

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Marta Sofia Carapinha Soutino

**IMPACTO DOS CUSTOS DE TRANSAÇÃO NA
SELEÇÃO DE PORTEFÓLIOS**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças,
orientada pelo Professor Doutor José Luis Esteves dos Santos e pelo Professor
Doutor Professor Helder Miguel Correia Virtuoso Sebastião, apresentada ao
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à
Faculdade de Economia.**

Março de 2023

Impacto dos Custos de Transação na Seleção de Portefólios

Marta Sofia Carapinha Soutino



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Março 2023

Agradecimentos

A elaboração desta dissertação não teria sido possível sem o contributo de algumas pessoas especiais, às quais expresso os meus profundos e sinceros agradecimentos.

Aos meus orientadores, Professor Doutor José Luis Esteves dos Santos e Professor Doutor Helder Miguel Correia Virtuoso Sebastião, por toda a dedicação, apoio, disponibilidade, paciência, orientação científica e revisão desta dissertação.

A todos os Professores que me acompanharam durante o meu percurso académico, ao Departamento de Matemática e à Faculdade de Economia por todos os recursos disponibilizados.

Aos meus pais, Maria João e Carlos, e aos meus irmãos, Nuno e Leonor, por serem o meu maior pilar na vida pessoal e académica, por todo o tempo dedicado ao meu crescimento e formação, por confiarem em mim e me permitirem voar.

À minha família, tios, primos e avós, por todo o suporte, pela união e por nunca me faltar amor e reconforto sempre que me senti incapaz.

Ao meu namorado, Gabriel, que melhor que ninguém vivenciou de perto todo o meu esforço e frustração na busca da minha melhor versão para elaborar esta dissertação. Pelas palavras de apoio e incentivo, pelo trabalho, pela paciência, força e amor com que sempre acreditou em mim.

Aos meus amigos de Campo Maior e Coimbra e às minhas colegas de casa, por me apoiarem de olhos fechados, pelos bons momentos que me aquecem o coração e trazem boas memórias, pelo carinho, alegria, energia e amizade que me demonstraram numa das fases mais difíceis e enriquecedoras da minha vida.

Ao meu padrinho, Hugo, às minhas madrinhas Diana e Margarida, e à minha afilhada Inês, por serem o melhor que Coimbra me deu, pela confiança e lealdade, pela amizade verdadeira e para a vida. A todos os que caminharam comigo e sabem da minha luta e das minhas conquistas, o meu sincero obrigado.

O trabalho apresentado neste documento foi parcialmente realizado no âmbito do projeto RiskBigData: Gestão Complexa de Risco no Regime de Utilização de Dados Massiva (PTDC/MAT-APL/1286/2021), financiado pela Fundação Portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT).



Resumo

Esta dissertação pretende estudar o impacto da incorporação dos custos de transação nos modelos de otimização de portfólios. O estudo propõe uma metodologia de seleção de portfólios eficientes através da incorporação dos custos de transação na função objetivo ou através de uma restrição adicional sobre o *turnover*.

Markowitz [1] foi o primeiro a sistematizar um modelo capaz de ajudar os investidores a criar um portfólio eficiente. O autor defendia que através da resolução do problema de média-variância, o investidor identifica, de entre um conjunto de portfólios admissíveis, aquele que minimiza o risco, medido através da matriz de covariâncias dos retornos, para um determinado retorno esperado r .

Os portfólios testados são o de Variância Mínima e o que maximiza o Equivalente Certo. Comparando o desempenho dos portfólios com o portfólio *benchmark*, Naive, no período *out-of-sample*, considerando várias periodicidades e a existência de restrições de *short selling* é possível determinar qual o portfólio *out-of-sample* mais eficiente.

A estratégia é aplicada a um conjunto de 500 ações do S&P 500 que abrangem o período de 4 de Janeiro de 2010 a 30 de Novembro de 2021. Ao aplicarmos uma estratégia de rebalanceamento é realizada uma análise *out-of-sample* dos modelos utilizando uma janela móvel com várias periodicidades. Nesta análise são utilizadas diferentes métricas de desempenho como *win rate*, cardinalidade, *turnover*, retorno médio anualizado, desvio padrão anualizado, rácio de Sharpe, rácio de Sortino, CVaR e *Maximum Drawdown*.

De acordo com os resultados obtidos a inclusão dos custos de transação na função objetivo e através da restrição de *turnover* reduzem os custos de transação envolvidos. Ambos os modelos Variância Mínima e Equivalente Certo, na presença de custos de transação, revelam melhorias no desempenho dos portfólios quando comparados com os modelos base, contudo apenas o Equivalente Certo se revela melhor que o portfólio *benchmark*.

Palavras-chave: seleção de portfólios, custos de transação, portfólios Variância Mínima e Equivalente Certo, portfólio Naive.

Abstract

This dissertation aims to study the impact of the incorporation of transaction costs in models of portfolio optimization. The study suggests a methodology to select efficient portfolios by including the transactions costs in the objective function or by adding a turnover restriction.

Markowitz [1] was the first to systematize a model that's able to assist investors creating an efficient portfolio. The author advocated that after obtaining the mean-variance problem's solution, the investor identifies from a set of admissible portfolios the one that minimizes the risk measured by the return covariance matrix given an expected return r .

The portfolios tested are the minimum variance and the one that maximizes the certainty equivalent. It's possible to identify the most effective out-of-sample portfolio by comparing the out-of-sample performance of the tested portfolios with the benchmark portfolio, naive, and taking into account three rebalancing frequencies and the existence of short selling constraints.

The strategy is applied to 500 shares from *S&P 500* whose price data was extracted from January 4, 2010 to November 30, 2021. The rebalancing strategy with different periodicities uses a rolling window, allowing an out-of-sample analysis of the models studied. The analysis relies in multiple performance measures, like win rate, cardinality, turnover, annualized mean return, annualize standard deviation, Sharpe ratio, Sortino ratio, CVaR and Maximum Drawdown.

The results indicate that the incorporation of the transaction costs in the objective function and through a turnover restriction reduces effecitevely the costs involved in the rebalancing of the portfolios. Moreover, the performance of the minimum variance and certainty equivalent models gets significantly improved when the transaction costs are taken into account. However, only the certainty equivalent model reveals to be better than the benchmark in terms of Sharpe ratio.

Keywords: portfolio selection, transaction costs, minimum variance and certainty equivalent portfolios, portfolio naive.

Conteúdo

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	11
1 Introdução	1
2 Revisão de Literatura	3
3 Dados e Análise Preliminar	9
4 Metodologia	13
4.1 Portefólios	13
4.2 Implementação dos modelos em <i>Matlab</i>	15
4.3 Incorporação dos Custos de Transação	16
4.4 Rebalanceamento	19
4.5 Métricas de Desempenho Financeiro	19
5 Resultados Empíricos	23
6 Conclusões	35
Referências	37
Apêndice A Revisão de Literatura	41
Apêndice B Mais detalhes do desempenho na amostra	53
B.1 Análise Out-of-Sample	53

Lista de Figuras

3.1	Evolução do índice <i>S&P</i> 500 de 4 de Janeiro de 2010 a 30 de Novembro de 2021. A linha vertical vermelha separa os períodos <i>in-sample</i> e <i>out-of-sample</i>	11
5.1	Avaliação do Impacto da Restrição de <i>Turnover</i> nos modelos MV e EC, no período <i>in-sample</i>	25
5.2	Rácios de Sharpe dos modelos MVRT e ECRT no período <i>in-sample</i> e considerando diferentes limites máximos de <i>turnover</i>	26
5.3	Desempenho <i>Out-of-Sample</i> dos modelos EW, MV, EC, MVCd, ECCd, MVRT e ECRT. Os valores de <i>turnover</i> para os modelos MVRT e ECRT foram escolhidos através da Tabela 5.1.	32
B.1	Retornos acumulados dos portfólios com rebalanceamentos diário, semanal e mensal.	54
B.2	Avaliação do Impacto da Restrição de <i>Turnover</i> nos modelos MV e EC, no período <i>out-of-sample</i>	56
B.3	Avaliação da cardinalidade dos modelos MV, MVCd, MVRT e EC, ECCd e ECRT considerando rebalanceamentos diário, semanal e mensal, no período <i>out-of-sample</i>	57

Lista de Tabelas

3.1	Estatísticas descritivas anualizadas dos retornos logarítmicos para a amostra completa e dividida em <i>in-sample</i> e <i>out-of-sample</i>	11
5.1	Portefólios MVRT e ECRT considerando vários limites de <i>turnover</i> a introduzir na restrição de <i>turnover</i> no período <i>in-sample</i>	23
5.2	Métricas de Desempenho dos Portefólios no período <i>out-of-sample</i>	27
A.1	42
B.1	Portefólios Variância Mínima (MV) e Equivalente Certo (EC) considerando vários possíveis valores a introduzir na restrição de <i>turnover</i> , no período <i>out-of-sample</i>	55

Capítulo 1

Introdução

O objetivo de um investidor racional assenta em maximizar a utilidade esperada, o que em ambiente de incerteza, implica a maximização do retorno esperado ajustado ao risco. No sentido de melhorar a seleção de portefólios robustos, existem modelos e técnicas que são utilizados nos mercados financeiros, afim de auxiliar os investidores no processo de tomada de decisão dos ativos em que devem investir e quais as proporções para formar um portefólio.

Markowitz [1] foi o primeiro a sistematizar um modelo capaz de ajudar os investidores a criar um portefólio eficiente. O autor defendia que o processo de seleção de um portefólio deve incluir a recolha de dados históricos, a formulação de expectativas sobre os futuros desempenhos dos ativos disponíveis, culminando na aplicação de métodos objetivos para a escolha do portefólio. Assim, através da resolução do problema de média-variância, o investidor identifica, de entre um conjunto de portefólios admissíveis, o portefólio que minimiza o risco, medido através da matriz de covariâncias dos retornos, para um determinado retorno esperado r . É também salientado pelo autor que o risco do portefólio é uma função decrescente com o número de ativos incluídos no portefólio, devendo o investimento ser razoavelmente diversificado.

Existe uma grande diversidade de riscos que podem afetar o preço dos ativos financeiros. Dentro dos riscos financeiros existem o risco de mercado, o risco de crédito e o risco de liquidez.

O risco de mercado consiste no impacto do mercado como um todo no preço do ativo, o que pode levar a diminuições inesperadas nas taxas de retorno. O risco de crédito ou risco de perda resulta do incumprimento do pagamento a que o ativo dá direito, já o risco de liquidez surge associado à dificuldade que existe em negociar um determinado instrumento financeiro quando desejado e a preços considerados razoáveis, podendo impedir o investidor de recuperar o capital investido ou pelo menos parte dele. Este risco de incumprimento e o risco de liquidez afetam o risco de preço.

Se assumirmos que o mercado é perfeito são ignoradas as fricções de mercado, sendo a mais importante os custos de transação, associados à aquisição de portefólios e ao seu eventual rebalanceamento. No mercado real, o efeito dos custos de transação é uma das maiores preocupações dos investidores institucionais, sobretudo em mercados financeiros periféricos, com reduzida liquidez¹, como o mercado

¹Liquidez: maior ou menor capacidade de transação dos ativos, em termos de custos e de tempo. É medida através do montante médio que um investidor está disposto a pagar por um ativo para que o possa vender de imediato, em vez de adiar essa transação.

português, podendo absorver uma parte significativa dos potenciais retornos.

Sendo os custos de transação algo a ter em conta, os investidores na tomada de decisão devem considerar as rentabilidades após os custos de transação. Esses custos podem de alguma forma alterar as decisões dos investidores, como por que tipo de rebalanceamento optar, manter a cardinalidade dos portefólios baixa, etc. Se os custos de transação forem tidos em conta explicitamente no modelo, podem minimizar as alterações das proporções dos ativos do portefólio e portanto aumentar a rentabilidade do portefólio após custos de transação.

Muitos autores defendem que ter em conta os custos de transação explicitamente no modelo é importante porque transmite uma maior estabilidade e realismo às proporções, gerando uma menor necessidade de intervir no mercado para rebalancear o portefólio.

Nesta dissertação pretende-se estudar o impacto dos custos de transação na seleção de portefólios. Para medir esse impacto, a comparação é feita entre modelos que consideram os custos de transação na otimização do portefólio, quer via incorporação dos custos na função objetivo quer via uma restrição adicional de *turnover*, e os portefólios que não consideram os custos de transação.

A ideia basilar metodológica da dissertação consiste em encontrar o portefólio com melhor desempenho *out-of-sample* após custos de transação.

A presente dissertação encontra-se estruturada em 6 capítulos. No Capítulo 2 são referidos resultados tendo por base literatura já existente que possa fundamentar as conclusões efetuadas após o estudo. No Capítulo 3 são apresentados os dados e algumas análises preliminares. No Capítulo 4 é apresentada a metodologia, onde consta uma apresentação sumária dos vários modelos de seleção de portefólios utilizados no estudo, a sua implementação em *Matlab*, os argumentos para a incorporação dos custos de transação na estratégia de seleção de portefólios, a estratégia de rebalanceamento e as métricas de desempenho financeiro. No Capítulo 5 são apresentados os resultados empíricos obtidos. No último capítulo resumem-se as principais conclusões.

Capítulo 2

Revisão de Literatura

A importância dos custos de transação na seleção de portfólios tem aumentado e sido objeto de grande interesse por parte de acadêmicos e investidores.

De acordo com os artigos lidos existem alguns resultados que merecem destaque, entre os quais a forma como os autores lidam com os custos de transação, direta ou indiretamente e as principais conclusões que retiram.

O modelo de média-variância de Markowitz é considerado o pioneiro no estudo da sistematização da teoria sobre seleção de portfólios, apresentado em 1952 por Henry Markowitz, num artigo do *Journal of Finance* intitulado "Portfolio Selection". Markowitz [1] sistematizou um modelo capaz de ajudar os investidores a criar um portfólio eficiente, de acordo com o qual através da resolução do problema de média-variância, o investidor identifica, de entre um conjunto de portfólios admissíveis, aquele minimiza o risco. O risco do portfólio é medido pela sua variância, a qual resulta da matriz de covariâncias entre os ativos individuais, para um determinado nível de retorno esperado, r . É ainda salientado pelo autor que o risco se comporta como uma função decrescente no número de ativos incluídos no portfólio, devendo por isso o investimento ser razoavelmente diversificado.

No entanto, algumas críticas a este modelo começaram a surgir e foram propostas alternativas, ao longo dos anos, para o modelo tradicional de média-variância.

DeMiguel *et al.* [2] inspirados no modelo inicial de Markowitz, sintetizam 14 metodologias de seleção de portfólios, testando-as em sete base de dados diferentes. Os autores concluem que nenhuma das estratégias de otimização é melhor que a estratégia simples $\frac{1}{n}$, com proporções equitativas, também conhecida como Portfólio Naive. Esta estratégia não requer qualquer tipo de otimização e é considerada uma das mais eficientes, especialmente na presença de custos de transação. Os autores argumentam que a eficiência da estratégia na presença dos custos de transação se deve ao facto de não ser baseada no modelo média-variância, pois este é muito sensível aos *inputs* e portanto os erros de estimação, nomeadamente da rentabilidade média, têm um impacto significativo. Com base em DeMiguel *et al.* [2] o desempenho *out-of-sample* destas 14 metodologias é medido considerando três critérios: os valores *out-of-sample* do rácio de Sharpe, equivalente certo e *turnover*.¹

¹Soma da variação dos pesos entre os instantes de rebalanceamento seguidos, representando assim a quantidade de transações realizadas (compras e vendas).

Tendo em conta os critérios referidos anteriormente, o objetivo dos autores consiste em mostrar que a estratégia $\frac{1}{n}$ é a mais eficiente, o que indica que o ganho da diversificação ótima para a amostra *out-of-sample* compensa os erros de estimação que os modelos de otimização incorporam.

São vários os autores que sugerem extensões ao modelo inicial de Markowitz incorporando os custos de transação. O objetivo destes trabalhos consiste em introduzir mais realismo na análise, tornando os portfólios mais estáveis e melhorando o seu desempenho após custos de transação.

Pogue [3] é um dos autores que realça a importância dos custos de transação, estabelecendo uma das primeiras extensões ao modelo média-variância, com a inclusão direta dos custos de transação. Defende que o facto de os modelos de seleção de portfólios ignorarem as taxas de corretagem envolvidas no rebalanceamento de um portfólio leva a que tenham de ser feitos frequentes rebalanceamentos ao portfólio, que não se justificam em relação às taxas de corretagem resultantes. Pequenas mudanças nas expectativas em relação a um determinado título financeiro podem resultar em transações que não ocorreriam se as comissões do corretor para a compra ou venda desse ativo financeiro fossem consideradas. Além dos custos de transação, revela ainda a importância de outros fatores como os custos de vendas e os empréstimos de margem para compra de títulos e vendas a descoberto.

A importância dos custos de transação é também apoiada pelos autores Mitchell e Braun [4], que defendem que a incorporação dos custos é importante para a obtenção de um modelo mais realista. Discutem assim várias formas de incorporar os custos de transação no modelo variância mínima e as suas implicações. Dos tipos de custos estudados encontram-se os custos proporcionais.

Um novo método de seleção de portfólio ótimo, ainda dentro da estrutura de média-variância, mas considerando restrições de vendas a descoberto é apresentado por Peng *et al.* [5]. Neste modelo os custos de transação apresentam forma quadrática e são incluídos na função objetivo, de forma a penalizar as transações volumosas. Os portfólios são rebalanceados mensalmente e comparados com um índice *benchmark* (não especificado) através do retorno acumulado. O modelo de média-variância sem incorporação dos custos de transação apresenta um desempenho semelhante ao *benchmark*, já a incorporação do modelo com custos de transação apresenta melhor desempenho *out-of-sample* pois reduz efetivamente o volume de transações e os retornos acumulados do portfólio ótimo revelam-se ainda 1,06 a 2,35% superiores ao do índice *benchmark*.

Gârleanu e Pedersen [6] apresentam um modelo com custos de transação quadráticos incluídos na função objetivo do modelo de média-variância. O rácio de Sharpe calculado com retornos sem retirar os custos de transação revela-se maior para o modelo de Markowitz sem custos de transação. Contudo, o portfólio que considera os custos de transação apresenta maior rácio de Sharpe que o modelo base, quando o rácio de Sharpe é calculado a partir dos retornos após custos de transação.

Ainda dentro dos estudos que apresentam a incorporação dos custos de transação na função objetivo encontra-se Angelelli *et al.* [7]. Estes autores realizam uma comparação entre dois modelos baseados na minimização de duas medidas de risco: *Mean Absolute Deviation* (MAD) e *Conditional Value-at Risk* (CVaR), através do uso do software CPLEX². Os autores concluem que o modelo MAD apresenta melhor tempo de computação em relação ao CVaR, sendo no entanto mais instável, apesar dos

²Software de otimização desenvolvido pela IBM para a resolução de problemas de otimização. <https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio>

desempenhos dos dois modelos no que diz respeito ao retorno acumulado dos portfólios ótimos serem semelhantes.

Deng *et al.* [8] apresentam uma formulação de problema de otimização com dupla função objetivo, onde se pretende maximizar o retorno após custos de transação e, simultaneamente, minimizar o risco. Os custos de transação são proporcionais e é construída uma extensão do modelo variância mínima, não sendo contudo testada. Ao contrário dos autores anteriores, Ledoit e Wolf [9] testam os modelos de modo a obter uma comparação do desempenho dos modelos variância mínima com e sem uma penalização proporcional aos custos de transação na função objetivo com a estratégia Naive. Segundo os resultados, o rácio de Sharpe dos retornos líquidos³ aumenta após a inclusão dos custos no problema de otimização, nomeadamente quando o valor do *turnover* da estratégia é elevado.

Glen [10] propõe também uma extensão para solução do portfólio de variância mínima e incorpora os custos de transação proporcionais nas restrições do modelo, considerando custos fixos e variáveis. A comparação dos portfólios de variância mínima com e sem a inclusão de custos de transação diretamente no modelo revelou que devido às diferenças estruturais, os custos de transação devem ser tidos em conta. Incluir os custos de transação no modelo de otimização permite retornos líquidos maiores.

Ledoit e Wolf [9] retiram as mesmas conclusões que Glen [10] ao observar um aumento do rácio de Sharpe dos portfólios que consideram os custos de transação relativamente aos portfólios base.

Lobo *et al.* [11] consideram também os custos de transação proporcionais, mas sem custos de transação fixos. Os autores concluem que os problemas de otimização que minimizam os custos de transação são convexos e portanto resolvidos de forma eficiente. Por outro lado, se os custos fixos também forem considerados, o problema deixa de ser convexo. Deste modo, é sugerida uma heurística para este tipo de problemas que produz soluções muito próximas às soluções ótimas.

Hautsch e Voigt [12] apresentam um problema de maximização onde a função objetivo corresponde ao equivalente certo após custos de transação. Os custos considerados são quadráticos e o portfólio é rebalanceado diariamente. Com base nos resultados, quando comparado com o portfólio Naive, o modelo criado pelos autores apresenta maior rácio de Sharpe. Esse valor verifica-se devido ao desvio padrão dos retornos ser menor que o do portfólio Naive, enquanto que os retornos médios de ambos são próximos. É de notar que a incorporação dos custos de transação no modelo melhora substancialmente o seu desempenho em termos de rácio de Sharpe, quando comparado com o modelo sem os custos de transação.

Yoshimoto [13] sugere uma proposta do modelo de otimização que maximiza o equivalente certo, apresentando a incorporação dos custos de transação proporcionais na função objetivo. São traçadas as fronteiras de eficiência do modelo com os custos na função objetivo e do modelo que não os considera. Verifica-se que para todos os níveis de risco, o modelo que incorpora os custos de transação possui melhor desempenho que o outro, uma vez que o retorno líquido esperado se revela maior. A representação gráfica dos retornos acumulados ao longo do período *out-of-sample* também sublinha a superioridade do modelo que inclui os custos.

Schreiner [14] apresenta uma nova abordagem que consiste na introdução dos custos de transação proporcionais como restrição de *turnover* para vários limites superiores. Considerando o rebalanceamento

³Retornos aos quais se retiram os custos de transação.

anual, este modelo é comparado com o modelo base de Markowitz e com a estratégia *buy-and-hold*, onde o portfólio inicial é mantido ao longo de todo o período *out-of-sample*. O modelo com restrições apresenta melhor desempenho para o limite superior de *turnover* de 25%, apresentando maior valor final do portfólio e maior retorno líquido médio anual. O desempenho revela-se ainda melhor em relação à estratégia *buy-and-hold* e ao modelo base, no entanto a diferença em relação ao primeiro não é elevada.

Moorman [15] considera três portfólios onde se procura reduzir os custos de transação por intermédio da taxa de rebalanceamento. Neste sentido, é definida uma região de não transação, dentro da qual as proporções dos ativos não se alteram, com o objetivo de aferir se num determinado instante, por intermédio do problema de otimização, o rebalanceamento é realizado ou não. Os resultados sugerem que é possível reduzir com sucesso o *turnover* das três estratégias e salienta as melhorias nos valores do rácio de Sharpe e do equivalente certo. A incorporação da limitação da taxa de rebalanceamento numa determinada estratégia aumenta o valor final do dólar investido quando comparado com a mesma estratégia sem considerar a limitação de rebalanceamento, podendo em algumas estratégias passar de dezenas de dólares a dezenas de milhares de dólares, para um investimento iniciado em 1970.

Como o portfólio varância mínima tende a ter baixa liquidez e valores de *turnover* elevados, Chow *et al.* [16] impõem novas restrições, dentro das quais uma restrição de *turnover*, e determinam o seu impacto no desempenho e nos custos de transação. Os resultados obtidos mostram que a imposição da restrição reduz efetivamente o *turnover* e produz um aumento do rácio de liquidez WAMC (*Weighted average market capitalization*⁴). Os resultados revelam ainda um baixo impacto na volatilidade dos retornos após custos de transação.

Brown e Smith sugerem uma nova abordagem para resolver o problema de otimização [17]. Neste problema, os autores consideram a inclusão dos custos de transação proporcionais no modelo de variância mínima e observam que a incorporação dos custos resulta num aumento do número de dimensões do problema. Para contornar essa complexidade, propõem um algoritmo para reduzir a dimensionalidade do problema de otimização quando os custos são incluídos na função objetivo.

Wang *et al.* [18] são mais um exemplo de autores que mencionam os custos de transação proporcionais e Zhai *et al.* [19] propõem a maximização do retorno após custos de transação, surgindo também os custos proporcionais incorporados na função objetivo do modelo. Os autores comparam as soluções obtidas por diferentes algoritmos inteligentes de *machine learning*. Patel e Subrahmanyam [20] abordam a inclusão de custos de transação fixos no modelo e sugerem um algoritmo para a obtenção da solução ótima do modelo.

Em suma é importante reiterar que Peng *et al.* [5], Gârleanu e Pedersen [6], Hautsch e Voigt [12], Glen [10], Schreiner [14], Yoshimoto [13] e Ledoit e Wolf [9] são alguns dos autores que defendem que se os custos de transação forem tidos em conta no modelo de otimização o desempenho do portfólio revela-se melhor.

Os modelos apresentados por Deng *et al.* [8], Lobo *et al.* [11], Yoshimoto [13], Glen [10], Wang *et al.* [18], Brown e Smith [17], Zhai *et al.* [19], Ledoit e Wolf [9] e Schreiner [14] revelam-se importantes para o presente estudo por conterem os custos de transação proporcionais às proporções reinvestidas, na função objetivo ou na restrição de *turnover*, apesar de alguns não realizarem análise *out-of-sample*.

⁴Indicador da capacidade de investimento de um portfólio.

Por fim, outros autores como Wang *et al.*, Zhai *et al.* [19] e Brown e Smith [17] sublinham a importância de incluir os custos de transação de forma a tornar os modelos mais realistas. No entanto, utilizam outras abordagens para a resolução dos problemas de otimização não constituindo um bom termo de comparação com esta análise. Em anexo é apresentada a Tabela A.1 com o resumo das principais referências bibliográficas.

Capítulo 3

Dados e Análise Preliminar

Os dados utilizados no presente estudo foram recolhidos do *Refinitiv Eikon* (<https://www.refinitiv.com/en>), também conhecido como *Thomson Reuters Eikon* e abrangem o período de 4 de janeiro de 2010 a 30 de novembro de 2021.

As ações dos EUA foram classificadas por ordem decrescente de capitalização de mercado, ou seja, pelo valor geral de mercado das ações de cada empresa no primeiro dia da amostra. Posteriormente, foram obtidos os preços de fecho diários ajustados para as primeiras 500 ações seguindo-se um procedimento de filtragem, onde uma ação é descartada, se não possuir dados para todo o período, e uma nova ação, de maior capitalização de mercado, é adicionada. O procedimento teve término quando um conjunto de 500 ações com dados completos foi alcançado. Mais especificamente, foram selecionadas as ações no banco de dados do *Refinitiv Eikon* da seguinte forma:

1. Na secção *Static Request*, em *Series/List*, a procura foi redefinida com as seguintes restrições: categoria-ações, câmbio - NASDAQ e NYSE, mercado - Estados Unidos, moeda - Dólar dos Estados Unidos, tipo - património, atividade - ativo, e data base - 2010. De seguida, em *Datatypes/Expressions* foi selecionado 'WC08001', *ticket* correspondente à capitalização de mercado. Antes de submeter o pedido foi requerido ao sistema que os dados fossem ordenados por ordem decrescente de capitalização bolsista através da ordenação primária e na data foi inserido o primeiro dia da amostra com dados, que, neste caso, correspondiam a 4 de janeiro de 2010.
2. Após a ordenação dos dados, na secção *Times Series Request*, em *Series*, foram escolhidas as primeiras 500 ações selecionando as células no *Excel*. Por fim, em *Datatypes*, foi inserido o *ticket* 'P', correspondente ao preço de fecho ajustado, não esquecendo o período a ser observado.

A maioria das ações selecionadas, 305, eram constituintes do índice *S&P 500* no primeiro dia da amostra, e esse número aumentou para 420 no último dia da amostra. Mais informações relativamente aos componentes do índice *S&P 500* em 2010 podem ser encontradas em [21] e para o ano de 2021 em *Refinitiv Eikon*, utilizando o símbolo "LS&PCOMP". Neste estudo apenas são utilizados os dias em que o mercado está aberto. Foram eliminados os dias correspondentes aos feriados de Nova Iorque, por exemplo, 1 de Janeiro, terceira segunda-feira de Janeiro e Fevereiro, última segunda-feira de Maio, 4 de Julho, primeira segunda-feira de Setembro, segunda segunda-feira de Outubro, 11 de Novembro, última

quinta-feira de Novembro e 25 de Dezembro. Os dados diários foram posteriormente convertidos em dados semanais, utilizando os preços de quarta-feira, uma vez que é o dia da semana menos sujeito ao efeito do fim-de-semana. Se numa dada quarta-feira o mercado esteve fechado, então foi considerado o dia útil anterior. Os dados mensais foram obtidos utilizando os preços de quatro em quatro semanas. A amostra é assim constituída por 3002 observações diárias, 621 observações semanais e 156 observações mensais.

Quando uma empresa sai da amostra, por exemplo devido a aquisição, fusão, falência, etc., é substituída nesse mesmo dia por outra empresa ainda não pertencente à amostra com maior capitalização bolsista.

O período em estudo foi dividido em dois sub-períodos: "*in-sample*", que compreende 4 de Janeiro de 2010 a 31 de Dezembro de 2018 e "*out-of-sample*", que compreende 2 de Janeiro de 2019 a 30 de Novembro de 2021. Com esta divisão os períodos *in-sample* e *out-of-sample* ficaram com respetivamente, 2268 e 734 observações diárias, 469 e 152 observações semanais e 118 e 38 observações mensais.

A divisão dos dados em *in-sample* e *out-of-sample* foi importante para posteriormente se aferir o desempenho dos portefólios. Para determinar o desempenho dos portefólios foi importante ter em conta a forma como os retornos são calculados. As soluções ótimas foram estimadas utilizando retornos logarítmicos, não sendo aditivos no espaço dos ativos, mas sim no tempo. Por isso, foi necessário realizar a conversão dos retornos contínuos,

$$r_i(t) = \ln \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) \quad (3.1)$$

em retornos discretos

$$R_i(t) = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} \quad (3.2)$$

utilizando a operação

$$R_i(t) = e^{r_i(t)} - 1, \quad (3.3)$$

onde r_t representa os retornos logarítmicos e $P_{i,t}$ e $P_{i,t-1}$ correspondem aos preços de fecho ajustados do ativo i nos momentos t e $t - 1$, respetivamente.

Para obter os retornos contínuos do ativo i realizou-se a operação

$$r_i(t) = \ln \left(1 + R_i(t) \right). \quad (3.4)$$

Como a maioria das ações da base de dados pertence ao índice *S&P 500*, apresentamos na Figura 3.1 a evolução deste índice durante o período da amostra. O índice *S&P 500* apresentou uma tendência positiva durante o período total, após o rescaldo da crise de 2007-2008. Em Março de 2020 registou-se uma queda súbita originada pela pandemia Covid-19. Contudo, apesar da crise provocada pela pandemia Covid-19, a taxa média de aumento dos preços foi mais elevada no período *out-of-sample*, onde se encontra o início da pandemia, do que no período *in-sample*.



Figura 3.1: Evolução do índice S&P 500 de 4 de Janeiro de 2010 a 30 de Novembro de 2021. A linha vertical vermelha separa os períodos *in-sample* e *out-of-sample*.

Tabela 3.1: Estatísticas descritivas anualizadas dos retornos logarítmicos para a amostra completa e dividida em *in-sample* e *out-of-sample*.

Estatísticas Descritivas	Retorno (amostra completa)			In-Sample			Out-of-Sample		
	Diária	Semanal	Mensal	Diária	Semanal	Mensal	Diária	Semanal	Mensal
Observações	3002	621	156	2268	469	118	734	152	38
Média	0,1221	0,1242	0,1147	0,1053	0,1022	0,0943	0,1745	0,1890	0,1582
Mediana	0,1526	0,1872	0,1637	0,1250	0,1658	0,1417	0,2569	0,2584	0,2252
Desvio Padrão	0,3042	0,2936	0,2888	0,2697	0,2574	0,2302	0,3854	0,3756	0,4130
Assimetria	-0,0305	-0,1097	-0,4097	-0,0199	-0,0573	-0,1230	-0,0336	-0,1272	-0,4314
Curtose	0,0766	0,2561	1,1455	0,0483	0,1247	0,3578	0,0651	0,2134	0,7868
Mínimo	-0,9482	-1,3246	-2,1685	-0,5443	-0,6455	-0,7848	-0,9482	-1,3246	-2,1685
Máximo	0,8537	2,1842	1,5189	0,4818	0,5885	0,9390	0,8537	2,1842	1,5189

Notas: Os valores obtidos correspondem aos valores médios em *cross section*, excepto o mínimo e o máximo que são para toda a amostra. Todos os valores foram anualizados, excepto o mínimo e o máximo.

A Tabela 3.1 apresenta as estatísticas descritivas anualizadas dos retornos logarítmicos para a amostra completa e dividida em *in-sample* e *out-of-sample*. É de notar que para as estatísticas como a média e a mediana ficarem anualizadas basta multiplicar pelo número de observações em questão, 254 no caso de ser diário, 52 no caso de ser semanal e 12 no caso de ser mensal. No caso do desvio padrão multiplica-se as estatísticas pela raiz do número de observações em questão, no caso da curtose divide-se as estatísticas pelo número de observações e para a assimetria divide-se as estatísticas pela raiz do número de observações. O mínimo e o máximo não foram anualizados.

Observando as estatísticas anualizadas na amostra completa, *in-sample* e *out-of-sample* é possível aferir que os valores para as diferentes periodicidades da média, mediana e desvio padrão são bastante próximos. Considerando a amostra completa a média e a mediana revelam-se maiores para os dados

semanais, apresentando os dados diários o maior desvio padrão. É ainda possível constatar que o retorno máximo semanal é o maior dos retornos máximos quando dividimos a amostra em dois períodos.

A variabilidade dos retornos é também superior no período *out-of-sample*, ou seja, o desvio padrão e o intervalo entre o mínimo e o máximo tomam valores mais elevados. Além disso, os extremos de toda a amostra são os mesmos que os do período *out-of-sample*, logo a variação dos retornos é superior neste período relativamente ao período *in-sample*.

Devido à negatividade dos valores da assimetria é possível afirmar que a cauda esquerda é mais pesada, ou seja, a mediana é superior à média.

Capítulo 4

Metodologia

O presente estudo pretende avaliar o efeito da incorporação dos custos de transação na função objetivo ou nas restrições do problema de otimização dos portfólios.

Pretende-se comparar o desempenho dos portfólios Variância Mínima e Equivalente Certo, no período *out-of-sample*. Os custos de transação são incorporados diretamente na função objetivo ou então indiretamente via restrições de *turnover*. São consideradas diferentes periodicidades de rebalanceamento e incluem-se restrições de *short selling*. De modo a dar maior robustez à análise do desempenho dos portfólios tomou-se como *benchmark*¹ o portfólio Naive, tal como realizado por DeMiguel *et al.* [2].

Este capítulo fornece uma descrição dos portfólios Naive, Variância Mínima e Equivalente Certo, bem como a sua implementação em *Matlab*, os argumentos para a incorporação dos custos de transação na estratégia de seleção de portfólios, a estratégia de rebalanceamento e as métricas de desempenho financeiro.

4.1 Portfólios

O portfólio Naive, denotado por EW ou $\frac{1}{n}$, é definido por

$$\omega_i = \frac{1}{n}, \text{ com } i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

onde n representa o número total de títulos. Este portfólio não requer qualquer tipo de otimização sendo constituído por todos os títulos em proporções iguais e constantes.

Segundo DeMiguel [2], este portfólio apresenta melhores resultados *out-of-sample*, em particular após custos de transação, do que outros portfólios baseados em técnicas de otimização. O autor defende ainda que esta estratégia pretende captar os efeitos benéficos da diversificação do portfólio e pode ser vista como uma *proxy*² para o mercado geral, por ser formada por todos os ativos do universo de ações considerado.

¹Portfólio de referência que é utilizado como termo de comparação do desempenho dos portfólios estudados.

²Variáveis que podem ser usadas como medida ou indicador da liquidez de um ativo ou mercado.

É importante salientar que apesar do portefólio $\frac{1}{n}$ apresentar as proporções do portefólio inalteradas, este portefólio possui custos de transação associados. De facto, como descrito na Secção 4.4, devido à alteração dos preços dos ativos, os pesos associados a estes no portefólio também se alteram, levando a que no instante imediatamente antes do rebalanceamento estes não sejam iguais. É então necessário efetuar novas compras/vendas para rebalancear o portefólio e voltar às proporções.

O portefólio que maximiza o Equivalente Certo é obtido através da função de utilidade Média-Variância de um investidor, cujo objetivo é maximizar o equivalente certo. Para implementar esta estratégia, num determinado instante t , resolve-se o problema de otimização,

$$\max_{\omega_t} \quad \omega_t^T \mu_t - \frac{1}{2} \omega_t^T \Sigma_t \omega_t \quad (4.2)$$

$$\text{sujeito a} \quad \omega_t \geq 0 \quad (4.3)$$

$$\mathbb{1}_n^T \omega_t = 1. \quad (4.4)$$

onde ω_t representa o vetor dos pesos dos ativos no portefólio, μ_t a estimativa da média dos retornos, Σ_t a estimativa da matriz de covariâncias dos retornos dos ativos e $\mathbb{1}_n$ o vetor de dimensão n composto por uns.

A função objetivo apresenta um *trade-off* entre o retorno esperado e o risco, medido pela variância. A primeira restrição do modelo, inviabiliza a possibilidade de realização de *short selling*, o que implica que não é permitida a venda de um ativo sem o ter em seu poder, conferindo uma maior estabilidade e realismo às proporções tal como está documentado na literatura Moorman [15], gerando uma redução dos eventuais custos de transação. São duas as principais razões para inviabilizar a ocorrência de vendas a descoberto, ou *short selling*. A primeira é o facto deste tipo de intervenção no mercado ser impedido pelas autoridades reguladoras; a segunda é ser impossível realizar vendas a descoberto não existindo ativos para empréstimo e os custos de transação destas operações serem por vezes exorbitantemente grandes. A segunda restrição do modelo garante que a quantidade total disponível para investimento é utilizada.

A estratégia de Variância Mínima define um portefólio de n ativos que minimize a variância dos retornos sendo definido por

$$\min_{\omega_t} \quad \omega_t^T \Sigma_t \omega_t \quad (4.5)$$

$$\text{sujeito a} \quad \omega_t \geq 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbb{1}_n^T \omega_t = 1. \quad (4.7)$$

O modelo poderá apresentar bons resultados visto que ao implementar a estratégia só é considerada a estimação da matriz de covariâncias dos retornos dos ativos e não as estimações das médias dos retornos, uma vez que a média constitui a principal fonte de erros de estimação nos problemas de otimização.

4.2 Implementação dos modelos em *Matlab*

Esta secção apresenta os procedimentos envolvidos no estudo empírico, desenvolvido com recurso ao *software Matlab* (versão R2022b), introduzindo um exemplo ilustrativo para cada modelo, Variância Mínima e Equivalente Certo, sendo posteriormente apresentados os resultados obtidos.

Problemas quadráticos, como é o caso do portefólio Variância Mínima e Equivalente Certo podem ser resolvidos com recurso à função *quadprog*. A título de exemplo de um problema quadrático surge a seguinte formulação:

$$\min \quad \frac{1}{2}x^T Hx + f^T x \quad (4.8)$$

$$s.a. \quad Ax \leq b \quad (4.9)$$

$$A_{eq}x = b_{eq} \quad (4.10)$$

$$l_b \leq x \leq u_b. \quad (4.11)$$

Na função objetivo, Equação 4.8, consideramos $f = 0$, para o modelo Variância Mínima, uma vez que esse termo não existe no problema e H representa o dobro da matriz covariância. Já no modelo Equivalente Certo a função objetivo é o simétrico da média dos retornos dos ativos *in-sample*, $-\mu$, uma vez que a função *quadprog* minimiza a função objetivo. A Equação 4.9 corresponde às restrições de desigualdade e a Equação 4.10 representa uma restrição de igualdade usada para restringir a soma dos pesos, que deve ser igual a um. Sendo a soma dos pesos igual a um, a restrição garante que a quantidade total disponível para investimento é utilizada. As denotações A_{eq} e b_{eq} dizem respeito à matriz, ou vetor linha $\mathbf{1}_n^T$ e ao valor um, respetivamente. A Restrição 4.11 denota l_b e u_b como os limites inferior e superior do problema, respetivamente, que são importantes devido à existência de restrições de *short selling*.

Os argumentos são descritos como $[x, f_{val}] = \text{quadprog}(H, f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub)$. A solução ótima do problema são as proporções dos ativos, neste caso denotadas pelo vetor x e f_{val} representa o valor da função objetivo. As proporções dos ativos obtidas através da função são posteriormente utilizadas para o cálculo dos retornos do portefólio *out-of-sample*.

A base de dados utilizada, assim como a implementação das métricas de desempenho em *Matlab* já tinham sido trabalhadas numa outra tese. Os códigos *Matlab* relativos ao teste da diferença entre os rácios de Sharpe de duas estratégias de investimento, que pode ser encontrado em [22], foram facultados pelo Professor Doutor Helder Sebastião. Foi ainda indispensável a implementação em *matlab* dos modelos base, dos mesmos considerando a introdução dos custos de transação na função objetivo e através da restrição de *turnover* e a implementação da janela móvel para determinar os portefólios ótimos no período *out-of-sample*.

4.3 Incorporação dos Custos de Transação

Os modelos de avaliação dos ativos financeiros são usualmente desenvolvidos no contexto teórico de um mundo ideal, que ganhou a denominação de mercado perfeito, contínuo e competitivo.

O mercado diz-se perfeito desde que os ativos sejam perfeitamente divisíveis, não existam custos de transação associados à aquisição dos portfólios e ao seu eventual rebalanceamento, não existam taxas de imposto nem restrições às vendas a descoberto e desde que exista a possibilidade de os investidores emprestarem ou de se endividarem à mesma taxa de juro sem risco.

No mercado contínuo, os ativos encontram-se disponíveis para transação em qualquer momento a um preço conhecido, enquanto que no mercado competitivo os investidores são *price takers*, ou seja, cada investidor, isoladamente, não pode influenciar o preço dos ativos através das suas transações.

O conjunto de hipóteses anteriormente enunciado garante que se podem realizar operações de arbitragem pura, não estando envolvidos quaisquer riscos ou custos [23].

Os custos associados às fricções existentes no mercado real, nomeadamente os custos de transação, constituem uma das maiores preocupações dos investidores institucionais, sobretudo em mercados financeiros periféricos, com reduzida liquidez, como o mercado português, podendo absorver uma parte significativa dos potenciais retornos.

Existem vários argumentos para a liquidez não ser um fator constante. Primeiro, a liquidez depende da transparência de informação sobre o valor dos ativos, que pode alterar-se ao longo do tempo. Segundo, a liquidez depende do número de investidores que promovem liquidez ao mercado como bancos, *market makers*, firmas de corretagem e *hedge funds* e do seu acesso ao capital [24]. Terceiro, o aumento da incerteza faz com que a oferta de liquidez seja mais arriscada, aumentando o prémio exigido para disponibilizar liquidez e consequentemente o custo de transação [24].

A condição mais óbvia para definir liquidez é através dos custos de transação. Segundo os autores Amihud *et al.* [25] quanto menores forem os custos de transação maior é a liquidez.

Podem ser diferenciados dois tipos de custos de transação: os custos explícitos e os custos implícitos. Os custos explícitos dizem respeito às comissões de corretagem, às taxas de transação e outras comissões de processamento de transações, sendo por isso observáveis. Os custos implícitos dizem respeito ao *spread bid-ask* e ao impacto de mercado [26]. Em mercados organizados o *spread bid-ask* representa um custo para os investidores [27] sendo que num dado momento a venda é efetuada a um preço *bid* e a compra é efetuada ao preço *ask*, sendo o *bid* sempre inferior ao *ask*. O *spread* pode assim ser definido como o risco de execução que o investidor enfrenta quando decide transacionar um ativo [28].

O impacto de mercado surge relacionado com o efeito da quantidade a transacionar, quanto maior é essa quantidade, maior é a diferença entre o preço médio realizado e as cotações *bid* e *ask*, tendo a própria transação um impacto no preço de transação, aumentando o preço de compra e baixando o preço de venda.

Dada a impossibilidade de medir *ex-ante* os custos de transação, muitos autores utilizam o *spread bid-ask* como uma *proxy* dos custos de transação, uma vez que existe uma relação direta entre ambos, quanto maior é o *spread bid-ask* menor é a profundidade do mercado e portanto maior o potencial impacto de mercado de determinada transação. Para a determinação desses custos de transação esperados

e da rentabilidade final de um investimento, tornam-se importantes fatores comuns à liquidez, que pode ser medida através do *spread bid-ask*.

Amihud e Mendelsen [29] defendem que os preços dos ativos são afetados pela liquidez. Os investidores requerem uma compensação por enfrentarem custos de transação, sendo por isso importante ter em conta o efeito da liquidez na teoria financeira. Segundo os autores, a liquidez pode ser medida pelo custo de execução imediata.

Os custos de transação podem ser modelados tendo por base funções não lineares e embora exista *software* para a resolução de problemas de otimização não linear, o tempo computacional requerido é por vezes demorado para uma aplicação atempada na gestão do investimento, enquanto a qualidade da solução não é garantida.

Deste modo, os gestores de portefólios recorrem frequentemente a aproximações às funções dos custos de transação, no âmbito do modelo média-variância. Um exemplo dessas simplificações consiste em assumir que os custos de transação apenas dependem dos pesos do portefólio, mais especificamente, da proporção a transacionar ω_i , de modo a conseguir medir como é que a alteração das proporções tem impacto nos custos de transação tendo em conta a função custos de transação unitária.

Uma forma relativamente simples de incluir os custos de transação na otimização do portefólio é fazê-lo de forma indireta, sem definir explicitamente a função de custos de transação, através de uma restrição adicional sobre o *turnover* ou de medidas de iliquidez³ [30].

Os modelos apresentados por Deng *et al.* [8], Lobo *et al.* [11], Yoshimoto [13], Brown e Smith [17], Zhai *et al.* [19] e Ledoit e Wolf [9] contêm os custos proporcionais à alteração dos pesos, da forma

$$c_i = k_i |x_{i,t}|, \text{ com } i = 1, \dots, n, \text{ e } t = 1, \dots, T, \quad (4.12)$$

na função objetivo, onde n representa o número total de títulos a analisar, T o número de observações *out-of-sample*, c_i a função custo de transação para o ativo i , k_i o custo de transação proporcional e $x_{i,t}$ a proporção a transacionar do ativo i , no momento t , respeitando

$$x_{i,t} = \omega_{i,t} - \omega_{i,t}^h, \quad (4.13)$$

e

$$\omega_{i,t}^h = \omega_{i,t-1} \frac{1 + R_{i,t}}{1 + R_{P,t}}, \quad (4.14)$$

onde $\omega_{i,t}$ representa a proporção do ativo i após o rebalanceamento e $\omega_{i,t}^h$ o ajuste da proporção do ativo i antes do rebalanceamento, após a atualização dos preços no momento t . Este valor é diferente do peso prescrito do modelo em $t - 1$ devido à alteração dos preços dos ativos. Os retornos *out-of-sample* do ativo i e do portefólio P no momento t são denotados por $R_{i,t}$ e $R_{P,t}$, respetivamente. Os custos de

³Exemplo: rácio de Amihud.

transação assim definidos são aditivos, ou seja, iguais à soma dos custos de transação de cada ativo,

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{i=1}^n k_i |x_{i,t}|. \quad (4.15)$$

Os custos de transação têm sido frequentemente descurados em alguns trabalhos da literatura, pondo em causa o desempenho dos portfólios obtidos num ambiente mais realista. Quando os custos de transação são considerados na literatura, a Equação 4.12 surge como uma descrição frequente, pelo que seguiremos esta abordagem neste trabalho.

Por último, DeMiguel *et al.* [2] sugerem que a constante de proporcionalidade usada seja igual a

$$k_i = 0.5\%, \quad (4.16)$$

sendo o custo total de transação no momento t dado por

$$cost_t = 0.5\% \sum_{i=1}^n |x_{i,t}|. \quad (4.17)$$

Se os custos de transação forem tidos em conta explicitamente no modelo, podem minimizar as alterações das proporções dos ativos do portfólio e portanto aumentar a rentabilidade do portfólio após custos de transação.

Outros autores como Schreiner [14] tratam os custos de transação através da adição de uma restrição de *turnover* ao modelo de otimização. O autor defende que restringir o *turnover* contorna a dificuldade em estimar os custos de transação totais. Portfólios que possuam altos *turnovers* resultam em altos custos de transação tornando os rebalanceamentos ineficientes e dispendiosos.

Usualmente, as restrições de *turnover* são impostas para cada ativo como

$$|x_{i,t}| \leq u_i. \quad (4.18)$$

A magnitude absoluta da diferença entre o peso inicial e o peso final do ativo i no portfólio é restringida a um limite superior u_i .

A restrição de *turnover* também pode ser imposta para minimizar todo o portfólio da forma

$$\sum_{i=1}^n |x_{i,t}| \leq U, \quad (4.19)$$

representando a diferença absoluta total entre os pesos iniciais e finais dos n ativos e sendo restringida por um limite superior U . É possível que existam ativos com desvios mais acentuados que outros em termos de pesos iniciais, embora o desvio total seja limitado.

Embora custos de transação na ordem dos 0.5% do valor do ativo, como é geralmente assumido na literatura, possam parecer negligenciáveis, o seu efeito é considerável uma vez que estes custos surgem sempre que o ativo é transacionado e o portfólio é rebalanceado para atualizar os valores dos pesos dos ativos. Tratando-se de estratégias de transação dinâmicas, o efeito dos custos de transação é cumulativo ao longo do horizonte temporal do investidor. Se o rebalanceamento do portfólio for

frequente, esses custos podem ser considerados proibitivos. É de notar que se o aumento da frequência de rebalanceamento possibilita maiores retornos, por outro lado, aumenta o impacto dos custos de transação, ou seja, os benefícios de um rebalanceamento semanal, por exemplo, poderão não compensar se os custos de transação totais do portfólio que o investidor terá de enfrentar absorvem uma parte significativa dos seus ganhos em relação ao rebalanceamento mensal.

É expectável que portfólios que consideram custos de transação nos modelos de otimização apresentem melhores resultados *out-of-sample* do que portfólios que os ignoram, possuindo a incorporação dos custos de transação na escolha do portfólio um impacto positivo após descontar os custos de transação ao retorno final do portfólio.

4.4 Rebalanceamento

A estratégia de rebalanceamento é uma prática comum na gestão de portfólios. Ao rebalancear o portfólio, o investidor altera a composição do mesmo, de acordo com dados atualizados. O rebalanceamento possibilita assim ao investidor determinar a sua exposição ao risco e adquirir as melhores ações com base no passado recente. O rebalanceamento periódico dos portfólios permite uma avaliação adequada do desempenho *out-of-sample* dos modelos de seleção de portfólios [4].

Segundo DeMiguel [2], o rebalanceamento é normalmente efetuado considerando os dados de uma janela móvel de amplitude fixa. No presente estudo são consideradas três periodicidades de rebalanceamento: diário, semanal e mensal e uma janela móvel com 2268 dias, 469 semanas e 118 meses respetivamente, que correspondem ao período *in-sample*. Usar a estratégia de rebalanceamento, implica obter 734 retornos diários, 152 retornos semanais e 38 retornos mensais correspondentes ao período *out-of-sample*.

Suponha-se por exemplo a nossa amostra, constituída por 3002 observações diárias, 2268 *in-sample* e 734 *out-of-sample*. Em primeiro lugar, utilizando os dados da amostra do dia 1 ao dia 2268, é possível calcular as soluções ótimas aplicando os modelos em consideração. De seguida, através do vetor dos pesos obtido, calcula-se o retorno do portfólio para o primeiro dia *out-of-sample*, o dia 2269. Fazendo a janela móvel mover-se um dia para a frente é possível calcular as soluções ótimas utilizando os dados do dia 2 ao dia 2269, dados que são depois utilizados para calcular o retorno do portfólio no dia 2270, e assim sucessivamente, até que todos os dias *out-of-sample* sejam considerados. São produzidos 734 retornos de portfólio por cada um dos modelos em estudo. O raciocínio é idêntico para dados semanais e mensais, considerando os respetivos números de observações, 469 observações *in-sample* e 152 observações *out-of-sample* e 118 observações *in-sample* e 38 observações *out-of-sample*, respetivamente.

4.5 Métricas de Desempenho Financeiro

Esta subsecção apresenta as medidas de desempenho financeiro dos portfólios. Consideram-se três possibilidades para os portfólios Variância Mínima e Equivalente Certo. A primeira é que os modelos não consideram os custos de transação sendo apenas aplicados após otimização para a avaliação do seu

desempenho *out-of-sample*. Na segunda e na terceira hipóteses, as estratégias incorporaram diretamente os custos de transação no modelo de otimização, através da função objetivo e de uma restrição adicional sobre o *turnover*, respetivamente. O portefólio Naive apenas considera a primeira hipótese, uma vez que não envolve o processo de otimização.

Para obter os retornos do portefólio, recorre-se à construção do vetor dos retornos *out-of-sample*, à matriz dos pesos dos ativos do portefólio e consideram-se dados diários, semanais e mensais.

É importante reiterar que segundo DeMiguel [2], o custo de transação proporcional deve ser igual a $k_i = 0.5\%$, sendo o custo total de transação no momento t dado por

$$cost_t = 0.5\% \sum_{i=1}^n |x_{i,t}|. \quad (4.20)$$

Para o cálculo dos retornos após custos de transação é importante ter em conta a riqueza do investidor (W_t) em cada momento t . Considerando o instante inicial $t = 0$ e a riqueza inicial igual a $W_0 = 100$, a riqueza do investidor surge dada por

$$W_t = W_{t-1}(1 + R_{p,t})(1 - cost_t). \quad (4.21)$$

O retorno discreto 3.2 após custos de transação surge como

$$\begin{aligned} \frac{W_t}{W_{t-1}} - 1 &= \frac{W_{t-1}(1 + R_{p,t})(1 - cost_t)}{W_{t-1}} - 1 \\ &= (1 + R_{p,t})(1 - cost_t) - 1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

De seguida são apresentadas as métricas de desempenho aplicadas às rentabilidades após custos de transação.

1. **Win Rate:** A taxa de *Win Rate* corresponde à percentagem de períodos *out-of-sample* com retornos positivos. Esta medida pode ser definida por:

$$WR = \frac{n_{retornos_positivos}}{\#períodos}, \quad (4.23)$$

onde $n_{retornos_positivos}$ representa o número de períodos que possuem retorno positivo.

2. **Cardinalidade:** A cardinalidade permite observar a evolução do número de ativos no portefólio. Com a estratégia de rebalanceamento, os pesos dos ativos são atualizados todos os dias, semanas ou meses. Assim, a cardinalidade pode ser medida através do número de ativos com peso acima de um determinado valor estabelecido, dando uma ideia da diversificação do portefólio. Optamos por avaliar a cardinalidade utilizando os seguintes limiares: 0.5%, 1%, 5% e 10%.

3. **Turnover:** Esta medida segundo DeMiguel [2] pode ser definida por

$$Turnover = \frac{1}{\#períodos} \sum_{t=1}^{\#períodos} \sum_{i=1}^n |x_{i,t}|. \quad (4.24)$$

É de notar que o volume de transações pode não corresponder à média das variações absolutas dos pesos dos ativos, ao longo de todos os períodos pois os pesos no instante imediatamente antes do rebalanceamento não são iguais aos pesos após o último rebalanceamento.

4. **Retorno Médio Anualizado:** A média anualizada do retorno obtém-se multiplicando a média dos retornos *out-of-sample* pelo número de períodos no ano. Os períodos a considerar são 254, 52 e 12 para dados diários, semanais e mensais, respetivamente.
5. **Desvio Padrão Anualizado:** O desvio padrão anualizado obtém-se multiplicando o desvio padrão dos retornos *out-of-sample* pelas raízes quadradas de 254, 52 e 12 para dados diários, semanais e mensais, respetivamente.
6. **Rácio de Sharpe:** Em 1966, William Sharpe [31] apresentou uma medida para avaliar o desempenho de portefólios de investimento denominada índice de recompensa da variabilidade, mais conhecido como rácio de Sharpe. Este índice descreve como o investidor é recompensado por unidade de risco. Para calcular o rácio de Sharpe é necessário definir o vetor dos excessos de rentabilidade,

$$R_{ER} = R_P - R_f, \quad (4.25)$$

onde R_P representa o retorno do portefólio e R_f a taxa de juro sem risco, a qual é aproximada pela taxa atuarial de rentabilidade dos bilhetes do tesouro norte-americano de 3 meses retirados do banco de dados do *Federal Reserve* dos EUA [32]. Essas taxas de juros são apresentadas em percentagem e anualizadas, tendo por isso sido convertidas em taxas diárias, semanais e mensais, através da divisão por 36000, 5200 e 1200, respetivamente. O rácio de Sharpe corresponde ao quociente entre a média e o desvio padrão do excesso de rentabilidade, ou seja,

$$SR = \frac{mean(R_{ER})}{\sigma(R_{ER})}. \quad (4.26)$$

A razão é anualizada multiplicando-se pela raiz quadrada de 254, 52, 12 para dados diários, semanais e mensais, respetivamente.

7. **Rácio de Sortino:** Em 1994, Sortino e Price [33] introduziram uma variação do Rácio de Sharpe. O rácio de Sortino possui o mesmo numerador que o rácio de Sharpe, mas o denominador contabiliza o risco *downside*, ou seja, considera apenas os retornos inferiores a um determinado

limite, B . O risco *downside* pode ser definido como

$$DR = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \min(0, R_{P_j} - B)^2}, \quad (4.27)$$

sendo os limites usuais a taxa livre de risco ou zero. Neste caso vamos considerar $B = 0$. O rácio de Sortino é então definido como

$$SR = \frac{\text{mean}(R_P)}{DR}, \quad (4.28)$$

sendo que para o anualizar é necessário multiplicar pela raiz quadrada de 254, 52 e 12 para dados diários, semanais e mensais, respetivamente.

8. **CVaR:** Rockafellar e Uryasev [34] propuseram o Valor em Risco Condicional (CVaR), que está relacionado a outra medida de risco, o Valor em Risco (VaR). O CVaR mede a perda esperada abaixo do VaR, ou seja, as perdas extremas quando o valor do VaR é excedido. O VaR representa o quantil α da distribuição de perdas e diz respeito à maior perda possível com probabilidade maior ou igual a α . Os valores usuais para α são 10%, 5% e 1%.
9. **Maximum Drawdown:** O *Maximum Drawdown* mede a perda máxima observada desde o valor acumulado mais alto (pico) até ao valor acumulado mais baixo antes que um novo pico seja atingido, em relação ao pico inicial. Segundo Choi [35], os investidores preferem um portefólio com um valor de Maximum Drawdown mais baixo uma vez que isso surge associado a uma perda mais pequena. O valor de Maximum Drawdown é obtido através de

$$MDD = \frac{\text{Trough_Value} - \text{Peak_Value}}{\text{Peak_Value}}, \quad (4.29)$$

onde *Peak_Value* representa o valor mais alto acumulado e *Trough_Value* o valor acumulado mais baixo antes que o novo pico seja atingido.

De modo a conseguir introduzir os custos de transação através da restrição de *turnover*, primeiramente é necessário utilizar os dados *in-sample* para determinar o limite máximo de *turnover* para o portefólio como um todo. A ideia basilar metodológica é encontrar o portefólio com melhor desempenho *out-of-sample*.

Capítulo 5

Resultados Empíricos

Para aplicar os portfólios com restrição de *turnover*, foi realizada em primeiro uma análise *in-sample* para determinar quais são os melhores limites para o turnover. Para isso é utilizada uma grelha de valores contendo 0,2%; 1%; 1,5%; 2%; 2,5%; 3%; 3,5%; 4%; 4,5%; 5%; 7,5% e 10%, sendo escolhido para cada modelo, Variância Mínima e Equivalente Certo, o limite máximo de *turnover* adequado a usar na restrição. Este limite é aquele que maximiza o rácio de Sharpe. De modo a facilitar a análise denotam-se os portfólios Variância Mínima e Equivalente Certo, com custos de transação através da restrição de *turnover* por MVRT e ECRT, respetivamente.

Tabela 5.1: Portfólios MVRT e ECRT considerando vários limites de *turnover* a introduzir na restrição de *turnover* no período *in-sample*.

Frequência	Métrica	Modelo	Limite máximo de <i>Turnover</i>											
			0,002	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05	0,075	0,10
Diária	AMR (%)	MVRT	3,365	3,523	3,551	3,405	3,234	3,047	2,964	3,333	2,783	3,006	2,320	1,759
		ECRT	12,48	6,067	6,816	8,653	9,732	8,442	8,836	8,375	8,751	7,922	6,934	5,805
	AStd (%)	MVRT	9,403	9,521	9,574	9,506	9,511	9,482	9,325	9,287	9,229	9,210	9,098	8,990
		ECRT	22,953	28,120	28,951	29,885	29,985	30,029	29,976	30,048	29,978	30,077	30,032	30,033
	SR (%)	MVRT	27,621	28,941	29,067	27,737	25,934	24,030	23,550	27,618	21,834	24,301	17,063	11,027
		ECRT	51,038	18,845	20,892	26,385	29,894	25,558	26,914	25,316	26,632	23,785	20,532	16,772
Semanal	AMR (%)	MVRT	5,773	5,694	5,543	5,716	5,656	5,338	4,993	4,977	4,952	4,763	4,445	4,540
		ECRT	15,723	11,898	10,629	8,511	6,060	4,977	5,449	5,095	5,575	5,942	6,610	8,848
	AStd (%)	MVRT	8,707	8,550	8,563	8,403	8,346	8,330	8,263	8,231	8,211	8,204	8,179	8,172
		ECRT	23,081	24,087	25,308	26,995	28,939	30,512	30,969	31,448	31,867	32,083	32,394	32,709
	SR (%)	MVRT	53,729	53,774	51,932	54,961	54,618	50,905	47,149	47,135	46,936	44,677	40,935	42,126
		ECRT	63,382	44,853	37,674	27,475	17,163	12,731	14,067	12,729	14,066	15,116	17,031	23,708
Mensal	AMR (%)	MVRT	7,682	7,548	7,137	6,913	6,784	6,685	6,607	6,480	6,348	6,204	5,829	6,191
		ECRT	-5,190	-4,140	-3,763	-3,324	-2,711	-2,080	-1,591	-1,133	-0,849	-0,483	0,730	-1,498
	AStd (%)	MVRT	9,567	9,774	9,848	9,971	10,065	10,196	10,346	10,490	10,603	10,646	10,870	11,008
		ECRT	29,621	27,279	26,048	25,047	24,250	23,656	23,229	22,972	22,914	23,044	24,603	26,229
	SR (%)	MVRT	68,167	65,330	60,686	57,702	55,887	54,195	52,658	50,735	48,963	47,409	42,999	45,747
		ECRT	-21,325	-19,306	-18,769	-17,763	-15,816	-13,548	-11,690	-9,825	-8,612	-6,975	-1,610	-9,989

Nota: A tabela apresenta AMR-Retorno médio anualizado; AStd-Desvio padrão anualizado e SR-Rácio Sharpe para o Portfólio Variância Mínima com custos de transação através da restrição de *turnover* (MVRT) e para o Portfólio Equivalente Certo com custos de transação através da restrição de *turnover* (ECRT) no período *in-sample*, considerando as frequências diária, semanal e mensal para diferentes limites máximos de *turnover*. A negrito encontram-se os maiores valores de rácio de Sharpe para cada modelo e periodicidade.

A Tabela 5.1 contém uma análise *in-sample* das estatísticas considerando vários valores possíveis para o *turnover* máximo. O período *in-sample* compreende 4 de Janeiro de 2010 a 31 de Dezembro de 2018. Para determinar os valores da tabela considerou-se uma janela móvel com amplitude fixa de 4 de Janeiro de 2010 a 3 de Fevereiro de 2016, sendo a informação contida na janela móvel utilizada para determinar os retornos dos modelos MVRT e ECRT, no período de 4 de Fevereiro de 2016 a 31 de Dezembro de 2018. Os valores de limite superior de *turnover* escolhidos são os valores que resultam num maior rácio de Sharpe, sendo posteriormente utilizados na análise *out-of-sample*.

Tendo por base a tabela, o melhor valor de limite superior de *turnover* para o modelo MVRT é 1,5% para periodicidade diária, 2% para periodicidade semanal e 0,2% para periodicidade mensal. No caso do portefólio ECRT os melhores valores de *limite superior de turnover* são 0,2% para periodicidade diária e semanal e 7,5% para periodicidade mensal.

No caso do modelo MVRT com rebalanceamento mensal, apesar de existir um valor de *turnover* presente na tabela para o qual o valor da métrica retorno médio anualizado se verifica maior, o valor anteriormente selecionado para o de limite superior de *turnover* revela ter menor desvio padrão, o que influencia o rácio de Sharpe positivamente. No fundo a ideia base é existir um equilíbrio entre o valor que apresenta maior valor de retorno médio anualizado e menor desvio padrão.

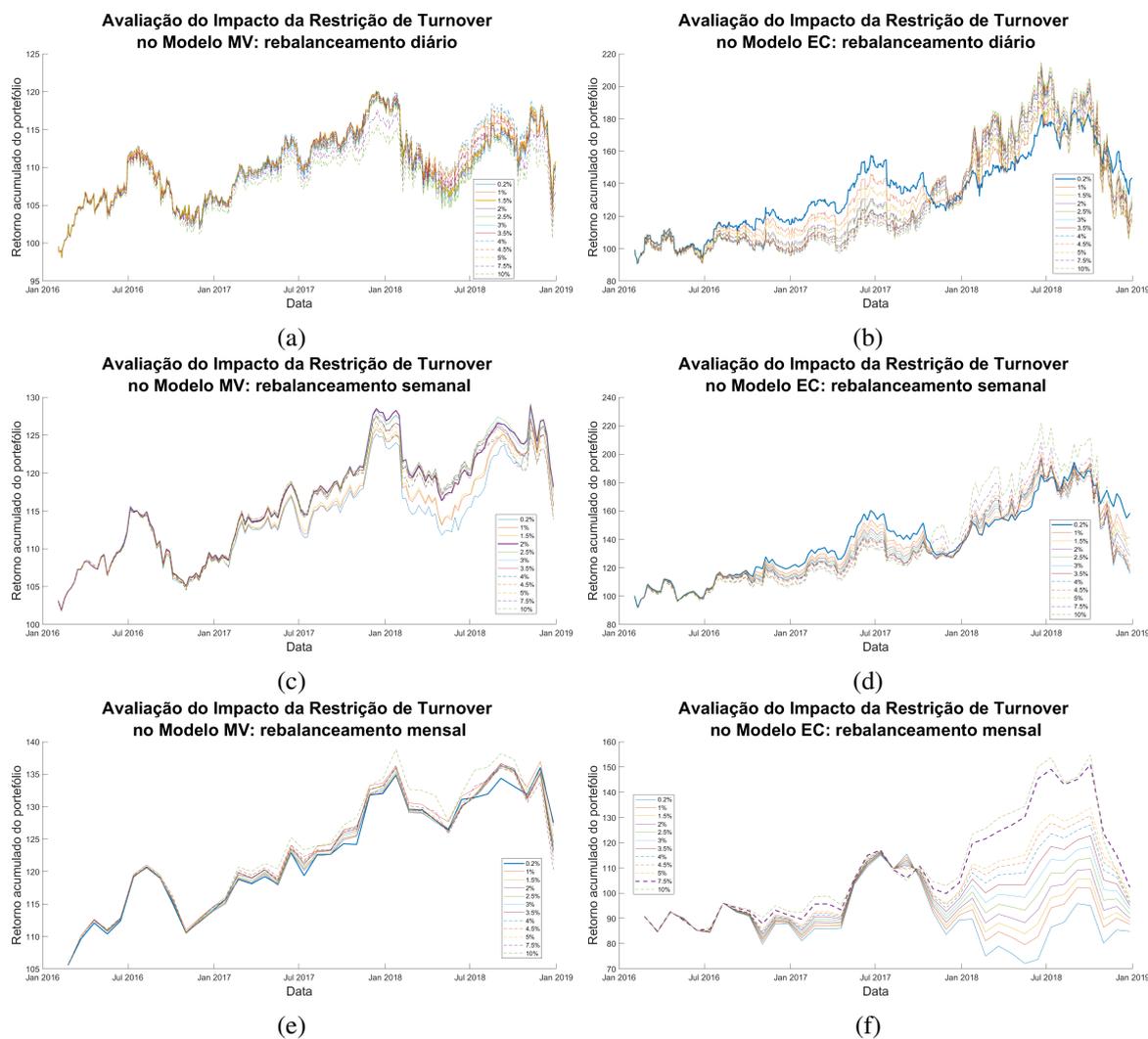


Figura 5.1: Avaliação do Impacto da Restrição de *Turnover* nos modelos MV e EC, no período *in-sample*.

As Figuras 5.1a, 5.1c e 5.1e dizem respeito à avaliação do impacto da restrição de *turnover* no portfólio Variância Mínima, considerando os rebalanceamentos diário, semanal e mensal, respetivamente. Considerando os mesmos rebalanceamentos, no caso do portfólio Equivalente Certo são as Figuras 5.1b, 5.1d e 5.1f que representam a avaliação do impacto da restrição de *turnover*, respetivamente.

Analisando os gráficos obtidos com rebalanceamento diário, semanal e mensal, para essa avaliação, é possível confirmar que os *turnovers* de 1,5%, 2% e 0,2%, respetivamente, são aqueles que podem permitir retornos acumulados finais maiores ao portfólio Variância Mínima, pelo que poderão constituir os que se traduzem num melhor desempenho *out-of-sample* para os portfólios.

No caso do portfólio Equivalente Certo, são confirmados os valores de *turnover* de 0,2% para os rebalanceamentos diário e semanal e 7,5% para o rebalanceamento mensal, podendo estes permitir retornos acumulados finais maiores ao portfólio Equivalente Certo, o que se traduz num melhor desempenho *out-of-sample* para os portfólios.

É importante reiterar que os *turnovers* escolhidos de acordo com o rácio de Sharpe, são seleccionados com base no período *in-sample* e observa-se através da Figura B.2 presente em anexo, que alguns valores também correspondem aos melhores *out-of-sample*, neste caso o valor 1,5% para o MV com periodicidade diária e o valor 7,5% para o EC com periodicidade mensal. Assim, os *turnovers* escolhidos de acordo com o rácio de Sharpe são confirmados pela rentabilidade acumulada durante o período *out-of-sample*.

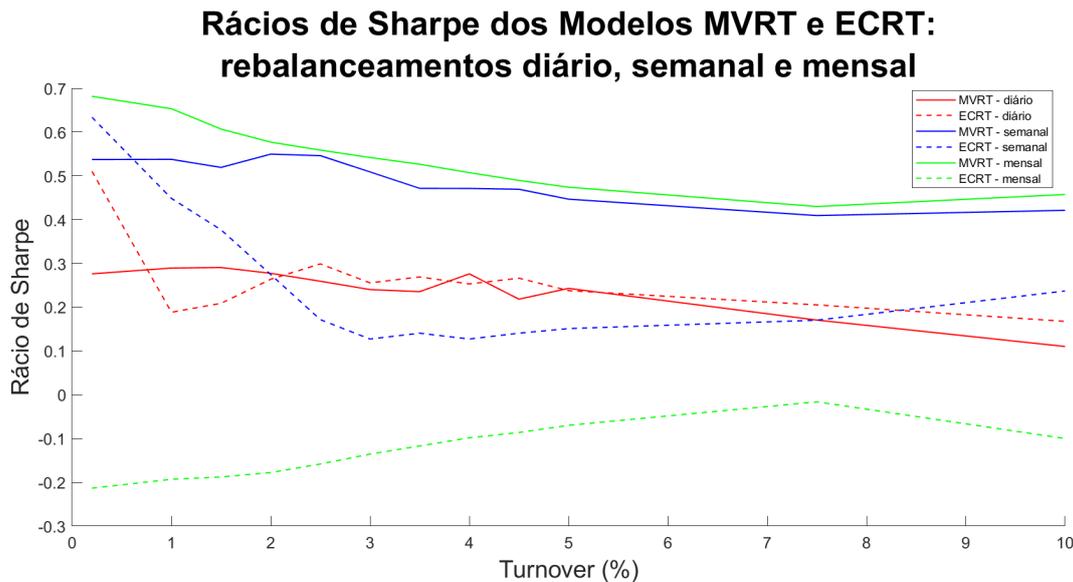


Figura 5.2: Rácios de Sharpe dos modelos MVRT e ECRT no período *in-sample* e considerando diferentes limites máximos de *turnover*.

Observando o gráfico da Figura 5.2 é possível reforçar que os limites de *turnover* que permitem um maior rácio de Sharpe aos modelos MVRT e ECRT são efetivamente os escolhidos de acordo com a tabela. É ainda de notar que o aspeto geral das curvas relativas ao modelo MVRT é que vão decrescendo à medida que o *turnover* aumenta. Já no modelo ECRT as curvas parecem sugerir uma função côncava, excepto quando o rebalanceamento é efetuado mensalmente. O gráfico torna-se importante por denotar os comportamentos diferentes dos modelos, que não são perceptíveis através da análise da tabela e justifica ainda a escolha de valores mais baixos de *turnover* para o MV e para o EC. Posto isto, consideram-se esses valores a introduzir na restrição de *turnover* de cada modelo MVRT ou ECRT, dependendo da periodicidade em questão, para obter os resultados das métricas e se poder proceder às comparações pretendidas.

Tabela 5.2: Métricas de Desempenho dos Portefólios no período *out-of-sample*.

Métrica	Modelo	Custos de Transação após otimização			Modelo	Custos de transação na função objetivo do modelo de otimização			Modelo	Custos de transação no modelo de otimização através da restrição de <i>turnover</i>		
		Diária	Semanal	Mensal		Diária	Semanal	Mensal		Diária	Semanal	Mensal
WR (%)	EW	57,357	67,105	78,947	-	-	-	-	-	-	-	
	MV	55,313	65,789	76,316	MVCd	57,629	65,132	73,684	MVRT	56,812	65,132	76,316
	EC	55,041	57,237	68,421	ECCd	57,221	61,842	65,789	ECRT	53,406	57,237	63,158
Tr (%)	EW	1,241	2,820	6,042	-	-	-	-	-	-	-	
	MV	1,980	6,934	18,606	MVCd	2,034	3,753	7,154	MVRT	1,260	4,160	6,655
	EC	7,696	18,923	45,178	ECCd	2,813	4,409	10,451	ECRT	1,406	2,628	12,083
AMR (%)	EW	20,994	24,221	22,588	-	-	-	-	-	-	-	
	MV	8,802	11,998	5,827	MVCd	18,586	15,455	12,729	MVRT	11,486	12,712	13,335
	EC	33,720	39,485	43,678	ECCd	24,546	27,431	28,544	ECRT	25,990	27,543	30,721
AStd (%)	EW	24,906	23,439	30,112	-	-	-	-	-	-	-	
	MV	17,400	16,034	19,940	MVCd	22,461	16,337	19,712	MVRT	20,479	17,456	20,843
	EC	33,319	30,902	33,299	ECCd	22,532	21,196	25,224	ECRT	27,555	25,117	27,328
SR (%)	EW	81,862	99,621	72,230	-	-	-	-	-	-	-	
	MV	47,109	69,454	25,049	MVCd	80,049	89,320	60,396*	MVRT	53,131	67,886	59,995*
	EC	99,383	124,927	128,505	ECCd	(0,2852)	(0,3756)	(0,0120)	ECRT	(0,7900)	(0,9271)	(0,0365)
Sort.R (%)	EW	110,652	134,501	93,334	-	-	-	-	-	-	-	
	MV	62,119	91,030	28,147	MVCd	110,215	118,965	74,448	MVRT	71,819	90,454	73,276
	EC	141,085	193,279	232,494	ECCd	143,990	183,061	218,951	ECRT	140,175	168,494	223,036
CVaR (%)	EW	-7,949	-17,179	-40,734	-	-	-	-	-	-	-	
	MV	-6,240	-11,246	-30,854	MVCd	-7,006	-12,033	-27,580	MVRT	-6,803	-12,440	-29,745
	EC	-7,870	-13,608	-21,995	ECCd	-6,937	-12,312	-14,184	ECRT	-6,527	-10,706	-13,656
MD (%)	EW	-38,841	-34,795	-33,458	-	-	-	-	-	-	-	
	MV	-32,659	-29,628	-26,548	MVCd	-33,969	-26,118	-24,104	MVRT	-34,607	-26,794	-25,729
	EC	-24,133	-22,454	-19,744	ECCd	-32,949	-21,827	-17,919	ECRT	-21,722	-20,109	-18,365

Notas: A tabela apresenta as métricas de desempenho para os portfólios EW, MV e EC, considerando as hipóteses de os custos de transação serem avaliados após a otimização, de serem tidos em conta na função objetivo (MVCd e ECCd) e de serem tidos em conta através de uma restrição adicional sobre o *turnover* (MVRT e ECRT). Utilizam-se dados diários, semanais e mensais, e considera-se que os portfólios são rebalanceados a essas frequências, respectivamente. As métricas são: WR-*win rate*; Tr-*Turnover*; AMR-Retorno médio anualizado; AStd-Desvio padrão anualizado; SR-Rácio de Sharpe; Sort.R-Rácio de Sortino; CVaR-Valor em Risco Condicional; MD-Maximum Drawdown. Os valores a verde e a rosa dizem respeito aos p-valores HAC resultantes da comparação do rácio de Sharpe entre as estratégias MV e MVCd e entre EC e ECCd, respectivamente. Os valores a vermelho e a roxo dizem respeito aos p-valores HAC entre os modelos MV e MVRT e entre EC e ECRT, respectivamente. A hipótese nula é a diferença entre os rácios ser igual a zero e a comparação procede-se para cada par. No cálculo destes p-valores foi utilizado o método proposto por Ledoit e Wolf [22]. A rejeição da hipótese nula ao nível de significância de 5% é denotada por "*".

A Tabela 5.2 mostra o desempenho dos portfólios MV, EC e EW considerando os custos de transação após otimização e ainda o desempenho dos portfólios Variância Mínima e Equivalente Certo com custos de transação presentes no modelo de otimização através da função objetivo (MVCd e ECCd, respectivamente) ou da restrição de *turnover* (MVRT e ECRT, respectivamente).

É de notar que os resultados das métricas de desempenho do portfólio MVCd são melhores do que os do portfólio MV. O portfólio MV apresenta maiores valores de *turnover* e MD semanal e mensal e desvio padrão e CVaR mensal. Maior *turnover* implica maiores custos de transação e maiores CVaR, desvio padrão e MD implicam maior risco. Além disso, o portfólio MVCd apresenta melhores resultados para *win rate* diário, retorno médio anualizado, rácio de Sharpe e rácio de Sortino diário, semanal e mensal. Logo, a inclusão de custos de transação na função objetivo melhora o desempenho do portfólio de variância mínima após custos de transação. Todavia, considerando o nível de significância

de 5% o MVCd com rebalanceamento mensal revela-se o único para o qual a diferença entre os rácios de Sharpe é estatisticamente significativa.

É possível constatar ainda que o portefólio MVRT supera o portefólio MV. O portefólio MV apresenta maiores valores para *turnover* diário, semanal e mensal; MD e CVaR mensal. Associados ao maior valor de *turnover* estão os maiores custos de transação e valores maiores de CVaR, MD e desvio padrão implicam um maior risco. Além disso, o portefólio MVRT apresenta valores mais elevados de rácio de Sharpe e rácio de Sortino diário e mensal; retorno médio anualizado diário, semanal e mensal; *Win Rate* diário, sendo o mensal idêntico ao do MV; e ainda maior desvio padrão para todas as periodicidades, mas não com uma diferença significativa em relação ao MV. Por apresentar maior rácio de Sharpe é aquele que possui maior retorno ajustado ao risco, o que se observa também por intermédio das métricas CVaR e MD. A adição da restrição de *turnover* ao modelo MV não altera significativamente o risco, mas aumenta o retorno obtido pelo investidor. O portefólio MVRT apresenta portanto melhor desempenho *out-of-sample*.

A 5% o MVRT com rebalanceamento mensal revela-se o único estatisticamente significativo. Os valores do rácio de Sharpe dos modelos MVCd e MVRT com rebalanceamento mensal são muito próximos. No entanto, o p-valor resultante da comparação dos rácios de Sharpe de MVRT e MVCd é o triplo do que resulta da comparação dos rácios de MVCd e MV. Logo, é provável que a diferença entre os valores do rácio de Sharpe dos modelos MVRT e MV seja menor devido a uma maior variabilidade dos valores do rácio de Sharpe do modelo MVRT ao longo do tempo.

Considerando os portefólios MVCd e MVRT é possível aferir que o portefólio MVCd apresenta resultados superiores em CVaR, desvio padrão diário e *turnover* diário e mensal. No entanto, apesar do risco ser maior podemos ainda aferir que o portefólio MVCd possui maiores valores para retorno médio anualizado diário e semanal; rácio de Sharpe e rácio de Sortino diário, semanal e mensal e idêntico *win rate* semanal. Como os rácios são maiores para o MVCd, a diferença positiva do retorno, relativamente ao MVRT, é suficientemente elevada para compensar o risco associado ao portefólio.

Em suma, apesar do portefólio MVCd representar o portefólio mais arriscado, comparado ao MVRT, é também aquele que permite um maior retorno. Por outro lado, o maior *turnover* diário e mensal surge associado a maiores custos de transação, contudo este aumento nos custos não absorve a totalidade do aumento dos retornos, pelo que o portefólio MVCd possui melhor desempenho *out-of-sample*.

Estes resultados são suportados pela literatura, como é o caso de Ledoit e Wolf [9] e Glen [10] que defendem que o portefólio MV com custos de transação na função objetivo apresenta melhores resultados que o portefólio MV.

Era expectável que os custos de transação com dados mensais, medidos através do *turnover*, fossem inferiores aos diários. Contudo tal não se verifica, devido aos grandes saltos entre as proporções dos dados mensais, provocados pelas alterações de preços e consequentemente das rentabilidades.

Considerando agora os dados presentes na terceira coluna da Tabela 5.2 podemos concluir que entre os portefólios Naive e Variância Mínima, com custos de transação após otimização, o primeiro é aquele que apresenta menores valores de *turnover* diário, semanal e mensal. Apesar do portefólio Naive apresentar maiores valores de retorno médio anualizado para todas as periodicidades, é também aquele que apresenta maior desvio padrão, CVaR e MD para todas as periodicidades, constituindo por isso o

portefólio mais arriscado. É ainda este portefólio o que apresenta melhores valores para *win rate*, rácio de Sortino e rácio de Sharpe diário, semanal e mensal, sendo as diferenças entre os valores de Naive e os de MV bastante consideráveis. Os rácios de Sharpe e de Sortino indicam que EW é o que fornece maior retorno por unidade de risco, tendo portanto um melhor desempenho *out-of-sample*.

Considerando os portefólios Naive e MVCd, presentes na Tabela 5.2, podemos concluir que o primeiro apresenta resultados mais elevados em termos de retorno médio anualizado, rácio de Sharpe e rácio de Sortino diário, semanal e mensal. Revela-se ainda o portefólio mais arriscado por apresentar maior desvio padrão, CVaR e MD diário, semanal e mensal. Após a introdução dos custos de transação na função objetivo do portefólio MV, o *turnover* reduz aproximando-se do do portefólio EW. No entanto, o primeiro continua a incorrer em maiores custos de transação. O portefólio Naive, apesar de mais arriscado, revela-se o que apresenta melhor desempenho *out-of-sample*, os retornos obtidos compensam o risco envolvido.

Por último, considerando os portefólios Naive e MVRT, o primeiro portefólio apresenta resultados mais elevados para rácio de Sortino, rácio de Sharpe e para *win rate* diário, semanal e mensal. Constitui ainda o portefólio mais arriscado, por apresentar resultados mais elevados de CVaR, MD e desvio padrão diário, semanal e mensal e é o portefólio que permite um maior retorno, dado o maior retorno médio anualizado para todas as periodicidades. O portefólio MVRT apresenta maiores valores para *turnover*, incorrendo em maiores custos de transação.

Em suma, o portefólio Naive revela ser o que tem melhor desempenho *out-of-sample* em relação aos modelos MV, MVRT e MVCd, por permitir o maior retorno apesar do maior risco associado.

A Tabela 5.2 mostra ainda o desempenho do portefólio Equivalente Certo com custos de transação após a otimização (EC) e com custos de transação presentes no modelo de otimização através da função objetivo (ECCd) ou da restrição de *turnover* (ECRT).

É de notar que o portefólio ECCd se revela melhor que o portefólio EC. O portefólio EC apresenta valores mais elevados para *turnover*, desvio padrão e CVaR, diário, semanal e mensal e MD semanal e mensal. É também o portefólio que apresenta maior retorno médio anualizado para todas as periodicidades, e isto, apesar de possuir maior *turnover*, o que significa que a inclusão dos custos de transação na função objetivo do modelo EC reduz efetivamente o *turnover* do modelo originado, ECCd, mas o retorno não aumenta. Portanto EC tem maiores custos associados às transações realizadas nos rebalanceamentos, mas os retornos que essas transações originam são suficientemente elevados para absorver os custos de transação e ainda serem maiores que do que os do modelo ECCd. O portefólio ECCd apresenta maiores valores de rácio de Sharpe diário e semanal; rácio de Sortino diário e *win rate* diário e semanal. Apesar do retorno médio anualizado obtido por intermédio do EC ser maior, o risco e a volatilidade associados ao mesmo são muito elevados e resultam num menor rácio de Sharpe. Todavia, considerando o nível de significância de 5% não existe nenhum valor estatisticamente significativo.

Estes resultados são suportados pela literatura, como é o caso de Yoshimoto [13] que defende que o portefólio EC com custos de transação na função objetivo apresenta melhores resultados que o portefólio EC.

É possível constatar ainda que o portefólio EC supera o portefólio ECRT. O portefólio EC apresenta maiores valores para *turnover*, MD, CVaR e desvio padrão diário, semanal e mensal. Além disso, apesar

do maior risco envolvente, apresenta valores mais elevados de rácio de Sharpe e rácio de Sortino para todas as periodicidades e retorno médio anualizado diário e mensal, sendo o semanal idêntico. Contudo, ao nível de significância de 5% não existe nenhum valor que se revele estatisticamente significativo. Apesar do portefólio ECRT não apresentar melhor desempenho *out-of-sample* com o limite superior de *turnover* considerado tal seria possível se outro valor para esse limite superior fosse considerado. Esses valores podem ser encontrados na Tabela B.1 presente em anexo, que apresenta os resultados *out-of-sample* para outros valores de limite superior de *turnover*.

Entre os portefólios ECCd e ECRT é possível aferir que o portefólio ECCd apresenta resultados superiores em *turnover* diário e semanal, e MD e CVaR para todas as periodicidades. Além disso, podemos ainda aferir que o portefólio ECRT possui maiores valores para retorno médio anualizado diário, semanal e mensal, contudo é o portefólio ECCd que apresenta maior rácio de Sharpe para todas as periodicidades e rácio de Sortino diário e semanal devido ao menor desvio padrão para todas as periodicidades. O portefólio ECCd apresenta maior *win rate* diário sendo o semanal o mesmo valor. O portefólio ECCd apresenta assim melhor desempenho *out-of-sample*. Era expectável que os custos de transação com dados mensais, medidos através do *turnover*, fossem inferiores aos dados diários. Contudo tal não se verifica, devido aos grandes saltos entre as proporções dos dados mensais, provocados pelas alterações de preços e consequentemente das rentabilidades.

Considerando agora os dados presentes na Tabela 5.2, referentes aos portefólios Naive e Equivalente Certo, com custos de transação após otimização, concluímos que o primeiro é aquele que apresenta menores valores de *turnover* diário, semanal e mensal e maiores valores de *win rate* diário, semanal e mensal. O portefólio EC apresenta maiores valores de retorno médio anualizado, rácio de Sharpe e rácio de Sortino para todas as periodicidades. Assim, apesar de possuir maiores custos de transação em relação ao EW, a diferença dos custos não absorve a totalidade do aumento do retorno. Permite portanto uma alocação mais eficiente dos recursos nos ativos considerados de forma a gerar maiores retornos líquidos. O portefólio Naive apresenta maiores valores de CVaR e MD para todas as periodicidades, constituindo por isso o portefólio mais arriscado, apesar do portefólio EC apresentar maior desvio padrão para todas as periodicidades.

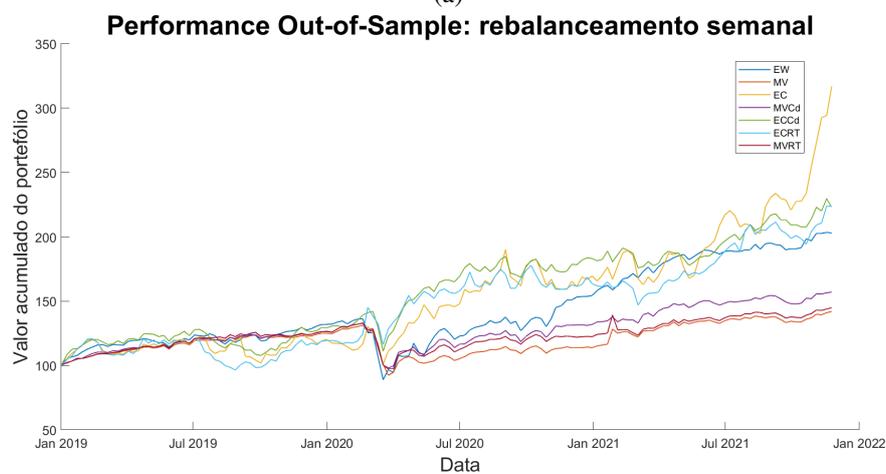
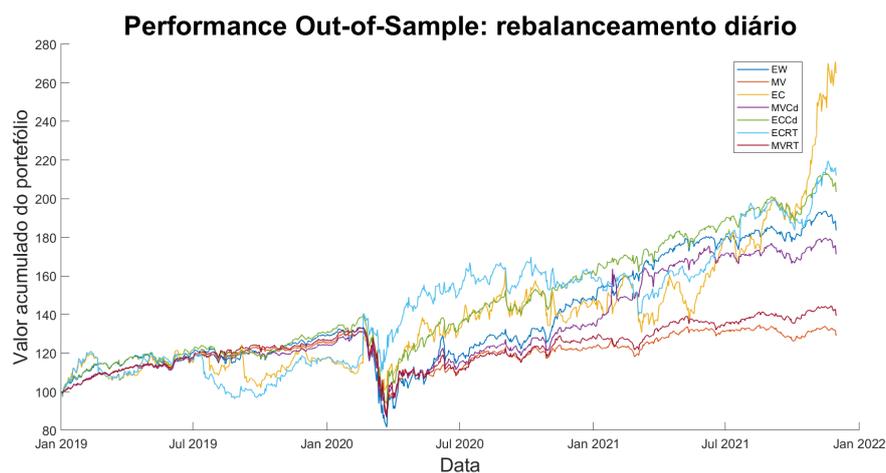
Posto isto, tendo por base esta análise de resultados é possível concluir que o portefólio EC é aquele que permite um maior retorno ajustado ao risco, constituindo assim o portefólio com melhor desempenho *out-of-sample*.

Considerando os portefólios Naive e ECCd, podemos concluir que o segundo apresenta resultados mais elevados em termos de retorno médio anualizado, rácio de Sharpe e rácio de Sortino diário, semanal e mensal. É ainda o portefólio que se revela menos arriscado por apresentar os menores valores de MD, CVaR e desvio padrão para todas as periodicidades. O portefólio ECCd apresenta ainda os maiores valores para *turnover* diário, semanal e mensal, constituindo o portefólio que incorre em maiores custos de transação, apesar dos valores entre os modelos não se revelarem muito diferentes.

O portefólio que apresenta melhor desempenho *out-of-sample* é o ECCd, por permitir um maior retorno e ainda apresentar menor risco associado.

Por último, considerando os portefólios Naive e ECRT, o primeiro portefólio apresenta resultados mais elevados para *win rate* diário, semanal e mensal; CVaR e MD diário, semanal e mensal, repre-

sentando os dois últimos uma maior probabilidade de incorrer em riscos extremos. O portfólio ECRT é aquele que apresenta maiores valores de *turnover* diário e mensal, incorrendo em maiores custos de transação; maiores valores de retorno médio anualizado, rácio de Sharpe e rácio de Sortino diário, semanal e mensal. É ainda o portfólio que apresenta maior desvio padrão diário, semanal e mensal, não sendo contudo valores muito diferentes do portfólio EW. Em suma, o portfólio ECRT revela ser o que tem melhor desempenho *out-of-sample* em relação ao EW.



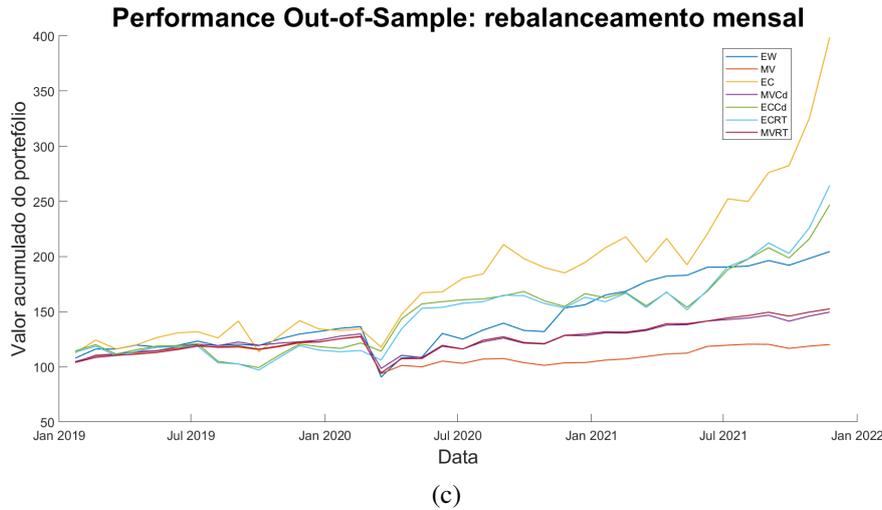


Figura 5.3: Desempenho *Out-of-Sample* dos modelos EW, MV, EC, MVCd, ECCd, MVRT e ECRT. Os valores de *turnover* para os modelos MVRT e ECRT foram escolhidos através da Tabela 5.1.

Os gráficos das Figuras 5.3a, 5.3b e 5.3c mostram os valores acumulados dos portfólios com rebalanceamento diário, semanal e mensal, respetivamente. As rentabilidades após custos de transação acumuladas dizem respeito aos portfólios sem inclusão dos custos de transação no problema de otimização (MV, EC, EW), com custos no modelo de otimização através da função objetivo (MVCd e ECCd) e da restrição de *turnover* (MVRT e ECRT). O retorno cumulativo dos portfólios no instante T do período *out-of-sample* tem base 100 e é igual a $100e^{\sum_{t=1}^T r_t}$, onde r_t representa o retorno logarítmico *out-of-sample* do portfólio no momento t após o rebalanceamento.

Podemos concluir através da análise dos gráficos que o portfólio Equivalente Certo com custos de transação através da restrição de *turnover* (ECRT) e na função objetivo (ECCd) dominam todos os portfólios para as frequências diária e semanal. O retorno destes portfólios é sempre crescente no geral, excepto em março 2020, que coincide com o colapso de mercado provocado pela pandemia Covid-19, constituindo assim o portfólio que permite um maior retorno no final do período *out-of-sample*.

No caso do rebalanceamento mensal a dominância é disputada pelos portfólios ECCd, EC e ECRT. Contudo através das conclusões da análise da tabela anterior é possível afirmar que o portfólio EC é o que permite um maior retorno ajustado ao risco no final do período *out-of-sample*, seguindo-se o ECCd.

Através da Figura B.1 é possível observar o desempenho *out-of-sample* dos portfólios MV e EC sem considerar os custos de transação e do portfólio EW. É importante referir que aos retornos deste desempenho não foram retirados os custos de transação. Ainda é possível salientar que neste caso é também o portfólio EC o que apresenta melhor desempenho, ou seja, maior retorno acumulado.

É de salientar que os portfólios EC, ECCd e ECRT apresentam cardinalidade não nula para os limiares mais elevados. Este facto indica que os portfólios se apoiam mais fortemente sobre um determinado número de ativos. Pelo contrário, os modelos MV, MVCd e MVRT a cardinalidade apresenta-se mais alta para os limiares mais pequenos e nula para os limiares mais elevados, o que

sugere uma maior diversificação do portfólio. A cardinalidade *out-of-sample* pode ser observada na Figura B.3 presente em anexo.

Capítulo 6

Conclusões

O efeito dos custos de transação tem sido alvo de grande interesse por parte da literatura, nomeadamente por ser uma das maiores preocupações dos investidores institucionais, sobretudo em mercados financeiros periféricos, com reduzida liquidez, como é o caso do mercado português, podendo absorver parte dos potenciais retornos.

Deste modo, na presente dissertação é estudado o impacto dos custos de transação nos portefólios Variância Mínima e Equivalente Certo.

Afim de determinar o impacto dos custos de transação são considerados os modelos com custos de transação após otimização e com custos de transação nos modelos de otimização. Considerando duas formas de o fazer, a incorporação dos custos na função objetivo ou através de uma restrição adicional sobre o *turnover*, pretende-se determinar qual permite melhor desempenho aos modelos base.

Para obter os desempenhos dos portefólios *out-of-sample* é realizado um estudo das métricas de desempenho considerando os modelos aos quais é fornecida informação do período *in-sample* e são consideradas três periodicidades de rebalanceamento: diária, semanal e mensal.

De acordo com os resultados obtidos a inclusão dos custos de transação na função objetivo e através da restrição de *turnover* reduzem efetivamente o *turnover* e, portanto, os custos de transação quando os modelos são comparados com os modelos base.

Além disso, é observável que a inclusão dos custos de transação permite no global melhor desempenho com aumento dos retornos ajustados ao risco em relação aos modelos base, traduzindo-se num aumento do rácio de Sharpe nos modelos.

O maior rácio de Sortino surge associado a uma baixa probabilidade de ocorrência de perdas extremas no portefólio. Efetivamente os portefólios que apresentam os maiores rácios de Sortino são os que incluem os custos de transação no modelo. Esse facto é suportado pelos resultados obtidos para o portefólio MV. Porém, nem todas as melhorias se revelam estatisticamente significativas.

É ainda possível concluir que a introdução dos custos de transação na função objetivo dos portefólios se revela melhor opção do que a inclusão de uma restrição de *turnover*, para os portefólios estudados tendo em conta os limites máximos de *turnover* selecionados.

Considerando os modelos EC e ECCd a inclusão na função objetivo diminui a volatilidade dos portefólios. Quando comparado com o portefólio *benchmark*, a estratégia Naive, apenas os modelos

EC apresentam melhor desempenho, nomeadamente após a inclusão dos custos de transação na função objetivo, que aumenta o retorno líquido e diminui simultaneamente o risco.

Destaca-se o facto do portefólio MV possuir muitos ativos com proporções pequenas, o que pode resultar num aumento dos custos de transação. Além do que foi mencionado, essas proporções podem ser impraticáveis em mercados reais.

Em trabalhos futuros, pretende-se dar continuidade ao estudo do impacto dos custos de transação na seleção de portefólios, podendo vir a ser publicadas novas conclusões numa revista económica sobre o tema. Essas novas conclusões podem surgir da limitação de um novo *turnover* máximo considerado, da inclusão de diferentes tipos de custos de transação, por exemplo quadráticos, e da utilização de novos modelos, como por exemplo o MAD (*Mean Absolute Deviation*).

Referências

1. Markowitz, H. Portfolio Selection. *The Journal of Finance* **7**, 77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974> (1952).
2. DeMiguel, V., Garlappi, L. & Uppal, R. Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The Review of Financial Studies* **22**, 1915–1953. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199744282.003.0034> (2009).
3. Pogue, G. A. An extension of the Markowitz portfolio selection model to include variable transactions' costs, short sales, leverage policies and taxes. *The Journal of Finance* **25**, 1005–1027. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1970.tb00865.x> (1970).
4. Mitchell, J. E. & Braun, S. Rebalancing an investment portfolio in the presence of convex transaction costs, including market impact costs. *Optimization Methods and Software* **28**, 523–542. <https://doi.org/10.1080/10556788.2012.717940> (2013).
5. Peng, H., Kitagawa, G., Gan, M. & Chen, X. A new optimal portfolio selection strategy based on a quadratic form mean–variance model with transaction costs. *Optimal Control Applications and Methods* **32**, 127–138. <https://doi.org/10.1002/oca.936> (2011).
6. Gârleanu, N. & Pedersen, L. H. Dynamic trading with predictable returns and transaction costs. *The Journal of Finance* **68**, 2309–2340. <https://doi.org/10.1002/9781118267028.ch15> (2013).
7. Angelelli, E., Mansini, R. & Speranza, M. G. A comparison of MAD and CVaR models with real features. *Journal of Banking & Finance* **32**, 1188–1197. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2006.07.015> (2008).
8. Li, Z.-F., Li, Z.-X., Wang, S.-Y. & Deng, X.-T. Optimal portfolio selection of assets with transaction costs and no short sales. *International Journal of Systems Science* **32**, 599–607. <https://doi.org/10.1080/00207720119100> (2001).
9. Ledoit, O. & Wolf, M. Markowitz portfolios under transaction costs. *Working paper series/Department of Economics*. <https://doi.org/10.5167/uzh-221804> (2022).
10. Glen, J. J. Mean-variance portfolio rebalancing with transaction costs and funding changes. *Journal of the Operational Research Society* **62**, 667–676. <https://doi.org/10.1057/jors.2009.148> (2011).
11. Lobo, M. S., Fazel, M. & Boyd, S. Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. *Annals of Operations Research* **152**, 341–365. <https://doi.org/10.1007/s10479-006-0145-1> (2007).
12. Hautsch, N. & Voigt, S. Large-scale portfolio allocation under transaction costs and model uncertainty. *Journal of Econometrics* **212**, 221–240. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2019.04.028> (2019).
13. Yoshimoto, A. The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs. *Journal of the Operational Research Society of Japan* **39**, 99–117. <https://doi.org/10.15807/jorsj.39.99> (1996).
14. Schreiner, J. Portfolio revision: a turnover-constrained approach. *Financial Management*, 67–75. <https://doi.org/10.2307/3665315> (1980).

15. Moorman, T. An empirical investigation of methods to reduce transaction costs. *Journal of Empirical Finance* **29**, 230–246. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2014.09.004> (2014).
16. Chow, T.-M., Kose, E. & Li, F. The impact of constraints on minimum-variance portfolios. *Financial Analysts Journal* **72**, 52–70. <https://doi.org/10.2469/faj.v72.n2.5> (2016).
17. Brown, D. B. & Smith, J. E. Dynamic portfolio optimization with transaction costs: Heuristics and dual bounds. *Management Science* **57**, 1752–1770. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1110.1377> (2011).
18. Lo, A. W., Mamaysky, H. & Wang, J. Asset prices and trading volume under fixed transactions costs. *Journal of Political Economy* **112**, 1054–1090. <https://doi.org/10.1086/422565> (2004).
19. Zhai, Q., Ye, T., Huang, M., Feng, S. & Li, H. Whale optimization algorithm for multiconstraint second-order stochastic dominance portfolio optimization. *Computational Intelligence and Neuroscience* **2020**. <https://doi.org/10.1155/2020/8834162> (2020).
20. Patel, N. R. & Subrahmanyam, M. G. A simple algorithm for optimal portfolio selection with fixed transaction costs. *Management Science* **28**, 303–314. <https://doi.org/10.1287/mnsc.28.3.303> (1982).
21. F.(2021), A. *S&P 500 Historical Components & Changes* <https://github.com/fja05680/sp500> (2022).
22. Ledoit, O. & Wolf, M. Robust performance hypothesis testing with the Sharpe ratio. *Journal of Empirical Finance* **15**, 850–859. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2008.03.002> (2008).
23. Sebastião, H. *Instrumentos Financeiros Derivados: Apontamentos Didáticos* 2019/2020.
24. Brunnermeier, M. K. & Pedersen, L. H. Predatory trading. *The Journal of Finance* **60**, 1825–1863. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.2005.00781.x> (2005).
25. Yakov Amihud, H. M. & Pedersen, L. H. Market liquidity: asset pricing, risk, and crises. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511844393> (2012).
26. Goetzmann, W. N., Brown, S. J., Gruber, M. J. & Elton, E. J. *Modern portfolio theory and investment analysis* ISBN: 978-1-118-80575-6 (2014).
27. Adcock, C. J. & Meade, N. A simple algorithm to incorporate transactions costs in quadratic optimisation. *European Journal of Operational Research* **79**, 85–94. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90397-2](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90397-2) (1994).
28. Grinold, R. C. & Kahn, R. N. *Active portfolio management* ISBN: 0639785316619 (McGraw Hill New York, 2000).
29. Amihud, Y. & Mendelson, H. Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of financial Economics* **17**, 223–249. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(86\)90065-6](https://doi.org/10.1016/0304-405x(86)90065-6) (1986).
30. Fabozzi, F. J. & Markowitz, H. M. *Equity valuation and portfolio management* ISBN: 978-0-470-92991-9 (John Wiley & Sons, 2011).
31. Sharpe, W. F. Mutual fund performance. *The Journal of business* **39**, 119–138. <https://doi.org/10.1086/294846> (1966).
32. *Fred, Economic Research* <https://fred.stlouisfed.org/series/DGS3MO> (2021).
33. Sortino, F. A. & Price, L. N. Performance measurement in a downside risk framework. *the Journal of Investing* **3**, 59–64. <https://doi.org/10.3905/joi.3.3.59> (1994).
34. Rockafellar, R. T., Uryasev, S. *et al.* Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk* **2**, 21–42. <https://doi.org/10.21314/jor.2000.038> (2000).
35. Choi, J. Maximum drawdown, recovery, and momentum. *Journal of Risk and Financial Management* **14**, 542. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2418515> (2021).

36. DeMiguel, V., Martin-Utrera, A. & Nogales, F. J. Parameter uncertainty in multiperiod portfolio optimization with transaction costs. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **50**, 1443–1471. <https://doi.org/10.1017/s002210901500054x> (2015).
37. Collin-Dufresne, P., Daniel, K. D., Moallemi, C. C. & Saglam, M. Dynamic asset allocation with predictable returns and transaction costs. *Available at SSRN 2618910*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2618910> (2015).
38. Best, M. J. & Hlouskova, J. An algorithm for portfolio optimization with transaction costs. *Management Science* **51**, 1676–1688. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1050.0418> (2005).
39. Goldberg, L. R., Leshem, R. & Geddes, P. Restoring value to minimum variance. *Forthcoming in Journal of Investment Management*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2320264> (2013).
40. Tsuchida, N., Zhou, X. & Rachev, S. Mean-ETL portfolio selection under maximum weight and turnover constraints based on fundamental security factors. *The Journal of Investing* **21**, 14–24. <https://doi.org/10.3905/joi.2012.21.1.014> (2012).
41. Lewis, A. *The stock market boomed in 2019. Here's how it happened*. <https://www.cnbc.com/2019/12/31/the-stock-market-boomed-in-2019-heres-how-it-happened.html>.

Apêndice A

Revisão de Literatura

Autores/Ano	Medida de Risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Peng et al., 2011 [5]	Média-Variancia	Duas ações específicas de uma bolsa de valores escolhidas como índice. Dezembro de 1979 a Abril de 2001 (mensalmente).	Não	Inclusão dos custos de transação no modelo MeVar, assumindo a forma quadrática.	Quadrático	Função objetivo	MeVar com custos de transação proporciona uma melhoria significativa em relação ao Modelo MeVar.
Henry Markowitz, 1952	Média-Variancia			Trade-off entre risco e rentabilidade.	Quadrático		Grande esforço computacional quando se trata de um grande número de ativos, podendo conduzir a portfólios pouco diversificados.
Angelelli et al., 2007 [7]	MAD e CVar	4 grupos com ativos de Milan, Paris and Frankfurt stock exchanges com respetivamente 200, 300, 400 e 600 ativos. De 1999 a 2001 (dados semanais).	Sim	Comparação dos modelos Mean Absolute Deviation e worst conditional expectation, incluindo nos mesmos os custos de transação e uma restrição de cardinalidade, i.e., do número máximo de ativos que o portfólio pode conter.	Linear	Função objetivo	Grande tempo computacional necessário para resolver a solução do modelo CVar (mesmo em pequenos casos), mas o portfólio que tem origem nesse modelo é mais estável, sendo, portanto, preferível em condições de mercado instáveis ou negativas.

Tabela A.1

Autores/Ano	Medida de Risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Schreiner, 1980 [14]	Média-Variância	Ações das 50 maiores empresas do índice NYSE, 1966 a 1975.	Não	Adição de uma restrição de <i>turnover</i>	Quadrático	Restrição de <i>turnover</i>	<p>Contorna a dificuldade em estimar os custos de transação totais ao restringir o <i>turnover</i>.</p> <p>Relativamente ao modelo base, a adição da restrição de <i>turnover</i> com limiar de 25% resulta no portefólio com melhor desempenho.</p>
Mitchell e Braun, 2013 [4]	Média-Variância	Dois portefólios, de 9 títulos devido a Markowitz, e outro composto por 30 ações de Dow Jones Industrial Average.	Não	Trade-off entre risco e retorno. Problema básico de otimização de portefólios em que os vários tipos de custos de transação são utilizados para equilibrar o portefólio num novo portefólio.	Quadrático	Restrições	<p>A partir dos resultados computacionais, verifica-se que o efeito dos custos de transação é mais acentuado para níveis relativamente altos de retorno esperado, uma vez que o gestor do portefólio é obrigado a realizar muitos rebalanceamentos porque apenas alguns ativos podem satisfazer o requisito de retorno desejado.</p>

Autores/Ano	Medida de risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Adcock e Meade, 1994 [27]	MAD(Média dos desvio absoluto)	220 ativos do UK do índice FTA All shares.	Não	Uso de um problema de alocação de ativos e um fundo de acompanhamento de índices de ações.	Linear	Restrições	Os constituintes do portfólio final selecionados pelo método 1, diferem num máximo de 5,3% dos selecionados pelo QP esparsos (método 0). As diferenças entre o desempenho dos portfólios escolhidos e o método 0 são muito pequenas. O método converge rapidamente em 5 iterações.
Pogue, 1970 [3]	Média-Variância	Não aplica o modelo.		Uso de dois tipos de custos de transação, as comissões de corretagem e os efeitos dos preços resultantes dos ativos que não possuem liquidez.	Quadrático	Restrições	Excelente desempenho do WOA (<i>Whale optimization algorithm</i>) sob restrições severas. O modelo de otimização de portfólio apenas considera um problema de um período único. Existe possibilidade do WOA convergir prematuramente.
Zhai et al., 2020 [19]	Dominância estocástica	Dados históricos da taxa de retorno do Índice FTSE 100	Não	Aplicação do Algoritmo WOA para resolução do modelo de otimização de portfólio SSD que possui as seguintes restrições: restrição de dominância estocástica, restrições de curto e assimetria, restrição de cardinalidade, restrição de fronteira, restrição orçamental e restrição de <i>short selling</i> .	Linear	Função objetivo	

Autores/Ano	Medida de risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Deng et al., 2001 [8]	Média-Variância	Não aplica o modelo.		Proposta de um modelo de programação com dupla função objetivo, formulado para selecionar portfólios ideais com custos de transação proporcionais.	Linear	Função objetivo	Quando a função de utilidade do investidor não é conhecida explicitamente, o portfólio ideal depende da função utilidade do investidor que pode ser calculada usando um método iterativo, que requer apenas a comparação de pares e possui uma convergência finita e rápida.
Lobo et al. 2007 [11]	Média-Variância	Um grupo de 10 e outro de 100 ações de S&P 500.	Não	Cálculo do limite superior global a partir de uma relaxação convexa e proposta de uma heurística para calcular uma solução aproximada, que produz um limite inferior. Trade-off entre média dos retornos e variância. Os custos de transação são proporcionais.	Quadrático	Função objetivo	As diferenças entre a solução heurística e a solução ótima são pequenas. Se os custos de transação fixos forem incluídos, o problema resultante não é convexo.

Autores/Ano	Medida de risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Glen, 2011 [10]	Média-Variância	6 conjuntos de ativos: 30 FTSE, 31 Hang Sen, 85 DAX, 89 FTSE, 98 S&P 500 e 225 Nikkei.	Sim	Otimização do modelo mínima-variação considerando custos de transação proporcionais com rebalanceamento.	Quadrático	Restrições	Quando são tidos em conta os custos de transação o portfólio obtido pelo método de otimização não é o mesmo quando os custos não são considerados. Inclui-los no modelo permite retornos líquidos maiores.
DeMiguel et al., 2015 [36]	Média-Variância	Bases de dados simulados com 25 e 50 ativos de risco. Ativos de 48IndP e 100FF. 100 ativos escolhidos aleatoriamente do índice S&P 500.	Sim	Shrinking de portfólios onde são tidos em conta os custos de transação e incerteza de parâmetros.	Quadrático	Função objetivo	Mostrou-se analítica e experimentalmente a melhor performance da aplicação dos portfólios que consideram os custos de transação e a incerteza de parâmetros.
Garleanu e Pedersen, 2013 [6]	Média-Variância	Comodidades da COMEX e da NYBOT de 1 de Janeiro de 1996 a 23 de Janeiro de 2009.	Sim	Criação de um portfólio ótimo dinâmico que tem em conta os custos de transação quadráticos e os retornos esperados. O portfólio consiste na combinação linear do portfólio atual com um portfólio alvo.	Quadrático	Função objetivo	Se os custos de transação forem tidos em conta o desempenho do portfólio criado é melhor. Este portfólio quando comparado com um portfólio estático possui um melhor desempenho conseguido pela sua dinâmica.

Autores/Ano	Medida de risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Collin-Dufresne et al., 2015 [37]	Média-Variância	As 100 maiores ações da NYSE, AMEX ou NASDAQ durante o período de 1930 a 2014.	Não	Abordagem simples para a escolha dinâmica de um portfólio multi-período com custos de transação que são tratados em ambientes com grande número de títulos.	Quadrático	Função objetivo	LGS pode ser calculada resolvendo um problema quadrático linear determinístico, que é computacionalmente muito eficiente. Os resultados mostram que o desempenho das soluções linear-quadráticas de Litterman, Gârleanu e Pedersen se aproximam da solução LGS quando a matriz covariância das mudanças de preços é aproximadamente constante (onde L-GP fornece a solução ótima). No entanto, quando os retornos apresentam volatilidade estocástica, a superioridade da abordagem LGS é mais forte.

Autores/Ano	Medida de risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Parel e Subrahmanyam, 1982 [20]	Média-Variância	Não aplica o modelo.			Quadrático	Função objetivo	O portfólio ideal pode ser escolhido resolvendo o problema de otimização quadrática <i>mixed-integer</i> .
Yoshimoto et al., 1996 [13]	Média-Variância	Dois índices: Salomon Brothers e Bolsa de Valores dos países Japão, Reino Unido, Estados Unidos da América, Canada, França e Alemanha. Os dados para ambos os índices são provenientes da base da Datastream International.	Não	Proposta do modelo de otimização de portfólios com custos de transação proporcionais, POSTRAC.	Quadrático	Função objetivo	Ignorar os custos de transação resulta em portfólios ineficientes. Mostra-se que não existe diferença estatisticamente significativa no desempenho do portfólio para estimar o retorno esperado com diferentes metodologias ao considerar os custos de transação para o retorno do portfólio.
Moorman, 2014 [15]	Certainty equivalent return e Sharpe Ratio	Stocks comuns no CRSP de 1965 a 1970.	Sim	Três estratégias de seleção de portfólio: a levered-momentum strategy, a zero-cost decile-momentum strategy, and an equally-weighted market portfolio com minimização dos custos de transação ao limitar a frequência de rebalanceamento.	Não linear	Função Objetivo	A redução dos custos de transação é melhor sucedida nos portfólios <i>levered-momentum</i> e <i>equally weighted market</i> . Os portfólios otimizados através da minimização da frequência de rebalanceamento têm melhor performance que os que são otimizados sem a referida minimização.

Autores/Ano	Medida de risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Best e Hlouskova, 2005 [38]	Média-Variância	Não aplica o modelo.		É considerado o problema de maximizar uma função utilidade esperada através da média-variância e da função utilidade. Apresenta-se um método para resolver o problema tridimensional (resultante da adição dos custos de transação) através da resolução de uma sequência de problemas de otimização a n dimensões, que contabiliza implicitamente os custos de transação em vez explicitamente. O método baseia-se em derivar as condições de otimização para o problema apenas em termos de quantidades de dimensão inferior. O novo método é comparado com o método da barreira implementado em CPLEX.	Quadrático	Função objetivo	Com custos de transação pequenos mas positivos, o método da barreira e o novo método resolvem os problemas em aproximadamente o mesmo tempo de execução. Como o custo de transação aumenta, o novo método supera o método da barreira. O método apresentado resolve os problemas aproximadamente 1,09 a 79 vezes mais rápido do que o método de barreira, dependendo da magnitude dos custos de transação $(0, 2 - 0, 7)$.
Hautsch e Voigt, 2013 [12]	Média-Variância	308 ações do índice S&P 500 de 2007 a 2017.	Sim	Inclusão dos custos de transação no portfólio de média-variância.	Quadrático	Função objetivo	Os custos de transação quadráticos resultam na penalização do <i>turnover</i> . A incorporação dos custos de transação no modelo de otimização aumenta fortemente o desempenho dos portfólios. No entanto, a diferença entre o desempenho dos modelos individuais fica reduzida.

Autores/Ano	Medida de risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Brown e Smith, 2011 [17]	Função de utilidade com parâmetro de aversão ao risco.	10 ativos de risco de 5 índices: S&P 500, Russell 2000 Value, MSCI World Gross, Russell 1,000 Value Index, Russell MidCap Index no período de 1981 a 2006	Não	Implementação de heurísticas para solucionar um problema de otimização de portfólio dinâmico que considera aversão ao risco, restrições e custos de transação.	Quadrático	Função objetivo	Tempo computacional razoável e as heurísticas aplicadas são próximas da solução esperada.
Ledoit e Wolf, 2022 [22]	Variância	Uso de dados diários do Center of Research in Security Prices (CRSP) de 01 Janeiro 1982 a 31 Dezembro 2021, com especial atenção a ativos de NYSE, AMEX e NASDAQ. Rebalancamento realizado todos os 21 dias (mensalmente).	1987 a 2021	Inclusão de um termo de penalização de fimido como múltiplo dos custos de transação, na função objetivo do modelo Mínima-Variância. Os custos incluem custos proporcionais às proporções reinvestidas e custos fixos. O rebalancamento é realizado todos os 21 dias (mensalmente). Comparam-se 4 modelos, dois modelos Mínima-Variância sem a inclusão dos custos na função objetivo, em que um deles possui uma restrição adicional da norma do vetor dos pesos, mais dois modelos que incluem os custos de transação apresentando um destes a mesma restrição adicional.	Quadrático	Função objetivo	A incorporação dos custos de transação na função objetivo do problema de otimização resulta no aumento do rácio de Sharpe dos retornos netos quando comparado com o que é frequentemente realizado na literatura, ignorar os custos de transação.

Autores/Ano	Medida de risco	In-sample (Data, periodicidade)	Análise Out of Sample	Metodologia	Tipo de Problema	Custos de Transação	Resultados
Goldberg et al., 2013 [39]	Variância	Não especificado.	Janeiro 1973 - Dezembro 2012	Comparação do desempenho do modelo mínima variância, no qual o <i>turnover</i> se encontra limitado a 5% com a do índice S&P 500	Quadrático	Restrição de <i>turnover</i>	Gráfico dos retornos acumulados e métricas como retorno anualizado, rácio de Sharpe e desvio padrão anualizado indicam que o modelo mínima variância apresenta melhor performance e menor risco.
Tsuchida et al., 2012 [40]	valor médio em risco (average value at risk, AVaR) e Variância	Não especificado.	dados mensais de Dezembro 1979 a Novembro 2009 fornecidos por Wharton Research Data Service, WRDS	Previsão futura através da regressão dos retornos dos ativos em relação a fatores fundamentais de cada empresa seguida da construção de portefólios. Comparam-se duas medidas de risco e quatro formas de previsão. Na construção do portefólio, o <i>turnover</i> é limitado a 8% por mês.	Quadrático	Restrição de <i>turnover</i>	Modelos ARMA-GARCH com distribuição estável fornece melhor previsão dos preços dos ativos do que as distribuições normal e t Student; AVaR é uma melhor medida de risco em relação à variância.
Chow et al., 2016 [16]	variância	Ativos dos EUA retirados de CRSP, e ativos de outros mercados retirados de Datastream, sumando um total de 1000 ativos	Janeiro 1987 a Setembro 2014 e Janeiro 2002 a Setembro 2014.	Estudo do impacto de restrições no modelo mínima variância - <i>turnover</i> limitado a 20%, pesos inferiores a 0,05% alterados para 0%, pesos não podem exceder 5%, etc..	Quadrático	Restrição de <i>turnover</i>	A restrição de <i>turnover</i> reduz de forma eficiente o <i>turnover</i> em todos os mercados, mas o impacto na volatilidade é modesto em relação a outras restrições, com um aumento subtil.

Apêndice B

Mais detalhes do desempenho na amostra

B.1 Análise Out-of-Sample

A figura [B.1a](#) mostra o valor acumulado do portfólio no caso do rebalanceamento ser diário, ou seja, o retorno cumulativo diário com base 100 é igual a $100e^{\sum_{i=1}^T r_i}$, onde r_i representa o retorno logarítmico *out-of-sample* do portfólio no momento t após o rebalanceamento. Podemos concluir que o portfólio Variância Mínima apresenta a pior performance e o que maximiza o Rácio de Sharpe domina os restantes portfólios. Contudo, tal dominância não se verifica durante o segundo semestre de 2019, momento que coincide com o aumento da guerra comercial entre a China e os EUA, elevando a incerteza sobre o crescimento económico dos EUA. [41] O mesmo acontece em março de 2020, devido ao colapso do mercado causado pela pandemia Covid-19. Por conseguinte, o portfólio que maximiza o Rácio de Sharpe parece ter pior desempenho quando se verifica muita incerteza no mercado financeiro.

Esta análise relativa ao valor acumulado do portfólio é semelhante também para rebalanceamentos mensal e semanal.

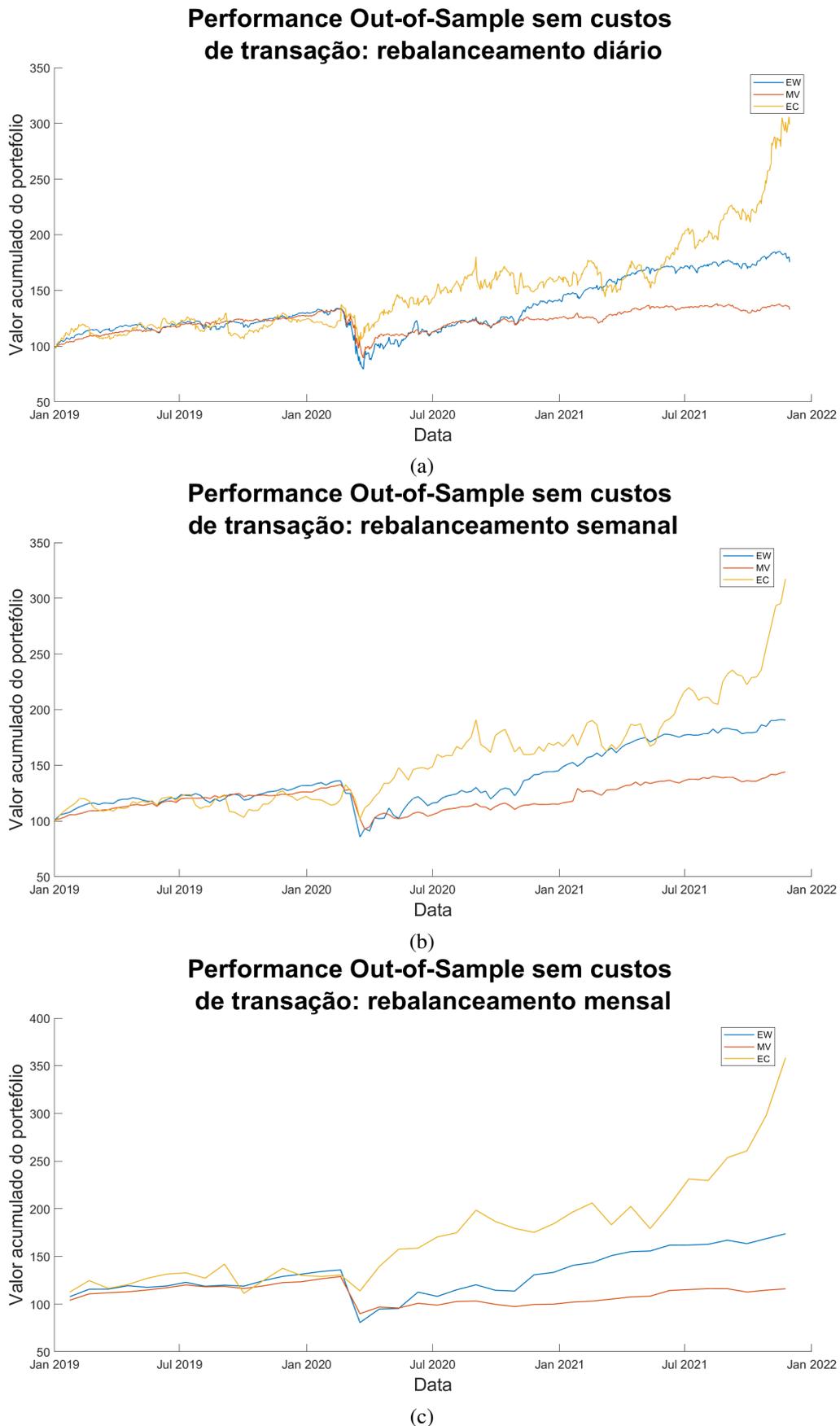


Figura B.1: Retornos acumulados dos portfólios com rebalanceamentos diário, semanal e mensal.

Tabela B.1: Portefólios Variância Mínima (MV) e Equivalente Certo (EC) considerando vários possíveis valores a introduzir na restrição de *turnover*, no período *out-of-sample*.

Frequência	Métrica	Modelo	Turnover máximo											
			0,002	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05	0,075	0,10
Diária	WR (%)	MVRT	56,540	56,948	56,812	57,084	56,676	56,403	56,540	55,586	56,267	55,722	547,684	54,360
		ECRT	53,406	54,496	55,0401	55,995	54,905	55,041	55,177	55,450	55,722	55,722	55,313	54,905
	Tr (%)	MVRT	1,243	1,250	1,260	1,321	1,543	1,578	1,753	2,198	2,248	2,464	2,993	3,777
		ECRT	1,406	1,867	2,089	2,375	2,549	2,678	2,864	3,066	3,336	3,558	4,820	5,585
	AMR (%)	MVRT	11,123	11,347	11,486	11,097	9,434	9,354	9,168	8,368	7,921	8,275	7,020	6,309
		ECRT	25,990	37,530	39,631	39,959	41,041	40,670	40,403	40,942	40,263	40,196	36,984	36,252
	AStd (%)	MVRT	20,411	20,404	20,479	20,455	20,015	19,390	19,340	18,909	18,841	18,894	18,654	18,116
		ECRT	27,555	30,266	31,631	32,736	33,143	33,034	33,142	33,179	33,222	33,213	33,353	33,383
	SR (%)	MVRT	51,530	52,648	53,131	51,296	44,114	45,120	44,277	41,056	38,829	40,598	34,393	31,489
		ECRT	92,123	121,995	123,373	120,209	121,999	121,279	120,077	121,570	119,366	119,198	109,066	106,776
	Sort.R (%)	MVRT	69,663	71,180	71,819	69,282	59,447	60,635	59,154	54,441	51,280	54,122	45,193	41,294
		ECRT	140,175	182,956	182,436	174,752	176,797	174,979	172,741	174,867	171,459	171,095	155,566	152,162
CVaR (%)	MVRT	-6,785	-6,779	-6,803	-6,818	-6,832	-6,685	-6,764	-6,725	-6,745	-6,673	-6,693	-6,538	
	ECRT	-6,527	-6,576	-6,842	-7,324	-7,490	-7,483	-7,557	-7,578	-7,592	-7,591	-7,753	-7,794	
MD (%)	MVRT	-34,471	-34,458	-34,607	-34,951	-35,033	-34,536	-35,023	-34,855	-34,756	-34,376	-34,629	-33,480	
	ECRT	-21,722	-19,757	-20,517	-21,885	-21,703	-22,249	-22,360	-22,634	-22,414	-22,688	-23,971	-24,198	
Semanal	WR (%)	MVRT	65,789	65,789	64,474	65,132	64,474	65,789	66,447	66,447	66,447	65,789	65,132	65,789
		ECRT	57,237	53,289	53,289	55,263	55,921	56,579	57,237	56,579	56,579	56,579	57,237	57,895
	Tr (%)	MVRT	2,952	3,774	3,956	4,160	4,323	4,550	4,719	4,892	5,018	5,185	5,925	6,550
		ECRT	2,628	3,639	4,293	4,707	5,059	5,309	5,664	6,084	6,556	6,857	8,738	10,233
	AMR (%)	MVRT	13,827	13,243	12,729	12,712	12,700	12,416	12,322	12,173	12,355	12,161	12,109	12,230
		ECRT	27,543	28,712	30,756	34,060	38,120	40,642	41,507	42,263	42,068	42,775	41,832	43,077
	AStd (%)	MVRT	15,731	17,432	17,767	17,456	17,187	17,270	17,262	17,148	17,062	17,026	16,737	16,280
		ECRT	25,117	24,110	24,528	25,466	26,400	27,102	27,543	28,124	28,456	28,848	29,793	30,321
	SR (%)	MVRT	82,421	71,027	66,795	67,886	68,881	66,904	66,387	65,960	67,365	66,366	67,197	69,830
		ECRT	106,197	115,473	121,830	130,304	141,059	146,703	147,495	147,137	144,735	145,217	137,452	139,162
	Sort.R (%)	MVRT	107,599	94,771	89,430	90,454	91,419	87,887	86,694	85,977	87,770	86,417	87,012	91,034
		ECRT	168,494	186,522	197,775	213,162	233,207	242,741	242,272	239,792	234,575	234,152	217,174	219,367
CVaR (%)	MVRT	-11,822	-12,075	-12,296	-12,440	-12,474	-12,868	-13,101	-13,135	-13,195	-13,199	-13,268	-12,778	
	ECRT	-10,706	-10,936	-10,890	-10,949	-11,048	-11,326	-11,496	-11,757	-11,935	-11,998	-13,085	-13,486	
MD (%)	MVRT	-26,676	-26,650	-26,725	-26,794	-26,919	-27,336	-27,372	-27,369	-27,283	-27,355	-27,644	-27,335	
	ECRT	-20,109	-19,122	-18,694	-18,439	-18,516	-18,762	-18,878	-19,120	-19,201	-19,294	-19,841	-20,112	
Mensal	WR (%)	MVRT	76,316	78,947	78,947	76,316	78,947	76,316	78,947	78,947	78,947	81,579	78,947	76,316
		ECRT	63,158	63,158	63,158	68,421	65,789	65,789	65,789	65,789	65,789	65,789	63,158	65,789
	Tr (%)	MVRT	6,655	7,278	7,605	8,004	8,349	8,813	9,182	9,443	9,733	10,175	11,585	12,766
		ECRT	4,968	5,488	5,927	6,252	6,602	7,209	7,707	8,317	8,941	9,625	12,083	13,773
	AMR (%)	MVRT	13,335	13,890	13,556	13,410	13,296	13,192	13,004	13,052	12,835	12,800	11,463	11,051
		ECRT	25,268	25,670	25,932	25,996	26,266	26,584	26,949	27,243	27,947	28,472	30,721	33,176
	AStd (%)	MVRT	20,843	20,734	20,554	20,476	20,409	20,375	20,511	20,622	20,923	21,066	21,606	21,703
		ECRT	22,760	23,112	23,375	23,664	23,987	24,294	24,563	24,740	25,043	25,375	27,328	29,751
	SR (%)	MVRT	59,995	62,994	61,927	61,455	61,103	60,695	59,376	59,292	57,398	56,841	49,224	47,103
		ECRT	107,194	107,261	107,197	106,157	105,846	105,811	106,130	106,553	108,065	108,709	109,142	108,503
	Sort.R (%)	MVRT	73,276	77,536	76,321	75,775	75,397	74,872	73,242	73,100	70,742	70,201	60,635	58,161
		ECRT	205,487	207,898	209,028	207,516	207,810	208,383	209,156	211,387	217,147	220,361	223,036	218,975
CVaR (%)	MVRT	-29,745	-29,307	-28,988	-28,845	-28,697	-28,652	-28,805	-28,939	-29,315	-29,396	-30,195	-33,023	
	ECRT	-14,293	-14,390	-14,401	-14,449	-14,497	-14,545	-14,575	-14,529	-14,391	-14,249	-13,656	-13,405	
MD (%)	MVRT	-25,729	-25,403	-25,164	-25,058	-24,947	-24,913	-25,028	-25,128	-25,409	-25,469	-26,062	-26,085	
	ECRT	-16,984	-17,154	-17,180	-17,263	-17,350	-17,438	-17,519	-17,602	-17,776	-17,941	-18,365	-18,101	

Nota: A tabela apresenta as métricas de desempenho para o portfólio MV e para o portfólio EC. Ambos os portfólios possuem uma restrição de *turnover* no modelo de otimização. Utilizam-se dados mensais, posteriormente rebalanceados a essa frequência e são considerados vários *turnovers* máximos. As métricas são: WR-*win rate*; Tr-Turnover; AMR-Retorno médio anualizado; AStd-Desvio padrão anualizado; SR-Rácio Sharpe; Sort.R-Rácio de Sortino; CVaR-Valor em Risco Condicional; MD-Maximum Drawdown.

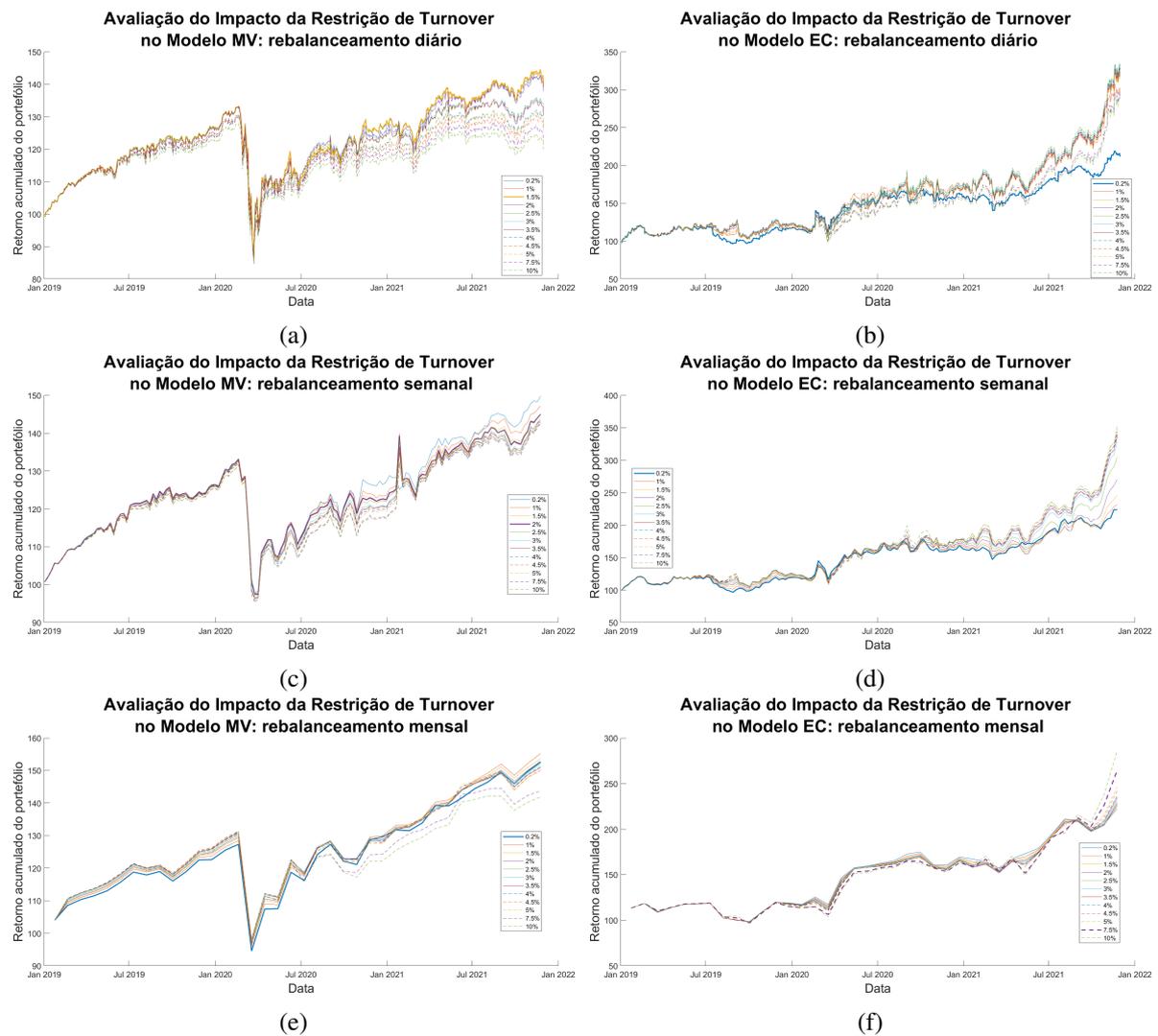


Figura B.2: Avaliação do Impacto da Restrição de *Turnover* nos modelos MV e EC, no período *out-of-sample*.

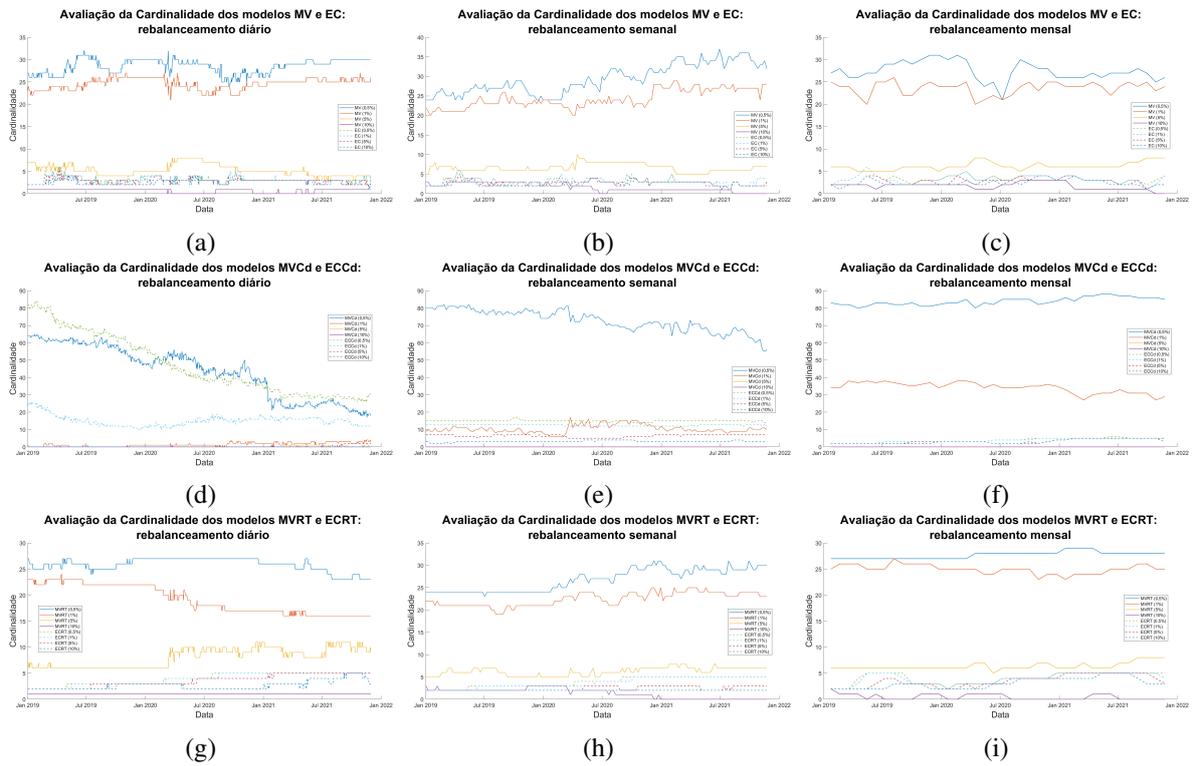


Figura B.3: Avaliação da cardinalidade dos modelos MV, MVCd, MVRT e EC, ECCd e ECRT considerando rebalanceamentos diário, semanal e mensal, no período *out-of-sample*.