1 2 9 0

UNIVERSIDADE Ð COIMBRA

Augusto Manuel de Oliveira Fernandes

TEORIA ASSINTÓTICA DE MÁXIMOS SOB ESTACIONARIDADE FORTE

Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo da Estatística, Otimização e Matemática Financeira coorientada pela Professora Doutora Maria da Graça Santos Temido Neves Mendes e pela Professora Doutora Cristina Maria Tavares Martins e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Junho de 2021

Teoria assintótica de máximos sob estacionaridade forte

Augusto Manuel de Oliveira Fernandes

1 2 9 0

UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Junho 2021

Agradecimentos

Esta dissertação representa o culminar de cinco anos de trabalho. Foi um percurso por vezes díficil mas, com a ajuda de professores, da família e dos amigos tornou-se bastante mais fácil de percorrer.

Em primeiro lugar gostava de agradecer à minha mãe pela oportunidade que me deu em realizar este curso. Nunca poderei compensar o esforço que fez para tornar possível esta conquista. Agradecer também à minha irmã por todos os conselhos que me deu não só neste período mas em toda a minha vida. A elas, muito obrigado!

Em segundo lugar, à Inês, por estar sempre ao meu lado quando eu mais precisava, não só nos bons momentos, mas também nos maus. Foi, sem dúvida, um dos pilares que me motivou ao longo deste caminho. Obrigado!

Por último e não menos importante, resta-me agradecer a todos os professores com que me cruzei direta ou indiretamente. Com um especial agradecimento às minhas orientadoras, Professora Doutora Maria da Graça Temido e Professora Doutora Cristina Martins, por todos os conselhos, por toda a paciência e, acima de tudo, por todo o conhecimento que partilharam comigo ao longo deste último ano. Muito Obrigado!

Resumo

A Teoria de Extremos estuda a distribuição dos valores extremos de amostras aleatórias, com o objetivo de encontrar modelos que permitam tomar decisões relativamente ao comportamento futuro de fenómenos raros, mas de grande impacto. Perdas causadas por desastres naturais e riscos de investimentos financeiros são bons exemplos de motivações deste estudo.

Na génese da Teoria de Extremos está o Teorema de Gnedenko, o qual estabelece que, em condições bastante gerais, a classe dos possíveis limites em distribuição do máximo de n variáveis aleatórias, reais independentes e identicamente distribuídas, coincide com a classe das distribuições max-estáveis. A demonstração deste resultado e de condições que garantem a existência de tal limite ocupam essencialmente a primeira parte deste trabalho.

Dirigimos o estudo para a teoria probabilística de extremos em contextos de dependência, no que diz respeito à caracterização do limite em distribuição do máximo em sucessões univariadas e multivariadas fortemente estacionárias, sujeitas a condições de independência assintótica e de dependência local adequadas.

No caso univariado, seguindo [10], mostramos que sob a validade da condição de independência assintótica, se mantêm as conclusões do Teorema Limite Extremal, surgindo, contudo, um parâmetro usualmente designado índice extremal da sucessão. Este parâmetro permite a caracterização completa da distribuição limite do máximo a partir da sua contrapartida clássica.

O trabalho prossegue no domínio multivariado seguindo essencialmente [9] e [5]. Para proceder à caracterização da classe de limites em distribuição do máximo multivariado, são necessários o conceito de índice extremal multivariado e de cópula de uma função de distribuição multivariada, ao que se junta o comportamento assintótico marginal, especificado pelo Teorema Limite Extremal clássico. Mais concretamente, demonstramos um Teorema Limite Extremal multivariado e concluímos que uma distribuição limite multivariada de máximos se caracteriza por ter margens max-estáveis e cópula max-estável. Estudamos um modelo autorregressivo de máximos de ordem 1 multivariado ([6]) e um modelo de máximos móveis multivariado ([16]), começando por estabelecer a sua estacionaridade forte. Inserindo estes modelos na plataforma teórica descrita acima, obtemos a distribuição limite do máximo, avaliando diferentes concretizações do índice extremal, das distribuições das margens e de cópulas.

Palavras Chave: Teoria de Extremos, Estacionaridade Forte, Distribuições Max-Estáveis, Distribuições MEV, Teorema Limite Extremal

Abstract

The Extreme Value Theory studies the distribution of extreme values of random samples. The aim of this theory is to find models to make decisions regarding the future behaviour of rare but high-impact phenomena, such as losses caused by natural disasters and financial investment.

At the genesis of the Extreme Value Theory is the Gnedenko Theorem. Under general conditions, this theorem establishes the class of possible limits in the distribution of the maximum of n random variables, real independent and identically distributed, coinciding with the class of the max-stable distributions. The first part of this work concerns the proof of this result and the conditions that guarantee the existence of such limit.

We direct the study towards the Probabilistic Extreme Value Theory in dependency contexts. In fact, this study regards the characterization of the limit in distribution of the maximum in strongly stationary univariate and multivariate sequences. These sequences are subject to asymptotic independence and local dependence conditions.

In the univariate case, following [10], we show that under the validity of the asymptotic independence condition, the conclusions of the Extreme Limit Theorem are maintained. However, a parameter, usually called the extreme index of the sequence, emerges. This parameter allows for the complete characterization of the limit distribution of the maximum from its classical counterpart.

The work proceeds in the multivariate domain essentially following [5] and [9]. To characterize the class of limits in multivariate maximum distribution, the concept of a multivariate extreme index and a copula of a multivariate distribution function are necessary. A marginal asymptotic behaviour, specified by the classic extreme limit theorem, is added. More specifically, we prove a multivariate Extreme Limit Theorem and conclude that a multivariate limit distribution of maxima is characterized by having max-stable margins and max-stable copula.

This study concerns a multivariate maximum autoregressive of order 1 process ([6]) and a multivariate moving maxima process ([16]), starting by establishing their strong stationarity. Inserting these models in the theoretical platform described above, we obtain the limit distribution of the maximum, evaluating different embodiments of the extreme index, margin distributions and copula.

Keywords: Extreme Value Theory, Strong Stationarity, Max-Stable Distributions, MEV Distributions, Extreme Limit Theorem

Conteúdo

Lista de Notações

Símbolo	Significado
ω_F	extremo superior do suporte da f.d. F, isto é, $\sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$
α_F	extremo inferior do suporte da f.d. F, isto é, $\inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$
F^{-1}	inversa generalizada de F, isto é, $F^{-1}(x) = \inf\{y : F(y) \geq x\},\ x \in \mathbb{R}$
$[x]$	parte inteira de x
$:=$	definido por
$\equiv$	coincidente com
f.d.	função de distribuição
v.a.	variável aleatória
ve.a.	vetor aleatório
v.a.'s	variáveis aleatórias
ve.a.'s	vetores aleatórios
i.i.d.	independentes e identicamente distribuídas
$o_n(1)$	$o_n(1) \to 0,\ n \to \infty$
$o(f(t)),\ t \to a$	$\lim\limits_{t \to a} \frac{o(f(t))}{f(t)} = 0$
$\sim$	$f \sim g$ é $\frac{f}{g} \to 1$
$\xrightarrow{w}$	convergência fraca
$\xrightarrow{d}$	convergência em distribuição
$\sigma(.)$	σ-álgebra gerada pelos vetores indicados
$F(\mathbb{R})$	contradomínio de F
$\bigvee\limits_{i=1}^{n} X_i$	$\max(X_1, \ldots, X_n)$
$\bigwedge\limits_{i=1}^{n} X_i$	$\min(X_1, \ldots, X_n)$
$D(G)$	domínio de atração de G
$M_{n,j}$	$\bigvee\limits_{i=1}^{n} X_{i,j}$
$\mathbf{M}_n$	$(M_{n,1}, \ldots, M_{n,d})$

Capítulo 1

Introdução

A Teoria de Extremos é um ramo da Teoria da Probabilidade e da Estatística que se ocupa, essencialmente, da modelação de muitos fenómenos raros, cuja ocorrência excecional pode ter um impacto bastante significativo. Com efeito, os valores extremos de um conjunto de observações são uma tradução do que de melhor ou pior pode ocorrer na natureza como, por exemplo, temperaturas máximas e mínimas, velocidade de rajadas de vento, máximo de níveis de água ou até mesmo o tempo máximo de funcionamento de um dado equipamento ou o máximo de resistência de um material. Uma das aplicações interessantes da Teoria de Extremos foi a determinação da altura segura do dique que foi construído nos Países Baixos, após a catástrofe de Fevereiro de 1953.

Em resumo, a Teoria de Extremos estuda a distribuição de valores extremos de amostras aleatórias, com o objetivo de encontrar modelos que nos permitam tomar decisões relativamente ao comportamento futuro de fenómenos raros com interesse em muitas áreas do saber, como a Fiabilidade, as Finanças, a Climatologia e a Hidrologia, entre outras.

Os primeiros resultados desenvolvidos identificam a classe de leis limite possíveis do máximo de n variáveis aleatórias (v.a.'s) reais independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), sujeitas a uma normalização linear. Em [7] é obtido o Teorema Limite Extremal, onde se estabelece tal classe. Tendo sido formalmente demonstrado por [8], este teorema também é conhecido por Teorema de Gnedenko.

Realçamos que a igualdade $\min(X_1, \ldots, X_n) = -\max(-X_1, \ldots, -X_n)$ justifica o facto de a Teoria de Extremos se dedicar quase exclusivamente a leis de extremos superiores.

A aplicação a problemas do quotidiano depressa fez perceber que, muitas vezes, a realidade não se enquadrava na estrutura teórica do caso i.i.d. (caso clássico). Surgiu então a necessidade de desenvolver a Teoria de Extremos em modelos menos restritivos. Em sucessões dependentes, a introdução de condições que controlam a dependência de forma conveniente permitiu estender a Teoria de Extremos clássica.

Existem inúmeros fenómenos reais onde acontecimentos extremos apresentam uma modelação multivariada. Como tal, a teoria probabilística de extremos d-dimensionais tem vindo a ser cada vez mais desenvolvida. Como exemplo temos os dados da velocidade do vento onde o máximo das rajadas por hora, a velocidade média das rajadas por hora e a dependência entre elas são relevantes para a segurança de edifícios. Pode-se constatar que a Teoria de Extremos para sucessões d-dimensionais seguiu as mesmas linhas que o caso unidimensional. Em alguns casos os resultados são generalizações imediatas do caso univariado, noutros casos surgem novas questões, muitas vezes surpreendentes, características do caso multivariado.

Assim como a Teoria de Extremos se foi desenvolvendo ao longo do tempo cada vez mais afastada do caso clássico, também este trabalho se estrutura na mesma direção.

No Capítulo 2, que contém o caso clássico, começamos por apresentar os fundamentos necessários para estabelecer a convergência em distribuição do máximo de n v.a's i.i.d. e caracterizar os seus possíveis limites. Surge assim o Teorema Limite Extremal clássico, onde se identifica a classe destes limites com a classe das funções de distribuição (f.d.'s) max-estáveis, a qual se divide nas três sub-classes disjuntas das f.d.'s dos tipos Fréchet, Weibull e Gumbel. Acrescentamos uma caracterização dos domínios de atração extremais e alguns exemplos.

As sucessões reais fortemente estacionárias constituem uma das direções possíveis quando se pretende o afastamento ao tão restritivo caso clássico. No Capítulo 3, considerando este tipo de sucessões sujeitas a condições de independência assintótica adequadas, começamos por apresentar um conjunto de resultados que servem de suporte à demonstração de um Teorema Limite Extremal. Neste contexto, surge um coeficiente extremal relevante para a Teoria de Extremos, designado índice extremal. Este parâmetro fornece uma relação entre a função de distribuição (f.d.) limite do máximo de uma sucessão estacionária e a f.d. limite do máximo da sucessão i.i.d com a mesma f.d. marginal. Definido o índice extremal, calculamo-lo através da introdução de condições de dependência local, uma delas garantindo índice extremal igual a 1. Terminamos o capítulo com um caso particular que se antecipou à teoria geral exposta anteriormente. Trata-se da convergência em distribuição do máximo em sucessões normais fortemente estacionárias sob dependência fraca [10].

O Capítulo 4 segue de um modo muito similar o que foi feito no capítulo anterior. Para além da definição de f.d. de valores extremos multivariada (MEV), apresentamos a sua caracterização, usando para tal a valiosa noção de função cópula, a qual nos permitirá relacionar a f.d. multivariada com as suas f.d.'s marginais. Depois de apresentar algumas das propriedades fundamentais da função cópula e da sua relação com a convergência de sucessões de f.d's, tornou-se possível estabelecer um Teorema Limite Extremal Multivariado, inserido no contexto das sucessões vetoriais fortemente estacionárias com controlo de dependência que estende o caso univariado. Também neste contexto surge a definição de índice extremal multivariado, a qual não sendo completamente uma generalização da que se conhece no caso univariado, foi, pelo menos, motivada por esta. Estabelecemos relações possíveis deste parâmetro com as suas contrapartidas marginais, quer à custa das f.d.'s limite envolvidas, quer à custa das cópulas destas. O capítulo termina com dois exemplos de processos multivariados que ilustram muitos dos resultados anteriores - um processo autorregressivo de máximos de ordem 1 e um processo de máximos móveis. Em ambos, determinamos a f.d. limite do máximo e caracterizamos o índice extremal em função dos domínios de atração marginais e das cópulas envolvidas.

Capítulo 2

Teoria de valores extremos - caso clássico

2.1 Resultados fundamentais

Consideremos uma sucessão $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de v.a.'s reais i.i.d. com f.d. F. Denotemos por M_n a v.a. que representa o máximo de $(X_1,\ldots,X_n)$, isto é, $M_n = \bigvee_{i=1}^{n} X_i$. A f.d. de M_n é dada por

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = F^n(x),\ x \in \mathbb{R},$$

resultado que só tem interesse prático quando F é conhecida. Uma vez que $F^n(x)$ tem limite 0 ou 1, é de todo o interesse a procura de uma normalização real u_n tal que $F^n(u_n)$ convirja para uma f.d. não degenerada. Deste modo, procuramos um resultado assintótico menos dependente da forma concreta de F. A escolha de uma normalização linear $u_n = a_n x + b_n$, motivada pelo Teorema do Limite Central, permite estabelecer um comportamento assintótico para $a_n^{-1}(M_n - b_n)$, tal como já havia sido estabelecido para $a_n^{-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i - b_n)$. Assim, há que determinar sob que condições se tem

$$F^n(a_n x + b_n) = P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{w} G(x),\ n \to +\infty,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.1.1}$$

para alguma f.d. G não degenerada e constantes de normalização reais $a_n > 0$ e b_n e caracterizar a f.d. limite G. Neste trabalho, com $\xrightarrow{w}$ denotamos a convergência nos pontos de continuidade de G, e para todo o tipo de sucessões, $\{u_n\}$ denota $\{u_n\}_{n\geq 1}$.

Se (2.1.1) se verificar para sucessões $\{a_n > 0\}, \{b_n\}$, dizemos que F pertence ao domínio de atração de G, o que denotamos por $F \in D(G)$. Diz-se ainda que as f.d.'s reais H_1 e H_2 são do mesmo tipo se existirem constantes $a > 0$ e b tais que $H_1(x) = H_2(ax + b)$, para qualquer x real.

Face ao problema da existência de limite em distribuição para o máximo M_n, devidamente normalizado, há que referir, logo à partida, o Corolário 1.5.2. e o Teorema 1.7.13. de [10]. No primeiro mostra-se que se $\lim_{x \to \omega_F^-} F(x) < 1$, com ω_F o limite superior do suporte de F, isto é, $\omega_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$, e se existir uma sucessão real $\{u_n\}$ tal que $P(M_n \leq u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho$, então $\rho = 0$ ou $\rho = 1$. No segundo resultado, para f.d.'s F tais que $\lim_{x \to \omega_F^-} F(x) = 1$, prova-se que existe uma sucessão real $\{u_n\}$ tal que $P(M_n \leq u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau}$, com $\tau > 0$, ou equivalentemente $n(1 - F(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$, se e só se

$$\lim_{x \to \omega_F} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x^-)} = 1. \tag{2.1.2}$$

Estes dois resultados excluem dos domínios de atração de qualquer f.d. max-estável, não só f.d.'s que verificam a condição $\lim_{x \to \omega_F^-} F(x) < 1$, como é o caso da binomial, como também f.d.'s para as quais se tem $\lim_{n\to\infty}(1 - F(n-1))/(1 - F(n)) = r$, com $r \in]1, +\infty[$, como é o caso da f.d. da lei geométrica e da f.d. da lei de Poisson ($r = +\infty$).

Apesar de todas as f.d.'s contínuas verificarem trivialmente (2.1.2), existem casos em que é impossível encontrar sucessões de constantes $\{a_n > 0\}$ e $\{b_n\}$ para as quais se tenha um limite em distribuição não degenerado para $a_n^{-1}(M_n - b_n)$, como por exemplo a f.d. $F(x) = (1 - e^{-x - sen(x)})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x), x \in \mathbb{R}$.

O Teorema de Khintchine permite avaliar o efeito que diferentes escolhas de constantes de normalização têm na f.d. limite em (2.1.1).

Teorema 2.1.1 (Teorema de Khintchine, [10])**.** *Seja $\{F_n\}$ uma sucessão de f.d.'s e G uma f.d. não degenerada. Sejam $a_n > 0$ e b_n constantes tais que*

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow{w} G(x),\ n \to +\infty.$$

Então, para alguma f.d. não-degenerada G_* e constantes $\alpha_n > 0$ e $\beta_n \in \mathbb{R}$, temos

$$F_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow{w} G_*(x),\ n \to +\infty,$$

se e só se

$$a_n^{-1}\alpha_n \to a \quad e \quad a_n^{-1}(\beta_n - b_n) \to b,$$

com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, verificando-se $G_*(x) = G(ax + b)$.

Assim, o Teorema de Khintchine permite concluir que se F pertence ao domínio de atração de uma f.d. G, então também pertence ao domínio de atração de qualquer outra f.d. que seja do tipo de G. Passamos à caracterização do limite em (2.1.1), a qual se inicia com a definição de f.d. real max-estável.

Definição 2.1.2 ([10])**.** *A f.d. real G diz-se max-estável se, para todo $n = 2, 3, \ldots$, existem constantes $a_n > 0$ e b_n tais que*

$$G^n(a_n x + b_n) = G(x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.1.3}$$

As f.d.'s max-estáveis satisfazem os lemas que apresentamos seguidamente.

Lema 2.1.3 ([10]). *Se G é uma f.d. max-estável, existem funções reais $a(s) > 0$ e $b(s)$, definidas para $s > 0$, tais que $G^s(a(s)x + b(s)) = G(x)$, para quaisquer reais x e $s > 0$.*

Demonstração. Se G é max-estável, então existem constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, tais que (2.1.3) se verifica. Tem-se também $G^{[ns]}(a_{[ns]}x + b_{[ns]}) = G(x)$, para qualquer $s > 0$, donde $G^n(a_{[ns]}x + b_{[ns]}) \xrightarrow[n\to\infty]{} G^{\frac{1}{s}}(x)$. Assim, o Teorema de Khintchine garante a existência de constantes $a(s) > 0$ e $b(s)$ tais que $G(a(s)x + b(s)) = G^{\frac{1}{s}}(x)$. □

O lema seguinte prova que a classe das f.d.'s max-estáveis coincide com a classe dos possíveis limites em (2.1.1) e que qualquer f.d. max-estável pertence ao seu próprio domínio de atração.

Lema 2.1.4 ([10]). *(i) A f.d. G não degenerada é max-estável se e só se existe uma sucessão $\{F_n\}$ de f.d.'s e sucessões de constantes reais $\{a_n > 0\}$ e $\{b_n\}$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$F_n(a_{nk}x + b_{nk}) \xrightarrow{w} G^{\frac{1}{k}}(x),\ n \to +\infty. \tag{2.1.4}$$

(ii) Se G é não degenerada, G é max-estável se e só se $D(G)$ é não vazio.

(iii) A classe das f.d.'s G não degeneradas, que surgem como limite em (2.1.1), coincide com a classe das f.d.'s max-estáveis.

Demonstração. Comecemos por provar (i). Admitamos que (2.1.4) se verifica e observemos que $G^{\frac{1}{k}}$ é uma f.d. não degenerada, para qualquer k natural. Considerando a convergência (2.1.4) para $k = 1$ e para $k \neq 1$, o Teorema de Khintchine garante que $G^{\frac{1}{k}}(x) = G(\alpha_k x + \beta_k)$, para alguns $\alpha_k > 0$ e $\beta_k \in \mathbb{R}$, isto é, G é max-estável.

Reciprocamente, se G é max-estável, considerando $F_n = G^n$ em (2.1.3), tem-se $F_{nk}(a_{nk}x + b_{nk}) = G(x)$, para $n, k \in \mathbb{N}$, bem como $F_n(a_{nk}x+b_{nk}) = G^n(a_{nk}x+b_{nk}) = (G^{nk}(a_{nk}x+b_{nk}))^{\frac{1}{k}} = G^{\frac{1}{k}}(x)$, obtendo-se (2.1.4) trivialmente.

Relativamente a (ii), comecemos por supor que G é max-estável, isto é, que existem $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tais que (2.1.3) se verifica. Então $G \in D(G)$ e portanto $D(G)$ é não vazio.

Reciprocamente, admitamos que $D(G)$ é não vazio e seja $F \in D(G)$. Então existem constantes $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$ tais que $F^{nk}(a_{nk}x + b_{nk}) \xrightarrow{w} G(x)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $F^n(a_{nk}x + b_{nk}) \xrightarrow{w} G^{\frac{1}{k}}(x)$. Portanto, (2.1.4) verifica-se com $F_n = F^n$ e por (i) conclui-se que G é max-estável.

Provemos finalmente (iii). Com efeito, como se provou em (ii), se G é max-estável então G pertence ao seu próprio domínio de atração, verificando-se trivialmente (2.1.4). Por outro lado, se o limite (2.1.1) ocorre, ter-se-á (2.1.4) com $F_n = F^n$ e, portanto, G é max-estável como se provou em (i). □

O próximo teorema estabelece os três domínios de atração de f.d.'s max-estáveis, o que nos permitirá demonstrar o Teorema Limite Extremal ou Teorema de Tipos Extremais.

Teorema 2.1.5 ([10]). *Se G é uma f.d. max-estável, então pertence ao tipo de apenas uma das f.d.'s Gumbel, Fréchet ou Weibull de expressão analítica: $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$,*

$\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha})\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x),\ x \in \mathbb{R}$, *e* $\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha)\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(x) + \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x),\ x \in \mathbb{R}$, *respetivamente, onde* α *é uma constante positiva. Reciprocamente, se* G *pertencer ao tipo de alguma destas f.d.'s, então* G *é max-estável.*

Demonstração. Comecemos por provar que cada uma das f.d.'s indicadas no enunciado é max-estável, ou seja, satisfaz (2.1.3). Para a f.d. de Gumbel, temos

$$\Lambda^n(a_n x + b_n) = \Big(\exp\big(-e^{-(a_n x+b_n)}\big)\Big)^n = \exp(-e^{\log n - a_n x - b_n}) = \exp\big(-e^{-(a_n x + b_n - \log n)}\big).$$

Tomando $a_n = 1$ e $b_n = \log n$, obtemos (2.1.3).

Do mesmo modo, para a f.d. de Fréchet, vem

$$\Phi_\alpha^n(a_n x + b_n) = \left(e^{-(a_n x+b_n)^{-\alpha}}\right)^n = e^{-\left(n^{-1/\alpha}(a_n x+b_n)\right)^{-\alpha}} = e^{-\left(n^{-1/\alpha}a_n x + n^{-1/\alpha} b_n\right)^{-\alpha}},$$

e, fazendo $a_n = n^{1/\alpha}$ e $b_n = 0$, obtemos (2.1.3), para $x > 0$. Para $x \le 0$, temos $a_n x + b_n = n^{\frac{1}{\alpha}} x < 0$ e assim $G^n(a_n x + b_n) = 0 = G(x)$.

Finalmente para a f.d. de Weibull, obtemos

$$\Psi_\alpha^n(a_n x + b_n) = \left(e^{-(-(a_n x+b_n))^\alpha}\right)^n = e^{-\left(n^{1/\alpha}\right)^\alpha(-a_n x - b_n)^\alpha} = e^{-\left(-n^{1/\alpha}a_n x - n^{1/\alpha} b_n\right)^{\alpha}},$$

e, fazendo $a_n = n^{-1/\alpha}$ e $b_n = 0$, obtemos (2.1.3), para $x \le 0$. Para $x > 0$, temos $a_n x + b_n = n^{-\frac{1}{\alpha}} x > 0$, pelo que $G^n(a_n x + b_n) = 1 = G(x)$.

Suponhamos agora que G é max-estável. Então, pelo Lema 2.1.3, existem funções $a(s)$ e $b(s)$, com $s > 0$, tais que $G^s(a(s)x + b(s)) = G(x)$, para todo o x real. Se x é tal que $0 < G(x) < 1$, temos

$$-\log(-\log G(a(s)x + b(s))) - \log s = -\log(-\log G(x)). \tag{2.1.5}$$

Provemos agora que G, sendo max-estável, não tem descontinuidades nos extremos do seu suporte no caso de estes serem finitos. Admitamos, por absurdo, que G tem uma descontinuidade no extremo superior do suporte ω_G. Assim, $\lim_{x\to\omega_G^-} G(x) < 1$. De $G^2(a_2 x + b_2) = G(x)$ resulta $a_2 x + b_2 > x$, para qualquer x real. Se $x \to \omega_G^-$ então $a_2 x + b_2 \to k^-$ com $k = a_2\omega_G + b_2 > \omega_G$. Portanto $\lim_{x\to\omega_G^-} G(a_2 x + b_2) = 1$. Mas,

$$\lim_{x\to\omega_G^-} G(x) < 1 \Rightarrow \lim_{x\to\omega_G^-} G^2(a_2 x + b_2) < 1 \Rightarrow \lim_{x\to\omega_G^-} G(a_2 x + b_2) < 1,$$

o que leva a uma contradição. Provámos, assim, que G não admite descontinuidade em ω_G. De modo análogo, provar-se-ia que G não admite descontinuidade em α_G, sendo α_G o limite inferior do suporte de G, ou seja, $\alpha_G = \inf\{x \in \mathbb{R} : G(x) > 0\}$.

Consideremos agora a função não decrescente $\psi(x) = -\log(-\log G(x))$, definida para x tal que $0 < G(x) < 1$. Esta função é tal que $\inf\{\psi(x)\} = -\infty$ e $\sup\{\psi(x)\} = +\infty$ pelo que admite inversa generalizada, que se define por $U(y) = \inf\{x : \psi(x) \ge y\}$. Assim, de (2.1.5), resulta $\psi(a(s)x + b(s)) - \log(s) = \psi(x)$, e, por definição da função U, temos

$$\begin{aligned} U(y) = \inf\{x : \psi(x) \geq y\} = & \inf\{x : \psi(a(s)x + b(s)) - \log s \geq y\} \\ = a(s)^{-1}(\inf\{a(s)x + b(s) : \psi(a(s)x + b(s)) - \log s \geq y\} - b(s)) = & \frac{U(y + \log s) - b(s)}{a(s)}, \end{aligned}$$

do que decorre

$$\frac{U(y + \log s) - U(\log s)}{a(s)} = U(y) - U(0).$$

Escrevendo $z = \log s$, $\tilde{a}(z) = a(e^z)$ e $\tilde{U}(y) = U(y) - U(0)$ vem que

$$\tilde{U}(y + z) - \tilde{U}(z) = \tilde{U}(y)\tilde{a}(z), \tag{2.1.6}$$

para quaisquer reais y e z. Permutando y com z e subtraindo em (2.1.6), membro a membro, obtemos

$$\tilde{U}(y)(1 - \tilde{a}(z)) = \tilde{U}(z)(1 - \tilde{a}(y)). \tag{2.1.7}$$

Colocam-se agora duas situações distintas: $\tilde{a}(z) = 1$, para qualquer $z \in \mathbb{R}$, ou $\tilde{a}(z) \neq 1$, para algum $z \in \mathbb{R}$. Analisemos cada caso em particular.

Admitamos que $\tilde{a}(z) = 1$, para qualquer $z \in \mathbb{R}$. De (2.1.6) obtemos $\tilde{U}(y+z) = \tilde{U}(y)+\tilde{U}(z)$. Atendendo a que a única solucão monótona crescente desta equação é $\tilde{U}(y) = \rho y$, para algum $\rho > 0$, vem $U(y) - U(0) = \rho y$, ou seja, $\psi^{-1}(y) \equiv U(y) = \rho y + v$, com $v = U(0)$. Uma vez que ψ^{-1} é contínua à direita temos $\psi^{-1}(\psi(x)) = x$, donde

$$x = \psi^{-1}(\psi(x)) = \rho\psi(x) + v \Leftrightarrow \psi(x) = \frac{x - v}{\rho}.$$

Substituindo $\psi(x) = \frac{x-v}{\rho}$ na equação $\psi(x) = -\log(-\log G(x))$ obtemos

$$-\log(-\log G(x)) = \frac{x - v}{\rho} \Leftrightarrow \log G(x) = -e^{-\frac{x-v}{\rho}} \Leftrightarrow G(x) = \exp\Big(-e^{-\frac{x-v}{\rho}}\Big),$$

para qualquer x tal que $0 < G(x) < 1$. Sendo G uma f.d., fica provado que, neste caso, $G(x) = \exp\Big(-e^{-\frac{x-v}{\rho}}\Big)$, para qualquer x real, não tendo extremos do suporte finitos. Trata-se da f.d. de Gumbel.

Admitamos agora que $\tilde{a}(z) \neq 1$, para algum $z \in \mathbb{R}$. De (2.1.7) obtemos

$$\tilde{U}(y) = \frac{\tilde{U}(z)}{1 - \tilde{a}(z)}(1 - \tilde{a}(y)) := k(1 - \tilde{a}(y)), \tag{2.1.8}$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}$, onde $k := \frac{\tilde{U}(z)}{1-\tilde{a}(z)}$. Notemos que se tem $k \neq 0$ pois, caso contrário, ter-se-ia $\tilde{U}(z) = 0$ o que implica $\tilde{U}(y) = 0$, ou seja, $U(y) = U(0)$ para qualquer y real. Da equação

(2.1.6) decorre

$$k(1-\tilde{a}(y))\tilde{a}(z) = k(1-\tilde{a}(y+z)) - k(1-\tilde{a}(z)) \Leftrightarrow \tilde{a}(y+z) = \tilde{a}(y)\tilde{a}(z), \tag{2.1.9}$$

onde $\tilde{a}$ é uma função monótona, o que resulta do facto de se ter $\tilde{U}(y) = k(1-\tilde{a}(y))$ com $\tilde{U}$ não decrescente. A única solução monótona da equação funcional (2.1.9) tem a forma $\tilde{a}(y) = e^{\rho y}$, com $\rho \neq 0$. Então, de acordo com a equação (2.1.8), temos $\psi^{-1}(y) \equiv U(y) = k(1-e^{\rho y}) + v$ onde $v = U(0)$. Sendo U não decrescente, temos apenas dois casos distintos a considerar: $k > 0$ e $\rho < 0$ ou $k < 0$ e $\rho > 0$. Mais ainda, temos

$$x = \psi^{-1}(\psi(x)) = k(1-e^{\rho\psi(x)}) + v = k\Big(1 - \big(e^{-\psi(x)}\big)^{-\rho}\Big) + v = k\Big(1 - \big(-\log G(x)\big)^{-\rho}\Big) + v,$$

o que nos permite concluir que $G(x) = \exp\left(-\left(-\frac{x-(v+k)}{k}\right)^{-\frac{1}{\rho}}\right)$, para x tal que $0 < G(x) < 1$. Analisemos agora os dois casos possíveis para ρ e k definidos atrás. Consideremos inicialmente que $k < 0$ e $\rho > 0$. Seja $\alpha = \frac{1}{\rho}$. Neste caso, sendo G uma função exponencial com $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$, concluímos que $\omega_G = +\infty$. Como esta função exponencial só está definida para $x > v+k$ concluímos que α_G é finito. Além disso, $\lim_{x\to(v+k)^+} G(x) = 0$ e G não pode ter um salto em α_G. Consequentemente, $\alpha_G = v+k$. Então, a expressão analítica de G é dada por

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq v+k \\ \exp\left(-\left(-\frac{x-(v+k)}{k}\right)^{-\alpha}\right), & x > v+k \end{cases}.$$

Trata-se de uma f.d. do tipo Fréchet.

Consideremos agora que $k > 0$ e $\rho < 0$. Seja $\alpha = -\frac{1}{\rho}$. Como $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$, concluímos que $\alpha_G = -\infty$. Como se trata de uma função exponencial que só está definida para $x < v+k$, concluímos que ω_G é finito. Além disso, $\lim_{x\to(v+k)^-} G(x) = 1$ e G não tem uma descontinuidade em ω_G. Consequentemente, $\omega_G = v+k$. Então, a expressão analítica de G é agora dada por

$$G(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(-\frac{x-(v+k)}{k}\right)^{\alpha}\right), & x < v+k \\ 1 & x \geq v+k \end{cases},$$

a qual corresponde a uma f.d. do tipo Weibull. $\square$

Os resultados apresentados até agora mostram que a classe dos possíveis limites em (2.1.1) se divide em três sub-classes disjuntas, usualmente identificadas como Tipo Fréchet, Tipo Weibull e Tipo Gumbel. Pelo Toerema de Khintchine, uma f.d. não poderá pertencer ao domínio de atração de duas f.d.'s pertencentes a dois tipos diferentes e, portanto, estes três tipos disjuntos determinam três domínios de atração disjuntos.

2.2 Teorema Limite Extremal

O Teorema Limite Extremal ou Teorema de Tipos Extremais decorre imediatamente do Teorema 2.1.5.

Teorema 2.2.1 (Teorema Limite Extremal, [8])**.** *Seja $\{X_n\}$ uma sucessão de v.a.'s i.i.d., com f.d. F. Se existirem sucessões de reais, $\{a_n > 0\}$ e $\{b_n\}$, tais que*

$$F^n(a_n x + b_n) = P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{w} G(x),\ n \to +\infty, \tag{2.2.1}$$

com G uma f.d. não degenerada, então G pertence ao tipo de apenas uma das f.d.'s Gumbel, Fréchet ou Weibull. Reciprocamente, qualquer f.d. do tipo Gumbel, Fréchet ou Weibull pode surgir como limite em (2.2.1).

Demonstração. Se (2.2.1) se verifica então, para qualquer k natural, tem-se

$$F^{nk}(a_{nk}x + b_{nk}) \xrightarrow{w} G(x),\ n \to +\infty,$$

e portanto, o Lema 2.1.4 mostra que G é max-estável. Pelo Teorema 2.1.5, G pertence ao tipo de alguma das f.d.'s do enunciado. Reciprocamente, se G é do tipo de alguma destas f.d.'s então G é max-estável e atendendo ao Lema 2.1.4, como $D(G)$ é não vazio, G pode surgir como limite numa convergência da forma (2.2.1). □

Até ao momento considerámos a convergência de probabilidades da forma $P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x)$, que podem ser reescritas como $P(M_n \leq u_n)$, onde $u_n = a_n x + b_n$. Mesmo considerando uma sucessão arbitrária de constantes $\{u_n\}$, usando a aproximação $\log(1 - x) \sim -x,\ x \to 0$, prova-se que se tem

$$P(M_n \leq u_n) = F^n(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau} \ \text{ se e só se } \ n(1 - F(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau, \tag{2.2.2}$$

para $0 \leq \tau \leq \infty$. Uma vez que o acontecimento $\{X_i > u_n\}$ representa uma excedência do nível u_n pela variável X_i, para $i = 1, \ldots, n$, então a condição (2.2.2) exige que o número médio de excedências de u_n seja assintoticamente constante. Quando tal acontece para algum $\tau \geq 0$, dizemos que u_n é um nível normalizado e representamo-lo por $u_n^{(\tau)}$. Conjugando (2.2.2) com (2.1.1) podemos ainda concluir que

$$n(1 - F(a_n x + b_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau = \tau(x) = -\log G(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$ e sucessões de constantes reais $\{a_n > 0\}$ e $\{b_n\}$.

Apresentamos agora condições necessárias e suficientes para que a f.d. F pertença aos três domínios de atração mencionados no Teorema 2.1.5.

Teorema 2.2.2 ([10]). *Uma f.d. não degenerada F pertence ao domínio de atração da f.d. de*

1) Fréchet se e só se $\omega_F = \infty$ e $\lim_{t\to\infty} \dfrac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, para todo o x>0, verificando-se (2.2.1) com $a_n = \gamma_n := F^{-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \inf\{x : F(x) \geq 1 - \dfrac{1}{n}\}$ e $b_n = 0$;

2) Weibull se e só se $\omega_F < \infty$ e $\lim_{h\to 0} \dfrac{1-F(\omega_F - xh)}{1-F(\omega_F - h)} = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$, para todo o $x > 0$, verificando-se (2.2.1) com $a_n = \omega_F - \gamma_n$ e $b_n = \omega_F$;

3) Gumbel se e só se existe uma função estritamente positiva $g(t)$ tal que, para todo o $x > 0$, se tem $\lim_{t\to\omega_F} \dfrac{1-F(t+xg(t))}{1-F(t)} = e^{-x}$, verificando-se (2.2.1) com $a_n = g(\gamma_n)$ e $b_n = \gamma_n$.

Demonstração. Fazemos apenas a prova de suficiência. Uma vez que $F(\gamma_n^-) \leq 1 - \frac{1}{n} \leq F(\gamma_n)$, qualquer uma destas três condições implica $n(1 - F(\gamma_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ e $\gamma_n \to \omega_F^-$.

Comecemos por assumir que F satisfaz o critério da f.d. de Fréchet. Assim, como $\gamma_n \to +\infty$, temos

$$n(1 - F(\gamma_n x)) \sim n(1 - F(\gamma_n))x^{-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^{-\alpha}, \ x > 0.$$

Então, por (2.2.2) vem, para $x > 0$, $P(M_n \leq \gamma_n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-x^{-\alpha})$. Uma vez que $\gamma_n > 0$ e que $\exp(-x^{-\alpha}) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, vem também que $P(M_n \leq 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Então, para $x < 0$, obtemos $P(M_n \leq \gamma_n x) \leq P(M_n \leq 0) \to 0$. Portanto, $P(M_n \leq \gamma_n x) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x)$, onde G é uma f.d. de Fréchet, ou seja, (2.2.1) ocorre com $a_n = \gamma_n$ e $b_n = 0$.

A parte 2) segue de modo similar. Neste caso, $\gamma_n \to \omega_F^-$. Escrevendo $h_n = \omega_F - \gamma_n$ deduz-se, para $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(\omega_F - x(\omega_F - \gamma_n))) = x^{\alpha}$. Para $x < 0$, substituindo x por $-x$, obtemos igualmente $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(\omega_F + x(\omega_F - \gamma_n))) = (-x)^{\alpha}$. Usando novamente (2.2.2), estabelecemos (2.2.1) com constantes $a_n = \omega_F - \gamma_n$ e $b_n = \omega_F$.

Finalmente, também o caso 3) segue nas mesmas linhas dos anteriores. Com efeito, se F satisfizer o critério enunciado, escrevendo $t = \gamma_n \to \omega_F$, temos que $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(\gamma_n + xg(\gamma_n)) = e^{-x}$, para todo o x real. Obtém-se (2.2.1) com $a_n = g(\gamma_n)$ e $b_n = \gamma_n$. □

Exemplo 2.2.3. *Seja F a f.d. da lei de Pareto, definida por $F(x) = (1 - kx^{-\alpha})\mathbb{I}_{[k^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, onde $\alpha > 0$, $k > 0$ são constantes reais. Considerando $b_n = 0$ e $a_n = (kn)^{\frac{1}{\alpha}}$, obtemos $n(1 - F(a_n x + b_n)) = n(1 - F((kn)^{\frac{1}{\alpha}} x)) = nk((kn)^{\frac{1}{\alpha}} x)^{-\alpha} = x^{-\alpha}$, para $x > 0$ e n tal que $n^{\frac{1}{\alpha}} x > 1$. Então, F pertence ao domínio de atração da f.d. de Fréchet.* □

Exemplo 2.2.4. *Seja F a f.d. da lei exponencial definida por $F(x) = (1 - e^{-x})\mathbb{I}_{[0, +\infty[}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Com $a_n = 1$ e $b_n = \log n$, obtemos $n(1 - F(x + \log n)) = ne^{-x-\log n} = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, para n tal que $x + \log n > 0$. Então, F pertence ao domínio de atração da f.d. de Gumbel.* □

Exemplo 2.2.5. *Seja $\{X_n\}$ uma sucessão de v.a's normais i.i.d. centradas e reduzidas. Vamos mostrar que*

$$P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-e^{-x}), \ x \in \mathbb{R},$$

com

$$a_n = (2\log n)^{-\frac{1}{2}} \quad e \quad b_n = (2\log n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2\log n)^{-\frac{1}{2}}(\log\log n + \log 4\pi). \tag{2.2.3}$$

Denotemos por Φ e ϕ, a f.d. e a função densidade de X_n, respetivamente. Consideremos a sucessão real $\{u_n\}$ definida por

$$n(1-\Phi(u_n)) = e^{-x},\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.2.4}$$

Uma vez que se tem $1-\Phi(x) \sim \frac{\phi(x)}{x}$, $x \to +\infty$, e, como de (2.2.4), se conclui que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, temos

$$\frac{1}{n}e^{-x}\frac{u_n}{\phi(u_n)} \to 1,\ n \to +\infty.$$

Tomando logaritmos vem,

$$-\log n - x + \log u_n - \log\phi(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

e, como $\phi(u_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_n^2}{2}}$, obtemos

$$-\log n - x + \log u_n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{u_n^2}{2} \to 0,\ n \to +\infty. \tag{2.2.5}$$

Assim, $\frac{2\log n}{u_n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ o que implica

$$\log 2 + \log\log n - 2\log u_n \to 0,\ n \to +\infty.$$

Aplicando este limite em (2.2.5), resulta

$$-\log n - x + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log\log n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{u_n^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Então,

$$u_n^2 = 2\Big(x + \log n - \frac{1}{2}\log\log n - \frac{1}{2}\log 4\pi + o_n(1)\Big),$$

isto é,

$$u_n = (2\log n)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x - \frac{1}{2}\log\log n - \frac{1}{2}\log 4\pi}{\log n} + o\Big(\frac{1}{\log n}\Big)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ora, uma vez que $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + o(x),\ x \to 0,$ obtemos

$$u_n = (2\log n)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x - \frac{1}{2}\log\log n - \frac{1}{2}\log 4\pi}{2\log n} + o\Big(\frac{1}{\log n}\Big)\right),$$

ou ainda,

$$u_n = (2\log n)^{-\frac{1}{2}}x + (2\log n)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2\log n)^{-\frac{1}{2}}\Big(\log\log n + \log 4\pi\Big) + o((\log n)^{-\frac{1}{2}}).$$

Temos assim, $u_n = a_n x + b_n + o(a_n)$ *com* a_n *e* b_n *definidos em (2.2.3).*

Finalmente, por (2.2.2), obtemos

$$P(M_n \leq a_n x + b_n + o(a_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-e^{-x}),\ x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x + o_n(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-e^{-x}),\, x \in \mathbb{R}.$$

O Teorema de Khintchine garante o mesmo limite para a sucessão $v_n = a_n x + b_n$*, concluindo assim a prova. Provámos assim que a f.d. da lei normal pertence ao domínio de atração da f.d. de Gumbel.* □

Capítulo 3

Convergência em lei do máximo em sucessões reais estacionárias

3.1 Teorema Limite Extremal

Depois de estabelecidos os resultados fundamentais da teoria clássica de extremos, em que se consideram v.a.'s i.i.d., um primeiro afastamento desta tão restrita situação pode direcionar-se de duas formas distintas. Uma, em que se consideram v.a.'s independentes e não identicamente distribuídas, outra, considerando v.a.'s dependentes mas com a mesma f.d. Citando [1], a primeira abordagem conduz a um comportamento assintótico de máximos que se afasta consideravelmente do caso clássico. No segundo caso encontram-se as sucessões fortemente estacionárias, para as quais, sob condições adequadas, a lei limite do máximo, sob normalização linear, é relacionável com o que se conhece para o caso clássico. Com efeito, com algumas destas condições, conhecidas como condições de independência assintótica, procura-se enfraquecer a dependência entre X_i e X_j, quando $|j-i| \to +\infty$, o que permite a ligação ao caso i.i.d.

Uma sucessão $\mathbf{X} = \{X_n\}$ de v.a.'s reais diz-se fortemente estacionária se, para toda a escolha de índices $1 \leq i_1 < \cdots < i_n$ e todo o inteiro $s \geq 1$, os vetores $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ e $(X_{i_1+s}, \ldots, X_{i_n+s})$ têm a mesma distribuição. Doravante, a estas sucessões chamamos apenas estacionárias.

Os estudos iniciais envolvendo sucessões normais estacionárias com sucessão de correlações limitada convenientemente, podem ser consultadas em [10] e são parcialmente incluídas na Secção 3.5. Os estudos prosseguiram com a prova da validade do Teorema Limite Extremal para sucessões que verificam a chamada condição de mistura forte. A saber, diz-se que a sucessão estacionária $\mathbf{X}$ verifica a condição de mistura forte se existir uma função $g(k)$, tal que $g(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ e $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| < g(k)$, onde $A \in \sigma(X_1, \ldots, X_p)$ e $B \in \sigma(X_{p+k+1}, \ldots)$ para quaisquer p e k inteiros. Note-se que $\sigma(\centerdot)$ denota a σ-álgebra gerada pelas v.a.'s indicadas. Esta condição pode ser enfraquecida. De facto, quando temos por objetivo a f.d. limite do máximo, apenas os acontecimentos da forma $\{X_i \leq u_n\}$ têm relevância. Surge assim a condição $D(u_n)$, onde $\{u_n\}$ é uma sucessão de constantes reais.

No que se segue $F_{i_1,\ldots,i_n}$ denota a f.d. conjunta de $X_{i_1},\ldots,X_{i_n}$ e a notação $F_{i_1,\ldots,i_n}(u)$ é uma abreviatura de $F_{i_1,\ldots,i_n}(u,\ldots,u)$.

Definição 3.1.1 ([10]). *Dizemos que a sucessão $\boldsymbol{X}$ verifica a condição $D(u_n)$ se, para quaisquer inteiros $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p < j_1 < \ldots j_q \leq n$ tais que $j_1 - i_p \geq \ell_n$, se tem*

$$|F_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(u_n) - F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n)F_{j_1,\ldots,j_q}(u_n)| \leq \alpha_{n,\ell_n},$$

com $\alpha_{n,\ell_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, para alguma sucessão $\ell_n = o(n)$.

A condição $D(u_n)$ garante-nos a independência assintótica de blocos de variáveis suficientemente afastadas, o que permite obter a independência assintótica do máximo em intervalos disjuntos de sucessões estacionárias, [10]. É ainda de salientar que a condição de mistura forte implica a condição $D(u_n)$ para toda sucessão $\{u_n\}$.

O nosso objetivo é agora provar que o Teorema Limite Extremal também é válido para sucessões estacionárias que verificam $D(u_n)$. Começamos por introduzir alguma terminologia e notação. Dado um conjunto de inteiros E, $M(E)$ denota $\bigvee\limits_{j\in E} X_j$. Chamamos intervalo de inteiros a qualquer conjunto finito de inteiros consecutivos. Definimos ainda que o tamanho do intervalo $E = \{j_1,\ldots,j_2\}$ é $j_2 - j_1 + 1$. Se $F = \{k_1,\ldots,k_2\}$, com $j_2 < k_1$, é um outro intervalo, dizemos que E e F são $(k_1 - j_2)-$separados.

Retomando o objetivo acima descrito, pretendemos mostar que, se $\mathbf{X}$ é uma sucessão estacionária que verifica $D(a_nx + b_n)$ e

$$P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow{w} G(x),\ n \to +\infty, \tag{3.1.1}$$

para sucessões de constantes $\{a_n > 0\}$ e $\{b_n\}$ e onde G é uma f.d. não degenerada, então G é uma f.d. de tipo extremo. Equivalentemente, pelo Teorema 2.1.5, G é max-estável. Por outro lado, pelo Lema 2.1.4, tal acontece se

$$P(a_{nk}^{-1}(M_n - b_{nk}) \leq x) \xrightarrow{w} G^{\frac{1}{k}}(x),\ n \to +\infty, \tag{3.1.2}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Uma vez que o caso $k = 1$ em (3.1.2) corresponde a (3.1.1), se se provar que (3.1.2) se verifica para $k = 1$, então verificar-se-á também para $k = 2, 3, \ldots$. Assim, para obter a generalização do Teorema Limite Extremal que pretendemos, basta provar que

$$P(M_{nk} \leq a_{nk}x + b_{nk}) - P^k(M_n \leq a_{nk}x + b_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{3.1.3}$$

para cada $k = 2, 3, \ldots$. O método que vamos utilizar consiste em dividir o intervalo $\{1,\ldots,n\}$ em k intervalos de tamanho $[\frac{n}{k}]$ (restando $n - k[\frac{n}{k}]$ inteiros) para obter um resultado que implica (3.1.3) em cada um destes intervalos, isto é, $P(M_n \leq a_nx + b_n) - P^k(M_{[\frac{n}{k}]} \leq a_nx + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Para aplicarmos a condição $D(u_n)$ é necessário diminuir o tamanho dos k intervalos de modo a separá-los. Consideremos assim um inteiro fixo k e seja $n' = [\frac{n}{k}]$. Portanto, temos $n'k \leq n < (n' + 1)k$. Divide-se os primeiros $n'k$ inteiros em $2k$ intervalos consecutivos. Concretamente escreva-se

$$I_1 = \{1, 2, \ldots, n' - \ell_n\}, \;\; I_1^* = \{n' - \ell_n + 1, \ldots, n'\},$$

e assim sucessivamente até $I_k = \{(k-1)n' + 1, \ldots, kn' - \ell_n\}$, $I_k^* = \{kn' - \ell_n + 1, \ldots, kn'\}$, onde $k < \ell_n < n'$. Observe-se que I_j, $j \leq k$, têm tamanho $n' - \ell_n$ e I_j^*, $j \leq k$, têm tamanho ℓ_n. Escreva-se ainda $I_{k+1} = \{(k-1)n' + \ell_n + 1, \ldots, kn'\}$ e $I_{k+1}^* = \{kn' + 1, \ldots, kn' + \ell_n\}$. É de salientar que $n \in I_{k+1}^*$ e que I_{k+1} e I_{k+1}^*, de tamanho $n' - \ell_n$ e ℓ_n, são definidos de modo diferente de I_j e I_j^*, $j \leq k$.

O próximo lema mostra a independência assintótica de máximos sob intervalos disjuntos, resultado que tem (3.1.3) como consequência.

Lema 3.1.2 ([10]). *Suponhamos que a sucessão estacionária* $\boldsymbol{X}$ *verifica* $D(u_n)$ *para* u_n *tal que* $\limsup_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) < \infty$. *Então, temos*

$$\begin{aligned}
&(i) \;\; \left| P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{M(I_j) \leq u_n\}\right) - \prod_{j=1}^{k} P(M(I_j) \leq u_n) \right| \leq (k-1)\alpha_{n,\ell_n}, \\
&(ii) \;\; 0 \leq P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{M(I_j) \leq u_n\}\right) - P(M_n \leq u_n) \leq (k+1)P(M(I_1) \leq u_n < M(I_1^*)), \\
&(iii) \;\; P(M_n \leq u_n) - P^k(M_{[\frac{n}{k}]} \leq u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Demonstração. Façamos a prova de (i) recursivamente. Seja $A_j = \{M(I_j) \leq u_n\}$. Temos que

$$|P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)| = \;|F_{1,\ldots,n'-\ell_n,n'+1,\ldots,2n'-\ell_n}(u_n) - F_{1,\ldots,n'-\ell_n}(u_n)F_{n'+1,\ldots,2n'-\ell_n}(u_n)|$$

não excede α_{n,ℓ_n}, uma vez que I_1 e I_2 são ℓ_n-separados e $\mathbf{X}$ verifica $D(u_n)$. De igual modo,

$$\begin{aligned}
&|P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)| \\
&\leq |P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2)P(A_3)| + |P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)|P(A_3) \leq 2\alpha_{n,\ell_n},
\end{aligned}$$

visto que $I_1 \cup I_2 \subseteq \{1, \ldots, 2n' - \ell_n\}$ e os I_2 e I_3 são ℓ_n-separados. Procedendo do mesmo modo, obtemos o resultado indicado em (i).

Para provar (ii) notemos que $\{M_n \leq u_n\} \subset \bigcap_{j=1}^{k} \{M(I_j) \leq u_n\}$ e, por isso,

$$\begin{aligned}
&P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{M(I_j) \leq u_n\}\right) - P(M_n \leq u_n) = P\left(\overline{\{M_n \leq u_n\}} \cap \bigcap_{j=1}^{k} \{M(I_j) \leq u_n\}\right) = \\
&= P\left(\bigcup_{j=1}^{k} \{M(I_j) \leq u_n < M(I_j^*)\} \cup \{M(I_{k+1}) \leq u_n < M(I_{k+1}^*)\}\right) \\
&\leq (k+1)P(M(I_1) \leq u_n < M(I_1^*)),
\end{aligned}$$

dado que, atendendo à estacionaridade de $\mathbf{X}$, $P(M(I_j) \leq u_n < M(I_j^*))$ é independente de j.

De modo a provar (iii), comecemos por mostrar que

$$|P^k(M(I_1) \le u_n) - P^k(M_{[\frac{n}{k}]} \le u_n)| \le kP(M(I_1) \le u_n < M(I_1^*)). \tag{3.1.5}$$

Com efeito, uma vez que $P(M(I_1) \le u_n) - P(M_{[\frac{n}{k}]} \le u_n) = P(M(I_1) \le u_n < M(I_1^*))$, escrevendo $y = P(M(I_1) \le u_n)$ e $x = P(M_{[\frac{n}{k}]} \le u_n)$, (3.1.5) segue da desigualdade $y^k - x^k \le k(y-x)$, quando $0 \le x \le y \le 1$.

Por outro lado, como $P(M(I_j) \le u_n)$ é independente de j, a parte (i) dá lugar a

$$\left| P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{M(I_j) \le u_n\} \right) - P^k(M(I_1) \le u_n) \right| \le (k-1)\alpha_{n,\ell_n}. \tag{3.1.6}$$

Combinando (3.1.5), (3.1.6) e (ii), obtemos

$$\left| P\Big(M_n \le u_n\Big) - P^k\Big(M_{[\frac{n}{k}]} \le u_n\Big) \right| \le (2k+1)P(M(I_1) \le u_n < M(I_1^*)) + (k-1)\alpha_{n,\ell_n}.$$

Por um lado, $D(u_n)$ é verificada, pelo que $\alpha_{n,\ell_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, para alguma sucessão $\ell_n = o(n)$. Por outro lado, como $\limsup\limits_{n\to\infty} n(1-F(u_n)) < \infty$, temos que

$$P\Big(M(I_1) \le u_n < M(I_1^*)\Big) \le P\Big(M(I_1^*) > u_n\Big) \le \ell_n P\Big(X_1 > u_n\Big) = \frac{\ell_n}{n} nP\Big(X_1 > u_n\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Assim, obtemos o resultado (3.1.4). □

Se considerarmos uma sucessão de inteiros $\{k_n\}$ que verifica determinadas condições é possível generalizar (3.1.4). O próximo lema, cuja demonstração se omite por seguir os mesmos argumentos do Lema 3.1.2, apresenta tal generalização.

Lema 3.1.3 ([12]). *Seja* $\boldsymbol{X}$ *uma sucessão estacionária verificando a condição* $D(u_n)$ *para sucessões* $\{u_n\}$, $\{\ell_n\}$ *e* $\{k_n\}$, *tais que* $\limsup\limits_{n\to\infty} n(1-F(u_n)) < \infty$ *e*

$$k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \frac{k_n \ell_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{e} \quad k_n \alpha_{n,\ell_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.1.7}$$

Então

$$P\Big(M_n \le u_n\Big) - P^{k_n}\Big(M_{[\frac{n}{k_n}]} \le u_n\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3.1.8}$$

□

Conseguimos finalmente enunciar o Teorema Limite Extremal para sucessões estacionárias.

Teorema 3.1.4 (Teorema Limite Extremal, [10]). *Seja* $\boldsymbol{X}$ *uma sucessão estacionária e* $a_n > 0$ *e* b_n *constantes tais que*

$$P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \le x) \xrightarrow{w} G(x), \; n \to +\infty,$$

onde G é uma f.d. não degenerada. Suponha-se que $D(a_n x + b_n)$ é satisfeita para todo o real x. Então G pertence ao tipo de apenas uma das f.d.'s Gumbel, Fréchet ou Weibull.

Demonstração. Escrevendo $u_n = a_n x + b_n$ e usando (3.1.4) obtemos (3.1.3). Como (3.1.2) se verifica para todo o k uma vez que se verifica, por hipótese, para $k = 1$, então denotando por F_n a f.d. de M_n, pelo Lema 2.1.4, G é max-estável. O Teorema 2.1.5 garante assim que G é uma f.d. de tipo extremo. □

3.2 Resultados sob a condição $D'(u_n)$

Nesta secção o nosso objetivo é encontrar condições para os quais (2.2.2) também se verifique para sucessões estacionárias. No caso em que há estacionaridade, embora a condição $D(u_n)$ seja suficiente para garantir a validade do Teorema Limite Extremal, esta não permite a validação de (2.2.2). Surgiu assim a necessidade de impôr novas condições à sucessão estacionária $\mathbf{X}$, de modo a obter um comportamento assintótico do máximo de certa maneira idêntico ao que teria se a sucessão fosse i.i.d. Assim, em [11], é introduzida uma condição de dependência local, a condição $D'(u_n)$.

Definição 3.2.1 ([11])**.** *Dizemos que a sucessão $\boldsymbol{X}$ satisfaz a condição $D'(u_n)$, para uma sucessão de constantes $\{u_n\}$, se satisfizer $D(u_n)$ e*

$$n \sum_{j=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) \to 0, \;\; n \to \infty, \tag{3.2.1}$$

para alguma sucessão de inteiros positivos $\{k_n\}$ a satisfazer (3.1.7).

Esta condição limita a probabilidade de mais do que uma excedência de u_n ocorrer em $\{1, \ldots, [\frac{n}{k_n}]\}$. O próximo teorema estabelece a equivalência (2.2.2) no caso das sucessões estacionárias sob as condições $D(u_n)$ e $D'(u_n)$.

Teorema 3.2.2 ([10])**.** *Seja $\{u_n\}$ uma sucessão de constantes tais que $D(u_n)$ e $D'(u_n)$ se verificam para a sucessão estacionária $\boldsymbol{X}$. Seja $0 \leq \tau < \infty$. Então,*

$$P(M_n \leq u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau} \tag{3.2.2}$$

se e só se

$$n(1 - F(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau. \tag{3.2.3}$$

Demonstração. Seja $r_n = [\frac{n}{k_n}]$. De $\{M_{r_n} > u_n\} = \bigcup_{j=1}^{r_n} \{X_j > u_n\}$, decorre

$$\sum_{j=1}^{r_n} P(X_j > u_n) - \sum_{1 \leq i < j \leq r_n} P(X_i > u_n, X_j > u_n) \leq P(M_{r_n} > u_n) \leq \sum_{j=1}^{r_n} P(X_j > u_n).$$

Atendendo à estacionaridade de $\mathbf{X}$, estas desigualdades dão lugar a

$$1 - r_n(1 - F(u_n)) \leq P(M_{r_n} \leq u_n) \leq 1 - r_n(1 - F(u_n)) + S_n, \tag{3.2.4}$$

equivalente a

$$\left(1 - \frac{r_n k_n(1 - F(u_n))}{k_n}\right)^{k_n} \leq P^{k_n}(M_{r_n} \leq u_n) \leq \left(1 - \frac{r_n k_n(1 - F(u_n)) + k_n S_n}{k_n}\right)^{k_n}, \tag{3.2.5}$$

onde $S_n = r_n \sum_{j=2}^{r_n} P(X_1 > u_n, X_j > u_n)$. Pela condição $D'(u_n)$, temos $S_n = o(k_n^{-1})$.

Suponhamos que (3.2.3) se verifica. Atendendo a que $r_n k_n(1 - F(u_n)) + k_n S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$, pois $r_n k_n \sim n$, $n \to +\infty$, concluímos que $P^{k_n}(M_{r_n} \leq u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau}$. Devido a (3.1.8) obtemos (3.2.2).

Reciprocamente, consideremos que (3.2.2) se verifica. Reorganizando (3.2.4), obtemos

$$P(M_{r_n} > u_n) \leq r_n(1 - F(u_n)) \leq P(M_{r_n} > u_n) + S_n. \tag{3.2.6}$$

Como, por hipótese, $P(M_n \leq u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau}$, e de (3.1.8) vem

$$P(M_n \leq u_n) = \left(1 - \frac{k_n P(M_{r_n} > u_n)}{k_n}\right)^{k_n} + o_n(1), \tag{3.2.7}$$

concluímos que $k_n P(M_{r_n} > u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$. Multiplicando (3.2.6) por k_n, obtemos $n(1 - F(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$, isto é, (3.2.3). $\square$

Este teorema prova que numa sucessão estacionária que verifique $D(u_n)$ e $D'(u_n)$, para alguma sucessão $\{u_n\}$, o máximo comporta-se assintoticamente como se as variáveis da sucessão $\mathbf{X}$ fossem i.i.d.. Recordemos que se (3.2.3) se verifica para um $\tau \geq 0$, dizemos que u_n é um nível normalizado e representamo-lo por $u_n^{(\tau)}$.

3.3 Índice extremal univariado

Quando a sucessão estacionária $\mathbf{X}$ verifica a condição de independência assintótica $D(u_n)$ mas não verifica a condição $D'(u_n)$, podem existir agrupamentos de excedências de u_n. Neste caso, como nos mostra o teorema seguinte, o limite de $P(M_n \leq u_n^{(\tau)})$, quando existe, depende de uma constante θ positiva que é independente de u_n e de τ.

Teorema 3.3.1 ([10]). *Suponhamos que, para todo o $\tau > 0$, existe uma sucessão $\{u_n^{(\tau)}\}$ que satisfaz (3.2.3), para a qual $D(u_n^{(\tau)})$ se verifica. Então existem constantes θ, θ', $0 \leq \theta \leq \theta' \leq 1$ tais que $\liminf_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) = e^{-\theta'\tau}$ e $\limsup_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) = e^{-\theta\tau}$. Portanto, se para algum $\tau > 0$, $P(M_n \leq u_n^{(\tau)})$ convergir, então $\theta = \theta'$ e $P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\theta\tau}$, para todo o $\tau > 0$.*

Demonstração. Por (3.1.4) sabemos que, para cada inteiro fixo k, $P\Big(M_n \leq u_n^{(\tau)}\Big) - P^k\Big(M_{n'} \leq u_n^{(\tau)}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Então, se considerarmos $\limsup\limits_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) = \psi(\tau)$, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} P(M_{n'} \leq u_n^{(\tau)}) = \psi^{\frac{1}{k}}(\tau).$$

Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que $u_n^{(\tau)} \geq u_{n'}^{(\frac{\tau}{k})}$. Então,

$$\left|P(M_{n'} \leq u_n^{(\tau)}) - P\Big(M_{n'} \leq u_{n'}^{(\frac{\tau}{k})}\Big)\right| = \left|P\Big(\bigcup_{j=1}^{n'}\{u_{n'}^{(\frac{\tau}{k})} < X_j \leq u_n^{(\tau)}\}\Big)\right| \leq n'\left|F(u_n^{(\tau)}) - F(u_{n'}^{(\frac{\tau}{k})})\right|$$

$$= n'\left|\Big(1 - F(u_{n'}^{(\frac{\tau}{k})})\Big) - \Big(1 - F(u_n^{(\tau)})\Big)\right| = n'\left|\frac{\tau}{kn'}(1+o(1)) - \frac{\tau}{n}(1+o(1))\right| = o(1),$$

uma vez que $n' \sim \frac{n}{k}$, $n \to +\infty$. Como $\limsup\limits_{n\to\infty} P(M_{n'} \leq u_{n'}^{(\frac{\tau}{k})}) = \psi(\frac{\tau}{k})$ vem, da desigualdade anterior, que $\limsup\limits_{n\to\infty} P(M_{n'} \leq u_n^{(\tau)}) = \psi(\frac{\tau}{k})$. Assim, obtemos a equação funcional

$$\psi\left(\frac{\tau}{k}\right) = \psi^{\frac{1}{k}}(\tau),\ \tau > 0, \tag{3.3.1}$$

para todo o $k \in \mathbb{N}$.

Se considerarmos $\tau' < \tau$, por (3.2.3), deduz-se que $u_n^{(\tau')} > u_n^{(\tau)}$ quando n é suficientemente grande. Então a função $\psi(\tau)$ é não crescente e é estritamente positiva visto que, de (3.2.5), concluímos que $\liminf\limits_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) \geq e^{-\tau}$. A solução única da equação funcional (3.3.1) é $\psi(\tau) = e^{-\theta\tau}$, onde $\theta \geq 0$ não depende de τ.

Como $\psi(\tau) \geq e^{-\tau}$ vem que $0 \leq \theta \leq 1$. Do mesmo modo, obtemos que $\liminf\limits_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) = e^{-\theta'\tau}$, onde $0 \leq \theta' \leq 1$. Claramente $\theta' \geq \theta$, completando assim a prova do teorema, uma vez que a última afirmação é trivialmente provada. □

Na literatura de Teoria de Extremos, ao parâmetro θ dá-se o nome de índice extremal da sucessão $\mathbf{X}$. Apresentamos agora a definição deste índice sem qualquer restrição de dependência sobre as variáveis de $\mathbf{X}$.

Definição 3.3.2 ([10])**.** *A sucessão estacionária tem índice extremal θ, $0 \leq \theta \leq 1$, se para todo o $\tau > 0$, existe uma sucessão de níveis normalizados $\{u_n^{(\tau)}\}$ satisfazendo*

$$nP(X_1 > u_n^{(\tau)}) = n(1 - F(u_n^{(\tau)})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau \ \text{ e } \ P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\theta\tau}.$$

Consideremos agora $\widehat{\mathbf{X}} = \{\widehat{X}_n\}$ como sendo a sucessão de v.a.'s i.i.d. tal que $\widehat{\mathbf{X}}$ e $\mathbf{X}$ têm a mesma f.d. F comum. Representemos ainda por $\widehat{M_n}$ o máximo das primeiras n variáveis de $\widehat{\mathbf{X}}$.

Com esta notação, se $\mathbf{X}$ tem índice extremal θ e existem os limites $P(a_n^{-1}(\widehat{M_n} - b_n) \leq x) \xrightarrow[n\to+\infty]{w} G(x)$ e $P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow[n\to+\infty]{w} H(x)$, então

$$H(x) = G^{\theta}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim, o índice extremal relaciona a f.d. limite do máximo de $\widehat{\mathbf{X}}$ com a f.d. limite do máximo de $\mathbf{X}$. O caso em que $\theta = 0$ corresponde a uma f.d. limite do máximo degenerada. Quando $\theta > 0$ as f.d.'s limite de M_n e $\widehat{M_n}$ são do mesmo tipo, sendo possível alterar as constantes de atração caso se pretenda obter exatamente a mesma f.d. limite. Com efeito, como G é max-estável, pelo Lema 2.1.3 existem constantes a_θ e b_θ tais que $G^{\theta}(a_\theta x + b_\theta) = G(x)$, ou seja, $G(x) = H(a_\theta x + b_\theta)$.

O Teorema 3.2.2 permite concluir que as sucessões estacionárias que verifiquem as condições $D(u_n)$ e $D'(u_n)$ admitem índice extremal $\theta = 1$.

Por fim, observamos que o teorema anterior permite concluir que o índice extremal não depende de τ nem da escolha das sucessões $\{u_n^{(\tau)}\}$.

3.4 Resultados sob a condição $D''(u_n)$

As sucessões estacionárias que não verificam a condição $D'(u_n)$ apresentam excedências agrupadas do nível u_n. Consideremos, para estas sucessões, uma outra condição de dependência local mais fraca que $D'(u_n)$: a condição $D''(u_n)$. Esta condição vai permitir, num mesmo intervalo, a existência de sucessivas excedências de u_n, mas vai restingir o número de acontecimentos da forma $\{X_j \leq u_n < X_{j+1}\}$, que vamos designar por cruzamentos ascendentes de u_n.

Definição 3.4.1 ([13]). *Uma sucessão estacionária $\mathbf{X}$ satisfaz a condição $D''(u_n)$ para alguma sucessão real $\{u_n\}$, se satisfizer a condição $D(u_n)$ e, sendo $\{k_n\}$ uma sucessão de inteiros que verifica (3.1.7), se tem*

$$n \sum_{j=2}^{r_n - 1} P(X_1 > u_n, X_j \leq u_n < X_{j+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Como já foi referido, a condição $D''(u_n)$ impede que num mesmo intervalo de comprimento $\left[\frac{n}{k_n}\right]$ haja mais do que um cruzamento ascendente. Esta condição, que é uma restrição mais fraca que $D'(u_n)$, possibilita todos os valores de θ, $0 \leq \theta \leq 1$, para o índice extremal.

Apresentamos agora alguns resultados da Teoria de Extremos para sucessões estacionárias que verifiquem a condição $D''(u_n)$.

Teorema 3.4.2 ([13]). *Suponhamos que a sucessão $\mathbf{X}$ verifica a condição $D''(u_n)$ para sucessões de constantes $\{u_n\}$ e $\{k_n\}$ satisfazendo (3.1.7). Sejam $\mu(u_n) = P(X_1 \leq u_n < X_2)$, $\nu = \liminf n\mu(u_n)$ e $\nu' = \limsup n\mu(u_n)$. Então $\liminf P(M_n \leq u_n) = e^{-\nu'}$ e $\limsup P(M_n \leq u_n) = e^{-\nu}$. Em particular,*

$$P(M_n \leq u_n) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\nu} \text{ se e só se } n\mu(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} \nu.$$

Demonstração. Com $A_j = \{X_j \leq u_n < X_{j+1}\}$, tem-se $\{M_{r_n} > u_n\} = \{X_1 > u_n\} \cup \bigcup_{j=1}^{r_n-1} A_j$, do que resulta

$$\sum_{j=1}^{r_n-1} P(A_j) - \sum_{1\leq i<j\leq r_n-1} P(A_i \cap A_j) \leq P(M_{r_n} > u_n) \leq 1 - F(u_n) + \sum_{j=1}^{r_n-1} P(A_j).$$

Sendo $S_n = r_n \sum_{j=2}^{r_n-1} P(X_1 > u_n, X_j \leq u_n < X_{j+1})$ e atendendo a que se verifica $D''(u_n)$, vem $S_n = o(k_n^{-1})$. Usando a estacionaridade da sucessão $\mathbf{X}$, obtemos

$$k_n(r_n - 1)\mu(u_n) - k_n S_n \leq k_n P(M_{r_n} > u_n) \leq k_n(1 - F(u_n)) + k_n(r_n - 1)\mu(u_n)$$

e consequentemente $n\mu(u_n)(1 + o_n(1)) - o_n(1) \leq k_n P(M_{r_n} > u_n) \leq n\mu(u_n) + o_n(1)$. Provámos assim que

$$\nu = \liminf k_n P(M_{r_n} > u_n) \leq \limsup k_n P(M_{r_n} > u_n) = \nu'.$$

Por outro lado, como consequência do Lema 3.1.3, obtemos a igualdade (3.2.7), do que decorre $\liminf_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\nu'}$ e $\limsup_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\nu}$. □

Consideremos agora níveis normalizados $u_n^{(\tau)}$, ou seja, que verifiquem $n(1-F(u_n^{(\tau)})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$. Comecemos por verificar que, pela estacionaridade de $\mathbf{X}$,

$$\begin{aligned}\mu(u_n^{(\tau)}) = P(X_1 \leq u_n^{(\tau)} < X_2) &= P(X_2 > u_n^{(\tau)}) - P(X_2 > u_n^{(\tau)}|X_1 > u_n^{(\tau)})P(X_1 > u_n^{(\tau)}) \\ &= P(X_2 \leq u_n^{(\tau)}|X_1 > u_n^{(\tau)})(1 - F(u_n^{(\tau)})). \qquad (3.4.1)\end{aligned}$$

Para estes níveis normalizados, o teorema seguinte mostra que a distribuição conjunta de X_1 e X_2 determina a existência de índice extremal para uma sucessão estacionária $\mathbf{X}$ que verifique $D''(u_n^{(\tau)})$ e, no caso deste existir, fornece o seu valor.

Teorema 3.4.3 ([13]). *Suponhamos que a sucessão estacionária $\boldsymbol{X}$ verifica a condição $D''(u_n^{(\tau)})$, para cada $\tau > 0$. Se*

$$P(X_2 \leq u_n^{(\tau)}|X_1 > u_n^{(\tau)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta, \qquad (3.4.2)$$

para algum $\tau > 0$, então a convergência para θ ocorre para todo o $\tau > 0$ e a sucessão $\boldsymbol{X}$ tem índice extremal θ. Reciprocamente, se $P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\theta\tau}$, para algum $\tau > 0$, então $\boldsymbol{X}$ tem índice extremal θ e $P(X_2 \leq u_n^{(\tau)}|X_1 > u_n^{(\tau)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$.

Demonstração. Se (3.4.2) ocorre, para algum $\tau > 0$, então, por (3.4.1), $n\mu(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta\tau$ e, pelo Teorema 3.4.2, ter-se-á $P(M_n \leq u_n^{(\tau)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\theta\tau}$. O Teorema 3.3.1 garante que se este limite ocorrer para algum $\tau > 0$, então também ocorre para todo o $\tau > 0$, sendo θ o índice extremal de $\mathbf{X}$. A prova da implicação recíproca segue do mesmo modo. □

Um exemplo de uma sucessão estacionária que verifica as condições $D(u_n)$ e $D''(u_n)$ pode encontrar-se em [1], cuja formulação multivariada, devida a [6], se encontra na Secção 4.5. Tal sucessão $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é definida por $X_n = kX_{n-1} \vee Y_n,\ n \geq 1$, onde $k \in]0,1[$ é uma constante, e $\{Y_n\}$ é uma sucessão de v.a.'s i.i.d. e independentes de X_0. Prova-se em [1] que $\{X_n\}$ verifica a condição de mistura forte, do que resulta a validade da condição $D(u_n)$, e em [14] mostra-se que se verifica $D''(u_n^{(\tau)})$. Nestas condições, denotando por F a f.d. comum de $\{X_n\}$, também em [14] se prova que esta sucessão possui índice extremal $\theta = 1$ se $F \in D(\Psi_\alpha)$ ou $F \in D(\Lambda)$ e $\theta = 1 - k^\alpha$ no caso em que $F \in D(\Phi_\alpha)$. Este exemplo mostra ainda que se pode ter $\theta = 1$ sem que seja válida a condição $D'(u_n^{(\tau)})$.

3.5 Sucessões normais estacionárias sob dependência fraca

Consideremos uma sucessão $\{X_n\}$ normal e fortemente estacionária. Uma vez que, para este tipo de sucessões a média e a variância de cada v.a., X_n, não depende de n, façamos o estudo para v.a.'s centradas e reduzidas. Por outro lado, atendendo a que no caso normal a estacionaridade fraca coincide com a estacionaridade forte e, portanto, a covariância entre duas v.a.'s X_n e X_m depende apenas de $|n-m|$, podemos concluir que a sucessão $\{\rho_n\}$ definida por $\rho_0 = V(X_n),\ n \geq 1,\ \ \rho_n = \mathrm{Cov}(X_{j+n}, X_j),\ j,\ n \geq 1$, define completamente a distribuição de $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$, para quaisquer índices $i_1, \ldots, i_n$, uma vez que define a matriz de covariância.

O Lema de Comparação Normal, exposto a seguir, é um resultado fulcral neste estudo uma vez que limita a diferença entre duas f.d.'s n-dimensionais por uma função das suas covariâncias.

Lema 3.5.1 ([10])**.** *Sejam $(X_1, \ldots, X_n)$ e $(Y_1, \ldots, Y_n)$ ve.a.'s normais com margens centradas e reduzidas e com matriz de covariância $R_1 = [\rho_{ij}^{(1)}]$ e $R_2 = [\rho_{ij}^{(2)}]$, respetivamente. Se $r_{ij} = |\rho_{ij}^{(1)}| \vee |\rho_{ij}^{(2)}|$ e $u_1, \ldots, u_n$ são números reais, então*

$$\begin{aligned}|P(X_j \leq u_j, j = 1, \ldots, n) &- P(Y_j \leq u_j, j = 1, \ldots, n)| \\ &\leq (2\pi)^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\rho_{ij}^{(1)} - \rho_{ij}^{(2)}|(1 - r_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{u_i^2 + u_j^2}{1 + r_{ij}}\right).\end{aligned}$$

O corolário seguinte apresenta a mesma relação mas, neste caso, consideramos que $Y_1, \ldots, Y_n$ são normais centradas e reduzidas i.i.d.

Corolário 3.5.2 ([10])**.** *Seja $\{X_n\}$ uma sucessão normal estacionária centrada e reduzida com sucessões de covariâncias $\{\rho_n\}$. Se $1 \leq l_1 < \cdots < l_s \leq n$ são inteiros tais que $|\rho_j| \leq \delta < 1$, para cada $j = l_i - l_k$, então, para $u \in \mathbb{R}$,*

$$|F_{l_1,\ldots,l_s}(u_n) - \Phi^s(u)| \leq Kn \sum_{j=1}^{n} |\rho_j| \exp\left(-\frac{u^2}{1 + |\rho_j|}\right), \tag{3.5.1}$$

onde $K > 0$ é uma constante.

A próxima proposição mostra que o segundo membro da desigualdade (3.5.1) tende para zero, sob determinadas condições impostas à sucessão $\{\rho_n\}$.

Proposição 3.5.3 ([10]). *Seja $\{X_n\}$ uma sucessão normal estacionária centrada e reduzida. Suponha-se que*

$$\rho_n \log n \to 0,\ n \to +\infty, \tag{3.5.2}$$

e que $\{u_n\}$ é uma sucessão de constantes tal que $n(1-\Phi(u_n))$ é limitada. Então,

$$n\sum_{j=1}^{n} |\rho_j| \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+|\rho_j|}\right) \to 0,\ n \to +\infty. \tag{3.5.3}$$

Demonstração. Provemos a proposição supondo inicialmente que a sucessão $\{u_n\}$ é tal que $n(1-\Phi(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau < \infty$. Então, como $1-\Phi(u_n) \sim \frac{\phi(u_n)}{u_n}$, $n \to +\infty$, de (2.2.5) vem

$$\exp\left(-\frac{u_n^2}{2}\right) \sim \frac{ku_n}{n} \text{ e } u_n \sim (2\log n)^{\frac{1}{2}},$$

com k constante. De (3.5.2) decorre que $\rho_n \to 0,\ n \to +\infty$, o que, pela estacionaridade de $\{X_n\}$, permite excluir $|\rho_n| = 1$, para qualquer n, ou mesmo $\limsup_{n\to\infty} \rho_n = 1$. Com efeito, se considerarmos $|\rho_n| = 1$, para algum $n \neq 0$, então tem-se uma relação linear, quase certa, entre X_1 e X_{n+1}. O mesmo acontece para X_{n+1} e X_{2n+1} e, consequentemente, para X_1 e X_{2n+1} pelo que $|\rho_{2n}| = 1$. Assim, verificamos que $|\rho_{kn}| = 1$, para todo o k, o que contraria a hipótese de que $\rho_n \to 0$. Sejam então, $\delta = \sup_{n\geq 1} |\rho_n| < 1$, α uma constante que verifica $0 < \alpha < \frac{1-\delta}{1+\delta} < 1$, $\delta(n) = \sup_{m\geq n} |\rho_m|$ e $p = [n^\alpha]$. Comecemos por observar que,

$$\begin{aligned} n\sum_{j=1}^{p} |\rho_j| \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+|\rho_j|}\right) &\leq nn^\alpha \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+\delta}\right) \\ = n^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{u_n^2}{2}\right)^{\frac{2}{1+\delta}} &\leq kn^{\alpha+1}\left(\frac{u_n}{n}\right)^{\frac{2}{1+\delta}} \leq k_1 n^{\alpha+1-\frac{2}{1+\delta}} (\log n)^{\frac{1}{1+\delta}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

visto que $\alpha + 1 - \frac{2}{1+\delta} < 0$ e onde $k, k_1 > 0$ são constantes. Por outro lado, de (3.5.2), vem

$$\delta(n)\log n \leq \sup_{m\geq n} |\rho_m| \log m \to 0, n \to +\infty. \tag{3.5.4}$$

Assim, tem-se sucessivamente,

$$\begin{aligned} &n\sum_{j=p+1}^{n} |\rho_j| \exp\left(-\frac{u_n^2}{1+|\rho_j|}\right) \leq n\delta(p)e^{-u_n^2} \sum_{j=p+1}^{n} \exp\left(\frac{u_n^2|\rho_j|}{1+|\rho_j|}\right) \leq n\delta(p)e^{-u_n^2} \sum_{j=p+1}^{n} \exp(u_n^2|\rho_j|) \\ &\leq n^2\delta(p)e^{-u_n^2} \exp(u_n^2\delta(p)) \leq k\delta(p)u_n^2 \exp(u_n^2\delta(p)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

uma vez que $\delta(p)u_n^2 \sim 2\delta(p)\log n = \frac{2}{\alpha}\delta(p)\log n^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, por (3.5.4). Então, provámos que se $n(1-\Phi(u_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau < \infty$, se tem (3.5.3). Provemos finalmente que para sucessões $\{u_n\}$ tais que $n(1-\Phi(u_n)) \leq k$ também se tem (3.5.3). Para tal defina-se a sucessão $\{v_n\}$ por

$n(1-\Phi(v_n)) = k$. Então, $u_n \geq v_n$, para todo o n, e do que se provou anteriormente vem (3.5.3) para $\{v_n\}$. Consequentemente, o mesmo se prova para $\{u_n\}$. □

Finalmente, a proposição seguinte dá-nos as condições para as quais a sucessão $\{X_n\}$ verifica $D(u_n)$ e $D'(u_n)$.

Proposição 3.5.4 ([10]). *Seja $\{X_n\}$ uma sucessão normal estacionária centrada e reduzida com sucessão de covariâncias $\{\rho_n\}$ e seja $\{u_n\}$ uma sucessão de constantes tal que $n(1-\Phi(u_n))$ é limitada. Se $\rho_n \log n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, então $\{X_n\}$ verifica $D(u_n)$ e $D'(u_n)$.*

Demonstração. De acordo com a proposição anterior, as hipóteses desta proposição determinam que se tenha (3.5.3). Por outro lado, verificando-se $\sup_{n\geq 1}|\rho_n| < 1$, pelo Corolário 3.5.2, temos (3.5.1). Consideremos os índices $1 \leq i_1 < \cdots < i_p < j_1 < \cdots < j_q \leq n$, tais que $j_1 - i_p \geq \ell_n$. Usando a desigualdade $|ab-cd| \leq |a-c| + |b-d|$, com a, b, c e $d \in]0,1[$, vem

$$
\begin{aligned}
&|F_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(u_n) - F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n)F_{j_1,\ldots,j_q}(u_n)| \\
&= |F_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(u_n) - F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n)F_{j_1,\ldots,j_q}(u_n) + \Phi^p(u_n)\Phi^q(u_n) - \Phi^{p+q}(u_n)| \\
&\leq |F_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q}(u_n) - \Phi^{p+q}(u_n)| + |\Phi^p(u_n) - F_{i_1,\ldots,i_p}(u_n)| + |\Phi^q(u_n) - F_{j_1,\ldots,j_q}(u_n)| \\
&\leq 3Kn\sum_{j=1}^{n}|\rho_j|\exp\left(-\frac{u_n^2}{1+|\rho_j|}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,
\end{aligned}
$$

o que prova que $\{X_n\}$ verifica $D(u_n)$.

Considerarmos agora $s=2,\ l_1=1,\ l_2=j$ em (3.5.1). Então

$$
|P(X_1\leq u_n, X_j\leq u_n) - \Phi^2(u_n)| \leq K|\rho_{j-1}|\exp\left(-\frac{u_n^2}{1+|\rho_{j-1}|}\right),
$$

ou equivalentemente, $|P(X_1>u_n, X_j>u_n) - (1-\Phi(u_n))^2| \leq K|\rho_{j-1}|\exp\left(-\frac{u_n^2}{1+|\rho_{j-1}|}\right)$. Então, uma vez que $n(1-\Phi(u_n)) \leq L$, com L constante, segue que

$$
n\sum_{j=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(X_1>u_n, X_j>u_n) \leq \frac{L^2}{k_n} + Kn\sum_{j=1}^{n}|\rho_j|\exp\left(-\frac{u_n^2}{1+|\rho_j|}\right)
$$

e assim, recorrendo novamente a (3.5.3), tem-se (3.2.1), isto é, $\{X_n\}$ verifica a condição $D'(u_n)$. Consideremos o nível normalizado do Exemplo 2.2.5, $u_n = a_n x + b_n$ com a_n e b_n dados por (2.2.3) e tais que $n(1-\Phi(u_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$. De acordo com o Teorema 3.2.2 concluímos que $P(a_n^{-1}(M_n - b_n) \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-e^{-x})$, $x\in\mathbb{R}$, isto é, a sucessão de máximos linearmente normalizados converge em distribuição para uma variável aleatória com lei de Gumbel. □

Capítulo 4

Convergência em lei do máximo em sucessões multivariadas estacionárias

4.1 Distribuições MEV e funções cópula

Seja $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_n = (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})\}$ uma sucessão de ve.a.'s com f.d. F fortemente estacionária, isto é, tal que os vetores $(\mathbf{X}_{i_1}, \ldots, \mathbf{X}_{i_n})$ e $(\mathbf{X}_{i_1+s}, \ldots, \mathbf{X}_{i_n+s})$ são igualmente distribuídos, qualquer que seja o conjunto de índices $\{i_1, \ldots, i_n\}$ e $s \in \mathbb{N}$. Os resultados do Capítulo 3 são aplicáveis a cada sucessão de margens $\{X_{n,j}\}$, $j \in D = \{1, \ldots, d\}$, uma vez que estas são sucessões reais fortemente estacionárias.

Dados $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ em $\mathbb{R}^d$ e $c \in \mathbb{R}$, sejam $\mathbf{ax} + c\mathbf{b} = (a_1x_1 + cb_1, \ldots, a_dx_d + cb_d)$ e $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ se e só se $a_j \leq b_j$, para todo o $j \in D$. Mais, $\mathbf{a}_n$ representa o vetor de constante reais $(a_{n,1}, \ldots, a_{n,d})$.

Consideremos o vetor de máximos $\mathbf{M}_n = (M_{n,1}, \ldots, M_{n,d})$, onde $M_{n,j} = \bigvee_{i=1}^{n} X_{i,j}$, $j \in D$. Neste capítulo, estudamos o limite em distribuição de $\mathbf{M}_n$, sob normalização linear. Se considerarmos $\{\mathbf{X}_n\}$ sob condições de independência assintótica e de dependência local, que constituem generalizações das que são consideradas no caso univariado, obtemos os resultados para a f.d. limite. Surge assim a classe das distribuições multivariadas de extremos (MEV) e o conceito de índice extremal multivariado. Esta caracterização é feita à custa da função cópula associada a uma f.d. multivariada. Começamos por apresentar a versão multivariada do Teorema de Khintchine que será útil para a demonstração de resultados posteriores.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Khintchine Multivariado, [5])**.** *Seja $\{F_n\}$ uma sucessão de f.d.'s para a qual existem vetores de constantes $\boldsymbol{a}_n$ e $\boldsymbol{b}_n$, com $a_{n,j} > 0$, $j \in D$, $n \geq 1$, verificando*

$$F_n(\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_n) \stackrel{w}{\to} G(\boldsymbol{x}),\ n \to +\infty,$$

onde G é uma f.d. não degenerada. Então, para alguma f.d. não-degenerada G_* e algumas constantes $\boldsymbol{\alpha}_n$ e $\boldsymbol{\beta}_n$, com $\alpha_{n,j} > 0$, $j \in D$, $n \geq 1$, temos $F_n(\boldsymbol{\alpha}_n\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\beta}_n) \stackrel{w}{\to} G_*(\boldsymbol{x})$, $n \to +\infty$, se e só se $a_{n,j}^{-1}\alpha_{n,j} \to a_j > 0$ e $a_{n,j}^{-1}(\beta_{n,j} - b_{n,j}) \to b_j$, $j \in D$, e verificando-se $G_*(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})$.

Denotemos por $\widehat{\mathbf{X}} = \{\widehat{\mathbf{X}}_n = (\widehat{X}_{n,1}, \dots, \widehat{X}_{n,d})\}$ a sucessão i.i.d. de ve.a.'s com a mesma f.d. d-dimensional, F. Seja ainda $\widehat{\mathbf{M}}_n = (\widehat{M}_{n,1}, \dots, \widehat{M}_{n,d})$ o correspondente vetor de máximos.

Definição 4.1.2 ([5])**.** *Se existem sucessões $\{\boldsymbol{a}_n\}$, com $a_{n,j} > 0$, $j \in D$, e $\{\boldsymbol{b}_n\}$ tais que, para $\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}) = (a_{n,1}x_1 + b_{n,1}, \dots, a_{n,d}x_d + b_{n,d})$, se tem*

$$P(\widehat{\boldsymbol{M}}_n \le \boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x})) = P\Big(\bigcap_{j=1}^{d} \{\widehat{M}_{n,j} \le a_{n,j}x_j + b_{n,j}\}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} G(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{4.1.1}$$

onde G é uma f.d. não-degenerada, então dizemos que G é uma f.d. multivariada de valores extremos (MEV), e que F pertence ao domínio de atração (multivariado) de G.

Note-se que as f.d's marginais univariadas (margens) de G, G_j, $j \in D$, são f.d.'s de tipo extremo, ou seja, pertencem a um dos tipos referidos no Teorema 2.1.5.

A relação entre uma f.d. F e as suas f.d.'s marginais F_j, $j \in D$, pode ser expressa através da função cópula ([4], [9]). Uma função cópula $C : [0,1]^d \to [0,1]$ é a restrição a $[0,1]^d$ de uma f.d. com margens uniformemente distribuídas sobre $[0,1]$. Dada uma f.d. F, d-dimensional, o Teorema de Sklar ([4]) garante a existência de uma cópula C_F tal que

$$F(x_1, \dots, x_d) = C_F(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)),\ \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{4.1.2}$$

Se F tem margens contínuas, então C_F é única e dada por $C_F(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))$, com $(u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d$, [4]. O próximo lema enuncia duas propriedades das funções cópulas muito relevantes para futuras demonstrações.

Lema 4.1.3 ([9])**.** *Sejam F e G f.d.'s d-dimensionais. Então:*

$$(i)\ \ C_{F^n}(u_1, \dots, u_d) = C_F^n(u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, u_d^{\frac{1}{n}}),\ n \ge 1,\ (u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d; \tag{4.1.3}$$

(ii) se $F_j(\mathbb{R}) = G_j(\mathbb{R})$, $j \in D$, e se existem funções T_j, $j \in D$, tais que $F(x_1, \dots, x_d) = G(T_1(x_1), \dots, T_d(x_d)), \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, então $C_F \equiv C_G$.

Demonstração. De (4.1.2), vem que $C_F(u_1, \dots, u_d) = P(F_1(X_1) \le u_1, \dots, F_d(X_d) \le u_d)$, onde $(X_1, \dots, X_d)$ é um vetor aleatório com f.d. F. Considerando $Z_i = (Z_{i,1}, \dots, Z_{i,d}), 1 \le i \le n$, ve.a.'s i.i.d. com f.d. F, facilmente se verifica que F^n é a f.d. de $\Big(\bigvee_{i=1}^{n} Z_{i,1}, \dots, \bigvee_{i=1}^{n} Z_{i,d}\Big)$. Então, considerando a independência de $Z_1, \dots, Z_n$, resulta

$$\begin{aligned} C_{F^n}(u_1, \dots, u_d) =& P\Big(F_1^n\Big(\bigvee_{i=1}^{n} Z_{i,1}\Big) \le u_1, \dots, F_d^n\Big(\bigvee_{i=1}^{n} Z_{i,d}\Big) \le u_d\Big) \\ =& P\Big(\bigvee_{i=1}^{n} F_1(Z_{i,1}) \le u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, \bigvee_{i=1}^{n} F_d(Z_{i,d}) \le u_d^{\frac{1}{n}}\Big) \\ =& P^n(F_1(Z_{1,1}) \le u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, F_d(Z_{1,d}) \le u_d^{\frac{1}{n}}) \\ =& C_F^n(u_1^{\frac{1}{n}}, \dots, u_d^{\frac{1}{n}}),\ (u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d. \end{aligned}$$

Para provar (ii), temos

$$\begin{aligned}C_G(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)) &= C_G(G\circ T_1(x_1),\ldots,G\circ T_d(x_d)) = G(T_1(x_1),\ldots,T_d(x_d))\\ &= F(x_1,\ldots,x_d) = C_F(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)).\end{aligned}$$

Como C_G e C_F são iguais sobre $\prod_{j=1}^{d} F_j(\mathbb{R}) = \prod_{j=1}^{d} G_j(\mathbb{R})$, conclui-se que representam a mesma função. $\square$

As f.d.'s MEV estão associadas a cópulas max-estáveis, conceito que definimos a seguir.

Definição 4.1.4 ([9]). *Uma cópula C_F diz-se max-estável se*

$$C_F(u_1,\ldots,u_d) = C_F^k(u_1^{\frac{1}{k}},\ldots,u_d^{\frac{1}{k}}),\ (u_1,\ldots,u_d)\in[0,1]^d, \tag{4.1.4}$$

para todo o $k>0$.

Encontramos exemplos de cópulas max-estáveis nos Exemplos 4.1.8, 4.1.9 e 4.5.7. Realçamos que, de acordo com (4.1.3) e (4.1.4), uma cópula C_F é max-estável se e só se $C_F \equiv C_{F^n},\ \forall n\in\mathbb{N}$. A função cópula max-estável permite caracterizar uma f.d. MEV. Com efeito, sendo H uma f.d. d-dimensional com f.d.'s marginais $H_j,\ j\in D$, do tipo extremo e C_H uma cópula max-estável, então H é uma f.d. MEV. A prova desta afirmação segue dos resultados que expomos a seguir.

Lema 4.1.5 ([9]). *Se $\{F_n\}$ é uma sucessão de f.d.'s d-dimensionais que converge para a f.d. F cujas margens são contínuas, então $C_{F_n}\to C_F,\ n\to+\infty$.*

Demonstração. Sejam $(X_1,\ldots,X_d)$ e $(X_{n,1},\ldots,X_{n,d})$ ve.a.'s com f.d.'s F e F_n, respetivamente. Sejam ainda F_j e $F_{n,j},\ j\in D$, as margens de F e F_n, respetivamente. Por hipótese, $(X_{n,1},\ldots,X_{n,d}) \overset{d}{\to} (X_1,\ldots,X_d)$ e $F_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} F_j$, uniformemente, pois F_j é contínua. Então conclui-se que $F_{n,j}(x_n)$ converge para $F_j(x)$, para alguma sucessão $\{x_n\}$ que tende para x. Portanto, segue do Teorema 5.5 de [2] (página 34), que $(F_{n,1}(X_{n,1}),\ldots,F_{n,d}(X_{n,d})) \overset{d}{\to} (F_1(X_1),\ldots,F_d(X_d))$, o que conclui a prova. $\square$

Teorema 4.1.6 ([9]). *Suponhamos que F e F_n, $n\geq 1$, são f.d.'s $d-$dimensionais, tendo F margens não degeneradas. Sejam $u_{n,j}^{(k)},\ j\in D,\ n,k\geq1$, tais que*

$$(F_{n,j}\circ u_{n,j}^{(k)})(\mathbb{R}) = F_{n,j}(\mathbb{R}),\ \ j\in D,\ n,\ k\geq 1, \tag{4.1.5}$$

e

$$F_n^k(u_{n,1}^{(k)}(x_1),\ldots,u_{n,d}^{(k)}(x_d)) \xrightarrow[n\to\infty]{w} F(x_1,\ldots,x_d),\ k\geq1, \tag{4.1.6}$$

onde $F_{n,j}$ é a j-ésima f.d. marginal de F_n. Então C_F é uma cópula max-estável se e só se as margens de F são contínuas. Reciprocamente, para toda a f.d. F cuja cópula é max-estável, existem f.d.'s $F_n,\ n\geq1$, e $u_{n,j}^{(k)},\ j\in D,\ n,k\geq1$, para os quais (4.1.5) e (4.1.6) se verificam.

Demonstração. Se a cópula C_F é max-estável então tem margens contínuas. Suponhamos reciprocamente que F tem margens contínuas. Devido a (4.1.6), $F^{\frac{1}{k}},\ k \geq 1$, são f.d.'s não degeneradas e, portanto, pelo Lema 4.1.3, $F_n(u_{n,1}^{(k)}(x_1), \ldots, u_{n,d}^{(k)}(x_d))$ e $F_n(x_1, \ldots, x_d)$ possuem a mesma cópula. Por outro lado, pelo Lema 4.1.5, tem-se $C_{F_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} C_{F^{\frac{1}{k}}}$, portanto, considerando separadamente (4.1.6) com $k = 1$ e $k \neq 1$, concluímos que $C_F = C_{F^{\frac{1}{k}}},\ k \geq 1$. Consequentemente, usando (4.1.3)

$$C_F(u_1, \ldots, u_d) = C_{F^{\frac{k}{k}}}(u_1, \ldots, u_d) = C^k_{F^{\frac{1}{k}}}(u_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, u_d^{\frac{1}{k}}) = C^k_F(u_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, u_d^{\frac{1}{k}}) = C_{F^k}(u_1, \ldots, u_d),$$

isto é, $C_F = C_{F^k},\ k \geq 1$, o que prova que C_F é max-estável. A prova do recíproco segue considerando $F_n = F^n$ e $u_{n,j}^{(k)}(x) = F_j^{-1} \circ F_j^{\frac{1}{nk}}(x),\ n, k \geq 1,\ j \in D$. $\square$

Com argumentos idênticos, [9] prova o teorema seguinte.

Teorema 4.1.7 ([9])**.** *Suponhamos que H é uma f.d. com margens não degeneradas. Sejam $F_n,\ n \geq 1$, f.d.'s e $a_{n,j}^{(k)} > 0,\ b_{n,j}^{(k)},\ j \in D,\ n, k \geq 1$ constantes tais que*

$$F_n^k(a_{n,1}^{(k)}x_1 + b_{n,1}^{(k)}, \ldots, a_{n,d}^{(k)}x_d + b_{n,d}^{(k)}) \xrightarrow[n\to\infty]{w} H(x_1, \ldots, x_d),\ k \geq 1. \tag{4.1.7}$$

Então C_H é uma cópula max-estável e as margens de H são distribuições do tipo extremo. Reciprocamente, qualquer f.d. H que tenha margens do tipo extremo e cópula max-estável pode surgir como limite em (4.1.7).

Os resultados anteriores permitem concluir que uma f.d. é MEV se e só se tem cópula max-estável e margens do tipo extremo, ou seja, max-estáveis.

Exemplo 4.1.8. *Consideremos a f.d. de Mardia $F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + (e^x + e^y - 1)^{-1},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ e $F(x, y) = 0$ para $(x, y) \notin \mathbb{R}^2_+$. Esta f.d. tem margens exponenciais e cópula $C_F(u, v) = u + v - 1 + \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1-v} - 1\right)^{-1}$. Temos, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned} F^n(x + \log n, y + \log n) &= \left(1 - \frac{e^{-x} + e^{-y} + (e^x + e^y - \frac{1}{n})^{-1}}{n}\right)^n \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-e^{-x} - e^{-y}) \exp((e^x + e^y)^{-1}). \end{aligned}$$

Concluímos que $H(x, y) = \Lambda(x)\Lambda(y) \exp((e^x + e^y)^{-1}),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$, é uma f.d. MEV, com margens de Gumbel. Fazendo $u = \Lambda(x)$ e $v = \Lambda(y)$ vem

$$C_H(u, v) = uv \exp\left(\left(\frac{-1}{\log u} + \frac{-1}{\log v}\right)^{-1}\right),\ (u, v) \in]0, 1[^2.$$

Prova-se facilmente que C_H é uma cópula max-estável e, atendendo a que $1-u^{\frac{1}{n}} \sim -\frac{1}{n}\log u,\ n \to +\infty$, prova-se que

$$C_F^n(u^{\frac{1}{n}}, v^{\frac{1}{n}}) = \left(1 + \frac{1}{n}\left(\log u + \log v - \left(\frac{1}{\log u} + \frac{1}{\log v} + \frac{1}{n}\right)^{-1} + o_n(1)\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} C_H(u,v).$$

□

Exemplo 4.1.9. *Seja $F(x_1,\ldots,x_d) = 1-\exp\left(-\bigwedge_{j=1}^{d} x_j\right)$, $(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d$ e $F(x_1,\ldots,x_d)\equiv 0$ para $(x_1,\ldots,x_d)\notin\mathbb{R}_+^d$. Para $(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d$, vem*

$$F^n(x_1+\log n,\ldots,x_d+\log n) = \left(1-\frac{1}{n}\exp\left(-\bigwedge_{j=1}^{d} x_j\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-\exp\left(-\bigwedge_{j=1}^{d} x_j\right)\right).$$

A f.d. $H(x_1,\ldots,x_d) = \exp\left(-\exp\left(-\bigwedge_{j=1}^{d} x_j\right)\right) = \bigwedge_{j=1}^{d}\exp(-e^{-x_j})$ é MEV, com margens de Gumbel e tem cópula $C_H(u_1,\ldots,u_d) = \bigwedge_{j=1}^{d} u_j$. □

4.2 Teorema Limite Extremal

Para efetuar o estudo dos extremos multivariados é necessário impôr uma condição de independência assintótica que será fundamental para a generalização de alguns dos resultados conhecidos nos casos clássico e estacionário univariado. Trata-se, como se espera, da condição $D(\mathbf{u}_n)$, com $\{\mathbf{u}_n = (u_{n,j}, 1\le j\le d)\}$, que se deve a [9].

Definição 4.2.1 ([9])**.** *Seja $\{\boldsymbol{u}_n\}$ uma sucessão de vetores de constantes reais. Para $n\ge 1$, $1\le \ell_n\le n-1$ e $1\le k\le n-\ell_n$, sejam $A\subset\{1,2,\ldots,k\}$ e $B\subset\{k+\ell_n,\ldots,n\}$. Escreva-se*

$$\alpha_{n,\ell_n} = \max\left(\left|P(\boldsymbol{X}_i\le\boldsymbol{u}_n,\ \ i\in A\cup B) - P(\boldsymbol{X}_i\le\boldsymbol{u}_n,\ \ i\in A)P(\boldsymbol{X}_i\le\boldsymbol{u}_n,\ \ i\in B)\right|\right).$$

A sucessão $\boldsymbol{X}$ satisfaz a condição $D(\boldsymbol{u}_n)$ se $\alpha_{n,\ell_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, para algum $\ell_n = o(n)$.

A condição $D(\mathbf{u}_n)$ garante a independência assintótica de blocos de vetores suficientemente afastados, o que permite obter a independência assintótica do máximo em intervalos disjuntos de sucessões multivariadas estacionárias, [9]. No contexto multivariado, chamamos níveis normalizados aos vetores $\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})} = (u_{n,1}^{\tau_j},\ldots,u_{n,d}^{\tau_d})$, isto é, tais que $nP(X_{1,j} > u_{n,j}^{(\tau_j)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_j,\ j\in D$. Observamos que estes níveis não correspondem necessariamente aos níveis $\mathbf{u}_n$ tais que $nP(\mathbf{X}_1\not\le\mathbf{u}_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\tau$, uma vez que sobre estes nada se refere sobre $u_{n,j},\ j\in D$. O próximo teorema afirma que se a sucessão $\mathbf{X}$ satisfizer a condição $D(\mathbf{u}_n)$, então $\{X_{n,j}\}$ verifica a condição $D(u_n)$, para qualquer $j\in D$.

Teorema 4.2.2 ([5])**.** *Se a sucessão estacionária $\{\boldsymbol{X}_n\}$ verifica $D(\boldsymbol{u}_n)$, para todo o $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}$, $\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{R}_+^d$, então $\{X_{n,j}\}$ verifica $D(u_n)$ para todo o $u_n = u_n^{(\tau)}$, $\tau > 0$.*

Demonstração. Dado $u_n = u_n^{(\tau)}$ consideremos $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n^{(\tau)}$ tal que $u_{n,j} = u_n$. Para cada vetor de inteiros $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_p)$ denotamos $P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{p} \{\mathbf{X}_{i_k} \leq \mathbf{u}_n\}\Big)$ e $P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{p} \{X_{i_k,j} \leq u_{n,j}\}\Big)$ por $F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)$ e $F_{\mathbf{i}}^{(j)}(u_{n,j})$, respetivamente. Sejam $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_p)$ e $\mathbf{i}' = (i_1', \ldots, i_q')$ vetores de inteiros tais que $1 \leq i_1 < \cdots < i_p < i_1' < \cdots < i_q' \leq n$ e $i_1' - i_p \geq \ell_n$. Tem-se, para qualquer $j \in D$,

$$
\begin{aligned}
&\left|F_{\mathbf{ii}'}^{(j)}(u_{n,j}) - F_{\mathbf{i}}^{(j)}(u_{n,j})F_{\mathbf{i}'}^{(j)}(u_{n,j})\right| \\
&= \left|F_{\mathbf{ii}'}^{(j)}(u_{n,j}) - F_{\mathbf{ii}'}(\mathbf{u}_n) + F_{\mathbf{ii}'}(\mathbf{u}_n) - F_{\mathbf{i}}^{(j)}(u_{n,j})F_{\mathbf{i}'}^{(j)}(u_{n,j}) + F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)F_{\mathbf{i}'}(\mathbf{u}_n) - F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)F_{\mathbf{i}'}(\mathbf{u}_n)\right| \\
&\leq \left|F_{\mathbf{ii}'}^{(j)}(u_{n,j}) - F_{\mathbf{ii}'}(\mathbf{u}_n)\right| + \left|F_{\mathbf{i}}^{(j)}(u_{n,j})F_{\mathbf{i}'}^{(j)}(u_{n,j}) - F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)F_{\mathbf{i}'}(\mathbf{u}_n)\right| + \left|F_{\mathbf{ii}'}(\mathbf{u}_n) - F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)F_{\mathbf{i}'}(\mathbf{u}_n)\right| \\
&\leq \left|F_{\mathbf{ii}'}^{(j)}(u_{n,j}) - F_{\mathbf{ii}'}(\mathbf{u}_n)\right| + \left|F_{\mathbf{i}}^{(j)}(u_{n,j}) - F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)\right| + \left|F_{\mathbf{i}'}^{(j)}(u_{n,j}) - F_{\mathbf{i}'}(\mathbf{u}_n)\right| + \\
&+ \left|F_{\mathbf{ii}'}(\mathbf{u}_n) - F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)F_{\mathbf{i}'}(\mathbf{u}_n)\right| \leq 3\sum_{\substack{j=1 \\ j'\neq j}}^{d} P(M_{n,j'} > u_{n,j'}) + \left|F_{\mathbf{ii}'}(\mathbf{u}_n) - F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)F_{\mathbf{i}'}(\mathbf{u}_n)\right| \\
&\leq 3\sum_{\substack{j=1 \\ j'\neq j}}^{d} nP(X_{1,j'} > u_{n,j'}) + \left|F_{\mathbf{ii}'}(\mathbf{u}_n) - F_{\mathbf{i}}(\mathbf{u}_n)F_{\mathbf{i}'}(\mathbf{u}_n)\right| \leq 3\sum_{\substack{j=1 \\ j'\neq j}}^{d} \tau_{j'} + \alpha_{n,\ell_n}.
\end{aligned}
$$

Seja $\alpha_{n,\ell_n}^{(j)} := 3\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j'\neq j}}^{d} \tau_{j'} + \alpha_{n,\ell_n}$. Atendendo a que $\{\mathbf{X}_n\}$ verifica $D(\mathbf{u}_n)$, para todo o $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d$, e considerando a arbitrariedade de $\tau_{j'}$ provamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_{n,\ell_n}^{(j)} = 0.$$

Portanto, $\{X_{n,j}\}$ verifica $D(u_n)$, para todo o $\tau > 0$. □

Apresentamos de seguida uma extensão do Lema 3.1.2 ao caso multivariado. A demonstração segue de perto a demonstração do referido lema, pelo que a omitimos. Consideremos os intervalos de inteiros $I_1, I_1^*, \ldots, I_k, I_k^*, I_{k+1}$ e I_{k+1}^*, definidos na secção 3.1. Notemos que, para qualquer conjunto $I_i = \{i_1, \ldots, i_p\}$, se tem

$$
\begin{aligned}
P(\mathbf{M}(I_i) \leq \mathbf{u}_n) &= P(\mathbf{X}_{i_1} \leq \mathbf{u}_n, \ldots, \mathbf{X}_{i_p} \leq \mathbf{u}_n) = P\left(\bigcap_{j=1}^{d}\{X_{i_1,j} \leq u_{n,j}\}, \ldots, \bigcap_{j=1}^{d}\{X_{i_p,j} \leq u_{n,j}\}\right) \\
&= P\left(\bigcap_{j=1}^{d}\bigcap_{l=1}^{p}\{X_{i_l,j} \leq u_{n,j}\}\right).
\end{aligned}
$$

assim como,

$$P(\mathbf{M}(I_1) \not\leq \mathbf{u}_n) = P\left(\bigcup_{l=1}^{p}\{\mathbf{X}_{i_l} \not\leq \mathbf{u}_n\}\right) = P\left(\bigcup_{l=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{d}\{X_{i_l,j} > u_{n,j}\}\right) \leq \sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{d} P(X_{i_l,j} > u_{n,j}).$$

Lema 4.2.3 ([5]). *Consideremos que* $\boldsymbol{X}$ *verifica* $D(\boldsymbol{u}_n)$ *e suponhamos que* $\limsup_{n\to\infty} nP(\boldsymbol{X}_1 \nleq \boldsymbol{u}_n) < +\infty$. *Com a notação anterior, temos*

$$(i)\quad \left| P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{\boldsymbol{M}(I_i) \le \boldsymbol{u}_n\}\right) - \prod_{i=1}^{k} P(\boldsymbol{M}(I_i) \le \boldsymbol{u}_n)\right| \le (k-1)\alpha_{n,\ell_n},$$

$$(ii)\quad 0 \le P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{\boldsymbol{M}(I_i) \le \boldsymbol{u}_n\}\right) - P(\boldsymbol{M}_n \le \boldsymbol{u}_n) \le (k+1)P(\boldsymbol{M}(I_1) \le u_n, \boldsymbol{M}(I_1^*) \nleq \boldsymbol{u}_n),$$

$$(iii)\quad P(\boldsymbol{M}_n \le \boldsymbol{u}_n) - P^k(\boldsymbol{M}_{[\frac{n}{k}]} \le \boldsymbol{u}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{4.2.1}$$

Também no caso multivariado, o limite (4.2.1) pode ser reescrito utilizando uma sucessão de constantes $\{k_n\}$. Assim, o próximo lema apresenta tal generalização.

Lema 4.2.4 ([5]). *Seja* $\boldsymbol{X}$ *uma sucessão estacionária verificando a condição* $D(\boldsymbol{u}_n)$ *para sucessões* $\{\boldsymbol{u}_n\}$, $\{\ell_n\}$ *e* $\{k_n\}$ *que verifiquem (3.1.7) e* $\limsup_{n\to\infty} nP(\boldsymbol{X}_1 \nleq \boldsymbol{u}_n) < +\infty$. *Então*

$$P\Big(\boldsymbol{M}_n \le \ \boldsymbol{u}_n\Big) - P^{k_n}\Big(\boldsymbol{M}_{[\frac{n}{k_n}]} \le \boldsymbol{u}_n\Big) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{4.2.2}$$

O resultado seguinte mostra que se a sucessão estacionária $\mathbf{X}$ satisfaz a condição $D(\mathbf{a}_n\mathbf{x} + \mathbf{b}_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, então a distribuição limite não degenerada H para o máximo linearmente normalizado $\mathbf{a}_n^{-1}(\mathbf{M}_n - \mathbf{b}_n)$, quando existe, é uma distribuição multivariada de extremos.

Teorema 4.2.5 (Teorema Limite Extremal, [9]). *Se existirem sucessões* $\{\boldsymbol{a}_n\}$, *de componentes positivas, e* $\{\boldsymbol{b}_n\}$ *tais que a sucessão* $\boldsymbol{X}$ *satisfaz a condição* $D(\boldsymbol{a}_n\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_n)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, *e*

$$P(\boldsymbol{a}_n^{-1}(\boldsymbol{M}_n - \boldsymbol{b}_n) \le \boldsymbol{x}) \xrightarrow[n\to\infty]{w} H(\boldsymbol{x}), \tag{4.2.3}$$

onde H *é uma f.d. não degenerada, então a f.d.* H *é uma f.d. MEV.*

Demonstração. O Teorema 4.1.1 e o limite (4.2.1) garantem a existência de vetores de constantes $\mathbf{A}_k$, de componentes positivas, e $\mathbf{B}_k$ tais que

$$H^k(\mathbf{A}_k\mathbf{x} + \mathbf{B}_k) = H(\mathbf{x}),\ k \ge 1. \tag{4.2.4}$$

Considerando $L(\mathbf{x}) := H(\mathbf{A}_k\mathbf{x}+\mathbf{B}_k)$ obtemos, pelo Lema 4.1.3, $C_H^k(\mathbf{u}^{\frac{1}{k}}) = C_{H^k}(\mathbf{u}) = C_{L^k}(\mathbf{u}) = C_H(\mathbf{u})$, isto é, a cópula de H é max-estável. Por outro lado, atendendo a (4.2.4), obtemos $H_j^k(A_{k,j}x_j + B_{k,j}) = H_j(x_j)$, $j \in D$, o que mostra que H_j é max-estável. Pelo Teorema 2.1.5, concluímos que H_j é do tipo extremo. Finalmente, pelo Teorema 4.1.7, podemos afirmar que H é uma f.d. MEV. □

À semelhança do que acontece no caso univariado, embora a condição $D(\mathbf{u}_n)$ seja suficiente para garantir a existência de limite do máximo, esta não permite por si só relacionar as f.d.'s limite do máximo dos casos i.i.d. e estacionário. Assim, [9] introduziu uma condição de dependência local $D'(\mathbf{u}_n)$, que não é mais do que uma generalização ao caso multivariado da condição $D'(u_n)$.

Definição 4.2.6 ([5]). *Para uma sucessão d-dimensional de constantes* $\{\boldsymbol{u}_n\}$*, diz-se que a sucessão* $\boldsymbol{X}$ *satisfaz a condição* $D'(\boldsymbol{u}_n)$*, se* $\boldsymbol{X}$ *satisfazer a condição* $D(\boldsymbol{u}_n)$ *e*

$$n\sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(\boldsymbol{X}_1 \nleq \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{X}_i \nleq \boldsymbol{u}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

para alguma sucessão $\{k_n\}$ *que verifique (3.1.7).*

Se uma sucessão estacionária d-dimensional $\mathbf{X}$ verifica $D(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$ e $D'(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$ então, tal como se provou no Teorema 4.2.2, para cada $j \in D$, $\{X_{n,j}\}$ verifica a condição $D(u_{n,j}^{(\tau)})$. Também verifica $D'(u_{n,j}^{(\tau)})$ uma vez que, para qualquer $j \in D$ e qualquer $i \in \{2, \ldots, [\frac{n}{k_n}]\}$, se tem $P(X_{1,j} > u_{n,j}^{(\tau)}, X_{i,j} > u_{n,j}^{(\tau)}) \leq P(\mathbf{X}_1 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{X}_i \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$. Como generalização do Teorema 3.2.2, prova-se que sob estas duas condições multivariadas, se estabelece que, para qualquer $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d$,

$$P(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\gamma(\boldsymbol{\tau})} \text{ se e só se } nP(\mathbf{X}_1 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma(\boldsymbol{\tau}). \tag{4.2.5}$$

4.3 Índice extremal multivariado

Um fenómeno patente em dados reais é que os eventos extremos tendem a ocorrer em aglomerados. A medida usada para capturar esta tendência é o índice extremal. Tal como no caso univariado, através do índice extremal $\theta(\boldsymbol{\tau}), \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d$, é possível relacionar as f.d.'s MEV, H e G. No entanto, ao contrário do que acontece no caso univariado, a existência do índice extremal não é garantida pela condição $D(\mathbf{u}_n)$, uma vez que não é possível generalizar o Teorema 3.3.1. Mais, contrariando também o caso univariado, o índice extremal depende de $\boldsymbol{\tau}$ como se verifica nos exemplos das Secções 4.5 e 4.6. Apresentamos a definição de índice extremal presente em [17].

Definição 4.3.1 ([17]). *Dizemos que a sucessão estacionária* $\boldsymbol{X}$ *admite índice extremal multivariado* $\theta(\boldsymbol{\tau}) \in [0,1]$*, se* $\forall \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}_+^d$*, existe* $\{\boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})} = (u_{n,j}^{(\tau_j)}, 1 \leq j \leq d)\}$ *satisfazendo*

$$nP(X_{1,j} > u_{n,j}^{(\tau_j)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_j, \quad j = 1, \ldots, d, \tag{4.3.1}$$

$$P(\widehat{\boldsymbol{M}_n} \leq \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta(\boldsymbol{\tau}) > 0 \text{ e } P(\boldsymbol{M}_n \leq \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta(\boldsymbol{\tau})^{\theta(\boldsymbol{\tau})}.$$

A definição de índice extremal multivariado $\theta(\boldsymbol{\tau})$, permite-nos escrever

$$H(x_1, \ldots, x_d) = G^{\theta(\tau_1(x_1), \ldots, \tau_d(x_d))}(x_1, \ldots, x_d), \tag{4.3.2}$$

com $\tau_j(x_j) = -\log G_j(x_j)$, $j \in D$, relacionando assim as f.d.'s MEV, H e G. Para sucessões estacionárias multivariadas que verifiquem $D(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$, o Teorema 4.2.2 garante que se verificam $D(u_{n,j}^{(\tau_j)})$, para qualquer $j \in D$. Neste caso, do Teorema 3.3.1 concluímos que existem índices extremais marginais θ_j. Assim, obtemos $H_j(x_j) = G_j^{\theta_j}(x_j)$, com

$$\theta_j = \lim_{\substack{\tau_i \to 0^+ \\ i \neq j}} \theta(\tau_1, \ldots, \tau_d),\ \forall j \in D.$$

A relação (4.3.2) tem a sua contrapartida em função das cópulas de H e de G. Suponhamos então que $\mathbf{X}$ verifica (4.2.3) e $D(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$. Uma vez que são válidas as condições $D(u_{n,j}^{(\tau_j)})$, existe θ_j e $\tau_j(x_j) = -\log H_j^{1/\theta_j}(x_j)$. Então, com $u_j = H_j(x_j)$, obtemos

$$\begin{aligned} H(x_1, \ldots, x_d) &= G(x_1, \ldots, x_d)^{\theta(\boldsymbol{\tau})} = C_G(G_1(x_1), \ldots, G_d(x_d))^{\theta(\boldsymbol{\tau})} \\ &= C_G(H_1(x_1)^{1/\theta_1}, \ldots, H_d(x_d)^{1/\theta_d})^{\theta(\boldsymbol{\tau})} = C_G(u_1^{1/\theta_1}, \ldots, u_d^{1/\theta_d})^{\theta(\boldsymbol{\tau})}. \end{aligned}$$

Provámos assim que

$$C_H(u_1, \ldots, u_d) = C_G(u_1^{1/\theta_1}, \ldots, u_d^{1/\theta_d})^{\theta(\boldsymbol{\tau})},$$

com $\boldsymbol{\tau} = (-\log u_1^{1/\theta_1}, \ldots, -\log u_d^{1/\theta_d}), \forall (u_1, \ldots, u_d) \in]0,1[^d$.

Como já vimos, o índice extremal é muito útil para o estudo das relações entre as leis limite dos máximos apresentadas anteriormente. Por isso, seria interessante conseguir obter uma fórmula para o cálculo deste. Com este objetivo, [5] generaliza ao caso multivariado a condição de dependência local $D''(u_n)$.

Definição 4.3.2 ([5]). *Para uma sucessão de vetores reais $\{\boldsymbol{u}_n\}$, diz-se que $\boldsymbol{X}$ satisfaz a condição $D''(\boldsymbol{u}_n)$ se $D(\boldsymbol{u}_n)$ for satisfeita e*

$$n \sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(\boldsymbol{X}_1 \not\leq \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{X}_i \leq \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{X}_{i+1} \not\leq \boldsymbol{u}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

para alguma sucessão $\{k_n\}$ que verifique (3.1.7).

A validade da condição $D''(\mathbf{u}_n)$ não implica a validade das suas contrapartidas marginais, uma vez que, para qualquer $l \in D$ fixo, o acontecimento $\{X_{1,l} > u_{n,l}, X_{j,l} \leq u_{n,l}, X_{j+1,l} > u_{n,l}\}$ não implica $\{\mathbf{X}_1 \not\leq \mathbf{u}_n, \mathbf{X}_j \leq \mathbf{u}_n, \mathbf{X}_{j+1} \not\leq \mathbf{u}_n\}$.

O teorema seguinte permite calcular o índice extremal multivariado, sob a validade de $D''(\mathbf{u}_n)$, o que constitui uma generalização do Teorema 3.4.3.

Teorema 4.3.3 ([5]). *Se para todo o $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d$ existem níveis normalizados $\{\boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})} = (u_{n,j}^{(\tau_j)}, 1 \leq j \leq d)\}$ tais que a sucessão $\{nP(\boldsymbol{X}_1 \not\leq \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})\}$ converge e $D''(\boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$ se verifica, então $\boldsymbol{X}$ admite índice extremal multivariado $\theta(\boldsymbol{\tau})$ se e só se, $\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d$, a sucessão $\{nP(\boldsymbol{X}_1 \leq \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \boldsymbol{X}_2 \not\leq \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})\}$ também converge. Neste caso,*

$$\theta(\boldsymbol{\tau}) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(\boldsymbol{X}_1 \leq \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \boldsymbol{X}_2 \not\leq \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})}{P(\boldsymbol{X}_1 \not\leq \boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})}, \quad \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d. \tag{4.3.3}$$

Demonstração. Seja $\{k_n\}$ uma sucessão que verifica (3.1.7) e seja ainda $r_n = [\frac{n}{k_n}]$. De acordo com o Lema 4.2.4, sob a condição $D(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$ tem-se $P(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) - P^{k_n}(\mathbf{M}_{r_n} \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ou seja,

$$P(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) = \left(1 - \frac{k_n P(\mathbf{M}_{r_n} \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})}{k_n}\right)^{k_n} + o_n(1). \tag{4.3.4}$$

Por outro lado, sob a condição $D''(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$, seguindo a demonstração do Teorema 3.4.2 prova-se que

$$\lim_{n\to\infty} k_n P(\mathbf{M}_{r_n} \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) = \lim_{n\to\infty} nP(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{X}_2 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}),$$

desde que estes limites existam, onde

$$P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{X}_2 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) = P(\mathbf{X}_2 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})} | \mathbf{X}_1 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) P(\mathbf{X}_1 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}).$$

Sendo $\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}$ um nível normalizado, tem-se (4.3.1) por definição. Como se assume que $\{nP(\mathbf{X}_1 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})\}$ converge, seja $\gamma(\boldsymbol{\tau}) = \lim_{n\to\infty} nP(\mathbf{X}_1 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$. Então, se $nP(\mathbf{X}_2 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})} | \mathbf{X}_1 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta(\boldsymbol{\tau})$ ter-se-á $k_n P(\mathbf{M}_{r_n} \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta(\boldsymbol{\tau})\gamma(\boldsymbol{\tau})$, o que conjugado com (4.3.4) dá lugar a $P(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\theta(\boldsymbol{\tau})\gamma(\boldsymbol{\tau})}$. Assim, $\mathbf{X}$ tem índice extremal $\theta(\boldsymbol{\tau})$.

Reciprocamente, se $\mathbf{X}$ admite índice extremal $\theta(\boldsymbol{\tau})$, percorrendo os passos anteriores por ordem inversa, prova-se que $P(\mathbf{X}_2 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})} | \mathbf{X}_1 \nleq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta(\boldsymbol{\tau})$. □

A equivalência (4.2.5) permite concluir que se $\mathbf{X}$ verificar $D(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$ e $D'(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$, para qualquer $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d$, então $\mathbf{X}$ tem índice extremal $\theta(\boldsymbol{\tau}) = 1$. Existem casos em que o cálculo do índice extremal multivariado sob a condição $D''(\mathbf{u}_n)$ apresenta uma enorme dificuldade. Assim, seria útil encontrar, para estes casos, um modo de calcular $\theta(\boldsymbol{\tau})$ a partir dos índices extremais univariados θ_j, $j \in D$. Na próxima secção calculamos $\theta(\boldsymbol{\tau})$ a partir de θ_j, $j \in D$, quando H tem margens independentes ou totalmente dependentes.

4.4 Índice extremal multivariado e índices extremais marginais

Seja F uma f.d. que pertence ao domínio de atração de uma f.d. MEV, G, e assuma-se que $\mathbf{X}$ tem índice extremal multivariado $\theta(\boldsymbol{\tau})$, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d$. Então, como H é uma f.d. MEV, verifica $H(x_1, \ldots, x_d) \geq \prod_{j=1}^{d} H_j(x_j)$ ([3]), tendo-se

$$\prod_{j=1}^{d} G_j^{\theta_j}(x_j) \leq G^{\theta(\boldsymbol{\tau})}(x_1, \ldots, x_d) \leq \bigwedge_{j=1}^{d} G_j^{\theta_j}(x_j), \tag{4.4.1}$$

onde $\tau_j \equiv \tau_j(x_j) = -\log G_j(x_j)$, $j \in D$. O limite inferior corresponde ao caso em que $H = G^{\theta(\boldsymbol{\tau})}$ tem margens independentes e o limite superior ao caso em que H tem margens totalmente dependentes. Das desigualdades (4.4.1), estabelecemos limites para $\theta = \theta(\boldsymbol{\tau})$, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}_+^d$. A saber

$$\frac{1}{\gamma} \bigvee_{j=1}^{d} \theta_j \tau_j \leq \theta(\boldsymbol{\tau}) \leq \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^{d} \theta_j \tau_j, \tag{4.4.2}$$

onde $\gamma \equiv \gamma(\boldsymbol{\tau}) = -\log G(x_1, \ldots, x_d) = -\log G(G_1^{-1}(e^{-\tau_1}), \ldots, G_d^{-1}(e^{-\tau_d}))$. Por outro lado, como $F \in D(G)$,

$$\gamma(\boldsymbol{\tau}) = \lim_{n \to +\infty} nP(\mathbf{X}_1 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) = -\log G(G_1^{-1}(e^{-\tau_1}), \ldots, G_d^{-1}(e^{-\tau_d})).$$

Apresentamos agora um resultado que estabelece condições necessárias e suficientes para que a f.d. MEV, H, tenha margens independentes ou totalmente dependentes.

Teorema 4.4.1 ([15]). *Assuma-se que a sucessão estacionária $\boldsymbol{X}$ satisfaz (4.2.3) para alguma f.d. MEV, H, e admite índice extremal multivariado estritamente positivo.*

1. *Se G tem margens independentes, então H tem margens independentes se e só se, para todo o $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\theta(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\tau_j}{\tau_1 + \cdots + \tau_d} \theta_j$.*

2. *Se G tem margens totalmente dependentes, então H tem margens totalmente dependentes se e só se, para todo o $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $\theta(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\bigvee_{j=1}^{d} \theta_j \tau_j}{\bigvee_{j=1}^{d} \tau_j}$.*

Demonstração. 1. Considerando que G tem margens independentes, então

$$\gamma(\boldsymbol{\tau}) = -\log G(G_1^{-1}(e^{-\tau_1}), \ldots, G_d^{-1}(e^{-\tau_d})) = -\log \prod_{j=1}^{d} G_j(G_j^{-1}(e^{-\tau_j})) = \sum_{j=1}^{d} \tau_j.$$

Se H tem margens independentes, então $\theta(\boldsymbol{\tau})$ é igual ao majorante de (4.4.2) o que prova a primeira implicação. Para provar a implicação contrária, basta aplicar logaritmos a $H = G^{\theta(\boldsymbol{\tau})}$, obtendo-se $\log H = -\theta(\boldsymbol{\tau}) \sum_{j=1}^{d} \tau_j = -\sum_{j=1}^{d} \theta_j \tau_j$, ou seja, $H = \prod_{j=1}^{d} e^{-\tau_j \theta_j}$.

2. Considerando que G tem margens totalmente dependentes, isto é, $G(x_1, \ldots, x_d) = \bigwedge_{j=1}^{d} G_j(x_j)$, $\forall x_j \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\gamma(\boldsymbol{\tau}) = -\log G(G_1^{-1}(e^{-\tau_1}), \ldots, G_d^{-1}(e^{-\tau_d})) = -\log \left(\bigwedge_{j=1}^{d} G_j(G_j^{-1}(e^{-\tau_j})) \right) = \bigvee_{j=1}^{d} \tau_j.$$

Se H tem margens totalmente dependentes, então $G^{\theta(\boldsymbol{\tau})}(x_1, \ldots, x_d) = \bigwedge_{j=1}^{d} H_j(x_j)$. Assim, conclui-se $-\theta(\boldsymbol{\tau})\gamma(\boldsymbol{\tau}) = \bigwedge_{j=1}^{d} \log H_j(x_j)$, o que equivale a

$$\theta(\boldsymbol{\tau}) \bigvee_{j=1}^{d} \tau_j = -\bigwedge_{j=1}^{d} \log G_j^{\theta_j}(x_j) = \bigvee_{j=1}^{d} \theta_j(-\log G_j(x_j)).$$

A implicação contrária prova-se de modo análogo uma vez que $\theta(\boldsymbol{\tau}) = \frac{\bigvee_{j=1}^d \theta_j\tau_j}{\bigvee_{j=1}^d \tau_j}$ implica $\log H = \theta(\boldsymbol{\tau}) \log G = \frac{\bigvee_{j=1}^d \theta_j\tau_j}{\bigvee_{j=1}^d \tau_j}(-\bigvee_{j=1}^d \tau_j) = \bigwedge_{j=1}^d (-\theta_j\tau_j)$, e portanto $H = \bigwedge_{j=1}^d e^{-\theta_j\tau_j}$, ou seja, H tem margens totalmente dependentes. □

4.5 Processo auto-regressivo de máximos multivariado

4.5.1 Formulação e propriedades

Seja $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_n = (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})\}_{n\geq 0}$ uma sucessão de ve.a's, tal que

$$X_{n,j} = c_j X_{n-1,j} \vee Y_{n,j}, \quad n \geq 1, \quad j \in D, \tag{4.5.1}$$

onde $0 < c_j < 1$, $\mathbf{X}_0 = (X_{0,1}, \ldots, X_{0,d})$ tem f.d. F_0, e $\{\mathbf{Y}_n = (Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,d})\}$ é uma sucessão de ve.a.'s i.i.d., com f.d. G, e independentes de $\mathbf{X}_0$. Mais, $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{Y}_n$ têm suporte em $\mathbb{R}_+^d$. O processo $\mathbf{X}$, estudado em [6], corresponde à formulação multivariada do processo MAX-AR(1) univariado, estudado em [1]. Podemos ainda escrever

$$X_{n,j} = c_j^n X_{0,j} \vee \bigvee_{i=1}^n c_j^{n-i} Y_{i,j}, \quad n \geq 1, \ j \in D. \tag{4.5.2}$$

Se denotarmos por F_n a f.d. de $\mathbf{X}_n$ e, uma vez que $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{Y}_n$ são independentes, a partir de (4.5.2), vem

$$F_n(x_1, \ldots, x_d) = F_0\Big(\frac{x_1}{c_1^n}, \ldots, \frac{x_d}{c_d^n}\Big) \prod_{i=1}^n G\Big(\frac{x_1}{c_1^{n-i}}, \ldots, \frac{x_d}{c_d^{n-i}}\Big), \forall (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{4.5.3}$$

Estabelecemos de seguida um condição necessária e suficiente para que o processo $\mathbf{X}$ seja fortemente estacionário.

Proposição 4.5.1. *O processo $\boldsymbol{X}$ é fortemente estacionário se e só se*

$$F_0(x_1, \ldots, x_d) = F_0\left(\frac{x_1}{c_1}, \ldots, \frac{x_d}{c_d}\right) G(x_1, \ldots, x_d), \ \forall (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{4.5.4}$$

Demonstração. Suponhamos a igualdade (4.5.4) válida. Para qualquer conjunto de índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, com $x_{i_l,j} > 0$, $j \in D$, $l \in \{1, \ldots, k\}$, atendendo a (4.5.2), temos

$$F_{i_1,\ldots,i_k}(\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_k}) = F_0\Big(\bigwedge_{p=1}^k \Big\{\frac{x_{i_p,j}}{c_j^{i_p}}\Big\}, j \in D\Big) \times \prod_{l=1}^k \prod_{m=i_{l-1}}^{i_l-1} G\Big(\bigwedge_{p=l}^k \Big\{\frac{x_{i_p,j}}{c_j^{i_p-m-1}}\Big\}, j \in D\Big). \tag{4.5.5}$$

Mais, aplicando recursivamente (4.5.4), obtemos

$$F_0(u_1,\dots,u_d)=F_0\Big(\frac{u_1}{c_1^s},\dots,\frac{u_d}{c_d^s}\Big)\prod_{m=0}^{s-1}G\Big(\frac{u_1}{c_1^{s-m-1}},\dots,\frac{u_d}{c_d^{s-m-1}}\Big). \tag{4.5.6}$$

Sejam $t_m=i_m+s$, $m\in\{1,2,\dots,k\}$, com $s>1$ arbitrariamente fixo em $\mathbb{N}$. De (4.5.5), com $x_{t_m,j}\equiv x_{i_m,j}$, para $1\le m\le k$ e $t_0=i_0=0$, temos

$$\begin{aligned}
&F_{t_1,\dots,t_k}(\mathbf{x}_{i_1},\dots,\mathbf{x}_{i_k})=F_{t_1,\dots,t_k}(\mathbf{x}_{t_1},\dots,\mathbf{x}_{t_k})\\
\overset{(4.5.5)}{=}&F_0\Big(\bigwedge_{p=1}^{k}\Big\{\frac{x_{t_p,j}}{c_j^{t_p}}\Big\},j\in D\Big)\prod_{l=1}^{k}\prod_{m=t_{l-1}}^{t_l-1}G\Big(\bigwedge_{p=l}^{k}\Big\{\frac{x_{t_p,j}}{c_j^{t_p-m-1}}\Big\},j\in D\Big)\\
=\;&F_0\Big(\bigwedge_{p=1}^{k}\Big\{\frac{x_{t_p,j}}{c_j^{t_p}}\Big\},j\in D\Big)\prod_{m=0}^{s-1}G\Big(\bigwedge_{p=1}^{k}\Big\{\frac{x_{t_p,j}}{c_j^{t_p-m-1}}\Big\},j\in D\Big)\prod_{m=s}^{t_1-1}G\Big(\bigwedge_{p=1}^{k}\Big\{\frac{x_{t_p,j}}{c_j^{t_p-m-1}}\Big\},j\in D\Big)\times\\
&\times\prod_{l=2}^{k}\prod_{m=t_{l-1}}^{t_l-1}G\Big(\bigwedge_{p=l}^{k}\Big\{\frac{x_{t_p,j}}{c_j^{t_p-m-1}}\Big\},j\in D\Big)\\
=\;&F_0\Big(\bigwedge_{p=1}^{k}\Big\{\frac{x_{i_p,j}}{c_j^{i_p+s}}\Big\},j\in D\Big)\prod_{m=0}^{s-1}G\Big(\bigwedge_{p=1}^{k}\Big\{\frac{x_{i_p,j}}{c_j^{i_p+s-m-1}}\Big\},j\in D\Big)\times\\
&\times\prod_{m=s}^{i_1+s-1}G\Big(\bigwedge_{p=1}^{k}\Big\{\frac{x_{i_p,j}}{c_j^{i_p+s-m-1}}\Big\},j\in D\Big)\prod_{l=2}^{k}\prod_{m=i_{l-1}+s}^{i_l+s-1}G\Big(\bigwedge_{p=l}^{k}\Big\{\frac{x_{i_p,j}}{c_j^{i_p+s-m-1}}\Big\},j\in D\Big)\\
\overset{(4.5.6)}{=}&F_0\Big(\bigwedge_{p=1}^{k}\Big\{\frac{x_{i_p,j}}{c_j^{i_p}}\Big\},j\in D\Big)\times\prod_{l=1}^{k}\prod_{q=i_{l-1}}^{i_l-1}G\Big(\bigwedge_{p=l}^{k}\Big\{\frac{x_{i_p,j}}{c_j^{i_p-q-1}}\Big\},j\in D\Big)\\
\overset{(4.5.5)}{=}&F_{i_1,\dots,i_k}(\mathbf{x}_{i_1},\dots,\mathbf{x}_{i_k}),
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que o processo $\mathbf{X}$ é fortemente estacionário.

Suponhamos agora que o processo $\mathbf{X}$ é fortemente estacionário. Então, em particular, temos que $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{X}_1$ são igualmente distribuídos. Assim, fazendo $n=1$ em (4.5.3), obtemos (4.5.4). $\square$

Representando por F a f.d. comum de $\mathbf{X}$, obtemos a equação de estacionaridade

$$F(x_1,\dots,x_d)=F\Big(\frac{x_1}{c_1},\dots,\frac{x_d}{c_d}\Big)G(x_1,\dots,x_d),\ \forall(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d. \tag{4.5.7}$$

O próximo teorema estabelece uma condição necessária e suficiente para que $\mathbf{X}$ possua distribuição estacionária não degenerada.

Teorema 4.5.2 ([6]). *A sucessão* $\mathbf{X}$ *definida em (4.5.1) possui distribuição estacionária não degenerada se e só se existe algum* $(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d$ *tal que*

$$0<\sum_{i=0}^{\infty}-\log G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big)<+\infty. \tag{4.5.8}$$

Demonstração. Seja $L_n(x_1,\dots,x_d)=\prod_{i=0}^{n-1} G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big)$. Por um lado, L_n é limitada uma vez que $0\le L_n(x_1,\dots,x_d)\le 1$, e, por outro lado, L_n é monótona não crescente, pois

$$L_{n+1}(x_1,\dots,x_d)=\prod_{i=0}^{n} G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big)=G\Big(\frac{x_1}{c_1^n},\dots,\frac{x_d}{c_d^n}\Big)\prod_{i=0}^{n-1} G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big)\le L_n(x_1,\dots,x_d).$$

Portanto, existe $\lim_{n\to\infty} L_n(x_1,\dots,x_d)$. Temos assim

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F_n(x_1,\dots,x_d)&=\lim_{n\to\infty} F_0\Big(\frac{x_1}{c_1^n},\dots,\frac{x_d}{c_d^n}\Big)\prod_{i=1}^{n} G\Big(\frac{x_1}{c_1^{n-i}},\dots,\frac{x_d}{c_d^{n-i}}\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} G\Big(\frac{x_1}{c_1^{n-i}},\dots,\frac{x_d}{c_d^{n-i}}\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n-1} G\Big(\frac{x_1}{c_1^{i}},\dots,\frac{x_d}{c_d^{i}}\Big)=\lim_{n\to\infty} L_n(x_1,\dots,x_d).\end{aligned}$$

Então, existe $\lim_{n\to\infty} F_n(x_1,\dots,x_d)$ e, por (4.5.3), temos $F(x_1,\dots,x_d)=\lim_{n\to\infty} F_n(x_1,\dots,x_d)$ sendo F solução de (4.5.7).

A f.d. F é não degenerada se e só se existir $(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d$ tal que $0<F(x_1,\dots,x_d)<1$. Tem-se

$$\begin{aligned}\log F(x_1,\dots,x_d)&=\log\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n-1} G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big)=\lim_{n\to\infty}\log\prod_{i=0}^{n-1} G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\log G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big)=\sum_{i=0}^{\infty}\log G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big),\end{aligned}$$

desde que esta série seja convergente, tendo-se

$$F(x_1,\dots,x_d)=\prod_{i=0}^{\infty} G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big).$$

Ora, se esta série é convergente então $G\Big(\frac{x_1}{c_1^i},\dots,\frac{x_d}{c_d^i}\Big)\xrightarrow[i\to\infty]{}1$, o que só se verifica para $(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d$. Assim, uma vez que $0<F(x_1,\dots,x_d)<1\Leftrightarrow 0<-\log F(x_1,\dots,x_d)<+\infty$, a f.d. F será não degenerada se e só se existir $(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d$ tal que (4.5.8) se verifica. $\square$

Nas secções seguintes, assumir-se-á que $\mathbf{X}$ é uma sucessão multivariada MAX-AR(1) fortemente estacionária com f.d. F de suporte contido em $\mathbb{R}_+^d$.

Terminamos esta secção considerando o caso particular em que G é uma f.d. MEV com margens de Fréchet, G_j, $j\in D$. Neste caso, a f.d. F é também uma f.d. MEV. Com efeito,

$$F_j(x_j)=\prod_{i=0}^{+\infty}\exp\left(-\left(\frac{x_j}{c_j^i}\right)^{-\alpha_j}\right)=\exp\left(\frac{-x_j^{-\alpha_j}}{1-c_j^{\alpha_j}}\right),\ j\in D,$$

e a sua cópula C_F é max-estável, como provamos a seguir. De facto, para cada inteiro $k \geq 1$ e $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1[^d$, temos

$$\begin{aligned}
C_F^k(u_1^{\frac{1}{k}}, \dots, u_d^{\frac{1}{k}}) &= C_F^k(F_1^{\frac{1}{k}}(x_1), \dots, F_d^{\frac{1}{k}}(x_d)) = C_F^k(F_1(x_1 k^{\frac{1}{\alpha_1}}), \dots, F_d(x_d k^{\frac{1}{\alpha_d}})) \\
&= F^k(x_1 k^{\frac{1}{\alpha_1}}, \dots, x_d k^{\frac{1}{\alpha_d}}) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} G^k\Big(\frac{x_1 k^{\frac{1}{\alpha_1}}}{c_1^i}, \dots, \frac{x_d k^{\frac{1}{\alpha_d}}}{c_d^i}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} C_G^k\Big(G_1^{\frac{1}{k}}\Big(\frac{x_1}{c_1^i}\Big), \dots, G_d^{\frac{1}{k}}\Big(\frac{x_d}{c_d^i}\Big)\Big) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} G\Big(\frac{x_1}{c_1^i}, \dots, \frac{x_d}{c_d^i}\Big) \\
&= F(x_1, \dots, x_d) = C_F(u_1, \dots, u_d).
\end{aligned}$$

4.5.2 Condição de mistura forte e condição $D''(\mathbf{u}_n)$

Nesta secção, vamos provar que $\mathbf{X}$ satisfaz a condição de mistura forte enunciada abaixo, a qual implica a condição $D(\mathbf{u}_n)$, e que satisfaz a condição $D''(\mathbf{u}_n)$.

Definição 4.5.3 (Condição de Mistura Forte, [6])**.** *A sucessão $\boldsymbol{X}$ satisfaz a condição de mistura forte, se para qualquer $A \in \sigma(\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_p)$ e $B \in \sigma(\boldsymbol{X}_{p+s+1}, \boldsymbol{X}_{p+s+2}, \dots)$, $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \alpha_s$ com $\alpha_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$, onde $\sigma(.)$ denota a σ-álgebra gerada pelos vetores indicados.*

Proposição 4.5.4 ([6])**.** *A sucessão $\boldsymbol{X}$ satisfaz a condição de mistura forte.*

Demonstração. Consideremos $A \in \sigma(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p)$ e $B \in \sigma(\mathbf{X}_{p+s+1}, \mathbf{X}_{p+s+2}, \dots)$ e seja

$$\begin{aligned}
C_{s,j} &= \{Y_{p+1,j} \leq c_j X_{p,j}, \dots, Y_{p+s+1,j} \leq c_j X_{p+s,j}\} \\
&= \{Y_{p+1,j} \leq c_j X_{p,j}, Y_{p+2,j} \leq c_j^2 X_{p,j}, \dots, Y_{p+s+1,j} \leq c_j^{s+1} X_{p,j}\}.
\end{aligned}$$

Então,

$$P(C_{s,j}) = P(Y_{p+1,j} \leq c_j X_{p,j}, \dots, Y_{p+s+1,j} \leq c_j^{s+1} X_{p,j}) \leq P(Y_{p+s+1,j} \leq c_j^{s+1} X_{p,j}) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0,$$

uma vez que $0 < c_j < 1$ e, por isso, $\forall p \in \mathbb{N}$, $c_j^{s+1} X_{p,j} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$, em probabilidade. Logo, $P(C_{s,j}) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$. Consideremos agora $C_s = \bigcup_{j=1}^d C_{s,j}$. Tem-se $P(C_s) \leq \sum_{j=1}^d P(C_{s,j}) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$. Assim, comecemos por notar que

$$\begin{aligned}
&|P(A \cap B) - P(A)P(B)| = \\
&|P(A \cap B \cap C_s) + P(A \cap B \cap \overline{C_s}) - P(A)P(B \cap C_s) - P(A)P(B \cap \overline{C_s})| \\
&\leq |P(A \cap B \cap C_s) - P(A)P(B \cap C_s)| + |P(A \cap B \cap \overline{C_s}) - P(A)P(B \cap \overline{C_s})|.
\end{aligned}$$

Agora, por um lado,

$$|P(A \cap B \cap C_s) - P(A)P(B \cap C_s)| \leq \{P(A \cap B \cap C_s) \vee P(A)P(B \cap C_s)\} \leq P(C_s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

Por outro lado, quando ocorre $\overline{C_{s,j}}$, existe pelo menos um $k_j \in \{p+1, \ldots, p+s+1\}$ tal que $Y_{p+k_j,j} > c_j X_{p+k_j-1,j}$, pelo que, por (4.5.1), se obtém $X_{p+k_j,j} = Y_{p+k_j,j}$ e

$$X_{p+k_j+1,j} = c_j X_{p+k_j,j} \vee Y_{p+k_j+1,j} = c_j Y_{p+k_j,j} \vee Y_{p+k_j+1,j},$$

e assim sucessivamente. Então, $X_{p+s+1,j}$ é uma função mensurável de $\{Y_{p+k_j,j}, \ldots, Y_{p+s+1,j}, \ldots\}$ e, portanto, existe um acontecimento $B' \in \sigma(\mathbf{Y}_{p+k}, \mathbf{Y}_{p+k+1}, \ldots)$, com $k = \bigvee_{j=1}^{d} \{k_j\}$, tal que A e B' são independentes e $B \cap \overline{C_s} = B' \cap \overline{C_s}$. Consequentemente

$$\begin{aligned}&\left|P(A \cap B \cap \overline{C_s}) - P(A)P(B \cap \overline{C_s})\right| = \left|P(A \cap B' \cap \overline{C_s}) - P(A)P(B' \cap \overline{C_s})\right| \\ &\leq \left|P(A \cap B' \cap \overline{C_s}) - P(A \cap B')\right| + \left|P(A \cap B') - P(A)P(B' \cap \overline{C_s})\right|.\end{aligned}$$

Como A e B' são independentes e $P(A \cap B') = P(A \cap B' \cap \overline{C_s}) + P(A \cap B' \cap C_s)$, vem que

$$\begin{aligned}\left|P(A \cap B \cap \overline{C_s}) - P(A)P(B \cap \overline{C_s})\right| &\leq P(A \cap B' \cap C_s) + \left|P(A)P(B') - P(A)P(B' \cap \overline{C_s})\right| \\ &= P(A \cap B' \cap C_s) + P(A)P(B' \cap C_s) \\ &\leq P(C_s) + P(A)P(C_s) \leq 2P(C_s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

Consequentemente $\mathbf{X}$ satisfaz a condição $D(\mathbf{u}_n)$, para toda a sucessão de vetores reais $\{\mathbf{u}_n\}$ e para toda a sucessão $\{\ell_n\}$, tal que $\ell_n \to \infty$. Vejamos que $\mathbf{X}$ também satisfaz a condição $D''(\mathbf{u}_n)$, para $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}$.

Proposição 4.5.5 ([6]). *A sucessão $\boldsymbol{X}$ satisfaz a condição $D''(\boldsymbol{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$.*

Demonstração. Observemos que

$$\begin{aligned}&n \sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(\mathbf{X}_1 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{X}_i \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{X}_{i+1} \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \leq n \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(X_{1,j} > u_{n,j}^{(\tau_j)}, X_{i,j} \leq u_{n,j}^{(\tau_j)} < X_{i+1,j}) + \\ &+ n \sum_{\substack{1\leq s \\ s'\leq d}} \sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(X_{1,s} > u_{n,s}^{(\tau_s)}, X_{i,s'} \leq u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}, X_{i+1,s'} > u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}).\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

Relativamente à última parcela, aplicando o modelo descrito em (4.5.1), vem que

$$\begin{aligned}&n \sum_{\substack{1\leq s \\ s'\leq d}} \sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(X_{1,s} > u_{n,s}^{(\tau_s)}, X_{i,s'} \leq u_{n,s'}^{(\tau_{s'})} < c_{s'} X_{i,s'} \vee Y_{i+1,s'}) \\ &\leq n \sum_{\substack{1\leq s \\ s'\leq d}} \sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} \Big[P(X_{1,s} > u_{n,s}^{(\tau_s)}, X_{i,s'} \leq u_{n,s'}^{(\tau_{s'})} < c_{s'} X_{i,s'}) + P(X_{1,s} > u_{n,s}^{(\tau_s)}, X_{i,s'} \leq u_{n,s'}^{(\tau_{s'})} < Y_{i+1,s'})\Big].\end{aligned}$$

A primeira probabilidade do último membro é nula. Para a segunda parcela, vem

$$n \sum_{\substack{1\leq s\\ s'\leq d}} \sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(X_{1,s} > u_{n,s}^{(\tau_s)}, X_{i,s'} \leq u_{n,s'}^{(\tau_{s'})} < Y_{i+1,s'}) \leq n \sum_{\substack{1\leq s\\ s'\leq d}} \sum_{i=2}^{[\frac{n}{k_n}]} P(X_{1,s} > u_{n,s}^{(\tau_s)}) P(Y_{i+1,s'} > u_{n,s'}^{(\tau_{s'})})$$
$$\leq \sum_{\substack{1\leq s\\ s'\leq d}} n\Big[\frac{n}{k_n}\Big](1 - F_s(u_{n,s}^{(\tau_s)}))\left(1 - \frac{F_{s'}(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})})}{F_{s'}\left(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}/c_{s'}\right)}\right),$$

visto que $P(Y_{i+1,s'} > u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}) = 1 - P(Y_{i+1,s'} \leq u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}) = 1 - G_{s'}(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}) \underset{(4.5.7)}{=} \left(1 - \frac{F_{s'}(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})})}{F_{s'}\left(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}/c_{s'}\right)}\right)$.

Finalmente, obtemos

$$\sum_{\substack{1\leq s\\ s'\leq d}} n\Big[\frac{n}{k_n}\Big](1 - F_s(u_{n,s}^{(\tau_s)}))\left(1 - \frac{F_{s'}(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})})}{F_{s'}\left(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}/c_{s'}\right)}\right)$$
$$\leq \frac{1}{k_n} \sum_{\substack{1\leq s\\ s'\leq d}} n(1 - F_s(u_{n,s}^{(\tau_s)}))\Big[n(1 - F_{s'}(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})})) - n\Big(1 - F_{s'}\Big(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}/c_{s'}\Big)\Big)\Big] \times \frac{1}{F_{s'}\left(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}/c_{s'}\right)},$$

que converge para zero, para qualquer $k_n \to \infty$, pois $n(1 - F_{s'}(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_{s'}$ e $n\Big(1 - F_{s'}\Big(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})}/c_{s'}\Big)\Big) \leq n(1 - F_{s'}(u_{n,s'}^{(\tau_{s'})})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_{s'}$. De igual modo se prova que o primeiro termo do segundo membro de (4.5.9) é assintoticamente nulo, o que mostra que $\{X_{n,j}\}$ satisfaz a condição $D''(u_{n,j}^{(\tau_j)})$, para qualquer $j \in D$. □

4.5.3 Índice Extremal

Nesta secção analisar-se-á a existência de índice extremal multivariado do modelo MAX-AR(1), nos casos em que as margens da f.d. H, H_j, são Gumbel, Weibull ou Fréchet, isto é, respetivamente, $\Lambda(x) = \exp(-e^{-(ax+b)})$, $\Psi_{\alpha_j}(x) = e^{-(-(ax+b))^{\alpha_j}}$, $x \leq 0$, e $\Phi_{\alpha_j}(x) = e^{-(ax+b)^{-\alpha_j}}$, $x > 0$, para algum $\alpha_j > 0$ e contantes $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Para todo o $j \in D$, suponhamos que $F_j \in D(H_j)$, ou seja, existem constantes $\{a_{n,j} > 0\}$ e $\{b_{n,j}\}$ tal que

$$n(1 - F_j(a_{n,j}x + b_{n,j})) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\log H_j(x). \tag{4.5.10}$$

Já sabemos que a sucessão de níveis normalizados $\{u_{n,j}^{(\tau_j)}\}$ para $\{X_{n,j}\}$ satisfaz $n(1-F_j(u_{n,j}^{(\tau_j)})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_j \geq 0$. Então, de (4.5.10), $\tau_j \equiv \tau_j(x) = -\log H_j(x) \iff x = H_j^{-1}(e^{-\tau_j})$ e $u_{n,j}^{(\tau_j)} = a_{n,j}x + b_{n,j}$. Logo, $u_{n,j}^{(\tau_j)} = a_{n,j}H_j^{-1}(e^{-\tau_j}) + b_{n,j}$, sendo H_j^{-1} a inversa generalizada de H_j. Consideremos agora que

$$u_{n,j}^{(\tau_j^*)} \equiv \frac{u_{n,j}^{(\tau_j)}}{c_j} = \frac{a_{n,j}H_j^{-1}(e^{-\tau_j}) + b_{n,j}}{c_j} = \frac{a_{n,j}}{c_j}x + \frac{b_{n,j}}{c_j}.$$

Vamos caracterizar τ_j^* para os três casos possíveis de H_j. Já sabemos que $n(1-F_j(u_{n,j}^{(\tau_j)})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_j(x)$, logo, pelo Teorema de Khintchine, $n(1-F_j(u_{n,j}^{(\tau_j^*)})) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_j^*(x) = \tau_j(ax+b)$, com

$$\frac{\frac{a_{n,j}}{c_j}}{a_{n,j}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{c_j} \equiv a \;\text{ e }\; \frac{\frac{b_{n,j}}{c_j} - b_{n,j}}{a_{n,j}} = \frac{b_{n,j}}{a_{n,j}}\left(\frac{1}{c_j} - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} b.$$

Analisemos cada caso em particular.

- Se H_j é a f.d. de Gumbel, então $\tau_j(x) = e^{-x}$. De acordo com o Teorema 2.2.2, $\frac{b_{n,j}}{a_{n,j}} \to +\infty$, logo $b = +\infty$. Assim, $n(1-F_j(u_{n,j}^{(\tau_j^*)})) \to \tau_j(+\infty) = 0 \equiv \tau_j^*$.

- Se H_j é a f.d. de Weibull, então $\tau_j(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } x < \alpha_{F_j}, \\ (-x)^{\alpha_j}, & \text{se } \alpha_{F_j} < x < \omega_{F_j} < +\infty, \\ 0, & \text{se } x > \omega_{F_j}. \end{cases}$

  Pelo Teorema 2.2.2, $\frac{b_{n,j}}{a_{n,j}} = \frac{\omega_{F_j}}{a_{n,j}} \to +\infty$, logo $b = +\infty$ e $\tau_j^* = 0$.

- Se H_j é a f.d. de Fréchet, então $\tau_j(x) = x^{-\alpha_j}$, $x > 0$. Neste caso, pelo Teorema 2.2.2, $a_{n,j} = n^{\frac{1}{\alpha}}$ e $b_{n,j} = 0$, donde, $b = 0$. Logo, $n(1-F_j(u_{n,j}^{(\tau_j^*)})) \to \tau_j(\frac{x}{c}) = (\frac{x}{c})^{-\alpha_j} = \tau_j c^{\alpha_j} \equiv \tau_j^*$.

Assim, obtemos a seguinte propriedade dos níveis normalizados para $\{X_{n,j}\}$:

$$\frac{u_{n,j}^{(\tau_j)}}{c_j} = u_{n,j}^{(\tau_j^*)} \quad \text{com} \quad \tau_j^* = \begin{cases} 0, & \text{se } H_j \in \{\Psi_{\alpha_j}, \Lambda\}, \\ \tau_j c_j^{\alpha_j}, & \text{se } H_j = \Phi_{\alpha_j}. \end{cases} \tag{4.5.11}$$

No que se segue, consideramos a sucessão de ve.a.'s normalizados $(u_{n,1}^{(\tau_1)}, \ldots, u_{n,d}^{(\tau_d)})$ denotada por $\{\mathbf{u}_n^{(\tau)}\}$.

Proposição 4.5.6 ([6]). *Se $F \in D(H)$, então $\boldsymbol{X}$ admite índice extremal multivariado θ, com*

$$\theta(\tau_1, \ldots, \tau_d) = 1 - \frac{\log C_{H_I}(e^{-\tau_j c_j^{\alpha_j}}, j \in I)}{\log C_H(e^{-\tau_1}, \ldots, e^{-\tau_d})},$$

para $(\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}_+^d$, onde I corresponde ao conjunto de índices de D para os quais H_j é a f.d. de Fréchet, isto é, $H_j(x) = \Phi_{\alpha_j}(x) = e^{-x^{-\alpha_j}}, x > 0$.

Mais, o índice extremal da margem $\{X_{n,j}\}$, $j \in D$, é

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & \text{se } H_j \in \{\Psi_{\alpha_j}, \Lambda\}, \\ 1 - c_j^{\alpha_j}, & \text{se } H_j = \Phi_{\alpha_j}. \end{cases} \tag{4.5.12}$$

Demonstração. Por hipótese $F \in D(H)$, do que decorre $F_j \in D(H_j)$, onde H_j pode ser uma f.d. de Fréchet, de Gumbel ou de Weibull e, pelo Lema 4.1.5, vem

$$C_F^n(u_1^{1/n}, \ldots, u_d^{1/n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} C_H(u_1, \ldots, u_d).$$

Por outro lado, como $F_j \in D(H_j)$, garante-se ainda a existência de níveis normalizados $\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})} = (u_{n,1}^{(\tau_1)}, \ldots, u_{n,d}^{(\tau_d)})$, para os quais a condição $D''(\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})$ se verifica. Por um lado, para $u_{n,j}^{(\tau_j)} = a_{n,j}H_j^{-1}(e^{-\tau_j}) + b_{n,j}, \;\; j \in D$, temos

$$\begin{aligned} nP(\mathbf{X}_1 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) &= n\Big(1 - F(a_{n,1}H_1^{-1}(e^{-\tau_1}) + b_{n,1}, \ldots, a_{n,d}H_d^{-1}(e^{-\tau_d}) + b_{n,d})\Big) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} -\log H(H_1^{-1}(e^{-\tau_1}), \ldots, H_d^{-1}(e^{-\tau_d})). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &nP(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{X}_2 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \overset{(4.5.1)}{=} nP(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{c}\mathbf{X}_1 \vee \mathbf{Y}_2 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \\ &= n\Big(P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{c}\mathbf{X}_1 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) + P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{Y}_2 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})\Big) \\ &= nP(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}, \mathbf{Y}_2 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \\ &= nP(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})P(\mathbf{Y}_2 \not\leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}) \\ &= P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})n(1 - G(u_{n,1}^{(\tau_1)}, \ldots, u_{n,d}^{(\tau_d)})) \\ &= P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})n\left(1 - \frac{F(u_{n,1}^{(\tau_1)}, \ldots, u_{n,d}^{(\tau_d)})}{F(u_{n,1}^{(\tau_1)}/c_1, \ldots, u_{n,d}^{(\tau_d)}/c_d)}\right) \\ &= \frac{P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})})}{P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})}/\mathbf{c})}\left(n(1 - F(u_{n,1}^{(\tau_1)}, \ldots, u_{n,d}^{(\tau_d)})) - n\left(1 - F\left(\frac{u_{n,1}^{(\tau_1)}}{c_1}, \ldots, \frac{u_{n,d}^{(\tau_d)}}{c_d}\right)\right)\right) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} -\log H(H_1^{-1}(e^{-\tau_1}), \ldots, H_d^{-1}(e^{-\tau_d})) + \log H(H_1^{-1}(e^{-\tau_1^*}), \ldots, H_d^{-1}(e^{-\tau_d^*})) \\ &= -\log H(H_1^{-1}(e^{-\tau_1}), \ldots, H_d^{-1}(e^{-\tau_d})) + \log H_I(H_1^{-1}(e^{-\tau_1^*}), \ldots, H_d^{-1}(e^{-\tau_d^*}))_I, \end{aligned}$$

onde I é o conjunto de índices em D para os quais τ_j^*, dado em (4.5.11), é positivo e H_I denota a restrição da f.d. H com margens cujos índices pertencem a I. Finalmente, de (4.3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \theta(\tau_1, \ldots, \tau_d) &= 1 - \frac{\log H_I(H_1^{-1}(e^{-\tau_1^*}), \ldots, H_d^{-1}(e^{-\tau_d^*}))_I}{\log H(H_1^{-1}(e^{-\tau_1}), \ldots, H_d^{-1}(e^{-\tau_d}))} \\ &= 1 - \frac{\log C_{H_I}(e^{-\tau_1^*}, \ldots, e^{-\tau_d^*})_I}{\log C_H(e^{-\tau_1}, \ldots, e^{-\tau_d})}. \end{aligned}$$

Observemos que se $I = \emptyset$, então $\theta(\tau_1, \ldots, \tau_d) = 1$, $\forall \boldsymbol{\tau}$, e se $I \neq \emptyset$, então obtemos o resultado referido em (4.5.12), ou seja, $\theta_j = 1$, se $j \in D - I$, e $\theta_j = 1 - \frac{\tau_j^*}{\tau_j} \overset{(4.5.11)}{=} 1 - c_j^{\alpha_j}$, se $j \in I$. $\square$

Notemos que, quando $j \in I$, $\theta_j = 1 - \frac{\tau_j^*}{\tau_j} \Leftrightarrow \tau_j^* = \tau_j(1-\theta_j)$, logo $e^{-\tau_j^*} = e^{-\tau_j(1-\theta_j)} = (e^{-\tau_j})^{1-\theta_j} = H_j(x_j)^{1-\theta_j} = H_j(\frac{x_j}{c_j})$. Desta forma, concluímos que se $F \in D(H)$, isto é,

$$F^n(a_{n,1}x_1 + b_{n,1}, \dots, a_{n,d}x_d + b_{n,d}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(x_1,\dots,x_d) = C_H(H_1(x_1),\dots,H_d(x_d)), \quad (4.5.13)$$

então,

$$P\Big(M_{n,1} \le a_{n,1}x_1 + b_{n,1}, \dots, M_{n,d} \le a_{n,d}x_d + b_{n,d}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\Big(H(x_1,\dots,x_d)\Big)^{1-\frac{\log C_{H_I}(H_1(x_1)^{1-\theta_1},\dots,H_d(x_d)^{1-\theta_d})_I}{\log C_H(H_1(x_1),\dots,H_d(x_d))}} = \Big(H(x_1,\dots,x_d)\Big)^{1-\frac{\log H_I(\frac{x_1}{c_1},\dots,\frac{x_d}{c_d})_I}{\log H(x_1,\dots,x_d)}}.$$

Apresentamos agora dois exemplos.

Exemplo 4.5.7. *Consideremos a f.d. F com F_1, $F_2 \in D(\Lambda)$ e $F_j \in D(\Phi_1)$, $j = 3,\dots,d$, e consideremos ainda a cópula de Gumbel $C_F(u_1,\dots,u_d) = \exp(-(\sum_{j=1}^{d}(-\log u_j)^{\frac{1}{\gamma}})^{\gamma})$, com $u_j \in]0,1[$ e $0 < \gamma \le 1$. Então $C_H = C_F$, $H_1 = H_2 = \Lambda$ e $H_j = \Phi_1$, $j = 3,\dots,d$. Portanto, vem*

$$\theta(\tau_1,\dots,\tau_d) = 1 - \frac{\log C_{H_I}(e^{-\tau_j c_j}, j \in I)_I}{\log C_H(e^{-\tau_1},\dots,e^{-\tau_d})} = 1 - \frac{\log\Big[\exp\Big(-(\sum_{j=3}^d(-\log(e^{-\tau_j c_j}))^{\frac{1}{\gamma}})^{\gamma}\Big)\Big]}{\log\Big[\exp\Big(-(\sum_{j=1}^d(-\log(e^{-\tau_j}))^{\frac{1}{\gamma}})^{\gamma}\Big)\Big]}$$

$$= 1 - \frac{(\sum_{j=3}^d(\tau_j c_j)^{\frac{1}{\gamma}})^{\gamma}}{(\sum_{j=1}^d \tau_j^{\frac{1}{\gamma}})^{\gamma}}, \quad (\tau_1,\dots,\tau_d) \in \mathbb{R}_+^d,$$

e, de (4.5.12), temos que $\theta_1 = \theta_2 = 1$ e $\theta_j = 1 - c_j$, $j = 3,\dots,d$. □

Exemplo 4.5.8. *Consideremos a f.d. F com $F_j \in D(\Phi_1)$, $j \in D$ e $C_F(u_1,\dots,u_d) = \bigwedge_{j=1}^{d} u_j$. Então, $F \in D(H)$, com $C_H = C_F$ e $H_j = \Phi_1$, $j \in D$. Consequentemente,*

$$\theta(\tau_1,\dots,\tau_d) = 1 - \frac{\log C_H(e^{-\tau_1 c_1},\dots,e^{-\tau_d c_d})}{\log C_H(e^{-\tau_1},\dots,e^{-\tau_d})} = 1 - \frac{\log\Big(\bigwedge_{j=1}^d e^{-\tau_j c_j}\Big)}{\log\Big(\bigwedge_{j=1}^d e^{-\tau_j}\Big)}$$

$$= 1 - \frac{\bigwedge_{j=1}^d\Big(\log e^{-\tau_j c_j}\Big)}{\bigwedge_{j=1}^d\Big(\log e^{-\tau_j}\Big)} = 1 - \frac{\bigwedge_{j=1}^d -\tau_j c_j}{\bigwedge_{j=1}^d -\tau_j} = 1 - \frac{\bigvee_{j=1}^d \tau_j c_j}{\bigvee_{j=1}^d \tau_j}, \quad (\tau_1,\dots,\tau_d) \in \mathbb{R}_+^d,$$

visto que $\bigvee_{j=1}^d p_j = -\bigwedge_{j=1}^d(-p_j)$, com $p_j \in \mathbb{R}$. □

Na proposição seguinte relacionamos os domínios de atração de F e de G.

Proposição 4.5.9 ([6]). *Se $F \in D(H)$ então $G \in D(V)$ com $V_j = H_j^{\theta_j}$ e θ_j dado em (4.5.12), $j \in D$, e*

$$C_V(u_1, \dots, u_d) = \frac{C_H(u_1^{1/\theta_1}, \dots, u_d^{1/\theta_d})}{C_H(u_1^{1/\theta_1 - 1}, \dots, u_d^{1/\theta_d - 1})}. \tag{4.5.14}$$

Demonstração. Por hipótese, $F_j \in D(H_j)$, $j \in D$, ou seja, $F_j^n(a_{n,j}x_j + b_{n,j}) \xrightarrow[n\to\infty]{} H_j(x_j)$ e, pelo Lema 4.1.5, vem

$$C_F^n(u_1^{1/n}, \dots, u_d^{1/n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} C_H(u_1, \dots, u_d), (u_1, \dots, u_d) \in [0,1]^d. \tag{4.5.15}$$

Mais, devido a (4.5.11) sabemos que

$$F_j^n\left(\frac{a_{n,j}x_j + b_{n,j}}{c_j}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau_j^*} = \begin{cases} e^0 = 1, & \text{se } H_j \in \{\Psi_{\alpha_j}, \Lambda\}, \\ e^{-\tau_j c_j^{\alpha_j}} = H_j^{c_j^{\alpha_j}}(x_j), & \text{se } H_j = \Phi_{\alpha_j}. \end{cases} \tag{4.5.16}$$

Agora, a partir de (4.5.7), temos

$$F_j^n(a_{n,j}x_j + b_{n,j}) = F_j^n\left(\frac{a_{n,j}x_j + b_{n,j}}{c_j}\right) G_j^n(a_{n,j}x_j + b_{n,j}), \tag{4.5.17}$$

do que resulta

$$G_j^n(a_{n,j}x_j + b_{n,j}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} H_j(x_j), & \text{se } H_j \in \{\Psi_{\alpha_j}, \Lambda\}, \\ H_j^{1-c_j^{\alpha_j}}(x_j), & \text{se } H_j = \Phi_{\alpha_j}. \end{cases}$$

Então $G_j \in D(H_j^{\theta_j})$, $j \in D$, com θ_j dado em (4.5.12). Analisemos a cópula de G. Temos, por um lado o limite (4.5.13). Por outro lado, de (4.5.15) e (4.5.16), obtemos

$$\begin{aligned} &F^n\left(\frac{a_{n,1}x_1 + b_{n,1}}{c_1}, \dots, \frac{a_{n,d}x_d + b_{n,d}}{c_d}\right) \\ &= C_F^n\left[\left(F_1^n\left(\frac{a_{n,1}x_1 + b_{n,1}}{c_1}\right)\right)^{\frac{1}{n}}, \dots, \left(F_d^n\left(\frac{a_{n,d}x_d + b_{n,d}}{c_d}\right)\right)^{\frac{1}{n}}\right] \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} C_{H_I}(H_j^{c_j^{\alpha_j}}(x_j), j \in I) = C_{H_I}\left(H_j\left(\frac{x_j}{c_j}\right), j \in I\right) = H_I\left(\frac{x_j}{c_j}, j \in I\right). \end{aligned}$$

Assim, devido a (4.5.17), obtemos

$$G^n(a_{n,1}x_1 + b_{n,1}, \dots, a_{n,d}x_d + b_{n,d}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{C_H(H_1(x_1), \dots, H_d(x_d))}{C_{H_I}\left(H_j^{c_j^{\alpha_j}}(x_j), j \in I\right)}.$$

Em consequência, podemos dizer que $G \in D(V)$, onde $V_j = H_j^{\theta_j}$ e $H(x_1,\ldots,x_d) = H_I(\frac{x_j}{c_j}, j \in I)V(x_1,\ldots,x_d)$, e a relação entre C_H e C_V é $C_H(u_1,\ldots,u_d) = C_H(u_1^{1-\theta_1},\ldots,u_d^{1-\theta_d})C_V(u_1^{\theta_1},\ldots,u_d^{\theta_d})$, equivalente a (4.5.14). □

4.6 Processo M4 de máximos móveis multivariado

4.6.1 Formulação e propriedades

Nesta secção estudamos o comportamento extremal de um processo multivariado de máximos móveis introduzido e estudado em [16]. Seja $\{\mathbf{X}_n = (X_{n,1},\ldots,X_{n,d})\}$ uma sucessão de ve.a.'s, tal que

$$X_{n,j} = \bigvee_{l\geq 1} \bigvee_{-\infty<k<+\infty} \alpha_{l,k,j} Z_{l,n-k,j}, n \geq 1, j \in D = \{1,\ldots,d\}, \tag{4.6.1}$$

onde $\{\alpha_{l,k,j},\ l \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z},\ j \in D\}$ são constantes não negativas satisfazendo

$$\sum_{l\geq 1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{l,k,j} = 1,\ j \in D,$$

e $\{\mathbf{Z}_{l,n} = (Z_{l,n,1},\ldots,Z_{l,n,d})\}_{l\in\mathbb{N},\, n\in\mathbb{Z}}$ é uma matriz de ve.a's independentes com margens de Fréchet unitárias. A f.d. de $\mathbf{X}_n$ é

$$F(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{l=1}^{\infty} \prod_{k=-\infty}^{\infty} F_Z\Big(\frac{x_1}{\alpha_{l,k,1}},\ldots,\frac{x_d}{\alpha_{l,k,d}}\Big),\ x_j > 0,\ j \in D, \tag{4.6.2}$$

e a relação entre as cópulas é

$$C_F(u_1,\ldots,u_d) = \prod_{l=1}^{\infty} \prod_{k=-\infty}^{\infty} C_Z(u_1^{\alpha_{l,k,1}},\ldots,u_d^{\alpha_{l,k,d}}),\ (u_1,\ldots,u_d) \in [0,1]^d.$$

Consideremos agora que $\{\mathbf{Z}_{l,n}\}_{l\geq 1,\ -\infty<n<+\infty}$ tem margens totalmente dependentes para alguns valores de l, digamos $l \in I_1$, e margens independentes para os restantes valores de l, $l \in I_2$, de modo a que $I_1 \cup I_2 = \mathbb{N}$ e $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Neste caso, atendendo a (4.6.2), para $(x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}_+^d$, vem

$$\begin{aligned} F(x_1,\ldots,x_d) &= \prod_{l\in I_1} P\Big(Z_{l,n-k,j} \leq \frac{x_1}{\alpha_{l,k,j}}, k \in \mathbb{Z}, j \in D\Big) \prod_{l\in I_2} P\Big(Z_{l,n-k,j} \leq \frac{x_d}{\alpha_{l,k,j}}, k \in \mathbb{Z}, j \in D\Big) \\ &= \prod_{l\in I_1} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \bigwedge_{j=1}^{d} P\Big(Z_{l,1,j} \leq \frac{x_j}{\alpha_{l,k,j}}\Big) \prod_{l\in I_2} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{d} P\Big(Z_{l,1,j} \leq \frac{x_j}{\alpha_{l,k,j}}\Big) \\ &= \prod_{l\in I_1} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\bigvee_{j=1}^{d} \frac{\alpha_{l,k,j}}{x_j}\Big) \prod_{l\in I_2} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\sum_{j=1}^{d} \frac{\alpha_{l,k,j}}{x_j}\Big). \end{aligned}$$

Sejam $\{\mathbf{u}_n^{(\boldsymbol{\tau})} = (u_{n,1}^{(\tau_1)}, \ldots, u_{n,d}^{(\tau_d)})\}$ níveis normalizados, isto é, $\{u_{n,j}^{(\tau_j)}\}$ satisfazem $nP(Z_{l,n,j} > u_{n,j}^{(\tau_j)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_j > 0,\ j \in D$. A partir do pressuposto de que as f.d.'s marginais são de Fréchet unitárias, vem, do Teorema 2.2.2, que $b_{n,j} = 0$, que $a_{n,j} = n$ e que $\tau_j = \tau_j(x_j) = x_j^{-1}$. Logo podemos considerar $u_{n,j}^{(\tau_j)} = \frac{n}{\tau_j},\ n \geq 1,\ j \in D$. Desta maneira,

$$F\left(\frac{n}{\tau_1}, \ldots, \frac{n}{\tau_d}\right) = \prod_{l\in I_1} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\bigvee_{j=1}^{d} \frac{\alpha_{l,k,j}\tau_j}{n}\right) \prod_{l\in I_2} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{j=1}^{d} \frac{\alpha_{l,k,j}\tau_j}{n}\right). \tag{4.6.3}$$

Provemos agora que o processo definido em (4.6.1) é fortemente estacionário. Para qualquer conjunto de índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q$, com $x_{i_p,j} > 0,\ j \in D$, temos

$$F_{i_1,\ldots,i_q}(\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_q}) = \prod_{l\in I_1} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \bigwedge_{j=1}^{d} \exp\left(-\sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{l,k,j}}{x_{i_p,j}}\right) \prod_{l\in I_2} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{d} \exp\left(-\sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{l,k,j}}{x_{i_p,j}}\right)$$

e

$$\begin{aligned} F_{i_1+s,\ldots,i_q+s}(\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_q}) &= \prod_{l\in I_1} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \bigwedge_{j=1}^{d} \exp\left(-\sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{l,k+s,j}}{x_{i_p,j}}\right) \prod_{l\in I_2} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{d} \exp\left(-\sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{l,k+s,j}}{x_{i_p,j}}\right) \\ &= \prod_{l\in I_1} \prod_{k'=-\infty}^{+\infty} \bigwedge_{j=1}^{d} \exp\left(-\sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{l,k',j}}{x_{i_p,j}}\right) \prod_{l\in I_2} \prod_{k'=-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{d} \exp\left(-\sum_{p=1}^{q} \frac{\alpha_{l,k',j}}{x_{i_p,j}}\right) \\ &= F_{i_1,\ldots,i_q}(\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_q}). \end{aligned}$$

Provamos assim que $\{\mathbf{X}_n\}$ é uma sucessão fortemente estacionária. Para encontrar o domínio de atração da f.d. MEV à qual F pertence, calculamos, na próxima proposição, o limite em distribuição da sucessão $\{(n^{-1}\widehat{\mathbf{M}}_{n,1}, \ldots, n^{-1}\widehat{\mathbf{M}}_{n,d}) = (n^{-1}\bigvee_{i=1}^{n}\widehat{X}_{i,1}, \ldots, n^{-1}\bigvee_{i=1}^{n}\widehat{X}_{i,d})\}$, onde $\{\widehat{\mathbf{X}}_n = (\widehat{X}_{n,1}, \ldots, \widehat{X}_{n,d})\}$ é uma sucessão de ve.a.'s independentes com f.d. F.

Proposição 4.6.1 ([16]). *A f.d. F pertence ao domínio de atração de*

$$G(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{l\in I_1} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \bigwedge_{j=1}^{d} e^{-\alpha_{l,k,j}x_j^{-1}} \prod_{l\in I_2} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{d} e^{-\alpha_{l,k,j}x_j^{-1}},\ x_j > 0,\ j \in D. \tag{4.6.4}$$

Demonstração. De (4.6.3) temos, para $\tau_j > 0,\ j \in D$, que

$$F^n\left(\frac{n}{\tau_1}, \ldots, \frac{n}{\tau_d}\right) = \prod_{l\in I_1} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\bigvee_{j=1}^{d} \alpha_{l,k,j}\tau_j\right) \prod_{l\in I_2} \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sum_{j=1}^{d} \alpha_{l,k,j}\tau_j\right),$$

ou seja, $\lim_{n\to+\infty} F^n\left(\frac{n}{\tau_1}, \ldots, \frac{n}{\tau_d}\right) = G(x_1, \ldots, x_d)$, com $x_j = \tau_j^{-1},\ j \in D$. □

Uma vez que $F^n(\frac{n}{\tau_1}, \ldots, \frac{n}{\tau_d}) = F^n(nx_1, \ldots, nx_d)$ é independente de n e $F^n(nx_1, \ldots, nx_d) = F(x_1, \ldots, x_d)$, concluímos que as f.d.'s marginais de $\{\mathbf{X}_n\}$ são max-estáveis. Por outro lado, as f.d.'s marginais de G em (4.6.4) são de Fréchet unitárias, isto é, $G_j(x_j) = e^{-x_j^{-1}},\ x_j > 0,\ j \in D$.

De facto, para $j \in D$,

$$G_j(x_j) = \prod_{l\in I_1}\prod_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_{l,k,j}x_j^{-1}} \prod_{l\in I_2}\prod_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_{l,k,j}x_j^{-1}} = e^{-x_j^{-1}\sum\limits_{l\in I_1\cup I_2}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}} = e^{-x_j^{-1}},\ x_j>0,$$

pois $I_1 \cup I_2 = \mathbb{N}$ e $\sum\limits_{l\geq 1}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j} = 1$. Tendo em conta (4.6.4) e o facto de as f.d.'s marginais de G serem de Fréchet unitárias, podemos apresentar uma nova classe de cópulas. Para isso, basta converter a f.d. G em (4.6.4) numa função cópula com $u_j = G_j(x_j)$, na forma

$$C_G(e^{-x_1^{-1}},\ldots,e^{-x_d^{-1}}) = C_G(u_1,\ldots,u_d) = \prod_{l\in I_1}\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\bigwedge_{j=1}^{d} u_j^{\alpha_{l,k,j}} \prod_{l\in I_2}\prod_{k=-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{d} u_j^{\alpha_{l,k,j}}.$$

4.6.2 Índice extremal

Nesta secção pretendemos determinar o índice extremal multivariado de $\{\mathbf{X}_n\}$. Para isso, comecemos por calcular a f.d. limite da sucessão $\{(n^{-1}\mathbf{M}_{n,1},\ldots,n^{-1}\mathbf{M}_{n,d}) = (n^{-1}\bigvee_{i=1}^{n} X_{i,1},\ldots, n^{-1}\bigvee_{i=1}^{n} X_{i,d})\} = \{n^{-1}\mathbf{M}_n\}$.

Proposição 4.6.2 ([16])**.** *A sucessão $\{n^{-1}\boldsymbol{M}_n\}$ tem f.d. limite*

$$H(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{l\in I_1}\bigwedge_{k=-\infty}^{+\infty}\bigwedge_{j=1}^{d} e^{-\alpha_{l,k,j}x_j^{-1}} \prod_{l\in I_2}\prod_{j=1}^{d}\bigwedge_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_{l,k,j}x_j^{-1}},\ x_j>0,\ j\in D. \tag{4.6.5}$$

Demonstração. Consideremos $N = \{1,\ldots,n\}$. Tem-se, para todo o $\tau_j > 0$, $j \in D$, que

$$\begin{aligned}
&P\Big(M_{n,1} \leq \frac{n}{\tau_1},\ldots,M_{n,d}\leq\frac{n}{\tau_d}\Big)\\
=&P\Big(Z_{l,i-k,1}\leq \frac{n}{\tau_1\alpha_{l,k,1}}, l\geq 1, k\in\mathbb{Z}, i\in N,\ldots,Z_{l,i-k,d}\leq\frac{n}{\tau_d\alpha_{l,k,d}}, l\geq 1, k\in\mathbb{Z}, i\in N\Big)\\
=&P\Big(Z_{l,m,1}\leq \bigwedge_{i=1}^{n}\frac{n}{\tau_1\alpha_{l,i-m,1}}, l\geq 1, m\in\mathbb{Z},\ldots,Z_{l,m,d}\leq\bigwedge_{i=1}^{n}\frac{n}{\tau_d\alpha_{l,i-m,d}}, l\geq 1, m\in\mathbb{Z}\Big)\\
=&\prod_{l\in I_1}\prod_{m=-\infty}^{+\infty}\bigwedge_{j=1}^{d} P\Big(Z_{l,m,j}\leq\bigwedge_{i=1}^{n}\frac{n}{\alpha_{l,i-m,j}\tau_j}\Big)\prod_{l\in I_2}\prod_{m=-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{d} P\Big(Z_{l,m,j}\leq\bigwedge_{i=1}^{n}\frac{n}{\alpha_{l,i-m,j}\tau_j}\Big)\\
=&\prod_{l\in I_1}\prod_{m=-\infty}^{+\infty}\bigwedge_{j=1}^{d}\exp\bigg(-\Big(\bigwedge_{k=1-m}^{n-m}\frac{n}{\alpha_{l,k,j}\tau_j}\Big)^{-1}\bigg)\prod_{l\in I_2}\prod_{m=-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{d}\exp\bigg(-\Big(\bigwedge_{k=1-m}^{n-m}\frac{n}{\alpha_{l,k,j}\tau_j}\Big)^{-1}\bigg)\\
=&\exp\bigg(-\frac{1}{n}\sum_{l\in I_1}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\bigvee_{k=1-m}^{n-m}\bigvee_{j=1}^{d}\alpha_{l,k,j}\tau_j\bigg)\exp\bigg(-\frac{1}{n}\sum_{l\in I_2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{d}\bigvee_{k=1-m}^{n-m}\alpha_{l,k,j}\tau_j\bigg)\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{}\exp\bigg(-\sum_{l\in I_1}\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty}\bigvee_{j=1}^{d}\alpha_{l,k,j}\tau_j\bigg)\exp\bigg(-\sum_{l\in I_2}\sum_{j=1}^{d}\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}\tau_j\bigg),
\end{aligned}$$

dado que $\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\bigvee\limits_{k=1-m}^{n-m}\beta_k=\bigvee\limits_{m=-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{k=1-m}^{n-m}\beta_k=\bigvee\limits_{m=-\infty}^{+\infty}n\beta_k$. Tomando $x_j=\tau_j^{-1}$, vem (4.6.5). □

Determinamos agora as margens unidimensionais $H_j, j\in D$, de H e relacionamo-las com as de G. Para todo o $j\in D$, temos

$$H_j(x_j)=\prod_{l\in I_1}\exp\Big(-x_j^{-1}\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}\Big)\prod_{l\in I_2}\exp\Big(-x_j^{-1}\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}\Big)=e^{-x_j^{-1}\theta_j}=G_j^{\theta_j}(x_j),$$

onde o índice extremal da sucessão $\{X_{n,j}\}$ é dado por $\theta_j=\sum\limits_{l\geq1}\bigvee\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}$. Tendo em conta (4.3.2), podemos escrever que o índice extremal multivariado de $\{\mathbf{X}_n\}$ é dado por

$$\theta(x_1,\ldots,x_d)=\frac{\log H(x_1^{-1},\ldots,x_d^{-1})}{\log G(x_1^{-1},\ldots,x_d^{-1})},\tag{4.6.6}$$

pois $\tau_j(x_j)=x_j^{-1},\ j\in D$. A próxima proposição apresenta uma fórmula para o cálculo do índice extremal multivariado de $\{\mathbf{X}_n\}$.

Proposição 4.6.3 ([16])**.** *A sucessão $\{\boldsymbol{X}_n\}$ tem índice extremal*

$$\theta(x_1,\ldots,x_d)=\frac{\sum\limits_{l\in I_1}\bigvee\limits_{j=1}^{d}\Big(x_j\bigvee\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}\Big)+\sum\limits_{l\in I_2}\sum\limits_{j=1}^{d}\Big(x_j\bigvee\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}\Big)}{\sum\limits_{l\in I_1}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\bigvee\limits_{j=1}^{d}\Big(x_j\alpha_{l,k,j}\Big)+\sum\limits_{l\in I_2}\sum\limits_{j=1}^{d}\Big(x_j\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}\Big)},$$

para qualquer $(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}_+^d$.

Demonstração. O resultado é obtido usando (4.6.4) e (4.6.5) em (4.6.6). □

Vamos agora fazer o estudo do índice extremal multivariado quando $I_1=\emptyset$ ou $I_2=\emptyset$. Comecemos por considerar $I_1=\emptyset$, caso em que H tem margens independentes. Temos, por um lado,

$$H(x_1^{-1},\ldots,x_d^{-1})=\prod_{j=1}^{d}\exp\Big(-\Big(\sum_{l\geq1}\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}\Big)x_j\Big)=\prod_{j=1}^{d}\exp(-\theta_jx_j)$$

e, por outro lado,

$$G(x_1^{-1},\ldots,x_d^{-1})=\prod_{j=1}^{d}\exp\Big(-\Big(\sum_{l\geq1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_{l,k,j}\Big)x_j\Big)=\prod_{j=1}^{d}\exp(-x_j).$$

Então, por (4.6.6), vem que $\theta(x_1,\ldots,x_d)=\frac{\sum_{j=1}^{d}\theta_jx_j}{\sum_{j=1}^{d}x_j}$. De facto, observemos que o resultado obtido é o esperado pelo Teorema 4.4.1 quando H tem margens independentes. Analogamente, se considerarmos $I_2=\emptyset$, H tem margens totalmente dependentes e $\theta(x_1,\ldots,x_d)=\frac{\bigvee_{j=1}^{d}\theta_jx_j}{\bigvee_{j=1}^{d}x_j}$.

Concluímos apresentando a cópula da f.d. H. Tendo em conta que $\theta_j = \sum_{l\geq 1} \bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{l,k,j}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
C_H(u_1,\ldots,u_d) &= \prod_{l\in I_1} \bigwedge_{j=1}^{d} \exp\left(-\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{l,k,j} x_j^{-1}\right) \prod_{l\in I_2} \prod_{j=1}^{d} \exp\left(-\bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{l,k,j} x_j^{-1}\right) \\
&= \prod_{l\in I_1} \bigwedge_{j=1}^{d} H_j(x_j)^{\theta_j^{-1} \bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{l,k,j}} \prod_{l\in I_2} \prod_{j=1}^{d} H_j(x_j)^{\theta_j^{-1} \bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{l,k,j}} \\
&= \prod_{l\in I_1} \bigwedge_{j=1}^{d} u_j^{\theta_j^{-1} \bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{l,k,j}} \prod_{l\in I_2} \prod_{j=1}^{d} u_j^{\theta_j^{-1} \bigvee_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{l,k,j}}.
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] Alpuim, M. T. (1989). An extremal markovian sequence. *J. of Appl. Prob.*, 26:219–232.

[2] Billingsley, P. (1968). *Convergence of probability measures.* Wiley, New York.

[3] Deheuvels, P. (1978). Caractérisation complète des lois extrèmes multivariées et de la convergence aux types extrèmes. *Publications de l'Institute Statistique de la Université de Paris*, 23:1–36.

[4] Durante, F. e Sempi, C. (2014). *Principles of copula theory.* Chapman & Hall/CRC.

[5] Ferreira, H. (1994). *Condições de dependência local em teoria de valores extremos.* PhD thesis, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

[6] Ferreira, M. e Ferreira, H. (2013). Extreme of multivariate ARMAX processes. *Test*, 22:606–627.

[7] Fisher, R. e Tippet, L. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc*, 24:180–190.

[8] Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44:423–453.

[9] Hsing, T. (1989). Extreme value theory for multivariate stationary sequences. *Journal of Multivariate Analysis*, 29:274–291.

[10] Leadbetter, M.R. e Rootzén, H. e. L. G. (1983). *Extremes and related properties of random sequences and processes.* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

[11] Leadbetter, M. (1974). On extreme values in stationary sequences. *Z. Wahrsch. verw. Gabiete*, 28:289–303.

[12] Leadbetter, M. (1982). Extremes and local dependence in stationary sequences. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 65:291–306.

[13] Leadbetter, M. e Nandagopalan, S. (1988). On exceedance point processes for stationary sequences under mild oscillation restrictions, Extreme values theory. *Springer Verlag.*

[14] Martins, C. (1992). Modelos auto-regressivos de máximos. Propriedades extremais. Master's thesis, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

[15] Martins, Ana P. e Ferreira, H. (2005). The multivariate extremal index and the dependence structure of a multivariate extreme value distribution. *Test*, 14:433–448.

[16] Martins, Ana P. e Ferreira, H. (2014). Extremal properties of M4 processes. *Test*, 23:388–408.

[17] Nandagopalan, S. (1990). *Multivariate Extremes and Estimation of the Extremal Index.* PhD thesis, University of North Carolina. Chapel Hill.