



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Gonçalo Inocêncio Oliveira

**CONVERGÊNCIA DO MÉTODO STREAMLINE
UPWIND PETROV-GALERKIN A UMA EQUAÇÃO
DE CONVECÇÃO-DIFUSÃO APLICADA A
DERRAMES**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo Análise Aplicada e
Computação coorientado pelo Professor Doutor Gonçalo Nuno Travassos Borges
Alves da Pena e pelo Engenheiro Carlos Matos Rodrigues (Critical Software).**

Julho de 2020

Convergência do Método Streamline Upwind Petrov-Galerkin a uma Equação de Convecção-Difusão Aplicada a Derrames

Gonçalo Inocêncio Oliveira



UNIVERSIDADE D
COIMBRA



Mestrado em Matemática

Julho 2020

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Gonçalo Pena, por ter acreditado no meu potencial, acolhendome e orientando-me enquanto aluno de mestrado e Eng. Carlos Rodrigues.

Aos meus pais, Carla Sofia Arribança Inocência e António Manuel da Silva Oliveira, que frequentemente investiram e acreditaram em mim e na minha carreira académica.

À Universidade de Coimbra pela oportunidade de poder adquirir, partilhar e trocar novos conhecimentos.

À Critical Software pela oportunidade de estágio e pelo financiamento.

A todos os meus professores que não pouparam esforços para me ensinar e orientar com sabedoria, durante todo o meu percurso académico.

A Bertrand Lima, que sempre acreditou nos meus sonhos.

À minha irmã, Beatriz Oliveira, por partilhar os desafios e conquistas da vida.

Aos meus amigos que me deram força e coragem para continuar!

Resumo

Este trabalho tem por objetivo o estudo de métodos numéricos com estabilização para uma equação de convecção-difusão, tanto no caso estacionário como no caso não estacionário, com aplicação aos derrames de petróleo.

No caso estacionário faremos a dedução da formulação fraca e a prova da existência e unicidade da solução. De seguida será introduzido o método de Galerkin com elementos finitos seccionalmente polinomiais, para obter uma solução aproximada, e estudada a sua estabilidade e convergência.

Posteriormente, ainda no caso estacionário, será mostrada por meio de exemplos, uma dificuldade que ocorre na solução numérica, no caso que a convecção domina o comportamento da equação. Será de seguida definido o método *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG) e estudar-se-á a sua estabilidade e uma estimativa para o erro cometido, como estabilizador da solução numérica do método de Galerkin.

No caso não estacionário será definido a nova formulação variacional e o método SUPG devidamente adaptado. Para tratar da componente temporal, será introduzido o método- θ . Serão estudadas várias estimativas de convergência e estabilidade para dois casos particulares deste método, sendo eles o método Euler Implícito e o método Crank-Nicolson.

Por fim será realizada uma aplicação dos métodos descritos, no caso não estacionário, a um evento real de derrame de 64 mil litros de petróleo do navio *Prestige*, ocorrido no ano de 2002 na Galiza, norte de Espanha. Para finalizar, será feita uma comparação, por sobreposição, entre os métodos estudados e o método *particle tracking*, já existente na modelação de derrames.

Palavras-chave: Convecção-Difusão. Galerkin Elementos Finitos. Streamline Upwind Petrov-Galerkin. Euler Implícito. Crank-Nicolson.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Equação de convecção-difusão estacionária	3
2.1 Preliminares	4
2.1.1 Espaços de Sobolev	4
2.1.2 Espaços de elementos finitos	6
2.2 Problema diferencial e formulação variacional	7
2.3 Existência e unicidade de solução fraca	8
2.4 Método de Galerkin com elementos finitos	11
2.4.1 Estabilidade e convergência	11
3 Estabilização Streamline Upwind Petrov-Galerkin	13
3.1 Método SUPG	15
3.2 Estimativa para o erro do método SUPG	17
3.3 Resultados numéricos	21
4 Equação de convecção-difusão evolutiva	23
4.1 Formulação variacional	23
4.2 Método- θ	25
4.2.1 Método Euler Implícito: $\theta = 1$	26
4.2.2 Método Crank-Nicolson: $\theta = 1/2$	37
4.3 Resultados numéricos	41
5 Simulação numérica do derrame do <i>Prestige</i>	43
5.1 <i>Prestige</i>	44
5.2 Outras simulações e comparações	45
6 Conclusão	47
Bibliografia	49
Anexo A Código	51

Lista de Figuras

3.1	Exemplo de como a solução numérica, pode ou não, apresentar oscilações consoante a discretização do espaço.	13
3.2	Solução numérica obtida com o método de Galerkin com elementos finitos.	14
3.3	Ordens de convergência nas normas L^2 e H^1 dependendo das ordens totais dos polinómios.	21
3.4	Erro associado ao método SUPG, medido na norma SUPG.	22
3.5	Solução numérica sem oscilações obtida com o método SUPG.	22
4.1	Ordens de convergência das normas $\ \cdot\ _{\text{SUPG}}$ e $\ \ \cdot\ \ _{\text{mat,eul}}$ dependendo da ordem total dos polinómios para o Euler Implícito.	42
4.2	Ordens de convergência das normas $\ \cdot\ _{\text{SUPG}}$ e $\ \ \cdot\ \ _{\text{mat,CN}}$ dependendo da ordem total dos polinómios para o Crank-Nicolson.	42
5.1	Soluções numéricas obtidas na modelação do derrame do navio <i>Prestige</i> com $k = 1$. . .	45
5.2	Soluções numéricas obtidas na modelação do derrame do navio <i>Prestige</i> com $k = 2$. . .	46
5.3	Soluções numéricas obtidas na modelação do derrame do navio <i>Prestige</i> com $k = 3$. . .	46
5.4	Solução obtida pelo método <i>particle tracking</i> e comparação com o modelo de EDPs. . .	46

Capítulo 1

Introdução

Um derrame tem consequências ambientais e económicas devastadoras. De acordo com [25] o petróleo bloqueia a luz solar impedindo a realização de fotossíntese no oceano pelo fitoplâncton, aumentando os níveis de dióxido de carbono, desequilibrando toda a cadeia alimentar e intoxicando a vida marinha. Com toda esta gravidade, estudar a evolução de um derrame de petróleo, a nível da trajetória da mancha, é uma mais valia para minimizar os possíveis danos causados e tentar, com menor tempo de resposta, prever quais os locais que serão afetados pelo derrame. No entanto, a modelação deste tipo de eventos é extremamente complexa na medida em que existem vários fenómenos que estão envolvidos nos derrames, como por exemplo: as correntes marítimas, vento, ondas [12], *Stokes drift* [28], emulsificação, evaporação, biodegradação, força de Coriolis [4, 15].

Esta dissertação surge da iniciativa de um estágio curricular na Critical Software, inserido no projeto *Oversee*, no contexto de modelação de derivas de hidrocarbonetos.

Um exemplo simplificado de modelos envolvem a modelação da trajetória de partículas usando um modelo Lagrangeano, chamado *particle tracking*, que consiste em dividir a mancha em várias partículas de óleo e calcular a trajetória de cada uma delas [11, 27]. Este modelo, apesar de ser de fácil implementação, não consegue traduzir o que se passa na mancha do derrame como um todo.

Uma outra alternativa aos modelos anteriores passa por utilizar modelos de equações com derivadas parciais (EDPs) que são um tipo de equações usadas na modelação de vários fenómenos na natureza. Neste tipo de EDP, as equações de convecção-difusão são exemplos de equações com derivadas parciais capazes de modelar fenómenos de transferência de calor, transporte de substâncias, entre outros. Em geral, uma equação de convecção-difusão tem a seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u - \mathbf{b}u) = f$$

onde $-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u)$ modela a componente difusiva do fenómeno e $\nabla \cdot (\mathbf{b}u)$ o transporte do mesmo. Na equação, \mathbf{D} é a matriz dos coeficientes de difusão, \mathbf{b} é o vetor de velocidades e f é o termo fonte. A este tipo de equação também estão associadas condições de fronteira, que podem ser condições de Dirichlet, de Neumann ou outras. As condições de Dirichlet são da forma $u = g$ e estabelecem qual é o valor da solução na fronteira. Já as condições de Neumann tomam a seguinte forma $(\mathbf{D}\nabla u - \mathbf{b}u) \cdot \boldsymbol{\eta} = g$ em que $\boldsymbol{\eta}$ é a normal unitária exterior à fronteira, e neste tipo é conhecido o fluxo que atravessa a fronteira.

No entanto, soluções analíticas destas equações são muitas vezes quase impossíveis de obter devido à complexidade da equação, condições de fronteira ou até do domínio onde o problema está definido. Assim, os métodos numéricos tornam-se importantes ferramentas pois podemos calcular soluções aproximadas com eles. Existem várias metodologias numéricas para obter soluções aproximadas, sendo elas: (i) método das diferenças finitas, que consiste numa discretização das derivadas com diferenças finitas; (ii) método de Galerkin combinado com elementos finitos, que calcula uma aproximação da solução num espaço de dimensão finita; (iii) métodos espectrais, que calculam a solução através de transformadas de Fourier ou utilizam polinómios de ordem elevada. O método de Galerkin combinado com elementos finitos é um desses métodos e que rapidamente se tornou uma ferramenta de peso neste campo das EDP, pois permite uma modelação em geometrias complexas e pode ser ainda programado num contexto mais geral [21].

Quando o efeito convectivo domina o comportamento da solução, a solução numérica obtida pode apresentar oscilações, pelo que é necessário alterar a discretização ou introduzir um estabilizador. No caso do método de Galerkin com elementos finitos, tal pode ser conseguido mudando o espaço de elementos finitos ou a formulação fraca. Existem vários tipos de estratégias estabilizadoras ou *estabilizadores*, entre os quais [24]: (a) difusão artificial ; (b) *bubble functions*; (c) aproximação espectral; e (d) métodos fortemente consistentes [13, 18, 19, 30]. Neste trabalho será analisada esta última classe de estabilizadores, nomeadamente o método Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG), no que diz respeito à estabilidade e convergência deste, tanto no caso estacionário como no caso evolutivo.

Este trabalho está dividido em quatro partes, além desta introdução: no Capítulo 2 começaremos por apresentar o problema de convecção difusão estacionária, ou seja, sem a componente temporal, na sua forma diferencial. Será feita uma breve revisão de espaços funcionais e alguns resultados importantes ao longo da dissertação, existência de uma formulação fraca do mesmo problema, assim como a existência e unicidade de uma solução fraca associada. Condições suficientes para a existência e unicidade de solução serão estabelecidas neste capítulo.

No Capítulo 3 será introduzido o método de Galerkin com elementos finitos segmentados lineares e a sua versão com o estabilizador SUPG. A análise da estabilidade e de uma estimativa para o erro associado ao método SUPG será o foco deste capítulo e terá um papel importante na terceira parte.

No Capítulo 4 será exposto o problema de convecção difusão na sua forma diferencial forte, agora admitindo a presença da componente temporal. Será definido o método SUPG para a nova formulação fraca do problema e também serão introduzidos os métodos- θ , os responsáveis de lidarem com a variável do tempo. Serão demonstrados vários resultados de convergência para dois valores específicos de θ : método Euler Implícito ($\theta = 1$) e o método Crank-Nicolson ($\theta = 1/2$).

No Capítulo 5 será apresentado o contexto do derrame *Prestige* [16]. Este problema, no seu contexto evolutivo, será foco de simulação usando o método estudado na dissertação assim como um modelo de *particle tracking* para comparação.

Capítulo 2

Equação de convecção-difusão estacionária

As equações de convecção-difusão estacionárias são um tipo de EDPs de segunda ordem da forma

$$-\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u - \mathbf{b}u) = f \quad (2.1)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz, \mathbf{b} é um vetor e f é uma função (que designaremos por fonte), que podem depender das variáveis independentes do problema. São usadas para modelar fenómenos físicos que possam envolver o transporte e difusão de partículas ou energia. Alguns casos de interesse para a modelação usando este tipo de equações são:

1. a concentração de um determinado poluente num curso de água ou ar;
2. a temperatura de um objecto;
3. transporte de massa.

A equação anterior deve ser complementada com condições de fronteira adequadas. Estas condições traduzem o comportamento de u na fronteira do domínio e estão intimamente relacionadas com características físicas do problema.

A prova de existência e unicidade de solução de um problema como (2.1), complementado com condições de fronteira adequadas, é uma tarefa que depende fortemente da regularidade das funções coeficientes e fonte. Um método clássico, que impõe regularidade reduzida aos coeficientes e fonte, assim como à eventual solução do problema, é o método de Galerkin. Este método permite reduzir a ordem das derivadas de maior ordem em (2.1), diminuindo a regularidade exigida da potencial solução do problema.

Uma técnica popular de aproximação de solução de problemas diferenciais sujeitos a condições de fronteira é o método de Galerkin com elementos finitos seccionalmente polinomiais. O caso mais popular deste método recorre a polinómios segmentados lineares, embora possa ser estendido a polinómios de grau mais elevado. Este método permite reduzir a dimensão do espaço onde procuramos a solução, sendo que neste caso, passamos a procurar a solução num espaço de dimensão finita.

O objetivo deste capítulo é estabelecer a formulação fraca associada à equação (2.1), complementada com condições de Dirichlet, estabelecer condições suficientes para a existência e unicidade

de solução desse problema variacional e analisar algumas propriedades dessa solução. O capítulo está dividido em três partes. A primeira secção será dedicada a rever algumas notações e espaços de funções necessários ao longo da dissertação. A demonstração da existência e unicidade de solução, sob certas condições de regularidade, será objeto de estudo na Secção 2.3. Por fim, na Secção 2.4 será exposto o estudo da estabilidade e das ordens de convergência do método de Galerkin.

2.1 Preliminares

Para formalizar o enquadramento funcional da equação (2.1), necessitamos de introduzir alguns espaços vetoriais e funcionais, e respetivas normas. Dado $v \in \mathbb{R}^d$ denotamos por

$$|\mathbf{v}|_2 = \left(\sum_{i=1}^d |v_i|^2 \right)^{1/2}$$

e

$$|\mathbf{v}|_\infty = \max_{0 \leq i \leq d} (|v_i|)$$

as normas vetoriais euclidiana e do máximo em \mathbb{R}^d , respectivamente.

Vamos denotar por $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira $\partial\Omega$ contínua à Lipschitz (ver [5]). Observamos que nalguns dos espaços que serão introduzidos, esta regularidade na fronteira não é necessária. No entanto, esta será um requisito para alguns dos espaços introduzidos na secção seguinte (fundamental ao longo da dissertação). Começemos por introduzir o espaço $C^m(\Omega)$ o conjunto de todas as funções reais de variável real u contínuas em Ω tal que $\partial^\beta u$ é contínua, para todo $\beta \in \mathbb{N}^d$ tal que $|\beta| \leq m \in \mathbb{N}_0$ onde $\partial^\beta u = \partial^{|\beta|} u / (\partial^{\beta_1} x_1 \dots \partial^{\beta_d} x_d)$ e $|\beta| = \sum_{i=1}^d \beta_i$.

Vamos denotar por $C^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis, isto é, o conjunto de todas as funções u tais que $u \in C^m(\Omega)$, $\forall m \in \mathbb{N}_0$.

O conjunto denotado por $C_0^m(\Omega)$ é o subconjunto de $C^m(\Omega)$ cujas funções têm suporte compacto¹, com $m \in \mathbb{N}_0$ ou $m = \infty$.

2.1.1 Espaços de Sobolev

Outros espaços fundamentais no estudo de EDP são os espaços de Sobolev, que serão utilizados ao longo da dissertação e cuja notação introduzimos de seguida.

Seja $p \geq 1$ um número real. Denotamos por $L^p(\Omega)$ como

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável à Lebesgue, } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\}$$

onde a norma que denotamos por $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é definida por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\Omega \right)^{1/p}$$

¹Uma função contínua tem suporte compacto se o fecho do conjunto onde esta não se anula for compacto e estiver contido no interior de Ω . [5]

e torna o espaço normado.

Um outro espaço importante a considerar, neste contexto, é

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável à Lebesgue, } \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess. sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Seja $m \in \mathbb{N}_0$. Denotamos por $H^m(\Omega)$ os espaços de Sobolev

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \partial^\beta f \in L^2(\Omega), |\beta| \leq m \right\}.$$

Observando que as derivadas subjacentes à definição de $H^m(\Omega)$ são derivadas fracas (ver [14]), e ainda, tomando $m = 0$, obtemos $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Vamos denotar por

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta| \leq m} \left\| \partial^\beta f(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad |f|_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\beta|=m} \left(\left\| \partial^\beta f(x) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

a norma e a semi-norma associadas a $H^m(\Omega)$, respetivamente.

Por fim, denotamos por $H_0^1(\Omega)$ o subconjunto de todas as funções de $H^1(\Omega)$ que se anulam em $\partial\Omega$.

A ideia por trás dos espaços funcionais introduzidos pode ser estendida a funções que dependem de uma outra variável. Dado $T > 0$ e X um dos espaços introduzidos anteriormente, munido da respetiva norma $\|\cdot\|_X$, definimos

$$L^p(0, T; X) = \left\{ f : [0, T] \rightarrow X \mid f \text{ é mensurável à Lebesgue, } \|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \text{ se } p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \operatorname{ess. sup}_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_X, \text{ se } p = \infty.$$

Podemos também definir o espaço $C([0, T]; X)$, o conjunto das funções contínuas $f : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma

$$\|f\|_{C([0, T]; X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_X.$$

Recordaremos de seguida alguns resultados conhecidos de Análise Funcional, que serão ferramentas indispensáveis na análise desenvolvida nesta dissertação.

Proposição 1 (Desigualdade de Hölder) [5] *Seja $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então $uv \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

O próximo resultado apresentado é a desigualdade de Friedrichs-Poincaré que relaciona a norma $L^2(\Omega)$, de uma função em $H_0^1(\Omega)$, com a sua semi-norma em $H^1(\Omega)$.

Proposição 2 (Desigualdade de Friedrichs-Poincaré) [26] *Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C_\Omega > 0$, que não depende de u , tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

2.1.2 Espaços de elementos finitos

Por último vamos introduzir alguns conceitos fundamentais no formalismo do método de Galerkin com elementos finitos, como os conceitos de triangulação, espaços de elementos finitos e alguns resultados de aproximação associados. No que se segue, vamos supor que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é poligonal. Seja $h > 0$ e \mathcal{T}_h uma triangulação de $\bar{\Omega}$ em que, para qualquer elemento $K \in \mathcal{T}_h$, $h_K = \text{diam}(K) \leq h$.

Definição 1 *Uma triangulação diz-se admissível se*

1. *Nenhum vértice de um qualquer elemento está no interior de uma aresta ou face de um outro elemento.*
2. $\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K = \bar{\Omega}$.

Definição 2 *Uma triangulação admissível \mathcal{T}_h diz-se regular se existir uma constante $\tau > 0$ tal que*

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\tau_K} \leq \tau,$$

onde τ_K denota o diâmetro máximo da bola inscrita em K .

Para $k \in \mathbb{N}_0$, vamos denotar por \mathbb{P}_k como sendo o conjunto de todos os polinómios de grau total inferior ou igual a k e ainda

$$X_h^k = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Seja $K \in \mathcal{T}_h$ um elemento qualquer. Vamos denotar por $\{a_i^K, i = 1, 2, \dots, (k+1)(k+2)/2\}$ um conjunto de pontos no elemento triangular K . Estes nós estão distribuídos da seguinte forma: 3 estão nos vértices; $3(k-1)$ estão no interior das arestas, equidistantes; os restantes $(k-2)(k-1)/2$ estão nas faces, todos de modo a que sejam compatíveis com os nós dos elementos vizinhos de K . Então podemos definir

$$N_h = \{a_i^K, i = 1, 2, \dots, (k+1)(k+2)/2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

o conjunto de todos os nós de \mathcal{T}_h . Vamos denotar cada nó de uma triangulação introduzido anteriormente por $a_j, j = 1, 2, \dots, M_h$. Assim, podemos definir facilmente uma base para o conjunto X_h^k como

$$\{\phi_i \in X_h^k : \phi_i(a_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, M_h\}.$$

Introduzimos agora um interpolador, chamado *interpolador nodal*, associado ao espaço X_h^k . Para cada $v \in C^0(\bar{\Omega})$ denotemos por $I_h^k v$ o elemento de X_h^k da forma

$$I_h^k v(x) = \sum_{i=1}^{M_h} v(a_i) \phi_i(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$. A seguinte proposição estabelece um majorante para o erro absoluto da aproximação de uma função em $H^{k+1}(K)$ pelo respetivo interpolador nodal.

Proposição 3 [5] *Seja $v \in H^{k+1}(K)$ e ainda $0 \leq \ell \leq k+1$. Então existe $C > 0$ tal que*

$$|v - I_h^k v|_{H^\ell(K)} \leq C h_K^{k+1-\ell} |v|_{H^{k+1}(K)}$$

O resultado seguinte resulta da aplicação direta da proposição 3.

Corolário 1 *Seja $v \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e \mathcal{T}_h uma triangulação admissível de Ω . Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\|v - I_h^k v\|_{L^2(K)} + h_K \|\nabla(v - I_h^k v)\|_{L^2(K)} + h_K^2 \|\Delta(v - I_h^k v)\|_{L^2(K)} \leq C h_K^{k+1} |v|_{H^{k+1}(K)}, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (2.2)$$

Por último, enunciamos a desigualdade inversa e um resultado similar.

Proposição 4 (Desigualdade Inversa) [9] *Seja \mathcal{T}_h uma triangulação regular de Ω , $v_h \in X_h^k \cap H^m(\Omega)$ e ainda $0 \leq \ell \leq m$. Então existe $C_0 > 0$ tal que*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|_{H^m(K)} \leq C_0 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{\ell-m} \|v_h\|_{H^\ell(K)}.$$

Proposição 5 [24] *Seja \mathcal{T}_h uma triangulação regular de Ω , $v_h \in X_h^k \cap H^2(\Omega)$. Então existe $C_0 > 0$ tal que*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta v_h\|_{L^2(K)}^2 \leq C_0^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h\|_{L^2(K)}^2.$$

2.2 Problema diferencial e formulação variacional

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ contínua à Lipschitz. O problema diferencial que será objeto de estudo nesta secção é

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}(x) \nabla u(x) - \mathbf{b}(x)u(x)) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d)$ com $b_1, \dots, b_d \in C^1(\bar{\Omega})$, \mathbf{D} matriz simétrica com componentes $D_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, d$ e $f \in C(\Omega)$.

Este problema diferencial também pode ser escrito na forma mais compacta

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

em que L é um operador linear $Lu = -\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u - \mathbf{b}u)$, com $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Uma função $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é chamada de *solução do problema diferencial*.

No que se segue, vamos admitir que o operador L é uniformemente elítico, ou seja, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^d D_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \geq \alpha_0 |\zeta|_2^2, \quad (2.5)$$

para todo o $\zeta \in \mathbb{R}^d$ para $x \in \Omega$.

Vamos agora deduzir a formulação variacional para (2.3). Seja u uma solução do problema diferencial. Multiplicando ambos os membros de $Lu = f$ por $w \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando por partes,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{D}(x)\nabla u(x) - \mathbf{b}(x)u(x)) w(x) d\Omega &= \int_{\Omega} (\mathbf{D}(x)\nabla u(x) - \mathbf{b}(x)u(x)) \cdot \nabla w(x) d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{D}(x)\nabla u(x) - \mathbf{b}(x)u(x)) \cdot \eta w(x) ds \end{aligned}$$

onde η denota a normal exterior unitária a $\partial\Omega$. Atendendo que $w \in C_0^\infty(\Omega)$ obtemos

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x) d\Omega - \int_{\Omega} u(x)\mathbf{b}(x) \cdot \nabla w(x) d\Omega = \int_{\Omega} f(x)w(x) d\Omega.$$

Definindo $a(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mathbf{D}(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) d\Omega - \int_{\Omega} u(x)\mathbf{b}(x) \cdot \nabla v(x) d\Omega$$

e

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) d\Omega,$$

obtemos o seguinte problema variacional:

encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.6)$$

A (2.6) chamamos *formulação variacional* e a uma tal função $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaça (2.6) chamamos *solução fraca do problema*.

2.3 Existência e unicidade de solução fraca

Nesta secção são estabelecidas condições suficientes para garantir a existência e unicidade de solução fraca de (2.6). Para tal vamos recorrer ao lema de Lax-Milgram [6]. Começemos por provar que a forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ é limitada.

Proposição 6 *Se $D_{ij}, b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, d$, então existe $M > 0$ tal que*

$$|a(z, w)| \leq M \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|z\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall z, w \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração

Sejam $z, w \in H_0^1(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned} |a(z, w)| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{D}(x) \nabla z(x) \cdot \nabla w(x) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b}(x) z(x) \cdot \nabla w(x) \, d\Omega \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{D}(x) \nabla z(x) \cdot \nabla w(x) \, d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} \mathbf{b}(x) z(x) \cdot \nabla w(x) \, d\Omega \right| \\ &\leq \max_{i,j} \|D_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \left| \int_{\Omega} \nabla z(x) \cdot \nabla w(x) \, d\Omega \right| + \max_i \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \left| \int_{\Omega} z(x) \cdot \nabla w(x) \, d\Omega \right|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos facilmente que

$$\begin{aligned} |a(z, w)| &\leq \max \left\{ \max_{i,j} \|D_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \max_i \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right\} \left(\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq M \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \left(\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \|z\|_{L^2(\Omega)} \right) = M \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \|z\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

com $M = \max \left\{ \max_{i,j} \|D_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \max_i \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}$, e conclui-se que $a(\cdot, \cdot)$ é limitada.

■

O resultado seguinte estabelece a coercividade da forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$

Proposição 7 Se $b_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $i = 1, \dots, d$ e $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$, então existe $M > 0$ tal que

$$a(z, z) \geq M \|z\|_{H_0^1}^2, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração

Seja $z \in H_0^1(\Omega)$. De

$$a(z, z) = \int_{\Omega} \mathbf{D}(x) \nabla z(x) \cdot \nabla z(x) \, d\Omega - \int_{\Omega} z(x) \mathbf{b}(x) \cdot \nabla z(x) \, d\Omega$$

usando a propriedade (2.5) segue-se que

$$a(z, z) \geq \alpha_0 \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} z(x) \mathbf{b}(x) \cdot \nabla z(x) \, d\Omega.$$

Vamos agora provar que $\int_{\Omega} z(x) \mathbf{b}(x) \cdot \nabla z(x) \, d\Omega = 0$. Observemos que, integrando por partes o termo $\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{b}(x) z(x)) z(x) \, d\Omega$, e como $z = 0$ em $\partial\Omega$ obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{b}(x) z(x)) z(x) \, d\Omega = - \int_{\Omega} z(x) \mathbf{b}(x) \cdot \nabla z(x) \, d\Omega. \quad (2.7)$$

Por outro lado, aplicando a derivada do produto

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{b}(x) z(x)) z(x) \, d\Omega = \int_{\Omega} z(x) z(x) \nabla \cdot \mathbf{b}(x) + z(x) \mathbf{b}(x) \cdot \nabla z(x) \, d\Omega$$

e atendendo à hipótese $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$, segue-se

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{b}(x)z(x))z(x) \, d\Omega = \int_{\Omega} z(x)\mathbf{b}(x) \cdot \nabla z(x) \, d\Omega. \quad (2.8)$$

Combinando (2.7) e (2.8) obtemos

$$\int_{\Omega} z(x)\mathbf{b}(x) \cdot \nabla z(x) \, d\Omega = 0. \quad (2.9)$$

Logo,

$$a(z, z) \geq \alpha_0 \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e, por fim, usando a Proposição 2, concluímos o pretendido.

■

Por último, é fácil estabelecer que F é limitada.

Proposição 8 *Se $f \in L^2(\Omega)$ então existe $C > 0$ tal que*

$$|F(v)| \leq C \|v\|_{H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim estamos em condições de aplicar, sob certas restrições de regularidade, o lema de Lax-Milgram [6] pelo que podemos concluir que existe uma única solução para o problema (2.6).

Teorema 1 *Suponhamos $D_{ij}, b_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, d$, $f \in L^2(\Omega)$ e que $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$. Então o problema variacional:*

encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

admite uma única solução em $H_0^1(\Omega)$.

Observação 1 *Observamos que exigindo regularidade suficiente aos coeficientes \mathbf{D} , \mathbf{b} e f , admitindo que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um polígono convexo e supondo que a solução fraca do problema pertence a $H_0^1(\Omega)$, é ainda possível estabelecer que $u \in H^2(\Omega)$, (ver [14, Secção 6.3.2]).*

Proposição 9 *Seja u a solução de (2.6). Se $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ então*

$$\int_{\Omega} \mathbf{L}u(x) \cdot v(x) \, d\Omega = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.10)$$

Demonstração

Seja $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ a solução de (2.6). Sabemos que u satisfaz, para todo o $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, d\Omega - \int_{\Omega} u(x)\mathbf{b}(x) \cdot \nabla v(x) \, d\Omega = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, d\Omega.$$

Integrando por partes cada um dos termos do membro esquerdo da equação, e como $v \in H_0^1(\Omega)$, obtém-se

$$\int_{\Omega} -\nabla \cdot (\mathbf{D}(x)\nabla u(x) - \mathbf{b}(x)u(x))v(x) d\Omega = \int_{\Omega} f(x)v(x) d\Omega.$$

■

2.4 Método de Galerkin com elementos finitos

Nesta secção iremos analisar e estudar propriedades do método de Galerkin com elementos finitos segmentados polinomiais para aproximar a solução do problema (2.3).

Seja \mathcal{T}_h uma triangulação admissível de Ω . Denotamos por V_h^k o espaço das funções de X_h^k que se anulam na fronteira, isto é, $V_h^k = X_h^k \cap H_0^1(\Omega)$ e suponhamos que $\dim V_h^k = N$. Então $\{\varphi_i, i = 1, \dots, N\}$ é uma base para V_h^k . Observamos que se $u_h \in V_h^k$ então existem $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tais que $u_h(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x)$. Substituindo $H_0^1(\Omega)$ por V_h^k na formulação fraca obtemos o seguinte problema definido num espaço de dimensão finita:

$$\begin{aligned} \text{encontrar } u_h \in V_h^k : \\ a(u_h, w_h) = F(w_h), \quad \forall w_h \in V_h^k. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Atendendo à linearidade de $a(\varphi_i, \cdot)$ e F , (2.11) é equivalente a:

encontrar $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ tais que

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i a(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j), \quad j = 1, \dots, N$$

isto é,

$$A\boldsymbol{\alpha} = U$$

com $A = [a(\varphi_i, \varphi_j)]_{i,j=1}^N$ e $U_j = [F(\varphi_j)]_{j=1}^N$.

O lema de Lax-Milgram garante que existe solução única para este problema (2.11).

2.4.1 Estabilidade e convergência

Nesta secção iremos provar a estabilidade e convergência para o método (2.11).

Proposição 10 *Sejam $u_h, v_h \in V_h^k$, duas soluções dos seguintes problemas,*

$$a(u_h, w_h) = F_1(w_h) \quad e \quad a(v_h, w_h) = F_2(w_h), \quad \forall w_h \in V_h^k,$$

com $F_i(w_h) = \int_{\Omega} f_i(x)w_h(x) d\Omega$, $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$. Então existe $M > 0$ tal que

$$\|u_h - v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.12)$$

Demonstração

Consideremos a diferença das duas soluções, $w_h = u_h - v_h$. Atendendo à linearidade da forma linear $a(\cdot, w_h)$, $\forall w_h \in F_1, F_2$ sabemos que

$$a(u_h - v_h, w_h) = \int_{\Omega} (f_1(x) - f_2(x))w_h(x), \quad \forall w_h \in V_h^k.$$

Como $w_h \in V_h^k$, usando a coercividade da forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$,

$$\frac{\alpha_0}{1 + C_{\Omega}} \|u_h - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u_h - v_h, u_h - v_h) = \int_{\Omega} (f_1 - f_2)(u_h - v_h) \leq \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} \|u_h - v_h\|_{H_0^1(\Omega)}$$

pelo que se conclui (2.12).

■

Assim o método (2.11) é estável, no sentido de pequenas alterações nos dados do problema resulta em pequenas alterações na solução. Vamos estabelecer a convergência do mesmo. O Teorema 2 é um resultado auxiliar na prova da convergência do método.

Teorema 2 [24] *Seja Ω um domínio poligonal de \mathbb{R}^2 , \mathcal{T}_h uma triangulação regular de $\overline{\Omega}$. Seja também $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear limitada e coerciva em $H_0^1(\Omega)$ e a funcional linear $F(\cdot)$ contínua em $H_0^1(\Omega)$. Se u_h for solução de (2.11) e $u \in H^s(\Omega)$ para algum $s \geq 2$ então*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\ell} \|u\|_{H^{\ell+1}(\Omega)},$$

em que $\ell = \min(k, s - 1)$.

No caso de $\overline{\Omega}$ ser um polígono convexo, ainda é possível estabelecer o resultado seguinte, que apresenta um majorante para a norma L^2 do erro.

Proposição 11 [24] *Suponhamos que as condições do Teorema 2 são válidas. Seja $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ a solução de (2.6) e u_h a solução de (2.11). Então existe $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \\ \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

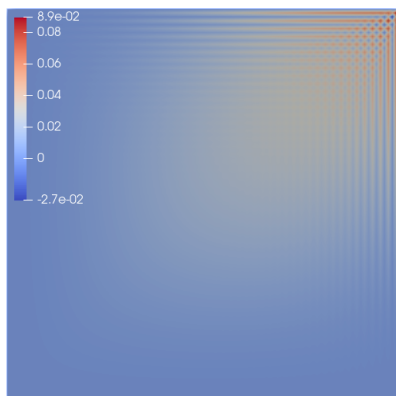
Capítulo 3

Estabilização Streamline Upwind Petrov-Galerkin

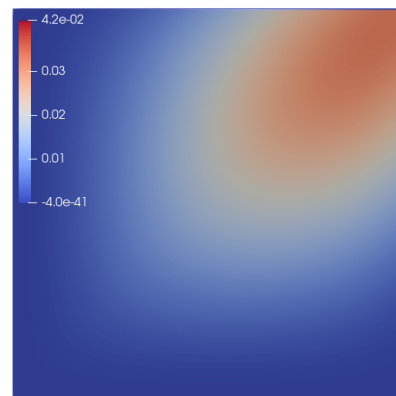
Como já foi referido, na equação diferencial que introduzimos, a equação de convecção-difusão (2.1), tem duas componentes que ditam o comportamento da sua solução: a componente difusiva e a componente convectiva. Neste contexto, pode acontecer que o comportamento da solução numérica do problema seja dominado por uma das componentes, o que pode levar à existência de dificuldades de resolução numérica adicionais. Para clarificar as dificuldades mencionadas, vamos considerar dois exemplos.

Exemplo 1

Consideramos o domínio $\Omega = (0, 1)^2$ com $\mathbf{b} = (1, 1)$, $D_{ij} = D\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, com $D = 3 \times 10^{-4}$ e o termo fonte $f(x, y) = xy(x-1)(y-1)$. Consideremos duas malhas regulares diferentes, uma com $h = \sqrt{2}/100 = 1,414 \times 10^{-2}$ e outra com $h = \sqrt{2}/1000 = 1,414 \times 10^{-3}$. As soluções correspondentes, recorrendo ao método (2.11), podem ser visualizadas nas Figuras 3.1a e 3.1b, respectivamente.



(a) Solução numérica com oscilações;



(b) Solução numérica sem oscilações e malha refinada;

Fig. 3.1 Exemplo de como a solução numérica, pode ou não, apresentar oscilações consoante a discretização do espaço.

Podemos observar na Figura 3.1b refinando a malha, a solução numérica deixa de apresentar oscilações.

O carácter dominante da convecção introduz uma dificuldade adicional a nível numérico, embora esta possa ser contornada (em geral) refinando a malha. No entanto, tal refinamento pode ser impraticável para obter, em tempo útil, uma solução aproximada sem oscilações.

Exemplo 2

Consideremos as condições do exemplo anterior, mas definamos agora $D = 0.035$. Vamos considerar uma malha regular com $h = \sqrt{2}/100 = 1,414 \times 10^{-2}$. A solução numérica, recorrendo ao método (2.11), pode ser vista na Figura 3.2.

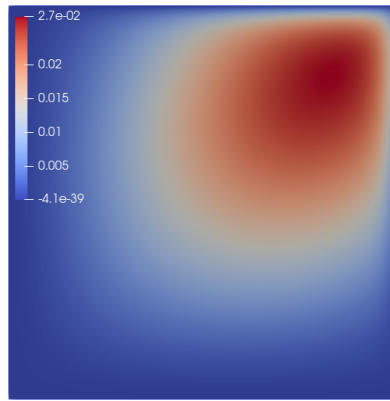


Fig. 3.2 Solução numérica obtida com o método de Galerkin com elementos finitos.

Podemos observar que, em comparação com a solução da Figura 3.1a, para uma mesma malha, alterando o valor de D , a solução obtida não apresenta oscilações.

Tal leva-nos a crer que existe uma relação entre os coeficientes da equação e o diâmetro da malha, que indica se o problema pode ser mal condicionado, no sentido da solução numérica apresentar oscilações. Uma métrica que permite avaliar, no contexto do método de Galerkin com elemento finitos segmentados lineares, o potencial aparecimento de oscilações na solução numérica, é chamado *número de Péclet*. Este, denotado por $Pe_{h,K}$, é definido para cada elemento $K \in \mathcal{T}_h$, dado por

$$Pe_{h,K}(x) := \frac{h|\mathbf{b}(x)|_{K,\infty}}{2\alpha_0(x)}, \quad x \in K$$

com $\alpha_0(x) = \min_{\xi \neq \mathbf{0}} \frac{\sum_{i,j=1}^2 D_{ij}(x)\xi_i\xi_j}{|\xi|_2^2}$. No caso particular dos exemplos anteriores, se $D_{ij} = D\delta_{ij}$, com D constante definimos $Pe_{h,K} = \frac{h|\mathbf{b}|_{K,\infty}}{2D}$ onde $|\mathbf{b}|_{K,\infty} = \max\{|b_1|_{L^\infty(K)}, |b_2|_{L^\infty(K)}\}$.

Podemos dividir os valores do número de Péclet em dois casos:

1. Quando $Pe_{h,K} < 1$, indica que é a difusão quem domina o comportamento da equação (localmente no elemento K);
2. Quando $Pe_{h,K} > 1$, indica que é a convecção quem domina o comportamento da equação (localmente no elemento K).

No Exemplo 2, $Pe_{h,K} = 0,202$, para todo $K \in \mathcal{T}_h$.

Já quando $Pe_{h,K} > 1$, a solução numérica pode apresentar oscilações, semelhantes às da Figura 3.1a. No Exemplo 1, o número de Péclet do primeiro caso é $Pe_{h,K} = 23,57$ e a solução apresenta oscilações. Assim, foi necessário refinar a malha até que a solução deixasse de apresentar as oscilações, e o número de Péclet desta nova solução é $Pe_{h,K} = 2,36$.

Existem várias metodologias para contornar a presença de oscilações na solução numérica sem refinar a malha, sendo que uma delas é a utilização de métodos de estabilização. Existem diversos métodos de estabilização que permitem controlar as oscilações. Alguns desses métodos são:

1. Difusão Artificial [24] - consiste em adicionar uma nova componente ao operador L que vai intensificar a difusão de forma a aumentar o coeficiente $\alpha_0(x)$ do número de Péclet;
2. Correção de Fluxo Algébrico [3] - este método consiste em tornar o problema inicial num problema não-linear, modificando o sistema algébrico por meio de correções de fluxo dependentes da solução.
3. Galerkin *Leasts Squares* (GALS) [19] - este método resulta da particularização das funções teste para $v_h + \delta h_k / |\mathbf{b}|_{K,\infty} L v_h$ no método Mínimos Quadrados, cujo objetivo é minimizar o resíduo entre a solução exata e a solução calculada.
4. *Streamline Upwind* Petrov-Galerkin (SUPG) [18] - este método resulta de um processo semelhante ao anterior mas com funções teste $v_h + \delta h_k / |\mathbf{b}|_{K,\infty} \mathbf{b} \cdot \nabla v_h$ e permite aumentar a difusão mas apenas na direção da convecção;
5. *Bubble Function* [7] - este método é uma melhoria dos dois métodos anteriores onde é modificado o espaço da solução aproximada, adicionando o espaço das *bubble functions* B , e a solução calculada por este método será $u_h \oplus u_B$ onde u_B é uma função em B .

O método que iremos estudar nesta dissertação será o método SUPG, uma vez que é de simples implementação e fácil de generalizar para elementos finitos polinomiais.

Este capítulo está dividido em três partes. Na primeira secção será definido o método SUPG e a prova de algumas propriedades do mesmo. O estudo de uma estimativa para o erro numa norma adequada do método será o foco da segunda secção. Na terceira e última secção será revisitado o Exemplo 1, introduzido neste capítulo e também serão apresentados alguns resultados ilustrativos das propriedades das estimativas para o erro associado ao método SUPG.

3.1 Método SUPG

Nesta secção vamos definir o método numérico SUPG. O método SUPG foi proposto pela primeira vez em 1982 por Brooks e Hughes [18] para equações de convecção-difusão e equações de Navier-Stokes incompressíveis. Devido à sua simplicidade e boa qualidade nos resultados é um método utilizado e estudado até aos dias de hoje.

Consideremos o problema (2.4). A partir da seguinte relação e de manipulação numérica,

$$\nabla \cdot (\mathbf{b}u) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{b}u) + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \nabla u + \frac{u}{2} \nabla \cdot \mathbf{b},$$

o operador Lu , introduzido em (2.4), admite a seguinte representação

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D_{ij} + D_{ji}}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}u - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D_{ij} - D_{ji}}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{b}u) + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \nabla u.$$

Definamos, para $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} L_S u &= - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D_{ij}(x) + D_{ji}(x)}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}u \\ L_{SS} u &= - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{D_{ij}(x) - D_{ji}(x)}{2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\mathbf{b}u) + \frac{1}{2} \mathbf{b} \cdot \nabla u. \end{aligned}$$

Observamos que $Lu = L_S u + L_{SS} u$ para $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Se $u_h, v_h \in V_h^k$, definamos

$$\begin{aligned} a_S(u_h, v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta \left(Lu_h, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} L_{SS} v_h \right)_K \\ \varphi_h(v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta \left(f, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} L_{SS} v_h \right)_K \end{aligned}$$

em que $(\cdot, \cdot)_K \equiv (\cdot, \cdot)_{L^2(K)}$ é o produto interno usual em $L^2(K)$, $\delta > 0$ e $v_h \in V_h^k$. Assim, definimos o seguinte problema:

encontrar $u_h \in V_h^k$ tal que

$$a(u_h, v_h) + a_S(u_h, v_h) = (f, v_h) + \varphi_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (3.1)$$

Definindo $\tilde{a}(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) + a_S(\cdot, \cdot)$ e $\tilde{F}_h(\cdot) = F(\cdot) + \varphi_h(\cdot)$, (3.1) é reescrito como:

encontrar $u_h \in V_h^k$ tal que

$$\tilde{a}(u_h, v_h) = \tilde{F}_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k.$$

As formas bilinear e linear do método SUPG são consistentes (no sentido da proposição seguinte) com as correspondentes da formulação variacional (2.6). Agora vamos mostrar uma propriedade de (3.1).

Proposição 12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um polígono convexo e sejam $D_{ij}(x)$, $b_i(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, d$, $f \in L^2(\Omega)$. Então*

$$\tilde{a}(u, w_h) = \tilde{F}_h(w_h), \quad \forall w_h \in V_h^k$$

onde $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é a solução exata de 2.4.

Demonstração

Seja $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $v_h \in V_h^k$. Então

$$\tilde{a}(u, v_h) = a(u, v_h) + a_S(u, v_h) = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} D_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} d\Omega - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u b_i(x) \frac{\partial v_h}{\partial x_i} d\Omega + a_S(u, v_h).$$

Integrando por partes o membro direito da equação anterior, e como $v_h \in H_0^1(\Omega)$ obtém-se

$$\tilde{a}(u, v_h) = \int_{\Omega} Lu(x)v_h(x) d\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta \left(Lu, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} L_{SS} v_h \right)_K.$$

Como $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $V_h^k \subset H_0^1(\Omega)$, pela Proposição 9 finalmente obtemos o pretendido.

■

3.2 Estimativa para o erro do método SUPG

Consideremos novamente o problema (2.6). No que se segue, vamos supor que D é constante e positivo. Assim, neste caso, o operador L é definido pelas componentes

$$\begin{aligned} L_S u &= -D\Delta u \\ L_{SS} u &= \mathbf{b} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\mathbf{b}u) \end{aligned}$$

uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$. Observamos que, na demonstração da Proposição 7, se não usarmos (2.5) obtemos $a(v, v) = \|\sqrt{D}\nabla v\|_{L^2}^2, \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Proposição 13 *Para δ suficientemente pequeno, existe $C > 0$, dependente de D , δ e da constante C_0 da desigualdade inversa, tal que a forma bilinear $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ satisfaz a seguinte relação*

$$\tilde{a}(v_h, v_h) \geq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|\sqrt{D}\nabla v_h\|_{L^2(K)}^2 + \delta h_K \|\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS} v_h\|_{L^2(K)}^2 \right), \forall v_h \in V_h^k. \quad (3.2)$$

Demonstração

Pela coercividade e como $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ vê-se que

$$\begin{aligned} \tilde{a}(v_h, v_h) &= a(v_h, v_h) + a_S(v_h, v_h) \\ &= \|\sqrt{D}\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta \left(Lv_h, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} \nabla \cdot (\mathbf{b}v_h) \right)_K \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|\sqrt{D}\nabla v_h\|_{L^2(K)}^2 + \delta h_K \|\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS} v_h\|_{L^2(K)}^2 \right) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\delta h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} (-D\Delta v_h, L_{SS} v_h)_K. \end{aligned}$$

Agora, usando a Proposição 1, a desigualdade de Young e $\frac{h_K |\mathbf{b}|_{K,\infty}}{2D} > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\delta h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} (-D\Delta v_h, L_{SS}v_h)_K &\leq \frac{1}{4} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\delta h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} (L_{SS}v_h, L_{SS}v_h)_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} (D\Delta v_h, D\Delta v_h)_K \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta h_K \left\| |\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS}v_h \right\|_{L^2(K)}^2 + \frac{\delta D}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta v_h\|_{L^2(K)}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a Proposição 5

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\delta h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} (D\Delta v_h, L_{SS}v_h)_K \leq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta h_K \left\| |\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS}v_h \right\|_{L^2(K)}^2 + \frac{C_0^2 \delta D}{2} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Finalmente, supondo que $\delta \leq 2C_0^{-2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}(v_h, v_h) &\geq D(1 - C_0^2 \delta / 2) \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta h_K \left\| |\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS}v_h \right\|_{L^2(K)}^2 \\ &\geq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\left\| \sqrt{D} \nabla v_h \right\|_{L^2(K)}^2 + \delta h_K \left\| |\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS}v_h \right\|_{L^2(K)}^2 \right). \end{aligned}$$

■

No que se segue, estabelecemos uma estimativa para a *norma SUPG*

$$\|v_h\|_{\text{SUPG}} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\| \sqrt{D} \nabla v_h \right\|_{L^2(K)}^2 + \delta h_K \left\| |\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS}v_h \right\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall v_h \in V_h^k.$$

Seja u a solução do problema (2.6) e u_h a solução de (3.1). Vamos decompor o erro absoluto $u_h - u$ na forma

$$u_h - u = (u_h - I_h^k u) + (I_h^k u - u)$$

onde $I_h^k u$ é o interpolador nodal de u . Denotando por $\sigma_h = u_h - I_h^k u$ e $v = u - I_h^k u$, então $u_h - u = \sigma_h - v$. Começemos por obter um majorante para a norma SUPG de σ_h .

Proposição 14 *Suponhamos que D é constante, $\frac{|\mathbf{b}|_{K,\infty} h_K}{2D} > 1$. Então, para δ suficientemente pequeno, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\sigma_h\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2k+1} |v|_{H^{k+1}(K)}^2$$

em que C depende de D , \mathbf{b} e da constante C_0 da Proposição 5.

Demonstração

Pela Proposição 12 sabemos que $\tilde{a}(u_h - u, \sigma_h) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} C \|\sigma_h\|_{\text{SUPG}}^2 &\leq \tilde{a}(\sigma_h, \sigma_h) \\ &\leq \tilde{a}(u_h - u + v, \sigma_h) \\ &\leq \tilde{a}(v, \sigma_h). \end{aligned}$$

Como

$$\tilde{a}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}_h) = D(\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\sigma}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} -(\mathbf{v}, L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h)_K + \delta \left(L\mathbf{v}, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h \right)_K.$$

vamos agora estimar os termos do membro direito.

- Estimativa para $D(\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\sigma}_h)$

Usando a Proposição 1 e a desigualdade de Young, do primeiro termo resulta

$$D(\nabla \mathbf{v}, \nabla \boldsymbol{\sigma}_h) \leq \frac{D}{2} \|\nabla \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + D \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.3)$$

- Estimativa para $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} -(\mathbf{v}, L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h)_K$

Definamos $\varepsilon = \frac{\delta h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}}$. Então, para o segundo termo obtém-se

$$- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}, L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h)_K = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\varepsilon^{-1/2} \mathbf{v}, \sqrt{\varepsilon} L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h)_K$$

e usando a Proposição 1 e a desigualdade de Young conclui-se

$$- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}, L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h)_K \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{4} \|\sqrt{\varepsilon} L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(K)}^2 + \|\varepsilon^{-1/2} \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2. \quad (3.4)$$

- Estimativa para $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta \left(L\mathbf{v}, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h \right)_K$

Para o último termo, usando a Proposição 1 e a desigualdade de Young resulta que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta \left(L\mathbf{v}, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h \right)_K \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{4} \|\sqrt{\varepsilon} L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(K)}^2 + \|\sqrt{\varepsilon} L_{SS} \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + \|\sqrt{\varepsilon} L_S \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2.$$

Usando a definição de L_S , o facto de que $h_K |\mathbf{b}|_{K,\infty} / (2D) > 1$, a Proposição 5 e supondo que $\delta \leq 2C_0^{-2}$ obtemos

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\sqrt{\varepsilon} L_S \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} D \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2.$$

Assim obtém-se que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta \left(L\mathbf{v}, \frac{h_K}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h \right)_K \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{4} \|\sqrt{\varepsilon} L_{SS} \boldsymbol{\sigma}_h\|_{L^2(K)}^2 + \|\sqrt{\varepsilon} L_{SS} \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + D \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2. \quad (3.5)$$

Portanto, usando as estimativas (3.3), (3.4) e (3.5), somando as parcelas iguais e atendendo à definição da norma $\|\cdot\|_{\text{SUPG}}$ conclui-se

$$\left(C - \frac{1}{2} \right) \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_{\text{SUPG}}^2 \leq 2D \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\delta h_K} \|\mathbf{b}|_{K,\infty}^{1/2} \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta h_K \|\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS} \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2.$$

Seja $C_1 = \max \left\{ 2, \frac{|\mathbf{b}|_{K,\infty}}{\delta}, \frac{\delta}{|\mathbf{b}|_{K,\infty}} \right\} \cdot \left(C - \frac{1}{2} \right)^{-1}$ com δ suficientemente pequeno de modo que $C - 1/2 > 0$. Desenvolvendo os termos do membro direito

$$\|\sigma_h\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} D \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{h_K} \|\mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2.$$

Sabemos que $|\mathbf{b}|_{K,\infty} h_K / (2D) > 1$, ou seja $D < \tilde{C} h_K$, com \tilde{C} uma constante que depende de $|\mathbf{b}|_{K,\infty}$. Assim

$$\|\sigma_h\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C_1 \tilde{C} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K} \left(\|\mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + h_K^2 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 \right).$$

Usando o Corolário 1 obtemos

$$\|\sigma_h\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2k+1} |\mathbf{v}|_{H^{k+1}(K)}^2.$$

■

Iremos, de seguida, estabelecer uma estimativa análoga para \mathbf{v} .

Proposição 15 *Suponhamos que D é constante, $\frac{|\mathbf{b}|_{K,\infty} h_K}{2D} > 1$. Então, para δ suficientemente pequeno,*

$$\|\mathbf{v}\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2k+1} |\mathbf{v}|_{H^{k+1}(K)}^2.$$

Demonstração

Pela definição da norma SUPG

$$\|\mathbf{v}\|_{\text{SUPG}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} D \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + \delta h_K \left\| |\mathbf{b}|_{K,\infty}^{-1/2} L_{SS} \mathbf{v} \right\|_{L^2(K)}^2.$$

Sabendo que $D < \tilde{C} h_K$ conclui-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\text{SUPG}}^2 &\leq \tilde{C} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 + h_K \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 \\ &\leq \tilde{C} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K} \left(h_K^2 \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 \right) \end{aligned}$$

e por fim, pelo Corolário 1 resulta que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{\text{SUPG}}^2 &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K} \left(h_K^{2(k+1)} |\mathbf{v}|_{H^{k+1}(K)}^2 \right) \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2k+1} |\mathbf{v}|_{H^{k+1}(K)}^2. \end{aligned}$$

■

O próximo teorema é um resultado que garante um majorante para o erro absoluto associado ao método SUPG.

Teorema 3 *Suponhamos que D é constante, $\frac{b|_{K,\infty}h_K}{2D} > 1$. Então se $u \in H^{k+1}(\Omega)$ e δ é suficientemente pequeno, o erro absoluto do método (3.1) na norma SUPG admite o majorante*

$$\|u - u_h\|_{SUPG} \leq Ch^{k+1/2}|u|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad k \geq 1.$$

Demonstração

Usando as Proposições 14 e 15 resulta

$$\|u_h - u\|_{SUPG}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2k+1} |v|_{H^{k+1}(K)}^2.$$

Como $v = u - I_h^k u$ é o erro do interpolador nodal, pela Proposição 3 conclui-se que

$$\|u - u_h\|_{SUPG} \leq Ch^{k+1/2}|u|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

■

3.3 Resultados numéricos

Nesta secção vamos apresentar dois exemplos para ilustrar numericamente os resultados de convergência apresentados e demonstrados nos Capítulos 2 e 3.

Exemplo 3

Seja $\Omega = (0,1)^2$, $D = 1$, $\mathbf{b} = (1,1)$ e f de modo a que a solução do problema (2.11) seja $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Notemos que, introduzindo uma triangulação regular em Ω , o número de Péclet é $h/2 < 1$. As ordens de convergência para as normas L^2 e H^1 com polinómios segmentados de grau $k = 1, 2, 3$, são ilustradas na Figura 3.3.

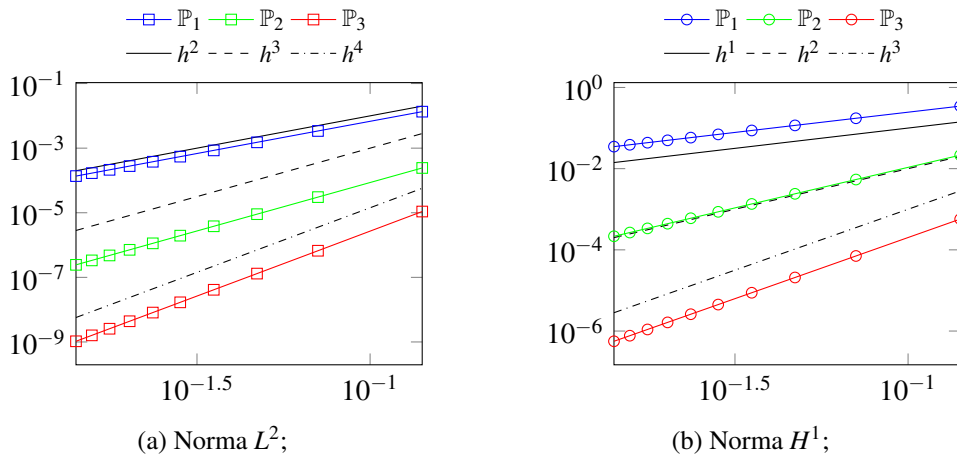


Fig. 3.3 Ordens de convergência nas normas L^2 e H^1 dependendo das ordens totais dos polinómios.

Exemplo 4

Seja $\Omega = (0, 1)^2$, $D = 9 \times 10^{-8}$, $b = (100, 100)$ e com f de tal forma a que a solução de (3.1) seja $u(x, y) = e^{x+y}(1-x)(1-y)xy$, $(x, y) \in \bar{\Omega}$. Notemos que, ao introduzir uma triangulação de Ω , o número de Péclet é $5,55 \times 10^8 \times h$. Vamos considerar novamente os três cenários da ordem dos polinômios, $k = 1, 2, 3$. Neste caso consideremos um valor constante para δ_K para todo elemento $K \in \mathcal{T}_h$, em cada ordem dos polinômios como 1×10^{-1} , $2,1 \times 10^{-3}$ e 2×10^{-5} , respectivamente. Assim, na Figura 3.4 podemos observar como o erro medido na norma SUPG varia consoante o valor de k , conforme o Teorema 3.

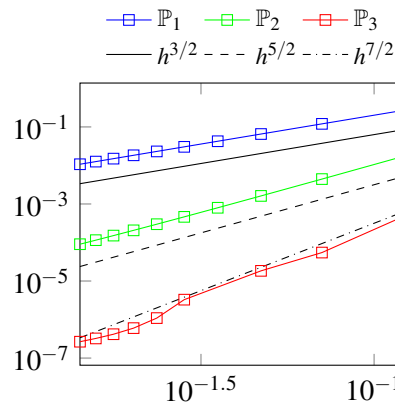


Fig. 3.4 Erro associado ao método SUPG, medido na norma SUPG.

Exemplo 1 (revisitado)

Utilizando os mesmo parâmetros de simulação que no Exemplo 1, mas recorrendo agora ao método SUPG com parâmetro $\delta_K = 0,3$ para todo $K \in \mathcal{T}_h$, obtemos a solução numérica ilustrada na Figura 3.5. O número de Péclet permanece igual, $Pe_{h,K} = 23,57$.

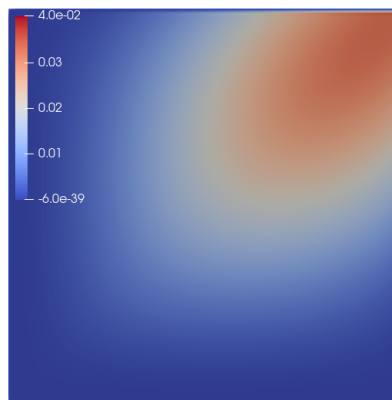


Fig. 3.5 Solução numérica sem oscilações obtida com o método SUPG.

Capítulo 4

Equação de convecção-difusão evolutiva

No capítulo anterior foi estudada a convergência do método SUPG para o caso estacionário da equação de convecção difusão. No entanto, a solução obtida por esse problema traduz pouca relevância no contexto dos derrames, no sentido de descrever como um derrame evolui ao longo do tempo.

Neste capítulo vamos estudar o caso evolutivo da equação de convecção-difusão, ou seja, uma equação da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nabla \cdot (\mathbf{D}(x)\nabla u(x,t) - \mathbf{b}(x)u(x,t)) = f(x,t).$$

Para aproximar a solução desta equação e obter um método completamente discreto, vamos dividir o processo de discretização em duas partes: espacial e temporal. Assim, a componente espacial será discretizada com a técnica SUPG introduzida no capítulo anterior, enquanto que a componente temporal será discretizada com recurso ao método- θ .

O objetivo deste capítulo é estabelecer a convergência do método numérico que será introduzido, nos casos particulares $\theta = 1$ e $\theta = 1/2$, que correspondem a discretizações com o método de Euler Implícito e Crank-Nicolson. Os resultados e demonstrações são baseados em [20], com adaptações devido à não existência de uma componente reativa na equação.

4.1 Formulação variacional

Seja $T > 0$ um número real e $\bar{\Omega}$ um polígono convexo. O problema diferencial em estudo neste capítulo é

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla u(x,t) - \mathbf{b}(x)u(x,t)) = f(x,t), & x \in \Omega, t \in (0, T] \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0, T] \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d)$ com $b_1, \dots, b_d \in C^1(\bar{\Omega})$, $f \in C(\Omega \times (0, T])$ e $u_0 \in C(\bar{\Omega})$.

À semelhança do capítulo anterior, a formulação variacional de (4.1) é:

encontrar $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ com $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ tal que

$$(u'(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ q.c. em } 0 \leq t \leq T \quad (4.2)$$

e $u(\cdot, 0) = u_0$ onde $a(u, v) = (D\nabla u, \nabla v) + (\mathbf{b} \cdot \nabla u, v)$ e $u' = du/dt$ representa a derivada no sentido das distribuições.

O resultado seguinte estabelece a existência e unicidade do problema variacional anterior.

Teorema 4 [14] *Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então o problema (4.2) tem solução única e*

1. $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$; $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$
2. $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$
3. $u(t) = u(s) + \int_s^t u'(\tau) d\tau$, para todo $0 \leq s \leq t \leq T$.

O Teorema 4 garante a regularidade necessária para que seja garantida a existência e unicidade de solução do problema (4.2). No entanto, posteriormente para estudar a convergência, as hipóteses de regularidade assumidas não serão suficientes, pelo que é necessário impor mais regularidade aos coeficientes e solução.

Teorema 5 [14, pág. 365] *Seja $u_0 \in H^{2m+1}(\Omega)$, $\frac{d^r}{dt^r} f \in L^2(0, T; H^{2(m-r)})$ para $r = 0, 1, \dots, m$. Se*

$$g_0 := u_0 \in H_0^1 \text{ e } g_r := \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} f(0) - Lg_{r-1} \in H_0^1(\Omega), \quad r = 1, \dots, m,$$

então o problema (4.2) tem solução única e

$$\frac{d^r}{dt^r} u \in L^2(0, T; H^{2(m-r+1)}(\Omega)), \quad r = 0, 1, \dots, m+1$$

com $m \in \mathbb{N}$.

Aplicando o método de Galerkin com elementos finitos segmentados. O problema semi-discreto é:

encontrar $u_h \in L^2(0, T; V_h^k)$ e $u'_h \in L^2(0, T; X_h^k)$ tal que

$$(u'_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h), \forall v_h \in V_h^k \text{ q.c. em } 0 \leq t \leq T \quad (4.3)$$

onde $u_h(\cdot, 0) = I_h^k u_0$ é o interpolador nodal de u_0 e $u'_h = du_h/dt$.

Como já foi visto anteriormente, a solução aproximada obtida pelo método de Galerkin com elementos finitos segmentados pode apresentar oscilações quando a equação é dominada pela convecção. Para contornar esse obstáculo, vamos usar o método SUPG, adaptado ao caso evolutivo. Portanto, o caso semi-discreto do método SUPG é:

encontrar $u_h \in L^2(0, T; V_h^k)$ e $u'_h \in L^2(0, T; X_h^k)$ tal que

$$(u'_h(t), v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h) + \tilde{a}(u_h(t), v_h) = \delta (f(t), v_h + \mathbf{b} \cdot \nabla v_h), \forall v_h \in V_h^k \text{ q.c. } 0 \leq t \leq T$$

e $u_h(\cdot, 0) = I_h^k u_0$ o interpolador nodal de u_0 com

$$\tilde{a}(u_h(t), v_h) = a(u_h(t), v_h) + \delta (Lu_h, L_{SS} v_h).$$

Observação 2 O método SUPG clássico, como formulado no capítulo anterior, recorre a um parâmetro global de estabilização δ e utiliza o fator $h_K/|\mathbf{b}|_\infty$ para ponderar o efeito estabilizador em cada elemento, dependendo das características de \mathbf{b} . Aqui será introduzida uma versão que permite maior liberdade de escolha do parâmetro de estabilização.

4.2 Método- θ

Vamos fixar o comprimento do passo como $\Delta t = T/M$ com $M \in \mathbb{N}$ e \mathcal{T}_h uma triangulação regular de $\bar{\Omega}$. Vamos definir o instante de tempo $t_n = n\Delta t$, com $n = 0, 1, \dots, M$. O método completamente discreto toma a forma

$$\left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) + \tilde{a}(U_h^{n+\theta}, v_h) = (f^{n+\theta}, v_h) + \delta \left(f^{n+\theta} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h \right), \quad \forall v_h \in V_h^k$$

onde U_h^n a solução aproximada de $u^n = u(t_n)$, $U_h^0 = I_h^k u_0$, $U_h^{n+\theta} = \theta U_h^n + (1 - \theta) U_h^{n-1}$, com $\theta \in [0, 1]$.

Observação 3 O parâmetro δ é um parâmetro global que pode depender de h e Δt . No entanto, o número de Péclet depende apenas de h . Assim, quando $\Delta t \rightarrow 0$, o parâmetro $\delta \rightarrow 0$ e o efeito da estabilização desaparece, mas o número de Péclet permanece inalterado, podendo surgir oscilações na solução calculada. Assim, δ terá apenas de depender de h .

Para analisar a convergência do método de Euler Implícito e Crank-Nicolson, vamos introduzir um problema auxiliar. Dados $f, u, u' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, para cada $t \in (0, T]$ seja $\Pi_h u(t) \in V_h^k$ a solução do seguinte problema estacionário

$$\tilde{a}(\Pi_h u(t), v_h) = (f(t) - u'(t), v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k \quad (4.4)$$

e para $t = 0$ temos que $\Pi_h u(0) = I_h^k u_0$. Para que possamos aplicar o Lema de Lax-Milgram e mostrar que o problema anterior tem uma única solução em V_h^k , o termo independente precisa de ser limitado.

Proposição 16 Seja $f, u, u' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. Então, para cada $t \in (0, T]$ existe $M > 0$ tal que

$$|(f(t) - u'(t), v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h)| \leq M \|v_h\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v_h \in V_h^k.$$

Demonstração

Pela Proposição 1 obtemos

$$|(f(t) - u'(t), v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h)| \leq \|f(t) - u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \|v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Considerando $M = \|f(t) - u'\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))}$ resulta

$$\begin{aligned} |(f(t) - u'(t), v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h)| &\leq M \left(\|v_h\|_{L^2(\Omega)} + \delta |\mathbf{b}|_\infty \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq M \|v_h\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

■

Estamos nas condições de aplicar o Lema de Lax-Milgram e portanto, o problema (4.4) tem solução única. Assim, quando o termo independente é nulo, a única solução é a solução nula e obtemos a seguinte relação

$$\tilde{a}(\Pi_h u(t), v_h) = \tilde{a}(u(t), v_h), \forall v_h \in V_h^k. \quad (4.5)$$

Usando o Teorema 3 chegamos a

$$\|u(t) - \Pi_h u(t)\|_{\text{SUPG}} \leq Ch^{k+1/2} \|u(t)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \text{ q.c. em } 0 \leq t \leq T. \quad (4.6)$$

Mais ainda, pelo Teorema 5 para $m = 2$ é possível garantir que $f', u'' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e então podemos derivar a equação (4.4) em ordem a t , pela linearidade da equação e a independência temporal dos parâmetros e funções teste, obtendo

$$\tilde{a} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Pi_h u(t), v_h \right) = (f'(t) - u''(t), v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h).$$

Sabemos que $(u''(t), v_h) + \tilde{a}(u'(t), v_h) = (f'(t), v_h) + (f'(t) - u''(t), \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h)$ ou seja $\tilde{a}(u'(t), v_h) = (f'(t) - u''(t), v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h)$. Pela relação (4.5) obtém-se

$$\tilde{a}(\Pi_h u'(t), v_h) = \tilde{a}(u'(t), v_h)$$

e conclui-se portanto que $\frac{\partial}{\partial t} \Pi_h u = \Pi_h u'$. Denote-se $\Pi_h u^n = \Pi_h u(\cdot, t_n)$.

Observação 4 Com as condições $f, u, u' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ é possível provar $\Pi_h u \in C([0, T]; V_h^k)$. Mais ainda, usando o Teorema 5 podemos garantir que $d^r/dt^r f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ com $r = 0, 1, \dots, m$, $d^r/dt^r u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ com $r = 0, 1, \dots, m+1$ e, conseqüentemente, é possível provar que $d^r/dt^r \Pi_h u$ para $r = 0, 1, \dots, m-1$ existem e que pertencem a $C([0, T]; V_h^k)$.

4.2.1 Método Euler Implícito: $\theta = 1$

Vamos estudar o método referente ao caso $\theta = 1$. Assim, para cada $n = 1, \dots, M$ queremos encontrar $U_h^n \in V_h^k$ tal que

$$\left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) + \tilde{a}(U_h^n, v_h) = (f(t_n), v_h) + \delta \left(f(t_n) - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h \right), \forall v_h \in V_h^k \quad (4.7)$$

e com U_h^0 uma aproximação de u_0 . Para que a regularidade exigida para realizar o estudo da convergência do método, no Teorema 5 é preciso impor que $m > (k+5)/2$.

Vamos introduzir as notações $e^n = U_h^n - \Pi_h u^n$, também $e_\tau^n = (e^n - e^{n-1})/\Delta t$ e ainda o erro de truncatura

$$T^n = (u'(t_n) - \Pi_h u'(t_n)) + \left(\Pi_h u'(t_n) - \frac{\Pi_h u^n - \Pi_h u^{n-1}}{\Delta t} \right)$$

Vamos introduzir as seguintes notações

$$\begin{aligned}\|v_h\|_b^2 &= \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \|\mathbf{b} \cdot \nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \|e^n\|_{\text{mat,eul}}^2 &= \delta \|e_\tau^n + \mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

O resultado seguinte é consequência imediata da definição de $\|\cdot\|_b$ e $\|e^n\|_{\text{mat,eul}}$.

Proposição 17 *Nas condições de regularidade do Teorema 5, existe $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\|v_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|v_h\|_{SUPG} \\ \|v_h\|_b &\leq C \|v_h\|_{SUPG} \\ \|e^n\|_{\text{mat,eul}} &\leq C \|e^n\|_{SUPG}.\end{aligned}$$

Agora, pela definição de e^n e e_τ^n obtemos

$$\begin{aligned}(e_\tau^n, v_h) + \tilde{a}(e^n, v_h) &= \frac{1}{\Delta t} [(U_h^n - \Pi_h u_h^n, v_h) - (U_h^{n-1} - \Pi_h u_h^{n-1}, v_h)] + \tilde{a}(U_h^n, v_h) - \tilde{a}(\Pi_h u_h^n, v_h) \\ &= \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) + \tilde{a}(U_h^n, v_h) - \left(\frac{\Pi_h u_h^n - \Pi_h u_h^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) - \tilde{a}(\Pi_h u_h^n, v_h)\end{aligned}$$

usando (4.4) e (4.7) é fácil estabelecer que

$$\begin{aligned}(e_\tau^n, v_h) + \tilde{a}(e^n, v_h) &= (f^n, v_h) + \delta \left(f^n - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h \right) - \left(\frac{\Pi_h u_h^n - \Pi_h u_h^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) \\ &\quad - (f^n - u'(t_n), v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h) \\ &= (T^n, v_h) + \delta (u'(t_n), \mathbf{b} \cdot \nabla v_h) - \delta \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h \right)\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$(e_\tau^n, v_h) + \tilde{a}(e^n, v_h) = (T^n, v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h) - \delta (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h). \quad (4.8)$$

Por um lado, escolhendo $v_h = e^n$ e usando (2.9) obtemos

$$\begin{aligned}(e_\tau^n, e^n) + D(\nabla e^n, \nabla e^n) + (\mathbf{b} \cdot \nabla e^n, e^n) + \delta(-D\Delta e^n + \mathbf{b} \cdot \nabla e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) &= (T^n, e^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) \\ &\quad - \delta (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n)\end{aligned}$$

por outro lado, escolhendo $v_h = \delta e_\tau^n$ em (4.8) segue-se que

$$\begin{aligned}\delta (e_\tau^n, e_\tau^n) + \delta D(\nabla e^n, \nabla e_\tau^n) + \delta (\mathbf{b} \cdot \nabla e^n, e_\tau^n) + \delta^2(-D\Delta e^n + \mathbf{b} \cdot \nabla e^n, \mathbf{b} \cdot e_\tau^n) &= \delta (T^n, e_\tau^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) \\ &\quad - \delta^2 (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n)\end{aligned}$$

Somando estas últimas igualdades estabelecidas e usando (2.9) obtemos

$$(e_\tau^n, e^n) + D \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2(\mathbf{b} \cdot \nabla e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) + \|e^n\|_{\text{mat,eul}}^2 + \delta D(\nabla e^n, \nabla e_\tau^n) = (T^n, e^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) + \delta(T^n, e_\tau^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) + \delta(D\Delta e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) + \delta^2(D\Delta e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) - \delta^2(e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) \quad (4.9)$$

Vamos começar por estabelecer estimativas para algumas parcelas da igualdade anterior.

Proposição 18 *Sejam e^n, e_τ^n e T^n como definidas anteriormente. Se*

$$\delta = \min \left\{ \frac{h}{4C_0 \|\mathbf{b}\|_\infty} \min \left\{ \frac{1}{2}, \|\mathbf{b}\|_\infty^{1/2} \right\}, 1 \right\} \quad (4.10)$$

onde C_0 é a constante da Proposição 4, $\|\mathbf{b}\|_\infty = \max_{K \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{b}|_{K, \infty}$ e $D < \delta$ então podemos obter as seguintes estimativas

$$(T^n, e^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) \leq C \|T^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{D}{8} \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.11)$$

$$\delta(T^n, e_\tau^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) \leq C \|T^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{8} \|e^n\|_{\text{mat,eul}}^2 + \frac{D}{8} \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.12)$$

$$\delta(D\Delta e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) \leq \frac{D}{8} \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.13)$$

$$\delta^2(D\Delta e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) \leq \frac{D}{8} \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{8} \|e^n\|_{\text{mat,eul}}^2 \quad (4.14)$$

$$-\delta^2(e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) \leq \frac{1}{4} \|e^n\|_{\text{mat,eul}}^2 \quad (4.15)$$

Demonstração

- A primeira estimativa é estabelecida recorrendo às Proposições 1 e 4 e à hipótese imposta sobre δ . Assim é possível estabelecer que

$$(T^n, e^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) \leq \|T^n\|_{L^2(\Omega)} \|e^n\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{8} \|T^n\|_{L^2(\Omega)} \|e^n\|_{L^2(\Omega)}$$

e por fim utilizando a desigualdade de Young e a Proposição 2 obtemos (4.11) em que $C = 65C_\Omega/16D$ com C_Ω a constante da Proposição 2.

- Para a segunda estimativa serão usadas Proposição 1 e a hipótese (4.10). Vem sucessivamente

$$\begin{aligned} \delta(T^n, e_\tau^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) &\leq \delta \|T^n\|_{L^2(\Omega)} \|e_\tau^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2\delta \|T^n\|_{L^2(\Omega)} \left(\|e_\tau^n + \mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \|T^n\|_{L^2(\Omega)} \left(2\delta^{1/2} \|e^n\|_{\text{mat,eul}} + \frac{1}{4} \|e^n\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, usando a desigualdade de Young e Proposição 2 obtemos (4.12) em que $C = 8\delta + C_\Omega/8D$.

- Para a terceira estimativa, a Proposição 4 permite estabelecer que

$$\begin{aligned}\delta(D\Delta e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) &\leq \delta D \|\Delta e^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \delta DC_0 h^{-1} \|\mathbf{b}\|_\infty \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

e usando novamente a hipótese (4.10) obtemos (4.13).

- A quarta desigualdade é estabelecida de modo semelhante à terceira. Como

$$\begin{aligned}\delta^2(D\Delta e^n, \mathbf{b} \cdot e_\tau^n) &\leq \delta^2 DC_0 h^{-2} \|\mathbf{b}\|_\infty \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)} \left(\|e_\tau^n + \mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^n\| \right) \\ &\leq \delta^{3/2} DC_0 h^{-2} \|\mathbf{b}\|_\infty \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)} \|e^n\|_{\text{mat,eul}} + \delta^2 DC_0 h^{-2} \|\mathbf{b}\|_\infty^2 \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Usando(4.10) e a Proposição 1 temos

$$\delta^2(D\Delta e^n, \mathbf{b} \cdot e_\tau^n) \leq \frac{D^2}{32\delta} \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{32} \|e^n\|_{\text{mat,eul}}^2 + \frac{D}{16} \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Notando que $D < \delta$, concluímos o majorante pretendido (4.14).

- Por fim, a última estimativa segue-se usando a Proposição 4 obtendo

$$\begin{aligned}-\delta^2(e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) &\leq \delta^2 \|\mathbf{b}\|_\infty h^{-1} C_0 \|e_\tau^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2\delta^2 \|\mathbf{b}\|_\infty h^{-1} C_0 \|e_\tau^n + \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned}$$

e portanto, usando a hipótese (4.10) concluí-se a estimativa (4.15).

■

Agora podemos aplicar (4.11)-(4.15) em (4.9) obtendo

$$(e_\tau^n, e^n) + \frac{D}{2} \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2(\mathbf{b} \cdot \nabla e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) + \frac{1}{2} \|e^n\|_{\text{mat,eul}}^2 + \delta D(\nabla e^n, \nabla e_\tau^n) \leq C \|T^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.16)$$

Observação 5 Alguns dos termos que surgem em (4.16) admitem uma representação alternativa que será vantajosa para estabelecer o resultado final.

$$\begin{aligned}(e_\tau^n, e^n) &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e^n - e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ \delta^2(\mathbf{b} \cdot \nabla e^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) &= \frac{\delta^2}{2\Delta t} \left(\|\mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{b} \cdot \nabla(e^n - e^{n-1})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)\end{aligned}$$

Assim, considerando a Observação 5 em (4.16) resulta

$$\begin{aligned}\|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \left(\|\mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + D\Delta t \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \Delta t \|e^n\|_{\text{mat,eul}}^2 + D\delta \left(\|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C\Delta t \|T^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.17)\end{aligned}$$

Podemos agora provar a seguinte proposição que nos vai permitir concluir um majorante para o erro associado à aproximação numérica.

Proposição 19 *Sejam $u, u' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e e^n, e^n_t e T^n como definidas anteriormente. Admitindo que δ satisfaz (4.10), então existe $C > 0$ tal que*

$$\|e^n\|_b^2 + D\delta \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(\|e^j\|_{\text{mat,eul}}^2 + D \|\nabla e^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right)$$

onde k é o grau total dos polinómios de X_h^k .

Demonstração

Partindo de (4.17), somando para $j = 1, \dots, n$ conclui-se que

$$\|e^n\|_b^2 + \sum_{j=1}^n \Delta t \left(D \|\nabla e^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e^j\|_{\text{mat,eul}}^2 \right) + D\delta \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{j=1}^n \Delta t \|T^j\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.18)$$

Para concluir a demonstração, basta estimar a último termo do membro direito de (4.18). Fácil estabelecer que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \Delta t \|T^j\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \Delta t \sum_{j=1}^n \left\| u'(t_j) - \Pi_h u'(t_j) + \Pi_h u'(t_j) - \frac{\Pi_h u(t_j) - \Pi_h u(t_{j-1})}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \Delta t \sum_{j=1}^n \left\| u'(t_j) - \Pi_h u'(t_j) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \Pi_h u'(t_j) - \frac{\Pi_h u(t_j) - \Pi_h u(t_{j-1})}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Sabemos a partir de (4.6) que

$$\|u(t) - \Pi_h u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u(t) - \Pi_h u(t)\|_{\text{SUPG}} \leq Ch^{k+1/2} \|u(t)\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Por outro lado, usando a representação

$$\Pi_h u(t_{j-1}) = \Pi_h u(t_j) - \Pi_h u'(t_j) \Delta t + \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1}) \Pi_h u''(t) dt$$

segue-se que

$$\sum_{j=1}^n \Delta t \|T^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Delta t \sum_{j=1}^n \left(Ch^{2k+1} \|u'(t_j)\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 + \left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1}) \Pi_h u''(t) dt \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

logo

$$\sum_{j=1}^n \Delta t \|T^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^{2k+1} \|u'\|_{C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))}^2 + C\Delta t^2 \|\Pi_h u''\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2. \quad (4.19)$$

Finalmente, usando (4.19) em (4.18) concluí-se a demonstração.

■

Então podemos demonstrar o seguinte teorema

Teorema 6 *Sejam $u, u' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $\Pi_h u'' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Admitindo que δ satisfaz (4.10) então existe $C > 0$ tal que a seguinte estimativa é válida*

$$\begin{aligned} & \| \|u^n - U_h^n\|_b^2 + \delta D \|\nabla(u^n - U_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(\| \|u^j - U_h^j\|_{\text{mat,eul}}^2 + D \|\nabla(u^j - U_h^j)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right). \end{aligned}$$

Demonstração

Seja

$$A_n = \| \|u^n - U_h^n\|_b^2 + \delta D \|\nabla(u^n - U_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(\| \|u^j - U_h^j\|_{\text{mat,eul}}^2 + D \|\nabla(u^j - U_h^j)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Somando e subtraindo $\Pi_h u$ em cada uma das normas obtém-se

$$\begin{aligned} A_n & \leq \| \|u^n - \Pi_h u^n\|_b^2 + \delta D \|\nabla(u^n - \Pi_h u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \|e^n\|_b^2 + D \delta \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(\| \|u^j - \Pi_h u^j\|_{\text{mat,eul}}^2 + D \|\nabla(u^j - \Pi_h u^j)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(\| \|e^j\|_{\text{mat,eul}}^2 + D \|\nabla e^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

A segunda parte é estimada usando a Proposição 19. Já a primeira parte, usando a Proposição 17 e a estimativa (4.6) conclui-se

$$A_n \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right)$$

■

Esta estimativa foi obtida para a norma $\| \cdot \|_{\text{mat,eul}}$ e de seguida vamos estimar o erro relativamente à norma $\| \cdot \|_{\text{SUPG}}$. Para isso recorreremos à equação (4.8), fazemos $v_h = e^n$ e obtemos

$$(e_\tau^n, e^n) + \tilde{a}(e^n, e^n) = (T^n, e^n) + \delta (T^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) - \delta (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n).$$

Usando a coercividade da forma bilinear $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$, procedendo de modo análogo à demonstração anterior, é possível estabelecer os seguintes majorantes

$$\begin{aligned} (T^n, e^n) & \leq C \|T^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{D}{4} \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \delta (T^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) & \leq C \delta \|T^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{8} \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ -\delta (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^n) & \leq C \delta \|e_\tau^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{8} \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Assim, atendendo à definição da norma SUPG, obtemos

$$\| \|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \| \|e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \| \|e^n\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \Delta t \left(\|T^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \| \|e_\tau^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Somando para $j = 1, \dots, n$

$$\|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|e^j\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C\Delta t \sum_{j=1}^n \left(\|T^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|e_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (4.20)$$

Para concluir a estimativa para o erro associado à norma SUPG, falta ainda majorar cada termo $\|e_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}$. Para isso, vamos denotar $T_\tau^n = (T^n - T^{n-1})/\Delta t$ e estabelecer alguns resultados auxiliares.

Proposição 20 *Sejam $u, u', u'' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $u''' \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e T^n, T_τ^n como definidos anteriormente. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\delta \Delta t \sum_{j=2}^n \|T_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(h^{2k+1} + \Delta t^2).$$

Demonstração

Ora, pela definição de T_τ^j temos

$$\begin{aligned} T_\tau^n &= \frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t} = \frac{u'(t_n) - u'(t_{n-1})}{\Delta t} - \frac{\Pi_h u(t_n) - 2\Pi_h u(t_{n-1}) + \Pi_h u(t_{n-2})}{\Delta t^2} \\ &= \left(\frac{u'(t_n) - u'(t_{n-1})}{\Delta t} - u''(t_n) \right) + (u''(t_n) - \Pi_h u''(t_n)) \\ &\quad + \left(\Pi_h u''(t_n) - \frac{\Pi_h u(t_n) - 2\Pi_h u(t_{n-1}) + \Pi_h u(t_{n-2})}{\Delta t^2} \right). \end{aligned}$$

- O primeiro termo pode ser majorado, usando o Teorema 4 ponto 3, obtendo

$$\left\| u''(t_n) - \frac{u'(t_n) - u'(t_{n-1})}{\Delta t} \right\|^2 \leq C\Delta t \|u'''\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega))}^2.$$

- O segundo termo $u''(t_n) - \Pi_h u''(t_n)$ é facilmente majorando usando (4.6)

$$\|u''(t_n) - \Pi_h u''(t_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1/2} \|u''(t_n)\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

- Finalmente, para o terceiro termo

$$\begin{aligned} \Pi_h u(t_n) - 2\Pi_h u(t_{n-1}) + \Pi_h u(t_{n-2}) &= \Delta t^2 \Pi_h u''(t_n) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(t-t_n)^2}{2} \Pi_h u'''(t) dt \\ &\quad + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \frac{(t-t_n)^2}{2} \Pi_h u'''(t) dt \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
& \left\| \Pi_h u''(t_n) - \frac{\Pi_h u(t_n) - 2\Pi_h u(t_{n-1}) + \Pi_h u(t_{n-2}))}{\Delta t^2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \left\| \frac{1}{\Delta t^2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(t-t_n)^2}{2} \Pi_h u'''(t) dt - \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \frac{(t-t_n)^2}{2} \Pi_h u'''(t) dt \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{1}{4\Delta t^4} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} (t-t_n)^4 dt + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} (t-t_n)^4 dt \right) \|\Pi_h u'''(t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\
&\leq C\Delta t \|\Pi_h u'''(t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2.
\end{aligned}$$

Logo, usando estas três estimativas obtemos o resultado pretendido.

■

Proposição 21 *Sejam e^n e e_τ^n como anteriormente. Admitindo que δ satisfaz (4.10) então existe $C > 0$ tal que*

$$\Delta t \delta \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(h^{2k+1} + \Delta t^2).$$

Demonstração

Se a (4.8) fizermos $n = 1$ e $v_h = e_\tau^1$ então

$$\delta \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 = \delta [-\tilde{a}(e^1, e_\tau^1) + (T^1, e_\tau^1 + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^1) - \delta (e_\tau^1, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^1)].$$

Vamos majorar cada termo do membro direito.

- Tendo em atenção a que $\delta \leq h/(8C_0 \|\mathbf{b}\|_\infty)$ vamos majorar o primeiro termo do lado direito

$$\begin{aligned}
-\tilde{a}(e^1, e_\tau^1) &\leq D \|\nabla e^1\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)} \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \delta \|-D\Delta e^1 + \mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \left(\frac{D^2}{h^2} \|\nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\delta \|\mathbf{b}\|_\infty}{h} \left(\|D\Delta e^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq C \left(\frac{D^2}{h^2} \|\nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{D^2}{h^2} \|\nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq C \left(\frac{D^2}{h^2} \|\nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + C \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

- O segundo termo é análogo a (4.12) obtendo

$$(T^1, e_\tau^1 + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^1) \leq C \left(\|T^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

- Para o terceiro termo serão usadas as Proposições 1 e 4 seguindo-se

$$-\delta (e_\tau^1, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^1) \leq C \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Assim, usando estas três estimativas e absorvendo os termos correspondentes, obtemos

$$\|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\|T^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{D^2}{h^2} \|\nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

e portanto, usando o facto de $D \leq \delta \leq h/(8C_0 \|\mathbf{b}\|_\infty)$ e a norma $\|\cdot\|_{\text{SUPG}}$ ficamos com

$$\begin{aligned} \Delta t \delta \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \Delta t \left(\delta \|T^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta D}{h^2} \|\nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq C \left(\Delta t \delta \|T^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \|e^1\|_{\text{SUPG}}^2 \right) \end{aligned}$$

e agora só nos resta majorar $\Delta t \|e^1\|_{\text{SUPG}}$.

- Em (4.8) fazemos $n = 1$ e $v_h = e^1$. Assim

$$\begin{aligned} (e_\tau^1, e^1) + \tilde{a}(e^1, e^1) &= (T^1, e^1 + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^1) - \delta (e_\tau^1, \mathbf{b} \cdot \nabla e^1) \\ \frac{1}{\Delta t} \|e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|e^1\|_{\text{SUPG}}^2 &\leq (T^1, e^1 + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^1) - \frac{\delta}{\Delta t} (e^1, \mathbf{b} \cdot \nabla e^1) \end{aligned}$$

usando novamente estimativas feitas anteriormente, utilizando a Proposição 1 e a Desigualdade de Young

$$\frac{1}{\Delta t} \|e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|e^1\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \|T^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\Delta t} \|e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{\Delta t} \|e^1\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalmente, usando a Proposição 4 e (4.10)

$$\frac{1}{\Delta t} \|e^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|e^1\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \|T^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\Delta t} \|e^1\|_{L^2(\Omega)}^2$$

concluimos

$$\frac{\Delta t}{2} \|e^1\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \Delta t \|T^1\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e usando uma estimativa análoga a (4.19),

$$\Delta t \|T^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right).$$

Assim, chegamos a que

$$\begin{aligned} \Delta t \delta \|e_\tau^1\| &\leq C \Delta t \left(\|e^1\|_{\text{SUPG}} + \delta \|T^1\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \Delta t \|T^1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right) \end{aligned}$$

■

Podemos agora encontrar uma estimativa para (4.20).

Proposição 22 *Sejam $u, u', u'' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $u''' \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e e^n como definido. Admitindo que δ satisfaz (4.10) então existe $C > 0$ tal que*

$$\|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|e^j\|_{SUPG}^2 \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right).$$

Demonstração

Partindo da equação (4.20) basta majorar o último termo do lado direito.

Para simplificar a escrita, denotemos por $z^n = e^n$ e $z_\tau^n = (e^n - e^{n-1})/\Delta t$.

- Vamos começar por subtrair em (4.8), termo a termo, a mesma equação mas particularizando para $n - 1$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e_\tau^n - e_\tau^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) + \delta \left(-D \frac{\Delta e^n - \Delta e^{n-1}}{\Delta t} + \mathbf{b} \cdot \frac{\nabla e^n - \nabla e^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h \right) + D \left(\frac{\nabla e^n - \nabla e^{n-1}}{\Delta t}, \nabla v_h \right) \\ & + \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\nabla e^n - \nabla e^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) = \left(\frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t}, v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h \right) - \delta \left(\frac{e_\tau^n - e_\tau^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h \right). \end{aligned}$$

e, usando as notações iniciais, obtemos

$$(z_\tau^n, v_h) + \tilde{a}(z^n, v_h) = (T_\tau^n, v_h + \mathbf{b} \cdot \nabla v_h) - \delta (z_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h).$$

À semelhança do que foi feito em demonstrações anteriores, vamos substituir v_h por z^n e por δz_τ^n e somar. Assim obtemos

$$\begin{aligned} & (z_\tau^n, z^n) + \delta^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla z_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla z^n) + D \|\nabla z^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z^n\|_{\text{mat,eul}}^2 + D\delta (\nabla z^n, \nabla z_\tau^n) = (T_\tau^n, z^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla z^n) \\ & + \delta (T_\tau^n, z_\tau^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla z_\tau^n) + D\delta (\Delta z^n, \mathbf{b} \cdot \nabla z^n) + D\delta^2 (\Delta z^n, \mathbf{b} \cdot \nabla z_\tau^n) - \delta^2 (z_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla z_\tau^n). \end{aligned}$$

Podem ser usadas as estimativas (4.11)-(4.15), devidamente adaptadas para este contexto, chegando a

$$\begin{aligned} & \|z^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|z^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \left(\|\mathbf{b} \cdot \nabla z^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\mathbf{b} \cdot \nabla z^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \Delta t D \|z^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \Delta t \|z^n\|_{\text{mat,eul}}^2 + D\delta \left(\|\nabla z^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla z^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C\Delta t \|T_\tau^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Somando para $j = 2, \dots, n$ e temos

$$\begin{aligned} & \|z^n\|_b^2 + \Delta t \sum_{j=2}^n \left(D \|\nabla z^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z^j\|_{\text{mat,eul}}^2 \right) + D\delta \|\nabla z^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|z^1\|_b^2 + D\delta \|\nabla z^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + \Delta t \sum_{j=2}^n \|T_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Pela definição de $\|\cdot\|_b$ obtemos

$$\begin{aligned} \|z^j\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|z^j\|_b^2 + \Delta t \sum_{i=2}^j \left(D \|\nabla z^i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z^i\|_{\text{mat,eul}}^2 \right) + D\delta \|\nabla z^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|z^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{i=2}^j \|T_\tau^i\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Logo, somando para $j = 2, \dots, n$ e multiplicando por $\delta\Delta t$ é possível estabelecer que

$$\delta\Delta t \sum_{j=2}^n \|z^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta(n-1)\Delta t \|z^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta\Delta t \sum_{j=2}^n \|T_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Portanto, pela definição de $z^j = e_\tau^j$, chegamos à estimativa

$$\delta\Delta t \sum_{j=1}^n \delta \|e_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq CT\delta \|e_\tau^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\delta\Delta t \sum_{i=2}^n \|T_\tau^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Usando as Proposições 20 e 21 conclui-se que

$$\delta\Delta t \sum_{j=1}^n \delta \|e_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right). \quad (4.21)$$

Combinando (4.19) e (4.21) em (4.20) resulta a estimativa pretendida.

■

Teorema 7 *Sejam $u, u', u'' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $u''' \in L^2(0, T; H^{k+1}(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $\Pi_h u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Então a seguinte estimativa é válida*

$$\|u^n - U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|u^j - U_h^j\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right)$$

em que C depende das normas de u e $\Pi_h u$, nos respectivos espaços, dos dados do problema e C_0 e com δ a satisfazer (4.10).

Demonstração

De modo semelhante ao Teorema 6, vamos somar e subtrair $\Pi_h u$ obtendo

$$\begin{aligned} \|u^n - U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|u^j - U_h^j\|_{\text{SUPG}}^2 &= \|u^n - \Pi_h u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|u^j - \Pi_h u^j\|_{\text{SUPG}}^2 \\ &\quad + \|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|e^j\|_{\text{SUPG}}^2 \end{aligned}$$

Pelas Proposições 17 e 22 e por (4.6) conclui-se que

$$\|u^n - U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|u^j - U_h^j\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^2 \right).$$

■

Como vimos, tanto na norma $\|\cdot\|_{\text{SUPG}}$ como em $\|\cdot\|_{\text{mat,eul}}$ chegamos a estimativas da mesma ordem de convergência.

4.2.2 Método Crank-Nicolson: $\theta = 1/2$

Nesta secção vamos estudar a convergência do método Crank-Nicolson e chegar a estimativas semelhantes à do método de Euler Implícito. Assim sendo, começaremos por definir o método da seguinte forma.

Para cada $n = 1, \dots, M$ queremos encontrar $U_h^n \in V_h^k$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, v_h \right) + \tilde{a} \left(\frac{U_h^n + U_h^{n-1}}{2}, v_h \right) &= \left(\frac{f^n + f^{n-1}}{2}, v_h \right) \\ &+ \delta \left(\frac{f^n + f^{n-1}}{2} - \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h \right), \quad \forall v_h \in V_h^k \end{aligned} \quad (4.22)$$

com $U_h^0 = I_h^k u_0$. Da mesma forma, para que as regularidades exigidas na prova da convergência deste método estejam garantidas, no Teorema 5 é preciso que $m > \max\{(k+5)/2; 5\}$.

Nesta secção, o procedimento para derivar a estimativa de erro será semelhante ao que já foi feito na secção anterior. Primeiramente definamos $e^{n*} = (e^n + e^{n-1})/2$, o erro de truncatura

$$T_{CN}^n = \frac{(u'(t_n) - \Pi_h u'(t_n)) + (u'(t_{n-1}) - \Pi_h u'(t_{n-1}))}{2} + \frac{\Pi_h u'(t_n) + \Pi_h u'(t_{n-1})}{2} - \frac{\Pi_h u^n - \Pi_h u^{n-1}}{\Delta t}$$

e ainda

$$\|e^{n*}\|_{\text{mat,CN}}^2 = \delta \|e_\tau^n + \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

De forma análoga à secção anterior, é possível chegar à seguinte equação.

$$(e_\tau^n, v_h) + \tilde{a}(e^{n*}, v_h) = (T_{CN}^n, v_h + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla v_h) - \delta (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (4.23)$$

Substituindo v_h por e^{n*} e de seguida por δe_τ^n e somando, chegamos a

$$\begin{aligned} (e_\tau^n, e^{n*}) + D \|\nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 + D \delta (\nabla e^{n*}, \nabla e_\tau^n) + \delta^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) + \|e^{n*}\|_{\text{mat,CN}}^2 &= -\delta^2 (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) \\ + (T_{CN}^n, e^{n*} + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}) + \delta (T_{CN}^n, e_\tau^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) + \delta^2 (D \Delta e^{n*}, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) + \delta (D \Delta e^{n*}, \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}). \end{aligned}$$

Esta igualdade é semelhante a (4.9) com diferença que, em vez de estar e^n tem e^{n*} . Assim, podemos fazer estimativas semelhantes às da Proposição 18.

Proposição 23 *Sejam e^n , e_τ^n , e^{n*} e T_{CN}^n como definidos. Se δ satisfaz (4.10) então vale*

$$\begin{aligned} (T_{CN}^n, e^{n*} + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}) &\leq C \|T_{CN}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{D}{8} \|\nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \delta (T_{CN}^n, e_\tau^n + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) &\leq C \|T_{CN}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{D}{8} \|\nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{8} \|e^{n*}\|_{mat,CN}^2 \\ \delta (D\Delta e^{n*}, \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}) &\leq \frac{D}{8} \|\nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \delta^2 (D\Delta e^{n*}, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) &\leq \frac{D}{8} \|\nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{8} \|e^{n*}\|_{mat,CN}^2 \\ -\delta^2 (e_\tau^n, \mathbf{b} \nabla e_\tau^n) &\leq \frac{1}{4} \|e^{n*}\|_{mat,CN}^2. \end{aligned}$$

Portanto, usando a Proposição 23 na igualdade anterior obtém-se

$$(e_\tau^n, e^{n*}) + \frac{D}{2} \|\nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 + D\delta (\nabla e^{n*}, \nabla e_\tau^n) + \delta^2 (\mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}, \mathbf{b} \cdot \nabla e_\tau^n) + \frac{1}{2} \|e^{n*}\|_{mat,CN}^2 \leq C \|T_{CN}^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.24)$$

Veamos a seguinte proposição

Proposição 24 *Sejam e^n , e_τ^n e e^{n*} , então as seguintes igualdades valem*

$$\begin{aligned} (e_\tau^n, e^{n*}) &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ (\nabla e_\tau^n, \nabla e^{n*}) &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 24 a (4.24) conclui-se que

$$\begin{aligned} \|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + D\Delta t \|\nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta^2 \left(\|\mathbf{b} \cdot \nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ + D\delta \left(\|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \Delta t \|e^{n*}\|_{mat,CN}^2 \leq C\Delta t \|T_{CN}^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A seguinte proposição permite majorar $\|T_{CN}^j\|_{L^2(\Omega)}^2$.

Proposição 25 *Sejam $u, u' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e T_{CN}^j como definido anteriormente. Então existe $C > 0$ tal que*

$$\|T_{CN}^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(h^{2k+1} + \Delta t^3).$$

Agora podemos obter a seguinte estimativa.

Proposição 26 *Sejam $u, u' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e e^n, e^{n*} como definidos anteriormente. Então a seguinte estimativa vale*

$$\|e^n\|_b^2 + D\delta \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(D \|\nabla e^{j*}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e^{j*}\|_{mat,CN}^2 \right) \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^4 \right)$$

Demonstração

Partindo da inequação (4.25) vamos somar para $j = 1, \dots, n$, obtendo

$$\|e^n\|_b^2 + D\delta \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(D \|\nabla e^{j*}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e^{j*}\|_{\text{mat,CN}}^2 \right) \leq C\Delta t \sum_{j=1}^n \|T_{CN}^j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Usando a Proposição 25 conclui-se que

$$\|e^n\|_b^2 + D\delta \|\nabla e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(D \|\nabla e^{j*}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e^{j*}\|_{\text{mat,CN}}^2 \right) \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^4 \right)$$

■

Estamos em condições de provar o seguinte teorema.

Teorema 8 *Sejam $u, u' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $\Pi_h u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Então é válida a seguinte estimativa*

$$\|u^n - U_h^n\|_b^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left(\left\| \frac{u^j + u^{j-1}}{2} - \frac{U_h^j + U_h^{j-1}}{2} \right\|_{\text{mat,CN}}^2 + D \left\| \frac{\nabla(u^j + u^{j-1})}{2} - \frac{\nabla(U_h^j + U_h^{j-1})}{2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \delta D \|\nabla(u^n - U_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^4 \right)$$

em que C depende da norma das funções nos espaços indicados, dos dados do problema e C_0 e com δ a satisfazer (4.10).

De modo análogo ao exposto na secção anterior, podemos estabelecer uma estimativa para a norma SUPG. Fazendo $v_h = e^{n*}$ na equação (4.23), vem

$$(e_\tau^n, e^{n*}) + \tilde{a}(e^{n*}, e^{n*}) = (T_{CN}^n, e^{n*} + \delta \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}) - \delta (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}). \quad (4.26)$$

É agora possível, com a representação anterior, e usando técnicas análogas à Proposição 23, a seguinte proposição.

Proposição 27 *Sejam e^n, e_τ^n, e^{n*} e T_{CN}^n . Então são válidas*

$$\begin{aligned} (T_{CN}^n, e^{n*}) &\leq C \|T_{CN}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{D}{4} \|\nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \delta (T_{CN}^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}) &\leq C \|T_{CN}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{8} \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \delta (e_\tau^n, \mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}) &\leq C\delta \|e_\tau^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{8} \|\mathbf{b} \cdot \nabla e^{n*}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Assim, usando as Proposições 13, 23 e 27 na equação (4.26), obtendo

$$\|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \|e^{n*}\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C\Delta t \left(\|T_{CN}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|e_\tau^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Somando para $j = 1, \dots, n$

$$\|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|e^{j*}\|_{SUPG}^2 \leq C \left(\Delta t \sum_{j=1}^n \|T_{CN}^j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \|e_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (4.27)$$

O primeiro termo pode ser majorado pela Proposição 25. Para majoração do segundo termo é preciso provar primeiro uma estimativa intermédia.

Proposição 28 *Sejam $u, u', u'' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'', \Pi_h u''' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, $u'''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $T_{CN, \tau}^n = (T_{CN}^n - T_{CN}^{n-1})/\Delta t$. Então vale*

$$\Delta t \delta \sum_{j=2}^n \|T_{CN, \tau}^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (h^{2k+1} + \Delta t^4).$$

Podemos agora majorar o último termo de (4.27).

Proposição 29 *Sejam $u, u', u'' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'', \Pi_h u''' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, $u'''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e e_τ^n como definido anteriormente. Então*

$$\Delta t \delta \sum_{j=1}^n \|e_\tau^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (h^{2k+1} + \Delta t^4)$$

Assim, podemos provar a seguinte proposição

Proposição 30 *Sejam $u, u', u'' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'', \Pi_h u''' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$, $u'''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e e^n e e^{n*} . Então vale*

$$\|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|e^{j*}\|_{SUPG}^2 \leq C (h^{2k+1} + \Delta t^4). \quad (4.28)$$

Portanto, podemos demonstrar o seguinte resultado de convergência.

Teorema 9 *Sejam $u, u', u'' \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$, $u''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\Pi_h u, \Pi_h u', \Pi_h u'', \Pi_h u''' \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ e $u'''' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Assim, é válida a seguinte estimativa*

$$\|u^n - U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left\| \frac{u^j + u^{j-1}}{2} - \frac{U_h^j + U_h^{j-1}}{2} \right\|_{SUPG}^2 \leq C (h^{2k+1} + \Delta t^4)$$

em que C depende da norma das funções nos respectivos espaços, dos dados do problema e de C_0 e com δ a satisfazer (4.10).

Demonstração

Vamos utilizar a mesma estratégia de somar e subtrair $\Pi_h u$, adaptado em cada norma

$$\begin{aligned} \|u^n - U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left\| \frac{u^j + u^{j-1}}{2} - \frac{U_h^j + U_h^{j-1}}{2} \right\|_{\text{SUPG}}^2 &\leq \|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \|e^{j*}\|_{\text{SUPG}}^2 \\ &+ \|u^n - \Pi_h u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left\| \frac{u^j + u^{j-1}}{2} - \frac{\Pi_h u^j + \Pi_h u^{j-1}}{2} \right\|_{\text{SUPG}}^2. \end{aligned}$$

Pelas Proposições 17 e 30 e por (4.6), obtemos o resultado

$$\|u^n - U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^n \left\| \frac{u^j + u^{j-1}}{2} - \frac{U_h^j + U_h^{j-1}}{2} \right\|_{\text{SUPG}}^2 \leq C \left(h^{2k+1} + \Delta t^4 \right).$$

■

4.3 Resultados numéricos

Nesta secção vamos ilustrar os resultados de convergência provados neste capítulo, com recurso a alguns exemplos numéricos. O exemplo será semelhante, tanto para o caso de Euler Implícito como para o Crank-Nicolson e é o mesmo exemplo presente no artigo [20].

Exemplo 5

Vamos assim considerar o problema definido por $\Omega = (0, 1)^2$, $T = 1$, $D = 10^{-8}$, $b = (1, -1)$ e f de tal forma a que a solução do problema seja

$$u(x, y, t) = e^{\sin(2\pi t)} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y), \quad (x, y, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T].$$

Vamos fazer os estudos com três valores para o grau total dos polinómios k com $k = 1, 2, 3$. Quando iniciámos o estudo das estimativas supusemos que δ teria que satisfazer (4.10), e portanto, uma questão natural numa simulação numérica deste tipo é: qual valor de δ escolher? Infelizmente, de acordo com (4.10), e não conhecendo C_0 , apenas sabemos que δ terá de ser suficientemente pequeno. Nesse sentido, vamos tomar $\delta = O(h)$, para ambos os casos. Observemos que δ também poderia depender de Δt . Nos exemplos que vamos analisar, teremos de considerar um valor para cada caso. Assim, no caso do Euler Implícito, como as estimativas dos Teoremas 6 e 7 aparece Δt^2 , vamos considerar $\Delta t = O(h^{k+1/2})$ para que a estimativa final seja $O(h^{2k+1})$. Podemos ver na Figura 4.1 o caso do Euler Implícito.

Para o caso do Crank-Nicolson vamos considerar, de forma análoga, $\Delta t = O(h^{k/2+1/4})$ para que as estimativas finais dos Teoremas 8 e 9 sejam $O(h^{2k+1})$. Podemos observar os resultados na Figura 4.2 para este caso.

Observamos que em ambos os testes, tanto para o método de Euler Implícito (4.7) como o método Crank-Nicolson (4.22), os resultados numéricos corroboram com as ordens de convergência estabelecidas nos Teoremas 6, 7, 8 e 9 em função de $k = 1, 2, 3$.

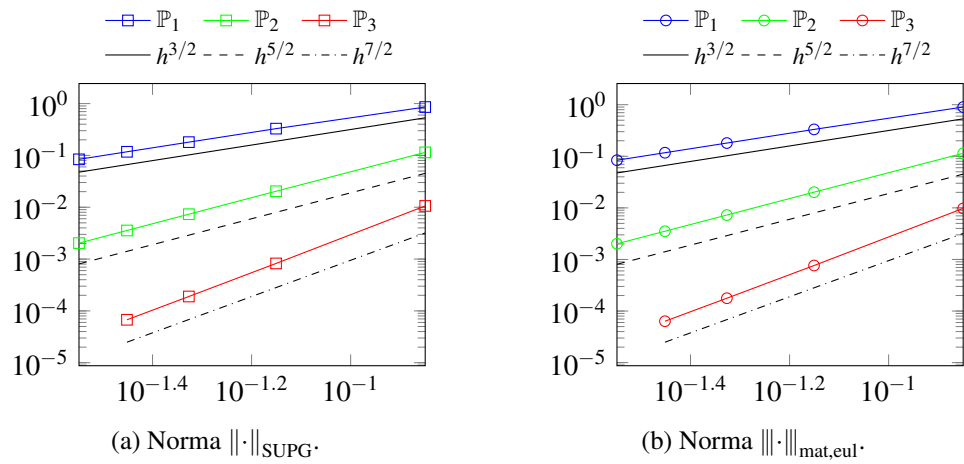


Fig. 4.1 Ordens de convergência das normas $\|\cdot\|_{\text{SUPG}}$ e $\|\cdot\|_{\text{mat,eul}}$ dependendo da ordem total dos polinômios para o Euler Implícito.

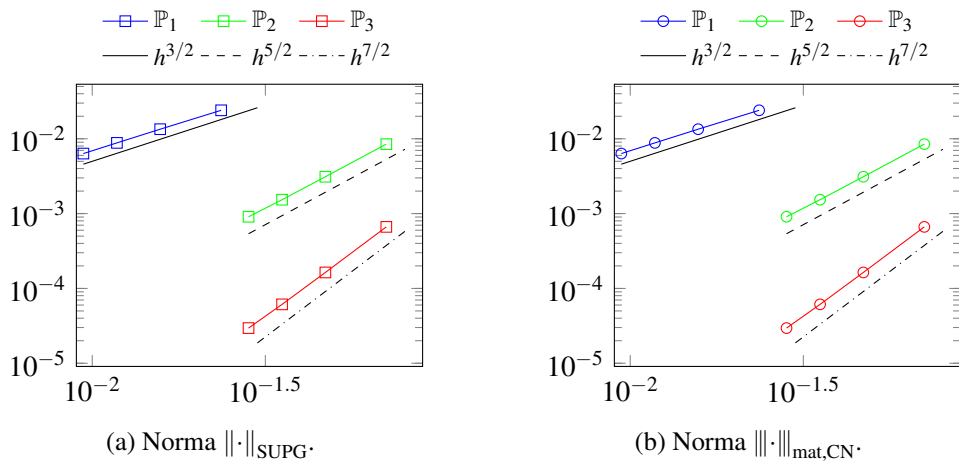


Fig. 4.2 Ordens de convergência das normas $\|\cdot\|_{\text{SUPG}}$ e $\|\cdot\|_{\text{mat,CN}}$ dependendo da ordem total dos polinômios para o Crank-Nicolson.

Capítulo 5

Simulação numérica do derrame do *Prestige*

O petróleo é uma mistura de vários hidrocarbonetos que são inflamáveis, tóxicos e que, na maioria das vezes, apresenta uma densidade menor que a da água. Os derivados do petróleo são muito usados no dia a dia, por exemplo como combustível para automóveis e aviões (gasolina, GPL e querosene), asfalto para a construção das estradas, parafina para o desenvolvimento de cosméticos e velas. O petróleo é extraído do subsolo através de uma perfuração num poço de petróleo, previamente localizado.

Quando o petróleo é extraído no mar, ele precisa de ser transportado para as refinarias, através de navios petroleiros. Por vezes ocorrem acidentes e naufrágios desses navios causando assim um derrame de petróleo no mar. Alguns exemplos deste tipo de catástrofes são: (a) Alasca [29] - 1989, a colisão do navio *Exxon Valdez* com rochas causou um derrame de cerca 40 milhões de litros do mar, causando a morte de cem mil aves, salmões e baleias; (b) Golfo da Pérsia [2] - 1991, Saddam Hussein ordenou a destruição de centenas de poços de petróleo no Kuwait e acabaram por ser derramados mais de 11 milhões de barris de óleo no Golfo da Pérsia; (c) Galiza [16] - 2002, o navio *Prestige* afundou na costa galega, causando um derrame com mais de 64 mil toneladas de petróleo, cerca de 25000 aves foram encontradas mortas ou com danos graves, e (d) Brasil [10] - 2019, o derrame contaminou 132 praias de 61 municípios de nove estados da região.

As consequências de um derrame de petróleo são muito nefastas para o meio ambiente, indo desde a diminuição da fotossíntese na água, intoxicação a fauna marinha, asfixiamento, desequilíbrio térmico nas aves, até ao impacto negativo do turismo local e atividade pesqueira, assim como em investimentos para a limpeza das praias e águas contaminadas [25]. Deste modo, a modelação deste tipo de desastres é de extrema importância e necessidade. Atualmente, existem duas formas mais usadas para modelar derrames de petróleo:

1. *Particle Tracking* - esta abordagem considera a mancha de petróleo como um aglomerado de partículas, cujo comportamento evolui de acordo com um sistema de equações diferenciais ordinária do tipo

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(x_o, t) = \mathbf{b}(\chi(x_o, t), t),$$

onde χ é posição Lagrangeana da partícula x_o e \mathbf{b} é a velocidade Euleriana [11, 27].

2. Equação com Derivadas Parciais - este método modela a mancha de petróleo através de uma função densidade e estabelece uma equação de convecção-difusão (e potencialmente reação) para esta função densidade.

Em ambos os métodos, *particle tracking* ou usando uma equação de convecção-difusão, o campo de velocidades \mathbf{b} , deve ser conhecido *a priori*. Tal campo pode ser reconstruído com base em leituras [11] ou então, em certos cenários, pode ser modelado através de sistemas de EDPs [8].

Para modelar um derrame usando EDP, vamos considerar a seguinte equação de convecção-difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \nabla \cdot (\mathbf{D}(x)\nabla u(x, t) - \mathbf{b}(x, t)\nabla u(x, t)) = f(x, t),$$

onde \mathbf{D} é a matriz dos coeficientes de difusão, \mathbf{b} é o vetor da velocidade das correntes e f é o termo fonte. Segundo [17], vamos tomar $\mathbf{D} = D\delta_{ij}$ com $D = 3.2 \times 10^{-8} (141.5/\rho - 131.5)^{0.67} T_C^{1.62} e^{I/2}$ m^2h^{-1} onde T_C é a temperatura, ρ densidade do óleo, $\rho < 1$, e I a força iónica, ou seja, se não houver alterações físicas e químicas na água em que o óleo foi derramado, \mathbf{b} está relacionado com a velocidade do vento e das correntes marítimas, e está na grandeza de 10^1 quilómetros por hora. Quando aplicamos o método de Galerkin com elementos finitos neste tipo de equações, o número de Peclet será constante em todo o domínio e aproximadamente igual a $h \times 10^6$, pelo que precisaríamos de refinar a malha até $h < 10^{-6}$ para que $Pe_{h,K} < 1$, pelo que não é viável. Deste modo, o método SUPG estudado no capítulo anterior, torna-se uma mais valia a simulação deste tipo de fenómenos, filtrando as oscilações que poluiriam a solução numérica, caso apenas se aplicasse o método de Galerkin com elementos finitos segmentados polinomiais.

Neste capítulo será apresentado o caso particular do derrame do *Prestige* e o seu principal objetivo é aplicar os métodos introduzidos no Capítulo 4 para proceder à simulação do referido derrame. Será usado o software FREEFEM e um código escrito pelo mestrando (Anexo A). Assim este capítulo está dividido em duas partes, sendo a primeira a apresentação do problema, modelação para as diretrizes estabelecidas nos outros capítulos e o cálculo da solução aproximada pelos dois métodos numéricos estudados no Capítulo 4 e a segunda parte será a comparação entre os resultados obtidos e outras propostas de modelação.

5.1 *Prestige*

A 13 de novembro de 2002, no norte da costa galega (Espanha), o navio *Prestige* enfrentaria uma tempestade que resultou na explosão de um tanque, começando assim o derrame de um combustível pesado. A partir do dia 15, o navio mudou o rumo para sudoeste, acabando por afundar a 19 de novembro de 2002, derramando um total de 64 mil litros de petróleo [1].

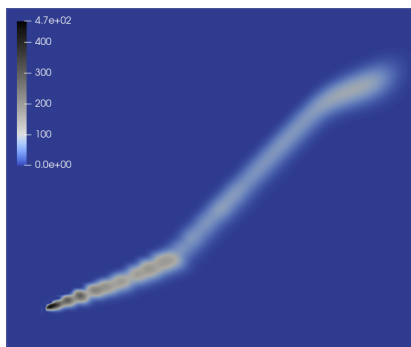
Neste contexto, seja $\Omega = (0, 300) \times (0, 250)$, vamos considerar a temperatura $T_C = 11^\circ\text{C}$, $I = 0.35$ e $\rho = 0.97$, para um crude genérico nº 6 [17, 23]. Como mencionado anteriormente, o parâmetro D é igual a $1.1 \times 10^{-11} \text{km}^2\text{h}^{-1}$. Vamos considerar a evolução do petróleo a partir do momento em que o barco foi obrigado a mudar o rumo, 15 de novembro, até que este afunda. Assim, o intervalo temporal é de 120 horas e o termo fonte será $f(x, y, t) = 533.3 \times \mathbb{I}_{((x-178+148t/120)^2 + (y-191+161t/120)^2 < 2)}(x, y, t)$ com $(x, y, t) \in \Omega \times (0, 120]$, onde \mathbb{I} é a função indicatriz. Para o Euler Implícito foram considerados $h = 2.603$, $\Delta t = 1$ e $\delta = 0.1 \times h$ e para o Crank-Nicolson $h = 1.953$, $\Delta t = 0.5$ e $\delta = 0.3 \times h$.

Vale salientar que o transporte do óleo pode ser causado por três fatores: correntes marítimas, movimento induzido pelo vento e o movimento induzido pelas ondas [31]. Neste caso vamos apenas considerar o movimento induzido pelo vento, e na literatura é referido que este movimento é parametrizado cerca de 3% da velocidade do vento [31]. Embora os resultados do Capítulo 4 tenham sido obtidos com campo de velocidades constante no tempo, nas simulações que se seguem vamos considerar que a velocidade é seccionalmente constante e ilustrar a robustez da metodologia. A velocidade e direção do vento pode ser visto na Tabela 5.1 [23].

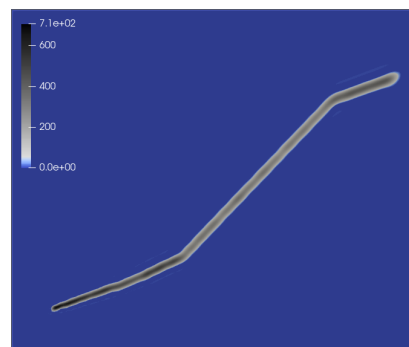
Tempo (horas)]0,23]]23,49]]49,71]]71,73]]73,87]]87,95]]95,97]]97,120]
Direção (°)	-45	45	45	-21	-45	-20	-45	-45
Velocidade (Km/h)	31.5	55.56	46.3	37.04	24.1	37.04	42.6	31.5

Tabela 5.1 Velocidade e direção do vento de 15 a 19 de novembro de 2002.

Aplicando as metodologias numéricas cujo suporte foi desenvolvido no capítulo anterior, vamos obter soluções numéricas para este problema, tanto com o método de Euler Implícito, como com método de Crank-Nicolson, ambos com estabilização por método SUPG e para diferentes ordens polinomiais, $k = 1, 2, 3$.



(a) Simulação numérica obtida com o método Euler Implícito e SUPG;



(b) Simulação numérica obtida com o método Crank-Nicolson e SUPG;

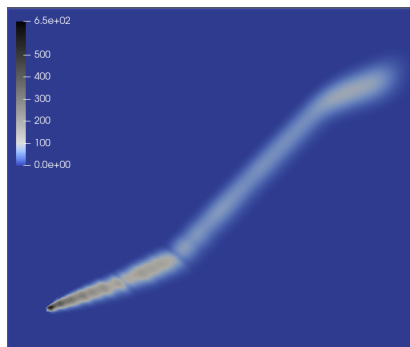
Fig. 5.1 Soluções numéricas obtidas na modelação do derrame do navio *Prestige* com $k = 1$.

Os resultados numéricos, para $t = 120$, usando os métodos de Euler Implícito e Crank-Nicolson, podem ser vistos na Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 usando espaços diferentes de aproximação no espaço ($k = 1, 2, 3$, respectivamente).

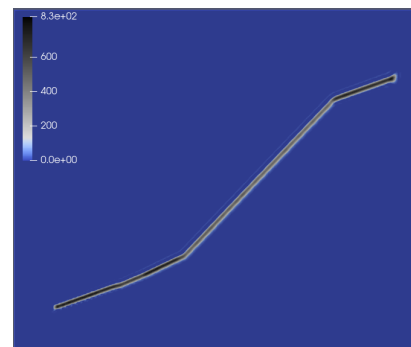
Uma rápida análise aos gráficos apresentados aparenta mostrar que a solução calculada pelo método Euler Implícito parece ser mais difusiva que a calculada pelo método Crank-Nicolson.

5.2 Outras simulações e comparações

Agora vamos obter uma simulação com um método de *particle tracking* usando o *open source* WebGNOME [22] desenvolvido pela Administração Nacional Oceânica e Atmosférica (em inglês *National Oceanic and Atmospheric Administration* - NOAA). Com os mesmos dados na secção anterior obtemos o resultado que pode ser visto na Figura 5.4a.

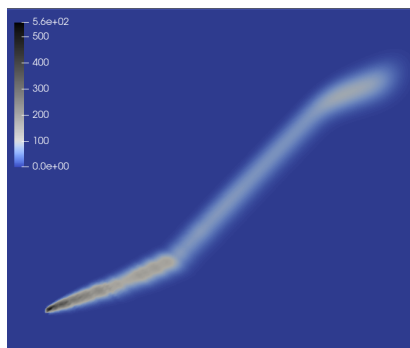


(a) Simulação numérica obtida com o método Euler Implícito SUPG;

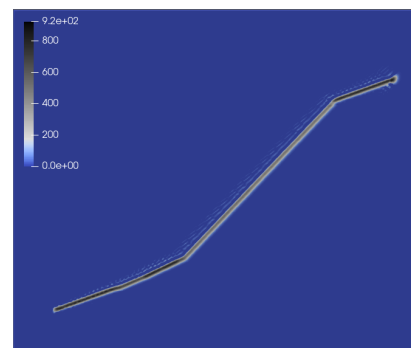


(b) Simulação numérica obtida com o método Crank-Nicolson e SUPG;

Fig. 5.2 Soluções numéricas obtidas na modelação do derrame do navio *Prestige* com $k = 2$.

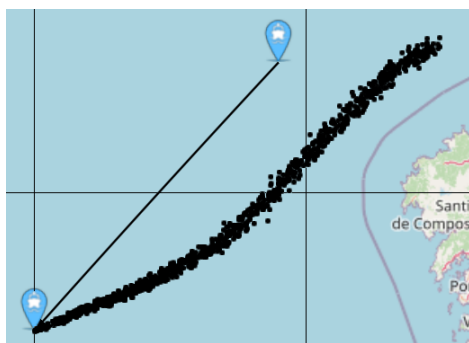


(a) Simulação numérica obtida com o método Euler Implícito e SUPG;

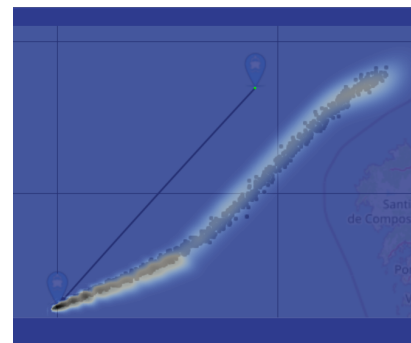


(b) Simulação numérica obtida com o método Crank-Nicolson e SUPG;

Fig. 5.3 Soluções numéricas obtidas na modelação do derrame do navio *Prestige* com $k = 3$.



(a) Simulação do derrame do navio *Prestige* obtida com *particle tracking*.



(b) Sobreposição das soluções do Euler Implícito com $k = 1$ e *particle tracking*.

Fig. 5.4 Solução obtida pelo método *particle tracking* e comparação com o modelo de EDPs.

Podemos observar na Figura 5.4b que neste tipo de simulação, a mudança da trajetória não é tão nítida, mas ambos os métodos permitem obter soluções que estão em conformidade.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho começámos por apresentar uma equação de convecção-difusão estacionária, cuja solução clássica requer certas restrições de regularidade aos coeficientes. No entanto, transformando a formulação do problema para um contexto diferente, conseguimos definir a formulação variacional e encontrar condições suficientes, no contexto da formulação fraca, para os coeficientes da equação, de modo a que consigamos garantir a existência e unicidade de solução fraca, exigindo condições menos restritivas que a solução clássica. Avançámos para a discretização dos espaços e definimos assim o método de Galerkin com elementos finitos seccionalmente polinomiais, para calcular a solução aproximada.

De modo a motivar a necessidade de métodos de estabilização, introduzimos um exemplo onde a solução aproximada, obtida pelo método anterior, apresenta oscilações, uma limitação numérica, quando o comportamento convectivo é o dominante na equação. Vimos, muito brevemente que, uma alternativa em resposta destas oscilações é refinar a malha. No entanto, pode não ser exequível em certas circunstâncias, pelo que é preciso elaborar outro tipo de ferramenta, que nos levou a introduzir métodos de estabilização, nomeadamente, o método SUPG. Introduzimos assim a definição de métodos SUPG e estudámos a sua estabilidade e uma estimativa para o erro cometido relativo a uma norma adequada.

De seguida apresentámos uma equação de convecção-difusão não estacionária e, à semelhança do que foi feito anteriormente, definimos a formulação fraca e o método SUPG para este tipo de equação. A componente temporal da equação, foi tratada pelo método- θ . Os casos particulares de θ estudados foram $\theta = 1$ e $\theta = 1/2$, que correspondem aos métodos clássicos de Euler Implícito e Crank-Nicolson, respetivamente. Para cada um destes métodos, foram estabelecidos dois resultados de convergência, muito semelhantes entre eles, um para a norma $\|\cdot\|_{\text{SUPG}}$ e outro para $\|\cdot\|_{\text{mat}}$.

Com base no naufrágio e derrame do navio petrolífero *Prestige*, modelámos o problema de forma a podermos calcular uma solução aproximada usando os métodos numéricos estudados no Capítulo 4. Com as várias soluções obtidas, percebemos que o método Euler Implícito induz um efeito difusivo maior que o método Crank-Nicolson. Por fim foi realizada uma comparação entre uma solução obtida pelo mestrando e uma solução do método *particle tracking*. A comparação foi feita por meio de uma sobreposição à escala das duas soluções, o que permitiu observar que ambas são muito semelhantes quanto à forma da solução. No entanto, na solução obtidas pelo modelo de EDPs, as mudanças da direção da componente \mathbf{b} são mais nítidas.

Vale salientar que nestas simulações foi apenas considerado o vento, o que pode levar a um distanciamento com a mancha de petróleo real. Para nos aproximarmos da mancha real seria necessário incorporar as correntes marítimas, as ondas, movimentos induzidos pelo vento pois todos estes afetam a trajetória à superfície do oceano.

Bibliografia

- [1] Albaigés, J., Morales-Nin, B., and Vilas, F. (2006). The prestige oil spill: A scientific response. *Marine pollution bulletin*, 53:205–7.
- [2] Barber, T. (2018). 1991 Gulf War Oil Spill.
- [3] Barrenechea, G.R., J. V. K. P. e. a. (2018). A unified analysis of algebraic flux correction schemes for convection–diffusion equations. *SeMA Journal*, 75:655–685.
- [4] Bouças, M. H. C. R. (2017). Modelação de derrames de hidrocarbonetos – análise do modelo de deriva do instituto hidrográfico. Dissertação de Mestrado.
- [5] Brenner S., S. L. (1994). *The mathematical Theory of finite element methods*. Springer-Verlag.
- [6] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London.
- [7] Brezzi F., B. M. and G., R. (1992). A relationship between stabilized finite element methods and the Galerkin method with bubble functions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 96:117–129.
- [8] Carmo, J. Antunes do, P. J. and J.P., V. (2010). Oil spills in coastal zones: Predicting slick transport and weathering processes. *The Open Ocean Engineering Journal*, 3:129–142.
- [9] Ciarlet, P. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Oxford.
- [10] Cordeiro, E. A. F. (2019). Ministro avalia impacto de manchas de óleo. www.mma.gov.br/informma/item/15641-ministro-sobrevoa-litoral-de-sergipe.html (Último Acesso: 29/06/2020).
- [11] Dagestad K., Johannes R., B. A. (2018). OpenDrift v1.0: a generic framework for trajectory modelling. *Geosci. Model Dev.*, 11:1405–1420.
- [12] Dagestad K., Johannes R., H. A. and B., C. (2018). The effect of vertical mixing on the horizontal drift of oil spills. *Ocean Sci.*, 14:1581–1601.
- [13] Douglas J., J. W. (1989). An Absolutely Stabilized Finite Element Method for the Stokes Problem . *Mathematics of Computation*, 52:495–508. doi.org/10.1090/S0025-5718-1989-0958871-X.
- [14] Evans, L. C. (2010). *Partial Diferencial Equation*. American Mathematical Society, 2nd edition.
- [15] Fernandes, R. (2001). Modelação de derrames de hidrocarbonetos. Trabalho dFinal de Curso.
- [16] Garcia, R. (2003). The prestige: one year on, a continuing disaster. Marine Officer, WWF-Spain.
- [17] Hamam S., Hamoda M., S. H. and A., K. (1988). Crude oil dissolution in saline water. *Water, Air, and Soil Pollution*, 37:55–64. doi.org/10.1007/BF00226479.
- [18] Hughes T., Brooks, A. (1982). Streamline Upwind Petrov-Galerkin Formulation for Convection-Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259. [doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90071-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8).

- [19] Hughes T., Franca L., H. G. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII The Galerkin/Least-Squares method for advective-diffusive equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:173–189.
- [20] John, V. and Novo, J. (2011). Erro Analysis of the SUPG Finite Element Discretization of Evolutionary Convection-Diffusion-Reaction Equations. *SIAM J. Numerical Analysis*, 49:1149–1176. doi:10.2307/23074327.
- [21] Muniz M. M., A. G. B. (2012). *Soluções Numéricas Via Método Dos Elementos Finitos Para Problemas Difusivos-Convectivos Escalares e Estacionários*. Iniciação Científica, Universidade Federal Fluminense.
- [22] NOAA (2017). WebGNOME. <https://gnome.orr.noaa.gov/> (Último Acesso: 02/07/2020).
- [23] NOAA (2019). IncidentNews. incidentnews.noaa.gov/incident/7804 (Último Acesso: 02/07/2020).
- [24] Quarteroni A., Valli, A. (2008). *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1st edition.
- [25] Santos, V. S. (2019). Danos causados por vazamento de petroleo nos oceanos.
- [26] Süli, E. (2005). An introduction to the numerical analysis of partial differential equations.
- [27] Sprenger, M. and Wernli, H. (2015). The LAGRANTO Lagrangian analysis tool – version 2.0. *Geosci. Model Dev.*, 8:2569–2586.
- [28] T. S. van den Bremer, . B. (2017). Stokes drift. *Geosci. Model Dev.*, 376.
- [29] The Editors of Encyclopaedia Britannica (2020). Exxon valdez oil spill. *Encyclopædia Britannica, inc.* (Acesso em 20/04/2020).
- [30] Tomáš Bodnár; Giovanni P. Galdi, S. N. (2020). *Fluids Under Pressure*. Birkhäuser, Springer Nature Switzerland AG.
- [31] Zhang B., Zhang C., . O. J. (1991). Surf-a simulation model for the behaviour of oil slicks at sea. *Oil Pollution: Environmental risk assessment (OPERA). Proceedings of opera workshop*, page 61–85.

Anexo A

Código

```
load "Element_P3"

// Parameters
real tau;
real D = 1.1e-11;

func real b1 (real t){
    real B1 = 31.5*cos(-pi/4)*(t<=23)+55.56*cos(pi/4)*(23<t && t<=49)+46.3*cos(pi/4)*(49<t &&
t<=71)+37.04*cos(113*pi/60)*(71<t && t<=73)+24.1*cos(-pi/4)*(73<t && t<=87)+37.04*cos(17*pi/9)
*(87<t && t<=95)+42.6*cos(-pi/4)*(95<t && t<=97)+31.5*cos(-pi/4)*(97<t);
    return 0.03*B1;
}

func real b2 (real t){
    real B2 = 31.5*sin(-pi/4)*(t<=23)+55.56*sin(pi/4)*(23<t && t<=49)+46.3*sin(pi/4)*(49<t &&
t<=71)+37.04*sin(113*pi/60)*(71<t && t<=73)+24.1*sin(-pi/4)*(73<t && t<=87)+37.04*sin(17*pi/9)
*(87<t && t<=95)+42.6*sin(-pi/4)*(95<t && t<=97)+31.5*sin(-pi/4)*(97<t);
    return 0.03*B2;
}

// Mesh
int m = 200; int L = 300; int LL=250;
mesh Th = square(m, m, [L*x, LL*y]);

// Fespace
fespace Vh(Th, P1);
fespace Xh(Th, P0);
Vh u, v, oldU, f0,f1,B1,B2, F;
Xh hK = hTriangle;
tau = 0.5; //Delta t
real delta = 0.1*hK[.].max;
```

```

real theta = 0.5; // 0 - EI ; 0.5 - CN

// Function
func real f (real t){
    return (533.3*((x-178+t/120*148)^2+(y-191+t/120*161)^2<2));
}

// Macro
macro Laplacian(u)(dxx(u)+dyy(u)) //
macro bgrad(u) (B1*dx(u) + B2*dy(u))//
macro gradgrad(u,v)(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v))//
macro atilde(u,v) (delta*(-D*Laplacian(u) + bgrad(u))*bgrad(v)) //

varf a(u,v)
    =int2d(Th)(u *v )
    +int2d(Th)(tau*theta*D*gradgrad(u,v))
    + on(1, 2, 3, 4,u=0);

matrix ASPACE = a(Vh, Vh);

varf aTime(u,v)
    =int2d(Th)(tau*theta*(bgrad(u)*v + atilde(u,v)))
    +int2d(Th)(delta*u*bgrad(v))
    + on(1, 2, 3, 4,u=0);

varf l(unused,v)
    = int2d(Th)(tau*(theta*f1 + (1-theta)*f0)*(v + delta*bgrad(v)))
    +int2d(Th)(oldU *(v+delta*bgrad(v)))
    -int2d(Th)(tau*(1 - theta)*( D*gradgrad(oldU,v) + bgrad(oldU)*v + atilde(oldU,v) ))
    + on(1, 2, 3, 4,unused=0);

matrix A,Atime;
real T = 120;
int M = int(T/tau);
oldU = f(0);

//plot(oldU, cmm=" t="+0+", min="+oldU[.min]+", max="+oldU[.max],fill=true, value=true);

for (int n = 1; n <= M; n++){
    // Update
    f0 = f((n-1)*tau);
    f1 = f(n*tau);
}

```

```
B1 = b1(n*tau);
B2 = b2(n*tau);

    // Solve
    Atime = aTime(Vh,Vh);
    F[] = l(0,Vh);
    A = Aspace + Atime;
    set(A,solver=UMFPACK);
    u[] = A^-1*F[];
    oldU = u;

//plot(u, cmm=" t="+n*tau+", min="+u[].min+", max="+u[].max,fill=true, value=true);
}
```