



UNIVERSIDADE D
COIMBRA



Carina Peixoto Tavares

**OTIMIZAÇÃO DA GESTÃO OPERACIONAL
NUM CENTRO DE RESSONÂNCIA MAGNÉTICA
ATRAVÉS DA PROGRAMAÇÃO DINÂMICA**

Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em
Finanças, orientada pelo Professor Doutor João Luís Cardoso
Soares e apresentada ao Departamento de Matemática da
Faculdade de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia.

Julho de 2020

Otimização da gestão operacional num centro de ressonância magnética através da programação dinâmica

Carina Peixoto Tavares



UNIVERSIDADE D
COIMBRA



Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

July 2020

Agradecimentos

Durante a realização desta dissertação contei com o apoio de inúmeras pessoas às quais expresso a minha gratidão da seguinte forma:

Ao professor doutor João Luís Cardoso Soares por todo o ensinamento ao longo destes meses, pela exigência, pelo apoio e disponibilidade constantes.

À minha família, nomeadamente, aos meus pais, aos meus avós e ao meu irmão, que foram um pilar fundamental, por todo apoio incondicional ao longo de todo o meu percurso académico e por me permitirem concretizar este objetivo.

Ao meu namorado, Ricardo Soares, por todo carinho, coragem e companhia, pelas palavras de conforto e por todo apoio ao longo desta etapa.

Aos amigos de Coimbra, Pedro Cabrita, Eva Seiça e Sara Cerqueira, pela amizade e partilha de momentos, partilha de informação e ajuda constantes.

Às amigas de longa data, Rita Teixeira, Ana Barroso e Carolina Raimundo pela preocupação, pelos conselhos e por todo carinho em todas as ocasiões.

O trabalho aqui desenvolvido foi parcialmente realizado no âmbito do projeto MobiWise: From mobile sensing to mobility advising (P2020 SAICTPAC / 0011/2015), co-financiado pelo COMPETE 2020, Portugal 2020 - Programa Operacional de Competitividade e Internacionalização (POCI), do ERDF (Fundo Europeu de Desenvolvimento Regional) da União Europeia e da Fundação portuguesa para a Ciência e Tecnologia (FCT).



Cofinanciado por:



Resumo

No âmbito da saúde, os centros de diagnóstico médicos como centros de Ressonância Magnética (*RM*), Raio-X (*RX*), Tomografia Computadorizada (*TAC*), entre outros, são uma das componentes críticas da gestão hospitalar. Esta dissertação incide na gestão de um centro de ressonância magnética (*RM*), ao qual ocorrem pacientes de três tipos e competem pela utilização da única máquina para o efeito. Pacientes externos que agendam previamente o exame; pacientes internos que se encontram no hospital e requisitam a realização do exame de forma aleatória; e pacientes emergentes que surgem de forma inesperada, e devem ser atendidos o mais depressa possível. Esta dissertação assenta essencialmente em dois problemas. O primeiro consiste em definir estratégias que permitam gerir o atendimento dos vários pacientes. O segundo consiste em encontrar a melhor forma de calendarizar os pacientes externos para a realização desse exame. Estes dois problemas estão inter-relacionados. A escolha de uma mapa diário para o agendamento de pacientes externos, influencia a gestão operacional do atendimento. Reciprocamente, a boa gestão operacional do atendimento poderá permitir o agendamento diário de mais pacientes externos.

Neste sentido é definida uma estratégia de atendimento ótima, que constitui a base da experiência computacional e permite realizar uma análise comparativa por forma a encontrar a estratégia de atendimento que resulta no maior lucro diário, para o centro de diagnóstico. Para o efeito foi usado um modelo de Programação Dinâmica a horizonte finito. Também serão utilizadas outras estratégias de atendimento como regras práticas a tempo real - regras de senso comum. No caso da calendarização dos pacientes, é definida uma estratégia que serve como termo de comparação com as restantes. Também aqui é realizada uma experiência computacional que permite uma análise em termos lucrativos. Por último é feita uma análise comparativa do desempenho entre determinadas estratégias de atendimento e formas de agendar os pacientes, com o intuito de encontrar a combinação das duas decisões que permite maximizar o lucro diário do centro de diagnóstico.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Exposição do problema	1
1.2 Pesquisa bibliográfica	3
1.3 Abordagem sumária	4
2 O modelo e suas propriedades	7
2.1 O modelo	7
2.2 Propriedades das funções envolvidas	11
2.3 Trajetória ótima	19
2.4 Trajetória ótima para um modelo aproximado	21
2.5 Casos particulares	23
2.6 Modelo estacionário	26
3 Experiência computacional	29
3.1 Valor ótimo para o modelo original	29
3.2 Prioridade absoluta a pacientes externos	30
3.3 Prioridade absoluta a pacientes internos	31
3.4 Prioridade absoluta ao paciente crítico	31
3.5 Prioridade absoluta em períodos distintos	33
3.6 Regras de prioridade dinâmicas	35
3.6.1 tendo em conta homogeneidade de grupos	35
3.6.2 tendo em conta custos pontuais	36
3.7 Conclusões	37
4 Agendamento	39
4.1 Configuração	39
4.2 Experiência Computacional	40

5 Conclusão	43
5.1 Resultados	43
5.2 Limitações	44
5.3 Trabalho futuro	44
Bibliografia	47
Anexo A Heurística <i>News vendor</i> f	49

Lista de Figuras

2.1	Partição do dia em N períodos.	9
2.2	Caraterização de i_*	23
2.3	Configuração de n_i^* para o caso de referência	27

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros do modelo incluindo relações plausíveis.	8
2.2	Os escalares q_{ik} para $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$	10
2.3	$V_{i+1}(n, \cdot)$ e $H_{i+1}(n, \cdot)$, para $n > 0$	25
2.4	$V_{i+1}(n, \cdot)$ e $H_{i+1}(n, \cdot)$, para $n = 0$	25
2.5	Valores de teste dos parâmetros do modelo. A negrito, o <i>caso de referência</i>	26
3.1	Valores ótimos, V_* (u.m.)	30
3.2	Desvio percentual do lucro em relação ao <i>plano ótimo de decisões</i>	30
3.3	Desvio percentual do lucro em relação ao <i>plano ótimo de decisões</i>	31
3.4	Desvio percentual entre $\pi_n + r_n + w_n$ e $\pi_s + r_s + w_s$	32
3.5	Valores de i_*	33
3.6	Desvio percentual do lucro em relação ao <i>plano ótimo de decisões</i>	33
3.7	Desvio percentual do lucro em relação ao <i>plano ótimo de decisões</i>	34
3.8	Desvio percentual do lucro em relação ao <i>plano ótimo de decisões</i>	35
3.9	Desvio percentual do lucro em relação ao <i>plano ótimo de decisões</i>	36
3.10	Desvio percentual do lucro em relação ao <i>plano ótimo de decisões</i>	37
4.1	Valores de a_* ótimos segundo o plano ótimo de decisões	40
4.2	Desvio percentual do lucro em relação ao lucro com a_* ótimo (segundo o <i>plano ótimo de decisões</i>)	40
4.3	Desvio percentual do lucro em relação ao lucro com a_* ótimo (segundo o <i>plano ótimo de decisões</i>)	41
4.4	Desempenho das heurísticas $a_* = N(N)$ e <i>Heurística Equilibrada(E)</i> com <i>Prioridade segundo i_*</i>	42

Capítulo 1

Introdução

1.1 Exposição do problema

À medida que a indústria da saúde evolui, a competitividade nesta área torna-se cada vez maior. Esta competitividade traduz-se no interesse de gerir as unidades de saúde de uma forma cada vez mais eficiente e eficaz, num cenário onde as expectativas dos utilizadores são cada vez maiores. No âmbito da saúde, os centros de diagnóstico médicos como centros de Ressonância Magnética (*RM*), Raio-X (*RX*), Tomografia Computadorizada (*TAC*), entre outros, são uma das componentes críticas da gestão hospitalar uma vez que, na maioria das vezes, estão implicadas no atendimento dos pacientes. Esta dissertação incide na gestão de um centro de *RM*.

Um centro de ressonância magnética funciona dentro do hospital apenas no período diurno, em geral, 9h-17h. A este centro acorrem pacientes agendados e não agendados. Os pacientes agendados são pacientes externos ao hospital (portanto, não estão internados ou em urgência). O seu exame no centro foi agendado com dias, ou semanas, de antecedência. Os pacientes não agendados podem ser de dois tipos, internos ou emergentes. Ambos podem surgir no serviço de forma imprevisível, o que os distingue é o fato de que os emergentes têm prioridade sobre todos os restantes. Os pacientes internos surgem no serviço sem qualquer agendamento e aguardam pela realização do seu exame sem beneficiar de prioridade. Para além disso, as características financeiras de cada tipo também diferem entre si. O centro de diagnóstico recebe uma taxa pelo atendimento de pacientes agendados, ao contrário dos pacientes não agendados, e por este motivo, os primeiros são vistos como uma forma adicional de obtenção de receita.

Tendo em conta o elevado custo de um equipamento de *RM*, bem como todos os custos inerentes à sua manutenção, os gestores hospitalares são pressionados no sentido de maximizar a sua utilização, tanto quanto possível. Frequentemente, esta pressão resulta numa gestão em que um elevado número de períodos, senão todos, são disponibilizados para calendarizar exames de pacientes externos, o que implica um adiamento do atendimento de pacientes internos durante horas ou dias, uma vez que o número de períodos disponíveis para estes, é reduzido, ou inexistente. Uma utilização racional do serviço não deixará pacientes agendados (em inglês, *scheduled*) e internos (em inglês, *nonscheduled*) muito tempo à espera para serem atendidos, nem permitirá uma acumulação de pacientes que não sejam atendidos (no período normal de funcionamento) no final do dia. Assim, poderá fazer sentido não disponibilizar todo o período de funcionamento do centro para o atendimento de pacientes

externos. Pois, se por um lado há interesse (financeiro) neste tipo de pacientes, por outro lado uma agenda sobrecarregada com pacientes externos pode levar a uma acumulação excessiva (e custosa) de pacientes, no final do dia.

Assim, neste trabalho estaremos interessados em dois aspetos essenciais. O primeiro consiste em estabelecer uma janela diária de agendamento de pacientes externos, *i.e.*, de que horas a que horas se permite agendar previamente exames para pacientes externos. Porém, esta tarefa é dificultada pela imprevisibilidade das chegadas de pacientes internos e emergentes, ou pela possibilidade de cancelamento por parte do paciente externo. O segundo pretende estabelecer regras dinâmicas de prioridade para o atendimento dos pacientes externos e internos, *i.e.*, estabelecer regras que permitam decidir entre o atendimento dos pacientes externos e pacientes internos quando ambos se encontram em espera, em simultâneo. No caso de existir um paciente emergente, não é necessário fazer uma escolha, uma vez que este assume prioridade sobre os restantes, e portanto é o paciente que deve ser atendido. Caso contrário, é preciso fazer a escolha entre qual dos pacientes se deve atender. Esta escolha é condicionada pelo facto de que atender um paciente externo pode resultar em atrasos no atendimento de pacientes internos que consequentemente poderão necessitar de permanecer noites extras no hospital, refletindo assim um custo acrescido. Por outro lado, a decisão de atender um paciente interno pode resultar num adiamento de pacientes externos que posteriormente podem abandonar o serviço sem serem atendidos, o que reflete uma perda de receita para o centro de diagnóstico. Por último estaremos interessados em encontrar a junção destas duas tarefas que representa a gestão mais lucrativa de uma unidade de saúde deste tipo.

1.2 Pesquisa bibliográfica

O problema da calendarização de um paciente para um determinado serviço é uma questão que tem sido cada vez mais estudada. Tal como neste trabalho, a maioria da literatura existente sobre esta questão, considera modelos a horizonte finito. No entanto, a medida de desempenho de cada modelo é variável.

Kaandorp e Koole(2007) [8] estudaram este problema e definiram como objetivo minimizar a média ponderada dos tempos de espera previstos. Vermeulen (2009) *et al.* [12] desenvolveram uma abordagem para o problema do agendamento de pacientes, no contexto da realização de uma Tomografia Computadorizada (TAC), onde a capacidade para agendar pacientes de vários tipos é adaptada às necessidades presentes e futuras, *i.e.*, não existe um limite de capacidade fixado à priori. Neste caso, o objetivo era maximizar a quantidade de pacientes atendidos. Patrick e Puterman(2008) [10] debruçaram-se sobre este problema no caso em que é necessário agendar diferentes tipos de pacientes externos. Tal como no nosso modelo, existe a possibilidade de surgirem de forma incerta, pacientes internos e/ou emergentes. O objetivo deles era minimizar o custo total das penalidades a que o hospital está sujeito, no final do dia, perante a impossibilidade de atender todos os pacientes, ou quando o tempo de espera dos pacientes excede uma quantidade recomendada. Modelaram este problema segundo um Processo de Markov (PM) a horizonte infinito, e usaram uma aproximação a um problema de Programação Dinâmica, para o resolver. Existem ainda outros estudos mais antigos sobre esta questão, como Bailey(1952) [1], Ho e Lau(1992) [6] ou Fries e Marathe(1981) [3] em que a medida de desempenho dos modelos consiste em minimizar o tempo de espera experienciado pelos pacientes e pelos profissionais de saúde, envolvidos no atendimento.

Quanto ao problema da gestão do atendimento dos pacientes, também existem estudos na literatura a respeito desta questão. Green *et al.*(2006) [5] modelaram este problema segundo um PM a horizonte finito. O modelo considera três tipos de pacientes, internos, externos e emergentes que acorrem a um serviço de diagnóstico de Ressonância Magnética (RM), e competem pela utilização da única máquina disponível para o efeito. O objetivo é maximizar o lucro diário esperado, que resulta da receita obtida pelo atendimento de pacientes internos ou externos menos a soma dos custos associados ao tempo de espera dos paciente com as penalizações a que o hospital está sujeito, no final do dia, perante a impossibilidade de atender todos os pacientes. As probabilidades de chegada de cada tipo de pacientes são constantes ao longo de todos os períodos. No caso dos pacientes externos, que são agendados previamente, existe a possibilidade de não comparecerem. Eles concluem que, independentemente da forma como se agendam os pacientes externos, a trajetória ótima de atendimento é descrita por uma curva que satisfaz certas propriedades estruturais. Mais concretamente, de entre um conjunto de pacientes externos e internos em espera, é atendido um paciente interno se o número total desse tipo de pacientes, for superior a um certo limite, que depende do número de pacientes externos em espera. Também é válido o raciocínio simétrico.

Kolisch e Sickinger(2008) [7] estenderam o modelo de Green *et al.*(2006) [5] no contexto da realização de um TAC, com dois aspetos distintos. O primeiro é o facto deste modelo supor a existência de duas máquinas para a realização do exame. O segundo tem haver com o número de pacientes agendados. Neste modelo, eles consideram a possibilidade de agendar, por período, um número de pacientes superior ao número de máquinas disponíveis para o efeito. Concluíram que um atendimento

do tipo *first-in-first-out* (FIFO) representa o tipo de gestão com melhor desempenho, tendo em conta os resultados obtidos e a simplicidade desta regra.

Gocgun(2011) *et al.* [4] adaptaram igualmente o modelo apresentado por Green *et al.*(2006) [5]. No mesmo contexto, modelaram o problema segundo um PM a horizonte finito com o objetivo de maximizar a receita líquida diária resultante do atendimento. Consideraram os mesmos três tipos de pacientes, no entanto, motivados pelo facto de nem todos os pacientes emergentes serem doentes graves, subcategorizam este tipo em, pacientes críticos e não críticos. Os primeiros beneficiam de máxima prioridade e devem ser atendidos imediatamente. O modelo pressupõe ainda que na impossibilidade de atender um paciente interno no próprio dia, este é reagendado para o dia seguinte. Consideram igualmente a hipótese de duas máquinas no sistema e, neste caso, concluem que a melhor forma de gerir o atendimento é seguindo uma trajetória em que o paciente de um determinado tipo é priorizado, quando o número total desse tipo de pacientes em espera, excede um determinado limite.

Gerir a capacidade de um serviço ao qual acorrem vários tipos de clientes, é uma questão estudada noutros contextos. Liberman e Yechiali(1978) [9] debateram este problema no contexto da gestão hoteleira. O problema surge por existir a possibilidade do cliente cancelar a reserva feita previamente, sem qualquer penalização. Neste sentido, desenvolveram um modelo a N -períodos com o objetivo de encontrar a estratégia de *overbooking* que maximiza a receita líquida. Por *overbooking* entende-se uma forma de gerir o sistema no qual se aceitam mais reservas do que a capacidade real do serviço, com o intuito de equilibrar a lotação do hotel. Belobaba(1989) [2] estudou o problema no contexto da aviação. Ross e Tsang(1989) [11] abordaram o problema no contexto das telecomunicações.

1.3 Abordagem sumária

A escolha de uma mapa diário para o agendamento de pacientes externos tem, obviamente, repercussões na gestão operacional do atendimento. Reciprocamente, a boa gestão operacional do atendimento poderá permitir o agendamento diário de mais pacientes externos. Os dois problemas abordados nesta dissertação estão, portanto, inter-relacionados.

Na nossa abordagem optámos por, à semelhança de [5], construir um modelo de Programação Dinâmica que, para um dado mapa de agendamentos, simula o sistema supondo decisões de gestão operacional ótimas. As funções envolvidas nesse modelo possuem propriedades estruturais que inspiram regras práticas de decisão. Neste trabalho procura-se também validar essas regras práticas de decisão em função de diversos cenários que, segundo [5], cobrem a grande generalidade deste serviço de atendimento. Portanto, em função da proximidade da sua situação real aos parâmetros do modelo, o utilizador poderá perceber qual é a regra prática que melhor se lhe adequa.

Posteriormente, consideramos duas formas de definir o agendamento de pacientes externos, ambas do tipo agendar desde a abertura até um determinado momento do dia anterior ao fecho do serviço. Comparamos esse tipo de agendamento com o ótimo teórico e terminamos com a identificação, para cada cenário, da forma de definir agendamento supondo uma determinada regra prática de gestão operacional que sobressaiu na primeira parte.

Esta dissertação acomoda mais quatro capítulos, para além deste capítulo introdutório. No segundo capítulo recordamos o modelo proposto em [5], agora descrito com a possibilidade de que alguns dos parâmetros, nomeadamente os que caracterizam os fluxos de pacientes, possam ser distintos em

diferentes momentos do dia. Portanto, o modelo que aqui se propõe é não estacionário. Mostramos que a trajetória ótima possui determinadas propriedades estruturais. As nossas demonstrações, ainda que semelhantes às [5], são distintas na medida em que (i) assentam em parâmetros que podem variar ao longo do dia, e (ii) num conjunto distinto de notações que simplifica muitos dos argumentos dedutivos. Destaque-se que as demonstrações em [5] estão apresentadas num anexo com 44 páginas, disponível [aqui](#). Mostramos ainda que, em determinados cenários dar sempre prioridade absoluta a uma determinada classe de pacientes define uma trajetória ótima, e uma versão simplificada do modelo possui uma trajetória ótima muito simples de caracterizar em termos práticos. Esta versão simplificada do modelo permitirá definir uma boa regra heurística de atendimento.

No terceiro capítulo apresentamos uma experiência computacional, recorrendo a uma implementação em R, visando a validação de algumas regras heurísticas de gestão operacional. No quarto capítulo, abordamos a questão da calendarização dos pacientes e faremos uma análise empírica, onde se compara o desempenho de várias heurísticas de agendamento de pacientes externos. Finalmente, no quinto e último capítulo, faremos alguns comentários globais acerca do trabalho desenvolvido, identificaremos algumas limitações presentes neste trabalho, algumas das quais poderemos abordar em pesquisas futuras.

Capítulo 2

O modelo e suas propriedades

Neste capítulo, apresenta-se o modelo subjacente a um dos problemas em questão. O capítulo está dividido da seguinte forma. Na primeira secção faremos uma exposição do modelo no contexto do problema de gestão do atendimento dos pacientes. Na segunda secção enunciamos e demonstramos resultados auxiliares e posteriormente, propriedades das funções envolvidas no modelo. Na terceira secção, enunciamos e demonstramos o teorema que, através das propriedades estabelecidas anteriormente, caracteriza uma propriedade estrutural de uma trajetória ótima. Na secção seguinte, apresentamos uma versão simplificada do modelo inicial, motivados pela dificuldade de implementação, em determinadas circunstâncias. Na quinta secção enunciamos e demonstramos dois teoremas que definem dois casos particulares do modelo original. Finalmente, na última secção, é apresentada a versão estacionária do modelo original.

2.1 O modelo

Vamos modelar a dinâmica de um serviço de diagnóstico médico (de ressonância magnética, de raios X, ou outro similar), com uma máquina, através de um modelo de Programação Dinâmica estocástica com horizonte finito, correspondente a um dia normal de funcionamento - o modelo que descreveremos foi proposto em [5]. Em cada uma das etapas de um horizonte diário é necessário efetuar uma escolha (ou decisão), de entre duas possíveis. O conjunto de todas as decisões tomadas define o que se chama a *trajetória* (de decisões). Pretende-se identificar a trajetória que maximiza o valor esperado do lucro. Como a caracterização completa de uma trajetória pode ser complexa, também terá interesse a caracterização de trajetórias que, ainda que não sejam ótimas, sejam simples de implementar.

Assumimos o dia particionado em N períodos (*slots*), com a mesma duração, em cada um dos quais ocorrerá o atendimento (exame) de um único paciente - por exemplo, num centro que funcione ininterruptamente das 8 às 18 horas, um exame poderá ter a duração de meia-hora, que corresponderá a 20 períodos diários. Assumiremos que os exames não podem ser interrompidos e têm a duração exata do período a que dizem respeito. Também, por simplicidade de modelação, assumimos que os períodos livres não podem ser parcialmente ocupados. Há três tipos de pacientes que usam o centro de diagnóstico médico: os internos, originários do hospital onde está sediado o serviço de diagnóstico, os

externos, que procuram o centro de diagnóstico para um exame pontual, e os emergentes que surgem de forma inesperada.

Num período genérico i pode estar calendarizado o atendimento de um paciente externo. Uma coluna $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, \dots, a_N)$ de zeros e uns caracterizará os períodos destinados aos pacientes externos. Uma vez que há uma grande procura por este tipo de serviços e escassez de oferta universal, assumimos que todos os períodos disponíveis para o agendamento (de pacientes externos) estão efetivamente preenchidos. Não prevemos a possibilidade de atraso de pacientes externos mas prevemos a possibilidade de falta, *i.e.*, não estar presente no início do período para o qual foi agendado. Assim, assumimos que um qualquer paciente agendado para o período i comparecerá com probabilidade $p_{is} \in [0, 1]$ - *s* de *scheduled*. Portanto, no início de cada período i antecipa-se um novo paciente externo com probabilidade $p_{is}a_i$.

Em cada período $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, surgirá, de forma incerta, um paciente emergente com probabilidade $p_{ie} \in [0, 1]$ - *e* de *emergent* - e um paciente interno com probabilidade $p_{in} \in [0, 1]$ - *n* de *nonscheduled*. Pacientes internos são pacientes não prioritários originários de outros serviços do hospital (como serviço de enfermarias), pacientes emergentes são pacientes prioritários (sobre os outros dois tipos, internos e externos), mas não são preemptivos. Não se prevê a chegada de mais do que um paciente emergente e mais do que um paciente interno em cada período. As ocorrências destas duas classes de pacientes são independentes entre si e independentes em períodos distintos.

Assumiremos a seguinte estrutura de custos e receitas. Por cada paciente externo atendido, o hospital recebe uma receita r_s e por cada paciente interno recebe uma receita r_n . O efetivo recebimento da receita é simultâneo com o início do exame. Tal como em [5], é razoável assumir que $r_s \geq r_n \geq 0$. Por cada período (completo) de espera, o hospital incorre numa penalidade w_s por cada paciente externo, e w_n por cada paciente interno. Pelo facto de, pacientes internos já se encontrarem nas instalações, quando da necessidade de realização do exame, é razoável assumir que $w_s \geq w_n \geq 0$. Se no final do N -ésimo período persistirem em espera s pacientes externos e n pacientes internos, o hospital incorrerá num custo $f(n, s)$ que tem a ver com a penalização associada à incapacidade de atendimento desses pacientes. No caso dos pacientes internos, a penalização pela falta de atendimento tem a ver com o tempo extra de permanência no hospital, pois pode haver um custo acrescido não reembolsável para o hospital. No caso dos pacientes externos, a penalização pela falta de atendimento tem a ver com a possibilidade de perder o paciente, porque este, entretanto, desistiu ou reagendou num outro hospital. Podemos, por exemplo, assumir que $f(n, s) \equiv \pi_n n + \pi_s s$, com $\pi_n, \pi_s \in \mathbb{R}$. É razoável assumir que $\pi_n \geq \pi_s \geq 0$. Todos os parâmetros envolvidos no modelo estão descritos na Tabela 2.1.

Paciente	Probabilidade	Receita	Penalidade	Custo de espera
Externo:	$p_{is} \in [0, 1]$	$r_s \geq r_n$	$\pi_s \geq 0$	$w_s \geq w_n$
Interno:	$p_{in} \in [0, 1]$	$r_n \geq 0$	$\pi_n \geq \pi_s$	$w_n \geq 0$
Emergente:	$p_{ie} \in [0, 1]$	—	—	—

Tabela 2.1 Parâmetros do modelo incluindo relações plausíveis.

Vamos, então, proceder à descrição detalhada do modelo de Programação Dinâmica. O período 1 está destinado a um paciente externo, agendado para este período. Em cada período $i \in \{2, 3, \dots, N\}$

ocorrerá: (i) o atendimento de um paciente emergente que tenha chegado durante o período $i - 1$ ou, se nenhum emergente chegou, (ii) ocorrerá o atendimento de um paciente em espera (interno ou externo) ou, se nenhum paciente estiver em espera (no instante imediatamente anterior ao início do período i), (iii) não ocorrerá qualquer atendimento. Portanto, o momento de decisão acontece no exato momento que antecede o início do período i e só acontece se se estiver na situação (ii) com, pelo menos, um paciente interno e um externo em espera. Na descrição que faremos a seguir assumimos uma trajetória ótima mas outras trajetórias poderão ter interesse.

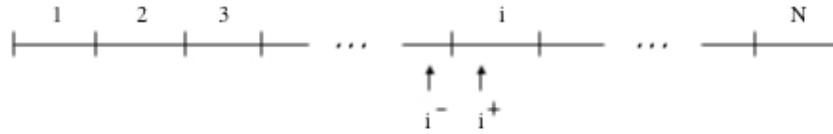


Fig. 2.1 Partição do dia em N períodos.

Para cada período $i \in \{2, 3, \dots, N\}$, denote-se por $H_i(n, s)$ o maior valor do lucro esperado (acumulado), desde o início do período i até ao final do dia, quando no exato momento que antecede o início do período i - na Figura 2.1, o momento i^- - não há qualquer paciente emergente em espera e há n pacientes internos e s pacientes externos em espera. Atendendo ao modo como os pacientes chegam ao centro de diagnóstico, os únicos valores de (n, s) para os quais faz sentido avaliar $H_i(n, s)$ correspondem a

$$n \in N_i \equiv \{0, 1, \dots, i-1\}, \quad s \in S_i \equiv \left\{ 0, 1, \dots, s_i \equiv \left(\sum_{j=1}^i a_j \right) - 1 \right\}. \quad (2.1)$$

De modo análogo, para cada período $i \in \{1, 2, 3, \dots, N-1\}$ denotamos por $V_i(n, s)$ o maior valor do lucro esperado (acumulado), desde o instante imediatamente após o início do período i - na Figura 2.1, o momento i^+ - até ao final do dia, quando ficam em espera n pacientes internos e s pacientes externos no momento i^+ . Adicionalmente, $V_N(n, s)$ denota o lucro (ou melhor, o simétrico do custo) associado à impossibilidade de atendimento dos n pacientes internos e s pacientes externos, em espera, no início do último período - recorde-se que não há qualquer paciente, interno, externo ou emergente, a chegar durante o último período. Em geral, $V_N(n, s)$ é uma função explícita de (n, s) , por exemplo, $V_N(n, s) = -\pi_n n - \pi_s s$. Atendendo à forma como os pacientes chegam ao centro de diagnóstico, os únicos valores de (n, s) para os quais faz sentido avaliar $V_i(n, s)$, para cada $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$, correspondem aos pares (n, s) que verificam (2.1). As duas medidas do lucro, H_i e V_i estão relacionadas quando $i \in \{2, 3, \dots, N\}$, pois

$$H_i(n, s) \equiv \begin{cases} \max(V_i(n-1, s) + r_n, V_i(n, s-1) + r_s) & \text{se } n \geq 1, s \geq 1, \\ V_i(n-1, 0) + r_n & \text{se } n \geq 1, s = 0, \\ V_i(0, s-1) + r_s & \text{se } n = 0, s \geq 1, \\ V_i(0, 0) & \text{se } n = 0, s = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

k	q_{ik}	x_k	y_k	$(n + x_k, s + y_k)$
1	$(1 - p_{in}) \times (1 - p_{i+1,s} a_{i+1})$	0	0	(n, s)
2	$(1 - p_{in}) \times p_{i+1,s} a_{i+1}$	0	1	$(n, s + 1)$
3	$p_{in} \times (1 - p_{i+1,s} a_{i+1})$	1	0	$(n + 1, s)$
4	$p_{in} \times p_{i+1,s} a_{i+1}$	1	1	$(n + 1, s + 1)$

Tabela 2.2 Os escalares q_{ik} para $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$.

Além disso, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$, por definição,

$$\begin{aligned}
 V_i(n, s) &= -sw_s - nw_n + p_{ie} \sum_{k=1}^4 q_{ik} V_{i+1}(n + x_k, s + y_k) + (1 - p_{ie}) \sum_{k=1}^4 q_{ik} H_{i+1}(n + x_k, s + y_k) \quad (2.3) \\
 &= -sw_s - nw_n + \sum_{k=1}^4 q_{ik} [p_{ie} V_{i+1}(n + x_k, s + y_k) + (1 - p_{ie}) H_{i+1}(n + x_k, s + y_k)]
 \end{aligned}$$

com os escalares q_{ik}, x_k, y_k definidos na Tabela 2.2. Portanto, o valor máximo do lucro esperado (diário) é dado por

$$V_* = p_{1s} a_1 r_s + V_1(0, 0). \quad (2.4)$$

Por exemplo, se $N = 2$ então, assumindo que $\mathbf{a} = (1, 1)$ e $V_2(n, s) \equiv -\pi_n n - \pi_s s$, para $n \in N_2 \equiv \{0, 1\}$ e $s \in S_2 \equiv \{0, 1\}$ (pois $s_2 = \sum_{i=1}^2 a_i - 1 = 2 - 1 = 1$), temos que

$$H_2(0, 0) = 0, \quad H_2(0, 1) = r_s, \quad H_2(1, 0) = r_n, \quad H_2(1, 1) = \max(-\pi_s + r_n, -\pi_n + r_s),$$

e

$$V_1(0, 0) = \sum_{k=1}^4 q_{1k} [p_{1e} V_2(x_k, y_k) + (1 - p_{1e}) H_2(x_k, y_k)].$$

Se, adicionalmente, assumirmos que $p_{is} = p_{in} = p_{ie} = 1/2$, para todo i , então,

$$\begin{aligned}
 V_1(0, 0) &= (V_2(0, 0) + H_2(0, 0) + V_2(0, 1) + H_2(0, 1) + V_2(1, 0) + H_2(1, 0) + V_2(1, 1) + H_2(1, 1)) / 8 \\
 &= (0 + (-\pi_s + r_s) + (-\pi_n + r_n) + (-\pi_n - \pi_s + \max(-\pi_s + r_n, -\pi_n + r_s))) / 8 \\
 &= \max(r_n - 2(\pi_s + \pi_n) + (r_n + r_s) - \pi_s, r_s - 2(\pi_s + \pi_n) + (r_n + r_s) - \pi_n) / 8
 \end{aligned}$$

de modo que $V_* = r_s/2 + V_1(0, 0)$. Neste exemplo simplificado, o único momento de decisão acontece quando, no momento imediatamente anterior ao início do segundo e último período, e face à não chegada de um paciente emergente no primeiro período, existem em espera um paciente externo (agendado para o último período) e um paciente interno. Por definição de V_* o paciente escolhido é aquele que conduz ao lucro esperado máximo. Portanto, a decisão será a de atender no último período: (i) o paciente interno se $-\pi_s + r_n > -\pi_n + r_s$; (ii) o paciente externo se $-\pi_s + r_n < -\pi_n + r_s$, ou, (iii) indiferente a escolha se $-\pi_s + r_n = -\pi_n + r_s$. Dito de outro modo, a trajetória ótima poderá ser descrita como *prioridade ao paciente cuja soma da receita com a penalidade seja o maior possível*

2.2 Propriedades das funções envolvidas

Sejam r_n, r_s dois escalares não negativos. Diremos que $v \in \mathcal{V}$ se $v: \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathbb{Z}_+^2 \equiv \{(n, s) : n, s = 0, 1, 2, \dots\}$, é tal que

$$\left. \begin{aligned} v(n+1, s) - v(n, s) &\leq r_n, \\ v(n, s+1) - v(n, s) &\leq r_s, \end{aligned} \right\} \text{para todo } (n, s) \in \mathbb{Z}_+^2. \quad (2.5)$$

Se interpretarmos $v(n, s)$ como sendo o lucro (ou utilidade) associado a um determinado estado (n, s) - por exemplo, a cardinalidade de dois conjuntos distintos de indivíduos do Tipo 1 e do Tipo 2 - então as duas condições (2.5) impõem um patamar máximo (distinto) no valor do incremento do lucro quando mais um indivíduo se junta a um dos conjuntos. Para esta classe de funções consideraremos, ainda, as seguintes duas condições:

$$v(n, s+1) - v(n+1, s) \leq v(n+1, s+1) - v(n+2, s), \quad \text{para todo } (n, s) \in \mathbb{Z}_+^2. \quad (2.6)$$

$$v(n+1, s) - v(n, s+1) \leq v(n+1, s+1) - v(n, s+2), \quad \text{para todo } (n, s) \in \mathbb{Z}_+^2. \quad (2.7)$$

A condição (2.6) significa que, quando um indivíduo do Tipo 1 muda o seu estado para Tipo 2, o incremento no lucro é tanto maior quanto maior for o número de indivíduos do Tipo 1. Semelhante interpretação podemos fazer de (2.7) considerando os tipos trocados.

Uma outra interpretação destas duas condições é relevante. Note-se que (2.6) é o mesmo que dizer que, para todo s fixo (a segunda componente), a sucessão de termo geral

$$w_n \equiv v(n, s+1) - v(n+1, s), \quad \text{para } n = 0, 1, \dots,$$

é não decrescente. De modo análogo, (2.7) é o mesmo que dizer que, para todo n fixo (a primeira componente), a sucessão de termo geral

$$w_s \equiv v(n+1, s) - v(n, s+1), \quad \text{para } s = 0, 1, \dots,$$

é não decrescente.

Começamos com a questão da existência de funções $v \in \mathcal{V}$ que satisfazem (2.6), ou (2.7). Fixadas constantes $\pi_n, \pi_s \geq 0$ se v for a função afim $v(n, s) \equiv -\pi_n n - \pi_s s$ então, claramente, $v \in \mathcal{V}$ e

$$v(n, s+1) - v(n+1, s) = \pi_n - \pi_s = v(n+1, s+1) - v(n+2, s), \quad \text{para todo } (n, s) \in \mathbb{Z}_+^2.$$

Portanto, neste caso, a desigualdade em (2.6) verifica-se sempre como igualdade. Conclusão idêntica verifica-se para (2.7). Para as mesmas constantes, se v for a função quadrática, sem monómios mistos, $v(n, s) \equiv -\pi_n n^2 - \pi_s s^2$ então $v \in \mathcal{V}$ e

$$[v(n+1, s+1) - v(n+2, s)] - [v(n, s+1) - v(n+1, s)] = 2\pi_n \geq 0, \quad \text{para todo } (n, s) \in \mathbb{Z}_+^2.$$

Portanto, também neste caso, obtemos uma classe de funções que satisfazem (2.6). De modo análogo,

$$[v(n+1, s+1) - v(n, s+2)] - [v(n+1, s) - v(n, s+1)] = 2\pi_s \geq 0, \quad \text{para todo } (n, s) \in \mathbb{Z}_+^2.$$

Portanto, também neste caso, obtemos uma classe de funções que satisfazem (2.7).

À custa de funções v que satisfaçam (2.6) ou (2.7), podemos construir outras funções que satisfaçam a mesma propriedade. Nesse sentido temos os Teoremas 1-4.

Teorema 1. (translação não negativa) *Se $v \in \mathcal{V}$ satisfaz (2.6) (ou (2.7), respectivamente) então, para todo o par de inteiros não negativos (x, y) , também a função $v_{x,y}(n, s) \equiv v(n+x, s+y)$ pertence a \mathcal{V} e satisfaz (2.6) (ou (2.7), respectivamente).*

Prova: Suponhamos que $v \in \mathcal{V}$ e satisfaz (2.6). Então, para todo $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$,

$$\begin{aligned} v_{x,w}(n+1, s) &= v(n+1+x, s+y) \leq v(n+x, s+y) + r_n = v_{x,w}(n, s) + r_n \\ v_{x,w}(n, s+1) &= v(n+x, s+1+y) \leq v(n+x, s+y) + r_s = v_{x,w}(n, s) + r_s, \end{aligned}$$

pelo que $v_{x,y} \in \mathcal{V}$. Além disso, para todo $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$,

$$\begin{aligned} v_{x,w}(n, s+1) - v_{x,w}(n+1, s) &= v(n+x, (s+1)+y) - v((n+1)+x, s+y) \\ &= v(n+x, (s+y)+1) - v((n+x)+1, s+y) \\ &\leq v((n+x)+1, (s+y)+1) - v((n+x)+2, s+y) \\ &= v((n+1)+x, (s+1)+y) - v((n+2)+x, s+y) \\ &= v_{x,w}(n+1, s+1) - v_{x,w}(n+2, s) \end{aligned}$$

Por simetria, se v satisfaz (2.7) então também $v_{x,y}$ satisfaz (2.7), porque os argumentos se repetem agora relativamente à outra componente. \square

Teorema 2. (combinação linear convexa) *Se, para $i = 1, 2, \dots, k$, $v_i \in \mathcal{V}$ e satisfazem (2.6) (ou (2.7), respectivamente) então,*

$$w(n, s) \equiv \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i(n, s)$$

também pertence a \mathcal{V} e satisfaz (2.6) (ou (2.7), respectivamente), onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ denotam escalares não negativos que somam um.

Prova: Suponhamos que, para $i = 1, 2, \dots, k$, $v_i \in \mathcal{V}$ e satisfazem (2.6). Então, para todo $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$,

$$\begin{aligned} w(n+1, s) - w(n, s) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i [v_i(n+1, s) - v_i(n, s)] \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i r_n = r_n, \\ w(n, s+1) - w(n, s) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i [v_i(n, s+1) - v_i(n, s)] \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i r_s = r_s. \end{aligned}$$

Portanto, $w \in \mathcal{V}$. Além disso, para todo $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$,

$$w(n, s+1) - w(n+1, s) = \sum_{i=1}^k \alpha_i [v_i(n, s+1) - v_i(n+1, s)].$$

Por (2.6), em cada parcela deste somatório tem-se que $v_i(n, s+1) - v_i(n+1, s) \leq v_i(n+1, s+1) - v_i(n+2, s)$, pelo que, $w(n, s+1) - w(n+1, s) \leq w(n+1, s+1) - w(n+2, s)$ decorre do fato de α_i 's serem não negativos. Por simetria, se, para $i = 1, 2, \dots, k$, v_i satisfazem (2.7), então também a função w satisfaz (2.7). \square

Teorema 3. (soma) *Se $u(n, s) \equiv -\pi_n n - \pi_s s$, com $\pi_n, \pi_s \geq 0$ e $v \in \mathcal{V}$ e satisfaz (2.6) (ou (2.7), respetivamente) então, $u + v$ também pertence a \mathcal{V} e satisfaz (2.6) (ou (2.7), respetivamente).*

Prova: Suponhamos que $v \in \mathcal{V}$ e satisfaz (2.6). Então, para todo $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$,

$$\begin{aligned} (u+v)(n+1, s) - (u+v)(n, s) &= [u(n+1, s) - u(n, s)] + [v(n+1, s) - v(n, s)] \leq [-\pi_n] + [r_n] \leq r_n, \\ (u+v)(n, s+1) - (u+v)(n, s) &= [u(n, s+1) - u(n, s)] + [v(n, s+1) - v(n, s)] \leq [-\pi_s] + [r_s] \leq r_s. \end{aligned}$$

Portanto, $u + v \in \mathcal{V}$. Além disso, para todo $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$,

$$\begin{aligned} (u+v)(n, s+1) - (u+v)(n+1, s) &= [u(n, s+1) - u(n+1, s)] + [v(n, s+1) - v(n+1, s)] \\ &\leq [\pi_n - \pi_s] + [v(n+1, s+1) - v(n+2, s)] = (u+v)(n+1, s+1) - (u+v)(n+2, s), \end{aligned}$$

pelo que, $u + v$ satisfaz (2.6). Por simetria, se $v \in \mathcal{V}$ satisfaz (2.7), então também $u + v$ satisfaz (2.7). \square

Uma outra construção relevante é a seguinte. Dada uma função $v: \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definimos $h(v): \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ através de

$$h(v)(n, s) \equiv \begin{cases} \max(v(n-1, s) + r_n, v(n, s-1) + r_s) & \text{se } n \geq 1, s \geq 1, \\ v(n-1, 0) + r_n & \text{se } n \geq 1, s = 0, \\ v(0, s-1) + r_s & \text{se } n = 0, s \geq 1, \\ v(0, 0) & \text{se } n = 0, s = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Usaremos o seguinte lema na demonstração do Teorema 4.

Lema 1. *Para todo $a, b, c, d, v \in \mathbb{R}$, $\max(a, b) - \max(c, d) = \max(a + v, b + v) - \max(c + v, d + v)$.*

Prova:

$$\max(a + v, b + v) - \max(c + v, d + v) = (\max(a, b) + v) - (\max(c, d) + v) = \max(a, b) - \max(c, d).$$

\square

Teorema 4. *Se $v \in \mathcal{V}$ e verifica (2.6) (ou (2.7), respetivamente) então $h(v) \in \mathcal{V}$ e verifica (2.6) (ou (2.7), respetivamente).*

Prova: Suponhamos que $v \in \mathcal{V}$ e verifica (2.6). Seja $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$, qualquer. Se $n \geq 1$ e $s \geq 1$ então

$$\begin{aligned} h(v)(n+1, s) &= \max(v(n, s) + r_n, v(n+1, s-1) + r_s) \\ &\leq \max(v(n-1, s) + r_n + r_n, v(n, s-1) + r_s + r_n) = h(v)(n, s) + r_n; \end{aligned}$$

se $n \geq 1$ e $s = 0$ então

$$h(v)(n+1, 0) = v(n, 0) + r_n \leq v(n-1, 0) + r_n + r_n = h(v)(n, 0) + r_n;$$

se $n = 0$ e $s \geq 1$ então

$$\begin{aligned} h(v)(1, s) &= \max(v(0, s) + r_n, v(1, s-1) + r_s) \leq \max(v(0, s) + r_n, v(0, s-1) + r_s + r_n) \\ &\leq v(0, s-1) + r_s + r_n = h(v)(0, s) + r_n; \end{aligned}$$

se $n = 0$ e $s = 0$ então

$$h(v)(1, 0) = v(0, 0) + r_n = h(v)(0, 0) + r_n.$$

Portanto, $h(v)(n+1, s) \leq h(v)(n, s) + r_n$, para todo $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$. De modo análogo se mostra que $h(v)(n, s+1) \leq h(v)(n, s) + r_s$, para todo $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$. Para mostrar que $h(v)$ satisfaz (2.6), seja $(n, s) \in \mathbb{Z}_+^2$, qualquer. Se $n \geq 1$ e $s \geq 1$ então

$$\begin{aligned} &h(v)(n, s+1) - h(v)(n+1, s) = \\ &= \max(v(n-1, s+1) + r_n, v(n, s) + r_s) - \max(v(n, s) + r_n, v(n+1, s-1) + r_s). \\ &= \max(v(n+1, s) - v(n, s) + v(n-1, s+1) + r_n, v(n+1, s) + r_s) \\ &\quad - \max(v(n+1, s) + r_n, v(n+1, s) - v(n, s) + v(n+1, s-1) + r_s) \\ &\leq \max(v(n, s+1) + r_n, v(n+1, s) + r_s) - \max(v(n+1, s) + r_n, v(n+2, s-1) + r_s) \\ &= h(v)(n+1, s+1) - h(v)(n+2, s), \end{aligned}$$

onde a primeira e a última igualdade decorrem do facto de que para todo $(m, t) \geq (n, s)$, $h(v)(m, t)$ é definida pelo primeiro ramo. A segunda igualdade decorre do Lema 1 e a desigualdade decorre do seguinte:

$$\begin{aligned} &v(n+1, s) - v(n, s) + v(n-1, s+1) \leq v(n, s+1) \\ \Leftrightarrow &v(n-1, s+1) - v(n, s) \leq v(n, s+1) - v(n+1, s), \end{aligned} \quad \text{por (2.6),}$$

$$\begin{aligned} &v(n+1, s) - v(n, s) + v(n+1, s-1) \geq v(n+2, s-1) \\ \Leftrightarrow &v(n, s) - v(n+1, s-1) \leq v(n+1, s) - v(n+2, s-1), \end{aligned} \quad \text{por (2.6);}$$

se $n = 0$ e $s \geq 1$ então

$$\begin{aligned}
h(v)(n, s+1) - h(v)(n+1, s) &\equiv h(v)(0, s+1) - h(v)(1, s) = \\
&= v(0, s) + r_s - \max(v(0, s) + r_n, v(1, s-1) + r_s) \\
&= v(1, s) + r_s - \max(v(1, s) + r_n, v(1, s-1) + r_s + v(1, s) - v(0, s)) \\
&\leq \max(v(0, s+1) + r_n, v(1, s) + r_s) - \max(v(1, s) + r_n, v(1, s-1) + r_s + v(1, s) - v(0, s)) \\
&\leq \max(v(0, s+1) + r_n, v(1, s) + r_s) - \max(v(1, s) + r_n, v(2, s-1) + r_s) \\
&= h(v)(1, s+1) - h(v)(2, s) \equiv h(v)(n+1, s+1) - h(v)(n+2, s),
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade decorre do Lema 1; a primeira desigualdade decorre por substituição de uma parcela por uma parcela maior ou igual; a segunda desigualdade decorre do seguinte:

$$\begin{aligned}
v(1, s) - v(0, s) + v(1, s-1) &\geq v(2, s-1) \\
\Leftrightarrow v(0, s) - v(1, s-1) &\leq v(1, s) - v(2, s-1), \quad \text{por (2.6);}
\end{aligned}$$

se $n \geq 1$ e $s = 0$ então

$$\begin{aligned}
h(v)(n, s+1) - h(v)(n+1, s) &\equiv h(v)(0, s+1) - h(v)(1, s) = \\
&= v(0, s) + r_s - \max(v(0, s) + r_n, v(1, s-1) + r_s) \\
&= v(1, s) + r_s - \max(v(1, s) + r_n, v(1, s-1) + r_s + v(1, s) - v(0, s)) \\
&\leq \max(v(0, s+1) + r_n, v(1, s) + r_s) - \max(v(1, s) + r_n, v(1, s-1) + r_s + v(1, s) - v(0, s)) \\
&\leq \max(v(0, s+1) + r_n, v(1, s) + r_s) - \max(v(1, s) + r_n, v(2, s-1) + r_s) \\
&= h(v)(1, s+1) - h(v)(2, s) \equiv h(v)(n+1, s+1) - h(v)(n+2, s),
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade decorre do Lema 1; a primeira desigualdade decorre por substituição de uma parcela por uma parcela maior ou igual; a segunda desigualdade decorre do seguinte:

$$\begin{aligned}
v(1, s) - v(0, s) + v(1, s-1) &\geq v(2, s-1) \\
\Leftrightarrow v(0, s) - v(1, s-1) &\leq v(1, s) - v(2, s-1), \quad \text{por (2.6).}
\end{aligned}$$

Finalmente, suponhamos que $n = 0$ e $s = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
h(v)(n, s+1) - h(v)(n+1, s) &\equiv h(v)(0, 1) - h(v)(1, 0) = \\
&= v(0, 0) + r_s - (v(0, 0) + r_n) \\
&= v(1, 0) + r_s - (v(1, 0) + r_n) \\
&\leq \max(v(0, 1) + r_n, v(1, 0) + r_s) - (v(1, 0) + r_n) \\
&= h(v)(1, 1) - h(v)(2, 0) \equiv h(v)(n+1, s+1) - h(v)(n+2, s),
\end{aligned}$$

onde a desigualdade decorre por substituição de uma parcela por uma parcela maior ou igual. \square

Podemos mesmo ampliar o resultado do Teorema 4 através de uma definição alternativa para $h(v)$.

Teorema 5. Se $v \in \mathcal{V}$ satisfaz (2.6) então, para $\bar{n}(\cdot)$ definida por $\bar{n}(s) = 0$, se $s = 0$, e¹

$$\bar{n}(s) = \min \{n \in \mathbb{N}_0 : v(n, s) - v(n+1, s-1) \geq r_s - r_n\},$$

se $s \geq 1$, tem-se que

$$h(v)(n, s) \equiv \begin{cases} v(n-1, s) + r_n & \text{se } n > \bar{n}(s) \\ v(n, s-1) + r_s & \text{se } n \leq \bar{n}(s), s \geq 1 \\ v(0, 0) & \text{se } n \leq \bar{n}(s), s = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Prova: Se $s = 0$ então, por (2.8),

$$h(v)(n, 0) \equiv \begin{cases} v(n-1, 0) + r_n & \text{se } n \geq 1 \\ v(0, 0) & \text{se } n = 0. \end{cases} = \begin{cases} v(n-1, 0) + r_n & \text{se } n > \bar{n}(0) = 0 \\ v(0, 0) & \text{se } n \leq \bar{n}(0) = 0. \end{cases}$$

pelo que, (2.9) verifica-se quando $s = 0$. Se $s \geq 1$ então, por (2.8), e usando o Lema 1,

$$\begin{aligned} h(v)(n, s) &= \begin{cases} \max(v(n-1, s) + r_n, v(n, s-1) + r_s) & \text{se } n \geq 1, \\ v(0, s-1) + r_s & \text{se } n = 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} v(n, s-1) + \max(v(n-1, s) - v(n, s-1) + r_n, v(n, s-1) - v(n, s-1) + r_s) & \text{se } n \geq 1, \\ v(0, s-1) + r_s & \text{se } n = 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} v(n, s-1) + r_n + \max(v(n-1, s) - v(n, s-1), r_s - r_n) & \text{se } n \geq 1, \\ v(0, s-1) + r_s & \text{se } n = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Como v satisfaz (2.6), a sucessão $(v(n-1, s) - v(n, s-1), n = 1, 2, \dots)$ é não decrescente. Consideremos duas situações para o primeiro termo dessa sucessão: (i) $v(0, s) - v(1, s-1) \geq r_s - r_n$; (ii) $v(0, s) - v(1, s-1) < r_s - r_n$. No caso (i) temos que $\bar{n}(s) = 0$ e

$$h(v)(n, s) = \begin{cases} v(n-1, s) + r_n & \text{se } n \geq 1, \\ v(0, s-1) + r_s & \text{se } n = 0. \end{cases} = \begin{cases} v(n-1, s) + r_n & \text{se } n > \bar{n}(s), \\ v(n, s-1) + r_s & \text{se } n \leq \bar{n}(s), \end{cases}$$

pelo que, (2.9) verifica-se. No caso (ii) há ainda a considerar duas possibilidades: (ii.1) $v(n, s) - v(n+1, s-1) \geq r_s - r_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e (ii.2) $v(n, s) - v(n+1, s-1) < r_s - r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No caso (ii.1), $\bar{n}(s) \in \mathbb{N}$ e

$$\max(v(n-1, s) - v(n, s-1), r_s - r_n) = \begin{cases} v(n-1, s) - v(n, s-1) & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > \bar{n}(s), \\ r_s - r_n & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ e } n \leq \bar{n}(s), \end{cases}$$

¹admita-se que $\bar{n}(s) = +\infty$ quando o mínimo não existir.

pelo que,

$$h(v)(n, s) = \begin{cases} v(n-1, s) + r_n & \text{se } n > \bar{n}(s), \\ v(n, s-1) + r_s & \text{se } n \leq \bar{n}(s). \end{cases}$$

Portanto, (2.9) verifica-se. No caso (ii.2), $\bar{n}(s) = +\infty$ e

$$\max(v(n-1, s) - v(n, s-1), r_s - r_n) = r_s - r_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

pelo que,

$$h(v)(n, s) = \begin{cases} v(n, s-1) + r_s & \text{se } n \geq 1, \\ v(0, s-1) + r_s & \text{se } n = 0. \end{cases} = \begin{cases} v(n-1, s) + r_n & \text{se } n > \bar{n}(s), \\ v(n, s-1) + r_s & \text{se } n \leq \bar{n}(s). \end{cases}$$

Portanto, (2.9) verifica-se também neste caso. \square

Por exemplo, se $v(n, s) = -5n^2 - 7s^2 + 8$, $r_n = 12$ e $r_s = 11$, então, para todo $s \geq 1$,

$$v(n, s) - v(n+1, s-1) \equiv 10n - 14s + 12, \quad r_s - r_n = -1.$$

Portanto, $\bar{n}(0) = 0$ e, para $s \geq 1$,

$$\bar{n}(s) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : 10n - 14s + 12 \geq -1\} = \left\lceil \frac{14s - 13}{10} \right\rceil,$$

que, para $s = 1, 2, \dots$, são, sucessivamente, os seguintes valores:

$$1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, \dots$$

Assim, por exemplo, com $n = 5 < \bar{n}(7) = 9$,

$$h(v)(5, 7) = v(5, 6) + r_s = (-5 \times 5^2 - 7 \times 6^2 + 8) + 11 = -358.$$

Também existe uma caracterização alternativa para $h(v)$ para funções $v \in \mathcal{V}$ que satisfaçam (2.7). O Teorema 6, abaixo, é uma consequência do Teorema 5, pois para a sua demonstração basta usar os mesmos argumentos usados na demonstração do Teorema 5 mas aplicados à segunda componente de (n, s) .

Teorema 6. Se $v \in \mathcal{V}$ e satisfaz (2.7), então, para $\bar{s}(\cdot)$ definida por $\bar{s}(n) = 0$, se $n = 0$, e²

$$\bar{s}(n) = \min\{s \in \mathbb{N}_0 : v(n, s) - v(n-1, s+1) \geq r_n - r_s\},$$

²admita-se que $\bar{s}(n) = +\infty$ quando o mínimo não existir.

se $n \geq 1$, tem-se que

$$h(v)(n, s) \equiv \begin{cases} v(n, s-1) + r_s & \text{se } s > \bar{s}(n) \\ v(n-1, s) + r_n & \text{se } s \leq \bar{s}(n), n \geq 1 \\ v(0, 0) & \text{se } s \leq \bar{s}(n), n = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Por exemplo, se $v(n, s) = -5n^2 - 7s^2 + 8$, $r_n = 12$ e $r_s = 11$, então, para todo $n \geq 1$,

$$v(n, s) - v(n-1, s+1) \equiv -10n + 14s + 12, \quad r_n - r_s = 1.$$

Portanto, $\bar{s}(0) = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$\bar{s}(n) = \min \{s \in \mathbb{N}_0 : -10n + 14s + 12 \geq 1\} = \left\lceil \frac{10n - 11}{14} \right\rceil,$$

que, para $n = 1, 2, \dots$, são, sucessivamente, os seguintes valores:

$$0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, \dots$$

Assim, por exemplo, com $s = 7 > \bar{s}(5) = 3$, $h(v)(5, 7) = v(5, 6) + r_s = -358$. Finalmente, um resultado que é válido para funções v que satisfaçam as duas condições, (2.6) e (2.7).

Teorema 7. *Se $v \in \mathcal{V}$ satisfaz (2.6) e (2.7) então:*

1. *para $\bar{n}(\cdot)$ definida no Teorema 5, $0 \leq s_1 \leq s_2$ implica $\bar{n}(s_1) \leq \bar{n}(s_2)$;*
2. *para $\bar{s}(\cdot)$ definida no Teorema 6, $0 \leq n_1 \leq n_2$ implica $\bar{s}(n_1) \leq \bar{s}(n_2)$.*

Prova: Sejam $s_1, s_2 \in \mathbb{N}_0$ tais que $s_1 \leq s_2$. Suponhamos, por absurdo, que $\bar{n}(s_1) > \bar{n}(s_2)$. Em particular, $0 < s_1 \leq s_2$ e $\bar{n}(s_2) < +\infty$. Então, para $n_2 = \bar{n}(s_2)$,

$$v(n_2, s_2) - v(n_2 + 1, s_2 - 1) \geq r_s - r_n.$$

Como $s_1 \leq s_2$ e v satisfaz (2.7), $v(n_2 + 1, s_1 - 1) - v(n_2, s_1) \leq v(n_2 + 1, s_2 - 1) - v(n_2, s_2)$. E como $n_2 < \bar{n}(s_1)$ então $v(n_2, s_1) - v(n_2 + 1, s_1 - 1) < r_s - r_n$. Portanto,

$$r_s - r_n > v(n_2, s_1) - v(n_2 + 1, s_1 - 1) \geq v(n_2, s_2) - v(n_2 + 1, s_2 - 1) \geq r_s - r_n,$$

o que é absurdo. Por simetria, ou usando argumentação análoga, se prova que $0 \leq n_1 \leq n_2$ implica $\bar{s}(n_1) \leq \bar{s}(n_2)$. \square

2.3 Trajetória ótima

Recorde-se a definição recursiva (2.3) de $V_i: \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a partir de $V_{i+1}: \mathbb{Z}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$, realçando o facto de que $H_{i+1} \equiv h(V_{i+1})$. O próximo teorema usa as propriedades estabelecidas na secção anterior para caracterizar uma propriedade estrutural da, ou de uma, trajetória ótima, *i.e.*, uma que define o lucro esperado máximo V_* , definido em (2.4).

Teorema 8. *Se $V_N \in \mathcal{V}$ e satisfaz ambas as condições (2.6) e (2.7) então, para cada $i \in \{2, 3, \dots, N\}$, existe uma função $\bar{n}_i: S_i \rightarrow N_i$ satisfazendo*

$$0 = \bar{n}_i(0) \leq \bar{n}_i(1) \leq \dots \leq \bar{n}_i(s_i) \leq N - 1 \quad (2.11)$$

tal que, para todo $n \in N_i$ e todo $s \in S_i$,

$$H_i(n, s) \equiv \begin{cases} V_i(n-1, s) + r_n & \text{se } n > \bar{n}_i(s), \\ V_i(n, s-1) + r_s & \text{se } n \leq \bar{n}_i(s) \text{ e } s \geq 1, \\ V_i(0, 0) & \text{se } n \leq \bar{n}_i(s) \text{ e } s = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Prova: Por indução matemática em i de N até 2. Como $H_N \equiv h(V_N)$ e $V_N \in \mathcal{V}$ e satisfaz ambas as condições (2.6) e (2.7) então, pelo Teorema 4, também $H_N \in \mathcal{V}$ e satisfaz ambas as condições (2.6) e (2.7). Pelo Teorema 5, existe uma função \bar{n}_N que, sem perda de generalidade, é definida do seguinte modo, $\bar{n}_N(s) = 0$, se $s = 0$, e, para cada $s \in \{1, 2, \dots, s_N\} \equiv S_N \setminus \{0\}$,

$$\bar{n}_N(s) = N - 1,$$

se $V_N(N-2, s) - V_N(N-1, s-1) < r_s - r_n$, ou

$$\bar{n}_N(s) = \min \{n \in \mathbb{N}_0: V_N(n, s) - V_N(n+1, s-1) \geq r_s - r_n\} (\leq N-2),$$

se $V_N(N-2, s) - V_N(N-1, s-1) \geq r_s - r_n$, tal que H_N é definida através de (2.12) quando $i = N$. Pelo Teorema 7, $\bar{n}_N(\cdot)$ verifica (2.11) quando $i = N$.

Por hipótese de indução, suponhamos que para algum $i+1 \in \{3, 4, \dots, N\}$, temos que $V_{i+1} \in \mathcal{V}$ e satisfaz ambas as condições (2.6) e (2.7). Como $H_{i+1} \equiv h(V_{i+1})$ então, pelo Teorema 4, também $H_{i+1} \in \mathcal{V}$ e satisfaz ambas as condições (2.6) e (2.7). Como V_i é definido por

$$V_i(n, s) \equiv -w_{in}n - w_{is}s + p_{ie} \sum_{k=1}^4 q_{ik} V_{i+1}(n+x_k, s+y_k) + (1-p_{ie}) \sum_{k=1}^4 q_{ik} H_{i+1}(n+x_k, s+y_k).$$

então, pelos Teoremas 1, 2 e 3, também $V_i \in \mathcal{V}$ e satisfaz as condições (2.6) e (2.7). Como $H_i \equiv h(V_i)$ então, pelo Teorema 4, também $H_i \in \mathcal{V}$ e satisfaz ambas as condições (2.6) e (2.7). Pelo Teorema 5, existe uma função \bar{n}_i que, sem perda de generalidade, é definida do seguinte modo, $\bar{n}_i(s) = 0$, se $s = 0$, e, para cada $s \in \{1, 2, \dots, s_i\} \equiv S_i \setminus \{0\}$,

$$\bar{n}_i(s) = N - 1,$$

se $V_i(i-2, s) - V_i(i-1, s-1) < r_s - r_n$, ou

$$\bar{n}_i(s) = \min \{n \in \mathbb{N}_0 : V_i(n, s) - V_i(n+1, s-1) \geq r_s - r_n\} \quad (\leq i-2),$$

se $V_i(i-2, s) - V_i(i-1, s-1) \geq r_s - r_n$, tal que H_i é definida através de (2.12). Pelo Teorema 7, $\bar{n}_i(\cdot)$ verifica (2.11). \square

Recorde-se que ambas as funções $V_N(n, s) \equiv -\pi_n n - \pi_s s$ e $V_N(n, s) \equiv -\pi_n n^2 - \pi_s s^2$ satisfazem o enunciado do Teorema 8 desde que $\pi_n, \pi_s \geq 0$. De acordo com este teorema, uma possível verbalização da trajetória ótima é a seguinte. Não havendo qualquer paciente emergente para atender no instante imediatamente anterior a um dado período $i \in \{2, 3, \dots, N\}$ então, com $n \geq 1$ internos e $s \geq 1$ externos em espera, deve escolher-se um paciente interno se e só se $n > \bar{n}_i(s)$. A demonstração do Teorema 8 é construtiva na medida em que estabelece uma definição explícita de $\bar{n}_i: S_i \rightarrow N_i$. Contudo, essa definição depende das funções V_i , que a tempo real, são difíceis de definir. Estaremos interessados em usar uma trajetória semelhante à ótima, na qual $\bar{n}_i: S_i \rightarrow N_i$ é substituída por uma função mais simples de definir a tempo real - uma regra de senso comum, chamemos assim - e com a qual não haja uma degradação significativa no valor do lucro esperado, quando comparado com V_* .

A título ilustrativo, considere-se o caso $N = 3$ com $a_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, cujos parâmetros são $p_s = 0.84$, $p_n = 0.4$, $p_e = 0.1$, $r_s = 1000$, $r_n = 200$, $w_s = 15$, $w_n = 0$, $\pi_s = 400$, $\pi_n = 500$ e $V_3(n, s) = -500n^2 - 400s^2$ provenientes de [5]. Os valores de $\bar{n}_i(s)$ para este cenário são, $\bar{n}_3(1) = n_2(1) = 1$ o que significa que é atendido um paciente interno se e só se $n > 1$ e $\bar{n}_3(2) = 2$ o que significa que é sempre atendido um paciente externo, uma vez que $n \in N_3 \equiv \{0, 1, 2\}$. Observa-se que de facto, $1 = \bar{n}_3(1) \leq \bar{n}_3(2) = 2$, confirmando a característica teórica enunciada no Teorema 8.

O Teorema 8 também pode ser enunciado de um modo alternativo. A demonstração do Teorema 9 decorre por argumentos de simetria do Teorema 8.

Teorema 9. Se $V_N \in \mathcal{V}$ e satisfaz ambas as condições (2.6) e (2.7) então, para cada $i \in \{2, 3, \dots, N\}$, existe uma função $\bar{s}_i: N_i \rightarrow S_i$ satisfazendo

$$0 = \bar{s}_i(0) \leq \bar{s}_i(1) \leq \dots \leq \bar{s}_i(n_i) \leq s_i \quad (2.13)$$

tal que, para todo $n \in N_i$ e todo $s \in S_i$,

$$H_i(n, s) \equiv \begin{cases} V_i(n, s-1) + r_s & \text{se } s > \bar{s}_i(n) \\ V_i(n-1, s) + r_n & \text{se } s \leq \bar{s}_i(n), n \geq 1 \\ V_i(0, 0) & \text{se } s \leq \bar{s}_i(n), n = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

De acordo com o Teorema 9, uma outra verbalização da trajetória ótima é: não havendo qualquer paciente emergente para atender no instante imediatamente anterior a um dado período $i \in \{2, 3, \dots, N\}$ então, com $n \geq 1$ internos e $s \geq 1$ externos em espera, deve escolher-se um paciente externo se e só se $s > \bar{s}_i(n)$.

2.4 Trajetória ótima para um modelo aproximado

Nesta secção vamos considerar uma versão simplificada do modelo estudado na secção anterior, cuja motivação é a seguinte. Com uma elevada afluência de pacientes internos, externos e emergentes é razoável assumir que, mesmo adotando uma trajetória ótima, os estados (n, s) , com $n, s \geq 1$ aconteçam com elevada probabilidade. Portanto, num modelo aproximado a função H_i é substituída por

$$\hat{H}_i(n, s) \equiv \max(\hat{V}_i(n-1, s) + r_n, \hat{V}_i(n, s-1) + r_s) \quad (2.15)$$

para cada $i \in \{2, 3, \dots, N\}$, e a função V_i é substituída por

$$\begin{aligned} \hat{V}_i(n, s) &\equiv -sw_s - nw_n + p_{ie} \sum_{k=1}^4 q_{ik} \hat{V}_{i+1}(n+x_k, s+y_k) + (1-p_{ie}) \sum_{k=1}^4 q_{ik} \hat{H}_{i+1}(n+x_k, s+y_k) \quad (2.16) \\ &= -sw_s - nw_n + \sum_{k=1}^4 q_{ik} [p_{ie} \hat{V}_{i+1}(n+x_k, s+y_k) + (1-p_{ie}) \hat{H}_{i+1}(n+x_k, s+y_k)] \end{aligned}$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$, com os mesmos escalares q_{ik}, x_k, y_k definidos na Tabela 2.2, e

$$\hat{V}^* = p_{1s} a_1 r_s + \hat{V}_1(0, 0).$$

Naturalmente, os domínios das funções \hat{H}_i e \hat{V}_i passam a ser \mathbb{Z}^2 . Iremos ver que este modelo possui uma trajetória ótima simples de caracterizar.

Teorema 10. *Se $\hat{V}_N(n, s) \equiv -\pi_n n - \pi_s s$ então, $\hat{V}_i(n, s) \equiv \alpha_i n + \beta_i s + \gamma_i$, onde*

$$\begin{aligned} \alpha_i &\equiv \alpha_{i+1} - w_n \quad (= -\pi_n - (N-i)w_n), \\ \beta_i &\equiv \beta_{i+1} - w_s \quad (= -\pi_s - (N-i)w_s), \\ \gamma_i &\equiv \gamma_{i+1} + p_{in}\alpha_{i+1} + p_{i+1,s}a_{i+1,s}\beta_{i+1} + (1-p_{ie})\max(r_n - \alpha_{i+1}, r_s - \beta_{i+1}), \end{aligned}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, N-1$, a partir de $\alpha_N = -\pi_n$, $\beta_N = -\pi_s$ e $\gamma_N = 0$.

Prova: Por indução matemática em i , de N até 1. Quando $i = N$, $\hat{V}_N(n, s) = -\pi_n n - \pi_s s = \alpha_N n + \beta_N s + \gamma_N$. Por hipótese de indução, suponhamos que $\hat{V}_{i+1}(n, s) = \alpha_{i+1} n + \beta_{i+1} s + \gamma_{i+1}$, para algum $i+1 \in \{2, 3, \dots, N\}$. Então, para cada $k = 1, 2, 3, 4$,

$$\begin{aligned} \hat{V}_{i+1}(n+x_k, s+y_k) &= \alpha_{i+1}(n+x_k) + \beta_{i+1}(s+y_k) + \gamma_{i+1} \\ \hat{H}_{i+1}(n+x_k, s+y_k) &= \alpha_{i+1}(n+x_k) + \beta_{i+1}(s+y_k) + \gamma_{i+1} + \max(r_n - \alpha_{i+1}, r_s - \beta_{i+1}), \quad (2.17) \end{aligned}$$

pelo que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 q_{ik} [p_{ie} \hat{V}_{i+1}(n+x_k, s+y_k) + (1-p_{ie}) \hat{H}_{i+1}(n+x_k, s+y_k)] &= \\ &= \alpha_{i+1} n + \beta_{i+1} s + \gamma_{i+1} + \sum_{k=1}^4 q_{ik} [\alpha_{i+1} x_k + \beta_{i+1} y_k] + (1-p_{ie}) \max(r_n - \alpha_{i+1}, r_s - \beta_{i+1}). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 q_{ik} [\alpha_{i+1}x_k + \beta_{i+1}y_k] &= q_{i2}\beta_{i+1} + q_{i3}\alpha_{i+1} + q_{i4}(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1}) = \\ &= (q_{i3} + q_{i4})\alpha_{i+1} + (q_{i2} + q_{i4})\beta_{i+1} = p_{in}\alpha_{i+1} + p_{i+1,s}a_{i+1,s}\beta_{i+1}. \end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \hat{V}_i(n, s) &= (\alpha_{i+1} - w_n)n + (\beta_{i+1} - w_s)s + \\ &+ \gamma_{i+1} + p_{in}\alpha_{i+1} + p_{i+1,s}a_{i+1,s}\beta_{i+1} + (1 - p_{ie}) \max(r_n - \alpha_{i+1}, r_s - \beta_{i+1}), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. \square

Em particular, $\hat{V}_* = p_{1s}a_1r_s + \gamma_1$ e o leque de *decisões* associadas à obtenção deste valor são, em cada período i , independentes do valor do estado (n, s) , *i.e.*, do número e distribuição dos pacientes em espera no momento que antecede o início do período i - veja-se a expressão (2.17) -, e pode ser descrito por: *dar prioridade absoluta a pacientes externos (internos, resp) se e só se $r_n - \alpha_i \leq (>, resp) r_s - \beta_i$* . Como

$$\begin{aligned} r_n - \alpha_i &\equiv r_n + \pi_n + (N - i)w_n = (r_n + \pi_n + Nw_n) - iw_n, \\ r_s - \beta_i &\equiv r_s + \pi_s + (N - i)w_s = (r_s + \pi_s + Nw_s) - iw_s, \end{aligned}$$

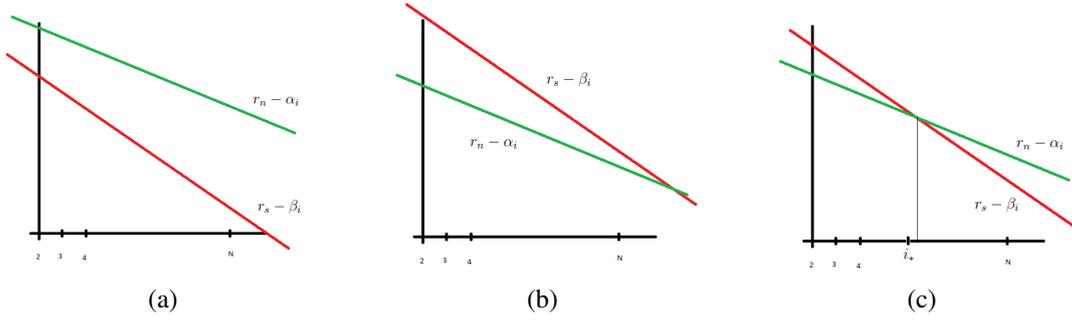
e, se assumirmos que $w_s \geq w_n \geq 0$, então, $r_n - \alpha_i \leq r_s - \beta_i$ se e só se $i \leq i_*$, para

$$i_* = \begin{cases} 1 & \text{se } r_n - \alpha_2 \equiv r_n + \pi_n + (N - 2)w_n > r_s + \pi_s + (N - 2)w_s \equiv r_s - \beta_2, \\ N & \text{se } r_n - \alpha_N \equiv r_n + \pi_n \leq r_s + \pi_s \equiv r_s - \beta_N, \end{cases}$$

ou, no caso restante (o que, em particular, obriga a que $w_s > w_n$),

$$i_* = \left\lfloor \frac{(r_s + \pi_s + Nw_s) - (r_n + \pi_n + Nw_n)}{w_s - w_n} \right\rfloor \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Veja-se a Figura 2.2. Com base neste desenvolvimento, podemos definir uma regra heurística de atendimento: para $n(i) = N - 1$, quando $i \in \{2, 3, \dots, i_*\}$ e $n(i) = 0$, quando $i \in \{i_* + 1, i_* + 2, \dots, N\}$, então, mediante um estado (n, s) no momento que antecede o início do período i , é dada prioridade absoluta a pacientes internos (externos, resp.) se e só se $n > (\leq, resp.) n(i)$.

Fig. 2.2 Caraterização de i_* .

2.5 Casos particulares

Nesta secção consideremos dois casos particulares do modelo inicial. Considera-se que a configuração do agendamento de pacientes externos $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, \dots, a_N)$ é a junção de um vetor de tudo-uns com um vetor de tudo-zeros, por esta ordem. Portanto, existe $a_* \in \{1, 2, \dots, N\}$, que chamaremos *último período para agendamento (de pacientes externos)*, tal que $a_i = 1$ se e só se $i \leq a_*$. Na prática, os períodos $i > a_*$ destinam-se ao atendimento dos pacientes que se encontram em espera no início do período a_* mas o serviço, não se encontrando fechado, permite o atendimento de novas chegadas de pacientes internos ou emergentes.

O próximo teorema estabelece uma caraterização detalhada da trajetória ótima quando, sob determinadas condições, é dada prioridade absoluta a um dos tipos de pacientes.

Teorema 11. *Suponhamos que $\pi_n + r_n \geq \pi_s + r_s$ e $w_n \geq w_s$. Se $V_N(n, s) \equiv -\pi_n n - \pi_s s$, com $\pi_n, \pi_s \geq 0$, então existe uma trajetória ótima tal que $\bar{n}_i(s) = 0$, para todo $s \in S_i$ e para todo $i = 2, 3, \dots, N$.*

Prova: A prova decorre por indução matemática em i , de N até 2. Primeiro, observe-se que para todo $s \in \{1, 2, \dots, s_N\} \equiv S_N \setminus \{0\}$ e para todo n ,

$$V_N(n, s) - V_N(n+1, s-1) = u_N - \delta_{N,n} \geq r_s - r_n,$$

com $u_N \equiv \pi_n - \pi_s$ e $\delta_{N,n} \equiv 0$. Portanto, segundo a definição de $\bar{n}(\cdot)$ na demonstração do Teorema 8, $\bar{n}_N(s) = 0$, para todo $s \in S_N$. Por hipótese de indução, suponhamos para algum $i+1 \in \{3, 4, \dots, N\}$,

$$V_{i+1}(n, s) - V_{i+1}(n+1, s-1) = u_{i+1} - \delta_{i+1,n} \geq r_s - r_n,$$

para todo $s \in S_{i+1} \setminus \{0\}$ e para todo n , onde

$$u_{i+1} \equiv (N - (i+1))(w_n - w_s) + (\pi_n - \pi_s), \quad \delta_{i+1,n} \in [0, u_{i+1} - (r_s - r_n)].$$

A hipótese de indução é, como vimos, verdadeira quando $i+1 \equiv N$. Recorde-se que, pelo Teorema 13,

$$u_{i+1} - (r_s - r_n) \geq \delta_{i+1,0} \geq \delta_{i+1,1} \geq \dots \geq 0.$$

Recorde-se também que, para todo $s \geq 1$ e para todo n ,

$$\begin{aligned} V_i(n, s) - V_i(n+1, s-1) &= \\ &= w_n - w_s + p_{ie} \sum_{k=1}^4 q_{ik} [V_{i+1}(n+x_k, s+y_k) - V_{i+1}(n+1+x_k, s-1+y_k)] \\ &\quad + (1-p_{ie}) \sum_{k=1}^4 q_{ik} [H_{i+1}(n+x_k, s+y_k) - H_{i+1}(n+1+x_k, s-1+y_k)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Se $n > 0$ então, conforme Tabela 2.3,

$$V_i(n, s) - V_i(n+1, s-1) = w_n - w_s + u_{i+1} - \delta_{in} = u_i - \delta_{in} \quad (2.19)$$

para

$$\delta_{in} = p_{ie} [(1-p_{in}) \delta_{i+1,n} + (p_{in}) \delta_{i+1,n+1}] + (1-p_{ie}) [(1-p_{in}) \delta_{i+1,n-1} + (p_{in}) \delta_{i+1,n}].$$

Portanto, δ_{in} é uma média de quatro escalares, todos pertencentes ao intervalo $[0, u_{i+1} - (r_s - r_n)]$. Consequentemente,

$$\delta_{in} \in [0, u_{i+1} - (r_s - r_n)] \subseteq [0, u_i - (r_s - r_n)], \quad (2.20)$$

uma vez que $u_{i+1} = u_i - (w_n - w_s) \leq u_i$. Se $n = 0$ então, conforme Tabela 2.4, (2.19) verifica-se com

$$\delta_{in} = p_{ie} [(1-p_{in}) \delta_{i+1,n} + (p_{in}) \delta_{i+1,n+1}] + (1-p_{ie}) [(1-p_{in}) (u_{i+1} - (r_s - r_n)) + (p_{in}) \delta_{i+1,n}].$$

Portanto, também neste caso, δ_{in} é uma média de quatro escalares, todos pertencentes ao intervalo $[0, u_{i+1} - (r_s - r_n)]$. Consequentemente, também (2.20) se verifica. Em particular, para todo $s \geq 1$ e para todo n ,

$$V_i(0, s) - V_i(1, s-1) \geq r_s - r_n.$$

Portanto, $\bar{n}_i(s) = 0$, para todo $s \in S_i$. O resultado desejado decorre, então, pelo princípio de indução matemática.

□

Diremos que o paciente crítico é o paciente interno quando $\pi_n + r_n + w_n \geq \pi_s + r_s + w_s$. Mediante esta hipótese, se $w_n \geq w_s$ então, o Teorema 11 estabelece que, se o custo de espera (por período) dos pacientes internos for superior ou igual ao custo de espera dos pacientes externos então a trajetória ótima é *dar prioridade absoluta aos pacientes internos*, que consiste numa trajetória muito simples de descrever. Por simetria, o Teorema 12 estabelece uma trajetória ótima na qual o paciente crítico é o paciente externo.

Teorema 12. *Suponhamos que $\pi_s + r_s \geq \pi_n + r_n$ e $w_s \geq w_n$. Se $V_N(n, s) \equiv -\pi_n n - \pi_s s$, com $\pi_n, \pi_s \geq 0$, então existe uma trajetória ótima tal que $\bar{n}_i(s) = N - 1$, para todo $s \in S_i$ e para todo $i = 2, 3, \dots, N$.*

Esta trajetória é igualmente simples de descrever e pode ser interpretada da seguinte forma. Se o custo de espera (por período) dos pacientes externos for superior ou igual ao custo de espera

dos pacientes internos então a trajetória ótima é *dar prioridade absoluta aos pacientes externos* A demonstração deste resultado decorre por argumentos de simetria da demonstração do Teorema 11.

k	$V_{i+1}(n+x_k, s+y_k) - V_{i+1}(n+1+x_k, s-1+y_k)$	$H_{i+1}(n+x_k, s+y_k) - H_{i+1}(n+1+x_k, s-1+y_k)$
1	$V_{i+1}(n, s) - V_{i+1}(n+1, s-1)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n}$	$H_{i+1}(n, s) - H_{i+1}(n+1, s-1)$ $= [r_n + V_{i+1}(n-1, s)] - [r_n + V_{i+1}(n, s-1)]$ $= V_{i+1}(n-1, s) - V_{i+1}(n, s-1)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n-1}$
2	$V_{i+1}(n, s+1) - V_{i+1}(n+1, s)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n}$	$H_{i+1}(n, s+1) - H_{i+1}(n+1, s)$ $= [r_n + V_{i+1}(n-1, s+1)] - [r_n + V_{i+1}(n, s)]$ $= V_{i+1}(n-1, s+1) - V_{i+1}(n, s)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n-1}$
3	$V_{i+1}(n+1, s) - V_{i+1}(n+2, s-1)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n+1}$	$H_{i+1}(n+1, s) - H_{i+1}(n+2, s-1)$ $= [r_n + V_{i+1}(n, s)] - [r_n + V_{i+1}(n+1, s-1)]$ $= V_{i+1}(n, s) - V_{i+1}(n+1, s-1)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n}$
4	$V_{i+1}(n+1, s+1) - V_{i+1}(n+2, s)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n+1}$	$H_{i+1}(n+1, s+1) - H_{i+1}(n+2, s)$ $= [r_n + V_{i+1}(n, s+1)] - [r_n + V_{i+1}(n+1, s)]$ $= V_{i+1}(n, s+1) - V_{i+1}(n+1, s)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n}$

Tabela 2.3 $V_{i+1}(n, \cdot)$ e $H_{i+1}(n, \cdot)$, para $n > 0$.

k	$V_{i+1}(n+x_k, s+y_k) - V_{i+1}(n+1+x_k, s-1+y_k)$	$H_{i+1}(n+x_k, s+y_k) - H_{i+1}(n+1+x_k, s-1+y_k)$
1	$V_{i+1}(n, s) - V_{i+1}(n+1, s-1)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n}$	$H_{i+1}(n, s) - H_{i+1}(n+1, s-1)$ $= [r_s + V_{i+1}(n, s-1)] - [r_n + V_{i+1}(n, s-1)]$ $= r_s - r_n$ $= u_{i+1} - (u_{i+1} - (r_s - r_n))$
2	$V_{i+1}(n, s+1) - V_{i+1}(n+1, s)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n}$	$H_{i+1}(n, s+1) - H_{i+1}(n+1, s)$ $= [r_s + V_{i+1}(n, s)] - [r_n + V_{i+1}(n, s)]$ $= r_s - r_n$ $= u_{i+1} - (u_{i+1} - (r_s - r_n))$
3	$V_{i+1}(n+1, s) - V_{i+1}(n+2, s-1)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n+1}$	$H_{i+1}(n+1, s) - H_{i+1}(n+2, s-1)$ $= [r_n + V_{i+1}(n, s)] - [r_n + V_{i+1}(n+1, s-1)]$ $= V_{i+1}(n, s) - V_{i+1}(n+1, s-1)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n}$
4	$V_{i+1}(n+1, s+1) - V_{i+1}(n+2, s)$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n+1}$	$H_{i+1}(n+1, s+1) - H_{i+1}(n+2, s)$ $= [r_n + V_{i+1}(n, s+1)] - [r_n + V_{i+1}(n+1, s)]$ $= u_{i+1} - \delta_{i+1, n}$

Tabela 2.4 $V_{i+1}(n, \cdot)$ e $H_{i+1}(n, \cdot)$, para $n = 0$.

2.6 Modelo estacionário

Nesta secção vamos considerar o caso particular do modelo original onde os parâmetros permanecem os mesmos em diferentes períodos e a configuração do agendamento de pacientes externos coincide com a definida na secção anterior. Sob a hipótese anterior do paciente crítico ser o paciente interno quando $\pi_n + r_n + w_n \geq \pi_s + r_s + w_s$, se o custo de espera dos pacientes internos for inferior ao dos externos então o Teorema 13 estabelece que a trajetória ótima depende do conhecimento de um patamar n_i^* , distinto em cada período i , e consiste em *atender um paciente interno se e só se o número de pacientes internos em espera for superior a n_i^** . O teorema não explicita o valor de n_i^* mas estabelece uma relação de monotonia entre os diversos n_i^* .

Teorema 13. *Suponhamos que $\pi_n + r_n + w_n \geq \pi_s + r_s + w_s$ e $w_n < w_s$ e p_{ie}, p_{in}, p_{is} são constante para diferentes i . Se $V_N(n, s) \equiv -\pi_n n - \pi_s s$, com $\pi_n, \pi_s \geq 0$ então existe uma trajetória ótima tal que $\bar{n}_i(s) = n_i^*$, para todo $s \in S_i \setminus \{0\}$ e para todo $i = 2, 3, \dots, N$, com*

$$n_2^* \geq n_3^* \geq \dots \geq n_N^* = 0.$$

Prova: Ver apêndice de [5] disponível [aqui](#). □

Atendendo à simetria do problema, podemos enunciar o Teorema 13 de uma maneira alternativa.

Teorema 14. *Suponhamos que $\pi_n + r_n + w_n \leq \pi_s + r_s + w_s$. (i) Se $w_n \leq w_s$ então a trajetória ótima é definida por $\bar{s}_i(n) = 0$, para todo $n \in N_i$ e para todo $i = 2, 3, \dots, n$; (ii) Se $w_n > w_s$ então, existe uma trajetória ótima tal que $\bar{s}_i(n) = s_i^*$, para todo $n \in N_i$ e para todo $i = 2, 3, \dots, n$, com*

$$s_1^* \geq s_2^* \geq \dots \geq s_N^* \geq 0$$

Perante a incapacidade de demonstrar o Teorema 13 (resp. Teorema 14 que decorre por simetria), apresentamos um exemplo ilustrativo da dinâmica de n_i^* . Para o efeito, a Tabela 2.5 compila diversos valores de teste. Estes valores, provenientes de [5], resultam de uma combinação entre dados empíricos, recolhidos num hospital, e dados teóricos existentes.

Paciente	p/ paciente			p/ vaga
	Pobabilidade	Receita	Penalidade	Custo de espera
Externo:	0.84	1000	{ 100 , 200, 300}	{10, 15 , 20}
Interno:	0.4	{0, 200 , 800}	{500, 1000, 2000 }	0
Emergente:	0.1	—	—	—

Tabela 2.5 Valores de teste dos parâmetros do modelo. A negrito, o *caso de referência*.

Na Figura 2.3 é possível observar os valores de n_i^* obtidos para o caso de referência, com $a_* = 15$. Os resultados obtidos correspondem ao cálculo de V_* através de uma implementação em R, e por observação direta da forma como H_i é definida em cada período i . Na Figura 2.3, apenas se representam os valores de n_i^* para $i \geq 5$ pois só a partir deste período podem existir pacientes internos em espera, em número superior a n_i^* (portanto, para $i < 5$, a estratégia ótima, pode dizer-se, é dar prioridade absoluta aos pacientes externos).

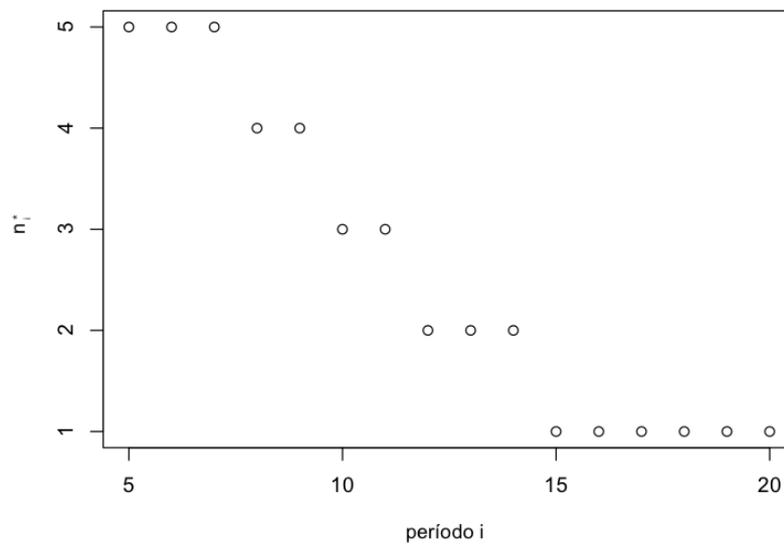


Fig. 2.3 Configuração de n_i^* para o caso de referência

Uma observação relevante surge do facto do valor $a_* = 15$ coincidir com o instante a partir do qual os pacientes internos adquirem prioridade absoluta, com $n_i^* = 1$. Esta sobreposição pode conduzir à ideia de que o conhecimento do *último período para agendamento* (de pacientes externos), é suficiente para decidir o instante a partir do qual o atendimento de pacientes internos passa a ser prioritário. Em geral, esta ilação não é verdade, tal como demonstra o contra exemplo de [5] para o caso em que $a_* = 20$ e, no entanto, $n_i^* = 1$ para todo $i = 1, \dots, 20$.

Capítulo 3

Experiência computacional

Neste capítulo estaremos interessados em validar a utilidade/eficiência de algumas regras de atendimento (comparando-as com a trajetória ótima). Os resultados numéricos foram obtidos através de uma implementação em R disponível [aqui](#). Este capítulo está estruturado da seguinte forma. Começamos por apresentar os valores do lucro que resultam de uma gestão do sistema segundo a trajetória ótima, e como tal, representam os valores do lucro ótimo. Nas secções 3.2, 3.3 e 3.4, avaliamos o desempenho de três regras de atendimento, que priorizam de forma absoluta, ao longo de todo o dia, um determinado tipo de pacientes. Na secção 3.5 analisamos o desempenho de outras três regras práticas que definem prioridade absoluta a cada tipo de pacientes, internos ou externos, em diferentes momentos do dia. Na secção 3.6 apresentamos duas regras nas quais, ao contrário das anteriores, a prioridade não está previamente definida e é determinada ao longo do dia. Finalmente, na última secção apresentamos as conclusões gerais dos resultados obtidos.

3.1 Valor ótimo para o modelo original

Consideremos um centro de diagnóstico de Ressonância Magnética que funciona ininterruptamente durante dez horas e no qual a duração de cada exame é exatamente meia-hora, isto é, $N = 20$. Assumimos que todos os períodos estão disponíveis para calendarizar pacientes externos, ou seja, $a_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, N$. Na Tabela 3.1 encontram-se os valores do lucro ótimo associados a cada conjunto de parâmetros definidos na Tabela 2.5 considerando que uma gestão do sistema segundo o *plano ótimo de decisões*. O valor destacado a negrito corresponde ao *caso de referência*.

O menor valor do lucro é de 7151 *u.m.* e corresponde à situação em que a receita resultante do atendimento de pacientes internos é nula, enquanto o custo de espera de pacientes externos e as penalizações de ambos os tipos assumem os valores mais elevados. Exatamente na situação oposta encontra-se o maior valor do lucro de 15076 *u.m.*. Assim podemos inferir que, independentemente do tipo de paciente, valores de penalização e custos de espera mais baixos, juntamente com elevados valores de receita, conduzem à maximização do lucro.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	12917	12845	12773	12876	12803.71	12731	12835	12762	12690
	1000	9913	9841	9768	9872	9799	9727	9830	9758	9686
	2000	8848	8189	7531	8643	7989	7334	8449	7799	7151
200	500	13236	13163	13091	13194	13122	13050	13153	13081	13008
	1000	10578	10159	10087	10468	10118	10045	10379	10076	10004
	2000	10342	9681	9022	10131	9473	8817	9931	9277	8622
800	500	15076	14464	14046	14929	14354	14004	14800	14265	13963
	1000	14957	14301	13646	14760	14110	13462	14578	13931	13291
	2000	14834	14171	13509	14610	13949	13288	14395	13736	13078

Tabela 3.1 Valores ótimos, V_* (u.m.)

É deixada uma nota sobre o facto da análise dos resultados coincidir com a intuição esperada, o que nos permite de certo modo, validar a implementação feita no software R, uma vez que não existe qualquer referência a estes valores em [5].

3.2 Prioridade absoluta a pacientes externos

Vamos assumir que ao longo do dia os pacientes externos adquirem prioridade absoluta sobre os pacientes internos. Este cenário equivale a um caso particular do Teorema 8 no qual $\bar{n}_i(s) = N - 1$ para todo $s \in S_i$ e para todo $i = 2, \dots, N$ e portanto, é atendido um paciente interno se e só se $n > N - 1$. Na prática, na ausência de um paciente emergente, é sempre atendido um paciente externo. A Tabela 3.2 apresenta o desvio percentual do lucro relativamente ao plano ótimo de decisões.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	2000	55.87	53.21	50.08	55.31	52.55	49.30	54.77	51.93	48.58
200	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	3.27	0.00	0.00	2.65	0.00	0.00	2.22	0.00	0.00
	2000	59.17	57.13	54.80	58.73	56.62	54.22	58.32	56.15	53.66
800	500	5.87	2.39	0.00	5.23	1.93	0.00	4.68	1.61	0.00
	1000	25.21	22.29	19.09	24.50	21.53	18.29	23.83	20.82	17.55
	2000	65.10	63.98	62.74	64.84	63.70	62.44	64.61	63.44	62.15

Tabela 3.2 Desvio percentual do lucro em relação ao plano ótimo de decisões

A aplicação desta regra resulta numa perda de 58.73% no caso de referência. No entanto, em 36 dos 81 casos analisados, o desempenho coincide com o ótimo, isto é, nos cenários em que os valores da receita e das penalizações associadas aos pacientes internos assumem valores médios/baixos, e

independentemente dos valores de w_s e π_s , priorizar o atendimento de pacientes externos representa a forma mais lucrativa de gerir o sistema. Nos casos simétricos, o desempenho da regra afasta-se do ótimo num valor máximo de 65.10%, o que representa uma perda acentuada no lucro diário.

3.3 Prioridade absoluta a pacientes internos

Consideremos agora que, ao contrário da regra anterior, os pacientes internos são prioritários em relação aos pacientes externos. Então, equivale ao caso particular do Teorema 8 no qual $\bar{n}_i(s) = 0$ para todo $s \in S_i$ e para todo $i = 2, \dots, N$ e portanto, é atendido um paciente interno se e só se $n > 0$. Na prática significa que, na ausência de um paciente emergente, é sempre atendido um paciente interno. A Tabela 3.3 apresenta o desvio percentual do lucro relativamente ao plano ótimo de decisões.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	31.62	36.41	41.26	33.76	38.58	43.46	35.92	40.77	45.68
	1000	11.29	17.40	23.60	14.01	20.16	26.41	16.75	22.95	29.24
	2000	1.52	1.72	1.96	2.71	3.07	3.49	4.08	4.62	5.28
200	500	21.90	26.52	31.20	23.96	28.61	33.31	26.04	30.72	35.44
	1000	2.65	5.18	11.10	4.54	7.81	13.77	6.65	10.45	16.46
	2000	1.21	1.33	1.49	2.15	2.38	2.66	3.26	3.60	4.00
800	500	1.50	1.94	3.75	2.58	3.31	5.64	3.78	4.84	7.54
	1000	0.99	1.09	1.22	1.73	1.92	2.14	2.59	2.85	3.17
	2000	0.70	0.75	0.81	1.26	1.36	1.46	1.91	2.05	2.20

Tabela 3.3 Desvio percentual do lucro em relação ao plano ótimo de decisões

Numa análise detalhada é possível observar que o caso de referência representa agora uma perda de apenas 2.15% em relação ao lucro ótimo, contrastando assim com o anterior valor de 58.73%. No entanto, neste cenário não existe nenhum caso para o qual, priorizar os pacientes internos coincida com a decisão ótima. Assim, o valor mais próximo do ótimo é 0.7% e representa a situação na qual os parâmetros das receitas e das penalizações, associadas aos pacientes internos, são mais elevados. De um modo geral, a regra representa um desempenho razoável sendo que, dos 81 casos estudados, 44 apresentam um desvio inferior a 5%, em relação ao valor do lucro ótimo.

3.4 Prioridade absoluta ao paciente crítico

Nesta secção vamos considerar uma regra que, não sendo igual, contempla as regras anteriores. Conforme o definido na Página 24 dizemos que o paciente crítico é o paciente externo quando $r_s + \pi_s \geq r_n + \pi_n$ e em particular $w_s \geq w_n$. Nesta situação, o Teorema 12 diz-nos que a trajetória ótima é definida por $\bar{n}_i(s) = N - 1$ para todo $s \in S_i$ e para todo $i = 2, \dots, N$. Portanto, quando o paciente crítico é o paciente externo, esta regra coincide com *Prioridade absoluta aos pacientes externos*. Por este motivo, os desvios do lucro em relação ao lucro ótimo, estão assinalados na Tabela 3.2. No caso

simétrico, quando $r_n + \pi_n \geq r_s + \pi_s$ e $w_n \geq w_s$, o Teorema 11 diz que existe uma trajetória ótima tal que $\bar{n}_i(s) = 0$ para todo $s \in S_i$ e para todo $i = 2, \dots, N$. Então o paciente crítico é o paciente interno e dar prioridade absoluta ao paciente crítico, coincide com dar *Prioridade absoluta aos pacientes internos*. Assim, na Tabela 3.3 encontram-se assinalados os desvios do lucro em relação ao lucro ótimo.

Dos valores assinalados na tabela 3.2, conclui-se que priorizar o paciente externo, quando este é o paciente crítico, representa uma forma ótima de gerir o sistema. No entanto, no caso em que o paciente crítico é o paciente interno, dos valores da tabela 3.3 observa-se que o menor desvio percentual é 0.7% e corresponde à situação $\alpha_n = 2800$ e $\alpha_s = 1110$ com $\alpha_s = \pi_s + r_s + w_s$ e $\alpha_n = \pi_n + r_n + w_n$. Por outro lado, o maior desvio é de 6.65% quando $\alpha_n = 1200$ e $\alpha_s = 1120$. Portanto, da análise geral dos valores, e em particular destes dois casos, surge a intuição de que a distância entre as somas α_n e α_s pode influenciar o desempenho desta regra.

Na Tabela 3.4 encontram-se os desvios percentuais entre estas duas somas dados por

$$desv = \begin{cases} \frac{\alpha_n - \alpha_s}{\alpha_n}, & \alpha_n > \alpha_s \\ \frac{\alpha_s - \alpha_n}{\alpha_s}, & \alpha_n < \alpha_s. \end{cases}$$

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	54.95	58.68	61.83	55.16	58.85	61.98	55.36	59.02	62.12
	1000	9.91	17.36	23.66	10.31	17.70	23.95	10.71	18.03	24.24
	2000	44.50	39.50	34.50	44.25	39.25	34.25	44.00	39.00	34.00
200	500	36.94	42.15	46.56	37.22	42.39	46.77	37.50	42.62	46.97
	1000	7.50	0.83	8.40	7.08	1.23	8.75	6.67	1.64	9.09
	2000	49.55	45.00	40.45	49.32	44.77	40.23	49.09	44.55	40.00
800	500	14.62	6.92	0.76	14.23	6.54	1.14	13.85	6.15	1.52
	1000	38.33	32.78	27.22	38.06	32.50	26.94	37.78	32.22	26.67
	2000	60.36	56.79	53.21	60.18	56.61	53.04	60.00	56.43	52.86

Tabela 3.4 Desvio percentual entre $\pi_n + r_n + w_n$ e $\pi_s + r_s + w_s$

De facto, os valores aqui apresentados confirmam a intuição. Os menores desvios do lucro, nos casos em que o paciente crítico é o paciente interno, estão associados a desvios da Tabela 3.4, na ordem dos 55%. Por outro lado, a maioria dos menores desvios do lucro, correspondem a casos em que os desvios percentuais são na ordem dos 7%. Recorde-se que a definição de paciente crítico depende do valor dos parâmetros, que regra geral são difíceis de estimar, em particular o valor das penalizações, π_n e π_s . Por este motivo, quando as somas entre os parâmetros de cada tipo de pacientes, se aproximam de forma significativa, pode não ser inequívoco qual o paciente crítico. Nestas situações, o desempenho da regra é afetado, de forma negativa.

3.5 Prioridade absoluta em períodos distintos

Nesta secção estaremos interessados em formas de gerir o sistema nas quais não se priorize exclusivamente um tipo de pacientes. Por exemplo, uma vez que os pacientes internos se assumem mais custosos no final do dia, a intuição sugere que penalizações por falta de atendimento destes pacientes, devem ser evitadas, dando-lhes maior prioridade à medida que nos aproximamos do final do dia. Um exemplo deste tipo de atendimento é descrito pela trajetória ótima para um modelo aproximado, definida pelo teorema 10. Recorde-se que, para um determinado i_* calculado a partir dos parâmetros de custos, receitas e penalizações, deve atender-se um paciente externo se e só se $i \leq i_*$, e um paciente interno, caso contrário. Designemos esta regra por *Prioridade segundo i_** . A Tabela 3.5 apresenta os valores de i_* para os valores de teste definidos na Pág. 26

r_n	π_n	$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
		$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	1000	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	2000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	500	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	1000	10	20	20	13	20	20	15	20	20
	2000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
800	500	0	10	20	6	13	20	10	15	20
	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2000	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.5 Valores de i_* .

Note-se que, mesmo sem observar os lucros resultantes de uma gestão segundo esta regra, é possível antecipar que nas situações em que $i_* = 20$ o lucro coincide com o ótimo, uma vez que esta regra equivale a dar *Prioridade absoluta aos pacientes externos* e quando $i_* = 0$ equivale a dar *Prioridade absoluta aos pacientes internos*. Na Tabela 3.6 encontram-se os desvios percentuais do lucro em relação ao lucro ótimo, V_* .

r_n	π_n	$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
		$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	2000	1.52	1.72	1.96	2.71	3.07	3.49	4.08	4.62	5.28
200	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	0.65	0.00	0.00	0.23	0.00	0.00	0.06	0.00	0.00
	2000	1.21	1.33	1.49	2.15	2.38	2.66	3.26	3.60	4.00
800	500	1.50	0.47	0.00	1.76	0.17	0.00	0.92	0.04	0.00
	1000	0.99	1.09	1.22	1.73	1.92	2.14	2.59	2.85	3.17
	2000	0.70	0.75	0.81	1.26	1.36	1.46	1.91	2.05	2.20

Tabela 3.6 Desvio percentual do lucro em relação ao plano ótimo de decisões

De facto, o lucro obtido coincide com o ótimo em 44% dos casos. Nos restantes, os maiores desvios do lucro verificam-se quando as penalizações dos pacientes internos ou externos são elevadas. Em particular, o maior desvio de 5.28% surge quando as penalizações de ambos os tipos assumem os valores mais elevados. Numa análise comparativa com as regras anteriores, esta heurística replica exatamente os valores da regra *Prioridade absoluta ao paciente crítico* em 71 dos 81 casos estudados. Nos restantes casos, assinalados na Tabela 3.6, o desempenho é melhor e, em particular, o maior desvio do lucro de 6.65% dessa regra, é agora de 0.06%. Concluimos que, de facto, é mais vantajoso dar prioridade aos pacientes internos à medida que o final do dia se aproxima.

Observe-se que, o cálculo de i_* corresponde a uma expressão algébrica que depende, praticamente, de todos os parâmetros associados aos pacientes em questão. Na tentativa de simplificar este aspeto, a próxima regra designada *Prioridade Mista* é definida por $i_* = \frac{N}{2}$, independentemente do valor dos parâmetros para cada tipo de pacientes. Na prática significa que deve dar-se prioridade aos pacientes externos se $i \leq \frac{N}{2}$, e prioridade aos pacientes internos no caso contrário. A Tabela 3.7 apresenta os desvios percentuais do lucro em relação ao lucro ótimo.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	27.65	32.12	36.64	28.70	33.19	37.73	29.76	34.27	38.83
	1000	8.09	13.78	19.55	9.38	15.10	20.91	10.68	16.44	22.28
	2000	2.33	2.12	1.88	1.94	1.74	1.51	1.63	1.47	1.30
200	500	18.62	22.93	27.28	19.61	23.94	28.32	20.62	24.97	29.37
	1000	0.38	2.44	7.95	0.92	3.68	9.22	1.66	4.93	10.50
	2000	2.65	2.48	2.29	2.25	2.08	1.90	1.96	1.79	1.60
800	500	0.17	0.28	1.77	0.30	0.67	2.66	0.55	1.21	3.55
	1000	0.95	0.78	0.61	0.75	0.61	0.48	0.64	0.52	0.44
	2000	3.29	3.18	3.07	2.94	2.83	2.71	2.64	2.53	2.41

Tabela 3.7 Desvio percentual do lucro em relação ao *plano ótimo de decisões*

A generalidade dos valores indica-nos que o desempenho desta regra está afastado do ótimo. No entanto observa-se que, nos casos da regra anterior, para os quais $i_* = 0$, definir uma *Prioridade Mista* resulta num desempenho melhor, à exceção dos casos em que $r_n + \pi_n = 2800$ e portanto maior prioridade aos pacientes internos, é mais vantajoso. Conclui-se ainda que, regra geral, desvalorizar os parâmetros no momento da decisão acerca do paciente que se deve atender, não é uma boa forma de gerir o sistema.

Da análise feita até ao momento concluímos que, regra geral, quando o paciente externo é o paciente crítico ou quando os pacientes internos beneficiam de maior prioridade no final do dia, os lucros resultantes aproximam-se, ou coincidem, com o lucro ótimo. Desta observação surge a regra, *Prioridade Híbrida* definida da seguinte forma. Se o paciente crítico for o paciente externo, então $i_* = N$, caso contrário, $i_* = \frac{N}{2}$. A Tabela 3.8 compila os desvios percentuais do lucro em relação ao lucro ótimo.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	2000	2.33	2.12	1.88	1.94	1.74	1.51	1.63	1.47	1.30
200	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	0.38	0.00	0.00	0.92	0.00	0.00	1.66	0.00	0.00
	2000	2.65	2.48	2.29	2.25	2.08	1.90	1.96	1.79	1.60
800	500	0.17	0.28	0.00	0.30	0.67	0.00	0.55	1.21	0.00
	1000	0.95	0.78	0.61	0.75	0.61	0.48	0.64	0.52	0.44
	2000	3.29	3.18	3.07	2.94	2.83	2.71	2.64	2.53	2.41

Tabela 3.8 Desvio percentual do lucro em relação ao *plano ótimo de decisões*

Tal como era expectável, os valores da tabela 3.8 confirmam um desempenho próximo do ótimo, em termos lucrativos. Mais concretamente, o lucro ótimo é atingido exatamente nos casos em que os pacientes externos assumem a caracterização de paciente crítico, tal como em exemplos anteriores. Nos restantes casos, estes valores são melhores do que os valores da Tabela 3.6 em 26 casos, dos quais 19 apresentam uma melhoria, de pelo menos, 50%. Em particular, o maior desvio de 5.28%, é agora de 1.30% em relação ao lucro ótimo. Notemos ainda que, à exceção dos casos em que o paciente externo é o paciente crítico, os desvios do lucro coincidem exatamente com os da Tabela 3.7.

3.6 Regras de prioridade dinâmicas

Nesta secção estaremos interessados em duas regras nas quais, ao contrário das regras anteriores, a prioridade dos pacientes não está previamente definida no início do dia. Nestes dois casos, a prioridade é variável ao longo do dia e determinada no instante anterior ao exato período a que diz respeito.

3.6.1 tendo em conta homogeneidade de grupos

Até ao momento, as escolhas do atendimento têm em conta, os parâmetros associados ao tipo de pacientes a que pertencem. No entanto, podemos pensar num atendimento em que a tomada de decisão ignore o papel desses parâmetros. Uma sugestão de regra, denominada *Grupos Homogêneos*, consiste em manter os grupos de cada tipo de pacientes, o mais homogêneos possível, ao longo de todos os períodos. Deste modo, no momento da decisão de qual dos pacientes se deve atender, apenas é necessário contar o número de cada tipo de pacientes em espera e atender o paciente proveniente do grupo mais numeroso. Na Tabela 3.9 encontram-se os desvios do lucro em relação ao lucro ótimo.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	15.50	17.89	20.30	16.46	18.86	21.28	17.42	19.83	22.27
	1000	5.33	8.37	11.45	6.54	9.60	12.70	7.75	10.83	13.96
	2000	28.53	27.26	25.78	28.67	27.42	25.94	28.90	27.68	26.26
200	500	10.68	12.97	15.30	11.60	13.91	16.24	12.52	14.84	17.19
	1000	2.70	2.30	5.24	3.19	3.47	6.43	3.88	4.64	7.62
	2000	30.07	29.09	27.98	30.18	29.20	28.10	30.37	29.41	28.31
800	500	3.51	1.97	1.66	3.62	2.32	2.50	3.85	2.82	3.35
	1000	12.98	11.55	10.00	12.89	11.48	9.94	12.88	11.48	9.97
	2000	32.89	32.34	31.74	32.94	32.39	31.80	33.04	32.50	31.91

Tabela 3.9 Desvio percentual do lucro em relação ao *plano ótimo de decisões*

É deixada uma nota para os casos em que $n = s$. Nestas situações a decisão do atendimento foi feita tendo em conta a regra *Prioridade Mista*. Da análise da Tabela 3.9 conclui-se que, tal como na Tabela 3.7, desvalorizar o papel dos parâmetros na decisão do atendimento, não é uma boa prática. Dos 81 casos estudados, 54 representam perdas situadas entre 10.44% e 38.38% em relação aos respetivos valores ótimos. Em particular, os maiores desvios do lucro correspondem a situações em que os custos e penalizações de um dos tipos, ou ambos, são elevados.

3.6.2 tendo em conta custos pontuais

Suponhamos que num qualquer instante, existe uma situação pontual de descontrolo do sistema, isto é, o sistema não se comporta como esperado. Nesta situação propomos uma regra designada por *Caos* que é descrita da seguinte forma. Numa situação em que se encontrem (n, s) pacientes em espera, é feita uma estimativa grosseira do lucro, supondo que um desses pacientes é selecionado para o atendimento e os restantes permanecem por atender até ao final do dia. O paciente selecionado corresponde aquele para o qual essa estimativa resulta no maior valor. Mais concretamente, considere-se

$$\alpha_i = (n-1)(N-i+1)w_n + (n-1)\pi_n + s(N-i+1)w_s + s\pi_s$$

$$\beta_i = n(N-i+1)w_n + n\pi_n + (s-1)(N-i+1)w_s + (s-1)\pi_s$$

em que α_i e β_i representam as estimativas do lucro resultante do atendimento de um paciente interno e externo, respetivamente. Assim, no momento de decisão, deve atender-se um paciente interno se $r_n - \alpha_i > r_s - \beta_i$ e um paciente externo, caso contrário. A Tabela 3.10 apresenta os desvios percentuais do lucro em relação ao lucro ótimo.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	2000	1.52	1.72	1.96	2.71	3.07	3.49	4.08	4.62	5.28
200	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	0.38	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.11	0.00	0.00
	2000	1.21	1.33	1.49	2.15	2.38	2.66	3.26	3.60	4.00
800	500	1.46	0.28	0.00	1.14	0.10	0.00	0.55	0.08	0.00
	1000	0.99	1.09	1.22	1.73	1.92	2.14	2.59	2.85	3.17
	2000	0.70	0.75	0.81	1.26	1.36	1.46	1.91	2.05	2.20

Tabela 3.10 Desvio percentual do lucro em relação ao *plano ótimo de decisões*

Existem conjuntos de parâmetros para os quais esta gestão se revela ótima, coincidindo com outras regras anteriores, como por exemplo, *Prioridade absoluta a pacientes externos*. Observa-se ainda que, em 36 dos restantes 45 casos, estes valores coincidem com a regra *Prioridade segundo i_** e revelam-se melhores do que as regras anteriores em apenas 3 casos.

3.7 Conclusões

Nesta secção pretendemos sumariar a análise empírica feita anteriormente. Das regras *Prioridade absoluta a pacientes externos*, *Prioridade absoluta a pacientes internos* e *Prioridade absoluta ao paciente crítico*, concluímos que nos casos em que os custos de espera ou da falta de atendimento de pacientes internos são reduzidos, dar prioridade absoluta a pacientes externos define uma forma ótima de gerir o sistema. Na situação simétrica, em que os custos e as penalizações associados a pacientes internos são elevados, dar prioridade absoluta a este tipo de pacientes, consiste na melhor forma de gerir o sistema. Portanto, a regra *Prioridade absoluta ao paciente crítico* compila o melhor das duas anteriores e representa a melhor forma de gerir o atendimento dos pacientes mesmo nas situações em que possa não ser inequívoco qual é o paciente crítico.

Das regras *Prioridade segundo i_** e *Prioridade Híbrida* conclui-se que gerir o sistema com prioridades repartidas ao longo do dia, entre ambos os tipos de pacientes, representa uma gestão mais lucrativa. No entanto, não é vantajoso desvalorizar a importância dos parâmetros associados aos pacientes, tal como concluímos na regra *Prioridade Mista*.

Finalmente das regras dinâmicas concluímos que, num hospital onde o atendimento de pacientes assuma um papel prioritário em relação aos lucros que dele resultem, uma regra do tipo *Prioridade dinâmica tendo em conta homogeneidade de grupos* deve ser o tipo de gestão adotado, uma vez que promove o equilíbrio entre o número de pacientes de cada tipo. Em situações de descontrolo do sistema, como por exemplo, no caso em que surgem mais pacientes do que os esperados, a regra *Prioridade dinâmica tendo em conta custos pontuais* é uma boa forma de gerir o sistema, tendo em conta que permite analisar uma situação pontual.

Capítulo 4

Agendamento

Neste capítulo iremos debruçar-nos sobre a segunda parte do problema a que nos propusemos, o agendamento dos pacientes. Na análise que iremos fazer, vamos considerar um tipo de agendamento muito utilizado na prática, em unidades de saúde, tendo em conta a fácil implementação. Neste sentido, o capítulo está dividido da seguinte forma. Na primeira secção é feita uma descrição deste tipo de configuração e apresentada uma tabela que compila os valores ótimos, que servirão de referência na análise feita posteriormente. Ao longo da segunda secção são enunciadas duas heurísticas e simultaneamente é feita uma análise empírica dos resultados obtidos. Na primeira parte da análise computacional, está subjacente a hipótese de que o atendimento dos pacientes é feito segundo *Plano ótimo de decisões*, definido anteriormente. Na outra parte da análise, considera-se que as decisões de atendimento dos pacientes são feitas seguindo uma *Prioridade segundo i_** , também esta já definida. Em apêndice é possível consultar uma outra heurística para a qual não apresentamos resultados computacionais.

4.1 Configuração

Uma das configurações mais usadas para gerir o agendamento de pacientes é aquela que considera a existência de um limite, a_* , - *último período para agendamento* - até ao qual todos os períodos são disponibilizados para agendar pacientes externos, e os restantes são deixados livres. Deste modo, é apenas necessário definir o valor de a_* . O interesse principal prende-se na determinação do valor de a_* ótimo, aquele que maximiza o lucro diário. Neste sentido, foi implementado um algoritmo em R que determina, para cada conjunto de parâmetros, o valor de V_* com $a_* = 2, \dots, N$. Os valores apresentados na Tabela 4.1 correspondem aqueles que maximizam o lucro.

A análise da tabela confirma que de facto existem situações para as quais $a_* = N$, utilizado em todo o capítulo anterior, representa o último período ótimo para agendar pacientes externos. Isto verifica-se, por exemplo, quando as receitas e as penalizações associados a pacientes internos assumem valores menores. No entanto, na grande maioria dos casos apresentados, o valor de a_* ótimo é menor do que o definido, como por exemplo quando as penalizações dos pacientes internos são elevadas. Esta observação levanta uma questão relativa à diferença no lucro obtido nos casos em que o limite não coincide com o valor ótimo, isto é, se existe uma perda significativa no lucro diário.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	1000	18	18	18	18	18	17	18	18	17
	2000	16	15	14	15	14	14	15	14	14
200	500	20	20	19	20	20	19	20	20	19
	1000	16	15	15	15	15	15	15	15	15
	2000	16	15	14	15	14	14	15	14	14
800	500	16	15	14	15	14	14	15	14	14
	1000	16	15	14	15	14	14	15	14	14
	2000	16	15	14	15	14	14	15	14	14

Tabela 4.1 Valores de a_* ótimos segundo o plano ótimo de decisões

4.2 Experiência Computacional

Na análise do desempenho das regras de atendimento, no capítulo anterior, considerámos $a_* = N$, o que significa que todos os períodos estavam disponíveis para agendar pacientes externos. Esta escolha baseou-se na simplicidade de implementação e na intuição de que seria mais vantajoso, em termos lucrativos, disponibilizar o maior número de períodos para o atendimento desse tipo de pacientes. No entanto, da Tabela 4.1 é possível observar que esta definição nem sempre coincide com o valor de a_* ótimo. A Tabela 4.2 apresenta o desvio percentual do lucro em relação ao lucro com a_* ótimo.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	1000	0.50	1.12	1.74	0.52	1.14	1.77	0.54	1.17	1.83
	2000	2.91	7.43	12.84	3.35	8.12	13.76	3.88	8.95	14.67
200	500	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01
	1000	2.45	5.57	6.24	2.77	5.69	6.36	3.14	5.81	6.49
	2000	2.50	6.35	10.95	2.87	6.94	11.71	3.32	7.63	12.49
800	500	1.73	4.34	6.76	1.97	4.65	6.88	2.24	5.01	6.99
	1000	1.74	4.39	7.52	1.99	4.77	7.99	2.28	5.21	8.47
	2000	1.76	4.43	7.59	2.01	4.82	8.09	2.31	5.28	8.60

Tabela 4.2 Desvio percentual do lucro em relação ao lucro com a_* ótimo (segundo o plano ótimo de decisões)

Tal como observado na tabela anterior, disponibilizar todos os períodos para o agendamento de pacientes externos, nem sempre coincide com a escolha ótima. No entanto, regra geral, $a_* = N$ resulta em valores do lucro razoavelmente próximos do ótimo. Dos 81 casos apresentados, 15 coincidem com o ótimo e em 37 o desvio obtido é de, no máximo, 5%. O maior desvio de 14.67% corresponde à

situação em que a receita proveniente do atendimento de pacientes internos é nula, e a penalização desse tipo de pacientes assume o valor máximo de $\pi_n = 2000$. Note-se ainda que, um aumento dos custos de espera dos pacientes externos também contribui para um pior desempenho desta heurística. Em particular, para o caso de referência obtém-se um desvio de 2.87% em relação ao lucro ótimo.

Suponhamos agora que nem todos os períodos estão disponíveis para agendar pacientes externos mas que existe um equilíbrio entre o número de períodos a disponibilizar para esse efeito e o número de períodos deixados livres. Esta heurística designada por *Heurística Equilibrada*, procura definir o número de períodos a disponibilizar para pacientes externos tendo em conta o número médio diário de pacientes externos que chegam ao centro de diagnóstico.

Mais concretamente, se o número médio de pacientes externos for muito elevado ($\geq N$) o valor de $a_* = N$, que coincide com o caso anterior. Por outro lado, se o número médio de pacientes externos for muito baixo (≤ 0), $a_* = 0$. Caso contrário,

$$a_* = \left\lceil \frac{N(1 - p_n - p_e)}{p_s} \right\rceil, \text{ quando } 0 < \frac{N(1 - p_n - p_e)}{p_s} < N.$$

Na Tabela 4.3 encontram-se os desvios percentuais do lucro em relação ao lucro com a_* ótimo.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	26.38	25.97	25.55	26.31	25.89	25.47	26.23	25.81	25.39
	1000	9.87	9.77	9.68	9.72	9.62	9.53	9.57	9.47	9.40
	2000	5.85	4.04	2.81	5.16	3.46	2.32	4.51	2.99	1.83
200	500	18.27	17.82	17.38	18.17	17.72	17.27	18.07	17.62	17.16
	1000	5.05	4.37	4.37	4.62	4.30	4.30	4.37	4.22	4.22
	2000	5.02	3.45	2.40	4.42	2.95	1.97	3.85	2.53	1.54
800	500	3.51	2.46	2.15	3.12	2.21	2.11	2.79	2.11	2.08
	1000	3.50	2.39	1.65	3.07	2.04	1.36	2.67	1.76	1.08
	2000	3.53	2.41	1.66	3.09	2.04	1.36	2.68	1.74	1.05

Tabela 4.3 Desvio percentual do lucro em relação ao lucro com a_* ótimo (segundo o *plano ótimo de decisões*)

Tal como era expectável, o desempenho desta heurística é pior em 60 dos 81 casos estudados, quando comparada com a anterior. Uma possível justificação prende-se com o facto desta heurística não ter em conta a influência dos parâmetros de custos e receitas, na determinação de a_* . No caso de referência o desvio sofre um aumento em relação ao caso anterior e é agora 4.42%.

Suponhamos agora que o sistema é gerido segundo a trajetória ótima para um modelo aproximado definida na Pág. 21. Na Tabela 4.4 está indicado para cada conjunto de parâmetros, qual das heurísticas, $a_* = N$ ou *Heurística Equilibrada*, representa o melhor desempenho.

		$w_s=10$			$w_s=15$			$w_s=20$		
r_n	π_n	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$	$\pi_s=100$	$\pi_s=200$	$\pi_s=300$
0	500	N	N	N	N	N	N	N	N	N
	1000	N	N	N	N	N	N	N	N	N
	2000	N	N,E	E	N	N,E	E	N	N,E	E
200	500	N	N	N	N	N	N	N	N	N
	1000	N	N	N	N	N	N	N	N	N
	2000	N	N,E	E	N	N,E	E	N	N,E	E
800	500	N	N,E							
	1000	N	N,E	E	N	N,E	E	N	N,E	E
	2000	N	N,E	E	N	N,E	E	N	N,E	E

Tabela 4.4 Desempenho das heurísticas $a_* = N$ (N) e *Heurística Equilibrada* (E) com *Prioridade segundo i_**

Da generalidade dos valores observados, os lucros obtidos são muito semelhantes, no entanto, a Tabela 4.4 indica que, quando todos os períodos estão disponíveis para agendar pacientes externos, $a_* = N$, o desempenho é melhor em 52 dos 81 casos estudados e, em particular, no caso de referência. É importante observar que, nesta situação, um aumento do valor de $\pi_s = 100$ para $\pi_s = 300$ faz com que a segunda heurística passe a ser a melhor escolha, o que sublinha a importância da escolha de determinados parâmetros num determinado tipo de agendamento. Apesar de, na maioria dos casos, a primeira heurística ter um desempenho melhor, a *heurística equilibrada* revela-se melhor em situações onde as penalidades dos dois tipos de pacientes são ambas elevadas.

Capítulo 5

Conclusão

Neste capítulo faremos uma conclusão geral sobre os resultados obtidos nas secções de experiência computacional. Posteriormente, são deixadas algumas observações acerca das limitações deste trabalho e finalmente faremos referência a possíveis pesquisas futuras como forma de continuação deste trabalho.

5.1 Resultados

O tipo de gestão de uma unidade de saúde, influencia não só o desempenho prático do sistema como também o desempenho financeiro. É importante encontrar formas de gerir estes sistemas em que haja um equilíbrio entre estas duas componentes. Decidir quais os pacientes que devem ser atendidos em determinadas circunstâncias não é uma tarefa fácil, e tem ainda aliado o problema de gestão da marcação dos pacientes.

Neste trabalho foi feita uma comparação entre várias formas de gerir o atendimento dos pacientes e agendar os pacientes externos. Para este efeito foram utilizados parâmetros reais retirados de [5]. Para cada um, dos dois problemas, definimos valores de referência que representavam o ótimo.

Através dos dados obtidos, demonstramos que uma gestão na qual se dê prioridade exclusiva, a um dos tipos de pacientes não representa um bom desempenho. No entanto, quando a gestão do sistema considera dar prioridade ao *paciente crítico*, os lucros obtidos são próximos do ótimo, à exceção dos casos em que as somas de custos, receitas e penalidades, para cada tipo de pacientes é bastante próxima. Nestas situações, não sendo inequívoco qual o paciente que satisfaz aquele critério, e perante a dificuldade de estimar certos parâmetros, a melhor forma de gerir o sistema é a *Prioridade segundo i_** . Há uma proximidade no desempenho desta heurística com a *Prioridade Híbrida*, no entanto quando a soma das receitas e das penalizações dos pacientes internos assume o valor mais elevado, a primeira continua a representar a melhor gestão, isto é, aquela que maximiza o lucro diário. Avaliando os resultados obtidos com a regra *Prioridade Mista* concluimos que, apesar de ser vantajoso repartir a prioridade ao longo do dia, pelos dois tipos de pacientes, essa decisão não deve depender exclusivamente do momento do dia, ignorando assim a importância dos parâmetros associados a cada tipo de pacientes.

No seguimento da análise empírica, concluimos também que uma gestão na qual não se considere, nem o instante do dia em que o sistema se encontra, nem os parâmetros associados a cada tipo de

pacientes, resulta igualmente numa gestão menos lucrativa. Como é demonstrado pela regra *Grupos Homogéneos*, onde a tomada de decisão de quem se deve atender, depende apenas da observação do número de pacientes de cada tipo que se encontra em espera e segundo a qual é atendido o paciente do tipo que se encontra em maior número. Na última regra apresentada está subjacente um cenário pontual. Segundo a regra *Caos* a decisão do atendimento é feita tendo em conta uma estimativa grosseira do lucro associado ao paciente de cada tipo, pressupondo que os restantes pacientes permanecem por atender até ao final do dia. Os resultados obtidos permitem-nos concluir que esta regra é uma ótima forma de gerir o sistema, principalmente se existir um período do dia para o qual seja necessário tomar uma decisão isoladamente, isto é, numa situação de descontrolo do sistema.

Na questão do agendamento foi igualmente possível retirar algumas conclusões. Apesar do tipo de agendamento onde todos os períodos são disponibilizados para os pacientes externos, nem sempre coincidir com a solução ótima, na grande maioria dos casos, este revela-se a melhor forma de gerir o agendamento dos pacientes. Em ambos os casos, quando o atendimento é feito seguindo o *Plano ótimo de decisões* ou a *Prioridade segundo i_** , o preenchimento total dos períodos, com pacientes externos, revelou-se a melhor forma de calendarizar os pacientes. No entanto, em unidades de saúde onde o atendimento dos pacientes seja um fator prioritário, isto é, que seja valorizado o menor número possível de pacientes por atender no final do dia, é mais vantajoso definir o agendamento seguindo a *Heurística Equilibrada*.

As conclusões aqui apresentadas enfatizam a influência dos parâmetros associados a cada tipo de pacientes, mais concretamente, das penalizações a que o hospital está sujeito quando, no final do dia, existem pacientes que não foram atendidos.

5.2 Limitações

Este trabalho apresenta algumas limitações que enunciamos de seguida. A primeira prende-se com a questão da estacionariedade. O modelo em causa assume que as probabilidades de chegada dos pacientes, são constantes, ao longo do dia. No entanto, não nos parece uma hipótese realista, uma vez que ao longo do dia o fluxo de pacientes pode ser variável. Uma outra limitação é referente à hipótese de existência de uma única máquina. Poderia ter interesse considerar que o atendimento dos pacientes era feito por dois servidores. Existe uma outra observação a fazer ao facto do centro de diagnóstico funcionar ininterruptamente ao longo do dia. Teria interesse do ponto de vista realístico, considerar um modelo em que exista uma pausa, que na prática, representaria a hora de refeição a que os serviços encerram. Finalmente, é deixada uma nota para a dificuldade e incapacidade de demonstrar o Teorema 13.

5.3 Trabalho futuro

A análise feita neste trabalho, juntamente com os resultados numéricos apresentados, indicam que a gestão deste tipo de serviços pode ser significativamente melhorada, recorrendo ao uso de heurísticas fáceis de implementar, na prática. Neste trabalho não apresentamos uma forma única de gerir o sistema, que funcione bem sob quaisquer circunstâncias. Em vez disso, fornecemos sugestões sobre que tipo de gestão pode ser escolhida, tendo em conta vários cenários. Em particular, disponibilizar

todos os períodos para agendar pacientes externos, enquanto o sistema é gerido segundo o plano ótimo para um modelo aproximado (*Prioridade segundo i_**), revelou-se a melhor forma de gerir o sistema, sob vários conjuntos de parâmetros reais. No entanto, este trabalho também evidência a influência de certos parâmetros no desempenho destas heurísticas. Mais concretamente, das penalidades associadas à impossibilidade de atender os pacientes no final do dia, que regra geral, são difíceis de estimar.

Uma possibilidade de trabalho futuro assenta na hipótese de que a procura e a oferta variam ao longo dos dias, isto é, que a frequência com que os pacientes requisitam o centro de diagnóstico pode oscilar ao longo da semana e que, no mesmo sentido, a disponibilização do número de períodos também deve ser ajustada. Outra possibilidade seria considerar o horizonte temporal do problema, de uma semana e não de um dia. Esta extensão permitiria uma análise mais detalhada sobre os pacientes internos que, na maioria das vezes, são adiados de um dia para o outro e assim poderiam ser reagendados para o dia seguinte.

Fica assim sublinhada a importância e a necessidade de pesquisas futuras na área da gestão operacional em serviços de diagnóstico médicos.

Bibliografia

- [1] Bailey, N. T. J. A. (1952). A study of queues and appointment systems in hospital out-patient departments, with special reference to waiting-times. *Journal of Royal Statistical Society*, B14:185–99.
- [2] Belobaba, P. P. (1989). Application of a probabilistic decision model to airline seat inventory control. *Oper. Res.*, 37:183–197.
- [3] Fries, B. E., . M. V. P. (1981). Determination of optimal variable-sized multiple-block appointment systems. *Operations Research*, 29:324–45.
- [4] Gocgun, Y., B. B. W. G. A. G. M. L. (2011). A markov decision process approach to multi-category patient scheduling in a diagnostic facility. *Artificial Intelligence in Medicine*, 53(2):73–81.
- [5] Green, L. V., Savin, S., and Wang, B. (2006). Managing patient service in a diagnostic medical facility. *Operations Research*, 54(1):11–25.
- [6] Ho, C. J., . L. H. S. (1992). Minimizing total cost in scheduling outpatient appointments. *Management Sci.*, (38):1750–1765.
- [7] Kolisch, R., . S. S. (2008). Providing radiology health care services to stochastic demand of different customer classes. *OR Spectrum*, 30:375–95.
- [8] Koole, G. C. K. . G. (2007). Optimal outpatient appointment scheduling. *Health Care Management Science*, 10:217–29.
- [9] Liberman, V., Y. U. (1978). On the hotel overbooking problem: An inventory system with stochastic cancellations. *Management Sci.*, 24:1117–1126.
- [10] Patrick, J., P. M. L. Q. M. (2008). Dynamic multipriority patient scheduling for a diagnostic resource. *Operations Research*, 56:1507–25.
- [11] Ross, K. W. & Tsang, D. H. K. . (1989). The stochastic knapsack problem. *IEEE Trans. Comm.*, 37:740–747.
- [12] Vermeulen, I. B., Bohte, S. M., Elkhuisen, S. G., Lameris, H., Bakker, P. J., and Poutré, H. L. (2009). Adaptive resource allocation for efficient patient scheduling. *Artificial Intelligence in Medicine*, 46:67–80.

Anexo A

Heurística *Newsvendor* \int

O terceiro tipo de agendamento que vamos considerar é designado por *Heurística Newsvendor*. Nesta heurística, o critério para o cálculo de a_* não depende do número médio de ocorrências de um determinado tipo de pacientes, mas sim de uma aproximação do lucro esperado no final do dia, quando se define um determinado limite para o agendamento de pacientes externos. Neste caso, desvalorizam-se os custos associados ao tempo de espera de cada tipo de pacientes, isto é, $w_s = w_n = 0$ e portanto as decisões baseiam-se em, atender todos os pacientes internos (externos, resp.) primeiro, quando $(\pi_n + r_n \geq \pi_s + r_s)$ ($<$), resp.).

Na definição desta heurística consideram-se ainda as seguintes variáveis, D_n denota o número total (aleatório) de pacientes internos que chegam durante o dia, tal que, $D_n \sim B(N, p_n)$, D_s denota o número total (aleatório) de pacientes externos que chegam durante o dia, tal que, $D_s \sim B(a_*, p_s)$ e D_e denota o número total (aleatório) de pacientes emergentes que chegam durante o dia, tal que, $D_e \sim B(N, p_e)$. Assim, no primeiro caso, o lucro diário esperado é dado por,

$$V_*(\pi_n + r_n \geq \pi_s + r_s) = r_n E[D_n] + r_s E[\min((1 - p_e - p_n)N, D_s)] - \pi_s E[D_s - \min((1 - p_e - p_n)N, D_s)]$$

onde $\min((1 - p_e - p_n)N, D_s)$ representa o número de pacientes externos que vão, efetivamente, ser atendidos. Por outro lado, no segundo caso, o lucro diário esperado é dado pela expressão

$$V_*(\pi_n + r_n < \pi_s + r_s) = r_s E[D_s] + r_n E[\min((1 - p_e)N - p_s a_*, D_n)] - \pi_n E[D_n - \min((1 - p_e)N - p_s a_*, D_n)]$$

e $\min((1 - p_e)N - p_s a_*, D_n)$ representa o número de pacientes internos que vão, efetivamente, ser atendidos. Na prática, o cálculo de a_* consiste em determinar a expressão da função lucro para o primeiro e segundo casos, e posteriormente, encontrar a_* que maximiza, de forma conjunta, os dois valores dessas expressões.

Tendo em conta a complexidade para implementar esta heurística, comparativamente com as outras duas, e a proximidade dos resultados obtidos com o caso em que $a_* = N$, fez-nos excluir esta heurística e optar por não realizar experiência computacional acerca da mesma. Os resultados computacionais desta heurística podem ser consultados no artigo [5]. Os valores do lucro resultante desta heurística coincidem exatamente com os valores da primeira (quando $a_* = N$), em 89% dos casos estudados, iguala os resultados da *heurística equilibrada* em 4% dos casos e apenas nos 7% de casos restantes se revela melhor do que as anteriores.