

# O Problema do Fluxo Mais Rápido

Adriana Pratas Batalha





# O Problema do Fluxo Mais Rápido

Adriana Pratas Batalha

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**  
Área de Especialização em **Estatística, Optimização e Matemática Financeira**

## Júri

**Presidente:** Professor Adérito Araújo  
**Orientador:** Professor José Luís Santos  
**Vogal:** Professora Marta Pascoal

**Data:** Junho de 2013



# Resumo

Os problemas associados a transmissão de fluxo numa rede aparecem frequentemente em contextos práticos. Neste tipo de problemas, é importante a quantidade de fluxo transmitida mas também é importante o tempo necessário para fazer esta transmissão. Os modelos com fluxo estático (isto é, fluxo que não tem em conta a passagem do tempo) não são adequados para descrever problemas reais. Isto dá origem aos chamados fluxos dinâmicos, onde cada arco tem associado um tempo de transmissão.

Seja  $N = (V, A)$  uma rede dirigida, com conjunto de nós  $V$  e conjunto de arcos  $A$ . Cada arco  $e \in A$  tem associada uma capacidade  $c_e$  e um tempo de transmissão  $\tau_e$ . O *problema do fluxo mais rápido* consiste em encontrar na rede  $N$  um fluxo dinâmico  $f$ , que envie  $d$  unidades de fluxo de um nó de origem  $r$  para um nó de chegada  $s$ , no mínimo tempo possível. O tempo que um fluxo mais rápido de valor  $d$  demora a percorrer a rede é designado por tempo de transmissão  $T(d)$ .

Neste trabalho são estudados dois algoritmos propostos em trabalhos anteriores, baseados na relação entre o fluxo mais rápido e o fluxo dinâmico máximo. Estes algoritmos são duas variações da pesquisa binária. São apresentados alguns resultados computacionais, de onde se conclui que estes algoritmos são bastante eficientes e podem ser usados para resolver problemas de larga escala.

**Palavras Chave:** Fluxo dinâmico, fluxo máximo, fluxo mais rápido, pesquisa binária

# Abstract

The problems associated with transmission of flows are very common in practical contexts. In these types of problems is important the amount of flow to be transmitted but also the amount of time needed to transmit this flow. The models with static flows (flows that don't consider time) aren't adequate to describe real life problems. These leads to dynamic flows, where a transmission time is attached to each arc of the network. Let  $N = (V, A)$  be a directed network, with set of nodes  $V$  and set of arcs  $A$ . Each arc  $e \in A$  has a capacity  $c_e$  and a transmission time  $\tau_e$ . The *quickest flow problem* is to find in network  $N$  a dynamic flow  $f$ , that sends  $d$  units of flow from a given source node  $r$  to a given sink node  $s$ , in minimum possible time. The time that a quickest flow of value  $d$  needs to arrive at  $s$  is called minimum transmission time  $T(d)$ .

In this work, we study two algorithms that are proposed in previous works and that are based in the relationship between maximum dynamic flows and quickest flows. These algorithms are variations of the usual

binary search method. We present some computational results that show that these algorithms are very efficient and can be used to solve large instance problems.

**Keywords:** Dynamic flow, maximum flow, quickest flow, binary search





# Agradecimentos

*Ao meu orientador, Professor José Luís Santos, por toda a ajuda e disponibilidade que mostrou durante a realização desta dissertação.*



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Iniciais</b>	<b>3</b>
2.1	Fluxo estático . . . . .	3
2.2	Fluxo dinâmico . . . . .	5
2.2.1	Armazenamento em nós intermédios . . . . .	6
2.2.2	Fluxo dinâmico máximo . . . . .	7
2.2.3	<i>Time-expanded graphs</i> . . . . .	7
<b>3</b>	<b>O Fluxo Mais Rápido</b>	<b>9</b>
3.1	Definição . . . . .	9
3.2	<i>Temporally Repeated Flows</i> . . . . .	10
3.3	O Valor do Fluxo Dinâmico Máximo . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Algoritmos</b>	<b>19</b>
4.1	Pesquisa binária . . . . .	19
4.1.1	Intervalo inicial . . . . .	19
4.2	Pesquisa binária modificada . . . . .	21
4.2.1	Análise e complexidade do algoritmo . . . . .	24
4.3	Pesquisa binária com interpolação . . . . .	25
4.3.1	Análise e complexidade do algoritmo . . . . .	28
4.4	Resultados computacionais . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>35</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Os problemas relacionados com a transmissão de fluxo em redes fazem parte dos problemas mais estudados e têm várias aplicações práticas. A maioria dos algoritmos e métodos utilizados para resolver problemas com fluxo, foi criada para redes com fluxos estáticos, isto é, fluxos onde não é tida em conta a passagem do tempo. No entanto, na maior parte das aplicações práticas, não só é importante a quantidade de fluxo transmitida, como também o tempo que é necessário para fazer essa transmissão. Isto dá origem aos chamados problemas de fluxo dinâmico, onde cada arco da rede tem associado (além das outras características) um tempo de transmissão, que corresponde ao tempo que o fluxo demora a percorrer esse arco. Como seria de esperar, os problemas com fluxo dinâmico são mais delicados e difíceis de resolver.

Neste trabalho é tratado um tipo específico de problema de fluxo dinâmico. Seja  $N = (V, A)$  uma rede dirigida cujo conjunto de nós é  $V$  e o conjunto de arcos é  $A$ . Cada arco  $e$  tem uma capacidade  $c_e$ , que representa o número máximo de unidades de fluxo que podem ser enviadas por unidade de tempo através desse arco, e um tempo de transmissão  $\tau_e$ , que representa as unidades de tempo necessárias para percorrer o arco  $e$ .

O *problema do fluxo mais rápido* consiste em encontrar na rede  $N$  um fluxo dinâmico  $f$ , que envie de um nó de origem  $r$  para um nó de chegada  $s$  (assumimos que  $r$  e  $s$  são distintos)  $d$  unidades de fluxo, no mínimo tempo possível. O tempo que um fluxo mais rápido de valor  $d$  demora a percorrer a rede é designado por tempo mínimo de transmissão  $T(d)$ .

No Capítulo 2 são abordados alguns conceitos fundamentais relacionados com fluxos. Começamos por lembrar a definição de fluxo estático e alguns problemas que envolvem este tipo de fluxo, e que serão úteis mais à frente na abordagem ao problema do fluxo mais rápido. De seguida, é introduzida a definição de fluxo dinâmico e é definido o problema do fluxo dinâmico máximo. O fluxo dinâmico máximo e o fluxo mais rápido têm uma relação muito próxima, que será abordada no Capítulo

3. Os *time expanded-graphs* são mencionados no Capítulo 2, embora não sejam aprofundadas as suas aplicações neste trabalho.

No Capítulo 3 é introduzido o problema principal deste trabalho. Começamos por definir os *temporally repeated flows*, que são úteis no cálculo do fluxo dinâmico máximo. De seguida, é estabelecida a relação que o fluxo mais rápido tem com o fluxo dinâmico máximo e são estudadas algumas propriedades do valor do fluxo dinâmico máximo no intervalo  $[0, T]$  como uma função de  $T$ . Estas propriedades, especialmente a convexidade de  $d(T)$ , são fundamentais nos algoritmos estudados no Capítulo 4.

No Capítulo 4 são estudados dois dos algoritmos propostos em [1]. Estes algoritmos consistem em duas variações da pesquisa binária: numa das variações, o intervalo de procura de  $T(d)$  é reduzido usando a convexidade de  $d(T)$ ; na outra variação, uma função de interpolação é usada para escolher o próximo ponto de teste. Estes algoritmos foram implementados e no Capítulo 4 são apresentados alguns resultados computacionais.

# Capítulo 2

## Conceitos Iniciais

Consideremos uma rede  $N = (V, A)$  com  $n = |V|$  nós e  $m = |A|$  arcos. Cada arco  $e \in A$  tem associado um tempo de transmissão  $\tau_e$  (tempo necessário para percorrer o arco  $e$ ) e uma capacidade  $u_e$ . Cada arco pode ter também associado um custo  $c_e$ , que indica quanto custa o envio de uma unidade de fluxo através desse arco. Um arco  $e$  que comece no nó  $v$  e termine no nó  $w$  pode também ser denotado por  $(v, w)$ .  $\delta^+(v)$  e  $\delta^-(v)$  representam os arcos que saem e entram em no nó  $v$ , respectivamente.

No exemplo que se segue, todos os arcos têm capacidade 2 e os números associados a cada arco representam os seus tempos de transmissão.

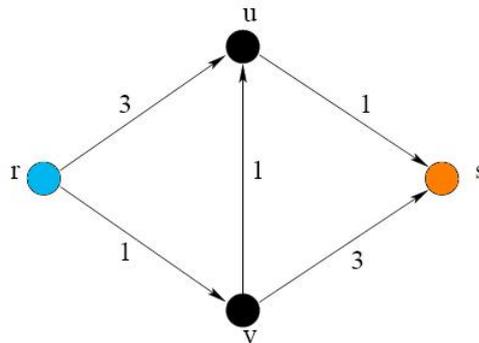


Figura 2.1: Exemplo de uma rede com nó de origem  $r$  e nó de chegada  $s$

Seja  $S \subseteq V$  um conjunto de nós que pode ser dividido em dois subconjuntos: o conjunto dos nós de origem,  $S^+$ , e o conjunto dos nós de chegada,  $S^-$ . Cada  $v \in S^+$  pode ter uma provisão de valor  $d_v \geq 0$  e cada  $v \in S^-$  pode ter uma necessidade de valor  $d_v \leq 0$  tais que  $\sum_{v \in S} d_v = 0$ . No caso em que há apenas um nó de origem,  $r \in V$ , e um nó de chegada,  $s \in V$ , temos que  $d = d_r = -d_s$ .

### 2.1. Fluxo estático

Um fluxo estático  $x$  em  $N$  atribui a cada arco  $e$  um valor não negativo,  $x_e$ , tal que as restrições de conservação de fluxo

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = 0, \quad \forall v \in V \setminus S \quad (2.1)$$

são satisfeitas.

O fluxo  $x$  satisfaz as necessidades e as provisões se

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = d_v, \quad \forall v \in S. \quad (2.2)$$

Um fluxo  $x$  é admissível se satisfaz as restrições de capacidade  $0 \leq x_e \leq u_e$ , para todo o  $e \in A$ . O custo do fluxo estático  $x$  é dado por

$$c(x) = \sum_{e \in A} c_e x_e \quad (2.3)$$

Existem vários problemas que podem ser definidos numa rede com fluxo estático. De seguida referimos alguns deles, que serão usados para tratar o tema principal deste trabalho.

### **Caminho mais curto**

O *problema do caminho mais curto* consiste em encontrar um caminho entre dois nós, de forma a que a soma do peso das arestas ou arcos desse caminho seja a mínima possível.

### **Fluxo e circulação de custo mínimo**

O *problema do fluxo de custo mínimo* consiste em enviar, com menor custo possível, uma determinada quantidade de fluxo dos nós de origem para os nós de chegada. O *problema de circulação de custo mínimo* é semelhante, mas a conservação de fluxo é exigida em todos os nós da rede, ou seja, não há um nó de origem nem um nó de chegada.

### **Fluxo máximo**

O *problema do fluxo máximo* consiste em encontrar um fluxo admissível na rede que tenha o máximo valor possível.

## 2.2. Fluxo dinâmico

Um fluxo dinâmico  $f$  em  $N$ , com horizonte de tempo  $T$ , é dado por funções  $f_e : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , onde  $f_e(t)$  é o fluxo enviado através do arco  $e$  no instante  $t$ .

O intervalo  $[0, T]$  pode ser contínuo ou discreto. No caso de ser discreto, contém apenas os valores inteiros do intervalo e  $T \in \mathbb{N}_0$ .

O tempo de transmissão,  $\tau_e$ , é fixo. No caso do intervalo ser discreto é também um número inteiro.

O fluxo  $f_e(t)$  chega ao nó de chegada de  $e$  no instante  $t + \tau_e$ . Para nos mantermos dentro do horizonte de tempo  $T$ , exigimos que  $f_e(t) = 0$  para  $t \in [T - \tau_e, T]$ . Para simplificar a notação, assumimos que  $f_e(t) = 0$  para  $t \notin [0, T]$

As restrições de conservação de fluxo são, no caso do intervalo de tempo ser discreto,

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e(t - \tau_e) = 0, \quad t \in [0, T], v \in V \setminus S \quad (2.4)$$

e, no caso de ser contínuo,

$$\int_0^\theta \left( \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e(t - \tau_e) \right) dt = 0, \quad \theta \in [0, T], v \in V \setminus S \quad (2.5)$$

Este fluxo satisfaz as provisões e as necessidades se, no instante  $T$ , o fluxo que saiu ou entrou em cada nó  $v \in S$  é igual à sua necessidade ou provisão  $d_v$ . Temos então que

$$\sum_{t=0}^T \left( \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e(t - \tau_e) \right) = d_v, \quad v \in S \quad (2.6)$$

e

$$\int_0^T \left( \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e(t - \tau_e) \right) dt = d_v, \quad v \in S \quad (2.7)$$

para um intervalo de tempo discreto e contínuo, respectivamente.

Quando há apenas um nó de origem,  $r$ , e um nó de chegada,  $s$ , um fluxo  $f$  que satisfaça a provisão  $d = d_r = -d_s$  é um fluxo com valor  $|f| = d$ .

No caso do fluxo ser dinâmico, a capacidade  $u_e$  representa um limite superior para a quantidade de fluxo que entra no arco  $e$  por unidade de tempo, pelo que as restrições de capacidade são  $f_e(t) \leq u_e$ , para  $t \in [0, T)$ .

Um fluxo dinâmico é admissível se satisfaz as restrições de capacidade.

O custo de um fluxo dinâmico para um intervalo de tempo discreto é dado por

$$c(f) = \sum_{e \in A} \sum_{t=0}^T c_e f_e(t) \tag{2.8}$$

e para um intervalo de tempo contínuo é dado por

$$c(f) = \sum_{e \in A} \int_{t=0}^T c_e f_e(t) dt. \tag{2.9}$$

Eis um exemplo de um fluxo dinâmico na rede mostrada na Figura 2.1. Este fluxo tem valor 8 e horizonte de tempo  $T = 5$ .

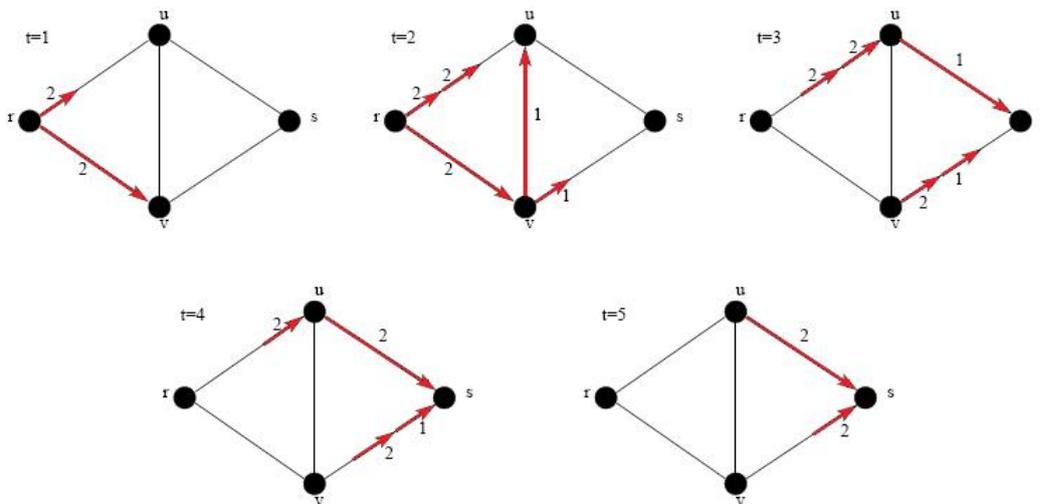


Figura 2.2: Fluxo dinâmico de valor  $d = 8$  e com horizonte de tempo  $T = 5$ , na rede da Figura 2.1.

### 2.2.1. Armazenamento em nós intermédios

No caso de podermos armazenar fluxo nos nós intermédios, as restrições de conservação de fluxo são, para um intervalo de tempo discreto e contínuo, respectivamente,

$$\sum_{t=0}^{\theta} \left( \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e(t - \tau_e) \right) \leq 0, \quad \theta \in [0, T - 1], v \in V \setminus S^+ \tag{2.10}$$

e

$$\int_0^\theta \left( \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e(t - \tau_e) \right) dt \leq 0, \quad \theta \in [0, T], v \in V \setminus S^+ \quad (2.11)$$

No entanto, exigimos que se verifique a igualdade para  $\theta = T$  e  $v \in V \setminus S$ , o que significa que nenhum fluxo deve ficar na rede depois do instante  $T$ .

### 2.2.2. Fluxo dinâmico máximo

O *problema do fluxo dinâmico máximo* consiste em determinar o fluxo dinâmico com o máximo valor possível num dado intervalo  $[0, T]$ .

No próximo capítulo será analisada a relação entre este problema e o problema do fluxo mais rápido.

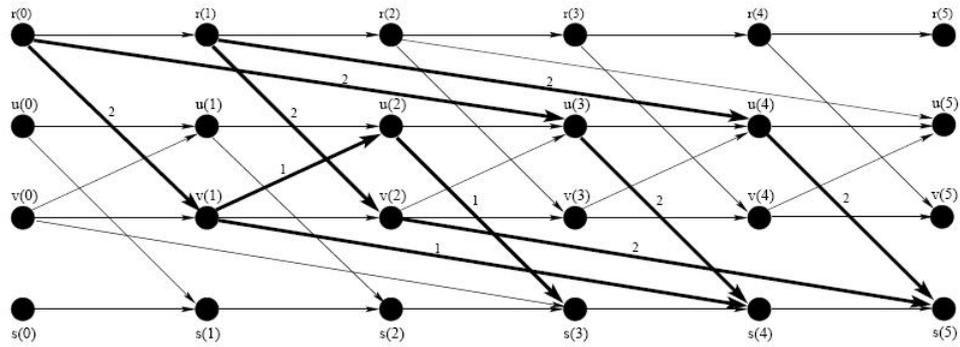
### 2.2.3. Time-expanded graphs

A versão *time-expanded* de uma rede de fluxo dinâmico é uma rede de fluxo estático obtida da seguinte forma: é feita uma cópia de todos os nós da rede para cada instante de tempo do intervalo  $[0, T]$ , sendo os arcos da rede redesenhados entre estas cópias. Eis uma definição formal:

**Definição 1.** *A versão time expanded da rede  $N$  é um digrafo  $N^T$  com nós  $v(t)$  para todo o  $v \in V$  e  $t \in [0, t]$ . Para cada arco  $e = (v, w) \in A$  com tempo de transmissão  $\tau_e$  e capacidade  $u_e$ , o digrafo  $N^T$  tem arcos  $(v(t), w(t + \tau_e))$  com capacidades  $u_e$  para  $t \in [0, T - \tau_e]$ . Há também arcos  $(v(t), v(t + 1))$  com capacidades  $b_v$ , para todo o  $v \in V$  e  $t \in [0, T - 1]$ , que corresponde à capacidade de armazenamento do nó  $v$ .*

É fácil verificar que, se a rede  $N$  tem  $n$  nós e  $m$  arcos,  $N^T$  terá  $n * T$  nós e  $(m + n) * T - n - \sum_{e \in A} \tau_e$

Aplicando esta técnica à rede da Figura 2.1 com o fluxo dinâmico mostrado na Figura 2.2, temos



Tradicionalmente, os fluxos dinâmicos são tratados usando a versão *time-expanded* da rede. Este método tem a vantagem de disponibilizar todos os algoritmos utilizados para lidar com fluxos estáticos, pois encontrar um fluxo dinâmico numa rede é equivalente a encontrar um fluxo estático na versão *time-expanded* dessa rede. No entanto, para redes relativamente extensas e se quisermos considerar um intervalo de tempo relativamente grande, este método torna-se bastante ineficiente.

## Capítulo 3

# O Fluxo Mais Rápido

O objectivo principal deste capítulo é introduzir a definição de *fluxo mais rápido* e estabelecer uma relação entre o fluxo mais rápido e o fluxo dinâmico máximo.

Para isto, é necessário definir os *temporally repeated flows*, que são uma noção importante na teoria dos fluxos dinâmicos e essenciais no estudo do problema do fluxo dinâmico máximo. De seguida, são apresentados alguns resultados relativos ao fluxo dinâmico máximo, que vão ser de grande utilidade na abordagem ao tema principal deste trabalho.

### 3.1. Definição

Seja  $[0, T]$  um intervalo de tempo discreto com  $T \in \mathbb{N}_0$  e seja  $N = (V, A)$  uma rede com nó de origem  $r$  e nó de chegada  $s$ , onde cada arco  $e$  tem uma capacidade  $u_e$  e é percorrido em  $\tau_e \in \mathbb{N}$  unidades de tempo.

**Definição 2.** O fluxo mais rápido em  $N$  de  $r$  para  $s$  com valor  $d$  é o fluxo dinâmico para o qual  $T = T(d)$  é mínimo.

$$\min T = T(d) \tag{3.1}$$

$$s.a. \sum_{t=0}^T \left( \sum_{e \in \delta^+(r)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(r)} f_e(t - \tau_e) \right) = d \tag{3.2}$$

$$\sum_{t=0}^T \left( \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e(t - \tau_e) \right) = -d \tag{3.3}$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e(t) - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e(t - \tau_e) = 0, \quad t \in [0, T], v \in V \setminus S \tag{3.4}$$

$$0 \leq f_e(t) \leq u_e, \quad e \in A, t \in [0, T] \tag{3.5}$$

O problema do fluxo mais rápido consiste em determinar a forma mais rápida de enviar uma determinada quantidade de fluxo através da rede. Este é, de certa

forma, o inverso do problema do fluxo dinâmico máximo. Em [1] são apresentados alguns resultados que evidenciam a relação entre estes dois problemas e que serão analisados aqui.

Antes disso, é necessário introduzir uma noção importante na teoria dos fluxos dinâmicos.

### 3.2. Temporally Repeated Flows

Seja  $g$  um fluxo estático admissível do nó  $r$  para o nó  $s$  na rede  $N$ , de valor  $|g|$ . Sejam  $g_1, \dots, g_m$  uma decomposição de  $g$  nos caminhos  $P_1, \dots, P_m$  de  $r$  para  $s$  e sejam  $|g_k|$  o valor do fluxo no caminho  $P_k$  e  $\tau(P_k) = \sum_{e \in P_k} \tau_e$  o tempo de transmissão de  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

**Definição 3.** *Repetindo  $g_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , nos respectivos caminhos  $T - \tau(P_k) + 1$  vezes, obtemos um fluxo dinâmico admissível, desde que  $T \geq \max_{1 \leq k \leq m} \tau(P_k)$ .*

Um fluxo dinâmico obtido desta forma é um temporally repeated flow (TRF) e tem valor

$$d = \sum_{k=1}^m (T - \tau(P_k) + 1) |g_k| = (T + 1) |g| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e. \quad (3.6)$$

Voltemos à rede da Figura 1 e consideremos o fluxo estático da figura seguinte.

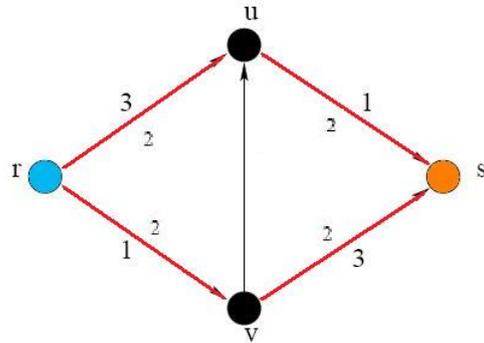
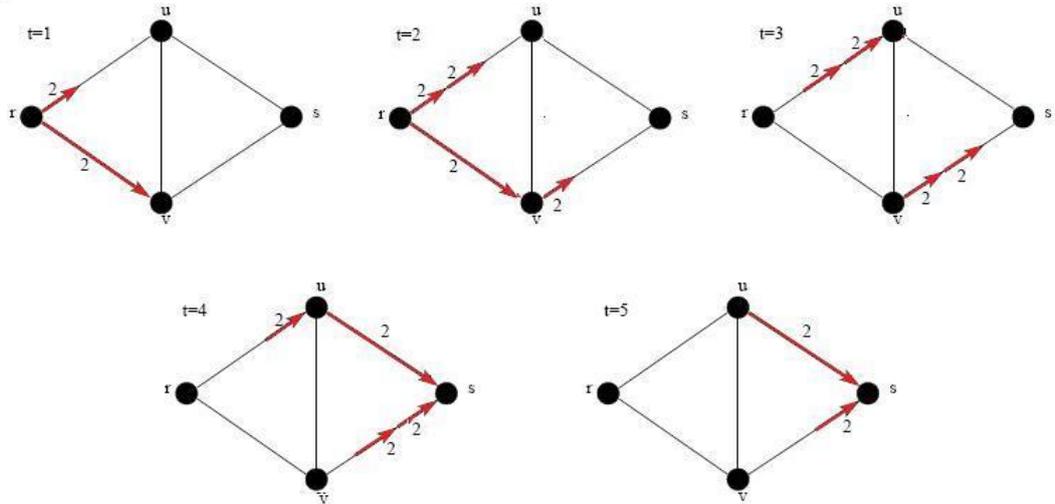


Figura 3.1: Fluxo estático de valor 4 na rede da Figura 2.1

Podemos decompor este fluxo estático em dois. Consideramos o caminho  $P_1$ , que passa pelos nós  $r$ ,  $u$  e  $s$  e o caminho  $P_2$  que passa por  $r$ ,  $v$  e  $s$ . Temos assim  $|g_1| = |g_2| = 2$  e  $\tau(P_1) = \tau(P_2) = 4$ .

Escolhendo  $T = 5$  (temos de ter  $T \geq 4$ ), repetimos  $g_1$  e  $g_2$  no máximo  $T - \tau(P_k) + 1 = 2$  vezes, obtendo assim um fluxo dinâmico de valor  $d = \sum_{k=1}^2 (T - \tau(P_k) + 1) |g_k| = 8$ . Este pode ser visto na figura seguinte.



Segundo Ford e Fulkerson (consultar [1] e [2] e as respectivas referências bibliográficas), há sempre um fluxo dinâmico máximo que é um TRF. Para o encontrar, temos de resolver um problema de *circulação de custo mínimo*, acrescentando à nossa rede um arco  $(s, r)$  com capacidade infinita e custo  $-(T + 1)$  e definindo os restantes custos como  $\tau_e$ , para  $e \in A$ . Daqui obtemos um fluxo estático que, temporalmente repetido, dá origem a um fluxo dinâmico que é máximo.

### 3.3. O Valor do Fluxo Dinâmico Máximo

A partir daqui, denotamos por  $T(d)$  o tempo de transmissão  $T$  de um fluxo mais rápido de valor  $d$  e por  $d(T)$  o valor de um fluxo máximo num dado intervalo  $[0, T]$ . Além disso, consideramos  $d(-1) = 0$ .

O primeiro resultado que apresentamos mostra a relação próxima que existe entre o fluxo dinâmico máximo e o fluxo mais rápido.

**Lema 1.** *Seja  $f$  um fluxo dinâmico com valor  $d$  no intervalo de tempo  $[0, T]$ ,  $T \geq 0$ . Se*

$$d(T - 1) < d \tag{3.7}$$

*então  $f$  é um fluxo mais rápido de valor  $d$  e o tempo mínimo de transmissão,  $T(d)$ , é  $T$ .*

Se o fluxo dinâmico máximo no intervalo  $[0, T]$  tem valor inferior a  $d$  (é este o significado de 3.7) e existe um fluxo dinâmico  $f$  que tem valor  $d$  em  $[0, T]$ , então são

precisas no mínimo  $T$  unidades de tempo para fazer  $d$  unidades de fluxo percorrer a rede e  $f$  é um fluxo mais rápido.

Os próximos resultados dão-nos informação sobre o valor  $d(T)$  de um fluxo dinâmico máximo, considerando-o uma função de  $T$ .

Seja  $G^T$  a classe de fluxos estáticos que induz um TRF de valor máximo,  $d(T)$ , no intervalo  $[0, T]$ . Seja ainda  $T_0 = \min\{T \geq 0 : d(T) > 0\}$ , isto é,  $T_0$  é o tempo de transmissão do caminho mais curto de  $r$  para  $s$ .

**Lema 2.** *Para todo o  $T \geq T_0$  temos*

$$d(T - 1) < d(T). \quad (3.8)$$

*Demonstração.* Para  $T = T_0$ : pela definição de  $T_0$  temos que  $d(T_0) > 0$  e  $d(T) = 0$  para  $T < T_0$ , de onde vem que  $d(T_0 - 1) < d(T_0)$ .

Para  $T > T_0$ : Consideremos um fluxo estático  $g^{T-1} \in G^{T-1}$  e seja  $|g^{T-1}|$  o seu valor.  $g^{T-1}$  induz um TRF de valor  $d(T - 1) + |g^{T-1}|$  no intervalo  $[0, T]$ , visto que cada caminho na decomposição de  $g^{T-1}$  pode ser usado mais uma vez. Como  $d(T)$  é o valor de um fluxo dinâmico máximo em  $[0, T]$  temos que,  $d(T) \geq d(T - 1) + |g^{T-1}| > d(T - 1)$ .  $\square$

O próximo lema mostra-nos a relação entre  $d(T + 1)$ ,  $d(T)$  e o valores  $|g^T|$ .

**Lema 3.** *Sejam  $g^T \in G^T$  e  $g^{T+1} \in G^{T+1}$ . Então, para todo o  $T \geq 0$ :*

- $|g^T| \leq |g^{T+1}|$ ;
- $d(T) + |g^T| \leq d(T + 1) \leq d(T) + |g^{T+1}|$ .

*Demonstração.* O primeiro ponto é consequência da fórmula 3.6.

$$d(T) = (T + 1) |g^T| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e^T$$

$$d(T + 1) = (T + 2) |g^{T+1}| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e^{T+1}$$

Pelo Lema 2, temos que  $d(T) + |g^T| \leq d(T+1)$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 (T+1)|g^T| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e^T + |g^T| &\leq d(T+1) \\
 \Leftrightarrow (T+2)|g^T| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e^T &\leq d(T+1) \\
 \Leftrightarrow (T+2)|g^T| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e^T &\leq (T+2)|g^{T+1}| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e^{T+1} \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq (T+2)(|g^{T+1}| - |g^T|) - \sum_{e \in A} \tau_e (g_e^{T+1} - g_e^T)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

De 3.9 temos que um fluxo estático de valor  $|g^{T+1}| - |g^T|$  dá origem a um TRF de valor não negativo. Isto implica que  $|g^{T+1}| - |g^T| \geq 0$ .

A primeira desigualdade do segundo ponto foi mostrada no Lema 2. Para mostrar a segunda desigualdade, basta-nos considerar um fluxo estático  $g^{T+1} \in G^{T+1}$ . Este fluxo induz um TRF de valor  $d(T+1) - |g^{T+1}|$  no intervalo  $[0, T]$ . Daqui vem que

$$\begin{aligned}
 d(T+1) - |g^{T+1}| &\leq d(T) \\
 \Leftrightarrow d(T+1) &\leq d(T) + |g^{T+1}|
 \end{aligned}$$

□

Sejam  $\Delta(T) = d(T) - d(T-1)$ , para  $T > 0$ , e  $g_{max}$  um fluxo máximo estático na rede  $N$ , sendo  $|g_{max}|$  o seu valor. Combinando o Lema 2 e o Lema 3 podemos mostrar o próximo resultado.

**Teorema 1.**

- A função  $d(T)$  de um fluxo dinâmico é monotona crescente. Para  $T \geq T_0$  é estritamente crescente.
- $\Delta(T)$  é monótona crescente, isto é, para todo o  $T > 0$  temos

$$\Delta(T) \leq \Delta(T+1). \tag{3.10}$$

- $\Delta(T)$  apenas toma valores no conjunto  $\{0, 1, \dots, |g_{max}|\}$ .

*Demonstração.* O primeiro ponto já foi demonstrado no Lema 2.

Para mostrar o segundo ponto, vamos utilizar o que foi demonstrado no Lema 3.

$$\begin{aligned}
 d(T) + |g^T| &\leq d(T+1) \leq d(T) + |g^{T+1}| \\
 \Leftrightarrow |g^T| &\leq d(T+1) - d(T) \leq +|g^{T+1}| \\
 \Leftrightarrow |g^T| &\leq \Delta(T+1) \leq +|g^{T+1}|
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como  $|g^{T-1}| \leq |g^T|$ , temos que

$$\begin{aligned}
 |g^{T-1}| \leq \Delta(T) \leq |g^T| &\leq \Delta(T+1) \leq +|g^{T+1}| \\
 \Leftrightarrow \Delta(T) &\leq \Delta(T+1)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Quanto ao terceiro ponto, sendo  $g^T$  um fluxo estático na rede  $N$ , é óbvio que  $0 \leq |g^T| \leq |g_{max}|$ , pelo que 3.11 implica  $0 \leq \Delta(T) \leq |g_{max}|$ . Como  $\Delta(T)$  só toma valores inteiros, verifica-se o terceiro ponto.  $\square$

Dos resultados anteriores, ficamos a saber que a função  $d(T)$  é estritamente crescente para  $T \geq T_0$  e convexa. Na Figura 3.2 podemos ver  $d(T)$  para a rede da Figura 2.1.

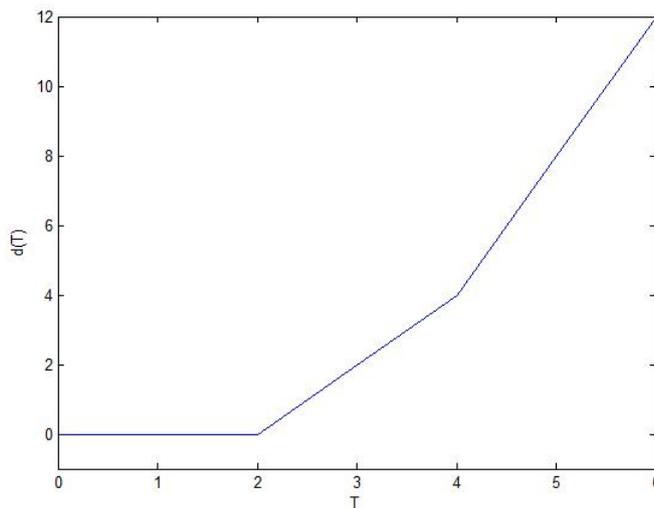
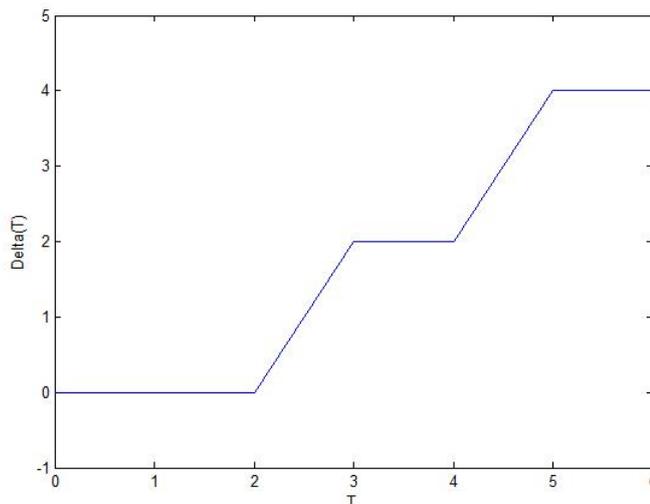


Figura 3.2:  $d(T)$

Na Figura 3.3 podemos ver a função  $\Delta(T)$  relativa à rede da Figura 2.1.

Figura 3.3:  $\Delta(T)$ 

Antes de apresentarmos o próximo resultado, lembramos a definição de subgradiente. O *subgradiente* de uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  num ponto  $x_0$  pertencente ao intervalo aberto  $I$ , é um número real  $k$  tal que, para qualquer  $x \in I$

$$f(x) - f(x_0) \geq k(x - x_0) \quad (3.13)$$

O subgradiente generaliza o conceito de derivada a funções que não são diferenciáveis em todo o seu domínio e é especialmente utilizado no estudo de funções convexas. Por exemplo, a função  $d(T)$  mostrada na Figura 3.2 não é diferenciável no ponto  $T = 2$  (nem em  $T = 4$ ). No entanto, podemos traçar uma recta que passe pelo ponto  $(2, d(2))$  e que, em todos os seus pontos, toca ou fica abaixo do gráfico de  $d(T)$ , como pode ser visto na Figura 3.4. O declive desta recta é um subgradiente.

O conjunto dos subgradientes em  $x_0$  para uma função convexa é um intervalo fechado  $[a, b]$ , com

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.14)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.15)$$

Os valores de  $a$  e  $b$  correspondem à derivada à esquerda e à direita de  $f$ , respectivamente.

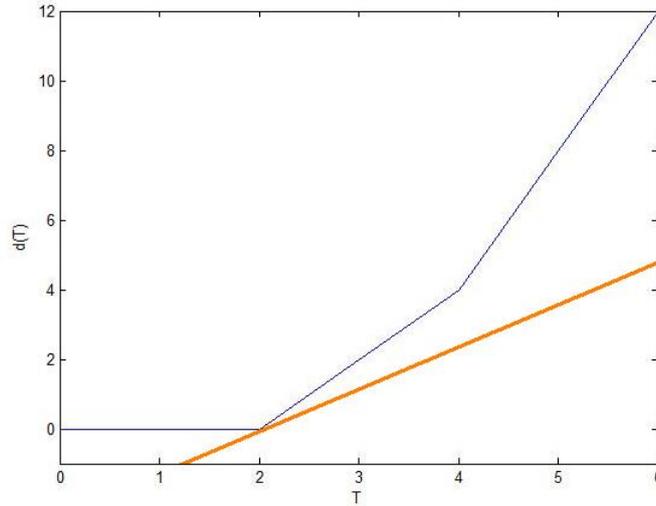


Figura 3.4: Subgradiente de  $d(T)$

**Lema 4.**

- Seja  $g^{T'} \in G^{T'}$ , para  $T' \geq 0$ . Então  $|g^{T'}|$  é um subgradiente de  $d(T)$  em  $T = T'$ .
- Se  $\bar{g}^{T'} \in \min\{|g| : g \in G^{T'}\}$  e  $T' > 0$  então

$$d(T') = d(T' - 1) + |\bar{g}^{T'}|. \quad (3.16)$$

Isto é equivalente a  $\Delta(T') = |\bar{g}^{T'}|$  o que significa que  $|\bar{g}^{T'}|$  é a derivada à esquerda de  $d(T)$  em  $T = T'$ .

*Demonstração.* Sabemos que  $d(T') = (T' + 1)|g| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e$ , para qualquer  $g \in G^{T'}$ . Sabemos também que  $d(T) \geq (T + 1)|g| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e$ , para qualquer  $g \in G^{T'}$  e  $T \geq 0$ . Logo

$$\begin{aligned} d(T) - d(T') &\geq (T + 1)|g| - \sum_{e \in A} \tau_e g_e - (T' + 1)|g| + \sum_{e \in A} \tau_e g_e \\ d(T) - d(T') &\geq (T - T')|g| \end{aligned}$$

Daqui concluímos que  $|g^{T'}|$  é subgradiente de  $d(T)$  em  $T = T'$ .

Por 3.14, sabemos que o subgradiente mais pequeno em  $T = T'$  é dado por

$$|\bar{g}^{T'}| = \lim_{T \rightarrow T'^-} \frac{d(T) - d(T')}{T - T'} \quad (3.17)$$

ou seja,  $|\bar{g}^{T'}|$  é a derivada à esquerda em  $T = T'$ .

□

Destes resultados concluímos que para resolver o problema do fluxo mais rápido para um dado valor de fluxo  $d$ , temos de encontrar o mínimo inteiro  $T$  que satisfaça  $d(T) \geq d$ . No próximo capítulo iremos apresentar alguns algoritmos que, usando as propriedades de  $d(T)$  referidas neste capítulo, resolvem o problema de forma eficiente.



# Capítulo 4

## Algoritmos

Neste capítulo vamos analisar dois dos algoritmos propostos em [1], implementá-los e apresentar resultados computacionais. Estes algoritmos consistem em duas variações do método da pesquisa binária. Tendo em conta os resultados apresentados no capítulo anterior, é possível introduzir algumas alterações a este método, de forma a torná-lo mais eficiente. A primeira variação consiste em usar a convexidade de  $d(T)$  para reduzir o intervalo de procura; a segunda variação consiste em usar uma função de interpolação para escolher o próximo ponto de teste. Estes algoritmos foram implementados em MATLAB e testados em redes geradas aleatoriamente.

### 4.1. Pesquisa binária

Sendo  $d(T)$  uma função monótona crescente e tendo em conta que  $T$  toma apenas valores inteiros, pode ser utilizado o método da pesquisa binária para encontrar  $T(d)$ .

Começamos com um intervalo  $[T_l, T_u]$  tal que  $d(T_l) < d$  e  $d(T_u) > d$ , tendo assim que  $T(d) \in [T_l, T_u]$ . Calculamos o ponto médio deste intervalo,  $T_c$ , e calculando  $d(T_c)$  sabemos se continuamos a procura para a esquerda ou para a direita de  $T_c$ .

**Algoritmo** BIN (Pesquisa binária)

**Passo 1** Encontrar  $T_l$  e  $T_u$  tais que  $d(T_l) < d$  e  $d(T_u) > d$ , ou seja,  $T(d) \in [T_l, T_u]$ .

**Passo 2** Fazer  $T_c = \lfloor (T_l + T_u) / 2 \rfloor$  e calcular  $d(T_c)$ .

**Passo 3** Se  $d(T_c) > d$ ,  $T_u = T_c$ . Se  $d(T_c) \leq d$ ,  $T_l = T_c$ .

**Passo 4** Se  $d(T_c) = d$  ou  $T_u - T_l \leq 1$ , parar. Se não, voltar ao Passo 2.

#### 4.1.1. Intervalo inicial

Como valor inicial para  $T_l$  podemos ter

$$T_l = \max\{T_0, \lceil \frac{d - d(0)}{|g_{max}|} \rceil\} \quad (4.1)$$

sendo  $d(0) = 0$ .

Pela definição de  $T_0$ , nenhum fluxo chega ao último nó em  $T < T_0$ .

Sendo  $\Delta(T) = d(T) - d(T-1) \leq |g_{max}|$ , temos que

$$\sum_{T=1}^{T(d)} \Delta(T) \leq T(d) |g_{max}|. \quad (4.2)$$

Observando também

$$\sum_{T=1}^{T(d)} \Delta(T) = d(T(d)) - d(0) = d - d(0) \quad (4.3)$$

podemos concluir que  $T(d) \geq \lceil (d - d(0)) / |g_{max}| \rceil$ .

Como valor inicial para  $T_u$  podemos ter

$$T_u = T_l + \lceil \frac{d - d(T_l)}{|g^l|} \rceil \quad (4.4)$$

onde  $g^l$  é um fluxo estático que induz um TRF de valor máximo para  $T_l$ .

Sendo  $g^l$  um subgradiente de  $d(T)$  em  $T_l$ , temos que  $\Delta(T_l + 1) \geq |g^l|$ . Pela monotonia de  $\Delta(T)$  temos que  $\Delta(T + 1) \geq |g^l|$ , para  $T \geq T_l$ . Daqui vem que

$$\sum_{T=T_l}^{T(d)-1} \Delta(T + 1) \geq (T(d) - T_l) |g^l|. \quad (4.5)$$

Observando também

$$\sum_{T=T_l}^{T(d)-1} \Delta(T + 1) = d(T(d)) - d(T_l) = d - d(T_l) \quad (4.6)$$

temos que  $T(d) \leq T_l + \lceil (d - d(T_l)) / |g^l| \rceil$ .

Em cada iteração o intervalo inicial é reduzido para metade. Ao fim de  $n$  iterações temos um intervalo de amplitude menor ou igual a

$$\lceil \frac{h}{2^n} \rceil$$

sendo  $h$  a amplitude do intervalo inicial. Como  $T$  toma apenas valores inteiros, paramos a procura quando  $d(T_c) = d$  ou  $(T_u - T_l) = 1$ . Daqui vem que

$$\begin{aligned} \lceil \frac{h}{2^n} \rceil &= 1 \\ \Leftrightarrow \lceil \log_2(h) \rceil &= n \end{aligned}$$

Isto significa que são precisas no máximo  $\lceil \log_2(h) \rceil$  iterações para encontrar  $T(d)$ .

Consideremos a rede da Figura 2.1 e a sua função  $d(T)$ , mostrada na Figura 3.2.

Se quisermos passar  $d = 6$  unidades de fluxo através desta rede, temos

$$T_l = \max\{3, \lceil \frac{6}{4} \rceil\} = \max\{3, 2\} = 3 \quad (4.7)$$

$$T_u = 3 + \lceil \frac{6-2}{2} \rceil = 5 \quad (4.8)$$

visto que  $|g_{max}| = 4$ ,  $T_0 = 3$ ,  $|g^l| = 2$  e  $d(T_l) = 2$ . Temos também que  $d(T_u) = 8$ , pelo que  $d < d(T_u)$ .

Aplicando a pesquisa binária para encontrar  $T(d)$  temos:

**Iteração 1**  $T_c = \lceil \frac{3+5}{2} \rceil = 4$ .  $d(4) = 4$ , logo  $d(T_c) < d$  e  $T_l = T_c = 4$ .

**Iteração 2**  $T_c = \lceil \frac{4+5}{2} \rceil = 5$ .  $d(5) = 8$ , logo  $d(T_c) > d$  e  $T_u = T_c = 5$ . Como  $T_u - T_l = 1$ , paramos aqui e temos que  $T(6) = 5$ .

Embora o tamanho do intervalo de procura seja reduzido para metade em cada iteração, a convergência deste método é relativamente lenta. Este método pode ser melhorado se usarmos as propriedades de  $d(T)$ , principalmente a sua convexidade.

## 4.2. Pesquisa binária modificada

Nesta alteração à pesquisa binária usual, a convexidade de  $d(T)$  é usada para reduzir o intervalo de procura em cada iteração, antes de ser calculado o seu ponto médio.

Seja  $L_d$  a linha paralela ao eixo dos  $T$  à altura  $d$ , onde  $d$  é o valor do fluxo a ser determinado. Seja  $T(d) \in [T_l, T_u]$ . Denotamos por  $\gamma(T_l, T_u)$  o valor de  $T$  no ponto em que a recta que une os pontos  $(T_l, d(T_l))$  e  $(T_u, d(T_u))$  intersecta  $L_d$ .

Denotamos por  $L_{supp}(\hat{T})$  uma linha de suporte de  $d(T)$  no ponto  $(\hat{T}, d(\hat{T}))$  e por  $\sigma(L_{supp}(\hat{T}))$  a coordenada  $T$  do ponto de intersecção desta linha de suporte com  $L_d$ .

Na Figura 4.1 aplicamos estas definições à função  $d(T)$  relativamente à rede da Figura 2.1, considerando  $d = 6$ .

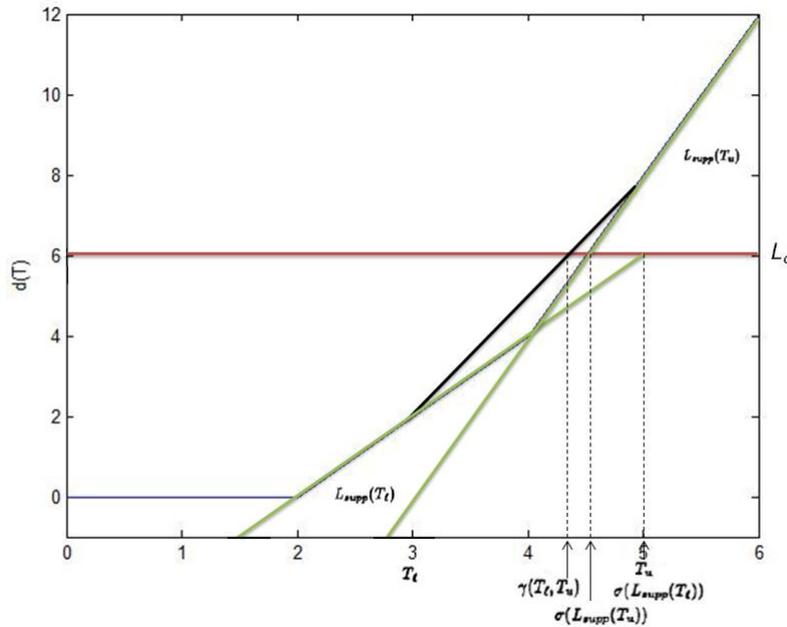


Figura 4.1:  $d(T)$  da rede da Figura 2.1

Sendo  $d(T)$  convexa, temos que se a imagem de  $\gamma(T_l, T_u)$  dada pela recta que une os pontos  $(T_l, d(T_l))$  e  $(T_u, d(T_u))$  é  $d$ , então  $d(\gamma(T_l, T_u)) \leq d$ . Sendo  $T(d)$  tal que  $d(T(d)) = d$ , isto implica que

$$\lceil \gamma(T_l, T_u) \rceil \leq T(d) \tag{4.9}$$

Da mesma forma, se a imagem pela recta  $L_{supp}(T_l)$  ( $L_{supp}(T_u)$ ) do ponto  $\sigma(L_{supp}(T_l))$  ( $\sigma(L_{supp}(T_u))$ ) é  $d$ , então temos que  $d(\sigma(L_{supp}(T_l))) \geq d$  ( $d(\sigma(L_{supp}(T_u))) \geq d$ ). Isto implica que

$$T(d) \leq \lceil \min\{\sigma(L_{supp}(T_l)), \sigma(L_{supp}(T_u))\} \rceil \tag{4.10}$$

O valor de  $\gamma(T_l, T_u)$  é obtido calculando a intersecção da recta que passa pelos pontos  $(T_l, d(T_l))$  e  $(T_u, d(T_u))$  com  $L(d)$ .

A recta que passa por  $(T_l, d(T_l))$  e  $(T_u, d(T_u))$  é a recta de equação

$$y = \frac{(d(T_u) - d(T_l))}{(T_u - T_l)} (T - T_l) + d(T_l) \quad (4.11)$$

Calculando a intersecção das duas rectas temos

$$\begin{aligned} d &= \frac{(d(T_u) - d(T_l))}{(T_u - T_l)} (\gamma(T_l, T_u) - T_l) + d(T_l) \\ \Leftrightarrow \gamma(T_l, T_u) &= \frac{(T_u - T_l)}{(d(T_u) - d(T_l))} (d - d(T_l)) + T_l \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para calcular as linhas de suporte  $L_{supp}(T_l)$  e  $L_{supp}(T_u)$  são precisos os subgradiantes de  $d(T)$  nos pontos  $T = T_l$  e  $T = T_u$ . Estes são obtidos no cálculo de  $d(T)$  (ver Lema 4).

O valor de  $\sigma(L_{supp}(T_l))$  é obtido calculando a intersecção de  $L_{supp}(T_l)$  com  $L(d)$ .

A linha de suporte  $L_{supp}(T_l)$  passa por  $(T_l, d(T_l))$  e tem subgradiente  $|g^l|$ .

$$y = |g^l| (T - T_l) + d(T_l) \quad (4.13)$$

Calculando a intersecção das duas rectas temos

$$\begin{aligned} d &= |g^l| (\sigma(L_{supp}(T_l)) - T_l) + d(T_l) \\ \Leftrightarrow \sigma(L_{supp}(T_l)) &= \frac{d - d(T_l)}{|g^l|} + T_l \end{aligned} \quad (4.14)$$

O valor de  $\sigma(L_{supp}(T_u))$  é calculado da mesma forma.

$$\sigma(L_{supp}(T_u)) = \frac{d - d(T_u)}{|g^u|} + T_u \quad (4.15)$$

**Algoritmo** MTBIN (Pesquisa binária modificada)

**Passo 1** Encontrar  $T_l$  e  $T_u$  tais que  $d(T_l) < d$  e  $d(T_u) > d$ , ou seja,  $T(d) \in [T_l, T_u]$ .

**Passo 2** Fazer  $T_l = \lceil \gamma(T_l, T_u) \rceil$  e  $T_u = \lceil \min\{\sigma(L_{supp}(T_l)), \sigma(L_{supp}(T_u))\} \rceil$ .

**Passo 3** Fazer  $T_c = \lfloor (T_l + T_u) / 2 \rfloor$  e calcular  $d(T_c)$ .

**Passo 4** Se  $d(T_c) > d$ ,  $T_u = T_c$ . Se  $d(T_c) \leq d$ ,  $T_l = T_c$ .

**Passo 5** Se  $d(T_c) = d$  ou  $T_u - T_l \leq 1$ , parar. Se não, voltar ao Passo 2.

Usando este algoritmo para encontrar  $T(d)$  na 2.1 com  $d = 6$ , temos:

**Iteração 1**  $T_l = \lceil \gamma(T_l, T_u) \rceil = \lceil 4.3333 \rceil = 5$  e  $T_u = \lceil \min\{\sigma(L_{supp}(T_l)), \sigma(L_{supp}(T_u))\} \rceil = \lceil \min\{5, 4.5\} \rceil = 5$ .

Obviamente que  $T_c = \lceil \frac{5+5}{2} \rceil = 5$ .  $d(T_c) = 8 > d$  e  $T_u - T_l = 0$ , pelo que  $T(6) = 5$ .

#### 4.2.1. Análise e complexidade do algoritmo

Para obtermos o intervalo inicial sugerido por 4.1 e 4.4 é necessário resolver um problema de caminho mais curto para calcular  $T_0$ , um problema de fluxo máximo para calcular  $|g_{max}|$  e um problema de circulação de custo mínimo para calcular  $d(T_l)$  e  $|g_l|$ . De seguida, é necessário resolver um problema de circulação de custo mínimo para calcular  $d(T_u)$ .

Em cada iteração da pesquisa binária modificada, um problema de circulação de custo mínimo tem de ser resolvido para calcular  $d(T_c)$  para o ponto médio  $T_c = \lfloor (T_l + T_u) / 2 \rfloor$ .

O novo intervalo dado por 4.9 e 4.10 é calculado em tempo constante.

Como visto anteriormente, a pesquisa binária precisa de, no máximo,  $\log_2(h)$  iterações para encontrar  $T(d)$ , sendo  $h$  o tamanho do intervalo inicial. Se o intervalo inicial for dado por 4.1 e 4.4, o seu tamanho é menor ou igual a  $d$ . Podemos também observar que  $d(T)$  tem no máximo  $|g_{max}|$  segmentos lineares.

Daqui vem que  $O(\min(\log_2(d), |g_{max}|))$ .

Este algoritmo determina o tempo mínimo de transmissão  $T(d)$  e um fluxo estático associado  $g^{T(d)} \in G^{T(d)}$ . O TRF conseguido através de  $g^{T(d)}$  tem valor  $d(T(d))$ . Se  $d(T(d)) > d$ , podemos obter um novo fluxo dinâmico de valor  $d$  modificando apenas o valor do TRF no último período de transmissão. O fluxo dinâmico obtido desta forma é o fluxo mais rápido de valor  $d$ .

Por exemplo, na rede da Figura 2.1, se quisermos transmitir um fluxo de 6 unidades, temos que o tempo mínimo de transmissão é  $T(6) = 5$ . Como  $d(5) = 8 > 6$ ,

no último período de transmissão, em vez de enviarmos quatro unidades de fluxo, enviamos apenas duas. Na Figura 4.2 podemos ver o fluxo mais rápido de valor  $d = 6$ .

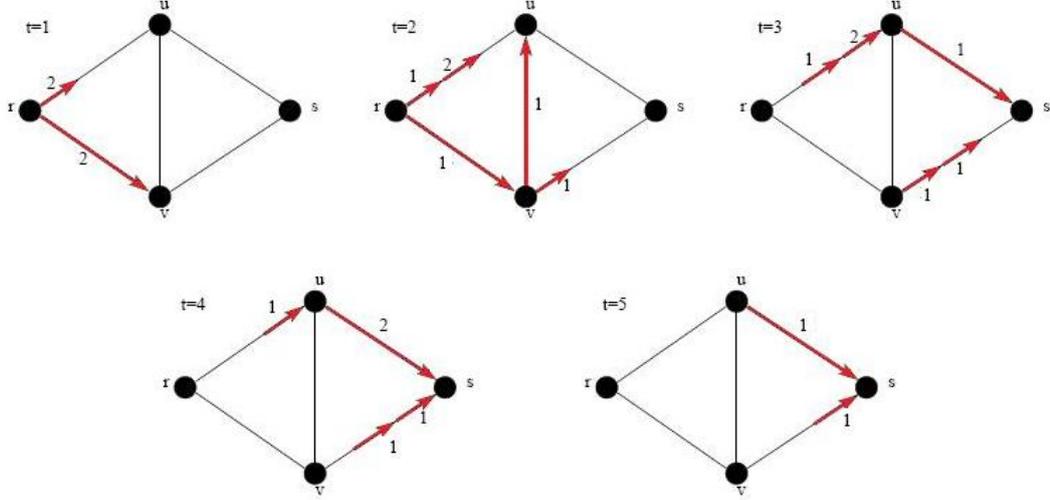


Figura 4.2: Fluxo mais rápido de valor  $d = 6$  na rede da Figura 2.1

### 4.3. Pesquisa binária com interpolação

Em problemas práticos grandes, é muito raro  $T(d)$  encontrar-se perto do ponto médio  $T_c$ . Para contornar esta dificuldade, Ibaraki [4] sugeriu o uso de uma função de interpolação. Em [1], esta função foi adaptada ao problema do fluxo mais rápido e designada por  $\hat{d}(T)$ . O ponto de teste  $T_c$  passa assim a ser o mínimo inteiro  $T$  que satisfaz  $\hat{d}(T) \geq d$ , em vez do ponto médio do intervalo  $[T_l, T_u]$ .

A função  $\hat{d}(T)$  deve partilhar o máximo de propriedades possível com  $d(T)$  no intervalo  $[T_l, T_u]$ , logo deve ser convexa, crescente, contínua e os valores nos extremos do intervalo devem coincidir com os valores de  $d(T)$ . Sejam  $T(d) \in [T_l, T_u]$  e  $g^l$  e  $g^u$  fluxos estáticos tais que os seus valores,  $|g^l|$  e  $|g^u|$ , são subderivadas de  $d(T)$  para  $T_l$  e  $T_u$ , respectivamente. Ao fim de algumas experiências, Ibaraki escolheu a função de interpolação dada por:

$$\hat{d}(T) = \begin{cases} -|g^u|(T_u - T) + a(T_u - T)^b + d(T_u), & |g^u| \neq \phi(d); \\ -|g^u|(T_u - T) + d(T_u), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde

$$\phi(d) = \frac{d(T_u) - d(T_l)}{T_u - T_l}, \quad b = \frac{|g^l| - |g^u|}{\phi(d) - |g^u|}, \quad a = -\frac{\phi(d) - |g^u|}{(T_u - T_l)^{b-1}}.$$

Na Figura 4.3 podemos ver a função  $\hat{d}(T)$  para a rede da Figura 2.1, considerando  $T_l = 3$  e  $T_u = 5$  e  $T \in [0, 6]$ , sendo  $[0, 6]$  um intervalo contínuo.

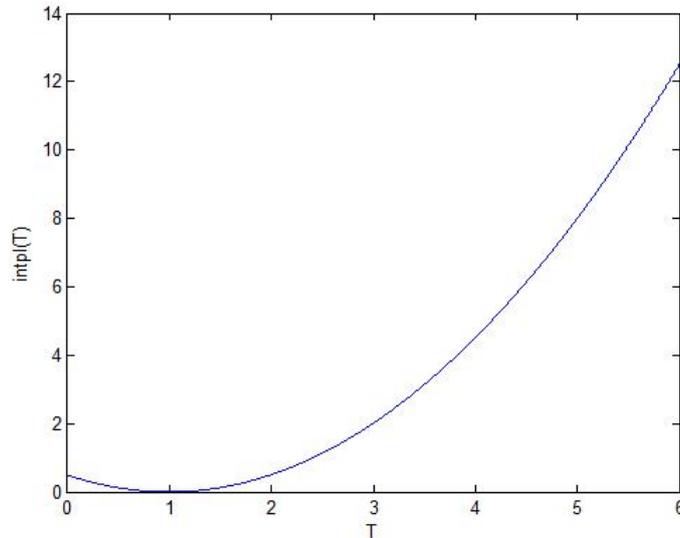


Figura 4.3:  $\hat{d}(T)$  da rede da Figura 2.1

É fácil verificar que  $\hat{d}(T_l) = d(T_l)$  e  $\hat{d}(T_u) = d(T_u)$ .

Se  $|g^u| \neq \phi(d)$

$$\begin{aligned} \hat{d}(T_l) &= -|g^u|(T_u - T_l) + a(T_u - T_l)^b + d(T_u) \\ &= -|g^u|(T_u - T_l) - (\phi(d) - |g^u|)(T_u - T_l) + d(T_u) \\ &= -(d(T_u) - d(T_l)) + d(T_u) \\ &= d(T_l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{d}(T_u) &= -|g^u|(T_u - T_u) + a(T_u - T_u)^b + d(T_u) \\ &= d(T_u) \end{aligned}$$

Se  $|g^u| = \phi(d)$ ,

$$|g^u| = \frac{d(T_u) - d(T_l)}{T_u - T_l}$$

$$\Leftrightarrow d(T_l) = d(T_u) - |g^u|(T_u - T_l) = \widehat{d}(T_l)$$

$$\widehat{d}(T_u) = -|g^u|(T_u - T_u) + d(T_u)$$

$$= d(T_u)$$

Calculando a primeira derivada de  $\widehat{d}(T)$ , temos que, se  $|g^u| \neq \phi(d)$ :

$$d(\widehat{d}(T)) / dT = |g^u| + ab(T_u - T)^{b-1}$$

$$\Leftrightarrow d(\widehat{d}(T)) / dT = |g^u| + \frac{|g^l| - |g^u|}{(T_u - T_l)^{b-1}} (T_u - T)^{b-1}$$

$$\Leftrightarrow d(\widehat{d}(T)) / dT = |g^l| \frac{(T_u - T)^{b-1}}{(T_u - T_l)^{b-1}} + |g^u| \left( 1 - \frac{(T_u - T)^{b-1}}{(T_u - T_l)^{b-1}} \right)$$

Como  $0 < \frac{(T_u - T)^{b-1}}{(T_u - T_l)^{b-1}} < 1$ ,  $d(\widehat{d}(T)) / dT > 0$  para  $T \in [T_l, T_u]$ .

Se  $|g^u| = \phi(d)$ , temos que  $d(\widehat{d}(T)) / dT = |g^u| > 0$ .

Logo  $d(\widehat{d}(T)) / dT$  é estritamente crescente em  $[T_l, T_u]$ .

Quanto à convexidade de  $\widehat{d}(T)$  temos que, se  $|g^u| \neq \phi(d)$ :

$$d^2(\widehat{d}(T)) / dT^2 = ab(b-1)(T_u - T)^{b-2}$$

$$\Leftrightarrow d^2(\widehat{d}(T)) / dT^2 = \frac{(|g^l| - |g^u|)(d(T_u) - d(T_l) - |g^l|(T_u - T_l))}{(T_u - T_l)^{b-1}(d(T_u) - d(T_l) - |g^u|(T_u - T_l))} (T_u - T)^{b-2}$$

e

$$|g^l| - |g^u| < 0,$$

$$d(T_u) - d(T_l) - |g^l|(T_u - T_l) \geq 0,$$

$$d(T_u) - d(T_l) - |g^u|(T_u - T_l) < 0.$$

Daqui vem que  $d^2(\widehat{d}(T)) / dT^2 \geq 0$  para  $T \in [T_l, T_u]$ , ou seja, é convexa neste intervalo.

Se  $|g^u| = \phi(d)$ ,  $\widehat{d}(T)$  é linear, logo é convexa em  $T \in [T_l, T_u]$ .

**Algoritmo** INTPL (Pesquisa binária com interpolação)

**Passo 1** Encontrar  $T_l$  e  $T_u$  tais que  $d(T_l) < d$  e  $d(T_u) > d$ , ou seja,  $T(d) \in [T_l, T_u]$ .

**Passo 2** Calcular  $\widehat{d}(T)$  e encontrar o menor inteiro  $T'$  que satisfaz  $\widehat{d}(T) \geq d$ . Fazer  $T_c = T'$ . Se  $T_c = T_u$  ou  $T_c = T_l$ , parar e fazer  $T(d) = T_c$ .

**Passo 3** Se  $d(T_c) > d$ ,  $T_u = T_c$ . Se  $d(T_c) \leq d$ ,  $T_l = T_c$ . Voltar ao Passo 2.

Tal como os anteriores, o algoritmo pára quando  $d(T_c) = d$  ou  $T_u - T_l \leq 1$ . Se, nalguma iteração, o ponto  $T_c$  calculado for igual a um dos extremos do intervalo, então paramos e temos que  $T(d) = T_c$ . Como neste caso não é necessário o cálculo de  $d(T_c)$  (pois é igual a  $d(T_l)$  ou a  $d(T_u)$  que já são conhecidos), esta iteração não é contabilizada.

Aplicando este algoritmo à rede da Figura 2.1, considerando  $d = 6$ :

**Iteração 1**  $\phi(d) = 3$ ,  $b = 2$  e  $a = 0.5$ .  $|g^u| = 4$ , ou seja,  $|g^u| \neq \phi(d)$ . Temos então que  $\widehat{d}(T) = -|g^u|(T_u - T) + a(T_u - T)^b + d(T_u) = 0.5T^2 - T + 0.5$ .  
 $\widehat{d}(T) \geq 6 \Leftrightarrow T \geq 5$ . Temos assim que  $T_c = 5$ . Como  $T_c = T_u$ , paramos aqui e temos  $T(d) = 5$ .

### 4.3.1. Análise e complexidade do algoritmo

O intervalo inicial é obtido da mesma forma que para as restantes versões da pesquisa binária.

Em cada iteração da pesquisa binária com interpolação, tem de ser calculada a função de interpolação  $\widehat{d}(T)$  e encontrado o ponto de teste  $T_c$ , que é o mínimo inteiro que satisfaz  $\widehat{d}(T) \geq d$ . De seguida, um problema de circulação de custo mínimo tem de ser resolvido para calcular  $d(T_c)$ .

Neste caso, o tamanho do intervalo não é reduzido para metade em cada iteração, pelo que não podemos garantir um limite máximo de  $\log_2(d)$  iterações.

Tal como a pesquisa binária modificada, este algoritmo determina o tempo mínimo de transmissão  $T(d)$  e um fluxo estático associado  $g^{T(d)} \in G^{T(d)}$  e o fluxo mais rápido de valor  $d$  é obtido da mesma forma.

## 4.4. Resultados computacionais

A implementação destes algoritmos foi testada em dois tipos de redes. As redes do tipo A são redes aleatórias com 20 nós e 100 arcos; as redes do tipo G são redes aleatórias em forma de grelha com 100 nós e 360 arcos. Todas as redes têm apenas um nó de origem e um nó de chegada e nenhum dos nós admite armazenamento intermédio. Os custos dos seus arcos variam entre 1 e 100 e as capacidades entre 1 e 20. Foram geradas e testadas cinco redes de cada tipo. Na Figura 4.4, o valor  $|g_{max}|$  foi obtido fazendo a média dos valores do fluxo máximo das cinco redes de cada tipo.

	Nos	Arcos	$ g_{max} $
A	20	100	9,4
G	100	360	2,4

Figura 4.4: Características das redes testadas

Todas as redes foram testadas para diferentes valores de  $d$ . A Figura 4.5 contém, para cada valor  $d$ , o tempo mínimo de transmissão  $T(d)$  e o valor do fluxo dinâmico máximo para  $T = T(d)$ ,  $d(T(d))$ .

	$d$	$T(d)$	$d(T(d))$
G	100	592,0	100,33333
	1.000	1072,5	1000,75
	10.000	6260,0	10000,6
	100.000	57360,0	100000,6
	A	10	274,9
	100	131,6	103,2
	1.000	404,4	1002,4
	10.000	3026,4	10005,6

Figura 4.5: Parâmetros dependentes de  $d$  relativos às redes da Figura 4.4

Quanto maior for o fluxo máximo  $|g_{max}|$ , maior é a diferença entre  $d(T-1)$  e  $d(T)$ , para  $T \geq T_0$ . Logo, se  $d(T(d)) > d$ , a diferença entre eles é maior quanto maior for  $|g_{max}|$ .

Na Figura 4.6 encontra-se o tempo que cada algoritmo precisa, em média, para resolver o problema para os diferentes valores de  $d$ .

	d	T(d)	MTBIN	INTPL
G				
	100	592,0	277,6974	276,6990
	1.000	1072,5	436,0509	388,4612
	10.000	6260,0	329,9773	331,0234
	100.000	57360,0	329,3397	328,7302
A	10	274,9	1,4976	1,8782
	100	131,6	2,2152	2,2339
	1.000	404,4	2,9546	2,6801
	10.000	3026,4	2,8142	2,8267

Figura 4.6: Tempo CPU (em segundos) de MTBIN e INTPL

Na Figura 4.6 encontra-se o número médio de iterações que cada algoritmo precisa para resolver o problema para os diferentes valores de  $d$ .

	d	T(d)	MTBIN	INTPL
G				
	100	592,0	0,6667	0,6667
	1.000	1072,5	2,0000	1,5000
	10.000	6260,0	0,4000	0,2000
	100.000	57360,0	0,4000	0,4000
A	10	274,9	0	0,4
	100	131,6	0,8	0,8
	1.000	404,4	1	0,8
	10.000	3026,4	0,6	0,6

Figura 4.7: Número de iterações de MTBIN e INTPL

Por vezes, no cálculo do intervalo inicial, temos que  $d(T_u) = d$  pelo que não é necessária nenhuma iteração para encontrar  $T(d)$ . Isto leva a que alguns dos valores médios sejam menores do que 1.

Para investigar a influência da capacidade dos arcos na eficiência dos algoritmos, foi escolhida uma rede do tipo A e multiplicadas as capacidades dos seus arcos por 2 (ficando assim com capacidades entre 2 e 40), por 10 (ficando com capacidades entre 10 e 200) e 50 (ficando com capacidades entre 50 e 1000). Foi também testado o algoritmo BIN, correspondente à pesquisa binária usual. Os resultados encontram-se na tabela da Figura 4.8.

	d	BIN	MTBIN	INTPL	BIN	MTBIN	INTPL
A	10	0	0	0	1,3104	1,2792	1,3572
	100	7	2	2	6,2556	2,9640	2,9952
	1.000	10	3	2	12,0745	4,9608	3,9156
	10.000	8	1	1	11,7157	3,7908	3,7596
2*A	10	2	1	1	2,4336	2,0436	1,7004
	100	2	2	2	2,6364	2,6988	2,6364
	1.000	9	5	4	9,6097	5,9904	4,9764
	10.000	8	1	1	11,9497	3,5568	3,7440
10*A	1.000	7	2	2	7,0824	3,0420	3,1200
	10.000	10	3	2	13,3537	5,1324	4,0716
	100.000	8	1	1	12,5425	3,7908	3,8064
50*A	10.000	6	3	2	6,2244	4,0872	3,0576
	100.000	9	2	2	12,2617	4,4148	4,4304

Figura 4.8: Iterações de e tempo CPU (em segundos) de BIN, MTBIN e INTPL

Destes resultados podemos concluir que a capacidade dos arcos não tem uma influência significativa no número de iterações nem no tempo necessário para encontrar  $T(d)$ . Podemos também ver que a pesquisa binária usual precisa de bastantes mais iterações que os dois métodos modificados na maior parte dos casos.

No entanto, tem influência no tempo mínimo de transmissão  $T(d)$ . Na Figura 4.9 podemos ver a variação de  $T(d)$  em função das diferentes capacidades dos arcos.

	d=10	d=100	d=1000	d=10000	d=100000	gmax
A	37	60	147	557	4647	22
2*A	35	51	118	329	2375	44
10*A	33	37	60	147	557	220
50*A	33	33	42	76	193	1100

Figura 4.9: Valores de  $T(d)$ 

Na Figura 4.10 observamos um possível desenho para uma das redes do tipo A.

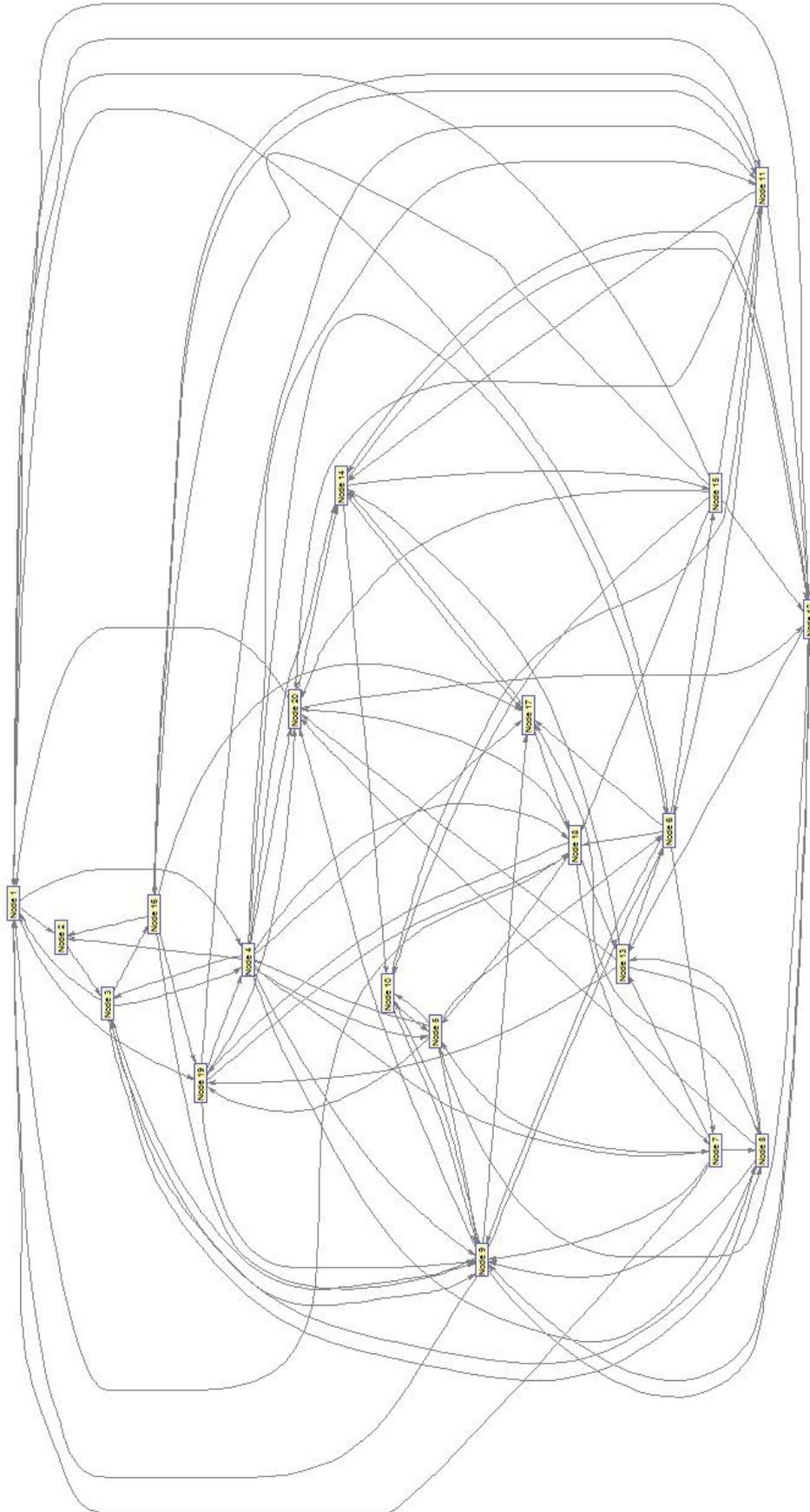
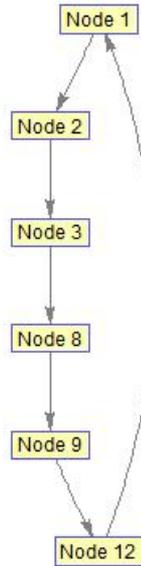
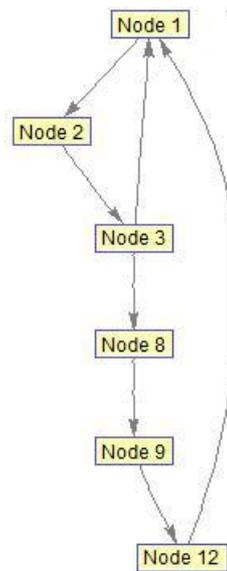


Figura 4.10: Rede do tipo A

Nas figuras seguintes podemos ver os diferentes caminhos que o fluxo percorre nesta rede, para os diferentes valores de  $d$ . O nó de origem é o nó 3 e o nó de chegada é o nó 2. Estas imagens são obtidas calculando a circulação de custo mínimo, pelo que o arco do nó 2 para o nó 3 deve ser ignorado.

Figura 4.11:  $d=10$ Figura 4.12:  $d=100$

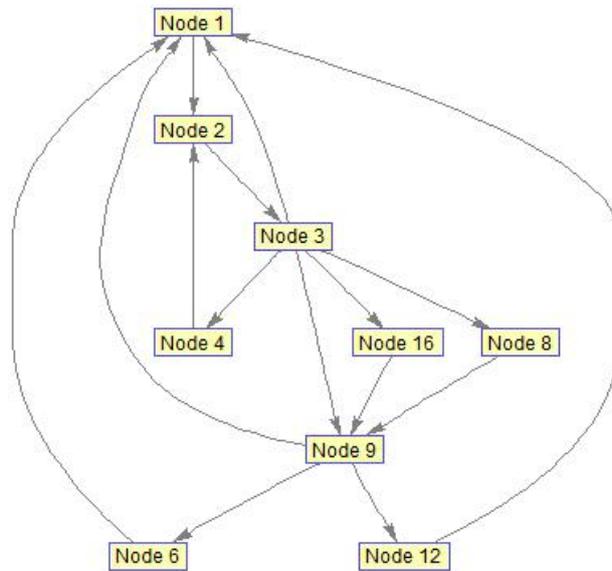


Figura 4.13:  $d=1000$

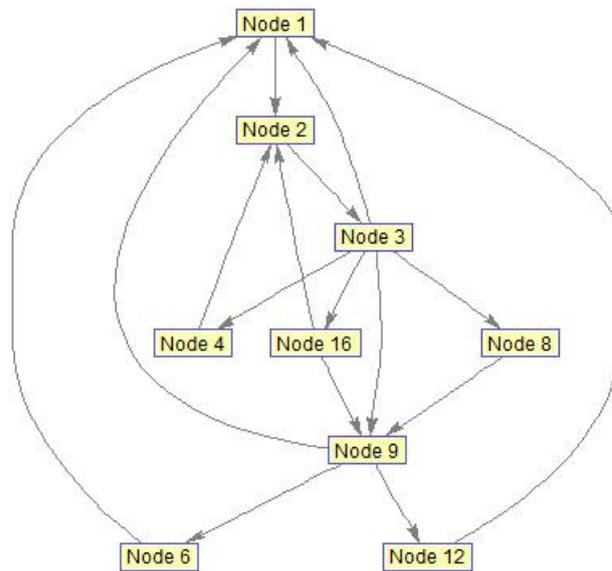


Figura 4.14:  $d=10000$

Como podemos observar nas figuras anteriores, à medida que o valor de  $d$  aumenta, novos caminhos são acrescentados. Isto faz com que  $d(T)$  seja linear segmentada. Sempre que um caminho novo é acrescentado à circulação de custo mínimo e, conseqüentemente, ao fluxo dinâmico máximo e ao fluxo mais rápido, cria-se um novo segmento linear em  $d(T)$ .

## Capítulo 5

# Conclusão

Neste trabalho foi estudado o *problema do fluxo mais rápido*. Como visto no Capítulo 3, este problema tem uma relação muito próxima com o problema do fluxo dinâmico máximo. Através desta relação e do estudo do valor do fluxo dinâmico máximo como função de  $T$ , foram sugeridos vários algoritmos para resolver este problema em [1]. Neste trabalho estudamos dois deles, que consistem em duas variações da pesquisa binária usual.

Estes algoritmos foram implementados e foram apresentados alguns resultados computacionais. Dos resultados apresentados podemos concluir que qualquer um destes algoritmos é bastante eficiente e poderá ser usado para resolver problemas de grande escala.

Como trabalho futuro, pretendemos testar a nossa implementação em mais redes para ter melhor noção se há alguma diferença significativa entre a pesquisa binária modificada e a pesquisa binária com interpolação. Por fim, pretendemos testar a nossa implementação numa rede real.



# Bibliografia

- [1] R. E. Burkard, K. Dlaska, B. Klinz (1993) The Quickest Flow Problem. *ZOR - Methods and Models of Operations Research*, 37:31-58.
- [2] B. Kotnyek (2003) An annotated overview of dynamic network flows *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*, n° 4936. 2000.
- [3] L. Fleisher, M. Skutella. Quickest Flows Over Time.
- [4] T. Ibaraki (1983) Parametric Approaches to Fractional Programs. *Mathematical Programming*, 26:345-362.