

# Notas de clase

Una pizarra en la que intercambiar experiencias docentes

## Sistema mecánico con un potencial catastrófico

**Manuel Fiolhais**

Dpto. de Física da Universidade de Coimbra,  
Coimbra (Portugal)



**Rogério Nogueira**

Escola Secundária Eng. Acácio Calazans Duarte  
Marinha Grande (Portugal)



Se analiza un sistema puramente mecánico que puede discutirse mediante un potencial llamado de tabla de lavar. El comportamiento de este sistema puede ser muy diferente mediante pequeños cambios tanto en las condiciones cinemáticas iniciales como en los parámetros que intervienen en dicho potencial. El estudio en el aula de este conjunto de situaciones, que se conoce como “de comportamiento catastrófico”, permite revelar a los estudiantes que no todos los potenciales tienen que tener un “comportamiento bueno”.

### Introducción

Los potenciales del tipo  $U(x) = x^3 + bx$ , donde  $x$  es la variable dinámica y  $b$  es el “parámetro de control”, se conocen muy bien en la teoría de catástrofes:  $U(x)$  es el potencial de la denominada “catástrofe en pliegue”. Para el caso  $b < 0$ , el potencial tiene un mínimo local y un máximo local, pero, cuando  $b > 0$ , el potencial es una función monótona creciente.

Este tipo de potenciales, los cuales muestran un comportamiento muy diferente en función del valor de uno o más de sus parámetros, juegan un papel importante en física y pueden encontrarse ejemplos de los mismos en física de la materia condensada (en la explicación de la superconductividad) o en física de partículas (en la explicación del origen de la masa de algunas partículas a través del denominado mecanismo de Higgs).

También en el aula este tipo de potencial puede sorprender e incluso que los estudiantes lleguen a divertirse, captando la atención del alumno sobre la importancia del enfoque energético de estas cuestiones. Presentaremos un ejemplo de potencial catastrófico, considerando no sólo los aspectos teóricos, sino también los posibles experimentos que pueden realizarse en el aula.

El sistema físico que estudiar se muestra en la Figura 1. Una polea, a la cual se une una barra o regla, puede girar alrededor de su eje; se enrolla un hilo alrededor del collar de la polea de modo que en el extremo final del hilo se pue-

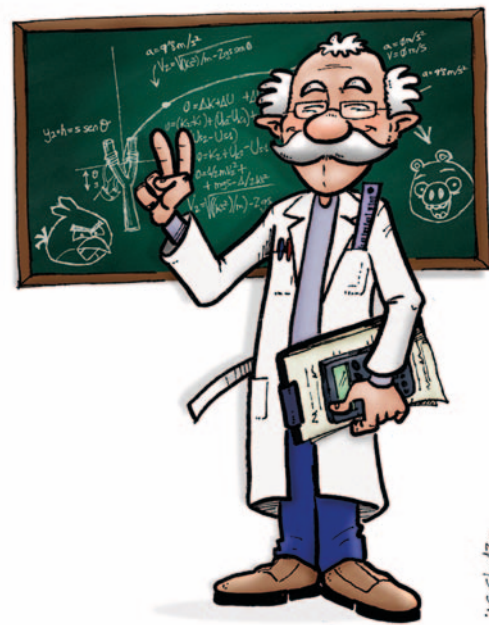


Ilustración por gentileza de Alberto García Gómez (albertogg.com).

den colgar distintos pesos. Para una fijación, se construyó un soporte de metal muy estable, que se une a una mesa. Es en este soporte donde se monta la polea (que se hizo a propósito utilizando una impresora 3D).

En las siguientes secciones describimos con más detalle el sistema físico considerado y se mostrarán las ecuaciones del movimiento y el potencial correspondientes. Además, se discuten los varios posibles movimientos del sistema.



Fig. 1. Dispositivo experimental.

### El dispositivo y su dinámica

El dispositivo experimental utilizado en este estudio [1, 2] consiste en una polea de masa  $\mu$  y radio  $R$  que gira libremente alrededor de su eje; una barra de longitud  $L$  y masa  $M$  unida a la polea; y un cuerpo de masa  $m$  colgado al final de un cable lo suficientemente largo que rodea la polea varias veces. La Figura 2 muestra estos tres elementos y algunas fuerzas relevantes para el estudio de la dinámica de cada uno de los componentes del sistema. En la periferia de la polea actúa la fuerza  $-\vec{T}$ , responsable de la rotación de la polea. Las otras fuerzas que actúan sobre la polea son su peso y la reacción en el eje, y no están representadas en la figura. La suma de

estas tres fuerzas es nula (la polea no tiene movimiento de traslación) pero sobre la polea hay un momento de magnitud  $TL$  relativo al eje de rotación.

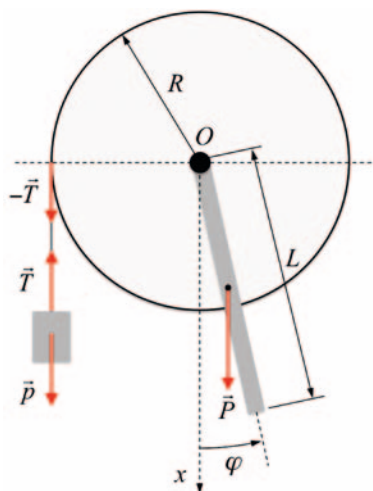


Fig. 2: Sistema y algunas fuerzas que actúan sobre él.

Sobre el cuerpo colgado del hilo actúa la tensión,  $\vec{T}$ , y el peso,  $\vec{p} = m\vec{g}$ . Finalmente, en la regla, actúa su peso  $\vec{P} = M\vec{g}$  y la fuerza que la mantiene fija a la polea (no mostrada en la figura). Para los tres elementos que componen el sistema es importante tener en cuenta:

- a) El movimiento de traslación del cuerpo colgado del hilo.
- b) El movimiento de rotación del sistema “polea + regla” alrededor de un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por el punto  $O$ .

La ecuación que describe el movimiento del cuerpo colgado del hilo es:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - T \tag{1}$$

La ecuación para el sistema de polea + regla es

$$I' \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mg \frac{L}{2} \sin \varphi + TR \tag{2}$$

donde el momento de inercia del conjunto viene dado por

$$I' = \frac{1}{2} \mu R^2 + \frac{1}{3} ML^2. \tag{3}$$

En la ecuación (3) se ha tenido en cuenta que el momento de inercia de la regla respecto de su eje de rotación (eje que pasa por el punto  $O$ ) es  $\frac{1}{3} ML^2$  (teorema de Steiner [3]), mientras que el momento de inercia de la polea respecto al eje de rotación es  $\frac{1}{2} \mu R^2$ .

Como  $X = R\varphi$ , de la ecuación (1) podemos obtener la tensión:  $T = mg - mR \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ . Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2) queda:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{MgL}{2I'} (\sin \varphi - \sin \varphi_0), \tag{4}$$

donde  $I$  es el momento de inercia total del sistema:

$$I = \frac{1}{2} \mu R^2 + \frac{ML^2}{3} + mR^2. \tag{5}$$

y la constante  $\varphi_0$  viene definida por  $\sin \varphi_0 = \frac{2mR}{ML}$ . La integración de la ecuación de movimiento (4) nos permite conocer  $\varphi(t)$  y,

por tanto,  $x(t)$ . El ángulo  $\varphi_0$  tiene el siguiente significado: es el ángulo en el que se anula la aceleración angular, es decir, el ángulo en el cual el sistema puede estar en equilibrio estático.

### Estudio energético

Como sucede con muchos otros sistemas físicos, el estudio energético permite discutir aspectos interesantes del problema. Suponemos que las fuerzas de fricción y resistencia son despreciables, de modo que podemos definir una energía potencial gravitatoria asociada al sistema “cuerpo + regla” la cual, sumada a la energía cinética, permanece constante en el tiempo. La energía potencial viene dada por la ecuación:

$$U(\varphi) = -mgR\varphi + Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \varphi) \tag{6}$$

en la que se ha elegido la posición  $x = 0$  ( $\varphi = 0$ ) como origen de la energía potencial,  $U(0) = 0$ . Ahora podemos introducir un “potencial adimensional”

$$V(\varphi) = \frac{U(\varphi)}{mgR} \tag{7}$$

y también una cantidad adimensional

$$A = \frac{ML}{2mR} \tag{8}$$

que permite escribir finalmente

$$V(\varphi) = -\varphi + A(1 - \cos \varphi) \tag{9}$$

La introducción de estas cantidades adimensionales no es estrictamente necesaria, pero facilita el análisis y la discusión. La Figura 3 muestra este potencial adimensional para varios valores del parámetro  $A$ , que llamaremos parámetro de control.

Este potencial es semejante al que encontramos en otro estudio mecánico y electrodinámico, en el cual se analizan los posibles movimientos de un pequeño cilindro con un imán en su interior, situado sobre un plano inclinado en presencia de un campo magnético exterior [4].

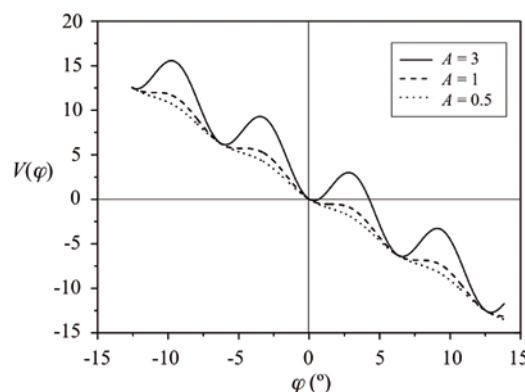


Fig. 3. Potencial adimensional para tres parámetros de control distintos.

Para  $A < 1$  el potencial disminuye monótonamente, lo que significa que el sistema nunca puede permanecer en equilibrio estático. Sin embargo, para  $A > 1$ , el potencial presenta máximos y mínimos, lo que hace posible las oscilaciones alrededor de la posición angular  $\varphi_0$ . La gráfica en la Figura 4 muestra el potencial adimensional en los alrededores de un mínimo para el caso  $A = 4$ .

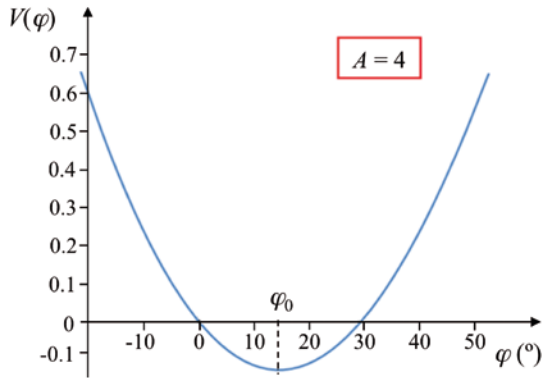


Fig. 4. Potencial adimensional cerca de un mínimo local.

Los extremos del potencial se obtienen de la condición

$$\frac{dV}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0 \Rightarrow -1 + A \sin \varphi_0 = 0 \quad (10)$$

de donde

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{A} < 1. \quad (11)$$

Esta expresión muestra que el parámetro de control debe ser  $A > 1$  para que el sistema esté en equilibrio estático o para realizar oscilaciones alrededor del mínimo, siempre que la energía total del sistema no exceda la energía potencial en el primer máximo para  $\varphi > \varphi_0$ .

### Catástrofe–estudio estático

El potencial de la Figura 3 se conoce en la literatura como potencial de tabla de lavar [2] y es pedagógicamente muy rico, dado los numerosos análisis que del mismo pueden llevarse a cabo. Empecemos estudiando las situaciones estáticas.

Sin el pequeño cuerpo colgado del hilo, el sistema se queda en equilibrio con la regla en la posición vertical (Figura 5), es decir, cuando  $\varphi_0 = 0$ . A medida que incrementamos el peso del cuerpo que cuelga del hilo, aumenta también el ángulo de equilibrio,  $\varphi_0$ . Todavía existe equilibrio estático si la masa del pequeño cuerpo es tal que  $m < \frac{ML}{2R}$ , es decir, si  $A > 1$ . La situación límite corresponde al caso  $A = 1$ . Para masas tales que  $A < 1$ , ya no es posible la estabilidad estática. En la tercera situación de la Figura 5, un pequeño grano de arena añadido al cuerpo lo haría caer verticalmente, mientras que el sistema “polea + regla” sigue rotando.



Figura 5. Tres situaciones de equilibrio estable; a la derecha se tiene la situación límite.

### Catástrofe–estudio dinámico

Consideremos ahora que puede haber equilibrio estático, es decir, que  $A > 1$ . Como se señaló en la sección anterior, hay

un ángulo para el que el sistema puede estar en equilibrio. Alejándose de esta posición de equilibrio, ya sea girando la barra o subiendo/bajando el cuerpo suspendido, las oscilaciones comienzan en torno a la posición de equilibrio. En el caso particular de oscilaciones pequeñas se tiene  $\varphi \sim \varphi_0$  y la ecuación (4) puede escribirse de forma aproximada como la ecuación de un oscilador armónico simple ( $\phi = \varphi - \varphi_0$ )

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\cos \varphi_0 \frac{MgL}{2I} \phi, \quad (12)$$

cuyo cuadrado de su frecuencia angular es

$$\omega^2 = \frac{gML}{2I} \cos \varphi_0 = \frac{gmR}{I} \sqrt{A^2 - 1} \quad (13)$$

donde el momento de inercia total,  $I$ , viene dado por la ecuación (5). La frecuencia de movimiento para pequeñas oscilaciones puede determinarse experimentalmente con un cronómetro, y el resultado puede compararse directamente con el valor experimental dado por la ecuación anterior.

Las oscilaciones estables del sistema pueden ocurrir alrededor del ángulo  $\varphi_0$ , que corresponde al mínimo local, siempre que la energía total (adimensional),  $E_1$  sea menor que la energía potencial del máximo local después del mínimo (es decir, para el ángulo  $\varphi_{\text{máx}}$ ), como se muestra en la Figura 6. Para energías mayores que  $E_2$  el movimiento será completamente diferente, con el cuerpo cayendo y la polea siempre girando en el mismo sentido. Esta transición entre dos movimientos distintos posibles, gracias a una pequeña alteración de la energía total, es la catástrofe.

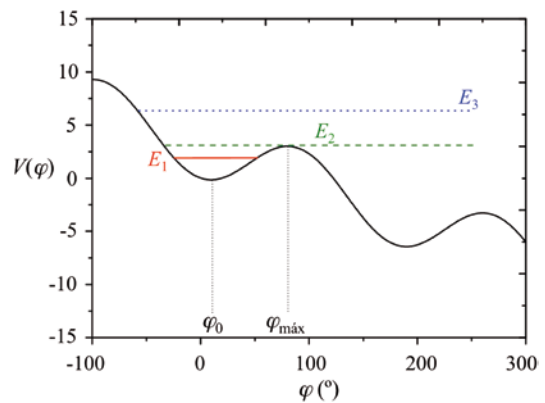


Figura 6. Potencial de tabla de lavar. Sólo para la energía  $E_1$  el sistema puede oscilar alrededor del ángulo  $\varphi_0$ . Para  $E_3$  no hay oscilaciones y para  $E_2$  ocurre la transición.

### Discusión y conclusiones

El sistema dinámico que se ha analizado tiene muchas similitudes con otro sistema ya mencionado anteriormente: un cilindro con un imán en su interior que se coloca en un plano inclinado. Mediante la acción de un campo magnético uniforme al que se acopla el momento magnético, el sistema puede oscilar alrededor de un potencial local mínimo o rodar sobre el plano inclinado. La situación es muy similar a la descrita en este artículo, ya que el potencial también es del tipo de tabla de lavar [4].

Este sistema magneto-mecánico fue analizado minuciosamente por Ángel Franco, de la Universidad del País Vasco, quien lo presentó en su excelente página «Curso interactivo de física en Internet», incluyendo simulaciones que se pue-

den hacer *online* [5]. Además, el sistema actual también tiene cierta semejanza con el movimiento de un ludión, también presentado en el mismo curso interactivo [6], basado en un artículo de uno de los autores actuales (MF) [7].

Concluimos diciendo que el potencial de la tabla de lavar que apareció en nuestro estudio también surge, ahora en el contexto de la mecánica cuántica, en el análisis de la unión Josephson (dos superconductores separados por un aislante delgado) utilizada en los qubits [8], con los cuales se espera poder construir computadoras cuánticas en un futuro más o menos cercano.

### Agradecimientos

Agradecemos al profesor José María Pastor, Presidente de la DEDF de la RSEF por alentar la redacción de este artículo después de nuestra conferencia en el XXIX Encuentro Ibérico de Enseñanza y Divulgación de la Física (DEDF) celebrado en julio de 2019 en Zaragoza durante la XXXVII Biental de Física. Nos gustaría también agradecer al profesor Julio Güémez, de la Universidad de Cantabria (fuimos colaboradores por muchos años), las discusiones sobre tantos problemas básicos de física, incluyendo algunos “catastróficos”, como el presente.

### Referencias

- [1] La idea del sistema surgió en una conversación con Bojan Golli, de la Universidad de Liubliana, en Eslovenia.
- [2] El aparato es muchas veces referido en el contexto del estudio de la llamada unión Josephson.
- [3] D. C. GIANCOLI, *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, Pearson (4.<sup>a</sup> ed., 2008)
- [4] L. BRITO, M. FIOLEAIS y J. PAIXÃO, “Cylinder on an incline as a fold catastrophe system”, *European Journal of Physics* **24**, 115-123 (2003)
- [5] A. FRANCO, [http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/magnetico/rueda\\_iman/rueda\\_iman.html](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/magnetico/rueda_iman/rueda_iman.html)
- [6] A. FRANCO, <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/fluidos/ludion/ludion.html>
- [7] J. GÜÉMEZ, C. FIOLEAIS y M. FIOLEAIS, “The Cartesian Diver and the fold catastrophe”, *American Journal of Physics* **70**, 710-714 (2002)
- [8] P. KRANTZ, M. KJAERGAARD, F. YAN, T. P. ORLANDO, S. GUSTAVSSON y W. D. OLIVER, “A quantum engineer’s guide to superconducting qubits featured”, *Applied Physics Reviews* **6**, 021318 (2019).

## Un experimento basado en Arduino para estudiar el movimiento de caída libre en el aula

**Antonio Ángel Moya**  
Dpto. de Física,  
Universidad de Jaén



Se ha diseñado un simple experimento basado en Arduino para estudiar el movimiento de caída libre de un objeto. Los datos experimentales asociados a la caída libre y vertical de un platillo metálico se recogen con la ayuda de un sensor de ultrasonidos y la placa Arduino. Las curvas posición-tiempo obtenidas para diferentes alturas iniciales son entonces dibujadas y la aceleración de la gravedad es determinada experimentalmente usando Excel.

### Introducción

La plataforma electrónica Arduino [1] es un recurso de código abierto que ha encontrado aplicación en diferentes campos de la Ciencia y la Tecnología, particularmente en Electrónica y Robótica, permitiendo a las personas construir cosas que jamás antes hubieran imaginado. Debido a su carácter flexible, de fácil implementación y de bajo coste económico, los colegios e institutos, en general, y los profesores de asignaturas de Física, en particular, están reconociendo las ventajas de usar las placas Arduino como sistemas de adquisición de datos de bajo coste para realizar experimentos de laboratorio. Los estudiantes jóvenes suelen manifestar un gran interés por experimentos científicos basados en Arduino, y encuentran en este recurso la motivación necesaria para garantizar el éxito de su aprendizaje.

El estudio del movimiento es el primer tópico clásico en Física. Los jóvenes estudian en la escuela conceptos tales como posición, tiempo, velocidad y aceleración. La identificación de los movimientos más sencillos a partir de diagramas espacio-tiempo suele encontrarse entre las diferentes competencias incluidas en las primeras asignaturas con contenidos de Física. En relación estrecha con esta competencia, aquí se presenta el diseño de un experimento sencillo basado en Arduino para estudiar fácilmente el movimiento de caída libre en el aula. Los datos experimentales asociados a la caída libre y vertical de un platillo metálico son recogidos con la ayuda de un sensor de ultrasonidos y una placa Arduino. La representación de las curvas posición-tiempo obtenidas para diferentes alturas iniciales permite determinar experimentalmente la aceleración de la gravedad usando Excel. A diferencia de los experimentos clásicos en los que se mide el tiempo empleado por un objeto en caer libremente desde una altura conocida por medio de células fotoeléctricas, la actividad presentada nos permite medir valores de posición, como en un sistema de coordenadas a intervalos de tiempo aproximadamente regulares y para una mayor variedad de objetos.

### Montaje experimental

El montaje experimental de nuestra investigación del movimiento de caída libre consta de un platillo metálico de 11 cm de diámetro con un gancho donde se ata un hilo de 1 m de longitud y un sensor de ultrasonidos, tal y como se muestra en la Figura 1. Atamos el hilo a la mano y agarramos el platillo por el gancho. Entonces levantamos la mano unos 70 cm verticalmente por encima del sensor y dejamos caer el platillo. Debemos tener en cuenta que, una vez atado a la mano, la longitud del hilo debe ser ligeramente menor que la distancia vertical mencionada, al objeto de no dañar el sensor. La adquisición de datos se hace con la ayuda de un sensor de ultrasonidos HC-SR04, una placa Arduino Uno, un cable