



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Modelação de lajes elásticas num programa informático de análise por elementos finitos: elementos sólidos vs. elementos planos e lineares.

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Especialidade de Estruturas.

Autor

Susana Margarida de Jesus Almeida

Orientadores

Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa

Ricardo Joel Teixeira Costa

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

Coimbra, Julho, 2016

AGRADECIMENTOS

A presente dissertação encerra um dos capítulos mais importantes na minha vida, o meu percurso académico. Tenho a certeza que estes últimos anos vão ser os que recordarei com mais saudade pela felicidade que me trouxeram. Os conhecimentos que adquiri, o desvendar dos limites das minhas capacidades, a transformação da forma como observo e enfrento o ambiente que me rodeia e, acima de tudo, as pessoas que conheci, foram acontecimentos que jamais se repetirão com tal intensidade. Portanto, gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que me acompanharam e contribuíram, não só nesta dissertação, como ao longo de todo o curso:

Ao Professor Doutor Paulo Providencia, meu orientador, por ter prontamente aceitado orientar-me nesta dissertação e mostrado total disponibilidade ao longo da mesma. Por me ter dado a oportunidade de tomar decisões, seguir a minha intuição, aprender com os erros que se foram cometendo nesta dissertação e claro, pelos conhecimentos transmitidos.

Aos amigos que Coimbra me deu, e que levarei comigo, em especial às melhores amigas e companheiras de todas as horas, Andreia Vieira, Sara Cardoso e Patrícia Fernandes. A vida é feita para ser partilhada, e acreditem que nas minhas melhores recordações vocês estão presentes.

Ao meu namorado e companheiro, Diogo Carvalho, pela forma como me acompanhou e apoiou nesta caminhada e por todo o carinho demonstrado.

Por último, agradeço aos meus pais, Armando e Rosa pelo exemplo de trabalho e dedicação, por todo o amor e confiança. Ao meu irmão, David por estar sempre comigo. Aos meus avós e restante família por todo o apoio, preocupação e ajuda.

RESUMO

Cada vez mais, a análise de estruturas de edifícios é baseada em modelos espaciais em vez dos modelos planos. Esta evolução é frequentemente desejada porque traz soluções com precisão acrescida em virtude de se basearem num modelo mais adequado. Porém, para além de uma maior complexidade, colocada ao próprio analista, até há alguns anos este tipo de modelos não estava ao alcance do utilizador comum.

A presente dissertação tem como principal objetivo a modelação e análise por elementos finitos, no programa SAP2000, de lajes vigadas com material de comportamento elástico linear, sujeitas a uma ação estática, usando dois tipos de modelos: o primeiro, com elementos finitos planos e lineares; o segundo, com elementos finitos sólidos, apoiado numa teoria que envolve menos aproximações. Pretende-se comparar estas duas opções, em termos do esforço envolvido na modelação e sua modificação, análise, consulta de resultados e precisão da solução.

Relativamente ao modelo com elementos lineares e laminares planos foram analisadas diversas opções, em termos da posição do plano médio da laje relativamente ao plano que contém o eixo das vigas. A opção mais habitual é desprezar a excentricidade, entre estes dois planos, o que acarreta um certo erro, porque usualmente o plano dos eixos das vigas é inferior ao da laje. Esta solução simplificada era imposta pelos procedimentos internos de geração automática da malha de elementos finitos, que envolvem métodos específicos de reconhecimento de nós ligados. Porém os novos programas de CAD já incluem um procedimento automatizado, baseado na utilização de graus de liberdade escravos, que permite contornar esta dificuldade e que é analisada no presente estudo.

Os resultados obtidos mostram que, quando comparados com os modelos de elementos laminares planos e lineares, os modelos com elementos sólidos, apresentam (i) complexidade acrescida das fases de pré-processamento, ou seja, a morosa modelação, e de pós-processamento, ou seja, cálculo dos esforços, (ii) elevado tempo de execução, ou seja, da análise propriamente dita, (iii) campos de esforços não totalmente coincidentes com os dos modelos simplificados. No entanto, como conclusão geral deste estudo, quando se colocam na balança a perda de rigor por um lado e o ganho em tempo de modelação, análise e consulta de resultados, pode-se afirmar que, para problemas comuns, a modelação com elementos lineares e laminares ainda é a mais aconselhável, devendo-se recorrer aos elementos sólidos apenas para problemas envolvendo geometria ou de condições de apoio irregulares.

ABSTRACT

More and more, the analysis of building structures is based on spatial models instead of plane models. This is a natural evolution not only because it brings the models closer to original problems increasing therefore the accuracy of the solutions, but also because of the development of the hardware and software capabilities.

The main objective of this thesis is the modelling and finite elements analysis, in the SAP2000 software environment, of slab systems with beams made of a linear elastic material, subject to a static action, using two types of models: (i) models combining plane shell and linear finite elements; (ii) models using only solid finite elements. The latter are based on a theory that involves fewer approximations. These two alternatives are to be compared in terms of the effort involved in modelling and modification, analysis, checking of results and accuracy of the solution.

For the model with linear and plane shell finite elements, several options were analysed in terms of the average position of the intermediate slab plane relatively to the plane containing the axes of the beams. The most common option is to ignore the eccentricity between these two plans, which carries a certain error, because usually the plane of beam axes is below that of the slab. This simplified solution is somewhat imposed by the internal procedures for the automatic generation of the finite elements mesh, that involves specific methods for the recognition of connected nodes. However, recent CAD programs include automated procedures based on internal constraints (using master-slave relations between degrees of freedom), that allow to tackle this difficulty and are employed in this study.

This study as shown that (i) the increased complexity of pre-processing stages (time consuming model development or modification) and post-processing (internal forces calculation), (ii) high execution time of the analysis itself, (iii) determine internal forces fields not exactly coincident with those given by the rougher models.

However, as a general conclusion of this study, when the loss of accuracy of the rougher models is balanced against the time saved in the modelling, analysis and query phases, it can be stated that: (i) for common problems, models with linear and plane shell elements are the best option and, (ii) models with solid elements should be used only for problems involving irregular geometry or support conditions.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS.....	ii
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
ÍNDICE	v
ABREVIATURAS.....	vi
1 INTRODUÇÃO	7
1.1 Enquadramento geral.....	7
1.2 Objetivos e âmbito da dissertação	8
1.3 Organização da dissertação.....	8
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
2.1 Método dos elementos finitos	10
2.1.1 Considerações iniciais.....	10
2.1.2 Breve introdução aos elementos finitos	10
2.1.3 Elementos finitos lineares	11
2.1.4 Elementos finitos planos de laje	14
2.1.5 Elementos finitos sólidos	17
2.2 Ligação de elementos distintos	20
2.2.1 Ligação de um elemento viga a um elemento plano	20
2.2.2 Ligação de um elemento laje a um elemento viga	22
2.3 Elementos sólidos vs. elementos planos e lineares	23
3 CASO DE ESTUDO	25
3.1 “Laje vigada” simples em consola	25
3.1.1 Modelo com elementos planos e lineares	28
3.1.2 Modelo com elementos sólidos	31
3.2 Laje vigada.....	32
3.2.1 Estudo de convergência:	35
3.2.2 Confirmação do modelo.....	37
3.2.3 Análise de resultados	38
4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	51
4.1 Conclusões	51
4.2 Trabalhos futuros.....	52
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	53
ANEXOS.....	A-1
Anexo A: Refinamento da malha de elementos finitos.....	A-1
Anexo B: Análise dos resultados para os modelos 1 e 2:.....	B-1
Anexo C: Condições de apoio no plano da laje	C-1

ABREVIATURAS

EC2 – Eurocódigo 2

GDL – grau de liberdade

MEF – método dos elementos finitos

SLS – estados limites de utilização

ULS – estados limites últimos

1 INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento geral

Durante muito tempo, a resolução dos problemas de engenharia passava inevitavelmente por métodos experimentais e pelo conhecimento empírico. A necessidade de resolver esses mesmos problemas mais rapidamente, com maior segurança e menor custo, levou à procura de formas alternativas. Dentro deste contexto, surgiram primeiro métodos analíticos e, depois, a sua implementação numérica, como é o caso do método dos elementos finitos (MEF).

O MEF é uma técnica numérica bastante versátil, ou seja, fácil de adaptar a diferentes tipos de elementos estruturais e regimes de comportamento. Permite modelar com simplicidade estruturas com geometria, condições de apoio e carregamentos quase arbitrários.

O desenvolvimento de um modelo estrutural que simule o comportamento real de uma estrutura é uma das fases mais importantes do projeto. Os programas informáticos permitem desenvolver diferentes modelos, com diferentes níveis de aproximação do problema real, mas também diferentes dimensões do problema numérico e exigência computacional. No caso particular de lajes vigadas, é frequente a utilização de modelos com elementos finitos planos combinados com elementos finitos lineares. No entanto, estas também podem ser modeladas com elementos finitos sólidos que, permitem uma melhor aproximação ao problema real. Cabe ao analista decidir qual o modelo a utilizar para cada caso, dependendo da precisão pretendida e do custo que pode ser suportado.

Os elementos planos resultam da implementação de teorias planas que, para objetos cuja geometria satisfaz certos limites, simplificam a descrição do seu comportamento de tal forma que passam a ser suficientes duas dimensões. De modo semelhante, os elementos lineares resultam de teorias linear que, para certos objetos, reduzem o número de dimensões mais pertinentes a uma. Formulações simples destas teorias que possibilitam a redução da dimensão do problema original são estudadas em Resistência dos Materiais e em Teoria das Estruturas. Aí se apresentam os erros resultantes dessa redução bem como os limites de validade dessas teorias. A implementação numérica destas teorias, particularmente através do MEF é também estudada em Teoria das Estruturas, mas de uma forma muito introdutória, e sem qualquer menção, por exemplo, aos elementos sólidos.

Apesar disso, as ferramentas de projeto assistido por computador (CAD), implementam muitos dos métodos numéricos necessários ao tratamento dos problemas estruturais, em particular o MEF, possibilitando a geração de modelos de elementos lineares, laminares (planos ou não) e sólidos, bem como a sua combinação. Estes programas atingiram um nível de desenvolvimento muito avançado, até pela facilidade com que comunicam com outras ferramentas informáticas, e pelos diversos tipos de análise que oferecem. Por outro lado, o seu desenvolvimento tem os tornado cada vez mais “amigos do utilizador”. Torna-se assim muito mais simples atualmente,

introduzir a geometria do problema inicial e alguma informação relativamente ao tipo de elementos finitos a utilizar. Embora ainda haja muito a fazer neste âmbito, como o demonstram o grande crescimento nos últimos anos da análise isogeométrica (Cottrell *et al.*, 2009), a verdade é que, por exemplo, os referidos procedimentos de geração automática da malha, conseguem já com bastante inteligência ligar nós de elementos distintos, apenas porque eles estão suficientemente próximos, ou porque há uma informação que indica que eles pertencem a elementos que estão de alguma forma ligados entre si, quando há uma dezena de anos atrás esta operação era muitíssimo morosa e fonte de imensos erros.

O programa de modelação, análise e cálculo estrutural SAP2000, é um programa muito popular no seio da comunidade técnica e implementa muitas destas técnicas mais avançadas. Nesta dissertação, ele será utilizado para construir diversos modelos combinando elementos lineares e planos e outros apenas com elementos sólidos, para modelar o comportamento de uma laje vigada de material homogéneo isotrópico elástico linear, sujeita a uma ação estática, e avaliar de forma comparativa, não só o nível de esforço envolvido nas construção daqueles dois tipos de modelos e na análise dos respetivos resultados, mas também a qualidade das soluções obtidas com o primeiro tipo de modelos perante a do segundo, naturalmente mais rigorosos.

1.2 Objetivos e âmbito da dissertação

A presente dissertação tem como principal objetivo, estudar uma laje vigada, caracterizada por uma geometria regular, com dois tipos de modelos distintos de análise, nomeadamente modelos constituídos por elementos finitos planos e lineares e por elementos finitos sólidos, em regime elástico linear.

Pretende-se tirar conclusões relativamente às especificidades de cada modelo, em termos de procedimento de modelação, tempos de execução e precisão de resultados, podendo assim estimar os erros que o utilizador comete ao utilizar modelos mais simples.

Os modelos são desenvolvidos e análise realizada com o programa SAP2000 (Computers & Structures, Inc, 2015).

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação encontra-se dividida em quatro capítulos, sendo este capítulo de introdução o primeiro.

No segundo capítulo, são abordadas de forma sucinta as ideias base de cada tipo de elemento finito, nomeadamente, elemento finito linear, plano e por fim, sólido. Depois de apresentadas as teorias em que se baseia cada elemento, são apresentados os elementos do programa SAP2000 que serão utilizados.

No terceiro capítulo são apresentados dois exemplos práticos. O primeiro, que servirá sobretudo para introduzir alguns conceitos e convenções bem como apresentar o funcionamento do programa utilizado e tipo de resultados que este oferece, é um caso simples de uma viga em consola, a qual com um bocado de imaginação pode ser pensada como um caso limite de laje

vigada – o facto de esta estrutura ser isostática e apresentar uma única dimensão fundamental facilita a sua compreensão. O segundo exemplo, que é aquele que apresenta maior interesse, é uma laje vigada, analisada com quatros modelos distintos, três deles com modelos de elementos planos e lineares, de forma a determinar e avaliar quais os erros associados a este tipo de modelo por comparação com o modelo de elementos sólidos.

No quarto e último capítulo, são expostas as principais conclusões desta dissertação e são feitas algumas sugestões de trabalhos futuros nesta área.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Método dos elementos finitos

2.1.1 Considerações iniciais

Neste capítulo, apresenta-se uma breve descrição do método dos elementos finitos, na perspetiva de um utilizador de um programa de CAD. No que respeita aos elementos propriamente ditos, são referidos os elementos lineares, nomeadamente o elemento de viga Euler-Bernoulli e o elemento de viga Timoshenko, os elementos planos de laje, nomeadamente, o elemento de Kirchhoff e o elemento de Reissner-Mindlin, e os elementos sólidos, abordados de forma mais sucinta, nomeadamente, os elementos Lagrangeanos e Serendipianos.

2.1.2 Breve introdução aos elementos finitos

“O MEF é uma técnica numérica bastante versátil e fácil de adaptar a diferentes tipos de elementos estruturais e variados regimes de comportamento. Permite modelar com simplicidade estruturas com geometria, condições de apoio e carregamentos perfeitamente gerais.” (Castro, 2009)

Como refere o autor citado, o método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica numérica muito usada para resolver uma grande diversidade de problemas, normalmente descritos por um conjunto de equações diferenciais. Quando este método é aplicado à análise estrutural, tem como objetivo a determinação do estado de deformação e tensão de uma estrutura, com forma arbitrária e sujeita a um conjunto especificado de ações exteriores.

No MEF o domínio do problema em análise é dividido num número finito de subdomínios com forma simples. Estes subdomínios são designados de elementos finitos. A ligação entre os elementos finitos é feita através de nós. O conjunto dos elementos finitos e dos nós define a malha de elementos finitos. O MEF aproxima o problema original, definido por um conjunto de equações diferenciais em que a variável dependente é, por exemplo, o campo de deslocamentos, por um problema discreto, definido por um sistema de equações algébrico, em que as incógnitas são os deslocamentos nos nós. Depois de determinados os deslocamentos nos nós, os deslocamentos no interior de cada elemento finito são determinados por funções de forma, ou funções de interpolação, a partir dos deslocamentos nodais. Os campos de extensões podem ser seguidamente determinados a partir destes campos de deslocamentos interpolados, e, finalmente, os esforços são determinados a partir desses campos de extensões e das relações constitutivas do material.

O MEF pode ser baseado em deslocamentos, sendo designado de abordagem por deslocamentos, em modelos de equilíbrio, sendo designado de abordagem por forças, ou em métodos híbridos e mistos, sendo que o que apresenta uma maior versatilidade e simplicidade é a abordagem por deslocamentos. Neste, como se explicou, primeiramente é calculado o campo de deslocamentos e de seguida, a partir de condições de compatibilidade e elasticidade é obtido o campo de tensões. Como os campos de extensões são obtidos por derivação dos campos de deslocamentos, a solução determinada para o campo de deslocamentos é mais rigorosa, ou aproxima-se mais da realidade, do que a obtida para os campos de tensões e de esforços.

Uma particularidade das soluções determinadas pela abordagem por deslocamentos do MEF é a de violar as condições de admissibilidade estática, visto que os campos de esforços não satisfazem as condições de equilíbrio localmente, mas apenas ao nível do elemento. Assim, a análise de resultados deve ser feita de forma crítica. O refinamento da malha de elementos finitos, por exemplo, por redução da dimensão do maior elemento finito, permite melhorar a solução estática e, claro, também a cinemática.

De acordo com a teoria estrutural à qual se aplica o MEF, os elementos finitos serão lineares, planos ou sólidos. Note-se também que o âmbito desta dissertação é o da análise material e geometricamente linear.

2.1.3 Elementos finitos lineares

Para peças lineares prismáticas, ou seja, com rigidez constante ao longo do elemento, a solução do MEF para os deslocamentos nos nós é exata, com as funções interpoladoras clássicas e no âmbito da análise material e geometricamente linear, para qualquer ação quase-estática (Neves, 2010). Por esse motivo, não existe grande variedade de elementos para viga, para a análise linear, ao contrário do que acontece, por exemplo, no caso de elementos de laje. Note-se, porém, que para a análise não linear existem muitas outras possibilidades.

Neste capítulo serão apresentadas resumidamente duas teorias para a deformação transversal ou de flexão das peças lineares, nomeadamente, a teoria de Euler-Bernoulli, a teoria de Timoshenko e, seguidamente, o elemento finito utilizado no SAP.

2.1.3.1 Elemento viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli

Na formulação de Euler-Bernoulli para peças lineares à flexão admite-se que as secções se mantêm planas e normais ao eixo da barra durante a deformação, não sendo considerada a deformação por corte, figura 2.1. Deste modo, tem-se que a única tensão diferente de zero é a tensão normal longitudinal. Considere-se um sistema cartesiano de eixos de referência com o eixo dos xx coincidente com o eixo da peça linear e o eixo dos z segundo o plano longitudinal de simetria no caso dos problemas planos, em que w é o deslocamento transversal segundo z .

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli, muitas vezes chamada teoria clássica, assenta nas seguintes premissas (Bandyopadhyay *et al.*, 2007):

- 1) Simetria planar: O eixo longitudinal é reto e a secção transversal da viga tem um plano longitudinal de simetria, segundo o qual as condições de apoio são, também elas

simétricas. A resultante das cargas transversais que atuam em cada secção, encontra-se nesse mesmo plano.

- 2) Variação da secção transversal: A secção transversal é constante ou varia suavemente.
- 3) Normalidade: A equação de Euler-Bernoulli pressupõe que o plano que contém a secção transversal é perpendicular ao eixo da peça antes da deformação e permanece assim após a mesma. Esta suposição é válida se a razão entre o comprimento da viga e a espessura for grande, caso das vigas esbeltas, e se a flexão da viga for pequena, hipótese das deformações infinitesimais. A rotação total deve-se apenas à rotação de flexão, sendo que esta, denominada por Θ , ocorre em relação ao eixo y e é definida pela primeira derivada dos deslocamentos transversais, $\Theta = \frac{dw}{dx}$. Contudo, se a razão entre o comprimento e espessura for pequeno, o plano que contém a secção transversal da viga não permanecerá normal ao eixo após a deformação, nem plano, e esta teoria não se aplica.
- 4) Linearização geométrica: As rotações e deformações satisfazem a hipótese das deformações infinitesimais.
- 5) Material: Assume-se que o material é elástico linear.

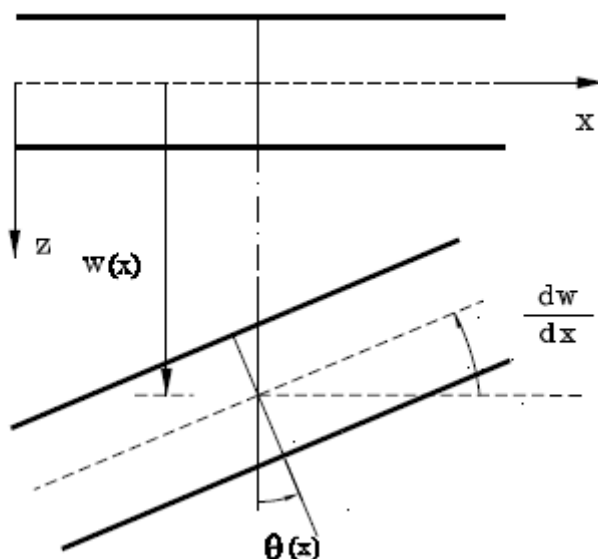


Figura 2.1: Modelo viga Euler-Bernoulli (Castro, 2009).

2.1.3.2 Elemento viga segundo a teoria de Timoshenko

O modelo de viga de Timoshenko corrige o modelo clássico ao considerar os efeitos de primeira ordem da deformação por corte. Este modelo é mais adequado do que o anterior quando se pretende estudar o comportamento dinâmico de vigas, controlo de vibrações ou sempre que a deformação de corte for significativa.

Na teoria de Timoshenko admite-se que as secções planas, inicialmente perpendiculares ao eixo da peça, permanecem planas após a deformação mas não necessariamente perpendiculares a esse eixo. O desvio sofrido é produzido pelas tensões tangenciais, que neste caso, se assume serem constantes ao longo da secção transversal. A rotação total da secção $\phi(x)$, coincidente com o declive na teoria linear, consiste em duas parcelas, sendo uma delas a rotação por flexão $\frac{dw}{dx}$ e a outra devida ao corte $-\gamma$, como se pode observar na figura 2.2.

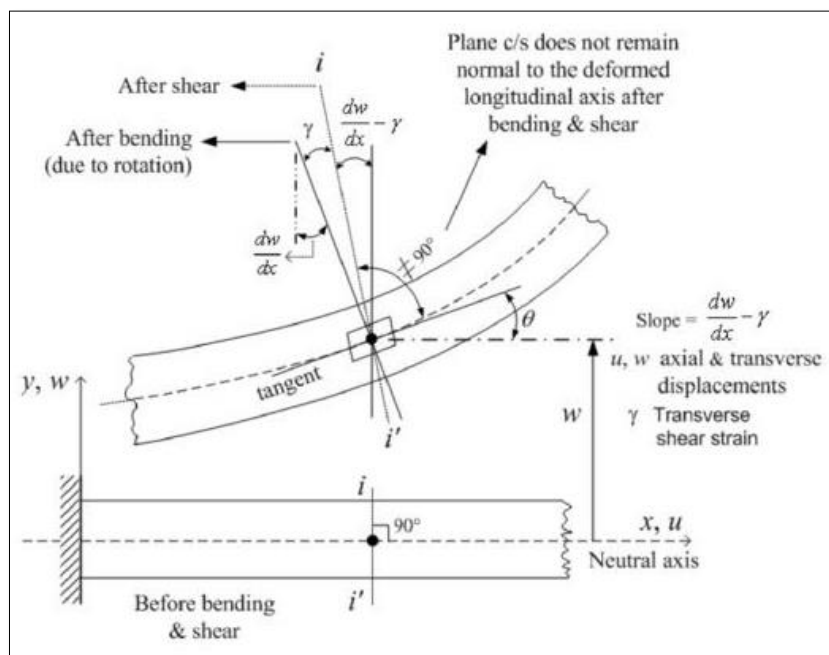


Figura 2.2: Modelo de viga de Timoshenko (Bandyopadhyay *et al.*, 2007)

2.1.3.3 Elemento viga utilizado no programa SAP2000

O programa SAP2000 utiliza para todos os casos um elemento finito baseado no modelo de viga de Timoshenko. Assim, para as peças lineares espessas, o programa considera a deformação por corte, obtendo assim a solução exata. Porém, se a peça for esbelta, o programa despreza as parcelas de corte e chega à solução baseada no modelo Euler-Bernoulli. Conclui-se, que para qualquer tipo de elemento de barra, o programa obtém soluções exatas no âmbito de uma destas duas teorias.

O desenvolvimento anterior referiu-se a peças lineares no contexto de problemas planos, com as deformações transversais segundo esse plano. Os correspondentes elementos finitos de dois nós apresentam três graus de liberdade por nó, num total de seis. No caso dos problemas espaciais, ou 3D, é necessário considerar as deformações transversais segundo duas direções ortogonais, bem como as deformações de torção. Neste caso, o elemento viga de dois nós possui 6 graus de liberdade por nó, nomeadamente 3 translações e 3 rotações, ver figura 2.3 (Cook *et al.*, 2002).

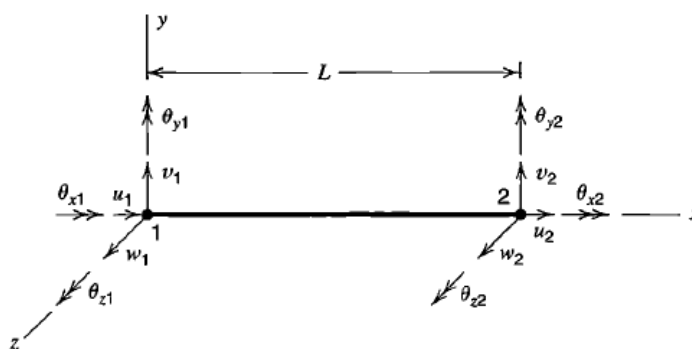


Figura 2.3: Elemento viga num sistema de coordenadas retangulares e respetivos graus de liberdade nodais (Cook *et al.*, 2002).

2.1.4 Elementos finitos planos de laje

Consideram-se habitualmente duas teorias alternativas para as lajes, ou seja, estruturas planas carregadas perpendicularmente ao seu plano, sendo elas a teoria de Kirchhoff das lajes finas e a teoria de Reissner-Mindlin das lajes espessas. A principal diferença desta em relação à primeira reside no fato de considerar a deformação associada ao esforço transversal.

Segundo Szilard (2004), considera-se que uma laje é fina quando a razão entre o vão e a espessura é superior a dez e moderadamente espessa quando a mesma relação se encontra situada entre cinco e dez. Assim, a maior parte das lajes em estruturas correntes de engenharia civil são finas. Ao eixo das peças lineares corresponde o plano médio das lajes. Será considerado um sistema cartesiano de eixos de referência com x e y no plano médio da laje e, portanto, z transversal. Se a laje está numa posição horizontal, considera-se que o sentido positivo para z, e para os deslocamentos transversais w, aponta para baixo.

2.1.4.1 Elemento laje segundo a teoria de Kirchhoff

Em relação ao comportamento das lajes de Kirchhoff admite-se que (Robalo, 2011):

- 1) Os deslocamentos dos pontos do seu plano médio são transversais a esse plano;
- 2) No plano médio, os deslocamentos transversais de todos os pontos de uma secção transversal são pequenos quando comparados com a espessura da laje;
- 3) As fibras normais ao plano médio antes da deformação permanecem retas e perpendiculares à configuração deformada do referido plano médio, ver figura 2.4. Para o referencial definido anteriormente, a rotação destas retas é dada por

$$\text{Plano } 0xz \rightarrow \Theta_x(x, y) = \frac{dw(x, y)}{dx} \quad (1)$$

$$\text{Plano } 0yz \rightarrow \Theta_y(x, y) = \frac{dw(x, y)}{dy} \quad (2)$$

- 4) As tensões normais à superfície média são desprezáveis em relação às demais tensões.

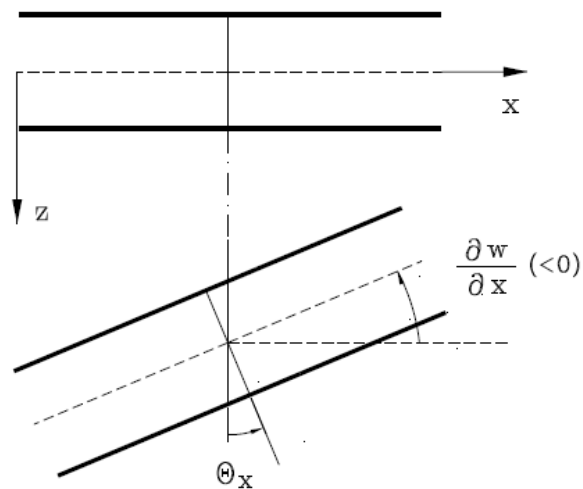


Figura 2.4: Teoria de Kirchhoff: rotação das fibras normais ao plano médio da laje (Castro, 2007).

2.1.4.2 Elemento laje segundo a teoria Reissner-Mindlin

As hipóteses anteriormente enunciadas para a teoria de Kirchhoff, com a exceção da terceira, mantêm-se válidas para a teoria de Reissner-Mindlin. Neste caso tem-se que, como se ilustra na figura 2.5, as fibras inicialmente perpendiculares ao plano médio da laje permanecem retas após deformação do elemento estrutural, mas não continuam necessariamente ortogonais à configuração deformada daquele plano (Castro, 2007). Neste caso, as rotações são definidas por

$$\text{Plano } Oxz \rightarrow \theta_x(x, y) = \frac{dw(x, y)}{dx} + \phi_x \quad (3)$$

$$\text{Plano } Oyz \rightarrow \theta_y(x, y) = \frac{dw(x, y)}{dy} + \phi_y \quad (4)$$

sendo ϕ_x e ϕ_y as componentes da rotação correspondente à deformação por esforço transversal.

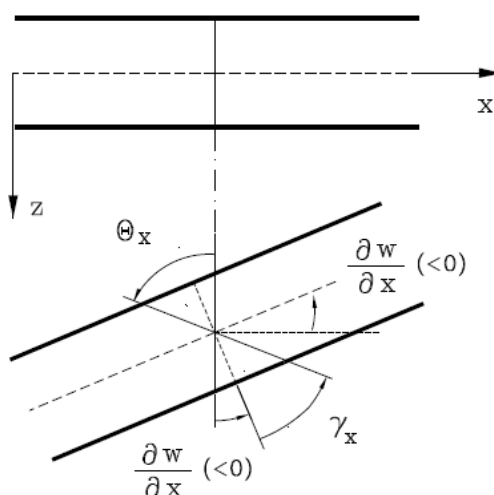


Figura 2.5: Teoria de Reissner-Mindlin: rotação das fibras normais ao plano médio da laje (Castro, 2007).

Segundo Castro (2007), esta teoria é a mais utilizada mesmo quando os elementos de laje deixam de estar em condições de serem classificadas como lajes espessas, visto que um “bom” elemento de Reissner-Mindlin deve conseguir recuperar os resultados fornecidos pela teoria de Kirchhoff quando a espessura da laje começa a diminuir. No entanto, há situações em que a diminuição da espessura pode conduzir, na implementação por elementos finitos, ao fenómeno de locking¹. Este fenómeno pode levar a resultados incorretos, tornando muito pequenos ou até nulos os valores calculados para o campo de deslocamentos. As estratégias no âmbito do MEF para resolver este problema, são múltiplas, incluindo a integração reduzida na utilização de elementos finitos quadráticos.

2.1.4.3 Elemento laje utilizado no programa SAP2000

O SAP2000 utiliza as duas formulações apresentadas anteriormente, sendo que o utilizador pode decidir se quer modelar a laje segundo a teoria das lajes finas (thin) ou das lajes espessas (thick). Na dissertação as lajes serão modeladas utilizando um modelo de casca (Shell), como o ilustrado na figura 2.6, que possui 6 graus de liberdade por nó. No entanto os três graus de liberdade deste elemento referentes às deformações de membrana são irrelevantes para o problema investigado na dissertação.

¹ Locking é um fenómeno que surge porque na definição dos elementos da matriz de rigidez há coeficientes que têm parcelas onde surge o fator h^3 , caso da parcela de flexão, e parcelas com o fator h , é o caso da parcela de corte. Quando a espessura h da laje começa a diminuir, a parcela de corte começa a predominar sobre a parcela de flexão, o que faz com que a influência desta última tenda a “desaparecer” numericamente. Para solucionar essa situação, normalmente é aplicada a técnica de integração reduzida que consiste na integração numérica da matriz de rigidez do elemento reduzindo os pontos de integração de Gauss (Castro 2007).

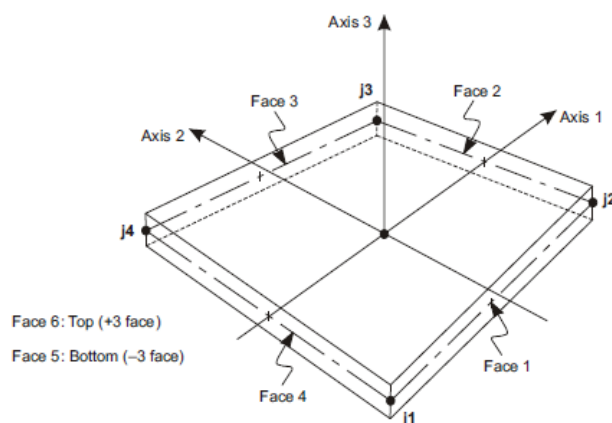


Figura 2.6: Elemento “shell” quadrilátero (SAP2000 Analysis Reference Manual, 2015).

2.1.5 Elementos finitos sólidos

A análise de sólidos, ou seja, de domínios tridimensionais, foi, durante muito tempo posta de parte, já que a exigência computacional associada aos correspondentes modelos era excessiva. Esta situação foi recentemente alterada, e as formulações de problemas planos foram simplesmente estendidas para o espaço tridimensional. Estes modelos fazem uso de elementos sólidos, que representam um campo tridimensional de tensões e podem ser agrupados em tetraedros e hexaedros ou “bricks”. Como o caso de estudo é uma laje de geometria regular, apenas abordaremos estes últimos.

Como se referiu, na formulação por deslocamentos do MEF são utilizadas funções de forma para aproximar o campo de deslocamentos no interior de cada elemento finito a partir do valor dos deslocamentos nos nós. Nem sempre é fácil, ou mesmo possível, garantir que estas garantam a continuidade dos deslocamentos entre elementos contíguos.

No caso unidimensional, podem ser utilizadas funções de forma definidas pelos polinómios de Lagrange, definidos a partir das coordenadas x_1, \dots, x_n de n nós, por

$$N_i = \frac{(x_1-x)(x_2-x)\dots[x_i-x]\dots(x_n-x)}{(x_1-x_i)(x_2-x_i)\dots[x_i-x_i]\dots(x_n-x_i)} \quad (5)$$

onde os termos entre parenteses retos são omitidos para se obter a função de forma i . Por exemplo, os polinómios lineares correspondem a $n=2$ nós, e são, respetivamente, $N_1 = \frac{(x_2-x)}{(x_2-x_1)}$ e $N_2 = \frac{(x_1-x)}{(x_1-x_2)}$.

Estas funções de forma têm particularidades próprias, tais como:

- i) Todas as funções N_i são polinómios do mesmo grau;
- ii) Para qualquer N_i , $N_i=1$ quando $x=x_i$ e $N_i=0$ quando $x=x_j$, para $i \neq j$;
- iii) O somatório de todas as funções de forma é igual à unidade, $\sum N_i = 1$.

As funções de forma de Lagrange para elementos planos retangulares são obtidas pelo produto das funções anteriores. Para um elemento retangular de quatro nós, de dimensões $2a \times 2b$, as funções de forma N_i são, (ver figura 2.7),

$$N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm y)}{4ab} \quad (6)$$

Note-se que a expressão acima tem quatro possíveis combinações dos sinais, correspondentes aos quatro nós. As funções de forma para os campos de deslocamentos u são idênticas às dos campos de deslocamentos v .

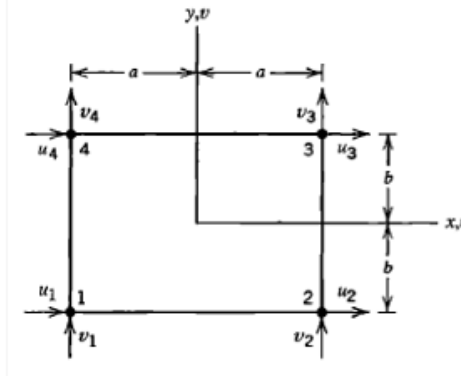


Figura 2.7: Elemento plano retangular com 8 GDL (Cook *et al.*,2002).

As funções de forma de Lagrange para elementos sólidos, correspondem a um campo de deslocamentos u , descrito pelo polinómio

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6yz + a_7zx + a_8xyz \quad (7)$$

Os campos de deslocamentos v e w são calculados por expressões similares, correspondendo a um total de 24 constantes e, portanto, 24 GDL.

Neste caso, as funções de forma para um elemento paralelepipedico são, ver figura 2.8

$$N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm y)(c \pm z)}{8abc} \quad (8)$$

e interpolam os campos de deslocamentos no interior do elemento de acordo com a expressão seguinte,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Os elementos Lagrangianos, definidos pelos de polinómios de Lagrange, têm um número de nós dado por $(i+1)^n$, sendo i o grau do polinómio e n a dimensão espacial do elemento. Então, para polinómios quadráticos temos 3, 9 ou 27 nós, o que implica a existência de nós no interior do elemento, sem ligação aos restantes elementos e que apenas servem para estabelecer um

polinómio completo. Este nó interno distingue-os dos elementos Serendipianos que são uma alternativa aos elementos Lagrangianos. Os elementos Serendipianos são construídos através do produto e da combinação linear de funções de forma com diferentes graus.

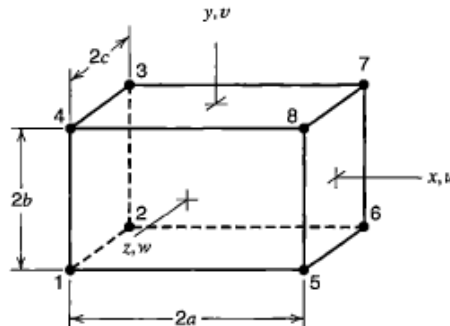


Figura 2.8: Elemento hexaédrico de 8 nós com 24 GDL (Cook *et al.*, 2002).

2.1.5.1 Elementos isoparamétricos

Se as mesmas funções de forma são utilizadas para descrever a geometria inicial do elemento e os campos de deslocamentos nos mesmos, os elementos dizem-se isoparamétricos. Este tipo de elementos é particularmente útil para o caso de elementos não regulares. No caso dos elementos regulares reduzem-se aos elementos Lagrangianos. Quando se usa este tipo de elementos, o primeiro passo é a transformação de coordenadas. No caso geral de um elemento sólido, tem-se 3 coordenadas cartesianas (sistema global de referência), sendo elas x , y , z que devem ser transformadas para o sistema local ξ , η , ζ . A vantagem de se usar este sistema relaciona-se com a mudança dos limites de integração para o cálculo das matrizes de massa e rigidez dos elementos finitos. Ou seja, os limites de integração passam a ser -1 e $+1$, usando-se habitualmente a designação de coordenadas naturais.

Fundamentalmente, como se referiu, os elementos isoparamétricos caracterizam-se por utilizarem a mesma função de aproximação para descrever a geometria do elemento através das coordenadas dos vértices e o campo dos deslocamentos através dos deslocamentos nos nós:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_i N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_i N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (10)$$

2.1.5.2 Elemento sólido implementado no SAP2000

O elemento sólido utilizado no SAP2000 para modelar estruturas em três dimensões tem 8 nós (figura 2.9) com 3 graus de liberdade por nó (translações).

O programa apresenta melhores resultados quando todos os ângulos interiores em cada face são inferiores a 180° , preferencialmente perto dos 90° , e quando a geometria do sólido se aproxima a um cubo, ou seja, não há grande variação na dimensão dos lados do sólido. Estes elementos

são baseados numa formulação isoparamétrica. Ora, como no caso de laje, o sólido é um paralelepípedo regular, conclui-se que o elemento isoparamétrico se reduz ao elemento Lagrangiano em 3D, estudado anteriormente.

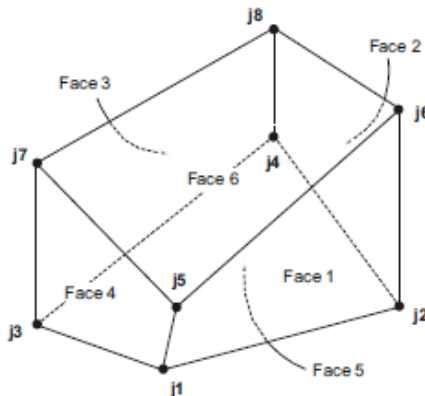


Figura 2.9: Elemento sólido com 8 nós (SAP2000 Analysis Reference Manual, 2015).

2.2 Ligação de elementos distintos

Nesta secção, que segue muito de perto Cook *et al.* (2002), é analisado o modo de ligar elementos finitos de natureza distinta. Dois elementos finitos têm natureza distinta se apresentam diferentes tipos de graus de liberdade nos nós ou mesmo nós não coincidentes, não sendo pois óbvia a forma como podem ser ligados de forma a constituir uma malha contínua.

Exemplos de ligações de elementos distintos:

- 1) Elemento plano que só tem graus de liberdade translação com elemento viga que também tem graus de liberdade rotação;
- 2) Elementos que, em virtude da sua posição relativa, apresentam nós não coincidentes.

Uma maneira de contornar este tipo de problemas é impor restrições que forcem o acasalamento dos graus de liberdade dos dois elementos, ou seja, seja estabelecida uma relação entre os seus graus de liberdade.

Este tipo de restrições pode ser imposto por uma matriz de rigidez pela transformação, similar à utilizada para a mudança de sistemas de eixos de referência,

$$[k] = [T]^T [k'] [T] \quad (11)$$

Serão analisados em seguida dois exemplos de ligações entre elementos distintos para melhor compreensão deste tema.

2.2.1 Ligação de um elemento viga a um elemento plano

Como se pode observar na figura 2.8, a extremidade do elemento viga plano, que tem rigidez de flexão e axial, é ligada num ponto arbitrário de um lado do elemento plano de quatro nós, que tem só tem graus de liberdade de translação. O elemento viga tem habitualmente uma

relação de rigidez elementar que envolve duas translações e uma rotação em cada nó, ou seja, $\{d'\} = [u_5 \ v_5 \ \theta_5 \ u_6 \ v_6 \ \theta_6]$. Neste caso, é necessário estabelecer uma relação entre os graus de liberdade do nó sobre o lado do elemento plano, ou seja $\{u_5 \ v_5 \ \theta_5\}$, e os graus de liberdade dos vértices situados nas extremidades desse lado $\{u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}$. A restrição a definir é tal que os graus de liberdade do elemento viga passam a ser $\{d\} = [u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_6 \ v_6 \ \theta_6]$.

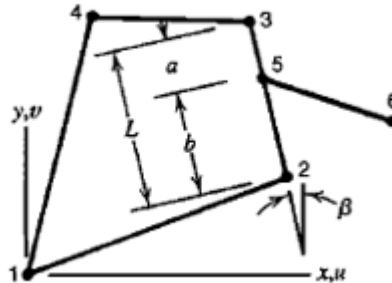


Figura 2.10: Ligação de elemento viga com nós 5,6 a elemento plano com nós 1,2,3,4 (Cook *et al.*, 2002).

A relação entre os graus de liberdade habituais no nó 5, e os necessários para conseguir ligar o elemento viga ao elemento plano é simples. Por um lado, a translação do nó 5 é determinada por interpolação linear da translação dos nós 2 e 3, em função da sua distância relativa aos mesmos. Assim, de acordo com a figura 2.10, designando por a , a distância do nó 5 ao 3, e por, $b = L - a$, a distância ao 2, vem, $u_5 = u_2 \times \frac{a}{L} + u_3 \times \frac{b}{L}$. De forma semelhante, pode calcular-se v_5 .

Por outro lado, a rotação do nó 5 é definida pela translação relativa dos nós 2 e 3, perpendicularmente à direção inicial do lado 23, dividida pelo comprimento L deste. Designando por β , o ângulo do eixo dos y para a posição inicial deste lado, no sentido direto, o deslocamento do nó 2 perpendicularmente à direção do lado é dada por $u_2 \cos \beta + v_2 \sin \beta$, e de forma similar para o nó 3, de modo que a rotação θ_5 é dada por

$$\theta_5 = \frac{u_2 \cos \beta + v_2 \sin \beta - (u_3 \cos \beta + v_3 \sin \beta)}{L} \quad (12)$$

Notando que o nó 6 não sofre qualquer alteração, pode então estabelecer-se a matriz de transformação,

$$[T] = \begin{bmatrix} T_5 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad [T_5] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ \cos \beta & \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \beta \end{bmatrix} \quad (13)$$

Onde $[I]$ é a matriz identidade de ordem 3. A matriz de rigidez do elemento viga transformada é de ordem 7, e está associada aos graus de liberdade correspondentes aos nós 2, 3 e 6. Depois de determinada a solução para estes graus de liberdade nodais, o resultado para os graus de liberdade originais do elemento viga pode ser recuperado pela operação $\{d'\} = [T]\{d\}$.

2.2.2 Ligação de um elemento laje a um elemento viga

Na modelação da estrutura de edifícios é frequentemente necessário ligar elementos laje a elementos viga. Ora o nível horizontal dos nós da laje e da viga é habitualmente distinto, mas a distância que os separa é pequena em comparação com as outras dimensões daqueles membros estruturais. Nós adjacentes da laje e viga, ou seja, que estão sobre uma mesma vertical, como é o caso dos nós 1 e 3 na figura 2.11, podem ser unidos por uma ligação rígida. Os deslocamentos da ligação podem ser descritos em função de qualquer um dos seus pontos. Considere-se, por exemplo, que este ponto é o nó da laje. Neste caso, a superfície média da laje torna-se no plano de referência do conjunto da laje e viga. Ou seja, as matrizes rigidez originais do elemento viga, ou seja, referentes ao seu eixo, são transformadas, passando os seus graus de liberdade a ficar dependentes dos da laje, e não aparecendo explicitamente na matriz global. Por outras palavras, os graus de liberdade da viga deixam de o ser.

Consideremos um elemento de viga com um nó em cada extremidade, 3 e 4, e um elemento de casca plano rectangular, com um nó em cada canto, 1 e 2. Considerou-se um elemento casca, que também inclui graus de liberdade de membrana, em vez do elemento laje. Assim, ambos os elementos têm rigidez de flexão e rigidez axial ou de membrana. Admita-se que estes quatro nós estão situados sobre um mesmo plano vertical, xz . Imagine-se agora uma ligação rígida, sem peso, entre os nós 1 e 3, e entre os nós 2 e 4. Na equação seguinte assume-se que as rotações são pequenas e estão incluídos unicamente os graus de liberdade necessários para descrever a deformação no plano xz . Na extremidade esquerda, a transformação no plano xz , ou seja, omitindo os restantes graus de liberdade do nó do elemento casca (v_1, θ_{x1}), é

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ w_3 \\ \theta_{y3} \end{Bmatrix} = [T_b] \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_{y1} \end{Bmatrix} \quad \text{onde } [T_b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

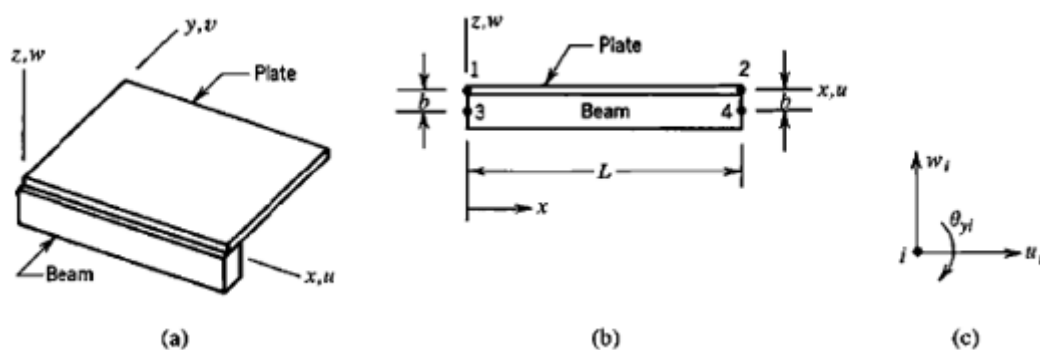


Figura 2.11: (a) Ligação de um elemento viga a um elemento laje. (b) Corte transversal. (c) nó arbitrário com GDL usado na transformação. (Cook *et al.*, 2002)

A transformação para a outra extremidade é similar. A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais da viga referida aos graus de liberdade da laje passa a ser

$$[k] = [T]^T [k'] [T] \quad (15)$$

$$\{r\} = [T]^T \{r'\} \quad (16)$$

Onde,

$$[T] = \begin{bmatrix} T_b & 0 \\ 0 & T_b \end{bmatrix} \quad (17)$$

Para a transformação definida pelas equações (14) a (17) ser aceitável, o conjunto viga-laje, envolvendo apenas os graus de liberdade da laje, deveria apresentar rigidez equivalente à existente antes da consideração dos elementos rígidos. E realmente, para estados de flexão pura e/ou alongamento puro existe tal equivalência. Mas quando a curvatura varia ao longo de x , o conjunto viga-laje é demasiado flexível.

Por exemplo, considere-se um estado de deformação

- (i) sem esforço axial, ou seja, com translações nulas dos nós da casca, 2 e 4, e
- (ii) simetricamente fletido em dupla curvatura, ou seja, com rotações iguais no plano xz , $\theta_{y4} = \theta_{y2}$.

O modo de deformação do conjunto viga-laje deveria apresentar um eixo comum, ou, mais corretamente, um plano neutro comum, resultante da sua ligação, e a secção conjunta deveria manter-se plana; em vez disso, cada um destes elementos apresenta o seu próprio plano neutro, e a secção apresenta uma descontinuidade na interface laje-viga, subestimando-se a rigidez de flexão. Se a malha de elementos finitos for refinada, o estado de deformação em cada elemento tende a aproximar-se de um estado com curvatura constante, e o erro anterior tende para zero.

2.3 Elementos sólidos vs. elementos planos e lineares

Apesar de todos os trabalhos apresentados em seguida, se distinguirem do estudo desenvolvido neste trabalho em algum ou outro aspeto, é interessante apresentar algumas conclusões retiradas de trabalhos que também tiveram como objetivo a distinção entre a modelação em 2D e 3D.

Duan, L. (2015) refere que os modelos de elementos finitos 3D são utilizados para modelar estruturas complexas, como é o caso de pontes esbeltas, estruturas com inclinação superior a 45° , ou até sistemas viga-laje com vigas de diferentes rigidezes de flexão. Os modelos com elementos finitos 3D também são usuais na análise de cargas móveis já que preveem uma distribuição de carga precisa. Contudo, o autor refere que este tipo de análise requer familiaridade com sistemas sofisticados que são normalmente dispendiosos, concluindo que esta pode não compensar devido ao tempo adicional requerido quer para modelar e correr o programa, quer para analisar os resultados, comparativamente com programas de MEF mais simples.

Umesh C. Puri (2006), publicou um estudo comparativo usando elementos planos e sólidos de lajes de fundação (ensoleiramento), esclarecendo de início que a análise de ensoleiramentos com sólidos 3D é extremamente dispendiosa em termos de tempo de modelação e interpretação de resultados, não sendo por isso exequível. Este autor, modelou um ensoleiramento usando três modelos: (i) elementos “thin plate” que não consideram deformação por esforço transversal (teoria de Kirchhoff), (ii) elementos planos espessos, uma vez que o ensoleiramento é relativamente espesso e por isso, a deformação por esforço transversal deve ser incluída, (iii) elementos sólidos com 8 nós baseados na formulação isoparamétrica. O autor concluiu que as deformações obtidas por elementos que consideram o esforço transversal são 7 a 10 %

superiores em relação às que não consideram. Concluiu também que as deformações para os elementos que consideram o esforço transversal se aproximam das obtidas para os elementos sólidos, sendo que estes modelos deformam mais e produzem menores valores de momento fletor.

Ghaedi *et al.* (2015) apresentaram um artigo que tenta mostrar o efeito da modelação com elementos finitos 2D (estado plano de deformação) e 3D em barragens sujeitas a ação sísmica. A barragem escolhida pelos autores foi a barragem Kinta, na Malásia e é feita uma análise dinâmica não linear (nonlinear dynamic time history analysis). Os elementos sólidos usados são definidos por uma formulação isoparamétrica. Concluíram que os deslocamentos horizontais tanto no topo como na base, para ambos os modelos têm diferenças insignificantes. Em relação à crista, esta diferença já é significativa, 16.7 %. Quanto às tensões máximas são 14.25 % maiores nos modelos 2D. Assim, os autores recomendam a análise de barragens em modelos 3D para melhores resultados. (Note-se, porém, que neste caso os elementos 2D são para estado plano de deformação.)

O estudo desenvolvido por Porto *et al.* (2012) teve como objetivo avaliar a precisão dos métodos simplificados em relação a métodos mais rigorosos, do ponto de vista teórico, na representação do sistema geotécnico. O solo é modelado de duas maneiras: a primeira com um conjunto de molas linearmente elásticas e mutuamente independentes, discretas e rigorosamente espaçadas, a segunda com elementos sólidos, simulando o solo como contínuo. Conclui-se que embora o modelo de molas seja bastante simplificado, as diferenças em relação ao modelo de elementos tridimensionais não são muito grandes do ponto de vista do dimensionamento estrutural.

Por fim, Araujo *et al.* (2014) analisa a modelação da fundação direta de uma torre eólica que se pode considerar um tipo especial de estrutura pela sua geometria e carregamento (pêndulo invertido). O artigo apresenta um estudo comparativo entre modelos finitos utilizando elementos de casca e de elementos sólidos. Conclui-se que os modelos sólidos são os mais adequados para o comportamento estrutural, podendo tornar-se uma solução mais económica e fornecer informações adicionais como os esforços nos parafusos e a distribuição de tensões ao longo da altura.

Pela leitura destes e outros documentos, pode-se perceber que a utilização de modelos usando elementos sólidos conduz a soluções mais precisas, não sendo muitas vezes essa precisão tão relevante que compense a criação deste tipo de modelo. Serve o próximo capítulo, para estudar a importância da utilização deste tipo de modelos no caso de lajes vigadas.

3 CASO DE ESTUDO

Os elementos estruturais lineares estudados nesta dissertação são prismáticos, com secção retangular, e sem quaisquer imperfeições, *i.e.*, “ideais”. Os elementos estruturais laminares são planos, de planta retangular, espessura constante e também isentos de imperfeições. É adotado um sistema de eixos elementar ortogonal, de modo a que, na configuração indeformada, (i) para os elementos lineares, o eixo x (1) coincide com o eixo longitudinal e os eixos y (2) e z (3) correspondem aos eixos principais centrais de inércia da secção transversal, e (ii) para os elementos laminares, os eixos x (1) e y (2) estão alinhados com as suas direções principais em planta e z (3) com a sua espessura.

O material considerado é homogéneo, isotrópico, elástico linear com módulo de elasticidade 31 GPa e coeficiente de Poisson 0.2. Como referência, estas são as propriedades de um betão de classe de resistência C25/30, ou seja, cujo valor característico da tensão de rotura à compressão é 25 MPa – todavia, como a análise efetuada é elástica linear, este último parâmetro é irrelevante (a não ser, porventura, na análise da grandeza das tensões). Embora o objetivo deste estudo se concentre na análise quase-estática do tipo de estruturas referido, é possível, de acordo com o teorema estático da análise limite, e comum, de acordo com as normas de verificação estrutural, utilizar para o dimensionamento de estruturas de betão armado os esforços determinados ignorando a armadura e admitindo que todo o betão tem o comportamento elástico linear que, na realidade, só apresenta na compressão unidirecional inicial.

Nos exemplos apresentados, os elementos estruturais são muitas vezes nomeados “laje” e “viga”. Esta é uma simplificação da escrita, tal como, aliás, os termos linear e laminar, dado que na realidade, não existe uma fronteira física entre a laje e as vigas, podendo-se admitir que a região da sua intersecção é parte constituinte tanto da primeira como das segundas, dependendo de qual o elemento que se esteja a analisar.

Uma última nota refere-se à divisão em capítulos adotada. Embora seja usual separar em dois capítulos os modelos dos resultados e sua análise, optou-se no caso presente pela sua reunião num só capítulo, com o fim de facilitar a leitura.

3.1 “Laje vigada” simples em consola

Quando se utiliza um programa de modelação e análise estrutural, é, obviamente, fundamental conhecer os métodos nele implementados e as hipóteses em que estes se baseiam, para se conseguir ter uma posição crítica em relação aos resultados por ele determinados. Ou seja, a simplicidade de modelação e análise que estes programas oferecem constituem um pau de dois bicos: podem, de facto, facilitar muito o trabalho do analista e projetista, incluindo a otimização da solução, e proporcionar-lhe uma forte confiança nos resultados; porém, se ele não possuir

conhecimento e capacidade que lhe permitam validar esses resultados, aquela facilidade pode revelar-se extremamente perigosa. É importante ter sempre presente a responsabilidade destes profissionais, uma vez que a sua atividade pode ter graves consequências, inclusivamente em termos de vidas humanas.

Com o objetivo de estudar o funcionamento do programa utilizado, o SAP2000 (Computers & Structures, Inc, 2015), e o tipo de resultados que este pode determinar, começa-se por analisar um exemplo básico, que proporcionará a comparação dos resultados determinados por este programa com a solução “analítica”, bem como a sua análise crítica. É importante, quando se aplicam qualificativos como básico e analítico, como na frase anterior, aos modelos com elementos finitos sólidos, ter em mente que eles são desconhecidos da generalidade dos projetistas (e dos mestres em engenharia civil), e que os resultados analíticos existentes se reportam a modelos muito simplificados, como os estudados em Resistência dos Materiais, (Dias da Silva, 2013).

Considere-se uma “laje regular” assente sobre uma viga, com comprimento de 10 m, como se ilustra na figura 3.12, que inclui as dimensões. Desta feita o uso das aspas deve-se a que esta laje é pouco ortodoxa: trata-se, realmente, de uma laje degenerada, uma vez que uma laje apresenta, por definição, duas dimensões com um valor muito superior à terceira, o que não é obviamente o caso. A extremidade esquerda deste sistema tem apenas a componente inferior encastrada num dos modelos estudados e as duas num outro. Na outra extremidade atua uma carga pontual unitária vertical, no plano de simetria da secção, com o sentido negativo do eixo z, ao nível da face superior da laje. Ou seja, representa efetivamente uma viga em T em consola. O facto de se encastrar apenas a componente inferior deve-se à utilização de um offset no modelo com elementos lineares e planos. Este constrangimento não acontece quando se ligam as duas componentes com “rigid links”, opção infelizmente demasiado laboriosa, nem, obviamente, nos modelos com elementos sólidos.

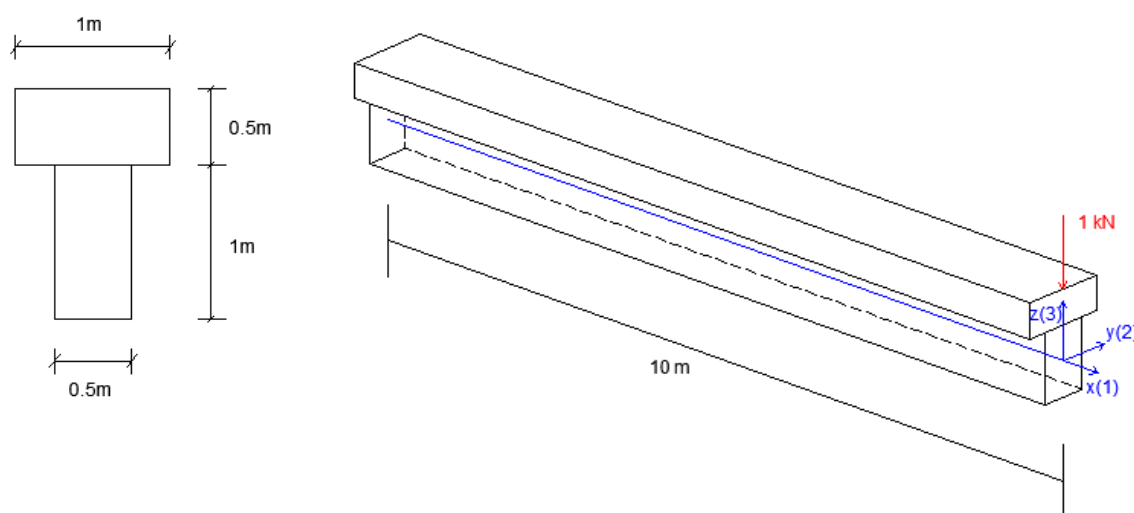


Figura 3.12: Configuração inicial da laje vigada em consola. Referencial adotado.

Seguem-se duas notas com alguma relevância para o desenvolvimento posterior: (i) são utilizados os termos viga e laje para duas componentes estruturais cuja geometria é idêntica – isto tem a ver com a terminologia habitual em estruturas, mas é evidente que uma laje deste

tipo também poderia ser designada de viga deitada, (ii) formando este conjunto uma viga em T, poderia ainda ser modelado, neste programa, como uma viga em T, ou seja, uma viga prismática de secção não retangular: os resultados teriam interesse para a análise comparativa, mas este modelo afasta-se do tema em estudo. Assim, designar-se-á, por vezes, este elemento estrutural de laje vigada, embora essa seja uma opção polémica.

Na forma mais simples, e habitual, de definir um modelo deste tipo no SAP2000, o eixo da componente viga está à mesma cota que o plano médio da componente laje. Assim, para corrigir a posição relativa dos dois elementos, de modo a que o modelo se aproxime do problema real, é necessário reposicioná-los.

Este reposicionamento é possível de duas maneiras: (i) definindo a cota de cada um dos elementos corretamente – o que implica que a ligação entre os dois elementos tenha de ser definida posteriormente ou, (ii) opção mais comum, definindo o desvio ou correção da posição do elemento viga, cuja designação anglo-saxónica habitual é “offset”.

É importante notar que estas duas opções são consideradas de forma distinta pelos algoritmos de modelação deste tipo de programas. Enquanto que no primeiro caso os dois elementos finitos estão, a priori, efetivamente desligados, sendo necessário que o analista indique o local e o tipo de ligação entre os dois, no segundo eles não só estão, a priori, ligados, como um deles é considerado escravo do segundo, como se explicará mais à frente. Note-se que este programa só possibilita a aplicação do “offset” a elementos lineares. No segundo caso, portanto, considera-se um “offset” para reposicionar os elementos lineares, com valor $z = -0.75$ m, ou seja, para baixo e dado pela soma da meia altura das duas componentes.

Uma terceira possibilidade para modelar este problema, consiste na utilização de elementos sólidos: neste caso não são necessárias quaisquer aproximações ou considerações do género das apresentadas para os outros dois modelos. Nesta dissertação apenas são apresentados o segundo e o terceiro modelos.

Por equilíbrio estático, o valor do momento fletor em qualquer secção da viga é dado pelo produto do valor da carga (1) pela distância desta à referida secção,

$$M_{ext} = 1(x - L) = x - L \quad (18)$$

O valor correspondente do momento, à esquerda ou à direita, produzido pelas cargas aplicadas e reações será designado, neste trabalho, *momento exterior*. Por outro lado, as resultantes de tensões numa dada secção incluem o *momento interno*. Claro que, encontrando-se a estrutura em equilíbrio estático, estes valores, ou seja, o momento externo e o momento interno, são idênticos e dados, a menos do sinal, pelo momento fletor. No entanto, para efeito da análise de resultados é por vezes conveniente a referência a um ou ao outro.

3.1.1 Modelo com elementos planos e lineares

A malha de elementos finitos inicial tem 0.25 m de lado nos elementos planos usados para a componente laje e 0.25 m de comprimento nos elementos lineares usados para a componente viga, de modo que os nós dos primeiros se encontram alinhados verticalmente com os nós dos segundos, ver figura 3.13, perfazendo 160 elementos finitos planos e 40 lineares.

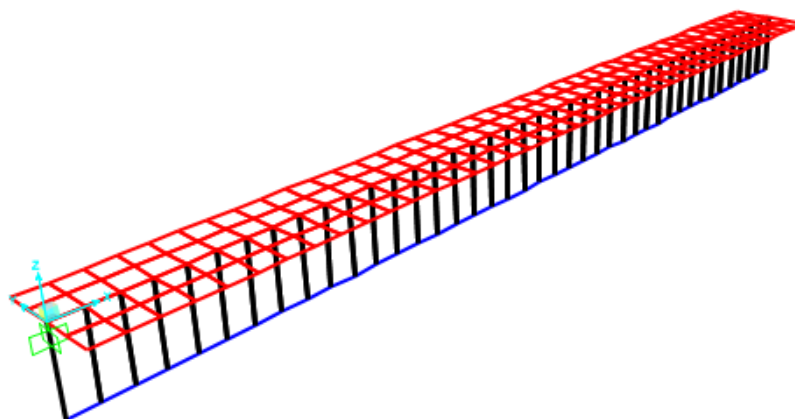


Figura 3.13: Representação do modelo no programa SAP2000: elementos planos a vermelho, lineares a azul, offset a preto, encastramento a verde e sistema local de eixos a azul petróleo.

Seguidamente, procede-se à análise propriamente dita no programa. Por defeito, o programa apresenta os valores dos esforços nos nós. Nos elementos laminares estes encontram-se a meia altura do elemento e nos elementos lineares no centro de gravidade da secção, mesmo quando estes são sujeitos a um offset. De facto, dada a geometria do problema e o tipo de carregamento, o esforço axial é nulo em qualquer secção. Mais ainda, antes da aplicação do offset, o eixo do elemento linear está contido no plano médio do elemento laminar, de modo que o carregamento considerado também não produz esforço axial nas duas componentes. Todavia, depois do offset, tem-se uma excentricidade entre aquele eixo e aquele plano médio que dá origem a um “esforço axial” em cada uma das duas componentes. O esforço axial no conjunto destas duas componentes permanece, obviamente, nulo o que quer dizer que os esforços axiais nas duas componentes são simétricos $N_{viga} = -N_{laje}$: tração no elemento superior e compressão no inferior.

Assim, antes do offset, o momento interno numa dada secção é dado apenas pela soma do momento interno em cada um dos dois elementos; mas após o offset a este valor é ainda necessário considerar o valor do esforço axial nas componentes,

$$M_{total} = M_{viga} + M_{laje} + N_{viga}(z_{arbitrário} - z_{C.G.viga}) + N_{laje}(z_{arbitrário} - z_{C.G.laje}) \quad (19)$$

em que $z_{arbitrário}$ é a cota da fibra arbitrária relativamente ao qual se determina o momento, e que será habitualmente o eixo do elemento composto. Contudo, uma vez que $N_{viga} = -N_{laje}$,

$$M_{int} = M_{total} = M_{viga} + M_{laje} + N_{laje}(z_{C.G.viga} - z_{C.G.laje}) \quad (20)$$

concluindo-se que neste caso ($N_{viga} = -N_{laje}$), o momento total não varia com $Z_{arbitrário}$, e que para o obter basta adicionar à soma dos momentos em cada uma das componentes o produto do esforço axial num deles (ou o seu simétrico) pelo valor do offset.

Ao longo de cada elemento finito, o diagrama de esforço axial é constante, uma vez que as funções de forma para o deslocamento axial são lineares e o esforço axial é proporcional à derivada do mesmo, e o diagrama de momento fletor é linear, pois as funções de forma para o deslocamento transversal são cúbicas e o momento fletor é proporcional à segunda derivada do mesmo.

No programa, para consultar os resultados é utilizado o comando “section cut” que, como o nome indica, permite primeiro definir uma superfície de corte plana imaginária, perpendicular ao eixo da viga, e que a “divide” em duas partes, e, seguidamente, integra as tensões exercidas por uma destas partes sobre a outra, ou o seu produto pela distância a um dado eixo, determinando os esforços resultantes (forças e momentos).

Cada uma destas superfícies de corte define duas facetas, sendo as resultantes de tensões determinadas pelo programa tanto numa como na outra. Sendo o corte feito entre dois elementos finitos, os esforços nas duas facetas serão geralmente distintos. Esta característica dos elementos finitos por deslocamentos é efetivamente uma violação das relações de equilíbrio, que só pode ser resolvida, ou atenuada, por refinamento da malha, ou por técnicas de pós-processamento de suavização dos campos: porém num estudo como o efetuado nesta dissertação evitou-se a utilização destes últimos porque realizam sobretudo uma maquiagem dos resultados. Para ler os esforços apresentados no quadro 3.1 que, com a exceção do último, se referem à faceta direita (“maior” valor de X), foi necessário realizar 11 “section cuts”. Note-se ainda que, como se explicou acima, sendo o momento interno independente da cota da fibra relativamente à qual é calculado, se indicou nos “section cuts” que o momento deveria ser determinado relativamente à cota do eixo da viga, de modo que o momento na laje indicado pelo programa ($M_{laje,eixoviga}$), ver figura 3.14, já incluía o binário associado ao esforço axial, tendo-se então que $M_{int} = M_{viga} + M_{laje,eixoviga}$.

Assim, no quadro 3.1, as primeiras quatro colunas apresentam os esforços nas componentes inferior e superior, a quinta coluna a sua resultante dada pela expressão anterior, a sexta o momento exterior anteriormente definido e a última o erro relativo entre estes dois.

Uma análise deste quadro, mostra que tanto o momento fletor como o esforço axial aumentam à medida que aumenta a distância à carga aplicada, à exceção da zona do apoio ($x=1$ m), onde há uma quebra desta tendência. Não foi encontrada qualquer justificação razoável para esta irregularidade. Conclui-se que o modelo utilizado não permitiu obter uma igualdade perfeita entre o momento interno, calculado com os esforços determinados pelo programa e o momento externo, calculado analiticamente da forma exposta acima.

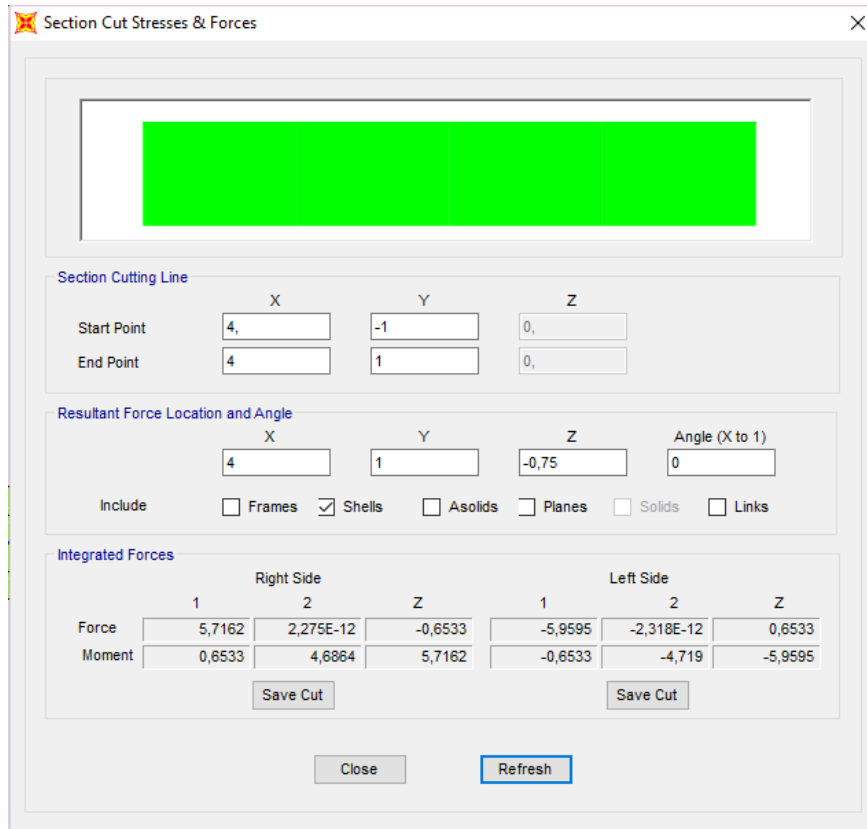


Figura 3.14: Demonstração de uma das “section cut” executadas.

X	M_{viga}	$M_{laje,eixoviga}$	N_{viga}	N_{laje}	M_{int}	M_{ext}	$Erro$
[m]	[kNm]		[kN]		[kNm]		[%]
0	-4.23	-5.77	-7.21	7.21	-10.00	-10.00	0
1	-1.98	-5.24	-8.59	8.59	-7.21	-9.00	19.8
2	-1.71	-6.29	-7.91	7.91	-8.00	-8.00	0
3	-1.53	-5.47	-6.69	6.69	-7.00	-7.00	0
4	-1.31	-4.69	-5.72	5.72	-6.00	-6.00	0
5	-1.10	-3.90	-4.74	4.74	-5.00	-5.00	0
6	-0.88	-3.12	-3.77	3.77	-4.00	-4.00	0
7	-0.67	-2.34	-2.80	2.80	-3.00	-3.00	0
8	-0.45	-1.55	-1.82	1.82	-2.00	-2.00	0
9	-0.23	-0.77	-0.85	0.85	-1.00	-1.00	0
10	0.02	-0.02	-0.12	0.12	0.00	0.00	0

Quadro 3.1: Esforços determinados no SAP2000 por meio de “section cuts”.

3.1.2 Modelo com elementos sólidos

O modelo é composto por 240 elementos sólidos de oito nós no total, sendo que 160 correspondem ao elemento superior com dimensões $0.25 \times 0.25 \times 0.5 \text{ m}^3$ e os restantes ao elemento inferior, com dimensões $0.25 \times 0.25 \times 1.0 \text{ m}^3$, figura 3.15. Note-se que para que dois sólidos sejam conectados automaticamente é necessário fazer coincidir os nós de ambos. As dimensões dos elementos da componente inferior afastam-se um pouco da uniformidade desejada – para fazer uma malha totalmente uniforme seria necessário o dobro de elementos finitos para a componente superior e o quádruplo para a inferior, ou seja, 640. Todos os nós da extremidade esquerda estão fixos.

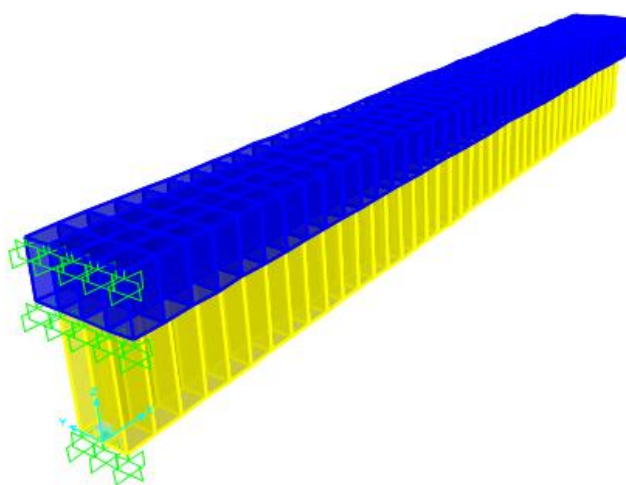


Figura 3.15: Representação do modelo de elementos sólidos no programa SAP2000.

Dada a pouca familiaridade com os modelos de elementos sólidos, foi necessário estudar meticulosamente o método usado no programa para calcular os esforços. Assim, concluiu-se que é possível calcular as resultantes de forças e de momentos, à esquerda e à direita de uma dada secção, para cada elemento, utilizando novamente o comando “section cut”. Os resultados apresentados no quadro 3.2 referem-se à faceta direita de cada corte, tal como anteriormente se explicou.

Os valores neste quadro permitem constatar de novo que o esforço axial é simétrico na laje e na viga. Por esta razão, o momento total no conjunto viga-laje, é a soma dos respetivos momentos, se estes forem determinados relativamente a uma mesma fibra. Por isso, tal como no caso anterior, os momentos apresentados, calculados no programa, referem-se à cota do eixo da componente inferior. Note-se que existe uma irregularidade nos valores para $x=0$, já que as forças axiais não são simétricas, o que contraria a tendência observada até esse ponto. Verifica-se que, com a exceção desta secção, se volta a verificar igualdade entre o momento externo e interno.

X	M_{viga}	$M_{laje,eixoviga}$	N_{viga}	N_{laje}	M_{total}
[m]	[kNm]		[kN]		[kNm]
0	-3.51	-7.81	-7.03	9.67	-11.3
1	-2.00	-7.00	-8.64	8.64	-9.0
2	-1.67	-6.33	-7.91	7.91	-8.0
3	-1.57	-5.43	-6.69	6.69	-7.0
4	-1.36	-4.64	-5.72	5.72	-6.0
5	-1.14	-3.86	-4.74	4.74	-5.0
6	-0.93	-3.07	-3.77	3.77	-4.0
7	-0.71	-2.29	-2.80	2.80	-3.0
8	-0.49	-1.51	-1.82	1.82	-2.0
9	-0.24	-0.76	-0.88	0.88	-1.0
10	0.06	-0.06	-0.13	0.13	0.0

Quadro 3.2: Esforços determinados no SAP2000 para o conjunto viga-laje por meio de “section cuts”.

3.2 Laje vigada

O problema que se passa a estudar é apresentado em Appleton (2013). Trata-se de uma laje vigada, de espessura 0.15 m. A laje está diretamente apoiada em vigas, com secção 0.20x0.60 m², que definem 4 painéis. As vigas apoiam-se em 9 pilares, ver figura 3.16, de secção quadrada centrada no ponto de intersecção do eixo das vigas, o qual, no modelo numérico, é considerado com os deslocamentos impedidos. Para os modelos com elementos planos e lineares, o programa só permite associar apoios à posição dos nós anterior à aplicação do offset, ou seja, na intersecção do eixo das vigas com o plano da laje. Além disso, a definição destas condições de apoio no presente estudo não foi a mais adequada – no plano da laje, teria sido mais razoável impedir apenas os movimentos de corpo rígido, para o que bastariam três apoios simples em vez dos nove duplos utilizados.

A laje encontra-se sujeita à ação do peso próprio, peso do revestimento, 1.5 kN/m², e à sobrecarga de utilização com valor de 4.0 kN/m², todas uniformemente distribuídas. O revestimento e a sobrecarga estão aplicados na área delimitada pelo eixo das vigas exteriores.

Quando se pretende modelar uma estrutura como a representada, deve ponderar-se qual o tipo de modelo a desenvolver. O modelo mais simples, com exceção do modelo em grelha, é com elementos planos e lineares, mantendo os eixos das vigas no plano médio da laje, que será o Modelo 1. Na verdade, este é o modelo mais habitualmente usado e o menos trabalhoso, dado que o programa inclui procedimentos para ligar automaticamente estes elementos, ou seja, definir nós comuns às malhas de elementos planos e lineares. Todavia, este modelo distancia-se muito do que é geralmente construído em obra, visto que o plano médio da laje está quase sempre na parte superior das vigas (também se pode ter o oposto em ensoleiramentos gerais e não só). Para tentar aproximar de forma mais correta este aspeto, ainda com elementos planos e lineares, são definidos dois novos modelos, o 2 e o 3. Mantendo sempre a altura total da viga, no Modelo 2 é aplicado um offset maior, de maneira a que o conjunto viga e laje simulem a

viga real, ou seja, a face superior do modelo da viga corresponda à face inferior do modelo da laje, o que leva a um defeito de matéria, acima da viga e fora do perímetro da laje, ver quadro 3.3. No Modelo 3 é aplicado um offset menor de maneira a que a altura do modelo de viga seja igual à altura total, ou seja, a face superior dos modelos da viga e da laje coincide, ocorrendo de novo um erro, desta feita por excesso de material, ver quadro 3.3. O recurso a elementos finitos sólidos oferece um controlo total da geometria e, como tal, é definido o Modelo 4, ver quadro 3.3.

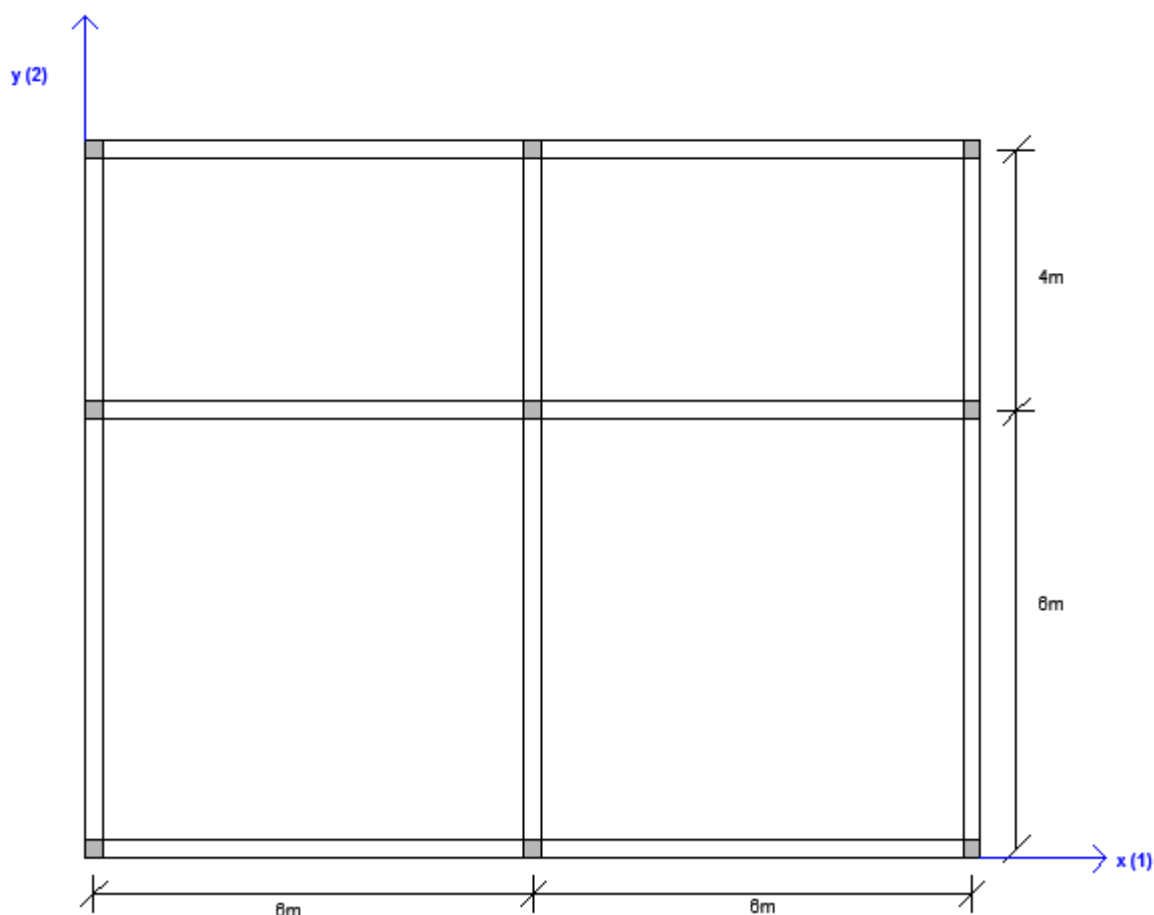
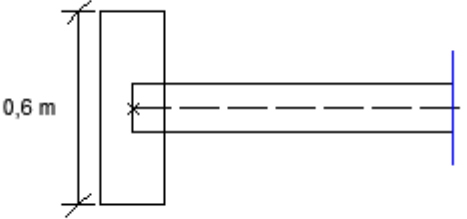
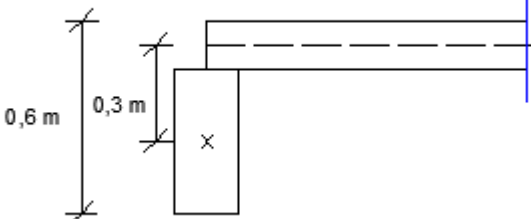
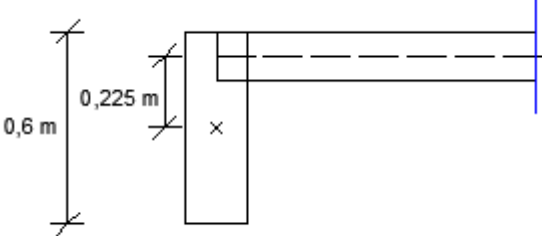
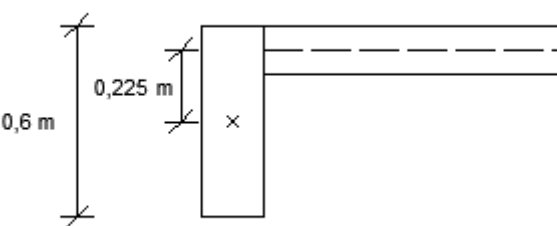


Figura 3.16: Planta da laje.

Nesta fase, deve-se compreender que ao usar modelos com elementos planos e lineares, está-se a admitir uma série de hipóteses simplificativas, como seja a de que as secções inicialmente planas e as fibras normais inicialmente retas assim se manterão após a deformação. Estas simplificações do modelo matemático traduzem-se em deformações, deslocamentos e esforços um pouco diferentes dos reais. Os elementos sólidos dão-nos a solução o mais próxima possível da real, sendo o único erro, o resultante da linearidade geométrica, ou seja, hipótese das pequenas deformações. Note-se que se está a admitir que o material usado no problema real é homogéneo, isotrópico e elástico linear, como se definiu inicialmente. Porém, dada a muita maior complexidade inerente ao desenvolvimento de modelos com elementos finitos sólidos e o muito maior custo em termos de tempo de cálculo, os modelos com elementos sólidos só devem ser utilizados para construir pequenos modelos, de peças simples ou de pormenores de

uma estrutura maior. É impensável criar um modelo de um edifício com elementos sólidos e analisar o mesmo da forma habitual. Neste estudo, em que, apesar de tudo, os modelos não são excessivamente grandes, o objetivo é, justamente, determinar a grandeza dos erros em que se incorre quando se utilizam os modelos simplificados baseados em elementos lineares e laminares.

A análise dos esquemas representados no quadro mostra que o Modelo 1 e o Modelo 4 são, respetivamente, o mais distante e o mais próximo do problema real.

<p>Modelo 1: elementos finitos lineares e laminares, com excentricidade nula entre o plano médio da laje e os eixos das vigas. As vigas exteriores e interiores são iguais.</p>	
<p>Modelo 2: elementos finitos lineares e laminares, considerando uma excentricidade de 0,3 m entre o plano médio da laje e os eixos das vigas. As vigas exteriores e interiores são iguais.</p>	
<p>Modelo 3: elementos finitos lineares e laminares, considerando uma excentricidade de 0,225 m entre o plano médio da laje e os eixos das vigas exteriores. As vigas interiores são como no Modelo 2.</p>	
<p>Modelo 4: elementos finitos sólidos</p>	

Quadro 3.3: Representação dos quatro modelos desenvolvidos.

3.2.1 Estudo de convergência:

Sempre que se procede a uma análise por elementos finitos, é necessário efetuar uma análise da evolução do erro com o refinamento da malha, para assegurar que para a malha finalmente utilizada, o erro numérico resultante da discretização é menor que uma tolerância admissível. Para a laje nos Modelos 1 a 3, considera-se inicialmente uma malha de elementos quadrangulares de 100 cm de lado (malha larga), a qual é gradualmente refinada (malhas média, fina e muito fina) dividindo sucessivamente este comprimento por dois (50 cm, 25 cm e 12.5 cm). Quanto aos elementos lineares, uma vez que eles estão ligados aos planos, o programa procede automaticamente à definição da respetiva malha, de modo a que os seus nós coincidam com os dos elementos planos. Já no Modelo 4, como os painéis interiores têm $5.8 \times 5.8 \text{ m}^2$ e $5.8 \times 3.8 \text{ m}^2$, a malha inicial tem elementos hexaédricos com dimensões $1.16 \times 1.16 \times 0.15 \text{ m}^3$ e $1.16 \times 0.95 \times 0.15 \text{ m}^3$, ver Anexo A. Assim, estes primeiros elementos têm uma geometria talvez demasiado distorcida (Felippa, 2015). Por outro lado, os elementos finitos utilizados para modelar as vigas, têm dimensões compatíveis com as dos painéis anteriores e que possibilitam a simulação das mesmas condições de apoio, ou seja $1.16 \times 0.2 \times 0.15 \text{ m}^3$, e $0.2 \times 1.16 \times 0.15 \text{ m}^3$ e $0.2 \times 0.95 \times 0.15 \text{ m}^3$, ver anexo A. Os pilares foram modelados usando elementos com dimensões de $0.2 \times 0.2 \times 0.15 \text{ m}^3$, de modo a que todos os sólidos tivessem nós coincidentes para poderem estar conectados entre si.

Avaliou-se o valor do deslocamento vertical do ponto central do painel inferior esquerdo, ou seja, de coordenadas em planta (3,3), situado a meia altura da laje sendo que no caso da malha de elementos sólidos, foi determinado no ponto correspondente a meia altura da laje (3,3,0.525). O deslocamento da malha larga do Modelo 4 foi obtido através de uma média, visto que não possuía o referido ponto nesta malha. Os resultados apresentam-se no quadro 3.4 e são ilustrados na figura 3.17.

Malha	Deslocamento [m]							
	Modelo 1	Erro [%]	Modelo 2	Erro [%]	Modelo 3	Erro [%]	Modelo 4	Erro [%]
larga	-0.00787	0.253	-0.00617	4.932	-0.00605	3.952	-0.003415	25.922
média	-0.00789	0.127	-0.00588	0.513	-0.00582	0.518	-0.00461	10.311
fina	-0.00788	0.254	-0.00585	0.171	-0.00579	0.173	-0.00514	0.000
muito fina	-0.00786	-	-0.00586	-	-0.00578	-	-0.00514	-

Quadro 3.4: Deslocamento vertical do ponto central do painel inferior esquerdo para os quatro níveis de refinamento.

O erro relativo neste quadro é dado pela diferença dos valores obtidos por duas malhas sucessivas dividido pelo valor para a mais refinada.

O Modelo 1, que não considera a excentricidade entre o plano médio da laje e o eixo das vigas convergiu mais rapidamente. Aos restantes modelos correspondem menores valores para o deslocamento, o que permite confirmar que ignorar aquela excentricidade resulta numa estrutura muito mais flexível que a real, como é natural, uma vez que se está a aproximar o material da estrutura do plano médio dos seus centros de massa.

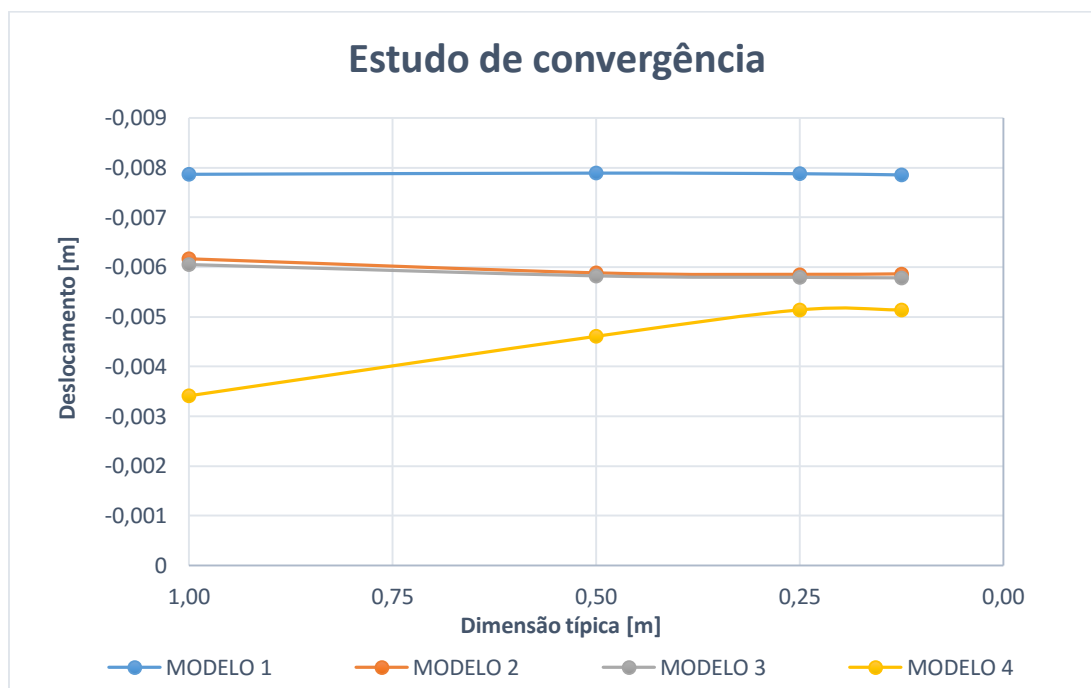


Figura 3.17: Valores do deslocamento para os quatro níveis de refinamento.

Como se pode observar tanto no quadro 3.4 como na figura 3.17, o valor do deslocamento deixa de variar de modo significativo a partir da “malha fina” e, por isso, é com esta malha que se prossegue a análise.

De facto, a solução para o campo de deslocamentos parece apresentar uma grande precisão, até porque os elementos finitos utilizados correspondem a uma abordagem por deslocamentos. Avalie-se igualmente o que se passa com os campos de esforços, ou, mais particularmente, com os momentos fletores, ver figura 3.18. Os valores nesta figura, para o Modelo 1, referem-se aos momentos positivos e negativos nas duas direções, no ponto central superior do painel inferior esquerdo e no ponto sobre o pilar central, ou seja, de coordenadas (3,3,0) e (6,6,0), respetivamente.

A figura 3.18 mostra que os valores para os momentos fletores positivos são bons desde a malha mais grosseira, sendo a variação do erro da primeira para segunda malha inferior a 3%. Já no caso dos momentos negativos, não se verifica este bom comportamento – os resultados aparentam até divergir, ou seja, os esforços aumentam sempre muito com o grau de refinamento. Este resultado pode ser devido à modelação dos apoios por um único nó fixo, o que impede o seu refinamento, ou seja, a distribuição da reação por vários nós, que é o que ocorreria se o modelo para o apoio apresentasse uma dimensão finita – note-se que os momentos negativos se referem justamente a esta localização.

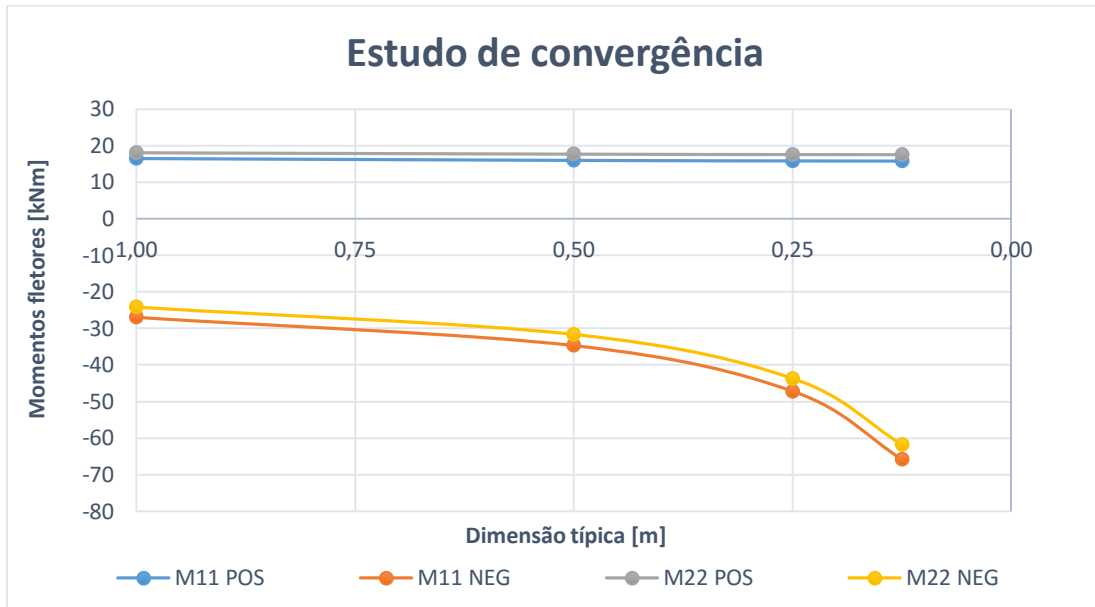


Figura 3.18: Valores dos momentos flectores para os quatro níveis de refinamento (Modelo 1).

3.2.2 Confirmação do modelo

Passa-se agora à confrontação dos resultados obtidos para o Modelo 1. com os resultados apresentados por Appleton (2013). Desta maneira, validam-se os resultados antes de se passar a uma análise mais detalhada. figura 3.19 e figura 3.20.

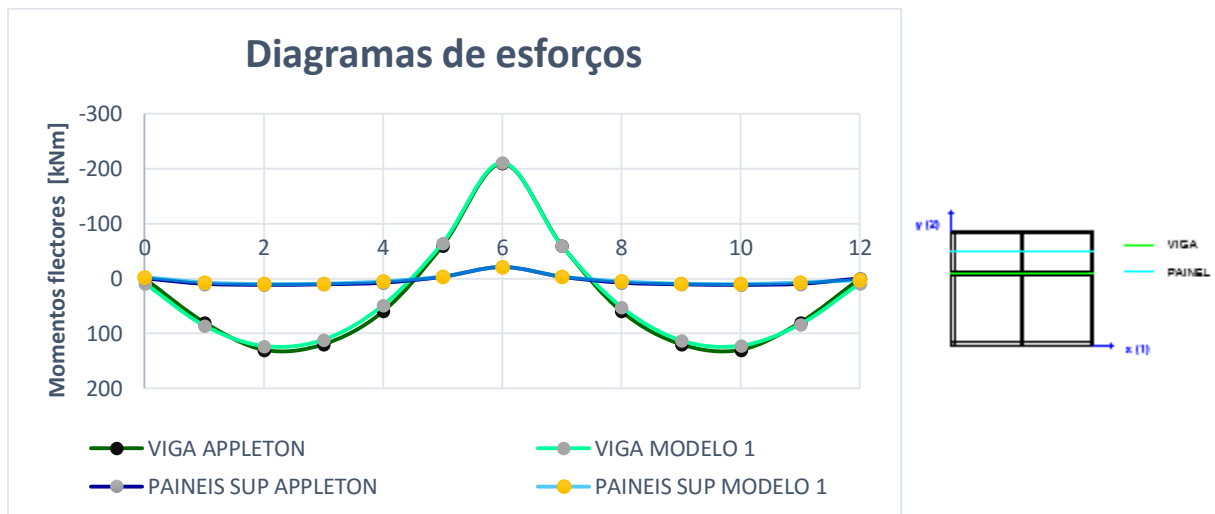


Figura 3.19: Diagramas de momentos flectores segundo x-x ao longo da viga intermédia e a meio vão dos painéis superiores.

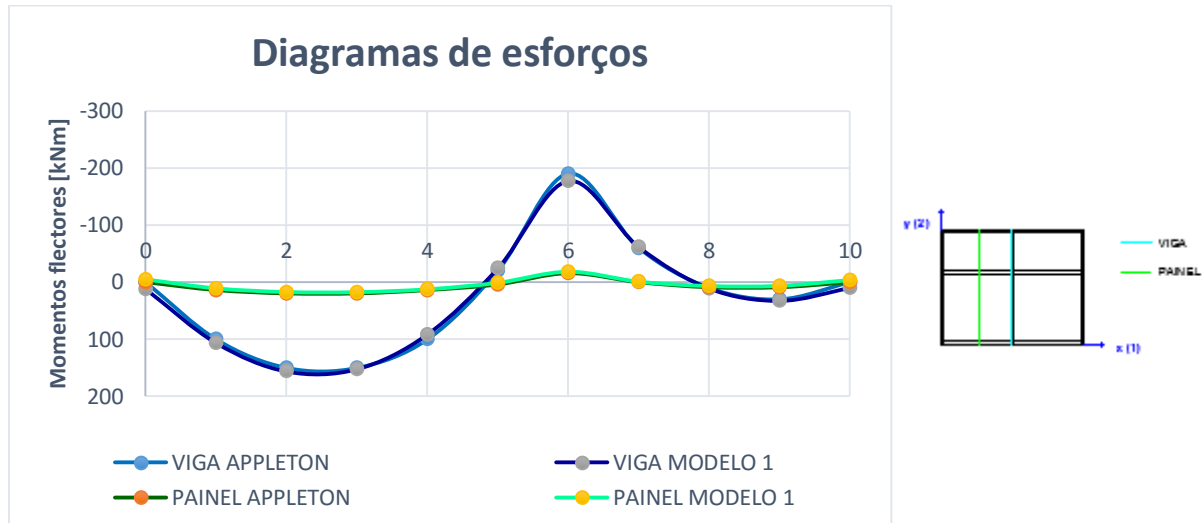


Figura 3.20: Diagramas de momentos flectores segundo y-y ao longo da viga intermédia e a meio vão dos painéis esquerdos.

3.2.3 Análise de resultados

Na análise que se segue, o cálculo de momentos para comparação dos modelos é feito para a cota $z_{fixo} = 0.3$ m, a partir da superfície inferior das vigas, que corresponde a meia altura do conjunto viga-laje.

A partir do momento em que o plano dos eixos das vigas deixa de coincidir com o plano médio da laje, para se ter um esforço axial nulo no conjunto formado pela viga e pela laje a ela ligada, é necessário considerar uma largura contributiva variável da laje. Ou seja, esta largura não só varia de modelo para modelo, mas em cada viga de cada modelo varia também ao longo do eixo. Por este motivo, deixa de ser óbvia a forma de comparar os esforços entre os vários modelos. Posto isto, admitem-se duas hipóteses alternativas:

- 1) fixando uma largura de referência para a largura contributiva de laje, calcula-se sempre o momento fletor total do conjunto viga-laje para um dado valor da cota z , através da relação:

$$M_{total}(z_{fixo}) = M_{viga} + M_{laje} + N_{viga}(z_{fixo} - z_{C.G.viga}) + N_{laje}(z_{fixo} - z_{C.G.laje}) \quad (21)$$

Assim, este valor para o momento fletor depende da cota z_{fixo} da fibra a que se refere. Neste caso, os esforços em cada componente são relativos ao seu centro geométrico.

- 2) Procurando, para cada secção, a largura contributiva da componente laje que permite obter um valor de “esforço axial” igual e simétrico ao obtido para a componente viga nessa secção. Assim, dado o equilíbrio axial ($N = 0$), garante-se que o valor do momento fletor é independente da cota z_{fixo} , sendo dado por:

$$M_{total} = M_{viga} + M_{laje} + N_{viga}(z_{C.G.laje} - z_{C.G.viga}) \quad (22)$$

Ou, se se referirem os valores de M_{viga} e M_{laje} a uma mesma cota Z_{fixo} :

$$M_{total} = M_{viga.z_{fixo}} + M_{laje.z_{fixo}} \quad (23)$$

Embora a segunda hipótese seja a que proporciona uma comparação mais correta, pode-se afirmar que é uma solução meramente teórica. Na verdade, em problemas com grandes dimensões e complexidade, este tipo de análise não é viável. Neste estudo aplicam-se as duas hipóteses, sendo que a aplicação da primeira é meramente ilustrativa (figura 3.33), pois que o estudo e a comparação dos modelos apresentados posteriormente são baseados da segunda.

Inicia-se este estudo pelo Modelo 1, que não considera qualquer excentricidade, de modo que o “esforço axial” é nulo na viga e na laje. Conclui-se, pois, que é necessário encontrar um modo de o comparar com os restantes modelos, de forma a que todos estejam nas mesmas condições, ou seja, que o momento fletor de comparação inclua as contribuições da componente laje e da componente viga. Posto isto, calcula-se a contribuição da laje para valores da largura participante de 1 m, 2 m, 7 m e 8 m, na direção x-x, e 1 m, 2 m, 8 m e 9 m, para a direção y-y. Os dois últimos valores dizem respeito à média da largura participante dos Modelos 2 e 3, respetivamente.

Observe-se a tendência dos resultados na figura 3.21 e figura 3.22, que representa os diagramas de momentos flectores para o conjunto viga-laje para os referidos valores da largura participante e ainda o diagrama de momentos flectores apenas para a viga, sem contribuição da laje, ou seja, apenas da componente viga e ignorando a componente superior – note-se que esta situação é distinta da indicada em alguns documentos como o EC2, em que a largura participante da laje é medida apenas a partir da correspondente face da laje.

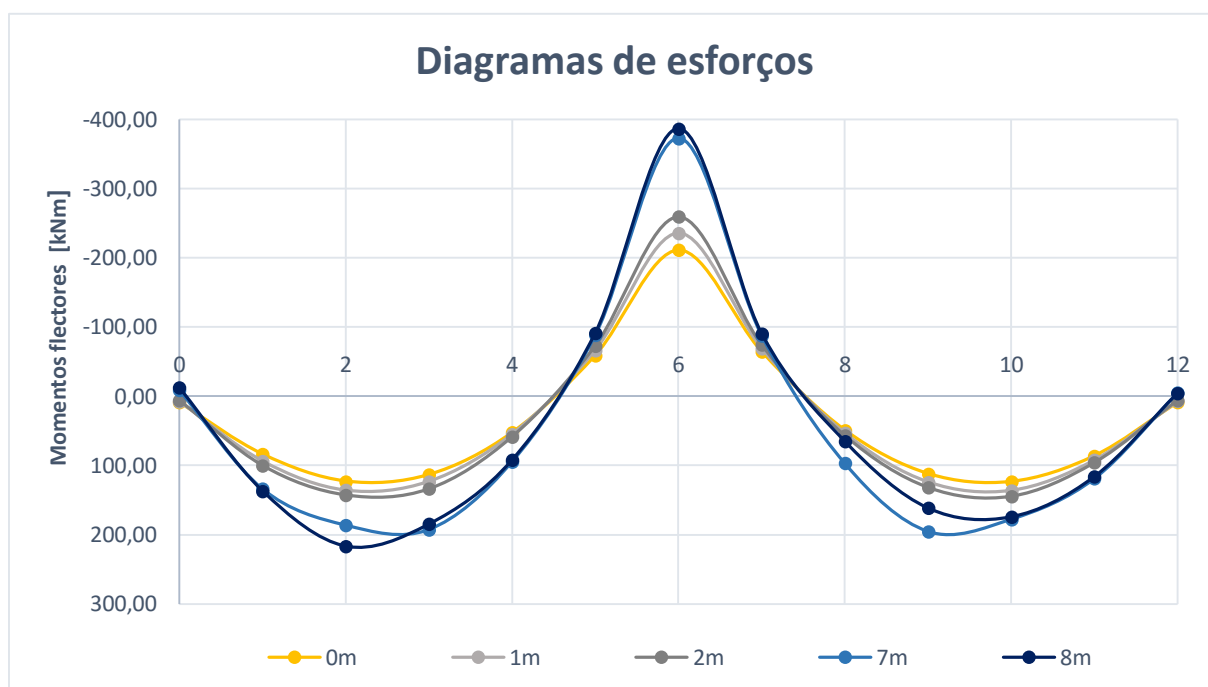


Figura 3.21: Diagramas de momentos flectores ao longo da viga intermédia, na direção x-x, para vários valores da largura de laje participante.

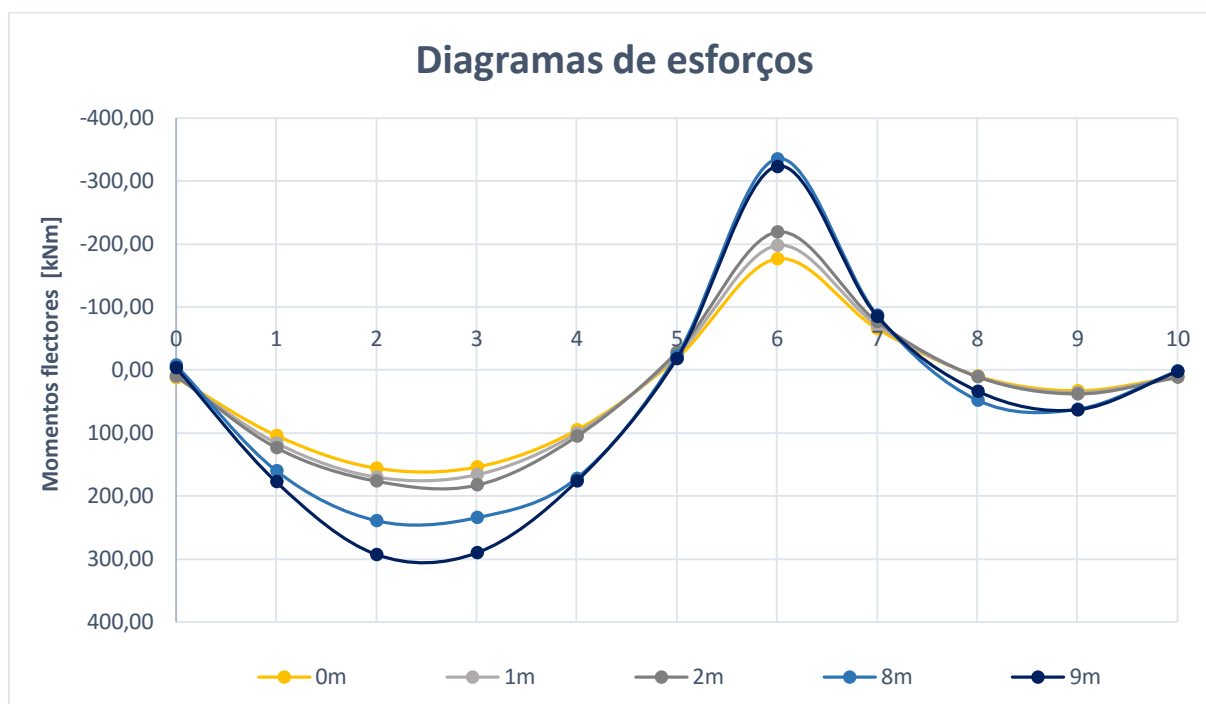


Figura 3.22: Diagramas de momentos flectores ao longo da viga intermédia. na direção y. para vários valores da largura de laje participante.

A tendência observada é que quanto maior a largura participante, maior o valor do momento fletor, como seria de esperar, sendo que a diferença entre o momento apenas da viga e o momento da viga com 1 m de laje é insignificante. O mesmo acontece quando se aumenta a largura de laje para o dobro. Já nos casos de 7 e 8 metros para a direção x-x e 8 e 9 metros para a direção y-y, o aumento do momento fletor já é significativo. Para não sobrecarregar os restantes gráficos deste trabalho, e como não existem diferenças consideráveis entre as curvas 1 m e 2 m e entre as curvas 7 m e 8 m na direção x-x e entre as curvas 1 m e 2 m e as curvas 8 m e 9 m na direção y-y, apenas se representarão uma de cada.

Prosseguindo com a análise de resultados, consideram-se agora os restantes modelos. Os esforços que se apresentam em seguida, são todos obtidos por aplicação de “section cuts”, já anteriormente referidas. Neste capítulo, apresentam-se apenas os resultados para o Modelo 3, de elementos planos e lineares, e para o Modelo 4, de elementos sólidos, sendo os restantes apresentados no Anexo B, em virtude das restrições ao número de páginas da dissertação.

Modelo 3:

Em alguns casos, o valor do esforço axial na laje não atinge, em módulo, o da viga, principalmente nas extremidades ($x = 0$, $x = 12$ e $y = 0$), ver quadros 3.5 e 3.6. Estes erros numéricos, apesar de nalguns casos serem elevados, são compreensíveis dada a aproximação envolvida nos campos de esforços, obtidos a partir dos campos de deslocamentos, e também porque estes esforços serem efetivamente determinados a partir das resultantes em cada elemento finito.

A largura participante da laje necessária para obter o esforço axial pretendido, é representada na figura 3.23 e está delimitada pelas curvas a vermelho. Esta largura atinge, com frequência

valores muito elevados devido ao shear lag² e, conseqüentemente resulta num valor muito elevado para o momento fletor na laje, o que contribui para o aumento do momento total. Este facto, pode dever-se às condições de apoio da estrutura, que, como já foi referido, não são as mais adequadas. O quadro 3.7 apresenta o valor das reações de apoio da estrutura, sendo F_1 , F_2 e F_3 as reações na direção 1, 2 e 3, respetivamente. Os apoios estão numerados na figura 3.24. Realmente, estas tem valores elevados nas direção 1 e 2, e, além disso, produzem esforços de membrana de tração na componente laje, pois que o apoio é colocado na posição que o eixo da viga ocupava antes de se proceder ao offset. De modo a avaliar se as condições de apoio influenciam nos resultados apresentados, é efectuado um pequeno estudo no Anexo C, em que se alteram estas mesmas condições. Neste anexo, analisa-se mais cuidadosamente este tópico.

<i>X</i>	<i>N_{viga}</i>	<i>N_{laje}</i>	<i>Erro</i>	<i>M_{viga}</i>	<i>M_{laje}</i>	<i>M_{total}</i>
[m]	[kN]		[%]	[kNm]		
0	101.17	-20.13	80.1	-2.73	-26.56	-29.29
1	257.34	-231.62	10.0	42.40	105.54	147.94
2	389.32	-338.53	13.0	57.94	137.85	195.78
3	375.49	-307.99	18.0	50.84	118.92	169.76
4	203.86	-81.73	59.9	20.45	49.54	69.98
5	-111.11	105.38	5.2	-31.01	-29.52	-60.53
6	-503.30	500.38	0.6	-96.97	-167.63	-264.60
7	-206.94	253.45	22.5	-17.38	-59.68	-77.06
8	137.31	-12.74	90.7	30.00	34.91	64.92
9	347.29	-268.67	22.6	54.92	112.33	167.24
10	400.46	-282.51	29.5	56.37	101.25	157.63
11	302.14	-167.44	44.6	36.04	73.37	109.41
12	101.17	-33.95	66.4	-2.73	-22.22	-24.95

Quadro 3.5: Esforços nas duas componentes determinados pelo SAP2000 e cálculo do momento total do conjunto viga-laje, na direção x-x.

² Shear lag: Se se pensar na componente viga como a alma de uma viga em T, a componente laje acima dela é o banzo dessa viga em T. Ora este banzo só está solidário com a alma na zona de contato, sofrendo aí as extensões normais longitudinais máximas; mas, à medida que se consideram fibras mais afastadas desta ligação, o valor destas extensões vai-se reduzindo, tendo pois as partes do banzo mais afastadas da alma uma menor contribuição para a resistência à flexão. O shear lag é pois mais um fenómeno que escapa à hipótese das secções planas se manterem planas. Como é bem sabido, os Eurocódigos tratam este fenómeno utilizando o conceito de largura efetiva, considerando uma largura participante reduzida, mas com eficiência total, ou seja, que admite a validade das secções planas se manterem planas.

Y	N_{viga}	N_{laje}	$Erro$	M_{viga}	M_{laje}	M_{total}
[m]	[kN]		[%]	[kNm]		
0	133.12	-2.31	98.3	-3.46	-27.66	-31.12
1	324.96	-228.70	29.6	52.86	112.40	165.26
2	499.49	-465.32	6.8	74.11	198.42	272.53
3	512.08	-396.64	22.5	70.14	190.46	260.60
4	348.90	-218.41	37.4	40.20	118.35	158.55
5	27.39	37.09	35.4	-12.88	-8.51	-21.39
6	-373.96	273.59	26.8	-85.20	-114.61	-199.81
7	-220.40	217.11	1.5	-21.31	-54.86	-76.17
8	0.57	-3.57	528.7	7.00	29.37	36.37
9	87.78	-87.33	0.5	14.37	55.07	69.43
10	44.99	-44.03	2.1	5.13	-0.06	5.06

Quadro 3.6: Esforços nas duas componentes determinados pelo SAP2000 e cálculo do momento total do conjunto viga-laje, na direção y-y.

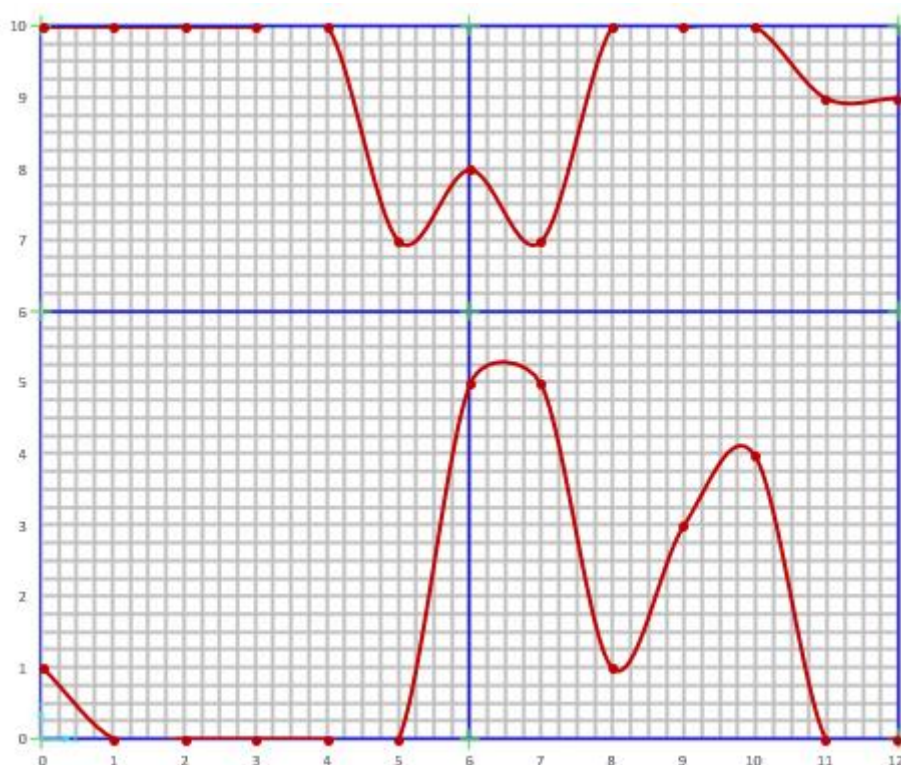
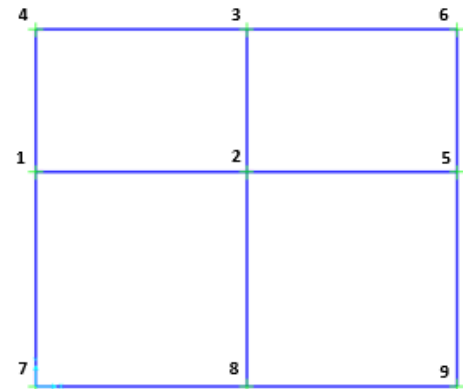


Figura 3.23: Modelo 3: largura participante da viga intermédia na direção x-x.

Apoio	F_1	F_2	F_3
	[kN]		
1	-112.04	114.63	228.63
2	0.00	170.92	641.02
3	0.00	-5.03	157.38
4	-84.66	-5.31	47.47
5	112.04	114.63	228.63
6	84.66	-5.31	47.47
7	-88.15	-114.14	92.55
8	0.00	-156.27	279.58
9	88.15	-114.14	92.55



Quadro 3.7: Reações de apoio para o modelo 3. A azul estão assinalados os apoios intermédios, na direção x-x.

Figura 3.24: Numeração dos apoios.

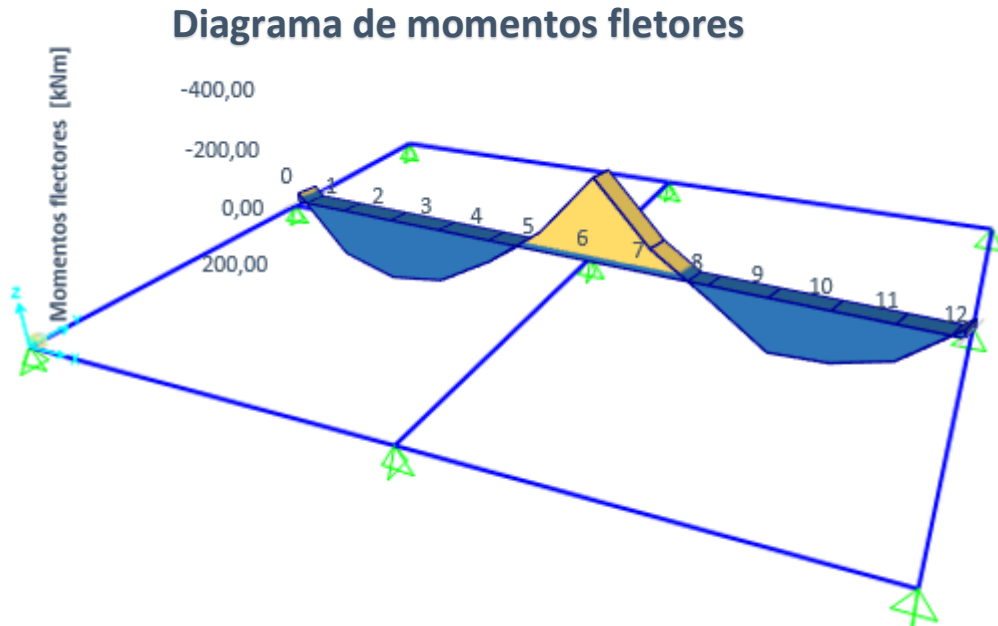


Figura 3.25: Diagrama de momentos fletores ao longo da viga intermédia, na direção x-x.

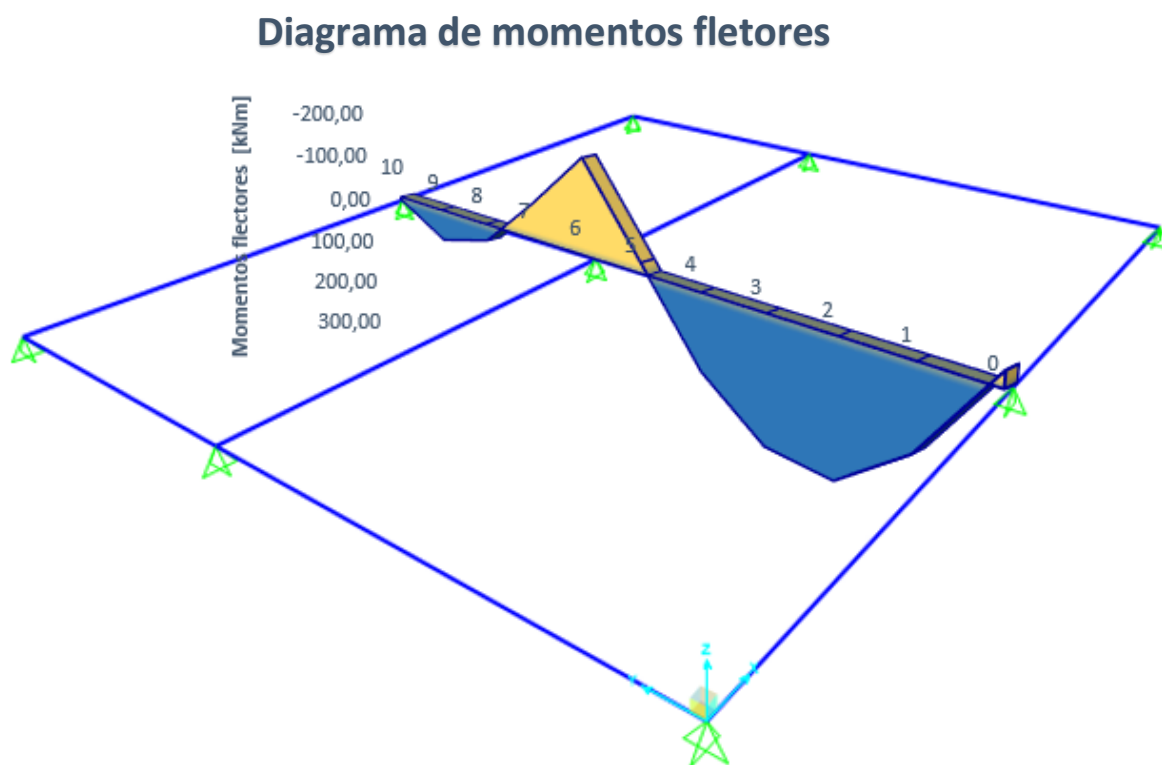


Figura 3.26: Diagrama de momentos flectores ao longo da viga intermédia, na direção y-y.

Modelo 4:

No caso do Modelo 4, quadros 3.8 e 3.9, apesar dos erros cometidos ao tentar assegurar um valor nulo para o esforço axial total, a largura participante é muito inferior à determinada para o Modelo 3 e, por isso, o momento de laje é também ele menor. Assim, o momento total deste modelo apresenta valores inferiores aos dos restantes modelos. Em termos de dimensionamento, este resultado pode corresponder a uma menor quantidade de armadura, se ele for baseado nos esforços obtidos para o Modelo 4, mas a confirmação desta conjectura requereria uma análise mais aprofundada que extravasa o âmbito da presente dissertação.

Para a direção x-x, em que há simetria geométrica da estrutura, verifica-se também uma simetria quase perfeita do campo de momento fletor, superior à determinada com o Modelo 3.

A forma dos diagramas de esforços (figuras 3.25 a 3.28) é semelhante para os dois modelos. Admitindo que o Modelo 4 é o que mais se aproxima do problema real, tome-se este como ponto de referência para determinar os erros que se cometem ao modelar este tipo de estruturas com os modelos planos e lineares. A comparação dos modelos é representada nas figuras 3.29 a 3.32.

<i>X</i>	<i>N_{viga}</i>	<i>N_{laje}</i>	<i>Erro</i>	<i>M_{viga}</i>	<i>M_{laje}</i>	<i>M_{total}</i>
[m]	[kN]		[%]	[kNm]		
0	25.35	-3.62	85.7	4.19	-0.27	3.92
1	65.13	-64.61	0.8	5.33	13.31	18.65
2	216.70	-211.25	2.5	36.22	51.09	87.31
3	250.94	-257.10	2.5	39.37	63.28	102.65
4	108.55	-113.76	4.8	20.36	26.52	46.88
5	-122.87	-18.82	84.7	-26.76	-3.70	-30.46
6	-289.08	287.42	0.6	-61.17	-76.99	-138.17
7	-122.92	10.45	91.5	-26.83	-10.64	-37.47
8	108.57	-113.76	4.8	20.38	26.59	46.97
9	235.19	-245.14	4.2	41.74	62.96	104.70
10	216.73	-211.25	2.5	36.21	51.00	87.21
11	65.16	-77.09	18.3	5.44	15.50	20.94
12	25.35	-3.62	85.7	4.18	-0.27	3.92

Quadro 3.8: Esforços nas duas componentes determinados pelo SAP2000 e cálculo do momento total do conjunto viga-laje, na direção x-x.

<i>Y</i>	<i>N_{viga}</i>	<i>N_{laje}</i>	<i>Erro</i>	<i>M_{viga}</i>	<i>M_{laje}</i>	<i>M_{total}</i>
[m]	[kN]		[%]	[kNm]		
0	18.57	-3.08	83.4	5.75	-0.32	5.43
1	105.06	-113.88	8.4	9.23	24.15	33.39
2	284.39	-285.01	0.2	45.72	72.40	118.12
3	332.88	-336.27	1.0	51.19	87.56	138.75
4	186.63	-182.86	2.0	31.37	44.64	76.01
5	-63.51	0.23	99.6	-19.19	-5.00	-24.19
6	-285.84	285.93	0.0	-66.32	-79.00	-145.32
7	-100.06	106.76	6.7	-10.47	-27.09	-37.56
8	41.84	-49.79	19.0	10.88	26.20	37.08
9	54.41	-55.73	2.4	10.91	23.11	34.03
10	50.64	31.44	37.9	15.31	-10.95	4.35

Quadro 3.9: Esforços nas duas componentes determinados pelo SAP2000 e cálculo do momento total do conjunto viga-laje, na direção y-y.

Diagrama de esforços

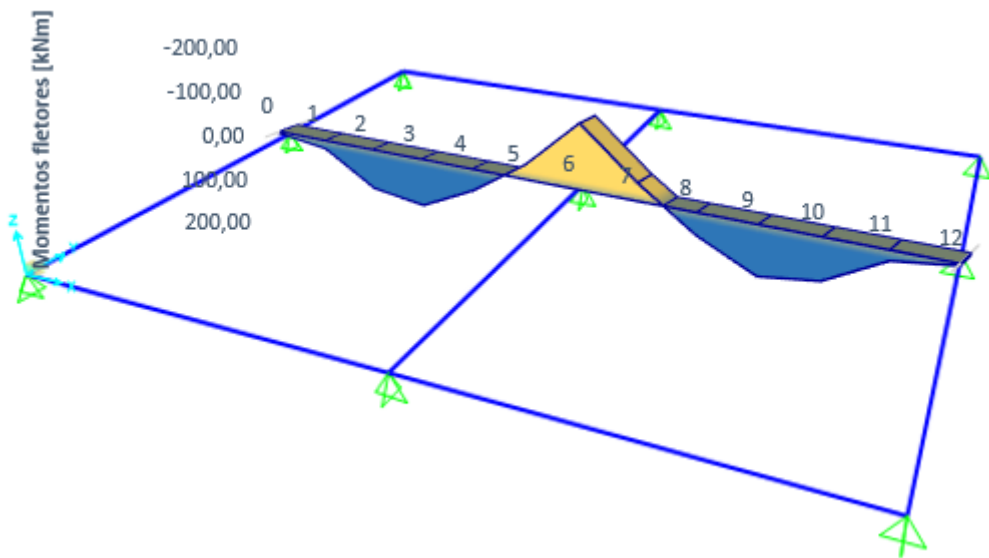


Figura 3.27: Diagrama de momentos flectores ao longo da viga intermédia, na direção x-x.

Diagrama de esforços

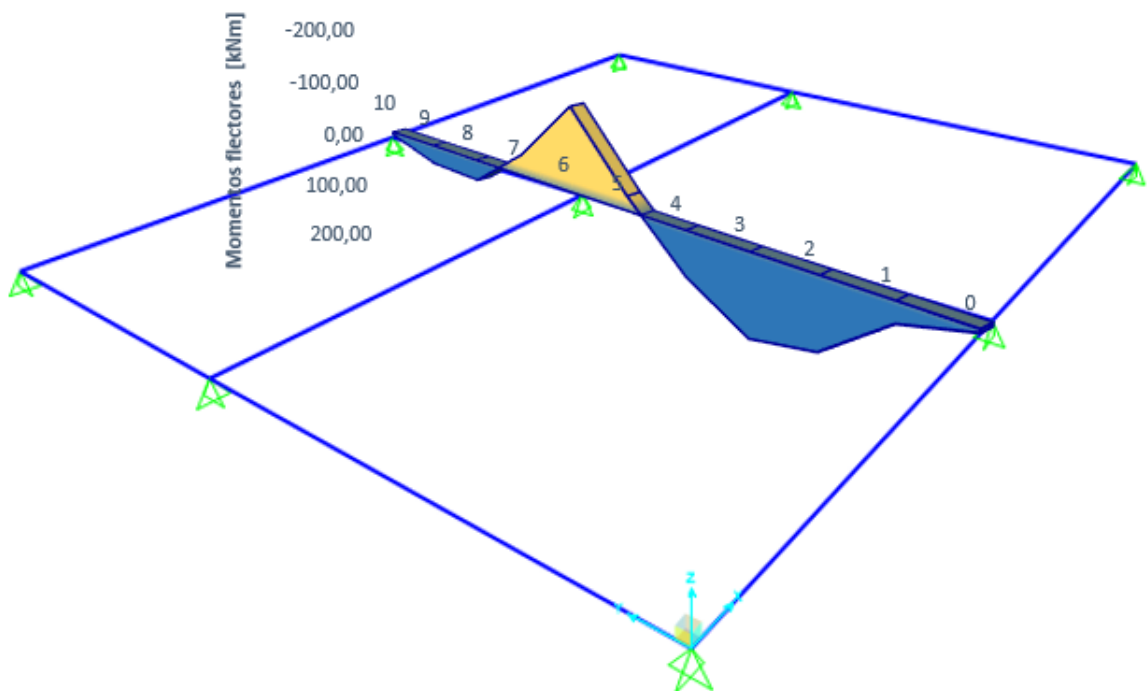


Figura 3.28: Diagrama de momentos flectores ao longo da viga intermédia, na direção y-y.

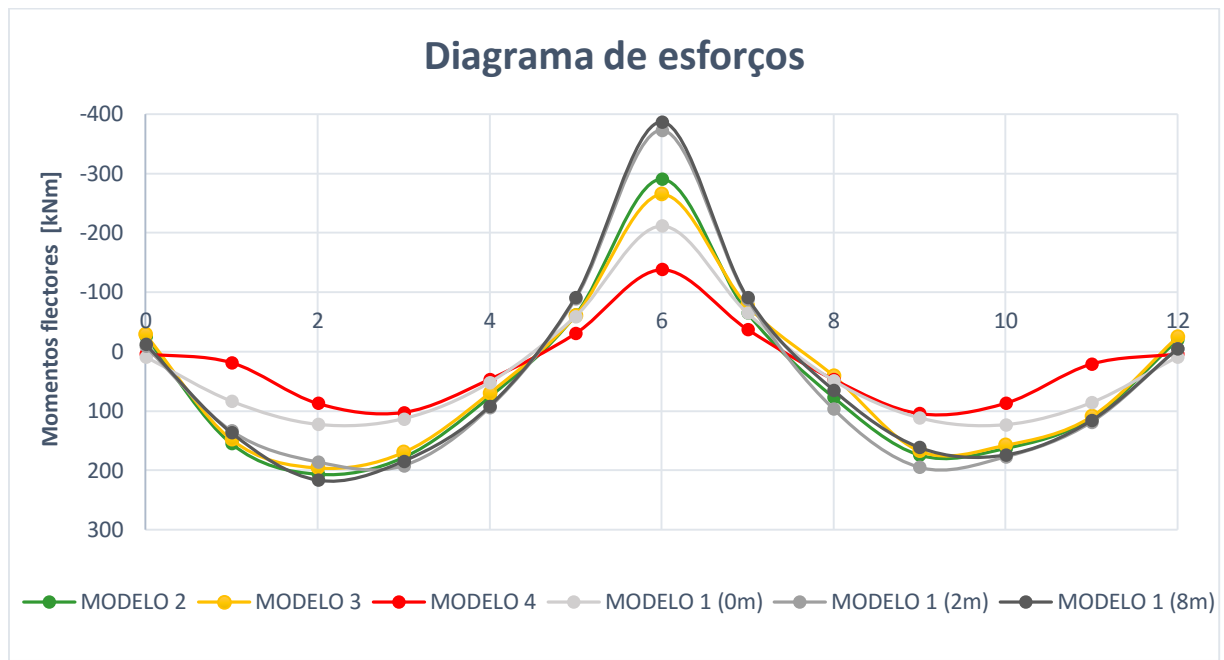


Figura 3.29: Diagrama de momentos flectores ao longo da viga intermédia, na direção x-x.

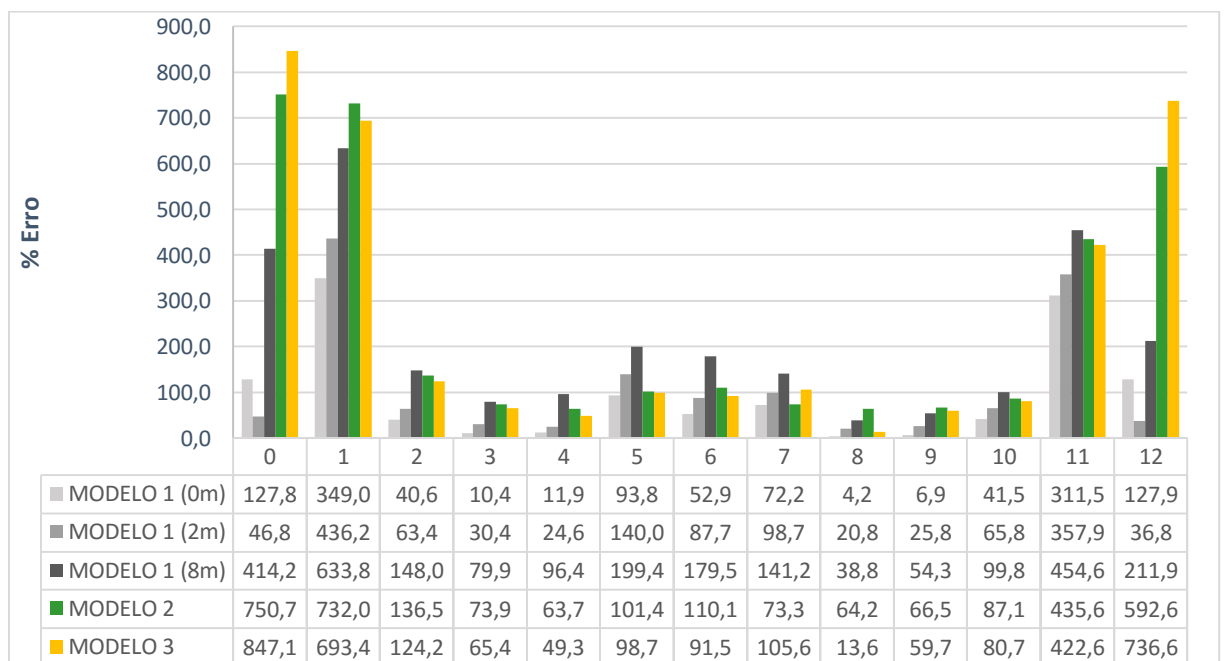


Figura 3.30: Erro em função do modelo, na direção x-x.

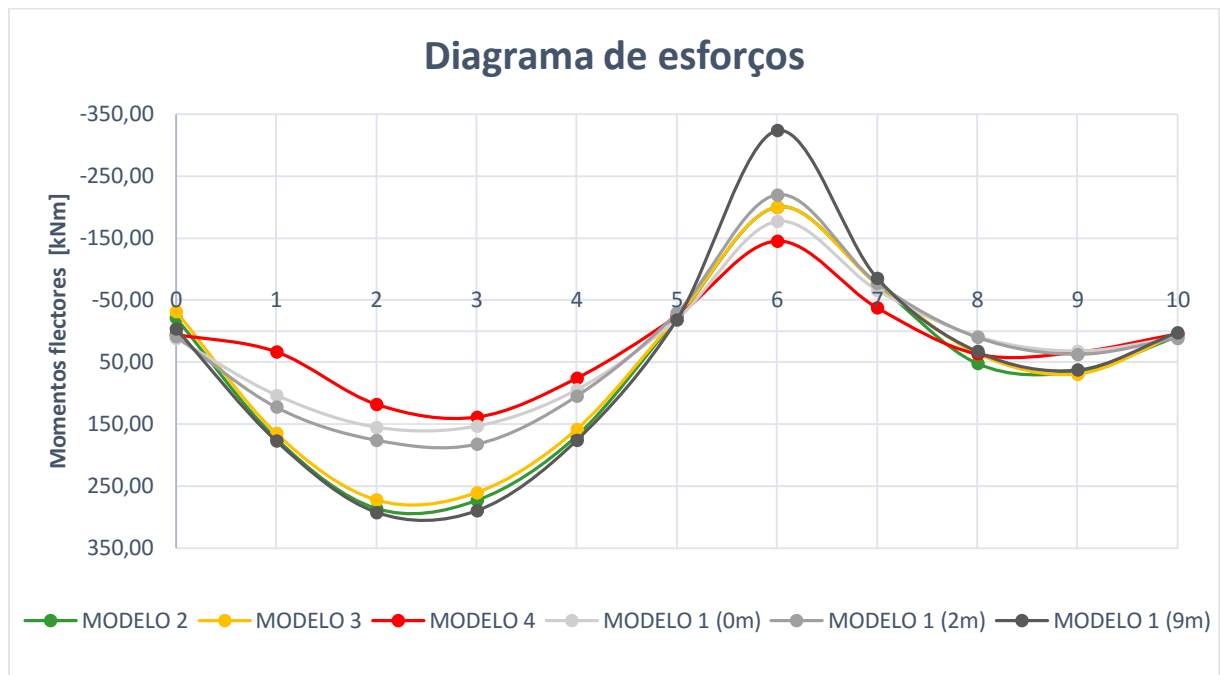


Figura 3.31: Diagrama de momentos flectores ao longo da viga intermédia, na direção y-y.

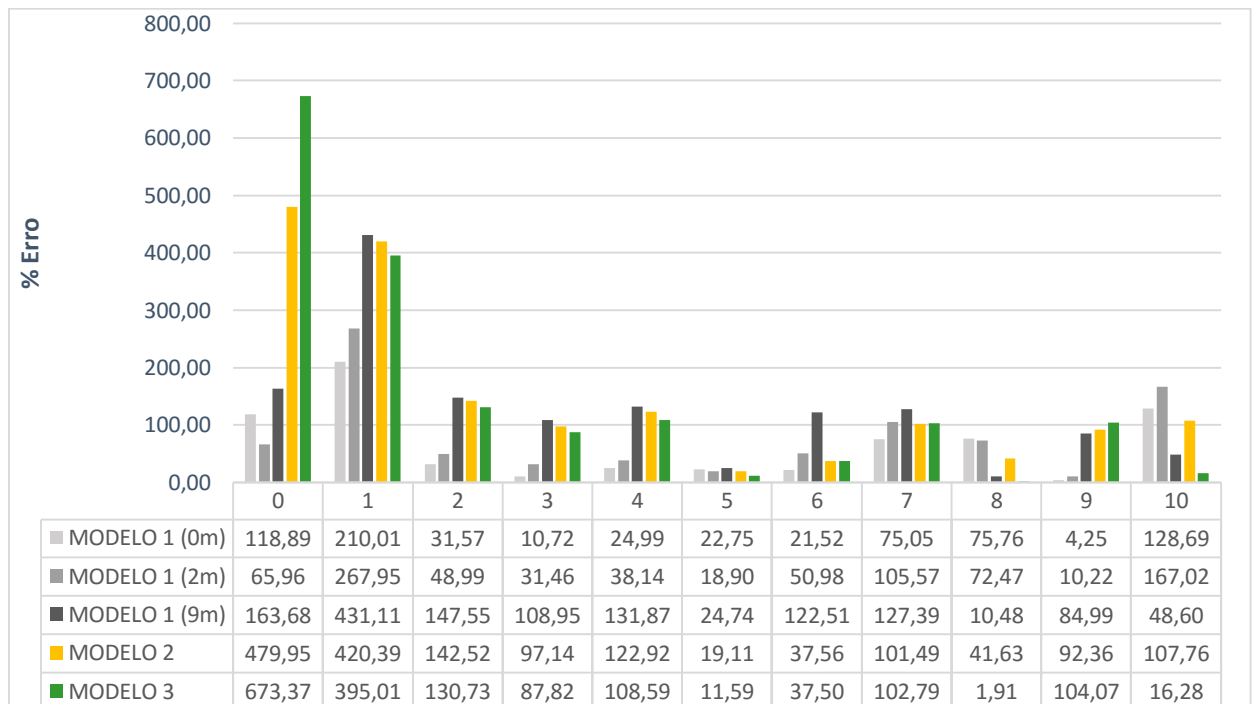


Figura 3.32: Erro em função do modelo, na direção y-y.

Constata-se, para as duas direções, que:

- 1) O modelo de elementos sólidos, Modelo 4, é o que apresenta valores menores. Junto aos pilares exteriores pode-se verificar um ligeiro efeito de “encastramento”.

- 2) O erro cometido ao usar para este tipo de laje um modelo do tipo do 2 ou do 3 é semelhante. Recorde-se que a principal diferença entre estes modelos, é a inclusão de material por excesso ou por defeito no topo das vigas, o que parece não ser causa para grandes diferenças em termos dos resultados.
- 3) A curva referente ao Modelo 1, onde apenas se contabiliza a contribuição do momento da viga, é a que mais se aproxima da curva para o Modelo 4.
- 4) As extremidades são zonas críticas, onde os erros são mais elevados, nomeadamente nos Modelos 2 e 3. À medida que se percorre o eixo longitudinal das vigas, estes erros tendem a diminuir e a atingir a mesma ordem de grandeza em todos os modelos.

Realmente, o modelo com elementos sólidos é muito mais moroso, tanto em termos de tempo de modelação como de tempo de execução (tempo que o programa demora a executar a análise) e de consulta dos resultados que os modelos com elementos planos e lineares. Por exemplo, para os modelos de “malha fina” – usados na comparação de soluções, o tempo de execução para o Modelo 4 foi aproximadamente 90 s enquanto que nos Modelos 1, 2 e 3 foi aproximadamente de 4 s. Note-se que a estes tempos devemos ainda somar o tempo de modelação que no caso do Modelo 4 é imensamente superior, já que, infelizmente o programa utilizado tem um erro que impede a divisão dos elementos sólidos para discretizar as malhas, tendo sido necessário desenvolver um modelo de origem para cada grau de discretização.

Em termos do número de graus de liberdade, enquanto que os modelos de elementos planos e lineares apresentam 12 054 GDL, o modelo de elementos sólidos tem 85 935 GDL, ou seja, sete vezes mais.

A título de curiosidade, a figura 3.33, representa duas curvas diferentes para cada modelo, com as hipóteses referidas anteriormente relativas à definição de uma largura de laje participante. As curvas a cheio representam o diagrama de momentos fletores para uma largura participante tal que o esforço axial na viga é nulo. As curvas a tracejado representam o digrama de momentos fletores fixando uma largura participante de referência de 1 m. A utilização destes valores para o dimensionamento da viga requer, obviamente, a consideração do valor não nulo do esforço axial, o que não é prática corrente.

Apesar dos valores serem muito inferiores no caso de fixar uma largura de referência, esta é uma solução mais prática. Como se referiu anteriormente, a norma europeia EC2 (EN1992-1-1, 2010) propõe que se considere uma largura de banzo comprimido ao longo do qual se podem admitir condições de tensão uniforme, sendo que esta largura depende das dimensões da peça, do tipo de ação, entre outros aspetos. Note-se, porém, que neste caso os analistas cometem um erro ao ignorar o esforço axial na viga. Já a solução aqui estudada com esforço axial nulo pode ser considerada estritamente teórica, mas apresenta melhores resultados, e não apresenta aquele inconveniente, se bem que pode levantar outro: sendo o valor da largura colaborante considerado para a viga tão elevado, como dimensionar a laje?

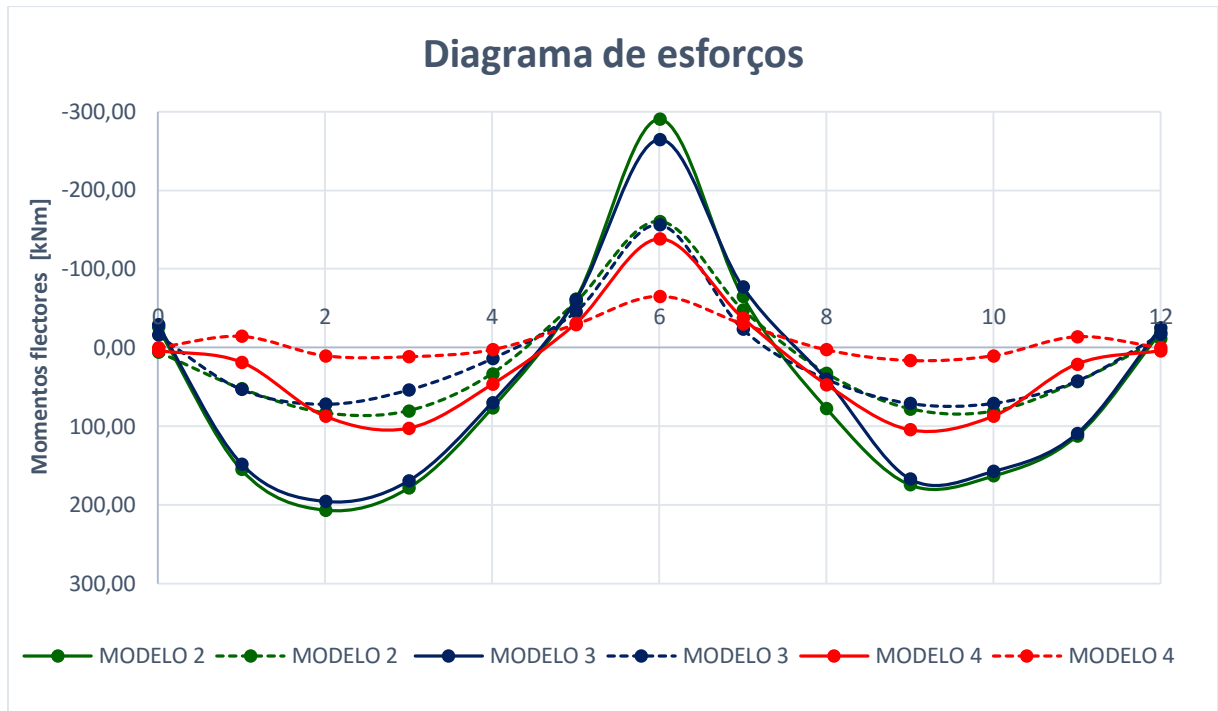


Figura 3.33: Diagrama de momentos flectores ao longo da viga intermédia, na direção x-x, usando sistema em equilíbrio (curvas a cheio) e largura de referência (curvas a tracejado).

4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

4.1 Conclusões

Reúnem-se nesta secção as principais conclusões que foram obtidas ao longo deste trabalho.

Em primeiro lugar salienta-se que foram cumpridos os objetivos gerais inicialmente estabelecidos. Assim, de acordo com a proposta inicial, foram criados e investigados modelos distintos com elementos planos e lineares e com elementos sólidos, para uma laje vigada de comportamento elástico linear.

Na fase de modelação, constatou-se que os modelos de elementos sólidos não apresentam os erros relativos à descrição da geometria do problema real, os quais são inerentes aos modelos de elementos planos e lineares. Isto observa-se, por exemplo, (i) na própria ligação entre os elementos planos e os lineares, mas também (ii) na definição dos apoios. De facto, enquanto que os modelos com elementos planos e lineares apresentam sempre um excesso ou defeito de material, dado que o programa une sempre o centro geométrico da viga com o plano médio da laje, os modelos com elementos sólidos permitem modelar a estrutura sem este tipo de inconveniente. Por outro lado, nos modelos com elementos planos e lineares os apoios têm de ser definidos na configuração inicial (antes do offset), ou seja, no plano médio da laje. Assim, esta também está apoiada no ponto em que se intersectam os eixos das vigas antes da aplicação do offset. Por outro lado, nos modelos de elementos sólidos é possível colocar exatamente o apoio no ponto pretendido.

Portanto, em termos de precisão de modelação, os modelos de elementos sólidos superam os elementos planos e lineares, com as vantagens descritas anteriormente. As principais desvantagens deste tipo de modelação são a complexidade na criação do modelo e o custo requerido, tanto em nível de tempo de modelação, como tempo de execução e de análise de resultados, que se constatou serem muito elevados.

De facto, em termos de análise de resultados, para os modelos de elementos sólidos o programa não apresenta os resultados em termos de campos de esforços, mas sim de campos de tensões. Para comparar a performance dos diversos modelos, foi necessário, para os modelos de elementos sólidos, determinar os esforços numa série de secções através de um “section cut” em cada, o que obsta à análise expedita dos resultados possibilitada pelos modelos de elementos mais grosseiros.

Estas foram as principais conclusões ao nível de modelação e cálculo de resultados. Seguem-se as conclusões obtidas por análise destes. Com o reposicionamento das vigas relativamente ao plano médio da laje, o esforço axial nas duas componentes destes sistemas deixa de ser nulo. Para efetuar a análise foram propostas duas hipóteses: fixar uma largura participativa de 1 m ou para cada secção ou procurar a largura de laje necessária para se ter um esforço igual e

simétrico em ambas as componentes. Foram obtidos valores para o momento fletor bastante inferiores com a primeira destas hipóteses.

O Modelo 4, com elementos sólidos é o que apresenta esforços menores enquanto que o Modelo 1 é o que mais se aproxima do Modelo 4, o que permite concluir que no caso de se querer modelar uma laje deste tipo não é necessário recorrer ao reposicionamento da viga, como feito nos Modelos 2 e 3.

Apesar de os elementos sólidos proporcionarem resultados que se julga serem bastante rigorosos, só devem ser utilizados para construir pequenos modelos, de peças simples ou de pormenores de uma estrutura maior, dada a complexidade acrescida dos correspondentes modelos.

Admite-se que os erros para os modelos de elementos planos e lineares são compensados quando, no dimensionamento para ULS, são utilizados, por exemplo, coeficientes de segurança, embora tal não tenha sido investigado na dissertação. Em contrapartida, se o material apresentar alguma ductilidade plástica, passa a ser admissível uma maior variabilidade da solução estática.

4.2 Trabalhos futuros

Com o objetivo de aprofundar os conhecimentos na temática de modelação de lajes com elementos planos e lineares vs. elementos sólidos, apresentam-se algumas sugestões.

Neste trabalho foram totalmente impedidos os deslocamentos no plano da laje (xy), o que se conclui no final poder não ser uma boa opção porque se afasta do comportamento real encontrado geralmente para as lajes de edifícios. Seria, pois, interessante avaliar a alteração dos resultados quando se introduzem apenas as três ligações necessárias para impedir os movimentos de corpo rígido no plano xy .

Desenvolver modelos com elementos lineares e planos ligados com “rigid links”, ou seja, com constrangimentos internos entre os respetivos nós. Este tipo de modelação é mais complexo, porque os nós da malha de elementos lineares não apresentam à priori qualquer ligação aos nós da malha de elementos planos. Assim, este procedimento requer a definição prévia das duas malhas e a sua posterior ligação através dos “rigid links”, o que se pode revelar um procedimento algo moroso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Appleton, J. (2013). “Estruturas de Betão – Volume 1”, Edições Orion, Amadora.
- Araújo, C.A.M., Puel, A., Candemil, A. (2014). “Análise numérica de fundações diretas de aerogeradores”, VII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas, Rio de Janeiro
- Bandyopadhyay, B., Manjunath, T.C., Umopathy, M. (2007). “Modeling, Control and Implementation of Smart Structures”, Springer, Alemanha.
- Duan, L. (2015). “Division of Engineering Services : Bridge design practise”, Department of Transportation, California
- Castro, L.M.S. (2007). “Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes”. Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- Castro, L.M.S. (2009). “Método dos Elementos Finitos - Análise de Pórticos Planos”. Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- Cook, R.D., Malkus D.S., Plesha, M.E., Witt, R.J. (2002). “Concepts and applications of finite element analysis”. John Wiley & Sons.
- Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Bazilevs, Y. (2009). “Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA”, John Wiley & Sons
- CSI – Computer and Structures, Inc. (2015). Sap2000 - Analysis Reference Manual. Berkeley, California, USA.
- Dias da Silva, V. (2013). “Mecânica e resistência dos materiais” (4^a ed.). Coimbra.
- Felippa, C. (2015). “Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007)”, www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/, Univ. do Colorado, Boulder.
- EN1992-1-1 (2010). “Eurocódigo 2: Projecto de Estruturas de Betão – Parte 1-1: Regras Gerais e Regras para Edifícios”. CEN, Bruxelas.
- Ghaedi, K., Javanmardi, A., Gordan, M., Khatibi, H., Mohammadi, A. (2015). “Application of 2d and 3d finite element modelling of gravity dams under seismic loading”. Proceedings of the 3rd National Graduate Conference (Nat Grad2015), Universiti Tenaga Nasional, Putrajaya Campus.
- Neves, L.F.C.S. (2010). “Comparação de modelos de grelha e de elementos finitos de laje na modelação de estruturas de edifícios de betão armado”. Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Lisboa.

- Porto, B.T., Mendonça, Q.B., Carvalho, S.G.L. (2012). “Análise estrutural de pisos industriais utilizando o método dos elementos finitos”. *Mecânica Computacional* Vol 31, pp.1355-1377.
- Puri, U.C.(2006) “An overview of finite element considerations for computer modelling of mat foundations”. RISA Technologies, California, EUA.
- Robalo, K.S.G. (2011). “Análise estrutural de edifícios de betão armado”. Dissertação de mestrado, Instituto Politécnico de Coimbra, Coimbra.
- Szilard, R. (2004). “Theories and Applications of Plate Analysis: Classical Numerical and Engineering Methods”. John Wiley & Sons.

ANEXOS

Anexo A: Refinamento da malha de elementos finitos

Neste anexo encontram-se representados os modelos relativos à malha com grau de refinamento mais baixo, designada nesta dissertação de “malha larga”. A figura A.1 diz respeito aos modelos com elementos planos e lineares, e as figuras A.2 e A.3, ao modelo de elementos sólidos.

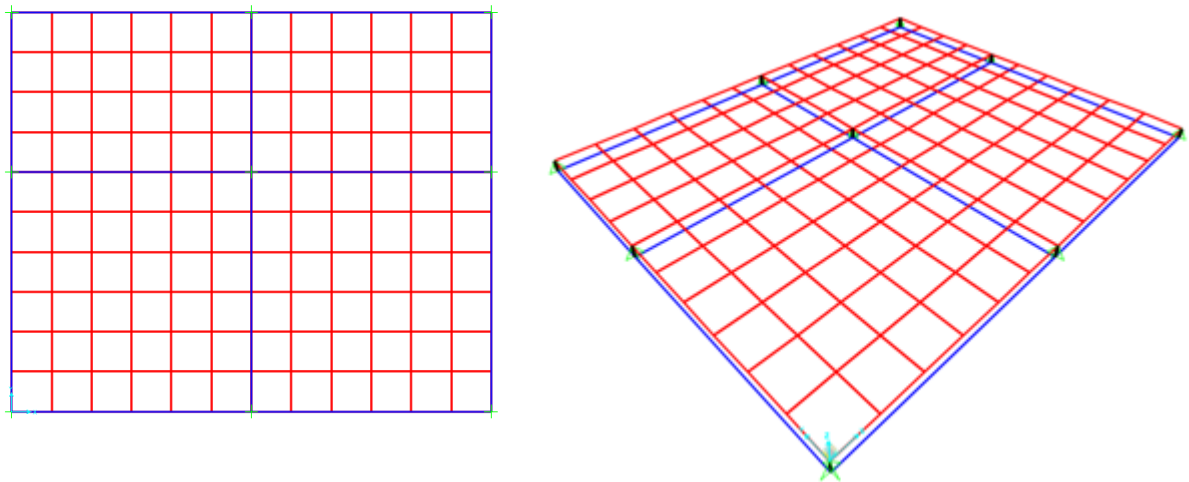


Figura A.1: “malha larga” dos Modelos 1, 2 e 3 com dimensões 1.0x1.0 m² em todos os painéis em planta (esquerda) e em vista tridimensional (direita).

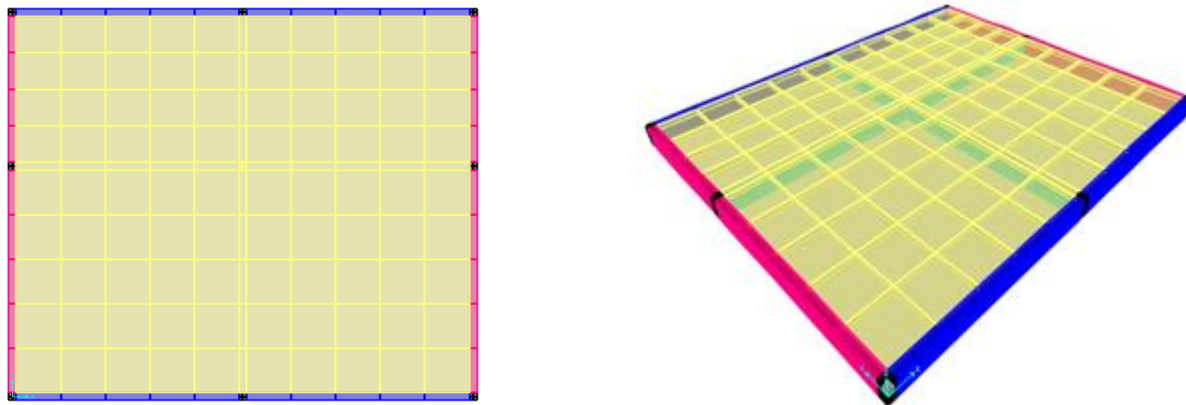


Figura A.2: “malha larga” do Modelo 4 com dimensões $1.16 \times 1.16 \times 0.15 \text{ m}^3$ para os painéis inferiores e $1.16 \times 0.95 \times 0.15 \text{ m}^3$ para os painéis superiores, em planta (esquerda) e em vista tridimensional (direita).

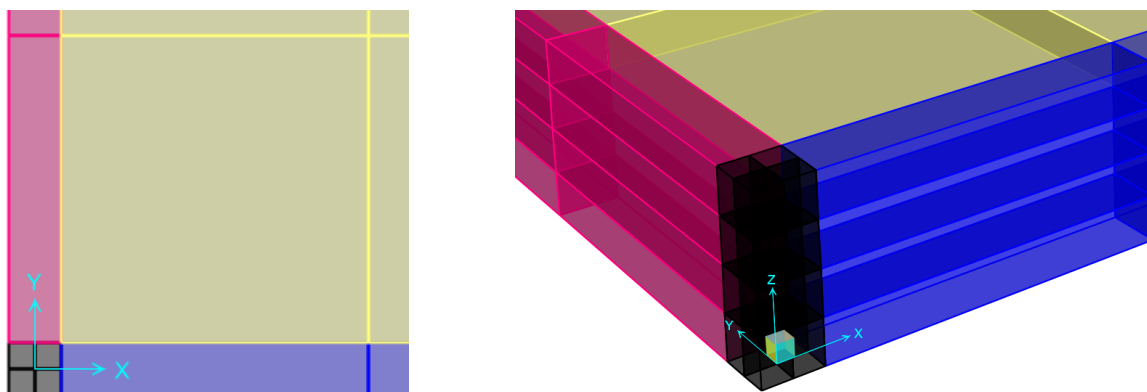


Figura A.3: “malha larga” do Modelo 4 com dimensões $1.16 \times 0.2 \times 0.15 \text{ m}^3$, $0.2 \times 1.16 \times 0.15 \text{ m}^3$ e $0.2 \times 0.95 \times 0.15 \text{ m}^3$ para as vigas e $0.2 \times 0.2 \times 0.15 \text{ m}^3$ para os pilares, em planta (esquerda) e em vista tridimensional (direita).

Anexo B: Análise dos resultados para os modelos 1 e 2:

O presente anexo é o prolongamento do cálculo de esforços para os diferentes modelos. Nos quadros B.1 e B.2 são expostos os esforços retirados do SAP2000, para a viga e para a laje, sendo que no caso da laje, com diferentes larguras participativas, e cálculo do momento total, referente ao Modelo 1.

X [m]	N_{viga} [kN]	N_{laje} [kN]	M_{viga} [kNm]	$M_{laje.largura\ participante}$ [kNm]				$M_{total.largura\ participante}$ [kNm]			
				1 m	2 m	7 m	8 m	1 m	2 m	7 m	8 m
0	0.00	0.00	8.93	-1.41	-3.18	-17.58	-21.25	7.52	5.76	-8.65	-12.32
1	0.00	0.00	83.71	9.80	16.26	49.93	53.11	93.52	99.97	133.65	136.82
2	0.00	0.00	122.78	12.84	19.89	63.18	93.71	135.62	142.67	185.96	216.49
3	0.00	0.00	113.35	9.58	20.49	78.84	71.35	122.92	133.84	192.18	184.70
4	0.00	0.00	52.47	2.19	5.96	41.87	39.59	54.66	58.43	94.34	92.06
5	0.00	0.00	-59.03	-7.61	-14.07	-29.28	-32.16	-66.65	-73.10	-88.32	-91.19
6	0.00	0.00	-211.19	-24.10	-48.11	-161.16	-174.94	-235.29	-259.30	-372.35	-386.13
7	0.00	0.00	-64.52	-4.89	-9.92	-23.04	-25.87	-69.40	-74.44	-87.56	-90.39
8	0.00	0.00	48.93	4.21	7.79	47.90	16.26	53.14	56.72	96.83	65.19
9	0.00	0.00	111.89	11.82	19.84	83.06	49.69	123.71	131.73	194.95	161.58
10	0.00	0.00	123.37	12.58	21.22	54.02	50.85	135.95	144.59	177.39	174.22
11	0.00	0.00	86.14	5.95	9.71	32.61	29.96	92.10	95.86	118.75	116.10
12	0.00	0.00	8.93	-1.81	-3.57	-13.83	-13.32	7.12	5.36	-4.90	-4.38

Quadro B.1: Esforços nas duas componentes determinados pelo SAP2000 e cálculo do momento total do conjunto viga-laje. na direção x-x.

Y [m]	N_{viga} [kN]	N_{laje} [kN]	M_{viga} [kNm]	$M_{laje.largura\ participante}$ [kNm]				$M_{total.largura\ participante}$ [kNm]			
				1 m	2 m	8 m	9 m	1 m	2 m	8 m	9 m
0	0.00	0.00	11.88	-1.46	-2.87	-19.48	-15.34	10.42	9.01	-7.60	-3.46
1	0.00	0.00	103.50	12.01	19.34	56.27	73.82	115.51	122.84	159.77	177.31
2	0.00	0.00	155.40	14.29	20.58	83.60	136.99	169.69	175.98	239.01	292.40
3	0.00	0.00	153.63	12.35	28.77	80.72	136.29	165.99	182.40	234.36	289.93
4	0.00	0.00	95.00	5.00	10.00	76.63	81.24	100.00	105.00	171.63	176.24
5	0.00	0.00	-18.69	-5.04	-10.08	-3.85	0.48	-23.73	-28.77	-22.54	-18.21
6	0.00	0.00	-176.59	-21.41	-42.81	-158.37	-146.76	-198.00	-219.40	-334.96	-323.35
7	0.00	0.00	-65.75	-5.73	-11.46	-21.21	-19.66	-71.48	-77.22	-86.96	-85.41
8	0.00	0.00	8.99	0.94	1.22	38.70	24.20	9.93	10.21	47.69	33.19
9	0.00	0.00	32.58	2.98	4.92	29.62	30.36	35.56	37.50	62.20	62.94
10	0.00	0.00	9.96	0.82	1.67	-8.41	-7.72	10.78	11.62	1.55	2.24

Quadro B.2: Esforços nas duas componentes determinados pelo SAP2000 e cálculo do momento total do conjunto viga-laje. na direção y-y.

Nos quadros B.3 e B.4 são expostos os esforços retirados do SAP2000, para a viga e para a laje e calculado o momento total, referente ao Modelo 2.

<i>X</i>	<i>N_{viga}</i>	<i>N_{laje}</i>	<i>Erro</i>	<i>M_{viga}</i>	<i>M_{laje}</i>	<i>M_{total}</i>
[m]	[kN]		[%]	[kNm]		
0	98.50	-28.50	71.1	-2.64	-22.87	-25.51
1	258.75	-258.57	0.1	42.62	112.50	155.12
2	391.90	-381.72	2.6	58.19	148.32	206.51
3	377.69	-343.88	9.0	51.03	127.44	178.47
4	204.86	-111.03	45.8	20.50	56.24	76.74
5	-111.61	106.21	4.8	-31.12	-30.21	-61.33
6	-505.01	507.61	0.5	-97.23	-193.05	-290.28
7	-207.79	187.67	9.7	-17.44	-47.49	-64.93
8	137.94	-26.94	80.5	30.11	47.01	77.12
9	349.24	-297.30	14.9	55.15	119.22	174.36
10	403.05	-304.80	24.4	56.63	106.51	163.14
11	304.08	-186.17	38.8	36.18	75.94	112.12
12	98.50	-38.98	60.4	-2.64	-16.67	-19.31

Quadro B.3: Esforços nas duas componentes determinados pelo SAP2000 e cálculo do momento total do conjunto viga-laje. na direção x-x.

<i>Y</i>	<i>N_{viga}</i>	<i>N_{laje}</i>	<i>Erro</i>	<i>M_{viga}</i>	<i>M_{laje}</i>	<i>M_{total}</i>
[m]	[kN]		[%]	[kNm]		
0	128.84	-6.23	95.2	-3.40	-17.22	-20.62
1	325.92	-260.56	20.1	53.07	120.67	173.73
2	502.27	-521.12	3.8	74.40	212.06	286.46
3	514.79	-448.99	12.8	70.40	203.13	273.54
4	350.79	-264.94	24.5	40.37	129.08	169.44
5	28.26	28.23	0.1	-12.83	-6.74	-19.57
6	-373.88	373.54	0.1	-85.26	-114.64	-199.90
7	-220.25	219.44	0.4	-21.34	-54.34	-75.68
8	1.18	0.71	39.2	6.96	45.55	52.51
9	88.22	-89.40	1.3	14.22	51.23	65.45
10	39.66	-39.63	0.1	5.43	3.61	9.04

Quadro B.4: Esforços nas duas componentes determinados pelo SAP2000 e cálculo do momento total do conjunto viga-laje. na direção y-y.

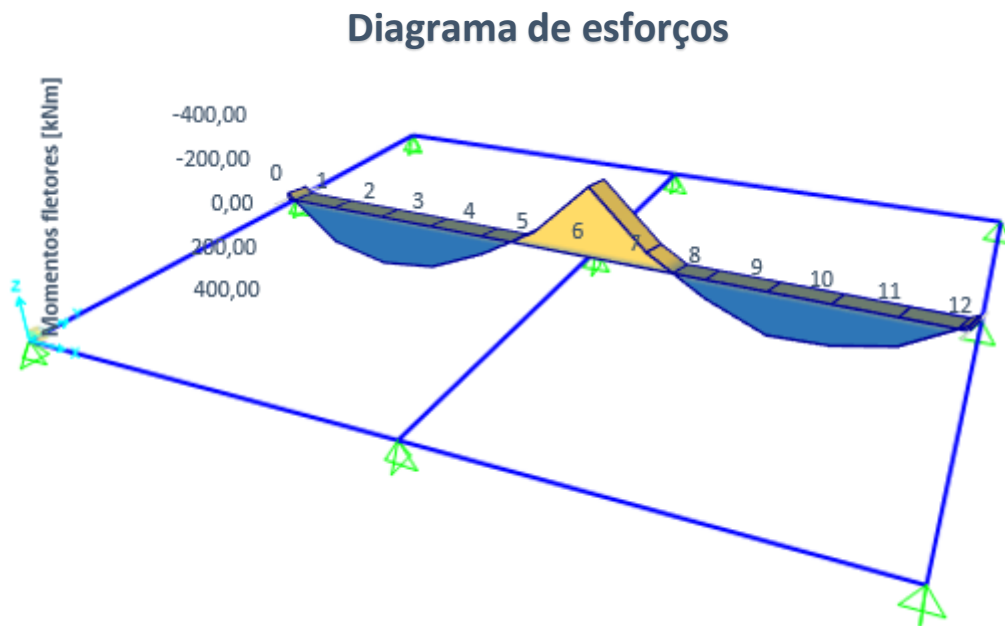


Figura B.1: Diagrama de momentos fletores ao longo da viga intermédia. na direção x-x.

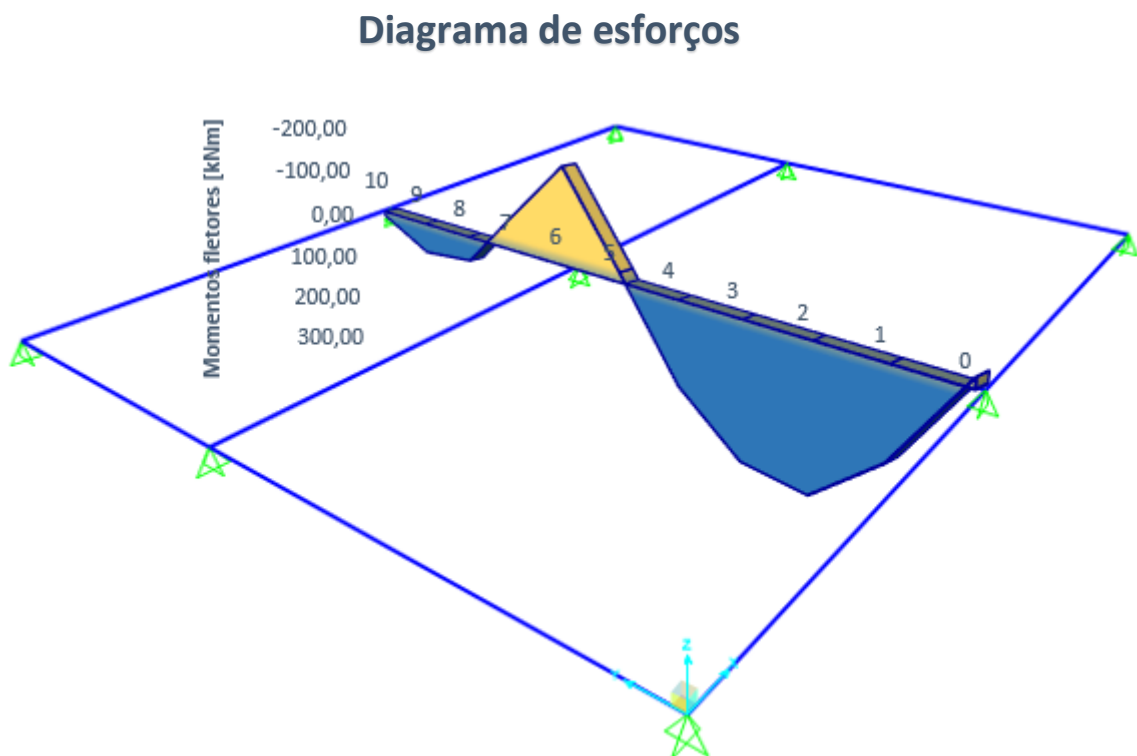


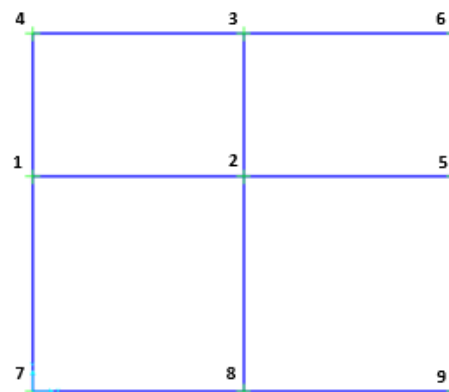
Figura B.2: Diagrama de momentos fletores ao longo da viga intermédia. na direção y-y.

Anexo C: Condições de apoio no plano da laje

Neste anexo, estuda-se de forma breve e sucinta, a influência das condições de apoio adotadas no corpo principal deste trabalho. Assim, nesta secção, em vez de restringir, nos apoios, todos os deslocamentos no plano da laje, correspondendo, nos modelos, a nove apoios duplos, restringem-se agora apenas os movimentos de corpo rígido no plano da laje, para o que bastam três apoios simples, dois numa direção e o terceiro na outra. Os nove apoios simples na direção vertical não são alterados.

Uma vez que se pretende apenas avaliar o grau de influência que a opção tomada nos modelos desenvolvidos no corpo principal do texto pode ter tido nos resultados, considera-se unicamente o Modelo 3. Com a exceção das condições de apoios, todas as características do modelo, incluindo as ações, são as definidas no corpo principal do trabalho, tendo-se procedido à análise no programa utilizado da forma também aí descrita. Os novos valores para as reações de apoio são apresentados no quadro C.1, e podem ser confrontados com os que constam do quadro 3.7. Para compreensão do quadro, são numerados os apoios na figura C.1.

Apoio	F_1	F_2	F_3
	[kN]		
1	-	-	229.03
2	-	0.00	645.14
3	0.00	-	159.29
4	-	-	45.04
5	-	-	229.03
6	-	-	45.04
7	-	-	91.13
8	0.00	-	280.46
9	-	-	91.13



Quadro C.1: Modelo 3 modificado – reações de apoio após a modificação das condições de apoio. A azul estão assinalados os apoios da viga intermédia na direção x-x.

Figura 34.1: Numeração dos apoios.

A análise dos novos resultados, e a sua comparação com os anteriormente determinados, permite constatar (i) a preservação da simetria da solução, (ii) que as reações horizontais são agora nulas – o que se explica por a estrutura ter passado a ser isostática no plano horizontal e não haver forças aplicadas nesse plano, e (iii) as reações de apoio verticais sofreram uma ligeira redistribuição, embora, obviamente, o seu valor total se tenha mantido. Esta redistribuição é justificada pela supressão dos momentos de flexão e torção que as reações horizontais causavam relativamente ao plano médio do sistema formado pela laje e vigas, no caso das condições de apoio inicialmente definidas para este modelo.

Como se explicou no capítulo 3, nos modelos com offset, os apoios são definidos pelo programa na posição dos nós mestre, ou seja, à cota do plano médio da laje e que também é o plano que contém os eixos das vigas antes do offset. Ora o offset faz baixar o plano médio do sistema formado pela laje e vigas para uma posição inferior à do plano médio da laje. Deste modo, quando o sistema flete por efeito das ações verticais, as fibras que estão acima do plano médio do sistema, como é o caso das fibras do plano médio da laje, tenderiam a contrair. Ora esta contração é impossibilitada nos modelos desenvolvidos pelos apoios que, como se explicou, estão situados ao nível do plano médio da laje e que impedem deslocamentos na direção horizontal. Este constrangimento à deformação da laje explica as reações de tração determinadas na secção 3.2.3, as quais por sua vez produzem um campo de tensões de tração adicional na laje que deu origem aos valores excessivos da largura participante da laje anteriormente determinados.

Para a nova configuração de apoios, deste modelo 3 modificado, constata-se que a largura participativa da laje para a viga intermédia segundo x-x, representada na figura C.1, é menor do que a anteriormente determinada, sendo possível determinar para todas as secções uma largura de laje que equilibra o esforço de tração na viga, contrariamente ao que se observava com todos os deslocamentos horizontais impedidos nos apoios. Conclui-se, a redefinição dos apoios analisada neste apêndice teria sido uma melhor opção para todos os modelos, exceto o modelo 1, claro, de modo a suprimir os esforços parasitas associados às reações horizontais excêntricas, mas, infelizmente, tal não foi possível pelas limitações de tempo associadas a uma dissertação de mestrado e por esta questão só ter sido detetada numa fase muito adiantada do trabalho. Refira-se, por último, que, contrariamente ao expectável, a figura mostra que se obteve novamente uma largura participante com uma distribuição não simétrica relativamente à viga intermédia segundo y-y. Apesar disso, achou-se melhor mostrar o resultado para toda a laje, sem qualquer regularização fictícia, porque ele evidencia alguma irregularidade associada à solução estática numérica obtida ou, pelo menos, aos esforços determinados com “section cuts”.

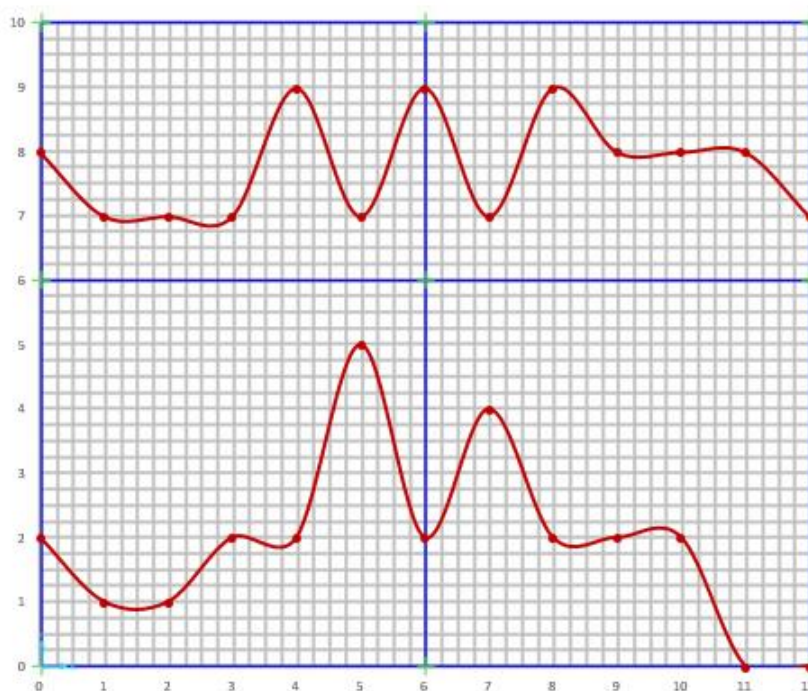


Figura C.1: Modelo 3 modificado – largura de laje participante para a viga intermédia segundo x-x.