SISTEMA MASSA - MOLA

Sónia Maria Pereira Seco

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Sistema massa-mola

Sónia Maria Pereira Seco

Orientadora: Professora Doutora Maria de Fátima Silva Leite

Relatório para a obtenção do Grau de **Mestre em Ensino da Matemática**

no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Júri

Presidente: Professora Doutora Isabel Maria Narra de Figueiredo

Orientadora: Professora Doutora Maria de Fátima da Silva Leite

Vogal: Professor Doutor Júlio Severino das Neves

Data: setembro 2012

Resumo

Este relatório incide sobre algumas das aplicações das equações diferenciais na área da Física. É composto por duas partes: uma, de carácter mais científico, que corresponde ao que foi desenvolvido no âmbito do Projeto Educacional I, e outra, de carácter pedagógico, desenvolvida em ambiente escolar no âmbito do Projeto Educacional II.

Na primeira parte, apresentam-se os fundamentos teóricos sobre equações diferenciais lineares necessários a desenvolvimentos posteriores. Seguidamente é abordado o sistema massa-mola e são estudados os respetivos movimentos oscilatórios. Por fim, apresenta-se o estudo matemático de um salto de bungee jumping.

Na segunda parte descrevem-se as atividades desenvolvidas, em sala de aula, com os alunos de matemática do nono ano e com os alunos de física do décimo segundo ano de escolaridade. Nas atividades do nono ano, os discentes contactaram com a história das equações quadráticas e tomaram consciência da sua aplicabilidade em contexto real. No décimo segundo ano, os alunos já possuíam alguns conhecimentos sobre movimentos oscilatórios. As atividades realizadas pretenderam dar ênfase à importância das equações diferenciais naquela área, destacando-se ainda, a aplicação das equações quadráticas na resolução de equações diferenciais. Acresce referir que estas atividades possibilitaram aos alunos um complemento aos conteúdos programáticos, uma vez que as equações diferenciais não são objeto de estudo do programa de matemática do ensino secundário.

Finalmente, apresenta-se uma reflexão pessoal sobre o trabalho desenvolvido.

Palavras Chave: Equações diferenciais, equações quadráticas, sistema massa-mola, movimento harmónico.

Abstrat

The present report is about some of the applications of differential equations in Physics. It is divided into two parts: one, of a more scientific type, corresponding to what was developed during Educational Project I; the other, a pedagogical kind, developed in a school as part of Educational Project II.

The first part, presents the theoretical basis of linear differential equations which are necessary for further development. Then, the mass-spring system is approached together with its oscillating movements. Finally, there is a full mathematical study of a bungee-jumping jump.

The second part, describes the activities developed in the classroom with grade-nine students of Mathematics and with grade-twelve students of Physics. The activities of grade nine included the History of quadratic equations and their viability in real context. The twelfth grade students, who had already some knowledge of oscillating movements, performed activities emphasizing the importance of differential equations in that specific field, focusing on the application of quadratic equations to solve differential equations. One should also refer that these activities gave the students the opportunity to add contents to the normal syllabus, given that differential equations are not object of study for secondary school students.

The report is concluded with a personal review on the work done.

KEY WORDS: Differential equations, quadratic equations, mass spring system, harmonic movement.

Agradecimentos

Agradeço…

Em primeiro lugar, à minha orientadora, Professora Doutora Maria de Fátima Silva Leite, pelo incentivo e pronta orientação, que sempre me concedeu.

Aos meus colegas Paula e Nuno pela disponibilidade na cedência das turmas onde foram aplicadas as atividades.

Aos alunos envolvidos, pelo seu forte e imprescindível empenho.

À Guida e à Lurdes que me acompanharam neste percurso e, em especial à Guida por todo o tempo que partilhámos em reflexão.

À Isabel, à Rita e à Maria José pelo incentivo e ajuda.

À minha família pelo apoio incondicional em todos os momentos.

Índice

Índice de figuras

Introdução

"A quadratic equation is not like a bleak room, devoid of furniture, in which one is asked to squat.
It is a door to a room full of the unparalleled riches of human intellectual achievement.
If you do not go through that door . . . much that passes for human wisdom will be forever denied you."
Tony McWalter

O papel da matemática é reconhecido no desenvolvimento de um país pelas suas aplicações nos diferentes campos de atividades, tornando-se assim, numa disciplina essencial na formação integral dos cidadãos.

Corria o ano de 2003, quando as equações quadráticas fizeram manchete na rádio e imprensa inglesas e, mais surpreendentemente, no Parlamento do Reino Unido. Na base deste acontecimento esteve o comentário proferido por Terry Bladen, presidente, à data, da National Association of Schoolmasters Union of Women Teachers. Este professor de matemática considerou as equações quadráticas como sendo um tópico de difícil entendimento para os adolescentes e sem grande aplicabilidade futura. Na sua opinião, este deveria ser mesmo retirado do currículo da matemática do ensino obrigatório. Tony McWalter, com formação em filosofia e matemática pura, face à ausência de refutação por parte do governo e pelas suas convicções levou o assunto ao Parlamento, promovendo um debate sobre as equações quadráticas [12]. Tony McWalter relembrou as remotas origens destas equações e salientou que, desde então, a sua aplicação a problemas da vida real foi uma constante. Mais referiu, que muitas das descobertas científicas realizadas ao longo da história só foram possíveis com o conhecimento deste tipo de equações que considerou como a base da ciência moderna.

Inspirados no debate ocorrido no Parlamento, Crhis Budd e Sangwin Chris são autores de dois artigos, " 101 uses of a quadratic equation" [4] e "101 uses of a quadratic equation: Part II" [5], que surgem em defesa das equações quadráticas. Nestes artigos, é louvada, de uma forma simples e eficaz, a aplicabilidade das equações quadráticas desde o seu aparecimento por volta de 3000 a.C., com os babilónicos. Algumas dessas aplicações podem ser encontradas no cálculo de impostos, na descrição das órbitas dos planetas em volta do sol, na trajetória de um projétil de artilharia, no cálculo da distância de travagem de um carro que circula a uma determinada velocidade. Com Newton e as suas leis do movimento surgem as equações diferenciais que estão no centro de diversas aplicações da matemática a fenómenos naturais. Tendo em conta que a determinação de soluções duma equação diferencial ordinária linear de coeficientes constantes e ordem dois envolve a resolução de uma equação quadrática, os autores realçam, ainda, a sua aplicabilidade ao nível da engenharia, aeronáutica e das telecomunicações.

Em consequência de todos estes acontecimentos foi reconhecida a importância da matemática, e em particular das equações quadráticas, em todas as fases da educação de modo a garantir que todos jovens pudessem adquirir competências como cidadãos, matemáticos, cientistas e engenheiros do futuro.

A defesa das equações quadráticas através das suas aplicações a várias áreas do conhecimento foi o repto lançado inicialmente. Face ao abrangente tema, o presente relatório incide sobre algumas das aplicações das equações diferenciais com especial relevo no âmbito da física e, em particular na mecânica dos movimentos oscilatórios. A sua estrutura inclui dois capítulos principais que correspondem ao desenvolvimento do Projeto Educacional I e II, respetivamente.

No capítulo I, são apresentados os fundamentos teóricos sobre equações diferenciais lineares necessários para desenvolvimentos posteriores. Em particular, mostra-se a relevância das equações quadráticas na determinação de soluções, quando a equação é homogénea e tem coeficientes constantes, e expõem-se um método, denominado Método de Lagrange, que permite a obtenção de uma solução particular quando estas equações diferenciais são completas. Seguidamente é abordado o sistema massa-mola e, consoante o tipo de forças que atuam sobre o sistema, são estudados os respetivos movimentos oscilatórios. Termina-se o capítulo com o estudo matemático de um salto real de bungee jumping.

No capítulo II, são descritas as atividades desenvolvidas com os alunos de uma turma do nono ano, numa aula de matemática, e com os alunos duma turma de décimo segundo ano, numa aula de Física. Na turma do nono ano, os alunos foram divididos em quatro grupos tendo em conta a sua orientação vocacional e o desempenho na disciplina. Tendo em conta constituição dos grupos planificaram-se diferentes atividades, com objetivos específicos de acordo com a sua especificidade, de modo a sensibilizar para a importância e aplicabilidade das equações quadráticas em contexto real. A turma do décimo segundo, com a opção de física no currículo, era constituída por alunos que já possuíam alguns conhecimentos sobre movimentos oscilatórios. As atividades implementadas, pretenderam dar ênfase à importância das equações diferenciais naquela área, destacando por sua vez a aplicação das equações quadráticas na resolução de equações diferenciais.

Por fim, apresenta-se uma reflexão pessoal sobre o trabalho desenvolvido.

Capítulo I – Projeto Educacional I

1.1 Revisitando equações diferenciais ordinárias[1]

Uma equação diferencial ordinária (EDO) linear escreve-se na forma

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t) \tag{1}$$

sendo a_i e b funções reais de variável real conhecidas. As funções a_i são chamadas coeficientes da equação diferencial e b o segundo membro da equação.

Se o segundo membro da equação (1), $b(t)$, for a função identicamente nula, a equação diz-se homogénea e escreve-se na forma

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0. \tag{2}$$

Caso contrário, a equação diz-se não homogénea ou completa.

Se todos os coeficientes, da equação (1), forem constantes a equação designa-se por equação diferencial ordinária linear de coeficientes constantes.

Definição 1:

Diz-se que uma função $x = x(t)$ *é solução da EDO* (1), *num certo intervalo* $I \subset \mathbb{R}$, *se concomitantemente com as suas derivadas até à ordem* n, *satisfaz identicamente a equação diferencial no intervalo* I.

Sem perda de generalidade considere-se que I é um intervalo aberto.

Definição 2:

O conjunto de todas as soluções de (1), *em* I, *chama-se solução geral de* (1) *em* I.

[1] *A redação desta secção teve por principais fontes as referências* [15] e [20].

Teorema 1: ***(Existência e unicidade de solução)***

Sejam $a_1, \dots, a_n$ e b funções contínuas num certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sejam t_0 um ponto qualquer de I e $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ quaisquer n números reais.

Então, existe uma e uma só solução $x = x(t)$, em I, da equação diferencial (1), *satisfazendo as condições iniciais*

$$x(t_0) = \alpha_0\ ,\ x^{'}(t_0) = \alpha_1, \dots,\ x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_{n-1}.$$

A partir deste momento considerar-se-ão apenas as equações diferenciais ordinárias lineares que se encontram nas condições do anterior teorema. Acresce ainda referir que, sempre que se faça referência a uma solução subentende-se que se trata de uma solução no intervalo I onde o teorema é válido.

Seguidamente são apresentadas algumas propriedades das soluções das EDO's lineares homogéneas uma vez que estas são particularmente importantes para a determinação das soluções de uma EDO linear não homogénea.

Teorema 2:

O conjunto $S_0(I)$ constituído pela totalidade das soluções em I da equação diferencial ordinária linear homogénea (2) *forma um espaço vetorial real de dimensão n.*

Definição 3:

Qualquer base do espaço vetorial $S_0(I)$ designa-se por sistema fundamental de soluções (SFS) da equação diferencial (2).

Corolário 1 :

Se $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação (2) *então a sua solução geral é da forma*

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t),$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes reais arbitrárias.

Teorema 3:

O conjunto das soluções da equação diferencial completa (1) *forma um espaço afim do espaço vetorial do Teorema 2, pelo que a solução geral da equação* (1) *é da forma*

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

onde $x_p(t)$ *é uma qualquer solução particular de* (1) *e* $x_h(t)$ *é solução geral da equação homogénea associada.*

Neste relatório dar-se-á especial atenção ao estudo do caso particular das equações diferenciais ordinárias lineares de ordem dois e de coeficientes constantes, isto é, equações da forma

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = b(t), \tag{3}$$

com a_1 e a_2 constantes reais e $b(t)$ uma função contínua em I.

De acordo com o teorema 3, para encontrar as soluções da equação (3) é necessário, em primeiro lugar, estudar a equação homogénea associada

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0. \tag{4}$$

Introduz-se de seguida alguns conceitos e propriedades sobre as soluções das equações diferenciais ordinárias, lineares de ordem dois e de coeficientes constantes.

Teorema 4: (**Critério de independência linear das soluções**)

Duas soluções $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ *da equação diferencial* (4)*, **são linearmente independes** se e só se*

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)\, x'_2(t) - x_2(t)\, x'_1(t) \quad \textit{for diferente de zero para todo o } t\,.$$

OBSERVAÇÃO: A demonstração deste teorema permitir inferir que quaisquer duas funções, $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$, que verificam $\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$ são linearmente independentes, sendo ou não soluções da equação (4).

Face ao exposto até ao momento, e tendo em conta o corolário 1, pode inferir-se que para determinar as soluções da equação (4) será necessário encontrar duas soluções linearmente independentes. Assim sendo, a determinação dum SFS da equação (4) envolve a determinação das raízes de uma equação algébrica, do segundo grau, construída à custa dos coeficientes a_1 e a_2.

Definição 4:

Chama-se equação característica associado à EDO linear homogénea de coeficientes constantes (*4) à equação*

$$r^2 + a_1 \mathrm{r} + a_2 = 0. \tag{5}$$

Tendo em conta que a equação a característica (5) é uma equação quadrática, de acordo com o sinal do binómio discriminante, pode admitir duas raízes reais diferentes, uma única raiz real ou duas raízes complexas conjugadas. As soluções da equação diferencial (4) estão relacionadas com a natureza das raízes da equação característica associada. O teorema seguinte traduz essa relação e, para cada caso, indica um sistema fundamental de soluções para a equação diferencial (4).

Teorema 5: *Considere-se a equação diferencial ordinária linear homogénea de ordem dois e de coeficientes constantes* (4)*.*

1. *Se* r_1 e r_2 *são duas raízes reais distintas da equação característica* (5) *então* $\{\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1 \mathrm{t}}, \mathrm{e}^{\mathrm{r}_2 \mathrm{t}}\}$ *constitui um SFS da equação* (4);
2. *Se* r_1*é a única raiz real da equação característica* (5) *então* $\{\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1 \mathrm{t}}, \mathrm{t}\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1 \mathrm{t}}\}$ *constitui um SFS da equação* (4);
3. *Se* $\alpha \pm \beta \mathrm{i}$ *é um par de raízes complexas conjugadas da equação característica* (5), *então* $\{\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{t}} \cos(\beta \mathrm{t}), \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{t}} \sin(\beta \mathrm{t})\}$ *constitui um SFS da equação* (4).

<u>Demonstração:</u>

A demonstração do teorema consiste em provar, para cada um dos tipos de raízes da equação característica, que o conjunto apresentado é um SFS, ou seja, que os elementos que o constituem são solução da equação (4) e são linearmente independentes.

1. Sejam r_1 e r_2 duas raízes reais distintas da equação característica (5).

   Considere-se $x_1(t) = \mathrm{e}^{r_1 \mathrm{t}}$ e as suas derivadas até à ordem dois

$$x'_1(t) = \mathrm{r}_1 \mathrm{e}^{r_1 \mathrm{t}} \quad \text{e} \quad x''_1(t) = \mathrm{r}_1{}^2 \mathrm{e}^{r_1 \mathrm{t}}.$$

Substituindo em (4), tem-se que:

$$e^{r_1 t}({r_1}^2 + a_1 r_2 + a_2) = 0.$$

Dado que r_1 é solução da equação característica associada a (4), obtém-se a identidade $0 \equiv 0$.

Logo está provado que $x_1(t)$ é solução da equação (4).

De forma idêntica se conclui que $x_2(t) = e^{r_2 t}$ é solução de (4).

Resta provar que as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são linearmente independentes.

Ora,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} &= e^{r_1 t} r_2 e^{r_2 t} - e^{r_2 t} r_1 e^{r_1 t} \\ &= r_2 e^{(r_1+r_2)t} - r_1 e^{(r_1+r_2)t} \\ &= e^{(r_1+r_2)t}(r_2 - r_1) \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

dado que r_1 e r_2 são raízes reais distintas e, para todo $t \in \mathbb{R}$, $e^{(r_1+r_2)t} > 0$.

Assim, pelo teorema 4, $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes, pelo que $\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$ constitui um SFS da equação (4).

2. Para $x_1(t) = e^{r_1 t}$ está provado, em 1., que é solução de (4).

Considere-se agora $x_2(t) = te^{r_1 t}$ e as suas derivadas até à ordem dois

$$x'_2(t) = e^{r_1 t} + r_1 te^{r_1 t} \quad \text{e} \quad x''_2(t) = 2r_1 e^{r_1 t} + {r_1}^2 te^{r_1 t}.$$

Substituindo no primeiro membro da equação (4), vem:

$$\begin{aligned}2r_1 e^{r_1 t} + {r_1}^2 te^{r_1 t} + a_1 e^{r_1 t} + a_1 r_1 te^{r_1 t} + a_2 te^{r_1 t} &= e^{r_1 t}(2r_1 + a_1) + e^{r_1 t} t({r_1}^2 + a_1 r_1 + a_2) \\ &= 0,\end{aligned}$$

tendo em conta que r_1 é raiz da equação (5) e que, sendo dupla, se tem $r_1 = -\frac{a_1}{2}$.

Provou-se então que $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ satisfazem a equação diferencial (4).

Prove-se, em seguida, que estas soluções são linearmente independentes.

Ora,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} e^{r_1 t} & te^{r_1 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & e^{r_1 t} + r_1 te^{r_1 t} \end{vmatrix} &= e^{2r_1 t} + r_1 te^{2r_1 t} - r_1 te^{2r_1 t} \\ &= e^{2r_1 t} \\ &\neq 0,\end{aligned}$$

dado que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $e^{2r_1 t} > 0$.

Pelo teorema 4, as soluções são linearmente independentes, donde $\{e^{r_1 t}, te^{r_1 t}\}$ constitui um SFS da equação (4).

3. Prove-se, em primeiro lugar, a independência linear das funções

$$x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

Ora,

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)) & e^{\alpha t}(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)) \end{vmatrix} =$$

$= e^{\alpha t}\cos(\beta t)\ e^{\alpha t}(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)) - e^{\alpha t}\sin(\beta t)\, e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t))$

$= e^{2\alpha t}\alpha\sin(\beta t)\cos(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\cos^2(\beta t) - e^{2\alpha t}\alpha\sin(\beta t)\cos(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\sin^2(\beta t)$

$= \beta e^{\alpha t}$.

Tendo em conta que $\beta \neq 0$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha t} > 0$ pode inferir-se que o determinante será sempre diferente de zero. Atendendo ao teorema 4, fica provado que as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são linearmente independentes.

Resta provar que, para além disso, as funções são soluções da equação (4).

Considere-se $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, as suas derivadas até à ordem dois e substituam-se no primeiro membro da equação (4), tem-se que:

$\alpha^2 e^{\alpha t}\cos(\beta t) - 2\alpha\beta e^{\alpha t}\sin(\beta t) - \beta^2 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + a_1(\alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t)) + a_2(e^{\alpha t}\cos(\beta t)) =$

$= (a_2 + a_1\alpha + \alpha^2 - \beta^2)\, e^{\alpha t}\cos(\beta t) + (-2\alpha\beta - a_1\beta)\, e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

Pelo facto das funções $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ e $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ serem linearmente independentes, pode inferir-se que a combinação linear obtida é nula apenas se cada um dos coeficiente for igual a zero.

Resta então provar que:

$$a_2 + a_1\alpha + \alpha^2 - \beta^2 = 0 \ \text{ e } \ -2\alpha\beta - a_1\beta = 0.$$

Tendo em conta a natureza das soluções da equação (5), complexas conjugadas, da forma $\alpha \pm \beta i$, tem-se que:

$$\alpha = -\frac{a_1}{2} \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{4a_2 - {a_1}^2}}{2}.$$

Assim sendo,

$$a_2 + a_1\alpha + \alpha^2 - \beta^2 = a_2 - \frac{{a_1}^2}{2} + \frac{{a_1}^2}{4} - a_2 + \frac{{a_1}^2}{4} = 0,$$

e

$$-2\alpha\beta - a_1\beta = \beta(-2\alpha - a_1) = \frac{\sqrt{4a_2 - {a_1}^2}}{2}\left(\frac{2a_1}{2} - a_1\right) = 0\,.$$

Provou-se então que $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ é solução da equação (4).

De forma idêntica se verifica que $x_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ é solução de (4).

Tendo em conta $x_1\ (t)$ e $x_2\ (t)$ são soluções linearmente independentes da equação (4), tem-se que $\{\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\,,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\}$ constitui um SFS da mesma equação.$\square$

Tendo em conta o teorema 3, sabe-se que a solução da equação completa (3) é dada pela adição da solução da equação homogénea associada com uma das suas soluções particulares. O teorema 5 apresenta um sistema fundamental de soluções para a equação homogénea (4), resta encontrar um processo que permita determinar uma qualquer solução particular da equação completa (3). O Método de Lagrange ou Método da variação das constantes arbitrárias, que se expõem em seguida, permite encontrar essa solução.

Teorema 6: ***(Método de Lagrange ou Método da variação das constantes arbitrárias)***

Se $\{x_1(t), x_2(t)\}$ *constitui um SFS da equação diferencial ordinária linear homogénea associada à equação completa* (3), *e* $c_1(t)$ *e* $c_2(t)$ *são funções cujas derivadas satisfazem o sistema de Lagrange*

$$\begin{cases} c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) = 0 \\ c'_1(t)x_1'(t) + c'_2(t)x_2'(t) = b(t) \end{cases} \tag{6}$$

então

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

é solução particular da equação diferencial completa (3).

<u>Demonstração</u>:

Para demonstrar este teorema será necessário começar por garantir a existência das funções $c_1(t)\ e\ c_2(t)$ e, posteriormente, provar que $x_p(t)$ é solução da equação de (3).

Utilizando um importante resultado da Álgebra Linear, que afirma que um sistema linear de n equações a n incógnitas é possível e determinado se o seu determinante principal for diferente de zero, pode garantir-se a existência e unicidade de $\mathrm{c'}_1(\mathrm{t})$ e $\mathrm{c'}_2(\mathrm{t})$.

Ora, o sistema de Lagrange é linear e constituído por duas equações e duas incógnitas, $\mathrm{c'}_1(\mathrm{t})$ e $\mathrm{c'}_2(\mathrm{t})$, sendo o seu determinante principal dado por $\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix}$. Por outro lado, e por hipótese, $\{x_1(\mathrm{t}), x_2(\mathrm{t})\}$ é um SFS da equação homogénea (4) o que permite inferir que as soluções

$x_1(t)$ e $x_2(t)$ são linearmente independentes. Assim, pode afirmar-se que o determinante $\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) \end{vmatrix} \neq 0.$

Fica assim garantido que o sistema de Lagrange é possível e determinado pelo que, está garantida a existência e unicidade de $c'_1(t)$ e $c'_2(t)$ e, consequentemente, fica provado que as funções $c_1(t)$ e $c_2(t)$ existem.

Resta demonstrar que $x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ é solução de (3).

Derivando e tendo em consideração as condições do sistema (6) tem-se que:

$$x'_p(t) = c_1(t)x'_1(t) + c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) + c_2(t)x'_2(t)$$
$$x'_p(t) = c_1(t)x'_1(t) + c_2(t)x'_2(t)$$

e

$$x''_p(t) = c'_1(t)x'_1(t) + c_1(t)x''_1(t) + c'_2(t)x'_2(t) + c_2(t)x''_2(t)$$
$$x''_p(t) = c_1(t)x''_1(t) + c_2(t)x''_2(t) + b(t).$$

Substituindo estas funções no primeiro membro da equação (3) e simplificando vem que:

$c_1(t)x''_1(t) + c_2(t)x''_2(t) + b(t) + a_1c_1(t)x'_1(t) + a_1c_2(t)x'_2(t) + a_2c_1(t)x_1(t) + a_2c_2(t)x_2(t) =$

$= b(t) + c_1(t)\big(x''_1(t) + a_1x'_1 + a_2x(t)\big) + c_2(t)\big(x''_2(t) + a_1x'_2(t) + a_2x_2(t)\big)$

$= b(t)$,

dado que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções de (4).

Está então provado que $x_p(t)$ é uma solução particular da equação diferencial completa (3). □

1.2 Sistema massa-mola[2]

Tendo por base os conceitos apresentados anteriormente, pretende-se estudar aplicações no âmbito da Física e, em particular, na mecânica dos movimentos oscilatórios. De seguida enunciam-se duas importantes leis da física, com relevante importância neste relatório.

Lei de Hooke

A força elástica (ou força restauradora), F_e, de uma mola atua sempre com sentido oposto à deformação, x, e é proporcional ao valor desta. Assim, pode afirmar-se que existe uma constante k, designada por constante da mola, tal que:

$$F_e = -kx.$$

Segunda lei de Newton

A resultante das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto entre a massa e a sua aceleração, sendo a aceleração dada pela segunda derivada da função posição em ordem ao tempo. Esta lei é traduzida por:

$$F_r = mx''.$$

Considere-se um sistema composto por uma mola flexível e um corpo de massa m que é colocado na sua extremidade (Figura 1). Supõe-se que a massa da mola é residual relativamente à massa do corpo e, por isso, desprezável.

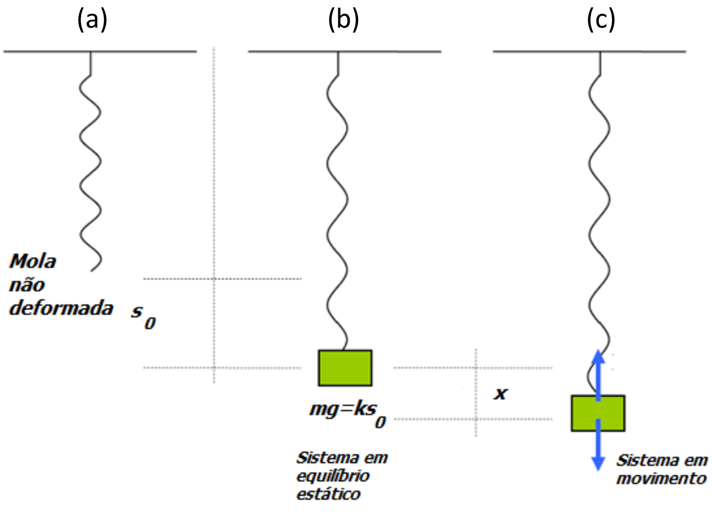


Figura 1 - Sistema massa-mola

[2] *A redação desta secção teve por fontes as referências* [3], [8], [10], [11], [14] e [21]. *As figuras foram retiradas das referências* [1], [10] e [11].

Quando o corpo é colocado na extremidade da mola ficará sujeito, de imediato, a duas forças:

1) a força da gravidade, $F_1 = mg$, sendo g a intensidade da aceleração da gravidade;

2) a força restauradora da mola, exercida por esta quando deformada.

Diz-se, ainda, que o corpo ocupa a posição de equilíbrio estático (Figura 1(b)) quando a mola apresenta um alongamento, s_0, tal que a resultante da força restauradora da mola e da força da gravidade é nula. Nesta posição a força restaurada da mola agirá para cima e tem-se que $ks_0 = mg$.

Designe-se por $x(t)$ o deslocamento do corpo, a partir da posição de equilíbrio estático, no instante t, com sentido positivo voltado para baixo. De acordo com a lei de Hooke, a força da mola que corresponde a um deslocamento x é dada por $F_2 = -ks_0 - kx$.

Acresce referir que, para além destas duas forças, o corpo pode ainda estar sujeito a outro tipo de forças, nomeadamente forças amortecedoras e/ou forças externas. A especificidade destas vai influenciar a resultante das forças que atuam sobre o corpo, F_r, e, tendo em conta a segunda lei de Newton, pode escrever-se que $F_r = mx''$. Assim, a equação do movimento do corpo é uma equação diferencial que tomará diferentes formas de acordo com os tipos de forças que atuam sobre o corpo. Estude-se cada um desses casos.

<u>Movimento harmónico simples</u>

Considere-se um sistema em que a resultante das forças exercidas está traduzida em

$$F_r = F_1 + F_2$$
$$F_r = mg - k(s_0 + x)$$
$$F_r = -kx$$

Recorrendo à segunda lei de Newton, obtém-se a EDO linear de ordem dois e de coeficientes constantes

$$mx'' = -kx,$$

ou

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Considerando $\omega^2 = \frac{k}{m}$, obtêm-se a **equação do oscilador harmónico simples**

$$x'' + \omega^2 x = 0. \tag{7}$$

Pelo facto das raízes da equação característica associada à equação (7) serem da forma $\pm\omega i$, o teorema 5 e o corolário 1, garantem que a equação (7) tem como solução geral

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t), \text{ com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

Esta expressão traduz a **lei do movimento harmónico simples**.

Sem perda de generalidade, sendo $A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$, $c_1 = A\cos\phi$ e $c_2 = A \operatorname{sen}\phi$, $x(t)$ pode escrever-se na forma

$$\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t - \phi)}, \text{ com } A \text{ e } \phi \text{ constantes arbitrárias.}$$

Ao valor de A chama-se amplitude do movimento oscilatório e ω denomina-se por frequência angular do oscilador. Este movimento, representado na figura 2, é periódico, de período $\frac{2\pi}{\omega}$, e o corpo executa $\frac{\omega}{2\pi}$ ciclos por segundo

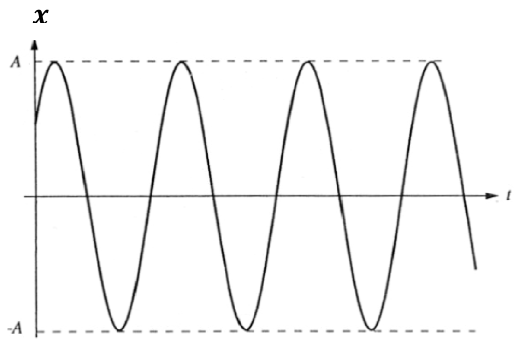


Figura 2 - Representação gráfica de um movimento harmónico simples para $0 < x(0) < \mathrm{A}$ e $x'(0) > 0$

Movimento harmónico amortecido

Considere-se que sobre o sistema massa-mola focado anteriormente atua também uma força de sentido contrário ao estabelecido para o movimento. Esta força, denominada força amortecedora, pode surgir em consequência das condições físicas do meio ambiente ou de forças resistivas. Considere-se que a força amortecedora é proporcional à velocidade do corpo, isto é, $F_3 = -\beta x'$, com $\beta > 0$ e denominada constante de amortecimento.

A resultante das forças que atuam no sistema massa-mola passará a ser $F_r = -kx - \beta x'$ e, pela segunda lei de Newton, a equação diferencial que se obtém é da forma

$$mx'' = -kx - \beta x'.$$

Dividindo por m e considerando, por conveniência algébrica, $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$, obtêm-se a **equação do oscilador harmónico amortecido**

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0. \tag{8}$$

Atendendo ao teorema 5, a solução geral da equação diferencial (8) vai depender do tipo de raízes que a equação característica associada apresentar. Estude-se cada um dos casos possíveis.

1) $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

As raízes da equação característica são reais e distintas pelo que, atendendo ao corolário 1, a solução geral da equação (8) é da forma:

$$\boldsymbol{x(\,t) = c_1\, e^{\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\right)t}}$$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

Esta expressão traduz a **lei do movimento harmónico super-amortecido** sendo a constante de amortecimento, β, superior à constante, k, da mola.

Neste tipo de movimento, o corpo quase não oscila e, com o passar do tempo, tende a estabilizar na sua posição de equilíbrio (uma vez que $e^{\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\right)t} \longrightarrow 0$ e $e^{\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\right)t} \longrightarrow 0$), conforme se pode verificar na Figura 3.

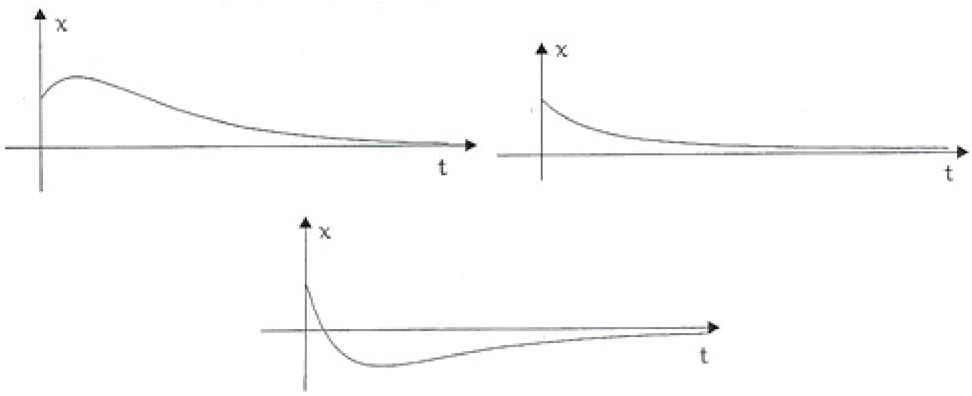


Figura 3 - Exemplos de representações gráficas do movimento harmónico super-amortecido com $\boldsymbol{x(0)} > 0$

2) $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

A equação característica associada admite apenas uma raiz real, $-\lambda$, de multiplicidade dois.
Tendo em conta o corolário 1, a solução geral de (8) é da forma

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-\lambda t} + c_2\,\mathrm{t}\,\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

ou

$$\boldsymbol{x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t)},\text{ com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

Esta expressão traduz a **lei do movimento harmónico criticamente amortecido**.

Pelo facto de $(c_1 + c_2\mathrm{t})$ admitir, no máximo, um zero positivo e tendo em conta que $\mathrm{e}^{-\lambda t} \neq 0$, para todo o t, pode inferir-se que neste movimento o corpo passa, no máximo, uma vez pela posição de equilíbrio.
A representação gráfica do movimento harmónico amortecido tem o mesmo aspeto do apresentado no caso anterior.

3) $\lambda^2 - w^2 < 0$

A equação característica associada à equação (8) admite duas raízes complexas conjugadas.

$$-\lambda \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, i.$$

Pelo corolário 1, a solução geral de (8) é

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + c_2\, sen\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t\right),\text{ com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

Ou, de outra forma, sendo $A = \sqrt{{c_1}^2 + {c_2}^2}$, $c_1 = A\cos\phi$ e $c_2 = A\,\mathrm{sen}\,\phi$,

$$\boldsymbol{x(t) = \mathrm{A}\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t - \phi\right)},\text{ com } A \text{ e } \phi \text{ constantes arbitrárias.}$$

Esta expressão traduz a **lei do movimento harmónico sub-amortecido**, sendo a constante de amortecimento, β, inferior à constante, k, da mola. Este movimento, embora não seja periódico, apresenta oscilações que decrescem exponencialmente e, à semelhança dos anteriores movimentos amortecidos, o corpo tende para a posição de equilíbrio.
Pelo facto de,

$$-1 \leq \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t - \phi\right) \leq 1,$$

tem-se que,

$$-\mathrm{A}\mathrm{e}^{-\lambda t} \leq x(t) \leq \mathrm{A}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Ao valor de $\mathrm{A}e^{-\lambda t}$ chama-se *amplitude de amortecimento das oscilações*, o valor $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ designa-se por *quase frequência* do oscilador e o valor $\frac{2\pi}{\omega_1}$ denomina-se por *quase período*.

Devido ao comportamento da função $\cos(\omega_1 t - \phi)$ tem-se que $x(t)$ admitirá um máximo para $t_1 = \frac{\phi}{\omega_1}$ e o seu valor será $x(t_1) = \mathrm{A}e^{-\lambda t_1}$.

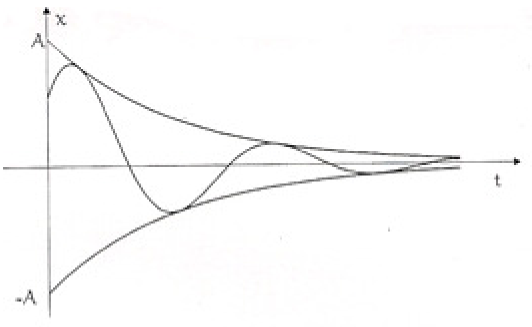


Figura 4 - Representação gráfica de um movimento harmónico sub-amortecido $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{0}) > 0$ e $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{0}) > 0$

Movimento harmónico forçado

Considere-se agora que uma força externa, $b(\mathrm{t})$, atua sobre o sistema massa-mola referido anteriormente. A resultante das forças incluirá também a força externa, pelo que, recorrendo à segunda lei de Newton, pode escrever-se $mx'' = -kx - \beta x' + b(t)$, ou de modo equivalente,

$$mx'' + \beta x' + kx = b(t) .$$

Considere-se que a força externa é periódica e do tipo $b(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$, com $F_0 > 0$ e $\omega_0 > 0$. A **equação do oscilador harmónico forçado** é dada por

$$x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = E_0 \sin(\omega_0 t) \qquad (9)$$

com $E_0 = \frac{F_0}{m}$, $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ e $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Tendo em conta o teorema 3, a determinação da solução geral da equação (9) envolve a determinação das soluções da equação homogénea associada e de uma solução particular da equação completa (9), sendo da forma $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

Neste caso diz-se que $x(t)$ traduz a **lei do movimento harmónico forçado** e assumirá comportamentos diferentes consoante se considere, ou não, a existência de uma força de amortecimento. Estude-se cada um desses casos de forma a obter a correspondente lei do movimento.

1) Se $\beta > 0$, existe uma força de amortecimento no sistema massa-mola, pelo que, a solução geral da equação (9) traduz o movimento forçado e amortecido.
Uma solução particular da equação (9) é da forma

$$x_p(t) = B\sin(\omega_0 t + \delta)$$

com $B = \frac{E_0}{\sqrt{(\omega^2-{\omega_0}^2)^2+4\lambda^2{\omega_0}^2}}$, $\sin(\delta) = \frac{-2\lambda\omega_0}{\sqrt{(\omega^2-{\omega_0}^2)^2+4\lambda^2{\omega_0}^2}}$ e $\cos(\delta) = \frac{\omega^2-{\omega_0}^2}{\sqrt{(\omega^2-{\omega_0}^2)^2+4\lambda^2{\omega_0}^2}}$.

Assim, a solução geral de (9) será a soma desta solução particular com a solução geral da equação homogénea, conforme os diferentes casos tratados no movimento harmónico amortecido.
Neste movimento forçado e amortecido existe uma sobreposição de um movimento periódico de período $\frac{2\pi}{\omega_0}$, dada pela solução particular de (9), com um movimento aperiódico, dado pela solução da equação homogénea associada à equação (9). Por esta razão com o passar do tempo $x_p(t)$ será a solução que permanecerá e representará as oscilações forçadas. Um exemplo típico deste movimento encontra-se na figura 5.

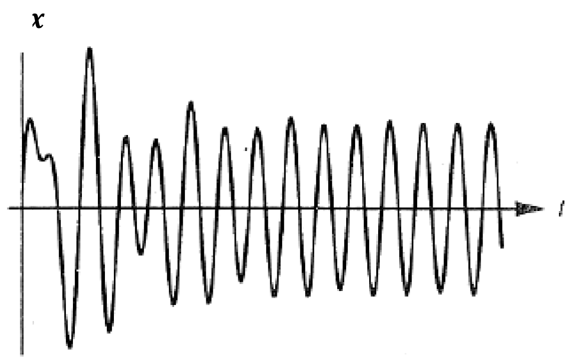


Figura 5 - Representação gráfica de um movimento harmónico forçado com amortecimento

2) Se $\beta = 0$, não existe força de amortecimento, pelo que este tipo de movimento é designado por movimento forçado não amortecido. A equação (9) toma a forma:

$$x'' + \omega^2 x = E_0\sin(\omega_0 t) \tag{10}$$

A equação homogénea associada à equação (10) tem por solução geral $x_h(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, com A e ϕ constantes arbitrárias.

Para encontrar uma solução particular da equação (10) considere-se dois casos:

(i) $\omega_0 \neq \omega$, isto é, a frequência da força externa é diferente da frequência natural do oscilador.

Pode provar-se que

$$x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2 - \omega_0{}^2}\sin(\omega_0 t)$$

ou

$$x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2 - \omega_0{}^2}(sin(\omega_0 t) - sin(\omega t))$$

são soluções particulares da equação completa (10).

Assim a solução geral de (10) é, por exemplo, dada por

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi) + \frac{E_0}{\omega^2 - \omega^2{}_0}\sin(\omega_0 t),$$ com A e ϕ constantes arbitrárias.

Neste caso, existe uma sobreposição de um movimento harmónico simples, de frequência natural ω, com o movimento dado pela solução particular da equação (10), de frequência ω_0.

Para estudar este movimento dado pela equação particular terão de ser analisadas três situações diferentes de acordo com os valores de ω e ω_0 .

A. Considere-se que $\frac{\omega}{\omega_0}$ representa um número não racional.

Neste caso, o movimento dado pela solução particular é oscilatório, mas não é periódico.

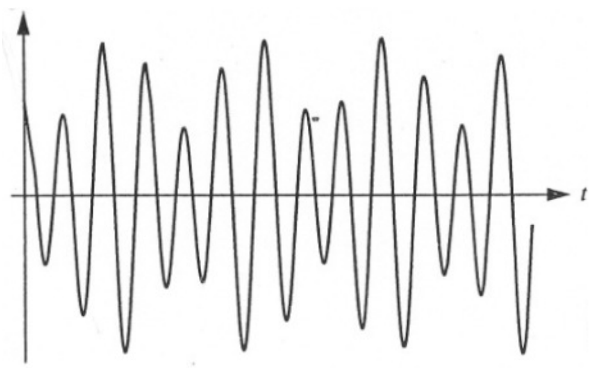


Figura 6 - Representação gráfica de um movimento harmónico forçado não amortecido e não periódico

B. Considere-se que $\frac{\omega}{\omega_0}$ representa um número racional.

Neste caso, o movimento dado pela solução particular é periódico.

Para provar esta afirmação recorra-se ao facto da fração $\frac{\omega}{\omega_0}$ representar um número racional, isto é, de existirem dois números inteiros p e q tais que $\frac{p}{q} = \frac{\omega}{\omega_0}$ e considere-se a solução particular da equação (10) escrita na forma

$$x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2}(sin(\omega_0 t) - sin(\omega t))$$

Ora, a função $sin(\omega_0 t)$ é periódica de período $\frac{2\pi}{\omega_0}$, logo $\frac{2\pi q}{\omega_0}$também é período da função. De modo análogo se conclui que $\frac{2\pi p}{\omega}$ é período da função $sin(\omega t)$. Assim, $\frac{2\pi p}{\omega} = \frac{2\pi q}{\omega_0}$ e, este valor, é o período da função $\frac{E_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2}(sin(\omega_0 t) - sin(\omega t))$.

C. Considere-se que ω é muito próximo de ω_0 e as condições iniciais $x(0) = x'(0) = 0$.

Neste caso obtém-se um interessante e importante movimento, designado por BATIMENTO. Para estas condições iniciais, a solução geral da equação (10) fica reduzida à solução particular da equação completa

$$x(t) = \frac{E_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2}(sin(\omega_0 t) - sin(\omega t)),$$

ou, de outra forma,

$$x(t) = \frac{2E_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2}\left(sin\left[\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right)t\right]\cos\left[\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2}\right)t\right]\right).$$

Se ω for "praticamente" igual a ω_0, a diferença ω - ω_0 é pequena, pelo que a frequência do seno é muito menor que a do coseno. O movimento que se obtém é do tipo do que se encontra na figura 7.

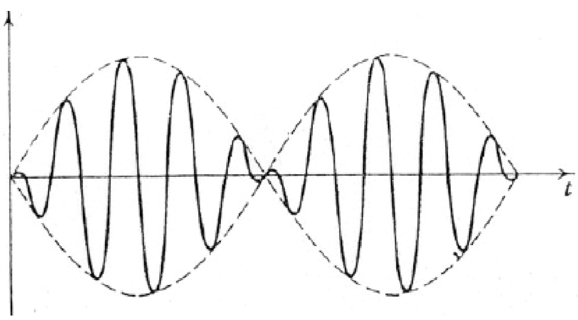


Figura 7 - Representação gráfica do movimento forçado não amortecido, quando $\omega \approx \omega_0$

(ii) $\omega = \omega_0$ isto é, a frequência da força externa é igual à frequência natural do oscilador.

A equação (10) será reescrita da seguinte forma

$$x'' + \omega^2 x = E_0 \sin \omega t. \tag{11}$$

Uma solução particular da equação anterior é da forma

$$x_p(t) = -\frac{E_0}{2\omega} t \cos(\omega t).$$

Consequentemente a solução geral de (11) é dada por:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi) - \frac{E_0}{2\omega} t \cos(\omega t), \text{ com } A \text{ e } \phi \text{ constantes arbitrárias.}$$

Este movimento é a sobreposição de um movimento harmónico simples com um movimento oscilatório de amplitude crescente, $\frac{E_0}{2\omega} t$, e que tende para infinito. Este movimento denomina-se por fenómeno de RESSONÂNCIA.

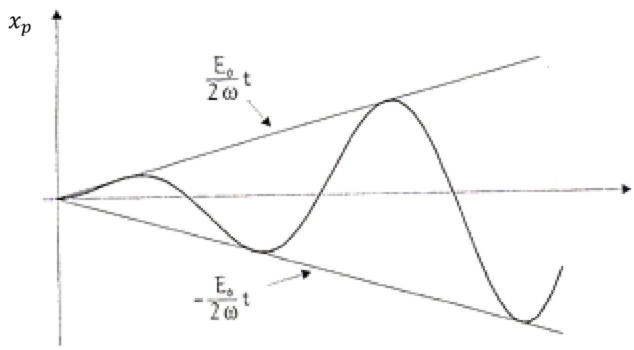


Figura 8 - Representação gráfica do movimento apresentado por uma solução particular para o caso da ressonância

1.3 Um salto de Bungee Jumping[3]

Conta uma lenda que o bungee jumping tem as suas origens na ilha de Pentecoste, perto da Austrália, quando uma das suas habitantes, fugindo do marido, resolveu saltar de uma árvore. Contrariamente ao seu marido, antes de saltar a esposa teve o cuidado de amarrar uma videira aos tornozelos … ambos experimentaram a sensação de queda livre, estando apenas sujeitos à resistência do ar e ao seu peso. Mas apenas um sobreviveu, a videira atuou como uma mola puxando, em sentido contrário, o corpo da esposa. Desde então os homens da tribo escalam torres feitas de madeira e saltam amarrados pelos tornozelos provando a sua valentia.

Ao longo do tempo estes saltos a grande altitude têm fascinado os mais arrojados e inevitavelmente surge o bungee jumping como um desporto radical realizado por muitos adeptos em todo o mundo. Portugal não foge à regra e, na ponte de Valongo, Almada, Marco de Canavezes e Melgaço, é habitual a prática deste salto.

Pretende modelar-se um salto que será efetuado da ponte que liga Melgaço a Espanha. A ponte encontra-se a cinquenta e três metros das águas do rio Minho, a aceleração da gravidade no local é dada por um valor aproximadamente igual a $10\mathrm{m/s^2}$ e considera-se que a resistência do ar é $1\mathrm{N}$.

Pedro é um amante do bungee jumping e convidou o seu amigo Paulo para o acompanhar até Melgaço. O desportista, com $73\ \mathrm{kg}$ e um metro e oitenta de altura, encontra-se em repouso em cima da ponte. Na sua mala existem várias cordas de $30m$, com diferentes graus de rigidez (diferentes elasticidades). Utilizando a matemática pretende-se ajudar o desportista a escolher a corda que lhe proporcionará um confortável e seguro salto.

Designe-se por $x(t)$ a posição dos pés do desportista no instante de tempo t. A posição de equilíbrio, isto é, quando os pés do desportista estão num ponto imaginário situado 30m abaixo da ponte corresponde a $x = 0$. Neste local a corda tem o seu comprimento natural. Considera-se que $x > 0$ quando os pés se encontram abaixo da posição de equilibro e $x < 0$, caso contrário.

Até ao momento em que a corda se encontra completamente esticada, o salto realizar-se-á em queda livre dependendo apenas do peso do saltador e da resistência do ar. Esta força amortecedora, a força da resistência do ar, considera-se proporcional à velocidade do individuo e possui sentido contrário ao do movimento. Passada essa posição o desportista vai estar sujeito a mais uma força, a

---

[3] *A redação desta secção teve por principal fonte a referência [21]. Os gráficos apresentados foram construídos utilizando o programa de geometria dinâmica GeoGebra.*

força restauradora da corda, que terá também sentido contrário ao do movimento e tentará restaurar a posição de equilíbrio.

Face ao exposto, e usando os conhecimentos adquiridos anteriormente, um salto do bungee jumping envolve a resolução da equação diferencial

$$mx'' = mg + u(x) - \beta x' \qquad \text{com} \qquad u(x) = \begin{cases} 0 & se \;\; x \leq 0 \\ -kx & se \;\; x > 0 \end{cases},$$

que dará origem a duas equações conforme se tenha, ou não, atingido o comprimento natural da corda. Estude-se cada uma das fases do salto para o problema proposto.

Na primeira fase do salto existem apenas duas forças a atuar sobre o desportista. Pelo que, a equação diferencial a resolver é:

$$x'' + \frac{10}{73}x' = 10 \;\; \text{com as condições iniciais} \;\; \begin{cases} x'(0) = 0 \\ x(0) = -30 \end{cases} \qquad (12)$$

A equação característica da equação homogénea associada a (12) admite duas soluções reais distintas 0 e $-\frac{10}{73}$, donde, pelo teorema 5, pode afirmar-se que

$$x_h(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{10}{73}t}.$$

Uma solução particular de (12) será determinada utilizando o método de Lagrange (teorema 6). Tendo em conta que $\left\{1, e^{-\frac{10}{73}t}\right\}$ constitui um SFS da equação homogénea associada a (12), uma solução particular é $x_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{-\frac{10}{73}t}$ sendo

$$\begin{cases} c'_1(t) \times 1 + c'_2(t) \times e^{-\frac{10}{73}t} = 0 \\ c'_1(t) \times 0 + c'_2(t) \times \left(-\frac{10}{73}\right) e^{-\frac{10}{73}t} = 10 \end{cases} \quad \text{o respetivo sistema de Lagrange.}$$

Calculem-se os determinantes necessários para determinar $c'_1(t)$ e $c'_2(t)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-\frac{10}{73}t} \\ 0 & -\frac{10}{73}e^{-\frac{10}{73}t} \end{vmatrix} = -\frac{10}{73}e^{-\frac{10}{73}t} \quad ;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-\frac{10}{73}t} \\ 10 & -\frac{10}{73}e^{-\frac{10}{73}t} \end{vmatrix} = -10e^{-\frac{10}{73}t} \quad ;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10.$$

Assim,

$$c'_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 73 \qquad \Rightarrow \qquad c_1(t) = 73t$$

$$c'_2(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -73\, e^{\frac{10}{73}t} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -532.9e^{\frac{10}{73}t}.$$

Donde

$$x_p(t) = 73t - 532.9e^{\frac{10}{73}t} \times e^{-\frac{10}{73}t} = 73t - 532.9\ .$$

Pelo teorema 3,

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{10}{73}t} + 73t - 532.9 \quad \text{é solução geral de (12).}$$

Resta determinar as constantes arbitrárias, recorrendo às condições iniciais.

$$\begin{cases} x(0) = -30 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 - 532.9 = -30 \\ -\frac{10}{73} C_2 e^0 + 73 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -30 \\ C_2 = 532.9 \end{cases}$$

Assim, a solução geral de (12) é dada por

$$x(t) = 532.9e^{-\frac{10}{73}t} + 73t - 562.9\ .$$

Resolvendo graficamente a equação $x(t_1) = 0$ pode concluir-se que a primeira fase do salto dura $2.594s$.

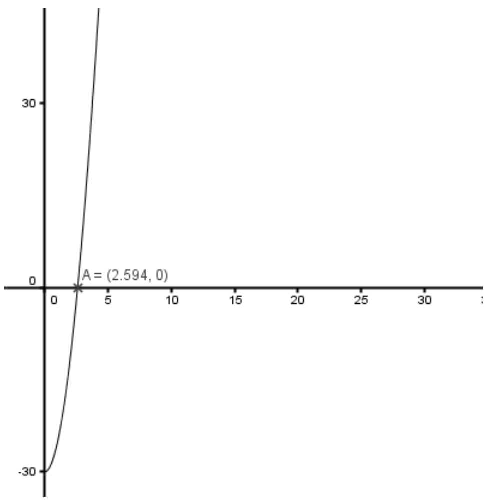


Figura 9 - Resolução gráfica de $x(t_1) = 0$, no caso do Pedro

Tendo em conta que $x'(t) = 73\left(-e^{-\frac{10}{73}t} + 1\right)$ e que a queda livre termina para $t_1 = 2.594s$, tem-se que $x(t_1) = 0\,m$ e $x'(t_1) = 21.84m/s$.

Para $t > t_1$ a corda vai começar a esticar e, sobre o saltador, vai atuar mais uma força, a força restauradora da corda elástica, $u(x) = -kx$, pelo que a equação diferencial que se obtém é

$$x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{k}{m}x = g.$$

No caso particular do problema exposto a equação diferencial obtida é

$$x'' + \frac{10}{73}x' + \frac{10}{73}kx = 10 \quad \text{com as condições iniciais} \quad \begin{cases} x(t_1) = 0 \\ x'(t_1) = 21.84 \end{cases} \tag{13}$$

A equação característica da homogénea associada a (13) admite duas raízes complexas conjugadas,

$$-\frac{5}{73} \pm \sqrt{\frac{10}{73}k - \frac{25}{5329}}\,i$$

e, tendo em conta o teorema 5, pode afirmar-se que:

$$x_h(t) = e^{-\frac{5}{73}t}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{10}{73}k - \frac{25}{5329}}\,t\right) + c_2\, sen\left(\sqrt{\frac{10}{73}k - \frac{25}{5329}}\,t\right)\right).$$

Considere-se $x_p(t) = \frac{73}{k}$ uma solução particular da equação não homogénea definida em (13) .

Pelo teorema 3, tem-se que a solução da equação (13) é da forma:

$$x(t) = e^{-\frac{5}{73}t}(c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2\, sen(\omega_1 t)) + \frac{73}{\mathrm{k}} \qquad \text{com } \omega_1 = \sqrt{\frac{10}{73}k - \frac{25}{5329}}\ . \tag{14}$$

Derivando, e por conveniência algébrica, tem-se que:

$$x'(t) = -\frac{5}{73}\left(x(t) - \frac{73}{k}\right) + \omega_1 e^{-\frac{5}{73}t}(-c_1 \sin(\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_1 \mathrm{t})) \quad \text{com } \omega_1 = \sqrt{\frac{10}{73}k - \frac{25}{5329}}.$$

Tendo em vista ajudar o desportista a escolher a corda que permitirá um salto harmonioso e sem desagradáveis surpresas será necessário analisar o comportamento de (14) conforme os diferentes tipos de cordas. Os cálculos necessários para obter o sistema correspondente, para cada situação, encontram-se, numa folha de Excel, em Anexo I.

<u>CASO 1</u>: Considere-se uma corda cuja constante é $k = 7$.

A expressão (14) toma a forma

$$x(t) = e^{-\frac{5}{73}t}(c_1\, cos(\omega_1 t) + c_2\, sen(\, \omega_1 t)) + \frac{73}{7} \quad \text{com } \omega_1 = \frac{3\sqrt{565}}{73}.$$

Tendo em conta as condições iniciais referidas em (13), determine-se c_1 e c_2.

$$\begin{cases} x(t_1) = 0 \\ x'(t_1) = 21.84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.68734c_1 + 0.47802c_2 = -\dfrac{73}{7} \\ -0.466956c_1 - 0.67142c_2 = 21.84 - \dfrac{5}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -4.522 \\ c_2 = -28.319 \end{cases}$$

Assim, a solução de equação diferencial definida em (13), para $k = 7$, é dada por:

$$x(t) = e^{-\frac{5}{73}t}(-4.522\, cos(\, \omega_1 t) - 28.319\, sen(\, \omega_1 t)) + \frac{73}{7} \text{ , com } \omega_1 = \frac{3\sqrt{565}}{73},$$

ou, de outra forma,

$$x(t) = 28.68e^{-\frac{5}{73}t}\, cos(\, \omega_1 t - 4.554) + \frac{73}{7} \quad \text{com} \quad \omega_1 = \frac{3\sqrt{565}}{73}$$

admitindo um máximo de 31.3 para $t_2 = 4.662s$.

Tendo em conta o comprimento máximo atingido pela corda é de $61.3m$, que o desportista mede $1.8m$ e que o rio se encontra a $53m$ da ponte, este tipo de corda não permitirá um salto nada seguro pois levaria o saltador a mergulhar nas profundezas do rio.

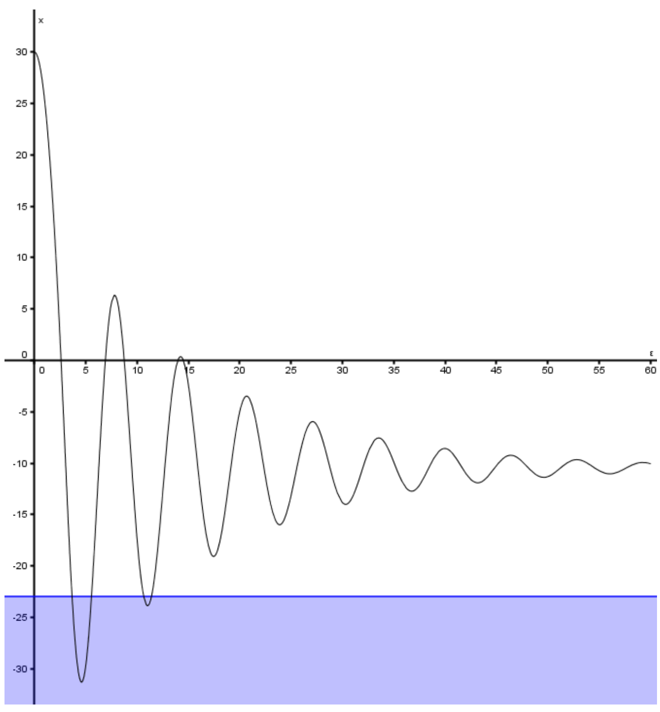


Figura 10 - Modelo (adaptado) do salto de bungee jumping do Pedro para $k = 7$

<u>*CASO 2*</u>: Considere-se uma corda cuja constante é $k = 16$.

A expressão (14) toma a forma

$$x(t) = e^{-\frac{5}{73}t}(c_1\, cos(\omega_1 t) + c_2\, sen(\,\omega_1 t)) + \frac{73}{16} \quad \text{com} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{160}{73} - \frac{25}{5329}}.$$

Tendo em conta as condições iniciais referidas em (13), determine-se c_1 e c_2.

$$\begin{cases} x(t_1) = 0 \\ x'(t_1) = 21.84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.64323c_1 - 0.53592c_2 = -\dfrac{73}{16} \\ 0.792536c_1 - 0.95126c_2 = 21.84 - \dfrac{5}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 15.316 \\ c_2 = -9.87 \end{cases}$$

Assim a solução de equação diferencial definida em (13), para $k = 16$, é dada por:

$$x(t) = e^{-\frac{5}{73}t}(15.316cos(\omega_1 t) - 9.87\, sen(\,\omega_1 t)) + \frac{73}{16} \quad \text{com}\ \omega_1 = \sqrt{\frac{160}{73} - \frac{25}{5329}},$$

ou, de outro modo,

$$x(t) = 18.2208e^{-\frac{5}{73}t}\, cos(\,\omega_1 t - 5.71074) + \frac{73}{16} \text{com}\ \omega_1 = \sqrt{\frac{160}{73} - \frac{25}{5329}}$$

admitindo um máximo de 18.56 para $t_2 = 3.83s$.

Tendo em conta a altura do desportista e o comprimento máximo atingido pela corda, $48.56m$, o saltador, $3.83s$ após o início do salto, ficará a 2.64 metros do leito do rio. O seu movimento passará a oscilatório, e com o passar do tempo, as oscilações tendem a desaparecer. A sua altitude tende a estabilizar $\frac{73}{16}m$ abaixo do comprimento natural da corda, isto é, a cerca de 18.44 metros do rio. Esta corda permitiria que Pedro efetuasse um arrojado mas seguro salto de bungee jumping.

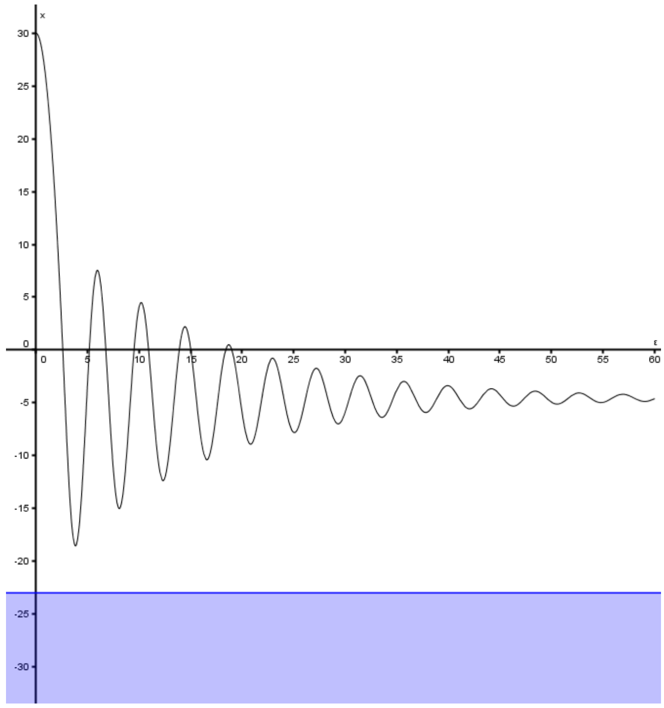


Figura 11 - Modelo (adaptado) do salto de bungee jumping do Pedro para $k = 16$

<u>*CASO 3*</u>: Considere-se uma corda de escalada cuja constante é $k = 300$.

A expressão (14) toma a forma

$$x(t) = e^{-\frac{5}{73}t}(c_1\, cos(\omega_1 t) + c_2\, sen(\,\omega_1 t)) + \frac{73}{300} \text{ com } \omega_1 = \sqrt{\frac{3000}{73} - \frac{25}{5329}}.$$

Determine-se c_1 e c_2, usando as condições iniciais.

A solução de equação diferencial definida em (13), para $k = 300$, é dada por:

$$x(t) = e^{-\frac{5}{73}t}(3.412cos(\omega_1 t) - 2.232\, sen(\,\omega_1 t)) + \frac{73}{300} \quad \text{com } \omega_1 = \sqrt{\frac{3000}{73} - \frac{25}{5329}}\ ,$$

ou, de outro modo,

$$x(t) = 4.0772e^{-\frac{5}{73}t}\, cos(\,\omega_1 t - 5.70389) + \frac{73}{300} \text{ com } \omega_1 = \sqrt{\frac{3000}{73} - \frac{25}{5329}}$$

admitindo um máximo 3.6 para $t_2 = 2.85s$.

Este tipo de corda atinge o comprimento máximo de $33.6m$ pelo que o saltador está sempre a uma distância superior a $17.6m$ das águas do rio e, com o passar do tempo, o saltador ficará 22.76 metros do leito do rio.

O uso duma corda deste tipo provocaria oscilações muito rápidas pondo mesmo em risco a vida do saltador.

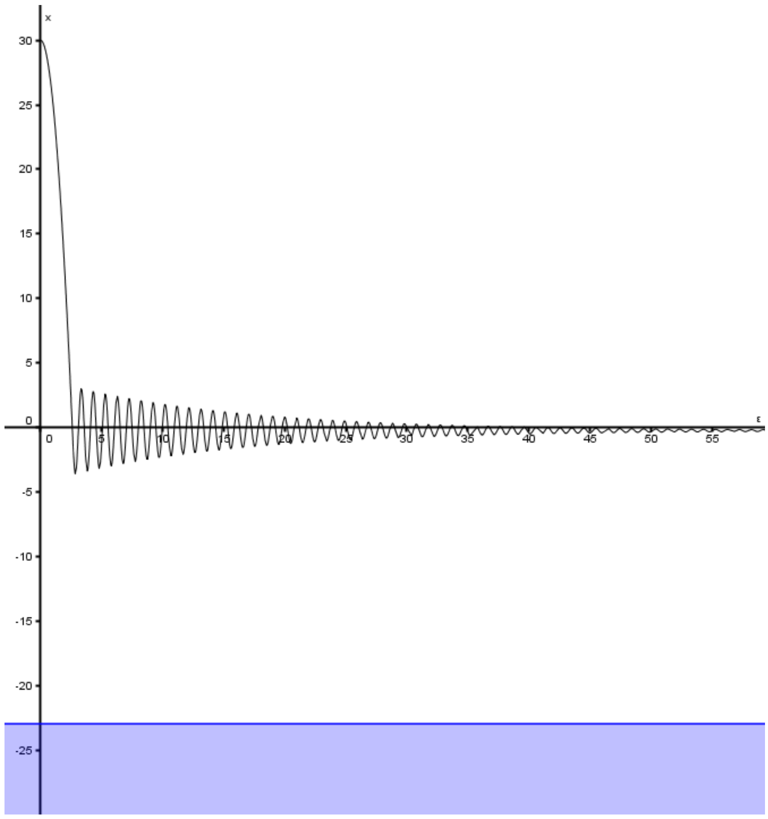


Figura 12 - Modelo (adaptado) do salto de bungee jumping do Pedro para $k = 300$

Em jeito de conclusão e tendo em conta que a quase frequência do movimento harmónico amortecido é ω_1, o número de oscilações que este saltador efetuará, por segundo, será dado por $\frac{\sqrt{\frac{10}{73}k-\frac{25}{5329}}}{2\pi}$. Assim, quanto maior for a constante k mais abruptamente o saltador será puxado para cima e para baixo e mais perigoso se tornará o salto.

Depois de ver o harmonioso salto de Pedro, o seu amigo pensou em aventurar-se também neste deporto. Tendo em conta o estudo matemático já efetuado logo de imediato se excluiu a corda de escalada e a de constantes sete. Restava apenas uma … Paulo era um rapaz consciente… não esquecia que, apesar de ter a mesma altura de Pedro, pesava 100 Kg…

Pedro tranquilizou o amigo e garantiu-lhe que, depois de realizarem alguns cálculos matemáticos, encontrariam um modo seguro para que este efetuasse o desejado salto. Tendo por base o estudo feito anteriormente, Pedro resolveu investigar se a sua corda, de constante 16, proporcionava um salto seguro ao seu colega.

A equação diferencial que modelará a primeira parte do seu salto é:

$$x'' + \frac{1}{10}x' = 10 \quad \text{com as condições iniciais} \quad \begin{cases} x'(0) = 0 \\ x(0) = -30 \end{cases} \tag{15}$$

Tendo em conta as raízes da equação característica da equação homogénea associada a (15) e, pelo teorema 5, tem-se que $x_h(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{10}t}$.

Por outro lado como $\left\{1, e^{-\frac{1}{10}t}\right\}$ constitui um SFS da equação homogénea associada a (15) , uma solução particular da equação (15) é $x_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{-\frac{1}{10}t}$ e será determinada utilizando o método de Lagrange, cujo sistema é dado por:

$$\begin{cases} c'_1(t) \times 1 + c'_2(t) \times e^{-\frac{1}{10}t} & = 0 \\ c'_1(t) \times 0 + c'_2(t) \times \left(-\frac{1}{10}\right) e^{-\frac{1}{10}t} & = 10 \end{cases}.$$

Calculando os determinantes necessários para calcular $c'_1(t)$ e $c'_2(t)$, tem-se que:

$$c'_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 100 \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = 100t$$

$$c'_2(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -100\, e^{\frac{1}{10}t} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -1000e^{\frac{1}{10}t}$$

E, consequentemente,

$$x_p(t) = 100t - 1000.$$

Pelo teorema 3, $x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{10}t} + 100t - 1000$ é solução geral de (15).

Resta determinar as constantes arbitrárias C_1 e C_2 usando as condições iniciais.

$$\begin{cases} x(0) = -30 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 - 1000 = -30 \\ -\frac{1}{10} C_2 e^0 + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -30 \\ C_2 = 1000 \end{cases}.$$

Assim, a solução geral de (15) é dada por $x(t) = 1000e^{-\frac{1}{10}t} + 100t - 1030$.

Resolvendo graficamente a equação $x(t_1) = 0$ pode concluir-se que a primeira fase do salto dura $2.554s$.

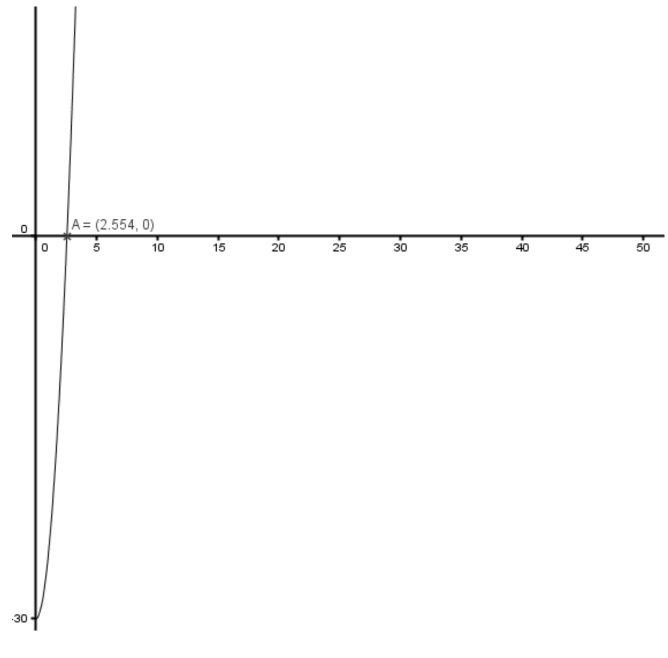


Figura 13 - Resolução gráfica de $x(t_1) = 0$, no caso do Paulo

Tendo em conta que $x'(t) = 100\left(-e^{-\frac{1}{10}t} + 1\right)$ e que a queda livre termina para $t_1 = 2.554s$, tem-se que $x(t_1) = 0$ e $x'(t_1) = 22.54 m/s$

Para $t > t_1$ a corda vai começar a esticar e, sobre o Paulo, mais uma força irá atuar, a força restauradora da corda. Atendendo ao estudo efetuado para o salto do Pedro e procedendo aos devidos ajustamentos a equação diferencial a resolver é:

$$x'' + \frac{1}{10}x' + \frac{k}{10}x = 10 \quad \text{com as condições iniciais} \quad \begin{cases} x(t_1) = 0 \\ x'(t_1) \approx 22.54 \end{cases} \tag{16}$$

Tendo em conta as raízes complexas conjugadas da equação característica da homogénea associada a (16) e, considerando $x_p(t) = \frac{100}{k}$ uma solução particular da equação não homogénea definida anteriormente, pode afirmar-se, usando o teorema 5 e 3, que:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{20}t}(c_1\, cos(\,\omega_1 t) + c_2\, sin(\,\omega_1 t)) + \frac{100}{\mathrm{k}} \quad \text{com } \omega_1 = \left(\sqrt{\frac{k}{10} - \frac{1}{400}}\right).$$

Derivando, e por conveniência algébrica, tem-se que:

$$x'(t) = -\frac{1}{20}\left(x(t) - \frac{100}{k}\right) + \omega_1 e^{-\frac{1}{10}t}(-c_1\, sin(\,\omega_1 t) + c_2 \cos(\omega_1 \mathrm{t})) \text{ com } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{10} - \frac{1}{400}}.$$

Sabendo que, de entre as cordas disponíveis, o Paulo apenas poderá utilizar a de $k = 16$ tem-se que $\omega_1 = \sqrt{\frac{8}{5} - \frac{1}{400}}$.

Assim,

$$\begin{cases} x(t_1) = 0 \\ x'(t_1) = 22.54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.87683c_1 - 0.076c_2 = -\frac{100}{16} \\ 0.09606c_1 - 1.10824c_2 = 22.54 - \frac{5}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 8.805 \\ c_2 = -19.293 \end{cases}.$$

A solução de equação diferencial definida em (16) é dada por :

$$x(t) = 21.2073e^{-\frac{1}{20}t}\, cos(\,\omega_1 t - 5.14054) + \frac{100}{16} \text{ com } \omega_1 = \sqrt{\frac{8}{5} - \frac{1}{400}} \tag{17}$$

admitindo um máximo de 23.55 para $t_2 = 4.06713s$.

Pedro rapidamente concluiu que o salto do amigo, nestas condições, terminaria num banho inesperado no rio.

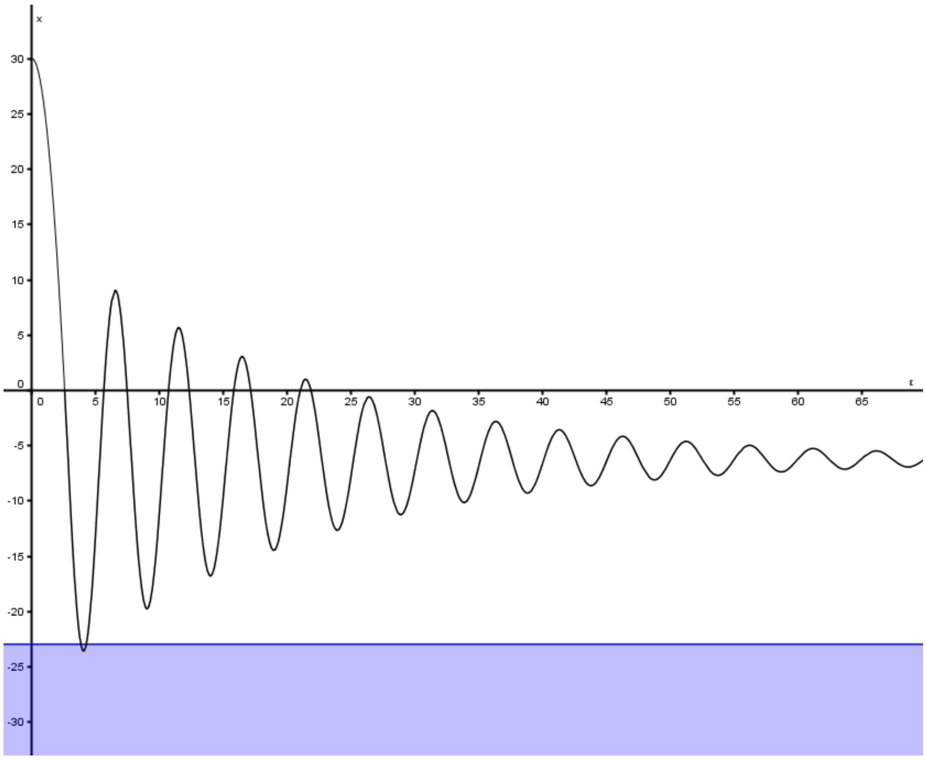


Figura 14 - Modelo (adaptado) do salto de bungee jumping do Paulo para $k = 16$

Não querendo deixar de proporcionar o salto ao seu amigo Paulo, o desportista decidiu cortar a sua corda…

O corte, c, na corda provocará alterações no seu comprimento natural e, consequentemente, no local correspondente à posição de equilíbrio. Este ponto imaginário passará a situar-se $(30 - c)m$ abaixo da ponte pelo que, uma das condições iniciais do salto é alterada para $x(0) = -30 + c$. Por outro lado as águas do rio Minho estarão a $(23 + c)m$ da posição de equilíbrio.

Depois de mais alguns cálculos Pedro decide cortar cerca de $4m$ ficando o seu comprimento natural de $26m$.
Considerando as novas condições iniciais $x(0) = -26$ e $x'(0) = 0$. Obtém-se a função que modela o salto durante os primeiros 2.37 segundos

$$x(t) = 1000e^{-\frac{1}{10}t} + 100t - 1026.$$

Utilizando as condições $x(t_1) = 0$ e $x'(t_1) = 21.1m/s$, obtém-se a função que modela a segunda fase deste salto:

$$x(t) = 19.80779e^{-\frac{1}{20}t}\,cos(\,\omega_1 t - 4.929449) + \frac{100}{16} \quad \text{com} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{8}{5} - \frac{1}{400}}.$$

admitindo um máximo de 22.55 para $t_2 = 3.9s$.

O comprimento máximo da corda será de $48.55m$ e o Paulo estará sempre a uma confortável distância de $2.65m$ do leito do rio e harmoniosamente o seu salto estabilizará a cerca de $20.75m$ das águas do rio.

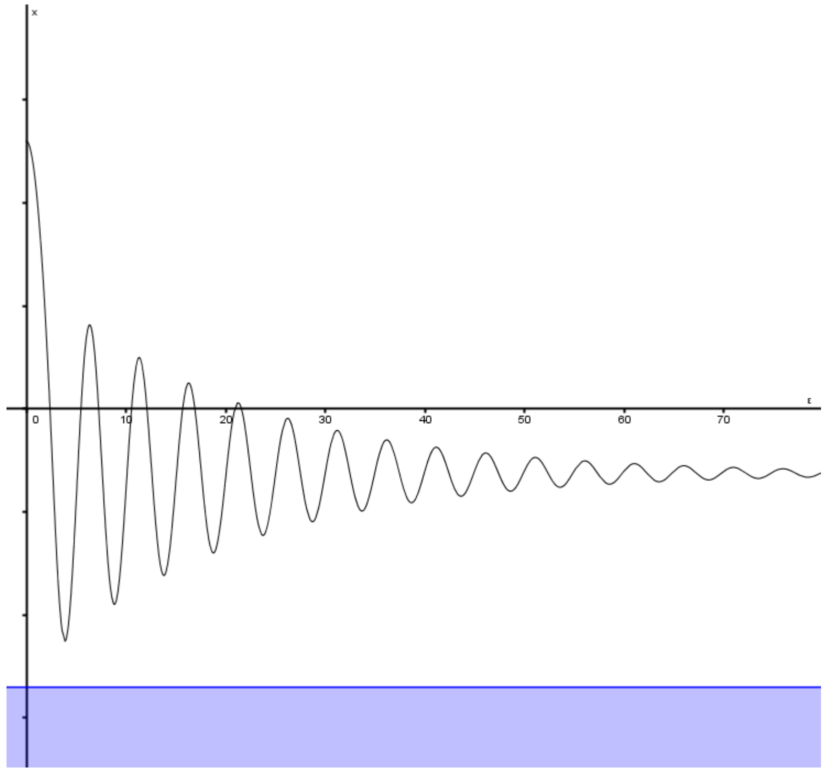


Figura 15 - Modelo (adaptado) do salto de bungee jumping do Paulo para $k = 16$ com uma corda de $26m$

Capítulo II – Projeto Educacional II

Ao longo dos últimos vinte anos, o ensino da matemática tem sofrido sucessivos ajustes norteados por duas linhas orientadoras. Por um lado pretende-se promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e, cumulativamente, desenvolver uma atitude positiva face à disciplina.

Tendo por base a defesa das equações quadráticas, depois de alguma reflexão, surgiu a ideia de desenvolver o Projeto II baseado nas aplicações destas equações. Não tendo a pretensão de esgotar o tema, pretendeu-se sensibilizar os alunos para importância destas e mostrar a sua aplicabilidade na resolução de problemas da vida real.

O constrangimento de não possuir alunos levou a que fosse necessário solicitar a colaboração de colegas da escola. A escolha recaiu sobre o nono e o décimo segundo anos de escolaridade. Os professores das turmas aceitaram o desafio e, numa das suas aulas, desenvolveram-se algumas atividades envolvendo as equações quadráticas e as suas aplicações.

2.1 Atividades do 9.º ano – Equações quadráticas[4]

O estudo das equações quadráticas é iniciado no 8.º ano de escolaridade, no subtópico "Equações do 2.º grau (incompletas) a uma incógnita" e, posteriormente, retomado no ano seguinte no subtópico "Equações do 2.º grau a uma incógnita". Embora nem sempre de uma forma explicita, estas equações acompanharão os alunos ao longo de todo o seu percurso escolar.

2.1.1 Planificação

Após diálogo prévio com a professora da turma, numa aula de quarenta e cinco minutos, os dezassete alunos foram distribuídos por quatro grupos de trabalho, de acordo com a sua orientação vocacional e o desempenho na disciplina:
Grupo A - constituído por alunos que manifestavam uma maior aptidão para as humanidades;
Grupo B - formado por quatro alunos com dificuldades na disciplina;
Grupo C - constituído por alunos com diferentes desempenhos na disciplina de matemática;
Grupo D - constituído por alunos com bom desempenho na disciplina de matemática.

[4] *A planificação e elaboração das atividades foram inspiradas nas referências* [2], [6], [9], [16], [18] e [19].

Tendo em conta a constituição dos grupos foram preparadas quatro atividades adequadas à especificidade de cada um, incluídas em anexo, envolvendo a resolução de equações do segundo grau a uma incógnita.

A. As equações quadráticas ao longo dos tempos…

Recursos:

Ficha de trabalho; material de escrita e régua.

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Noção de raiz quadrada;
- Casos notáveis da multiplicação de binómios;
- Traduzir problemas através de uma equação.

Aprendizagens visadas:

- Conhecer a história da matemática;
- Compreender a demonstração algébrica da fórmula resolvente das equações do 2.º grau.

B. Pescaria das Equações Quadráticas…

Recursos:

Instruções de jogo; cartas; papel e material de escrita.

Conhecimentos prévios dos alunos:

-Factorização de polinómios;
- Lei do anulamento do produto;
- Fórmula resolvente;
-Classificação de equações.

Aprendizagens visadas:

- Efetuar procedimentos e algoritmos de cálculos rotineiros;
- Consolidar a resolução de equações do 2.ºgrau a uma incógnita.

C. As equações quadráticas e o tempo de travagem …

Recursos:

Ficha de trabalho; material de escrita e calculadora.

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Interpretar o enunciado de um problema;
- Analisar e refletir sobre o(s) processo(s) de resolução do problema.

Aprendizagens visadas:

- Estabelecer conexões entre as equações do 2.º grau e o tópico de Funções;
- Consolidar a resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita;
- Consolidar a resolução de problemas com equações do 2.º grau a uma incógnita.

D. Resolução de problemas envolvendo equações do 2.ºgrau.

Recursos:

Ficha de trabalho; material de escrita e calculadora

Conhecimentos prévios dos alunos:

- Resolução de equações do 2.º grau;
- Fórmula resolvente de equações do 2.º grau;
- Operações com polinómios;
- Expressão da área do retângulo.

Aprendizagens visadas:

- Estabelecer conexões entre as equações do2.ºv grau e os tópicos de Geometria e Funções;
- Consolidar a resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita;
- Consolidar a resolução de problemas com equações do 2.º grau a uma incógnita.

Cada grupo recebeu a atividade orientada de modo a permitir o desenvolvimento do trabalho de forma autónoma.

2.1.2 Desenvolvimento

“As equações quadráticas ao longo dos tempos…”

Vide Anexo 2

Tal como o nome sugere esta atividade pretendeu, de uma forma resumida, mostrar aos alunos a evolução da história das equações quadráticas ao longo de vários séculos e, ao mesmo tempo, sensibilizá-los para o facto de o conhecimento matemático ser construído historicamente à semelhança da história dos povos. Para além disso, foi ainda solicitado aos alunos a resolução de dois problemas, envolvendo equações do segundo grau, de acordo com os conhecimentos da época em que surgiram. A atividade terminaria com uma dedução orientada da fórmula resolvente.
Surpresos com o facto de, na aula de matemática, lhes ser fornecida uma atividade com diversas folhas onde se fazia referência a diversas civilizações os alunos envolveram-se na atividade. Com a primeira tarefa surgiu a primeira dúvida:

“Quais os valores de p e de q?”

Depois de serem confrontados com a equação do segundo grau obtida, iniciaram a resolução do problema seguindo a “receita” utilizada pelos babilónicos. Após encontrarem o valor pretendido os alunos solicitaram a presença da professora uma vez que estranharam o resultado obtido.

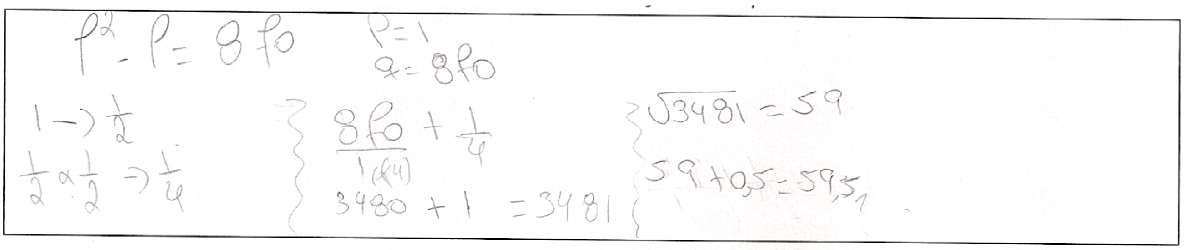


Figura 16 - A primeira resposta

Tratava-se de um erro que frequentemente os alunos cometem aquando da simplificação de uma expressão algébrica, desembaraçar de denominadores como se de uma equação se tratasse. Alertados para o erro cometido os alunos procederam à sua correção e chegaram o valor pretendido.

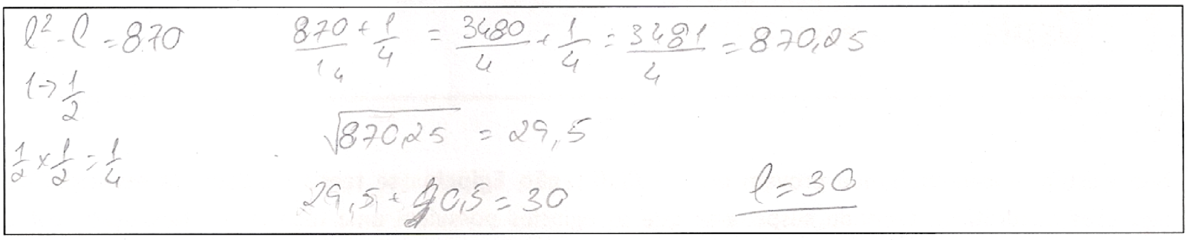


Figura 17 - A resposta correta após a intervenção da professora

Na tarefa 2, os alunos já se mostraram mais autónomos… e foi com agradável surpresa que, tendo por base o exemplo apresentado na ficha, os alunos conseguiram chegar à solução positiva da equação usando o processo geométrico utilizado por Al-Khwarizmi.

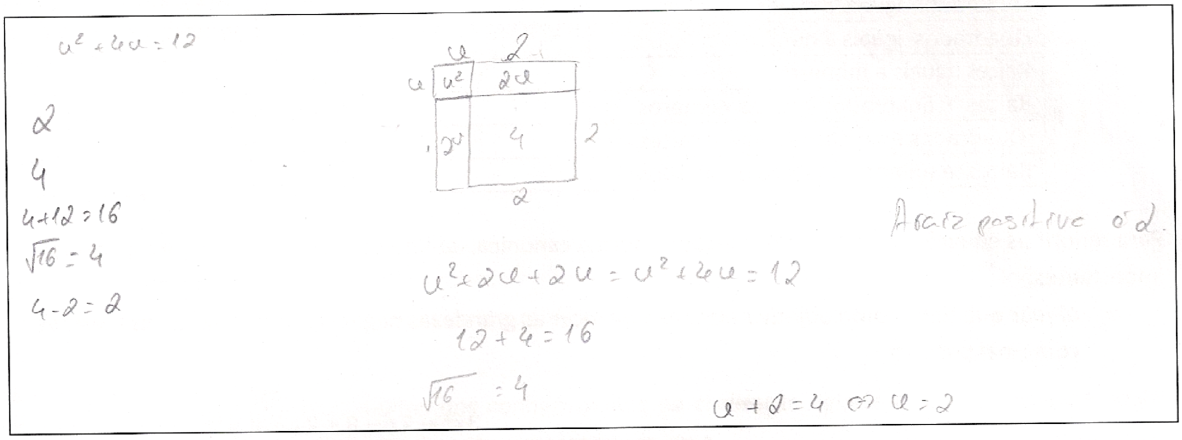


Figura 18 - A resolução da tarefa 2

Pelo facto de esta atividade implicar a leitura de muitos textos, interpretação e compreensão de processos resolutivos completamente novos para os alunos, não foi possível a sua conclusão nos 45minutos. Assim sendo, a tarefa 3 não foi realizada.

“Pescaria das Equações Quadráticas…”

Vide Anexo 3

Falar em jogos duma forma geral é falar em pensar, em divertir-se, em relacionar-se com os outros. Na aprendizagem o jogo esteve sempre associado à ideia de transmitir conhecimentos de uma forma mais leve e dinâmica. Esta atividade foi elaborada para um grupo constituído por alunos com dificuldades à disciplina de matemática. Pretendeu-se assim que, de uma forma mais lúdica os alunos, consolidassem a resolução de equações do segundo grau a uma incógnita.

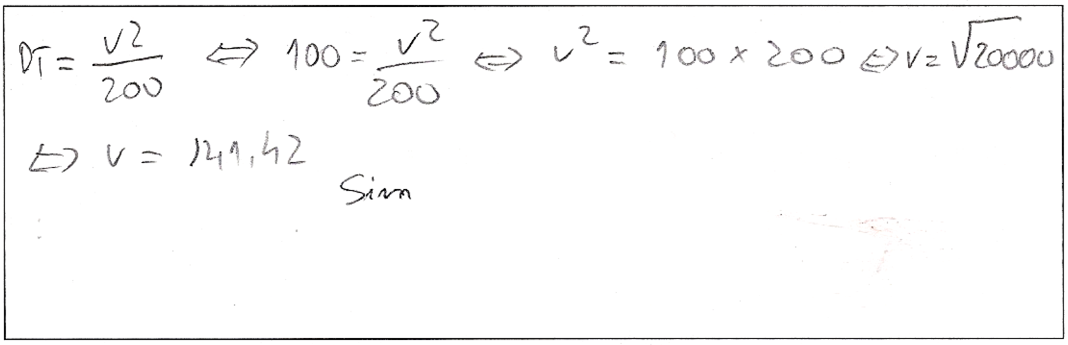
As instruções do jogo e os baralhos de cartas foram fornecidos pela professora. Depois de interiorizadas as regras, os alunos distribuíram as cartas e apropriaram-se de lápis e papel para resolver as equações que lhe tinham sido distribuídas. Foi necessário recordar a fórmula resolvente a dois dos alunos do grupo. Surgiram algumas dúvidas aquando da tentativa de aplicação da fórmula resolvente para as equações incompletas, tendo a professora aproveitado o momento para relembrar a lei do anulamento do produto e a noção de raiz quadrada. Resolvidas que estavam as equações, os alunos passaram ao jogo propriamente dito. Foi necessário proceder ainda a algumas correções na aplicação da fórmula resolvente mas os alunos mostraram-se envolvidos e jogaram pelo menos duas vezes. A atividade agradou bastante aos alunos e o objetivo de consolidar este conteúdo foi atingido.

As equações quadráticas e o tempo de travagem …

Vide Anexo 4

Esta atividade foi pensada com o objetivo de proporcionar aos alunos a resolução de problemas com conexões com o tópico de Funções. Para além disso pretendia-se, de uma forma simples, mostrar aos alunos uma aplicação concreta das equações do segundo grau no quotidiano.

As duas primeiras questões decorreram sem dificuldades. Na última questão foi notória a dificuldade de interpretação dos alunos, mostrando incapacidade para traduzir corretamente o problema.



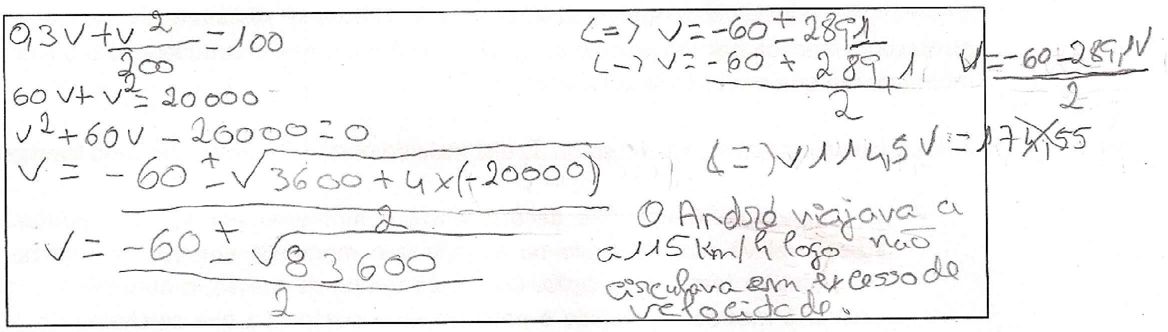
$DT = \frac{v^2}{200} \Leftrightarrow 100 = \frac{v^2}{200} \Leftrightarrow v^2 = 100 \times 200 \Leftrightarrow v = \sqrt{20000}$

$\Leftrightarrow v = 141,42$

Sim

Figura 19 - Primeira resolução da questão 3

Após intervenção da professora no sentido de chamar atenção dos alunos para a necessidade de uma leitura mais atenta, os alunos conseguiram compreender a questão e traduzi-la corretamente através de uma equação.



$0,3v + \frac{v^2}{200} = 100$

$60v + v^2 = 20000$

$v^2 + 60v - 20000 = 0$

$v = \frac{-60 \pm \sqrt{3600 + 4 \times (-20000)}}{2}$

$v = \frac{-60 \pm \sqrt{83600}}{2}$

$\Leftrightarrow v = \frac{-60 \pm 289,1}{2}$

$\Leftrightarrow v = \frac{-60 + 289,1}{2} \quad v = \frac{-60 - 289,1}{2}$

$\Leftrightarrow v = 114,5 \quad v = 17\cancel{4},55$

O André viajava a a 115 km/h logo não circulava em excesso de velocidade.

Figura 20 - Resolução correta da questão 3

Os alunos aceitaram muito bem este desafio, mostraram interesse pelo tema e tomaram consciência que a resolução de uma equação quadrática pode, literalmente, salvar uma vida.

Resolução de problemas envolvendo equações do 2.ºgrau

Vide Anexo 5

Face às dificuldades que, de um modo geral, os alunos apresentam em relacionar conceitos ou a mobilizar conhecimentos dirigidos à resolução de problemas não rotineiros surgiu a ideia de elaborar uma atividade que envolvesse a resolução de problemas ligados à vida real.

Foram escolhidos duas situações modeladas por funções do segundo grau e uma situação problemática ligada à geometria.

O grupo envolvido era constituído pelos alunos com melhor desempenho e, de imediato, iniciaram a atividade. As dificuldades surgiram logo na primeira questão do primeiro problema ao tentarem determinar quantos bolos deveriam ser confecionados no dia oito de dezembro. Os alunos tentaram encontrar a lei de formação da sequência para chegarem à resposta.

Foi necessário intervir sensibilizando os alunos para olharem atentamente para os dados do problema. Um dos alunos referiu que eram todos quadrados perfeitos e este comentário levou a que alguém concluísse que eram os quadrados dos números pares. Ultrapassado este obstáculo a resolução do problema decorreu com normalidade. De salientar que nenhum dos alunos considerou a raiz negativa na resolução da equação quadrática encontrada na alínea 1.4.

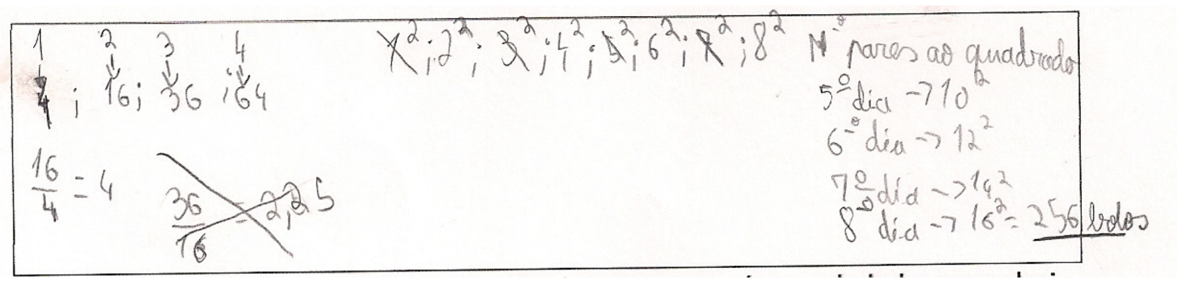


Figura 21 - Resolução da alínea 1.1 do problema 1

Os restantes problemas foram resolvidos sem grandes dificuldades. Apresentam-se de seguida resoluções apresentadas pelos alunos.

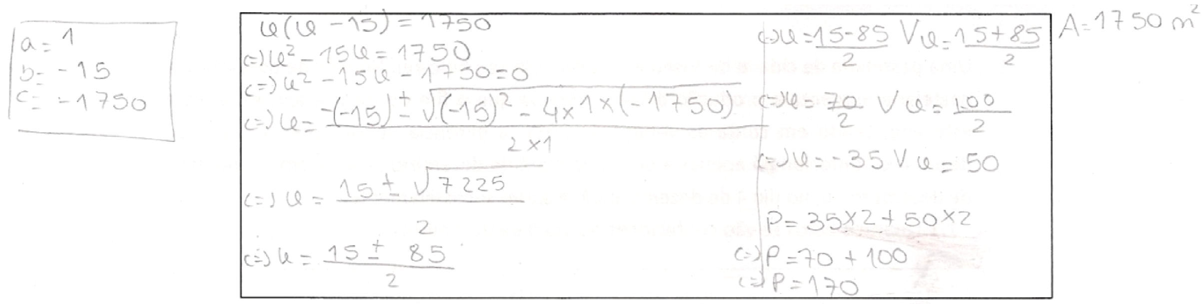


Figura 22 - Resolução do problema 2

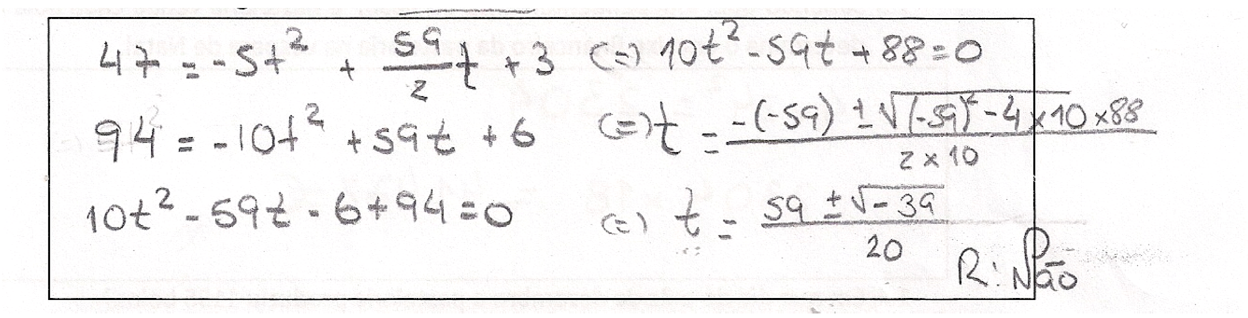


Figura 23 - Resolução da alínea 3.2 do problema 3

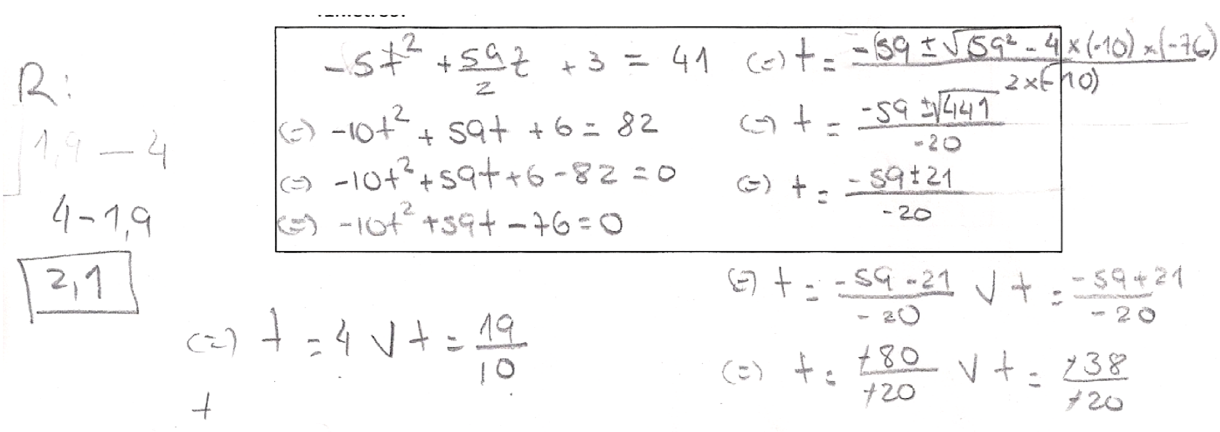


Figura 24 - Resolução da alínea 3.3 do problema 3

2.2 Atividades do 12.º ano – Aplicações das equações diferenciais na física[5]

O trabalho desenvolvido no Projeto I, o conhecimento do programa da disciplina de física do décimo segundo e o objetivo de realçar a importância e a utilidade das equações quadráticas foram o estímulo para a realização das atividades para este ano de escolaridade.

2.2.1 Planificação

As atividades implementadas numa aula de física, com a duração de noventa minutos, pretenderam por um lado, dar ênfase à importância das equações diferenciais na área dos movimentos oscilatórios, destacando ainda, a aplicação das equações quadráticas na resolução de equações diferenciais. Simultaneamente proporcionou-se aos alunos uma panóplia de exercícios que permitiram a consolidação de conteúdos lecionados ao longo do ano e que são, habitualmente, objeto de avaliação na Prova de Exame Nacional de Matemática A.

Para a concretização da aula foram previamente elaborados materiais, a saber, um PowerPoint e uma ficha de trabalho para ser realizada a pares. Com a visualização e exploração do PowerPoint pretendeu-se motivar e esclarecer alguns aspetos fundamentais para a resolução da ficha. É de referir que a ficha de trabalho estava estruturada de modo a permitir a conexão entre as equações diferenciais e as equações do segundo grau e pretendeu desenvolver a capacidade de usar a matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real, nomeadamente na resolução de problemas ligados à física.

[5] *A planificação e elaboração das atividades foram inspiradas nas referências* [7], [13], [17].

2.2.2 Desenvolvimento

A atividade iniciou-se com a exploração do PowerPoint (Vide Anexo 6) que recordava algumas noções de física relacionadas com os movimentos oscilatórios. Os alunos tiveram oportunidade de explorar um applet de modo a observarem a influência da constante da mola bem como da existência, ou não, de amortecimento no sistema massa-mola. Tendo em conta a lei de Hooke, a segunda lei de Newton e as forças que atuam no referido sistema foram introduzidas as equações diferenciais como modelo do movimento harmónico simples e amortecido. Na impossibilidade de a este nível de ensino, se determinarem as soluções destas equações, estas foram fornecidas. É de salientar que a introdução de conceitos sobre equações diferenciais foi uma extrapolação ao programa da disciplina ao nível do ensino secundário. O PowerPoint terminou com a visualização de um vídeo sobre bungee jumping levando os alunos a inferir que neste desporto se pode encontrar o movimento harmónico amortecido.

A ficha de trabalho (Vide Anexo 7) incluía três atividades. A primeira era constituída por três tarefas, envolvendo equações quadráticas e diferenciais e mostrando a sua dependência. Passada a surpresa inicial da aplicação das equações quadráticas na determinação das soluções das equações diferenciais, os alunos iniciaram a tarefa 1 que, face à sugestão apresentada, foi desenvolvida sem grandes dificuldades.

$u(t) = e^{kt}$

$u'(t) = ke^{kt}$

$u''(t) = k^2e^{kt}$

$k^2e^{kt} + bke^{kt} + ce^{kt} =$

$= \underbrace{e^{kt}}_{\neq 0}\underbrace{(k^2 + bk + c)}_{0 \text{, pq } k \text{ é raiz}}$

$= e^{kt} \times 0$

$= 0$ logo e^{kt} é solução.

Figura 25 - Resolução da tarefa 1

A tarefa 2 provocou alguns embaraços tendo sido necessária uma intervenção da docente, de modo a que todos se mantivessem envolvidos. Optou-se pela resolução da tarefa no quadro, com a ajuda de dois alunos, que habitualmente, demonstram bom desempenho a matemática. Depois de encontrados os valores dos coeficientes da equação diferencial, a maioria dos alunos relacionou esta equação com a apresentada no PowerPoint aquando da referência ao movimento harmónico simples. Apresenta-se de seguida a resolução obtida na turma.

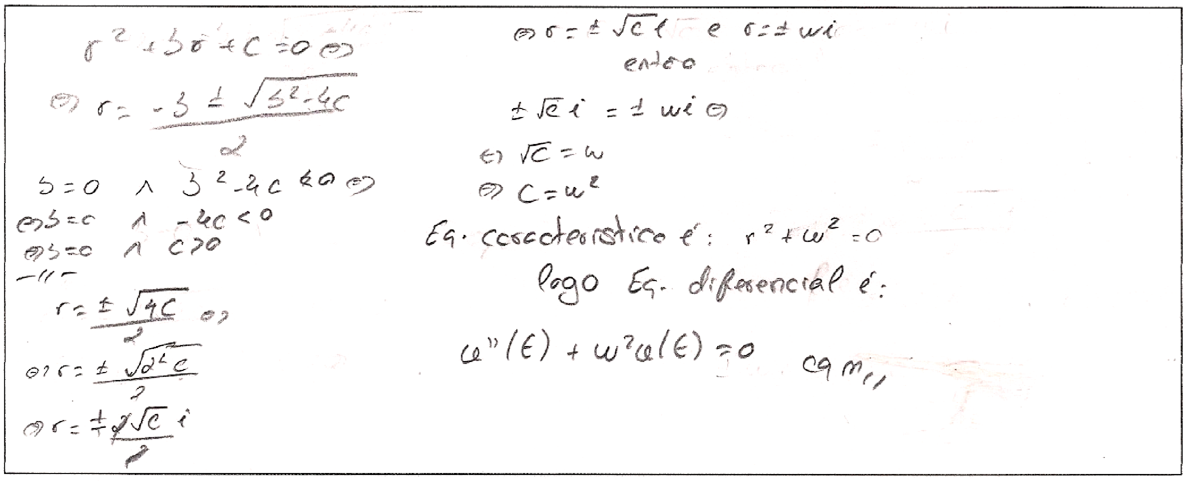


Figura 26 - Resolução da tarefa 2

A tarefa 3 foi resolvida, sem dificuldades, num trabalho perfeitamente autónomo.

Terminada a primeira atividade foi o momento de, oralmente, fazer uma síntese dos conhecimentos adquiridos e extrapolar um pouco sobre a relação entre as soluções da equação algébrica do segundo grau e a forma das soluções da equação diferencial de ordem dois e coeficientes constantes.

A atividade 2, que envolveu o movimento harmónico simples, pretendeu mostrar a forte ligação que existe entre a física e a matemática. Concomitantemente permitiu a revisão de diversos conteúdos de trigonometria que haviam sido lecionados. A atividade foi realizada com facilidade e entusiasmo.

No problema sobre o salto de bungee jumping optou-se por escrever a equação diferencial que o modelou para que os alunos tomassem contacto com equações diferenciais um pouco mais elaboradas. A atividade foi resolvida com muito empenho, existindo uma intervenção da docente para o esclarecimento das dúvidas que foram surgindo. É de realçar que alguns alunos necessitaram de recorrer ao formulário para relembrar as regras de derivação.

No fim da aula foi realizado uma reflexão oral sobre o trabalho desenvolvido. Esta mostrou-se de grande utilidade uma vez que, levou à compreensão dos aspetos mais valorizados pelos alunos. As suas preferências incidiram sobre a atividade do bungee jumping, não só pelo tema, mas pela utilidade como preparação para o exame nacional.

Reflexões pessoais

"Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."
Madre Teresa de Calcutá

Ao fim de mais de vinte anos, revisitar as equações diferenciais ordinárias lineares de ordem dois e de coeficientes constantes foi o início de um desafio que, com a supervisão da minha orientadora, culminou com a realização deste relatório.

Sabendo que, ser professor hoje é, mais do que nunca, um constante desafio à capacidade de estar cientificamente atualizado, à inovação pedagógica, à utilização das novas tecnologias de modo a motivar alunos, filhos de uma sociedade multifacetada e em constante mutação, este trabalho revestiu-se de uma maior pertinência uma vez que, alargar os conhecimentos é, e sempre será, uma linha condutora da minha vida pessoal e profissional.

Do ponto de vista da aplicação em contexto escolar, a experiência foi bastante enriquecedora. O constrangimento de não possuir alunos foi mais uma etapa a ultrapassar. Trabalhar em equipa nunca foi um obstáculo e, com a pronta colaboração de dois colegas, com a cedência das suas turmas, as atividades envolvendo equações quadráticas concretizaram-se no nono e décimo segundo anos.

Com os alunos do nono ano, não obstante o pouco tempo disponível, o trabalho realizado foi bastante profícuo. Os diferentes grupos de alunos trabalharam com motivação e envolveram-se na realização das atividades propostas. A utilização do jogo como experiência de aprendizagem foi uma boa opção… A vontade de ganhar reforça a atenção e predispõe para a concentração.
A atividade "As equações quadráticas ao longo dos tempos…" facultou uma visão diferente deste subtópico. Em anos vindouros pretendo dar um maior relevo à história da matemática pois, de um modo geral, é do agrado dos alunos.
As atividades "As equações quadráticas e o tempo de travagem …" e "Resolução de problemas envolvendo equações do 2.º grau" foram muito bem-sucedidas. Os alunos tomaram consciência da aplicação prática das equações que haviam estudado. "As equações quadráticas e o tempo de travagem …" foi uma atividade que os surpreendeu e envolveu.

Apesar de as equações diferenciais não fazerem parte do programa de matemática A, do ensino secundário, os alunos mostraram-se predispostos para a sua aprendizagem. O recurso ao applet foi uma mais-valia para a interiorização dos diferentes tipos de movimentos oscilatórios e estou certa que futuramente lhes será útil…
As tarefas iniciais da ficha de trabalho foram um pouco ambiciosas e foi necessário dar um maior acompanhamento de modo a que não houvesse da aplicabilidade das equações quadráticas na resolução de equações diferenciais. As atividades seguintes, para além de permitirem dar ênfase à importância das equações diferenciais na área dos movimentos oscilatórios, facultaram um trabalho árduo e profícuo a nível de cálculo que se mostrou bastante útil na época em que foi realizado.

Por tudo o que foi referido e pelas experiências vividas, considero que a realização deste relatório foi de suma importância para a minha vida enquanto professora de matemática.

Referências

[1] Benevides, P.” Equações diferenciais – notas de aula”. http://paginapessoal.utfpr.edu.br/paulabenevides/equacoesdiferenciais/equacoes-diferencias/ED_PaulaBenevides.pdf (Consultado em 2 de abril de 2012)

[2] Boyer, Carl(1996). *História da Matemática*. Terceira Edição. Editora Edgard Blücher LTDA

[3] Brauer, Fred (1986). *Introduction to differential equations with applications*. Harper & Row

[4] Budd,C. & Sangwin, C. (2004). 101 uses of a quadratic equation. http://plus.maths.org/content/os/issue29/features/quadratic/index (Consultado em 28 de dezembro de 2011)

[5] Budd,C. & Sangwin, C. (2004). 101 uses of a quadratic equation. Part II. http://plus.maths.org/content/os/issue30/features/quadratic/index (Consultado em 28 de dezembro de 2011)

[6] Conceição, A. & Almeida, M. (2012). *Matematicamente falando 9 (Avaliação)*. Areal Editores

[7] Costa, B. & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço 12 - parte2*. Porto Editora

[8] Edwards, Charles Henry (2003). *Diferential equations: computing and modeling.* Pearson Education

[9] Estrada, Maria Fernanda & Sá, Carlos (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta

[10] Figueiredo, D. & Neves, A. (2010). *Equações Diferenciais Aplicadas*. Terceira Edição. Coleção Matemática Universitária

[11] Goode, Stephen W.(2000). *Differential equations and linear algebra.* Prentice-Hall

[12] House of Commons Hansard debates for 26 Jun 2003. http://www.parliament.the-stationery-office.co.uk/pa/cm200203/cmhansrd/vo030626/debtext/30626-20.htm (Consultado em 28 de dezembro de 2011)

[13] Interactive Science Simulations . http://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html, (Consultado em 20 de abril de 2012)

[14] Kreyszig, Erwin. (1961). *Matemática Superior*. Livros Técnicos e Científicos Editôra, LTDA

[15] Leite, Fátima S. & Petronilho, José C.(2009).Notas de Equações Diferenciais e Modelação. Departamento de Matemática. FCTUC

[16] Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor

[17] Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A do ensino secundário*. Lisboa: Autor

[18] Projeto 1001 itens. http://www.gave.min-edu.pt/np3/15.html (Consultado em 21 de abril de 2012)

[19] Soveral, A. & Silva, C. (2007). *Caderno de actividades práticas-Matemática A.* Texto Editores

[20] Weinholtz, A. B. (2000). *EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: uma introdução*. Universidade de Lisboa

[21] Zill,D. G. (2005). *An introduction to differential equations with modeling equations*. Belmont, CA:Brooks/cole

Anexos

Anexo 1 - Tabela obtida na folha de Excel

Tabela auxiliar para o salto do Pedro

k	t_1	ω_1	$e^{(-5t_1/73)}$	$\cos(\omega_1 t)$	$\sin(\omega_1 t)$	Coef. de c_1 em x	Coef. de c_2 em x	$-\frac{73}{k}$	Coef. de c_1 em x'	Coef. de c_2 em x'	$x'(t_1)-\frac{5}{k}$	C_1	C_2	A	ϕ	$t_2=\frac{\phi}{\omega_1}$
7	2.594	0.976838	0.837217	-0.82098	0.57096	-0.68734	0.478018	-10.4285	-0.46695	-0.67142	21.125714	-4.522	-28.319	28.68	4.554	4.662
16		1.478881		-0.76829	-0.6401	-0.64323	-0.5359	-4.5625	0.792534	-0.95126	21.5275	15.316	-9.870	18.2208	5.71074	3.83
300		6.410242		-0.60566	-0.79573	-0.50707	-0.6662	-0.24333	4.270471	-3.25043	21.823333	3.412	-2.232	4.0772	5.70389	2.85

Tabela auxiliar para o salto do Paulo com corda de $30m$

k	t_1	ω_1	$e^{(-t_1/20)}$	$\cos(\omega_1 t)$	$\sin(\omega_1 t)$	Coef. de c_1 em x	Coef. de c_2 em x	$-\frac{100}{k}$	Coef. de c_1 em x'	Coef. de c_2 em x'	$x'(t_1)-\frac{5}{k}$	C_1	C_2	A	ϕ	$t_2=\frac{\phi}{\omega_1}$
16	2.554	1.26392	0.88012	-0.99626	-0.08636	-0.87683	-0.076	-6.25	0.096064	-1.10824	22.2275	8.805	-19.293	21.2073	5.14054	4.06713

Tabela auxiliar para o salto do Paulo com corda de $26m$

k	t_1	ω_1	$e^{(-t_1/20)}$	$\cos(\omega_1 t)$	$\sin(\omega_1 t)$	Coef. de c_1 em x	Coef. de c_2 em x	$-\frac{100}{k}$	Coef. de c_1 em x'	Coef. de c_2 em x'	$x'(t_1)-\frac{5}{k}$	C_1	C_2	A	ϕ	$t_2=\frac{\phi}{\omega_1}$
16	2.37	1.26392	0.88825	-0.98935	0145577	-0.87879	0.129309	-6.25	-0.16344	-1.11072	20.7875	4.266	-19.343	19.8078	4.92945	3.9

Anexo 2 - As equações quadráticas ao longo dos tempos…

Escola Secundária de Oliveira do Hospital	**As equações quadráticas ao longo dos tempos…** Ano de Escolaridade: 9.º Ano letivo: 2011/12

Não existem documentos que provem que a **Civilização Egípcia** se tenha ocupado da resolução de equações quadráticas. Contudo suspeita-se que os egípcios possuíam uma técnica de resolução destas equações. No papiro de Berlim, existe pelo menos um exemplo destas equações num dos seus problemas:

"…a área de um quadrado de 100 (cúbitos quadrados) é igual à de dois quadrados mais pequenos. O lado de um é $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ do lado do outro. Diz-me quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos. …"

Em linguagem simbólica atual o sistema de equações que representa o problema é:

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ y=\frac{3}{4}x \end{cases}.$$

O procedimento para a resolução deste problema ficou conhecido pelo método da falsa posição. O nome deste método advém dos egípcios começarem por atribuir à incógnita um valor numérico reconhecido, à partida, como falso procedendo depois a correções para obter a solução. Assim, tendo em conta a relação existente entre os lados do quadrado eram escolhidos dois valores que verificassem essa relação, por exemplo 3 e 4. Estes valores eram substituídos na equação quadrática, $3^2+4^2=25\ (\neq 100)$. De seguida eram calculadas as raízes quadradas do segundo membro de ambas as equações, $\sqrt{25}=5$ e $\sqrt{100}=10$, e era determinado o quociente entre estes valores, $\frac{10}{5}=2$. Assim, multiplicando este valor pelos inicialmente atribuídos obtinha-se a solução do problema, 3×2=6 e 4×2=8.

Paralelamente desenvolveu-se uma outra civilização que contribuí para a história das equações quadráticas: a **Civilização Mesopotâmica**. O primeiro registo conhecido da resolução de problemas envolvendo a equação do segundo grau chegou até nós através de palavras. Sem usar qualquer tipo de notação algébrica, os babilónicos descobriram um método para resolver equações quadráticas do tipo $x^2-px=q$ com p e q positivos. Este processo era apresentado como uma "receita":

1. Calcule a metade de p;
2. Multiplique-o por si próprio;
3. Adicione o resultado ao valor de q;
4. Calcule a raiz quadrada do resultado;
5. Adicione metade de p.

O valor obtido é o lado do quadrado procurado…

Tarefa 1: *Um dos problemas formulado pelos babilónicos prendia-se com a determinação do lado de um quadrado sabendo que a sua área menos o seu lado era* 870.
Traduz o problema através de uma equação e resolve-o usando o método referido anteriormente.

A **Civilização Grega** absorveu muitos dos conhecimentos da civilização egípcia e mesopotâmica e nesta época as diferentes áreas do conhecimento apresentaram uma grande evolução. A matemática não fugiu a esta regra e, nesta civilização, surgiram matemáticos importantíssimos, que decerto já ouviu falar, tais como Pitágoras, Euclides, Diofanto. Pensa-se que a dificuldade que os gregos sentiam a trabalhar com os números, racionais e irracionais, e o próprio sistema numeração por eles utilizado levou a um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos. As equações do segundo grau não foram exceção e por vezes eram resolvidas por meio de construções geométricas. Contudo nem sempre era fácil a sua compreensão…

Na **Civilização Hindu** houve vários matemáticos que deram o seu contributo na resolução das equações quadráticas. Embora tenham vivido em diferentes épocas podem destacar-se Aryabhata (séc.VI dc), Brahamagupta (séc.VII dc) e, mais tarde, Bhaskara (séc.XII dc). O conteúdo matemático deste último é bastante diversificado, incluindo a resolução de equações quadráticas, quer determinadas quer indeterminadas.

A civilização **árabe**, que se formou a partir do islamismo no século VII, desempenhou um papel importante no desenvolvimento da matemática. Mas foi no século VIII que os árabes começaram a manifestar interesse pelos diferentes campos da ciência. Foram traduzidas, para árabe, algumas tabelas matemáticas hindus e foi introduzida a simbologia dos números que hoje usamos, com os algarismos de 0 a 9. Este facto muito contribuiu para que a Álgebra surgisse como ramo da Matemática e se desenvolvesse como uma verdadeira Ciência. Um dos matemáticos a realçar é Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi, que é considerado o "pai da Álgebra". A sua obra, Hisab al-jabr wal-muqabala, de cujo título obtivemos a palavra Álgebra, pode ser dividida em três partes. Na primeira al-Khowarizmi faz uma classificação das equações lineares e quadráticas, a segunda parte está relacionada com a geometria prática, com especial relevância ao cálculo de áreas e volumes e, na terceira parte, apresenta vários problemas de legados e da sua resolução. Segundo o próprio esta obra pretendia ensinar os rudimentos da aritmética, úteis para decidir heranças, partilhas, conflitos jurídicos e comerciais, medições de terras, construção de canais, etc.

al-Khowarizmi apenas considerava equações com coeficientes e soluções positivas e face a tal premissa classificou-as em seis tipos: (ao lado da classificação retórica foi acrescentada a representação simbólica atual)

Quadrados iguais a raízes	$ax^2 = bx$
Quadrados iguais a números	$ax^2 = c$
Raízes iguais a números	$bx = c$
Raízes e quadrados iguais a números	$x^2 + px = q$
Quadrados e números iguais a raízes	$x^2 + q = px$
Raízes e números iguais a quadrados	$px + q = x^2$

Para reduzir as equações a cada um destes tipos, forma canónica, al-Khowarizmi apresentou duas regras importantes:

- *al-jabr* que tinha como objetivo fazer desaparecer as grandezas negativas, adicionando as mesmas com sinal positivo

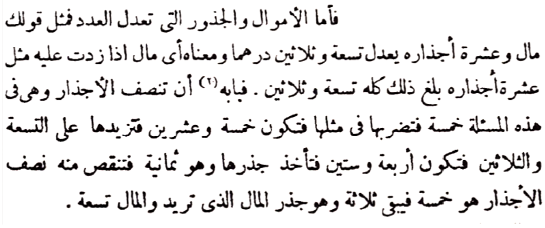
$$3x^2 - 2x - 8 = x^2 - x - 6$$
$$3x^2 - 2x - 8 + \mathbf{2x + 8} = x^2 - x - 6 + \mathbf{2x + 8}$$
$$3x^2 = x^2 + x + 2$$

- *al-muqabala* que tinha por objetivo reduzir os termos semelhantes da equação, obtendo apenas um termo de grau dois, um e zero.

$$2x^2 = x + 2$$

Al-Khowarizmi resolvia os seus problemas de uma forma "algébrica" e seguidamente apresentava sempre uma demonstração geométrica. Num dos seus livros pode encontrar-se um famoso problema:

Problema histórico


فأما الأموال والجذور التى تعدل العدد فمثل قولك
مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما ومعناه أى مال اذا زدت عليه مثل
عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين . فبابه(٢) أن تنصف الأجذار وهى فى
هذه المسئلة خمسة فتضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة
والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف
الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذى تريد والمال تسعة .

Traduzindo…

" Um quadrado e dez das suas raízes é igual a trinta e nove. Qual é a sua raiz?"

Al-Khwarizmi
in revista *Educação e Matemática* .1994 (adaptado)

O processo "algébrico" era semelhante aos dos babilónicos:

> Considere a metade do número das raízes, que é igual a cinco, esse número multiplicado por ele mesmo dá vinte e cinco. Some a este produto trinta e nove, obtém-se sessenta e quatro, do qual, extraindo a raiz quadrada tem-se oito como raiz. Retira-se a metade das raízes e o resultado é três.

O processo geométrico era o seguinte:

1.º Trace um quadrado de lado x.

2.º Trace dois retângulos de área $5x$ (pois $5x + 5x = 10$) .

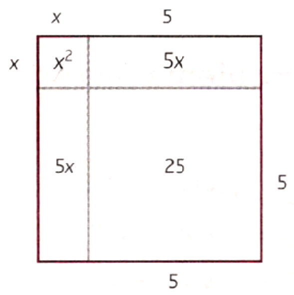
3.° Complete o quadrado obtendo um segundo quadrado. Cada um com área $25 (5 \times 5)$, sendo a área do restante39, que corresponde a $x^2 + 10x$.

4.° A área do quadrado «grande» é $64 (39 + 25)$.

5.° O lado do quadrado «grande» mede 8, o que equivale a dizer que

$$x + 5 = 8 \Leftrightarrow x = 3.$$

6.° A raiz positiva da equação é 3 (a única reconhecida pelos árabes).



<u>Tarefa 2</u>: *Resolve a equação* $x^2 + 4x - 12 = 0$ *pelo processo geométrico utilizado por Al-Khwarizmi.*

Na Europa renascentista do seculo XVI, surge o francês **François Viéte**, o grande impulsionador da Álgebra simbólica. Foi o primeiro matemático a utilizar letras para representar incógnitas e, para além disso, para representar constantes. Ao contrário do que hoje se faz, Viéte representou as incógnitas por vogais e as constantes por consoantes. Tendo por objetivo resolver uma equação completa na forma $ax^2 + bx + c = 0$ apresentou o seguinte método:

1. Considerar que $x = u + v$,
2. Substituir na equação e reescrever a equação em v.
$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0$$
$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0$$
$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0 \quad (\star)$$
3. Se $2au + b = 0$, então $u = -\frac{b}{2a}$.
4. Substituindo em $(\star)$ tem-se que:
$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$
5. Resolvendo em ordem a v:
$$v^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad \text{e} \quad \text{se } b^2 - 4ac \geq 0 \quad \text{então} \quad v = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
6. Tendo em conta que $x = u + v$ vem que:
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Outro matemático muito importante da época foi **René Descartes** (1596-1650) que foi um impulsionador da geometria analítica. Este famoso matemático apresentou detalhadamente a resolução geométrica de três tipos de equações do 2.ºgrau completas com coeficientes e soluções positivas. Só depois de estudar as equações de grau superior ao terceiro, Descartes passou a tomar em consideração as soluções negativas. O método geométrico por ele utilizado era semelhante ao usado pelos gregos.

No século XVII, nasce na Escócia, **Colin MacLaurin**, um matemático que entra para a universidade com apenas 12 anos. No seu livro Álgebra, publicado dois anos depois da sua morte, apresentou a teoria das equações do 2.ºgrau de uma forma completa (com soluções positivas e negativas) dando a demonstração algébrica que hoje é ensinada. O seu método era traduzido do seguinte modo:

> *1.º Transportam-se todos os termos que contêm a incógnita para um membro da equação e todos os termos conhecidos para o outro,*
> *2.º Se o quadrado da incógnita está multiplicado por alguma quantidade, dividem-se todos os termos da equação por essa quantidade;*
> *3.º Forma-se o quadrado da metade da quantidade que multiplica a incógnita simples, juntando-o a ambos membros da equação e, nesse momento, um membro da equação será um quadrado perfeito.*
> *4.º Tira-se a raiz quadrada de ambos os membros, e um membro será sempre a incógnita com a metade da quantidade que multiplica a incógnita simples; de modo que se transpusermos essa metade, teremos o valor da incógnita.*

Este matemático, sabendo que todo o quadrado de um número é sempre positivo, admitia que poderiam existir equações impossíveis caso se obtivesse a raiz quadrada de uma quantidade negativa.

Para concluir esta resenha histórica sobre as equações 2.º grau irás tu próprio deduzir a fórmula resolvente que habitualmente usas na aula de matemática…

Tarefa 3: Utilizando as indicações que te são dadas deduz a fórmula resolvente para uma equação do 2.º grau, na forma $ax^2 + bx + c = 0$ *com* $a \neq 0$ *e* $b^2 - 4ac \geq 0$.

	$ax^2 + bx + c = 0$ *com* $a \neq 0$ *e* $b^2 - 4ac \geq 0$
Divide a equação pelo coeficiente do termo de maior grau:	
Isola o termo independente no segundo membro:	
Adiciona $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros:	
Identifica o caso notável e escreve o segundo membro na forma de uma só fração:	
Aplica a noção de raiz quadrada:	
Isola o valor de x:	
Escreve a fórmula anterior na forma de uma só fração:	

Anexo 3 - Pescaria das Equações Quadráticas…

Escola Secundária de Oliveira do Hospital

Pescaria das Equações Quadráticas…

Jogo de cartas
Ano de Escolaridade: 9.º
Ano letivo 2011/12

Material:

1 baralho de 20 cartas vermelhas com equações do 2.ºgrau que podem ser possíveis ou impossíveis em $\mathbb{R}$.

1 baralho de 33 cartas verdes. Destas, vinte e nove possuem um número real que pode, ou não, ser solução de uma das equações das cartas vermelhas. As restantes quatro não possuem qualquer número pelo que serão associadas às equações impossíveis apresentadas nas cartas vermelhas.

Número de jogadores:

2 a 4

Objetivo do jogo:

Fazer "peixinho", que consiste em agrupar uma carta vermelha com a(s) carta(s) que contém a(s) solução(ões) da equação, caso existam, ou com uma carta sem número, caso se trate de uma equação impossível em $\mathbb{R}$.

Regras:

- As cartas de cada uma das cores são baralhadas e formam-se dois montes: um com as cartas verdes e outro com as vermelhas.
- A cada jogador são distribuídas 3 cartas vermelhas e 6 cartas verdes.
- Os jogadores devem de imediato tentar fazer "peixinho" e, caso o façam, colocam-no na mesa virado para baixo.
- O jogador que inicia o jogo será o que inicialmente conseguiu fazer o maior número de "peixinhos" (caso haja empate começa o mais velho) e segue-se o sentido dos ponteiros do relógio.
- Cada jogador, na sua vez, pede ao seguinte a carta que desejar: uma carta equação (vermelha) ou uma carta solução (verde), de modo a tentar fazer "peixinho". Se o colega possuir essa carta é obrigado a entregá-la. Caso contrário dirá "PESCA!" e o jogador deve retirar uma carta do monte respetivo (verde se tiver solicitado uma solução ou vermelho se pediu uma equação). Se a carta retirada do baralho permitir concluir o "peixinho" deve ser colocado em cima da mesa. Caso contrário, o jogador fica com a carta e o jogo prossegue.
- O jogo acaba quando todas as cartas vermelhas (equações) estiverem associadas às cartas verdes (solução) ou quando já não for possível associar cartas.
- Ganha o jogador que, no final do jogo, possuir o maior número de "peixinhos".

BOM JOGO!

Anexo 4 - As equações quadráticas e o tempo de travagem …

Escola Secundária de Oliveira do Hospital

As equações quadráticas e o tempo de travagem …

Ano de Escolaridade: 9.º
Ano letivo 2011/12

A distância necessária para parar um veículo em segurança, quando se avista um obstáculo, depende da velocidade a que o veículo circula. Chama-se **distância de paragem** (D_p) à distância percorrida por um veículo entre o momento em que o condutor vê o obstáculo e o momento em que o veículo se imobiliza.

A distância de paragem é igual à soma da distância de reação com a distância de travagem

- ✓ O intervalo de tempo que decorre entre o momento em que o condutor de um automóvel vê um obstáculo na estrada e o momento em que carrega no travão denomina-se *tempo de reação*. Durante o tempo de reação, o automóvel continua a circular à mesma velocidade e percorre uma distância a que se chama **distância de reação** (D_r). Considera-se que $D_r = 0.3v$.

.

- ✓ Entende-se por **distância de travagem** (D_t) a distância percorrida pelo veículo entre o momento em que o condutor inicia a travagem e o momento em que se imobiliza. Considera-se que $D_t = \frac{v^2}{200}$.

Assim, a distância de paragem (D_p), em metros, em função da velocidade , v (em km/h), e em boas condições, é dada pela expressão $D_p = 0.3v + \frac{v^2}{200}$.

1. Em Oliveira do hospital ocorreu um atropelamento grave. A polícia foi chamada a intervir…. O comandante verificou que, na via, existiam marcas de travagem ao longo de aproximadamente $25m$. Ajuda o comandante a resolver a situação determinando a que velocidade circulava o carro.

2. A uma velocidade de 100 km/h, qual é a distância mínima necessária para um condutor parar em segurança, quando avista um obstáculo?

3. O André percorria um troço da A25 quando reparou que, alguns metros à sua frente, tinha havido um acidente que ocupava todas as vias da faixa de rodagem.

Velocidade permitida na autoestrada:

Mínima…50 km/h

Máxima…120 km/h

Quando o carro parou, o André estimou em $100\ m$ a distância que percorreu desde o momento em que avistou o acidente. O André circulava em excesso de velocidade? Justifica.

Anexo 5 - Resolução de problemas envolvendo equações do 2.ºgrau

Escola Secundária de Oliveira do Hospital

Resolução de problemas envolvendo equações do 2.ºgrau

Ano de Escolaridade: 9.º
Ano letivo 2011/12

1. Uma pastelaria da cidade de Viseu é famosa pelo seu bolo-rei. No mês de dezembro, a pastelaria aumenta a produção diária à medida que o fim do mês se aproxima. Para este ano, tendo em conta as vendas de 2011, a gerência definiu que no dia 1 de dezembro confecionará apenas 4 bolos, no dia 2 de dezembro já se fazem 16, no dia 3 de dezembro 36, no dia 4 de dezembro 64, e assim sucessivamente.
   1.1 Quantos bolos se vão confecionar no dia 8 de dezembro?
   1.2 Escreve uma expressão que permita determinar o número de bolos a produzir em qualquer dia do mês de dezembro.
   1.3 Sabendo que, independentemente do peso, a pastelaria vende cada bolo a $18€$ determina o encaixe financeiro da pastelaria na véspera de Natal.
   1.4 Em que dia do mês de dezembro a pastelaria produziu 1156 bolos?

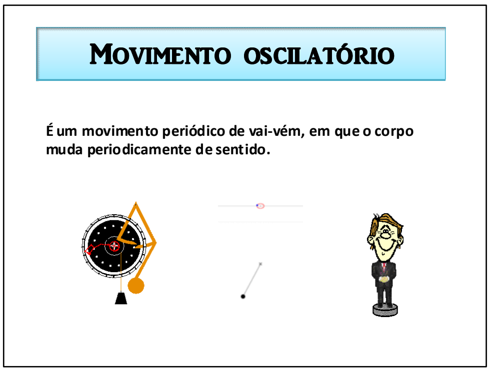
2. O André comprou um terreno retangular com $1750m^2$ de área e pretende vedá-lo com rede, de forma a poder utilizá-lo para pastagem. Sabe-se que a largura do terreno tem menos quinze metros do que o seu comprimento.
   Determina o número de metros de rede que o André vai precisar.

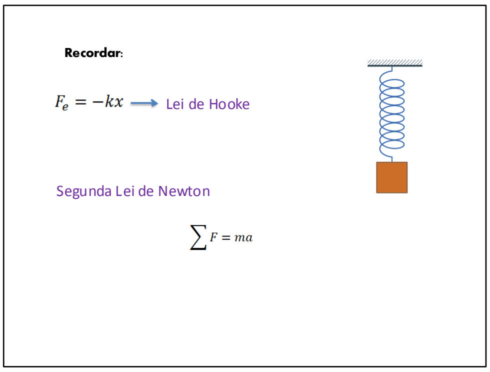
3. Um atleta lança uma flecha para o ar a partir de um ponto situado a alguns metros do chão. Durante o movimento, a distância ao solo $h(t)$, em metros, da flecha no instante t, em segundos, é dada por:

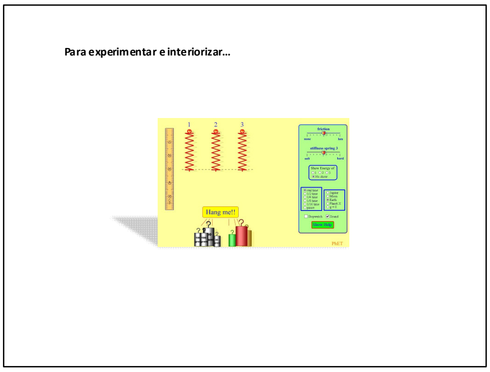
$$h(t) = -5t^2 + \frac{59}{2}t + 3$$

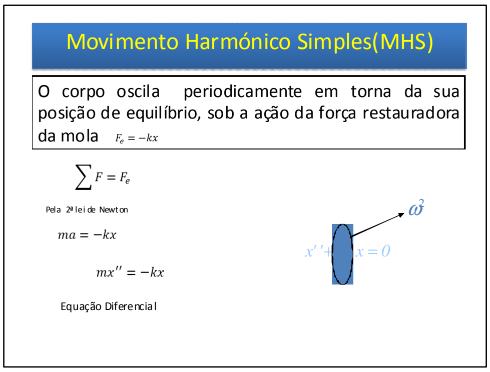
   3.1 A que altura se encontrava a flecha no momento em que foi lançada?
   3.2 A flecha atingirá a altura de 47metros?
   3.3 Durante quanto tempo a flecha esteve a uma altura superior ou igual a 41metros?

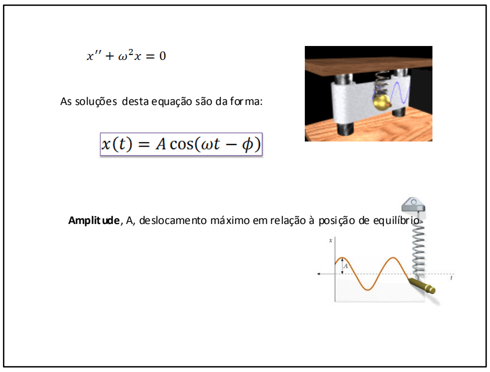
Anexo 6 - Slides apresentados pela professora sobre movimentos oscilatórios

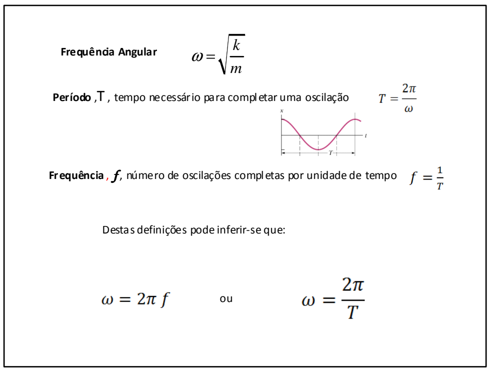


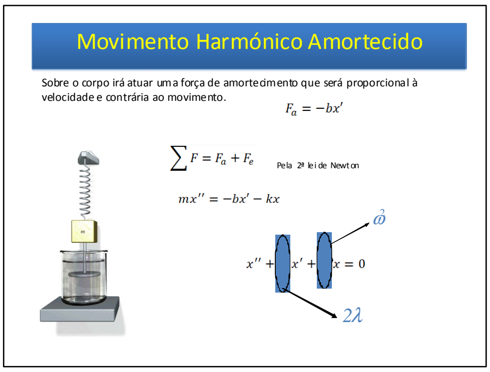


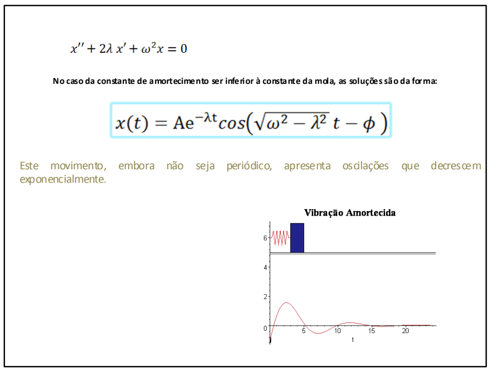






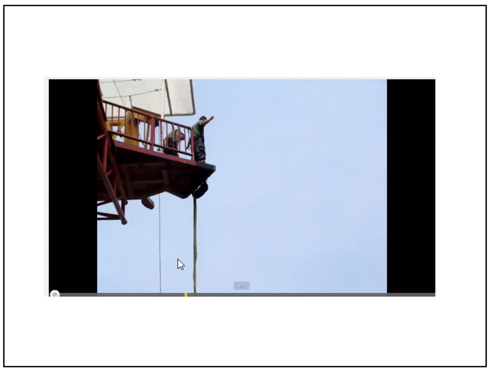







Um desporto radicalmente matemático....
BUNGEE
JUMPING


VideoVat.com



Anexo 7 - Ficha de trabalho de matemática A

Escola Secundária de Oliveira do Hospital	**Ficha de trabalho de matemática A** **12.ºC** **Duração: 90 minutos** **Ano letivo: 2011/12**

Atividade 1: Para começar…

Decerto hoje foi a primeira vez que ouviram falar de "equações diferenciais". O nome destas equações pode até intimidar-vos, mas não há que ter receio e posso dizer-vos que algumas equações diferenciais se resolvem recorrendo a equações que já estudaram ao longo do vosso percurso… as **equações quadráticas.**

Uma equação diferencial é uma equação que contém uma ou mais derivadas de uma função desconhecida, a que chamamos $x(t)$. Existem diversos fenómenos físicos, biológicos e até económicos que são modelados por equações deste tipo. As equações diferenciais que iremos utilizar são da forma:

$$x''(\mathrm{t}) + bx'(\mathrm{t}) + cx(\mathrm{t}) = 0 \qquad (18)$$

com b e c constates reais fixas.

Com o objetivo de encontrar as soluções desta equação vamos associar-lhe uma equação algébrica do segundo grau $\boldsymbol{r^2 + br + c = 0}$ com b e $c \in \mathbb{R}$.

A esta equação algébrica dá-se o nome de **Equação Característica** associada à equação diferencial (1).

É possível determinar as soluções da equação diferencial se forem conhecidas as soluções da equação quadrática. Fazer o estudo completo das soluções duma equação diferencial é demasiado ambicioso a este nível de ensino. Nos próximos anos letivos decerto irás retomar este assunto. Contudo hoje o que se pretende é que possas inferir algumas relações interessantes e que fiques sensibilizado para o uso das equações quadráticas.

Vamos então investigar como as equações quadráticas são importantes para a determinação das soluções das equações diferenciais.

Tarefa 1: Mostra que, se k é uma constante real que é raiz da equação característica associada à equação diferencial (1) então e^{kt} é solução da equação diferencial.

Sugestão:

- Determina as derivadas até à ordem dois de e^{kt} e substitui no 1.º membro da equação diferencial (1).
- Decompõe o 1.º membro em fatores.

<u>Tarefa 2</u>: Mostra que se a equação característica admite como raízes $\pm\omega i$, com $\omega \in \mathbb{R}^{+}$, então a equação diferencial (1) toma a forma $x''(\mathrm{t}) + \omega^2 x(\mathrm{t}) = 0$.

Sugestão:

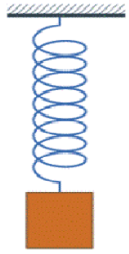
- Escreve a fórmula que permite determinar as raízes de uma equação quadrática.
- Tendo em conta que as raízes da equação caraterística são imaginários puros infere o valor de b.
- Determina o valor de c.

<u>Tarefa 3</u>: Mostra que $x(t) = A\ \cos(\omega t - \phi)$, com A e ϕ constantes reais quaiquer, é solução da equação diferencial $x''(\mathrm{t}) + \omega^2 x(\mathrm{t}) = 0$.

Com estas tarefas foi possível tomares consciência que a natureza das raízes da equação quadrática associada à equação diferencial (1) vai influenciar o tipo de soluções desta última. Existem ainda equações diferenciais mais elaboradas que possuem soluções mais complexas…

As atividades que se seguem estão relacionadas com a Física, e em particular na mecânica dos movimentos vibratórios, e são traduzidas por este tipo de equações diferenciais. Contudo ser-te-á fornecida a forma das soluções da equação diferencial que irás utilizar…

Atividade 2: Como sabes a função $x(t) = A\ \cos(\omega t - \phi)$ traduz a lei do movimento harmónico simples de um corpo de massa m quando colocado na extremidade de uma mola de constante elástica k.



Nesta expressão:

A – deslocamento máximo em relação à posição de equilíbrio;

ω - frequência angular do oscilador $\left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$;

ϕ – ângulo chamado fase inicial do movimento.

Considera uma mola que distende $7.5cm$, em relação à posição de equilíbrio, quando nela atua uma força de $3N$. Sabe-se que um corpo, com $0.7kg$, é preso à extremidade da mola e afastado verticalmente $10cm$ da posição de equilíbrio. Tem-se ainda que o corpo ao ser largado começa a oscilar efetuando um movimento harmónico simples.

a) Determina a constante elástica da mola utilizada na experiência descrita.

b) Calcula o período e frequência do movimento.

c) Indica a frequência angular do movimento.

d) Identifica a amplitude do movimento.

e) Determina o valor da fase inicial.

f) Define o deslocamento, x, do corpo em função do tempo t.

g) Calcula a velocidade e aceleração do corpo em qualquer instante t.

Atividade 3: Um salto de Bungge Jumping

A equação diferencial

$$x''(t) + 0.4\,x'(t) + \left(0.04 + \frac{\pi^2}{9}\right)x(t) = 40\left(0.04 + \frac{\pi^2}{9}\right)$$

modela o salto de um dos concorrentes que participa numa demonstração de *bungee jumping.*

A altura *h,* em metros, dos pés do concorrente ao solo, *t* segundos após o salto, é dada por:

$$h(t) = 40 + 50e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \quad ; \quad t \geq 0$$

1. De que altura saltou o concorrente?

2. Determina os instantes em que o concorrente se encontrou a $40\,\mathrm{m}$ do solo, nos 10 segundos após ter efetuado o salto.

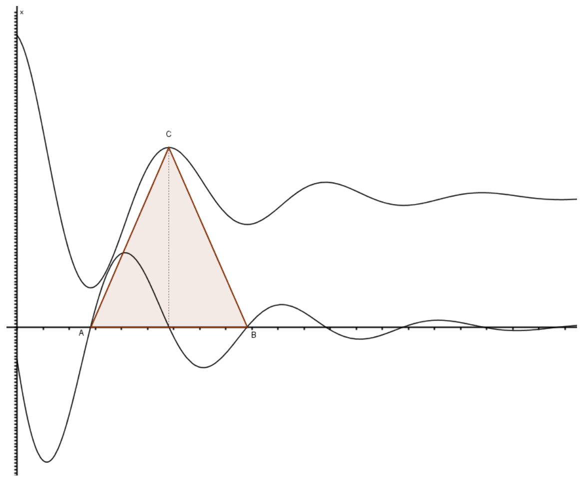
3. Calcula $\lim_{t\to+\infty} h(t)$ e interpreta o resultado no contexto apresentado.

4. Seja h' a função derivada de h.
Mostra que

$$h'(t) = -50e^{-0.2t}\left(0.2\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right).$$

5. Na figura seguinte encontram-se representadas partes dos gráficos das funções h e h', e o triângulo $[ABC]$. Sabe-se que:

- As abcissas dos pontos A, B e C são os três menores zeros de h';
- Os pontos A e B pertencem ao eixo Ox;
- O ponto C pertence ao gráfico de h.



Determina a área do triângulo $[ABC]$, apresentando o resultado aproximado às décimas. Apresenta o(s) gráfico(s) utilizados para a resolução do problema bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a sua resolução. Nos cálculos intermédios se procederes a arredondamentos conserva, no mínimo, três casas decimais.