modo que não ultrapasse à saída aquele valor?

Soluções:

1.1 população: sardinhas do mar; unidade estatística: uma sardinha; amostra $\underset{\sim}{x} = (201, 183, 176, 211, 168, 192, 175, 203, 250, 185, 225, 230, 260, 240, 190, 255, 147, 225, 283, 200)$; dimensão: 20; variável: tamanho da amostra; **1.2** $\bar{x} = 209{,}95$; **1.3.** $SS_x = 23626{,}90;\ {S_x}^2 = 1243{,}52;\ S_x = 35{,}26$; **2.1.** $\bar{x} = 11{,}1667;\ \bar{x} = 11{,}10$. A turma A tem uma melhor média. **2.2** $S_x = 3{,}23;\ S_y = 4{,}278$. As classificações estão mais dispersas na turma B. **2.3.** Turma A: $P_{10} = 8;\ P_{40} = 10;\ P_{85} = 14$; Turma B: $P_{10} = 6;\ P_{40} = 10;\ P_{85} = 16$; **2.4** 15%
3.2. Variável explicativa: investimento; variável resposta: vendas; **3.3.** aparenta haver uma associação linear positiva.
3.4. $r = 0{,}9896$; como o valor de r é muito próximo de 1 e é positivo, existe uma associação linear positiva forte entre as duas variáveis. **3.5.** $\bar{x} = 16{,}75$; $S_x = 6{,}90$; $\bar{y} = 204{,}125$; $S_y = 96{,}50$; **4.2**. associação linear positiva forte; **4.3.** $y = 0{,}74x - 0{,}15$ **4.4.** $y = 3{,}624$; **4.5.** $r = 0{,}993$ **4.6** Dado que o coeficiente de correlação linear tem um valor muito próximo de 1 , a associação linear entre as duas variáveis é muito forte, pelo que devemos considerar muito boa a previsão obtida na alínea 4.5. **4.7.** a afirmação é falsa, pois a reta obtida em 4.2 toma x como variável explicativa e y como variável resposta. Logo, apenas pode ser usada para, dado o teor de fósforo à entrada, prever o fósforo à saída.
4.8. O teor de fósforo à entrada da ETAR não deve ultrapassar os 6,96 mg/L .

Anexo M

Resolução da Ficha de Trabalho de Estatística

Ficha formativa nº20 (Estatística)

1)

1.1) População: conjunto de sardinhas do mar

unidade estatística: uma sardinha

amostra: $\underset{\sim}{x} = (201, 183, 176, 211, 168, 192, 175, 203, 250, 185, 225, 230, 260, 240, 190, 255, 147, 225, 283, 200)$

dimensão: 20

variável em estudo: tamanho da sardinha

1.2)

$$\overline{x} = \frac{201+183+176+211+168+192+175+203+250+185+225+230+260+240+190+}{20}$$

$$+\frac{255+147+225+283+200}{20} \simeq 209,95$$

1.3) A soma dos quadrados dos desvios SS_x é:

$$SS_x = (201^2+183^2+176^2+211^2+168^2+192^2+175^2+203^2+250^2+185^2+225^2+$$
$$+230^2+260^2+240^2+190^2+255^2+147^2+225^2+283^2+200^2) - 20 \times 209,95^2 =$$
$$\simeq 23\,626,95$$

Variância (S_x^2): $S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{23626,95}{20-1} \simeq 1243,52$

Desvio padrão (S_x): $S_x = \sqrt{1243,52} \simeq 35,26$

2)

Seja $\underset{\sim}{x}$ a amostra de resultados para a turma A e $\underset{\sim}{y}$ a amostra de resultados da turma B.

Agrupemos os dados das duas amostras:

classificação	6	8	10	12	14	16	18
frequência absoluta	2	3	9	4	3	1	2

(turma A)

classificação	4	6	8	10	12	14	18	20
frequência absoluta	1	3	2	4	5	2	2	1

2.1) usando os dados agrupados:

$$\bar{x} = \frac{(2\times6+3\times8+9\times10+4\times12+3\times14+1\times16+2\times18)}{24} \simeq 11,1667$$

$$\bar{y} = \frac{(1\times4+3\times6+2\times8+4\times10+5\times12+2\times14+2\times18+1\times20)}{20} \simeq 11,1000$$

A turma A tem uma média superior.

2.2)

$$SS_y = (4-11,1000)^2 + (6-11,1000)^2\times3 + (8-11,1000)^2\times2 + (10-11,1000)^2\times4 +$$
$$+ (12-11,1000)^2\times5 + (14-11,1000)^2\times2 + (18-11,1000)^2\times2 + (20-11,1000)^2\times1$$
$$\simeq 347,8$$

$$S_y^2 = \frac{SS_y}{20-1} \simeq 18,305 \qquad S_y = \sqrt{18,305} \simeq 4,278$$

$$SS_x = (6-11,1667)^2\times2 + (8-11,667)^2\times3 + (10-11,667)^2\times9 + (12-11,667)^2\times4 +$$
$$+ (14-11,667)^2\times3 + (16-11,667)^2\times1 + (18-11,1667)^2\times2 \simeq 239,33$$

$$S_x^2 = \frac{SS_x}{24-1} \simeq 10,406 \qquad S_x = \sqrt{10,406} \simeq 3,23$$

como $S_y > S_x$, o desvio padrão das classificações da turma B é superior, pelo que as classificações estão mais dispersas nesta turma.

2.3) Para a turma A:

$$P_{10} : \frac{10\times24}{100} = 2,4 \notin \mathbb{N} \text{ logo } P_{10} = x_{(3)} = 8$$

$$P_{40} : \frac{40\times24}{100} = 9,6 \notin \mathbb{N} \text{ logo } P_{40} = x_{10} = 10$$

P_{85}: $\frac{85 \times 24}{100} = 20,4 \notin \mathbb{N}$ logo $P_{85} = x_{21} = 14$

Para a turma B:

P_{10}: $\frac{10 \times 20}{100} = 2 \in \mathbb{N}$ logo $P_{10} = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{6+6}{2} = 6$

P_{40}: $\frac{40 \times 20}{100} = 4 \in \mathbb{N}$ logo $P_{40} = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{6+8}{2} = 7$

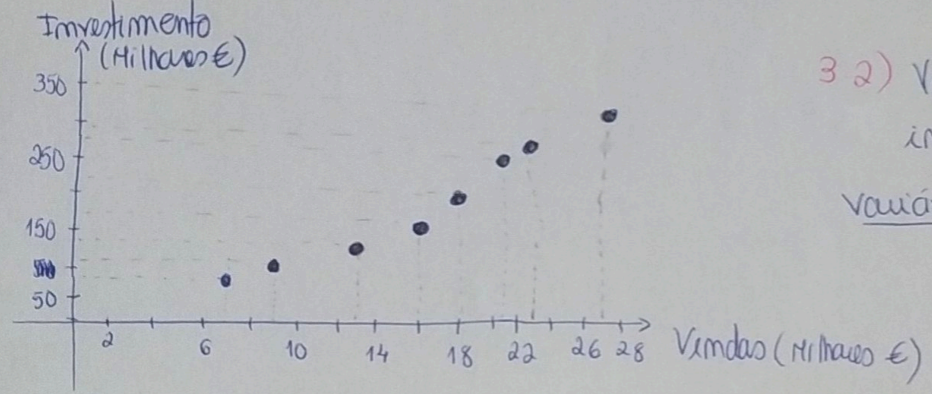
P_{85}: $\frac{85 \times 20}{100} = 17 \in \mathbb{N}$ logo $P_{85} = \frac{x_{17} + x_{18}}{2} = \frac{14+18}{2} = 16$

2.4) Há 3 alunos da turma B com classificação superior a 15 valores.

$\frac{3}{20} = 0,15$ Logo há 15% de alunos com classificação superior a 15.

3)

3.1)



3.2) Variável explicativa: investimento

Variável resposta: vendas

3.3) O gráfico apresenta que tem uma associação linear positiva

3.4) com recurso à calculadora gráfica, obtém-se $r = 0,9896$

como r está muito próximo de 1 e é positivo, existe uma associação linear positiva forte entre as duas variáveis.

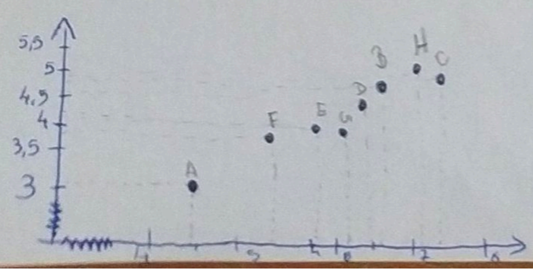
3.5) com recurso à calculadora gráfica:

$\bar{x} = 16,75$ $S_x = 6,90$ $\bar{y} = 204,125$ $S_y = 96,50$

com x a amostra de dados do investimento e y a amostra de dados de vendas.

4)

4.1)



4.2) Pode estabelecer-se uma associação linear positiva forte

4.3) $\bar{x} = \dfrac{4,4+6,6+7,3+6,5+5,8+5,3+6,1+7,1}{8} = 6,1375$

$\bar{y} = \dfrac{3,1+4,7+5,4+4,6+4,2+3,9+4,3+5,1}{8} = 4,4125$

$SS_x = (4,4^2+6,6^2+7,3^2+6,5^2+5,8^2+5,3^2+6,1^2+7,1^2) - 8\times 6,1375^2 = 6,45875$

$a = \dfrac{4,4\times 3,1+6,6\times 4,7+7,3\times 5,4+6,5\times 4,6+5,8\times 4,2+5,3\times 3,9+6,1\times 4,3+7,1\times 5,1}{6,45875}$

$- \dfrac{6,1375\times 4,4125\times 8}{6,45875} = \dfrac{4,79625}{6,45875} \simeq 0,74$

$b = 4,4125 - 0,74\times 6,1375 = -0,15$ $\qquad y = 0,74x - 0,15$

4.4) $x = 5,1 \text{ mg/L}$

$y = 0,74\times 5,1 - 0,15 = 3,624$

4.5) $SS_y = (3,1^2+4,7^2+5,4^2+4,6^2+4,2^2+3,9^2+4,3^2+5,1^2) - 8\times 4,4125^2$
$= 3,60875$

$r = a\sqrt{\dfrac{SS_x}{SS_y}} = 0,74\times\sqrt{\dfrac{6,45875}{3,60875}} \simeq 0,993$

4.6) Dado que o coeficiente de correlação é muito próximo de 1, a associação linear entre as duas variáveis é muito forte, pelo que devemos considerar muito boa a previsão obtida em 4.5.

4.7) A afirmação é falsa, pois a reta obtida em 4.2 toma x como variável explicativa e y como variável resposta. Logo, apenas pode ser usada para, dado o teor de fósforo à entrada, prever o fósforo à saída.

4.8) $y < 5,0 \Leftrightarrow 0,74x - 0,15 < 5,0 \Leftrightarrow x < 6,96 \text{ mg/L}$

O teor de fósforo à entrada não deve ultrapassar 6,96 mg/L

Anexo N

Ficha Formativa: Máquinas gráficas

Ficha Formativa 21	Estatística	maio 2023

Estatística Exercícios resolvidos

Exercício 1

Contou-se o número de folhas em cada uma de 150 plantas do tabaco (Havano). Os resultados estão registados na tabela a seguir apresentada.

Número de folhas	17	18	19	20	21	22	23	24
Número de plantas	3	22	44	42	22	10	6	1

Recorrendo à calculadora, calcule os valores da média, da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, da variância e do desvio-padrão do número de folhas destas plantas.

Adaptado do Caderno de Apoio, 10.º ano

Casio FX-CG20

1 **Introdução de dados:**
Escolher menu e a opção **Statistics** (**Figura 1**).
Na lista 1 (List 1), introduzir os valores correspondentes ao número de folhas, e os relativos ao número de plantas na lista 2 (List 2) (**Figura 2**).

Figura 1

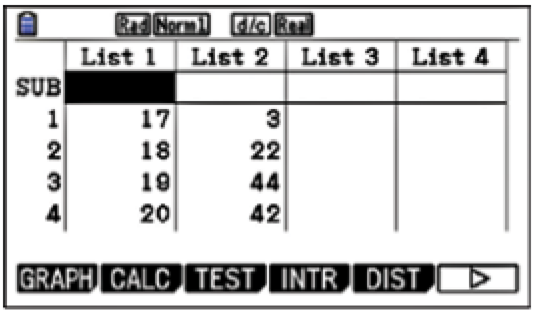


Figura 2

2 **Obter os valores da média, da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, da variância e do desvio-padrão:**
Pressionar F2 (CALC), a seguir F6 (SET) (**Figura 3**) para definir a variável (List 1) e a frequência dos valores da variável (List 2), premindo EXIT após efetuar a escolha.
Premir F1 (1-VAR) para obter o valor da média ($\overline{x}$) e do desvio-padrão (sx) (**Figura 4**).

NOTAS:

1. Para alterar a lista (quando necessário) que define a variável, pressionar F1 e indicar o número da lista. Para alterar a lista relativa à frequência, pressionar F2 e indicar o número da lista.
2. A soma dos quadrados dos desvios obtém-se calculando $\sum x^2 - n\bar{x}^2$; e a variância, efetuando sx^2 com os valores da **Figura 4**.

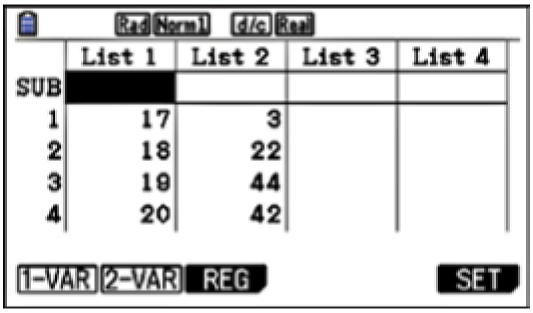


Figura 3

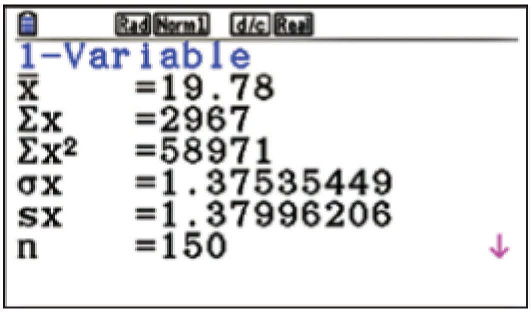


Figura 4

Texas TI-84 Plus

1 **Introdução de dados:**

Pressionar a tecla STAT e escolher a opção **1: Edit** (**Figura 5**).
Introduzir os valores de x_i em **L1** e os valores de n_i em **L2** (**Figura 6**).

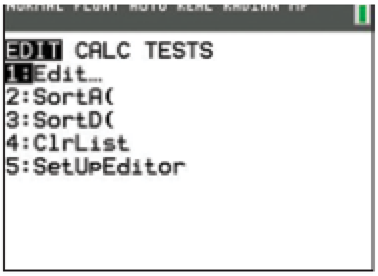


Figura 5

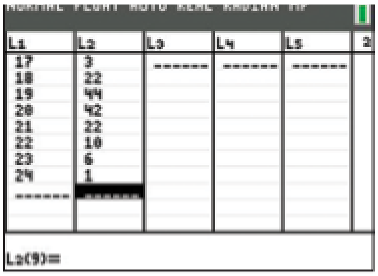


Figura 6

2 **Obter os valores da média, da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, da variância e do desvio-padrão:**

Pressionar STAT, escolher **CALC** e **1: 1-Var Stats** (**Figura 7**). Em seguida, colocar L_1 em **List** (pressionando 2ND seguida de 1); em **FreqList**, L_2 (pressionando 2ND seguida de 2) e escolher **Calculate** seguida de ENTER (**Figura 8**), obtendo-se assim os parâmetros pretendidos (**Figura 9**).

NOTA: A soma dos quadrados dos desvios obtém-se calculando $\sum x^2 - n\bar{x}^2$; e a variância, efetuando sx^2 com os valores da **Figura 9**.

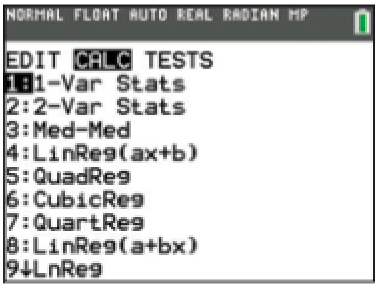


Figura 7

Figura 8

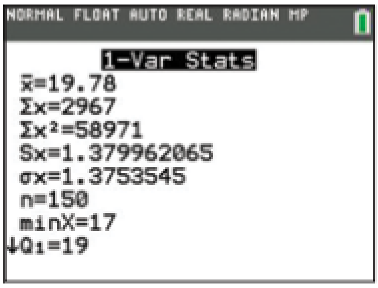


Figura 9

Texas TI-Nspire™ CX

① **Introdução de dados:**

Escolher o ícone **Listas e Folha de Cálculo** seguido de ENTER (Figura 10).

Colocar o cursor na célula com a letra A e escrever, por exemplo, as iniciais: **nf** (número de folhas), carregando de seguida em ENTER; depois, posicionar-se na célula B e digitar: **np** (número de plantas), seguindo-se novamente ENTER.

Introduzir os valores de x_i em **nf** (lista A) e os valores de n_i em **np** (lista B) (Figura 11).

Figura 10

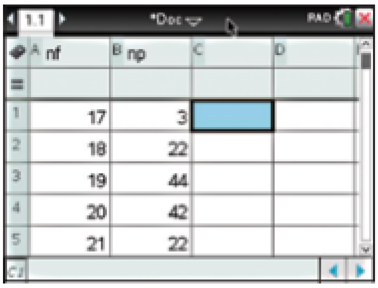


Figura 11

② **Obter os valores da média, da soma dos quadrados dos desvios em relação à média, da variância e do desvio-padrão:**

Pressionar a tecla menu, seguida de **4: Estatística**, **1: Cálculos estatísticos** e **1: Estatísticas de uma variável**. Em seguida, indicar que o número de listas é 1 e, no ecrã seguinte, escolher para **Lista X1:** nf (depois de colocar o cursor na célula e carregar no ícone com a «mão»), seguido de tab; e escolher para **Lista de frequências:** np (depois de colocar o cursor na célula e carregar novamente no ícone com a «mão»), seguido de tab. Escolher como **1.ª col de resultados** c[] e, por fim, selecionar **OK** (pressionando tab) (Figuras 12, 13 e 14).

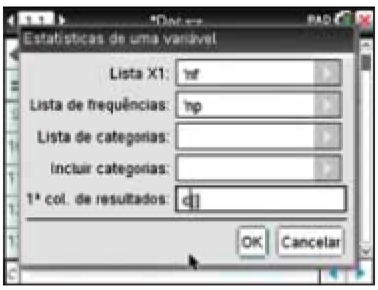


Figura 12

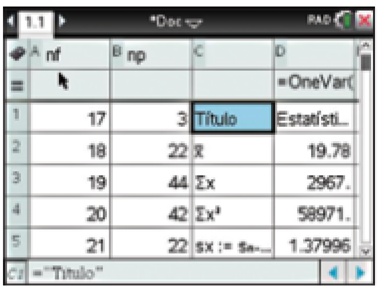


Figura 13

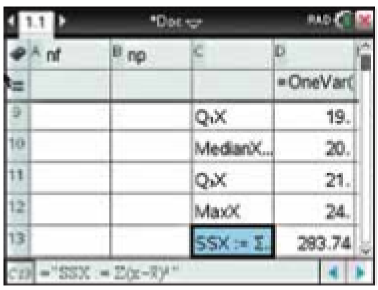


Figura 14

NOTA: O valor da variância obtém-se efetuando sx^2 .

Exercício 2

Numa zona agrícola com um determinado declive foi realizado um estudo acerca da influência da taxa do fluxo das águas (em litros por segundo) na erosão dos solos através da quantidade de massa de solo transportado (em quilogramas).
Foram feitas cinco medições, das quais resultaram os dados da tabela apresentada.
Utilizando a calculadora gráfica e considerando a taxa de fluxo como variável resposta, resolva os itens seguintes:

Taxa de fluxo	Solo erodido
0,31	0,82
0,85	1,95
1,26	2,18
2,47	3,01
3,75	6,07

2.1 Represente a nuvem de pontos num referencial ortogonal.

2.2 Determine a equação reduzida da reta de mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos.

2.3 Indique o valor do coeficiente de correlação linear.

Adaptado do Caderno de Apoio, 11.º ano

Resoluções

Casio FX-CG20

Introdução de dados:
Escolher o menu STAT e na lista 1 (List 1) introduzir os valores de x_i , e os de y_i na lista 2 (List 2) (**Figura 15**).

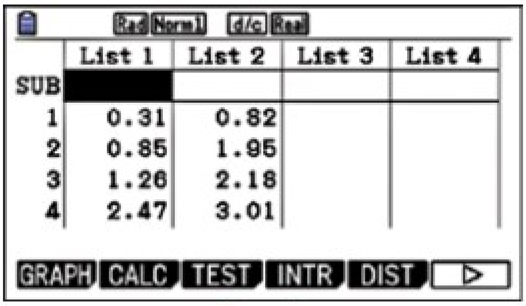


Figura 15

2.1

Obter a nuvem de pontos:
Pressionar duas vezes a tecla F1.
No primeiro clique está a selecionar a opção **GRPH**, no segundo a opção **GPH1** (**Figura 16**).

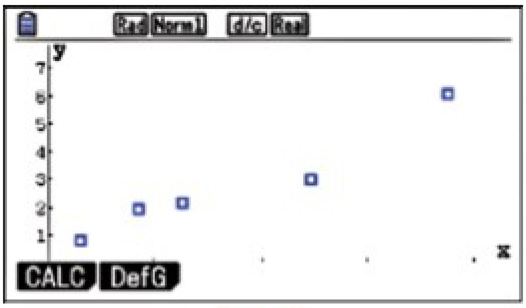


Figura 16

2.2 e 2.3

Obter os parâmetros a e b da equação da reta de mínimos quadrados e o valor de r, coeficiente de correlação linear:

Pressionar a tecla F1 (CALC) seguida de F2 (x) para obter os parâmetros a e b (Figura 17).

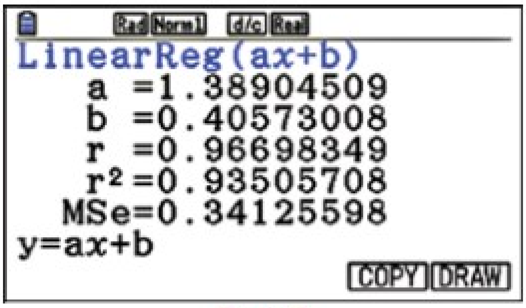


Figura 17

Pressionar F5 (COPY — copia para o editor de funções a equação da reta de mínimos quadrados).

Pressionar a tecla F6 para obter a reta de regressão e a nuvem de pontos no mesmo ecrã (Figura 18).

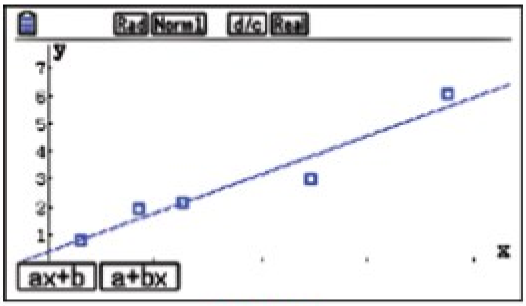


Figura 18

Texas TI-84 Plus

Introdução de dados:

Pressionar a tecla STAT e escolher a opção **1: Edit** (Figura 19).

Introduzir os valores de x_i em **L1** (lista 1) e os valores de y_i em **L2** (lista 2) (Figura 20).

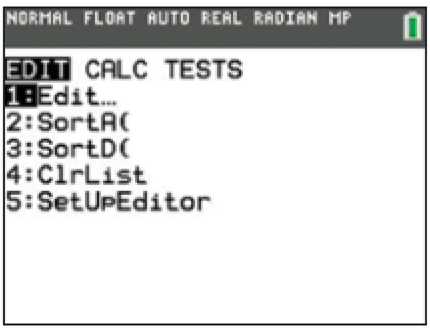


Figura 19

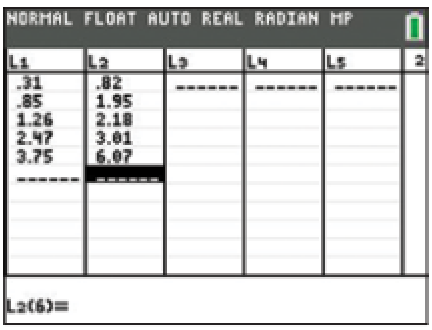


Figura 20

2.1

Obter a nuvem de pontos:

Pressionar a tecla 2ND seguida da tecla Y= (STAT PLOT), escolher a opção **1**, selecionar **On**, escolher o gráfico de pontos e indicar que **L**1 é a lista correspondente ao x e **L2** ao y, e, por fim, selecionar o tipo de marca para representar os pontos (**Figura 21**).

Pressionar a tecla WINDOW e adequar os limites da janela de forma a visualizar os pontos (**Figura 22**).

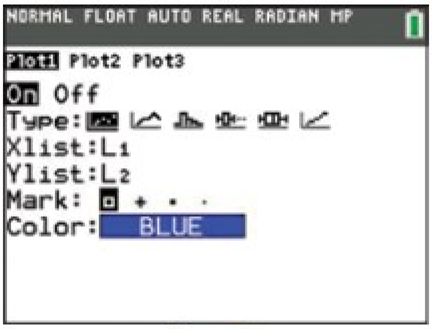


Figura 21

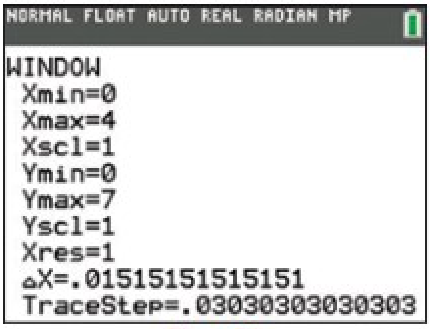


Figura 22

Clicar na tecla GRAPH para obter a nuvem de pontos (**Figura 23**).

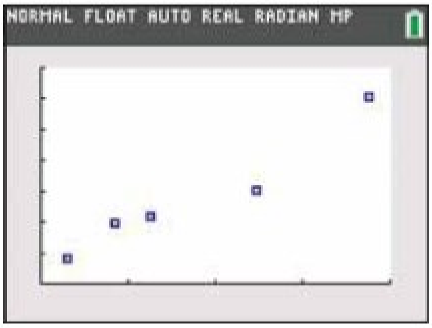


Figura 23

2.2 e 2.3

Obter os parâmetros a e b da equação da reta de mínimos quadrados e o valor de r, coeficiente de correlação linear:

Pressionar a tecla STAT, escolher o menu **CALC** e selecionar a opção **4: LinReg(ax+b)**, em **Xlist:** colocar L1, em **Ylist:**, L2; em **Store RegEQ:** colocar Y1 (pressionar a tecla VARS; escolher Y-VARS e, em seguida, **Y1**). Escolher **Calculate** e pressionar ENTER para obter os parâmetros a e b (**Figura 24**) e, de seguida, escolher GRAPH para obter a reta de mínimos quadrados (**Figura 25**).

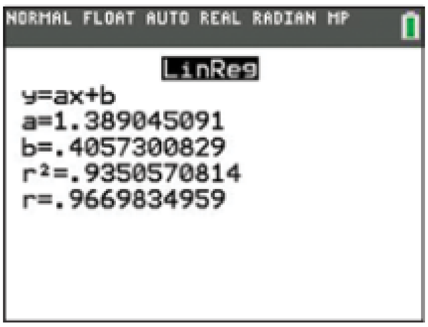


Figura 24

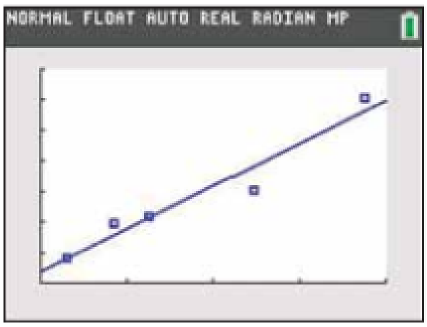


Figura 25

NOTA: No caso de, ao efetuar os procedimentos referidos para obter os parâmetros da equação da reta, não se obter o valor de r, deve-se proceder do seguinte modo: Pressionar a tecla 2ND seguida da tecla 0 (acede ao catálogo) e, de seguida, deslocar o cursor para baixo até selecionar **DiagnosticOn** (Figura 26); depois, pressionar ENTER duas vezes.
Repetindo os procedimentos para obter os parâmetros da equação da reta de mínimos quadrados, obtém-se o valor do coeficiente de correlação.

Figura 26

Texas TI-Nspire™ CX

Introdução de dados:
Escolher o ícone **Listas e Folha de Cálculo** seguido de ENTER (Figura 27).
Colocar o cursor na célula com a letra A e escrever, por exemplo, as iniciais: **tf** (taxa de fluxo) e, a seguir, ENTER; situar depois o cursor na célula B e digitar: **se** (solo erodido) e novamente **ENTER** .
Introduzir os valores de x_i em **tf** (lista A) e os valores de y_i em **se** (lista B) (Figura 28).

Figura 27

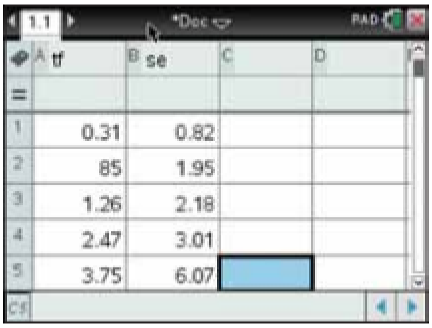


Figura 28

2.1

Obter a nuvem de pontos:
Pressionar a tecla on e selecionar o ícone **Dados e Estatística** seguido de ENTER (Figura 29).
Posicionar o cursor sobre a frase na horizontal: **clicar para adicionar variável**, e pressionar a tecla com a «mão», escolhendo **tf**. Em seguida, repetir o procedimento para a frase na vertical **clicar para adicionar variável**, e pressionar a tecla com a «mão», escolhendo se e visualizando os pontos (Figura 30).

Figura 29

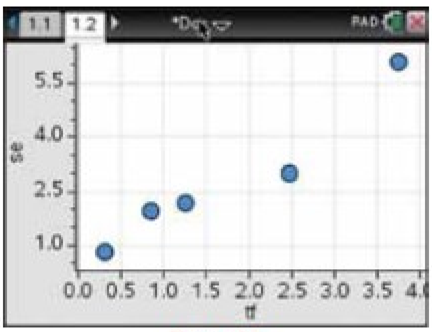


Figura 30

2.2 e 2.3

Obter os parâmetros *a* e *b* da equação da reta de mínimos quadrados e o valor de *r*, coeficiente de correlação linear:

Premir a tecla CTRL e com as teclas de cursor deslocar o cursor para a esquerda (◁), de forma a entrar no documento 1.1.

Pressionar a tecla menu e escolher a opção **4: Estatística** e, em seguida, a opção **1: Cálculos estatísticos;** selecionar **3: regressão linear** (mx+b) e escolher para **Lista X: tf** (depois de carregar no ícone com a «mão»), seguido de tab; escolher para **Lista Y:** se (depois de carregar novamente no ícone com a «mão»), seguido de tab. Guardar **RegEqn** em: **f1**, por exemplo, escolher como **1.ª col de resultados** c[] e, por fim, selecionar **OK** (pressionando sucessivamente tab) (Figuras 31 e 32).

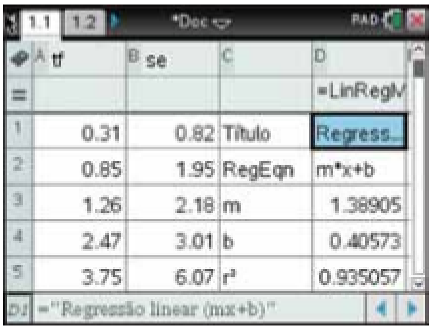


Figura 31

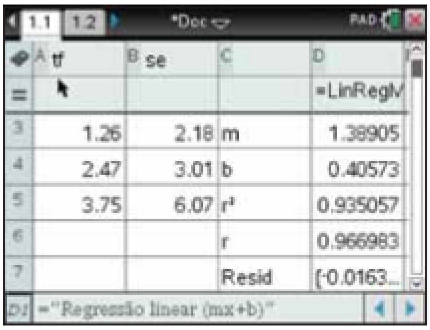


Figura 32

Premir a tecla CTRL e com as teclas de cursor deslocar o cursor para a direita (▷), de forma a entrar no documento 1.2.

Para obter a reta de mínimos quadrados, pressionar a tecla menu, escolhendo a opção **4: analisar**, seguida de **6: Regressão** e finalmente **1: Mostrar linear** (mx+b) (Figura 33).

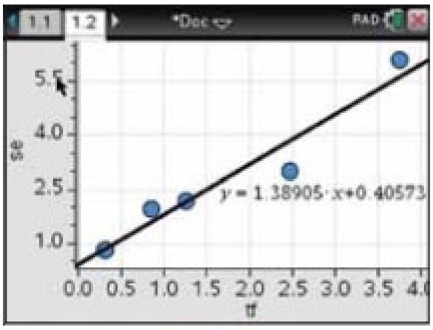


Figura 33

Anexo O

Matriz da Prova Global de novembro de 2022

ANO LETIVO 2022-2023

11º ANO – TURMAS: 5,7

MATRIZ – MOMENTO DE AVALIAÇÃO
MATEMÁTICA A

PROFESSORA: NATIVIDADE CORREIA

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

Data da prova de avaliação: 21 e 22 de novembro 2022

Temas / Aprendizagens Essenciais	Caraterização da prova
TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS **Ângulos orientados, ângulos generalizados e rotações** • Ângulos orientados; amplitudes de ângulos orientados e respetivas medidas. • Rotações. • Ângulos generalizados; medidas de amplitude de ângulos generalizados. • Ângulos generalizados e rotações. **Razões trigonométricas de ângulos generalizados** • Circunferência trigonométrica. • Generalização das definições das razões trigonométricas aos ângulos orientados e generalizados e às respetivas medidas de amplitude. • Medidas de amplitude em radianos. **Funções trigonométricas** • “Redução ao 1º quadrante”. • Equações trigonométricas. • Generalização da fórmula fundamental d trigonometria. • Funções trigonométricas (função seno, função cosseno e função tangente): domínio, contradomínio, periodicidade, paridade, zeros, extremos e extremantes. • Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas. **GEOMETRIA ANALÍTICA** **Declive e inclinação de uma reta** • Inclinação de uma reta. • Relação entre declive de uma reta não vertical e a tangente trigonométrica da respetiva inclinação. **Produto escalar** • Produto escalar de dois vetores. • Relação entre vetores perpendiculares e o respetivo produto escalar. • Propriedades do produto escalar de vetores. • Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vetores em referencial ortonormado. • Determinação do ângulo formado por dois vetores. • Determinação do ângulo formado por duas retas. • Relação entre declives de retas perpendiculares. • Resolução de problemas envolvendo produto escalar e suas aplicações.	A prova inclui: • 4 itens de seleção (escolha múltipla) cuja cotação é de 10 pontos cada. • itens de construção (resposta aberta) cuja cotação é de 160 pontos. A sequência dos itens pode não corresponder à sequência dos domínios do programa. A prova inclui formulário e tem a duração de 100 minutos. **Material a Utilizar:** O aluno deve ser portador, para além da calculadora gráfica **(em modo de exame)**, de material de escrita (caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta indelével), folhas de teste (timbradas pela escola) e material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor). **Observações**: A prova tem por referência as Aprendizagens Essenciais de Matemática A do Ensino Secundário. Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar o que não pretender que seja classificado. Não são corrigidas as questões escritas a lápis.

Anexo P

Enunciado da Prova Global de novembro de 2022

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

ANO LETIVO 2022-2023

PROVA GLOBAL DE AVALIAÇÃO (1) – MATEMÁTICA A

11º ANO – TURMA 5

PROFESSORA: Natividade Correia   Data: 22-11-2022

Duração: 100 minutos.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
É permitido o uso de calculadora gráfica (**em modo de exame**).
Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
Apresente as suas respostas de forma legível.
A prova inclui um formulário.
Apresente apenas uma resposta para cada item.
As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de construção apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Num plano em que está definido um referencial o.n., considere uma reta r. A inclinação da reta r é 60^0.

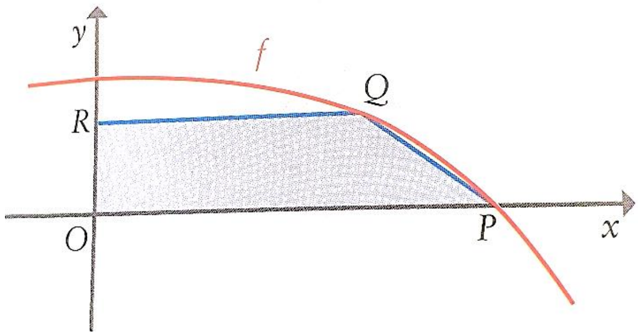
Em qual das opções estão as coordenadas de um vetor diretor de r?

(A) $(2;1)$ **(B)** $(-1;-\sqrt{3})$ **(C)** $(\sqrt{3}\,;1)$ **(D)** $(2;\sqrt{3})$

2. Considere a função f, de domínio $]-\pi;\pi[$, definida por $f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos x}$.

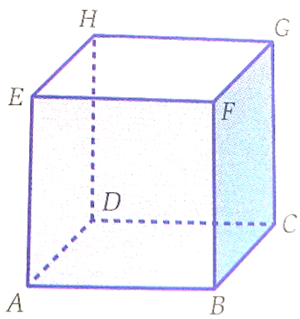
2.1. Determine a ordenada do ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Oy.

2.2. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f e um trapézio $[OPQR]$. O ponto O é a origem do referencial e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respetivamente. Os pontos P e Q pertencem ao gráfico da função f.



Sabendo que o ponto R tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio.

3. Na figura ao lado está representado o cubo $[ABCDEFGH]$, de aresta a.



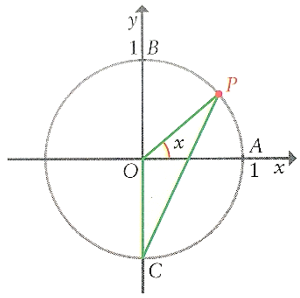
Qual das seguintes opções é a correta?

(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=0$ **(B)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=a^2$

(C) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=a$ **(D)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG}=-a^2$

4. Na figura ao lado está representada a circunferência trigonométrica. Os pontos A, B e C têm coordenadas $(1;0)$, $(0;1)$ e $(0;-1)$, respetivamente.

O ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B.



Para cada posição de P, seja x a amplitude do ângulo AOP. Qual das expressões seguintes dá o perímetro do triângulo $[OPC]$?

(A) $2+\sqrt{2+2\cos x}$ **(B)** $2+\sqrt{2+2\operatorname{sen} x}$

(C) $2+\sqrt{2+\cos x}$ **(D)** $2+\sqrt{2+\operatorname{sen} x}$

5. De um ângulo α do 4º quadrante, sabe-se que $\cos\alpha = \frac{t^2-3}{2}, t \in \mathbb{R}$. Indique sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais, os valores de t, que tornam possível a igualdade anterior.

6. Fixado um referencial o.n. num plano, qual dos vetores seguintes é perpendicular à reta de equação

$y = -\frac{1}{2}x + 3$?

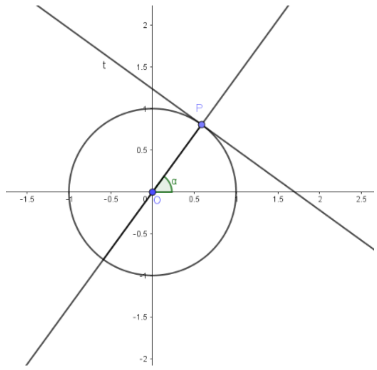
(A) $\vec{a}(1;2)$ **(B)** $\vec{b}(2;1)$ **(C)** $\vec{c}(-1\,;2)$ **(D)** $\vec{d}(-2;4)$

7. Considere a função real de variável real f, definida por $f(x) = 1 - \sqrt{3}\,tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

7.1. Determine o domínio de f.

7.2. Determine os valores de x, em $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{6}\right]$, tais que $f(x) = 4$.

8. No referencial o.n. xOy da figura estão representadas a circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e a reta, t, tangente à circunferência no ponto P.



Seja α a inclinação da reta que contém o segmento de reta $[OP]$ $\left(\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

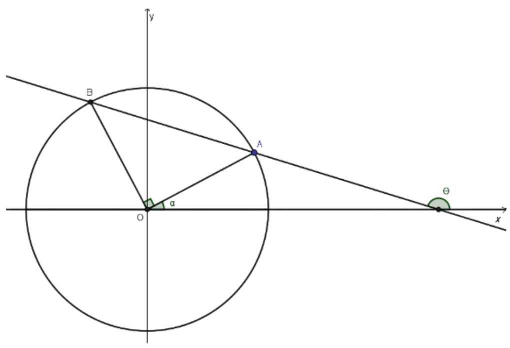
8.1. Determine o declive da reta t sabendo que $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

8.2. Determine as coordenadas do ponto P quando a inclinação da reta t é $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

8.3. Escreva uma equação da reta t, se $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

9. Na figura está representada uma circunferência trigonométrica de centro em O. Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- θ é o ângulo entre a reta AB e o eixo Ox;
- α é o ângulo entre a reta OA e Ox;
- $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$;
- a reta OB é perpendicular à reta OA;



Prove que $cos^2\theta = \frac{1}{2} + sen\,\alpha\cos\alpha$.

- **SUGESTÃO**: Comece por considerar o declive da reta AB e, de seguida, use a fórmula fundamental da trigonometria, generalizada à tangente de um ângulo.

FIM

Questão	**1.**	**2.1**	**2.2**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.1**	**7.2**	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**9.**	**Total**
Cotação	10	10	20	10	10	19	10	15	19	19	20	18	20	200

Anexo Q

Critérios Específicos de Correção da Prova Global de novembro de 2022

1.Opção B	**10**	**(5,5,0)**
2.1.	**10**	**(4,3,3)**
Determinar $f(0)$	7	(4,3,0)
Concluir que $f(0)$ é a interseção do gráfico com o eixo Oy	3	(0,0,3)
2.2	**20**	**(9,8,3)**
Escrever as coordenadas do ponto R: $R\left(0,\frac{1}{3}\right)$	2	(2,0,0)
Escrever que $f(x_Q)=\frac{1}{3}$	2	(0,2,0)
Escrever que $cos(x_Q)=\frac{1}{2}$	3	(3.0,0)
Justificar que $x_Q=\frac{\pi}{3}$	2	(0,2,0)
Escrever que $f(x_P)=0$	2	(2,0,0)
Escrever que $cos(x_P)=0$	2	(2,0,0)
Justificar que $x_P=\frac{\pi}{2}$	2	(0,2,0)
Escrever que a área do trapézio é dada por $A_{trapézio}=\frac{\overline{OP}+\overline{RQ}}{2}\times\overline{OR}$	2	(0,2,0)
Concluir que $A_{trapézio}=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5\pi}{36}$	3	(0,0,3)
3.Opção B	**10**	**(4,6,0)**
4.Opção B	**10**	**(5,5,0)**
5.	**19**	**(6,10,3)**
Justificar que $cos(\alpha)>0$	2	(0,2,0)
Escrever que $0<cos(\alpha)<1$	1	(1,0,0)
Escrever que $0<\frac{t^2-3}{2}<1$	2	(2,0,0)
Escrever $0<\frac{t^2-3}{2}\ \wedge\ \frac{t^2-3}{2}<1$	1	(1,0,0)
Escrever $t^2-3>0\ \wedge\ t^2-5<0$	2	(0,2,0)
Escrever que $t^2=3\ \Leftrightarrow\ t=\pm\sqrt{3}$	1	(1,0,0)
Escrever que $t^2=5\ \Leftrightarrow\ t=\pm\sqrt{5}$	1	(1,0,0)
Escrever que $t^2-3>0\ \Leftrightarrow\ t\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$	3	(0,3,0)
Escrever que $t^2-5<0\ \Leftrightarrow\ t\in\left]-\sqrt{5},\sqrt{5}\right[$	3	(0,3,0)
Concluir que $t\in\left]-\sqrt{5},-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},\sqrt{5}\right[$	3	(0,0,3)
6.Opção A	**10**	**(5,5,0)**
7.1.	**15**	**(7,6,2)**
Escrever que $tan(x)$ está definida em $\mathbb{R}\backslash\left\{x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$	5	(5,0,0)

Escrever que $tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ está definida em $\mathbb{R}\backslash\left\{x: x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	5	(0,5,0)
Escrever que $x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=k\pi$	3	(2,1,0)
Concluir que o domínio de f é $\mathbb{R}\backslash\{x=k\,\pi, k\in\mathbb{Z}\}$	2	(0,0,2)

7.2.	**19**	**(7,9,3)**
Escrever a equação $f(x)=4$	1	(1,0,0)
Escrever $tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}$	3	(3,0,0)
Escrever $tg\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=tg\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (ou equivalente)	2	(0,2,0)
Escrever $x-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$	4	(0,4,0)
Escrever $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$	3	(0,3,0)
Concluir que $x\in\left\{\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}$	6	(3,0,3)

8.1.	**19**	**(10,6,3)**
Escrever $m_{OP}=tg(\alpha)$	3	(3,0,0)
Justificar que $m_t\times m_{OP}=-1 \Leftrightarrow m_t=\frac{-1}{tg(\alpha)}$	3	(0,3,0)
Evidenciar a utilização da fórmula fundamental da trigonometria	3	(3,0,0)
Obter que $\frac{1}{tg^2\alpha}=\frac{5}{4}$	4	(4,0,0)
Justificar que $\frac{1}{tg(\alpha)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$	3	(0,3,0)
Concluir que $m_t=-\frac{\sqrt{5}}{2}$	3	(0,0,3)

8.2.	**20**	**(9,9,2)**
Escrever $P(cos(\alpha), sin(\alpha))$	2	(2,0,0)
Escrever que $\alpha+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\pi$ (ou equivalente)	9	(0,9,0)
Obter $\alpha=\frac{\pi}{6}$ (ou equivalente)	3	(3,0,0)
Escrever $P(cos\left(\frac{\pi}{6}\right), sin\left(\frac{\pi}{6}\right))$	2	(2,0,0)
Concluir que $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	4	(2,0,2)

8.3.	**18**	**(8,7,3)**
Escrever $P(cos(\alpha), sin(\alpha))$	1	(1,0,0)
Escrever $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	2	(2,0,0)
Escrever que inclinação de t é $\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$ (ou equivalente)	5	(0,5,0)
Escrever $m_t=tg\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$	2	(0,2,0)
Escrever que a reta t tem equação $y=-x+b$	2	(2,0,0)
Justificar que $\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+b$	3	(3,0,0)
Concluir que a reta t tem equação $y=-x+\sqrt{2}$	3	(0,0,3)

9. .... **20** **(9,9,2)**

Escrever $A(cos(\alpha), sin(\alpha))$ 2 (2,0,0)

Justificar que B$(-sin(\alpha), cos(\alpha),)$ 2 (2,0,0)

Justificar que $m_{AB} = \frac{cos(\alpha) - sin(\alpha)}{-(cos(\alpha)+sin(\alpha))}$ (ou equivalente).. 4 (0,4,0)

Escrever que $m_{AB} = tg(\theta)$ 3 (0,3,0)

Escrever que $\frac{1}{cos^2\theta} = tg^2\theta + 1$ 3 (3,0,0)

Escrever $\frac{1}{cos^2\theta} = \left(\frac{cos(\alpha) - sin(\alpha)}{-(cos(\alpha)+sin(\alpha))}\right)^2 + 1$ 2 (0,2,0)

Obter $\frac{1}{cos^2\theta} = \frac{2}{1+2cos(\alpha)sin(\alpha)}$.. 2 (2,0,0)

Concluir que $cos^2\theta = \frac{1}{2} + sin(\alpha)cos(\alpha)$ 2 (0,0,2)

Cotação total da prova **... 200(88,88,24)**

Cotação total da prova em funções por domínios ....(88,88,24)

Anexo R

Enuciado da Prova Parcelar de Avaliação de outubro de 2022

JOSÉ FALCÃO
ESCOLA SECUNDÁRIA

ANO LETIVO 2022-2023

PROVA PARCIAL DE AVALIAÇÃO – MATEMÁTICA A

11º ANO – TURMA 5

PROFESSORA: Natividade Correia — Data: 11-10-2022

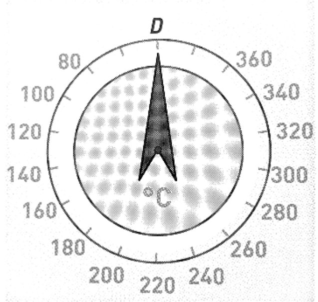
Duração: 50 minutos.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
É permitido o uso de calculadora gráfica.
Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
Apresente as suas respostas de forma legível.
Apresente apenas uma resposta para cada item.
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de construção apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida uma aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura ao lado está representado um manípulo de regulação da temperatura, em graus Celsius, de um forno. Considere a circunferência da escala dividida em 18 partes iguais, sendo D a posição $Desligado$.



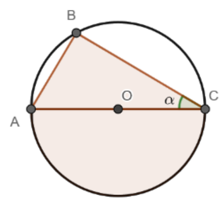
1.1. Indique a temperatura selecionada se, a partir de D, o manípulo rodar -160^0?

1.2. Se o manípulo marcar 260^0C e se se pretender reduzir a temperatura para 180^0C, quais as amplitudes possíveis para rodar o manípulo?

2. Para um ângulo $\alpha \in 2ºQuadrante$, sabe-se que $(\sin(\alpha) - 2)^2 = \frac{1}{4} + \sin^2(\alpha)$. Determine o valor exato de $\tan(180° + \alpha)$.

3. Prove a seguinte identidade trigonométrica: $\frac{1}{1-\sin(x)} - \frac{1}{1+\sin(x)} = \frac{2\,tg(x)}{\cos(x)}$, sendo x um qualquer valor do conjunto das amplitudes, para o qual a expressão tem significado.

4. Na figura abaixo está representado um triângulo $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro O e diâmetro $\overline{AC} = 2$. Seja α a amplitude do ângulo $A\hat{C}B$. Mostre que a área da região sombreada na figura é dada pela seguinte expressão: $2\left(sen(\alpha)\cos(\alpha) + \frac{\pi}{4}\right)$.



5. Calcule o valor exato de cada uma das seguintes expressões:

5.1. $\frac{3\sin(840°)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,cos(-870°)$.

5.2. $cos(\frac{19}{6}\pi) + tan(-\frac{14\pi}{3})$.

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.	4.	5.1	5.2	Total
Cotação	20	20	35	35	35	25	30	200

Anexo S

Ficha de autoavaliação

FICHA DE AUTOAVALIAÇÃO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA

Ano Letivo 2022/2023

Nome ____ N.º ______ Ano ______ Turma ______

1º Período		2º Período		3º Período	
Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental $P_1 = \frac{\boldsymbol{D_1} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_1 = P_1 \times 0,4}$ $=$ _________	**Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental** $P_1 = \frac{\boldsymbol{D_1} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_1 = P_1 \times 0,4}$ $=$ _________	**Saber Científico, Técnico, Tecnológico, Artístico e Ambiental** $P_1 = \frac{\boldsymbol{D_1} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_1 = P_1 \times 0,4}$ $=$ _________
Raciocínio e Resolução de Problemas $P_2 = \frac{\boldsymbol{D_2} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_2 = P_2 \times 0,4}$ $=$ _________	**Raciocínio e Resolução de Problemas** $P_2 = \frac{\boldsymbol{D_2} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_2 = P_2 \times 0,4}$ $=$ _________	**Raciocínio e Resolução de Problemas** $P_2 = \frac{\boldsymbol{D_2} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_2 = P_2 \times 0,4}$ $=$ _________
Investigação e Comunicação $P_3 = \frac{\boldsymbol{D_3} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_3 = P_3 \times 0,1}$ $=$ _________	**Investigação e Comunicação** $P_3 = \frac{\boldsymbol{D_3} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_3 = P_3 \times 0,1}$ $=$ _________	**Investigação e Comunicação** $P_3 = \frac{\boldsymbol{D_3} =}{n.º\ de\ recolhas = \_\_\_\_} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_3 = P_3 \times 0,1}$ $=$ _________
Respeito Autonomia Cooperação Espírito crítico e Autoavaliação $\boldsymbol{D_4} =$ $P_4 = \boldsymbol{D_4} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_4 = P_4 \times 0,1}$ $=$ _________	**Respeito Autonomia Cooperação Espírito crítico e Autoavaliação** $\boldsymbol{D_4} =$ $P_4 = \boldsymbol{D_4} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_4 = P_4 \times 0,1}$ $=$ _________	**Respeito Autonomia Cooperação Espírito crítico e Autoavaliação** $\boldsymbol{D_4} =$ $P_4 = \boldsymbol{D_4} \times 200 = \_\_\_\_\_\_$	$\boldsymbol{S_4 = P_4 \times 0,1}$ $=$ _________
SOMA: $\boldsymbol{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =}$		**SOMA:** $\boldsymbol{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =}$		**SOMA:** $\boldsymbol{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =}$	
A minha classificação:		**A minha classificação:**		**A minha classificação:**	

REFLEXÃO CRÍTICA SOBRE O TRABALHO REALIZADO (Pontos fortes e Pontos fracos)		
1.º PERÍODO		
	Data	**Assinatura:**
2.º PERÍODO		
	Data	**Assinatura:**
3.º PERÍODO		
	Data	**Assinatura:**

$\boldsymbol{D_i}$ em percentagem $\boldsymbol{P_i}$ de 0 a 200 pontos

Anexo T

Manual de Python: códigos de barras

Manual de apoio ao *Python*

Projeto Educacional 2

Carolina da Silva Teotónio

Maio 2023

Índice

Introdução

No âmbito da unidade curricular "Projeto Educacional 2" do segundo ano do mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo e ensino secundário, procurei explorar a formação dos códigos de barras que se encontram nos produtos que utilizamos diariamente.

Contexto teórico

Os códigos de barras, constituídos por 13 algarismos, têm um mecanismo de segurança que utiliza um algarismo de controlo como método de verificação da veracidade do código.

Na formação deste código, os 12 primeiros algarismos dizem respeito ao produto, ou seja, estão associados ao país de registo do produto, à empresa que o produz e a códigos internos da empresa. Assim, quando se associa um código a um produto, os 12 primeiros algarismos são atribuídos pelo fabricante. O último algarismo, o algarismo de controlo, é encontrado de modo a obedecer à chamada soma de controlo, representada por $\mathbf{S}$.

Observemos o código com os seus algarismos indexados e numerado da seguinte forma:

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}$$

Assim, S define-se como sendo a soma seguinte:

$$S = a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + a_{13}$$

Ou seja,

$$S = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13}) + 3 \times (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{11} + a_{12})$$

Esta *soma de controlo*, que é a soma dos algarismos de índice ímpar com o triplo da soma dos algarismos de índice par, tem de ser um valor divisível por 10, e o dígito de controlo será encontrado de modo que isso aconteça.

A partir desta construção dos códigos de barras, e com o objetivo de facilitar o cálculo desta soma, foi elaborado um programa em *Python* que tem duas funções distintas:

- **VERIFICAR**: partindo de um código de barras de um artigo, pretende-se, a partir dos 13 algarismos do código, confirmar que a soma de controlo é divisível por 10
- **ENCONTRAR**: partindo dos 12 primeiros algarismos de um código, pretende-se encontrar o algarismo de controlo

Exemplos

A seguir é apresentado um exemplo para cada função:

Verificar

Considere-se o código: **5 603089 002221.** Foram destacados os algarismos de índice ímpar a vermelho e os algarismos de índice par a verde: **5 603089 002221**

$$Soma\ dígitos\ índice\ ímpar = 5 + 0 + 0 + 9 + 0 + 2 + 1 = 17$$
$$Soma\ dígitos\ índice\ par = 6 + 3 + 8 + 0 + 2 + 2 = 21$$
$$Triplo\ da\ soma\ dos\ dígitos\ de\ índice\ par = 3 \times 21 = 63$$

$$Soma\ de\ controlo = 17 + 63 = 80$$

80 é divisível por 10, logo o código está construído de forma correta.

Encontrar

Designando o algarismo de controlo por c, considere-se o código 5 601255 32212c. Foram destacados os algarismos de índice ímpar a vermelho e os algarismos de índice par a verde:

5 601255 32212c

$$Soma\ dígitos\ índice\ ímpar = 5 + 0 + 2 + 5 + 2 + 1 + c = 15 + c$$
$$Soma\ dígitos\ índice\ par = 6 + 1 + 5 + 3 + 2 + 2 = 19$$

$$Triplo\ da\ soma\ dos\ dígitod\ de\ índice\ par = 3 \times 19 = 57$$

$$Soma\ de\ controlo = (15 + c) + 57 = 72 + c$$

Como a soma de controlo tem de ser um valor divisível por 10, $72 + c$ tem de ser divisível por 10, pelo que $c = 8$. Reparemos que se dividirmos 72 por 10 obtemos resto 2 e $c = 10 - 2 = 8$.

Código Python

Antes da construção do código *python*, vão ser analisados os passos necessários para a sua elaboração.

Verificar

Na função de verificar a autenticidade do código, foram destacadas 3 etapas:

1) Recolher os dígitos inseridos
2) Encontrar a soma de controlo
3) Encontrar o resto da divisão da soma por 10
    a. Se o resto for zero, confirmar que o código está bem construído
    b. Se o resto não for zero, informar que existirá algum erro

Na etapa inicial, em primeiro lugar, o código guarda o número de 13 algarismos que é inserido (na variável que se chama *numero*). A partir desse número é necessário extrair os 13 algarismos individualmente, usando a divisão inteira que se representa por // e cujo resultado é o valor inteiro do resultado da divisão simples. A seguir é apresentado parte do código que corresponde a esta primeira etapa:

```
print("Insira os 13 algarismos do Código de barras: ")
b = []
i=1
numero = int(input('codigo:'))
while (i<=13):
    pot = 10**(13-i)
    al= numero//pot
    b.append(al)
    numero=numero - al*pot
    i=i+1
```

De modo a explicar a ideia desta secção do código, é apresentado o funcionamento deste código para o número 345, de 3 algarismos (a única diferença é que no ciclo *while seria while (i<=3)* e *pot = 10**(3-i)):*

i=1

numero = 345

[primeira iteração do ciclo *while*]	[segunda iteração do ciclo *while*]	[terceira iteração do ciclo *while*]
$\text{pot} = 10^{3-1} = 10^2 = 100$ al = 345 // 100 = 3 b.append(3), ou seja, vai ser acrescentado o algarismo 3 ao vetor b numero = 345 – 3*100 = 45 i=1+1 = 2	$\text{pot} = 10^{2-1} = 10^1 = 10$ al = 45 // 10 = 4 b.append(4), ou seja, vai ser acrescentado o algarismo 4 ao vetor b numero = 45 – 4*10 = 5 i=2+1= 3	$\text{pot} = 10^{1-1} = 10^0 = 1$ al = 5 // 1 = 5 b.append(5), ou seja, vai ser acrescentado o algarismo 5 ao vetor b numero = 5 – 5*1 = 0 i=3+1= 4. Como 4 é maior que 3 já não entramos novamente no ciclo *while*

Ao generalizar este processo para 13 algarismos é possível retirar, individualmente, os 13 algarismos, que serão armazenados no vetor b, ou seja, $b[0] = a_1$; $b[1] = a_2$; $b[2] = a_3$ e assim sucessivamente até $b[12] = a_{13}$. De notar que no Python, os índices começam em 0.

Na segunda etapa, encontra-se a soma de controlo, representada por S1, tal como se apresenta a seguir:

```
S1=(b[0]+b[2]+b[4]+b[6]+b[8]+b[10]+b[12]) + 3*(b[1]+b[3]+b[5]+b[7]+b[9]+b[11])
```

Na terceira etapa, usando uma função do *Python,* encontra-se o resto da divisão de S1 por 10 (variável *resto*) e verifica-se se é zero:

```
resto = S1%10

if resto == 0:
    print("Este código de barras está correto!")
else:
    print("Este código de barras tem algum erro. Por favor verifique se os dígitos estão todos corretos.")
```

Encontrar

Na função de encontrar o algarismo de controlo, foram destacadas 4 etapas:

1) Recolher os dígitos inseridos
2) Encontrar a soma parcial de controlo
3) Encontrar o resto da divisão da soma parcial por 10
4) De modo a encontrar o dígito de controlo, fazer a operação $10 - resto$

Para esta segunda função do código, a primeira etapa é muito semelhante à da primeira função, divergindo apenas na recolha de 12 algarismos em vez de 13:

```
print("Insira os 12 primeiros algarismos do código de barras: ")
b = []
i=1
numero = int(input('codigo:'))
while (i<=12):
    pot = 10**(12-i)
    al= numero//pot
    b.append(al)
    numero=numero - al*pot
    i=i+1
```

Na segunda etapa, o processo é, novamente, muito semelhante ao da primeira função, em que é encontrada a soma parcial, ou seja, a soma de controlo exceto o algarismo de controlo. Esta soma é chamada de P1:

```
P1=(b[0]+b[2]+b[4]+b[6]+b[8]+b[10]) + 3*(b[1]+b[3]+b[5]+b[7]+b[9]+b[11])
```

Na <u>terceira etapa</u>, é encontrado o resto da divisão de P1 por 10 (variável r):

```
r=P1%10
```

Na <u>quarta etapa</u>, é encontrado o algarismo de controlo, c, através da operação $c = 10 - r$. De notar que se r for zero, o algarismo de controlo também será zero:

```
c=10-r

if r == 0:
    c=0
```

Código completo

De modo a permitir a implementação direta destas funções num editor de Python, é apresentado, abaixo, o código completo:

```
print ("Considere um código de barras, com 13 algarismos, numerados da forma a seguir indicada:")
numeros = 'A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 A10 A11 A12 A13'
print (numeros.center(100))

# --------------- MENU PRINCIPAL--------------------------------------------------

def menup():
  print("Selecione uma das seguintes opções:")

  opum = "\t 1: Verificar se o código de barras está correto."
  print(opum.ljust(100))

  opdois = "\t 2: Encontrar o algarismo de controlo do código de barras."
  print(opdois.ljust(100))

  Op=int(input("Opção: "))
  print("\n ")


  if Op==1:
    menu1()
  elif Op==2:
    menu2()
  else:
    print ("Opção inválida. Tente novamente.")
    menu()


## OPÇÃO 1 --------------------------------------------------------------
def menu1():

    print("Insira os 13 algarismos do Código de barras: ")
    b = []
    i=1
    numero = int(input('codigo:'))
    while (i<=13):
```

```
        pot = 10**(13-i)
        al= numero//pot
        b.append(al)
        numero=numero - al*pot
        i=i+1

    S1=(b[0]+b[2]+b[4]+b[6]+b[8]+b[10]+b[12]) + 3*(b[1]+b[3]+b[5]+b[7]+b[9]+b[11])
    print("\n ")

    resto = S1%10

    if resto == 0:
        print("Este código de barras está correto!")
    else:
        print("Este código de barras tem algum erro. Por favor verifique se os dígitos estão todos corretos.")
        menu1()


## OPÇÃO 2 ---------------------------------------------------------------
def menu2 ():
    #pedir_numeros_s()
    print("Insira os 12 primeiros algarismos do código de barras: ")
    b = []
    i=1
    numero = int(input('codigo:'))
    while (i<=12):
        pot = 10**(12-i)
        al= numero//pot
        b.append(al)
        numero=numero - al*pot
        i=i+1


    P1=(b[0]+b[2]+b[4]+b[6]+b[8]+b[10]) + 3*(b[1]+b[3]+b[5]+b[7]+b[9]+b[11])
    print("\n ")

    r=P1%10

    c=10-r

    if r == 0:
        c=0

    print("O algarismo de controlo é:",c)
    b.append(c)
    print("O código de barras completo é :", b)


## COMEÇA AQUI ---------------------------------------------------------------------

menup()
```