



UNIVERSIDADE D  
COIMBRA

Diana Pires Tavares

**CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE RUÍNA EM  
MODELOS ATUARIAIS**

VOLUME 1

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças,  
orientada pelo/a Professor Doutor Paulo Eduardo Oliveira e apresentada ao  
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à  
Faculdade de Economia.**

Outubro de 2020



# **Cálculo da Probabilidade de Ruína em Modelos Atuariais**

**Diana Pires Tavares**



UNIVERSIDADE D  
**COIMBRA**

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

November 2020



## **Agradecimentos**

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus professores , por todo o encorajamento e orientação ao longo deste processo, mesmo nas alturas mais difíceis.

Quero também exprimir o meu agradecimento aos meus colegas de curso, amigos e familiares, por todas as palavras de apoio e por me incentivarem durante este período.



## Resumo

Nesta dissertação de mestrado, iremos estudar a modelação matemática da atividade atuarial, mais concretamente o caso do mercado de seguradoras, e será apresentado um modelo de risco em tempo discreto, baseado na hipótese de permutabilidade e dependência entre ocorrências de pedidos de indemnização.

Apresentaremos a probabilidade de ruína, o Teorema de de Finetti e a sua utilidade num modelo de variáveis aleatórias permutáveis, e o modelo binomial clássico, o qual iremos reescrever para incluir o conceito de permutabilidade.

De seguida, iremos analisar a probabilidade de sobrevivência, mais especificamente a probabilidade da ruína acontecer após a  $n$ -ésima indemnização, e a distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente existente imediatamente antes do evento de ruína e o défice resultante dessa mesma falência, sob as condições referidas anteriormente.

Para finalizar este estudo, será feita uma comparação dos resultados numéricos obtidos com o modelo de variáveis aleatórias, correspondentes às ocorrências de pedidos de indemnização, independentes e identicamente distribuídas. Serão usadas duas distribuições para modelar a variável aleatória correspondente ao montante individual da indemnização paga: a distribuição Binomial Negativa e o seu caso particular, a distribuição Geométrica.

Serão realizadas alterações nos parâmetros usados na modelação das probabilidades, de modo a podermos estudar os efeitos e variações que irão trazer, recorrendo a tabelas e representações gráficas.





# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teoria da Ruína nos Modelos Atuariais</b>	<b>3</b>
2.1 . . . . .	3
2.1.1 O Modelo Binomial Clássico . . . . .	3
2.1.2 A Hipótese de Permutabilidade . . . . .	4
2.1.3 O Teorema Fundamental de de Finetti e a sua Relação com Variáveis Permutáveis . . . . .	4
2.1.4 O Modelo Actuarial Re-escrito . . . . .	7
<b>3 Probabilidades de Ruína</b>	<b>11</b>
3.1 Probabilidades de Sobrevivência . . . . .	11
3.2 Distribuição Conjunta de $(T^{(e)}, U_{T^{(e)}-1}, U_{T^{(e)}})$ . . . . .	13
<b>4 Aplicação dos Resultados</b>	<b>17</b>
4.1 Resultados Numéricos da Probabilidade de Sobrevivência . . . . .	17
4.1.1 Operações com uma Distribuição Geométrica . . . . .	19
4.1.2 Operações com uma Distribuição Binomial Negativa . . . . .	22
4.1.3 Comparação entre a Distribuição Geométrica e a Distribuição Binomial Negativa . . . . .	25
4.2 Resultados Numéricos da Distribuição Conjunta . . . . .	26
4.2.1 Operações com uma Distribuição Geométrica . . . . .	26
4.2.2 Operações com uma Distribuição Binomial Negativa . . . . .	28
<b>5 Conclusão</b>	<b>31</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>33</b>
<b>Anexo A Códigos Linguagem R</b>	<b>35</b>



# Lista de Figuras

4.1	Função de probabilidade de uma distribuição Geométrica, com $\alpha = 0.8$ . . . . .	18
4.2	Função de probabilidade de uma distribuição Binomial Negativa, com $h = 1$ e $g = 0.43$ . . . . .	19
4.3	Comparação entre as probabilidades de não-ruína i.i.d e permutável, $P_u(T > n)$ (a linha a tracejado) e $P_u(T^{(e)} > n)$ (a linha contínua). . . . .	19
4.4	Alterações nos parâmetros da variável $p = \lambda_1$ ( $a$ e $b$ ) na probabilidade de sobrevivência: $p = \frac{1}{3}$ , com $a = 4$ e $b = 8$ . . . . .	20
4.5	Alterações nos parâmetros da variável $p = \lambda_1$ ( $a$ e $b$ ) na probabilidade de sobrevivência: à esquerda, $p = 0.3(3)$ , com $a = 1$ e $b = 2$ ; à direita, $p = 0.2$ , com $a = 1$ e $b = 4$ . . . . .	20
4.6	Alterações do parâmetro $\alpha$ da função densidade de $x$ ( $f(x)$ ) na probabilidade de sobrevivência: à esquerda, $f(x):\alpha = 0.5$ ; à direita, $x, f(x):\alpha = 0.9$ . . . . .	21
4.7	Alterações no montante de capital inicial, $u = 3$ , na probabilidade de sobrevivência. . . . .	21
4.8	Comparação entre as probabilidades de não-ruína i.i.d e permutável, $P_u(T > n)$ (a linha a tracejado) e $P_u(T^{(e)} > n)$ (a linha contínua). . . . .	22
4.9	Alterações nos parâmetros da variável $p = \lambda_1$ ( $a$ e $b$ ) na probabilidade de sobrevivência: $p = \frac{1}{3}$ , com $a = 4$ e $b = 8$ . . . . .	22
4.10	Alterações nos parâmetros da variável $p = \lambda_1$ ( $a$ e $b$ ) na probabilidade de sobrevivência: à esquerda, $p = 0.3(3)$ , com $a = 1$ e $b = 2$ ; à direita, $p = 0.2$ , com $a = 1$ e $b = 4$ . . . . .	23
4.11	Alterações dos parâmetro $h$ e $g$ da função densidade de $x$ ( $p(x)$ ) na probabilidade de sobrevivência: $h = 7, g = \frac{2.15}{5}$ . . . . .	23
4.12	Alterações dos parâmetro $h$ e $g$ da função densidade de $x$ ( $p(x)$ ) na probabilidade de sobrevivência: à esquerda, $h = 1, g = \frac{3}{5}$ ; à direita, $h = 7, g = \frac{3}{5}$ . . . . .	24
4.13	Alterações no montante de capital inicial, $u = 3$ , na probabilidade de sobrevivência. . . . .	24
4.14	Ilustração do afastamento das probabilidades de sobrevivência das distribuições estudadas. . . . .	25



# Lista de Tabelas

4.1	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com $\alpha = 0.8$ , $p = 0.1$ e $a = 1$ , $b = 9$ e $u = 1$ , para o caso i.i.d.	26
4.2	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com $\alpha = 0.8$ , $p = 0.1$ e $a = 1$ , $b = 9$ e $u = 1$ , para o caso permutável.	26
4.3	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com $\alpha = 0.8$ , $p = 0.1$ e $a = 1$ , $b = 9$ e $u = 3$ .	27
4.4	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com $\alpha = 0.5$ , $a = 1$ , $b = 9$ , $p = 0.1$ e $u = 1$ .	27
4.5	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com alterações nos parâmetros $a$ e $b$ com $p$ igual nos dois casos.	28
4.6	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com $h = 1$ , $g = \frac{2.15}{5}$ , $p = 0.1$ e $a = 1$ , $b = 9$ e $u = 1$ , para o caso i.i.d.	28
4.7	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com $h = 1$ , $g = \frac{2.15}{5}$ , $p = 0.1$ e $a = 1$ , $b = 9$ e $u = 1$ , para o caso permutável.	29
4.8	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com $h = 1$ , $g = \frac{3}{5}$ , $p = 0.1$ e $a = 1$ , $b = 9$ e $u = 1$ .	29
4.9	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com $h = 1$ , $g = \frac{2.15}{5}$ , $p = 0.1$ e $a = 1$ , $b = 9$ e $u = 3$ .	29
4.10	Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com alterações no parâmetro $h$ .	30



# Capítulo 1

## Introdução

A atividade atuarial é um dos principais temas de estudo na área da Teoria do Risco, que utiliza a modelação matemática para descrever o comportamento das receitas e indemnizações de uma companhia de seguros e construir caracterizações para a evolução futura da companhia.

Ao longo desta dissertação, iremos desenvolver um modelo de risco, com foco no mercado de seguradoras, substituindo a habitual hipótese de independência das indemnizações pela permutabilidade destas. Este texto será baseado num artigo de Serkan Eryilmaz e Omer Gebizlioglu [8]. Para além do estudo de algumas caracterizações teóricas do modelo com esta forma de dependência, será feita uma comparação do comportamento numérico do caso independente com o modelo de variáveis aleatórias verificando a hipótese de permutabilidade, de modo a descrever o efeito da alteração da hipótese de independência nas caracterizações encontradas.

Posteriormente, efetuaremos a análise do evento de ruína com horizonte finito, com o propósito de apresentar resultados numéricos sob as condições referidas. Será apresentado o estudo teórico da caracterização de probabilidades de ruína, acompanhado de simulações numéricas em alguns contextos mais ou menos standard de modelização da atividade de uma companhia seguradora. Apresenta-se assim, uma descrição numérica do impacto do abandono da habitual hipótese de independência nos modelos matemáticos construídos.

Iremos explorar o modelo clássico de ruína, os conceitos de probabilidade de sobrevivência, a definição de permutabilidade e a sua ligação com Teorema de de Finetti, e a consequente aplicação dos mesmos no modelo em questão no Capítulo 2.

De seguida, passamos para o Capítulo 3, que tem por objetivo o cálculo das probabilidades de sobrevivência a tempo finito e a construção da distribuição conjunta do tempo de ruína, do excedente imediatamente antes da ruína e do défice no momento de ruína.

No Capítulo 4, iremos descrever o comportamento numérico para as probabilidades exploradas no capítulo anterior e faremos uso de gráficos e tabelas para a sua análise. Utilizaremos a distribuição Binomial Negativa e o caso particular da distribuição Geométrica para descrever o montante de indemnizações. Dentro destas, efetuaremos alterações nos seus parâmetros para ver as variações nas probabilidades e faremos uma comparação entre as distribuições.

Por fim, no Capítulo 5 será feita uma reflexão sobre os resultados obtidos e a relevância deste estudo nos modelos reais.





## Capítulo 2

# Teoria da Ruína nos Modelos Atuariais

### 2.1 Conceitos Fundamentais

Ao longo deste estudo, ir-nos-emos focar num dos temas centrais de análise de risco: a probabilidade de ruína. Será examinado o caso dos mercados de seguros, mais especificamente a sobrevivência das companhias seguradoras. Estas empresas têm como função cobrir um eventual risco, tendo como benefício o recebimento antecipado de prémios. Este estudo é fundamental na avaliação do montante da reserva inicial, de modo a diminuir as chances da empresa em questão não entrar em falência em cenários futuros.

Nesta dissertação, iremos apenas ter como variáveis deste modelo os prémios recebidos, as indemnizações pagas em cada instante e os respetivos montantes. Porém, fatores como taxas de juros e as características pessoais dos segurados são importantes para o processo em questão mas serão omitidos, para simplificação do modelo.

Para esta análise, é conveniente relembrar alguns conceitos clássicos que serão estudados ao longo deste texto. Recordaremos o modelo binomial clássico de risco e o conceito de probabilidade de sobrevivência. Visto que a hipótese de independência é pouco provável de se verificar numa carteira de seguros, iremos introduzir a noção de dependência e permutabilidade. Estas definições serão então implementadas no nosso modelo e iremos estudar as variações resultantes no cálculo de probabilidades de falência.

#### 2.1.1 O Modelo Binomial Clássico

Dentro de um horizonte temporal finito, uma seguradora irá realizar pagamentos de indemnizações devido a sinistros dos seus segurados, recebendo prémios acordados nessas apólices de seguro. Por simplificação, iremos supor que o valor da taxa de prémio é constante e que não depende de fatores externos. Iremos descrever o modelo clássico mais simples, dado por Oliveira [7], que caracteriza a atividade atuarial.

Começemos por caracterizar o processo correspondente à reserva financeira de uma companhia de seguros,  $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ , que assumiremos com tempo discreto, e que representa o capital que a seguradora dispõem no período em questão. O índice  $n$  corresponde ao período em que ocorre o  $n$ -ésimo sinistro. O capital inicial é dado por  $U_0 = u \geq 0$ .

O valor de  $U_n$  depende de um processo de prêmio,  $P_n$ , que nos dá o valor de prêmios recebidos pela seguradora até ao  $n$ -ésimo sinistro. Iremos assumir que  $P_n = cn$ , em que  $c$  representa o prêmio periódico. Para simplificar o cálculo, assumimos que  $c = 1$ , logo  $P_n = n$ . Temos ainda  $N_n$ , a variável aleatória que traduz o número total de indemnizações pagas até ao  $n$ -ésimo sinistro.

Note-se que a evolução é descrita face ao número de indemnizações pagas e não em função do decurso do tempo, como é habitual em vários modelos.

Por fim, temos a variável aleatória que representa o valor total de indemnizações pagas até ao  $n$ -ésimo sinistro,  $S_n = \sum_{j=1}^{N_n} X_j$ , sendo  $X_j$  o montante da  $j$ -ésima indemnização associada a uma ocorrência de sinistro. As variáveis aleatórias  $X_j$  são considerados independentes de  $N_n$  para todo o  $j > 0$ . Assumimos que em cada instante só poderá ser efetuado um único pagamento de indemnização. Como o número de indemnizações é um valor aleatório,  $S_n$  será uma variável aleatória composta.

Temos então

$$U_n = u + cn - \sum_{j=1}^{N_n} X_j. \quad (2.1)$$

### 2.1.2 A Hipótese de Permutabilidade

Como já foi referido anteriormente, o uso da noção de independência é questionável neste tipo de modelos, visto que não é uma característica que se verifique num portefólio de seguros real. Por isso, é necessário incluir o conceito de dependência de maneira a ser possível produzir uma função de probabilidade de sobrevivência de uma maneira praticável.

De seguida, iremos ver a definição do conceito de permutabilidade, dada por Williams [9]:

**Definição 2.1.1.** *Uma sequência infinita  $X_1, X_2, X_3, \dots$  de variáveis aleatórias discretas é denominada permutável se dada uma aplicação bijetiva  $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que verifica  $\rho(k) = k$  exceto numa quantidade finita de valores de  $k$ , as sequências  $X_1, X_2, X_3, \dots$  e  $X_{\rho(1)}, X_{\rho(2)}, X_{\rho(3)}, \dots$ , têm a mesma lei de probabilidade. Estas aplicações podem ser interpretadas como permutações de  $\mathbb{N}$  que apenas alteram uma quantidade finita de posições.*

*Isto significa que, para qualquer  $m \in \mathbb{N}$ , para  $x_k \in \{0, 1\}$ ,  $1 \leq k \leq m$  e para cada permutação  $\rho$  de  $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ , se tem*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m) = P(X_{\rho(1)} = x_1, X_{\rho(2)} = x_2, \dots, X_{\rho(m)} = x_m). \quad (2.2)$$

O conceito de permutabilidade é mais fraco que a hipótese de independência, visto que uma sequência i.i.d. é permutável mas o recíproco nem é sempre verdade. Esta noção poderá ser útil em modelos de probabilidades, pois implica que a ordem de uma sequência não é significativa, mesmo sem independência entre variáveis.

### 2.1.3 O Teorema Fundamental de de Finetti e a sua Relação com Variáveis Permutáveis

O Teorema de de Finetti, com a utilização do conceito de permutabilidade, permite trazer mais flexibilidade nos modelos de probabilidades que utilizam distribuições conjuntas para permutações dos elementos em si. Iremos estudar a demonstração deste resultado dada por Kirsch [6].

Vamos assumir que  $\pi_\theta$  é a medida de probabilidade em  $\{0, 1\}$ , com  $\pi_\theta(1) = \theta$  e  $\pi_\theta(0) = 1 - \theta$ .

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $X_i$ ,  $i \geq 1$  uma seqüência infinita de variáveis aleatórias permutáveis com valores em  $\{0, 1\}$ . Então existe uma medida de probabilidade  $\mu$  em  $[0, 1]$  tal que, para cada  $N \in \mathbb{N}$  e cada seqüência  $(x_1, \dots, x_N) \in \{0, 1\}^N$*

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) = \int \prod_{i=1}^N \pi_{\theta}(x_i) d\mu(\theta), \quad (2.3)$$

onde a função integranda representa a distribuição de  $X_1, \dots, X_N$  caso estas variáveis fossem independentes.

Ou seja, uma seqüência permutável com valores em  $\{0, 1\}$  é uma "mistura de seqüências" independentes com respeito a uma medida  $\mu$  em  $[0, 1]$ .

Convém recordar a seguinte definição:

**Definição 2.1.2.** *Para uma medida de probabilidade  $\mu$  em  $\mathbb{R}$ , definimos os momentos de ordem  $k$  por  $m_k(\mu) := \int x^k d\mu(x)$ , quando o integral é finito.*

A seguir, trataremos de medidas com suporte compacto para que todos os momentos existam (e sejam finitos). O próximo teorema é uma versão simplificada do método dos momentos, que é no entanto, suficiente para o nosso propósito.

Para apresentar uma justificação dos resultados anunciadas atrás, é necessária a utilização de um noção de convergência de medidas de probabilidade que descrevemos de forma adaptada ao contexto, de probabilidades com suporte compacto. Recordar-se que a convergência fraca de probabilidades  $\mu_n$  para a probabilidade  $\mu$  é definida como  $\int f(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int f(x) d\mu(x)$  para toda a função  $f$  contínua e limitada com domínio contendo o suporte das medidas. Diaconis [1] explorou mais detalhes sobre momentos e as suas características.

**Proposição 2.1.1.** *1. Seja  $\mu_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , medidas de probabilidade com suporte contido num intervalo fixo  $[a, b]$ . Se, para todo o  $k$ , os momentos  $m_k(\mu_n)$  convergem para algum  $m_k$ , então a seqüência  $\mu_n$  converge fracamente para uma medida  $\mu$  com momentos  $m_k(\mu) = m_k$  e com suporte contido em  $[a, b]$ .*

*2. Se  $\mu$  é uma medida de probabilidade com suporte contido em  $[a, b]$  e  $\nu$  é uma medida de probabilidade em  $\mathbb{R}$  tal que  $m_k(\mu) = m_k(\nu)$  então  $\mu = \nu$ .*

A prova do **Teorema 2.1.1** será feita através da Lei Fraca dos Grandes Números, com referência a Iber [5], sendo necessário reescrever o teorema anterior.

**Teorema 2.1.2.** *Seja  $X_i$ ,  $i \geq 1$  uma seqüência infinita de variáveis aleatórias permutáveis com valores em  $\{0, 1\}$ , então*

$$S_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (2.4)$$

converge em distribuição para uma medida de probabilidade  $\mu$ .

$\mu$  tem valores no intervalo  $[0, 1]$  e os seus momentos são dados por

$$m_k(\mu) = E(X^k). \quad (2.5)$$

Para expressar os momentos de  $S_N$ , de maneira a provar o **Teorema 2.1.2**, calculamos

$$\left( \sum_{i=1}^N X_i \right)^k = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in [1, \dots, N]^k} X_{i_1} \cdot X_{i_2} \cdot \dots \cdot X_{i_k} \quad (2.6)$$

Para simplificação do somatório acima, representamos a contagem da quantidade de elementos distintos em  $(i_1, \dots, i_k)$  como  $\rho(i_1, \dots, i_k) = \#\{i_1, \dots, i_k\}$ .

Então,

$$\begin{aligned} E \left( \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right)^k \right) &= \frac{1}{N^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ \rho(i_1, \dots, i_k)=k}}^N E(X_{i_1} \cdot X_{i_2} \cdot \dots \cdot X_{i_k}) \\ &+ \frac{1}{N^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ \rho(i_1, \dots, i_k) < k}}^N E(X_{i_1} \cdot X_{i_2} \cdot \dots \cdot X_{i_k}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Existem no máximo  $(k-1)^k N^{k-1}$  seqüências de índices  $(i_1, \dots, i_k)$  com  $\rho(i_1, \dots, i_k) < k$ . Temos  $N^{k-1}$  possibilidades de escolher os índices possíveis para  $(i_1, \dots, i_k)$ . Observamos ainda que, para cada uma das  $k$  posições na  $k$ -ésima seqüência, é possível escolher um dos  $(k-1)$  candidatos, o que nos dá  $(k-1)^k$  possibilidades, incluindo também as seqüências com menos de  $(k-1)$  candidatos, já que alguns não aparecem na seqüência. Assim, quando  $N \rightarrow +\infty$ , o segundo termo da equação acima vai ser negligenciável relativa ao primeiro, pelo que, assintoticamente

$$E \left( \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right)^k \right) \approx \frac{1}{N^k} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ \rho(i_1, \dots, i_k)=k}}^N E(X_{i_1} \cdot X_{i_2} \cdot \dots \cdot X_{i_k}). \quad (2.8)$$

Usando a permutabilidade,

$$E \left( \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right)^k \right) \approx E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_k). \quad (2.9)$$

Esta aproximação é relevante quando queremos analisar o comportamento assintótico da esperança ilustrada no lado esquerdo desta equação.

Será necessário usar o seguinte lema para efetuar a prova do **Teorema 2.1.1**:

**Lema 2.1.3.** *Suponha-se que  $X_i$ ,  $i \geq 1$  é uma seqüência de variáveis permutáveis com valores em  $\{0, 1\}$ . Então, para  $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$  e  $x_1, \dots, x_k \in \{0, 1\}$ , com  $\sum_i x_i = m$ ,*

$$P(X_{i_1} = x_1, \dots, X_{i_k} = x_k) = \frac{1}{\binom{k}{m}} P \left( \sum_{i=1}^k X_i = m \right) \quad (2.10)$$

Podemos provar este lema, pois temos  $\binom{k}{m} x_1, \dots, x_k$  com  $\sum x_i = m$  e, devido à permutabilidade, todos irão ter a mesma probabilidade.

Por fim, efetuaremos a prova do **Teorema 2.1.1**.

*Prova.* Define-se o processo  $Y_i$  com valores em  $\{0, 1\}$  por

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_k = y_k) = \int \prod_{i=1}^k \pi_{\theta}(y_i) d\mu(\theta) \quad (2.11)$$

O processo  $Y_i$  é obviamente permutável.

Vamos provar que as sequências de variáveis aleatórias  $X_i$  e  $Y_i$  têm as mesmas distribuições de dimensão finita. Segundo o **Lema 2.1.3**, basta mostrar que  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  e  $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  têm a mesma distribuição para todo o  $N$ , e devido à **Proposição 2.1.1**, apenas temos de provar que os seus momentos coincidem.

$$\begin{aligned} E(S_N^k) &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ \rho(i_1, \dots, i_k)=r}}^N E(X_{i_1} \cdot \dots \cdot X_{i_k}) = \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ \rho(i_1, \dots, i_k)=k}}^N E(X_1 \cdot \dots \cdot X_r) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ \rho(i_1, \dots, i_k)=r}}^N \int \prod_{i=1}^r \pi_p(x_i) d\mu(p) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ \rho(i_1, \dots, i_k)=k}}^N E(Y_1 \cdot \dots \cdot Y_r) = \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ \rho(i_1, \dots, i_k)=r}}^N E(Y_{i_1} \cdot \dots \cdot Y_{i_k}) \\ &= E(T_N^k). \end{aligned} \quad (2.12)$$

□

### 2.1.4 O Modelo Actuarial Re-escrito

A partir desta secção, vamos formular o modelo clássico de risco referido na secção (2.1.1) de maneira diferente [8], de modo a conseguir aplicar os conceitos anteriormente apresentados neste capítulo.

Relembremos que  $P_n = n$ . No que toca a parte do risco  $S_n$ , iremos mudar um pouco a expressão, de forma a que seja possível, mais à frente, incorporar o conceito de permutabilidade. Admitiremos  $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$ , sendo  $Y_j$  o  $j$ -ésimo pedido de indemnização definido por

$$Y_j = \begin{cases} X_j, & \text{se } I_j = 1 \\ 0, & \text{se } I_j = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

sendo  $I_j$  o indicador de ocorrência do pedido de indemnização, em que  $I_j = 1$  se houver pedido de indemnização e  $I_j = 0$  caso ocorra um sinistro que não origine um pagamento de indemnização, com  $j = 1, 2, 3, \dots$ . A variável aleatória do montante da indemnização individual  $X_j$  e  $I_j$  são consideradas independentes em cada período de tempo.

Este processo tem tempo discreto e o excedente no final do período  $n$  é representado por

$$U_n = u + cn - \sum_{j=1}^{N_n} X_j. \quad (2.14)$$

Esta equação é equivalente à usada no modelo clássico (2.1.1), se assumirmos que  $N_n$  vai ser um processo de contagem das ocorrências de sinistros que levaram a pagamentos de indenização, isto é, quando  $I_j = 1$ . Se  $I_1, I_2, \dots$  são independentes com uma probabilidade  $p = P(I_j = 1)$  e  $q = 1 - p = P(I_j = 0)$ , é possível dizer que modelo acima é considerado um modelo binomial composto pois

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

descreve um processo binomial, o que faz com que  $U_n$  (por consequência de  $S_n$ ) seja um processo binomial composto.

Agora, vamos enunciar algumas definições importantes nesta matéria de ruína [7].

**Definição 2.1.3.** *Seja*

$$T = \min\{n \geq 0 : U_n \leq 0\} \quad (2.16)$$

a variável aleatória correspondente ao instante de ruína, ou seja, o momento em que a reserva começa a tomar valores negativos.

Temos então que a probabilidade de ruína a horizonte infinito é dada por  $\psi_u = P(T < \infty | U_0 = u)$ , sendo a probabilidade de sobrevivência a horizonte infinito  $\phi_u = 1 - \psi_u = P(U_n \geq 0, \forall n \geq 0 | U_0 = u)$ .

No que toca ao tempo finito, temos que  $\phi_{u,n} = P(U_t \geq 0, \forall t \in 0, \dots, n | U_0 = u)$  e  $\psi_{u,n} = 1 - \phi_{u,n}$ .

A probabilidade que iremos explorar mais neste estudo é a probabilidade de sobrevivência a tempo finito representada como

$$P(T > n | U_0 = u) = P_u(T > n), \quad (2.17)$$

com capital inicial  $U_0 = u \geq 0$ .

Analisemos as diferentes possibilidades de ocorrer um evento de ruína, descritas por Gerber [4]. Em primeiro lugar, temos a probabilidade de entrar em ruína com mais uma unidade monetária do que a do capital inicial  $u$ , sabendo que ainda não existiu um único pagamento de indenização, correspondente à expressão  $q\psi_{u+1}$ . Temos ainda a probabilidade da companhia de seguros ter atingido a ruína com um capital igual ou inferior ao montante inicial, sabendo que houve um pagamento de indenização, que é obtida através de  $p \sum_{x=1}^u \psi_{u+1-x} p(x)$ . Por fim, a probabilidade da seguradora não ter entrado em falência, sabendo que existiu pelo menos um sinistro que originou pagamento de indenização é calculada por  $p \sum_{x=u+1}^{\infty} p(x)$ .

Temos então, com  $p(x) = P(X_i = x)$  a probabilidade de ruína,

$$\psi_u = q\psi_{u+1} + p \sum_{x=1}^u \psi_{u+1-x} p(x) + p \sum_{x=u+1}^{\infty} p(x), \quad (2.18)$$

com  $u = 1, 2, 3, \dots$ .

Esta formulação ir-nos-á ajudar mais à frente para o cálculo efetivo de  $P_u(T > n)$ .

Como já foi referido anteriormente, o pressuposto de independência entre as ocorrências de pedidos de indenização pode não ser realístico em certos portefólios. Iremos então estudar o caso do modelo quando as ocorrências de pedidos de indenização são permutáveis e dependentes, ou seja

para  $n > 0$ ,

$$P(I_{\rho(1)} = x_1, I_{\rho(2)} = x_2, \dots, I_{\rho(n)} = x_n) = P\{I_1 = x_1, I_2 = x_2, \dots, I_n = x_n\}, \quad (2.19)$$

para qualquer permutação  $(\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(n))$  de índices em  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Segundo o Teorema Fundamental de de Finetti (**Teorema 2.1.1**), existe uma variável aleatória  $\Theta$  com suporte em  $(0, 1)$  com função distribuição  $G(\theta)$  tal que

$$P\{I_1 = x_1, I_2 = x_2, \dots, I_n = x_n\} = \int_0^1 \theta^k (1 - \theta)^{n-k} dG(\theta), \quad (2.20)$$

onde  $k = \sum_{i=1}^n x_i$  e  $G(\theta) = P(\Theta \leq \theta)$  pode ser vista como uma distribuição *mixing*, isto é, a função de densidade pode ser escrita como uma média de distribuições. Assim podemos ver que neste estudo, a dependência irá ser incorporada através de um modelo de *mixing* na probabilidade de ocorrência de pedidos de indenização individuais.

Iremos agora construir a distribuição conjunta do instante de ruína e do número de indenizações pagas até ao  $n$ -ésimo sinistro,  $(T, N_n)$ , assim como a distribuição conjunta do do instante de ruína, do capital disponível e do número de indenizações pagas até ao  $n$ -ésimo sinistro,  $(T, U_n, N_n)$ . Estas expressões serão importantes para a construção das probabilidades estudadas mais à frente.

**Proposição 2.1.2.** *Podemos caracterizar a distribuição conjunta  $(T, N_n)$  da seguinte forma: para  $T > n$  e  $N_n = k$ , com  $u = 1, 2, \dots$*

$$\beta(u; n, k) = P_u(T > n, N_n = k) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, k = 0 \\ (1 - p)^n, & \text{se } n \geq k, k = 0 \\ \sum_{t=1}^n pq^{t-1} \sum_{x=1}^{u+t-1} p(x) \beta(u+t-x; n-t, k-1), & \text{se } n \geq k, k > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.21)$$

A prova deste resultado é dada por Eryilmaz [3] e é obtida com a introdução de uma variável de tempo de espera:

*Prova.* Seja  $W_1$  a variável que nos dá o tempo de espera até ao pagamento da primeira indenização. Se  $t > n$  e  $k > 0$ , então  $P_u(T > n, N_n = k | W_1 = t) = 0$ , pois é impossível que a primeira indenização  $W_1$  ocorra em  $t$  se já existem  $k$  indenizações pagas até  $n$ . Como o evento de ruína ocorre após o período  $n$ , a reserva existente no momento do pagamento da primeira indenização  $U_{W_1=t}$ , para  $t \leq n$ , terá um valor positivo. Assim, ao condicionarmos a distribuição conjunta pelo tempo de espera até à primeira indenização, conseguimos obter

$$\begin{aligned} P_u(T > n, N_n = k) &= \sum_{t=1}^n P_u(T > n, N_n = k | W_1 = t) pq^{t-1} \\ &= \sum_{t=1}^n pq^{t-1} \sum_{x=1}^{u+t-1} p(x) P_{u+t+x}(T > n-t, N_{n-t} = k-1). \end{aligned} \quad (2.22)$$

□

Iremos escrever a distribuição conjunta de  $(T, U_n, N_n)$  para uma sequência de ocorrências de indenizações i.i.d. como  $\gamma(u, n, j, k) = P_u(T > n, U_n = j, N_n = k)$ .

**Lema 2.1.4.** *Sejam as ocorrências de indenizações  $I_1, I_2, \dots$  i.i.d. com  $p = P(I_i = 1)$ . Para  $u = 1, 2, \dots$  e  $k = 0, 1, \dots, n$ ,*

$$\gamma(u, n, j, k) = \begin{cases} (1-p)^n, & \text{se } k = 0, j = u+n \\ \sum_{t=1}^n pq^{t-1} \sum_{x=1}^{u+t-1} p(x) \gamma(u+t-x; n-t, j, k-1), & \text{se } k > 0, j < u+n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.23)$$

A prova deste lema é novamente baseada no condicionamento do tempo de espera até à ocorrência do primeiro pedido de indenização,  $W_1$  [3].

*Prova.* Para  $t > n$  e  $j < u+n$ , obtemos  $P_u(T > n, U_n = j, N_n = k | W_1 = t) = 0$ , pois como já foi referido, a primeira indenização  $W_1$  não pode ocorrer em  $t$  se já foram pagas  $k$  indenizações até  $n$ .

Portanto, é fácil ver que o montante reserva no momento do pagamento da primeira indenização vai ter um valor positivo para  $t \leq n$ , visto que o evento de ruína ocorre após o período  $n$ , logo ao condicionar a distribuição conjunta pelo tempo de espera até à primeira indenização, obtém-se

$$P_u(T > n, U_n = j, N_n = k) = \sum_{t=1}^n pq^{t-1} \sum_{x=1}^{u+t-1} p(x) P_{u+t-x}(T > n-t, U_{n-t} = j, N_{n-t} = k-1), \quad (2.24)$$

para  $k > 0$  e  $j < u+n$ . Para  $k = 0$  e  $j = u+n$ ,

$$P_u(T > n, U_n = j, N_n = k) = P(I_1 = 0, I_2 = 0, \dots, I_n = 0). \quad (2.25)$$

□



## Capítulo 3

# Probabilidades de Ruína

Neste Capítulo, iremos usar os conceitos apresentados no Capítulo 2 para caracterizar as expressões da probabilidade de sobrevivência a tempo finito de uma empresa actuarial e da distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes da ruína e o défice no momento de ruína. A partir do momento em que a hipótese de existência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas deixa de existir e passamos a usar variações dessas permutáveis e dependentes, os cálculos tornam-se bastante mais complexos.

### 3.1 Probabilidades de Sobrevivência

Consideremos que as ocorrências de pedidos de indemnização  $I_1^{(e)}, I_2^{(e)}, \dots$  são variáveis aleatórias com  $p = P(I_j^{(e)} = 1)$  e  $q = 1 - p = P(I_j^{(e)} = 0)$  permutáveis. Neste Capítulo, iremos usar a letra  $e$  para diferenciar as novas expressões das anteriormente apresentadas.

**Proposição 3.1.1.** *A distribuição do número total de indemnizações pagas até ao  $n$ -ésimo sinistro é dada por*

$$\begin{aligned} P(N_n^{(e)} = k) &= P\left(\sum_{i=1}^n I_i^{(e)} = k\right) \\ &= \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \lambda_{k+i}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $\lambda_s = P(I_1^{(e)} = I_2^{(e)} = \dots = I_s^{(e)} = 1)$ ,  $s > 0$  e  $\lambda_0 = 1$ .

Este resultado é uma extensão do caso independente, referido **(2.15)**, e a sua prova pode ser feita usando o princípio de inclusão-exclusão *standard*, como demonstrado por George e Bowman [2].

*Prova.* Atendendo ao Lema 2.1.3 temos

$$P\left(\sum_{i=1}^n I_i^{(e)} = k\right) = \binom{n}{x} P(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_k^{(e)} = 1, I_{k+1}^{(e)} = 0, \dots, I_n^{(e)} = 0).$$

Para concluir a demonstração basta agora provar que

$$P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_k^{(e)} = 1, I_{k+1}^{(e)} = 0, \dots, I_n^{(e)} = 0\right) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \lambda_{k+i}.$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \lambda_r &= P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_r^{(e)} = 1\right) \\ &= \sum_{i_{r+1}, \dots, i_n} P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_r^{(e)} = 1, I_{r+1}^{(e)} = i_{r+1}, \dots, I_n^{(e)} = i_n\right) \\ &= P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_r^{(e)} = 1, I_{r+1}^{(e)} = 0, \dots, I_n^{(e)} = 0\right) \\ &+ \binom{n-r}{1} \sum_{i_{r+2}, \dots, i_n} P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_r^{(e)} = 1, I_{r+1}^{(e)} = 1, I_{r+2}^{(e)} = i_{r+2}, \dots, I_n^{(e)} = i_n\right) \\ &- \binom{n-r}{2} \sum_{i_{r+3}, \dots, i_n} P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_r^{(e)} = 1, I_{r+1}^{(e)} = 1, I_{r+2}^{(e)} = 1, I_{r+3}^{(e)} = i_{r+3}, \dots, I_n^{(e)} = i_n\right) \\ &+ \dots + (-1)^{n-r+1} P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_n^{(e)} = 1\right) \\ &= P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_r^{(e)} = 1, I_{r+1}^{(e)} = 0, \dots, I_n^{(e)} = 0\right) + \sum_{k=1}^{n-r} (-1)^{k+1} \binom{n-r}{k} \lambda_{r+k}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Logo,

$$P\left(I_1^{(e)} = 1, \dots, I_r^{(e)} = 1, I_{r+1}^{(e)} = 0, \dots, I_n^{(e)} = 0\right) = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{n-r}{k} \lambda_{r+k}. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) vem diretamente da equação (3.2), visto que  $P\left(I_{\rho(1)}^{(e)} = i_1, \dots, I_{\rho(n)}^{(e)} = i_n\right)$  é a mesma para qualquer permutação  $\rho(1), \dots, \rho(n)$ .  $\square$

Neste modelo,  $I_j^{(e)}$  e  $X_j$  são consideradas variáveis aleatórias independentes.  $X_j$  é uma variável discreta estritamente positiva e  $\{X_j, j \geq 1\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com  $f(x) = P(X = x)$  e  $F(x) = P(X \leq x)$ .

Sejam  $T^{(e)}$  e  $T$  o tempo que as companhias seguradoras levam a chegar ao estado de ruína, sendo respetivamente baseadas nas ocorrências de pedidos de indemnização permutáveis  $I_1^{(e)}, I_2^{(e)}, \dots$  e i.i.d.  $I_1, I_2, \dots$ . Ao condicionar pelo número total de pedidos de indemnização até ao  $n$ -ésimo sinistro,

$$P_u\left(T^{(e)} > n\right) = \sum_{k=0}^n P_u\left(T^{(e)} > n | N_n^{(e)} = k\right) P\left(N_n^{(e)} = k\right). \quad (3.4)$$

Devido à permutabilidade, todas as sequências com a mesma dimensão e mesmo número de  $I$ 's são igualmente prováveis. Então, as distribuições condicionais de  $T^{(e)}$  e  $T$ , dado o número de pedidos de indemnização, são idênticas, i.e,

$$P_u\left(T^{(e)} > n | N_n^{(e)} = k\right) = P_u\left(T > n | N_n = k\right), \quad (3.5)$$

portanto, temos que

$$P_u(T^{(e)} > n) = \sum_{k=0}^n P_u(T > n | N_n = k) P(N_n^{(e)} = k). \quad (3.6)$$

A distribuição condicional em (3.5) é independente das probabilidades de ocorrência de indemnizações, e depende apenas da distribuição do tamanho das indemnizações. Segundo (3.6), a derivação da probabilidade de sobrevivência, em tempo finito, por uma sequência de ocorrências de indemnizações permutáveis é constituída por uma distribuição condicional de  $T$  dado o número de indemnizações  $N_n$ , quando as ocorrências de indemnizações são i.i.d..

Como vimos na **Proposição 2.1.2.** do capítulo anterior, a distribuição conjunta  $(T, N_n)$  é dada por  $\beta(u; n, k) = P_u(T > n, N_n = k)$  [3]. Se substituirmos

$$P_u(T > n | N_n = k) = \frac{\beta(u; n, k)}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \quad (3.7)$$

em (3.6) e usando a expressão (3.1), ficamos com

$$P_u(T^{(e)} > n) = \sum_{k=0}^n \frac{\beta(u; n, k)}{p^k (1-p)^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \lambda_{k+i}. \quad (3.8)$$

Obtém-se assim o seguinte resultado para a probabilidade de não-ruína a tempo finito, para uma sequência de ocorrências de indemnizações permutáveis:

**Proposição 3.1.2.** *Tendo*

$$\lambda_s = P(I_1^{(e)} = I_2^{(e)} = \dots = I_s^{(e)} = 1) \quad (3.9)$$

então para  $u = 1, 2, \dots$  e  $k = 0, 1, \dots, n$ ,

$$P_u(T^{(e)} > n) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C(u; n, k) \binom{n-k}{i} \lambda_{k+i}, \quad (3.10)$$

onde

$$C(u; n, k) = \frac{\beta(u; n, k)}{p^k (1-p)^{n-k}}. \quad (3.11)$$

Note-se que  $C(u; n, k)$  é independente de  $p$  pois os termos  $p^k (1-p)^{n-k}$  cancelam-se no numerador e denominador.

## 3.2 Distribuição Conjunta de $(T^{(e)}, U_{T^{(e)}-1}, U_{T^{(e)}})$

Nesta secção, iremos estudar a distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes da ruína e o défice no momento de ruína. É importante recordar que esta distribuição irá ser caracterizada por variáveis aleatórias discretas e finitas.

Seja  $P(n, i, j)$  a função de probabilidade do vetor aleatório  $(T^{(e)}, U_{T^{(e)}-1}, U_{T^{(e)}})$  baseada na sequência de indicadores de ocorrência de indenizações permutáveis  $I_1^{(e)}, I_2^{(e)}, \dots$ ,

$$P(n, i, j) = P_u \left( T^{(e)} = n, U_{T^{(e)}-1} = i, |U_{T^{(e)}}| = j \right). \quad (3.12)$$

Segundo o **Lema 2.1.4.**, a distribuição conjunta de  $(T, U_n, N_n)$  é dada por  $\gamma(u, n, j, k) = P_u(T > n, U_n = j, N_n = k)$  [3]. Analisemos o seguinte teorema, onde deixamos cair a hipótese de independência e passamos a estar sob o conceito de permutabilidade:

**Teorema 3.2.1.** *Sejam as ocorrências de indenização  $I_1^{(e)}, I_2^{(e)}, \dots$  permutáveis com  $\lambda_s = P(I_1^{(e)} = I_2^{(e)} = \dots = I_s^{(e)} = 1)$ .*

*Então para  $u, i = 1, 2, \dots$  e  $j = 0, 1, \dots$  tem-se*

$$P(n, i, j) = P(X = i + j + 1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m D(u; n, i, k) \binom{n-k-1}{m} \lambda_{k+m+1} \quad (3.13)$$

onde para  $n = 1, 2, \dots$

$$D(u; n, i, k) = \frac{\gamma(u, n-1, i, k)}{p^k (1-p)^{n-k-1}}, \quad (3.14)$$

e  $P(1, i, j) = \lambda_1 P(X = i + j + 1) I(u = i)$ , com  $I(A) = 1$  se  $A$  ocorrer e  $I(A) = 0$ , caso contrário.

*Prova.* Para  $n = 1$ ,

$$\begin{aligned} P(1, i, j) &= P \left( I_1^{(e)} = 1, U_0 = 1, |U_1| = j \right) = \\ &= \lambda_1 P(X = i + j + 1) I(u = i). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Já para  $n > 1$ ,

$$\begin{aligned} P(n, i, j) &= P_u \left( T^{(e)} = n, U_{T^{(e)}-1} = i, |U_{T^{(e)}}| = j \right) = \\ &= P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i, I_n^{(e)} = 1, X = i + j + 1 \right) = \\ &= P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i, I_n^{(e)} = 1 \right) P(X = i + j + 1), \end{aligned} \quad (3.16)$$

devido à independência entre  $I$  e  $X$ . Ao condicionar pelo número total de indenizações,

$$\begin{aligned} P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i, I_n^{(e)} = 1 \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i, I_n^{(e)} = 1, N_{n-1}^{(e)} = k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i | N_{n-1}^{(e)} = k, I_n^{(e)} = 1 \right) \\ &\quad \times P \left( N_{n-1}^{(e)} = k, I_n^{(e)} = 1 \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

e dado  $(N_{n-1}^{(e)} = k, I_n^{(e)} = 1)$ , a probabilidade condicional de  $(T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i)$  é idêntica com a probabilidade condicional das mesmas variáveis aleatórias no caso i.i.d., portanto,

$$\begin{aligned} P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i \mid N_{n-1}^{(e)} = k, I_n^{(e)} = 1 \right) &= P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i \mid N_{n-1} = k, I_n = 1 \right) \\ &= P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i \mid N_{n-1} = k \right) \\ &= \frac{\gamma(u; n-1, i, k)}{\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por outro lado, sob o conceito de permutabilidade,

$$P \left( N_{n-1}^{(e)} = k, I_n^{(e)} = 1 \right) = \binom{n-1}{k} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} \lambda_{k+m+1}. \quad (3.19)$$

Conclui-se a prova deste resultado substituindo as equações (3.18) e (3.19) primeiramente em (3.17) e depois usando esta última na expressão (3.16). Ficamos então com

$$\begin{aligned} P_u \left( T^{(e)} > n-1, U_{n-1} = i, I_n^{(e)} = 1 \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma(u; n-1, i, k)}{\binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1}} \binom{n-1}{k} \\ &\times \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \binom{n-k-1}{m} \lambda_{k+m+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m D(u; n, i, k) \binom{n-k-1}{m} \lambda_{k+m+1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

e finalizando,

$$P(n, i, j) = P(X = i + j + 1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m D(u; n, i, k) \binom{n-k-1}{m} \lambda_{k+m+1}. \quad (3.21)$$

□

Se tivermos  $\lambda_s = p^s$ , obtemos a distribuição conjunta de  $(T, U_{T-1}, |U_T|)$  para o modelo binomial composto clássico. Logo, o resultado seguinte é uma alternativa à expressão para a probabilidade  $P(n, i, j)$ , baseada nas ocorrências de indenizações i.i.d.:

$$\begin{aligned} P(n, i, j) &= P(X = i + j + 1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m D(u; n, i, k) \binom{n-k-1}{m} p^{k+m+1} \\ &= P(X = i + j + 1) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-k-1} (-1)^m \frac{\gamma(u; n-1, i, k)}{(1-p)^{n-k-1}} \binom{n-k-1}{m} p^{m+1}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

para  $n = 1, 2, \dots$  e com  $P(1, i, j) = P(X = i + j + 1)I(u = i)$ .



## Capítulo 4

# Aplicação dos Resultados

Nesta secção, iremos fazer uma ilustração numérica para as probabilidades de não-ruína e distribuições conjuntas com tempo finito, tanto no caso permutável como no caso i.i.d., obtidas nos capítulo anterior. O software *R* foi o escolhido para o cálculo destes valores, sendo que os comandos usados, para obter os gráficos e os resultados das probabilidades, estarão disponíveis no Anexo desta dissertação.

### 4.1 Resultados Numéricos da Probabilidade de Sobrevivência

De seguida, serão ilustrados vários resultados obtidos para as funções de probabilidade mencionadas no capítulo anterior:  $P(n, i, j)$  no caso de ocorrências de pedidos de indemnização independentes e no caso sob a hipótese de permutabilidade,  $P_u(T^{(e)} > n)$  e a correspondente probabilidade i.i.d.,  $P_u(T > n)$ .

Para o caso permutável, iremos pressupor uma distribuição Beta, isto é

$$dG(\theta) = \frac{1}{B(a, b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1}. \quad (4.1)$$

O seu uso é justificado pela sua grande flexibilidade para modelar proporções. Vamos considerar  $G(\theta)$  como a função de distribuição de  $\Theta \in [0, 1]$ , a que corresponde à densidade.  $B(a, b)$  denota a função Beta, também conhecida como integral de Euler de primeiro tipo e é definida pelo integral

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (4.2)$$

Como  $x$  e  $y$  são inteiros e positivos, temos que

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}. \quad (4.3)$$

Então, devido ao conceito de permutabilidade e ao teorema de de Finetti, anteriormente apresentados, ficamos com

$$\begin{aligned}\lambda_s &= P(I_1^{(e)} = I_2^{(e)} = \dots I_s^{(e)} = 1) = \int_0^1 \theta^s dG(\theta) \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 \theta^{a+s-1} (1-\theta)^{b-1} d\theta = \frac{B(a+s,b)}{B(a,b)},\end{aligned}\quad (4.4)$$

com  $s \geq 0$ . Neste caso, a distribuição do número total de indemnizações até ao tempo  $n$  será

$$P(N_n^{(e)} = k) = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} \frac{B(a+k+i,b)}{B(a,b)}.\quad (4.5)$$

Esta é a expressão geral deduzida no capítulo anterior, sendo que os valores de  $a$  e  $b$  foram escolhidos de forma a que as probabilidades de ocorrência de pedidos de indemnizações sejam iguais no caso i.i.d. e no caso permutável, com

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma((a+1)\Gamma(b)}{\Gamma((a+1+b)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \\ &= \frac{a}{a+b} = E(\Theta) = p.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Os valores de  $a$  e  $b$  vão ser então bastante importantes na determinação da nossa probabilidade  $p$ , sendo que alterações desses dois parâmetros irá trazer variações no seu valor. Um aumento de  $a$  ou uma diminuição de  $b$  irá resultar num  $p$  superior e vice-versa.

Foram utilizadas duas distribuições diferentes para o montante da indemnização individual,  $X_i$ : Uma distribuição Geométrica, com função de probabilidade  $f(x) = (1-\alpha)\alpha^{x-1}$ ,  $x = 1, 2, \dots$  e uma distribuição Binomial Negativa, cuja função de probabilidade é  $p(x) = \binom{x-1}{h-1} g^h (1-g)^{x-h}$ ,  $x \geq h$ .

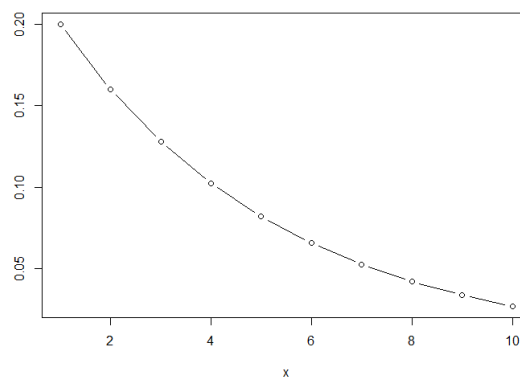


Fig. 4.1 Função de probabilidade de uma distribuição Geométrica, com  $\alpha = 0.8$ .

Estas escolhas devem-se ao facto de ambas serem discretas e da distribuição Geométrica ser um caso particular da Binomial Negativa quando  $h = 1$ , pelo que será interessante ver os resultados que se irão obter à medida que nos afastamos do caso da distribuição Geométrica.

Assumimos  $u = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 9$ ,  $p = 0.1$  e  $\alpha = 0.8$  como os valores iniciais para a função de probabilidade no caso da distribuição Geométrica. A constante  $u = 1$  representa uma unidade



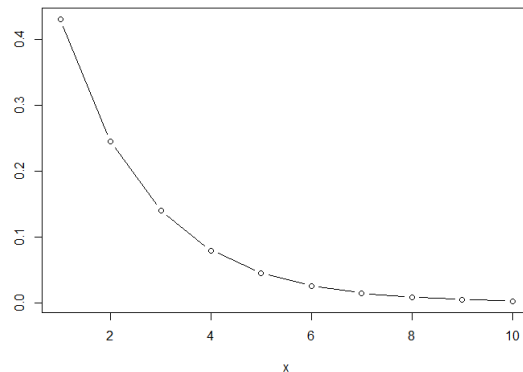


Fig. 4.2 Função de probabilidade de uma distribuição Binomial Negativa, com  $h = 1$  e  $g = 0.43$ .

monetária e os valores de  $a$  e  $b$  foram escolhidos de maneira a dar um valor de  $p$  baixo, neste caso uma probabilidade de 10% de ocorrer um pedido de indenização. Já  $\alpha = 0.8$  representa uma probabilidade de insucesso alta para a distribuição Geométrica em questão. Com a distribuição Binomial Negativa, a única diferença encontra-se nos valores dos parâmetros da função densidade correspondente, que serão  $h = 1$ , para poder ser feita uma comparação inicial mais precisa com a distribuição Geométrica, e  $g = 0.43$ , para ter uma taxa de sucesso mais próxima dos 50%.

#### 4.1.1 Operações com uma Distribuição Geométrica

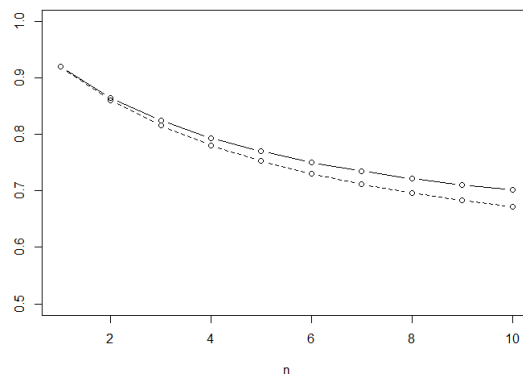


Fig. 4.3 Comparação entre as probabilidades de não-ruína i.i.d e permutável,  $P_u(T > n)$  (a linha a tracejado) e  $P_u(T^{(e)} > n)$  (a linha contínua).

Pela figura obtida, é possível afirmar que as probabilidades sob a hipótese de permutabilidade e da dependência das ocorrências de pedidos de indenização (representadas a linha contínua) são maiores que no caso i.i.d (a curva a tracejado), e essa diferença vai aumentando à medida que  $n$  aumenta. Neste caso inicial, ambas as curvas apresentam valores entre 0.65 e 0.95.

Como foi explicado anteriormente, se alterarmos o valor dos parâmetros de  $a$  e  $b$  (Figs.4.4 e 4.5), estaremos a mudar o valor da probabilidade de haver um pedido de indenização,  $p$ . Se  $a = 4$  e

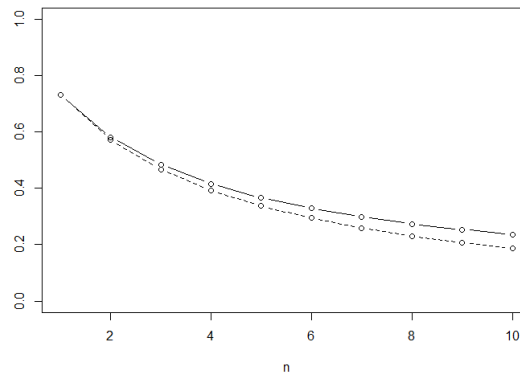


Fig. 4.4 Alterações nos parâmetros da variável  $p = \lambda_1$  ( $a$  e  $b$ ) na probabilidade de sobrevivência:  $p = \frac{1}{3}$ , com  $a = 4$  e  $b = 8$ .

$b = 8$ , então teremos  $p = \frac{1}{3}$ . Como seria de esperar, quando  $p$  aumenta, as nossas probabilidades  $P_u(T^{(e)} > n)$  e  $P_u(T > n)$  irão diminuir, variando entre 0.2 e 0.8.

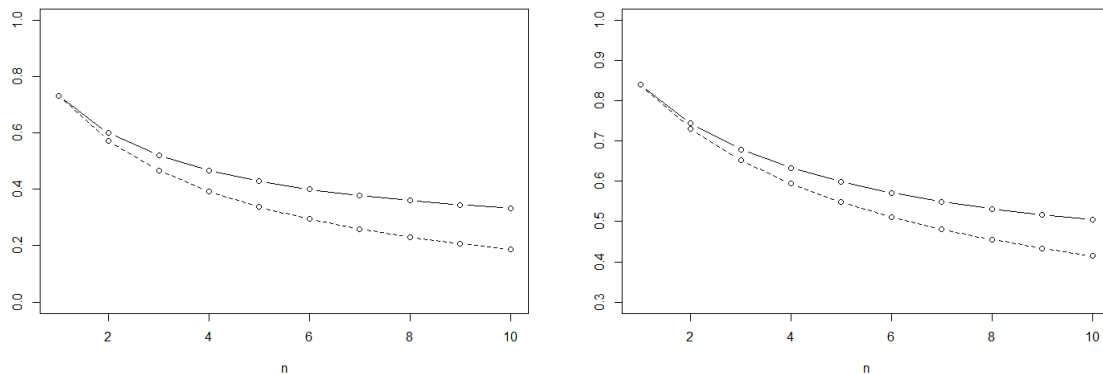


Fig. 4.5 Alterações nos parâmetros da variável  $p = \lambda_1$  ( $a$  e  $b$ ) na probabilidade de sobrevivência: à esquerda,  $p = 0.3(3)$ , com  $a = 1$  e  $b = 2$ ; à direita,  $p = 0.2$ , com  $a = 1$  e  $b = 4$ .

No caso de termos  $a = 1$  e  $b = 2$  (Fig. 4.5, à esquerda), obtemos exatamente o mesmo valor para  $p$  que no exemplo anterior,  $p = \frac{1}{3}$ , porém obtemos valores diferentes no que toca à probabilidade  $P_u(T^{(e)} > n)$ . Estes valores são mais baixos que no caso original mas mais elevados comparadamente ao caso de  $a = 4$  e  $b = 8$ , o que pode ser explicado por ter, em geral, as probabilidades  $P(N_n^{(e)} = k)$  mais baixas.

Como seria de esperar, a curva da probabilidade de  $P_u(T > n)$  mantém-se igual à do exemplo anterior, pois não utiliza os valores  $a$  e  $b$  na sua função. Se usarmos  $a = 1$  e  $b = 4$  (Fig. 4.5, à direita), obtém-se  $p = 0.2$ , sendo uma probabilidade superior à do caso original mas inferior às das últimas alterações. Logicamente, obteve-se  $P_u(T > n)$  e  $P_u(T^{(e)} > n)$  superiores às do gráfico à esquerda mas mais baixas que as da Fig. 4.4. Isto é expectável pois quanto menor for o valor de  $b$ , tudo o resto constante, maior será o valor de  $p$ .

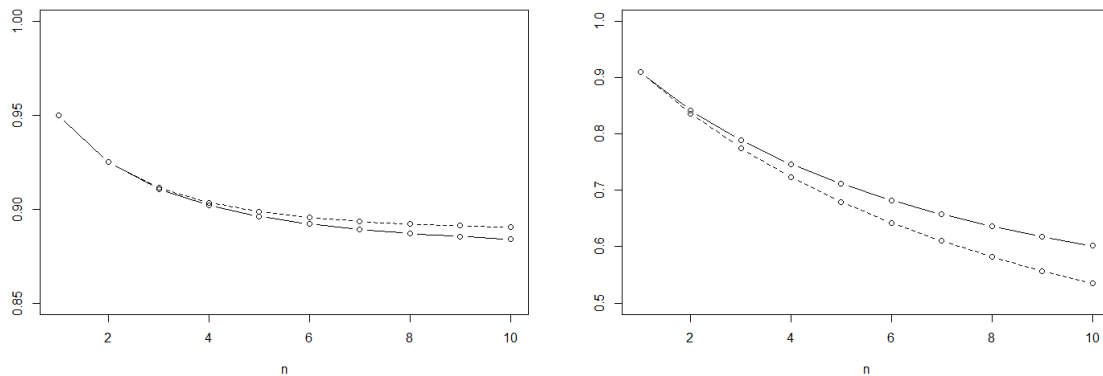


Fig. 4.6 Alterações do parâmetro  $\alpha$  da função densidade de  $x$  ( $f(x)$ ) na probabilidade de sobrevivência: à esquerda,  $f(x):\alpha = 0.5$ ; à direita,  $x, f(x):\alpha = 0.9$ .

Quanto à alteração do parâmetro  $\alpha$  da função densidade de  $x$  (Fig. 4.6), obteve-se alguns resultados bastante interessantes. Ao diminuir para  $\alpha = \frac{1}{2}$  (Fig. 4.6., à esquerda), as probabilidades  $P_u(T > n)$  e  $P_u(T^{(e)} > n)$  atingiram valores bastante elevados, acima de 0.85. Porém, neste caso concreto tivemos  $P_u(T > n) > P_u(T^{(e)} > n)$ . Contrariamente, se aumentarmos o valor para  $\alpha = 0.9$  (Fig. 4.6., à direita), temos as probabilidades de sobrevivência mais baixas, com declives mais acentuados, em ambos os casos.

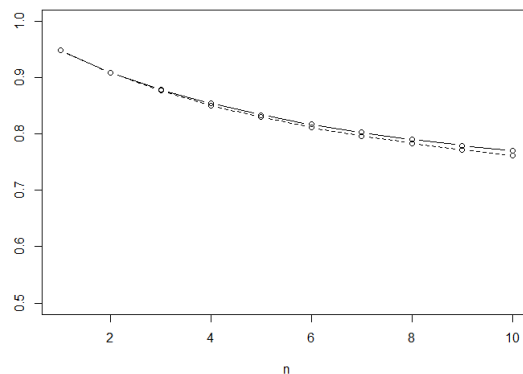


Fig. 4.7 Alterações no montante de capital inicial,  $u = 3$ , na probabilidade de sobrevivência.

Para finalizar a análise no caso da distribuição Geométrica, vamos ver o comportamento da probabilidade de sobrevivência ao sofrer alterações no montante de capital inicial. Foi apenas estudada a hipótese do aumento deste parâmetro, pois se tivermos  $u = 0$ , assim que chegue o primeiro pedido de indenização, a empresa seguradora pode entrar logo em ruína. Assim, pelos resultados obtidos na Fig. 4.7 e pelo que seria esperado, podemos dizer que o aumento da variável  $u$  leva à subida das probabilidades de não-ruína em ambos os casos. A probabilidade sob a hipótese de permutabilidade e dependência de ocorrências de pedidos de indenização continua a ser superior ao caso i.i.d., mas à medida que  $u$  vai aumentando, estas probabilidades aproximam-se cada vez mais, sendo que não se

nota tanta diferença nos valores quando  $n$  tende para infinito.

#### 4.1.2 Operações com uma Distribuição Binomial Negativa

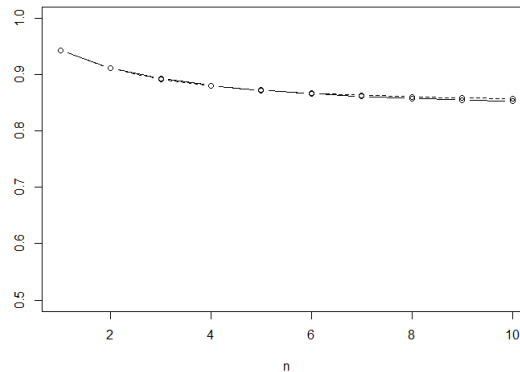


Fig. 4.8 Comparação entre as probabilidades de não-ruína i.i.d e permutável,  $P_u(T > n)$  (a linha a tracejado) e  $P_u(T^{(e)} > n)$  (a linha contínua).

Assumimos agora que a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição Binomial Negativa. O cálculo da probabilidade de ocorrências de pedidos de indemnização continua a seguir a mesma lei de probabilidade e portanto, a usar a mesma equação  $p$ . No caso *standard* que assumimos para esta distribuição, temos que a Binomial Negativa coincide com a nossa distribuição Geométrica, se  $\alpha$  for igual a  $1 - \frac{2.15}{5}$ , visto que temos  $h = 1$ .

Podemos observar na Fig. 4.8 que, com  $g = \frac{2.15}{5}$ , a distribuição Binomial Negativa apresenta probabilidades bastante próximas entre o caso de existência de permutabilidade e o de ocorrências de pedidos de indemnização independentes e identicamente distribuídas, sendo que a partir de  $n = 5$ , a probabilidade no caso permutável torna-se inferior à probabilidade sob a hipótese de independência.

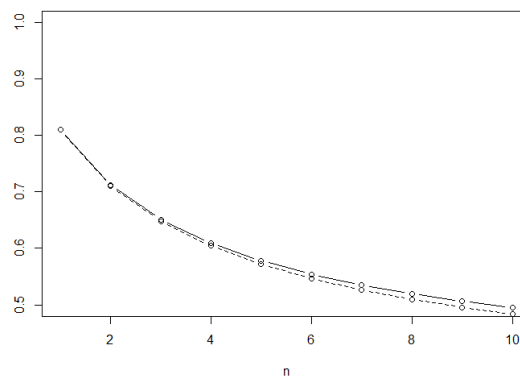


Fig. 4.9 Alterações nos parâmetros da variável  $p = \lambda_1$  ( $a$  e  $b$ ) na probabilidade de sobrevivência:  $p = \frac{1}{3}$ , com  $a = 4$  e  $b = 8$ .

Como se pode observar na Fig. 4.9, ao aumentar o valor de  $\lambda_1$  para  $p = \frac{1}{3}$ , com  $a = 4$  e  $b = 8$ , as probabilidades de sobrevivência descem nos casos i.i.d. e permutável, como aconteceu no modelo com distribuição Geométrica. A diferença entres as duas hipóteses vai aumentando ligeiramente à medida que  $n$  também aumenta.

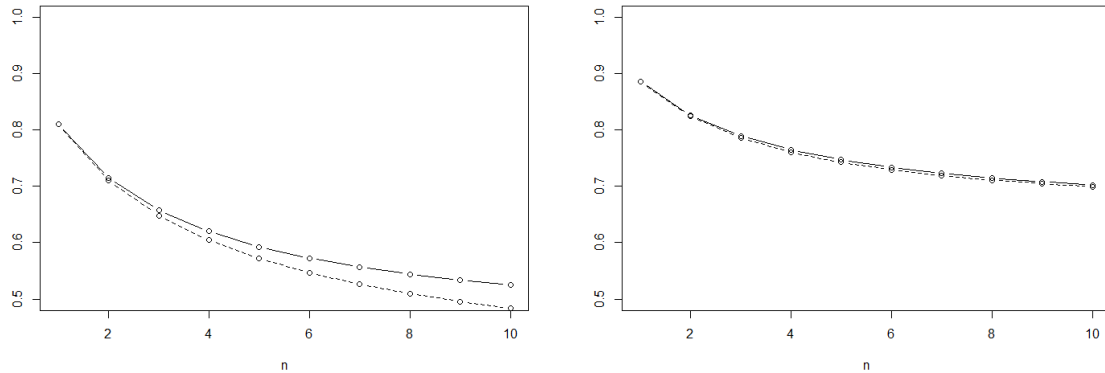


Fig. 4.10 Alterações nos parâmetros da variável  $p = \lambda_1$  ( $a$  e  $b$ ) na probabilidade de sobrevivência: à esquerda,  $p = 0.3(3)$ , com  $a = 1$  e  $b = 2$ ; à direita,  $p = 0.2$ , com  $a = 1$  e  $b = 4$ .

No caso de termos  $a = 1$  e  $b = 2$  (Fig. 4.10, à esquerda), vemos que o mesmo valor de  $\lambda_1$  que na figura anterior, mas com valores de  $a$  e  $b$  menores ( $p = \frac{1}{3}$ , com  $a = 1$  e  $b = 2$ ). Comparativamente à Fig. 4.9, as probabilidades  $P_u(T^{(e)} > n)$  são mais elevadas à medida que  $n$  aumenta, com a mesma curva de  $P_u(T > n)$ , visto que não sofreu alterações no cálculo das suas variáveis. Ao manter o valor de  $a$  mas alterando  $b = 4$ , temos  $p = 0.2$  (Fig. 4.10 à direita), uma probabilidade superior à do caso *standard* mas inferior às dos últimos dois gráficos. Por isso,  $P_u(T > n)$  e  $P_u(T^{(e)} > n)$  são superiores às dos dois gráficos anteriores mas mais baixas que as da Fig. 4.8, à semelhança do modelo com distribuição Geométrica.

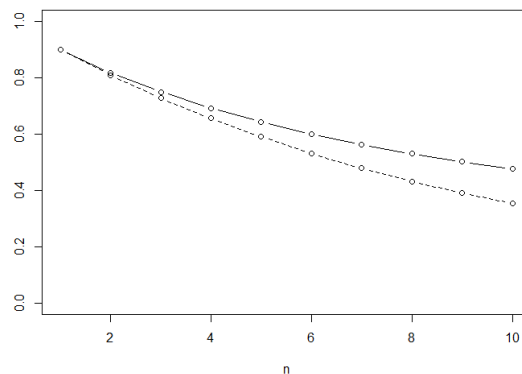


Fig. 4.11 Alterações dos parâmetro  $h$  e  $g$  da função densidade de  $x$  ( $p(x)$ ) na probabilidade de sobrevivência:  $h = 7, g = \frac{2.15}{5}$ .

Voltando a estudar as variações nos parâmetros de na função densidade em questão, é possível ver que o aumento de  $h = 7$ , demonstrado na Fig 4.11, leva a que haja uma ligeira diminuição de ambas as probabilidades representadas, verificando-se uma diferença maior entre o caso permutável e o caso i.i.d. quando  $n$  aumenta.

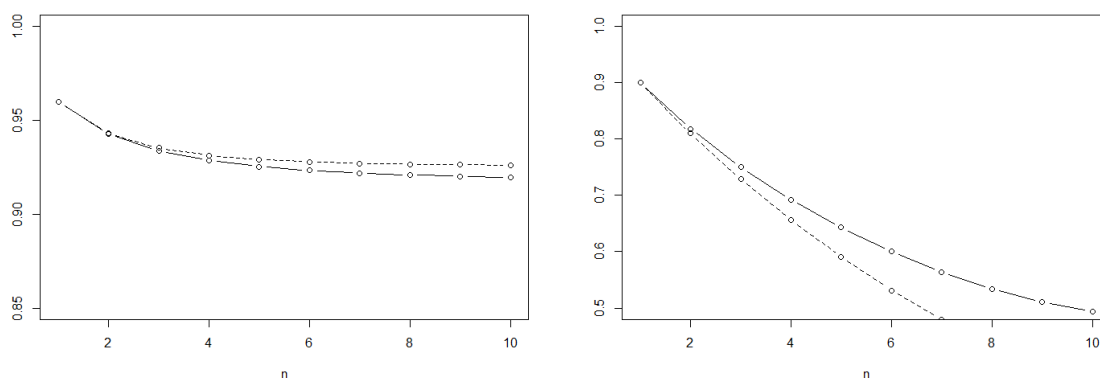


Fig. 4.12 Alterações dos parâmetro  $h$  e  $g$  da função densidade de  $x$  ( $p(x)$ ) na probabilidade de sobrevivência: à esquerda,  $h = 1, g = \frac{3}{5}$ ; à direita,  $h = 7, g = \frac{3}{5}$ .

Ao aumentar a variável  $g = \frac{3}{5}$  (Fig 4.12, à esquerda) obteve-se probabilidades muito elevadas em ambos os casos, sendo que se mantém muito próximas e superiores a 0.90. Verificou-se também que com este valor, a curva i.i.d. tem probabilidades mais elevadas que a do caso permutável.

No último gráfico da Fig 4.12 houve um aumento das variáveis de  $p(x)$ ,  $h = 7$  e  $g = \frac{3}{5}$ , assistimos novamente um afastamento dos valores das probabilidades entre os dois casos e uma diminuição do valor das mesmas, sendo que  $P_u(T^{(e)} > n)$  volta ser superior a  $P_u(T > n)$ .

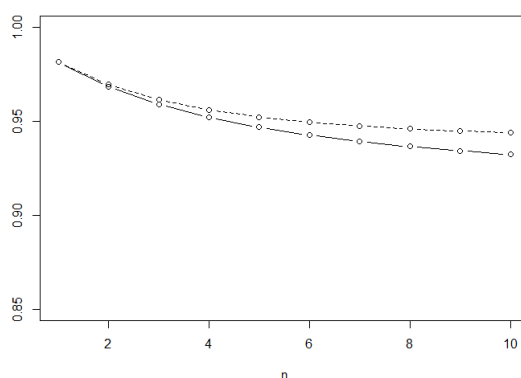
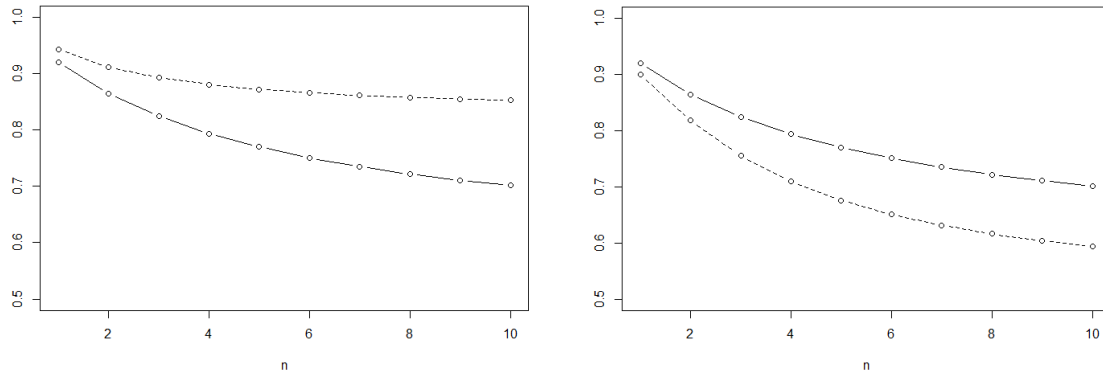


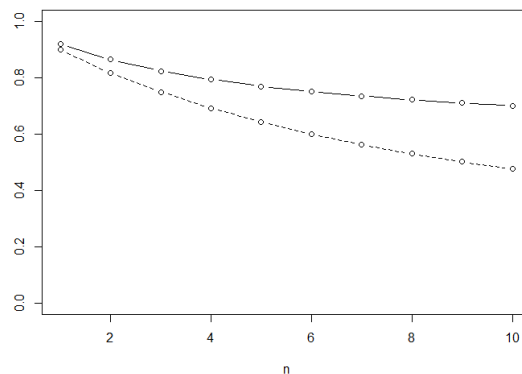
Fig. 4.13 Alterações no montante de capital inicial,  $u = 3$ , na probabilidade de sobrevivência.

Por fim, como se pode ver na Fig 4.13, temos que o aumento da variável  $u$ , o capital inicial, leva a probabilidades de não-ruína superiores e a uma aproximação entre os valores do caso permutável e i.i.d., como no modelo com distribuição geométrica. Contudo, as probabilidades i.i.d. voltaram a tornar-se superiores com  $u = 3$ .

### 4.1.3 Comparação entre a Distribuição Geométrica e a Distribuição Binomial Negativa



(a) Probabilidades de sobrevivência de uma distribuição Geométrica (linha contínua) e de uma distribuição Binomial Negativa (linha tracejada): à esquerda,  $h = 1$ ; à direita,  $h = 3$ .



(b) Probabilidades de sobrevivência de uma distribuição Geométrica (linha contínua) e de uma distribuição Binomial Negativa (linha tracejada), com  $h = 7$ .

Fig. 4.14 Ilustração do afastamento das probabilidades de sobrevivência das distribuições estudadas.

Nesta secção, estudamos a relação entre a distribuição Binomial Negativa e o seu caso particular, a distribuição Geométrica. Comparando as curvas de probabilidade das diferentes indemnizações com os seus valores iniciais (Fig. 4.14 (a), à esquerda), é bastante óbvio que a distribuição Binomial Negativa traz valores mais elevados para a probabilidade de sobrevivência, especialmente para os valores mais altos de  $n$ .

Como neste caso, temos que a Binomial Negativa coincide com um caso particular de uma distribuição Geométrica com  $\alpha = 1 - \frac{2,15}{5} = 0.57$ , vemos novamente que uma  $\alpha$  menor traz probabilidades sobrevivência superiores.

Ao aumentarmos o parâmetro  $h$  para  $h = 3$  (Fig. 4.14 (a), à direita), vemos o caso contrário do gráfico anterior, em que a distribuição Binomial Negativa passa agora a ter valores inferiores ao caso da Geométrica, cujo parâmetro da função manteve o mesmo valor. Se optarmos por aumentar

esse parâmetro ainda mais, para  $h = 7$  (Fig. 4.14 (b)), vamos obter probabilidades de sobrevivência inferiores às dos dois últimos gráficos em geral.

Podemos então concluir que uma distribuição Geométrica com  $\alpha = 0.57$  é a que consegue obter valores de probabilidades de sobrevivência mais elevados, tudo o resto constante.

## 4.2 Resultados Numéricos da Distribuição Conjunta

### 4.2.1 Operações com uma Distribuição Geométrica

$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00016	5	1	2	0,00010
		2	0,00028			2	0,00018
		3	0,00038			3	0,00025
10	1	0	0,00007	10	1	5	0,00002
		2	0,00011			2	0,00004
		3	0,00015			5	0,00006
		5	0,00019			8	0,00007
		10	0,00083			10	0,00027

Tabela 4.1 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com  $\alpha = 0.8$ ,  $p = 0.1$  e  $a = 1$ ,  $b = 9$  e  $u = 1$ , para o caso i.i.d..

Sendo  $n$  a variável correspondente ao tempo de ruína,  $i$  o excedente no momento anterior ao evento de ruína e  $j$  o déficit em falência, é natural que as probabilidades crescem quando  $i$  aumenta, pois existe mais capital para suportar os pedidos de indemnização que possam originar nos tempos seguintes. Um aumento de  $n$  traz-nos valores de  $P(n, i, j)$  mais baixos, pois era esperado que a probabilidade de o evento de ruína acontecer, cada vez mais tarde, seja menor. Também podemos verificar uma descida nas probabilidades com o aumento de  $j$ , já que é mais provável que o déficit tenha valores mais baixos.

$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00028	5	1	2	0,00018
		2	0,00039			2	0,00025
		3	0,00048			3	0,00031
10	1	0	0,00015	10	1	5	0,00005
		2	0,00017			2	0,00006
		3	0,00018			5	0,00006
		5	0,00019			8	0,00005
		10	0,00057			10	0,00019

Tabela 4.2 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com  $\alpha = 0.8$ ,  $p = 0.1$  e  $a = 1$ ,  $b = 9$  e  $u = 1$ , para o caso permutável.

No que toca à comparação das distribuições conjuntas, constatamos que os resultados com ocorrências de pedidos de indemnização i.i.d. (Tabela 4.1) são inferiores aos valores de  $P(n, i, j)$  sob a



hipótese de permutabilidade (Tabela 4.2), excepto para  $i \geq 8$ .

$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00032	5	1	2	0,00021
		2	0,00039			2	0,00025
		3	0,00043			3	0,00028
10	1	0	0,00020	10	1	5	0,00006
		2	0,00021			2	0,00007
		3	0,00021			5	0,00006
		5	0,00020			8	0,00005
		10	0,00011			10	0,00004

Tabela 4.3 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o défice em ruína, com  $\alpha = 0.8$ ,  $p = 0.1$  e  $a = 1$ ,  $b = 9$  e  $u = 3$ .

Ao aumentar o nível de capital inicial para  $u = 3$  (Tabela 4.3), vemos uma subida nas probabilidades com  $i$  baixo, mas à medida que este sobe, algumas probabilidades acabam por ser menores que a do exemplo anterior.

$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00135	5	1	2	0,00034
		2	0,00089			2	0,00022
		3	0,00067			3	0,00017
10	1	0	0,00216	10	1	5	0,00007
		2	0,00076			2	0,00002
		3	0,00034			5	0,000003
		5	0,0001			8	0,000001
		10	0,00001			10	0,0000004

Tabela 4.4 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o défice em ruína, com  $\alpha = 0.5$ ,  $a = 1$ ,  $b = 9$ ,  $p = 0.1$  e  $u = 1$ .

Se usarmos  $\alpha = 0.5$  (Tabela 4.4), temos resultados semelhantes aos do exemplo de  $u = 3$ , com probabilidades maiores que o caso inicial quando  $i$  é baixo mas obtém-se valores menores quando este aumenta.

Como seria de esperar, o aumento da probabilidade  $p = \frac{1}{3}$  de ocorrências de pedidos de indemnização, com  $a = 4$  e  $b = 8$  (Tabela 4.5, parte superior), faz com que os valores de  $P(n, i, j)$  sejam mais elevados, isto é, com uma maior frequência de indemnizações, maior será a probabilidade de estarmos perto do tempo de ruína.

No caso de  $a = 1$ ,  $b = 2$  (Tabela 4.5, parte inferior), que tem a mesma probabilidade que no exemplo anterior, vemos que continua a ter probabilidades mais altas que a do caso inicial. Porém, quando  $i = 1$  tem valores maiores que quando  $a = 4$  e  $b = 8$ , mas para  $i > 1$  as probabilidades são mais baixas.

$\alpha = 0.8, a = 4, b = 8, p = \frac{1}{3} \text{ e } u = 1$							
$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00186	5	1	2	0,00119
		2	0,00191			2	0,00122
		3	0,00189			3	0,00121
10	1	0	0,00097	10	1	5	0,00032
		2	0,00081			2	0,00026
		3	0,00069			5	0,00016
		5	0,00049			8	0,00008
	10	0,00028		10	0,00009		

$\alpha = 0.8, a = 1, b = 2, p = \frac{1}{3} \text{ e } u = 1$							
$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00217	5	1	2	0,00139
		2	0,00162			2	0,00104
		3	0,00140			3	0,00090
10	1	0	0,00102	10	1	5	0,00033
		2	0,00064			2	0,00021
		3	0,00048			5	0,00011
		5	0,00032			8	0,00006
	10	0,00033		10	0,00011		

Tabela 4.5 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com alterações nos parâmetros  $a$  e  $b$  com  $p$  igual nos dois casos.

#### 4.2.2 Operações com uma Distribuição Binomial Negativa

No caso inicial da distribuição Binomial Negativa, vemos que as probabilidades  $P(n, i, j)$  vão diminuindo à medida que se aumenta cada uma das variáveis em questão,  $n$ ,  $j$  e até mesmo  $i$ .

$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00033	5	1	2	0,00011
		2	0,00044			2	0,00014
		3	0,00052			3	0,00017
10	1	0	0,00008	10	1	5	0,00000
		2	0,00009			2	0,00001
		3	0,00009			5	0,00001
		5	0,00009			8	0,00003
	10	0,00006		10	0,00004		

Tabela 4.6 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com  $h = 1$ ,  $g = \frac{2,15}{5}$ ,  $p = 0.1$  e  $a = 1$ ,  $b = 9$  e  $u = 1$ , para o caso i.i.d..

Voltando a comparar das distribuições conjuntas, obtemos resultados bastante semelhantes ao da distribuição Geométrica para  $X_i$ : os valores de  $P(n, i, j)$  no caso i.i.d. (Tabela 4.6) são inferiores aos valores sob a hipótese de permutabilidade (Tabela 4.7), com a exceção dos cálculos para  $i = 10$ .

$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00108	5	1	2	0,00035
		2	0,00087			2	0,00028
		3	0,00075			3	0,00024
10	1	0	0,00121	10	1	5	0,00007
		2	0,00059			2	0,00004
		3	0,00381			5	0,00001
		5	0,00015			8	0,000003
		10	0,00004			10	0,000002

Tabela 4.7 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com  $h = 1$ ,  $g = \frac{2,15}{5}$ ,  $p = 0.1$  e  $a = 1$ ,  $b = 9$  e  $u = 1$ , para o caso permutável.

$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00170	5	1	2	0,00027
		2	0,00080			2	0,00013
		3	0,00048			3	0,00008
10	1	0	0,00475	10	1	5	0,00005
		2	0,00105			2	0,00001
		3	0,00030			5	0,0000005
		5	0,00005			8	0,0000001
		10	0,000002			10	0,00019

Tabela 4.8 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com  $h = 1$ ,  $g = \frac{3}{5}$ ,  $p = 0.1$  e  $a = 1$ ,  $b = 9$  e  $u = 1$ .

Ao aumentarmos o valor do parâmetro  $g$  (Tabela 4.8), obteve-se valores bastante irregulares comparadamente com o exemplo inicial.

$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00121	5	1	2	0,00039
		2	0,00087			2	0,00028
		3	0,00061			3	0,00020
10	1	0	0,00304	10	1	5	0,00018
		2	0,00124			2	0,00007
		3	0,00055			5	0,00001
		5	0,00016			8	0,00000
		10	0,00002			10	0,00004

Tabela 4.9 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com  $h = 1$ ,  $g = \frac{2,15}{5}$ ,  $p = 0.1$  e  $a = 1$ ,  $b = 9$  e  $u = 3$ .

Com o aumento do capital inicial para  $u = 3$  (Tabela 4.9), obtém-se probabilidades mais elevadas que as do caso original em todos os valores.

Vamos agora analisar uma particularidade neste estudo, ao operar com uma distribuição Binomial Negativa.

$h = 3, g = \frac{2.15}{5}, p = 0.1$ e $a = 1, b = 9$ e $u = 1$							
$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0	5	1	2	0,00015
	2		0,00010		2		0,00020
	3		0		3		0
10	1	0	0	10	1	5	0,00006
	2		0,00007		2		0,00009
	3		0,00019		5		0,00010
	5		0,00035		8		0
	10		0,00105	10		0,00019	

$h = 5, g = \frac{2.15}{5}, p = 0.1$ e $a = 1, b = 9$ e $u = 1$							
$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$	$n$	$i$	$j$	$P(n, i, j)$
5	1	0	0,00000	5	1	2	0,00000
	2		0,00000		2		0,00000
	3		0,00000		3		0,00000
10	1	0	0,00000	10	1	5	0,00002
	2		0,00000		2		0,00006
	3		0,00000		5		0,00002
	5		0,00001		8		0,00000
	10		0,00279	10		0,00002	

Tabela 4.10 Distribuição conjunta do tempo de ruína, o excedente imediatamente antes do momento de ruína e o déficit em ruína, com alterações no parâmetro  $h$ .

Com o parâmetro  $h$  de  $p(x)$  mais elevado (Tabela 4.10),  $h = 3$ , começam a aparecer algumas probabilidades nulas. Isto porque numa Binomial Negativa, temos que ter  $x \geq h$  e na nossa expressão de  $P(n, i, j)$  temos  $p(x) = p(i + j + 1)$ . Portanto, sempre que essa soma  $i + j + 1$  for menor que 3, temos probabilidades nulas. O mesmo acaba por acontecer, com mais frequência ainda, quando  $h = 5$ .

Desta forma, torna-se impraticável tentar fazer comparações ao caso original, pois não temos nenhum comportamento lógico nestes dados. Assim, podemos concluir que no âmbito do estudo da distribuição conjunta do tempo até ao momento de ruína, do excedente imediatamente antes e déficit no momento de ruína, a distribuição Binomial Negativa para o montante da indemnização individual não é a mais prática.

## Capítulo 5

# Conclusão

Esta dissertação apresenta resultados que mostram o efeito que o uso de variáveis permutáveis pode vir a ter na análise de perda e ruína nos modelos de indenizações.

Sob a hipótese de permutabilidade, as ocorrências de pedidos de indenização passam a ser dependentes ao longo do tempo, o que torna o modelo mais realístico.

As expressões da função de probabilidade de sobrevivência e da distribuição conjunta do tempo até ao momento de ruína, do excedente imediatamente antes e déficit no momento de ruína foram condicionadas pelo número total de ocorrências de indenização, o que facilitou os cálculos, visto que essa probabilidade condicionada será igual no caso i.i.d. e no caso permutável. Estes resultados vão de acordo com a literatura sobre este tema.

Foram usadas duas distribuições para modelar o montante de indenização individual: a distribuição Binomial Negativa e o seu caso particular, a distribuição Geométrica. Estas são utilizadas para modelação contagens para um  $n$  relativamente baixo, ao contrário de outras distribuições, como a de Poisson, que é mais usada para  $n$  de maiores dimensões e com  $p$  muito próximo de 0.

Com o auxílio de representações gráficas, é possível ver que a probabilidade de não-ruína no caso permutável tem valores superiores às do caso i.i.d.. Uma subida no capital inicial traz igualmente probabilidades mais elevadas e diminui a diferença entre os dois casos já referidos. Uma probabilidade de ocorrer um pedido de indenização superior implica uma diminuição nas probabilidades de sobrevivência.

Ao analisarmos os valores das tabelas da distribuição conjunta estudada, podemos verificar que o caso permutável tem, em geral, valores superiores aos da distribuição com variáveis i.i.d.. A distribuição binomial negativa, para o estudo desta função, não trouxe valores com comportamentos lógicos e portanto não é a melhor a ser usada para a análise em questão. Esta distribuição conjunta tem como potencial utilidade a análise do excedente de capital a um dado momento, visto que este depende positivamente do capital inicial e dos prémios, mas negativamente do montante de pedidos de indenização.

Estas funções, estudadas ao longo da dissertação, servem de ferramenta auxiliar à tomada de decisões estratégicas para minimizar o risco de falência. A inserção do conceito de permutabilidade nos modelos atuariais pode ser necessária para a credibilidade dos preços dos contratos de seguradoras, com base nas externalidades que os modelos possam sofrer.



# Bibliografia

- [1] P. Diaconis. Moments in mathematics. *Proc. Symp Appl. Math.*, 37:125–142, 1987.
- [2] D. Bowman E. O. George. A full likelihood procedure for analysing exchangeable binary data. *Biometrics*, 51:512–523, 1995.
- [3] S. Eryilmaz. On distributions of runs in the compound binomial risk model. *Methodol. Comput. Appl. Probab.*, 16:149–159, 2014.
- [4] Hans U. Gerber. Mathematical fun with the compound binomial process. *Astin Bulletin*, 18(2):161–168, 1988.
- [5] O. C. Iber. *in Fundamentals of Applied Probability and Random Processes*. Academic Press, Lowell, second edition, 2014.
- [6] W. Kirsch. An elementary proof of de de finetti theorem. *Statistics and Probability Letters*, 151:84–88, 2019.
- [7] P. Oliveira. Notas de teoria do risco. Notas de Aulas, Univeridade de Coimbra, Departamento de Matemática, 2018.
- [8] O. L. Gebizlioglu S. Eryilmaz. Compute finite time non-ruin probability and some joint distributions in discrete time risk model with exchangeable claim occurrences. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 313:235–242, 2017.
- [9] D. Williams. *Wheighing the Odds: A Course in Probability and Statistics*. Cambridge University Press, New York, first edition, 2001.





## Anexo A

# Códigos Linguagem R

```
# PARTE EXCHANGEABLE:
```

```
a<-1
```

```
b<-9
```

```
alfa<-4/5
```

```
beta_a_b<- function(a,b) (gamma(a)*gamma(b))/gamma(a+b)
```

```
beta_a_plus_k_plus_i_b<-function(a,k,i,b)  
(gamma(a+k+i)*gamma(b))/gamma(a+k+i+b)
```

```
lambda_k_i<- function(k,i)
```

```
beta_a_plus_k_plus_i_b(a,k,i,b)/beta_a_b(a,b)
```

```
p_Nn_equal_k<- function(n,k)
```

```
(factorial(n)/(factorial(k)*(factorial(n-k))))*sum(sapply(0:(n-k),
```

```
function(i){((( -1)^ i)*(factorial(n-k)/(factorial(i)
```

```
*(factorial(n-k-i))))
```

```
*lambda_k_i(k,i))}))
```

```
p<- function(a,b) a/(a+b)
```

```
qq<-function(a,b) 1-p(a,b)
```

```
f_x<- function(alfa ,x) (1-alfa)*alfa^(x-1)
```

```
F_x<- function(alfa ,x) (1-alfa)^x
```

```
# plot(seq(1,10),f_(0.8,seq(1,10)),
```

```
xlab = "x" ,ylab = "┘", type="l", lwd=1)
```

```
beta_u_n_k<-function (u,n,k){
if (n==0 && k==0){
1
}
else { if (n>=k && k==0){
(1-p(a,b))^n
}
else { if (n>=k && k>0){
sum(sapply (1:n,
function (t){p(a,b)*qq(a,b)^(t-1)*sum(sapply (1:(u+t-1),
function (x){(f_x(alfa,x)*beta_u_n_k((u+t-x),(n-t),(k-1))))}))
else {
0
}
}
}
}
}
```

```
c_u_n_k<- function (u,n,k)
beta_u_n_k(u,n,k)/((p(a,b)^k)*(1-p(a,b))^(n-k))
```

```
prob_T_n<- function (u,n) sum(sapply (0:(n), function (k){
sum(sapply (0:(n-k), function (i){
((-1)^i)*c_u_n_k(u,n,k)*(factorial(n-k)/(factorial(i)
*(factorial(n-k-i))))*lambda_k_i(k,i)}))}))
```

```
gama_u_n_j_k<-function (u,n,j,k){
```

```
if (k==0 && j==u+n){
(1-p(a,b))^n
```

```
}
else { if (k>0 && j<u+n){
sum(sapply (1:n, function (t){
p(a,b)*(qq(a,b)^(t-1))*sum(sapply (1:(u+t-1), function (x){
(f_x(alfa,x)*gama_u_n_j_k((u+t-x),(n-t),j,(k-1))))}))}))
```

```

else{
0
} }
}

```

```

d_u_n_i_k<- function(u,n,i,k)
gama_u_n_j_k(u,(n-1),i,k)/((p(a,b)^(k))*(1-p(a,b))^(n-k-1))

```

```

p_n_i_j<- function(u,n,i,j)
f_x(alfa,i+j+1)*sum(sapply(0:(n-1),
function(k){sum(sapply(0:(n-k-1),function(m){
((-1)^(m))*d_u_n_i_k(u,n,i,k)*(factorial(n-k-1)/(factorial(m)
*(factorial(n-k-1-m))))*lambda_k_i(k,(m+1))}}))})))

```

```

# PARTE IID:

```

```

p_n_k<- function(n,k)
factorial(n)/(factorial(k)*factorial(n-k))
*p(a,b)^(k)*(1-p(a,b))^(n-k)

```

```

p_T_n<-function(u,n)
sum(sapply(0:(n),function(k){beta_u_n_k(u,n,k)}))

```

```

plot(seq(1,10),f_x(0.8,seq(1,10)),
xlab = "x",ylab = "p", type="b", lwd=1)

```

```

# standard

```

```

plot(seq(1,10),sapply(seq(1,10),prob_T_n,u=3),
xlab = "n",ylab="p", type = "b",ylim=c(.5,1))

```

```

lines(seq(1,10),sapply(seq(1,10),p_T_n,u=3),
xlab = "n",ylab="p", type = "b",lty=2,ylim=c(.5,1))

```

```

# u=3

```

```

plot(seq(1,10),sapply(seq(1,10),prob_T_n,u=3),
xlab = "n",ylab="p", type = "b",ylim=c(.5,1))

```

```

lines(seq(1,10),sapply(seq(1,10),p_T_n,u=3),
xlab = "n",ylab="␣", type = "b",lty=2,ylim=c(.5,1))

# distribuicao binomial negativa

f_bn_x<-function(h,g,x){

if(x>=h){
(factorial(x-1)/(factorial(h-1)*(factorial(x-1-(h-1))))))
*g^(h)*(1-g)^(x-h)
}
else{
0
}

}

plot(seq(1,10),f_bn_x(1,0.43,seq(1,10)),
xlab = "x" ,ylab = "␣", type="l", lwd=1)

bn_beta_u_n_k<-function(u,n,k){
if(n==0 && k==0){
1
}
else { if(n>=k && k==0){
(1-p(a,b))^n
}
else { if(n>=k && k>0){
sum(sapply(1:n,function(t){p(a,b)*q(a,b)^(t-1)
*sum(sapply(1:(u+t-1),function(x){(f_bn_x(h,g,x)
*bn_beta_u_n_k((u+t-x),(n-t),(k-1))))}))}))
else{
0
}
}
}
}

```

---

  
 }

```
bn_c_u_n_k<- function(u,n,k)
bn_beta_u_n_k(u,n,k)/((p(a,b)^k)*(1-p(a,b))^(n-k))
```

```
bn_prob_T_n<- function(u,n)
sum(sapply(0:(n), function(k){sum(sapply(0:(n-k),
function(i){((-1)^i)*bn_c_u_n_k(u,n,k)
*(factorial(n-k)/(factorial(i)
*(factorial(n-k-i))))*lambda_k_i(k,i)}))}))
```

```
bn_gama_u_n_j_k<-function(u,n,j,k){
```

```
if(k==0 && j==u+n){
(1-p(a,b))^n
```

```
}
```

```
else{if(k>0 && j<u+n){
sum(sapply(1:n, function(t){p(a,b)
*(qq(a,b)^(t-1))*sum(sapply(1:(u+t-1), function(x){
(f_bn_x(h,g,x)*bn_gama_u_n_j_k((u+t-x),(n-t),j,(k-1))))}))})
else{
0
} }
}
```

```
bn_d_u_n_i_k<- function(u,n,i,k)
bn_gama_u_n_j_k(u,(n-1),i,k)/((p(a,b)^(k))*(1-p(a,b))^(n-k-1))
```

```
bn_p_n_i_j<- function(u,n,i,j) f_bn_x(kh,g,(i+j+1))
*sum(sapply(0:(n-1), function(k){sum(sapply(0:(n-k-1),
function(m){((-1)^(m))*bn_d_u_n_i_k(u,n,i,k)
*(factorial(n-k-1)/(factorial(m)*(factorial(n-k-1-m))))
*lambda_k_i(k,(m+1)}))}))
```

```
# PARTE IID:
```

```

bn_p_T_n<-function(u,n)
sum(sapply(0:(n), function(k){ bn_beta_u_n_k(u,n,k)}))

iid_bn_p_n_i_j<- function(u,n,i,j)
f_bn_x(h,g,(i+j+1))*sum(sapply(0:(n-1), function(k){
sum(sapply(0:(n-k-1), function(m){
((-1)^(m))*bn_d_u_n_i_k(u,n,i,k)*
(factorial(n-k-1)/(factorial(m)*
(factorial(n-k-1-m))))*p(a,b)^(k+m+1)}))}))

h<-1
g<-2.15/5

plot(seq(1,10), sapply(seq(1,10), bn_prob_T_n, u=1),
xlab = "n", ylab="̲", type = "b", ylim=c(.5,1))

lines(seq(1,10), sapply(seq(1,10), bn_p_T_n, u=1),
xlab = "n", ylab="̲", type = "b", lty=2, ylim=c(.5,1))

#u<-3

plot(seq(1,10), sapply(seq(1,10), bn_prob_T_n, u=3),
xlab = "n", ylab="̲", type = "b", ylim=c(.5,1))

lines(seq(1,10), sapply(seq(1,10), bn_p_T_n, u=3),
xlab = "n", ylab="̲", type = "b", lty=2, ylim=c(.5,1))

#comparacao geometrica com binomial negativa

plot(seq(1,10), sapply(seq(1,10), prob_T_n, u=1),
xlab = "n", ylab="̲", type = "b", ylim=c(0.5,1))

lines(seq(1,10), sapply(seq(1,10), bn_prob_T_n, u=1),
xlab = "n", ylab="̲", type = "b", lty=2, ylim=c(0.5,1))

```