

اللَّهُ أَكْبَرُ

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

روش هموتوپی طیفی برای حل مسایل مقدار مرزی درجه دوم غیرخطی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی
گرایش آنالیز عددی

تحقیق و نگارش:

محسن مقتدائی

اساتید راهنما:

دکتر سعید عباس بندی

دکتر داود رستمی

بهمن ۱۳۹۱

چکیده:

بسیاری از پدیده ها در جهان اطراف ما ذاتا غیر خطی بوده و قابل توصیف به وسیله معادلات غیر خطی می باشند. به دلیل ظهور کامپیوترهای پیشرفته ، تولید و حل مسایل خطی آسان است. اما در حالت کلی جواب دقیق برای مسایل غیر خطی قدری مشکل خواهد بود. در این پایان نامه از روش هموتویی طیفی ، برای پیدا کردن جواب های مساله مقدار مرزی غیر خطی مرتبه دوم استفاده می کنیم. این پایان نامه، درستی و کارایی بالای روش هموتویی طیفی را نسبت به روش استاندارد هموتویی برای حل مسایل غیر خطی نشان می دهد. این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تهیه شده است:

A new spectral homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP

S.S.Motsa,P.Sibanda,S.Shateyi

واژه های کلیدی:

روش تحلیلی هموتویی – روش طیفی چبیشف – ماتریس مشتق چبیشف – مساله مقدار مرزی غیر خطی

مقدمه:

روش تحلیلی هموتویی تکنیکی تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی است که در سال 1992 توسط لیاو ابداع شد [۱۰]. بر مبنای این روش جواب مسایل غیر خطی بر اساس یک سری همگرا به جواب معادله دیفرانسیل غیر خطی بیان می شود که این جواب مستقل از پارامترهای کوچک و بزرگ فیزیکی مرتبط با مساله است [۱۵]. ایده اساسی شکل گیری روش هموتویی، جایگزینی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی به جای معادله غیر خطی است که قابل حل به وسیله بسته های محاسبات نمادین نظیر MAPLE, MATLAB و... است. اما روش هموتویی تحلیلی دارای محدودیت هایی است که ما سعی کردیم در این پایان نامه به بیان آنها بپردازیم و سپس با استفاده از روش های طیفی این محدودیت ها را از بین ببریم.

فهرست مطالب

فصل اول تعاریف و مفاهیم پایه ای

- ۱-۱ مقدمه..... ۲
- ۲-۱ یادآوری دنباله ها و سری های عددی و سری های توانی..... ۲
- ۳-۱ مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل..... ۷
- ۴-۱ مسایل مقدار اولیه..... ۸
- ۵-۱ مسایل مقدار مرزی..... ۱۰
- ۶-۱ روش های عددی کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل..... ۱۲
- ۱-۶-۱ روش اویلر..... ۱۲
- ۲-۶-۱ روش رانگ - کوتا..... ۱۵
- ۳-۶-۱ روش پرتابی..... ۱۶
- ۴-۶-۱ روش تفاضلات متناهی..... ۱۸

فصل دوم روش تحلیلی هموتوپی

- ۱-۲ مقدمه..... ۲۴
- ۲-۲ تاریخچه و سوابق تحقیق..... ۲۴
- ۳-۲ مروری بر هموتوپی در توپولوژی..... ۲۵
- ۱-۳-۲ نظریه هموتوپی..... ۲۷
- ۴-۲ توصیف روش..... ۲۹

- ۵-۲ خواص مشتق دگرشکلی..... ۳۵
- ۱-۵-۲ معادلات دگرشکلی مرتبه بالا..... ۴۰
- ۶-۲ ایده اصلی روش هموتویی..... ۴۶
- ۷-۲ همگرایی روش..... ۵۰
- ۸-۲ قوانین اساسی..... ۵۲
- ۹-۲ تنظیم و کنترل ناحیه و سرعت همگرایی..... ۵۴
- ۱۰-۲ منحنی h و ناحیه درستی از h ۵۴
- ۱۱-۲ اهمیت قوانین بنیادی با ذکر مثال..... ۵۵
- ۱-۱۱-۲ قاعده نمایش جواب..... ۵۶
- ۲-۱۱-۲ انتخاب حدس اولیه و عملگر خطی..... ۵۷
- ۳-۱۱-۲ قاعده همسویی ضرایب..... ۵۸
- ۴-۱۱-۲ پارامتر همگرایی، کنترل سرعت، ناحیه همگرایی و منحنی h ۵۸

فصل سوم مشتق گیری به روش حاصلضرب ماتریس مشتق در

بردار مقادیر

- ۱-۳ مقدمه..... ۶۴
- ۲-۳ روش های طیفی..... ۶۵
- ۱-۲-۳ روش گالرکین..... ۷۱
- ۲-۲-۳ روش هم محلی..... ۷۱
- ۳-۲-۳ روش تاو..... ۷۲
- ۳-۳ هم محلی (شبه طیفی)..... ۷۲
- ۴-۳ مشتق گیری عددی..... ۷۴

- ۵-۳ ماتریس مشتق..... ۷۷
- ۶-۳ محاسبه مشتق در نقاط گره ای..... ۸۳

فصل چهارم روش هموتویی طیفی

- ۱-۴ مقدمه..... ۸۶
- ۲-۴ معادله دارسی – برینکمن – فورشیمر در یک کانال افقی..... ۸۶
- ۳-۴ روش تحلیلی هموتویی برای حل مدل دارسی – برینکمن – فورشیمر..... ۸۷
- ۴-۴ روش هموتویی طیفی برای حل مدل دارسی – برینکمن – فورشیمر..... ۹۱
- ۵-۴ جریان الکترو هیدرودینامیک در یک مجرای استوانه ای دوار..... ۹۶
- ۶-۴ روش هموتویی طیفی برای محاسبه جریان الکترو هیدرودینامیک در یک مجرای استوانه ای دوار..... ۹۷
- ۷-۴ نتیجه گیری..... ۱۰۴
- کتاب نامه ۱۰۵

فهرست نماد ها

- شکل (۱-۱): آونگ در حال نوسان..... ۹
- شکل (۲-۱): خمیدگی میله آهنی..... ۱۱
- شکل (۳-۱): نمودار روش اویلر..... ۱۴
- شکل (۱-۲): مقایسه جواب HAM برای ۱۰ تکرار با $h=-1$ و جواب دقیق..... ۶۰
- شکل (۲-۲): مقایسه جواب HAM برای ۱۰ تکرار با $h=-1/3$ و جواب دقیق..... ۶۱
- شکل (۳-۲): مقایسه جواب HAM برای ۱۰ تکرار با $h=-0.6$ و جواب دقیق..... ۶۱
- شکل (۴-۲): منحنی h برای ۷ تکرار HAM، $u_{xx}(1)$ ۶۲

- شکل (۱-۴): نمودار منحنی h برای ۲۰ تکرار روش HAM به ازای s های متفاوت..... ۹۰
- شکل (۲-۴): منحنی h برای ۴ تکرار روش هموتویی طیفی..... ۹۴
- جدول (۱-۴): مقایسه روش SHAM و HAM برای جواب تقریبی $u'(1)$ ۹۵
- جدول (۲-۴): مقایسه روش SHAM و HAM و مقادیر مختلف F ۹۵
- شکل (۳-۴): ۲۰ تکرار روش HAM برای محاسبه $w(r)$ ۱۰۱
- شکل (۴-۴): ۲ تکرار روش SHAM برای محاسبه $w(r)$ ۱۰۱
- شکل (۵-۴): منحنی h برای ۲۰ تکرار روش HAM به ازای $\alpha = 0.5$ ۱۰۲
- شکل (۶-۴): منحنی h برای تکرارهای از مرتبه ۲، ۴، ۶، ۸ روش SHAM..... ۱۰۲
- شکل (۷-۴): منحنی h برای تکرارهای از مرتبه ۲، ۴، ۶، ۸ روش SHAM..... ۱۰۳
- شکل (۸-۴): نمودار خطای باقیمانده برای ۲۰ تکرار روش HAM..... ۱۰۴
- شکل (۹-۴): نمودار خطای باقیمانده برای ۱۰ تکرار روش SHAM..... ۱۰۴

واژه نامه

فصل اول

تعاریف و مفاهیم پایه ای

۱-۱ مقدمه

در این فصل به ارائه و یادآوری مفاهیم اصلی و بنیادین مورد نیاز در پایان نامه می پردازیم و قضایا و روش های مهم مقدماتی لازم را ارائه می کنیم. از مهمترین این مفاهیم، دنباله ها و سری های عددی، سری های توانی، دسته بندی معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه و مرزی و روش های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی با روش های اویلر، رانگ کوتا، پرتابی و تفاضلات متناهی قابل ذکر هستند.

۲-۱ دنباله ها و سری های عددی و سری های توانی

در حل معادلات دیفرانسیل با روش های هموتپی، سری های توانی به طور خاص و سری های توانی به طور کلی مورد استفاده قرار می گیرند. در این بخش به یاد آوری مختصر پاره ای از این مفاهیم و ذکر قضایای اصلی مربوط به آنها می پردازیم، ولی از اثبات قضایا صرف نظر کرده و آن ها را به مراجع مقدماتی از آنالیز ریاضی و ریاضیات عمومی ارجاع می دهیم. در همه پایان نامه حاضر توابع مورد استفاده از متغیر حقیقی و با مقدار حقیقی اند. بنابراین بحث دنباله و سری را نیز به دنباله های عددی و تابعی حقیقی محدود می کنیم.

تعریف ۱-۲-۱: تابعی که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} و برد آن زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی \mathbb{R} باشد یک دنباله از اعداد حقیقی یا دنباله نامیده می شود. یک دنباله حقیقی با نمایش $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ داده می شود، که در آن $x_n \in \mathbb{R}$ و جمله x_n را جمله عمومی دنباله نامند.

تعریف ۲-۲-۱: دنباله $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ را همگرابه عدد حقیقی ℓ می نامیم، در صورتی که به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح مثبت مانند m موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \geq m$ ،

$$|x_n - \ell| < \varepsilon$$

در این صورت می نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ یا $x_n \rightarrow l$ وقتی که $n \rightarrow \infty$. عدد l را حد دنباله مینامند. در صورتی که دنباله حقیقی همگرا به عدد حقیقی ای نباشد، آن را واگرا مینامند. حد هر دنباله همگرا، منحصر به فرادست و هر دنباله همگرا کران دار است.

قضیه ۱-۲-۳: اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله باشند و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ، آنگاه

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |x|$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = xy$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} (k x_n) = kx \quad (k \in \mathbb{R} \text{ و ثابت})$$

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۲-۴: دنباله $\{x_n\}$ را یک دنباله کوشی^۱ می نامند، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، یک

عدد صحیح مثبت مانند p (وابسته به ε) موجود باشد به طوری که به ازای هر $m \geq p$ و $n \geq p$ ،

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

ثابت می شود هر دنباله حقیقی کوشی، همگرا است، و هر دنباله همگرای حقیقی یک دنباله

کوشی است ([۲۲]).

تعریف ۱-۲-۵: اگر $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، حاصل جمع $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

را یک سری نامتناهی نامیده و با $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ نمایش می دهند. a_n را جمله n ام سری فوق نامند.

¹Cauchy Sequence

تعریف ۱-۲-۶: مجموع n جمله اول یک سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را مجموع جزئی n ام می نامند و با

$$\sum_{i=1}^n a_i \text{ نمایش می دهند. یعنی } \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ ام سری } \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

می نامند. مجموع جزئی n ام را با S_n نمایش می دهند.

تعریف ۱-۲-۷: سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را همگرا می نامند، اگر دنباله مجموع های جزئی $\left\{ \sum_{i=1}^n a_i \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

همگرا باشد. سری غیر همگرا را واگرا می نامند.

تعریف ۱-۲-۸: سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ را همگرای مطلق می نامند، اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۹: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مشروط نامند اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

همگرا نباشد. یعنی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، اما همگرای مطلق نباشد.

قضیه ۱-۲-۱۰: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگرا باشد، آن گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۲-۱۱: اگر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به ترتیب، همگرا به S و T باشند و λ و μ دو عدد حقیقی

باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ به $\lambda S + \mu T$ همگرا است.

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۲-۱۲: سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ با $a_n > 0$ همگراست، اگر فقط اگر دنباله های مجموع های

جزیی آن یعنی $\left\{ \sum_{i=1}^n a_i \right\}$ از بالا کراندار باشد.

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

قضیه (دالامبر) ۱-۲-۱۳: سری با جملات مثبت $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ همگراست در صورتی که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1, \text{ و اگر است، در صورتی که } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1.$$

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۲-۱۴: اگر x_0 یک عدد حقیقی ثابت باشد، سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ را یک سری به

مرکز x_0 نامند. اگر $x_0 = 0$ ، سری توانی به صورت $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ در می آید (ها را ضرایب سری

نامند).

تعریف ۱-۲-۱۵: فرض کنیم $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ یک سری توانی و α عددی حقیقی باشد.

الف) اگر سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha - x_0)^n$ به مجموع S همگرا باشد، سری توانی مفروض در $x = \alpha$ به

به مجموع S همگرا نامیده می شود.

ب) اگر سری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha - x_0)^n$ و اگر باشد، سری توانی مفروض در $x = \alpha$ و اگر نامیده می شود.

ج) سری توانی را در $x = \alpha$ همگرای مطلق می نامند، در صورتی که $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha - x_0)^n$

همگرایی مطلق باشد.

قضیه ۱-۲-۱۶: سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ ،

آنگاه:

الف) اگر $\mu = 0$ سری توانی به ازای هر مقدار x همگرایی مطلق است.

ب) اگر $\mu = \infty$ سری توانی فقط در $x = x_0$ همگراست.

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۲-۱۷: اگر $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ ، عدد $\frac{1}{\mu}$ را شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$

نامیم و آن را با r نشان می دهیم. به طور دقیق تر قرارداد می کنیم:

الف) اگر $\mu = \infty$ آنگاه $r = 0$.

ب) اگر $\mu = 0$ آنگاه $r = \infty$.

ج) اگر $\mu \neq 0, \infty$ ، آنگاه $r = \frac{1}{\mu}$.

مجموع نقاطی که در آن سری توانی همگراست، مجموعه همگرایی سری نامند. بنابراین

مجموعه همگرایی سری در سه حالت تعریف اخیر به ترتیب عبارت است از $\{x_0\}$ ، اگر $r = 0$

و $(-\infty, +\infty)$ ، اگر $r = \infty$. اگر $r \neq 0, \infty$ باشد، مجموعه همگرایی یکی از چهار بازه ی

$(x_0 - r, x_0 + r)$ ، $[x_0 - r, x_0 + r)$ ، $(x_0 - r, x_0 + r]$ و $[x_0 - r, x_0 + r]$ است. (برحسب اینکه

سری توانی مفروض در یک انتهای هر دو انتهای بازه همگرا یا واگرا باشد).

هر سری توانی در درون بازه همگرایی مربوطه، همگرایی مطلق است و در خارج آن بازه واگراست. ممکن است یک سری توانی در نقاط انتهایی یا بازه همگرایی خود همگرا یا واگرا

باشد. حاصلضرب دوسری $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ بنا به تعریف سری $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ است، که در آن

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \text{ و } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ های ممکن است سری های } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

همگرا باشند، ولی حاصل ضرب آنها همگرا نباشند. ثابت می شود که حاصل ضرب هر دو سری همگرایی مطلق، همگرایی مطلق است ([۲۲]).

قضیه (تیلور) ۱-۲-۱۸: اگر $f(x)$ و مشتق های آن تا مرتبه $n+1$ بر $[a, b]$ وجود داشته باشند

و $x_0 \in [a, b]$ ، آنگاه برای هر $x \in [a, b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

که در آن $R_n(x)$ را باقیمانده تیلور نامند و به صورت زیر داده می شود:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

اگر $x < x_0$ آنگاه $\xi \in (x, x_0)$ و اگر $x > x_0$ آنگاه $\xi \in (x_0, x)$.

اثبات: به [۲۲] مراجعه کنید.

۳-۱ مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱-۳-۱: یک معادله دیفرانسیل عبارت است از معادله $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

که در آن F تابعی از $n+2$ متغیر می باشد. x یک متغیر مستقل و $y, y', \dots, y^{(n)}$ به ترتیب

تابع مجهول و مشتقات آن می باشند. بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل فوق را

مرتبه آن معادله دیفرانسیل می نامیم. به عنوان مثال معادله $y'' + 2xy'' + yy' = x^4$ یک معادله

دیفرانسیل مرتبه سوم و معادله $y' + (\cos x)y + x = 0$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول میباشد

تعریف ۲-۳-۱: معادله دیفرانسیل مرتبه n ، $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ را در نظر می گیریم.

اگر در معادله فوق متغیرهای $y, y', \dots, y^{(n)}$ به صورت توابع چندجمله ای با ضرایب تابعی

بر حسب x ظاهر شوند آنگاه بیشترین توان موجود در $y^{(n)}$ را درجه آن معادله دیفرانسیل می -

نامند. بدیهی است برای همه معادلات دیفرانسیل درجه تعریف نمی شود.

تعریف ۳-۳-۱: معادله دیفرانسیل مرتبه n به صورت $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

مفروض است تابع $y = \varphi(x)$ در فاصله $\alpha < x < \beta$ را جواب معادله دیفرانسیل فوق گویم

اگر توابع $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n+1)}(x)$ در فاصله فوق موجود باشند و به ازای هر

x در فاصله $\alpha < x < \beta$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

۴-۱ مسایل مقدار اولیه

حرکت یک آونگ در حال نوسان تحت مفروضات ساده معینی را می توان با معادله

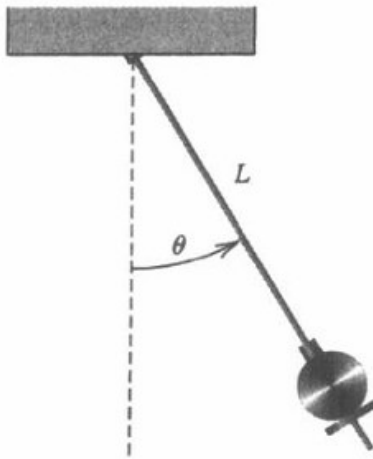
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

توصیف کرد، که در آن L طول آونگ، g ثابت

ثقل زمین و θ زاویه آونگ با وضعیت عمود یا تعادل است. اگر علاوه بر این، وضعیت آونگ

در شروع حرکت را با $\theta(t_0) = \theta_0$ و سرعت در آن نقطه را با $\theta'(t_0) = \theta'_0$ مشخص کنیم، با

یک مساله مقدار اولیه مواجه هستیم.



شکل ۱-۱: آونگ در حال نوسان

تعریف ۱-۴-۱: گوییم تابع $f(t, y)$ با متغیر y بر مجموعه $D \subset \mathbb{R}^2$ در شرط لیب

شیتس صدق می کند در صورتی که یک ثابت مانند $L > 0$ با این خاصیت وجود داشته

باشد که هر وقت $(t, y_1), (t, y_2) \in D$ آنگاه داشته باشیم:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

ثابت L را یک ثابت لیب شیتس برای f می گوییم.

تعریف ۱-۴-۲: گوییم مجموعه $D \subset \mathbb{R}^2$ محدب است اگر، هر وقت $(t_1, y_1), (t_2, y_2)$ متعلق به D باشند، نقطه $((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ نیز به ازای هر λ که $0 \leq \lambda \leq 1$ ، متعلق به D باشد.

قضیه ۱-۴-۳: فرض کنیم $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ و تابع $f(t, y)$ بر D پیوسته باشد هرگاه f نسبت به متغیر y بر D در شرط لیپ شیتس صدق کند، آنگاه مساله مقدار اولیه:

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

دارای جواب منحصر به فرد $y(t)$ به ازای $a \leq t \leq b$ ، است

اثبات: به [۴] مراجعه کنید.

تعریف ۱-۴-۴ ([۴]): گوییم مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$ یک مسئله خوش

وضع است اگر:

الف) یک جواب منحصر به فرد مثلا $y(t)$ ، برای این مسئله وجود داشته باشد.

ب) عددی مانند $\varepsilon > 0$ با این خاصیت باشد که جواب منحصر به فرد $z(t)$ برای مسئله

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), a \leq t \leq b \\ z(a) = \alpha + \varepsilon_0 \end{cases}$$

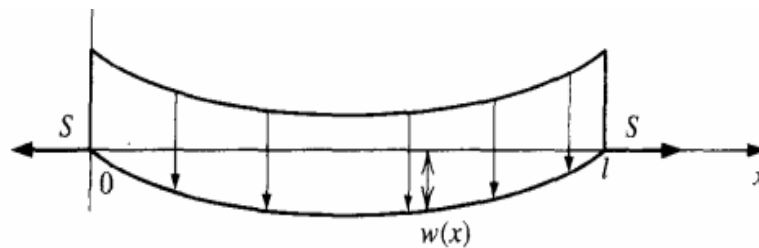
هرگاه $|\varepsilon_0| < \varepsilon$ و به ازای هر $a \leq t \leq b$ ، $|\delta(t)| < \varepsilon$ ، وجود داشته باشد.

ج) ثابتی مانند $k > 0$ با این خاصیت باشد که به ازای هر $a \leq t \leq b$ ،

$$|z(t) - k(t)| < k\varepsilon$$

۵-۱ مسایل مقدار مرزی

یک مسئله عادی در مهندسی راه و ساختمان به خمیدگی یک میله آهنی با مقطع عرضی مستطیلی مربوط میشود که مقید به تحمل باری یکنواخت است، در حالی که دو انتهای میله آهنی چنان نگهداری می شوند که متحمل هیچ خمیدگی نمیشوند.



شکل ۱-۲: خمیدگی میله آهنی

معادله دیفرانسیلی که این وضعیت فیزیکی را تقریب می کند به شکل

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{EI}w = \frac{qx}{2EI}(x-l)$$

است که در آن $w = w(x)$ ، خمیدگی به فاصله x از انتهای چپ میله آهنی است و q ، l ، E ، S به ترتیب، معرف طول میله، فشار باریکنواخت، مدول الاستیسیته، قدرت در نقاط انتهایی و ممان اینرسی مرکزی است. به این معادله دیفرانسیل دو شرط مربوط می شود که با این فرض که هیچ خمیدگی در دو انتهای میله رخ نمی دهد، یعنی، $w(0) = w(l) = 0$ داده می شود.

قضیه ۱-۵-۱: فرض کنیم تابع f در مسئله مقدار مرزی $\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$ بر

مجموعه

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$$

پیوسته بوده $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y'}$ بر D پیوسته باشند. هرگاه:

الف) به ازای هر $(x, y, y') \in D$ ، آنگاه $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0$.

ب) یک ثابت M وجود داشته باشد که به ازای هر $(x, y, y') \in D$ ، $\left| \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') \right| \leq M$.

آنگاه مسئله مقدار مرزی فوق دارای جواب منحصر به فرد است.

اثبات: به [۴] مراجعه کنید.

۶-۱ روش های عددی کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل

۶-۱-۱ روش اویلر: گرچه روش اویلر در عمل به ندرت بکار می رود، سادگی بدست آوردن آن

را می توان برای تشریح تکنیک های ساختن بعضی از روش های پیشرفته تر، بدون انجام

محاسبات خسته کننده به کار گرفت. هدف این روش تعیین تقریبی برای مسئله مقدار اولیه

خوش وضع

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases} \quad (1-1)$$

است. در عمل، یک تقریب پیوسته به جواب $y(t)$ بدست نمی آید؛ در عوض، تقریب هایی به

y در نقاط متعدد بازه $[a, b]$ ، به نام نقاط شبکه ای، پدید می آیند. وقتی جواب تقریبی در این

نقاط بدست آمد، جواب تقریبی در سایر نقاط بازه با استفاده از یکی از روندهای درونیابی حاصل می شود. حال فرض می کنیم توزیع نقاط شبکه ای در طول بازه $[a, b]$ به طور یکسان باشد. این شرط با انتخاب عدد صحیح مثبت N و نقاط $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ که در آن به ازای هر

$$\begin{cases} i = 0, 1, 2, \dots, N \\ t_i = a + ih \end{cases}$$

حاصل می شود. $h = \frac{b-a}{N}$ ، یعنی فاصله مشترک بین این نقاط، اندازه گام نامیده می شود.

برای رسیدن به روش اویلر، از قضیه تیلور (۱-۲-۱) استفاده می کنیم. فرض کنیم $y(t)$ ، یعنی جواب منحصر به فرد معادله (۱-۱)، دو مشتق پیوسته بر $[a, b]$ داشته باشد به طوری که به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ می توان $y(t_{i+1})$ را به صورت

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i) \quad (۲-۱)$$

به ازای نقطه ای مانند ξ_i ، که $t_i < \xi_i < t_{i+1}$ ، نوشت. با استفاده از نماد $h = t_{i+1} - t_i$ ، نتیجه می شود که عدد θ_i ، که $0 < \theta_i < 1$ ، وجود دارد به طوری که

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i + \theta_i h) \quad (۳-۱)$$

و چون $y(t)$ در معادله دیفرانسیل (۱-۱) صدق می کند،

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(t_i + \theta_i h)$$

با دوباره نویسی این معادله، به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ، نتیجه می شود که

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} = f(t_i, y(t_i)) + \frac{h}{2} y''(t_i + \theta_i h) \quad (۴-۱)$$

وقتی h به قدر کافی کوچک باشد، بنابر پیوستگی y ، جمله $\left(\frac{h}{2}\right)y''(t_i + \theta_i h)$ نیز کوچک

بوده و داریم

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} \approx f(t_i, y(t_i)) \quad (5-1)$$

در روش اویلر از این فرض با تعریف

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \end{cases} \quad (6-1)$$

و فرض $w_i \approx y(t_i)$ ، به ازای هر $i = 1, 2, \dots, N$ ، استفاده می شود.

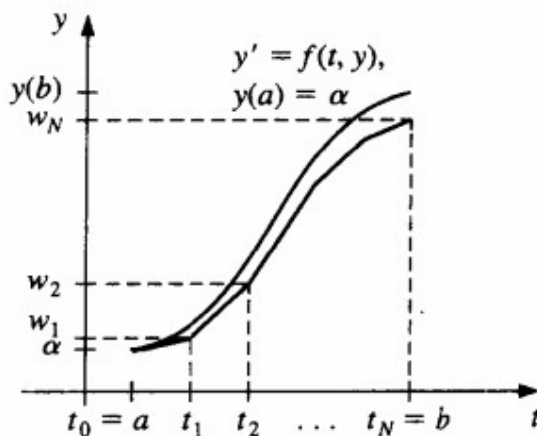
برای تعبیر هندسی روش اویلر، ابتدا به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N$ نماد $y_i = y(t_i)$ را

معرفی و توجه می کنیم که، وقتی w_i تقریب دقیقی به y_i است، فرض خوش وضع بودن

مسئله نتیجه میدهد که:

$$f(t_i, w_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

در نتیجه، یک سری مراحل مانند شکل زیر نمایان می شود



شکل ۱-۳: نمودار روش اویلر

۱-۶-۲ روش رانگ- کوتا: در آنالیز عددی روش های رانگ- کوتا یکی از مهمترین خانواده از روش های تکراری صریح و ضمنی برای تقریب جواب های معادلات دیفرانسیل معمولی می باشند. این تکنیک ها برای نخستین بار توسط ریاضی دانان آلمانی رانگ^۲ و کوتا^۳ در سال ۱۹۰۰ میلادی پیشنهاد گردید. یکی از متداول ترین انواع این روش ها، روش رانگ کوتای مرتبه چهارم می باشد (RK 4). الگوریتم روش رانگ کوتای مرتبه چهارم به صورت زیر بیان می شود. فرض کنید مساله مقدار اولیه زیر در نظر گرفته شده باشد:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

روش (RK 4) برای این مساله به صورت زیر بیان می شود:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

که در آن y_{n+1} تقریب (RK 4) برای $y(t_{n+1})$ می باشد و همچنین

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

^۲ C.Runge

^۳ M.W.Kutta

بنابراین مقدار بعدی (y_{n+1}) به وسیله مقدار فعلی (y_n) محاسبه می شود، به علاوه میانگین

وزنی چهارمقدار k_4, k_3, k_2, k_1 با توجه به ضرب مقدار طول بازه h ، افزایش میابد.

۱-۶-۳ روش پرتابی^۴: مساله مقدار مرزی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases} \quad (۷-۱)$$

برای حل مساله مقدار مرزی (۷-۱) با روش پرتابی، آن را با روش مسایل مقدار اولیه حل می

کنیم. برای این منظور پارامتری مانند t_0 انتخاب کرده و فرض می کنیم $y'(a) = t_0$. در این

صورت مساله ی مقدار اولیه ی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & y'(a) = t_0 \end{cases} \quad (۸-۱)$$

مساله مقدار اولیه (۸-۱) را با یکی از روشهای عددی، مثلاً، رانگ- کوتا، از $x = a$ تا $x = b$

با طول گام h همانگونه که گفته شد، حل می کنیم. واضح است که جواب به دست آمده به t_0

بستگی دارد. اگر جواب در $x = b$ را با $y(b, t_0)$ نشان دهیم، t_0 مطلوب آن است که با

یک تقریب خوب $y(b, t_0) = \beta$. چون عموماً $y(b, t_0)$ به β نزدیک نیست، پارامتر

دیگری مانند t_1 انتخاب می کنیم و مساله (۸-۱) را با $y'(a) = t_1$ از $x = a$ تا $x = b$ با

^۴ Shooting method

همان طول گام h حل می کنیم تا $y(b, t_1)$ به دست آید. اگر باز هم $y(b, t_1)$ به β نزدیک نباشد مساله (۸-۱) را با $t_2 = y'(a)$ حل می کنیم و به همین ترتیب ادامه می دهیم. اکنون

روشی برای انتخاب دنباله $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ بیان می کنیم به طوری که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = \beta$$

اگر $y(x, t)$ جواب مساله ی

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & y'(a) = t \end{cases} \quad (9-1)$$

باشد، مساله عبارت است از یافتن t به قسمی که

$$y(b, t) - \beta = 0 \quad (10-1)$$

معادله در حالت کلی یک معادله ی غیر خطی است، و می توان آن را با یکی از روشهای حل معادلات غیر خطی حل نمود. اگر بخواهیم آن را با روش وترتبی حل کنیم دوتقریب اولیه ی t_0

و t_1 برای t ، انتخاب نموده و فرض می کنیم $y(b, t_0) = \beta_0$ و $y(b, t_1) = \beta_1$ به ترتیب از حل

مسائل زیر بدست آیند:

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & y'(a) = t_0 \end{cases} \quad (11-1)$$

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y'), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & y'(a) = t_1 \end{cases}$$

حال می توانیم t_2 را از رابطه زیر بدست آوریم.

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{\beta - \beta_0}{\beta_1 - \beta_0}$$

$$t_2 = t_0 + \frac{\beta - y(b, t_0)}{y(b, t_1) - y(b, t_0)}(t_1 - t_0) \quad (12-1)$$

اینک مساله (۹-۱) را با $y'(a) = t_2$ حل می کنیم تا $y(b, t_2)$ که تقریب برای β است بدست

آید. اکنون t_3 را از فرمول مشابه (۱۲-۱)، یعنی فرمول زیر بدست می آوریم.

$$t_3 = t_1 + \frac{\beta - y(b, t_1)}{y(b, t_2) - y(b, t_1)}(t_2 - t_1)$$

و به همین ترتیب ادامه می دهیم. به طور کلی t_k ها را از فرمول تکراری وتری زیر

بدست می آوریم:

$$t_{k+1} = t_{k-1} + \frac{\beta - y(b, t_{k-1})}{y(b, t_k) - y(b, t_{k-1})}(t_k - t_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

محاسبات را وقتی متوقف می کنیم که برای $\varepsilon > 0$ داده شده، به ازای m ای داشته باشیم

$$|y(b, t_m) - \beta| < \varepsilon$$

۴-۶-۱ روش های تفاضلات منتهای^۵: مساله مقدار مرزی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta \end{cases} \quad (13-1)$$

⁵ Finite Difference

که در آن توابع $p(x), q(x), r(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته هستند. برای حل مساله مقدار مرزی

(۱۳-۱)، بازه $[a, b]$ را به n قسمت مساوی با طول $h = \frac{b-a}{n}$ تقسیم نموده و قرار می دهیم

که $i = 0, 1, \dots, n$ ، $x_i = a + ih$ و $x_0 = a$ و $x_n = b$. با استفاده از فرمول های تیلور می توان

نوشت :

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2)$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

پس معادله ی دیفرانسیل (۱۳-۱) در نقطه x_i به صورت زیر نوشته می شود .

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + p(x_i) \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + q(x_i)y(x_i) = r(x_i) + O(h^2)$$

یا اگر از خطای برشی $T = O(h^2)$ چشم پوشی کنیم ، پس به اختصار خواهیم داشت

$$(1 - \frac{h}{2}p_i)y_{i-1} + (-2 + h^2q_i)y_i + (1 + \frac{h}{2}p_i)y_{i+1} = h^2r_i, i = 1, \dots, n-1 \quad (14-1)$$

که در آن:

$$p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), r_i = r(x_i), y_i \approx y(x_i), y_0 = y(a) = \alpha, y_n = y(b) = \beta$$

معادلات (۱۴-۱) یک دستگاه خطی شامل $n-1$ معادله و $n-1$ مجهول y_{n-1}, \dots, y_2, y_1 است

این دستگاه به صورت ماتریسی چنین است.

$$Ay = b \quad (15-1)$$

که

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & \ddots & c_{n-2} \\ 0 & a_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

و

$$d_i = -2 + h^2 q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$c_i = 1 + \frac{h}{2} p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

$$a_i = 1 - \frac{h}{2} p_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

$$b_i = h^2 r_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-2$$

$$b_1 = h^2 r_1 - (1 - \frac{h}{2} p_1) \alpha, \quad b_{n-1} = h^2 r_{n-1} - (1 + \frac{h}{2} p_{n-1}) \beta$$

دستگاه (15-1) را می توان با روش حذفی گاوس و استفاده از الگوریتم خاص دستگاه های سه

قطری حل کرد.

قضیه ۱-۶-۵: فرض کنید در مساله ی مقدار مرزی (1-۱۳) توابع r, p, q در بازه $[a, b]$

پیوسته باشند، و داشته باشیم:

$$0 < M = \max_{a \leq x \leq b} |p(x)|, \quad q(x) < 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

آنگاه برای

$$h < \frac{2}{M} \quad (۱۶-۱)$$

دستگاه سه قطری (۱۵-۱) دارای جواب یکتا است.

اثبات: از شرط (۱۶-۱) نتیجه می شود که

$$1 - \frac{1}{2}Mh > 0$$

در نتیجه

$$1 \pm \frac{1}{2}p_i h > 0, \forall i$$

پس، بنابر نامساوی مثلثی داریم

$$\left|1 + \frac{1}{2}p_i h\right| + \left|1 - \frac{1}{2}p_i h\right| = 2 < 2 - h^2 q_i = \left|-2 + h^2 q_i\right|$$

$$\Rightarrow |a_i| + |c_i| < |d_i|, \quad i = 2, 3, \dots, n-2$$

به ازای $i = 1$ داریم

$$p_1 \leq M \Rightarrow \frac{h}{2}p_1 \leq \frac{Mh}{2} < 1 \Rightarrow 1 + \frac{h}{2}p_1 < 2 \leq \left|-2 + h^2 q_1\right|$$

در نتیجه

$$|c_1| < |d_1|$$

به ازای $i = n-1$ داریم:

$$p_{n-1} \geq -M \Rightarrow -\frac{h}{2}p_{n-1} \leq \frac{Mh}{2} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{h}{2}p_{n-1} < 2 \leq \left|-2 + h^2 q_{n-1}\right|$$

پس خواهیم داشت:

$$|a_{n-1}| < |d_{n-1}|$$

بنابراین ماتریس ضرایب دستگاه (۱-۱۵) غالب قطری است، و در نتیجه دستگاه دارای جواب یکتاست.

فصل دوم

روش تحلیلی هموتوپی

۱-۲ مقدمه

در این فصل به ارایه روش هموتویی برای حل معادلات جبری و دیفرانسیل غیر خطی می پردازیم. برای این منظور نحوه کاربرد روش را با تبدیل معادلات دیفرانسیل غیر خطی به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل خطی به کمک معادلات دگرشکلی مراتب مختلف ارایه می کنیم. همچنین مفاهیم مشتقات هموتویی را معرفی و خواص آنها را بر اساس قضایای مربوط بررسی می کنیم.

۲-۲ تاریخچه و سوابق تحقیق

حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی بسیار دشوار است، در چند دهه اخیر حل تحلیلی این معادلات با روش های پیشندگی [۲۰] کاربرد گسترده ای در علوم و مهندسی داشته و نقش بزرگی در پدیده های غیر خطی ایفا نموده اند. با این همه می دانیم که روش های پیشندگی به پارامترهای کوچک یا بزرگ فیزیکی وابسته اند، و بنابراین فقط برای مسایل غیر خطی ضعیف [۶] قابل کاربردند. روش های دیگری موسوم به تکنیک های غیر پیشندگی مانند روش پارامتر کوچک لیاپانوف [۱۱]، روش بسط دلتا [۱۱]، روش تجزیه آدومیان [۱۱]، که به طور رسمی به پارامترهای کوچک و بزرگ فیزیکی وابسته نیستند، الزاما همگرایی را تضمین نمی کنند و در حقیقت برای مسایل غیر خطی ضعیف معتبرند. روش آنالیز هموتویی HAM [۱۳] یک روش تحلیلی است که یک جواب به شکل سری تابعی برای معادلات غیر خطی بدست می دهد، که معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلات انتگرالی، معادلات دیفرانسیل تفاضلی و معادلاتی از این قبیل هستند. HAM برخلاف روش تکنیک پیشندگی به پارامترهای کوچک و بزرگ فیزیکی وابسته نیستند و بنابراین برای حل

مسائل عمومی غیرخطی قابل کاربرد است. روش آنالیز هموتویی با انتشار کتاب لیاو [۱۴] در سال ۲۰۰۳ رسماً معرفی شد، و کاربردهای موفقیت آمیز در حل مسائل غیرخطی در علوم و مهندسی پیدا کرد نظیر سیال چسبناک از سیال غیر نیوتونی [۱۱] معادلات نوع KVD [۱] انتقال حرارت غیر خطی قوی [۲۹] جریانات جت شکل گلارت [۱۱] امواج آبی غیرخطی [۱۱] و... به طور خلاصه HAM یک تابع پیوسته از یک حدس اولیه به جواب مسائل اصلی است و به یک عملگر خطی الحاقی وابسته می شود. برای ساختن چنین توابع پیوسته ای به یک پارامتر الحاقی که همگرایی سری جواب را تضمین می کند نیاز داریم. این روش دارای امکان انتخاب وسیعی از تقریب اولیه و عملگرهای خطی الحاقی است. با این آزادی که یک مساله پیچیده غیرخطی می تواند به تعداد نامتناهی از مسائل خطی کوچکتر تبدیل شود که نحوه این تبدیل توسط لیاو و تان [۱۴] نشان داده شده است.

۲-۳ مروری بر هموتویی در توپولوژی

در این بخش به تعریف هموتویی از دیدگاه توپولوژیکی پردازیم و سپس به طور اجمالی روش آنالیز هموتویی را برای مسائل غیرخطی معرفی می کنیم.

تعریف ۲-۳-۱: فرض کنید $I = [0,1]$ یک بازه بسته باشد، $X \neq \emptyset$ یک فضای توپولوژی باشد. یک مسیر از نقطه a به نقطه b در فضای X عبارت است از تابعی پیوسته مانند $f: I \rightarrow X$ به طوری که $f(0) = a, f(1) = b$ در اینجا a را نقطه شروع و b را نقطه پایانی مسیر می نامند.

تعریف ۲-۳-۲: فرض می‌کنیم $f: I \rightarrow X$ و $g: I \rightarrow X$ دو مسیر با نقطه شروع از $p \in X$ و نقطه پایانی $q \in X$ باشند، آنگاه مسیرهای f و g هموتوپیک می‌نامند اگر یک تابع پیوسته مانند $H: I^2 \rightarrow X$ موجود باشد به طوریکه داشته باشیم:

$$H(s, 0) = f(s), \quad H(0, t) = p,$$

$$H(s, 1) = g(s), \quad H(1, t) = q,$$

تعریف ۳-۳-۲: فرض کنیم X, Y دو فضای توپولوژیک باشند، $f, g: X \rightarrow Y$ نگاشت‌های پیوسته از X به Y گوئیم با f هموتوپیک است هرگاه یک نگاشت پیوسته مانند $F: X \times I \rightarrow Y$ وجود داشته باشد به طوریکه به از هر $s \in X$ روابط زیر برقرار باشند:

$$F(s, 0) = f(s),$$

$$F(s, 1) = g(s).$$

برای روشن تر شدن موضوع هموتویی، فرض می‌کنیم که برای هر مقدار $0 \leq t \leq 1$ نگاشت پیوسته $F_t: X \rightarrow Y$ چنین تعریف شده باشد:

$$\forall s \in X, \quad F_t(s) = F(s, t)$$

حال اگر t را پارامتر زمان در نظر بگیریم، آنگاه در لحظه‌های صفر و یک داریم:

$$t = 0 \Rightarrow F_0(s) = f(s),$$

$$t = 1 \Rightarrow F_1(s) = g(s),$$

بنابراین اگر t را از مقدار صفر تا مقدار یک تغییر دهیم، آنگاه به طور پیوسته f بر روی g قرار می‌گیرد پس به بیان نادقیق یا محاوره ای این تعریف را برای هموتویی می‌توان بیان کرد:

هموتویی یعنی اثر پیوسته یک منحنی به سمت منحنی دیگر که منحنی اول را منحنی اولیه (شروع) و منحنی دوم را منحنی پایانی می نامیم.

در حالت کلی موضوع هموتویی در توپولوژی یک مقوله راکد و ساکن است. این موضوع راکد زمانی به یک ابزار قوی در محاسبات تقریبی تبدیلی می شود که با فنون عددی ترکیب شود این موضوع به خوبی در مقالات [۲۶، ۲۹، ۳۰، ۳۱] آمده است. که ما به طور اجمالی در زیر به بیان آن می پردازیم.

۲-۳-۱ نظریه هموتویی

هموتویی یک نگاشت پیوسته از بازه $[0,1]$ به یک فضای تابعی می باشد، که در آن مفهوم پیوستگی نسبت به توپولوژی فضای تابعی تعریف می شود. به طور حسی هموتویی $\rho(\lambda)$ تابع $\rho(0) = f$ را با تابع $\rho(1) = g$ تغییر شکل می دهد وقتی که پارامتر λ از صفر تا یک تغییر کند. در این صورت به توابع f, g هموتوپیک گفته می شود. نگاشت های هموتویی ابزار های اساسی و پایه ای در توپولوژی هستند، و یک روند سودمند برای تعریف کلاس های هم ارزی توابع فراهم می کنند. در اینجا یک خلاصه ای از نظریه هموتویی برای حل معادلات عملگری غیر خطی نظیر مسایل معکوس زیر بیان می شود. برای دیدن جزییات بیشتر به [۱۰] مراجعه کنید.

در حالت کلی، یک مساله معکوس غیر خطی می تواند مانند یک معادله عملگری غیر خطی به صورت زیر فرمول بندی شود:

$$F(m) = y \quad (1-2)$$

یا به صورت یک مساله کمینه سازی مانند زیر:

$$\min \|F(m) - y\|^2 \quad (۲-۲)$$

که در معادلات (۱-۲) و (۲-۲)، m مدلی است که باید معکوس شود، y یک مجموعه به اصطلاح از مشاهدات، F یک مدل مقدم است که از یک معادله دیفرانسیل حاکم مقتضی محاسبه شده است. توجه می‌کنیم که مسایل (۱-۲) و (۲-۲) به شدت غیر خطی می‌باشند بنابراین یک حدس اولیه خوب از مدل m هنگامی که می‌خواهیم یک الگوریتم عددی اجرا شود باید فراهم شود. به وسیله یک تابع هدف $F(m)$ و یک پارامتر هموتویی $\lambda \in [0,1]$ و یک تابع ساده $G(m)$ یک تابع هموتویی ساخته می‌شود به طوریکه:

$$H(m,0) = G(m), \quad H(m,1) = F(m) - y \quad (۳-۲)$$

دستگاه شروع معادلات غیر خطی $G(m) = 0$ می‌تواند به طور دلخواه انتخاب شود و حداقل یک جواب معلوم مانند m^0 دارد، که می‌تواند به عنوان یک حدس اولیه در تمام محاسبات انتخاب شود. ما انتظار داریم که ممکن است یک منحنی $m = m(\lambda)$ وجود داشته باشد به طوریکه در معادله هموتویی زیر صادق باشد:

$$H(m, \lambda) = 0 \quad (۴-۲)$$

بنابراین واضح است که $m(0) = m^0$ ، $m(1) = m^*$ که یک جواب از معادله عملگری (۱-۲) است. بنابراین $m(\lambda)$ یک منحنی است که m^0 را به m^* پیوند می‌دهد. اگر بعضی از فنون عددی برای دنبال کردن این منحنی یعنی m^* از یک نقطه معلوم m^0 به کار ببریم، آنگاه در نهایت می‌توانیم به جواب m^* برسیم. به طور کلی دو راه برای تعقیب این منحنی وجود دارد. راه اول: اولین راه بر پایه این فرض است که $H(m, \lambda)$ نسبت به m و λ دیفرانسیل پذیر باشد. با گرفتن دیفرانسیل از دو طرف معادله (۴-۲) خواهیم داشت:

$$H'_m(m, \lambda)dm + H'_\lambda(m, \lambda)d\lambda = 0 \quad (۵-۲)$$

به خاطر اینکه m شرط اولیه $m(0) = m^0$ صدق می کند، مساله بدست آوردن $m(\lambda)$ به یک مساله مقدار اولیه از معادله دیفرانسیل معمولی (۲-۴) تبدیل می شود به وسیله فرمول انتگرال گیری عددی، می توان یک تقریب از $m^* = m(1)$ رابدست آورد.

راه دوم: دومین راه تقسیم کردن بازه $[0,1]$ به صورت $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = 1$ است و سپس بکارگیری بعضی روش های عددی برای حل پی در پی معادلات عملگری:

$$H(m, \lambda_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (۶-۲)$$

چون جواب m^{k-1} از معادله مرتبه $k-1$ محاسبه می شود (توجه کنید که معادله مرتبه صفر از قبل معلوم است) پس می توان به عنوان تقریب اولیه معادله مرتبه k از معادله (۲-۶) به کار برده می شود. وقتی که $\lambda_k - \lambda_{k-1}$ به اندازه کافی کوچک باشد m^{k-1} پیش بینی می شود که به یک تقریب خوب برای m^k باشد به طوریکه به وسیله یک روش تکراری با همگرایی سرتاسری می توان به نتیجه همگرایی آن رسید.

۲-۴ توصیف روش

ابتدا به توصیف روش HAM برای حل یک معادله جبری غیر خطی می پردازیم [۲]. معادله جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = 0 \quad (۷-۲)$$

تکنیک هموتویی کاربرد وسیعی در پیدا کردن همه ریشه های یک معادله جبری غیر خطی دارد یک هموتویی روی (۲-۷) به صورت زیر ایجاد می کنیم:

$$H(x, q) = (1-q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x)$$

به طوریکه x_0 حدس اولیه $q \in [0,1]$ پارامتر هموتویی نامیده می شوند واضح است که

اگر $q = 1, q = 0$ آنگاه به ترتیب:

$$H(x,0) = f(x) - f(x_0), \quad H(x,1) = f(x)$$

بنابراین همانطور که q از 0 تا 1 افزایش پیدا می کند $H(x,q)$ از $f(x) - f(x_0)$ به $f(x)$

تغییر می یابد. این نوع تغییر پیوسته در توپولوژی دگر دیسی نامیده می شود.

حال اگر $H(x,q) = 0$ خواهیم داشت:

$$(1-q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) = 0 \quad (۸-۲)$$

بنابراین یک خانواده از معادلات جبری خواهیم داشت. به وضوح جواب خانواده معادلات فوق

وابسته به پارامتر هموتویی q می باشد. بنابراین خانواده معادلات به صورت زیر نوشته می-

شوند:

$$(1-q)[f(\varphi(q)) - f(x_0)] + qf(\varphi(q)) = 0 \quad (۹-۲)$$

در $q = 0$ خواهیم داشت:

$$f[\varphi(q)] - f(x_0) \Big|_{q=0} = 0$$

در نتیجه:

$$\varphi \Big|_{q=0} = \varphi(0) = x_0,$$

و در $q = 1$ خواهیم داشت:

$$f[\varphi(q)] \Big|_{q=1} = 0$$

که دقیقاً مشابه معادله جبری $f(x) = 0$ می باشد. بنابراین:

$$\varphi|_{q=1} = \varphi(1) = x.$$

بنابراین همانگونه که پارامتر q از 0 تا 1 افزایش پیدا می کند $\varphi(q)$ از حدس اولیه x_0 به جواب x از معادله $f(x) = 0$ تغییر می یابد.

خانواده معادلات جبری (۹-۲) را معادلات دگرذیسی مرتبه صفر می نامیم. چون $\varphi(q)$ حالا یک تابع از پارامتر هموتویی q می باشد بسط مکلورن آن را می نویسیم:

$$\varphi(q) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k q^k, \quad \varphi(0) = x_0 \quad (10-2)$$

که در آن:

$$x_k = \frac{\partial^k \varphi(q)}{\partial q^k} \Big|_{q=0} = D_k(\varphi) \quad (11-2)$$

سری (۱۰-۲) در اینجا سری هموتویی و $D_k(\varphi)$ مشتق دگرذیسی مرحله k تابع φ نامیده می شود اگر سری هموتویی (۱۰-۲) در $q = 1$ همگرا باشد آنگاه با استفاده از رابطه $\varphi(1) = x$ سری جواب هموتویی را به صورت زیر داریم:

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad (12-2)$$

طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال درباره سری تیلور، ضرایب x_k در سری هموتویی منحصر به فرد هستند و در نتیجه معادله حاکم بر x_k منحصر بفرد است و فوراً از معادله دگرذیسی مرتبه صفر (۹-۲) نتیجه می شود.

با در نظر گرفتن مشتق مرحله اول هموتویی بر دو طرف معادله دگرذیسی مرتبه صفر (۹-۲) داریم:

$$-f[\varphi(q)] + f(x_0) + \varphi'(q)f'[\varphi(q)](1-q) + f[\varphi(q)] + q\varphi'(q)f'[\varphi(q)] = 0$$

با ساده کردن عبارت فوق به تساوی زیر می رسیم:

$$f(x_0) + \varphi'(q)f'[\varphi(q)] = 0,$$

و با جایگذاری $q = 0$ در معادله فوق داریم:

$$f(x_0) + \varphi'(0)f'[\varphi(0)] = 0$$

از طرفی با مشتق گرفتن نسبت به q از معادله (۲-۱۰) داریم:

$$\varphi'(q) = \sum_{k=1}^{\infty} kx_k q^{k-1} = x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} kx_k q^{k-1},$$

و با قرار دادن $q = 0$ در این تساوی به مقدار $\varphi'(0) = x_1$ می رسیم و در نهایت خواهیم داشت:

$$f(x_0) + x_1 f'(x_0) = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بادر نظر گرفتن مشتق مرحله دوم هموتویی بر دو طرف معادله (۲-۹) (از معادله دگر دیسی

(۲-۹) دو بار مشتق و تقسیم بر $2!$ و سپس قرار دادن $q = 0$) خواهیم داشت:

$$x_2 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_1^2 f''(x_0) = 0$$

$$x_2 = -\frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}.$$

بنابراین x_k به ازای $k = 1, 2, \dots$ بدست می آید. نکته قابل تاکید این است که همه این معادلات

دگر دیسی مرتبه بالا خطی هستند و به راحتی قابل حل می باشند. پس اولین و دومین تقریب

هموتویی به صورت زیر است:

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (13-2)$$

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} \quad (14-2)$$

قابل توجه است که (۱۳-۲) دقیقاً مشابه فرمول روش تکرار نیوتن است و بنابراین (۱۴-۱) می تواند فرمول دو بعدی نیوتن باشد. در واقع یک خانواده از فرمول های روش تکرار نیوتن از روش مشابه به دست می آیند.

متأسفانه سری هموتویی همیشه در $q = 1$ همگرا نیستند و در نتیجه سری جواب (۱۲-۲) ممکن است واگرا باشد. این نکته مهم است زیرا تقریب فوق براساس فرض همگرایی سری (۱۰-۲) در $q = 1$ می باشد. اما این فرض در حالت کلی برقرار نیست. بویژه برای مسایل غیرخطی با درجه غیر خطی قوی. برای برطرف کردن این محدودیت روش آنالیز هموتویی سنتی، لیاو [۱۵] یک پارامتر کمکی به نام $h \neq 0$ معرفی کرد، تایک نوع معادله دگر دیسی مرتبه صفر به صورت زیر رابه وجود آورد:

$$(1-q)[f(\varphi(q)) - f(x_0)] = qhf[\varphi(q)] \quad (15-2)$$

چون $h \neq 0$ ، معادله فوق در $q = 1$ به شکل زیر است:

$$hf[\varphi(q)] \Big|_{q=1} = 0,$$

که معادل با معادله اصلی $f(x) = 0$ می باشد، به شرط آنکه $x = \varphi(1)$ ، بطور مشابه بادر نظر گرفتن اولین مرحله مشتق دگر دیسی بر دو طرف معادله (۱۴-۲)، معادله دگر دیسی مرتبه یک را داریم:

$$x_1 f'(x_0) = hf(x_0) \rightarrow x_1 = \frac{hf(x_0)}{f'(x_0)}$$

وبا گرفتن دومین مرحله مشتق دگر دیسی بر دوطرف معادله (۱۴-۲) معادله دگر دیسی مرتبه دوم را داریم:

$$x_2 f'(x_0) - (1+h)x_1 f'(x_0) + \frac{1}{2}x_1^2 f''(x_0) = 0$$

و در نتیجه:

$$x_2 = h(1+h)f'(x_0) - \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}$$

مشابها مطابق تقریب سری هموتویی مرتبه اول داریم:

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 + h \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (۱۶-۲)$$

و مطابق تقریب سری هموتویی مرتبه دوم داریم:

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = (1+h+h^2)x_0 + h \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} \quad (۱۷-۲)$$

واضح است که (۱۳-۲) و (۱۴-۲) هنگامی که $h = -1$ حالت های خاص (۱۶-۲) و (۱۷-۲) هستند. پارامتر کمکی h در (۱۳-۲) مانند یک عامل تکراری عمل می کند که در محاسبات عددی بسیار مورد استفاده قرار می گیرد. به تجربه ثابت شده است که انتخاب درست عامل تکرار، همگرایی تکرار را تضمین می کند. در حقیقت تضمین همگرایی سری جواب هموتویی به سادگی با انتخاب درست h امکان پذیر است [۱۱].

بنابراین عاقلانه به نظر می رسد که پارامتر h به پارامتر کنترل همگرایی تغییر نام دهد. قابل ذکر است که بدون استفاده از پارامتر همگرایی h ، مجبوریم که همگرایی سری (۲-۱۲) را فرض کنیم. لذا با استفاده از پارامتر همگرایی h در معادله دگرذیسی مرتبه صفر، روش هموتویی سنتی به طور عمده ای اصلاح می شود.

۲-۵ خواص مشتق دگرذیسی

همانطور که در قسمت قبل ذکر شد، مشتق هموتویی برای نتیجه گیری معادلات دگرذیسی مرتبه بالا مورد استفاده قرار گرفت.

تعریف ۲-۵-۴: فرض کنید φ یک تابع از پارامتر هموتویی q باشد آنگاه:

$$D_k(\varphi) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varphi(q)}{\partial q^k} \Big|_{q=0} \quad (۱۸-۲)$$

رابطه مشتق دگرذیسی مرحله k ام می نامیم که $k \geq 0$.

تعریف ۲-۵-۵: فرض کنید $N(u) = 0$ یک معادله غیرخطی و φ یک تابع از پارامتر هموتویی

$q \in [0,1]$ است به طوریکه سری مکلورن آن به صورت زیر باشد:

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} u_k q^k \quad (۱۹-۲)$$

خانواده معادلات $\Pi[\varphi, q] = 0$ ، $q \in [0,1]$ را معادله دگرذیسی مرتبه صفر $N(u) = 0$ می

نامیم، اگر در $q = 1$ این خانواده با معادله اصلی $N(u) = 0$ یکسان باشد به طوریکه:

$$u = \varphi \Big|_{q=1} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (۲۰-۲)$$

در $q = 0$ جواب معادله اصلی باشد. سری (۲-۱۹) سری هموتویی و سری (۲-۲۰) سری جواب هموتویی $N(u) = 0$ نامیده می شود و معادلات حاکم بر u_k معادلات دگر دیسی مرتبه k نامیده می شوند.

قضیه ۲-۵-۱: برای سری هموتویی $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i$ داریم:

$$D_m(\varphi^k) = \sum_{r_1=0}^m u_{m-r_1} \sum_{r_2=0}^{r_1} u_{r_1-r_2} \dots \sum_{r_{k-1}=0}^{r_{k-2}} u_{r_{k-2}-r_{k-1}} u_{r_{k-1}}.$$

اثبات: اثبات به استقرا روی k می باشد.

واضح است برای $k = 2$ داریم:

$$D_m(\varphi^2) = \sum_{j=0}^m u_{m-j} u_j$$

قرار می دهیم $\varphi^{k+1} = \varphi^k \varphi$ و با استفاده از قاعده لایب نیتز داریم:

$$(\varphi^{k+1})^{(m)} = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\varphi^k)^{(j)} \varphi^{(m-j)}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} D_m(\varphi^{k+1}) &= \frac{1}{m!} \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (\varphi^k)^{(j)} \varphi^{(m-j)} \right)_{q=0} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (j! D_j(\varphi^k)) (m-j)! u_{m-j} \\ &= \sum_{j=0}^m u_{m-j} D_j(\varphi^k) \\ &= \sum_{j=0}^m u_j D_{m-j}(\varphi^k). \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می کند.

قضیه ۲-۵-۲: اگر f و g توابع مستقل از پارامتر هموتویی q و $\psi = \sum_{j=0}^{\infty} u_j q^j$

و $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i$ دو سری هموتویی باشند آنگاه:

$$D_m(f\varphi + g\psi) = fD_m(\varphi) + gD_m(\psi)$$

اثبات: با توجه به مستقل بودن f و g از q و D_m که با (۲-۱۸) تعریف می شود، اثبات واضح است.

قضیه ۳-۵-۲: برای سری های هموتویی $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i$ و $\psi = \sum_{j=0}^{\infty} u_j q^j$ داریم:

$$i) D_m(\varphi) = u_m$$

$$ii) D_m(q^k \varphi) = D_{m-k}(\varphi)$$

$$iii) D_m(\varphi\psi) = \sum_{i=0}^m D_i(\varphi)D_{m-i}(\psi) = \sum_{i=0}^m D_i(\psi)D_{m-i}(\varphi)$$

$$iv) D_m(\varphi^n \psi^\ell) = \sum_{i=0}^m D_i(\varphi^n)D_{m-i}(\psi^\ell) = \sum_{i=0}^m D_i(\psi^\ell)D_{m-i}(\varphi^n)$$

اثبات i : طبق تعریف $D_m(\varphi)$ و قضیه تیلور بدیهی است.

$$q^k \varphi = q^k \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^{k+i} = \sum_{m=k}^{\infty} u_{m-k} q^m \quad \text{اثبات } ii$$

اثبات iii : (طبق قاعده لایب نیتز برای مشتق حاصلضرب):

$$\frac{\partial^m(\varphi\psi)}{\partial q^m} = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{\partial^i(\varphi)}{\partial q^i} \frac{\partial^{m-i}(\psi)}{\partial q^{m-i}} = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{\partial^i(\psi)}{\partial q^i} \frac{\partial^{m-i}(\varphi)}{\partial q^{m-i}}$$

که با استفاده از (۱۸-۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D_m(\varphi\psi) &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^m(\psi\varphi)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i!} \frac{\partial^i(\varphi)}{\partial q^i} \Big|_{q=0} \right) \left(\frac{1}{(m-i)!} \frac{\partial^{m-i}(\psi)}{\partial q^{m-i}} \Big|_{q=0} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} D_i(\varphi) D_{m-i}(\psi) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} D_i(\psi) D_{m-i}(\varphi). \end{aligned}$$

اثبات i با قرار دادن $\phi = \varphi^n$ و $\zeta = \psi^\ell$ و قسمت قبل اثبات می شود.

قضیه ۲-۵-۴: اگر L یک عملگر خطی مستقل از پارامتر هموتویی q باشد و $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} u_k q^k$

یک سری هموتویی باشد و همچنین $L(\varphi)$ همگرا باشد آنگاه:

$$D_m(L\varphi) = L((D_m\varphi)).$$

اثبات: چون L یک عملگر خطی است، $L(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} [L(u_k)]q^k$ با گرفتن مشتق دگر دیسی

مرحله m بر دو طرف رابطه فوق و قضیه ۲-۵-۲ داریم:

$$D_m(L\varphi) = L(u_m)$$

از طرف دیگر طبق قسمت (i) قضیه ۲-۵-۳ داریم:

$$L[D_m(\varphi)] = L(u_m)$$

در نتیجه :

$$D_m(L\varphi) = L((D_m\varphi)).$$

قضیه ۲-۵-۵: برای سری هموتویی $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} u_k q^k$ فرمول های بازگشتی زیر را داریم:

$$i) D_m(e^\varphi) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^\varphi) D_{m-k}(\varphi), \quad m \geq 1$$

$$ii) D_0(e^\varphi) = e^{u_0}$$

اثبات i : طبق رابطه (۱۸-۲) واضح است.

اثبات ii : (طبق قاعده لاینیتز برای مشتق حاصلضرب)

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m e^\varphi}{\partial q^m} &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \left(e^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!(m-1-k)!} \frac{\partial^k e^\varphi}{\partial q^k} \frac{\partial^{m-k} \varphi}{\partial q^{m-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m-k}{m} \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^k e^\varphi}{\partial q^k} \right] \left[\frac{1}{(m-k)!} \frac{\partial^{m-k} \varphi}{\partial q^{m-k}} \right] \end{aligned}$$

با قرار دادن $q=0$ در عبارت فوق و استفاده از رابطه (۱۸-۲) اثبات کامل می شود.

قضیه ۲-۵-۶: برای سری هموتویی $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} u_k q^k$ فرمول های بازگشتی زیر را داریم:

$$i) D_0(\cos \varphi) = \sin u_0,$$

$$ii) D_0(\sin \varphi) = \sin u_0,$$

$$iii) D_m(\sin \varphi) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(\cos \varphi) D_{m-k}(\varphi),$$

$$iv) D_m(\cos \varphi) = -\sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(\sin \varphi) D_{m-k}(\varphi).$$

اثبات: با توجه به قضیه های ۲-۵-۲ و ۵-۵-۲، فرمول اوپلر

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

واضح است.

قضیه ۲-۵-۷: اگر دو سری هموتویی $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} v_i q^i$, $\psi = \sum_{j=0}^{\infty} u_j q^j$ با هم در یک دامنه

$q \in [0,1]$ مساوی باشند، آنگاه:

$$D_m(\varphi) = D_m(\psi), \quad u_m = v_m$$

برای هر عدد صحیح $m \geq 0$ و یک عدد حقیقی $a > 0$.

اثبات: به مرجع [۱۱] مراجعه کنید.

۲-۵-۱ معادلات دگرذیسی مرتبه بالا

در این بخش از خواص مشتق هموتویی برای استنتاج معادلات دگرذیسی مرتبه بالا برای انواع مختلف معادلات دگرذیسی مرتبه صفر استفاده می کنیم.

لم ۲-۵-۱: فرض کنید $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m$ یک سری هموتویی و $q \in [0,1]$ پارامتر هموتویی

و u_m تابعی از متغیر \bar{x} و متغیر زمانی t باشد فرض کنید L یک عملگر خطی کمکی نسبت

به x, t, u_0 باشد در این صورت:

$$D_m[(1-q)L(\varphi - u_0)] = L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)]$$

که در آن عملگر L با (۲-۱۸) تعریف می شود و:

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (2-21)$$

اثبات: چون L یک عملگر خطی مستقل از q است:

$$(1-q)L[\varphi - u_0] = L[\varphi - q\varphi + u_0q - u_0],$$

با استفاده از قضیه های ۲-۵-۲، ۳-۵-۲ و ۴-۵-۲ داریم:

$$\begin{aligned} D_m [(1-q)L(\varphi - u_0)] &= D_m L[\varphi - q\varphi + u_0q - u_0] \\ &= LD_m[\varphi - q\varphi + u_0q - u_0] \\ &= LD_m(\varphi) - D_m(q\varphi) + u_0D_m(q) \\ &= L[u_m - u_{m-1} + u_0D_m(q)], \end{aligned}$$

که اگر $m = 1$ رابطه فوق معادل است با $L(u_m)$ و اگر $m > 1$ معادل است با $L[u_m - u_{m-1}]$ بنابراین با استفاده از (۲-۲۱) رابطه زیر برقرار است:

$$D_m [(1-q)L(\varphi - u_0)] = L[u_m - \chi_m u_{m-1}],$$

قضیه ۲-۵-۸: فرض کنید $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\bar{x}, t)q^m$ یک سری هموتویی و $q \in [0, 1]$ پارامتر

هموتویی است و نیز L یک عملگر خطی، $L(\varphi)$ همگرا باشد، N یک عملگر غیر خطی، $u_0(\bar{x}, t)$ یک حدس اولیه، h پارامتر کنترل همگرایی مستقل از q و $H(\bar{x}, t)$ یک تابع کمکی مستقل از q باشند آنگاه برای معادله دگر دیسی مرتبه صفر تعریف شده با:

$$(1-q)L[\varphi - u_0] = qhH(\bar{x}, t)N(\varphi) \quad (۲۲-۲)$$

معادله دگر دیسی مرتبه $m (m \geq 0)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = hH(\bar{x}, t)D_{m-1}[N(\varphi)]$$

اثبات:

طبق قضیه ۲-۵-۷ داریم:

$$D_m [(1-q)L(\varphi - u_0)] = D_m [qhH(\bar{x}, t)N(\varphi)], \quad (۲۳-۲)$$

و طبق لم ۲-۵-۱ داریم:

$$D_m[(1-q)L(\varphi - u_0)] = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (24-2)$$

و طبق قضیه های ۲-۵-۲ و ۳-۵-۲ داریم:

$$D_m[qhH(\bar{x}, t)N(\varphi)] = hH(\bar{x}, t)D_{m-1}[N(\varphi)] \quad (25-2)$$

با جایگذاری (۲۴-۲) و (۲۵-۲) در (۲۳-۲) معادله دگر دیسی مرتبه m را داریم.

قضیه ۲-۵-۹: اگر $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\bar{x}, t)q^m$ و $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k q^k$ هنگامی که $q \in [0, 1]$ پارامتر

هموتویی و α_k یک ثابت باشند و فرض کنید L یک عملگر خطی، $L(\varphi)$ همگر باشد، N یک

عملگر غیر خطی، $u_0(x, t)$ حدس اولیه و $H(\bar{x}, t)$ یک تابع مستقل از پارامتر کمکی q باشند

آنگاه برای معادله دگر دیسی مرتبه صفر تعریف شده با:

$$(1-q)L[\varphi - u_0] = H(\bar{x}, t) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k q^k \right) N(q) \quad (26-2)$$

معادله دگر دیسی مرتبه m را به صورت زیر داریم:

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = H(\bar{x}, t) \sum_{k=1}^m \alpha_k D_{m-k}[N(\varphi)].$$

اثبات:

با استفاده از قضیه ۲-۵-۷ داریم:

$$D_m[(1-q)L(\varphi - u_0)] = D_m[H(\bar{x}, t)\psi N(\varphi)], \quad (27-2)$$

و طبق ۲-۵-۱ داریم:

$$D_m[(1-q)L(\varphi - u_0)] = L[u_m - \chi_m u_{m-1}], \quad (28-2)$$

و با استفاده از قضایای ۲-۵-۲ و ۳-۵-۲ داریم:

$$D_m [H(\bar{x}, t) \psi N(\varphi)] = H(\bar{x}, t) \sum_{k=0}^m D_k(\psi) D_{m-k}(N(\varphi))$$

$$= H(\bar{x}, t) \sum_{k=0}^m \alpha_k D_{m-k}[N(\varphi)],$$

که چون $\alpha_0 = 0$:

$$D_m [H(\bar{x}, t) \psi N(\varphi)] = H(\bar{x}, t) \sum_{m=1}^m \alpha_k D_{m-k}[N(\varphi)] \quad (29-2)$$

با جایگذاری (28-2) و (29-2) در (27-2) اثبات قضیه تمام می شود.

قضیه 2-5-10: اگر $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m$ و $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\bar{x}, t) q^k$ هنگامی که $q \in [0, 1]$

پارامتر هموتویی و $\beta_k(\bar{x}, t)$ هر کدام تابعی صفر یا غیر صفر باشند، ولی حداقل یکی از آنها

غیر صفر است و فرض کنید L یک عملگر کمکی خطی، $L(\varphi)$ همگر باشد، N یک عملگر

غیر خطی و $u_0(x, t)$ حدس اولیه جواب باشند. برای معادله دگر دیسی مرتبه صفر تعریف شده

با:

$$(1-q)L[\varphi - u_0] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\bar{x}, t) q^k N(\varphi) \quad (30-2)$$

معادله دگر دیسی مرتبه m را به صورت زیر داریم:

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = \sum_{k=1}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k}[N(\varphi)],$$

اثبات:

با استفاده از قضیه 2-5-7 داریم:

$$D_m [(1-q)L(\varphi - u_0)] = D_m [\psi N(\varphi)], \quad (31-2)$$

و طبق لم ۱-۵-۲ داریم:

$$D_m[(1-q)L(\varphi - u_0)] = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (۳۲-۲)$$

و با استفاده از قضیه های ۲-۵-۲ و ۳-۵-۲ داریم:

$$D_m[\psi N(\varphi)] = \sum_{k=0}^m D_k(\psi) D_{m-k}(N(\varphi)) = \sum_{k=0}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k}[N(\varphi)]$$

که چون $\beta_0(\bar{x}, t) = 0$:

$$D_m[\psi N(\varphi)] = \sum_{k=1}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k}[N(\varphi)]. \quad (۳۳-۲)$$

قضیه ۱۱-۵-۲: اگر $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m$ و $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\bar{x}, t) q^k$ ، هنگامیکه $q \in [0, 1]$

پارامتر هموتویی و $\beta_k(\bar{x}, t)$ هرکدام توابعی صفر یا غیر صفر باشند، ولی حداقل یکی از آنها

غیر صفر است و فرض کنید L یک عملگر کمکی خطی، $L(\varphi)$ همگرا باشد، N یک عملگر

غیر خطی و $u_0(x, t)$ حدس اولیه جواب باشند. علاوه بر این فرض کنید که $A[\varphi, x, t, q]$ تابعی

از \bar{x}, φ و t است به طوری که:

$$A[\varphi, x, t, q] = 0$$

هنگامی که $q = 0, q = 1$ ، برای معادله دگر دیسی مرتبه صفر تعریف شده با:

$$(1-q)L[\varphi - u_0] = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k}[N(\varphi)] + D_m(A[\varphi, x, t, q]) \quad (۳۴-۲)$$

معادله دگر دیسی مرتبه m را به صورت زیر داریم:

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = \sum_{k=1}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k}[N(\varphi)] + D_m(A[\varphi, x, t, q])$$

اثبات:

با استفاده از قضیه های ۲-۵-۲ و ۷-۵-۲ داریم:

$$D_m[(1-q)L(\varphi-u_0)] = D_m[\psi N(\varphi)] + D_m[A[\varphi, x, t, q]] \quad (۳۵-۲)$$

و طبق لم ۱-۵-۲ داریم:

$$D_m[(1-q)L(\varphi-u_0)] = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (۳۶-۲)$$

و با استفاده از قضیه های ۲-۵-۲ و ۳-۵-۲ داریم:

$$D_m[\psi N(\varphi)] = \sum_{k=0}^m D_k(\psi) D_{m-k}[N(\varphi)] = \sum_{k=0}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k}[N(\varphi)]$$

که چون $\beta_0(\bar{x}, t) = 0$:

$$D_m[\psi N(\varphi)] = \sum_{k=1}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k}[N(\varphi)] \quad (۳۷-۲)$$

با جایگذاری (۳۷-۲) و (۳۶-۲) در (۳۵-۲) اثبات قضیه تمام می شود.

قضیه ۱۲-۵-۲: اگر $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m$ هنگامی که $q \in [0, 1]$ پارامتر هموتویی است و

فرض کنید L یک عملگر خطی کمکی، $L(\varphi)$ همگرا باشد، N یک عملگر غیر

خطی، $u_0(\bar{x}, t)$ حدس اولیه جواب باشند. علاوه بر این فرض کنید $B[\varphi, x, t, q]$ یک تابع از

q, φ, x, t باشد به طوریکه:

اگر $q = 0$ آنگاه $B[\varphi, x, t, q] = 0$ و اگر $q = 1$ آنگاه $B[\varphi, x, t, q] = \gamma(\bar{x}, t)N(t)$ هنگامی که

$\gamma(\bar{x}, t)$ یک تابع غیر صفر است. برای معادله دگر دیسی مرتبه صفر تعریف شده با:

$$(1-q)L[\varphi-u_0] = B[\varphi, x, t, q] \quad (۳۸-۲)$$

معادله دگر دیسی مرتبه m ($m \geq 1$) را به صورت زیر داریم:

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = D_m(B[\varphi, x, t, q]).$$

که D_m با (۱۸-۲) و χ_m با (۲۱-۲) تعریف می شود.

اثبات:

با استفاده از قضیه ۷-۵-۲ داریم:

$$D_m[(1-q)L(\varphi - u_0)] = D_m(B[\varphi, x, t, q]) \quad (۳۹-۲)$$

و طبق لم ۱-۵-۲ داریم:

$$D_m[(1-q)L(\varphi - u_0)] = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (۴۰-۲)$$

و این اثبات را کامل می کند.

نکته ۱-۵-۲: مطابق آنچه ذکر شد واضح است که معادله های دگر دیسی مرتبه صفر (۲۲-۲)

(۲۶-۲) و (۳۰-۲) و (۳۴-۲) حالت های خاص معادله دگر دیسی مرتبه صفر (۳۸-۲) هستند.

در بیشتر موارد اگر عملگر خطی L ، تابع کمکی $H(\bar{x}, t)$ و پارامتر کنترل همگرایی h به

درستی انتخاب شوند، معادله دگر دیسی قضیه ۸-۵-۲ سری جواب قانع کننده ای می دهد. در

بیشتر موارد برای بدست آوردن معادله دگر دیسی مرتبه بالا وابسته به یک معادله غیر خطی

$N(u) = 0$ فقط نیاز به محاسبه جمله $D(N[\varphi])$ است. این مطلب نیز به آسانی توسط خواص

مشتق دگر دیسی در قسمت های قبل اثبات شد.

۶-۲ ایده اصلی روش هموتویی

در این بخش برای توصیف ایده اصلی HAM معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم:

$$N[u(x, t)] = 0 \quad (۴۱-۲)$$

به طوری که N یک عملگر غیر خطی، $u(x, t)$ یک تابع مجهول، t, x به ترتیب متغیر های وابسته مکان و زمان هستند. فرض کنیم $u_0(x, t)$ حدس اولیه از جواب دقیق $u(x, t)$ ، $h \neq 0$ ، پارامتر کمکی، $H(x, t) \neq 0$ تابع کمکی و L عملگر خطی کمکی باشند با این خاصیت که:

$$L[f(x, t)] = 0 \quad (۴۲-۲)$$

هنگامی که:

$$f(x, t) = 0$$

برای سادگی کار در این توصیف از شرایط مرزی و اولیه چشم پوشی می کنیم.

به وسیله روش آنالیز هموتویی یک معادله دگر دیسی از مرتبه صفر به صورت زیر ایجاد میکنیم:

$$(1-q)L[\varphi(x, t; q) - u_0(x, t)] - qhH(x, t)N[\varphi(x, t; q)] = 0 \quad (۴۳-۲)$$

به طوریکه $\varphi(x, t; q)$ جواب است که به $u_0(x, t)$ ، L ، h و $H(x, t)$ و $q \in [0, 1]$ وابسته است. هنگامی که $q = 0$:

$$L[\varphi(x, t; 0) = u_0(x, t)] \quad (۴۴-۲)$$

و هنگامی که $q = 1$ با توجه به اینکه $h \neq 0$ و $H(x, t) \neq 0$:

$$\varphi(x, t; 1) = u(x, t) \quad (۴۵-۲)$$

در این صورت با افزایش q از 0 تا 1، $\varphi(x, t; q)$ از $u_0(x, t)$ به جواب دقیق $u(x, t)$ تغییر می یابد. با نوشتن بسط سری تیلور $\varphi(x, t; q)$ داریم:

$$\varphi(x, t; q) = \varphi(x, t; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) q^m, \quad (۴۶-۲)$$

که در آن :

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (۴۷-۲)$$

اگر عملگر خطی کمکی L ، حدس اولیه $u_0(x, t)$ ، پارامتر کمکی h و تابع کمکی $H(x, t)$

به درستی انتخاب شوند، سری (۴۶-۲) در $q=1$ همگرا می شود و داریم:

$$\varphi(x, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \quad (۴۸-۲)$$

که باید یک جواب معادله غیر خطی (۴۱-۲) باشد. باقرار دادن $H(x, t) = 1$ در معادله

(۴۳-۲) خواهیم داشت:

$$(1-q)L[\varphi(x, t; q) - u_0(x, t)] = qhN[\varphi(x, t; q)] \quad (۴۹-۲)$$

اکنون بردار زیر را تعریف می کنیم:

$$\vec{u}_n = \{u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\} \quad (۵۰-۲)$$

از معادله (۴۹-۲)، m بارسبیت به q مشتق گرفته و حاصل را بر $m!$ تقسیم می کنیم. سپس با

جایگذاری $q=0$ معادله دگرذیبی مرتبه m را به صورت زیر داریم:

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_m(x, t)] = hH(x, t)R_m(\vec{u}_{m-1}), \quad (۵۱-۲)$$

به طوریکه:

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (۵۲-۲)$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (۵۳-۲) \text{ و}$$

در نتیجه جواب معادله (۴۱-۲) از معادله (۵۱-۲) به صورت زیر بدست می آید:

$$u_m(x, t) = \chi_m u_m(x, t) + L^{-1}[hH(x, t)R_m(\bar{u}_{m-1})]. \quad (54-2)$$

نکته قابل تاکید این است که معادله دگر دیسی مرتبه بالای (۵۱-۲) حاکم بر $u_m(x, t)$ خطی است و به سادگی توسط نرم افزارهای ریاضی مانند MAPLE، MATLAB قابل حل می-باشد. اکنون ما توانایی ایجاد معادله دگر دیسی مرتبه صفر کلی تر از معادله (۴۳-۲) را داریم. فرض کنیم $B(q), A(q)$ توابع مختلط تحلیلی در ناحیه $|q| \leq 1$ باشند، که آنها را توابع تعبیه می نامیم که در روابط زیر صدق می کنند:

$$A(0) = B(0) = 0, \quad A(1) = b(1) = 1 \quad (55-2)$$

سری مک لوران $B(q), A(q)$ به صورت های زیر هستند:

$$A(q) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k q^k \quad (56-2)$$

$$B(q) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q^k$$

چون $B(q), A(q)$ در ناحیه $|q| \leq 1$ تحلیلی اند، از (۵۵-۲) و (۵۶-۲) نتیجه می گیریم:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = 1 \quad (57-2)$$

حال، معادله دگر دیسی مرتبه صفر در حالت کلی را به صورت زیر می سازیم:

$$[1 - B(q)]\{L[\varphi(x, t; q) - u_0(x, t)]\} = A(q)hH(x, t)N[\varphi(x, t; q)] \quad (58-2)$$

و حالت کلی معادله دگر دیسی مرتبه بالا به فرم زیر است:

$$L[u_m(x, t) - \sum_{k=1}^{m-1} b_k u_{m-k}(x, t)] = hH(x, t)K_m(\bar{u}_{m-1}, x, t) \quad (59-2)$$

به طوریکه :

$$K_m(\bar{u}_{m-1}, x, t) = \sum_{k=1}^m a_k \delta_{m-k}(x, t) \quad (۶۰-۲)$$

که در آن $\delta_n(x, t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_n(x, t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n N[\varphi(x, t; q)]}{\partial q^n} \right|_{q=0} \quad (۶۱-۲)$$

به وضوح مشخص است که معادلات دگر دیسی مرتبه صفر (۴۳-۲) و معادله دگر دیسی مرتبه

بالای (۵۱-۲) به ترتیب حالات خاصی از معادلات (۵۸-۲) و (۵۹-۲) زمانی

که $B(q) = A(q) = q$ هستند.

۷-۲ همگرایی روش

در حالت کلی می توان ثابت کرد که سری جواب (۴۸-۲) که به وسیله روش هموتویی تحلیلی

بدست می آید، به ازای $q = 1$ به شرطی همگراست که جوابی از مساله غیرخطی مورد نظر

باشد.

قضیه ۷-۲-۱۳: اگر سری $u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)$ همگرا باشد و همچنین $L[u_m(x, t)]$ توابعی

پیوسته باشند آنگاه $u_m(x, t)$ با معادله حاکم دگر دیسی مرتبه بالای (۵۹-۲) و تحت تعریف های

(۶۰-۲) و (۶۱-۲) جوابی از معادله غیرخطی (۴۱-۲) است.

اثبات: فرض کنیم:

$$S(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)$$

نشان دهنده یک سری همگرا باشد، با استفاده از (۵۹-۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 hH(x, t) \sum_{m=1}^{\infty} K_m(\vec{u}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{\infty} L[u_m(x, t) - \sum_{k=1}^{m-1} b_k u_{m-k}(x, t)] \\
 &= L[\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} b_k u_{m-k}(x, t)] \\
 &= L[\sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sum_{n=1}^{m-1} u_n(x, t)] \\
 &= L[(1 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k) \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t)] \\
 &= L[(1 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k) S(x, t)]
 \end{aligned}$$

که با توجه به اینکه $h \neq 0, H(r, t) \neq 0$ و از (۲-۴۲) و (۲-۵۷) بدست می آید:

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m(\vec{u}_{m-1}) = 0 \quad (۲-۴۲)$$

به عبارت دیگر مطابق تعاریف (۲-۵۷) و (۲-۶۰) داریم:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^{\infty} K_m(\vec{u}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{m-k}(x, t) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} a_k \delta_{m-k}(x, t) \\
 &= (\sum_{k=1}^{\infty} a_k) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(x, t)
 \end{aligned}$$

که با استفاده از (۲-۵۷) و (۲-۶۰) و (۲-۶۱) به دست می آید:

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m(\vec{u}_{m-1}) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N[\varphi(x, t; q)]}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = 0 \quad (۲-۶۳)$$

در حالت کلی $\varphi(x, t; q)$ در معادله اصلی (۲-۴۱) صدق نمی کند بنابراین فرض می کنیم

$$\varepsilon(x, t; q) = N[\varphi(x, t; q)] \quad (۲-۴۱) \text{ باشد.}$$

مطابق تعریف بالا و سری مک لورن $\varepsilon(x, t; q)$ حول پارامتر q داریم:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t; q) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^m \varepsilon[\varphi(x, t; q)]}{\partial q^m} \right]_{q=0} \times q^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^m N(x, t; q)}{\partial q^m} \right]_{q=0} \times q^m \end{aligned}$$

وقتی $q = 1$ باشد عبارت بالا با استفاده از (۲-۶۳) نتیجه می دهد:

$$\varepsilon(x, t; q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^m \varepsilon(x, t; q)}{\partial q^m} \right]_{q=0} = 0 \quad (۲-۶۴)$$

یعنی وقتی $q = 1$ است، $\varphi(x, t; q)$ جواب دقیق معادله (۲-۴۱) بوده و اثبات تمام است بر طبق

قضیه بالا ما باید در انتخاب تقریب اولیه $u_0(x, t)$ ، عملگر کمکی L ، توابع تعبیه $A(q)$ ،

$B(q)$ ، پارامتر کمکی h و تابع کمکی $H(x, t)$ دقت کنیم تا مطمئن شویم که سری جواب

(۲-۴۸) همگراست [۱۰].

۲-۸ قوانین اساسی

تکنیک های آشفتگی و دیگر روش های غیر آشفتگی برای مسایل غیر خطی مبتنی بر برخی

مفروضات هستند. بنابراین روش هموتویی تحلیلی نیز مبتنی بر برخی مفروضات می باشد اگر

چه آزادی عملی که ما در این روش برای انتخاب $H(x, t), h, L, u_0(x, t)$ داریم به قدری

بزرگ است که تقریباً برای ما امکان ارضاکردن همه این مفروضات را فراهم می کند. اما با

وجود این همه آزادی، بهتر است که برخی قوانین اساسی، ما را در انتخاب

هدایت کنند. بر این اساس ماباید به دو نکته مهم توجه کنیم. اولاً یک

جواب از مساله غیر خطی ممکن است به وسیله مجموعه های متفاوتی از توابع پایه ای بیان شود. ثانیاً در بسیاری از موارد مشخص کردن نوعی از توابع پایه ای همگرا به جواب مساله غیر خطی ارایه شده بدون حل آن با استفاده از ویژگی های فیزیکی، شرایط اولیه و شرایط مرزی خیلی مشکل نیست. بنابراین در یک مساله غیر خطی معین، می توانیم یک مجموعه از توابع پایه ای به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$\{e_n(x,t) | n = 0, 1, 2, \dots\} \quad (۶۵-۲)$$

که جواب معادله (۶۱-۲) را به صورت زیر نمایش می دهد:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n(x,t) \quad (۶۶-۲)$$

به طوریکه c_n ها ضرایب هستند عبارت بالا قاعده نمایش جواب نام دارد.

برای اجرای قاعده نمایش جواب تقریب اولیه $u_0(x,t)$ باید به وسیله یک مجموعه از توابع پایه ای به صورت زیر بیان شود:

$$u_0(x,t) = \sum_{n=0}^m a_n e_n(x,t) \quad (۶۷-۲)$$

به طوریکه a_n ها ضرایب و m_0 یک عدد صحیح است. در این روش قاعده نمایش جواب (۶۶-۲) ما را در انتخاب $H(x,t), h, L, u_0(x,t)$ راهنمایی می کند. تجربه نشان داده است که در بیشتر موارد، تابع کمکی $H(x,t)$ را نمی توان به صورت منحصر به فرد به وسیله قاعده نمایش جواب فوق الذکر معین کرد. در نتیجه بیشتر محدودیت ها باید برای راهنمایی ما جهت انتخاب $H(x,t)$ معلوم شوند. قابل توجه است هر عنصر $e_n(x,t)$ از مجموعه (۶۵-۲) باید

در جواب (۶۶-۲) ظاهر شود. این نکته را قاعده همسوئی ضرایب می نامند. این مطلب همچنین، انتخاب تابع کمکی را محدود می کند. بنابراین قاعده همسوئی ضرایب نیز نقش بسیار مهمی را در داخل قالب روش هموتویی تحلیلی بازی می کند.

۹-۲ تنظیم و کنترل ناحیه و سرعت همگرایی

بدون تردید اطمینان از این مطلب که سری جواب در یک ناحیه به اندازه کافی بزرگ همگراست مهم است. در حالت کلی ناحیه و سرعت همگرایی سری های جواب اساساً به وسیله توابع پایه ای مورد استفاده در سری جواب ارایه شده بدست می آیند. با وجودی که قاعده نمایش جواب مهمترین و کلیدی ترین عامل در تعیین $H(x,t), L, u_0(x,t)$ می باشد، حتی در صورت انتخاب $H(x,t), L, u_0(x,t)$ ما هنوز در انتخاب مقدار h آزادی عمل زیادی داریم. تاثیر h روی ناحیه و سرعت همگرایی آشکار است، به ویژه هنگامی که یک مجموعه از توابع پایه ای ناجور انتخاب شده باشند.

۱۰-۲ منحنی h و ناحیه درستی از h

فرض کنیم یک خانواده از سری های جواب بر حسب پارامتر h به وسیله روش هموتویی تحلیلی بدست آورده ایم چه مقداری از h را انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم که سری های جواب در یک ناحیه نسبتاً بزرگ و با سرعت به اندازه کافی زیاد همگرا هستند؟ بسیاری از مسایل غیر خطی، حاوی کمیت های فیزیکی چون فرکانسی از یک نوسان غیر خطی، مقاومت پوسته دیوار از یک جریان چسبناک و نظیر اینها هستند. به جهت اینکه ما یک خانواده از نمایش جواب نسبت به پارامتر کمکی مستقل h ، رسم منحنی بر حسب مقادیر مختلف h کار آسانی است. برای مثال فرض کنیم:

$$\gamma = u''(x, t) \Big|_{x=0, t=0}$$

مقدار است که یک معنای فیزیکی بسیار مهم دارد و تابع γ نشان دهنده مشتق دوم $u(x, t)$ نسبت به t است که در انتها با مقدار دادن t, x (که در اینجا t, x را صفر قرار دادیم)، γ تابعی از h می شود. لذا می تواند به وسیله یک منحنی رسم شود.

مطابق قضیه ۲-۷-۱۳ اگر همه سری های شامل γ که به وسیله مقادیر مختلفی از h بدست می آیند همگرا باشند، آنگاه جوابی از مساله غیر خطی هستند. در صورتی که جواب منحصر به فرد باشد، همه آنها به مقدار مشابهی همگرا هستند. بنابراین یک قطعه خط افقی در منحنی γ موجود است که مطابق با ناحیه ای از h است که با R_h نمایش داده می شود برای اختصار این نوع منحنی ها را منحنی h و ناحیه R_h را ناحیه قابل قبول از h می نامیم.

۲-۱۱ اهمیت قوانین بنیادی با ذکر مثال

در این قسمت نقش قوانین بنیادی ذکر شده را با حل مثال زیر مورد بررسی قرار می دهیم.

تعریف ۲-۱۱-۶: (معادلات لین-امدین)

بسیاری از مسایل در ریاضی فیزیک از جمله نظریه ساختار شبه ستاره و رفتار گرمایی یک توده ابر کروی ناشی از کنش گاز، تحت جاذبه متقابل مولکول هایش و با توجه به قوانین ترمودینامیک به وسیله معادلات به شکل زیر که به معادلات لین-امدین معروف اند، مدل سازی می شوند [۱۶]:

$$u_{xx} + \frac{2}{x}u_x + f(u) = 0, x \geq 0 \quad (۲-۶۸)$$

با شرایط مرزی:

$$u(0) = a, u_x(0) = 0 \quad (۶۹-۲)$$

به طوریکه a یک عدد ثابت و $f(u)$ یک تابع غیر خطی برحسب $u(x)$ است.

۲-۱۱-۱ قاعده نمایش جواب

بدیهی است که جواب معادله لین-امدین^۱ به صورت مجموعه ای از توابع توانی زیر بیان میشود:

$$\varphi_1 = \{x^m \mid m \geq 0\} \quad (۷۰-۲)$$

به طوریکه:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (۷۱-۲)$$

و a_k ها ضرایبی هستند که باید تعیین شوند ای مطلب اولین قاعده نمایش جواب را برای معادله اصلی ارایه می دهد. با وجود این مجموعه (۷۰-۲) تقریب جواب منحصر به فردی برای معادله فوق نیست به علت اینکه طبق (۶۸-۲) با افزایش x جواب $u(x)$ به طوریکه نواخت کاهش می یابد بنابراین امکان دارد $u(x)$ توسط مجموعه توابع پایه ای زیر تقریب زده شود:

$$\varphi_2 = \{(1+x)^{-m} \mid m \geq 0\} \quad (۷۲-۲)$$

به طوریکه:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (1+x)^{-k} \quad (۷۳-۲)$$

و b_k ها ضرایبی هستند که باید تعیین شوند. این مطلب دومین قاعده نمایش جواب را برای معادله فوق ارایه می دهد.

^۱Lane-Emden

۲-۱۱-۲ انتخاب حدس اولیه و عملگر خطی

باتوجه به شرایط مرزی (۶۹-۲) و قاعده نمایش جواب ذکر شده طبیعی است که $u_0(x) = a$ را به عنوان تقریب اولیه جواب انتخاب کنیم.

علاوه بر این شکل معادله (۶۸-۲) و قاعده نمایش جواب عملگر خطی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$Lu = u_{xx} + \frac{2}{x}u_x \quad (۷۴-۲)$$

با این خاصیت که، $L[c_0 + \frac{c_1}{x}] = 0$ که c_1, c_0 ثابت های انتگرال گیری هستند. علاوه بر این

عملگر غیر خطی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N[\varphi(x; q)] = \frac{\partial^2 \varphi(x; q)}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial \varphi(x; q)}{\partial x} + f(\varphi(x; q)) \quad (۷۵-۲)$$

با استفاده از (۷۲-۲) و (۷۳-۲) و حدس اولیه u_0 معادله دگر دیسی مرتبه صفر به صورت زیر ایجاد می کنیم:

$$(1-q)L[\varphi(x; q) - u_0(x)] = qhH(x)N[\varphi(x; q)], \quad (۷۶-۲)$$

که برای $q = 1, q = 0$ می توان نوشت:

$$\varphi(x; 0) = u_0(x), \varphi(x; 1) = u(x), m \geq 1 \quad (۷۷-۲)$$

در نتیجه معادله دگر دیسی مرتبه m به صورت زیر نوشته می شود:

$$L[u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] = hH(x)R_m(\bar{u}_{m-1}), m \geq 1 \quad (۷۸-۲)$$

که :

$$R_m(\bar{u}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(x; q)]}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$$

وباتوجه به شرایط مرزی داریم:

$$u_m(0) = u'_m(0) = 0 \quad (۷۹-۲)$$

قابل توجه است که معدلات دگر دیسی (۷۶-۲) و (۷۷-۲) خطی هستند و بنابراین به سادگی با نرم افزارهای ریاضی مانند MATLAB، MAPLE،... قابل حل هستند.

۲-۱۱-۳ قاعده همسویی ضرایب

به علت وجود دوقاعده نمایش جواب تابع کمکی $H(x)$ می تواند به یکی از دو شکل زیر نوشته شود:

$$H(x) = x^\alpha \quad \text{یا} \quad H(x) = \frac{x}{(1+x)^\beta}$$

که β, α ضرایبی هستند که باید توسط قاعده همسویی ضرایب تعیین شوند یعنی همه ضرایب در (۷۰-۲) یا (۷۱-۲) همانطور که مرتبه تقریب به بی نهایت میل می کند، باید اصلاح شوند. تحت قاعده همسویی ضرایب محاسبات نشان می دهد که در همه معادلات مطرح شده، برای اولین قاعده نمایش جواب $\alpha = 0$ و برای دومین قاعده نمایش جواب $\beta = 5$ را خواهیم داشت. بر این اساس طبیعی است که توابع کمکی را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$H(x) = 1 \quad \text{یا} \quad H(x) = \frac{x}{(1+x)^5}$$

۴-۱۱-۲ پارامتر همگرایی، کنترل سرعت، ناحیه همگرایی و منحنی h

در معادله (۶۸-۲) اگر $f(u) = u^m(x)$ آنگاه معادله رفتار گرمایی یک توده ابر کروی ناشی از کنش گاز تحت جاذبه متقابل ملکول هایش و باتوجه به قوانین ترمودینامیک، رابدست می آوریم:

$$u_{xx} + \frac{2}{x}u_x + u^m(x) = 0, \quad m \geq 0 \quad (۸۰-۲)$$

که $m \geq 0$ یک ثابت است و باشرایط مرزی :

$$u(0) = 1, u_x(0) = 0 \quad (۸۱-۲)$$

که وزواز در [۲۷] جواب معادله را به شکل زیر بدست آورد:

$$u(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} \quad (۸۲-۲)$$

به طوریکه:

$$a_1 = -\frac{1}{6}, a_2 = \frac{m}{120}, a_3 = -\frac{m(6m-5)}{3 \times 7!}, \dots$$

اما برای $m > 2$ (۸۲-۲) در تمام ناحیه با $u(x) \geq 0$ معتبر نیست. همانطور که در نمودار

(۱-۲) دیده می شود. باتوجه به اینکه جواب دقیق معادله (۸۰-۲) برای $m = 0, 1, 5$

وجود دارد، به عنوان نمونه ما بررسی و مقایسه را به ازای $m = 5$ انجام دادیم. در این حالت

جواب دقیق به صورت زیر می باشد:

$$u(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)^{1/2}} \quad (۸۳-۲)$$

و جواب های بدست آمده از روش HAM بر حسب h به فرم زیر خواهد بود:

$$u_0(x) = 1 \quad (۸۴-۲)$$

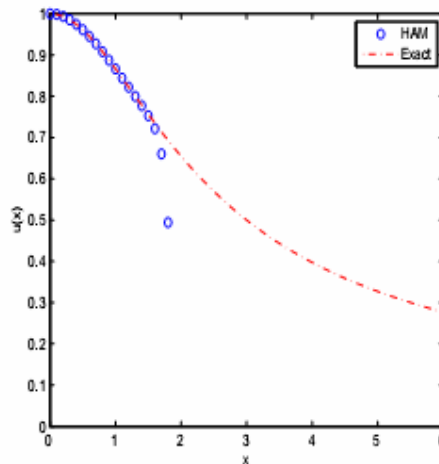
$$u_1(x) = \frac{1}{6}hx^2,$$

$$u_2(x) = \frac{1}{6}hx^2 + \frac{1}{24}h^2x^4 + \frac{1}{6}h^2x^2,$$

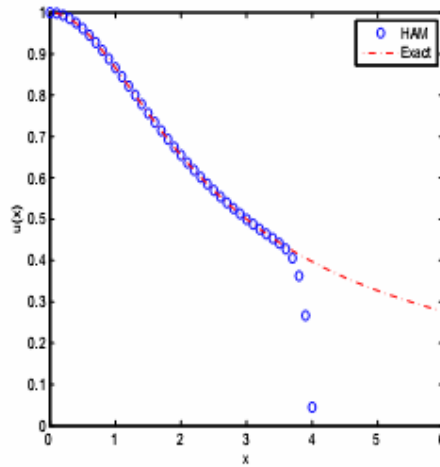
$$u_3(x) = \frac{1}{6}hx^2 + \frac{1}{12}h^2x^4 + \frac{1}{3}h^2x^2 + \frac{5}{432}h^3x^6 + \frac{1}{12}h^3x^4 + \frac{1}{6}h^3x^2$$

⋮

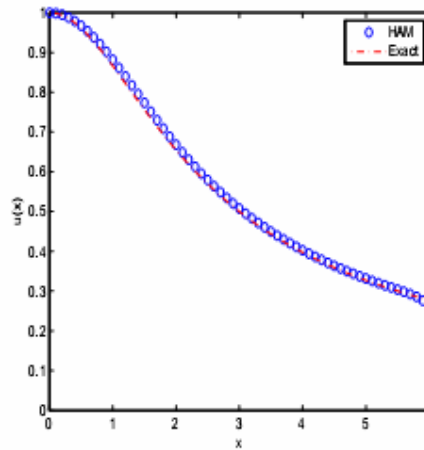
مقدار $h = -0.6$ در 10 تکرار، تقریب هایی بامقدار خطای کم را ارایه می کند. نتایج این محاسبات در نمودارهای (۱-۲)، (۲-۲)، (۳-۲) نشان داده شده است. مطابق توضیحات ارایه شده در قسمت های قبل پیرامون منحنی h ، نمودار (۴-۲) در فاصله $-1.2 < h \leq -0.2$ به حالت افقی در آمده است. محاسبات رایانه ای نشان داده است که بهترین حالت وقتی اتفاق می افتد که $h = -0.6$ انتخاب شود.



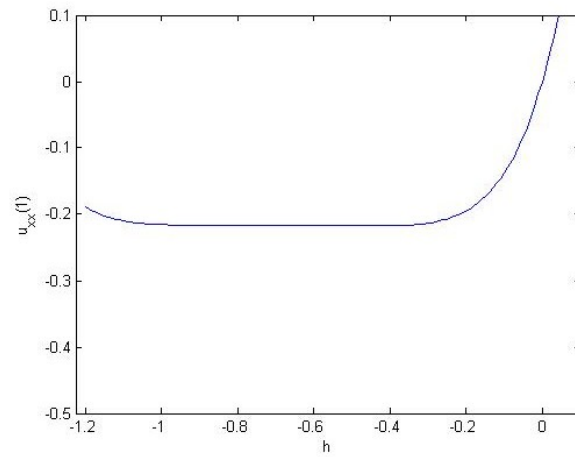
شکل (۱-۲): مقایسه جواب HAM برای 10 تکرار با $h = -1$ و جواب دقیق.



شکل (۲-۲): مقایسه جواب HAM برای 10 تکرار با $h = -\frac{1}{3}$ و جواب دقیق



شکل (۳-۲): مقایسه جواب HAM برای 10 تکرار با $h = -0.6$ و جواب دقیق.



شکل (۲-۴): منحنی h برای ۷ تکرار HAM، $u_{xx}(1)$

فصل سوم

مشتق گیری به روش حاصلضرب

ماتریس مشتق در بردار مقادیر

۱-۳ مقدمه

معادلات برخاسته از مسایل فیزیکی گاهی چنان پیچیده هستند که نمی توان یک جواب تحلیلی برای آنها بدست آورد بدین منظور برای حل چنین معادلاتی لازم است توسط روش های خاصی، تقریب مناسبی از جواب را محاسبه نمود. روش های مختلفی از جمله عناصر متناهی، تفاضلات متناهی و روش های طیفی روش هایی هستند که برای این منظور در نظر گرفته شده اند. می توان گفت ساده ترین و قدیمی ترین آنها روش تفاضلات متناهی است که در آن با استفاده از بسط تیلور تقریب هایی برای تابع و مشتقات آن در نظر گرفته و در نهایت جواب در نقاط خاصی از دامنه بدست می آید. در مقابل در روش عناصر متناهی، ابتدا دامنه جواب به تعدادی متناهی زیر دامنه تقسیم شده و در هر قسمت از زیر دامنه متناهی، جواب به صورت یک بسط متناهی در نظر گرفته می شود. نتایج بدست آمده نشان می دهد برای مسایل با جواب های به مقدار کافی هموار، روش های طیفی بسیار سریعتر از روش های عناصر متناهی و تفاضل متناهی و با دقت بالاتری به جواب واقعی همگرا می شوند [۳، ۵]

شاید بتوان گفت روش های طیفی یک توسعه بسیار خوب از روش های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل تحت عنوان روش های باقیمانده وزن دار^۱ (MWR) می باشند. در این روش دودسته تابع تحت عنوان توابع کوششی^۲ (توابع بسط یا تقریب) و توابع آزمون^۳ دارای نقش اساسی می باشند. در روش های طیفی جواب تقریبی معادله به صورت یک سری قطع شده بر حسب توابع کوششی در نظر گرفته می شود و توابع آزمون برای اینکه جواب تقریبی

^۱ Method of weighted residuals

^۲ Trial functions

^۳ Test functions

به حد کافی به جواب واقعی نزدیک باشد مورد استفاده قرار می گیرند. برای رسیدن به این هدف، باقیمانده حاصل از قرار دادن جواب تقریبی در معادله دیفرانسیل را باید با استفاده از خواص تعامد توابع آزمون و کوششی به حداقل رساند انتخاب توابع کوششی، سبب تمایز این روش با روش هایی از جمله تفاضلات متناهی و یا عناصر متناهی است. در روش طیفی توابع کوششی بی نهایت بار مشتق پذیر و جامع⁴ هستند اما در روش های عناصر متناهی و تفاضلات متناهی توابع کوششی محلی⁵ هستند. به دلیل اینکه در روش عناصر متناهی در هر زیر دامنه از جواب یک تابع کوششی در نظر گرفته می شود، در مسایل که شکل هندسی پیچیده ای دارند این روش به خوبی قابل پیاده سازی است. وجه تمایز روش های طیفی در انتخاب توابع کوششی است. که توابعی بی نهایت بار مشتق پذیر هستند. اکثرا چند جمله ای ها و به خصوص چند جمله ای های چبیشف و لژاندر به عنوان توابع کوششی به کار گرفته می شوند. شرح کاملی از این روش ها در مراجع [۲۴، ۹، ۷] آمده است.

۲-۳ روش های طیفی

تعریف ۱-۲-۳: (مساله اشتورم – لیوویل)

در حل مسایل مربوط به معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال مجموعه های مهم و خاصی از توابع متعامد، معمولا مورد استفاده قرار می گیرند که می توان آنها را به عنوان توابع ویژه ای از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر در نظر گرفت:

⁴ Global

⁵ Local

$$\begin{cases} (p(x)y'(x))' + [q(x) + \lambda w(x)]y(x) = 0, \\ K_1 y(-1) + K_2 y'(-1) = 0, \\ L_1 y(1) + L_2 y'(1) = 0, \end{cases} \quad -1 < x < 1$$

به طوریکه L_2, L_1, K_2, K_1 ثابت های حقیقی هستند که همزمان صفر نیستند این مساله مقدار ویژه را یک مساله اشتورم - لیوویل می نامند که در اینجا λ یک پارامتر است و توابع $w(x), q(x), p(x)$ توابعی پیوسته و نامنفی روی بازه $[-1, 1]$ میباشند.

تعریف ۳-۲-۲: (چند جمله ای های چیشف نوع اول)

این چند جمله ای ها توابع ویژه مساله اشتورم - لیوویل زیر می باشند:

$$(\sqrt{1-x^2} T_k'(x))' + \frac{k^2}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) = 0$$

این دسته از چند جمله ای ها نسبت به تابع وزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ متعامد می باشند که در

صورت زوج بودن k این چند جمله ای ها نیز زوج و در صورت فرد بودن k این چند جمله

ای ها نیز فرد می باشند. آن ها را می توان به صورت فرم بسته

$$T_k(x) = \cos(k \cos^{-1} x), k = 0, 1, \dots$$

فرمول رودریگز:

$$T_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^\ell \frac{(k-\ell-1)!}{\ell!(k-2\ell)!} (2x)^{k-2\ell}$$

رابطه بازگشتی:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1, T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

$$|T_k(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k$$

$$|T_k'(x)| \leq k^2$$

$$\int_{-1}^1 w(x) T_k^2(x) dx = \begin{cases} \pi, & k = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

هر تابع $u \in L_w^2[-1, 1]$ را می توان بر حسب چند جمله ای های چبیشف نوع اول به صورت

زیر بسط داد:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x)$$

$$\hat{u}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 w(x) u(x) T_k(x) dx, c_k = \begin{cases} 2, & k = 0 \\ 1, & k \geq 1 \end{cases}$$

نقاط گره ای و وزن ها برای قواعد انتگرال گیری گاوسی با $N + 1$ نقطه گره ای به صورت

زیر می باشند:

نقاط گره ای و وزن های قاعده انتگرال گیری چبیشف – گاوس:

$$\begin{cases} x_j = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2N+2}, & j = 0, 1, \dots, N \\ w_j = \frac{\pi}{N+1}, & j = 0, 1, \dots, N \end{cases}$$

نقاط گره ای و وزن های قاعده انتگرال گیری چبیشف – گاوس – رادو:

$$\begin{cases} x_j = \cos \frac{2\pi j}{2N+1}, & j = 0, 1, \dots, N \\ w_0 = \frac{\pi}{N+1}, & w_j = \frac{2\pi}{2N+2}, & j = 1, \dots, N \end{cases}$$

نقاط گره ای و وزن های قاعده انتگرال گیری چبیشف – گاوس – لوباتو:

$$\begin{cases} x_j = \cos \frac{\pi j}{N}, & j = 0, 1, \dots, N \\ w_0 = \frac{\pi}{2N}, & w_j = \frac{\pi}{N}, \quad j = 1, \dots, N \end{cases}$$

قضیه ۳-۲-۱: فرض کنیم x_j $j = 0, 1, \dots, N$ ، نقاط چبیشف - گاوس - لوباتو باشند در آن

صورت:

$$T'_N(x_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (1)$$

$$T'_N(\pm 1) = (\pm 1)^{N+1} N^2 \quad (2)$$

$$T''_N(x_j) = (-1)^{j+1} N^2 \frac{1}{1-x_j}, \quad 1 \leq j \leq N-1 \quad (3)$$

$$T''_N(\pm 1) = \frac{1}{3} (\pm 1)^N N^2 (N^2 - 1) \quad (4)$$

$$T'''_N(x_j) = (-1)^{j+1} 3N^2 \frac{x_j}{(1-x_j^2)^2} \quad (5)$$

اثبات: با فرض $\theta = \cos^{-1}(x)$ خواهیم داشت $T_N(x) = \cos N\theta$ ، بنابراین

$$T'_N(x) = N \sin N\theta \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$$T''_N(x) = N^2 \cos N\theta \frac{1}{\sin^2 \theta} + N \sin N\theta \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

$$T'''_N(x) = N^3 \frac{\sin N\theta}{\sin^3 \theta} - 3N^2 \cos N\theta \frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta} - N \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \cdot \left(\frac{\sin N\theta}{\sin \theta} \right)$$

با استفاده از روابط بالا و اینکه $\theta_j = \frac{i\pi}{N}$ و $\sin N\theta_j = 0$ روابط زیر نتیجه می شوند:

$$T'_N(x_j) = N \sin\left(\frac{N_j \pi}{N}\right) \cdot \frac{1}{\sin \frac{j \pi}{N}} = 0, \quad 1 \leq j \leq N-1$$

$$T'_N(1) = \lim_{x \rightarrow 1} T'_N(x) = \lim_{\theta \rightarrow 0} N \sin N \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta} = N^2$$

در رابطه بالا از این واقعیت استفاده کردیم که: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin N \theta}{\sin \theta} = N$

$$T'_N(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} T'_N(x) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} N \sin N \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta} = N \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{N \cos N \theta}{\cos \theta} = (-1)^{N+1} N^2$$

$$T''_N(x_j) = -N \cos N \frac{j \pi}{N} \cdot \frac{1}{N(1 - \cos^2 \theta)} = (-1)^{j+1} N^2 \frac{1}{1 - x_j^2}, \quad 1 \leq j \leq N-1$$

برای بدست آوردن $T''_N(1)$ از رابطه $T''_N(x)$ وقتی که x به 1 میل می کند، حد می گیریم.

$$\begin{aligned} T''_N(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} T''_N(x) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(-N^2 \cos \theta \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} + N \sin N \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 \theta} (-N \cos N \theta \cdot \sin \theta + N \sin N \theta \cdot \cos \theta) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{3 \sin^3 \theta \cos \theta} ((N^3 - N) \sin N \theta \sin N \theta) \\ &= \frac{N^2(N^2 - 1)}{3} \end{aligned}$$

و نیز برای به دست آوردن $T''_N(-1)$ از رابطه $T''_N(x)$ وقتی x به -1 میل می کند، حد می گیریم

$$\begin{aligned} T''_N(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} T''_N(x) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \left(-N^2 \cos \theta \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} + N \sin N \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{\sin^3 \theta} (-N^2 \cos N \theta \cdot \sin \theta + N \sin N \theta \cdot \cos \theta) \end{aligned}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{3 \sin^3 \theta \cos \theta} ((N^3 - N) \sin N \theta \sin N \theta)$$

$$= (-1)^N \frac{N^2(N^2 - 1)}{3}$$

رابطه مشتق $T_N'''(x)$ با روندی مشابه اثبات می شود.

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega \\ Bu(x) = g, & x \in \partial\Omega, \quad g \in R \end{cases} \quad (1-3)$$

L عملگر دیفرانسیل و B عملگری است که شرایط مرزی مربوط به معادله را در بردارد و بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $\Omega = (-1, 1)$ باشد.

$P_N([-1, 1])$ را فضای همه چندجمله ای های از درجه کمتر یا مساوی N و زیر فضای $P_N^B([-1, 1])$ از فضای $P_N([-1, 1])$ که در آن شرایط مرزی اعمال شده باشد در نظر میگیریم. در روش طیفی جواب دقیق $u(x)$ مساله (۱-۳) با $u_N(x)$ که به صورت مجموع متناهی زیر است، تقریب زده می شود.

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{i=0}^N \hat{u}_i \varphi_i(x) \quad (2-3)$$

توابع کوششی $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$ را اکثراً پایه ای متعامد، مانند چندجمله ای های چبیشف و یا چند جمله ای های لژاندر از فضای چندجمله ای های $P_N([-1, 1])$ در نظر می گیریم و ضرایب \hat{u}_i باید تعیین گردند. با قراردادن $u_N(x)$ در رابطه (۱-۳) باقیمانده زیر حاصل می گردد:

$$R_N(x) = Lu_N(x) - f(x)$$

ایده روش این است که تابع باقیمانده باید در شرایط زیر صدق کند:

$$(R_N, \psi_j)_w = \int_{-1}^1 w(x) R_N(x) \psi_j(x) dx = 0, \quad 0 \leq j \leq N \quad (3-3)$$

که در آن w تابع وزن و ψ_j توابع آزمون هستند. واضح است که رابطه (۳-۳) شامل $N + 1$ معادله با $N + 1$ مجهول است. نحوه انتخاب توابع تست باعث تقسیم شدن روابط طیفی به سه دسته عمده گالرکین، تاو و هم محلی می شود.

۳-۲-۱ روش گالرکین: در این روش توابع آزمون و توابع کوششی مشابه هم می باشند و بایستی توابع کوششی $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$ را چنان انتخاب نمود که هر کدام در شرایط مرزی معادله صدق کند.

$$B\varphi_i = g, \quad 0 \leq i \leq N$$

با توجه به تعریف $P_N^B([-1,1])$ مجموعه $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$ تشکیل یک پایه برای آن می دهد. در روش گالرکین تابع باقیمانده باید در شرایط زیر صدق کند:

$$\int_{-1}^1 w(x) R_N(x) \psi_k(x) dx = 0, \quad 0 \leq k \leq N$$

اما چون در این روش $\psi_i = \varphi_i$ این معادل است با:

$$\int_{-1}^1 w(x) R_N(x) v_i dx = 0, \quad v_N \in P_N^B([-1,1])$$

یعنی اینکه در روش گالرکین تابع باقیمانده R_N بر فضای $P_N^B([-1,1])$ عمود می باشد.

۳-۲-۲ روش هم محلی: در این روش $N + 1$ نقطه گره ای $\{x_i\}_{i=0}^N \in [-1,1]$ را عموماً مطابق با یکی از مجموعه نقاط انتگرال گیری گاوس یا گاوس - رادو یا گاوس - لوباتو انتخاب می کنیم و توابع آزمون انتقال یافته دیراک $\delta(x - x_j)$ و $w(x) = 1$ می باشند.

۳-۲-۳ روش تاو: روش تاو مشابه روش گالرکین می باشد و تفاوت این دو روش در نحوه اعمال شرایط مرزی می باشد.

در روش تاو لزومی ندارد که توابع کوششی $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$ در شرایط مرزی

$$B\varphi_i = g, \quad 0 \leq i \leq N$$

صدق نمایند بلکه دنبال جوابی هستیم به طوریکه

$$(R_N, v_i)_w = \int_{-1}^1 w(x) R_N(x) v_i(x) dx = 0, \quad 0 \leq j \leq N - k$$

که در رابطه بالا $k, v_i \in p_{N-k}$ تعداد شرایط مرزی همراه معادله می باشد. این بدین معنی است

که u_N حتما در شرایط مرزی همراه معادله صدق می کند در صورتی که لزومی ندارد که

تک تک توابع کوششی در شرایط مرزی صدق کنند.

۳-۳ هم محلی (شبه طیفی)

روش هم محلی اولین بار به طور جداگانه توسط سلاتر^۶ و کانتروویچ^۷ در سال ۱۹۳۴ مورد

استفاده قرار گرفت. فرازیر^۸ و جونز^۹ و سکان^{۱۰} این روش را برای حل معادلات دیفرانسیل

معمولی تعمیم دادند آنها توابع کوششی زیادی و توزیع های مختلفی از نقاط گره ای را در نظر

گرفتند. کار لانسوز^{۱۱} در سال ۱۹۳۸ برای اولین بار این مطلب را ثابت نمود که برای دقت در

^۶Slatter

^۷Kantrovic

^۸Frazer

^۹Jones

^{۱۰}Skane

^{۱۱}Lanczos

جواب نحوه انتخاب توابع کوششی و نقاط گره ای اهمیت ویژه ای دارد.

ویلادسن¹² و استوارت¹³ در سال ۱۹۶۷ این روش را برای حل مسایل مقدار مرزی توسعه دادند [۵]. روش هم محلی در زمینه حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی متناوب در سال ۱۹۷۲ توسط کریس¹⁴ و اولیگر¹⁵ انجام پذیرفت همچنین در همین سال ارزاگ¹⁶ این روش را به نام روش شبه طیفی¹⁷ برای حل این دسته از مسایل به کار برد [۵].

ما نیز در این پایان نامه از همین نام برای این روش استفاده می کنیم. روش شبه طیفی چون به آسانی برای مسایل با ضرایب متغیر و حتی مسایل غیر خطی بکار برده می شود روش مناسبی است و پیاده سازی مستقیم روش شبه طیفی در فضای فراوانی¹⁸ (فضای ضرایب بسط) دشوار و تقریباً غیر ممکن است. از این رو روش شبه طیفی معمولاً در فضای فیزیکی¹⁹ (فضای مقادیر نقاط) به صورتی که جواب تقریبی به شکل :

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{i=0}^N u(x_i) L_i(x)$$

در نظر گرفته می شود که $L_i(x)$ ها چند جمله ای لاگرانژ و دارای خاصیت زیر می باشند:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad 0 \leq i, j \leq N$$

¹² willadsen

¹³ Stewart

¹⁴ Kreiss

¹⁵ Oliger

¹⁷ Pseudospectral

¹⁸ Frequency space

¹⁹ Physical space

دو گام اساسی در محاسبه جواب تقریبی $u_N(x)$ برای جواب دقیق $u(x)$ با روش شبه طیفی وجود دارد:

۱) یک نمایش منتهای مناسب برای جواب بر اساس مقادیر تابع در نقاط گره ای در نظر گرفته شود که این جواب ممکن است یا به صورت تابع درونیاب $u(x)$ در نقاط x_j ، $0 \leq j \leq N$ و یا به صورت نمایش سری منتهای زیر باشد:

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k \varphi_k(x)$$

۲) بدست آوردن معادلاتی برای محاسبه $u_N(x_j)$ و یا ضرایب a_k با استفاده از معادله اصلی.

۳-۴ مشتق گیری عددی

معمولا برای تابعی که دارای ضابطه معلوم باشد، مشتق آن را با روش های حساب دیفرانسیل می توانیم به دست آوریم. اما هرگاه ضابطه تابع پیچیده و یا تابع تنها به صورت یک جدول معلوم باشد. برای مشتق گیری بایستی به روش های عددی روی آورد.

فرمول های مشتق گیری عددی در حل معادلات دیفرانسیل مهمترین کاربرد خود را پیدا می کنند. یک استراتژی معمول جایگزین کردن مشتق ها با تقریب های ارایه شده در روابط زیر می باشد:

$$u'(x) = \frac{1}{h} [u(x+h) - u(x)] + O(h)$$

$$u'(x) = \frac{1}{2h} [u(x+h) - u(x-h)] + O(h^2)$$

$$u''(x) = \frac{1}{h^2} [u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)] + O(h^2)$$

البته فرمول های زیاد مشابه با فرمول های بالا با درجه های مختلف دقت وجود دارند. این

فرمول ها که فرمول های موضعی هستند بیشتر در حل عددی معادلات دیفرانسیل با روش تفاضلات منتهای برای تقریب زدن مشتقات تابع u بکار می روند. یک روش کلی مشتق گیری عددی می تواند بر درونیابی چندجمله ای مبتنی باشد. بدین صورت که اگر مقادیر $u(x_0), \dots, u(x_N)$ داده شده باشند و بدانیم که u به رده ای خاص از توابع معلوم (توابعی

که $N+1$ بار مشتق پیوسته دارند) تعلق داشته باشد. در آن صورت چند جمله ای درونیاب یکتا

به صورت زیر وجود دارد [۲۳]:

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^N u(x_i) L_i(x)$$

که در روابط بالا $L_i(x)$ چندجمله ای لاگرانژ به صورت زیر می باشند.

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}, 0 \leq i \leq N$$

سپس مقادیر $u'(x_0), \dots, u'(x_N)$ را با مقادیر $u'_N(x_0), \dots, u'_N(x_N)$ تقریب می زنیم.

قضیه ۳-۴-۲: هرگاه x_0, x_1, \dots, x_N نقاط متمایزی در بازه $[-1, 1]$ و $u(x) \in C^{N+1}[-1, 1]$ باشد

و $u_N(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع $u(x)$ در این نقاط باشد. آنگاه برای هر $x \in [-1, 1]$ نقطه

ای مانند $\eta(x)$ در $(-1, 1)$ وجود دارد با این خاصیت که:

$$u(x) = u_N(x) + E(x)$$

که جمله خطا $E(x)$ در تساوی فوق به صورت زیر می باشد:

$$E(x) = \frac{\prod_{i=0}^N (x - x_i) f^{(N+1)}(\eta(x))}{(N+1)!}$$

اثبات: برای اثبات به [۲۳] رجوع شود.

برای مثال حالت خاص $N = 2$ را در نظر می گیریم. در این حالت چند جمله ای های

لاگرانژ به صورت زیر می باشند:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

و اما چند جمله ای درونیاب کننده تابع $u(x)$ در این نقاط به صورت زیر می باشد:

$$u_2(x) = u(x_0)L_0(x) + u(x_1)L_1(x) + u(x_2)L_2(x)$$

و مشتق $u_2(x)$ در نقاط گره ای به صورت زیر می باشد:

$$u_2'(x_0) = u(x_0)L_0'(x_0) + u(x_1)L_1'(x_0) + u(x_2)L_2'(x_0) \quad (۴-۳)$$

$$u_2'(x_1) = u(x_0)L_0'(x_1) + u(x_1)L_1'(x_1) + u(x_2)L_2'(x_1) \quad (۵-۳)$$

$$u_2'(x_2) = u(x_0)L_0'(x_2) + u(x_1)L_1'(x_2) + u(x_2)L_2'(x_2) \quad (۶-۳)$$

که اگر $x_2 = -1, x_1 = 0, x_0 = 1$ یعنی نقاط چبیشف - گاوس - لوباتو باشند در آن صورت:

$$L_0'(x_0) = \frac{3}{2}, \quad L_0'(x_1) = -2, \quad L_0'(x_2) = \frac{1}{2}$$

$$L_1'(x_0) = \frac{1}{2}, \quad L_1'(x_1) = 0, \quad L_1'(x_2) = \frac{-1}{2}$$

$$L_2'(x_0) = \frac{-1}{2}, \quad L_2'(x_1) = 2, \quad L_2'(x_2) = \frac{-3}{2}$$

که در این حالت (۴-۳) و (۵-۳) و (۶-۳) را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} u_2'(1) \\ u_2'(0) \\ u_2'(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 2 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(1) \\ u_2(0) \\ u_2(-1) \end{bmatrix}$$

۵-۳ ماتریس مشتق

در این قسمت به معرفی ماتریس مشتق برای یک مجموعه نقاط گره ای دلخواه می

پردازیم. فرض کنیم که $N + 1$ نقطه مجزای:

$$x_0, x_1, \dots, x_N$$

داده شده باشند. همچنین $L_j(x)$, $0 \leq j \leq N$ نیز چند جمله ای های لاگرانژ وابسته به این

نقاط، که به شکل زیر می باشند:

$$L_j(x) = \frac{1}{a_j} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N (x - x_i) \quad (۷-۳)$$

که a_j توسط روابط زیر بدست می آیند:

$$a_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N (x_j - x_i), \quad h = 0, 1, \dots, N \quad (۸-۳)$$

ماتریس مشتق وابسته به نقاط $\{x_k\}_{k=0}^N$ ماتریس $(N + 1) \times (N + 1)$ می باشد که درایه های آن

از رابطه زیر بدست می آیند:

$$D_{kj} = L'_j(x_k), \quad 0 \leq j, k \leq N.$$

در واقع ستون j ماتریس مشتق از محاسبه مشتق چند جمله ای لاگرانژ $L_j(x)$ در نقاط x_0, \dots, x_N به دست می آید.

قضیه ۳-۵-۳: اگر x_0, \dots, x_N نقاط گره ای مجزایی باشند در آن صورت درایه های D_{ij}

ماتریس مشتق از روابط زیر بدست می آیند:

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{a_i}{a_j(x_i - x_j)}, & i \neq j \\ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k)^{-1}, & i = j \end{cases}$$

اثبات: از طرفین رابطه (۷-۳) لگاریتم می گیریم و رابطه زیر حاصل می شود:

$$\ln(L_j(x)) = \left[\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N \ln(x - x_i) \right] - \ln(a_j) \quad (۸-۳)$$

با مشتق گرفتن از طرفین رابطه بالا نسبت به x داریم:

$$\frac{L'_j(x)}{L_j(x)} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{x - x_i}$$

و یا:

$$L'_j(x) = L_j(x) \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{x - x_i} \quad (۹-۳)$$

رابطه (۹-۳) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$L'_j(x) = \frac{L_j(x)}{x - x_k} + L_j(x) \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j, k}}^N \frac{1}{x - x_i}$$

اما در صورتی $L_j(x_k) = 0, k \neq j$ است پس به ازای $x = x_k$ دومین جمله از رابطه مجموع

بالا برابر صفر می باشد بنابراین:

$$\begin{aligned} L'_j(x_k) &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{L_j(x)}{x - x_k} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{1}{a_j} \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N (x - x_i)}{x - x_k} \\ &= \frac{1}{a_j} \lim_{x \rightarrow x_k} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k, j}}^N (x - x_i) \\ &= \frac{1}{a_j} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k, j}}^N (x_k - x_i) \\ &= \frac{1}{a_j} \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N (x_k - x_i)}{x_k - x_j} \\ &= \frac{a_k}{a_j (x_k - x_j)} \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تعریف D_{kj}

$$D_{kj} = \frac{a_k}{a_j (x_k - x_j)}, \quad k \neq j$$

همچنین

$$D_{jj} = L'_j(x_j) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{x_j - x_i},$$

فصل سوم: مشتق گیری به روش حاصلضرب ماتریس مشتق در بردار مقادیر ۸۰

و اثبات تمام است.

اما نقاطی که اکثرا به عنوان نقاط گره ای مورد استفاده قرار می گیرند یکی از مجموعه نقاط زیر می باشد:

۱. چبیشف – گاوس

۲. چبیشف – گاوس – رادو

۳. چبیشف – گاوس – لوباتو

۴. لژاندر – گاوس

۵. لژاندر – گاوس – رادو

۶. لژاندر – گاوس – لوباتو

در این بیان نامه از نقاط چبیشف – گاوس – لوباتو به عنوان نقاط گره ای استفاده می کنیم که برای این نقاط گره ای ماتریس مشتق به ماتریس مشتق چبیشف معروف است با استفاده از قضیه زیر فرمولی را برای محاسبه درایه های ماتریس مشتق چبیشف به دست می آوریم.

قضیه ۳-۵-۴: اگر $\{x_i\}_{i=0}^N$ نقاط چبیشف – گاوس – لوباتو باشند در این صورت درایه های

ماتریس مشتق چبیشف از روابط زیر بدست می آیند:

$$D_{kj} = \frac{c_j}{c_k} \frac{(-1)^{j+k}}{(x_k - x_j)}, \quad k \neq j$$

$$D_{kk} = -\frac{x_k}{2(1-x_k^2)}, \quad k \neq 0, N \quad (10-3)$$

$$D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}$$

که c_i ها به صورت $c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, N \\ 1, & 1 \leq i \leq N - 1 \end{cases}$ تعریف شده اند. برای اثبات این قضیه به لم

زیر احتیاج داریم.

لم ۱-۵-۳: اگر $\{x_i\}_{i=0}^N$ نقاط جیبشیف - گاوس - لوباتو باشند در این صورت

$$L_j(x) = \frac{(-1)^{j+1}(1-x^2)T'_N(x)}{c_j N^2(x-x_j)}, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (11-3)$$

که در رابطه بالا، $L_j(x)$ چند جمله ای لاگرانژ نظیر نقطه x_j می باشد.

اثبات: فرض کنیم $\Pi(x) = \prod_{k=0}^N (x-x_k)$ با استفاده از قضیه ۱-۲-۳ می توان نوشت:

$$\Pi(x) = \beta_N (x^2 - 1) T'_N(x) \quad (12-3)$$

که β_N ثابت مثبتی است به طوریکه ضریب جمله ی x^{N+1} در طرف راست تساوی بالا

برابر 1 باشد. با استفاده از روابط قضیه ۱-۲-۳ داریم:

$$\Pi'(x_j) = (-1)^{j+1} c_j N^2 \beta_N, \quad 0 \leq j \leq N \quad (13-3)$$

از طرفی $L_j(x)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$L_j(x) = \frac{\Pi(x)}{\Pi'(x_j)(x-x_j)}$$

با جایگزین کردن عبارت های معادل $\Pi(x), \Pi(x_j)$ از رابطه های (۱۲-۳) و (۱۳-۳) در

رابطه فوق $L_j(x)$ به صورت زیر در می آید:

$$L_j(x) = \frac{(-1)^{j+1}(1-x^2)T'_N(x)}{c_j N^2(x-x_j)}$$

حال به اثبات قضیه ۳-۵-۴ می پردازیم. بنابر لم بالا داریم:

$$L_j(x) = \frac{(-1)^j (x^2 - 1) T_N'(x)}{c_j N^2 (x - x_j)}$$

با مشتق گرفتن از طرفین رابطه فوق نسبت به x داریم:

$$L_j'(x) = \frac{(-1)^j}{c_j N^2 (x - x_j)^2} [(2x T_N'(x) + (x^2 - 1) T_N''(x))(x - x_j) - (x^2 - 1) T_N'(x)]$$

اگر $0 \leq k + j \leq N$ با استفاده از رابطه های فوق رابطه های قضیه ۱-۲-۳ داریم:

$$L_j'(x) = \frac{c_k (-1)^{(k+j)}}{c_j x_k - x_j}$$

اگر $1 \leq k = j \leq N$ با استفاده از تعریف مشتق داریم:

$$\begin{aligned} L_k'(x_k) &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{L_k(x) - 1}{x - x_k} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\frac{(-1)^k}{N^2} (x^2 - 1) T_N'(x) - (x - x_k)}{(x - x_k)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\frac{(-1)^k}{N^2} (2x T_N'(x) + (x^2 - 1) T_N''(x)) - 1}{2(x - x_k)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^k}{N^2} \lim_{x \rightarrow x_k} (2T_N'(x) + 4x T_N''(x) + (x^2 - 1) T_N'''(x)) \end{aligned}$$

با استفاده از روابط قضیه ۱-۲-۳ داریم:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{(-1)^k}{N^2} N^2 \left(\frac{4x_k}{1 - x_k^2} - \frac{3x_k}{1 - x_k^2} \right) \\ &= -\frac{x_k}{2(1 - x_k^2)} \end{aligned}$$

با روندی مشابه می توان نشان داد:

$$L'_0(x_0) = \frac{2N^2 + 1}{6} \qquad L'_N(x_N) = -\frac{2N^2 + 1}{6}$$

با استفاده از این مطلب که $D_{kj} = L'_j(x_k)$ داریم:

$$D_{kj} = \frac{c_j}{c_k} \frac{(-1)^{j+k}}{(x_k - x_j)}, \quad k \neq j$$

$$D_{kk} = -\frac{x_k}{2(1-x_k^2)}, \quad k \neq 0, N$$

$$D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}$$

مثال: ماتریس مشتق چبیشف را برای $N = 1, 2, 3$ محاسبه می کنیم.

$$N = 1, X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$N = 2, X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$N = 3, X = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{19}{6} & -4 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & 4 & -\frac{19}{6} \end{bmatrix}$$

۳-۶ محاسبه مشتق تابع در نقاط گره ای

اگر نقاط گره ای و $\{u(x_i)\}_{i=0}^N$ مقادیر تابع $u(x)$ در این نقاط باشد در آن صورت چند

جمله ای درونیاب کننده $u(x)$ به صورت زیر است:

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N u(x_k) L_k(x)$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه فوق

$$u'_N(x) = \sum_{k=0}^N u(x_k) L'_k(x)$$

و با جایگذاری کردن در رابطه بالا داریم:

$$u'_N(x_j) = \sum_{k=0}^n u(x_k) L'_k(x_j), \quad 0 \leq j \leq N$$

اگر فرض کنیم که $u = [u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_N)]^T$ و $u_N = [u_N(x_0), u_N(x_1), \dots, u_N(x_N)]^T$

و $u' = [u'(x_0), u'(x_1), \dots, u'(x_N)]^T$ و $u'_N = [u'_N(x_0), u'_N(x_1), \dots, u'_N(x_N)]^T$ ماتریس

مشتق چبیشف باشد رابطه بالا را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$u' \approx u'_N = Du$$

در روش شبه طیفی u'_k را با استفاده از $(u'_N)_k$ تقریب می زنیم

$$u'_k \approx (u'_N)_k$$

فصل چہارم

روش هموتوپی طیفی

۱-۴ مقدمه

یکی از مهمترین محدودیت های روش HAM این است که این روش نیازمند آن است که جواب مطلوب باید مطابق با قاعده نمایش جواب و همچنین قاعده همسویی ضرایب باشد که به ما در انتخاب مناسب حدس اولیه، عملگر خطی کمکی و توابع کمکی کمک کند زیرا در غیر این صورت با انتخاب حدس اولیه، عملگر خطی کمکی و توابع کمکی پیچیده ممکن است عمل انتگرال گیری از معادله دگر دیسی مرتبه بالا بسیار سخت و یا حتی غیر ممکن است. اما در بعضی از مسایل استفاده از قاعده ها برای دستیابی به حدس اولیه، عملگر خطی کمکی و توابع کمکی راحت باعث کاهش همگرایی و دقت جواب تقریبی بدست آمده شود. برای غلبه بر این محدودیت ها ما از روش شبه طیفی چبیشف برای حل معادله دگر شکلی مرتبه بالا استفاده می کنیم. عملگر خطی کمکی به صورت جملاتی از ماتریس مشتق چبیشف تعریف می شود. در ادامه به توصیف این روش در دو مساله متفاوت می پردازیم.

۲-۴ معادله داریسی – برینکمن – فورشیمردر یک کانال افقی

مدل داریسی – برینکمن – فورشیمردر برای جریان سیال در یک کانال افقی به صورت زیر است [۸، ۱۸].

$$\frac{d^2 u^*}{dy^{*2}} = -\frac{G}{\mu_{eff}} + \frac{u^*}{Mk} + \frac{\rho C_f}{\mu_{eff} \sqrt{k}} u^{*2} \quad (1-4)$$

که C_f ضریب کشش، G فشار گرادیان، k قابلیت نفوذپذیری، ρ چگالی سیال، μ سرعت سیال، μ_{eff} سرعت سیال در محیط متخلخل و $M (= \mu_{eff} / \mu)$ سرعت نسبی است. با استفاده از تغییر متغیر های زیر ابعاد معادله (۱-۴) را کاهش می دهیم:

$$y^* = yh, \quad u^* = \frac{Gh^2u}{\mu}$$

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{d^2u}{dy^2} - s^2u - Fsu^2 + \frac{1}{M} = 0 \quad (۲-۴)$$

با شرایط مرزی

$$u(-1) = 0, \quad u(1) = 0 \quad (۳-۴)$$

که عدد دارسی D_a ، عدد فورشایمر F و پارامتر شکل محیط متخلخل به صورت زیر تعریف

می شوند:

$$D_a = \frac{k}{h^2}, \quad F = \frac{\rho c_f Gh^3}{\mu_{eff} \mu}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{MD_a}} \quad (۴-۴)$$

مدل دارسی – برینکمن – فورشایمر پیش از این توسط روش عددی تفاضلات متناهی مرتبه

دوم حل شده است [۲۸]

۳-۴ روش تحلیلی هموتویی برای حل مدل دارسی – برینکمن –

فورشایمر

برای حل معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی (۲-۴) ابتدا جواب اولیه زیر را در نظر

میگیریم:

$$u_0(y) = \frac{1-y^2}{2} \quad (۵-۴)$$

که در شرایط مرزی (۳-۴) صدق می کند. با استفاده از روش بیشترین مرتبه مشتق [۲۵]

عملگر خطی کمکی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$L[\varphi(y; q)] = \frac{\partial^2 \varphi(y; q)}{\partial y^2} \quad (۶-۴)$$

به طوریکه برای عملگر L داریم:

$$L[c_1 + c_2 y] = 0 \quad (۷-۴)$$

که در آن ثابت های دلخواه انتگرال گیری می باشند. با توجه به معادله (۲-۴) عملگر غیرخطی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N[\varphi(y; q)] = \frac{\partial^2 \varphi(y; q)}{\partial y^2} - s^2 \varphi(y; q) - Fs[\varphi(y; q)]^2 + \frac{1}{M} \quad (۸-۴)$$

که در آن $q \in [0, 1]$ پارامتر جداسازی و $\varphi(y; q)$ تابع مجهول می باشد. با توجه به تعاریف بالا معادله دگر دیسی مرتبه صفر را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$(1-q)L[\varphi(y; q) - u_0(y)] = qhN[\varphi(y; q)] \quad (۹-۴)$$

که شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\varphi(-1; q) = 0, \quad \varphi(1; q) = 0 \quad (۱۰-۴)$$

و h پارامتر کمی غیر صفر است. وقتی $q = 0$ به سادگی می توان نشان داد که:

$$\varphi(y; 0) = u_0(y) \quad (۱۱-۴)$$

وقتی $q = 1$ باشد معادله دگر دیسی مرتبه صفر (۹-۴) معادل است با معادله (۲-۴) به طوریکه:

$$\varphi(y; 1) = u(y) \quad (۱۲-۴)$$

وقتی پارامتر q از ۰ تا ۱ افزایش یابد تابع $\varphi(y; q)$ از $u_0(y)$ به $u(y)$ تغییر می یابد. بسط تیلور $\varphi(y; q)$ نسبت به پارامتر q به صورت زیر است:

$$\varphi(y; q) = u_0(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(y) q^m \quad (13-4)$$

که در آن

$$u_m(y) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^2 \varphi(y; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (14-4)$$

سری (۱۳-۴) زمانی همگراست که پارامتر کمکی h به درستی انتخاب شود وقتی $q=1$

یعنی:

$$u(y) = u_0(y) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(y) \quad (15-4)$$

در رابطه (۱۵-۴)، $u_m(y)$ توابعی مجهول هستند که باید از معادله دگر دیسی مرتبه بالا که در

ادامه آمده است محاسبه شوند.

$$L[u_m(y) - \chi_m u_{m-1}] = h R_m(y) \quad (16-4)$$

با شرایط مرزی

$$u_m(-1) = 0, \quad u_m(1) = 0 \quad (17-4)$$

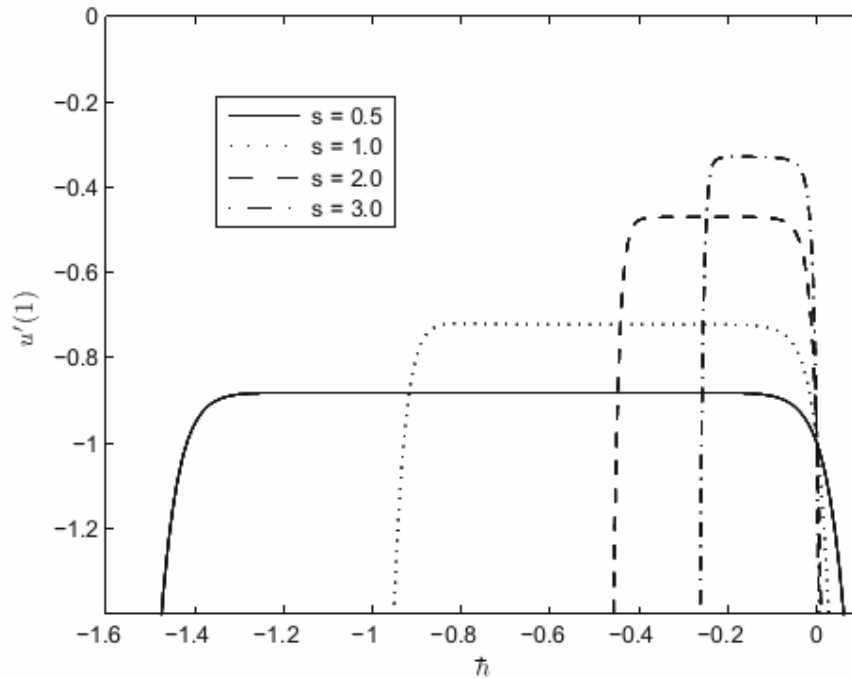
که در آن:

$$R_m(y) = u_{m-1}'' - s^2 u_{m-1} + \frac{1}{M} (1 - \chi_m) - Fs \sum_{n=0}^{m-1} u_n u_{m-1-n} \quad (18-4)$$

وتابع χ_m که به صورت زیر تعریف می شود

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (19-4)$$

معادله دگر دیسی مرتبه بالا که به شکل مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل معمولی است به سادگی توسط نرم افزارهایی نظیر MATLAB, MAPLE قابل حل است. در ادامه با استفاده از نرم افزار MAPLE، 20 تکرار روش هموتوپی را بدست آورده ایم و نمودار منحنی $h - u'(1)$ مربوط به این تکرارها را برای $u'(1)$ رسم کرده ایم.



شکل (۱-۴): نمودار منحنی $h - u'(1)$ برای 20 تکرار روش HAM به ازای s های متفاوت همانطور که در شکل (۱-۴) می بینیم، 20 تکرار روش هموتوپی برای $F = M = 1$ و همچنین مقادیر متفاوت s رسم شده است. مشاهده می کنیم با افزایش مقادیر s طول خطوط افقی نمودار کاهش پیدا می کند که به معنای کاهش دامنه همگرایی جواب می باشد.

۴-۴ روش هموتویی طیفی برای حل مدل داریسی-برینکمن-

فورشیمر

در این قسمت به توصیف روش هموتویی طیفی برای حل معادله (۲-۴) می پردازیم. ایده اساسی روش هموتویی طیفی بهبود دقت و کارایی روش استاندارد هموتویی بر اساس حذف محدودیت های این روش در بیان قاعده نمایش جواب و همچنین قاعده همسویی ضرایب برای محاسبه حدس اولیه، عملگر خطی کمکی و توابع کمکی می باشد. در ابتدا برای بیان روش حدس اولیه ای را به صورت زیر انتخاب می کنیم به طوریکه در شرایط مرزی صدق کند.

$$u_0(y) = \frac{1}{s^2 M} \left(1 - \frac{\cosh(sy)}{\cosh(s)}\right) \quad (۲۰-۴)$$

سپس در مرحله بعد عملگر خطی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L[\varphi(y; q)] = \frac{\partial^2 \varphi(y; q)}{\partial y^2} - s^2 \varphi(y; q) \quad (۲۱-۴)$$

که از حذف قسمت غیر خطی معادله (۲-۴) بدست آمد. مابقی مراحل همانند روش استاندارد HAM است که روابط (۸-۴) تا (۱۹-۴) بیان شد. ما از روش شبه طیفی چبیشف [۲۴] برای انتگرال گیری از معادله دگر دیسی مرتبه بالا استفاده می کنیم. این فرایند ابتدا از طریق تقسیم محور y با استفاده از نقاط چبیشف - گاوس - لوباتو صورت می گیرد به طوریکه:

$$y_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (۲۲-۴)$$

تابع مجهول $u(y)$ به وسیله سری متناهی چند جمله ای چبیشف به صورت زیر تقریب زده میشود:

$$u(y) = u(y_j) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k T_k(y_j), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (۲۳-۴)$$

که در رابطه (۲۳-۴)، T_k به معنی k امین چند جمله ای چبیشف و \tilde{u}_k ضرایب چبیشف می باشند. مشتق توابع $u_m(y_j)$ در نقاط گره ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{d^2 u_m}{dy^2}(y_j) = \sum_{k=0}^N D_{jk}^2 u_m(y_j) \quad (۲۴-۴)$$

با استفاده از معادلات (۲۳-۴) و (۲۴-۴)، معادله دگر دیسی (۱۶-۴) به صورت معادلات زیر نوشته می شود:

$$\sum_{j=0}^N D_{jk} [u_m(y_j) - \chi_m u_{m-1}(y_j)] - s^2 [u_m(y_j) - \chi_m u_{m-1}(y_j)] = \quad (۲۵-۴)$$

$$h \left[\sum_{j=0}^N D_{jk}^2 u_{m-1}(y_j) - s^2 u_{m-1}(y_j) + \frac{1}{M} (1 - \chi_M) - Fs \sum_{n=0}^{m-1} u_n(y_j) u_{m-1-n}(y_j) \right]$$

و شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$u_m(y_0) = 0, \quad u_m(y_N) = 0 \quad (۲۶-۴)$$

در معادلات بالا D ماتریس مشتق چبیشف است و $N+1$ نقاط گره ای هستند [۲۴]. عناصر ماتریس D به صورت زیر تعریف می شوند:

$$D_{kj} = -\frac{1}{2} \frac{c_k}{c_j} \frac{(-1)^{k+j}}{\sin \frac{\pi}{2N} (j+k) \sin \frac{\pi}{2N} (j-k)}, \quad j \neq k \quad (۲۷-۴)$$

$$D_{kj} = -\frac{1}{2} \frac{x_k}{\sin^2 \left(\frac{\pi k}{N} \right)}, \quad k \neq 0, N$$

$$D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}$$

معادله (۲۵-۴)، به شکل ماتریسی زیر نوشته می شود:

$$(D^2 - s^2 I)[\tilde{u}_m - (\chi_m + h)\tilde{u}_{m-1}] = \frac{h}{M}(1 - \chi_m) - Fsh \sum_{n=0}^{m-1} \tilde{u}_n \tilde{u}_{m-1-n} \quad (28-4)$$

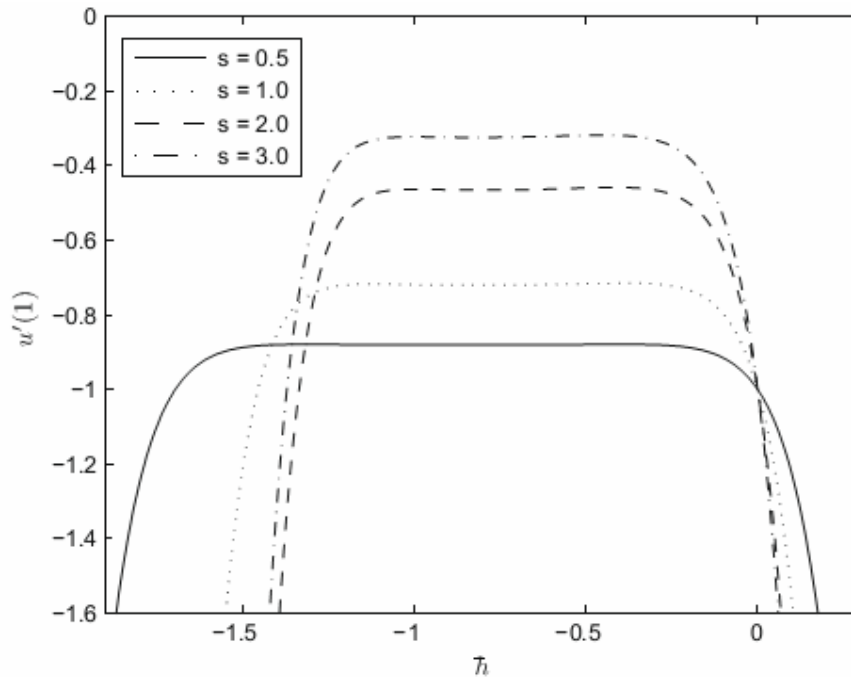
با ساده سازی معادله (۲۸-۴) را می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$\tilde{u}_m = (\chi_m + h)\tilde{u}_{m-1} + (D^2 - s^2 I)^{-1} \left[\frac{h}{M}(1 - \chi_m) - Fsh \sum_{n=0}^{m-1} \tilde{u}_n \tilde{u}_{m-1-n} \right] \quad (29-4)$$

که در رابطه (۲۹-۴)، I ماتریس همانی از مرتبه $N + 1$ و بردار \tilde{u}_m به صورت زیر تعریف شده است:

$$\tilde{u}_m = [u_m(y_0), u_m(y_1), \dots, u_m(y_N)] \quad (30-4)$$

حال با توجه به حدس اولیه $u_0(y)$ می توانیم از رابطه (۲۹-۴) مقادیر $u_m(y)$ را برای $m \geq 1$ با استفاده از نرم افزار های MAPLE, MATLAB بدست آوریم. حال در ادامه نمودار منحنی - h را برای روش SHAM با استفاده از نرم افزار MATLAB رسم می کنیم. مشاهده می کنیم با افزایش پارامتر s ، دامنه خطوط افقی بر روی نمودار افزایش یافته و این به معنی افزایش همگرایی جواب به ازای مقادیر مختلف s است. نکته دیگر این است که اگر برای روش های SHAM و HAM برای محاسبه معادله دگرشکلی مرتبه بالا، عملگر کمکی و حدس اولیه یکسانی بکار برده شود نتایج این دو روش یکسان خواهند بود و این به این دلیل است که در این مساله هر دو این روش ها از یک معادله با شرایط یکسان انتگرال گیری می کنند.



شکل (۲-۴): منحنی h - برای 4 تکرار روش هموتویی طیفی

همچنین در جدول (۱-۴) مشاهده می‌کنیم مقایسه‌ای بین روش HAM و SHAM برای مقادیر مختلف s و مقدار مشخص $F=1, M=1$ برای $u'(1)$ صورت گرفته است مشاهده می‌کنیم با افزایش مقادیر s همگرایی روش SHAM به جواب عددی که با روش رانگ- کوتای مرتبه 4 در ستون آخر بدست آمده سریعتر است، همچنین مقادیر بهینه h نتایج دقیقی را برای تنها دو گام از روش SHAM در اختیار ما قرار می‌دهد. همچنین برای مقادیر $s < 1$ ، همگرایی روش‌های HAM و SHAM به جواب عددی سریعتر است. برای مقادیر $s > 1$ همگرایی روش SHAM فقط در چهار تکرار اتفاق می‌افتد. اما سرعت همگرایی برای HAM برای $s > 1$ ، کاهش می‌یابد.

$u'(1)$ for $F = 1, M = 1$							
s	h	2nd order	4th order	8th order	10th order	15th order	Exact value
0.2	-0.9	-0.96313	-0.96307	-0.96307	-0.96307	-0.96307	-0.96307
	-0.8	-0.96377	-0.96309	-0.96307	-0.96307	-0.96307	-0.96307
0.3	-0.9	-0.93838	-0.93830	-0.93830	-0.93830	-0.93830	-0.96380
	-0.8	-0.93903	-0.93832	-0.93830	-0.93830	-0.93830	-0.93830
0.4	-0.9	-0.91068	-0.91054	-0.91054	-0.91054	-0.91054	-0.91055
	-0.8	-0.91131	-0.91056	-0.91055	-0.91055	-0.91055	-0.91055
0.5	-0.9	-0.88086	-0.88063	-0.88063	-0.88063	-0.88063	-0.88064
	-0.8	-0.88199	-0.88067	-0.88064	-0.88064	-0.88064	-0.88064
1.0	-0.9	-0.72161	-0.72121	-0.72120	-0.72120	-0.72120	-0.72124
	-0.6	-0.73219	-0.72214	-0.72125	-0.72124	-0.72124	-0.72124
1.5	-0.9	-0.57922	-0.57910	-0.57910	-0.57910	-0.57910	-0.57910
	-0.4	-0.60590	-0.58272	-0.57926	-0.57914	-0.57911	-0.57911
2.0	-0.9	-0.46916	-0.46913	-0.46913	-0.46913	-0.46913	-0.46913
	-0.25	-0.52751	-0.48270	-0.47071	-0.46980	-0.46923	-0.46923
2.5	-0.9	-0.38792	-0.38790	-0.38790	-0.38790	-0.38790	-0.38790
	-0.25	-0.44763	-0.40186	-0.38974	-0.38870	-0.38798	-0.38798
3.0	-0.9	-0.32804	-0.32803	-0.32803	-0.32803	-0.32803	-0.32803
	-0.20	-0.40305	-0.34936	-0.33198	-0.32999	-0.32828	-0.32828
3.5	-0.9	-0.28312	-0.28310	-0.28310	-0.28310	-0.28310	-0.28310
	-0.15	-0.35965	-0.30610	-0.28906	-0.28665	-0.28416	-0.28416
4.0	-0.9	-0.24858	-0.24857	-0.24857	-0.24857	-0.24857	-0.24857
	-0.125	-0.33505	-0.27786	-0.25738	-0.25409	-0.25043	-0.25043

جدول (۴-۱): مقایسه روش SHAM (سطرهای تیره) و HAM (روشن) برای جواب تقریبی $u'(1)$ و جواب دقیق در ستون آخر.

در جدول شماره (۴-۲)، مقایسه ای برای روش SHAM, HAM برای مقدار ثابت M, s و مقادیر متفاوت F برای تقریب هایی از مرتبه های 2, 4, 8, 10, 15, 20 انجام داده شده است. همچنین نتایج بدست آمده با مقدار دقیق جواب مقایسه شده است. همچنین مقدار بهینه $h = -0.85$ برای روش SHAM بدست آمده است و این روش پس از 4 تکرار همگراست.

$u'(1)$ for $s = 1, M = 1$								
F	h	2nd	4th	8th	10th	15th	20th	Exact value
0.2	-0.85	-0.75262	-0.75249	-0.75248	-0.75248	-0.75248	-0.75248	-0.75248
	-0.75	-0.76206	-0.75318	-0.75249	-0.75249	-0.75248	-0.75248	-0.75248
0.4	-0.85	-0.74412	-0.74395	-0.74395	-0.74395	-0.74395	-0.74395	-0.74395
	-0.75	-0.75383	-0.74486	-0.74397	-0.74396	-0.74396	-0.74396	-0.74396
0.6	-0.85	-0.73610	-0.73594	-0.73593	-0.73593	-0.73593	-0.73593	-0.73593
	-0.75	-0.75264	-0.73848	-0.73605	-0.73597	-0.73594	-0.73594	-0.73594
0.8	-0.85	-0.72855	-0.72838	-0.72837	-0.72837	-0.72837	-0.72837	-0.72837
	-0.60	-0.73667	-0.7289	-0.72839	-0.72838	-0.72838	-0.72838	-0.72838
1.0	-0.85	-0.72148	-0.72122	-0.72122	-0.72122	-0.72122	-0.72122	-0.72122
	-0.60	-0.73219	-0.72214	-0.72125	-0.72124	-0.72124	-0.72124	-0.72124

جدول (۴-۲): مقایسه روش SHAM (سطرهای تیره) و HAM (سطرهای روشن) و مقادیر مختلف F

۴-۵ جریان الکتروهیدرودینامیک در یک مجرای استوانه ای

دوار

جریان الکتروهیدرودینامیک یک سیال درون یک مجرای استوانه ای دوار به وسیله یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم شبیه سازی می شود. در [۱۷] مک کی^۱ مساله مقدار مرزی (BVP) زیر را پیشنهاد می کند:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + H^2 \left(1 - \frac{w}{1 - \alpha w}\right) = 0, \quad 0 < r < 1 \quad (۳۱-۴)$$

به طوریکه شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$w'(0) = 0, \quad w(1) = 0 \quad (۳۲-۴)$$

که در معادله (۳۱-۴)، $w(r)$ سرعت سیال به طور کامل توسعه یافته به عنوان یک تابع فاصله شعاعی r از مرکز مجرای استوانه ای است. H عدد الکتریکی هارتمن است و پارامتر بدون بعد α ، پارامتر مربوط به فشار گرادیان می باشد. پاولت^۲ [۲۱] وجود و یکتایی جواب برای معادله (۳۱-۴) را برای مقادیر مختلف H, α ثابت کرد.

^۱ MacKee

^۲ Paultet

۴-۶ روش هموتویی طیفی برای محاسبه جریان

الکتروهدیرودینامیک در یک مجرای استوانه ای دوار

در این قسمت با استفاده از روش طیفی چبیشف معادلات (۴-۳۱) و (۴-۳۲) را حل می کنیم. ابتدا توجه کنید که قبل از بکار بردن این روش، از نداشت زیر برای انتقال بازه $[a, b]$ به بازه $[-1, 1]$ استفاده می کنیم:

$$r = \frac{(b-a)(\tau+1)}{2} \quad (۴-۳۳)$$

امتیاز این تغییر آن است که روشی را که بدست می آوریم کارایی بیشتری دارد که وابسته به قاعده نمایش جواب وقاعده همسویی ضرایب نیست برخلاف روش استاندارد HAM، به علاوه دامنه مقادیر قابل قبول برای پارامتر کنترل همگرایی h وسیع تر می شود. لذا با انتقال دامنه از بازه $[0, 1]$ به بازه $[-1, 1]$ شروع می کنیم با استفاده از نگاشت:

$$r = \frac{\tau+1}{2}, \quad \tau \in [-1, 1] \quad (۴-۳۴)$$

همچنین قرار می دهیم:

$$U(\tau) = w(r) \quad (۴-۳۵)$$

معادله (۴-۳۵) را در معادله (۴-۳۱) و (۴-۳۲) قرار می دهیم لذا معادله زیر حاصل می شود:

$$a_1(r)U''(\tau) + a_2(r)U'(\tau) + a_3(r)U(\tau) - 4raU(\tau)U'(\tau) - 2aU(\tau)U'(\tau) = \varphi(r) \quad (۴-۳۶)$$

به طوریکه برای مقادیر مرزی داریم:

$$U'(-1) = U(1) = 0 \quad (۴-۳۷)$$

که در رابطه (۳۷-۴) عمل مشتق گیری نسبت به متغیر τ انجام می شود و همچنین داریم:

$$a_1(r) = 4r, \quad a_2(r) = 2, \quad a_3(r) = -H^2 r(1 + \alpha), \quad \varphi(r) = -H^2 r \quad (38-4)$$

برای بدست آوردن تقریب اولیه از قسمت خطی و ناهمگن (۳۶-۴) استفاده می کنیم لذا خواهیم

داشت:

$$a_1(r)U''(\tau) + a_2(r)U'(\tau) + a_3(r)U(\tau) = \varphi(r) \quad (39-4)$$

به طوریکه برای شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$U'(-1) = U(1) = 0 \quad (40-4)$$

تابع مجهول $U_0(\tau)$ به وسیله سری متناهی چند جمله ای های چبیشف به شکل زیر تخمین زده

می شود:

$$U_0(\tau) \approx U_0^N(\tau_j) = \sum_{k=0}^N \hat{U}_k T_k(\tau_j), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (41-4)$$

که در رابطه (۴۱-۴)، T_k ، k امین چندجمله ای چبیشف و \hat{U}_k ضرایب چبیشف

و نقاط چبیشف - گاوس - لوباتو می باشند که به شکل زیر تولید می شوند:

$$\tau_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (42-4)$$

و همچنین داریم:

$$T_N(\tau) = \cos(N \cos^{-1} \tau) \quad (43-4)$$

از ماتریس مشتق چبیشف برای تقریب تابع مجهول $w_m(r)$ در نقاط گره ای به صورت زیر

استفاده می شود:

$$\frac{d^{\ell} w_m}{dt} = \sum_{k=0}^N D_{jk}^{\ell} w_m(\tau_k), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (44-4)$$

که ℓ مرتبه مشتق است و D ماتریس مشتق چیشف است. باقرار دادن (۴۱-۴)-(۴۴-۴) در معادلات (۳۵-۴) و (۴۰-۴) خواهیم داشت:

$$AU_0 = \varphi \quad (۴۵-۴)$$

به طوریکه شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$U_0(\tau_0) = 0, \quad \sum_{k=0}^N D_{Nk} U_0(\tau_k) = 0 \quad (۴۶-۴)$$

به طوریکه خواهیم داشت:

$$A = a_1 D^2 + a_2 D + a_3$$

$$U_0 = [U_0(\tau_0), U_0(\tau_1), \dots, U_0(\tau_N)]^T, \quad (۴۷-۴)$$

$$\varphi = [\varphi(r_0), \varphi(r_1), \dots, \varphi(r_N)]^T,$$

$$a_i = \text{diag}([a_i(r_0), a_i(r_1), \dots, a_i(r_N)]), \quad r = 1, 2, 3$$

در رابطه (۴۸-۴)، علامت T به معنای ترانهاد و diag به معنای ماتریس قطری است. برای برقراری شرایط مرزی (۴۶-۴) سطر اول و آخر، ستون اول و آخر ماتریس A و همچنین سطر اول و آخر U_0, φ را حذف می کنیم و در نهایت شرایط مرزی (۴۶-۴) به ماتریس های تغییر یافته انتقال داده می شود. بردار $[U_0(\tau_0), U_0(\tau_1), \dots, U_0(\tau_N)]$ از طریق حل دستگاه خطی زیر محاسبه می شود:

$$U_0 = A^{-1} \varphi \quad (۴۸-۴)$$

حال عملگر خطی زیر را تعریف می کنیم:

$$L[\widehat{U}(\tau; q)] = a_1 \widehat{U}''(\tau) + a_2 \widehat{U}'(\tau) + a_3 \widehat{U}(\tau) \quad (۴۹-۴)$$

حال با توجه به معادله دگر دیسی مرتبه m و شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$L[U_m(\tau) - \chi_m U_{m-1}(\tau)] = h \bar{R}_m(U_{m-1}) \quad (50-4)$$

$$U'_m(-1) = U_m(1) = 0$$

که برای $\bar{R}_m(U_{m-1})$ داریم:

$$\bar{R}_m(U_{m-1}) = \alpha_1 U''_{m-1} + \alpha_2 U'_{m-1} + \alpha_3 U_{m-1} - 4r\alpha \sum_{k=0}^{m-1} U_k U''_{m-1-k} \quad (51-4)$$

$$-\frac{\alpha}{r} \sum_{k=0}^{m-1} U_k U'_{m-1-k} - (1 - \chi_m) \varphi(r)$$

با استفاده از روش شبه طیفی چیشف و معادلات (50-4) و (51-4) خواهیم داشت:

$$A[U_m - \chi_m U_{m-1}] = h[AU_{m-1} + P_{m-1} - (1 - \chi_{m-1})\varphi] \quad (52-4)$$

و شرایط مرزی نیز به صورت زیر است:

$$U_m(\tau_0) = 0, \quad \sum_{k=0}^N D_{Nk} U_m(\tau_k) = 0 \quad (53-4)$$

در رابطه (52-4) روابط زیر را برای P_{m-1}, U_m داریم:

$$U_m = [U_m(\tau_0), U_m(\tau_1), \dots, U_m(\tau_N)] \quad (54-4)$$

$$P_{m-1} = -4r\alpha \sum_{n=0}^{m-1} U_k D^2 U_{m-1-k} - \frac{\alpha}{r} \sum_{k=0}^{m-1} U_k D U_{m-1-k} \quad (55-4)$$

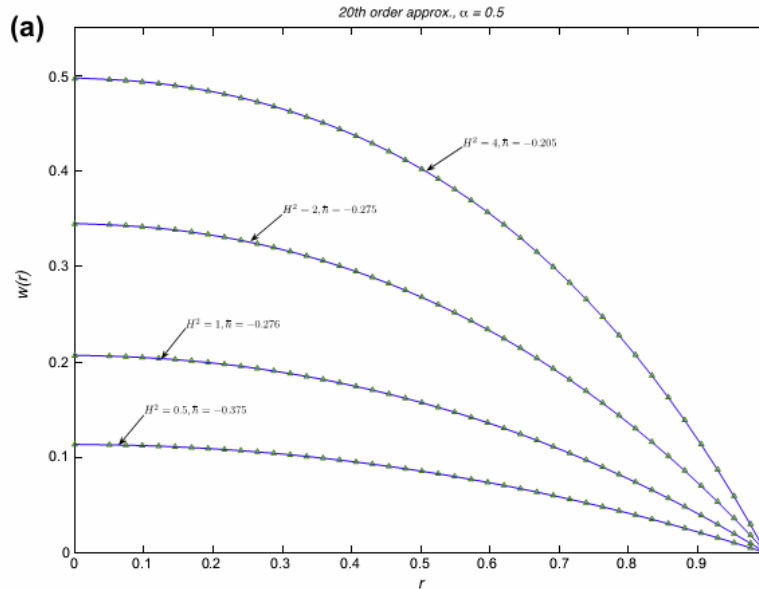
برای اعمال شرایط مرزی (53-4)، سطرهای اول و آخر P_{m-1}, φ و همچنین سطرهای اول و

آخر ستون های اول و آخر ماتریس A را در رابطه (52-4) حذف می کنیم. سپس فرایند تکراری

زیر را برای $m \geq 1$ خواهیم داشت:

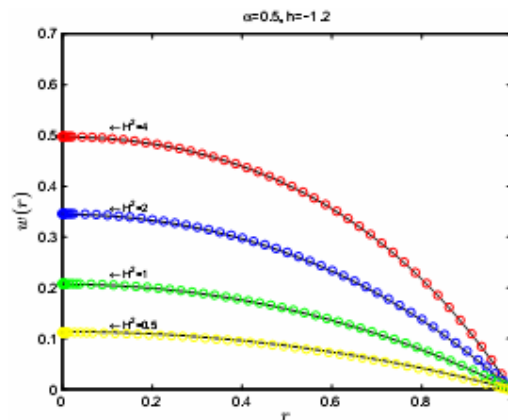
$$U_m = (\chi_m + h) A^{-1} \tilde{A} U_{m-1} + h A^{-1} [P_{m-1} - (1 - \chi_m) \varphi] \quad (56-4)$$

حال با استفاده از نرم افزار MATLAB نتایج عددی را برای دو روش HAM و SHAM بایکدیگر و با روش رانگ-کوتا مقایسه می کنیم.



شکل (۳-۴): تکرار روش HAM برای محاسبه $w(r)$ و مقایسه با روش رانگ-کوتا به

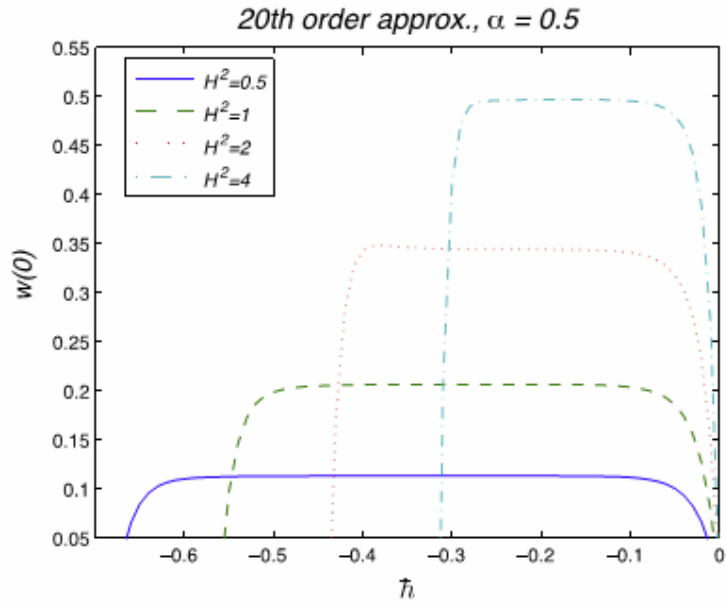
ازای مقادیر مختلف H^2



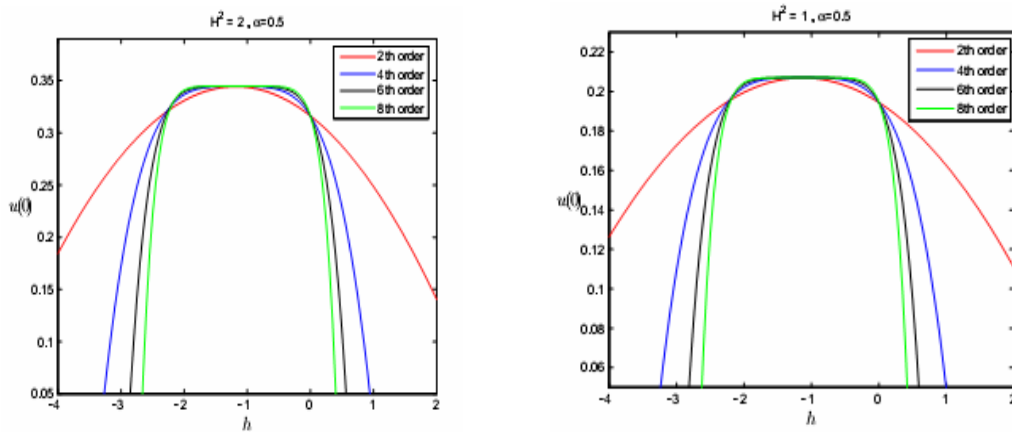
شکل (۴-۴): تکرار روش SHAM برای محاسبه $w(r)$ و مقایسه با روش رانگ-کوتا به

ازای مقادیر مختلف H^2

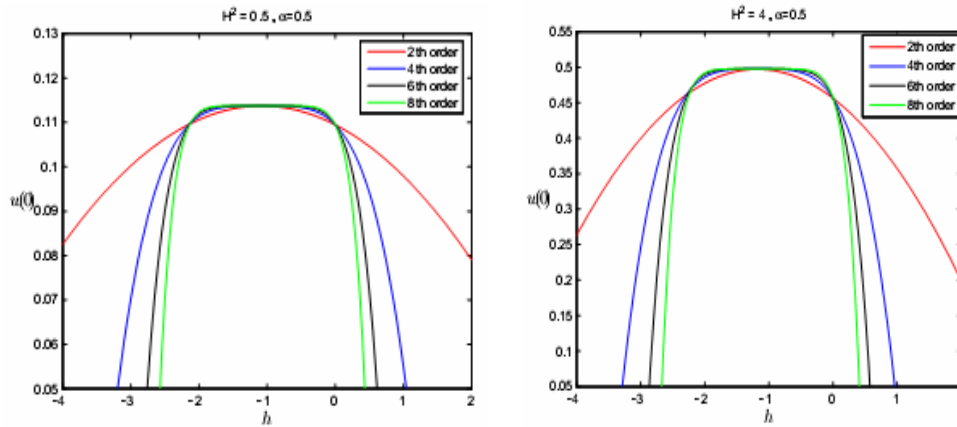
در نمودارهای زیر منحنی w - برای روش HAM و SHAM برای $\alpha = 0.5$ و مقادیر مختلف H^2 .



شکل (۴-۵): منحنی w - برای 20 تکرار روش HAM به ازای مقادیر مختلف H^2 و $\alpha = 0.5$



شکل (۴-۶): منحنی w - برای تکرارهای از مرتبه 8, 6, 4, 2 روش SHAM به ازای مقادیر مختلف H^2 , $\alpha = 0.5$

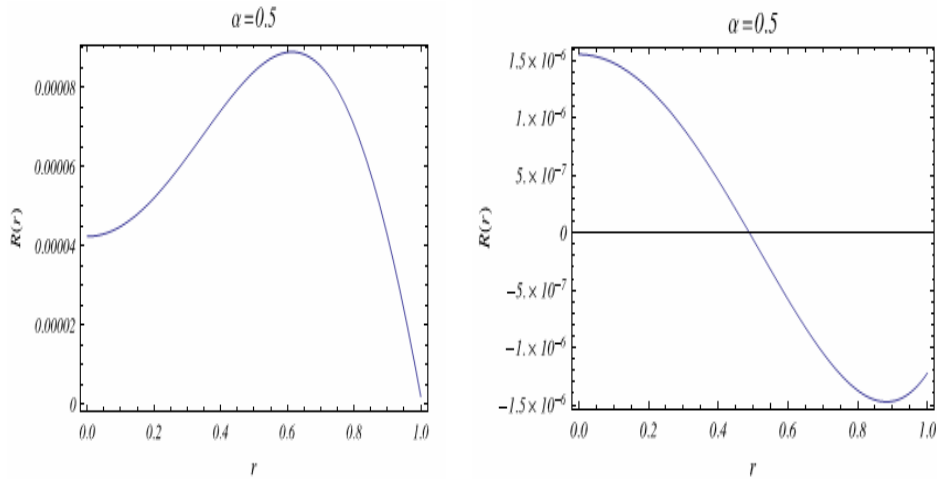


شکل (۴-۷): منحنی h - برای تکرارهای از مرتبه 2, 4, 6, 8 روش SHAM به ازای مقادیر

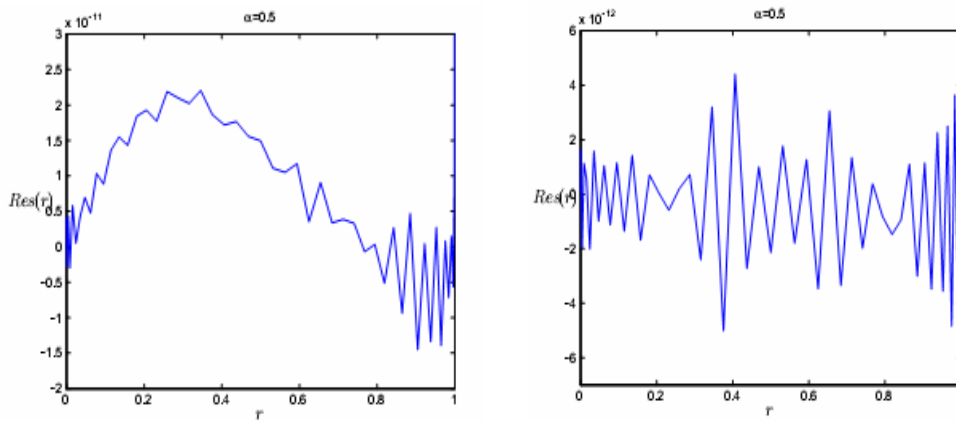
مختلف $\alpha = 0.5, H^2$

مشاهده می کنیم که روش SHAM بسیار کاراتر از روش HAM است. در ادامه به بررسی خطای باقیمانده در این دوروش می پردازیم.

در این قسمت نمودار خطای باقیمانده را برای 10 تکرار از روش SHAM برای مقادیر $\alpha = 0.5, H^2 = 0.5, 1$ ، همانطور که مشاهده خواهیم کرد مقادیر بدست آمده بسیار کمتر از خطای حاصل شده در روش استاندارد HAM است و این به معنای دقت بالای روش SHAM نسبت به روش HAM می باشد.



شکل (۸-۴): نمودار خطای باقیمانده برای 20 تکرار روش HAM برای $\alpha = 0.5, H^2 = 0.5, 1$



شکل (۹-۴): نمودار خطای باقیمانده برای 10 تکرار روش SHAM برای

$$\alpha = 0.5, H^2 = 0.5, 1$$

۷-۴ نتیجه گیری

۱. روش هموتویی طیفی بر خلاف روش استاندارد هموتویی نیاز به استفاده از قاعده نمایش

جواب و قاعده همسوئی ضرایب ندارد.

۲. روش هموتویی طیفی انعطاف پذیری بیشتری نسبت به روش هموتویی استاندارد در انتخاب عملگرهای خطی دارد، همچنین این روش بر خلاف روش هموتویی نیاز به استفاده از روش بیشترین مرتبه مشتق برای انتخاب عملگر خطی ندارد
۳. دامنه مقادیر مورد قبول برای پارامتر h در روش SHAM به مراتب وسیع تر از روش HAM است.
۴. همگرایی روش SHAM نسبت به روش HAM به مراتب سریعتر و در تعداد گام تکرار کمتری اتفاق می افتد.
۵. خطای باقیمانده در روش SHAM بسیار کمتر از روش HAM است و این به معنای دقت بالای روش SHAM نسبت به HAM است.

- [1] Abbasbandy S, The application of the homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Phys Lett A*; 360 (2006) 109-113.
- [2] Alomari A.K, Nooani M.S.M and Nazar R, On the homotopy analysis method for exact solution of Helmholtz equation. *Chaos, Solitons and Fractals* 41(2009)1873-1879.
- [3] Boyd J.P, Chebyshev and Fourier spectral method lecture note in *Engineering*, 49, Springer-Verlag, Berlin (1980).
- [4] Boren Richard.L, Douglas J, *Numerical Analysis*, 1986
- [5] Canuto C, Quarteroni A, Hussaini M.Y, Zang T.A, *Spectral method in fluid mechanics*, Springer-Verlag New York (1988).
- [6] Chuiko S.M, Weakly nonlinear boundary value problem in a special critical case, *Ukrainian Mathematical Journal*; 61(2009)657-673.
- [7] Hesthaven J.S, Gottlieb S, Gottlieb D., *Spectral method for time dependent problems*, Cambridge University Press (2004).
- [8] Hooan K, A perturbation solution forced convection in a porous saturated duct. *J. Comput. Appl. Math.* 211(2008)57-66.
- [9] Kopriva D.A., *Implementing spectral method for partial differential equations*. Springer (2008).
- [10] Liao S.J. The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University 1992.
- [11] Liao S.J. Note on the homotopy analysis method: some definition and theorems. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*; 14(2009)983-997.
- [12] Liao S.J, An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius viscous flow problem, *Int J Non-Linear Mech*; 34(1999)759-778.
- [13] Liao S.J, *Beyond perturbation: Introduction to homotopy analysis method* Boca Raton: Chapman and Hall CRC Press 2003.

- [14] Liao S.J, Tan Y, A general approach to obtain series solution of Non-Linear differential equation, *stud. Appl. Math.* 119(2007)297-354.
- [15] Liao S.J. A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters: An application in fluid mechanics. *Int J Nonlinear Mech*; 32(1997)815-822.
- [16] Liao S.J, A new analytic algorithm of Lane-Emden type equation. *Applied Mathematics and Computation* 142(2003)1-16.
- [17] Mckee S, Calculation of electrohydrodynamic flow in a circular cylindrical conduit, *Z Angew Math Mech.* 77(1997)457-465.
- [18] Motsa S.S, Sibanda P, Shateyi S, A new spectral homotopy analysis method for solving a nonlinear second BVP, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 15(2010)2293-2302.
- [19] Nayfeh A.H, *Perturbation Method*, New York; John Wiley and sons 1973.
- [20] Paultet JE, On the solution of electrohydrodynamic flow in a circular cylindrical conduit. *Z Angew math mech.* 79(1999)357-360.
- [21] Rudin W, *Principle of mathematical analysis*, Third Edition 1976.
- [22] Stoer J., Bulirsch R., *Introduction to numerical Analysis*, Springer New York (1991).
- [23] Trefethen L.N, *Spectral Method in MATLAB*, SIAM, Philadelphia (2000).
- [24] VanGorder RA, Vajravelu K. On the selection of auxiliary function operators, and convergence control parameter in application of the homotopy analysis method to nonlinear differential equation: a general approach. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*; 14(2009)4078-4089.
- [25] Vasudevan G, Watson L.T, Lutze F, Homotopy approach for solving constrained optimization problem, *IEEE Trans, Automat. Control* 36 (1991)494-498
- [26] Wazwaz A.M, A new algorithm for solving differential equation of Lane-Emden type, *Appl. Math. Comput.* 118(2001)287-310.

- [27] Wartani MM, Hamdan MH, fully developed flow through a porous Channel bounded by flat plates. *Appl. Math. Comput.* 169(2005)749-757.
- [28] Watson L.T, Globally convergent homotopy method: a tutorial. *Appl. Math. Comput.* 31(1989)369-396.
- [29] Watson L.T, Haftka R.T, Modern homotopy method in optimization comput. *Method Appl. Mech. Eng.* 74(1989)289-305.
- [30] Watson L.T, Theory of Globally convergent probability one homotopies for nonlinear programming. *SIAM J. Optim.* 11(3), 761-780.

واژه نامه انگلیسی به فارسی

A

Adomian decomposition method..... روش تجزیه آدومیان

An illustrative example..... یک مثال روشنگر

Analytical..... تحلیلی

Approximate..... تقریب زدن

Approximation..... تقریب

Arbitrary دلخواه

Arbitrary دلخواه

Auxiliary کمکی

Auxiliary function تابع کمکی

Auxiliary parameter پارامتر کمکی

B

Beta function تابع بتا

Boundary مرزی

Boundary condition شرایط مرزی

C

Calculation محاسبه

Cauchy product حاصل ضرب کوشی

Complex	مختلط
Complex plane	فضای مختلط
Condition	شرایط
Constant	ثابت
Construct	ساختن
Continuous function	تابع پیوسته
Control	کنترل
Convergence	همگرایی
Convergence theorem	قضیه همگرایی
Convergence rate	سرعت همگرایی
Convergence region	ناحیه همگرایی

D

Decomposition	تجزیه
---------------------	-------

Deformation دگر دیسی

Degree درجه

Dependent وابسته

Derivative مشتق

Description تشریح

Differential دیفرانسیل

E

Embedding parameter پارامتر تعبیه

Equivalent برابر

Error خطا

Estimation بر آورد

Exact دقیق

Exact solution جواب دقیق

Experiment آزمایش

F

Fractional کسری

Fractional differential equation معادله دیفرانسیل کسری

Function تابع

G

Gamma function تابع گاما

General solution جواب عمومی

H

High – order مرتبه بالا

Homogeneous همگن

Homotopy هموتپی

Homotopy perturbation method روش آشفتگی هموتپی

Homotopy analysis method روش هموتپی تحلیلی

I

Increase افزایش

Independent مستقل

Initial اولیه

Initial approximate تقریب اولیه

Initial guess حدس اولیه

Initial conditions شرایط اولیه

T

Time زمان

Transformation تبدیل

U

Unique یکتا

Unknown function تابع ناشناخته

V

Variable متغیر

Vector بردار

W

Wave موج

Z

Zero صفر

Zero – order مرتبه صفر

Abstract

A modification of the homotopy analysis method (HAM) for solving nonlinear second order boundary value problem (BVP) is proposed. The implementation of new approach is demonstrated by solving the Darcy-Brinkman-Forchheimer equation for steady fully developed fluid flow in a horizontal channel filled with a porous medium. The model equation is solved concurrently using the standard HAM approach and numerically using a shooting method based on the fourth order Runge-Kutta scheme. The results demonstrate that the new spectral homotopy analysis method is more efficient and converges faster than the standard homotopy analysis method.

Keywords

Homotopy analysis method, Chebyshev spectral method, Brinkman-Forchheimer model

Ministry of Science, Research and Technology

دانشگاه بین المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

**Faculty Of Basic Science
Department of Mathematics**

Spectral-Homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP

**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the
Degree of Master of Science in Applied Mathematics**

**By:
Mohsen Moghtadaei**

**Supervisors:
Prof.Saeid Abbasbandy
Dr.Davoud Rostamy**

February,2013