

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Laura Jayet Ribeiro

**OTIMIZAÇÃO ROBUSTA NA SELEÇÃO DE
PORTFÓLIOS**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças,
orientada pelos Professores Doutores António Alberto Ferreira Santos e José Luis
Esteves dos Santos e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade
de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia.**

Março de 2023

Otimização Robusta na Seleção de Portfólios

Laura Jayet Ribeiro



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Março 2023

Agradecimentos

Ao longo deste Mestrado contei com o apoio e incentivo de várias pessoas, sem as quais esta dissertação não seria possível e estou-lhes profundamente grata.

Aos Professores Doutores António Alberto Ferreira Santos e José Luis Esteves dos Santos meus orientadores, muito obrigada pela sua orientação científica, pela disponibilidade e colaboração na resolução de problemas, pelo apoio e valiosas contribuições dadas durante todo o processo.

À minha mãe e irmã um agradecimento especial, pelo amor incondicional ao longo de toda a minha vida, por serem um exemplo de força e determinação, pelas palavras de apoio e reconforto, e principalmente por acreditarem sempre em mim e me incentivarem a lutar pelos meus objetivos.

À minha avó Gisèle pelo exemplo de bondade, generosidade e coragem, que estaria com certeza muito orgulhosa e feliz pela conclusão de mais uma etapa.

Ao meu namorado, Pavel, que acima de tudo é um grande amigo, pelo companheirismo, compreensão e paciência ao longo destes anos, pelas palavras de carinho e incentivo em todas as situações, e sobretudo por me motivar a correr sempre atrás dos meus sonhos.

A todos os meus colegas e amigos, que de alguma forma contribuíram para a conclusão de mais um capítulo tão importante na minha vida. Em particular às minhas amigas Jasmine, Lúcia e Inês por me terem acompanhado do início ao fim nesta aventura, pela boa disposição, carinho e amizade.

À minha amiga Sara, que acompanhou de perto a realização desta dissertação, pela generosidade, disponibilidade em ajudar e por todas as palavras de encorajamento e força nos momentos de desespero.

À Universidade de Coimbra e todo o seu corpo docente e funcionários.

A Coimbra!

O trabalho apresentado neste documento foi parcialmente realizado no âmbito do projeto RiskBigData: Gestão Complexa de Risco no Regime de Utilização de Dados Massiva (PTDC/MAT-APL/1286/2021), financiado pela Fundação Portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT).

Cofinanciado por:



UNIÃO EUROPEIA
Fundo Europeu
de Desenvolvimento Regional



Resumo

A seleção de portfólios consiste na determinação das proporções que devem ser alocadas em cada ativo financeiro, de forma a obter o portfólio ótimo de acordo com o perfil de cada investidor. O foco desta dissertação é contribuir para a compreensão das decisões de investimento em ambiente de incerteza. Apresenta-se um conjunto de diferentes técnicas de otimização e análise estatística que poderão contribuir para a definição de regras de decisão o mais racionais possíveis no quadro dos diferentes procedimentos usados para o efeito.

Neste contexto, surge o paradigma da maximização da utilidade esperada, partindo de diferentes funções de utilidade. Estuda-se sob que considerações o critério de média-variância se revela uma boa aproximação à maximização da utilidade esperada. Analisa-se a sensibilidade do problema aos *inputs*, concluindo que o modelo revela uma maior sensibilidade a erros de estimação no vetor média comparativamente com a matriz das covariâncias. De forma a colmatar a instabilidade dos portfólios resultantes abordam-se a estatística e otimização robustas. A estatística robusta refere-se à utilização de estimadores menos sensíveis a alterações nos *inputs*, são estudados os M- e S- estimadores. A otimização robusta consiste na reformulação do problema inicial partindo do pressuposto de que os *inputs* foram estimados com erro, considerando que pertencem a um conjunto de incerteza.

No estudo empírico apresentado nesta dissertação são considerados os rendimentos logarítmicos mensais de 27 ativos do índice *Dow Jones Industrial Average* e do próprio índice, no período de 1 de janeiro de 2000 até 1 de março de 2023. Primeiramente estabelece-se a comparação entre a maximização da utilidade média e o critério de média-variância, concluindo que o critério de média-variância se revela uma boa aproximação à maximização da utilidade média. Realiza-se uma análise *out-of-sample* considerando um portfólio formado por 10 ativos escolhidos aleatoriamente. Calcula-se o rendimento *out-of-sample* dos portfólios construídos a partir de diferentes critérios (1/N, média-variância, mínima-variância e otimização robusta com conjunto de incerteza elipsoidal), com o objetivo de comparar as evoluções destes rendimentos com o índice, de forma a avaliar o desempenho destes critérios.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Revisão da literatura	3
3 Decisões de investimento	5
3.1 Maximização da utilidade esperada	5
3.1.1 Consumo	5
3.1.2 Investimento	7
3.2 Critério de média-variância	10
3.3 Comparação de paradigmas	12
4 Critério da média-variância: otimização robusta	17
4.1 Sensibilidade a erros de estimação	17
4.2 Medição dos efeitos dos erros de estimação	18
4.3 Estimação robusta	20
4.3.1 M- e S-estimadores	20
4.4 Otimização robusta	22
4.4.1 Conjuntos de incerteza	23
4.4.2 Reformulação do problema	24
5 Análise empírica	29
5.1 Utilidade esperada vs média-variância	29
5.2 Sensibilidade a variações nos <i>inputs</i>	31
5.3 Otimização robusta	32
6 Conclusão	35
Bibliografia	37

Lista de Figuras

3.1	Curvas de indiferença para o consumo	6
3.2	Curvas de indiferença para o investimento	8
3.3	Fronteira de eficiência	11
5.1	Comparação das distribuições cumulativas do rendimento dos portfólios entre a maximização da utilidade média com função potência e o critério de média-variância	31
5.2	Comparação das distribuições cumulativas do rendimento dos portfólios entre a maximização da utilidade média com função logarítmica e o critério de média-variância	31
5.3	Sensibilidade a variações nos <i>inputs</i>	32
5.4	Comparação entre o índice e os critérios sem restrição de vendas a descoberto	33
5.5	Comparação entre o índice e os critérios com restrição de vendas a descoberto	33

Lista de Tabelas

3.1	Medidas de aversão ao risco absolutas e relativas para cada função de utilidade . . .	9
5.1	Média e variância dos rendimentos dos portfólios considerando vários critérios de seleção e tolerância ao risco $t = 25$	30
5.2	Proporção dos ativos nos portfólios considerando vários critérios de seleção e tolerância ao risco $t = 25$	30

Capítulo 1

Introdução

O objetivo desta dissertação é contribuir para a compreensão das decisões de investimento em ambiente de incerteza. Apresenta-se um conjunto de diferentes técnicas de otimização e análise estatística que poderão contribuir para a definição de regras de decisão o mais racionais possíveis no quadro dos diferentes procedimentos usados neste contexto. O foco consiste na definição de regras de decisão associadas ao investimentos, ou seja, construir um portfólio com diversos ativos financeiros, com ou sem risco, de forma a obter o maior retorno, minimizando os riscos subjacentes de acordo com o perfil de cada investidor.

Primeiramente abordam-se os modelos tradicionais, nomeadamente o paradigma da utilidade esperada e a seleção de portfólio através do critério de média-variância. A teoria económica recorre ao critério da maximização da utilidade esperada para explicar de que forma os investidores tomam decisões em ambientes de incerteza. São estudadas várias formulações e vertentes destes modelos, de forma a perceber se são equivalentes segundo algumas considerações, como por exemplo a função de utilidade considerada e a distribuição dos rendimentos dos ativos.

O critério de média-variância define uma abordagem quantitativa de gestão de portfólios de ativos financeiros, incorporando o conceito de diversificação através da noção estatística de covariâncias entre ativos individuais, e no geral através do desvio padrão do portfólio como medida de risco. Este modelo baseia-se na estimação de parâmetros desconhecidos, como o vetor média e a matriz de covariâncias dos rendimentos dos ativos. Assim sendo, é importante detetar de que forma erros de estimação nestes *inputs* causam efeitos nos portfólios ótimos obtidos. E ainda, considerar que medidas de estimação de risco devem ser utilizadas para esse efeito. Por outro lado, é possível aperfeiçoar o processo de estimação através de técnicas estatísticas robustas, obtendo estimações menos sensíveis a pequenas alterações nos dados ou suposições dos modelos estatísticos utilizados, por exemplo, recorrendo a M e S-estimadores apresentados por DeMiguel e Nogales [5].

Por fim, o objetivo deste estudo passa por justificar o uso de várias medidas diferentes dos modelos tradicionais na seleção de portfólios, de modo a atenuar a instabilidade causada pelos erros de estimação. No modelo clássico de otimização de média-variância, após a estimação dos parâmetros, o problema de otimização é resolvido como sendo um problema determinístico, ignorando a incerteza presente nos *inputs*, o que representa um comportamento imprudente por parte do investidor. Para reformular o problema de forma mais realista é necessário incluir a incerteza dos rendimentos esperados e do risco. Para tal, procede-se ao estudo da otimização robusta, que visa modelar problemas

de otimização com incerteza de dados onde se procuram soluções que alcancem bons valores da função objetivo para a realização de parâmetros incertos contidos num conjunto de incerteza. Será construído um programa, recorrendo ao software *Matlab*, de forma a analisar estes problemas e testar o seu desempenho *out-of-sample*.

A estrutura deste estudo é composta por seis capítulos. O primeiro capítulo constitui a introdução. No segundo capítulo apresenta-se uma revisão da literatura. No capítulo três aborda-se a forma como se processam as decisões de investimento, introduzindo o paradigma da utilidade esperada e o modelo de média-variância como aproximação ao critério da maximização da utilidade esperada. No quarto capítulo realiza-se uma análise da sensibilidade do problema aos *inputs*, medidas de estimação de risco e a estimação e otimização robusta. No quinto capítulo apresenta-se uma análise empírica, realizando uma implementação recorrendo a simulações geradas com um programa desenvolvido em *Matlab*.

Capítulo 2

Revisão da literatura

A seleção de portfólios tem sido alvo de estudo e crescente interesse por parte de académicos, investigadores e investidores do mercado financeiro, face à necessidade de desenvolver uma estrutura capaz de construir e selecionar portfólios de ativos financeiros com o objetivo de definir processos de decisão racionais no contexto de mercados financeiros cada vez mais globalizados sujeitos a choques frequentes onde a incerteza (risco) é um elemento chave a compreender.

O paradigma para a definição de decisões em ambiente de incerteza é determinado a partir da maximização da utilidade esperada, Von Neumann e Morgenstern [22]. Considerando um agente económico em geral, distingue-se decisões de consumo e de investimento. Assume-se, por simplificação, que o agente económico toma primeiro as decisões de consumo, e só depois as decisões de investimento. Far-se-á um enquadramento das decisões de consumo, e assumindo as mesmas definidas, considerar-se-á que o restante montante do rendimento (riqueza) será aplicado em investimento. Será este tipo de decisão o foco desta tese, e portanto, o enquadramento e a revisão da literatura terá como referência esta segunda fase do processo de decisão.

Markowitz [15] foi o pioneiro nesta área, fornecendo os fundamentos para a Teoria Moderna do Portfólio. Esta teoria centra-se na questão de como deve um investidor alocar os seus fundos perante as possíveis escolhas de investimento. No tempo t escolhe o portfólio que vai manter durante um horizonte temporal Δt , reconsiderando a sua posição no tempo $t + \Delta t$, ou seja, consiste numa otimização para apenas um período temporal.

Kroll et al [13], Levy e Markowitz [14], Markowitz [16] analisaram a aproximação da maximização da utilidade esperada por uma função dependendo da média e variância, nomeadamente para avaliar se o critério de média-variância seria uma boa aproximação. O problema central destes estudos consistiu em comparar os portfólios decorrentes das duas abordagens. Kroll, Levy e Markowitz [13] chegaram à conclusão que o portfólio de média-variância constitui uma boa aproximação ao que maximiza a utilidade esperada, e ainda que este resultado não depende da normalidade dos dados. Karlberg e Ziemba [10] debruçaram-se sobre a comparação entre a utilização de várias funções de utilidade com diferentes formas e parâmetros nos problemas de seleção de portfólios. Concluindo que partindo de diferentes funções de utilidade com coeficientes de aversão absoluto ao risco similares se obtêm alocações de portfólio quase indistinguíveis, para uma dada distribuição conhecida de rendimentos. Este resultado sugere que, em horizontes de até um ano, pode-se substituir uma função de utilidade pela mais conveniente em termos de tratamento analítico. Pulley [18] investigou em

particular como as funções de média e variância podem aproximar a utilidade esperada a partir da utilização da função logarítmica. Em todos os casos estudados obtiveram-se aproximações bastante satisfatórias, onde muitas vezes os portfólios ótimos se revelaram praticamente idênticos, indo de encontro aos resultados evidenciados por Levy e Markowitz [14]. Frankfurter e Lamoureux [8] estudaram a relevância da distribuição considerada para os rendimentos dos ativos na construção de portfólios ótimos, comparando o uso da distribuição Normal e da distribuição estável de Pareto-Levy. Concluíram que a utilização da distribuição de Pareto-Levy não se revela estatisticamente significativa, e ainda, a assunção da distribuição normal resulta num menor risco de estimação.

O estudo de DeMiguel e Nogales [5] revelou que os pesos do portfólio estimado de média-variância tomam valores extremos que flutuam substancialmente ao longo do tempo e tendem a ser bastante diferentes dos valores do portfólio de média-variância. E ainda, estes portfólios instáveis têm um pior desempenho em termos da sua média e variância *out-of-sample*. Esta instabilidade deve-se aos erros de estimação dos *inputs*, visto que estes parâmetros são desconhecidos e sujeitos a incerteza. Ignorar a existência de erros de estimação pode resultar em portfólios que se revelam pouco satisfatórios. Por esta razão, tornou-se fulcral aprofundar o estudo da sensibilidade do problema aos *inputs* e recorrer a medidas de estimação do risco, Chopra e Ziemba [2], Kolm, Tütüncü e Fabozzi [12], Reid e Tew [19]. Resumidamente, provou-se que os portfólios ótimos resultantes são relativamente insensíveis a erros na estimação da matriz de covariâncias, no entanto, erros nas estimações da média dos rendimentos alteram significativamente o resultado, sendo o fator mais importante.

Face à necessidade de colmatar a sensibilidade do problema aos *inputs*, surgiram os conceitos de estatística robusta e otimização robusta aplicados à seleção de portfólios. A estatística robusta refere-se à utilização de estimadores robustos ao invés dos estimadores convencionais, de modo a obter maior estabilidade no resultado ótimo. O presente estudo aborda os M- e S-estimadores propostos por DeMiguel e Nogales [5]. Esta abordagem consiste na resolução de um problema de otimização não-linear, onde a otimização e a estimação robusta são realizadas apenas numa fase, ao contrário da aproximação de duas fases que executa os dois passos separadamente. Concluíram que esta abordagem resulta em portfólios com melhores propriedades de estabilidade relativamente aos tradicionais.

Por sua vez, a otimização robusta refere-se à modelação de problemas de otimização com a presença de incerteza de dados, sendo possível reformular o problema de média-variância de forma robusta, resultando em pesos de portfólios mais estáveis. É possível incorporar a incerteza presente nos dados a partir de vários tipos de conjuntos de incerteza, sendo mais comum a utilização de conjuntos intervalares e elipsoidais, Fabozzi et al [6]. Os estudos de Chen e Kwon [1], Goldfarb e Iyengar [9], Kim et al [11], Scutella e Recchia [20], Tütüncü e Koenig [21] revelam que as estratégias de otimização robustas são preferíveis às tradicionais relativamente à estabilidade dos portfólios resultantes e ao desempenho *out-of-sample*.

Contudo, a abordagem robusta do critério de média-variância refere-se à otimização no pior cenário, resultando numa ótica pessimista, não sendo consistente com a tolerância ao risco de muitos investidores. Assim surgiu a necessidade de desenvolver abordagens menos conservadoras, por exemplo recorrendo à definição de função de arrependimento associada à escolha de um portfólio, ou ainda de distância de uma solução ao conjunto de soluções ótimas, descritos em Cornuejols e Tütüncü [3].

Capítulo 3

Decisões de investimento

O paradigma da maximização da utilidade esperada (minimização da perda esperada) suporta teoricamente a tomada de decisões racionais em ambiente de incerteza. No entanto, a sua aplicação não está desprovida de dificuldades, a maior resultante da necessidade de especificar uma função de utilidade. No caso das decisões de consumo, dado que só foi utilizado para enquadrar o problema, e que cada agente económico terá a sua própria função de utilidade, a forma de U não foi especificada. Relativamente às funções de utilidade a utilizar nas decisões de investimento, serão apresentadas diversas formulações, correspondentes às que usualmente são apresentadas na literatura.

Cada agente económico também terá a sua própria função de utilidade, no entanto, as versões apresentadas, poder-se-ão distinguir da função genérica U referida anteriormente, na medida em que serão distinguir tendo em conta os padrões de aversão ao risco que cada uma caracteriza.

Assumindo que as funções de utilidade a usar para as decisões de investimento possam assumir um carácter menos geral do que as associadas às decisões de consumo, ainda assim, não é trivial caracterizar na sua plenitude os níveis de aversão ao risco por parte de cada investidor. É no decorrer destas dificuldades que critérios de decisão têm sido propostos, critérios esses com um suporte teórico menos forte, mas que no entanto, é compensado em termos de se constituírem como regras de decisão com maior facilidade de implementação e mais intuitivas.

3.1 Maximização da utilidade esperada

Estabelecer-se-á a distinção entre decisões de consumo e decisões de investimento. A primeira será efectuada em termos gerais, para uma dada função de utilidade U , que depende de quantidades consumidas onde a restrição orçamental assume um papel fundamental. As decisões de investimento seguem-se, onde são enumeradas possíveis funções de utilidade e caracterizado o perfil de aversão ao risco.

3.1.1 Consumo

Considerando um consumidor pretende-se consumir q_i unidades do serviço ou bem i , com respetivo preço p_i , onde $i = 1, \dots, n$. Admita-se que o indivíduo tem uma função de utilidade U , assim esta função depende das quantidades consumidas, ou seja, $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Suponha-se ainda que o

consumidor conhece o vetor de preços $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top$ e o seu rendimento ou restrição orçamental y . Neste contexto, procura-se saber quais as quantidades a consumir que otimizam a função de utilidade dentro do orçamento disponível, isto é, determinar a solução do problema:

$$\begin{aligned} \text{maximizar } & U(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ & \sum_{i=1}^n p_i q_i \leq y. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Então, as suas escolhas de consumo são feitas de modo a maximizar a função Lagrangeana do problema (3.1), ou seja:

$$\text{maximizar } U(q_1, q_2, \dots, q_n) + \lambda (y - \sum_{i=1}^n p_i q_i) \quad (3.2)$$

onde λ corresponde ao multiplicador de Lagrange.

A região admissível do problema (3.1) é convexa uma vez que é definida por uma função linear, ou seja, convexa. Assim, caso se verifique que a função U é côncava, então o problema (3.1) é convexo, e portanto, se existir um maximizante local este é global, correspondendo à solução ótima do problema. Deste modo, será apenas necessário verificar as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial U / \partial q_1}{p_1} = \frac{\partial U / \partial q_2}{p_2} = \dots = \frac{\partial U / \partial q_n}{p_n}. \quad (3.3)$$

A função de utilidade pode ser representada graficamente na forma de um conjunto de curvas de indiferença, onde cada ponto de uma curva resulta no mesmo nível de utilidade. Considere-se o seguinte exemplo, onde existem dois bens ou serviços e a respetiva função de utilidade dada por $U(q_1, q_2) = (q_1 q_2)^{\frac{1}{2}}$.

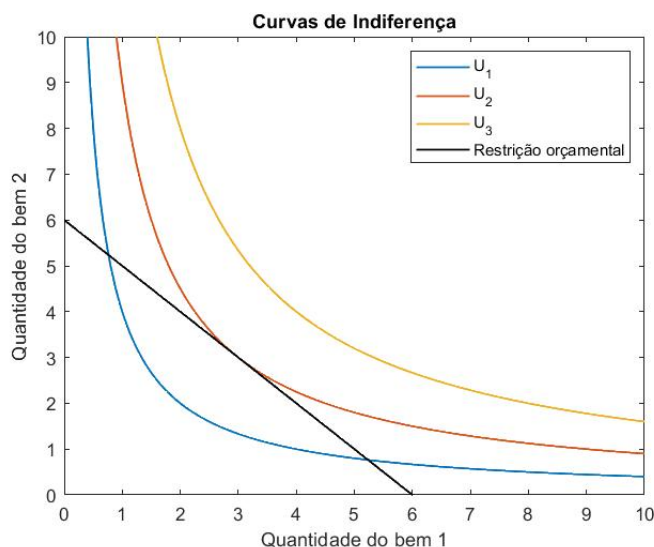


Fig. 3.1 Curvas de indiferença para o consumo

Cada função U_i , $i = 1, 2, 3$, representa um dado nível de utilidade. Pode ainda observar-se que aumentando o consumo dos dois bens a utilidade do consumidor também aumenta.

Nesta abordagem o agente económico realiza um *trade-off* entre consumo presente e consumo futuro. O consumo presente resulta numa despesa $\sum_{i=1}^n p_i q_i$, portanto o rendimento y do agente

económico subtraíndo essa despesa pode ser interpretado como a poupança ou riqueza inicial do indivíduo, w_0 . Portanto, após realizar as decisões de consumo o agente económico depara-se com uma poupança que pode ser utilizada para realizar investimento em ativos com risco. Neste contexto também é possível recorrer a funções de utilidade para efetuar a decisão de investimento.

3.1.2 Investimento

Assim, é possível reformular o problema na ótica de um investidor, onde este efetua as suas escolhas a partir da função de utilidade que depende da riqueza final ao invés das quantidades consumidas. A riqueza no final do período depende do rendimento do portfólio, e este por sua vez, é a soma dos rendimentos dos diferentes ativos que o compõem tendo em conta a proporção de cada ativo. Os rendimentos dos ativos são variáveis aleatórias, assim a utilidade no final do período também é uma variável aleatória, pelo que não é possível maximizar a função de utilidade por si só. Deste modo, é necessário recorrer ao paradigma de von Neumann-Morgenstern, que considera a maximização da utilidade esperada ao invés da função de utilidade.

Em rigor, as preferências de um indivíduo têm uma representação de utilidade esperada quando existe uma função U , tal que a escolha aleatória x_a é preferível à escolha aleatória x_b se e só se $E[U(x_a)] \geq E[U(x_b)]$. Por outras palavras, a função de utilidade representa as preferências do agente económico, com o objetivo de aumentar a sua satisfação.

Partindo do princípio que um investidor racional com uma função de utilidade U e riqueza inicial w_0 , escolhe um portfólio x de forma a maximizar a sua utilidade esperada período a período. Admitindo apenas portfólios constituídos por ativos com risco, pretende-se resolver o problema de otimização seguinte:

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{maximizar}} & E[U(w_0(1+r_p))] \\ \text{sujeito a} & x^\top \mathbf{1} = 1 \end{array} \quad (3.4)$$

onde $r_p = x^\top r$ representa o rendimento do portfólio, r o vetor dos rendimentos dos ativos e $\mathbf{1}$ é o vetor coluna de uns tal que $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^\top$. Note-se que é possível introduzir a restrição $x \geq 0$ de forma a não ser permitido vendas a descoberto. Assim, é possível especificar a função dependendo da riqueza no final do período, isto é, $U = U(w)$ onde $w = w_0(1+r_p)$.

Nesta abordagem a função de utilidade manifesta as combinações possíveis entre risco e retorno. Portanto, ao selecionar o portfólio o investidor pretende maximizar o seu rendimento esperado dado um nível de tolerância ao risco. Assume-se ainda que o investidor é avesso ao risco, ou seja, quando confrontado com a escolha entre dois investimentos com o mesmo rendimento esperado mas com dois níveis de risco diferentes, prefere o investimento com menor risco.

Neste caso, cada ponto de uma dada curva de indiferença indica combinações de risco e rendimento esperado, que resultam no mesmo nível de utilidade para um dado investidor. Considere-se o exemplo seguinte, com função de utilidade $U = E(r) - 0.7\text{Var}(r)$, onde $E(r)$ corresponde ao rendimento esperado e $\text{Var}(r)$ à variância do rendimento ou risco.

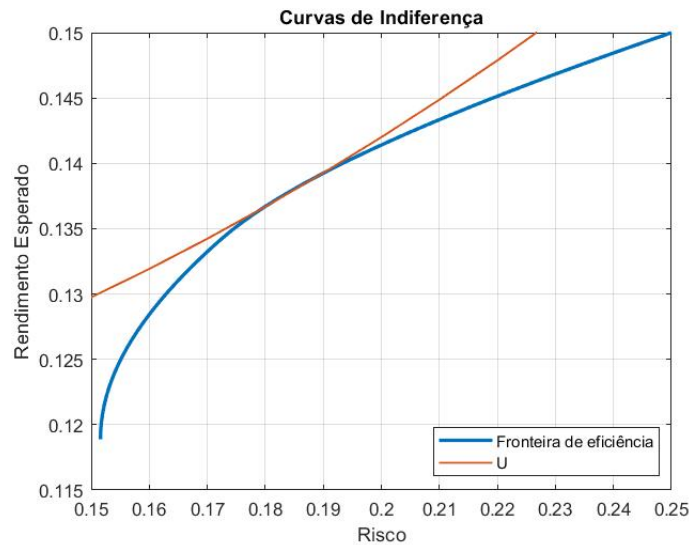


Fig. 3.2 Curvas de indiferença para o investimento

A Figura 3.2 representa uma curva de indiferença, onde o ponto de tangência com a fronteira de eficiência corresponde a um nível de utilidade para o investidor. Note-se que, o declive positivo de uma curva de indiferença reflete que para obter o mesmo nível de utilidade o investidor requer um maior rendimento esperado, de forma a aceitar um maior risco.

Para este efeito podem ser escolhidas várias funções de utilidade representando preferências distintas por parte do investidor. Neste contexto, estas funções devem ser crescentes uma vez que dependem da riqueza final, e quanto maior for a riqueza final maior será a utilidade para o investidor. De seguida serão apresentadas as funções que vão ser utilizadas no presente estudo:

- Função de utilidade quadrática: $U(w) = aw - w^2$, $w < 0.5a$,
- Função de utilidade exponencial: $U(w) = -e^{-aw}$, $a > 0$,
- Função de utilidade potência: $U(w) = \frac{1}{\gamma}w^\gamma$, $\gamma < 1$,
- Função de utilidade logarítmica: $U(w) = \ln(w)$, $w > 0$.

Quando se refere que um investidor é avesso ao risco, em termos de função de utilidade isto significa que a função é côncava, ou seja, a segunda derivada é negativa, $U''(w) < 0$, que representa uma utilidade marginal decrescente. Todas as funções apresentadas verificam esta condição, o que vai de encontro com a hipótese inicial dos investidores serem avessos ao risco. Apesar da função de utilidade quadrática estar associada ao critério de média-variância, que será aprofundado na secção 3.2, note-se que esta função é crescente apenas em $w < 0.5a$. As funções de utilidade potência e logarítmica têm domínio definido apenas para $w \geq 0$ e $w > 0$, respetivamente. A função exponencial está definida em todo o domínio $]-\infty, +\infty[$.

Neste contexto, é fundamental definir os conceitos de medida de *Arrow-Pratt* de aversão ao risco absoluta e relativa, representados por r_A e r_R , respetivamente:

$$r_A(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)}, \quad r_R(w) = -\frac{wU''(w)}{U'(w)}. \quad (3.5)$$

Tabela 3.1 Medidas de aversão ao risco absolutas e relativas para cada função de utilidade

$U(w)$	$r_A(w)$	$r_R(w)$
$aw - w^2$	$\frac{2}{a-2w}$	$\frac{2w}{a-2w}$
$-e^{-aw}$	a	aw
$\frac{1}{\gamma}w^\gamma$	$-(\gamma-1)\frac{1}{w}$	$-(\gamma-1)$
$\ln(w)$	$\frac{1}{w}$	1

A função de utilidade quadrática revela ambos os coeficientes de aversão ao risco crescentes. Ou seja, à medida que a riqueza w aumenta, a aversão ao risco também aumenta. Este facto representa uma inconsistência desta função, uma vez que é pouco suscetível de representar corretamente as preferências de um investidor. A função exponencial apresenta coeficientes de aversão ao risco absoluto e relativo, constante e crescente, respetivamente. Note-se que, esta função é a única que apresenta uma aversão absoluta ao risco constante. As funções de utilidade potência e logarítmica apresentam ambas um coeficiente de aversão ao risco absoluto decrescente e um coeficiente de aversão ao risco relativo constante. Estas duas últimas funções têm comportamentos razoáveis, visto que é expectável a aversão ao risco diminuir à medida que a riqueza aumenta.

Deste modo, é importante perceber qual é a função de utilidade que melhor representa as preferências de um investidor racional e avesso ao risco. As propriedades da função logarítmica levam a considerar que é a função que melhor descreve um investidor racional, Pulley [18].

Kallberg e Ziemba [10] compararam a utilização de funções de utilidade com diferentes formas e parâmetros, analisando como a sua escolha pode afetar a composição dos portfólios ótimos. Concluíram que funções de utilidade com níveis similares de coeficientes de aversão absoluto ao risco (*Arrow-Pratt*) resultam em portfólios ótimos similares, independentemente da função de utilidade escolhida. Ou seja, partindo de funções de utilidades diferentes (quadrática, exponencial negativa, potência e logarítmica) com o mesmo nível de aversão ao risco, obtêm-se pesos de portfólios similares. Portanto, se o investidor especificar incorretamente a função de utilidade, não há perdas significativas desde que seja capaz de expressar a sua aversão ao risco. Deste modo, podemos substituir a função de utilidade, pela mais conveniente relativamente ao tratamento analítico.

No entanto, torna-se difícil traduzir as preferências do investidor numa função, e a função de distribuição dos rendimentos é desconhecida, representando limitações. Na maioria dos casos torna-se computacionalmente pouco viável o cálculo da maximização da utilidade esperada. Deste modo, têm sido realizados variados estudos nos últimos anos, de forma a averiguar em que medida o critério de média-variância se revela uma boa aproximação ao paradigma da utilidade esperada.

3.2 Critério de média-variância

Nesta abordagem o investidor toma a decisão com base num *trade-off* entre o risco e o rendimento esperado. Sendo que o rendimento esperado é definido pelo ganho de capital esperado de um dado ativo no horizonte temporal considerado, e neste modelo a medida de risco utilizada é a variância dos rendimentos.

Suponha-se que um investidor tem de escolher um portfólio contendo n ativos com risco. Seja a escolha do investidor um vetor de dimensão n , $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$, que representa o peso de cada ativo no portfólio, ou seja, cada x_i exprime a proporção do ativo i no portfólio. Deste modo, independentemente de ser permitida ou não a venda a descoberto, tem-se que a soma dos pesos é 1, ou seja, $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Note-se que caso seja permitida a venda a descoberto, os pesos podem assumir valores negativos.

Suponha-se ainda que os rendimentos dos ativos $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)^\top$ têm rendimentos esperados dados pelo vetor $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^\top$, e matriz de covariâncias Σ , onde cada elemento é dado por $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, com σ_i o desvio padrão do ativo i e ρ_{ij} a correlação entre os ativos i e j .

Deste modo, o rendimento do portfólio formado pelo vetor de pesos anterior, é um variável aleatória $r_p = x^\top r$, com um rendimento esperado e variância dados por $\mu_p = x^\top \mu$ e $\sigma_p^2 = x^\top \Sigma x$, respetivamente. A escolha pode ser feita através da resolução dos problemas:

$$\begin{array}{ll} \underset{x}{\text{minimizar}} & x^\top \Sigma x \\ \text{sujeito a} & x^\top \mu \geq \mu_a \\ & x^\top \mathbf{1} = 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \underset{x}{\text{maximizar}} & x^\top \mu \\ \text{sujeito a} & x^\top \Sigma x \leq \sigma_a^2 \\ & x^\top \mathbf{1} = 1 \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (3.6)$$

onde μ_a representa o rendimento alvo esperado e σ_a a variância alvo a não ser ultrapassada. O primeiro problema de otimização representa a versão clássica do problema de otimização de média-variância, apelidado de formulação de minimização de risco. O modelo depende de *inputs* que são desconhecidos, portanto, para operacionalizar o modelo é necessário estimar os parâmetros antes de escolher o portfólio ótimo. Matematicamente, este é um problema de programação quadrática, visto que a função objetivo é uma função quadrática e as restrições são lineares. De um ponto de vista de otimização, a matriz Σ é positiva semi-definida uma vez que a função objetivo representa uma variância e esta nunca é negativa. Deste modo, o problema é convexo pelo que os minimizantes locais serão minimizantes globais. Sem perda de generalidade, assume-se que a matriz Σ é positiva-definida, pois caso contrário existiriam ativos redundantes. Note-se ainda que a região admissível definida pelas restrições é limitada, assim, o Teorema de Weirstrass garante a existência de minimizante global. Ou seja, o problema tem solução única desde que a região admissível seja não vazia.

No segundo caso formula-se o problema partindo de um dado nível de risco para o portfólio, σ_a , maximizando o rendimento esperado, denominado de formulação da maximização do rendimento esperado. Esta formulação pode ser útil quando o objetivo do investidor passa por maximizar o rendimento esperado com base num nível máximo de risco a não ser ultrapassado. Neste caso, verifica-se uma função objetivo linear e restrições não lineares, sendo necessário recorrer à programação cónica para a sua resolução.

O problema de média-variância foi formulado como a minimização do risco do portfólio para um dado rendimento esperado μ_a ou como a maximização do rendimento esperado para um dado nível de risco σ_a . No entanto, pode ser apresentada outra formulação do problema de média-variância que conduz à mesma fronteira de eficiência, que consiste em estabelecer o *trade-off* entre o risco e o rendimento na função objetivo recorrendo a um coeficiente de aversão ao risco λ , representado no problema seguinte:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{maximizar}} && x^\top \mu - \lambda x^\top \Sigma x \\ & \text{sujeito a} && x^\top \mathbf{1} = 1 \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esta abordagem é denominada de formulação de aversão ao risco. O coeficiente de aversão ao risco pode ser designado pela medida de risco de *Arrow-Pratt*, que corresponde à medida de aversão absoluta ao risco definida na secção 3.1.2. Quando λ é pequeno, ou seja, a aversão ao risco é pequena, resultam portfólios de maior risco. Quando se tem um valor de λ grande, os portfólios com maior exposição ao risco são penalizados. Resolvendo o problema para todos os valores possíveis de λ obtém-se a fronteira de eficiência. Neste caso, tem-se uma função objetivo quadrática com restrições lineares, resultando num problema de programação quadrática. Novamente, admitindo que a matriz Σ é positiva-definida, o problema apresenta uma única solução para cada λ .

O conjunto de todos os portfólios possíveis é denominado de conjunto admissível. O portfólio eficiente de média-variância corresponde à solução do problema para um dado valor de μ_a , σ_a ou λ . O conjunto de todos os portfólios eficientes de média-variância é denominado de fronteira de eficiência, fornecendo o melhor *trade-off* entre rendimento esperado e risco. Portanto, a fronteira de eficiência é obtida a partir da resolução do problema de otimização para diferentes valores de μ_a , σ_a ou λ .

A figura seguinte representa a fronteira de eficiência para um portfólio constituído por 3 ativos, de vetor média $\mu = [0.1 \ 0.15 \ 0.12]^\top$, desvio padrão $[0.2 \ 0.25 \ 0.18]^\top$ e correlações dadas por $\rho_{1,2} = 0.3$, $\rho_{1,3} = 0.4$ e $\rho_{2,3} = 0.3$.

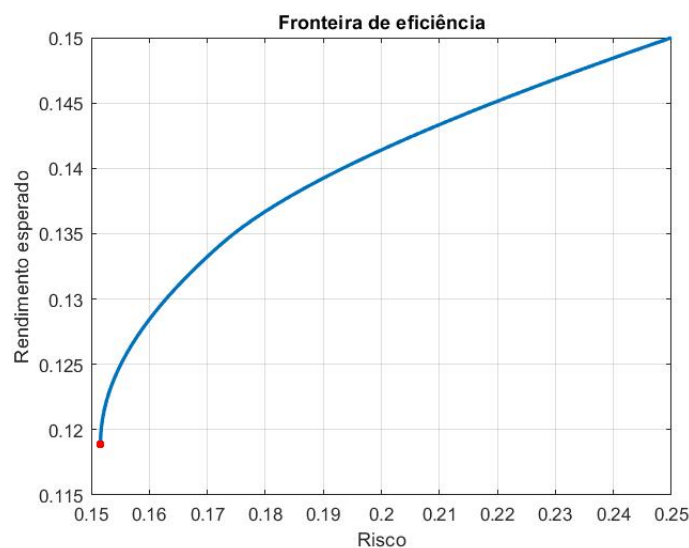


Fig. 3.3 Fronteira de eficiência

Note-se que após calcular a fronteira de eficiência, a escolha do portfólio ótimo é feita com base nos objetivos do investidor tendo em conta o seu nível de aversão ao risco. Além disso, para um dado rendimento esperado, dentro do conjunto de portfólios possíveis, um investidor racional opta pelo portfólio de mínima variância, ou seja, de menor risco. O portfólio situado mais à esquerda da fronteira de eficiência representado pelo ponto vermelho da Figura 3.3, corresponde ao portfólio com menor variância possível, e conseqüentemente desvio padrão. É denominado de portfólio de variância mínima global. Por outras palavras, este portfólio oferece o menor nível de variância, e conseqüentemente de desvio padrão, para um dado nível de rendimento esperado.

O portfólio de variância mínima global pode ser calculado a partir da resolução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimizar}} && x^T \Sigma x \\ & \text{sujeito a} && x^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

A solução deste problema é dada por $x = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$. A vantagem do modelo de variância mínima global reside em não ser necessário estimar o vetor média, já que os erros de estimação do vetor média revelam um maior impacto no resultado dos pesos do portfólio ótimo, Chopra e Ziemba [2].

Observe-se que o critério de média-variância se baseia apenas na estimação do vetor média e da matriz de covariâncias, ignorando a possibilidade de erros de estimação. Portanto a decisão do portfólio a manter consiste em dois passos: a estimação dos parâmetros e a otimização. Existem várias evidências de que o portfólio ótimo calculado a partir desta estratégia se revela instável na presença de erros de estimação, DeMiguel, Garlappi e Uppal [4], DeMiguel e Nogales [5], e ainda que os erros de estimação do vetor média têm maior conseqüência no resultado comparativamente com erros de estimação na matriz de covariâncias, Chopra e Ziemba [2]. O impacto dos erros de estimação no portfólio ótimo vai ser aprofundado no capítulo 4.

3.3 Comparação de paradigmas

Um assunto de interesse será o de medir até que ponto as decisões obtidas pela maximização da utilidade esperada poderão ser aproximadas pelo critério de média-variância. Vários autores afirmaram que ao escolher corretamente um portfólio eficiente de média-variância obtem-se precisamente uma utilidade esperada ótima, ou seja, máxima. Revela-se interessante debruçar-se sobre esta questão, uma vez que é mais fácil determinar o conjunto de portfólios eficientes de média-variância do que encontrar o portfólio que maximiza a utilidade esperada, devido à complexidade dos cálculos e à dificuldade em expressar as preferências do investidor numa função.

Considerando que os parâmetros do problema são conhecidos, existem dois casos em que o critério da maximização da utilidade esperada é equivalente ao critério da média-variância: quando o investidor expressa as suas preferências através de uma função de utilidade quadrática, ou por um função de utilidade exponencial negativa e adicionalmente os rendimentos dos ativos seguem uma distribuição normal. Considerando funções de utilidade potência ou logarítmicas não existe uma equivalência direta entre a maximização da utilidade esperada e o critério de média-variância. Argumentar que todos os investidores têm uma função de utilidade potência ou logarítmica é forçado,

sendo muito mais intuitivo estabelecer um *trade-off* entre rendimento e risco. No entanto, uma função de utilidade incorpora os níveis de aversão ao risco, enquanto o critério de média-variância apenas apresenta um conjunto de portfólios aceitáveis, não especificando à partida o portfólio ótimo. Por outro lado, a definição de conjunto de portfólios admissíveis (fronteira de eficiência) não se apresenta como uma tarefa trivial, porque os parâmetros que governam a distribuição dos rendimentos são desconhecidos e os erros de estimação têm enormes consequências na definição do referido conjunto.

Dada uma decisão racional implicando a maximização da utilidade esperada do investidor, onde são desconhecidas as distribuições de probabilidades associadas, uma condição necessária e suficiente para o uso do critério de média-variância na prática reside na escolha cuidadosa de um portfólio pertencente à fronteira de eficiência do critério de média-variância, Markowitz [16]. Deste modo, maximiza-se aproximadamente a utilidade esperada para uma ampla variedade de funções de utilidade côncavas, que correspondem a investidores avessos ao risco.

Partindo do desenvolvimento em série de Taylor para a função de utilidade é possível recorrer a dois métodos distintos para aproximar a utilidade esperada $E[U(r_p)]$ por uma função $f(\mu_p, \sigma_p^2)$, dependendo apenas da média e da variância do portfólio. A primeira baseia-se no desenvolvimento em série de Taylor em torno da origem:

$$U(r_p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{U^{(i)}(0)r_p^i}{i!} = U(0) + U'(0)r_p + 0.5U''(0)r_p^2 + \dots \quad (3.9)$$

Considerando a esperança matemática, de ambos os lados da equação, tem-se:

$$E[U(r_p)] \cong U(0) + U'(0)\mu_p + 0.5U''(0)(\mu_p^2 + \sigma_p^2). \quad (3.10)$$

A segunda baseia-se no desenvolvimento em série de Taylor em torno do rendimento médio:

$$U(r_p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{U^{(i)}(\mu_p)(r_p - \mu_p)^i}{i!} = U(\mu_p) + U'(\mu_p)(r_p - \mu_p) + 0.5U''(\mu_p)(r_p - \mu_p)^2 + \dots \quad (3.11)$$

Considerando novamente a esperança matemática de ambos os lados da equação, tem-se:

$$E[U(r_p)] \cong U(\mu_p) + 0.5U''(\mu_p)\sigma_p^2. \quad (3.12)$$

O critério da média-variância é fundamentado pela utilização de uma função de utilidade quadrática, ou seja, $U^{(i)}(\mu_p) = 0$ para $i = 3, 4, \dots$, e ainda $E(r_p - \mu_p) = 0$ e $E[U(\mu_p)] = U(\mu_p)$. Note-se que, recorrendo às outras funções de utilidade enunciadas anteriormente, $U^{(i)}(\mu_p) \neq 0$, para $i = 1, 2, 3, \dots$, e assim, os cálculos acima realizados não se aplicam a estes casos. A esperança matemática da função de utilidade em (3.10) e (3.12) só depende da média e da variância do portfólio, o que caracteriza o critério de média-variância. Assim, recorrendo a uma função de utilidade quadrática o critério de média-variância é uma boa aproximação à maximização da utilidade esperada, independentemente da distribuição dos rendimentos.

Frankfurter e Lamoureux [8] estudaram a relevância da distribuição considerada para os rendimentos dos ativos na construção de portfólios ótimos. Estabeleceram a comparação entre o uso da distribuição Normal e da distribuição estável de Pareto-Levy. A distribuição estável de Pareto-Levy

é relativamente difícil de implementar, e tendo em conta que nunca supera significativamente o uso da distribuição Normal, não tem utilidade para um investidor. Desse modo, supõe-se a normalidade dos rendimentos dos ativos. Karlberg e Ziemba [10] utilizaram a distribuição Normal para descrever aproximadamente a distribuição dos rendimentos dos ativos. É então legítimo questionar se as funções apresentadas na secção 3.1.2 apresentam algum inconveniente ao serem conjugadas com a distribuição normal.

Repare-se que para responder a esta questão, é necessário ter em conta que, teoricamente, o domínio da função densidade de probabilidade Normal é $]-\infty, +\infty[$. Porém, em contexto financeiro, não faz sentido considerar que o rendimento de um ativo varie entre $-\infty$ e $+\infty$. Ora, a função de utilidade quadrática não se revela incoerente relativamente ao seu domínio, contudo, ultrapassando um certo nível de riqueza apresenta utilidade marginal negativa, não sendo capaz de representar as preferências do investidor. Já as funções de utilidade potência e logarítmica apenas estão definidas quando $w \geq 0$ e $w > 0$, respetivamente, ou seja, não são integráveis no domínio considerado para a distribuição Normal. A função de utilidade exponencial não revela qualquer inconveniente quando conjugada com a distribuição Normal, sendo a única que apresenta uma medida de aversão ao risco absoluta constante, facilitando a abordagem à utilidade esperada.

Utilizando coeficientes de aversão ao risco similares obtêm-se pesos de portfólios quase indistinguíveis qualquer que seja a função de utilidade escolhida, Kallberg e Ziemba [10]. Posto isto, é possível expressar as preferências do investidor a partir de uma função exponencial sem perdas significativas, desde que especificando corretamente o parâmetro da mesma. Adicionalmente, caso a distribuição dos rendimentos dos ativos seja bem aproximada pela distribuição Normal, maximizar a utilidade esperada é equivalente ao modelo da média-variância, já que resultam em portfólios próximos.

A questão seguinte reside em como calcular $E[U(r_p)]$, quando utilizamos uma função de utilidade exponencial, $U(w) = -e^{-aw}$, para expressar as preferências do investidor. Pode-se reescrever a função de forma equivalente, dependendo do rendimento do portfólio, tal que:

$$U(w) = -e^{-aw} = -e^{-aw_0(1+r_p)} = -e^{-aw_0} e^{-aw_0 r_p}. \quad (3.13)$$

Efetuada $\lambda = aw_0$, tem-se $U(r_p) = -e^{-\lambda} e^{-\lambda r_p}$. Maximizar $U(r_p)$ é equivalente a maximizar $-e^{-\lambda r_p}$, já que λ é um número fixo. Supondo, como referido anteriormente, que o rendimento do portfólio segue uma distribuição Normal da forma $N(\mu_p, \sigma_p)$, tem-se o seguinte resultado:

Proposição: Suponhamos que o investidor expressa as suas preferências através de uma função exponencial negativa, tal que: $U(r_p) = -e^{-\lambda r_p}$. Considere-se ainda, que os rendimentos seguem uma distribuição Normal, de média μ_p e desvio padrão σ_p , ou seja, $r_p \sim N(\mu_p, \sigma_p)$. Então, a função de utilidade esperada é dada por $E[U(r_p)] = -e^{-\lambda \mu_p + \frac{\lambda^2}{2} \sigma_p^2}$.

Demonstração: Comece-se por definir a esperança matemática da função $U(r_p)$, tal que:

$$E[-e^{-\lambda r_p}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\lambda r_p} e^{-\frac{(r_p - \mu_p)^2}{2\sigma_p^2}} dr_p. \quad (3.14)$$

Considere-se a variável aleatória $z = \frac{r_p - \mu_p}{\sigma_p}$, então

$$E \left[-e^{\lambda z} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (3.15)$$

Como $-\lambda z - \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}(z + \lambda)^2 + \frac{1}{2}\lambda^2$, a expressão anterior é equivalente a

$$E \left[-e^{\lambda z} \right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z+\lambda)^2}{2}} dz. \quad (3.16)$$

Realizando a mudança de variável $s = (z + \lambda)$, tem-se

$$E \left[-e^{\lambda z} \right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds. \quad (3.17)$$

Recorrendo ao resultado $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}$, obtém-se

$$E \left[-e^{\lambda z} \right] = -e^{\frac{\lambda^2}{2}}. \quad (3.18)$$

Voltando à variável aleatória inicial, resulta a função de utilidade esperada:

$$E \left[-e^{-\lambda r_p} \right] = E \left[-e^{-\lambda(z\sigma_p + \mu_p)} \right] = -e^{-\lambda\mu_p + \frac{\lambda^2}{2}\sigma_p^2}. \quad (3.19)$$

■

Posto isto, maximizar a utilidade esperada dada uma função exponencial consiste em maximizar $\lambda\mu_p - \frac{\lambda^2}{2}\sigma_p^2$, que é equivalente a maximizar $\mu_p - \frac{\lambda}{2}\sigma_p^2$. Este problema de otimização corresponde à formulação de aversão de aversão ao risco do critério de média-variância, apresentada na secção 3.2.

Assim, considerando que os rendimentos dos ativos seguem uma distribuição Normal com uma função de utilidade exponencial, então maximizar a utilidade esperada é equivalente ao critério de média-variância.

Capítulo 4

Critério da média-variância: otimização robusta

Os portfólios de média-variância são construídos a partir do vetor média e da matriz de covariâncias dos rendimentos dos ativos de uma amostra. Contudo, o investidor desconhece a média, as variâncias e covariâncias associadas aos rendimentos dos ativos em causa. Assim, para aplicar os modelos tradicionais de seleção de portfólios é necessário recorrer à estimação destes parâmetros, que resulta em erros de estimação. Assim sendo, é natural questionar até que ponto estes erros de estimação têm efeitos nos portfólios ótimos resultantes. Existem várias medidas propostas para a análise destes efeitos, apesar de não haver um consenso de qual a mais apropriada. Serão apresentadas técnicas para contornar a sensibilidade do problema, como a estimação e otimização robustas.

4.1 Sensibilidade a erros de estimação

O estudo de DeMiguel e Nogales [5] revelou que os pesos do portfólio de média-variância tomam valores extremos que flutuam substancialmente ao longo do tempo e tendem a ser bastante diferentes dos valores do portfólio de média-variância assumindo o conhecimento dos verdadeiros parâmetros da distribuição dos rendimentos. E ainda, estes portfólios instáveis têm um mau desempenho em termos da sua média e variância *out-of-sample*. Esta instabilidade deve-se aos erros de estimação. Concluíram que os pesos do portfólio de média-variância revelam maior instabilidade relativamente aos pesos do portfólio de mínima-variância. Este facto confirma a hipótese de Merton [17], de que o erro para estimar a média dos retornos dos ativos é muito maior do que o erro que provém da estimação da matriz de covariâncias. Observe-se que Merton [17] provou que o erro de estimação da matriz de covariâncias pode ser reduzido aumentando a frequência da amostra dos dados relativos aos rendimentos, por exemplo, usando dados diários ao invés de mensais. Assim, os investidores começaram a focar-se no portfólio de mínima-variância, que se baseia apenas na estimação da matriz de covariâncias, tendo um melhor desempenho *out-of-sample* relativamente ao portfólio de média-variância. Contudo, estes portfólios também se revelam sensíveis a erros de estimação.

Como referido na secção 3.3, Kallberg e Ziemba [10] examinaram a especificação incorreta em problemas de seleção de portfólios com distribuição Normal de rendimentos, discutindo três áreas de especificação incorreta: a função de utilidade do investidor, o vetor média e a matriz de covariâncias da

distribuição dos rendimentos. Concluíram que funções de utilidade com níveis similares de coeficiente de aversão ao risco absoluto resultam em portfólios ótimos similares, independentemente da função de utilidade escolhida. Ou seja, a ideia fundamental na escolha de portfólios reside no nível de aversão ao risco do investidor. Porém este estudo revelou que, erros no vetor média são cerca de 10 vezes mais importantes relativamente a erros nas variâncias e covariâncias consideradas em conjunto. Contudo, é importante distinguir entre erros nas variâncias e covariâncias.

Chopra e Ziemba [2] avaliaram o impacto de erros de estimação na média, variância e covariâncias. Mostraram que o impacto relativo dos erros nas médias, variâncias e covariâncias depende também da tolerância ao risco por parte do investidor. Para uma tolerância ao risco de 50 obtiveram os seguintes resultados: os erros nas médias são cerca de 11 vezes mais importantes do que nas variâncias, os erros nas variâncias são cerca de 2 vezes mais importantes do que nas covariâncias. Para níveis mais elevados de tolerância ao risco, os erros nas médias são ainda mais importantes relativamente aos erros nas variâncias e covariâncias, visto que este tipo de investidor dá maior importância ao rendimento esperado, que depende por sua vez da média estimada. Para níveis mais baixos de tolerância ao risco o impacto relativo dos erros na média, variâncias e covariâncias é mais próximo. Ou seja, a importância diminui à medida que a tolerância ao risco diminui. Relativamente ao problema de média-variância isto significa o investidor deve focar-se em obter melhores estimações das médias e de seguida boas estimações das variâncias. As covariâncias são as menos importantes em termos da sua influência no portfólio ótimo resultante.

No processo de decisão usa-se o conceito de função de utilidade, enquanto que, quando se pretende comparar diferentes regras de decisão recorre-se ao conceito de função de perda. Como são desconhecidos os valores dos parâmetros média, variâncias e covariâncias, substitui-se estes valores por estimativas, tais que:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_i &= \mu_i + \varepsilon_i, \\ \hat{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} + v_{ij},\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde ε_i e v_{ij} representam os termos de erro que resultam da estimação, que se supõe com média nula e variância finita. Ou seja, os parâmetros são medidas com erro, e se para a média não existe nenhuma restrição a ser aditivo para $\hat{\sigma}_{ij}$ deve ter-se mais cuidado. Define-se então uma função de perda associada a uma decisão,

$$\begin{aligned}L: (\Omega, D) &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ (\omega, d) &\rightarrow L(\omega, d),\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde $\omega \in \Omega$, com Ω o espaço de estados, $d \in D$, com D o espaço das decisões. Como $L(\omega, d)$ assume valores não negativos então a média do erro de decisão é não negativa. Na secção seguinte será apresentado um exemplo desta função de perda, o *Cash Equivalent Loss*.

4.2 Medição dos efeitos dos erros de estimação

A medida proposta por Kallberg e Ziemba [10], Chopra e Ziemba [2] é o *Cash Equivalent Loss* (CEL). Pretende-se avaliar o quão próximo um portfólio é de outro, comparando o *cash equivalent* (CE) para cada um dos portfólios. O CE de um portfólio com risco é uma quantidade certa de dinheiro que

fornece a mesma utilidade que o portfólio com risco, ou seja, o equivalente certo do rendimento médio do portfólio. Num portfólio sem risco, o CE é igual ao retorno certo. Note-se que dado a tolerância ao risco de um investidor, o portfólio ótimo de média-variância contém o maior valor de CE do que qualquer portfólio contendo os mesmos ativos. O *cash equivalent loss* (CEL), ou percentagem de perda equivalente de dinheiro que surge ao deter um portfólio arbitrário x em vez do portfólio ótimo o é dado por:

$$CEL = \frac{CE_o - CE_x}{CE_o} \quad (4.3)$$

onde CE_o e CE_x correspondem ao equivalente em dinheiro (CE) do portfólio o e x , respetivamente. Assim, esta função é utilizada como função de perda associada a uma escolha x ao invés da escolha ótima o . De acordo com Chopra e Ziemba [2], o CEL é a medida mais apropriada pois tem em conta a tolerância ao risco do investidor e a incerteza dos rendimentos, sendo independente das unidades em que a utilidade está expressa.

Ao longo do tempo, foram apresentadas outras medidas de eficiência relativamente às aproximações de média-variância para a maximização da utilidade esperada. Pulley sugeriu a seguinte medida de eficiência relativa:

$$I_P = \frac{E^*(U)}{E(U)}, \quad (4.4)$$

onde $E^*(U)$ corresponde ao valor da utilidade esperada a partir do portfólio ótimo de média-variância e $E(U)$ o valor da utilidade esperada a partir da maximização da utilidade esperada. Note-se que I_P não é invariante para transformações lineares das funções de utilidade.

Kroll, Levy e Markowitz [13] sugeriram uma alteração a esta medida de forma a colmatar este problema, subtraindo o valor da utilidade esperada de um portfólio *naive*, $E_N(U)$, em ambas as partes da fração:

$$I_{KLM} = \frac{E^*(U) - E_N(U)}{E(U) - E_N(U)}. \quad (4.5)$$

Note-se que I_{KLM} é invariante para transformações lineares das funções de utilidade, contudo não é invariante ao valor de $E_N(U)$. O portfólio correspondente a $E_N(U)$ serve também como ponto de referência para medir os ganhos de utilidade que resultam do uso de um critério de seleção. Quando se utiliza um portfólio quase eficiente os ganhos de utilidade calculados são pequenos. Porém, no caso de se utilizar um portfólio ineficiente obtém-se um melhor ponto de referência para medir os ganhos de utilidade resultantes de uma escolha informada contra uma escolha *naive*. Assim é aconselhado recorrer a um portfólio ineficiente para este cálculo. Caso se recorra ao portfólio *naive* com pesos equivalentes, tem-se $E_N(U) = E \left[U \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} r_i \right) \right]$.

Pulley sugeriu ainda que se utilizassem *certainty equivalents* para efetuar comparações entre as utilidades dos portfólios, do seguinte modo:

$$CEI = \frac{CE[E^*(U)]}{CE[E(U)]}, \quad (4.6)$$

onde $CE(\cdot)$ corresponde ao *certainty equivalent* de um portfólio.

Reid e Tew [19] compararam as medidas apresentadas com a utilização de várias funções de utilidade, concluindo que $I_{KLM} \leq CEI$ em todos os casos e que com um valor pequeno de $E_N(U)$, I_{KLM} tende para CEI . Recorrendo a um valor apropriado de $E_N(U)$, I_{KLM} revela-se uma boa medida relativa de eficiência, demonstrando-se ser desnecessário recorrer a *certainty equivalents*. Estas conclusões reforçam a ideia de que o critério de média-variância se revela empiricamente eficiente para a seleção de portfólios.

4.3 Estimação robusta

A Estatística Robusta consiste na utilização de estimadores mais eficientes, e a redução da sua variabilidade permite obter soluções mais estáveis. DeMiguel e Nogales [5] apresentaram uma nova abordagem, construindo os portfólios recorrendo a estimadores robustos, que podem ser calculados resolvendo um único programa não linear. Este estudo revelou que esta abordagem apresenta uma classe de portfólios com melhores propriedades de estabilidade relativamente aos portfólios tradicionais de mínima variância, menos sensíveis a alterações na distribuição dos rendimentos dos ativos, preservando um bom desempenho *out-of-sample*.

Inicialmente foi proposta uma aproximação com duas fases, que consiste em calcular um estimador robusto para os *inputs*, e de seguida calcular o portfólio ótimo resolvendo o problema tradicional de média-variância, substituindo a média e a matriz de covariância da amostra pelos homólogos robustos. DeMiguel e Nogales [5] apresentaram uma abordagem alternativa, que passa por resolver um programa não-linear onde a otimização de portfólios e a estimação robusta é realizada apenas numa fase. Para tal, recorreram aos M- e S-estimadores.

4.3.1 M- e S-estimadores

Considerando um dado portfólio x , r o seu vetor rendimento e T o tamanho da amostra, tem-se que o M-estimador do risco do portfólio (s) e o M-estimador do rendimento do portfólio (m), são dados respetivamente por:

$$m = \underset{m}{\operatorname{argmin}} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(x^\top r_t - m), \quad (4.7)$$

$$s = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(x^\top r_t - m), \quad (4.8)$$

onde L representa a função de perda (simétrica e convexa) contendo um único mínimo em zero. Note-se que a média e a variância são casos particulares dos M-estimadores, que são obtidas considerando $L(r) = 0.5r^2$, e ainda a mediana e o desvio médio absoluto (MAD) são obtidos considerando $L(r) = |r|$. Existem outras funções de perda que podem ser usadas. Observe que para valores altos de $|r|$, as funções de perda estão abaixo da função quadrática, tornando os M-estimadores mais robustos relativamente aos desvios da normalidade das distribuições empíricas.

Define-se assim, o M-portfólio de modo a minimizar o M-estimador do risco do portfólio, visto que os portfólios de risco mínimo apresentam melhor desempenho *out-of-sample*, para isso basta resolver o problema de otimização seguinte:

$$\begin{aligned} & \underset{x,m}{\text{minimizar}} && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L(x^\top r_t - m) \\ & \text{sujeito a} && x^\top \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Note-se que para um x fixo, o mínimo da função objetivo do último problema relativamente a m é igual ao M-estimador de risco s para o rendimento do portfólio x . Incluindo o vetor dos pesos do portfólio x como uma variável do problema de otimização, consegue-se calcular o portfólio que minimiza o M-estimador de risco.

Para as experiências numéricas do estudo realizado por DeMiguel e Nogales [5], foi utilizada a função de perda de Huber, $\begin{cases} 0.5r^2, & |r| \leq c \\ c(|r| - 0.5c), & |r| > c \end{cases}$, onde c representa o ponto de rotura, que corresponde à quantidade de dados que se desviam do modelo de referência que um estimador pode aceitar continuando a dar informações significativas.

Relativamente aos S-estimadores, a sua vantagem reside em que são invariáveis relativamente ao produto escalar. Os S-estimadores do rendimento e do risco de um portfólio são definidos como os valores m e s que correspondem à resolução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \underset{m,s}{\text{minimizar}} && s \\ & \text{sujeito a} && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L\left(\frac{x^\top r_t - m}{s}\right) = K \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde L corresponde à função de perda, e K é o valor esperado desta função de perda avaliada a partir de uma variável aleatória normal standard z , ou seja, $K = E(L(z))$.

Nesta formulação exige-se que a função de perda L satisfaça duas condições: deve ser simétrica com um único mínimo em zero, e deve existir um $c > 0$ tal que L seja estritamente crescente em $[0, c]$ e constante em $[c, \infty[$. Estas condições são necessárias de modo a que a função de perda para os S-estimadores seja limitada superiormente.

Define-se o S-portfólio que minimiza o S-estimador de risco, resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \underset{x,m,s}{\text{minimizar}} && s \\ & \text{sujeito a} && \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T L\left(\frac{x^\top r_t - m}{s}\right) = K \\ & && x^\top \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Note-se que os S-estimadores permitem flexibilidade para a escolha do ponto de rotura. Para as experiências numéricas do estudo realizado por DeMiguel e Nogales [5], foi utilizada a função de perda de Tukey, a seguir descrita, e ajustada a constante c para calibrar o ponto de rotura dos S-portfólios.

$$L(r) = \begin{cases} \frac{c^2}{6} (1 - (1 - (r/c)^2)^3), & |r| \leq c \\ \frac{c^2}{6}, & |r| > c \end{cases}$$

Esta função é limitada superiormente, e ainda, permite controlar o ponto de rotura escolhendo o valor de c . Os S-estimadores permitem um ponto de rotura até 50%.

DeMiguel e Nogales [5] analisaram a estabilidade dos M- e S-portfólios a partir de dados empíricos e simulados. A partir dos dados empíricos verificaram que o M-portfólio é o mais estável, seguido

do S-portfólio e por último o portfólio de mínima-variância. Verificaram ainda que a introdução de restrição de vendas a descoberto melhorou substancialmente a estabilidade dos portfólios, em particular, os M-portfólio e S-portfólio. A partir dos dados simulados observou-se que os portfólios de média-variância (tradicional e robusto) são consideravelmente mais instáveis comparativamente com os de mínima-variância, mesmo quando os dados seguem uma distribuição Normal. O portfólio de mínima-variância calculado é um estimador eficiente quando a distribuição dos rendimentos é Normal, porém revela-se ineficiente quando uma pequena porção da amostra se desvia da normalidade. O M-portfólio revelou menor sensibilidade aos desvios da normalidade relativamente aos modelos tradicionais, mas ligeiramente maior sensibilidade comparativamente ao S-portfólio. Concluindo assim que o uso de técnicas de estimação robustas apresenta menor sensibilidade a desvios da distribuição dos rendimentos dos ativos da normalidade comparativamente aos portfólios tradicionais. E ainda, os modelos de média-variância e média-variância robusto de 2 etapas são superados significativamente pelos modelos que ignoram as estimativas do rendimento esperado.

4.4 Otimização robusta

Os problemas de otimização financeira envolvem valores de parâmetros que são desconhecidos. Sendo o seu valor desconhecido é necessário proceder à sua estimação. Portanto, a questão central reside em: é possível estimar os parâmetros de forma a maximizar o desempenho *out-of-sample* do portfólio resultante?

Apesar do forte suporte teórico do critério de média-variância, os portfólios ótimos resultantes são na maioria dos casos pouco diversificados uma vez que a proporção de investimento em muitos ativos não é significativa, e revelam-se extremamente sensíveis a alterações nos *inputs* (DeMiguel e Nogales [5]). O problema de otimização clássico não se revela robusto a alterações nos *inputs* (Fabozzi et al [6]), pois assume-se que os parâmetros são conhecidos. Na prática, a estimação destes parâmetros resulta em erros de estimação, sendo importante considerar a incerteza resultante destes erros. Portanto, os portfólios resultantes dependem do quão boa se revela a estimação dos parâmetros. Existem várias formas de contornar este problema, nomeadamente a Estatística Robusta e a Otimização Robusta. A Otimização Robusta procura soluções que alcancem bons valores da função objetivo para a realização de parâmetros incertos contidos num conjunto de incerteza. Esta estrutura permite lidar com problemas de otimização com parâmetros incertos, de forma a obter uma solução menos sensível a variações dos *inputs* pertencentes a um dado conjunto de incerteza. Os conjuntos de incerteza possuem os valores possíveis dos parâmetros incertos, e o tamanho deste conjunto é determinado pelo nível de robustez desejado. Os modelos de otimização robusta são úteis nalgumas situações específicas, como por exemplo: alguns dos parâmetros do problema são estimados e contém risco de estimação, há restrições com parâmetros incertos que devem ser satisfeitas independentemente do valor desses parâmetros, a função objetivo ou as soluções ótimas são particularmente sensíveis a perturbações, a pessoa que toma a decisão não pode aceitar riscos de baixa probabilidade mas de alta magnitude, entre outros. Ao invés das aproximações tradicionais a Otimização Robusta de portfólios incorpora a noção de que os *inputs* foram estimados com erros. Assim, neste caso os *inputs* são substituídos por conjuntos de incerteza, como por exemplo, intervalos de confiança à volta do valor estimado.

Existem vários tipos de robustez que podem ser considerados. A robustez de restrição refere-se a situações onde a incerteza está presente nas restrições do problema em causa, onde se procuram soluções que permaneçam viáveis para todos os valores possíveis dos parâmetros incertos. A robustez objetiva pode ser vista como um caso especial da robustez de restrição, referindo-se a soluções que vão permanecer próximas da solução ótima para todos os valores possíveis dos parâmetros incertos do problema. Como é difícil obter estas soluções, especialmente com conjuntos de incerteza de relativamente grandes dimensões, uma alternativa passa por encontrar soluções de forma a otimizar o comportamento no pior cenário. O comportamento no pior cenário corresponde ao valor da função objetivo para a pior realização possível do parâmetro incerto relativo a uma solução específica. Os modelos de robustez de restrição e objetiva focam-se numa medida absoluta de desempenho no pior cenário, o que não é consistente com a tolerância ao risco de muitos investidores. Assim, surge outra abordagem onde se pretende medir o pior cenário mas de forma relativa, ou seja, relativa à melhor solução possível para cada cenário.

4.4.1 Conjuntos de incerteza

Considere-se a formulação de aversão ao risco do problema de média-variância apresentada na secção 3.2. Como referido anteriormente, uma das limitações deste modelo reside na necessidade da estimação do vetor do rendimento esperado e da matriz de covariâncias dos ativos, o que leva a um risco de estimação que deve ser tido em conta no processo de seleção do portfólio ótimo. É então necessário uma formulação de otimização que incorpore robustez e procure uma solução que seja relativamente insensível a imprecisões nos *inputs*. Tendo em conta que a incerteza reside nos coeficientes da função objetivo procuramos um portfólio de robustez objetiva.

É possível especificar a informação dos rendimentos esperados e da matriz de covariâncias na forma de intervalo, ou seja, supor que o vetor do rendimento esperado dos ativos μ e a respetiva matriz de covariâncias Σ pertencem ao seguinte conjunto de incerteza intervalar:

$$U = \{(\mu, \Sigma) : \mu^{inf} \leq \mu \leq \mu^{sup}, \Sigma^{inf} \leq \Sigma \leq \Sigma^{sup}, \Sigma \succeq 0\} \quad (4.12)$$

onde μ^{inf} e Σ^{inf} representam os limites inferiores para o vetor μ e para a matriz Σ , respetivamente, de forma análoga, μ^{sup} e Σ^{sup} representam os limites superiores. Note-se que $\Sigma \succeq 0$ indica que a matriz Σ é simétrica e semidefinida positiva, de forma a garantir que Σ seja uma matriz de covariâncias válida. Estes intervalos podem ser gerados de várias formas, sendo prudente usar altos e baixos históricos dos parâmetros, obtendo o intervalo dos seus valores. De forma a simplificar a escrita, define-se ainda o conjunto $\chi = \{x : x^\top \mathbf{1} = 1\}$.

Portanto, procura-se o portfólio que maximiza a função objetivo no pior cenário das realizações dos parâmetros μ e Σ para o seu conjunto de incerteza U . Recorrendo ao modelo de robustez objetiva, o problema de otimização robusta toma a forma:

$$\underset{x \in \chi}{\text{maximizar}} \left\{ \underset{(\mu, \Sigma) \in U}{\text{minimizar}} \mu^\top x - \lambda x^\top \Sigma x \right\}. \quad (4.13)$$

A solução deste problema é um ponto sela da função $f(x, \mu, \Sigma) = \mu^\top x - \lambda x^\top \Sigma x$. Além disso, como U é limitado, usando resultados clássicos de análise convexa é possível demonstrar que o problema anterior é equivalente ao seu dual (Cornuejols e Tütüncü [3]):

$$\underset{x \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} \left\{ \underset{(\mu, \Sigma) \in U}{\text{maximizar}} -\mu^\top x + \lambda x^\top \Sigma x \right\}. \quad (4.14)$$

Note-se que este problema é de dois níveis tornando a sua resolução mais difícil. Contudo, em alguns casos é possível reduzir os níveis de otimização a um único nível, convertendo o problema de otimização robusto num problema de otimização linear, quadrático, convexo ou não linear, dependendo do conjunto de incerteza e da função objetivo considerada.

Uma forma simples de incorporar a incerteza causada pelos erros de estimação consiste incorporar a noção de que os rendimentos esperados foram estimados com erro, contudo as estimativas $\hat{\mu}$ não estão muito longe do valor real dos rendimentos esperados μ . Ou seja, pode dizer-se que o erro de estimação é menor do que um número pequeno $\delta_i > 0$, recorrendo a um conjunto de incerteza intervalar para os retornos esperados, tal que:

$$U_\delta(\hat{\mu}) = \{\mu : |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i, i = 1, \dots, n\}. \quad (4.15)$$

Portanto, o conjunto de incerteza $U_\delta(\hat{\mu})$ contém todos os vetores μ tal que cada componente μ_i está contido no intervalo $[\hat{\mu}_i - \delta_i, \hat{\mu}_i + \delta_i]$, podendo ser escolhidos de forma a representarem intervalos de confiança à volta de cada valor $\hat{\mu}_i$. O problema é resolvido de forma a que mesmo que μ tome o pior valor possível pertencente ao conjunto de incerteza, a alocação permanece ótima. Note-se que esta abordagem inclui a noção de aversão aos erros de estimação a partir do intervalo $[\hat{\mu}_i - \delta_i, \hat{\mu}_i + \delta_i]$. Quando maior for este intervalo, significa que os rendimentos esperados foram estimados com maior erro. Ou seja, o tamanho deste intervalo, e no geral do conjunto de incerteza, controla a aversão à incerteza causada pelos erros de estimação.

Outro conjunto de incerteza frequentemente usado para os rendimentos esperados dos ativos é o elipsoidal, definido por:

$$U_\delta(\hat{\mu}) = \left\{ \mu : (\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma_\mu^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \delta^2 \right\} \quad (4.16)$$

onde Σ_μ corresponde à matriz de covariâncias dos erros de estimação para o vetor dos rendimentos esperados μ . Um método de estimação desta matriz consiste na estimativa da matriz de covariâncias a dividir pelo número de observações. Como os conjuntos de incerteza (4.15) e (4.16) apenas consideram a incerteza para μ , pode reescrever-se o problema robusto max-min da seguinte forma:

$$\underset{x \in \mathcal{X}}{\text{maximizar}} \left\{ \underset{\mu \in U_\delta(\hat{\mu})}{\text{minimizar}} \left\{ \mu^\top x \right\} - \lambda x^\top \Sigma x \right\} \quad (4.17)$$

4.4.2 Reformulação do problema

E possível obter uma reformulação do problema (4.17) a partir do conjunto de incerteza intervalar (4.15), incluindo o coeficiente de aversão aos erros de estimação δ (Fabozzi et al [6]), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{maximizar}} && \widehat{\mu}^\top x - \delta^\top |x| - \lambda x^\top \Sigma x \\ & \text{sujeito a} && x^\top \mathbf{1} = 1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde $|x|$ denota os valores absolutos do vetor x . É possível reformular o problema de modo a retirar os valores absolutos de x da função objetivo, introduzindo uma nova variável ψ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underset{x, \psi}{\text{maximizar}} && \widehat{\mu}^\top x - \delta^\top \psi - \lambda x^\top \Sigma x \\ & \text{sujeito a} && x^\top \mathbf{1} = 1 \\ & && \psi_i \geq x_i, \psi_i \geq -x_i, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.19)$$

Note-se que este problema de otimização tem a mesma complexidade computacional que a versão não robusta do problema de média-variância, sendo um problema de programação quadrática. No caso de existirem restrições de vendas a descoberto, $|x| = x$, e a função objetivo do problema (4.18) resume-se a $\widehat{\mu}^\top x - \delta^\top x - \lambda x^\top \Sigma x$, onde o parâmetro incerto é substituído pelo pior resultado.

A partir do conjunto de incerteza elipsoidal (4.16) a reformulação robusta do problema (4.17) (Fabozzi et al [7], Kim et all [11]), é a seguinte:

$$\underset{x \in \mathcal{X}}{\text{maximizar}} \quad \mu^\top x - \lambda x^\top \Sigma x - \delta \sqrt{x^\top \Sigma \mu x}. \quad (4.20)$$

Estes conjuntos de incerteza permitem reescrever o problema max-min num problema envolvendo apenas maximização, facilitando o seu tratamento. Contudo, estas estratégias consistem numa otimização no pior cenário, sendo abordagens mais conservadoras, o que não vai de encontro às preferências de alguns investidores.

Alternativas menos conservadoras

Como referido anteriormente, as abordagens precedentes focam-se numa medida absoluta de desempenho no pior cenário, o que não é consistente com a tolerância ao risco de muitos investidores. Deste modo, é possível reformular o problema de forma a medir o pior cenário mas de forma relativa, ou seja, relativa à melhor solução possível para cada cenário. Para tal, considere-se o problema inicial minimizar $f(x, \mu, \Sigma)$. Supondo $(\mu, \Sigma) \in U$ fixo, denotando a função do valor ótimo do problema anterior por $z^*(\mu, \Sigma)$ e o respetivo conjunto de soluções por $x^*(\mu, \Sigma)$, que corresponde às soluções do problema $\text{argmin}_{x \in \mathcal{X}} f(x, \mu, \Sigma)$. É possível relacionar as duas soluções anteriores através da igualdade $z^*(\mu, \Sigma) = f(x^*(\mu, \Sigma), \mu, \Sigma)$.

Para motivar a noção de robustez relativa define-se uma medida de arrependimento associada a uma decisão após a incerteza ser resolvida, Cornuejols e Tütüncü [3]. Seja x a escolha para o vetor de pesos e (μ, Σ) a realização dos parâmetros incertos. Define-se o arrependimento associado à escolha de x em vez de um elemento de $x^*(\mu, \Sigma)$ pela seguinte função:

$$a(x, \mu, \Sigma) = f(x, \mu, \Sigma) - z^*(\mu, \Sigma) = f(x, \mu, \Sigma) - f(x^*(\mu, \Sigma), \mu, \Sigma). \quad (4.21)$$

Note-se que esta função é sempre não negativa e pode ser vista como uma medida de benefício da retrospectiva. De seguida, para um dado x pertencente ao conjunto admissível procede-se à definição de função de arrependimento máximo, dada por:

$$A(x) := \underset{(\mu, \Sigma) \in U}{\text{maximizar}} a(x, \mu, \Sigma) = \underset{(\mu, \Sigma) \in U}{\text{maximizar}} f(x, \mu, \Sigma) - f(x^*(\mu, \Sigma), \mu, \Sigma). \quad (4.22)$$

Assim, uma solução robusta relativa do problema inicial corresponde ao vetor x que minimiza a função de arrependimento máximo, ou seja, o problema a resolver é dado por:

$$\underset{x \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} A(x) = \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} \underset{(\mu, \Sigma) \in U}{\text{maximizar}} a(x, \mu, \Sigma). \quad (4.23)$$

Repare-se que as formulações robustas relativas podem tornar-se de resolução significativamente mais complexas relativamente às formulações anteriores. De facto, como $z^*(\mu, \Sigma)$ corresponde à função do valor ótimo que já envolve a otimização de um problema em si, então o problema (4.23) é um problema de otimização de três níveis em oposição aos problemas de dois níveis apresentados anteriormente. Para além disso, é invulgar a função do valor ótimo $z^*(\mu, \Sigma)$ estar disponível na forma analítica e geralmente não é suave tornando-se difícil de analisar.

Tendo em conta estas dificuldades, o último problema (4.23) pode ser reformulado, estabelecendo previamente um nível máximo de arrependimento a ser tolerado, por exemplo um valor R fixo, impondo este valor nas restrições. Assim sendo, procura-se encontrar um x que satisfaça a seguinte restrição:

$$\begin{aligned} & a(x, \mu, \Sigma) \leq R, & \forall (\mu, \Sigma) \in U & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & f(x, \mu, \Sigma) - z^*(\mu, \Sigma) \leq R, & \forall (\mu, \Sigma) \in U & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & f(x, \mu, \Sigma) - f(x^*(\mu, \Sigma), \mu, \Sigma) \leq R, & \forall (\mu, \Sigma) \in U & \end{aligned} \quad (4.24)$$

Outra abordagem aos modelos de robustez relativa passa por medir o arrependimento relativamente à proximidade da solução escolhida ao conjunto das soluções ótimas (Cornuejols e Tütüncü [3]), ao invés de $a(x, \mu, \Sigma)$ que mede o arrependimento em termos dos valores ótimos objetivos. Nesta abordagem define-se a função distância para um dado x e (μ, Σ) tal que:

$$d(x, \mu, \Sigma) = \inf_{x^* \in x^*(\mu, \Sigma)} \|x - x^*\|. \quad (4.25)$$

Análogamente à abordagem anterior, define-se a função de distância máxima:

$$D(x) := \underset{(\mu, \Sigma) \in U}{\text{maximizar}} d(x, \mu, \Sigma) = \underset{(\mu, \Sigma) \in U}{\text{maximizar}} \inf_{x^* \in x^*(\mu, \Sigma)} \|x - x^*\|. \quad (4.26)$$

Nesta versão de robustez relativa, obtem-se um problema de otimização onde se procura x tal que:

$$\underset{x \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} D(x) = \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{minimizar}} \underset{(\mu, \Sigma) \in U}{\text{maximizar}} d(x, \mu, \Sigma). \quad (4.27)$$

Note-se que quando o conjunto das soluções é singular estamos perante o caso trivial, onde não há otimização envolvida. Este modelo é útil para problemas de multiperíodo, onde as revisões de decisões entre períodos podem tornar-se caras, como por exemplo problemas de rebalanceamento de portfólio com custos de transação. Contudo, estas abordagens são mais complexas de implementar

relativamente às reformulações propostas na secção 4.4.2, uma vez que são problemas de dois níveis de otimização.

Capítulo 5

Análise empírica

Para realizar uma análise empírica retiraram-se os dados correspondentes aos preços de fecho ajustados de 27 ativos do índice *Dow Jones Industrial Average* e do próprio índice a partir da base de dados *Yahoo Finance*. Consideraram-se os rendimentos logarítmicos mensais correspondentes aos preços de fecho ajustados, no período de 1 de janeiro de 2000 até 1 de março de 2023, constituindo 279 observações para cada ativo. Foram excluídos os ativos *Salesforce, Inc. (CRM)*, *Dow Inc. (DOW)* e *Visa Inc. (V)* do mesmo índice, uma vez que não dispõem dados para todo o período considerado.

Primeiramente pretende-se demonstrar que o critério de média-variância se revela uma boa aproximação à maximização da utilidade média, considerando funções de utilidade potência e logarítmica. Calcula-se o vetor média e matriz de covariância para 10 ativos da amostra considerada. A partir destes valores geram-se simulações de forma a avaliar as distribuições dos rendimentos dos portfólios considerando ambos os métodos. De forma a avaliar a sensibilidade a variações nos *inputs* simulam-se amostras de rendimentos, aplicando o critério de média-variância de forma a comparar a média e variância com os valores correspondentes à amostra empírica. Por fim, pretende-se avaliar o desempenho *out-of-sample* de vários métodos: otimização robusta com conjunto de incerteza elipsoidal, critério de média-variância, mínima-variância e abordagem *naive* de igual proporção em todos os ativos, escolhendo-se os portfólios com e sem restrição de vendas a descoberto. Estimam-se os parâmetros com base numa amostra *in-sample*, de 1 de janeiro de 2000 até 31 de dezembro de 2009, perfazendo 120 observações. Recorre-se a uma simulação de forma a comparar o valor médio da riqueza para cada método. As experiências foram repetidas para diferentes valores de tolerância ao risco, $t = 10, 25, 50, 75$, que correspondem aos valores $\lambda = 0.1, 0.04, 0.02, 0.0132$ e $\gamma = 0.2, 0.08, 0.04, 0.027$, respetivamente.

5.1 Utilidade esperada vs média-variância

Foram escolhidos 10 dos 27 ativos. Com base na amostra desses 10 ativos, foi calculado um vetor de médias e uma matriz de covariâncias com base na amostra total, que se assumem como os verdadeiros valores dos parâmetros. A Tabela 5.1 apresenta a média e variância dos portfólios calculados e a Tabela 5.2 apresenta os resultados para as proporções dos ativos.

Tabela 5.1 Média e variância dos rendimentos dos portfólios considerando vários critérios de seleção e tolerância ao risco $t = 25$

Critério	Potência	MV	Logarítmica	MV
Média	0.0162	0.0162	0.0160	0.0160
Variância	0.0084	0.0084	0.0081	0.0081

Tabela 5.2 Proporção dos ativos nos portfólios considerando vários critérios de seleção e tolerância ao risco $t = 25$

Ativo	Média	Variância	Potência	MV	Logarítmica	MV
AAPL	0.0188	0.0143	0.6600	0.6602	0.6294	0.6399
AMGN	0.0057	0.0052	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
AXP	0.0058	0.0074	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
BA	0.0072	0.0096	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CAT	0.0111	0.0084	0.3399	0.3392	0.3704	0.3340
CSCO	0.0009	0.0096	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CVX	0.0080	0.0046	0.0000	0.0006	0.0002	0.0261
DIS	0.0046	0.0059	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
GS	0.0059	0.0084	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
HD	0.0076	0.0052	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Os resultados são muito semelhantes para os diferentes valores de tolerância ao risco considerados, e portanto apenas são apresentados os resultados para uma tolerância ao risco $t = 25$. Pode observar-se a partir da Tabela 5.2 que as proporções recorrendo a uma função de utilidade potência e logarítmica são muito próximas das proporções para o critério de média-variância correspondente.

Assumindo uma distribuição normal multivariada, foram simuladas 1000 amostras dos rendimentos, aplicados aos dois métodos, maximização da utilidade esperada e critério de média-variância. Como são decisões para um único período, foi gerado um vetor de rendimentos aleatório, e com base nos portfólios anteriormente calculados, calcula-se o rendimento do portfólio. Desta forma aproximam-se as funções de distribuição dos rendimentos dos portfólios associados aos dois métodos.

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram que as distribuições dos rendimentos dos portfólios associados aos dois métodos não diferem. Assim o critério de média-variância revela-se uma boa aproximação à maximização da utilidade média.

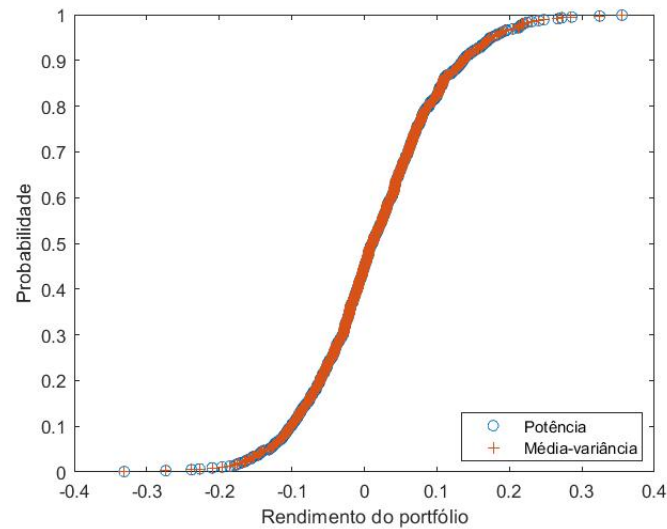


Fig. 5.1 Comparação das distribuições cumulativas do rendimento dos portfólios entre a maximização da utilidade média com função potência e o critério de média-variância

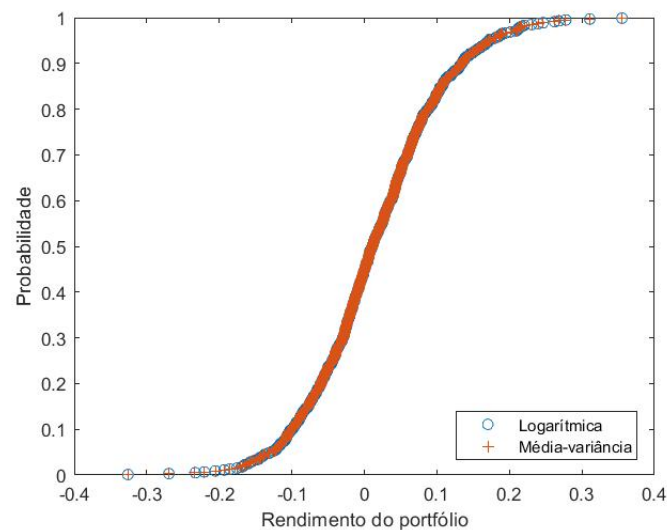


Fig. 5.2 Comparação das distribuições cumulativas do rendimento dos portfólios entre a maximização da utilidade média com função logarítmica e o critério de média-variância

5.2 Sensibilidade a variações nos *inputs*

Utilizando os 10 ativos da secção anterior, calcula-se o vetor das médias (μ) e a matriz de covariâncias (Σ) e assumem-se como os valores verdadeiros. Calcula-se a fronteira de eficiência, e escolhe-se um portfólio, x , com um $\mu_p = x^\top \mu$ e $\sigma_p^2 = x^\top \Sigma x$ associados. Com base no vetor das médias e matriz de covariâncias guardados (verdadeiros), simulam-se 250 amostras de rendimentos, aplica-se o critério da média variância, calculando x_i , $\mu_i = x_i^\top \mu$ e $\sigma_i^2 = x_i^\top \Sigma x_i$, que serão comparados como os μ_p e σ_p .

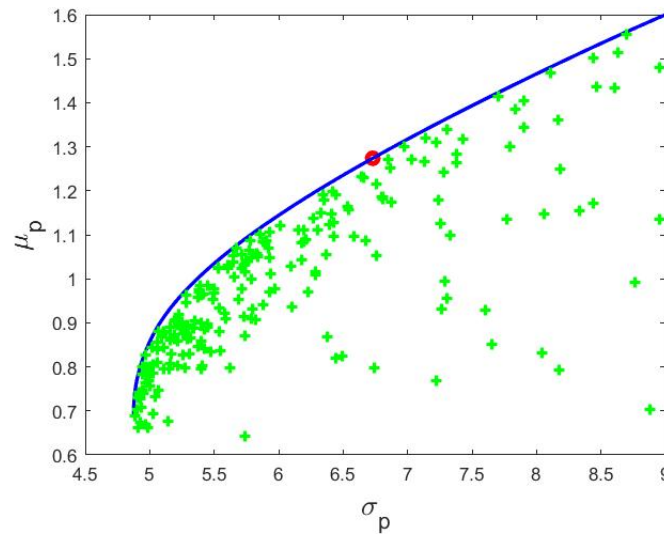


Fig. 5.3 Sensibilidade a variações nos *inputs*

A linha azul traçada na Figura 5.3 corresponde à fronteira de eficiência. Escolhe-se um portfólio, representado pelo ponto a vermelho, e através das amostras simuladas são representadas as médias e os desvios-padrão associados aos portfólios gerados, que correspondem aos pontos verdes. Como pode verificar-se pela Figura 5.3, os pontos verdes podem afastar-se bastante da fronteira de eficiência, o que revela grande sensibilidade do problema a variações nos *inputs*.

5.3 Otimização robusta

De forma a realizar uma análise a vários critérios de seleção consideram-se os 27 ativos no período de 1 de janeiro de 2000 até 31 de dezembro de 2009 para a amostra de dados *in-sample*, e 1 de janeiro de 2010 até 1 de março de 2023 para a amostra de dados *out-of-sample*, com rebalanceamento mensal.

Para realizar comparações *out-of-sample* são estimados os parâmetros usando as 120 observações *in-sample*. Com base nestes parâmetros aplicam-se vários métodos, recorrendo à otimização robusta com conjunto de incerteza elipsoidal (OR), ao critério de média-variância (MV), mínima-variância (MinV) e à abordagem *naive* de igual proporção em todos os ativos (1/N), escolhendo-se os portfólios com e sem restrição de vendas a descoberto. O índice servirá de referência para todos os portfólios. Implementa-se uma janela flutuante, onde o rendimento do portfólio e a riqueza acumulada são calculados usando os rendimentos da observação seguinte. Se o procedimento for efetuado com todos os ativos do índice é natural que com um processo de otimização o desempenho seja melhor. O mais correto é usar uma sub-amostra dos 27 ativos, no entanto, a escolha dos ativos vai afetar o desempenho. Podendo obter-se um caso em que o desempenho seja muito melhor e outro caso em que seja muito pior. As comparações poderão ser efetuadas com base numa simulação. Dos 27 ativos escolhem-se aleatoriamente 10 e calcula-se a evolução da riqueza. Este procedimento é efectuado repetidamente, perfazendo 500 iterações. Por fim compara-se o valor médio da evolução da riqueza para cada método, considerando um investimento inicial de 100 unidades monetárias. Serão apresentados os resultados para uma tolerância ao risco $t = 4$ que corresponde a $\lambda = 0.25$. O valor de δ na otimização robusta é

determinado de forma indireta assumindo um grau de confiança de 95% e invertendo a probabilidade de um qui-quadrado.

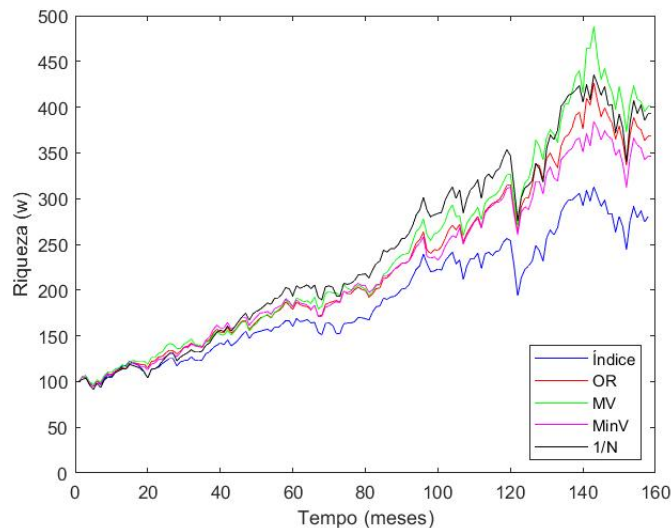


Fig. 5.4 Comparação entre o índice e os critérios sem restrição de vendas a descoberto

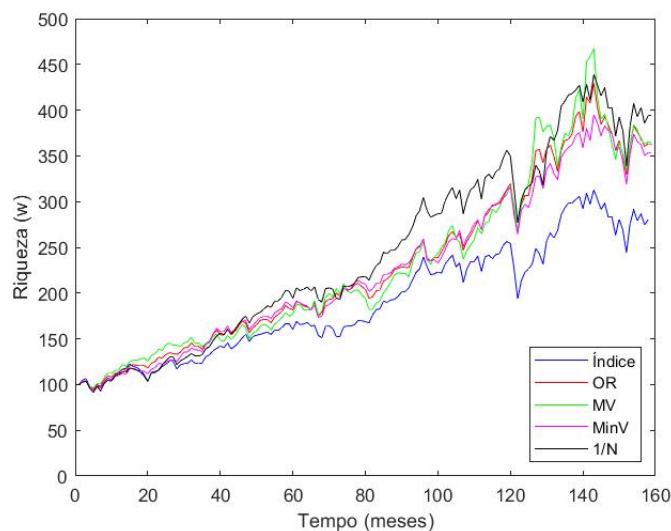


Fig. 5.5 Comparação entre o índice e os critérios com restrição de vendas a descoberto

Nesta experiência verifica-se através das Figuras 5.4 e 5.5 que os quatro critérios apresentados apresentam um melhor desempenho em termos médios relativamente ao índice independentemente de serem permitidas ou não vendas a descoberto. Pode ainda observar-se que a otimização robusta e o critério de mínima-variância se revelam mais estáveis comparativamente à média-variância.

O critério *naive* (1/N) apresenta melhores resultados relativamente aos restantes critérios, independentemente de se considerar ou não vendas a descoberto. Isto deve-se ao facto do valor do índice apresentar um *trend* crescente muito acentuado, assim, devido ao carácter *bull market*, usando técnicas

de otimização poderá obter-se ainda melhores resultados, sendo que a otimização robusta não terá tanta importância como seria o caso de grandes flutuações no mercado.

Capítulo 6

Conclusão

O estudo de critérios de decisão em contexto de investimento financeiro revela-se de grande interesse, de forma a tomar decisões o mais racionais possíveis.

Considerando uma função de utilidade quadrática ou uma função exponencial negativa e adicionalmente retornos normais, existe uma equivalência entre a maximização da utilidade esperada e o critério de média variância. A partir dos resultados obtidos na análise empírica, conclui-se que o critério de média-variância constitui uma boa aproximação à maximização da utilidade média quando se recorre a funções de utilidade potência ou logarítmica, uma vez que as distribuições dos rendimentos dos portfólios não diferem. No entanto, o problema de média variância apresenta grande sensibilidade a erros de estimação, principalmente no vetor média, causando instabilidade nas proporções resultantes para cada ativo. Assim, é importante estudar outras abordagens que sejam menos sensíveis a alterações nos *inputs*.

A otimização robusta com conjunto de incerteza elipsoidal e a formulação de mínima variância revelam-se mais estáveis comparativamente ao critério de média-variância. Pela análise empírica pode observar-se que o critério *naive* apresenta melhores resultados *out-of-sample* relativamente aos restantes modelos implementados independentemente de se considerar ou não vendas a descoberto. Este comportamento deve-se a uma tendência crescente do índice.

Só houve tempo para um número de experiências limitado, com escolhas relativas aos parâmetros de risco, e apresentando apenas uma formulação robusta para o conjunto de incerteza assumindo uma elipse. Devido a restrições de tempo, este estudo pretende ser o início de uma investigação mais aprofundada nesta área. Assim, o trabalho realizado nesta dissertação pode ser melhorado, por exemplo, analisando a estabilidade e o desempenho *out-of-sample* das abordagens menos conservadoras da otimização robusta.

Bibliografia

- [1] Chen, C. and Kwon, R. H. (2012). Robust portfolio selection for index tracking. *Computers & Operations Research*, 39(4):829–837.
- [2] Chopra, V. K. and Ziemba, W. T. (2013). The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. In *Handbook of the fundamentals of financial decision making: Part I*, pages 365–373. World Scientific.
- [3] Cornuejols, G. and Tütüncü, R. (2006). *Optimization Methods in Finance*. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213 USA.
- [4] DeMiguel, V., Garlappi, L., and Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/n portfolio strategy? *The review of Financial studies*, 22(5):1915–1953.
- [5] DeMiguel, V. and Nogales, F. J. (2009). Portfolio selection with robust estimation. *Operations research*, 57(3):560–577.
- [6] Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A., and Focardi, S. M. (2007). Robust portfolio optimization. *The Journal of portfolio management*, 33(3):40–48.
- [7] Frank J. Fabozzi, Petter N. Kolm, D. A. P. and Focardi, S. M. (2007). *Robust Portfolio Optimization and Management*. John Wiley & Sons, Inc.
- [8] Frankfurter, G. M. and Lamoureux, C. G. (1987). The relevance of the distributional form of common stock returns to the construction of optimal portfolios. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(4):505–511.
- [9] Goldfarb, D. and Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of operations research*, 28(1):1–38.
- [10] Kallberg, J. G. and Ziemba, W. T. (1983). Comparison of alternative utility functions in portfolio selection problems. *Management Science*, 29(11):1257–1276.
- [11] Kim, J. H., Kim, W. C., Kwon, D.-G., and Fabozzi, F. J. (2018). Robust equity portfolio performance. *Annals of Operations Research*, 266:293–312.
- [12] Kolm, P. N., Tütüncü, R., and Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2):356–371.
- [13] Kroll, Y., Levy, H., and Markowitz, H. M. (1984). Mean-variance versus direct utility maximization. *The Journal of Finance*, 39(1):47–61.
- [14] Levy, H. and Markowitz, H. M. (1979). Approximating expected utility by a function of mean and variance. *The American Economic Review*, pages 308–317.
- [15] Markowitz, H. (1952). Harry m. markowitz. *Portfolio selection*, *Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- [16] Markowitz, H. (2014). Mean–variance approximations to expected utility. *European Journal of Operational Research*, 234(2):346–355.

-
- [17] Merton, R. C. (1980). On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation. *Journal of financial economics*, 8(4):323–361.
- [18] Pulley, L. B. (1983). Mean-variance approximations to expected logarithmic utility. *Operations Research*, 31(4):685–696.
- [19] Reid, D. W. and Tew, B. V. (1986). Mean-variance versus direct utility maximization: A comment. *The Journal of Finance*, 41(5):1177–1179.
- [20] Scutella, M. G. and Recchia, R. (2013). Robust portfolio asset allocation and risk measures. *Annals of Operations Research*, 204(1):145–169.
- [21] Tütüncü, R. H. and Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132(1):157–187.
- [22] Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.