“Tópicos de Geometria do 3º ciclo sob um ponto vista avançado”

Ricardo Manuel Vieira Dinis Faustino

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

"Tópicos de Geometria do 3º ciclo sob um ponto vista avançado"

Ricardo Manuel Vieira Dinis Faustino

Relatório para a obtenção do Grau de Mestre em Ensino

da Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Júri:

Presidente: Maria do Céu Marques Pinto

Orientador: Natália Isabel Quadros Bebiano Pinheiro da Providência e Costa

Vogal: Susana Margarida Pereira da Silva Domingues de Moura

Data: Julho de 2012

Í n d i c e

1- Introdução

“A proof is a sequence of formulae each of which is either an axiom or follows from earlier formulae by a rule of inference”.

(Hilbert 1930)

O objetivo da primeira parte deste trabalho, Projeto Educacional I, consiste em apresentar a demonstração do Teorema de Pitágoras dos Elementos de Euclides, na 47ª proposição do livro I, e a chamada “demonstração Chinesa”, seguindo o método Hilbertiano.
Na segunda parte, Projeto Educacional II, pretende-se, através da aplicação de uma ficha de trabalho, desenvolver nos alunos a capacidade de compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros e ainda que estes sejam capazes de compreender e demonstrar o Teorema de Pitágoras. Faz-se ainda referência ao recíproco deste teorema, do qual não se apresenta a prova mas pretende-se que seja aplicado na resolução de problemas.

Tal como é reconhecido, a geometria é o ramo da matemática onde a problemática da prova poderá ser abordada mais prematuramente, uma vez que a demonstração pode ser suportada por uma imagem real. Atualmente, os alunos não estão familiarizados com nenhum método de prova, pois só é sugerido que se inicie no terceiro ciclo do ensino básico. Em nossa opinião será um pouco tardiamente.

Ao longo das várias reformas do programa de matemática, têm-se verificado diferentes sensibilidades para a importância da geometria. A corrente atualmente vigente defende que a mesma deve ter um papel importante “A geometria está também presente nos três ciclos e tem como ideia central o desenvolvimento do sentido espacial dos alunos”, *in programa de matemática, página 7.*

A importância da matemática, como disciplina primordial do ensino em Portugal, não é, e não foi diretamente assumida por nenhum responsável político nacional mas, tal como acontece como em Língua Portuguesa, foram instituídas, numa primeira fase, as provas de aferição, seguidas de Exame Nacional. O que devemos inferir desta opção política? Em nosso entender, deve-se ao reconhecimento do papel primordial destas áreas do saber na formação dos nossos alunos.

As provas internacionais a que temos sido sujeitos nos últimos anos, sendo disso exemplo o “Programme for International Student Assessment” (PISA), têm tido também um papel marcante na consciencialização da classe política para a importância da matemática. Os maus resultados que obtivemos nas primeiras participações fez “soar o alarme” do ensino desta disciplina. O que era preciso fazer para melhorar os resultados?

Hoje, tal como no passado, continuam a ouvir-se comentários que apontam a iliteracia em matemática como um mal social instalado que não é possível alterar. Mas essa realidade não é exatamente assim. Têm surgido ténues tentativas para contrariar essa mentalidade, no entanto, nunca foi até hoje feita uma aposta forte nesse sentido. Nos últimos anos, foram criados pela tutela alguns programas que procuraram melhorar a imagem da matemática junto da comunidade educativa, dando a ideia que havia alterações na metodologia, tendo por base novos materiais e a mudança de mentalidade por parte dos docentes. Foi disponibilizada muita formação ao nível da didática e também, fruto do Plano Tecnológico, no campo das novas tecnologias. Mas será que começou a ocorrer a mudança esperada?

Ao lermos algumas obras da primeira parte do século XX, percebe-se que havia dificuldade em “mostrar” as figuras geométricas. No passado, os manuais foram considerados “mudos” mas, hoje em dia, ainda o são mais. Perdeu-se o encadeamento lógico que o texto nesses livros antigos proporcionava.

Ao fazermos uma análise dos manuais escolares que têm existido na última década, verifica-se que os temas matemáticos aparecem quase sempre sem ligação entre eles, havendo muitas imagens sem conteúdo. Nos últimos anos, tem-se assistido a uma crescente preocupação em relacionar a matemática a vários contextos sociais, contudo, tal não tem sido fácil de implementar, pois passaram-se muitos anos a “trabalhar e treinar” algoritmos sem qualquer outra preocupação. Mais ainda, muitas das ilustrações da vida real são artificiais As provas praticamente não existiam. Atualmente, começam a surgir algumas demonstrações, mas continua a não haver uma ligação estreita entre todos os resultados, aparecendo passagens sem quaisquer referências a outros resultados existentes no manual.

Com o desenvolvimento da ciência, foram abertas outras janelas. As tecnologias de informação e comunicação (TIC) surgiram como parceiras privilegiadas dos livros, pois vieram trazer cor, som, luz e animação praticamente a todas as áreas do saber e, em especial, à matemática. Presentemente abandou-se a ideia de “manual” e surgiu conceito de "projeto" que apresenta, para além do manual em suporte de papel e outro em suporte informático, um caderno de exercícios e outros materiais. Qual seria o professor que há setenta anos não gostaria de ter a possibilidade de mostrar aos seus alunos, por exemplo, todos os sólidos Platónicos, apenas com um clique? Hoje isso é uma realidade. Mas afinal algo de essencial mudou ao nível das aprendizagens no sentido de uma clara melhoria?

Palavras Chave: Mestrado, Ensino, Euclides, Pitágoras, Geometria

Abstract

The aim of the first part of this work, Educational Project I, is to present a demonstration of the Pythagorean Theorem of Euclid's Elements, in the 47th proposition of Book I, and the so-called "Chinese demonstration", following the Hilbert method. In the second part, Educational Project II, it is intended, through the application of a worksheet, to develop in students the ability to compose and decompose polygons using triangles and quadrilaterals and even if they are able to understand and to demonstrate the Pythagorean Theorem. The reciprocal of this theorem is also referred of which prof is not presented but it is intended to be applied to solve problems.

Keywords: Master's Degree, Education, Euclid, Pythagoras, Geometry

2- Projeto Educacional I

Começamos por apresentar uma axiomática para a Geometria Euclidiana.

Vamos supor dado um conjunto π a que chamaremos ***plano*** e a cujos elementos chamaremos ***pontos***. Supor-se-á ainda dado um subconjunto não vazio do conjunto das partes de π, P(π), cujos elementos não serão conjuntos singulares e nenhum deles será π. A essas partes de π chamaremos ***rectas***.

Definição 1:

O ***plano*** π diz-se ***afim*** se:

a) dados dois pontos distintos, existir uma e uma só recta que os contenha.

b) dados uma recta *l* e um ponto $p \notin l$, existe uma e uma só recta l' contendo *p* e tal que $l \cap l' = \phi$

Axioma 1:

Dados dois pontos distintos de π, há uma e uma só recta de π que os contém.

Axioma 2:

Existe uma aplicação $d: \pi \times \pi \rightarrow$R, chamada ***distância***, tal que:

a) $d(x, y) \geq 0$ e $\mathrm{d(x, y)} = 0$ sse *x*=*y*,

b) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria) quaisquer que sejam $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \pi$.

Axioma 3 (existência de régua)

Qualquer que seja a recta *l*, existe uma bijecção $\phi: l \rightarrow R$ tal que, para $p, q \in l$, $d(p, q) = |\phi(p) - \phi(q)|$, em que |...| designa o módulo.

A $\phi(x)$ chama-se ***coordenada de x***.

Definição 2:

Dados uma recta l, $p, q \in l$ distintos, o ***segmento*** $\overline{pq}$ é o conjunto $\{x \epsilon l: 0 \leq \Phi(x) \leq \Phi(q)\}$, em que Φ é a régua tal que $\Phi(p) = 0, \Phi(q)$>0.

Definição 3:

Sejam l uma recta e $p \in l.$ Seja ϕ uma régua para *l* tal que $\Phi(p) = 0$. Os ***raios*** (ou ***semi-rectas***) determinados por (ou com origem em) *p* são conjuntos $\{x\epsilon l : \Phi(x) \geq 0\}$ $(\text{respectivamente}, \leq 0)$.

Axioma 4 (***semiplanos***)

Uma recta *m* no plano π dá origem a dois subconjuntos π_1 e π_2, cuja união é π e cuja intersecção é *m*.

Dados $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \pi$, p e q pertencem ao mesmo subconjunto π_1 ou π_2 se $\overline{\mathrm{pq}} \cap \mathrm{m} = \phi$, $\overline{\mathrm{pq}} \subset \mathrm{m}$ ou $\overline{pq} \cap m = \{p\}$ ou $\{\mathrm{q}\}$.

$\pi_{1,}\pi_2$ são os semi-planos fechados determinados por *m.*

Considere-se duas semi-rectas $r_{1,}r_2$, com a mesma origem *p*, que não coincidam nem sejam opostas, isto é, que a sua união não seja uma recta.

Cada recta determinada pelas semi-rectas dá origem a dois semiplanos fechados. Desses semiplanos nós vamos escolher dois. Para a recta determinada por r_1 (r_2), consideramos o semiplano fechado que contém r_2 (r_1).

Definição 4:

Um dos ***ângulos de vértice p*** e lados $r_{1,}r_2$ é a intersecção (convexa) dos semiplanos acabados de referir.

O outro ângulo é a união de $r_1 \cup r_2$ com a região complementar da região referida no parágrafo anterior. Os lados e o vértice são, ainda, $r_{1,}\ r_2$ e p .

Axioma 5:

A cada ângulo corresponde uma medida em graus não negativa. Um ângulo raso medirá 180°.

Se tivermos um ângulo $\angle A_1OA_2$, uma semi-recta com origem O, nele contida e distinta dos lados, e A um outro ponto qualquer da semi-recta então esta dá origem a dois ângulos contidos no inicial e $m(\angle A_1OA) + m(\angle AOA_2) = \mathrm{m}(\angle A_1OA_2)$,

onde ***m*** significa ***medida***.

Axioma 6: (transferidor)

Dados um semiplano fechado e um ponto na recta que o determina, existe uma bijecção ϕ entre o conjunto dos raios com origem em *p* e contidos no semiplano e [0º, 180º].

ϕ é tal que $|\phi(r_1) - \phi(r_2)|$ é a medida em graus do ângulo $\angle r_1 \mathrm{p} r_2$, contido no semi-plano.

A $\phi(x)$ chamaremos ***transferidor***.

Definição 5:

Dois ***ângulos*** são ***suplementares*** se a soma das suas medidas é 180°.

Definição 6:

Um ***ângulo*** é ***recto*** se a sua medida é 90°.

Definição 7:

Dois **segmentos de recta**, $\overline{p_1q_1}$, $\overline{p_2q_2}$ são **congruentes** se tiverem o mesmo comprimento, isto é, se $d(p_1, q_1) = d(p_2, q_2)$.

Escreveremos $\overline{p_1q_1} \equiv \overline{p_2q_2}$.

Definição 8:

Um ***triângulo*** consta de três vértices (A,B,C), três pontos não colineares, e três lados, os segmentos de recta obtidos tomando os vértices dois a dois.

Escreveremos, por exemplo, $\Delta\mathrm{ABC}$.

Definição 9:

Um **triângulo** é ***isósceles*** se tiver dois lados congruentes. Ao outro lado chama-se ***base***.

Definição 10:

Os ***triângulos*** ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são ***congruentes***, escrevendo-se $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, se existir uma bijecção $\phi: \{A, B, C\} \rightarrow \{A', B', C'\}$ tal que lados e ângulos correspondentes são congruentes.

Axioma 7: (LAL)

Dados ΔABC, $\Delta A'B'C'$, se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ então $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

Axioma 8: (ALA)

Dados ΔABC, $\Delta A'B'C'$, se $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ e $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ então $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.

Definição 11:

Sejam ΔABC um triângulo e *D* um ponto na recta que contém $\overline{AB}$.

Se *D* é o ponto médio de $\overline{AB}$ então $\overline{CD}$ é a ***mediana*** do triângulo relativamente ao lado $\overline{AB}$.

Se *D* é tal que a recta determinada por *C* e *D* e a recta determinada por *A* e *B* são perpendiculares então $\overline{CD}$ é a ***altura*** do triângulo relativamente a $\overline{AB}$.

Definição 12:

Dados $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n) \in R^n$, $(x_1, \dots, x_n)$ é **directamente proporcional** a $(y_1, \dots, y_n)$ se $\frac{x_1}{y_1} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

Escrever-se-á $(x_1, \dots, x_n) \simeq (y_1, \dots, y_n)$ e qualquer daqueles quocientes é a **razão de proporcionalidade**.

Definição 13:

Dados dois triângulos, uma semelhança é uma bijecção entre os conjuntos de vértices tal que ângulos correspondentes são congruentes e os ternos das medidas dos lados correspondentes são directamente proporcionais.

Dois **triângulos** são **semelhantes** se existir uma semelhança entre os conjuntos dos seus vértices. A existência de uma semelhança será indicada pelo símbolo $\simeq$.

Definição 14:

No plano π , a ***recta*** l_1, é ***paralela*** à recta l_2 se $l_1 = l_2$ ou $l_1 \cap l_2 = \emptyset$. Representando-se por $l_1 \parallel l_2$.

<u>Axioma 9:</u> (Axioma das paralelas)

Dados uma recta l e um ponto $p \notin l$, existe uma e uma só recta l_1 paralela a l tal que p lhe pertence.

<u>Definição 15:</u>

Uma ***região poligonal*** é um subconjunto do plano que pode ser expressa como uma união finita de regiões triangulares tais que, se duas delas se intersectarem, a intersecção é um vértice ou um lado comum.

Recordemos que um ***paralelogramo*** é um quadrilátero de lados opostos paralelos. Se todos os ângulos forem rectos temos um ***rectângulo***. Se, adicionalmente, os quatro lados forem congruentes temos um ***quadrado***.
Na realidade, pode definir-se rectângulo como um quadrilátero em que as rectas contendo lados consecutivos são perpendiculares.

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as regiões poligonais no plano.

<u>Axioma 10:</u>

Existe uma aplicação $A: \mathcal{P} \to \mathcal{R}$, chamada ***área***, tal que:

a) A(P) > 0, para qualquer $P \in \mathcal{P}$,

b) Se dois triângulos são congruentes, as respectivas regiões triangulares têm a mesma área,

c) Se duas regiões poligonais se não se intersectam ou a intersecção ocorre apenas em lados ou vértices comuns, a área da sua união é a soma das áreas,

d) Uma região quadrada de lado medindo *a* tem por área a^2.

<u>Definição 16:</u>

A ***circunferência de centro p e raio r***, C, é o conjunto $\{x \in \pi : d(x,p) = r\}$

<u>Definição 17:</u>

Se C é uma circunferência e *p* e *q*, pontos distintos, pertencem a C então o segmento $\overline{pq}$ é uma ***corda***.

Se uma corda passa pelo centro da circunferência então temos um **diâmetro**.

Definição 18:

Uma ***recta*** l é ***tangente a uma circunferência*** se $C \cap l$ for um conjunto unitário $\{p\}$. p é o ponto de tangência ou ponto de contacto.

Definição 19:

A ***bissectriz*** de $\angle \mathrm{ABC}$ é a semi-recta de origem *B,* contida no ângulo, que dá origem a dois ângulos congruentes.

Definição 20:

Sejam dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ tais que qualquer semi-recta OM, com origem em O, os encontre nos pontos M e M' de modo que $\frac{d(\overline{OM})}{d(\overline{OM'})} = r$, sendo r um valor constante o qual é designado por ***razão da homotetia.***

Duas figuras nestas condições designam-se por ***homotéticas***.

Os pontos correspondentes são chamados de ***homólogos***.

Apresenta-se, de seguida, algumas propriedades e respectivas demonstrações para as quais se recorreu aos axiomas que foram enunciados.

Proposição 1

Se $\boldsymbol{l_1}$ *e* $\boldsymbol{l_2}$ são rectas distintas em π então $l_1 \cap l_2 = \phi$ ou $l_1 \cap l_2$ reduz-se a um ponto.

Demonstração

Se na intersecção houvesse mais do que um ponto então as rectas não seriam distintas.

Proposição 2

Sejam *p, q e r* três pontos distintos e colineares. Então um e um só dos pontos está entre os outros dois. Isto é, pertence ao segmento determinado pelos outros dois.

Demonstração:

Seja Φ a régua tal que $\Phi(p) = 0$, $\Phi(q) > 0$.

Se $0 < \Phi(r) < \Phi(\mathrm{q})$ então $r \in \overline{pq}$. Se $0 < \Phi(q) < \Phi(\mathrm{r})$ então $q \in \overline{pr}$. Por fim se $\Phi(r) < 0 < \Phi(\mathrm{q})$ então $p \in \overline{rq}$.

Suponhamos agora que *r* está ente *p* e *q.* Seja Φ definido como na demonstração anterior.

Usando a régua Φ, $\overline{rq} = \{x \in l : \Phi(\mathrm{r}) < \Phi(x) < \Phi(\mathrm{q})\}$ e $\overline{pr} = \{x \in l : 0 < \Phi(x) < \Phi(\mathrm{r})\}$. Portanto $p \notin \overline{rq}$ e $q \notin \overline{pr}$.

Proposição 3

Dado um segmento $\overline{pq}$, existe nele um e um só ponto *m* tal que $\mathrm{d}(p, m) = \mathrm{d}(q, m)$. *m* é o ***ponto médio*** de $\overline{pq}$.

Demonstração:

Seja Φ a régua, para a recta determinada pelos dois pontos, tal que $\Phi(p) = 0, \Phi(q) > 0$ e suponhamos que $\Phi(q) = a$.

Considere-se $\frac{a}{2}$. Existe m tal que $\Phi(m) = \frac{a}{2}$. Como $d(p,m) = d(p,q) = |\phi(m) - \phi(p)| = \frac{a}{2}$ e, de modo idêntico, $d(q,m) = \frac{a}{2}$, o ponto m está nas condições pretendidas.

Para provar a unicidade, seja m', tal que $d(p,m') = d(q,m')$. Se a coordenada de m' for x, ter-se-á $x = a - x$. Assim, $x = \frac{a}{2}$ e $m = m'$.

Proposição 4

Dados uma recta *l* e um ponto $P \in l$, existe uma e uma só recta que passa por *P* e é perpendicular a *l*.

Demonstração:

Seja l_1 uma das semi-rectas de *l*, com origem *P*. Com base em *l* e *P* consideremos um transferidor ϕ. Sem perda de generalidade, podemos considerar $\phi(l_1) = 0$.

Existe um raio *r*, emanado de *p*, tal que $\phi(r) = 90º$. Então $m(\angle l_1 pr) = 90º$. Assim, a recta *l* e a recta contendo *r* são perpendiculares.

Suponhamos agora que r_1, r_2 são rectas que passam por *P* e perpendiculares a *l*. Consideramos um dos semiplanos fechados determinado por *l*. As intersecções de r_1 e r_2 com esse semiplanos são raios r_1', r_2' com origem em *P*.

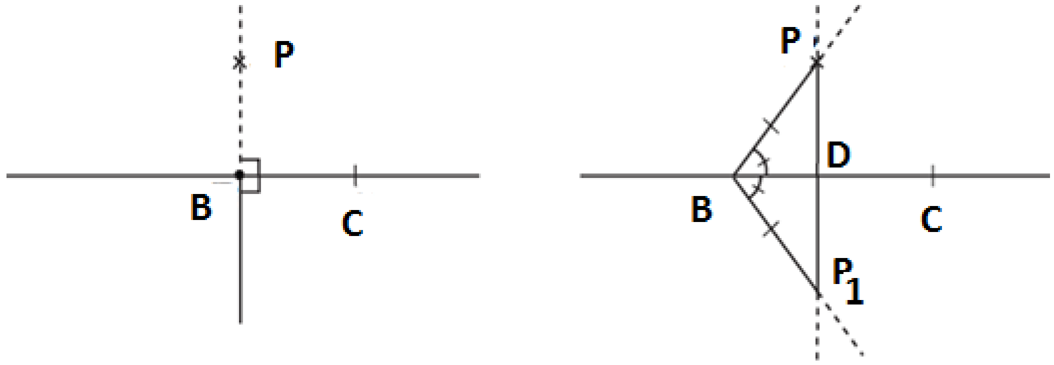
Usando um transferidor ϕ, para as semi-rectas que têm *P* por origem e estão no semiplano considerado, tal que $\phi(l_1) = 0$, temos então $\phi(r_1') = \phi(r_2') = 90º$. Como ϕ é injectiva, os raios r_1', r_2' coincidem, o mesmo acontecendo com r_1 e r_2.

Proposição 5

Dados uma recta e um ponto fora dela, pelo ponto passa uma e uma só recta perpendicular à recta dada.

Demonstração:

Sejam *m* a recta e *P* o ponto. Em *m* consideremos dois pontos *B* e *C*, este último por uma questão de notação apenas.



No semiplano determinado por *m* que não contém *P*, tracemos um raio *r* com origem *B* e tal que o ângulo de vértice *B* e lados o raio acabado de referir e o raio com origem *B* e contendo *C* seja congruente com $\angle PBC$.

Se os lados distintos dos dois ângulos formarem uma recta, essa recta é perpendicular a *m*.

Se tal não acontecer, sobre *r*, marquemos P_1, com $\overline{BP_1} \equiv \overline{BP}$.

O segmento $\overline{PP_1}$ intersecta *m* num ponto *D*, distinto de *B*, e os triângulos $\Delta\mathrm{BDP}$, $\Delta\mathrm{BD}P_1$ são congruentes. Segue-se que $\angle BDP \equiv \angle BDP_1$ e, portanto, a recta determinada por *P* e P_1 é perpendicular a *m*.

A figura ilustra apenas a situação em que *C* e *D* estão na mesma semi-recta de *m* com origem em *B*. O tratamento da situação em que tal não ocorre não levanta dificuldades.

A unicidade resulta de, se tivéssemos duas rectas, distintas, perpendiculares a *m* e passando por *P,* ficarmos com um triângulo com dois ângulos rectos.

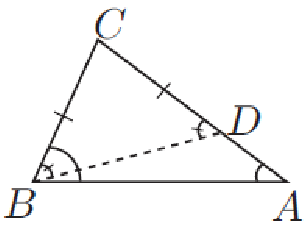
Proposição 6

Se num triângulo dois lados não são congruentes Então os ângulos opostos também o não são e ao lado maior opõe-se o maior ângulo.

Demonstração:

A primeira parte de enunciado é consequência de um resultado sobre triângulos isósceles.

Consideremos $\Delta\mathrm{ABC}$ e suponhamos $d(B,C) < d(A,C)$.



Na semi-recta com origem em *C* e contendo *A*, considere-se *D* tal que $\overline{\mathrm{BC}} \equiv \overline{\mathrm{CD}}$.

Como a semi-recta de origem *B* e contendo *D* está contida em $\angle\mathrm{CBA}$, $\mathrm{m}(\angle\mathrm{CBA}) > m(\angle\mathrm{CBD})$. Como o triângulo ΔBDC é isósceles, $\mathrm{m}(\angle\mathrm{CBD}) = \mathrm{m}(\angle\mathrm{BDC})$ e este, sendo o ângulo externo em *D* do triângulo ΔBDA, tem medida superior à de $\angle\mathrm{BAC}$. Portanto, $\mathrm{m}(\angle\mathrm{CBA}) = \mathrm{m}(\angle\mathrm{BAC})$.

Proposição 7

Se uma recta corta, isto é, intersecta em apenas um ponto, uma de duas rectas paralelas distintas então também corta a outra.

Demonstração:

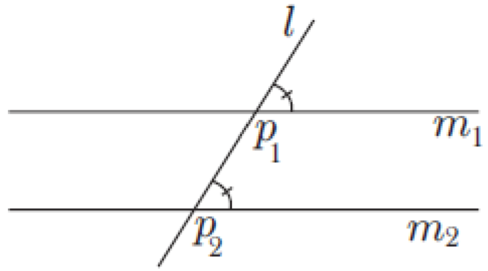
Suponhamos $l_1 \parallel l_2$ e que *m* corta l_1 em *p*.

Se *m* não intersectasse l_2 então por *p* passavam duas paralelas a l_2, distintas. A intersecção reduz-se a um ponto, pois l_1 e *m* são distintas.

Proposição 8

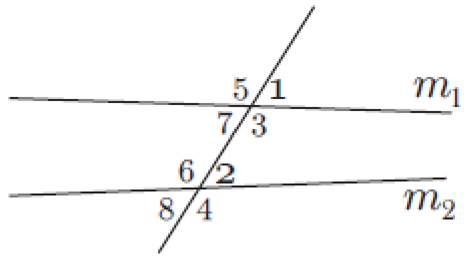
Sejam m_1, m_2 cortadas por uma mesma recta em pontos distintos, p_1, p_2, respectivamente. Se os ângulos indicados na figura seguinte forem congruentes então $m_1 \parallel m_2$.

Demonstração:



Se $m_1 \cap m_2$ fosse $\{P\}$ então teríamos um triângulo, $\Delta P_1 P_2 P$, em que um ângulo externo era congruente com um ângulo interno não adjacente.

Suponhamos agora que temos duas rectas, $m_1,\ m_2$, distintas e cortadas, em pontos distintos, por uma terceira recta, conforme a figura.



Os ***ângulos*** de cada um dos pares $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, $\{5,6\}$, $\{7,8\}$, dizem-se ***correspondentes***.

Proposição 9

Se os ângulos designados por 2 e 3 forem suplementares então $m_1 \parallel m_2$.

Proposição 10

Se, ao cortarmos, em pontos distintos, duas rectas, $m_1,\ m_2$, por uma outra recta, os ângulos correspondentes forem congruentes então $m_1 \parallel m_2$.

Proposição 11

Se duas rectas, distintas e paralelas, são cortadas por uma outra recta então os ângulos correspondentes são congruentes.

Demonstração:

Designemos as duas rectas por m_1 e m_2, por *n* a terceira recta e admitamos que esta corta as outras duas em $p_1,\ p_2$, respectivamente.

Por p_1 façamos passar m_3 tal que os ângulos formados por *n* e m_3 sejam congruentes com os ângulos formados por *n* e m_2.

Por **(P10)**, $m_2 \parallel m_3$. Como $m_1 \parallel m_2$ e $p_1 \in m_1 \cap m_3$, o axioma das paralelas **(A9)** implica $m_1 = m_3$ e os ângulos correspondentes são congruentes.

Proposição 12

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Demonstração:

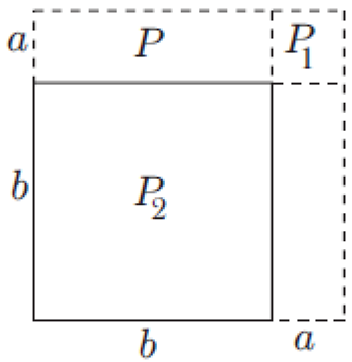
Considere-se o triângulo ΔABC e por *C*, por exemplo, faça-se passar uma recta paralela à recta determinada por *A* e *B*. Pela **(P11)**, o resultado é óbvio.

Proposição 13

Dada uma **região rectangular** com lados de comprimentos *a* e *b*, a sua área é ab.

Demonstração:

A partir do rectângulo, construa-se um quadrado de lado $a + b$.



Então, de $(a+b)^2 = A(P_1) + A(P_2) + 2A(P)$, obtém-se o resultado.

<u>Proposição 14</u> (área de um triângulo qualquer)

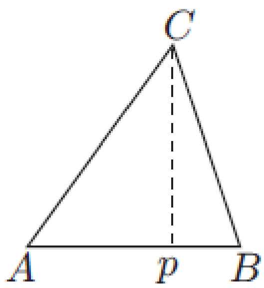
A **área de um triângulo qualquer** é metade do produto do comprimento de um qualquer lado pela altura relativamente a esse lado.

Demonstração:

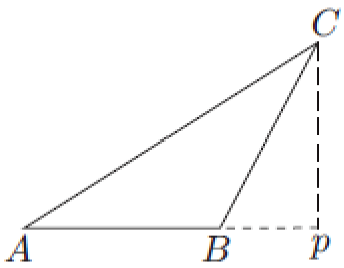
Consideremos o triângulo ΔABC e considere-se o lado $\overline{\mathrm{AB}}$. Por *C* faça-se passar a perpendicular à recta determinada por *A* e *B*. Seja *p* o ponto de encontro das duas rectas.

Se $p = A$ ou $p = B$, o triângulo é rectângulo e caímos na proposição 14.

Se p estiver, estritamente, entre *A* e *B* temos a situação da figura



Se p não pertencer a $\overline{\mathrm{AB}}$ temos a situação



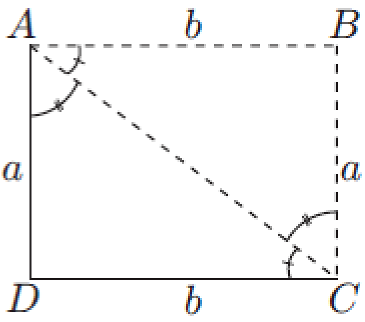
vê-se agora como obter o resultado.

<u>Proposição 15</u>

A área de um triângulo rectângulo de catetos a e b é $\frac{1}{2}ab$.

Demonstração:

Dado o triângulo, complete-se de forma obter-se um rectângulo de lados medindo *a* e *b.*



Os dois triângulos indicados são congruentes tendo, portanto, a mesma área. O resultado é imediato.

Proposição 16

A **área de um paralelogramo** é igual ao produto do comprimento de um lado pela altura relativamente a esse lado (a altura obtém-se, por exemplo, fazendo passar por um vértice não pertencendo ao lado dado a perpendicular à recta determinada pelo lado. O (comprimento do) segmento determinado pelo vértice e o ponto de encontro das duas rectas é a altura).

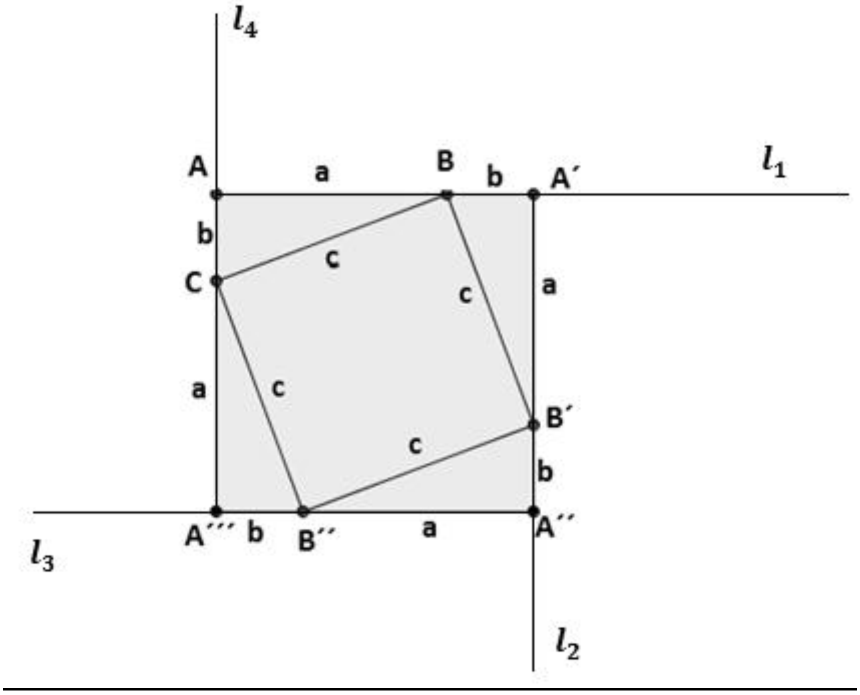
Demonstração:

Seja *ABCD* o paralelogramo e considere-se o lado $\overline{AB}$.

Decomponha-se a região em duas regiões triangulares usando, por exemplo, $\overline{BD}$. Os triângulos obtidos são congruentes e o resultado é imediato.

<u>**Proposição 17**</u> (Teorema de Pitágoras)

Dado um triângulo rectângulo cujos catetos e hipotenusa medem, respectivamente, a, b e c, então $a^2 + b^2 = c^2$.



<u>Demonstração:</u>

Considere-se o triângulo ΔABC rectângulo em A e com $d(A, B) = a$ e $d(A, C) = b$. Defina-se a semi-recta l_1 com origem em A e que passe por B. Seja A´ o ponto de l_1 que $d(A', B) = b$ e que $B \in \overline{AA'}$. **(P2).**

Por A' passa uma recta perpendicular a l_1, digamos l_2. **(P4)**

Nesta recta existem dois pontos, A'' e B' tal que $d(A', A'') = a + b$, sendo $d(A', B') = a$, $d(B', A'') = b$ e $B' \in \overline{A'A''}$.

Defina-se a semi-recta l_4 com origem em A e que passe por C.

Seja P o ponto de intersecção de l_4 com l_3. Prova-se que $P = A'''$.

A recta l_4 é paralela a l_2 (duas rectas intersectadas por uma terceira, l_1 e os ângulos internos são congruentes). Assim l_4 é perpendicular a l_3.

$\Delta AA'A''$ é isósceles e portanto os ângulos $m(\angle A'AA'') = m(\angle A'A''A) = 45º$. Consequentemente $m(\angle A'''AA'') = m(\angle A'''A''A) = 45º$ e portanto $\Delta AA''A''' \equiv \Delta AA'A''$.

Verifica-se que $d(P, A'') = a + b$ de onde se conclui que $P = A'''$.

Deste modo obtém-se o quadrado $AA'A''A'''$, de lado $a + b$.

Pode-se afirmar que a sua área é $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2$. **(A10) (1)**

Definiam-se os triângulos $\Delta\mathrm{BA'B'}$, $\Delta\mathrm{B'A''B''}$ e $\Delta B''A'''C$ todos congruentes com $\Delta\mathrm{ABC}$. **(A7),** tendo de área $\frac{\mathrm{ab}}{2}$. **(P15) (2)**

As suas hipotenusas, que medem c, formam um quadrilátero.

Sabe-se que $m(\angle CBB') + m(\angle ABC) + m(\angle A'BB') = 180º$, **(P12),** mas $\angle A'BB' \equiv \angle ACB$, portanto $m(\angle ACB) + m(\angle ABC) = 90º$, logo $m(\angle CBB') = 90º$.

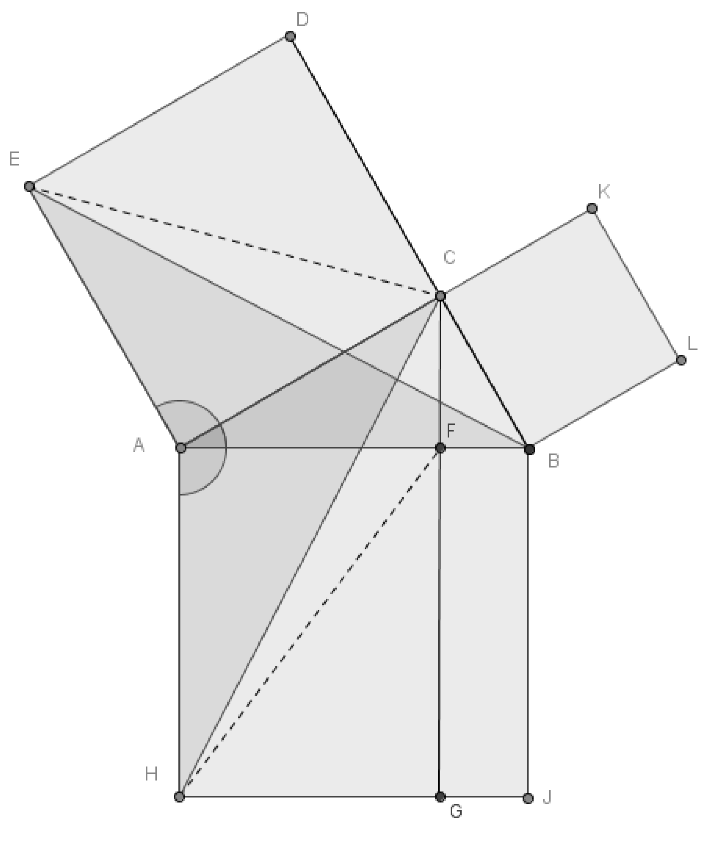
O mesmo raciocínio pode ser aplicado aos ângulos $\angle BB'B''$, $\angle B'B''C$ e $\angle B''CB$.

Logo o quadrilátero é um quadrado de área c^2. **(A10) (3)**

De (1), (2) e (3) resulta que:

$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2}$. De onde se conclui que $a^2 + b^2 = c^2$.

Apresenta-se, de seguida, a demonstração da “Cadeia da Noiva” de Euclides, também conhecida como prova chinesa do teorema de Pitágoras, seguindo o método Helbertiano.



Considere-se o triângulo rectângulo ΔABC.

Construa-se, seguindo-se o método usado na prova anterior, sobre o cateto $\overline{AC}$, o quadrado *[ACDE]* e sobre o cateto $\overline{CB}$ o quadrado *[LKBC]* e sobre hipotenusa o quadrado *[ABJH].* Trace-se ainda a recta perpendicular à hipotenusa, passando por *C*, **(P5)** definindo-se o ponto *F*, como sendo a intersecção da hipotenusa com a recta referida.

Defina-se o segmento $\overline{FG} \equiv \overline{AH} \equiv \overline{AB}$.

BD é uma recta paralela a *EA*. **(P9).**

Ligando-se *E* a *B* e *H* a *C* obtém-se:

$$\angle BAE \equiv \angle CAH \ e \ m(\angle CAH) = 90º + \alpha$$

Sabe-se também que:

$A(\Delta ABE) = A\left(\frac{1}{2}EACD\right)$. Uma vez que ambos possuem a mesma base e se encontram entre duas rectas paralelas $\overline{EA}$ e $\overline{DB}$ e, portanto, têm a mesma altura. Pela mesma razão, verifica-se ainda que:

$A(\Delta CAH) = A\left(\frac{1}{2}[AHGF]\right)$.

Pelo critério LAL **(A7)**, vem $\Delta ABE \equiv \Delta ACH$.

Assim,

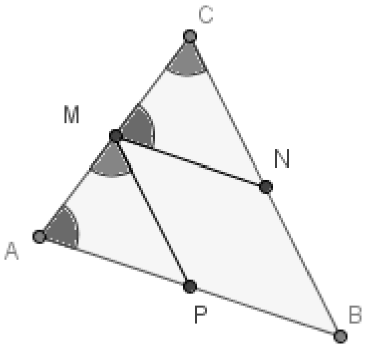
$\frac{1}{2}A([AECD]) = \frac{1}{2}A([AHGF])$.

Prova-se assim que $A([AECD]) = A([AHGF])$. De modo análogo se prova que $A([BCKL]) = A([BFGJ])$.

Consequentemente, $A([AECD]) + A([BCKL]) = A([AHJB])$.

Proposição 18

A paralela à base dum triângulo, tirada pelo ponto médio de um lado, passa também pelo ponto médio do outro.



Demonstração:

Pelo ponto médio de $\overline{AC}$, M, traçamos a paralela a $\overline{AB}$, $\overline{MN}$.

Onde N é o ponto de intersecção dessa recta com $\overline{CB}$.

Provemos então que *N* é ponto médio do lado $\overline{CB}$.

Tiremos por *M* uma paralela ao lado $\overline{CB}$ **(A9)** que intersectará $\overline{AB}$ no ponto *P*. os ângulos *A* e $\angle NMC$ são congruentes **(P11).** Pela mesma razão são congruentes também os ângulos *C* e $\angle PMA$; e como por hipótese, $d(\overline{CM})$=$d(\overline{AM})$, segue-se que os triângulos ΔCMN e ΔMAP são congruentes **(A8)**.

Logo $\overline{MP} \equiv \overline{CN}$.

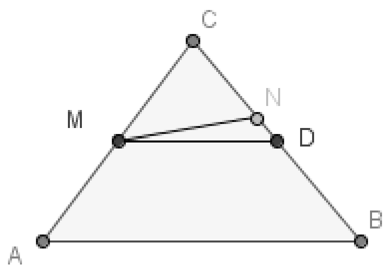
Por outro lado, $\overline{MP}$ e $\overline{NB}$ são segmentos de paralelas compreendidos entre paralelas e, portanto, congruentes, (uma vez que duas rectas paralelas são equidistantes em toda a sua extensão) isto é:

$\overline{MP} \equiv \overline{BN}$.

Assim: $\overline{NB} \equiv \overline{CN}$.

Proposição 19 (recíproco do anterior)

A reta que une os meios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado.



Demonstração:

Seja $\overline{MN}$ a reta que passa pelo ponto médio dos dois lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ e seja *D* o ponto de intersecção com $\overline{CB}$. Se esta recta não fosse paralela a $\overline{AB}$, poderíamos passar por *M* uma reta que o fosse **(A9)**.

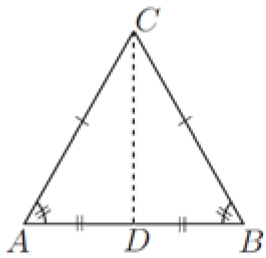
O ponto *D*, pelo teorema anterior, será também ponto médio de $\overline{CB}$ e este lado ficará com dois pontos médios, o que é absurdo. Logo $\overline{MN}$ é paralela a $\overline{AB}$.

Proposição 20

Se o ΔABC é isósceles então a mediana relativamente à base é também a altura relativamente à base e a semi-recta de origem em *C* contendo aquela mediana é a bissectriz do ângulo do triângulo de vértice *C.*

Demonstração:

Admita-se, sem perda de generalidade, que $\overline{AB}$ é a base do triângulo, e seja *D* um ponto médio de $\overline{AB}$. Vamos mostrar que $\Delta ADC \equiv \Delta BDC$ e que $\angle ADC$ é recto.

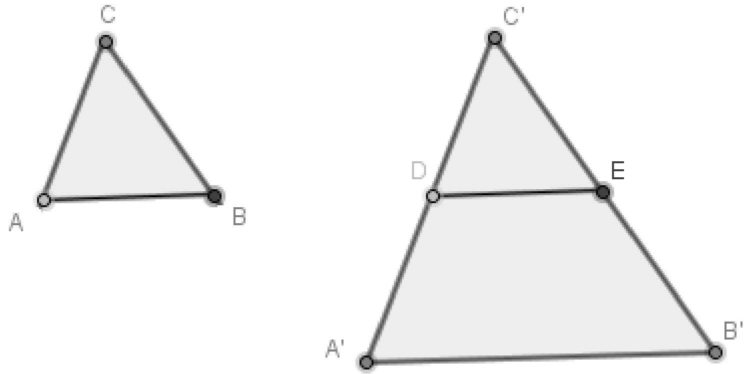


Por **(A7),** os dois triângulos são congruentes. Logo $\angle ACD \equiv \angle BCD$ e, também, $\angle ADC \equiv \angle BDC$. Como a soma das medidas destes dois últimos ângulos é 180º, cada um deles é recto.

Como os ângulos $\angle ACD$ e $\angle BCD$ são congruentes, a recta determinada por *C* e *D* é a bissectriz do ângulo de vértice *C* do triângulo dado.

A semelhança de triângulos

Na prova das três proposições seguintes deve-se ter em conta a seguinte figura.



Proposição 21 (AA)

Se $\Delta ABC,\ \Delta A'B'C'$ são tais que os ângulos de vértices em A e A´ são congruentes, acontecendo o mesmo nos ângulos B e B´, então $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$.

Demonstração:

Sabemos que todos os ângulos nos vértices são congruentes. **(P12)**

Considere-se, por construção, $\overline{C'E}$ e $\overline{C'D}$, tais que *D e E* estão, respectivamente, sobre $\overline{C'A'}$ e $\overline{C'B'}$.

Como o ângulo $\angle \mathrm{C'A'B'}$ é congruente ao angulo $\angle \mathrm{EDC'}$, as rectas contendo $\overline{A'B'}$ e $\overline{DE}$ serão paralelas**.(P8).** E teremos então:

$\frac{d(\overline{C'D})}{d(\overline{C'A'})} = \frac{d(\overline{C'E})}{d(\overline{C'B'})}$.

Logo *D* e *C* são homólogos respectivamente de *A´* e *B´* em relação a *C´.* consequentemente, os triângulos $\Delta DEC'$ e $\Delta A'B'C'$ são homólogos.

Como ΔABC, por construção, é congruente ao $\Delta DEC'$, temos que $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$.

Proposição 22 (LAL)

Se $\Delta ABC,\ \Delta A'B'C'$ são tais que os ângulos de vértices em A e A´ são congruentes e estão compreendidos entre lados proporcionais então $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$.

Demonstração:

Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dois triângulos, seja $\angle \mathrm{ACB} \equiv \angle \mathrm{A'C'B'}$, e $\frac{d(\overline{CA})}{d(\overline{C'A'})} = \frac{d(\overline{CB})}{d(\overline{C'B'})}$.

Por construção, marquemos, sobre os lados $\overline{C'A'}$ e $\overline{C'B'}$, respectivamente $\overline{C'D}$ e $\overline{C'E}$ tais que $d(\overline{C'D}) = d(\overline{CA})$ e $d(\overline{C'E}) = d(\overline{CB})$ **(1)**

Unamos os pontos *D* e *E*. por **(1)** temos que $\frac{d(\overline{C'D})}{d(\overline{C'A'})} = \frac{d(\overline{C'E})}{d(\overline{C'B'})}$.

Os triângulos $\Delta C'DE$ e $\Delta A'B'C'$ são homotéticos, uma vez que *D* e *E* são homotéticos de *A´* e *B´*. Mas, por construção, $\Delta C'DE$ é congruente com ΔCAB.

Assim, $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$.

Proposição 23 (LLL)

Se ΔABC, $\Delta A'B'C'$ são tais que os lados correspondentes são proporcionais então $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$.

Demonstração:

Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dois triângulos, tais que $\frac{d(\overline{CA})}{d(\overline{C'A'})} = \frac{d(\overline{CB})}{d(\overline{C'B'})} = \frac{d(\overline{BA})}{d(\overline{B'A'})}$.

Marquemos sobre os lados $\overline{C'A'}$ e $\overline{C'B'}$, respectivamente $\overline{C'D}$ e $\overline{C'E}$ tais que $d(\overline{C'D}) = d(\overline{CA})$ e $d(\overline{C'E}) = d(\overline{CB})$

Os triângulos $\Delta C'DE$ e $\Delta A'B'C'$ são homotéticos, consequentemente:

$\frac{d(\overline{C'D})}{d(\overline{C'A'})} = \frac{d(\overline{DE})}{d(\overline{A'B'})}$.

Por construção, $d(\overline{C'D}) = d(\overline{CA})$. Logo $\frac{d(\overline{CA})}{d(\overline{C'A'})} = \frac{d(\overline{DE})}{d(\overline{A'B'})}$.

Mas, por hipótese, $\frac{d(\overline{CA})}{d(\overline{C'A'})} = \frac{d(\overline{BA})}{d(\overline{B'A'})}$. Assim, $d(\overline{AB}) = d(\overline{DE})$.

Portanto, ΔABC e $\Delta DEC'$ são congruentes, por terem os lados congruentes. Consequentemente, $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$.

Apresenta-se, de seguida, algumas propriedades relativas à circunferência

Proposição 24

Seja *C* uma circunferência e $\overline{pq}$ uma corda não passando pelo centro *O*. Uma recta, passando por *O*, é perpendicular à recta definida por *p* e *q* sse ela divide $\overline{pq}$ em dois segmentos congruentes.

Demonstração:

O triângulo ΔOpq é isósceles. Tomando $\overline{pq}$ como base, o resultado é uma consequência imediata da **P20**.

Proposição 25

Sejam *C* uma circunferência e *l* uma recta. Se $C \cap l \neq \emptyset$ então a intersecção não é formada por mais de dois pontos.

Demonstração:

Caso o centro a circunferência estiver em l, então a intersecção da circunferência com a recta é formada por dois pontos.

Sejam, agora, *p, q, r* três pontos na intersecção de *C* com *l*, com $r \in \overline{pq}$. Definam-se as cordas $\overline{pq}$, $\overline{pr}$ e $\overline{rq}$. Unindo os seus pontos médios com o centro de *C, O.* Obtemos assim três rectas perpendiculares às respectivas cordas e, portanto, perpendiculares à recta *l* o que é absurdo. Logo uma recta não pode intersectar a circunferência em mais de dois pontos.

Proposição 26

Se uma recta é tangente a uma circunferência então é perpendicular à recta determinada pelo centro e o ponto de tangência.

Demonstração:

Sejam *O* o centro da circunferência, *l* a recta tangente e *t* o ponto de contacto.

Por *O* passa uma e uma só recta perpendicular a *l*. Suponhamos que essa perpendicular intersecta *l* em *p*. se $p \neq t$, marquemos sobre *l* o ponto t_1 tal que $t \neq t_1$ e $\overline{pt} \equiv \overline{pt_1}$.

Então $\Delta Opt \equiv \Delta Opt_1$, por LAL, **(A7)**, e $\overline{Ot} \equiv \overline{Ot_1}$, donde t_1 também pertence à circunferência. A recta *l* intersectaria a circunferência em dois pontos, pelos menos.

Proposição 27

Sejam r_1 uma recta, que passa pelo centro de uma circunferência, e r_2 uma outra recta cuja intersecção com r_1 é um ponto da circunferência. Se r_1 e r_2 forem perpendiculares, a segunda recta é tangente à circunferência.

Demonstração:

Sejam *p* o ponto de intersecção, p_1 um ponto de r_2 tal que $p_1 \neq P$ e *O* o centro da circunferência.

Temos o ΔOpp_1, que é rectângulo e de hipotenusa $\overline{Op_1}$. Portanto, o comprimento de $\overline{Op_1}$ é superior ao de $\overline{Op}$ e p_1 não pertence à circunferência.

O ponto *p* é pois o ponto de tangência da recta r_2.

Proposição 28

Qualquer triângulo está inscrito numa única circunferência, isto é, os seus vértices pertencem a uma circunferência.

De outro modo, três pontos não colineares determinam uma circunferência.

Demonstração:

A mediatriz de um segmento é a recta perpendicular à recta contendo o segmento que passa pelo ponto médio deste.

Sejam p, q, r os vértices do triângulo. Sabemos que tal circunferência, a existir, terá centro nas mediatrizes de $\overline{pq}$ e $\overline{rq}$. Tais rectas intersectam-se, digamos, em *t*. Caso não se intersectassem, os segmentos determinariam rectas paralelas.

Os triângulos $\Delta tpq \; e \; \Delta tqr$ são isósceles, com bases $\overline{pq}$ e $\overline{rq}$. Havendo $\overline{tq}$ como lado comum, os três pontos estão na circunferência de centro *O* e raio $d(t, q)$.

3- Projeto Educacional II

Planificação das actividades

Descrição da tarefa

Pretende-se que os discentes, de forma intuitiva, partindo dos puzzles fornecidos, deduzam o enunciado do "Teorema de Pitágoras". De seguida, este processo será reforçado com a apresentação do Applet, culminado com a sistematização dos conteúdos no quadro por parte do docente. O tempo previsto para a actividade é de 45 minutos.

Esta atividade visa desenvolver:

Objetivos específicos, que se encontram no Programa de Matemática do Ensino Básio, página 54:

- Compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros.
- Demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Metas de aprendizagem, do documento que se encontra em: http://www.metasdeaprendizagem.min-edu.pt/, que a seguir transcrevemos:

- Meta Final 15) Analisa e utiliza as propriedades e relações relativas a triângulos e quadriláteros no plano e no espaço.
- Meta Final 16) Compreende a noção de demonstração e faz raciocínios dedutivos em contextos geométricos e trigonométricos.

Plano de aula

aXariaS
Agrupamento de Escolas
Cónego Dr. Manuel Lopes Perdigão

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Plano de aula	8ºano	Ano lectivo: 2011/2012

Tema: Geometria

Unidade: Teorema de Pitágoras

Conteúdos(s): Teorema de Pitágoras - demonstração

Objetivos específicos:

Compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros.

Demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Sumário:

Realização da ficha de trabalho – os puzzles de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras e o seu recíproco.

Resolução dos exercícios 1, 2 e 4, da página 241.

Metas de aprendizagem:

Meta Final 15) Analisa e utiliza as propriedades e relações relativas a triângulos e quadriláteros no plano e no espaço.

Meta Final 16) Compreende a noção de demonstração e faz raciocínios dedutivos em contextos geométricos e trigonométricos.

Atividades	Recursos Disponíveis
Ficha de trabalho – os puzzles de Pitágoras. Exploração e registo de conclusões. Apresentação de resultados. Consolidação de conceitos (sistematização dos conteúdos). Aplicação (exercícios 1, 2 e 4, da página 241).	Ficha de trabalho Manual, pág. 238 a 241 Applet: **http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythasx/pythasx.html**

Avaliação	TPC
Observação formativa das intervenções dos alunos. Análise dos resumos/comentários escritos na ficha de trabalho.	Ex. 7 da pág. 241

Notas:

Organização da turma

Caraterização do agrupamento:

A área de influência do Agrupamento abrange as freguesias de Caxarias, Espite, Casal dos Bernardos, Rio de Couros e Urqueira, situadas no extremo norte do concelho de Ourém.

No momento da sua constituição o Agrupamento abarcava nos seus 37 estabelecimentos de ensino, uma população escolar de 1 028 alunos.

Da caracterização dos agregados familiares dos nossos alunos, constata-se que estamos perante uma população com baixo nível de escolaridade, em que a maioria dos pais possui habilitações ao nível de 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (51%). Apesar desse facto, nos últimos anos tem-se verificado uma evolução positiva, evidenciada por um nível de analfabetismo residual (<1%).

No que respeita à categoria profissional, a grande maioria dos pais exerce função de trabalho não qualificado na área dos serviços e comércio (37%) e da construção e indústria transformadora (29%).

No entanto, os nossos alunos apresentam um crescente nível de expectativas de prosseguimento de estudos, pretendendo a maioria cumprir o nível superior, existindo cerca de 25-30% cujas expectativas são o cumprimento do ensino básico ou secundário, mas mais concentrados nos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Adaptado de: Projeto Educativo da Escola E. B. 2,3 Cónego Dr. Manuel Lopes Perdigão,2010)

Caracterização dos alunos:

Tendo em conta esta breve apresentação, constata-se que a maioria dos alunos (turmas A e B do oitavo ano), onde a actividade será aplicada têm como principais características a falta de empenho e a ausência de métodos e técnicas de estudo e trabalho. Estas características refletem-se na sua baixa literacia matemática.

Esta tarefa será implementada em duas turmas do oitavo ano (A e B) que têm respetivamente dezoito e dezanove alunos. Serão feitos grupos de trabalho com quatro alunos, os quais terão que completar os quadrados no esquema que lhes é fornecido na ficha de trabalho. De seguida têm de registar as suas conclusões.

Material necessário

Para a implementação desta tarefa serão utilizadas as fichas de trabalho fornecidas, os puzzles, um computador com ligação à net e projetor, para além do sempre necessário quadro.

Avaliação esperada

Face ao conhecimento que tenho das turmas, tenho a expectativa de que pelo menos metade dos alunos intua e apreenda o enunciado do Teorema de Pitágoras. Haverá muita dificuldade no trabalho em grupo, assim como na escrita de conclusões da implementação dos puzzles. Das várias propostas/tarefas a apresentar, aquela que penso ser mais do agrado dos alunos será o apllet uma vez que o recurso às tecnologias de informação e comunicação (TIC) é muito do seu gosto.

Quando forem chamados à resolução de exercícios, alguns alunos demonstrarão empenho, no entanto a maior parte apresentará uma postura de desinteresse.

Relato da experiência

Os alunos mostraram-se muito curiosos sobre o desenrolar da aula. Essa postura foi vantajosa para o decorrer da aula, pois quando foi lançado o desafio dos puzzles houve uma boa adesão. Os grupos foram constituídos sem grande dificuldade e rapidamente foi apresentada e elaborada a tarefa.

Quando se recorreu às TIC, tal como esperado, os alunos mostraram também muita atenção.

As dificuldades surgiram quando foi feita a prova do teorema presente no manual do aluno. Não sendo usual este tipo de tarefa os alunos, face a todas as suas dificuldades, que estavam empenhados mostraram bastantes dificuldades em entender a sua mecânica.

A compreensão e aceitação do recíproco foi rápida e ficou consolidada, pois aquando da resolução de exercícios de aplicação superaram-nos sem dificuldades.

Reflexão da tarefa

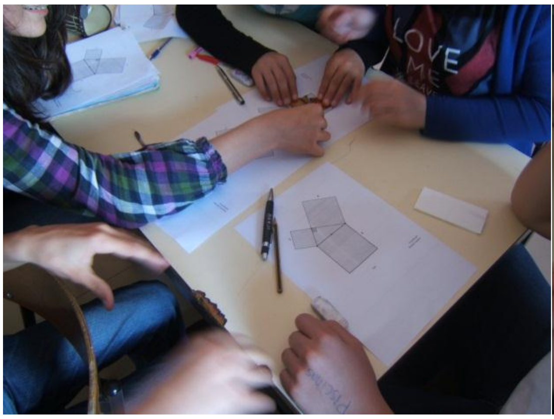
Tal como tinha previsto, os alunos, numa fase inicial, demonstraram grande interesse pelas atividades propostas. A ideia intuitiva criada a partir do puzzle veio criar uma outra sensibilidade para a compreensão do enunciado. Contudo e à medida que fomos aprofundando o assunto, rapidamente esse interesse foi-se transformando em apatia e desinteresse.

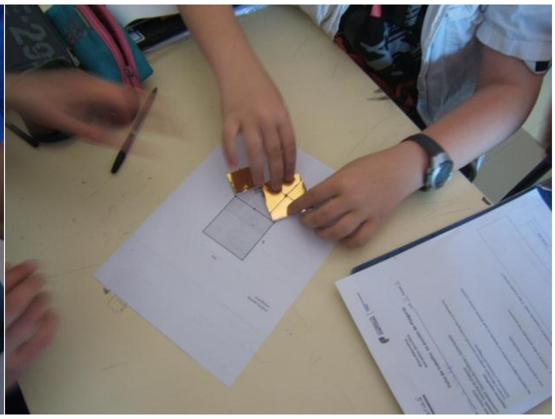
Uma vez que não é habitual serem chamados a provar resultados, aquando da demonstração do Teorema houve muitas dúvidas de interpretação do processo. Reagiram relativamente bem à reflexão sobre o recíproco, tendo até superado as minhas espectativas.

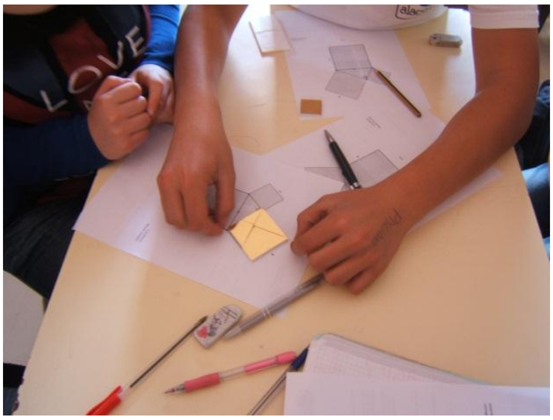
Dos alunos que manifestam empenho na resolução de exercícios, começam a aplicar os resultados estudados a casos concretos. Obtendo um desempenho satisfatório, contudo revelam dificuldades na aplicação de regras de cálculo resultantes de deficientes aprendizagens anteriormente realizadas.

Fotos e relatos dos alunos

São agora apresentados alguns momentos onde se pode verificar a execução da tarefa por parte dos discentes das duas turmas.







Das conclusões apresentadas, sem que tivessem ainda conhecimento do resultado em causa, verifica-se que os discentes estão preparados para a apresentação formal do Teorema.

2. Agora, tenta construir o quadrado maior. O que se pode concluir?

Podemos concluir que a soma das áreas do quadrado (4 e 3) vai originar a área do quadrado (5).

2. Agora, tenta construir o quadrado maior. O que se pode concluir?

Gastamos todos para fazer o quadrado grande e depois com essas mesmas peças formam-se 2 quadrados mais pequenos

2. Agora, tenta construir o quadrado maior. O que se pode concluir?

podemos concluir que As peças que compõe ∴ A area dos 2 quadrados mais pequenos, juntas, ∴, ocupam a area do quadrado maior.

4- Conclusões

É de referir que o Projecto educacional I teve uma importância fulcral, uma vez que nos possibilitou obter um conhecimento científico mais profundo e sólido da geometria plana. A sua elaboração veio a revelar-se uma aposta ganha na prática docente diária, pois tal como é sugerido no programa de Matemática – pág. 68 *"Formulação, teste e demonstração de conjecturas"*, que aponta a demonstração de conjeturas como uma capacidade transversal. Temos recorrido com mais frequência a este tipo de raciocínio matemático aquando da apresentação de algumas propriedades geométricas. A reação dos alunos a esta metodologia de trabalho é má. Reagem de forma negativa, pois não compreendem como se podem "fazer contas" sem usar quaisquer números. A título de exemplo: quando se demonstrou que "*a soma das Amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º*" as suas preocupações foram saber qual a amplitude dos ângulos. Como se vai usar o transferidor? Ficaram muito surpreendidos e baralhados por não saberem as respetivas medidas e como se podia raciocinar sem esses dados. Após mais algumas provas uma minoria dos alunos já começou a ganhar alguma sensibilidade para este método.

Relativamente ao Projeto Educacional II, entendemos ter-se tratado de uma tarefa que se traduziu numa mais-valia para alguns dos alunos. Os discentes mostraram interesse na sua resolução o que lhes possibilitou estarem mais confiantes para a compreensão do Teorema de Pitágoras. Após um ano com algumas provas realizadas no sétimo ano era expectável que no oitavo ano estivessem com essa capacidade mais desperta, contudo tal não aconteceu. A sua reação foi quase sempre de total desinteresse face ao processo metodológico da prova. Não se interessaram em perceber o processo apenas o resultado final. Passado algumas semanas após a aplicação da tarefa constatámos, com agrado, que alguns alunos ainda se recordam mas quando questionados sobre que assunto se tratava, referem que era sobre o Teorema de Pitágoras mas já não se recordam. Inferimos assim, que a aprendizagem realizada não foi significativa.

Reflexão sobre a articulação e o ensino da Geometria no segundo e terceiro ciclos do ensino básico

A aplicação da nova estrutura apresentada para o ensino da geometria ainda é muito recente. É ainda prematuro fazer uma análise crítica da sequência de aprendizagem proposta. Contudo, aponta-se algumas observações.

No segundo ciclo aquando do cálculo da área do círculo usa-se uma aproximação do valor de PI de 3,14. Esta metodologia leva a que no terceiro quando se apresenta o PI como número irracional os alunos tem a ideia errada de que o PI tem duas casas decimais. Se, quando é introduzido, fosse feito com cinco casas decimais, penso que seria mais favorável à aprendizagem no terceiro ciclo.

A introdução das demonstrações de propriedades dos paralelogramos, no sétimo ano, reveste-se de especial importância. Os alunos até ao momento não tiveram contacto com qualquer método de prova, sendo este um processo completamente novo para eles. O grau de abstração exigido é um enorme desafio para os docentes pois são poucos os alunos que, numa primeira fase, tem sensibilidade para compreenderem plenamente todo o processo e como tal os docentes têm a responsabilidade de despertar o gosto por este tipo de matemática.

Foi pedido pelos formadores do novo programa aos docentes do segundo e terceiro ciclos que abandonassem a escrita de símbolos mas pela articulação prática feita entre os docentes do terceiro ciclo e do secundário do grupo PMII/novos programas está a chegar-se à conclusão que o abandono puro e simples não é seguramente a melhor opção pois no secundário os alunos necessitam de estar familiarizados com alguma escrita simbólica o que não está a acontecer.

Temos ainda outra perspectiva: a análise dos testes intermédios dos anos em já decorrem a implementação. Tem-se constatado que o rigor da escrita simbólica que se acreditava estar a ser gradualmente abandonado tem permanecido tal como estava antes do novo programa.

Assim os docentes do segundo e terceiro ciclos estão a reconsiderar e está a voltar-se não ao uso exclusivo da escrita de símbolos mas o uso em conjunto com a designação em Português. Espera-se assim que a problemática levantada pelo secundário acabe a curto prazo.

A maioria dos alunos com quem trabalho regularmente, não apresenta uma manifesta vontade em apreender. Encaram a escola como um espaço essencialmente para brincar, descurando por completo a sua formação científica. Não deixa de ser paradoxal que face ao grande investimento feito pela tutela em recursos físicos (destaca-se aqui o Plano Tecnológico) os resultados obtidos não apresentem melhorias significativas. A grande mudança que urge ocorrer passa pela alteração de mentalidades das pessoas envolvidas em todo o processo educativo.

(Em anexo está um quadro temático com os tópicos do segundo e terceiro ciclos do novo programa de matemática)

A- Anexos

Ficha de trabalho

8ºano-Matemática

Ano lectivo 2011/2012

Ficha de trabalho- os puzzles de Pitágoras

Nome: ____ **n.º:** ____ **Turma:**___

Tema: Geometria

Unidade: Teorema de Pitágoras

Conteúdos(s): Teorema de Pitágoras – demonstração

Objectivos específicos:

Compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros.

Demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Na segunda página encontras um desenho no qual deverás resolver o puzzle.

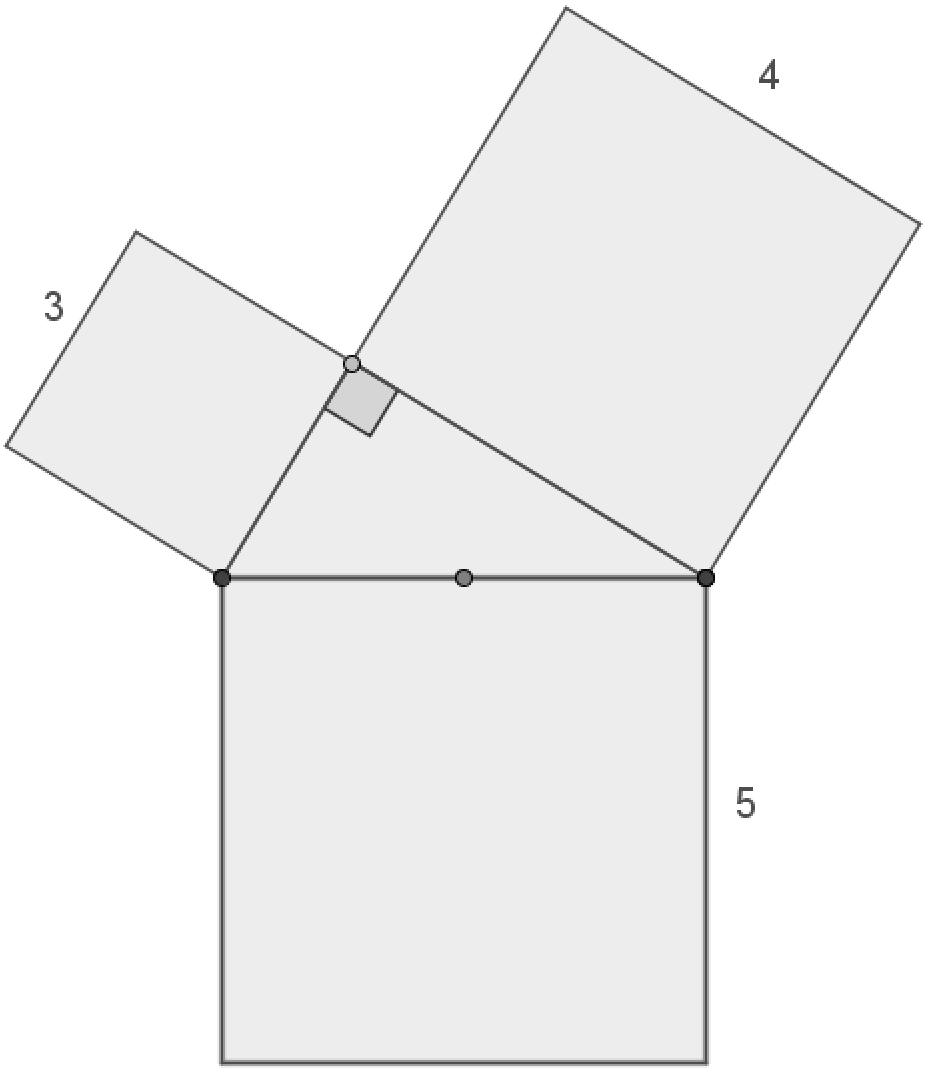
Com o puzzle que te foi distribuído:

1. Constrói os dois quadrados mais pequenos.

2. Agora, tenta construir o quadrado maior. O que se pode concluir?

Qual a tua opinião sobre esta actividade:

Fraca	Razoável	Boa	Muito boa



Fim!

O professor:

Ricardo Faustino

Quadro temático com os tópicos de geometria do 2º e 3º ciclos

Tópicos (2ºciclo)	Tópicos (3ºciclo)
Sólidos geométricos • Prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera • Planificação e construção de modelos **Figuras no plano** • Rectas, semi-rectas e segmentos de recta • Ângulos: amplitude e medição • Polígonos: propriedades e classificação • Círculo e circunferência: propriedades e construção **Perímetros** • Polígonos regulares e irregulares • Círculo **Áreas** • Equivalência de figuras planas • Unidades de área • Área do triângulo e círculo **Volumes** • Volume do cubo, paralelepípedo e cilindro • Unidades de volume **Reflexão, rotação e translação** • Noção e propriedades da reflexão, da rotação e da translação • Simetrias axial e rotacional	**Sólidos geométricos** • Área da superfície e volume • Critérios de paralelismo e perpendicularidade entre planos, e entre rectas e planos **Triângulos e quadriláteros** • Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo • Congruência de triângulos • Propriedades, classificação e construção de quadriláteros **Circunferência** • Ângulo ao centro, ângulo inscrito e ângulo excêntrico • Lugares geométricos • Circunferência inscrita e circunferência circunscrita a um triângulo • Polígono regular inscrito numa circunferência **Teorema de Pitágoras** • Demonstração e utilização **Trigonometria no triângulo rectângulo** • Razões trigonométricas de ângulos agudos • Relações entre razões trigonométricas **Semelhança** • Noção de semelhança • Ampliação e redução de um polígono • Polígonos semelhantes • Semelhança de triângulos **Isometrias** • Translação associada a um vector • Propriedades das isometrias

Adaptado de:

"Programa de Matemática do ensino básico", página 66. *Versão homologada a 28 de Dezembro de 2007*

B- Referências *bibliográficas*

Roger B. Nelsen, *Proofs without words, the mathematical association of America, .1993, (pág. 3-6)*

By Alan Bundy and Mateja Jamnik and Andrew Fugar, *What is a proof?* http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/363/1835/2377.full.pdf

Diogo Pacheco de Amorim, *Compêndio de geometria*, volume 1, 1937, (pág. 93-98).

Diogo Pacheco de Amorim, *Compêndio de geometria*, volume 2, 1943, (pág. 84).

Vitor Villoria San Miguel, *Fundamentos Geométricos*, Dossat 2000, 1992, (pág.).

Paulo Ventura Araújo, *Curso de Geometria*, Gradiva, 1998, (pág. 47-57).

João Lucas Marques Barbosa, *Geometria Euclidiana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985, (pág. 72).

Elon Lages Lima, *Isometrias*, Sociedade Brasileira de matemática, 1996, (pág. 13).

Armando Machado, *Da Geometria Euclidiana aos Vectores Livres*, Notas, 2005, (pág. 102).

Richard S. Millman e George D. Parker, *Geometry, a metric approach with models, Springer-Verlag*, 1991, 2ª edição, (pág. 131).

E. E. Moise*, Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley, 1974, (pág. 132),

L. Sanchez**,** *Notas para cum curso de Geometria elementar***,** Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2009, (pág. 17 a 23)

João da Ponte e outros*, Programa de Matemática do ensino básico*, DGIDC, 2010, (pág. 26)

Sites consultados:

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/euclides.htm

http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/6parte.html

http://www.cut-the-knot.org/index.shtml (puzzles)