

Algoritmos de Localização *Indoor*

Jason Nobre Bolito

Algoritmos de Localização *Indoor*

Jason Nobre Bolito

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**
Área de Especialização em **Computação**

Júri

Presidente: Professor Doutor José Carlos Teixeira
Co-Orientador: Professor Doutor José Luís dos Santos
Co-Orientador: Engenheiro André Ventura Lemos
Vogal: Professor Doutor Pedro Quaresma

Data: junho de 2013

Resumo

Os problemas de localização *indoor* têm tido uma grande importância em diversas áreas, como por exemplo as ciências da saúde, logística, robótica, entre outras. Atendendo à natureza estrutural dos edifícios, as soluções baseadas em tecnologias de localização global não são adequadas para a resolução deste problema.

O tema desta dissertação enquadra-se no estágio proposto pela *onCaring*, consistindo em desenvolver um sistema de localização *indoor* para utentes de instituições de *healthcare*, que será integrado na sua plataforma.

Pretende-se assim fazer uma digressão pelos algoritmos mais usuais encontrados na literatura, nomeadamente algoritmos baseados em trilateração, assim como alguns melhoramentos por nós introduzidos. Neste contexto, serão também estudados modelos de propagação de sinal que irão servir de suporte aos algoritmos desenvolvidos.

Seguidamente, apresentamos uma implementação dos algoritmos descritos e uma análise aos resultados por eles obtidos num contexto real. Finalmente, terminamos com uma indicação de diretrizes para trabalhos futuros.

Palavras Chave: localização *indoor*, modelos de propagação, trilateração

Abstract

Indoor location problems are regarded as an important subject, having a wide array of applications in fields such as healthcare, logistics, robotics, among others. Due to attenuation phenomena induced by building structures, global positioning solutions may fail to provide a correct location estimate in indoor environments.

The topic of this dissertation is inserted in the internship proposed by *onCaring*. The proposal was to develop an indoor location system to be integrated in a software solution for healthcare institutions, employed by users and caregivers alike.

We introduce some of the most popular algorithms used to solve this problem, namely trilateration-based algorithms, as well some original proposed improvements. We also explore some signal propagation models, which shall support the aforementioned algorithms.

We then provide algorithm implementations to obtain results integrated in a real-world context and their respective analysis. Finally, we conclude this dissertation by presenting some guidelines regarding future work in this field.

Keywords: indoor location, propagation models, trilateration

Agradecimentos

Agradeço aos meus co-orientadores, Professor Doutor José Luís dos Santos e Engenheiro André Ventura Lemos, pelo encorajamento constante e disponibilidade que mostraram durante o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço ainda a todos os meus colegas da onCaring pelo ambiente familiar e a oportunidade única de me integrar num projeto de tamanha amplitude e sofisticação.

Reservo um agradecimento muito especial aos meus pais pela compreensão e pelo apoio infindável que me deram ao longo da vida.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra por todas as condições que me foram concedidas ao longo do meu percurso académico.

Conteúdo

1	Descrição do Problema	1
2	Trilateração	5
2.1	Trilateração em \mathbb{R}^2	5
2.2	Escalonamento Uniforme de Distâncias	13
2.3	Trilateração em \mathbb{R}^k	19
3	Modelos de Propagação	21
3.1	Modelo log-distância	22
3.1.1	Distribuição de ε_σ e cobertura de sinal	24
3.2	Correção de sinal	26
4	Algoritmo dos k Vizinhos Mais Próximos	29
4.1	Ausência de Cobertura e Normalização	32
4.2	Filtro de Pareto	33
5	Resultados	39
5.1	Trilateração	39
5.2	Modelos de Propagação	40
5.3	Algoritmo dos k Vizinhos Mais Próximos e Filtro de Pareto	44
6	Trabalho Futuro	49

Capítulo 1

Descrição do Problema

A tecnologia tem vindo a ocupar um lugar cada vez mais importante no tempo presente. A sua evolução tem crescido a um ritmo exponencial, e a sua ubiquidade tem-se revelado inevitável. As tecnologias de localização não são exceção. Até à data presente existe uma variedade de sistemas de localização global implementados, como os sistemas *GPS* e *GLONASS*, e uma vasta gama de sistemas em desenvolvimento, nomeadamente o *Galileo* e o *Compass*.

Contudo, foi apenas no início do século XXI que começou a haver maior ênfase em tecnologias de localização *indoor*, ou seja, tecnologias cujo o objetivo é localizar utilizadores ou objetos dentro de um determinado edifício com uma precisão elevada. As tecnologias de localização global não fornecem geralmente uma localização precisa em ambientes interiores devido à atenuação causada pelos edifícios. Consequentemente, o problema de localização *indoor* não pode ser visto como um caso particular de um problema de localização global, tornando-se num problema crítico.

As tecnologias de localização *indoor* possuem um vasto espetro de aplicações, podendo ser implementadas em áreas críticas, como a saúde e segurança, ou em áreas mais tecnológicas, como a robótica e inteligência artificial, entre outras. É neste contexto que iremos apresentar o problema proposto pela *onCaring*¹.

A *onCaring* é uma empresa *spin-off* da *Critical Health*, responsável pelo desenvolvimento de soluções na área de *healthcare*. O seu produto principal é a plataforma *onAll*, uma solução destinada a prestadores de serviços numa dada instituição de *healthcare*. Todos os utentes monitorizados são equipados com dispositivos *Wi-Fi* de forma a enviar os dados de monitorização para a plataforma. Estes dispositivos possuem um botão de alarme usado pelo utente para pedir auxílio.

O *onAll* integra ferramentas de monitorização com um sistema *RTLS* através de uma interface *web* simples, clara e intuitiva. É nesta interface que o prestador de serviços pode consultar os dados de monitorização de um utente em qualquer altura,

¹© 2013 Bluecaring - Sistemas de Monitorização, S.A.

assim como responder a alarmes por ele desencadeados. Para além desta interface, os prestadores de serviços, também equipados com dispositivos *Wi-Fi*, podem receber e resolver alarmes desencadeados. Assim, a plataforma *onAll*, proporciona um menor tempo de resposta para o auxílio dos utentes da referida instituição.

O *RTLS* integrado no *onAll* é um módulo proprietário fornecido pela *Ekahau*, uma empresa cujo domínio é o desenvolvimento de soluções de localização *indoor*. Este sistema, embora robusto, produz ocasionalmente estimativas incorretas de localização com uma margem de erro considerável. Assim, a *onCaring* propôs o desenvolvimento de um sistema de localização capaz de produzir resultados suficientemente fiáveis de forma a minimizar a utilização do *RTLS* proprietário.

Numa fase inicial, o sistema de localização desenvolvido poderia servir para a localização do prestador de serviços, atendendo a que apenas é necessária uma localização com uma precisão a *nível de ala*. Numa fase posterior, o sistema de localização poderá ser melhorado para conseguir uma precisão a *nível de quarto* para o utente.

O sistema de localização proposto consiste numa aplicação cliente-servidor. Esta aplicação determina uma estimativa da localização do utente ou prestador de serviço, daqui em diante designado por *recetor*. Esta estimativa é determinada através de informações sobre dispositivos *wireless*, daqui em diante designados por *emissores*, que operam sobre o meio *WLAN*. O meio *wireless* adotado foi o *Wi-Fi*, pela sua popularidade e onnipresença na maior parte das infra-estruturas. Uma alternativa a considerar seria o *ZigBee* devido ao seu baixo consumo e baixa latência.

O sistema de localização foi desenvolvido em *Java*, para poder ser integrado com o resto da plataforma, que foi escrita na mesma linguagem. Apesar da sua verbosidade, *Java* oferece uma excelente arquitetura orientada a objetos, em particular para implementar *design patterns*, como apresentados em [ERRJ95]. Outro fator decisivo nesta escolha foi a abstração de programação cliente-servidor através de *sockets*.

Para desenvolver uma boa arquitetura cliente-servidor é necessário aplicar metodologias de programação concorrente. A aplicação de conceitos apresentados em [GP06] como *imutabilidade*, classes *thread-safe* e *thread pools* permite obter um bom compromisso entre concorrência e simplicidade da solução implementada. Combinando estes fatores com uma boa documentação contribuímos para um aumento de extensibilidade e concisão da implementação.

A plataforma escolhida para os recetores foi o *Android*. Para além do facto deste *framework* estar implementado em *Java*, os dispositivos *Android* fornecem uma

interface mais intuitiva e elegante para o utilizador. Contudo, a plataforma *Android* possui a desvantagem de efetuar uma truncatura para leituras do sinal *Wi-Fi* com uma potência superior a -39dBm . Consequentemente, os modelos que se apresentam são enviesados para potências superiores ao valor anterior.

Nos capítulos que se seguem faremos uma digressão pelas abordagens mais comuns ao problema de localização. Estudaremos cada abordagem de um ponto de vista formal e conciso. O próximo capítulo apresenta uma classe de abordagens mais geométricas, tendo como base um processo designado por *trilateração*.

Posteriormente, exploraremos *modelos de propagação* que estabelecem a equivalência entre um problema físico e o respetivo problema geométrico. No quarto capítulo usaremos a equivalência anterior para formular o algoritmo dos k vizinhos mais próximos. Os restantes capítulos são dedicados à apresentação de resultados e trabalho futuro.

Capítulo 2

Trilateração

Neste capítulo, suporemos que é conhecida a localização de $n \geq 3$ emissores¹, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ e as respectivas distâncias ao recetor, r_1, r_2, \dots, r_n . Começaremos por formular este problema em \mathbb{R}^2 , uma vez que toda a teoria subjacente, assim como os algoritmos apresentados, podem ser visualizados de uma forma mais clara e intuitiva a duas dimensões.

2.1. Trilateração em \mathbb{R}^2

Suponhamos que os pontos de referência não são colineares. Queremos determinar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{x}\|^2 = r_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{T})$$

onde $\|\cdot\|$ designa a norma euclidiana habitual. Podemos resolver este problema usando um algoritmo geométrico designado por *trilateração*. O sistema anterior representa a interseção de n circunferências de centros \mathbf{p}_i e raios r_i , respetivamente.

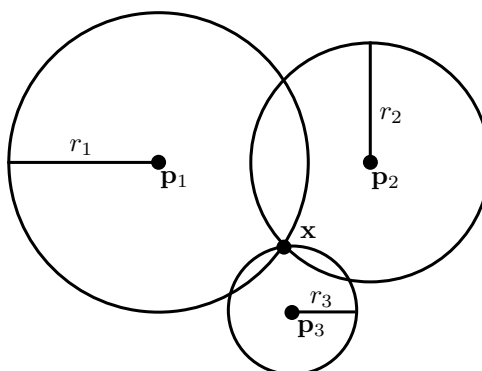


Figura 2.1: Ilustração do problema (T), com $n = 3$.

Inicialmente, iremos admitir que não há erros na medição das distâncias aos emissores, para que o sistema (T) tenha sempre solução, sendo apenas necessário

¹Estes pontos também são designados por *pontos de referência*.

estudar a unicidade. Iremos ver que para $n \geq 3$ existe apenas uma solução para o problema de trilateração.

Proposição 2.1. *Para $n \geq 3$, se as distâncias fornecidas forem exatas, o problema (T) tem solução única em \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Uma vez que as distâncias aos recetores são exatas, o problema tem solução. Suponhamos que existem pontos \mathbf{z}_1 e \mathbf{z}_2 , distintos, que satisfazem o problema (T). Então temos,

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{z}_1\| = r_i = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{z}_2\|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ são colineares, pois encontram-se sobre a mediatriz do segmento definido por \mathbf{z}_1 e \mathbf{z}_2 , conduzindo-nos assim a uma contradição. Consequentemente temos $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$, como pretendido. \square

Provada a unicidade da solução de (T), resta-nos determinar uma expressão para \mathbf{x} . Note-se que é apenas necessário estudar o problema para $n = 3$. No caso em que $n > 3$, podemos obter um subsistema de três equações, (T'), cujos respetivos pontos de referência são não colineares. Atendendo à unicidade das soluções de ambos os problemas, a solução de (T') vai ser claramente a solução de (T).

Com o fim de simplificar os cálculos, comecemos por estudar o caso em que \mathbf{p}_1 está sobre a origem e \mathbf{p}_2 está sobre o eixo $0x$. Iremos ver posteriormente que qualquer outro sistema com três pontos de referência pode ser reduzido a este caso.

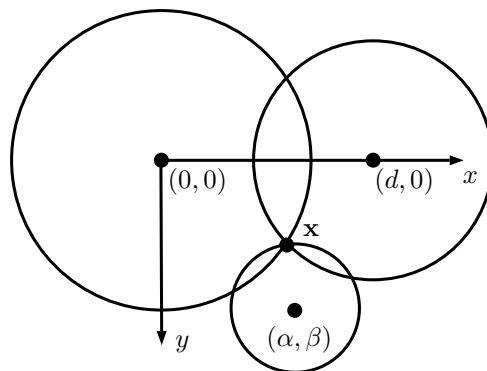


Figura 2.2: Ilustração do problema (T), com $n = 3$ (caso base).

Proposição 2.2. *Perante as condições anteriores, isto é, se $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0]^T$, $\mathbf{p}_2 = [d \ 0]^T$ e $\mathbf{p}_3 = [\alpha \ \beta]^T$ forem não colineares, então o ponto*

$$\mathbf{x} = \left[\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}, \frac{r_1^2 - r_3^2 + \alpha^2 + \beta^2}{2\beta} - \frac{\alpha(r_1^2 - r_2^2 + d^2)}{2d\beta} \right]^T$$

é a solução de (T), com $n = 3$.

Demonstração. Seja $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$. Por hipótese, o problema (T) reduz-se ao sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = r_1^2 \\ (x_1 - d)^2 + x_2^2 = r_2^2 \\ (x_1 - \alpha)^2 + (x_2 - \beta)^2 = r_3^2 \end{cases} .$$

Começemos por observar que d e β não podem ser nulos, senão \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 e \mathbf{p}_3 seriam colineares. Ao subtrair a primeira equação pela segunda obtemos

$$2x_1d - d^2 = r_1^2 - r_2^2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Por fim, subtraindo a primeira equação pela terceira vem

$$2\alpha x_1 + 2\beta x_2 - \alpha^2 - \beta^2 = r_1^2 - r_3^2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{r_1^2 - r_3^2 + \alpha^2 + \beta^2}{2\beta} - \frac{\alpha}{\beta}x_1,$$

estabelecendo a expressão no enunciado. \square

Estamos em condições para resolver (T), para $n = 3$, onde os pontos de referência não estão necessariamente nas condições da proposição anterior. Para isso, consideremos a base canônica de \mathbb{R}^2 , \mathcal{B} , e designemos por \mathcal{B}' a base constituída por

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\|}, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 - \alpha\hat{\mathbf{e}}_1}{\|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 - \alpha\hat{\mathbf{e}}_1\|},$$

onde α é a projeção ortogonal de $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ sobre $\hat{\mathbf{e}}_1$. Seja \mathbf{Q} a matriz de mudança de base de \mathcal{B} para \mathcal{B}' e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(\mathbf{p}) = \mathbf{Q}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1).$$

Mostremos que T é uma isometria de \mathbb{R}^2 . Repare-se que \mathcal{B}' é uma base ortonormada em relação ao produto interno usual, logo \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal. Conseqüentemente, a aplicação $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{Q}\mathbf{p}$ é uma isometria. Por outro lado, a translação $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p} - \mathbf{p}_1$ também é trivialmente uma isometria. Por fim, T é uma isometria pois é a composição das isometrias anteriores.

O próximo resultado indica como podemos aplicar T de forma a reduzir o problema (T) a um problema equivalente que se encontra nas condições da proposição 2.2.

Proposição 2.3. *Seja (T') o problema auxiliar*

$$\begin{cases} \|T(\mathbf{p}_1) - \mathbf{y}\|^2 = r_1^2 \\ \|T(\mathbf{p}_2) - \mathbf{y}\|^2 = r_2^2 \\ \|T(\mathbf{p}_3) - \mathbf{y}\|^2 = r_3^2 \end{cases} . \quad (\text{T}')$$

Os problemas (T) e (T') são equivalentes.

Demonstração. Note-se que como T é uma isometria é invertível, sendo a sua inversa, T^{-1} , também uma isometria. Mostremos que os problemas são equivalentes.

Suponhamos que \mathbf{y} é solução de (T') e façamos $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{y})$. Verifica-se claramente que \mathbf{x} é solução de (T) por T^{-1} ser uma isometria. O recíproco prova-se analogamente, fazendo $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$. \square

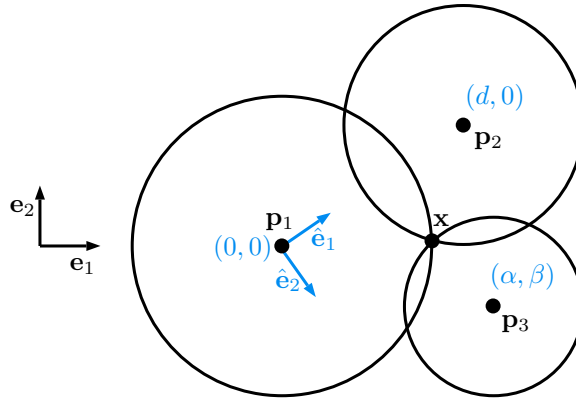


Figura 2.3: Ilustração da aplicação de T aos pontos de referência.

As proposições anteriores mostram que a trilateração resolve o problema de localização, ou seja, podemos localizar qualquer ponto do plano conhecendo apenas as distâncias a pelo menos três emissores. Mais formalmente, a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\longmapsto \left[\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{x}\|^2, \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{x}\|^2, \|\mathbf{p}_3 - \mathbf{x}\|^2 \right]^T \end{aligned}$$

é injetiva, atendendo à unicidade da solução do problema de trilateração. Assim, se restringirmos φ à sua imagem, obtemos uma bijeção $\tilde{\varphi}$.

Isto sugere que podemos ver $\tilde{\varphi}$ como uma *mudança de coordenadas*. O próximo resultado mostra que esta mudança de coordenadas define um atlas C^∞ . Portanto $\varphi(\mathbb{R}^2)$ tem uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão dois. Veremos também que esta variedade pode ser mergulhada² em \mathbb{R}^3 .

Lema 2.4. *Consideremos \mathbb{R}^2 com a topologia usual e $\varphi(\mathbb{R}^2)$ como subespaço topológico de \mathbb{R}^3 . Então a aplicação*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \varphi(\mathbb{R}^2) \\ \mathbf{x} &\longmapsto \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

²Um mergulho é uma aplicação C^∞ injetiva, cuja aplicação linear induzida em cada ponto é também injetiva.

é um homeomorfismo, portanto $(\varphi(\mathbb{R}^2), \tilde{\varphi}^{-1})$ é uma variedade diferenciável de dimensão dois.

Demonstração. A bijetividade de $\tilde{\varphi}$ é imediata, pois φ é injetiva e $\tilde{\varphi}(\mathbb{R}^2) = \varphi(\mathbb{R}^2)$. Como as componentes de φ são C^∞ , $\tilde{\varphi}$ é claramente C^∞ , em particular contínua.

Resta mostrar que $\tilde{\varphi}^{-1}$ é contínua. Note-se que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ é o conjunto

$$\left\{ [z_1 \ z_2 \ z_3]^\top \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : (T) \text{ tem solução} \right\},$$

onde $r_i = \sqrt{z_i}$. Naturalmente, a inversa $\tilde{\varphi}^{-1}$ será dada pela aplicação que, a cada terno de $\varphi(\mathbb{R}^2)$, faz corresponder a solução, única, do respetivo problema de trilateração, ou seja,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{-1} : \varphi(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ [z_1 \ z_2 \ z_3]^\top &\longmapsto T^{-1} \circ f(z_1, z_2, z_3), \end{aligned}$$

onde

$$f(z_1, z_2, z_3) = \left[\frac{z_1 - z_2 + d^2}{2d}, \frac{z_1 - z_3 + \alpha^2 + \beta^2}{2\beta} - \frac{\alpha(z_1 - z_2 + d^2)}{2d\beta} \right]^\top,$$

segundo a notação das proposições anteriores. A isometria T é claramente um difeomorfismo de \mathbb{R}^3 , sendo a composição de uma rotação por uma translação. Por outro lado, f é C^∞ pois as suas componentes são polinómios em z_1, z_2 e z_3 . A composição de duas aplicações C^∞ é também C^∞ , logo $\tilde{\varphi}^{-1}$ é C^∞ , em particular contínua. \square

Teorema 2.5. *A aplicação φ é um mergulho e $\varphi(\mathbb{R}^2)$ é uma subvariedade regular de \mathbb{R}^3 .*

Demonstração. Para mostrar que φ é um mergulho precisamos apenas de provar que, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, a aplicação linear induzida por φ em \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \varphi_{*\mathbf{x}} : T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{\varphi(\mathbf{x})}\mathbb{R}^3 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}} &\longmapsto \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right)_{\varphi(\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

é injetiva.

Repare-se que a matriz de $\varphi_{*\mathbf{x}}$ é a matriz jacobiana de φ em \mathbf{x} , $D_{\mathbf{x}}\varphi$. Portanto, apenas temos de verificar que $D_{\mathbf{x}}\varphi$ tem característica dois. Atendendo a que T é um difeomorfismo, podemos supor sem perda de generalidade que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ e \mathbf{p}_3 estão nas

Algoritmo 2.1 Algoritmo de Trilateração em \mathbb{R}^2 para o problema (T).

```

1: função LOCALIZAR( $(\mathbf{p}_1, r_1), (\mathbf{p}_2, r_2), \dots, (\mathbf{p}_n, r_n)$ )
2:   sejam  $\{(\mathbf{p}_i, r_i)\}_{i=1,2,3}$  os 3 emissores não colineares mais próximos.
3:    $d \leftarrow \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\|$ 
4:    $\hat{\mathbf{e}}_1 \leftarrow (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) / d$ 
5:    $\alpha \leftarrow (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^\top \hat{\mathbf{e}}_1$ 
6:    $\hat{\mathbf{e}}_2 \leftarrow (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 - \alpha \hat{\mathbf{e}}_1) / \|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 - \alpha \hat{\mathbf{e}}_1\|$ 
7:    $\mathbf{Q} \leftarrow \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{e}}_1^\top \\ -\hat{\mathbf{e}}_2^\top \end{bmatrix}$ 
8:   para  $i \leftarrow 1$  até 3 faça
9:      $\mathbf{p}_i^* \leftarrow \mathbf{Q} (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_1)$ 
10:  fim para
11:   $x_1^* \leftarrow (r_1^2 - r_2^2 + d^2) / 2d$ 
12:   $x_2^* \leftarrow (r_1^2 - r_3^2 + \alpha^2 + \beta^2) / 2\beta - \alpha x_1^* / \beta$ 
13:   $\mathbf{x}^* \leftarrow [x_1^* \ x_2^*]^\top$ 
14:   $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{Q}^\top \mathbf{x}^* + \mathbf{p}_1$ 
15:  devolve  $\mathbf{x}$ 
16: fim função

```

Pré-cond.: $n \geq 3$ e existência de solução para (T).

Pós-cond.: \mathbf{x} verifica (T).

A vantagem deste método é a sua eficiência pelo facto de obtermos uma fórmula exata para \mathbf{x} . A componente do algoritmo que tem maior esforço computacional é a seleção dos emissores não colineares mais próximos, podendo ter uma complexidade de $\mathcal{O}(n)$, onde n designa o número de emissores.

Contudo, este procedimento, tal como está, não apresenta robustez devido à pré-condição de (T) ter solução. Em geral, isto não se verifica na prática, atendendo à existência de erros na medição das distâncias aos emissores. Por este motivo, de agora em diante, r_i designará a *distância medida* ao emissor i em contraste com a *distância real* entres os mesmos.

Para contornar este obstáculo, a próxima abordagem que iremos tomar consiste em estabelecer uma aproximação intuitiva à localização real do recetor. Já vimos que o problema pode ser interpretado como a interseção de 3 circunferências. Contudo, se apenas duas se intersectam, podemos obter até duas estimativas distintas. Neste caso, aproximamos a localização do recetor pela localização da estimativa mais próxima

da terceira circunferência.

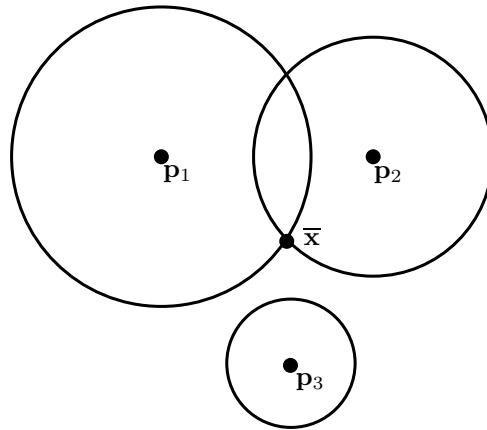


Figura 2.5: Exemplo de aproximação de \mathbf{x} num caso em que (T) não tem solução.

Generalizemos este raciocínio para qualquer configuração não colinear de três emissores. Designemos por C_i a circunferência de centro \mathbf{p}_i e raio r_i , que representa o conjunto solução de cada equação de (T) isoladamente.

Para $1 \leq i < j \leq 3$, tal que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$, consideremos $k = 6 - i - j$ (que representará o índice da circunferência diferente de C_i e C_j) e defina-se

$$d(\mathbf{x}, C_k) = \min_{\mathbf{y} \in C_k} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |r_k - \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_k\||,$$

$$\mathbf{x}_{i,j} = \arg \min_{\mathbf{x} \in C_i \cap C_j} d(\mathbf{x}, C_k).$$

Note-se que $\mathbf{x}_{i,j}$ é o ponto de $C_i \cap C_j$ mais próximo de C_k . Por fim, definimos a aproximação da localização do recetor pela média

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{|S|} \sum_{\mathbf{x} \in S} \mathbf{x}, \text{ onde } S = \{\mathbf{x}_{i,j} : 1 \leq i < j \leq 3, C_i \cap C_j \neq \emptyset\}.$$

Esta aproximação pode ser vista como uma generalização do algoritmo anterior, pois se tivermos $\mathbf{x} \in C_1 \cap C_2 \cap C_3$, vem trivialmente $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$. Esta abordagem é significativamente mais robusta do que a anterior pelo facto de $\bar{\mathbf{x}}$ ser uma média de soluções de subsistemas, permitindo-nos estabelecer a condição

$$\bar{\mathbf{x}} \in \left[\min_{\mathbf{x} \in S} \pi_1(\mathbf{x}), \max_{\mathbf{x} \in S} \pi_1(\mathbf{x}) \right] \times \left[\min_{\mathbf{x} \in S} \pi_2(\mathbf{x}), \max_{\mathbf{x} \in S} \pi_2(\mathbf{x}) \right],$$

onde π_1 e π_2 designam as projecções habituais de \mathbb{R}^2 . Com estas considerações, podemos formular um novo algoritmo.

Algoritmo 2.2 Algoritmo de Trilateração em \mathbb{R}^2 modificado para (T).

```

1: função LOCALIZAR( $(\mathbf{p}_1, r_1), (\mathbf{p}_2, r_2), \dots, (\mathbf{p}_n, r_n)$ )
2:   sejam  $\{(\mathbf{p}_i, r_i)\}_{i=1,2,3}$  os 3 emissores não colineares mais próximos.
3:    $N \leftarrow 0$ 
4:    $\bar{\mathbf{x}} \leftarrow [0 \ 0]^T$ 
5:   para  $j \leftarrow 2$  até 3 faça
6:     para  $i \leftarrow 1$  até  $j - 1$  faça
7:       se  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$  então
8:          $k \leftarrow 6 - i - j$ 
9:          $\bar{\mathbf{x}} \leftarrow \bar{\mathbf{x}} + \arg \min_{\mathbf{x} \in C_i \cap C_j} |r_k - \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_k\||$ 
10:         $N \leftarrow N + 1$ 
11:      fim se
12:    fim para
13:  fim para
14:  devolve  $\bar{\mathbf{x}}/N$ 
15: fim função

```

Pré-cond.: Nos três emissores mais próximos, existe $i \neq j$ tais que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$.

Pós-cond.: $\bar{\mathbf{x}} \in \left[\min_{\mathbf{x} \in S} \pi_1(\mathbf{x}), \max_{\mathbf{x} \in S} \pi_1(\mathbf{x}) \right] \times \left[\min_{\mathbf{x} \in S} \pi_2(\mathbf{x}), \max_{\mathbf{x} \in S} \pi_2(\mathbf{x}) \right]$.

2.2. Escalonamento Uniforme de Distâncias

Na secção anterior introduzimos uma abordagem robusta que produz uma estimativa \mathbf{x} no caso em que (T) não tem solução. Contudo não é aplicável quando nenhum par de circunferências se interseccionam. Uma abordagem possível para o problema seria, em tais casos, considerar uma média ponderada das localizações dos emissores, cujos pesos são dados pelos inversos das distâncias. Porém, podemos obter resultados incorretos se o recetor a localizar não se encontrar no polígono definido pelos pontos de referência.

A nossa abordagem consiste em supor que os emissores foram igualmente perturbados e tentar inverter este processo de forma a poder aplicar o algoritmo 2.2. Por outras palavras, dado o problema (T), iremos supor que

$$\rho_i \approx \alpha r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

onde α é um escalar positivo e ρ_i designa a distância real entre o recetor e o emissor

i. Uma vez determinado α , apenas temos de resolver o problema

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_\alpha\|^2 = \alpha^2 r_i^2 \approx \rho_i^2 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{T}_\alpha)$$

Designamos esta abordagem por *escalonamento uniforme de distâncias* onde α é o *fator de correção* para (T).

Repare-se que o problema estudado no início do capítulo corresponde ao caso em que α toma o valor 1. Consequentemente, dados vários candidatos para α , é natural escolher o mais próximo de 1, sendo este o que menos perturba o sistema.

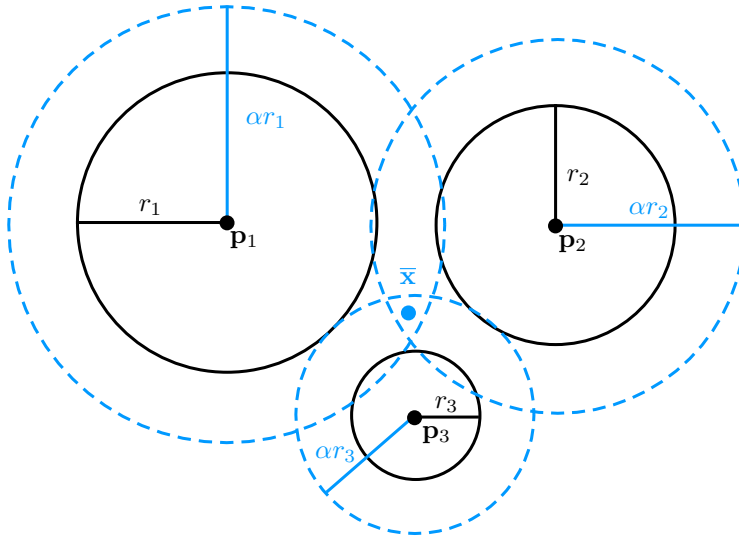


Figura 2.6: Ilustração do método de escalonamento uniforme de distâncias.

Uma abordagem para determinar o fator de correção consiste em resolver o sistema (T_α) e escolher α tal que $\mathbf{x}_\alpha \in \mathbb{R}^2$. Contudo, este processo pode revelar-se tedioso devido à natureza quadrática de α na fórmula de \mathbf{x}_α .

A próxima proposição estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de interseções de duas circunferências. Desta forma, podemos determinar α sem recorrer à expressão explícita de \mathbf{x}_α .

Proposição 2.6. *Seja $d = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|$. O sistema*

$$\begin{cases} \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{x}\|^2 = r_1^2 \\ \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{x}\|^2 = r_2^2 \end{cases},$$

tem solução se e só se $|r_2 - d| \leq r_1 \leq r_2 + d$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideremos o caso em que $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0]^T$

e $\mathbf{p}_2 = [d \ 0]^T$,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x - d)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}, \quad d = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|.$$

As soluções deste sistema são dadas por

$$\begin{cases} x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \\ y = \pm \sqrt{r_1^2 - x^2} \end{cases}.$$

A solução anterior apenas está definida se $r_1^2 - x^2$ for não negativo, logo os fatores $r_1 - x$ e $r_1 + x$ têm o mesmo sinal. Estudemos o caso em que ambos os fatores são não negativos. De $r_1 - x \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} r_1 - \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \geq 0 &\Leftrightarrow r_1^2 - 2dr_1 + d^2 - r_2^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (r_1 - d)^2 - r_2^2 \leq 0 &\Leftrightarrow (r_1 - d + r_2)(r_1 - d - r_2) \leq 0. \end{aligned}$$

Da desigualdade anterior verifica-se que os fatores $r_1 - d + r_2$ e $r_1 - d - r_2$ têm sinais opostos. Se tivermos $r_1 - d + r_2 \geq 0$ e $r_1 - d - r_2 \leq 0$, obtemos a condição

$$d - r_1 \leq r_2 \wedge r_1 \leq d + r_2. \quad (2.1)$$

Por outro lado $r_1 + x \geq 0$, logo

$$(r_1 + d)^2 - r_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow (r_1 + d - r_2)(r_1 + d + r_2) \geq 0.$$

Como $r_1 + d + r_2$ é positivo, o fator $r_1 + d - r_2$ é não negativo, tendo-se

$$r_2 \leq r_1 + d. \quad (2.2)$$

Finalmente, conjugando (2.1) com (2.2), obtemos $|r_2 - d| \leq r_1 \leq r_2 + d$ como pretendido. A prova é imediata nos restantes casos. \square

Com esta proposição estamos em condições de formular o método de escalonamento uniforme de distâncias. O nosso objetivo é determinar α tal que qualquer par de equações de (T_α) tenha solução. Atendendo à proposição anterior, tal situação ocorre quando o sistema

$$|\alpha r_j - d_{i,j}| \leq \alpha r_i \leq \alpha r_j + d_{i,j}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (E)$$

onde $d_{i,j} = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$, tem solução. Fixemos $i < j$ e suponhamos que $r_i < r_j$. Como $|\alpha r_j - d_{i,j}| \leq \alpha r_i$, temos

$$d_{i,j} - \alpha r_i \leq \alpha r_j \leq d_{i,j} + \alpha r_i \Leftrightarrow \frac{d_{i,j}}{r_i + r_j} \leq \alpha \leq \frac{d_{i,j}}{r_j - r_i}.$$

Analogamente para $r_i > r_j$, vem

$$\frac{d_{i,j}}{r_i + r_j} \leq \alpha \leq \frac{d_{i,j}}{r_i - r_j}.$$

Conjugando ambas as desigualdade, obtemos

$$\frac{d_{i,j}}{r_i + r_j} \leq \alpha \leq \frac{d_{i,j}}{|r_i - r_j|},$$

para $r_i \neq r_j$. Se $r_i = r_j$ vem apenas

$$\frac{d_{i,j}}{r_i + r_j} \leq \alpha.$$

Consequentemente, podemos afirmar que α verifica (E) se e só se

$$\alpha_1 = \max_{i < j} \frac{d_{i,j}}{r_i + r_j} \leq \alpha \leq \min_{\substack{i < j \\ r_i \neq r_j}} \frac{d_{i,j}}{|r_i - r_j|} = \alpha_2. \quad (2.3)$$

Por convenção, admitiremos $\alpha_2 = +\infty$ no caso de todos os r_i serem coincidentes. A construção anterior permite estabelecer os seguintes resultados.

Proposição 2.7. *O problema (E) tem solução se e só se $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Estas soluções são dadas pelo intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$, onde*

$$\alpha_1 = \max_{i < j} \frac{d_{i,j}}{r_i + r_j}, \alpha_2 = \min_{\substack{i < j \\ r_i \neq r_j}} \frac{d_{i,j}}{|r_i - r_j|}.$$

Corolário 2.8. *Para $n = 2$, o problema (E) tem sempre solução.*

O intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ pode conter uma infinidade de escolhas para o fator de correção, α . Um candidato natural consiste na estimativa que menos perturba o sistema inicial,

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} |1 - \alpha|.$$

Outra abordagem possível para escolher $\hat{\alpha}$ consiste em supor que as perturbações são de cariz aleatório e têm uma distribuição uniforme no intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$. Neste caso, definimos α como a média

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Note-se que a primeira abordagem generaliza o caso em que $\alpha = 1$, ou seja, quando $\rho_i \approx r_i$. Já a abordagem empírica é mais restritiva porque temos de ter $\alpha_2 < \infty$, em contraste com a abordagem $\arg \min$ que não é afetada por esta restrição. Portanto,

a primeira aproximação deve ser usada quando a perturbação esperada é pequena, enquanto que a segunda é mais apropriada para perturbações aleatórias.

As distâncias presentes nas expressões de α_1 e α_2 permitem constatar que a existência de soluções de (E) depende claramente da configuração topológica dos emissores. O próximo corolário mostra como podemos eliminar esta dependência quando temos apenas três emissores, mediante certas topologias. Posteriormente, veremos como aplicar este princípio quando $n > 3$.

Corolário 2.9. *Seja $n = 3$ e $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l\|$, para $1 \leq i < j \leq n$ e $1 \leq k < l \leq n$. Então (E) tem solução se e só se*

$$\max_{i < j} |r_i - r_j| \leq \min_{i < j} r_i + r_j$$

Demonstração. Seja $d = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|$ que, por hipótese, coincide com $d_{i,j}$ para $1 \leq i < j \leq n$. Pela proposição 2.7, (E) ter solução é equivalente a

$$d \max_{i < j} \frac{1}{r_i + r_j} \leq d \min_{\substack{i < j \\ r_i \neq r_j}} \frac{1}{|r_i - r_j|},$$

logo se existir $r_i \neq r_j$, temos

$$\max_{\substack{i < j \\ r_i \neq r_j}} |r_i - r_j| \leq \min_{i < j} r_i + r_j.$$

Por outro lado, se r_1, r_2 e r_3 coincidirem, (E) tem sempre solução. Portanto, podemos escrever

$$\max_{i < j} |r_i - r_j| \leq \min_{i < j} r_i + r_j,$$

como pretendido. □

Sintetizamos o método de escalonamento uniforme de distâncias através do algoritmo que se segue.

Algoritmo 2.3 Algoritmo de Escalonamento Uniforme de Distâncias.

```

1: função EUD( $(\mathbf{p}_1, r_1), (\mathbf{p}_2, r_2), \dots, (\mathbf{p}_n, r_n)$ )
2:    $\alpha_1 \leftarrow 0$ 
3:    $\alpha_2 \leftarrow \infty$ 
4:   para  $j \leftarrow 2$  até  $n$  faça
5:     para  $i \leftarrow 1$  até  $j - 1$  faça
6:        $d \leftarrow \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$ 
7:        $\alpha_1 \leftarrow \max\{\alpha_1, d/(r_i + r_j)\}$ 
8:        $\Delta r \leftarrow |r_i - r_j|$ 
9:       se  $\Delta r > 0$  então
10:         $\alpha_2 \leftarrow \min\{\alpha_2, d/\Delta r\}$ 
11:      fim se
12:    fim para
13:  fim para
14:  seja  $\hat{\alpha}$  uma das estimativas apresentadas (arg min ou uniforme)
15:  devolve  $\hat{\alpha}$ 
16: fim função

```

Pré-cond.: $\alpha_1 \leq \alpha_2$ (e $\alpha_2 \neq \infty$, se $\hat{\alpha}$ for a estimativa uniforme).

Pós-cond.: $\hat{\alpha} \in [\alpha_1, \alpha_2]$ verifica (E) (minimiza a perturbação se for a est. arg min).

Referimos anteriormente que iríamos aplicar o corolário 2.9 num contexto mais geral onde $n > 3$. Recorde-se que os algoritmos de trilateração apresentados nunca usam os n pontos de referência no cálculo explícito da localização. Reduzimos (T) ao caso $n = 3$, escolhendo os três emissores não colineares mais próximos do recetor. Para este novo problema estar nas condições do corolário 2.9, as distâncias entre cada par de emissores têm de coincidir.

Com este fim, propomos que os n emissores originais estejam distribuídos numa malha de triângulos equiláteros, como indicado na figura 2.7.

Esta topologia deve ser implementada de forma a maximizar a área ocupada pelos triângulos no mapa. Desta forma, maximizamos a probabilidade do recetor se encontrar no interior de um dos triângulos da malha. Consequentemente, conseguimos aplicar o corolário 2.9 de forma a enfraquecer a pré-condição exigida no algoritmo 2.3.

Note-se que em situações onde o EUD não é aplicável nos três emissores mais próximos, recorreremos à aplicação do mesmo método aos dois emissores mais próximos

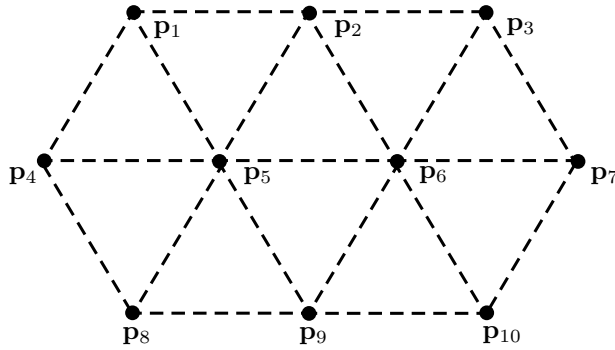


Figura 2.7: Exemplo de uma topologia recomendada para aplicar o corolário 2.9.

de forma a garantir um fator de correção. Isto é sempre possível pois, para $n = 2$, o sistema (E) tem solução.

2.3. Trilateração em \mathbb{R}^k

Como foi mencionado anteriormente, o algoritmo para a trilateração em \mathbb{R}^k pode ser obtido de forma análoga ao algoritmo para a trilateração em \mathbb{R}^2 , generalizando as proposições anteriores.

Neste caso, queremos determinar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{x}\|^2 = r_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (T_k)$$

Proposição 2.10. Para $n \geq k + 1$, se as distâncias fornecidas forem exatas e os pontos de referência não estiverem contidos no mesmo hiperplano, o problema (T) tem solução única em \mathbb{R}^k .

Proposição 2.11. Suponhamos que, para $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{p}_i = [p_{i,1} \ p_{i,2} \ \dots \ p_{i,i-1} \ 0 \ \dots \ 0]^T,$$

com $p_{i,i-1} > 0$. Seja $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k]^T$, onde

$$x_i = \frac{r_1^2 - r_{i+1}^2 + \|\mathbf{p}_{i+1}\|^2}{2p_{i+1,i}} - \frac{\mathbf{y}_i^T \mathbf{p}_{i+1}}{p_{i+1,i}},$$

$$\mathbf{y}_i = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{i-1} \ 0 \ \dots \ 0]^T, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Então \mathbf{x} é a solução de (T_k) , com $n = k + 1$.

Repare-se que quando $n = k + 1$, o conjunto

$$\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_1\}$$

define uma base de \mathbb{R}^k , uma vez que os pontos de referência não pertencem ao mesmo hiperplano. Seja \mathcal{B} a base canônica, \mathcal{B}' a base obtida aplicando Gram-Schmidt a \mathcal{B}_0 e consideremos a matriz de mudança de base de \mathcal{B} para \mathcal{B}' , \mathbf{Q} . Podemos definir a isometria T analogamente ao caso bidimensional e generalizar a proposição 2.3.

Proposição 2.12. *Seja (T'_k) o problema auxiliar*

$$\|T(\mathbf{p}_i) - \mathbf{y}\|^2 = r_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, k + 1. \quad (T'_k)$$

Os problemas (T_k) e (T'_k) são equivalentes.

Por fim, tal como no caso bidimensional, é possível mergulhar o espaço das distâncias que resolvem (T_k) em \mathbb{R}^{k+1} de forma a obter uma subvariedade regular.

Teorema 2.13. *A aplicação diferenciável*

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^{k+1} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \left[\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{x}\|^2, \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{x}\|^2, \dots, \|\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{x}\|^2 \right]^T \end{aligned}$$

é um mergulho e $\varphi(\mathbb{R}^k)$ é uma subvariedade regular de \mathbb{R}^{k+1} .

Capítulo 3

Modelos de Propagação

No capítulo anterior estudámos a trilateração como uma solução para o problema de localização *indoor*, admitindo que as distâncias medidas entre os emissores e o recetor eram conhecidas. Na maior parte dos casos, estas distâncias não são fornecidas diretamente pelo emissor. Contudo, o recetor consegue determinar a potência do sinal emitido de cada um dos emissores.

A unidade de potência habitualmente usada em telecomunicações é o dBm. Em contraste com o watt, o dBm é uma unidade logarítmica que permite expressar potências de elevada magnitude de uma forma mais compacta. A fórmula de conversão de watts para dBm é dada por

$$P_{\text{dBm}} = 10 \log_{10}(1000P_{\text{W}}) \text{ ou } P_{\text{W}} = 10^{(P_{\text{dBm}}-30)/10}.$$

O objetivo deste capítulo consiste em estudar modelos que capturam a relação entre a *potência de sinal recebido* em dBm, denotada por P , e a *distância entre o emissor e o recetor*, denotada por d . Empiricamente, podemos observar que P diminui à medida que d aumenta, como mostra o gráfico 3.1.

Queremos encontrar uma função $P : [d_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, que *melhor* modele esta relação de dependência. A distância d_0 deve ser sempre positiva e é designada por *distância de referência*. Inicialmente admitiremos que não existem obstáculos entre o emissor e o recetor para evitar efeitos de *atenuação*. Atendendo ao gráfico 3.1, devemos exigir que P seja contínua e estritamente decrescente.

Ao determinar um modelo $P_i : [d_{0,i}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ para cada emissor i , é possível estabelecer uma relação entre o *espaço geométrico* e o *espaço dos sinais*.

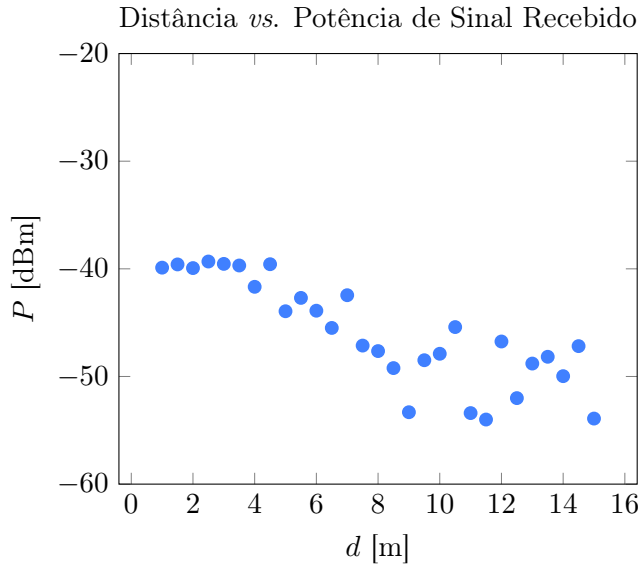


Figura 3.1: Estudo da correlação entre P e d .

Definição 3.1. Consideremos a aplicação

$$\psi : M = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^n B_{d_{0,i}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x} \longmapsto \begin{bmatrix} P_1(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_1\|) \\ P_2(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_2\|) \\ \vdots \\ P_n(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}_n\|) \end{bmatrix},$$

onde $B_{d_{0,i}}(\mathbf{p}_i)$ designa a bola aberta com centro \mathbf{p}_i e com raio $d_{i,0}$. Então M é designado por *espaço geométrico* e $S = \psi(M)$ por *espaço dos sinais*.

Atendendo ao lema 2.4, podemos verificar que ψ induz um homeomorfismo $\tilde{\psi} : M \longrightarrow S$ se e só se cada P_i for um homeomorfismo na sua imagem. Consequentemente, o espaço geométrico e o espaço dos sinais são homeomorfos¹.

Em particular, dada uma leitura de potências $[p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]^T$, podemos obter a respetiva distância a cada um dos emissores, conduzindo-nos ao problema de trilateração apresentado no capítulo anterior.

3.1. Modelo log-distância

Nesta secção iremos apresentar alguns modelos para P e d , designados por *modelos de propagação*. Estes modelos devem ser eficazes quando aplicados em situações

¹No entanto, se considerarmos a restrição de cada P_i a um aberto, obtemos uma subvariedade regular de \mathbb{R}^n , pelo teorema 2.5.

reais. Uma forma natural de medir a eficácia de um modelo é verificar o nível de ajustamento a dados empíricos.

Podemos ver a escolha de um bom modelo como um *problema de regressão*. Ou seja, dado um conjunto de distâncias e as respetivas potências

$$S = \{(d_1, p_1), (d_2, p_2), \dots, (d_N, p_N)\},$$

queremos encontrar uma função $P : [d_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que minimize uma *função custo*. Uma boa escolha para esta função é o *erro residual*

$$J(P) = \sum_{i=1}^N (P(d_i) - p_i)^2. \quad (\text{C})$$

O modelo mais frequentemente usado em ambientes *indoor* é o modelo *log-distância*. Para obtermos um modelo para a potência, tentaremos modelar a perda de sinal dada por

$$PL = P_{\text{Tx}} - P_{\text{Rx}},$$

onde P_{Tx} e P_{Rx} designam, respetivamente, as potências de sinal emitido e recebido em dBm.

Atendendo à natureza aleatória de perturbações introduzidas por fenómenos de ruído branco², tomaremos uma abordagem probabilística. Sejam P_{Tx} , P_{Rx} e D as variáveis aleatórias reais que modelam a potência emitida, a potência recebida e a distância ao emissor, respetivamente. Então, experiências de natureza empírica sugerem

$$\text{E}(PL | D) = PL_0 - 10 \log_{10} \left(\frac{D}{d_0} \right)^{-\gamma},$$

com d_0 e γ positivos. Note-se ainda que, para $D = d_0$, temos

$$\text{E}(PL | D = d_0) = PL_0.$$

Se exigirmos que a potência transmitida pelo emissor seja constante, podemos usar a linearidade da esperança condicional, tendo-se

$$\text{E}(P_{\text{Rx}} | D) = P_0 - 10\gamma \log_{10} \left(\frac{D}{d_0} \right),$$

onde $P_0 = P_{\text{Tx}} - PL_0$. Designando P_{Rx} por P e fazendo $\varepsilon_\sigma = P - \text{E}(P | D)$, obtemos o modelo *log-distância*

$$P = P_0 - 10\gamma \log_{10} \left(\frac{D}{d_0} \right) + \varepsilon_\sigma, \quad (\text{R})$$

²Este fenómeno também é conhecido por *shadowing*.

onde σ^2 representa a variância do *erro residual* ε_σ .

Repare-se que a expressão anterior apresenta um modelo de regressão linear para P e $X = 10 \log_{10}(D/d_0)$. Em particular, ε_σ é uma variável aleatória real de média zero. Atendendo às propriedades da esperança condicional, vem

$$E(\varepsilon_\sigma) = E(P - E(P | D)) = E(P) - E(E(P | D)) = E(P) - E(P) = 0.$$

Desta forma, dado o conjunto S , podemos constuir a função

$$\begin{aligned} \hat{P} : [d_0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ d &\longmapsto \hat{P}(d) = \hat{P}_0 - 10\hat{\gamma} \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right), \end{aligned}$$

onde $\hat{\gamma}$ e \hat{P}_0 são estimativas para γ e P_0 , respetivamente, dadas por

$$\hat{\gamma} = \frac{\overline{p\bar{x}} - \bar{p}\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \text{ e } \hat{P}_0 = \bar{p} - \hat{\gamma}\bar{x}.$$

As estimativas presentes em $\hat{\gamma}$ e \hat{P}_0 são definidas por

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i, & \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 10 \log_{10} \left(\frac{d_i}{d_0} \right), \\ \overline{p\bar{x}} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 10 p_i \log_{10} \left(\frac{d_i}{d_0} \right) & \text{ e } \overline{x^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(10 \log_{10} \left(\frac{d_i}{d_0} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Uma vez que (R) é um modelo de regressão linear, verifica-se que \hat{P} resolve o problema

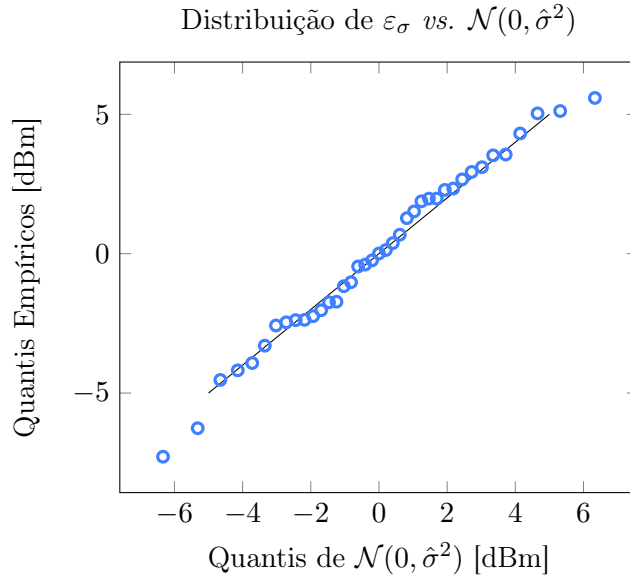
$$\hat{P} = \arg \min_{P \in \mathcal{P}} J(P), \text{ com } \mathcal{P} = \left\{ P(d) = \alpha + 10\beta \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.1.1. Distribuição de ε_σ e cobertura de sinal

Ao aplicar o modelo (R) admitimos habitualmente que o erro residual é gaussiano devido a fenómenos de *shadowing*. Desta forma, conseguimos estimar a cobertura de sinal para uma dada área circular. Começemos por estimar σ^2 através do estimador cêntrico

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_i^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N \left(p_i - \hat{P}_0 + 10\hat{\gamma} \log_{10} \left(\frac{d_i}{d_0} \right) \right)^2.$$

O teste de normalidade de ε_σ pode ser feito através de um método gráfico como *Q-Q plots* ou um teste não paramétrico como o teste de Kolmogorov-Smirnov com correção de Lilliefors. O gráfico e tabela que se seguem mostram os resultados de uma análise estatística feita a uma amostra com dimensão trinta e nove. Repare-se


 Figura 3.2: Q - Q plot para a amostra.

Estatística de teste D	Significância	p -valor
0.0836	0.05	0.7039

Tabela 3.1: Resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov (com correção de Lilliefors).

que ambos os métodos permitem concluir, com elevada confiança, que o erro residual segue uma lei normal de média zero e variância próxima de $\hat{\sigma}^2$.

Suponhamos que queremos determinar a cobertura de sinal para a região circular centrada no emissor com raio $R \geq d_0$. Habitualmente, considera-se uma *potência mínima* α e determina-se a percentagem da área cuja potência recebida não seja inferior a α . Ou seja, estamos interessados na razão

$$U(\alpha) = \frac{A_\alpha}{\pi R^2},$$

em que A_α designa a área da região com a cobertura desejada. Portanto, se $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ designa a posição do emissor, é possível verificar em [R⁺96] que A_α é dada pelo integral

$$\iint_{B_R(\mathbf{p})} \Pr(P > \alpha \mid D = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) dA,$$

onde P e D representam as variáveis aleatórias reais do modelo (R). Intuitivamente, o integral anterior pode ser visto como uma *soma* de pequenas de áreas cuja probabilidade da potência medida exceder α é positiva.

Definição 3.2. A *cobertura de sinal com potência mínima* α em $B_R(\mathbf{p})$ é

$$U(\alpha) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R(\mathbf{p})} \Pr(P > \alpha \mid D = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|) dA,$$

ou, em coordenadas polares,

$$U(\alpha) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \Pr(P > \alpha | D = r) r dr d\theta.$$

Atendendo à definição anterior, precisamos de conhecer a lei de $P | D = d$ para determinar $U(\alpha)$. Designemos esta variável por P_d e comecemos por determinar a sua média e variância. Admitindo que o ruído branco é uma propriedade do ambiente, não dependendo da distância ao emissor, temos que ε_σ e D são independentes. Assim, vem

$$P_d \stackrel{\text{q.c.}}{=} P_0 - 10\gamma \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right) + \varepsilon_\sigma, \quad (3.1)$$

logo

$$\mu_d = E(P_d) = P_0 - 10\gamma \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right) + E(\varepsilon_\sigma) = P_0 - 10\gamma \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right),$$

uma vez que $E(\varepsilon_\sigma) = 0$. Analogamente, verifica-se que $\text{Var}(P_d) = \sigma^2$. Portanto, a distribuição de P_d apenas depende de ε_σ . Em particular, se $\varepsilon_\sigma \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, então $P_d \sim \mathcal{N}(\mu_d, \sigma^2)$. Com estas considerações, podemos determinar uma fórmula explícita para $U(\alpha)$, como se verifica em [R⁺96].

Teorema 3.3. *Se $\varepsilon_\sigma \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, então a cobertura de sinal com potência mínima α em $B_R(\mathbf{p})$ é dada por*

$$U(\alpha) = \frac{1}{2} \left[1 - \text{erf}(a) + \exp \left(\frac{1 - 2ab}{b^2} \right) \left[1 - \text{erf} \left(\frac{1 - ab}{b} \right) \right] \right],$$

com

$$a = \frac{\alpha - P_0 + 10\gamma \log_{10}(R/d_0)}{\sigma\sqrt{2}} \quad e \quad b = \frac{10\gamma \log_{10}(e)}{\sigma\sqrt{2}},$$

e

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-s^2) ds.$$

Corolário 3.4. *Se $\alpha = E(P | D = R)$, então*

$$U(\alpha) = \frac{(1 + \exp(b^{-2})) (1 - \text{erf}(b^{-1}))}{2}.$$

Demonstração. Atendendo ao modelo de regressão linear, se $\alpha = E(P | D = R)$, vem $a = 0$ e o resultado segue naturalmente. \square

3.2. Correção de sinal

O modelo da secção anterior foi obtido sob a hipótese de não existirem obstáculos entre o emissor e o recetor. Em situações reais esta condição é raramente verificada

devido a fenômenos de atenuação, aumentando a perda de sinal. Iremos introduzir um mecanismo que permite estender qualquer modelo de propagação de forma a corrigir a potência estimada.

Suponhamos que região onde se encontra o emissor tem n tipos de obstáculo diferentes. Estes obstáculos podem ser paredes, ou até o próprio chão entre pisos, se o domínio do problema for \mathbb{R}^3 . Admitiremos que os obstáculos não têm superfícies refletoras para evitar fenômenos de reflexão.

Seja O_i a variável aleatória real que indica quantos objetos do tipo i se encontram entre o emissor e o recetor. Supondo que todos os objetos do tipo i são semelhantes em composição e tamanho, designemos por $\lambda_i > 0$ a atenuação³ provocada por esta classe de obstáculos. Assim, se a potência prevista for P , a *potência corrigida* será

$$P_{\text{cor}} = P - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i.$$

Em particular, se P for o modelo log-distância, obtemos um novo modelo de regressão linear

$$P_{\text{cor}} = P_0 - 10\gamma \log_{10} \left(\frac{D}{d_0} \right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i O_i + \varepsilon_\sigma.$$

Como tal, podemos obter estimadores para P_0 , γ e os λ_i , simultaneamente, de forma a minimizar o erro residual. Note-se que a inclusão de fatores de atenuação aumenta a complexidade da amostragem, uma vez que é preciso saber a localização do recetor em cada leitura. Assim, podemos determinar os responsáveis pela atenuação do sinal.

Particularizando os O_i podemos obter vários modelos de propagação conhecidos. Por exemplo, se supusermos que todas as paredes têm a mesma composição e espessura, obtemos o *modelo WAF* proposto por Bahl e Padmanabhan em [BP00],

$$P = P_0 - 10\gamma \log_{10} \left(\frac{D}{d_0} \right) - \lambda_W W + \varepsilon_\sigma,$$

onde a quantidade de paredes que separa o emissor do recetor é denotada pela variável aleatória real W . Se a nossa região abrange vários pisos, podemos introduzir um fator para a atenuação entre pisos, obtendo o *modelo FAF* proposto por Seidel e Rappaport em [SR92],

$$P = P_0 - 10\gamma \log_{10} \left(\frac{D}{d_0} \right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i + \varepsilon_\sigma,$$

em que n denota o número total de pisos e F_i indica se o piso i se encontra entre o emissor e recetor.

³Estes fatores também são designados por *fatores de atenuação*.

A correção de sinal não se aplica apenas ao modelo log-distância. O *modelo ITU* apresentado em [Rec01] generaliza o modelo log-distância, na medida em que toma em consideração a frequência do sinal emitido e também aplica correção de sinal relativamente aos pisos,

$$P = P_{\text{Tx}} - 20 \log_{10} f - 10\gamma \log_{10} D - \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i + \varepsilon_\sigma - 28,$$

onde $f \in [9 \times 10^2, 5.2 \times 10^3]$ designa a frequência do sinal emitido em MHz.

Capítulo 4

Algoritmo dos k Vizinhos Mais Próximos

No capítulo anterior pudemos observar que o espaço geométrico e o espaço dos sinais definidos pelos modelos de propagação são topologicamente equivalentes. Desta forma, podemos usar as leituras de sinal recebido dos emissores e obter um problema de trilateração. Ou seja, dado um modelo de propagação invertível \hat{P} , podemos estimar a distância entre o recetor e o respetivo emissor através de \hat{P}^{-1} . Por exemplo, para o modelo de propagação log-distância vem

$$d = \hat{P}^{-1} = d_0 10^{(\hat{P}_0 - \hat{P})/10\hat{\gamma}}.$$

Um problema evidente nesta abordagem é a propagação do erro residual. Por outras palavras, podemos observar que o erro da distância medida propaga-se exponencialmente em função do erro do sinal medido

$$d = d_0 10^{(\hat{P}_0 - \hat{P} + \varepsilon)/10\hat{\gamma}} = d_0 10^{(\hat{P}_0 - \hat{P})/10\hat{\gamma}} 10^{\varepsilon/10\hat{\gamma}} = \alpha d_0 10^{(\hat{P}_0 - \hat{P})/10\hat{\gamma}}.$$

Podemos ver a propagação exponencial do erro residual como uma motivação para o método de escalonamento uniforme de distâncias, apresentado no segundo capítulo.

Uma outra abordagem para resolver este problema consiste em usar o homeomorfismo $\tilde{\psi} : M \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$ de uma forma mais implícita. Como $\tilde{\psi}$ é um homeomorfismo, $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\psi}^{-1}$ são C^0 , tendo-se

$$\forall \mathbf{x} \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \tilde{\psi}(M \cap B_\delta(\mathbf{x})) \subset S \cap B_\varepsilon(\tilde{\psi}(\mathbf{x})),$$

e também

$$\forall \mathbf{s} \in S \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \tilde{\psi}^{-1}(S \cap B_\varepsilon(\mathbf{s})) \subset M \cap B_\delta(\tilde{\psi}^{-1}(\mathbf{s})).$$

As expressões anteriores mostram que os conceitos de proximidade de potência de sinal e proximidade no sentido euclidiano são equivalentes. Consideremos leitura de sinal $\mathbf{s}_0 \in S$ e um subconjunto finito do gráfico de $\tilde{\psi}$, denotado por $\text{Graf}(\tilde{\psi})$,

$$G = \left\{ \left(\mathbf{x}_1, \tilde{\psi}(\mathbf{x}_1) \right), \left(\mathbf{x}_2, \tilde{\psi}(\mathbf{x}_2) \right), \dots, \left(\mathbf{x}_m, \tilde{\psi}(\mathbf{x}_m) \right) \right\}.$$

Se \mathbf{s}_0 estiver suficientemente próximo de algum $\tilde{\psi}(\mathbf{x}_i)$ então o ponto $\tilde{\psi}^{-1}(\mathbf{s}_0)$ também estará suficiente próximo de \mathbf{x}_i . Assim, uma aproximação razoável para $\tilde{\psi}^{-1}(\mathbf{s}_0)$ é o ponto que minimiza $\|\tilde{\psi}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}_0\|$ em G . Nestas condições, dizemos que o mínimo $\tilde{\psi}(\mathbf{x}_i)$ é o *vizinho mais próximo de \mathbf{s}_0* em relação ao *mapa de cobertura de sinal*, dado pelo conjunto G .

O algoritmo do vizinho mais próximo divide-se em duas fases. A fase *offline* consiste em construir o mapa de cobertura de sinal. Normalmente este conjunto é construído efetuando uma amostragem¹ de leituras de sinal em localizações conhecidas,

$$G = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{s}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{s}_2), \dots, (\mathbf{x}_m, \mathbf{s}_m)\}.$$

A fase *online* consiste no cálculo da estimativa da localização. Note-se que a fase *offline* é efetuada *a priori*, ao passo que a fase *online* é executada em tempo real, isto é, na altura da localização.

Para reduzir o erro de ruído branco, podemos registar as *médias* das leituras de sinal por cada localização conhecida. Neste caso, o nosso mapa de cobertura de sinal será o conjunto

$$\bar{G} = \{(\mathbf{x}_1, \bar{\mathbf{s}}_1), (\mathbf{x}_2, \bar{\mathbf{s}}_2), \dots, (\mathbf{x}_m, \bar{\mathbf{s}}_m)\}.$$

O algoritmo que se segue sintetiza o *algoritmo do vizinho mais próximo*.

Algoritmo 4.1 Algoritmo do vizinho mais próximo.

- 1: **função** LOCALIZAR(\mathbf{s}_0, G)
- 2: $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}}) \leftarrow \arg \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in G} \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|$
- 3: **devolve** $\hat{\mathbf{x}}$
- 4: **fim função**

Pré-cond.: $G \neq \emptyset$ é um mapa de cobertura de sinal.

Pós-cond.: $\hat{\mathbf{s}}$ é a leitura mais próxima de \mathbf{s}_0 e $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}}) \in G$.

Como foi referido anteriormente, devemos ter um mapa de cobertura de sinal suficientemente denso para obter uma precisão razoável. Porém, um mapa muito denso contribui para uma execução computacionalmente mais demorada do algoritmo, atendendo a que a seleção do mínimo efetua $\mathcal{O}(n)$ comparações. Por outro lado, se n for pequeno, a estimativa obtida pelo algoritmo do vizinho mais próximo pode estar muito afastada da localização verdadeira.

¹Note-se que esta amostragem não tem de ser necessariamente empírica.

Para contornar o problema anterior, iremos introduzir um melhoramento no método anterior. Em vez de estimar a localização apenas com o vizinho mais próximo, usaremos os k vizinhos mais próximos. Dado um mapa G , os k vizinhos mais próximos são dados² por

$$(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{s}}_i) = \arg \min_{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in G_i} \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

onde $G_1 = G$ e $G_{i+1} = G_i \setminus \{(\hat{\mathbf{s}}_i, \hat{\mathbf{x}}_i)\}$. Desta forma, temos $\|\hat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_0\| \leq \|\hat{\mathbf{s}}_j - \mathbf{s}_0\|$, para $i \leq j$.

Naturalmente se tivermos $\mathbf{s}_0 = \hat{\mathbf{s}}_1$, a estimativa será dada por $\hat{\mathbf{x}}_1$. Caso contrário, poderíamos estimar a localização através da média dos $\hat{\mathbf{x}}_i$. Mas perderíamos informação relativamente à *proximidade* dos vizinhos. Para preservar esta noção, usaremos a *média ponderada*, tendo como pesos $w_i = \|\hat{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_0\|^{-1}$.

$$\bar{\mathbf{x}}_w = \frac{\sum_{i=1}^k w_i \hat{\mathbf{x}}_i}{\sum_{i=1}^k w_i}.$$

Portanto, a nossa estimativa para a localização do recetor será dada por

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_1, & \text{se } \mathbf{s}_0 = \hat{\mathbf{s}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_w, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Com esta nova estimativa podemos generalizar o algoritmo anterior.

Algoritmo 4.2 Algoritmo dos k vizinhos mais próximos.

- 1: **função** LOCALIZAR(\mathbf{s}_0, G)
- 2: **sejam** $\{(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{s}}_i)\}_{i=1, 2, \dots, k}$ os k vizinhos mais próximos de \mathbf{s}_0 .
- 3: **se** $\hat{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{s}_0$ **então**
- 4: **devolve** $\hat{\mathbf{x}}_0$
- 5: **fim se**
- 6: **devolve** $\bar{\mathbf{x}}_w$
- 7: **fim função**

Pré-cond.: G é um mapa de cobertura de sinal tal que $|G| \geq k$.

Pós-cond.: $\hat{\mathbf{x}}$ pertence ao menor retângulo contendo os k vizinhos mais próximos.

A classe de algoritmos dos vizinhos mais próximos é uma muito conveniente pois, para além de não usar necessariamente o homeomorfismo $\tilde{\psi}$, não usa a posição dos emissores. Assim, é um algoritmo muito fácil de configurar, sendo possível aproveitar

²Na prática, estes valores podem ser obtidos através de um algoritmo de seleção $\mathcal{O}(n)$. Um exemplo de um tal algoritmo pode ser encontrado em [AH74].

vários emissores presentes na infra-estrutura. Note-se também que a origem do mapa G não é especificada. A amostra pode ser obtida através de dados empíricos recolhidos no local, ou através de modelos de propagação apresentados anteriormente. Este facto proporciona um bom compromisso entre a precisão oferecida por uma boa recolha de dados empírica e a rapidez de configuração oferecida pelos modelos de propagação.

4.1. Ausência de Cobertura e Normalização

Dada uma leitura de sinal, pode ocorrer uma situação em que o recetor se encontra numa zona onde não existe cobertura de sinal de alguns emissores. Um inconveniente da natureza logarítmica do decibel, é o facto da ausência de potência ser representada por $-\infty$. Para contornar este inconveniente representaremos a ausência de sinal de uma leitura por zero, uma vez que as potências de sinal *Wi-Fi* são sempre negativas.

Contudo, esta convenção pode introduzir alguma ambiguidade nos cálculos anteriores. De facto, ao ignorarmos os emissores sem sinal, introduzimos algum viés no cálculo de distâncias entre potências. Repare-se que o cálculo dos vizinhos mais próximos de \mathbf{s}_0 é efetuado através da pré-ordem

$$\mathbf{s} \leq_{\mathbf{s}_0} \mathbf{s}' \text{ se } \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| \leq \|\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0\|.$$

Para incluir informação sobre o número de emissores visíveis, introduzimos uma normalização na pré-ordem anterior. Admitindo que não há *zonas cegas*³, dada uma leitura \mathbf{s}_0 , definimos

$$\mathbf{s} \leq_{\mathbf{s}_0} \mathbf{s}' \text{ se } \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|}{k_{\mathbf{s}}} \leq \frac{\|\mathbf{s}' - \mathbf{s}_0\|}{k_{\mathbf{s}'}} ,$$

onde $k_{\mathbf{s}}$ é o número de emissores cuja potência recebida é não nula na leitura \mathbf{s} . Note-se que as pré-ordens anteriores são claramente equivalentes no caso em que não existem zonas cegas.

Nas abordagens anteriores foi definido um critério de proximidade baseado apenas na natureza geométrica do espaço dos sinais. Atendendo a que a leitura de sinal pode ser vista como uma experiência aleatória, podemos reformular o cálculo dos vizinhos mais próximos adotando uma perspetiva probabilística.

Seja $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ o vetor aleatório real que descreve a leitura de sinais dos n emissores considerados, com média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$. Como $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz simétrica real, podemos determinar a sua decomposição espectral $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T$.

³Zonas sem qualquer cobertura de sinal para qualquer um dos emissores.

Por outro lado, se Σ for não singular, é também definida positiva. Logo, os seus valores próprios são todos positivos e, portanto, existe $\sqrt{\Lambda}$.

Consequentemente, para uma leitura arbitrária \mathbf{s} , podemos considerar a normalização⁴

$$\Lambda^{-1/2}\mathbf{Q}^T(\mathbf{s} - \boldsymbol{\mu}),$$

com $\Lambda^{-1/2} = \sqrt{\Lambda^{-1}}$. Assim, se em vez de tomarmos a distância euclidiana habitual entre duas leituras \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 , podemos considerar a distância entre as respetivas normalizações \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2\| &= \left\| \Lambda^{-1/2}\mathbf{Q}^T(\mathbf{s}_1 - \boldsymbol{\mu} - \mathbf{s}_2 + \boldsymbol{\mu}) \right\| = \left\| \Lambda^{-1/2}\mathbf{Q}^T(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) \right\| \\ &= \sqrt{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)^T \mathbf{Q}\Lambda^{-1/2}\Lambda^{-1/2}\mathbf{Q}^T(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)} = \sqrt{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)^T \mathbf{Q}\Lambda^{-1}\mathbf{Q}^T(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)} \\ &= \sqrt{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)}. \end{aligned}$$

Esta distância normalizada entre \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 é designada por *distância de Mahalonobis* e é denotada por d_M . Note-se que esta distância é uma generalização da distância euclidiana, uma vez que coincidem quando Σ é a identidade. Para mostrar que d_M é uma distância, basta observar que é induzida pelo produto interno

$$\begin{aligned} (\cdot | \cdot)_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longmapsto (\mathbf{x} | \mathbf{y})_M = \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{y}. \end{aligned}$$

A distância de Mahalonobis tem uma expressão interessante no caso em que P_1, P_2, \dots, P_n são independentes. Neste caso, Σ é uma matriz diagonal com as respetivas variâncias marginais e, para leituras \mathbf{s} e \mathbf{t} , temos

$$d_M(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(s_i - t_i)^2}{\sigma_i^2}},$$

onde $\text{Var}(P_i) = \sigma_i^2$. Portanto, podemos ver d_M como a distância entre leituras cujas potências registadas são normalizadas *a priori*.

4.2. Filtro de Pareto

Como foi dito anteriormente, um mapa de cobertura muito denso pode prejudicar o desempenho do algoritmo dos k vizinhos mais próximos. Para além da complexidade inculcida pelo algoritmo de seleção, o número de multiplicações efetuadas é pelo

⁴A motivação desta normalização deve-se ao caso em que $\mathbf{P} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Nestas condições, $\Lambda^{-1/2}\mathbf{Q}^T(\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$, [Fel71].

menos $\mathcal{O}(mn)$, podendo limitar o tempo de execução, especialmente se o número de emissores for grande.

O propósito do *filtro de Pareto* é tentar formular o problema do vizinho mais próximo sob um ponto de vista de otimização multi-objetivo. Repare-se que o problema do vizinho mais próximo é em si um problema de otimização, tendo apenas um objetivo,

$$(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{x}}) = \arg \min_{(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \in G} \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|^2.$$

Se $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_m]^\top$ e $\mathbf{s}_0 = [s_{0,1} \ s_{0,2} \ \cdots \ s_{0,m}]^\top$, a função objetivo anterior pode ser vista como uma combinação linear de funções objetivo, ou seja

$$\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|^2 = \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

onde $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = (s_i - s_{0,i})^2$. Intuitivamente, abordagem multi-objetivo consiste em encontrar soluções que minimizem todos os objetivos f_i simultaneamente. Para formalizar este conceito, é necessário introduzir a noção de *dominância*. Atendendo a que o nosso objetivo é determinar o ponto \mathbf{x} associado à leitura \mathbf{s} que resolve o problema de minimização, cometeremos um abuso de linguagem e omitiremos \mathbf{x} daqui em diante.

Proposição 4.1. *Seja $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ um conjunto não vazio e $Y = (Y_1, \leq_1) \times (Y_2, \leq_2) \times \cdots \times (Y_m, \leq_m)$ um produto de conjuntos totalmente ordenados. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ \mathbf{x} &\longmapsto f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

define uma ordem parcial estrita em X dada por

$$\mathbf{x}_1 <_f \mathbf{x}_2 \text{ se } f_i(\mathbf{x}_1) \leq_i f_i(\mathbf{x}_2) \text{ para todo o } i, \text{ e existir } j \text{ tal que } f_j(\mathbf{x}_1) <_j f_j(\mathbf{x}_2).$$

Definição 4.2. Sejam X, Y e $f : X \longrightarrow Y$ nas condições da proposição anterior e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$. Se $\mathbf{x}_1 <_f \mathbf{x}_2$, dizemos que \mathbf{x}_1 *domina* \mathbf{x}_2 .

A dominância apresentada na definição anterior diz-se *fraca*. Se tivermos $f_i(\mathbf{x}_1) <_i f_i(\mathbf{x}_2)$ para todo o i , a dominância diz-se *forte*. Para os problemas multi-objetivo apenas consideraremos dominância fraca.

Definição 4.3. Seja $f : X \rightarrow Y$ nas condições anteriores. Dizemos que $\mathbf{x}^* \in X$ é uma *solução de Pareto* do problema multi-objetivo

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}),$$

se \mathbf{x}^* não é dominado por \mathbf{x}^{**} , qualquer que seja $\mathbf{x}^{**} \in X$.

Quando o problema anterior tem mais do que uma solução de Pareto, o problema diz-se *não trivial*. Estes problemas são extremamente comuns. Por exemplo, se tivermos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $f(x, y) = [x, y, -x - y]^T$, então verifica-se facilmente que o conjunto de soluções de Pareto é todo o \mathbb{R}^2 .

Apesar de haver geralmente mais do que uma solução de Pareto, existem critérios que permitem decidir a solução mais adequada ao problema dado. Um critério de decisão pode ser estabelecido através de funções de valor.

Definição 4.4. A função $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma *função de valor* para o problema induzido por $f : X \rightarrow Y$ se for estritamente monótona crescente e possuir algum critério de desempate para soluções de Pareto. Ou seja, para $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ temos $V(\mathbf{x}_1) < V(\mathbf{x}_2)$, sempre que $\mathbf{x}_1 <_f \mathbf{x}_2$.

Estamos em condições para formular o problema do vizinho mais próximo. Para uma leitura \mathbf{s}_0 , queremos determinar soluções do problema

$$\min_{\mathbf{s} \in G} f(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{s} \in G} \left((s_1 - s_{0,1})^2, (s_2 - s_{0,2})^2, \dots, (s_m - s_{0,m})^2 \right). \quad (\text{V})$$

A função de valor que iremos escolher para este problema é naturalmente $V(\mathbf{s}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|^2$. Note-se que V é uma função de valor pois, se $\mathbf{s}_1 <_f \mathbf{s}_2$, temos $(s_{1,i} - s_{0,i})^2 \leq (s_{2,i} - s_{0,i})^2$ para cada i , logo

$$V(\mathbf{s}_1) = \sum_{i=1}^m (s_{1,i} - s_{0,i})^2 \leq \sum_{i=1}^m (s_{2,i} - s_{0,i})^2 = V(\mathbf{s}_2).$$

Por outro lado, existe j tal que $(s_{1,j} - s_{0,i})^2 < (s_{2,j} - s_{0,i})^2$, portanto temos de ter $V(\mathbf{s}_1) < V(\mathbf{s}_2)$.

Estamos em condições para apresentar o *filtro de Pareto*. A ideia do filtro de Pareto consiste em determinar todas as soluções de Pareto do mapa de cobertura de sinal G . Com este fim, o filtro vai removendo sucessivamente os pontos dominados até obter um conjunto de soluções não dominadas G_P . Se $|G_P| > 1$, usamos a função de valor V para o desempate de soluções. Note-se que este último passo é equivalente a aplicar o algoritmo do vizinho mais próximo ao mapa de cobertura de sinal G_P .

Para provar que este filtro de facto captura a solução do problema do vizinho mais próximo em G_P , podemos usar a função de valor.

Proposição 4.5. *Se \mathbf{s}^* é a solução do problema*

$$\min_{\mathbf{s} \in G} V(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{s} \in G} \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|^2,$$

então $\mathbf{s}^* \in G_P$.

Demonstração. Suponhamos que \mathbf{s}^* não estava em G_P . Então existiria $\mathbf{s}^{**} \in G$ que dominava \mathbf{s}^* . Como V é uma função de valor, viria $V(\mathbf{s}^{**}) < V(\mathbf{s}^*)$ e obteríamos uma contradição, atendendo a que \mathbf{s}^* minimiza V . Consequentemente, $\mathbf{s}^* \in G_P$. \square

Repare-se que a característica fundamental do filtro de Pareto é a redução dos pontos do nosso mapa de cobertura de sinal a um mapa com soluções eficientes no contexto de otimização multi-objetivo. Assim sendo, se obtivermos mais do que uma solução de Pareto, podemos optar pelo algoritmo dos k vizinhos mais próximos em G_P . Note-se que se G_P for um conjunto pouco denso, devemos usar um valor baixo de k para a aproximação final não ser afetada pela dispersão dos pontos.

Por fim, apresentamos uma implementação do filtro de Pareto para o problema (V) definido anteriormente. O algoritmo divide-se em dois módulos. O módulo *ParetoAcc* é uma função auxiliar recursiva em cauda que remove os vizinhos dominados. O módulo *Pareto* delega a tarefa para o módulo recursivo com os parâmetros adequados.

Algoritmo 4.3 Filtro de Pareto para o problema (V).

- 1: **função** PARETO(G)
- 2: **seja** $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in G$
- 3: $G \leftarrow G \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$
- 4: $G_P \leftarrow \text{ParetoAcc}(G, (\mathbf{x}, \mathbf{s}), G, \emptyset)$
- 5: **devolve** G_P
- 6: **fim função**

Pré-cond.: $G \neq \emptyset$

Pós-cond.: Existe $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*) \in G_P$ que resolve o problema $\min_{(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \in G} \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|^2$.

Verifica-se claramente porque é que os algoritmos anteriores permitem determinar todas as soluções de Pareto do problema (V). A função *ParetoAcc* vai iterando por um conjunto de candidatos a solução em G , testando um candidato deste conjunto

Algoritmo 4.4 Módulo auxiliar do filtro de Pareto para o problema (V).

```

1: função PARETOACC( $G, (\mathbf{x}_{\text{atual}}, \mathbf{s}_{\text{atual}}), G_{\text{in}}, G_{\text{out}}$ )
2:   se  $G = \emptyset$  então
3:     devolve  $G_{\text{out}} \cup \{(\mathbf{x}_{\text{atual}}, \mathbf{s}_{\text{atual}})\}$ 
4:   fim se
5:   se  $G_{\text{in}} = \emptyset$  então
6:     seja  $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in G$ 
7:      $G \leftarrow G \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ 
8:     devolve ParetoAcc( $G, (\mathbf{x}, \mathbf{s}), G, G_{\text{out}} \cup \{(\mathbf{x}_{\text{atual}}, \mathbf{s}_{\text{atual}})\}$ )
9:   fim se
10:  seja  $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in G_{\text{in}}$ 
11:  se  $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) <_f (\mathbf{x}_{\text{atual}}, \mathbf{s}_{\text{atual}})$  então
12:     $G \leftarrow G \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ 
13:    devolve ParetoAcc( $G, (\mathbf{x}, \mathbf{s}), G, G_{\text{out}}$ )
14:  fim se
15:  se  $(\mathbf{x}_{\text{atual}}, \mathbf{s}_{\text{atual}}) <_f (\mathbf{x}, \mathbf{s})$  então
16:     $G \leftarrow G \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}$ 
17:  fim se
18:  devolve ParetoAcc( $G, (\mathbf{x}_{\text{atual}}, \mathbf{s}_{\text{atual}}), G_{\text{in}} \setminus \{(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, G_{\text{out}}$ )
19: fim função

```

contra o conjunto com os restantes pontos, representado por G_{in} . Caso o candidato atual não tenha sido eliminado por nenhum dos pontos de G_{in} , é uma solução de Pareto e, conseqüentemente, é adicionado ao conjunto G_{out} .

Quando G tem apenas um candidato a testar, é automaticamente uma solução de Pareto, portanto é adicionado a G_{out} na próxima iteração do algoritmo, quando $G = \emptyset$. Se o candidato atual for dominado por algum ponto, é excluído e o algoritmo reinicia com o próximo candidato em G .

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo, iremos apresentar e discutir os resultados obtidos dos algoritmos estudados. Os testes foram todos realizados no *Open Space FO* da *Critical Software* em Coimbra, cuja área é cerca de 90m^2 . Foram usados três pontos de acesso do modelo TL-MR3420 do fabricante *TP-Link* para os testes de localização com uma disposição análoga à da figura 5.1. Para o recetor usou-se o *smartphone Sony Ericsson Xperia X8 e15i* com o sistema operativo *Android 2.1 update 1*.

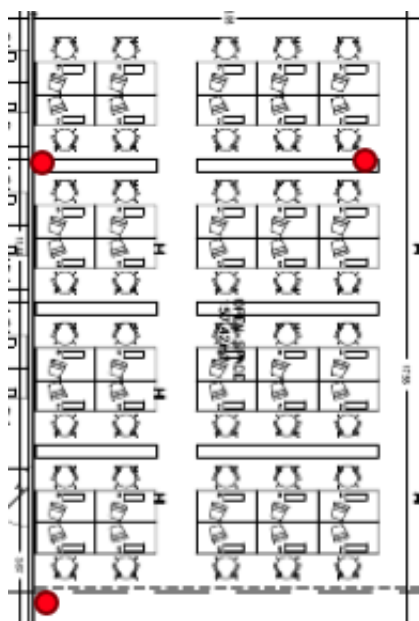


Figura 5.1: Disposição dos pontos de acesso.

5.1. Trilateração

O primeiro algoritmo testado foi o algoritmo de trilateração com o escalonamento uniforme das duas distâncias mais pequenas de forma a garantir que estamos nas condições do algoritmo 2.2. As distâncias aos emissores foram obtidas através do modelo de propagação log-distância.

Nestas condições, foi recolhida uma amostra de dimensão trinta e oito e obteve-se

um erro médio de aproximadamente 3.69m. Este resultado é satisfatório, atendendo a que a propagação do erro é exponencial quando determinamos a distância em função das potências medidas. Contudo, deve ser notado que o espaço de teste não apresenta obstruções de elevada atenuação entre os emissores, como paredes. No caso em que há paredes é muito difícil introduzir fatores de atenuação sem conhecimento *a priori* da divisão onde se encontra o recetor. Voltaremos a abordar este problema no próximo capítulo.

5.2. Modelos de Propagação

Foram estimados modelos de propagação para vários modelos de pontos de acesso. Para além da aplicação evidente dos modelos de propagação em algoritmos de localização *indoor*, podemos também usar esta análise para estudar a variabilidade da potência de sinal emitido pelo equipamento. Desta forma, conseguimos fazer um levantamento dos equipamentos com um bom desempenho para instalações posteriores na instituição cliente.

Em todos os modelos apresentados, considerámos $d_0 = 1\text{m}$ para minimizar erros de truncatura. A amostragem foi feita com $d \in [1\text{m}, 20\text{m}]$ com um espaçamento de 0.5m entre amostras. Iremos apresentar os gráficos dos modelos de propagação obtidos para os vários pontos de acesso. Posteriormente, apresentaremos uma tabela comparativa com os dados detalhados sobre os parâmetros do modelo assim como o seu nível de ajustamento e uma breve análise descritiva ao erro residual.

O primeiro ponto de acesso testado foi o modelo *TL-MR3420* do fabricante *TP-Link*. Graficamente, podemos ver que o modelo estimado ajusta-se bem aos dados recolhidos. Em distâncias próximas do ponto de acesso, podemos observar a truncatura de leitura sinal efetuada pelo *Android*, referida no primeiro capítulo, introduzindo viés no modelo.

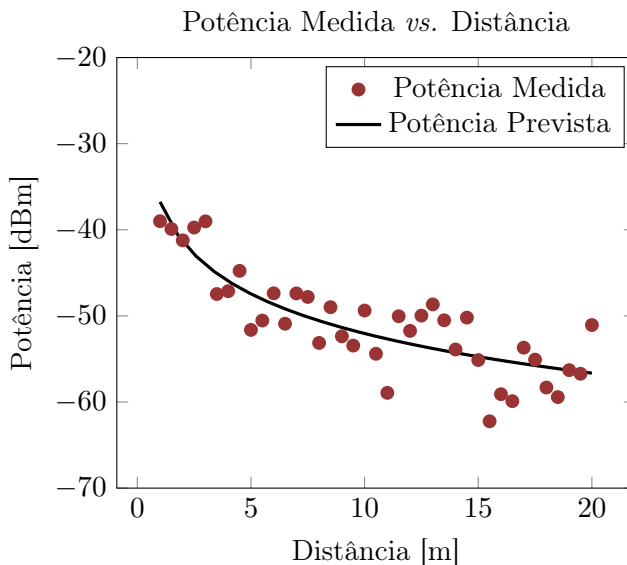


Figura 5.2: Modelo de propagação para o ponto de acesso *TP-Link TL-MR3420*.

O próximo dispositivo a ser testado foi o ponto de acesso *enterprise HP Procurve 420*. Apesar da dispersão da potência em relação ao modelo ser semelhante à observada no gráfico anterior, a truncatura de sinal é significativamente mais visível neste caso, portanto é de esperar que este modelo tenha um menor nível de ajustamento em relação ao anterior.

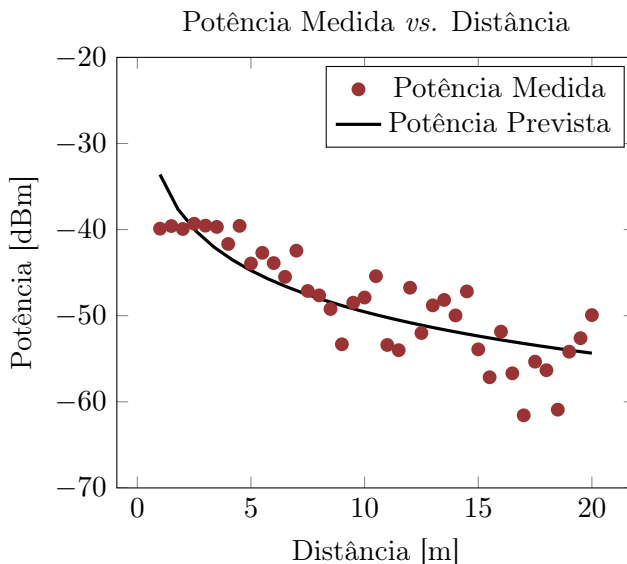


Figura 5.3: Modelo de propagação para o ponto de acesso *HP Procurve 420*.

O próximo gráfico retrata o modelo obtido para o ponto de acesso *UniFi AP* do fabricante *Ubiquiti*. Este foi o caso onde se observou uma maior variância comparativamente aos anteriores. Note-se que mesmo a distâncias muito próximas do emissor

se observaram flutuações de sinal. Este é o exemplo clássico de um emissor que não deve ser usado para os algoritmos de localização *indoor* sensíveis a flutuações de sinal, como a trilateração ou o filtro de Pareto num mapa menos denso.

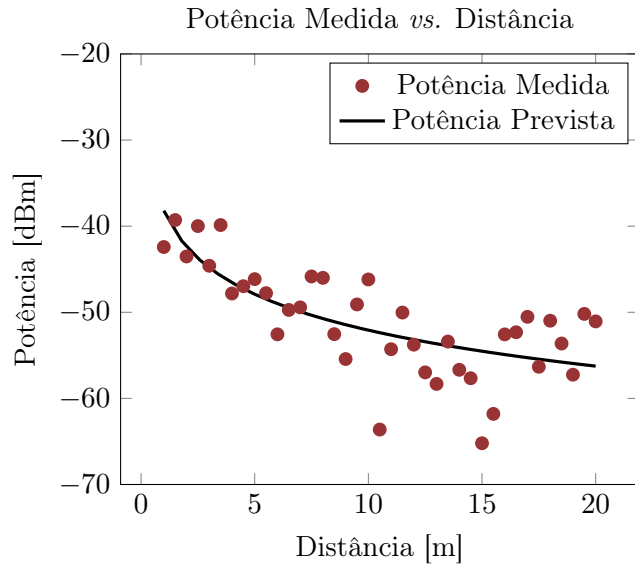


Figura 5.4: Modelo de propagação para o ponto de acesso Ubiquiti UniFi AP.

Por fim, foi testado o ponto de acesso DAP-2553 da D-Link. Este ponto de acesso revelou ter o equipamento que melhor se adequa aos algoritmos aqui apresentados. As leituras recolhidas estão notavelmente mais próximas do previsto do que os modelos anteriores.

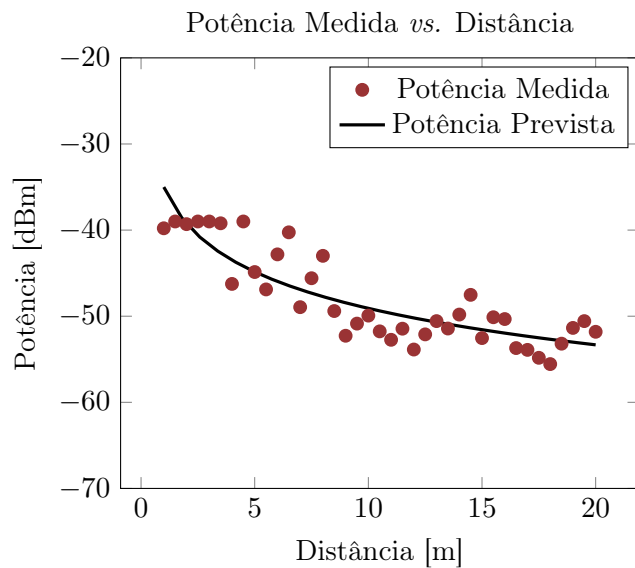


Figura 5.5: Modelo de propagação para o ponto de acesso D-Link DAP-2553.

Por fim, complementamos os gráficos anteriores com uma tabela para os modelos

de regressão linear obtidos para cada um dos emissores. Apresentamos os valores dos coeficientes $\hat{\gamma}$ e \hat{P}_0 e o nível de ajustamento dado pelo coeficiente de correlação linear de Pearson.

Dispositivo	Coefficiente de Propagação ($\hat{\gamma}$)	Potência de Referência (\hat{P}_0)	Coefficiente de Pearson (R^2)
<i>TL-MR3420</i>	1.53	-36.76 dBm	0.72
<i>Procurve 420</i>	1.59	-33.61 dBm	0.70
<i>UniFi AP</i>	1.39	-38.20 dBm	0.54
<i>DAP-2553</i>	1.41	-35 dBm	0.75

Tabela 5.1: Parâmetros do modelo log-distância.

Os valores da tabela anterior sugerem que de facto há forte evidência de que o modelo log-distância se ajusta bem aos dados recolhidos, sendo o ponto de acesso *DAP-2553* o que melhor se ajustou a este modelo. Repare-se que se aumentarmos a distância de referência, poderemos obter melhores modelos. Basta verificar que truncatura feita pelo *Android* não se observa para distâncias superiores a cinco metros. Contudo, uma distância de referência elevada pode condicionar muito a área utilizável, atendendo a que os modelos estão definidos apenas para $d \geq d_0$. Note-se que os valores obtidos para o coeficiente de propagação são consistentes com o valor $\gamma = 1.5$ recomendado na literatura, nomeadamente em [R⁺96].

Apresentamos também uma breve análise ao erro residual dos modelos obtidos para cada um dos dispositivos.

Dispositivo	Média	Desvio-Padrão	Teste K-S (p -valor)
<i>TL-MR3420</i>	1.8×10^{-15} dBm	3.23 dBm	0.7039
<i>Procurve 420</i>	-1.63×10^{-15} dBm	3.50 dBm	0.08007
<i>UniFi AP</i>	2.55×10^{-15} dBm	4.32 dBm	0.5543
<i>DAP-2553</i>	-2×10^{-15} dBm	2.74 dBm	0.1381

Tabela 5.2: Análise descritiva ao erro residual $\hat{\epsilon}_\sigma$.

Estes dados sugerem que as hipótese do modelo log-distância são verificadas, atendendo a que todos os modelos apresentam uma média aproximadamente nula. Por outro lado, ao nível de significância de 5%, somos conduzidos a aceitar que os

erros residuais possuem uma distribuição normal. Assim, podíamos aplicar o teorema 3.3 para calcular a percentagem de cobertura mínima.

5.3. Algoritmo dos k Vizinhos Mais Próximos e Filtro de Pareto

Antes de prosseguir, recorde-se que nos capítulos anteriores não foi feita qualquer suposição sobre a origem do mapa de cobertura de sinal G . Assim, somos conduzidos a duas abordagens. Podemos obter o mapa por amostragem empírica, em que é feita uma recolha de dados com o recetor, ou então podemos usar os modelos de propagação e, através da localização de cada um dos emissores, simular uma amostragem.

Note-se que se a amostragem for simulada, vai ser um subconjunto de $\text{Graf}(\tilde{\psi})$. Podemos visualizar $\text{Graf}(\tilde{\psi})$ como um *heatmap*, ou seja, um mapa em que as zonas mais *quentes* correspondem a áreas com melhor cobertura pelos emissores, em dBm. A figura que se segue mostra o *heatmap* obtido através do modelo log-distância no mapa referido no início do capítulo.

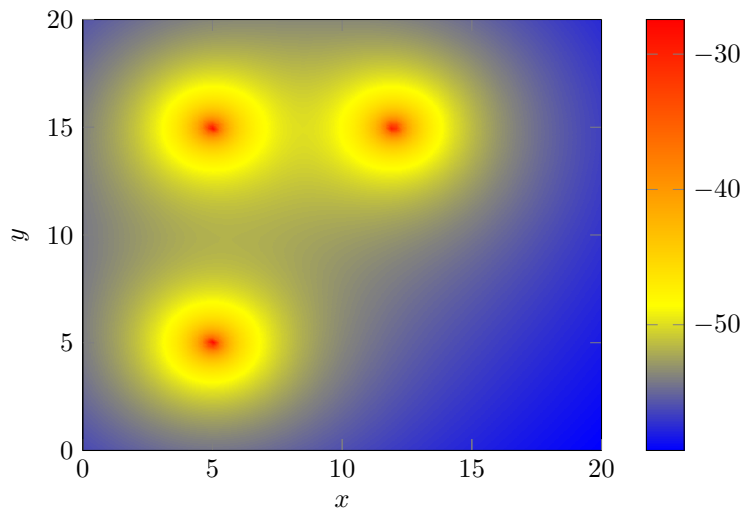


Figura 5.6: *Heatmap* do mapa 5.1.

Apesar do *heatmap* ser uma simulação, permite-nos planejar uma boa amostragem. Por exemplo, poder-se-ia fazer uma abordagem mais densa numa zona com ótima cobertura e pouco densa nas restantes. Se existir uma zona importante que tem pouca cobertura de sinal podemos sempre fazer uma nova distribuição dos emissores.

Passemos agora à apresentação de resultados. Faremos um estudo sobre o desempenho do algoritmo dos k vizinhos mais próximos em função das suas características

5.3 Algoritmo dos k Vizinhos Mais Próximos e Filtro de Pareto

inerentes, o número de vizinhos e a origem de G . Para isso foi criado um mapa com amostragem empírica e outro com simulação. A seguinte figura mostra os locais onde foram obtidas as amostras para o mapa de cobertura de sinal.

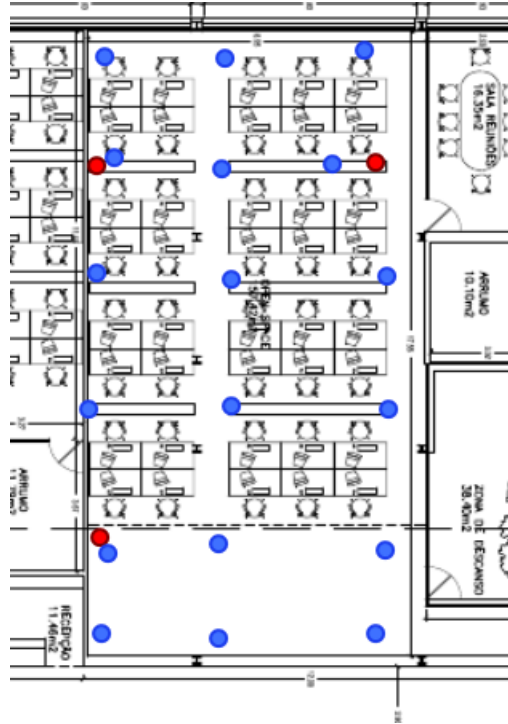


Figura 5.7: Mapa de cobertura de sinal.

O gráfico que se segue compara o desempenho do algoritmo dos vizinhos mais próximos mediante o número de vizinhos e origem de dados.

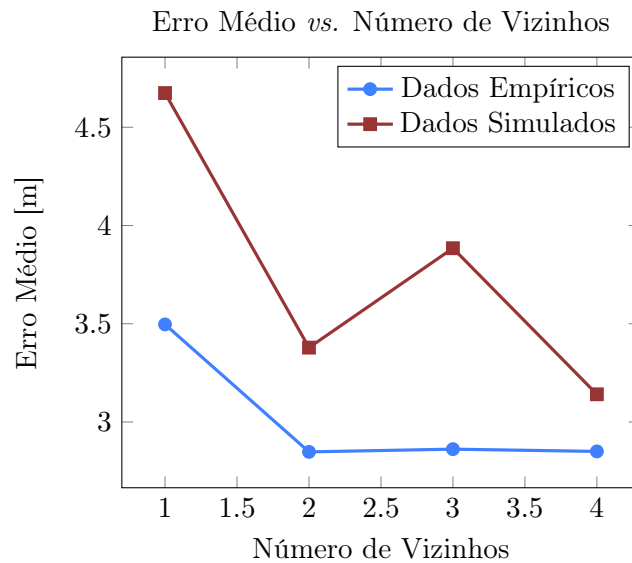


Figura 5.8: Desempenho do algoritmo dos k vizinhos mais próximos.

O gráfico sugere que ambas as abordagens têm erros aceitáveis com um k pequeno. Como seria de esperar, obtemos resultados mais precisos se usarmos dados empíricos. Contudo, o erro observado entre as abordagens não é muito grande. Assim, podemos ver a utilização de simulação como um ótimo compromisso entre a sua rapidez e um erro pequeno em relação ao obtido por métodos empíricos.

Por fim, apresentamos os resultados relativamente ao algoritmo do k vizinho mais próximos equipado com o filtro de Pareto com dados empíricos.

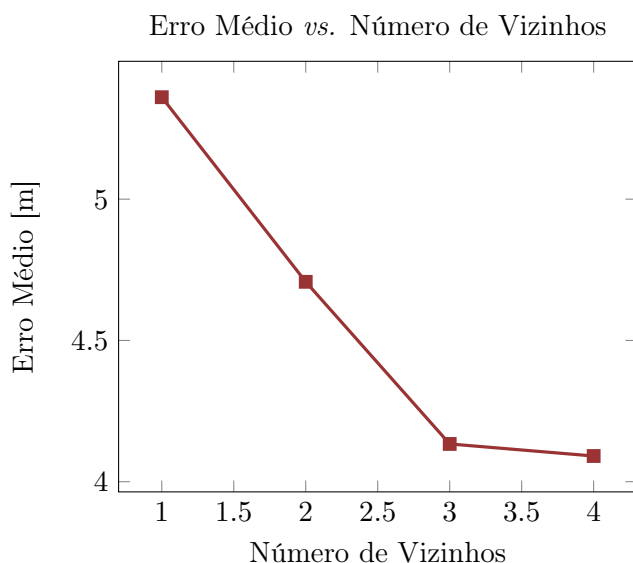


Figura 5.9: Desempenho do algoritmo dos k vizinhos mais próximos com o filtro de Pareto.

O gráfico anterior permite observar que o algoritmo dos vizinhos mais próximos com o filtro de Pareto não possui tanta precisão como a variante original. Isto deve-se ao facto do mapa de cobertura de sinal usado não ser muito denso. Por exemplo, na variante original do algoritmo não há a eliminação de pontos e obtemos uma situação como na figura seguinte.

Ao aplicar o filtro de Pareto a um conjunto pouco denso podemos eliminar pontos que vão ser cruciais para o cálculo do vizinho mais próximo e obter casos degenerados, como na figura que se segue.

Atendendo a erros como flutuações de sinal, sobreposição de frequências, entre outros, o ponto eliminado poderá até ser o próprio vizinho mais próximo. Portanto é natural que o erro diminua à medida que o número de vizinhos aumente, uma vez que o vizinho mais próximo que se segue pode ainda não ter sido eliminado. Para minimizar a ocorrência deste tipo de situações, devemos efetuar uma amostragem

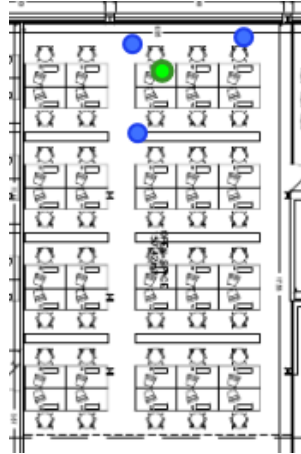


Figura 5.10: Ilustração do algoritmo dos k vizinhos mais próximos, com $k = 3$.

mais densa do local.

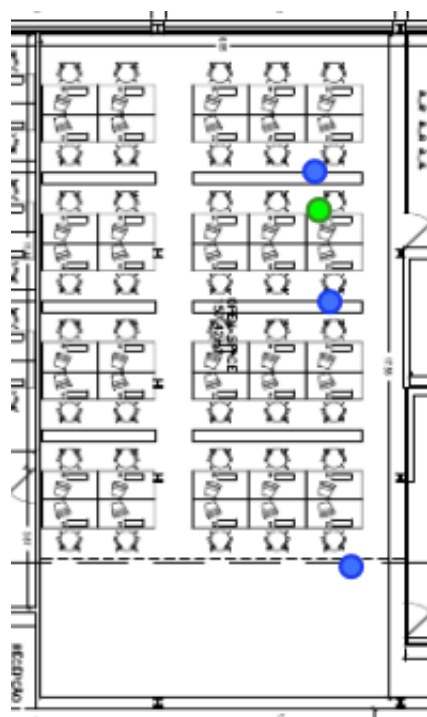


Figura 5.11: Ilustração de um caso degenerado que pode ocorrer no filtro de Pareto.

Capítulo 6

Trabalho Futuro

Ao longo da dissertação, fizemos uma digressão por algumas das abordagens ao problema de localização *indoor* mais conhecidas da atualidade. Contudo, cada abordagem apresentada tem as suas fraquezas. Por isso, também introduzimos mecanismos complementares, como o escalonamento uniforme de distâncias, normalização, filtro de Pareto, entre outros. Em geral, estes mecanismos concedem um comportamento mais fiável e robusto aos algoritmos referidos.

Gostaríamos de estudar até que ponto estes algoritmos podem ser melhorados através dos complementos referidos anteriormente. Para além disso, gostaríamos de estender alguns métodos através de estimação intervalar, de forma a obter um intervalo de confiança para a localização, em contraste com uma simples estimativa a mesma.

Também foi observado que os algoritmos de localização estudados podem ser melhorados se a divisão onde se encontra o recetor for conhecida. Por exemplo, isto permitir-nos-ia aplicar fatores de atenuação no algoritmo de trilateração. De facto, em muitas aplicações, a localização do utente a nível de divisão é mais do que suficiente. Estas considerações motivam o estudo do problema de localização *indoor* como um problema de *supervised learning*, em particular, um problema de classificação. Pretendemos estudar vários classificadores robustos usados em *machine learning*.

Um exemplo de um tal método é o classificador de Bayes que é muitas vezes usado para resolver problemas de classificação, admitindo certas condições de independência. Pretende-se estudar também algoritmos de classificação conhecidos, como regressão logística e vários tipos de redes neuronais.

Por fim, pretende-se estudar até que ponto é que podemos usar o *heatmap* para decidir como fazer uma boa amostragem de forma a obter um bom mapa de cobertura de sinal. Em particular, queremos analisar como é o *heatmap* se relaciona com o erro através de *conjuntos de teste e validação*. Cremos que esta abordagem é a chave

para melhorar a precisão de certos algoritmos como o filtro de Pareto.

Bibliografia

- [AH74] Alfred V Aho and John E Hopcroft, *The design and analysis of computer algorithms*.
- [BP00] Paramvir Bahl and Venkata N Padmanabhan, *RADAR: An in-building RF-based user location and tracking system*, INFOCOM 2000. Nineteenth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Proceedings. IEEE, vol. 2, IEEE, 2000, pp. 775–784.
- [ERRJ95] Gamma Erich, Helm Richard, Johnson Ralph, and Vlissides John, *Design patterns: elements of reusable object-oriented software*, Reading: Addison Wesley Publishing Company (1995).
- [Fel71] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1971.
- [GP06] Brian Goetz and Tim Peierls, *Java concurrency in practice*, Addison-Wesley Professional, 2006.
- [R⁺96] Theodore S Rappaport et al., *Wireless communications: principles and practice*, vol. 2, Prentice Hall PTR New Jersey, 1996.
- [Rec01] ITUR Recommendations, *Propagation data and prediction methods for the planning of indoor radiocommunication systems and radio local area networks in the frequency range 900MHz to 100GHz*, ITU Recommendations (2001).
- [SR92] Scott Y Seidel and Theodore S Rappaport, *914 MHz path loss prediction models for indoor wireless communications in multifloored buildings*, Antennas and Propagation, IEEE Transactions on **40** (1992), no. 2, 207–217.