Trigonometria Racional

Maria João Rodrigues Bernardo

Quartilho Mendes Ferreira

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Trigonometria Racional

Maria João Rodrigues Bernardo

Quartilho Mendes Ferreira

Relatório para a obtenção do Grau de **Mestre em Ensino da Matemática**

no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Júri

Presidente: Doutora Joana Margarida Mavigné de Andrade Alves de Sousa Nunes da Costa

Orientadora: Doutora Raquel Susana Giraldes Caseiro

Vogal: Carlota Isabel Leitão Pires Simões

Data: Julho de 2013

Resumo

Tendo em consideração que um dos meus temas de interesse, ao nível da Matemática é a Trigonometria, aproveitei para aprofundar um pouco mais esse tema de modo a enriquecer a minha cultura matemática.

O presente trabalho versa sobre Trigonometria Racional, que é uma nova abordagem à Trigonometria Clássica, desenvolvida pelo Doutor Wildeberger no seu livro *"Divine Proportions – Rational Trigonometry to Universal Geometry"*.

Este texto começa por explicar em que consiste a Trigonometria Racional, sendo apresentada uma motivação para introduzir o conceito de quadrância entre dois pontos.

De seguida são apresentadas algumas propriedades da quadrância e um resultado conhecido da Trigonometria Clássica – o Teorema de Pitágoras - adaptado à Trigonometria Racional envolvendo esse mesmo conceito de quadrância.

Introduz-se o conceito de spread entre duas retas e alguns resultados envolvendo este conceito.

Estabelece-se uma breve comparação entre a Trigonometria Racional e a Trigonometria Clássica.

A abordagem do tema em sala de aula é direcionada para o 10º ano no que diz respeito de quadrância e 11º ano no que diz respeito ao spread entre duas retas.

São apresentadas três possíveis atividades a serem implementadas no contexto de sala de aula.

Pretende-se que os alunos consolidem alguns conceitos apreendidos anteriormente, ligados à Geometria, e se sintam motivados a raciocinar e ir mais além, neste admirável percurso que é designado de conhecimento matemático.

Palavras-chave: Trigonometria Racional, quadrância, spread, Fórmula Triple Quad, Spread Ratio, Lei dos Spreads

Abstract

Taking into consideration that one of my topics of interest, at the level of math is trigonometry, I used to dig a little more this theme in order to enrich my math culture.

The present work focuses on Rational Trigonometry, which is a new approach to Classical Trigonometry, developed by Dr Wildeberger in his book "Divine Proportions-Rational Trigonometry to Universal Geometry".

This text begins by explaining what Rational Trigonometry is, being presented with a motivation to introduce the concept of quadrance between two points.

Below are presented some properties of quadrance and a known result of Classical Trigonometry-the Pythagorean theorem-adapted to Rational Trigonometry involving this same concept of quadrance.

Is introduced the concept of spread between two lines and some results involving this concept.

It is a brief comparison between the Rational Trigonometry and Classical Trigonometry.

The approach to the topic in the classroom is directed for the 10th grade in terms of quadrance and 11th grade as regards the spread between two lines.

There are presented three possible activities to be implemented in the classroom.

It is intended that the students consolidate some of the concepts previously seized, attached to Geometry, and feel motivated to think and go beyond, in this wonderful journey that is known as mathematical knowledge.

Keywords: Rational Trigonometry, quadrance, spread, Triple Quad Formula, Spread Ratio, Spread Law

Agradecimentos

Ao meu marido, pelo exemplo e incentivo de me fazer ir sempre mais além.

Aos meus pais e à minha irmã pelo apoio incondicional.

À Doutora Raquel Caseiro pela orientação e acompanhamento indispensáveis ao longo deste trabalho.

Índice

Capítulo I - Introdução

1.1 O que é a Trigonometria Racional... 9

Capítulo II – Trigonometria Racional

2.1 Definições e primeiras propriedades..10

2.2. Teoremas sob o ponto de vista da Trigonometria Racional 22

2.3. Breve comparação entre a Trigonometria Clássica e a Trigonometria

Racional 29

Capítulo III – Trigonometria Racional – Desenvolvimento no contexto sala de aula

3.1 Introdução ....

3.2. Atividade 1 33

3.3. Atividade 2 37

3.4. Atividade 3 41

Referências bibliográficas 50

Anexos 50

Capítulo I – Introdução

1.1 O que é a Trigonometria Racional?

A Matemática, tal como a conhecemos hoje, é considerada como um aglomerado de saberes contidos naquilo a que o Homem designou por Ciência. Perante isso, torna-se imperioso observar a relação existente entre a Matemática dos dias hoje, o seu desenvolvimento histórico, bem como os próximos passos a seguir...

É sabido que Trigonometria (do grego *"trigõnon"* que significa triângulo e *"metron"* que significa medida) é um ramo da Matemática que estuda as relações entre medidas de um dado triângulo, sejam elas os lados do triângulo ou os ângulos desse mesmo triângulo. [1]

O objetivo inicial da Trigonometria era o tradicional problema de resolução de triângulos, consistindo em determinar os três lados e três ângulos de um triângulo, quando são conhecidos três elementos desse mesmo triângulo, sendo pelo menos um deles, um lado.

Um triângulo é constituído por três lados e três ângulos associados aos seus vértices. A Trigonometria Clássica visa portanto, estudar estas "quantidades" e a relação entre elas.

Hoje, a Trigonometria resolve numerosos problemas em vários ramos do conhecimento como a agrimensura, a navegação, a engenharia, a construção civil, a física e química...

Surge assim, nos nossos dias uma nova vertente da Trigonometria, a chamada Trigonometria Racional, de que versa o presente trabalho.

Este trabalho apresenta a estrutura seguinte: no Capítulo I faz-se uma breve introdução ao tema de que versa o presente trabalho. No Capítulo II apresentam-se definições e propriedades da Trigonometria Racional. Define-se quadrância e spread, e demonstram-se quatro Teoremas fundamentais da Trigonometria Racional: Teorema do Ponto médio, Fórmula Triple Quad, Teorema do spread Ratio e a lei dos spreads.

No capítulo III são apresentadas duas atividades investigativas e uma atividade lúdica envolvendo os conceitos de quadrância e spread, de modo a serem implementados no contexto de sala de aula.

Refira-se, que neste texto trabalha-se com o corpo dos números reais.

Capítulo II – Trigonometria Racional

Neste capítulo são apresentadas as definições de quadrância entre dois pontos spread entre duas retas e enunciam-se e demonstram-se alguns resultados importantes da Trigonometria Racional e "reescreve-se" o Teorema de Pitágoras...

2.1 Definições e primeiras propriedades

O que é a Trigonometria Racional?

É uma reformulação da Trigonometria Clássica mas que pretende simplificar e reduzir a morosidade e complexidade de alguns dos cálculos que não estão na forma exata, envolvendo a introdução de alguns conceitos de modo a implementar essa simplificação.

Motivação

Tome-se em consideração o seguinte exemplo ilustrativo.

Exemplo 1. Seja $\left[A_1A_2A_3\right]$ um triângulo escaleno, cujos lados são $\left[A_1A_2\right]$, $\left[A_2A_3\right]$ e $\left[A_1A_3\right]$, sendo as medidas dos lados dadas por 5, 4 e 7 , respetivamente, como ilustra a figura seguinte:

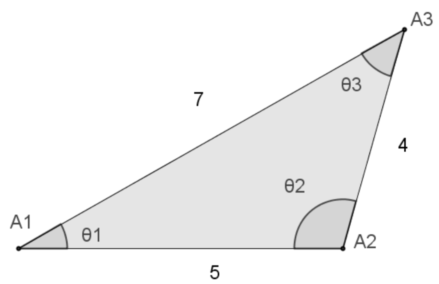


Figura 1. Triângulo $\left[A_1A_2A_3\right]$

Torna-se, deste modo, natural proceder ao cálculo dos ângulos θ_1, θ_2 e θ_3.

Recorrendo à Lei dos cossenos, que nos dá a amplitude dos ângulos, conhecendo o comprimento de cada um dos lados, obtêm-se as seguintes relações:

$$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos(\theta_1) \Leftrightarrow \cos(\theta_1) = \frac{58}{70} \Leftrightarrow \theta_1 \approx 34^{\mathrm{o}},$$

$$7^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos(\theta_2) \Leftrightarrow \cos(\theta_2) = -\frac{8}{40} \Leftrightarrow \theta_2 \approx 102^{\mathrm{o}}$$

e $$5^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \times 7 \times 4 \times \cos(\theta_3) \Leftrightarrow \cos(\theta_3) = \frac{40}{56} \Leftrightarrow \theta_3 \approx 44^{\mathrm{o}}.$$

Não haverá uma maneira de resolver este tipo de problema sem recorrer ao uso de funções trigonométricas e ângulos?

A Trigonometria Racional, que é introduzida pelo Professor Norman J. Wildberger no seu livro ***Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*** (2005), permite trabalhar a Geometria Euclideana sem o uso de raízes quadradas ou funções trigonométricas. Esta nova abordagem de geometria baseia-se em dois conceitos fundamentais: a quadrância entre dois pontos e o spread entre duas retas. [2]
Comecemos por definir quadrância entre dois pontos.

Definição 1 Sejam $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ pontos de $\mathbb{R}^2$.

A quadrância entre os pontos A_1 e A_2 é definida como sendo o número

$$Q(A_1, A_2) = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2.$$

Observações

1. A quadrância é simétrica, ou seja, $Q(A_1, A_2) = Q(A_2, A_1)$.

2. $Q(A_1, A_2)$ também pode ser designada por ***quadrância*** do segmento $\left[A_1 A_2\right]$.

3. Dado que

$$\overline{A_1A_2} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

pode afirmar-se que a quadrância entre dois pontos é o quadrado da distância entre esses pontos.

4. A quadrância é não negativa, isto é, para todos os pontos A_1 e A_2 de $\mathbb{R}^2$, $Q(A_1, A_2) \geq 0$. Além disso, $Q(A_1, A_2) = 0$, se e somente se $A_1 = A_2$.

Teorema 1. [Pitágoras] Seja $\left[A_1A_2A_3\right]$ um triângulo, então

$$Q\left(A_2, A_3\right) + Q\left(A_1, A_3\right) = Q\left(A_1, A_2\right),$$

se e somente se $\left[A_1A_3\right]$ e $\left[A_2A_3\right]$ são perpendiculares.

Demonstração.

Suponhamos que $A_1 = \left(x_1, y_1\right), A_2 = \left(x_2, y_2\right)$ e $A_3 = \left(x_3, y_3\right)$ são pontos de $\mathbb{R}^2$.

As retas A_1A_3 e A_2A_3 são perpendiculares precisamente quando

$$\left(y_1 - y_3\right)\left(y_2 - y_3\right) + \left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right) = 0.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
Q\left(A_2, A_3\right) + Q\left(A_1, A_3\right) - Q\left(A_1, A_2\right) &= \left(x_2 - x_3\right)^2 + \left(y_2 - y_3\right)^2 + \left(x_1 - x_3\right)^2 + \left(y_1 - y_3\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 \\
&= 2\left(x_3^2 - x_2x_3 - x_1x_3 + x_2x_1 + y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3 + y_3^2\right) \\
&= 2\left(\left(y_1 - y_3\right)\left(y_2 - y_3\right) + \left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 - x_2\right)\right)
\end{aligned}$$

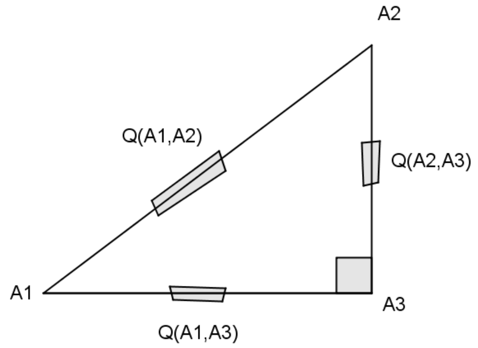


Figura 2. Teorema de Pitágoras

e pode concluir-se que as retas A_1A_3 e A_2A_3 são perpendiculares precisamente quando se tem que $Q\left(A_2,A_3\right)+Q\left(A_1,A_3\right)=Q\left(A_1,A_2\right)$. ■

O conceito de spread está associado ao afastamento de duas retas e é um número que mede o quão afastadas essas duas retas estão.

Surge assim de modo natural a seguinte definição.

Definição 2 Sejam l_1 e l_2 duas retas distintas não vazias de equações cartesianas $a_1x+b_1y=c_1$ e $a_2x+b_2y=c_2$, respetivamente.

O **spread** entre as retas l_1 e l_2, denota-se por $s(l_1,l_2)$, e é definido como sendo o número

$$s(l_1,l_2)=\frac{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}.$$

Proposição 1. Dadas duas retas l_1 e l_2, nas condições da definição anterior, tem-se que

$$s(l_1,l_2)=s(l_2,l_1).$$

Demonstração

Por definição, $s(l_1,l_2)=\dfrac{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}=\dfrac{\left(a_2b_1-a_1b_2\right)^2}{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}=s(l_2,l_1)$. ■

Proposição 2. Sejam $A_1=\left(x_1,y_1\right), A_2=\left(x_2,y_2\right)$ e $A_3=\left(x_3,y_3\right)$ são pontos de $\mathbb{R}^2$.

Então o spread entre as retas A_1A_2 e A_1A_3 é dado por:

$$s(A_1A_2,A_1A_3)=\frac{\left(\left(y_1-y_2\right)\left(x_3-x_1\right)-\left(y_1-y_3\right)\left(x_2-x_1\right)\right)^2}{\left(\left(y_1-y_2\right)^2+\left(x_2-x_1\right)^2\right)\left(\left(y_1-y_3\right)^2+\left(x_3-x_1\right)^2\right)} \quad . \tag{1}$$

Demonstração

A equação cartesiana da reta A_1A_2 é:

$$\left(y_1-y_2\right)x+\left(x_2-x_1\right)y=-x_1y_2+y_1x_2 .$$

Assim

$$a_1=\left(y_1-y_2\right), b_1=\left(x_2-x_1\right).$$

A equação cartesiana da reta A_1A_3 é

$$\left(y_1-y_3\right)x+\left(x_3-x_1\right)y=-x_1y_3+y_1x_3 .$$

Assim

$$a_2=\left(y_1-y_3\right), b_2=\left(x_3-x_1\right).$$

Por substituição dos valores obtidos para a_1, b_1, a_2 e b_2 na definição de spread entre duas retas não vazias, obtém-se,

$$s(A_1A_2, A_1A_3) = \frac{\left(\left(y_1 - y_2\right)\left(x_3 - x_1\right) - \left(y_1 - y_3\right)\left(x_2 - x_1\right)\right)^2}{\left(\left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(x_2 - x_1\right)^2\right)\left(\left(y_1 - y_3\right)^2 + \left(x_3 - x_1\right)^2\right)}. \quad \blacksquare$$

Observações:

1. Da fórmula (1) facilmente se conclui que translações não alteram o valor do spread.

2. Sejam l_1 e l_2 duas retas concorrentes no ponto *A*.

Tome-se a circunferência de raio unitário com centro no ponto *A*. Seja ainda *B* o ponto de interseção de l_1 com a circunferência. Trace-se a perpendicular à reta l_2 que passa por *B*. O ponto de interseção dessa reta perpendicular com l_2 designamos por *C*.

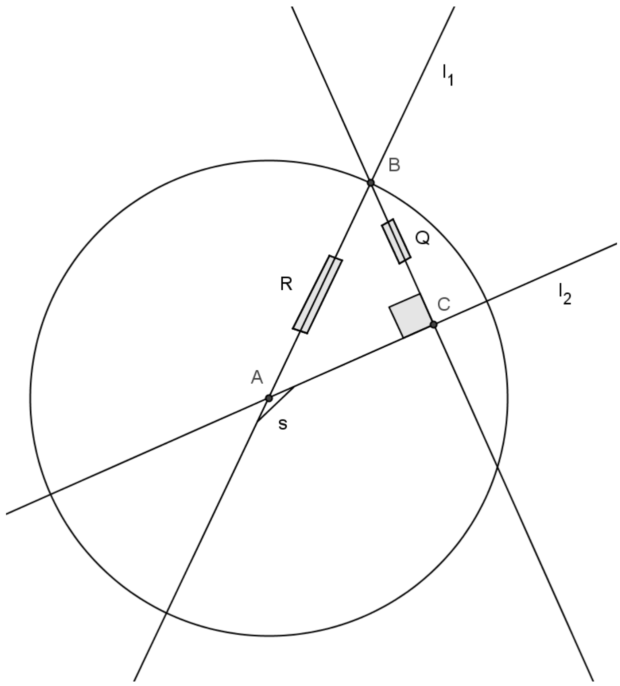


Figura 3. Construção associada ao afastamento de duas retas

O quociente entre as quadrâncias de $[BC]$ e $[AB]$ não é mais do que $sen^2(\sphericalangle CAB)$ e, de certa maneira, mede o ângulo entre as duas retas l_1 e l_2. Vejamos que este número não é mais do que, o spread entre as duas retas l_1 e l_2:

$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B,C)}{Q(A,B)} \ .$$

Assim suponha-se que as retas têm por equações $a_1 x + b_1 y = 0$ e $a_2 x + b_2 y = 0$, respetivamente. Deste modo, $l_1 \cap l_2 = \{A\} = \{(0,0)\}$.

Seja $B = (-b_1, a_1) \in l_1 \setminus \{A\}$ e $C = (-\lambda b_2, \lambda a_2) \in l_2$, a projeção ortogonal de *B* sobre l_2.

Observe-se que $C = A$ se e somente se l_1 e l_2 forem retas perpendiculares e, neste caso, $\lambda = 0$.

Por definição,

$$Q(A,B) = b_1^2 + a_1^2 \ , \ Q(A,C) = \lambda^2 \left(b_2^2 + a_2^2\right), \ Q(B,C) = \left(b_1 - \lambda b_2\right)^2 + \left(\lambda a_2 - a_1\right)^2 .$$

Uma vez que $[ABC]$ é retângulo em *C*, o Teorema de Pitágoras garante que

$$Q(A,C) + Q(B,C) = Q(A,B) \ ,$$

ou seja,

$$\lambda^2 \left(b_2^2 + a_2^2\right) + \left(b_1 - \lambda b_2\right)^2 + \left(\lambda a_2 - a_1\right)^2 = b_1^2 + a_1^2 .$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando a equação obtém-se

$$2\lambda\left(a_1 a_2 + b_1 b_2 - \lambda\left(a_2^2 + b_2^2\right)\right) = 0 \ ,$$

ou seja,

$$\lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} .$$

Como $\lambda = 0$ se e somente se l_1 e l_2 são perpendiculares, ou seja, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$, a fórmula

$$\lambda = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)}$$

garante também o caso $\lambda = 0$.

Assim,

$$Q(B,C) = \left(b_1 - \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} b_2\right)^2 + \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} a_2 - a_1\right)^2$$

e, portanto

$$\frac{Q(B,C)}{Q(A,B)} = \frac{\left(b_1 - \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} b_2\right)^2 + \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\left(a_2^2 + b_2^2\right)} a_2 - a_1\right)^2}{a_1^2 + b_1^2} .$$

Simplificando obtém-se,

$$\frac{Q\left(B,C\right)}{Q(A,B)} = \frac{\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2}{\left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right)} = s(l_1, l_2) .$$

Exemplo 2. Retomando novamente o Exemplo 1 observa-se que:

$$Q(A_1, A_3) = 7^2 = 49,\ Q(A_1, A_2) = 5^2 = 25 \text{ e } Q(A_2, A_3) = 4^2 = 16.$$

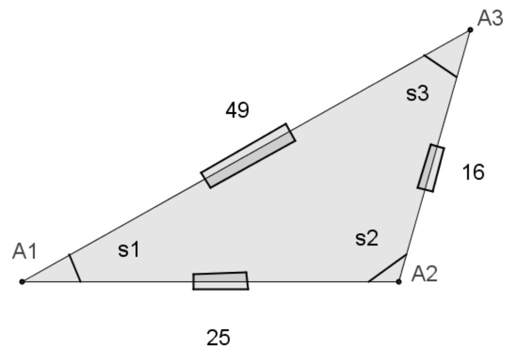


Figura 4. Cálculo das quadrâncias dos lados do triângulo $\left[A_1A_2A_3\right]$

Propomo-nos de seguida a calcular os spreads entre os lados do triângulo.

Para o cálculo de $s\left(A_1A_3, A_1A_2\right)$ considere-se a figura seguinte:

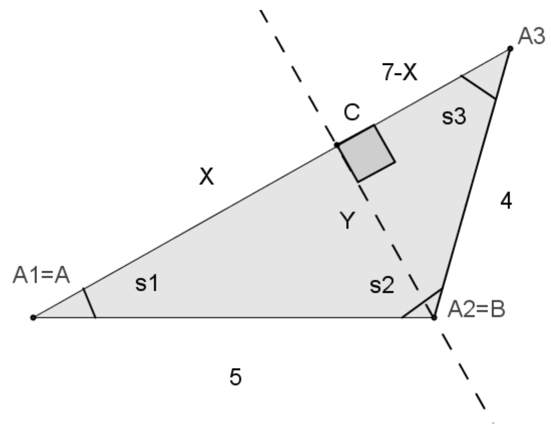


Figura 5. Cálculo do spread $s\left(A_1A_2, A_1A_3\right)$

onde tomamos

$$\overline{A_1B} = 5 \qquad \overline{BA_3} = 4 \qquad \overline{BC} = Y \qquad \overline{A_1C} = X \text{ e } \overline{CA_3} = 7 - X.$$

Podemos assim recorrer ao Teorema de Pitágoras que nos permite calcular os valores de X e Y.

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 5^2 \\ (7 - X)^2 + Y^2 = 4^2 \end{cases}$$

em ordem a X e Y obtém-se:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{\sqrt{384}}{7} \\ X = \dfrac{29}{7} \end{cases}.$$

Assim, surge de modo natural que,

$$s\left(A_1A_2, A_1A_3\right) = \frac{Q(B,C)}{Q(A,B)} = \frac{\frac{384}{49}}{25} = \frac{384}{1225}.$$

De modo semelhante se obtém $s\left(A_2A_1, A_2A_3\right) = \dfrac{24}{25}$ e $s\left(A_3A_1, A_3A_2\right) = \dfrac{24}{49}$.

Proposição 3. O spread entre duas retas l_1 e l_2 é um número compreendido entre 0 e 1:

$$0 \le s(l_1, l_2) \le 1.$$

Demonstração

Por definição, $s(l_1, l_2) = \dfrac{\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2}{\left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right)} \ge 0$.

Por outro lado, $s(l_1,l_2)\le 1$ se e somente se $\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2\le\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)$

Ora,

$$\begin{aligned}\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2 &= a_1^2b_2^2-2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2\\ &= a_1^2b_2^2+a_1^2b_1^2-a_1^2b_1^2-2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2-a_2^2b_2^2\\ &= a_1^2\left(b_1^2+b_2^2\right)+a_2^2\left(b_1^2+b_2^2\right)-2a_1b_2a_2b_1-a_1^2b_1^2-a_2^2b_2^2\\ &=\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_1\right)^2\\ &\le\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)\end{aligned}$$

Obtém-se assim que $s(l_1,l_2)\le 1$ ■

Notação: Nas figuras, os spreads são representados como pequenos segmentos de reta unindo as retas l_1 e l_2. Há quatro possibilidades para colocar o spread, cada um equivalente, como aparece representado na figura seguinte:

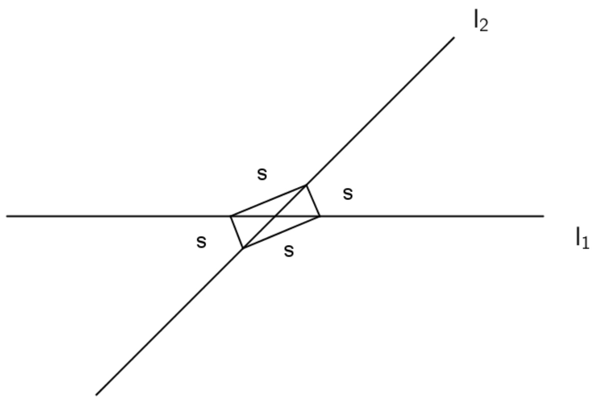


Figura 6. Spread entre duas retas

Proposição 2. O spread entre duas retas l_1 e l_2 é nulo, se e somente se, l_1 e l_2 são paralelas.

Demonstração.

Seja $a_1x+b_1y=c_1$ a equação cartesiana de l_1 e $a_2x+b_2y=c_2$ a equação cartesiana de l_2. As retas l_1 e l_2 são paralelas se e somente $a_1b_2-a_2b_1=0$.

Por definição, $s(l_1,l_2)=\dfrac{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}$,

logo $s(l_1,l_2)=0$ se e somente se $\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2=0$ ou seja $a_1b_2-a_2b_1=0$. ■

Proposição 3. O spread entre duas retas l_1 e l_2 é igual a um, se e somente se, l_1 e l_2 são perpendiculares.

Demonstração.

Seja $a_1x+b_1y=c_1$ a equação cartesiana de l_1 e $a_2x+b_2y=c_2$ a equação cartesiana de l_2. As retas l_1 e l_2 são perpendiculares se e somente se $a_1a_2+b_1b_2=0$. Por definição, $s(l_1,l_2)=\dfrac{\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}{\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)}$,

logo $s(l_1,l_2)=1$ se e somente se

$$\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2=\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right).$$

Ora,

$$\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2 - \left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right) =$$

$$= \left(a_1b_2\right)^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + \left(a_2b_1\right)^2 - a_1^2a_2^2 - a_1^2b_2^2 - b_1^2a_2^2 - b_1^2b_2^2$$

$$= -2a_1a_2b_1b_2 - a_1^2a_2^2 - b_1^2b_2^2$$

$$= -\left(a_1a_2 + b_1b_2\right)^2.$$

Assim, conclui-se que $s(l_1, l_2) = 1$ se e somente se, $\left(a_1a_2 + b_1b_2\right)^2 = 0$, ou seja, $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. ■

Curiosidade: Os ângulos na Trigonometria Clássica podem ser medidos por um transferidor convencional, ilustrado na figura A em Anexo. O spread entre duas retas não vazias pode ser medido com um transferidor decimal de spread ou um transferidor fracionário de spread, ilustrados nas figuras B e C também em Anexo. [3]

2.2. Teoremas sob o ponto de vista da Trigonometria Racional

Apresentam-se de seguida alguns resultados envolvendo os conceitos de quadrância e spread apresentados no presente texto.

Teorema 2 [Ponto médio] Seja A_1A_2 uma reta não vazia. Existe um único ponto M situado em $\left[A_1A_2\right]$ que verifica

$$Q(A_1,M)=Q(M,A_2).$$

Este ponto M designa-se por **ponto médio** do segmento $\left[A_1A_2\right]$ e tem por coordenadas:

$$M=\frac{A_1+A_2}{2}.$$

Além disso tem-se a seguinte relação

$$Q(A_1,M)=Q(M,A_2)=\frac{Q(A_1,A_2)}{4}.$$

Demonstração.

Sejam $A_1=\left(x_1,y_1\right)$ e $A_2=\left(x_2,y_2\right)$ dois pontos distintos de $\mathbb{R}^2$ e $M\in\left[A_1A_2\right]$.Como $M\in\left[A_1A_2\right]$ existe um número real λ, tal que

$$M=\lambda A_1+\left(1-\lambda\right)A_2=\left[\lambda x_1+\left(1-\lambda\right)x_2,\lambda y_1+\left(1-\lambda\right)y_2\right].$$

A condição $Q(A_1,M)=Q(M,A_2)$ é equivalente a

$$\left(\lambda x_1+\left(1-\lambda\right)x_2\right)^2+\left(\lambda y_1+\left(1-\lambda\right)y_2\right)^2=\left(\lambda x_1+\left(-\lambda\right)x_2\right)^2+\left(\lambda y_1+\left(-\lambda\right)y_2\right)^2,$$

ou ainda,

$$\left(\left(1-\lambda\right)^2-\lambda^2\right)\left(\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2\right)=0.$$

Como $A_1 \neq A_2$, vem

$$\left((1-\lambda)^2 - \lambda^2\right) = 0 \text{, ou seja, } \lambda = \frac{1}{2}.$$

Assim, $M = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2$ é o ponto da reta A_1A_2 que verifica $Q(M, A_1) = Q(M, A_2)$.

Deste modo *M* é o ponto médio do segmento $\left[A_1A_2\right]$, e

$$M = \frac{A_1 + A_2}{2} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Além disso,

$$Q(A_1, M) = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2 = Q(M, A_2) = \frac{Q(A_1, A_2)}{4}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3 [Fórmula *Triple Quad*] Três pontos A_1, A_2 e A_3 são colineares se e somente se verificam a igualdade

$$\left(Q\left(A_2, A_3\right) + Q\left(A_1, A_3\right) + Q\left(A_1, A_2\right)\right)^2 = 2\left[\left(Q\left(A_2, A_3\right)\right)^2 + \left(Q\left(A_1, A_3\right)\right)^2 + \left(Q\left(A_1, A_2\right)\right)^2\right]. \quad (2)$$

Demonstração.

Sem perda de generalidade, suponha-se que os pontos A_1, A_2 e A_3 admitem como coordenadas cartesianas $A_1 = \left(x_1, y_1\right)$ e $A_2 = \left(x_2, y_2\right)$ e $A_3 = (0, 0)$.

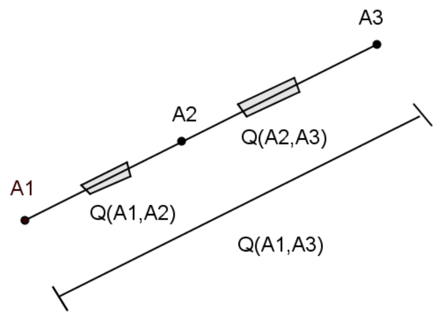


Figura 9. Quadrância de três pontos colineares

As quadrâncias entre cada par de pontos são dadas por:

$$Q\left(A_2, A_3\right) = x_2^2 + y_2^2,$$

$$Q\left(A_1, A_3\right) = x_1^2 + y_1^2,$$

$$Q\left(A_1, A_2\right) = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2.$$

Observe-se que os pontos A_1, A_2 e A_3 são colineares se e somente se

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0. \tag{3}$$

Designe-se por

$$Q_1 = Q(A_2, A_3),\; Q_2 = Q(A_1, A_3) \text{ e } Q_3 = Q(A_1, A_2).$$

Note-se que

$$\begin{aligned}
&\left(Q_1+Q_2+Q_3\right)^2-2(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)= \\
&=2Q_1Q_2+2Q_1Q_3+2Q_2Q_3-(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2) \\
&=2Q_1Q_2+2\left(Q_1+Q_2\right)Q_3+2Q_1Q_2-2Q_1Q_2-(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2) \\
&=4Q_1Q_2+2\left(Q_1+Q_2\right)Q_3-\left(\left(Q_1+Q_2\right)^2+Q_3^2\right) \\
&=4Q_1Q_2-\left(\left(Q_1+Q_2\right)^2-2\left(Q_1+Q_2\right)Q_3+Q_3^2\right) \\
&=4Q_1Q_2-(Q_1+Q_2-Q_3)^2.
\end{aligned}$$

Logo, a identidade (2) verifica-se se e somente se

$$4Q_1Q_2-(Q_1+Q_2-Q_3)^2=0.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
4Q_1Q_2-\left(Q_1+Q_2-Q_3\right)^2&=4\left(\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)-\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2\right) \\
&=4\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2,
\end{aligned}$$

portanto, a identidade (2) verifica-se se e somente se $\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2=0$, ou seja, se e somente se os pontos A_1, A_2 e A_3 são colineares. ■

Enuncia-se de seguida e demonstra-se um resultado que é utilizado na demonstração da Lei dos spreads.

Teorema 4 [*Spread Ratio*] Seja $\left[A_1A_2A_3\right]$ um triângulo retângulo, sendo retângulo no vértice A_3 e admitindo como quadrâncias não nulas, $Q(A_2,A_3)$, $Q(A_2,A_3)$ e $Q(A_1,A_2)$. Então, o spread com vértice em A_1 é dado por

$$s\left(A_1A_2, A_1A_3\right) = \frac{Q(A_2,A_3)}{Q(A_1,A_2)}.$$

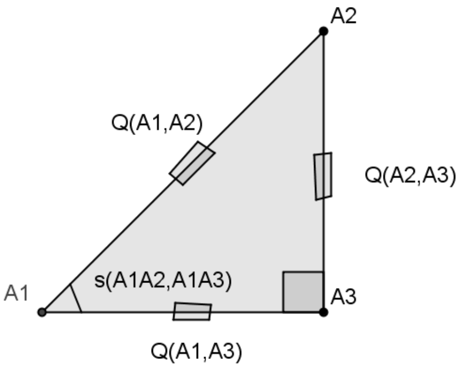


Figura 10. Teorema do *spread ratio*

Demonstração.

Suponhamos que $A_1 = \left(x_1, y_1\right), A_2 = \left(x_2, y_2\right)$ e $A_3 = \left(x_3, y_3\right)$ são pontos de $\mathbb{R}^2$.

Pela **Proposição 2** sabe-se que o spread entre as retas A_1A_2 e A_1A_3 é dado por:

$$s(A_1A_2, A_1A_3) = \frac{\left(\left(y_1-y_2\right)\left(x_3-x_1\right)-\left(y_1-y_3\right)\left(x_2-x_1\right)\right)^2}{\left(\left(y_1-y_2\right)^2+\left(x_2-x_1\right)^2\right)\left(\left(y_1-y_3\right)^2+\left(x_3-x_1\right)^2\right)}.$$

Como as retas A_1A_3 e A_2A_3 e são perpendiculares tem-se que

$$\left(y_1-y_3\right)\left(y_2-y_3\right)+\left(x_3-x_1\right)\left(x_3-x_2\right)=0.$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned}(y_1-y_2)(x_3-x_1)-(y_1-y_3)(x_2-x_1) &= y_1x_3-x_1y_1-y_2x_3+y_2x_1-(y_1x_2-y_1x_1-y_3x_2+y_3x_1)\\ &= y_1x_3-x_1y_1-y_2x_3+y_2x_1-y_1x_2+y_1x_1+y_3x_2-y_3x_1\\ &= y_1x_3-x_3y_3-y_2x_3+y_2x_1-y_1x_2+y_3x_3+y_3x_2-y_3x_1\\ &= y_1(x_3-x_2)-y_3(x_3-x_2)-y_2(x_3-x_1)+y_3(x_3-x_1)\\ &=(y_1-y_3)(x_3-x_2)-(y_2-y_3)(x_3-x_1),\end{aligned}$$

tem-se,

$$\begin{aligned}&\left((y_1-y_2)(x_3-x_1)-(y_1-y_3)(x_2-x_1)\right)^2=\left((y_1-y_3)(x_3-x_2)-(y_2-y_3)(x_3-x_1)\right)^2+0^2\\ &=\left((y_1-y_3)(x_3-x_2)-(y_2-y_3)(x_3-x_1)\right)^2+\left((y_1-y_3)(y_2-y_3)+(x_3-x_1)(x_3-x_2)\right)^2\\ &=\left((y_1-y_3)^2+(x_3-x_1)^2\right)\left((y_2-y_3)^2+(x_3-x_2)^2\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}s(A_1A_2,A_1A_3) &= \frac{\left((y_1-y_3)^2+(x_3-x_1)^2\right)\left((y_2-y_3)^2+(x_3-x_2)^2\right)}{\left((y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2\right)\left((y_1-y_3)^2+(x_3-x_1)^2\right)}\\ &=\frac{\left((y_2-y_3)^2+(x_3-x_2)^2\right)}{\left((y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2\right)}\\ &=\frac{Q(A_2,A_3)}{Q(A_1,A_2)}.\end{aligned}$$

Conclui-se assim que o spread com vértice em A_1 é dado por

$$s\left(A_1A_2,A_1A_3\right)=\frac{Q(A_2,A_3)}{Q(A_1,A_2)}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 5. [Lei dos spreads]

Sejam A_1, A_2 e A_3 três pontos em $\mathbb{R}^2$, tais que, as quadrâncias $Q(A_2, A_3)$, $Q(A_1, A_3)$ e $Q(A_1, A_2)$ são não nulas.

Então, tem-se

$$\frac{s(A_1A_2, A_1A_3)}{Q(A_2, A_3)} = \frac{s(A_2A_1, A_2A_3)}{Q(A_1, A_3)} = \frac{s(A_3A_1, A_3A_2)}{Q(A_1, A_2)}.$$

Demonstração.

Se $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$ são três pontos colineares, então pela Proposição 2

$$s(A_1A_2, A_1A_3) = s(A_2A_1, A_2A_3) = s(A_3A_1, A_3A_2) = 0.$$

Suponha-se agora que os pontos A_1, A_2 e A_3 definem o triângulo $\left[A_1A_2A_3\right]$.

Seja $\left[A_2P\right]$ a altura do triângulo relativamente a $\left[A_2A_3\right]$.

Designem-se por $Q(A_1, P)$, $Q(A_2, P)$ e $Q(A_3, P)$ as quadrâncias de $\left[A_1P\right]$, $\left[A_2P\right]$ e $\left[A_3P\right]$, conforme ilustrado nas figuras seguintes:

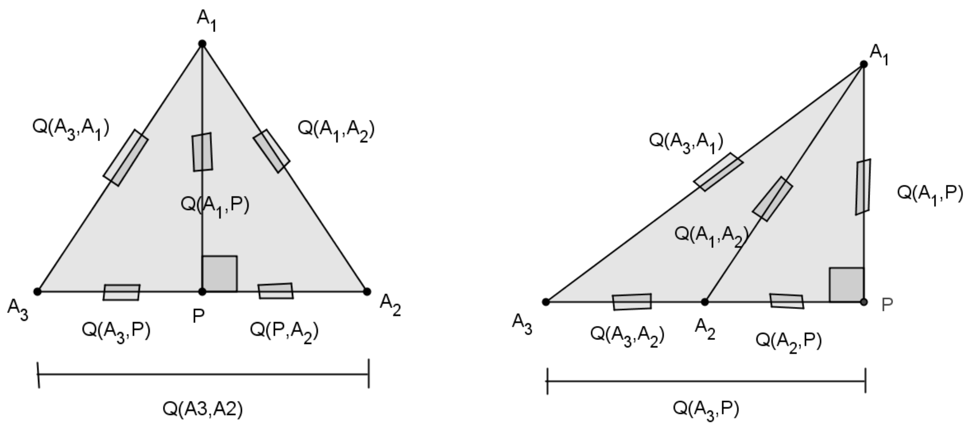


Figura 11. Lei dos Spreads

Como $\left[A_1A_2P\right]$ e $\left[A_1A_3F\right]$ são triângulos retângulos em P, pelo **Teorema 4 [*Spread Ratio*]** é possível estabelecer que:

$$s(A_2A_1, A_2A_3) = \frac{Q(A_1, P)}{Q(A_1, A_2)} \quad \text{e} \quad s(A_3A_1, A_3A_2) = \frac{Q(A_1, P)}{Q(A_3, A_1)},$$

pelo que

$$Q(A_1, P) = s(A_2A_1, A_2A_3)Q(A_2, A_1) = s(A_3A_1, A_3A_2)Q(A_3, A_1).$$

Estabelece-se assim que,

$$\frac{s(A_2A_1, A_2A_3)}{Q(A_3, A_1)} = \frac{s(A_3A_1, A_3A_2)}{Q(A_2, A_1)}$$

De modo análogo, estabelece-se que

$$\frac{s(A_1A_2, A_1A_3)}{Q(A_2, A_3)} = \frac{s(A_2A_1, A_2A_3)}{Q(A_1, A_3)}.$$

2.3 Breve comparação entre a Trigonometria Clássica e a Trigonometria Racional

Quando se estuda Trigonometria Clássica ao longo do nosso percurso escolar, como estudantes de uma área científica e depois se nos debruçarmos sobre este novo tema emergente – Trigonometria Racional – fica-se com a sensação de que ainda há um longo caminho a percorrer no estudo desta nova abordagem proposta por Wildberger...

Será então possível, estabelecer alguma comparação entre estas duas abordagens da Trigonometria?

Uma primeira diferença que é bastante notória, é a de que na Trigonometria Clássica recorre-se às funções trigonométricas de um determinado ângulo θ, e muitas das relações trigonométricas que podem decorrer daí.

Relativamente à Trigonometria Racional os conceitos de quadrância entre dois pontos e spread entre duas retas, são primordiais nesta nova abordagem.

O conceito de cross embora não tenha sido apresentado anteriormente, fica aqui apenas um apontamento de que o cross *c* pode ser definido como $c = 1 - s$. [2]

Também aqui na Trigonometria Racional novas leis emergem...

As novas leis mais importantes de acordo com Wildberger são a Triple quad formula, a lei dos Spreads, a lei do Cross e a Triple Spread formula. [2]

A lei dos Senos surge agora como a lei dos Spreads e a lei dos Cossenos surge agora como a lei do Cross. [4]

Procedendo agora á elaboração de uma tabela comparativa entre estes dois tipos de Trigonometria, obtém-se: [4]

Trigonometria Clássica	**Trigonometria Racional**
Quadrado da distância	Quadrância
Quadrado do seno	Spread
Quadrado do cosseno	Cross
Lei dos Senos	Lei dos Spreads
Lei dos Cossenos	Lei do Cross

O Teorema de Pitágoras, reescrito sob a forma de quadrâncias na Trigonometria Racional também desempenha um papel chave na dedução de relações entre distâncias num triângulo retângulo, pois deste modo, podemos obter um resultado mais preciso sem o recurso à raiz quadrada que me apresentava um valor inexato.

Capítulo III – Trigonometria Racional – Desenvolvimento no contexto de sala de aula

3.1 Introdução

Neste capítulo começo por tecer breves considerações sobre aspetos pedagógicos relacionados com o ensino da matemática, em geral.

Em seguida, particularizo o ensino da Trigonometria Racional, que foi objeto de estudo na parte científica do presente trabalho, introduzindo três atividades que envolvem o conceito de quadrância entre dois pontos e spread entre duas retas não vazias.

Observe-se a citação seguinte:

“ O melhor professor entre nós é o que explica melhor. Fazer a lição, é expor com clareza um assumpto de maneira que o alumno o comprehenda sem o menor esforço. (...)

(...) A preocupação do professor deve ser crear o gosto do alumno pelo trabalho, desenvolver-lhe o espírito de iniciativa, a curiosidade de descobrir, a originalidade.”

Oração de Sapiência, Abertura Solene das aulas do ano letivo 1908-1909

In Sidónio Pais 1908 (Universidade de Coimbra)

Quando pensamos no papel do professor de matemática e lemos a citação apresentada, concluímos que o pensamento expresso é bastante atual, na medida em que esse mesmo papel, nos põe sempre a questionar qual o melhor caminho a seguir...

O professor não é somente um instrumento de transmissão de um determinado assunto ou matéria, em que o aluno se limita a reproduzir cabalmente esse conteúdo para atingir o sucesso escolar.

É preciso aplicar o conhecimento científico aliado a uma certa pedagogia num determinado contexto de aprendizagem.

No que respeita ao contexto de ensino e aprendizagem, há diversas “variáveis envolvidas”.

O aluno que pode ser brilhante, razoável, mau e o que, por e simplesmente se sente desmotivado por aprender numa sociedade competitiva e cada vez mais exigente...

Cabe por isso ao professor, encadear tanto quanto possível o conhecimento matemático, estabelecendo um fio condutor, de modo a conseguir envolver os alunos no processo de ensino-aprendizagem.

Deste modo, deve ter-se em conta, que apesar dos alunos, no ensino básico e secundário possuírem uma autonomia “intermitente”, é importante fomentá-la.

O tema que se pretende abordar, a Trigonometria Racional, é um pouco restritivo, dado que os alunos quando dão Trigonometria no 9º ano, ainda vêm os conceitos de uma forma bastante incipiente.

Assim, o conceito de quadrância entre dois pontos é introduzido quando é lecionado o conceito de distância entre dois pontos no 10º ano de escolaridade e o conceito de spread entre duas retas no 11º quando se introduz o conceito equação cartesiana do plano.

Apresentam-se, de seguida três atividades, sendo duas investigativas e uma lúdica.

Nas atividades investigativas, o aluno formula, testa, valida hipóteses, conclui e generaliza as suas conclusões, sentido o seu papel de interveniente realçado.
Refira-se que, para além dos objetivos subjacentes a cada atividade, está sempre implícito que viso desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo.

Na atividade 1 foi introduzido uma ficha de trabalho para o 10º ano de escolaridade, visando consolidar a matéria relacionada com distância e ver uma nova abordagem.

Na atividade 2 foi introduzido uma ficha de trabalho para o 11º ano de escolaridade, visando motivar e incentivar os alunos de a ir sempre mais além...

Na atividade 3 foi introduzido um exercício lúdico envolvendo os conceitos de quadrância entre dois pontos e spread entre duas retas.

Atividade 1	**Atividade 2**	**Atividade 3**
Ficha de Trabalho 1	Ficha de Trabalho 2	Questionário

3.2 Atividade 1

Na presente atividade investigativa pretende-se dinamizar o ensino da Geometria do 10º ano, sendo vários os objetivos a atingir.

A atividade 1 consiste na realização da Ficha de Trabalho 1 que se encontra em anexo. Propõe-se para a realização da tarefa a duração de 45 minutos.

Começa-se precisamente por recorrer às novas tecnologias com o recurso ao computador e ao programa interativo Geogebra que é utilizado nalgumas atividades de sala se aula, envolvendo Geometria.

O professor introduz um conceito novo, o de quadrância entre dois pontos.

Pretende-se que os alunos relacionem esse conceito com o conceito de distância entre dois pontos já por eles conhecido, levando-os a intuir, conjeturar e ver que os conceitos estão interligados.

De modo análogo pretende-se ainda que estes estabeleçam o Teorema de Pitágoras recorrendo ao conceito de quadrância.

Os alunos devem obter as respostas de forma autónoma.

Relativamente às questões 1., 2. e 3. pretende-se que os alunos obtenham uma resposta do tipo:

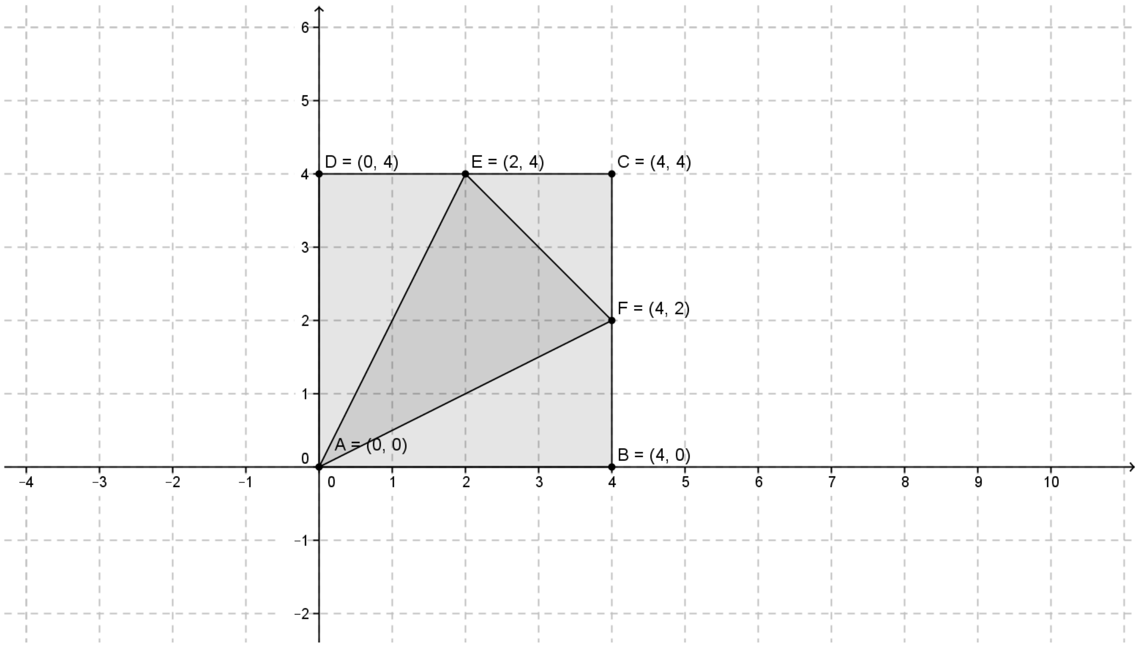


Figura relativa às questões 1.,2. e 3.

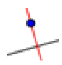
Relativamente à questão 4. pretende-se que os alunos obtenham os seguintes resultados, recorrendo ao conceito de distância entre dois pontos.

$$\begin{aligned} d(E,F) &= \sqrt{(x_E - x_F)^2 + \left(y_E - y_F\right)^2} \\ &= \sqrt{(2-4)^2 + \left(4-2\right)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2}cm \end{aligned}$$

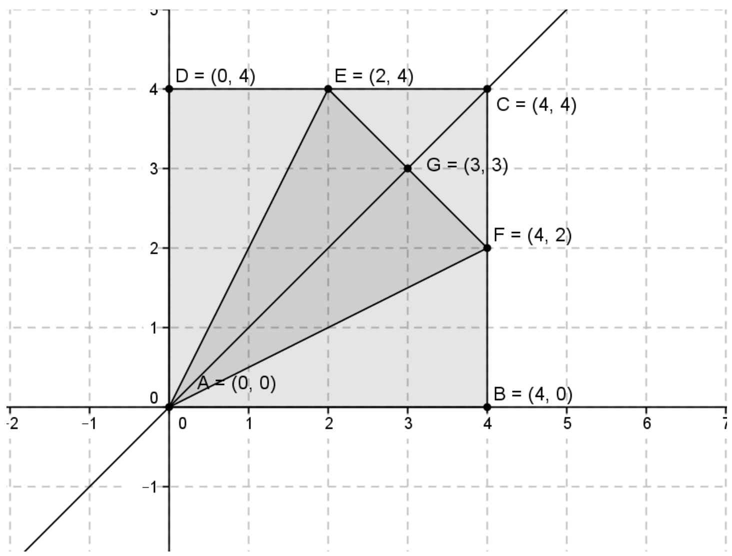
$$\begin{aligned} d(A,F) &= \sqrt{(x_A - x_F)^2 + \left(y_A - y_F\right)^2} \\ &= \sqrt{(0-4)^2 + \left(0-2\right)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5}cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A,E) &= \sqrt{(x_A - x_E)^2 + \left(y_A - y_E\right)^2} \\ &= \sqrt{(0-2)^2 + \left(0-4\right)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5}cm \end{aligned}$$

Observe-se que o triângulo [AEF] é isósceles.

Para determinarmos a altura do triângulo [AEF], que se designa por h, recorre-se ao Teorema de Pitágoras. No Geogebra, para desenhar a altura recorre-se ao ícone 

Deste modo obtém-se ainda o ponto de interseção G da altura [AG] com a base do triângulo [EF].



Surge assim de modo natural pelo Teorema de Pitágoras que a altura é:

$$\begin{aligned}\left(\overline{AF}\right)^2=\left(\overline{FG}\right)^2+\left(\overline{AG}\right)^2 &\Leftrightarrow \left(2\sqrt{5}\right)^2=h^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &\Leftrightarrow 20=h^2+2\\ &\Leftrightarrow h^2=18\\ &\Leftrightarrow h=3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Sendo a área obtida pela fórmula relativa à área de um triângulo.

$$A_{[\mathrm{AEF}]}=\frac{b\times h}{2}=\frac{\left(2\sqrt{2}\right)\times\left(3\sqrt{2}\right)}{2}=6cm^2.$$

Relativamente ao perímetro do triângulo [AEF], sabe-se que

$$\overline{AE}=2\sqrt{5cm},\overline{AF}=2\sqrt{5}cm \text{ e } \overline{EF}=2\sqrt{2}cm.$$

Assim,

$$P=2\sqrt{5}+2\sqrt{5}+2\sqrt{2}=4\sqrt{5}+2\sqrt{2}cm.$$

5. Para determinarmos a quadrância de cada um dos lados do triângulo, basta utilizar a fórmula que é dada na definição apresentada no início desta atividade.

$$\begin{aligned}Q(E,F)&=(x_E-x_F)^2+\left(y_E-y_F\right)^2\\&=(2-4)^2+\left(4-2\right)^2\\&=8cm^2\end{aligned}\qquad \begin{aligned}Q(A,F)&=(x_A-x_F)^2+\left(y_A-y_F\right)^2\\&=(0-4)^2+\left(0-2\right)^2\\&=20cm^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}Q(A,E)&=(x_A-x_E)^2+\left(y_A-y_E\right)^2\\&=(0-2)^2+\left(0-4\right)^2\\&=20cm^2\end{aligned}$$

Para determinarmos a quadrância de cada um dos lados do quadrado, basta utilizar a fórmula que é dada na definição apresentada no início desta atividade.

$$Q(A,D)=(x_A-x_D)^2+\left(y_A-y_D\right)^2$$
$$=(0-0)^2+\left(0-4\right)^2$$
$$=16cm^2$$

$$Q(A,B)=(x_A-x_B)^2+\left(y_A-y_B\right)^2$$
$$=(0-4)^2+\left(0-0\right)^2$$
$$=16cm^2$$

$$Q(C,D)=(x_C-x_D)^2+\left(y_C-y_D\right)^2$$
$$=(4-0)^2+\left(4-4\right)^2$$
$$=16cm^2$$

$$Q(C,B)=(x_C-x_B)^2+\left(y_C-y_B\right)^2$$
$$=(4-4)^2+\left(4-0\right)^2$$
$$=16cm^2$$

Na questão 6. É estabelecido que a quadrância é o quadrado da distância.

Na questão 7. Para determinarmos a quadrância de cada um dos lados do triângulo, basta utilizar a fórmula que é dada na definição apresentada no início desta atividade.

$$Q(A,B)=\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2$$
$$=(0-4)^2+\left(0-0\right)^2$$
$$=16cm^2$$

$$Q(A,F)=\left(x_A-x_F\right)^2+\left(y_A-y_F\right)^2$$
$$=(0-4)^2+\left(0-2\right)^2$$
$$=20cm^2$$

e

$$Q(B,F)=\left(x_B-x_F\right)^2+\left(y_B-y_F\right)^2$$
$$=(4-4)^2+\left(0-2\right)^2$$
$$=4cm^2$$

Observa-se que sendo o Triângulo $\left[ABF\right]$ é retângulo em *B*.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, pode-se escrever que

$$Q(A,F)=Q(A,B)+Q(B,F)\,.$$

Na questão 8. Pretende-se que o aluno estabeleça um resultado do tipo seguinte:

Seja $\left[A_1A_2A_3\right]$ um triângulo retângulo em A_3, então

$$Q\left(A_2,A_3\right)+Q\left(A_1,A_3\right)=Q\left(A_1,A_2\right)$$

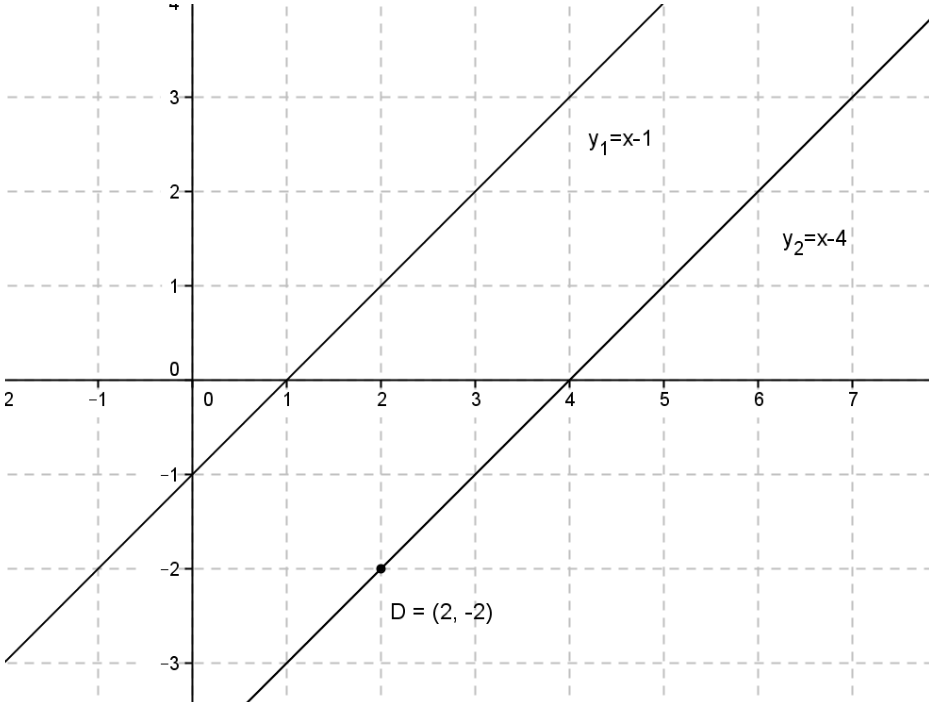
e identifica-o como sendo o Teorema de Pitágoras.

A atividade 1 delineada, tem também como objetivos específicos envolver o aluno na resolução de problemas envolvendo o conceito de distância e posteriormente quadrância. Também pretende que o aluno explore os conceitos e propriedades geométricas, estabeleça estratégias, formule ou reformule conjeturas, acompanhados de rigor.

3.3. Atividade 2

Na presente atividade investigativa, introduz-se o conceito de spread entre duas retas.
Na presente atividade investigativa pretende-se dinamizar o ensino da Geometria do 11º ano, sendo vários os objetivos a atingir.
A atividade 2 consiste na realização da Ficha de Trabalho 2 que se encontra em anexo. Propõe-se para a realização da tarefa a duração de 45 minutos.
Começa-se precisamente por se recorrer às novas tecnologias com o recurso ao computador e ao programa interativo Geogebra que é utilizado nalgumas atividades de sala se aula, envolvendo Geometria.
Introduz-se um conceito novo, o de spread entre duas retas não vazias.
Pretende-se que os alunos relacionem esse conceito com o conceito de equação cartesiana da reta, levando-os a intuir, conjeturar e ver que os conceitos estão interligados.
De modo análogo pretende-se ainda que estes estabeleçam o valor do spread entre duas retas não vazias caso estas sejam paralelas e caso sejam perpendiculares com recurso à definição de spread entre duas retas.
Os alunos devem obter as respostas de forma autónoma.

Relativamente às questões 1. e 2. pretende-se que os alunos obtenham uma resposta do tipo:



Para determinar o spread entre duas retas não vazias dadas em termos de coordenadas cartesianas, basta aplicar a fórmula referida na definição apresentada.

- Cálculo de $s(l_1, l_2)$, tendo em conta que as equações das retas l_1 e l_2

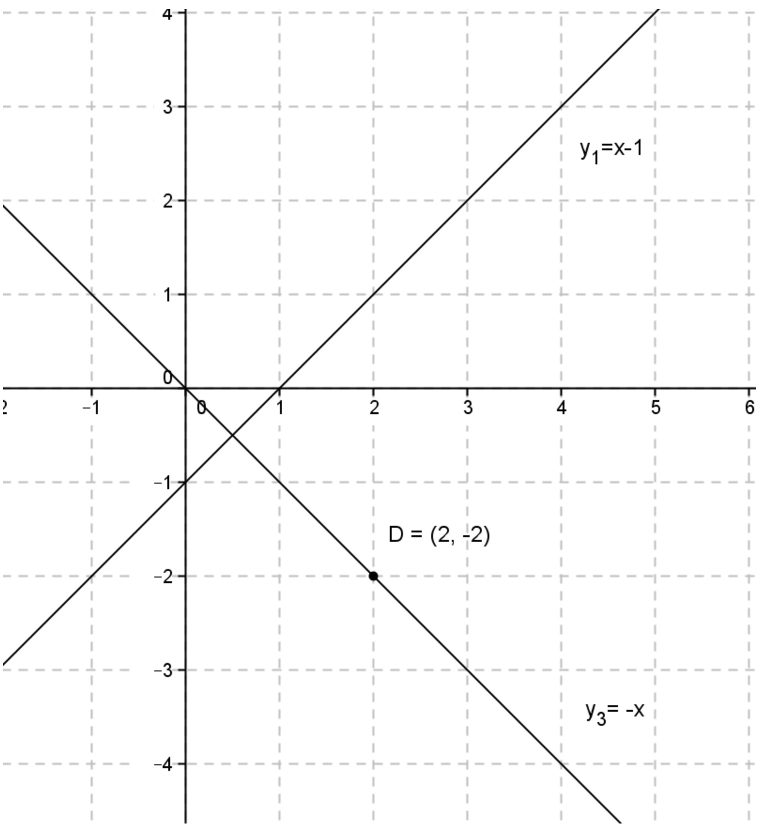
As retas l_1 e l_2 assumem respetivamente a seguinte forma $y = x - 1$ e $y = x - 4$, ou seja $x - y - 1 = 0$ e $x - y - 4 = 0$.

Deste modo, identificando e substituindo na fórmula de definição de spread entre duas retas não vazias $(a_1, b_1) = (1, -1)$ e $(a_2, b_2) = (1, -1)$, obtém-se

$$s(l_1, l_2) = \frac{\left(1 \times (-1) - 1 \times (-1)\right)^2}{\left(1^2 + (-1)^2\right)\left(1^2 + (-1)^2\right)} = 0.$$

É de referir que se verifica o conceito de colinearidade entre os vetores (a_1,b_1) e (a_2,b_2). Tem-se portanto $(a_1,b_1)=k(a_2,b_2)$, sendo $k=1$ portanto as retas l_1 e l_2 são paralelas.

Relativamente à questão 3. pretende-se que os alunos obtenham uma resposta do tipo:



- Cálculo de $s(l_1,l_3)$, tendo em conta que as equações cartesianas das retas l_1 e l_3

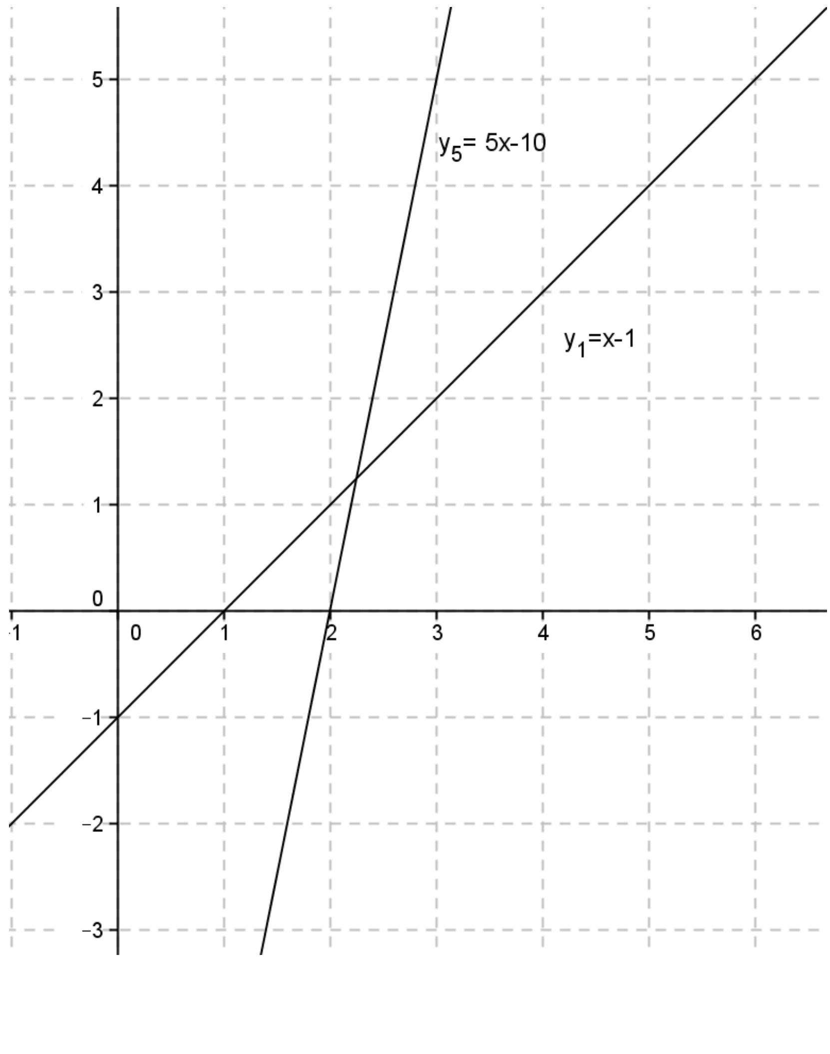
As retas l_1 e l_3 assumem a seguinte forma $y=x-1$ e $y=-x$, ou seja $x-y-1=0$ e $x+y=0$ respetivamente.

Deste modo, substituindo na fórmula $(a_1,b_1)=(1,-1)$ e $(a_2,b_2)=(1,1)$, obtém-se

$$s(l_1,l_3)=\frac{\left(1\times 1-1\times\left(-1\right)\right)^2}{\left(1^2+\left(-1\right)^2\right)\left(1^2+\left(-1\right)^2\right)}=1\,.$$

É de referir que se verifica o conceito de perpendicularidade entre os vetores (a_1,b_1) e (a_2,b_2). Tem-se portanto que o produto interno entre estes vetores assume o valor 0, $(a_1,b_1).(a_2,b_2)=(1,-1)=(1,1)=0$, sendo portanto as retas l_1 e l_3 perpendiculares.

Relativamente à questão 4. pretende-se que os alunos obtenham uma resposta do tipo:



- Cálculo de $s(l_1,l_4)$, tendo em conta que as equações cartesianas das retas l_1 e l_4

As retas l_1 e l_4 assumem a seguinte forma $y=x-1$ e $y=5x-10$, ou seja $x-y-1=0$ e $5x-y-10=0$ respetivamente.
Deste modo, substituindo na fórmula $(a_1,b_1)=(1,-1)$ e $(a_2,b_2)=(5,-1)$, obtém-se

$$s(l_1,l_3)=\frac{\left(1\times(-1)-5\times(-1)\right)^2}{\left(1^2+(-1)^2\right)\left(5^2+(-1)^2\right)}=\frac{16}{52}.$$

Relativamente à questão 5. pretende-se que os alunos obtenham uma resposta do tipo:

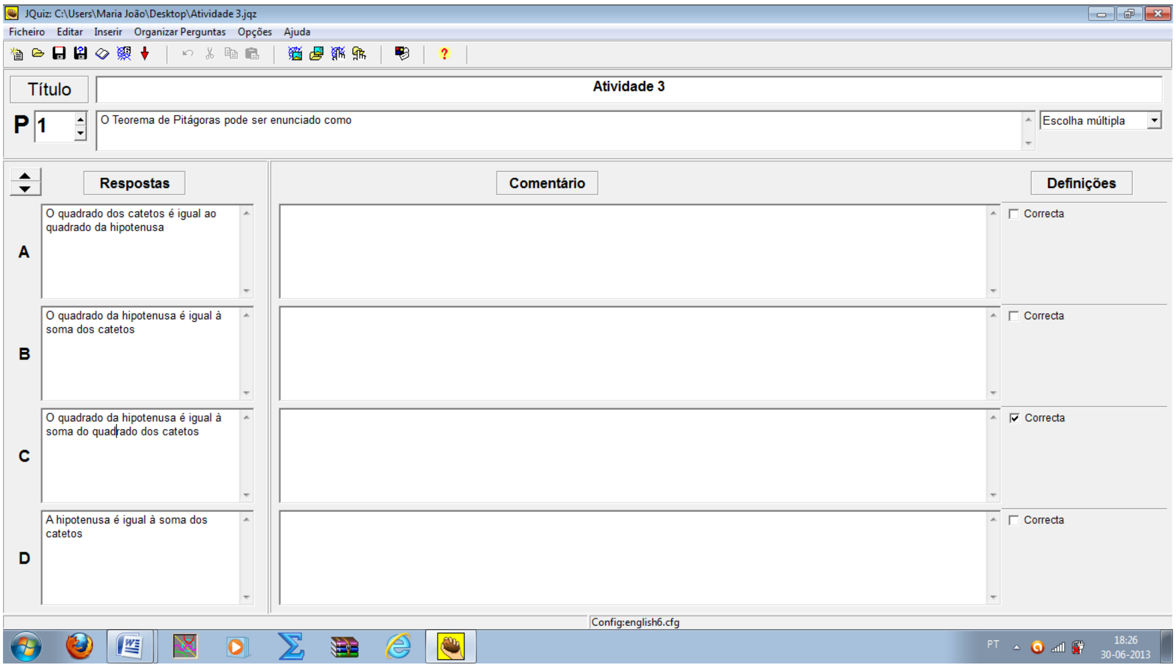
- O spread entre duas retas paralelas assume o valor 0.
- O spread entre duas retas perpendiculares assume o valor 1.

A atividade 2 delineada, tem também como objetivos específicos envolver o aluno na resolução de problemas envolvendo a equação cartesiana da reta, o conceito de colinearidade e perpendicularidade entre dois vetores. Também se pretende que o aluno explore o conceito de spread em termos de coordenadas e formule conjeturas.

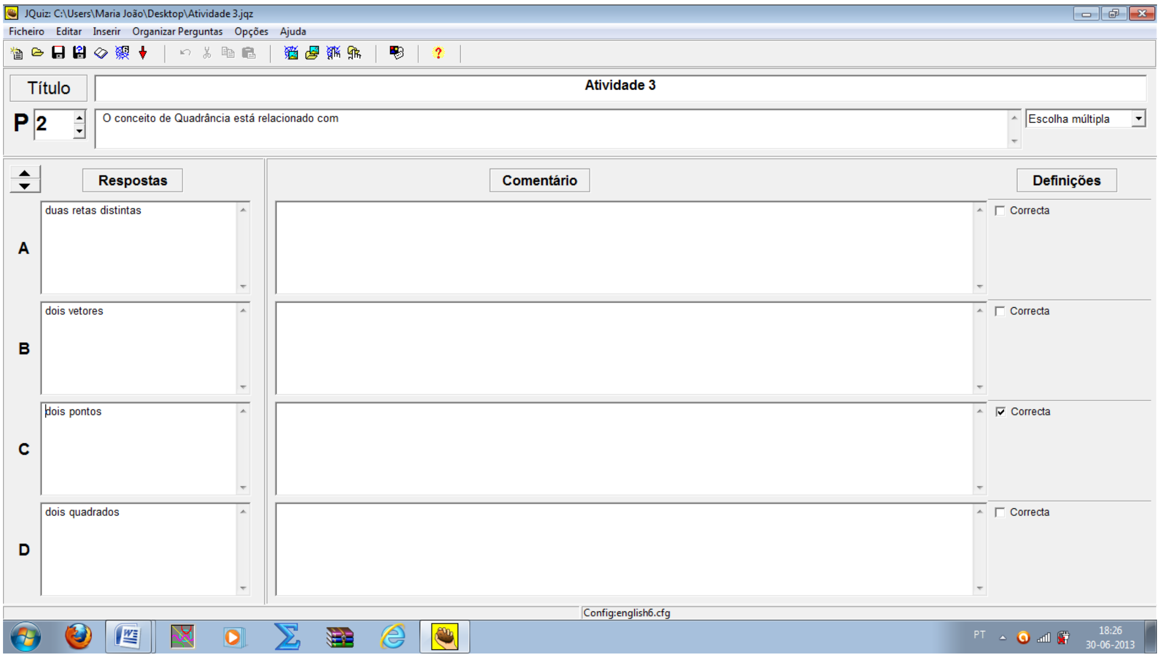
3.4. Atividade 3

Na presente atividade, apresenta-se um questionário de escolha múltipla, do programa Hotpotatoes, no qual se pretende que os alunos utilizem os conceitos apresentados anteriormente de quadrância entre dois pontos e spread entre duas retas não vazias. Aproveita-se assim, de uma forma lúdica para consolidar a estes conceitos. Propõe-se para a realização da tarefa a duração de 15 minutos.

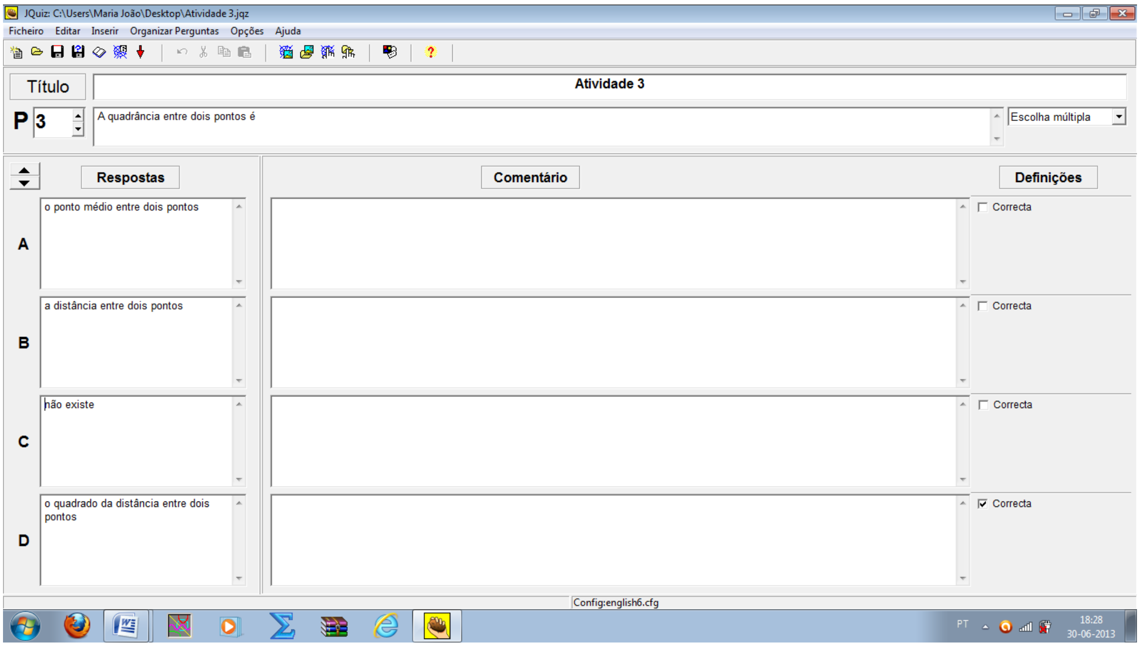
A construção da atividade apresenta-se de seguida e encontra-se no ficheiro C:\Users\Maria João\Desktop\Atividade 3.htm



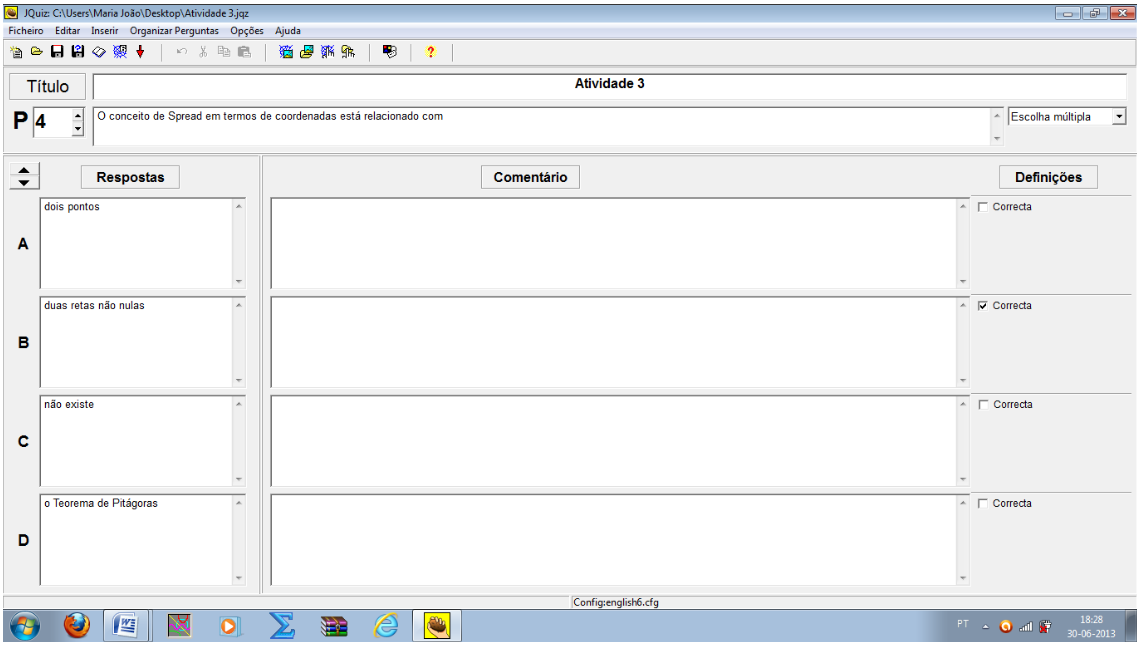
Questão 1



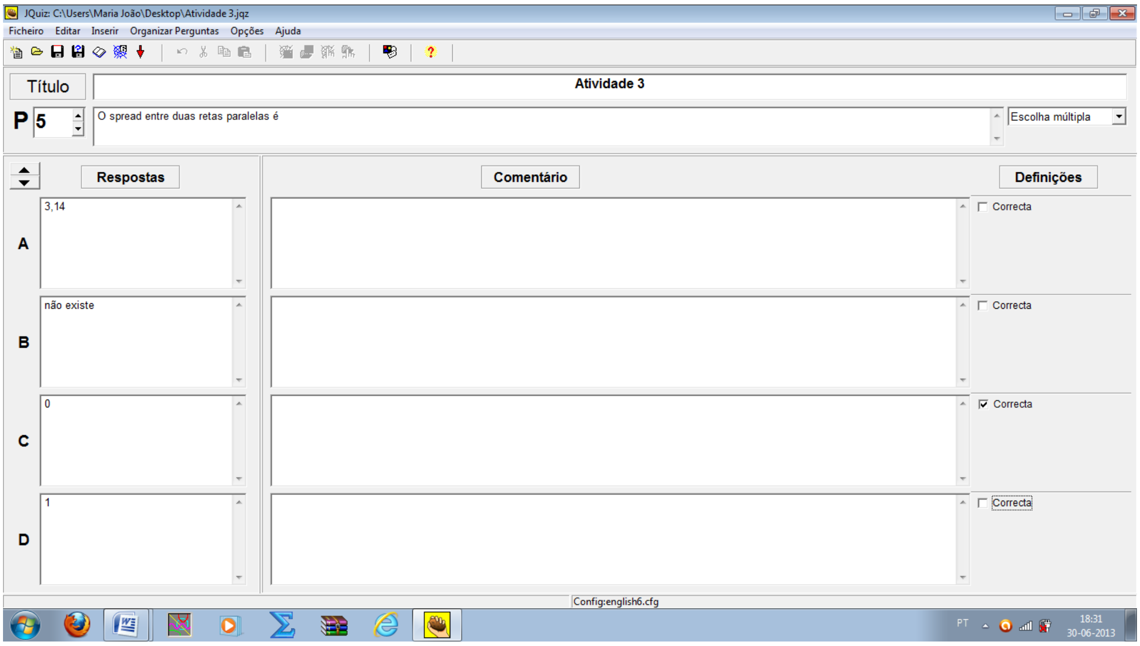
Questão 2



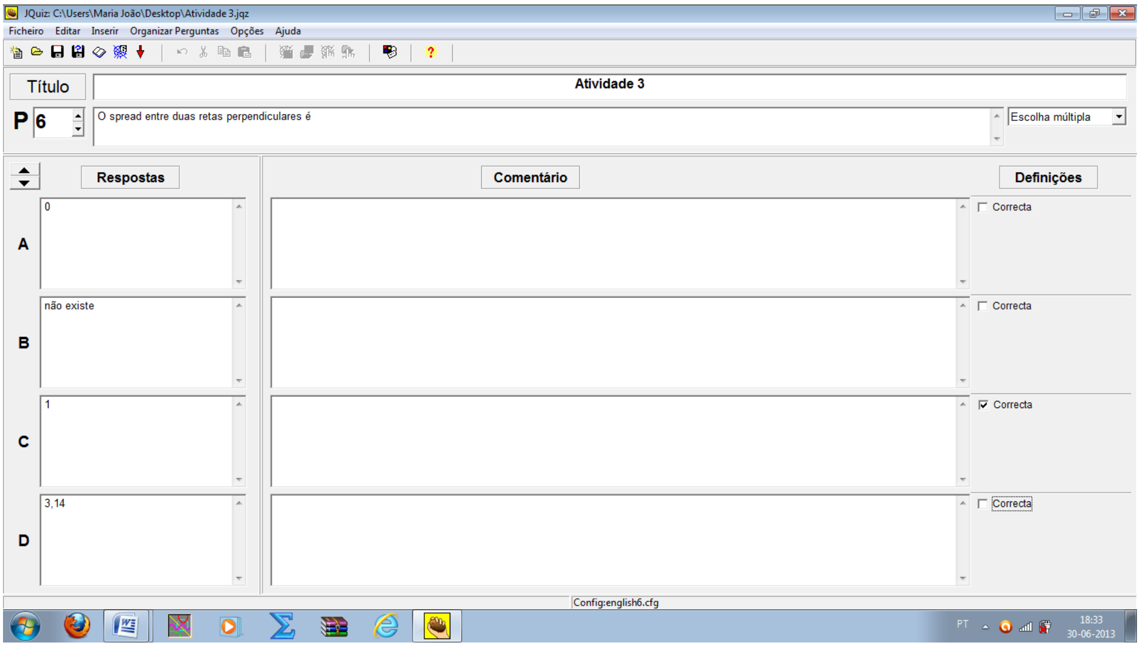
Questão 3



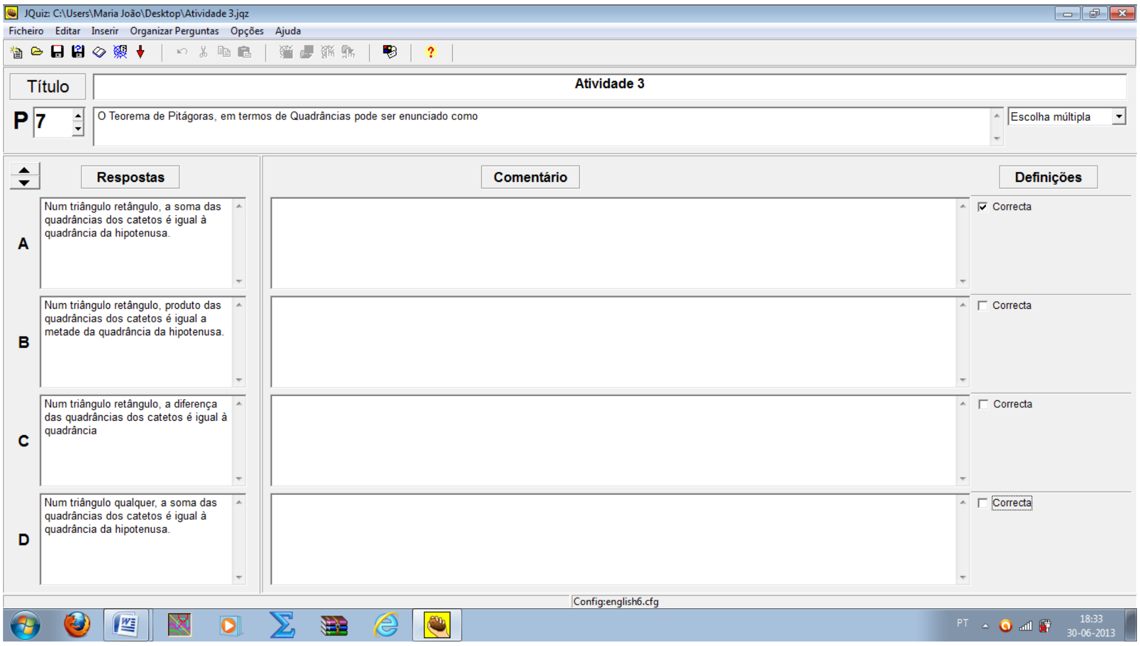
Questão 4



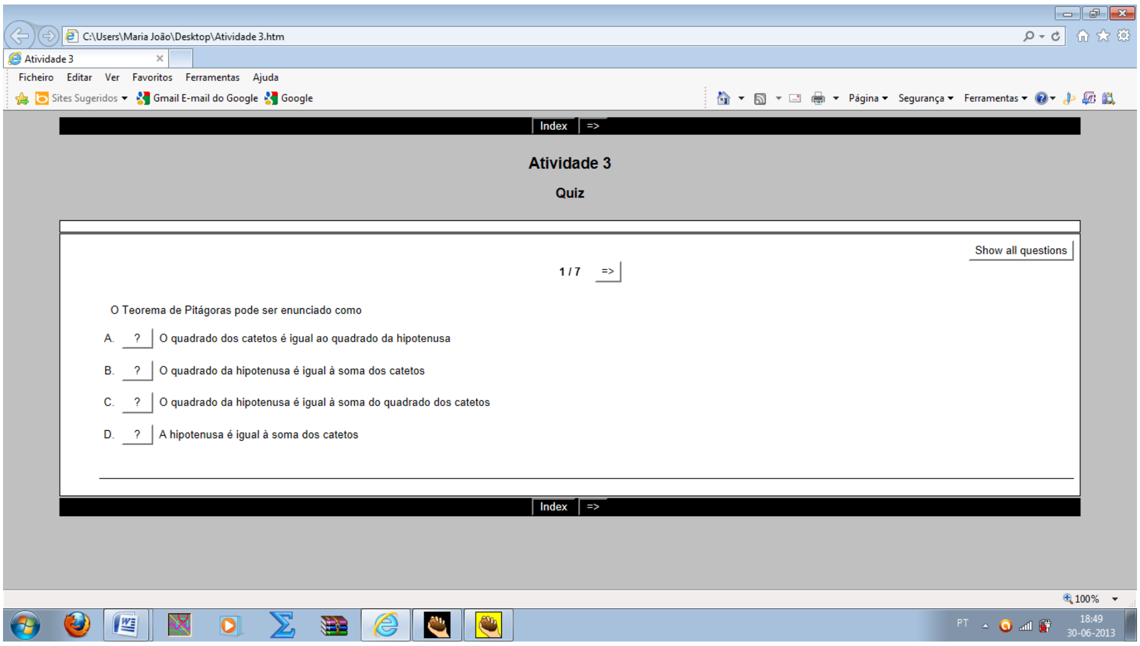
Questão 5



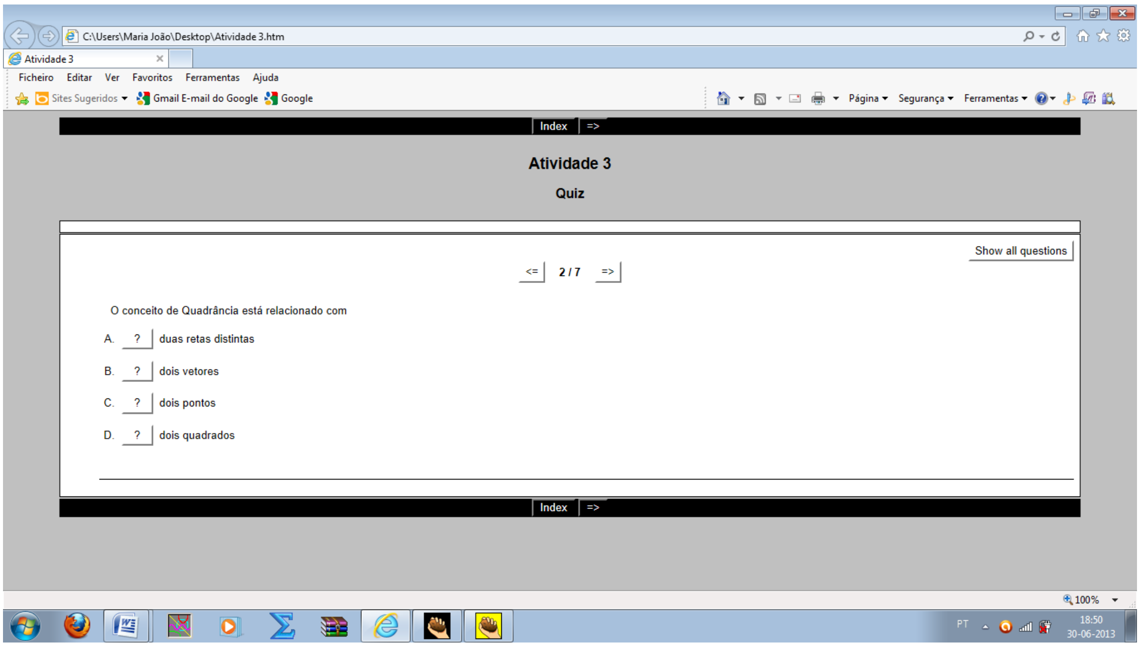
Questão 6



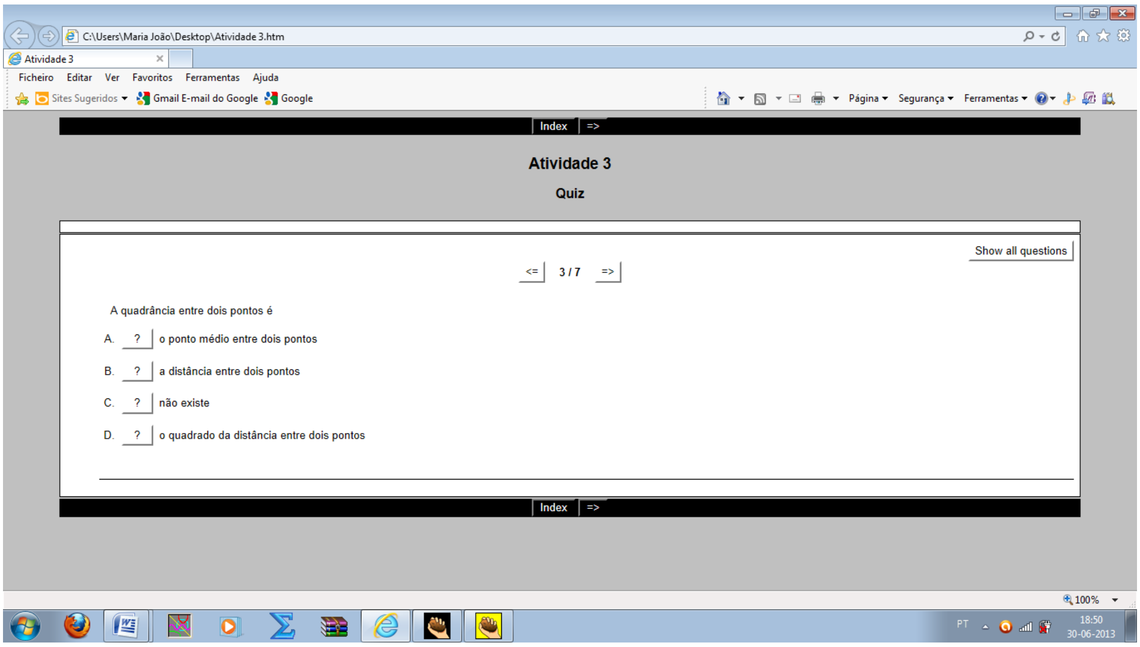
Questão 7



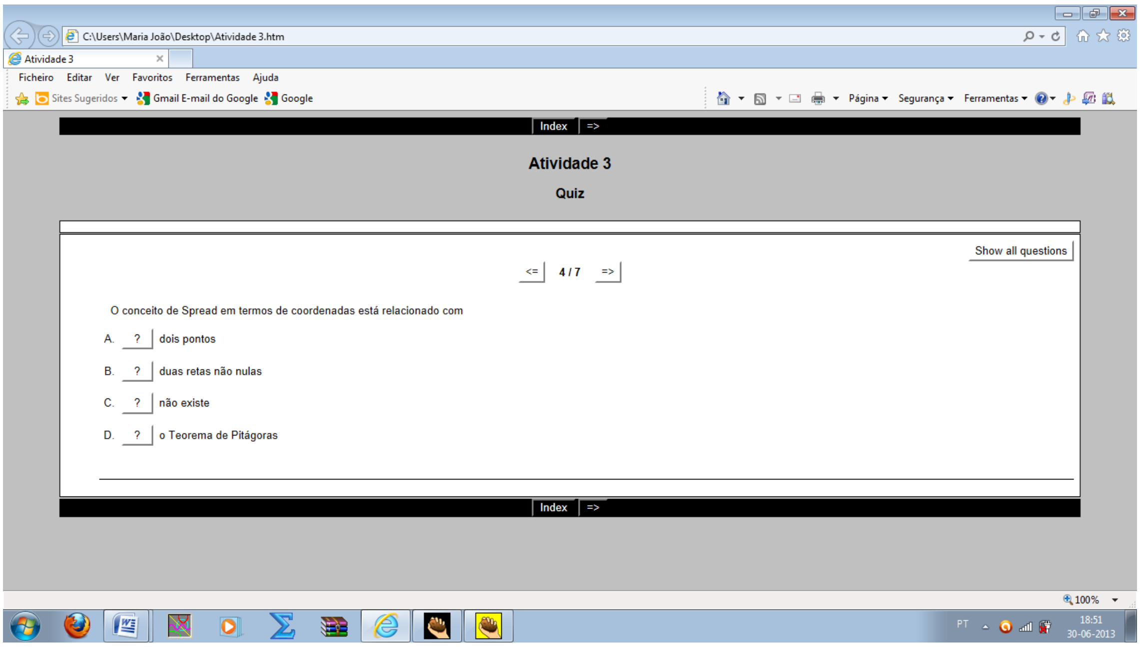
Questão 1 a apresentar aos alunos



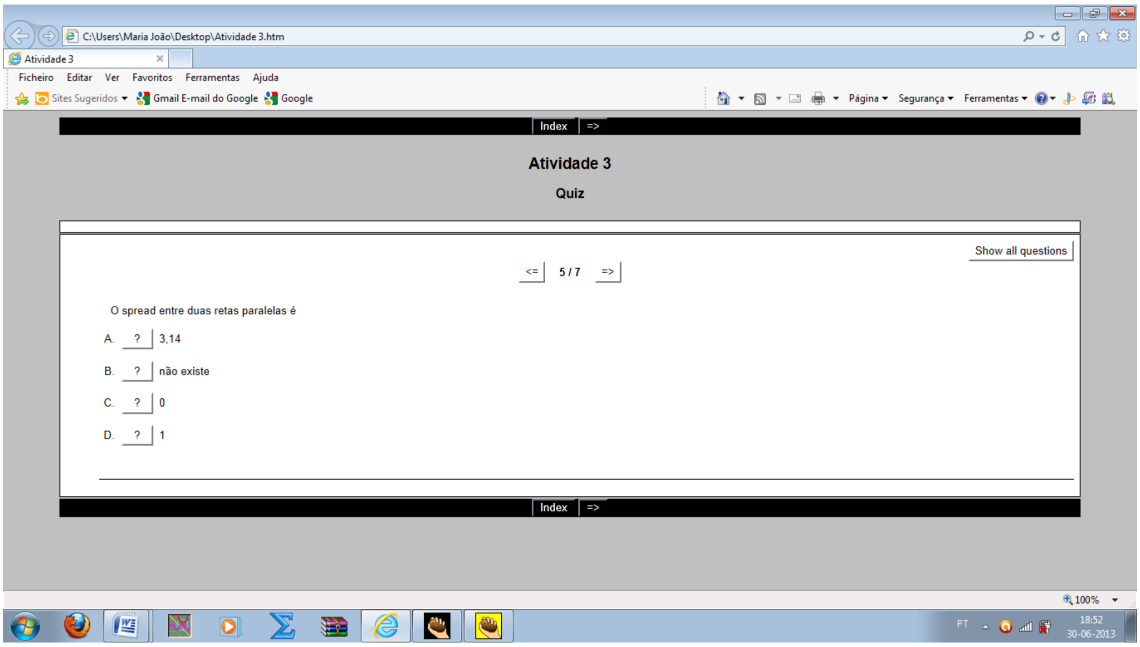
Questão 2 a apresentar aos alunos



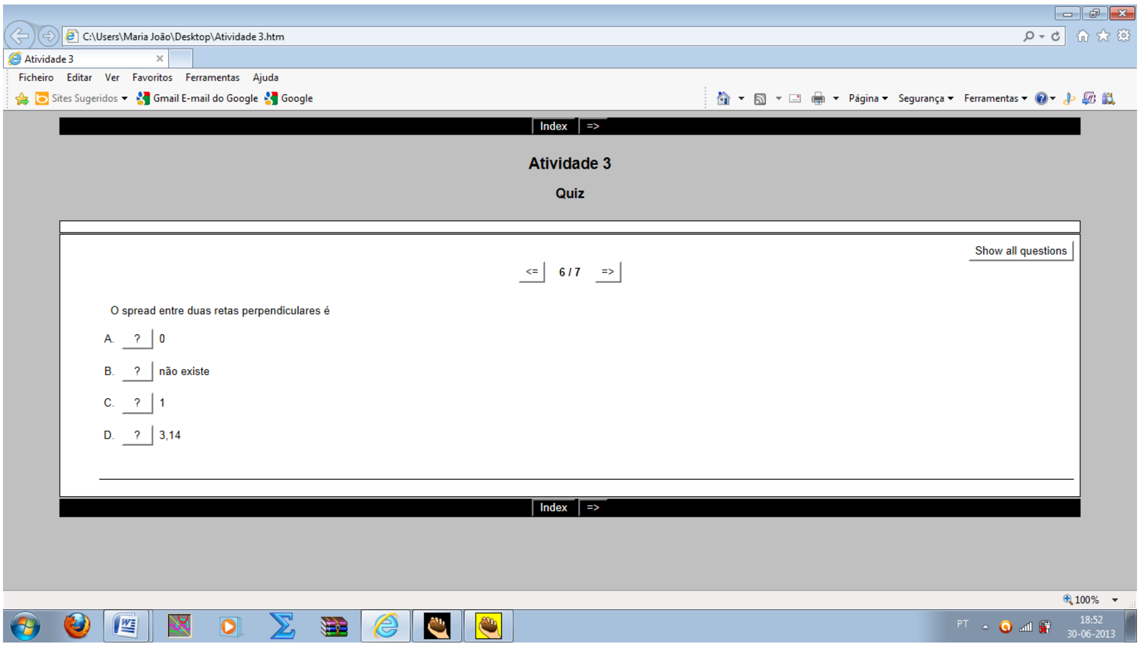
Questão 3 a apresentar aos alunos



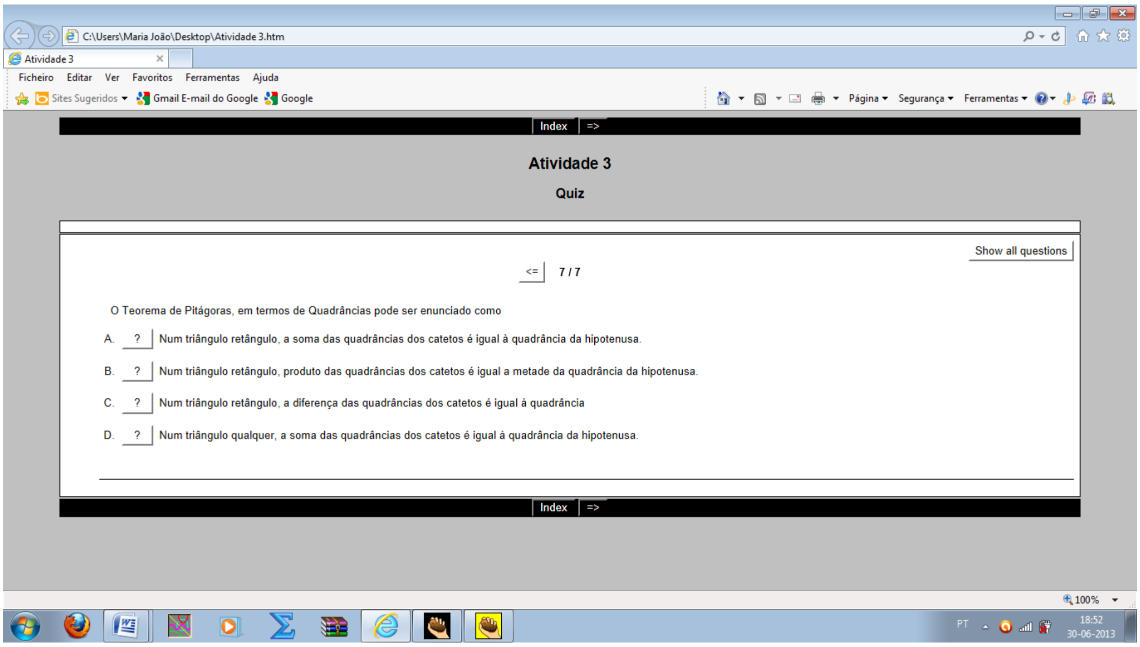
Questão 4 a apresentar aos alunos



Questão 5 a apresentar aos alunos



Questão 6 a apresentar aos alunos



Questão 7 apresentada aos alunos

Estas imagens foram obtidas no ficheiro C:\Users\Maria João\Desktop\Atividade 3.htm. A lacuna da parte pedagógica deste trabalho reside na não experimentação das atividades propostas. No entanto poderá vir a ser útil no futuro aos docentes interessados em utilizar este material, caso pretenda introduzir o tema Trigonometria Racional no contexto sala de aula.

Reflexões finais

"*Seria possível dizer o que é a Matemática se esta fosse uma ciência morta. Mas a Matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje, mais do que nunca, em rápido desenvolvimento, proliferando cada vez mais em novos ramos, que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência.*"

José Sebastião e Silva

Ao realizar o presente trabalho, várias questões me surgiram relativamente a esta nova abordagem da Trigonometria, ou seja a Trigonometria Racional. Será que esta nova abordagem, vem revolucionar o estudo da Trigonometria Clássica?

Por um lado achei curioso apreender os conceitos de quadrância entre dois pontos e o de spread entre duas retas não vazias, dado que o conceito de quadrância evita o recurso à raiz quadrada e a definição de spread em coordenadas torna facilmente calculável o seu valor.

No entanto, na minha humilde opinião sobre o que tive oportunidade de estudar do tema Trigonometria Racional, penso que se trata de uma abordagem interessante, porém penso que Trigonometria sem as funções trigonométricas sabe a pouco...

Não quero deixar de afirmar que foi uma boa oportunidade para aprender Trigonometria Racional, pois como eterna aprendiz da Matemática acho que estudar matemática é sempre gratificante.

Bibliografia

[1] http://pt.wikipedia.org/wiki/Trigonometria

[2] Wildberger, N. J. ; *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*, Wild Egg Books, Sydney, 2005, http://wildegg.com.

[3] M. Ossman, ‘Print a Protractor’, download online at http://www.ossmann.com/protractor/

[4] Gilsdorf, Michael – A comparison of Rational and Classical Trigonometry – March 2, 2006

[5] Matemática A 10 – Parte I - Jorge, Ana Maria Brito; Alves, Conceição Barroso; Cruchinho Cristina; Fonseca Graziela; Barbedo, Judite; Simões, Manuela; página 171 – Exercício 1

[6] Programa Matemática A -10º ano e 11º ano http://www.matematica.com.pt/page/Novos-Programas-de-Matematica.aspx

[7] http://www.geogebra.org

[8] http://hotpot.uvic.ca/

Anexos

Apresentam-se de seguida os anexos:

- Figuras A,B e C relativos ao transferidor convencional, transferidor decimal do spread e transferidor fracionário do spread
- Ficha de Trabalho 1 relativa à atividade 1
- Ficha de Trabalho 2 relativa à atividade 2