

Universidade de Coimbra

Faculdade de Economia

**Estimação de Funções de Densidade
Neutras face ao Risco
através de Preços de Opções**

Ana Margarida Machado Monteiro

Coimbra
2007

Dissertação submetida para satisfação dos requisitos do
Doutoramento em Organização e Gestão de Empresas,
na especialidade em Investigação Operacional, da Fa-
culdade de Economia da Universidade de Coimbra.

Estimação de Funções de Densidade Neutras face ao Risco através de Preços de Opções

Resumo: A investigação apresentada nesta dissertação consistiu no desenvolvimento, implementação e teste de uma nova abordagem para a estimação de funções de densidade de risco neutro através de preços de opções. A estimação recorre a técnicas de aproximação não paramétricas e explora modelos e métodos de otimização recentemente propostos.

A estimação foi feita representando a função de densidade de risco neutro através de funções *spline* e minimizando, no sentido dos mínimos quadrados, a diferença entre os preços observados e os gerados através da função de densidade. A formulação resulta num problema de programação quadrática convexa se a não negatividade é apenas imposta nos nós das funções *spline* ou num problema de programação semidefinida convexo se se pretender estimar funções que sejam garantidamente não negativas em todo o seu domínio.

Em primeiro lugar, abordou-se o caso estático em que são considerados dados de preços de opções relativos a uma única maturidade. Os resultados obtidos pela resolução numérica das formulações propostas mostraram a eficiência e robustez deste processo de estimação, quer para dados simulados por modelos teóricos de preços de opções quer para dados observados no mercado.

O caso dinâmico, em que são considerados preços de opções relativos a várias maturidades, constitui um problema mais complexo, intimamente ligado à difícil determinação da superfície de volatilidade. A estimação recorreu, neste caso, a funções *spline* bicúbicas, dando origem a problemas com estrutura e propriedades semelhantes. Os testes realizados para dados teóricos e de mercado revelaram-se bons tendo em consideração a complexidade e dificuldade da estimação em causa.

Estimating Risk-Neutral Probability Density Functions from Options Prices

Abstract: In this thesis we develop, implement, and test a new approach for the estimation of risk-neutral densities from option prices. The estimation uses non-parametric techniques and explores optimization methods and models recently proposed.

The estimation is carried out in the space of spline functions and minimizes, in the least-squares sense, the difference between the observed option prices and the option prices generated by the estimated risk-neutral density. The resulting optimization problem is a convex quadratic programming problem if the nonnegativity is imposed at the spline knots or a semidefinite programming problem if the goal is to estimate functions with a guarantee of nonnegativity in all their domain.

Firstly, we considered the static case in which the option prices on the underlying asset correspond to the same maturity. The numerical results show the effectiveness and robustness of the estimation for both simulated and market data.

The dynamic case corresponds to a set of option prices on the same underlying asset but with different maturities, resulting in a more complex problem, related to the challenge of recovering the volatility surface. The estimation used bicubic splines, yielding optimization problems with similar structure and properties. The numerical results for both simulated and market data were good given that the estimation is now more complex and difficult.

Agradecimentos

Ao meu orientador científico, Professor Luís Nunes Vicente, que propôs os temas de investigação tratados nesta dissertação, que acompanhou o trabalho efectuado e que marcou de forma decisiva a minha formação científica. A sua disponibilidade, interesse e encorajamento foram determinantes na elaboração deste trabalho. O seu rigor científico, a sua curiosidade inesgotável e a capacidade de se entusiasmar com os pequenos avanços foram ensinamentos e estímulos marcantes durante estes anos. Por todo este apoio, pelo incentivo nas ocasiões mais difíceis e ainda pela sua amizade aqui fica a minha gratidão.

Ao Professor Reha Tütüncü pela disponibilidade, empenho e interesse que demonstrou. As suas sugestões e o seu trabalho foram importantes para a preparação desta dissertação.

À Professora Teresa Pedroso de Lima pela sua amizade e manifestações de interesse pelo andamento do trabalho.

Aos meus colegas, em especial, à Aldina, ao António Alberto, à Cristina e ao Paulo, pelo apoio que prestaram.

A toda a minha Família. Aos meus amigos.

Aos meus Pais, por toda a dedicação e apoio.

As minhas filhas foram a minha força: as suas brincadeiras, as suas birras e ternuras "encheram" a minha vida.

Um agradecimento muito especial ao Carlos, pelo seu carinho, pela sua

paciência e boa-vontade para gerir as ausências.

Em termos institucionais, agradeço todo o apoio que me foi concedido pela Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra. Agradeço, ainda, ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra e à Fundação para a Ciência e Tecnologia (Projectos POCTI/35059/MAT/2000 e PTDC/MAT/64838/2006).

Conteúdo

Principais Notações	vi
1 Introdução	1
1.1 Considerações gerais	1
1.2 Contribuições da tese	3
1.3 Organização do trabalho	4
2 Alguns conceitos básicos em finanças e matemática financeira	5
2.1 Activos financeiros	6
2.2 Derivados financeiros	8
2.2.1 Contratos de futuros	9
2.2.2 Contratos <i>forward</i>	12
2.2.3 Contratos de opções	13
2.2.4 Arbitragem	16
2.3 Modelo de Black-Scholes	18
2.3.1 Equação diferencial de Black-Scholes	20
2.3.2 Paridade <i>put-call</i>	23
2.3.3 Volatilidade implícita e sorrisos	24
2.4 Neutralidade face ao risco	26
2.4.1 Risco neutral	27
2.4.2 Distribuição (implícita) de risco neutro	28
3 Métodos para estimação das funções de densidade de risco neutro	31

3.1	Métodos paramétricos	32
3.1.1	Métodos aplicados ao processo estocástico seguido pelo activo subjacente	32
3.1.2	Métodos aplicados à função de densidade de risco neutro	34
3.2	Métodos semi-paramétricos	37
3.3	Métodos não-paramétricos	38
3.3.1	Métodos aplicados ao sorriso da volatilidade	38
3.3.2	Métodos de árvore	42
3.3.3	Métodos com funções de núcleo	43
3.3.4	Métodos de regularização da função de densidade	45
3.3.5	Métodos de entropia máxima	46
3.3.6	Métodos com redes neuronais	47
4	Métodos para estimação das funções de densidade usando programação quadrática e semidefinida	49
4.1	Dados do problema	49
4.2	Formulação do problema de programação quadrática	50
4.2.1	Função objectivo	52
4.2.2	Restrições do problema	54
4.3	Reformulação do problema usando programação semidefinida e cónica	55
5	Resultados numéricos	61
5.1	Dados simulados de preços de opções	62
5.2	Dados de mercado de preços de opções	65
5.2.1	Eliminação da arbitragem	66
5.2.2	Reformulação ponderada do problema	67
5.2.3	As estimações obtidas	68
6	Extensão à evolução temporal	80
6.1	Dados do problema	81
6.2	Formulação do problema de programação quadrática	81
6.3	Formulação do problema de programação semidefinida	85

6.4	Resolução numérica dos problemas de estimação	87
6.5	Dados simulados de preços de opções	87
6.6	Dados de mercado de preços de opções	93
7	Conclusões	105
7.1	Observações finais	105
7.2	Sugestões para trabalho futuro	106
A		108
A.1	Funções <i>spline</i> cúbicas	108
A.2	Funções <i>spline</i> bicúbicas	110
A.3	Problemas de programação quadrática	111
A.4	Problemas de programação semidefinida	115
A.5	Dados S&P500	117
	Bibliografia	122

Principais notações

n, m	inteiros positivos
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	espaço vectorial real de dimensão n
$\mathbb{R}^{m \times n}$	espaço vectorial real das matrizes de ordem $m \times n$
$A \bullet B = \text{tr}(A^\top B)$	produto interno de matrizes
$C \succ 0$	matriz definida positiva
$C \succeq 0$	matriz semidefinida positiva
S^n	subespaço vectorial real das matrizes quadradas simétricas de ordem n
S_+^n	cone das matrizes simétricas semidefinidas positivas
QP	programação quadrática
SDP	programação semidefinida
SOCP	programação cónica de segunda ordem
$\ \cdot\ $	norma Euclideana (vectorial ou matricial)

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais

A fórmula de Black-Scholes (BS) para atribuição de preços a opções financeiras veio alterar, significativamente, a dinâmica dos mercados financeiros. Assim sendo, esta fórmula provocou o aparecimento de novos contratos de opções e um aumento considerável do número de transacções destes instrumentos financeiros. Perante esta situação, houve uma maior necessidade de gerir o risco associado a estes produtos. Os desenvolvimentos entretanto feitos na teoria de preços de opções foram no sentido de obter uma maior protecção (*hedging*) contra o risco relativo à incerteza do estado futuro que o mercado pode atingir. Para além da diversidade de contratos de opções, o número de outros produtos financeiros derivados aumentou consideravelmente e tornou-se possível determinar teoricamente os seus preços. Estes derivados permitem, entre outras coisas, reduzir o risco nas operações financeiras na medida em que permitem controlar os movimentos adversos nos preços.

O modelo de BS pressupõe que o preço do activo subjacente ao contrato de opções segue uma distribuição de probabilidade lognormal. No entanto, os mercados não obedecem a este pressuposto. De facto, invertendo a fórmula de BS e calculando as volatilidades referentes aos preços de opções, que designamos por volatilidades implícitas, observa-se que elas são distintas. Ou seja, a volatilidade não é constante, como admitido pelo modelo de BS, mas pode

variar com os preços. Se conhecermos, com precisão, a volatilidade associada aos preços de opções então poderemos estabelecer o preço da opção usando a fórmula de BS, uma vez que, neste modelo, a volatilidade é o único parâmetro não observável. A literatura relativa à determinação da volatilidade é extensa e apresenta abordagens muito variadas.

Por outro lado, Breeden e Litzenberger [20] mostraram que, sob certas condições (ausência de arbitragem por exemplo), a segunda derivada da função preço da opção de compra (ou de venda), relativamente ao preço de exercício, é proporcional à função de densidade de risco neutro. Assim, se conhecermos uma função que defina a volatilidade para um determinado intervalo de preços de exercício (função de volatilidade) poderemos substituí-la na fórmula de BS e, depois, derivar duas vezes em relação ao preço de exercício de modo a obter a função de densidade. Neste sentido, poderemos dizer que conhecer a informação dos preços das opções é equivalente a conhecer a informação dada pela função de volatilidade ou a dada pela função de densidade de risco neutro.

Desta forma, outra abordagem para o controle do risco consiste em estimar a distribuição de probabilidade seguida pelo preço do activo, a partir de preços de opções. De facto, supondo que se verifica a hipótese da neutralidade face ao risco [31], o preço de uma opção pode ser obtido como o valor esperado dos ganhos futuros descontado à taxa de juro sem risco. Este resultado, assim como o apresentado por Breeden e Litzenberger, entre outros, contribuíram para uma grande variedade de abordagens na determinação da função de densidade de risco neutro. Existem as abordagens paramétricas que pressupõem que o activo subjacente segue um determinado processo estocástico, como por exemplo o movimento Browniano geométrico, no caso da abordagem de BS. Estas abordagens podem admitir, ainda, que a partir de funções de densidade base, como por exemplo a lognormal ou a normal, se considerem misturas de densidades ou se adicionem termos, envolvendo novos parâmetros, resultando numa nova expressão para a função de densidade. As abordagens não-paramétricas consideram um número elevado de parâmetros e não estipulam nenhum processo para o preço do activo. Permitem, desta forma, uma grande variabilidade nas formas da função de densidade.

1.2 Contribuições da tese

Várias das abordagens para a estimação da função de densidade de risco neutro apresentam resultados negativos. Na prática, é necessário analisar os resultados obtidos com estas abordagens e fazer modificações de modo a corrigir esta situação. Por outro lado, os métodos paramétricos, porventura os mais populares, apesar dos avanços conseguidos, ainda não conseguem descrever os dados com exactidão.

Propomos, nesta dissertação, uma nova abordagem não-paramétrica para a estimação da função de densidade de risco neutro. Esta abordagem usa funções *spline* cúbicas e bicúbicas e formula os problemas de estimação como problemas de programação quadrática ou programação semidefinida. A nossa abordagem garante, de forma rigorosa, a não negatividade da função de densidade de risco neutro estimada. No caso estático, em que apenas uma maturidade é considerada, são usadas funções *spline* cúbicas e a não negatividade é imposta nos nós da função *spline* (dando origem a um problema de programação quadrática) ou em todo o seu domínio (o que origina um problema de programação semidefinida). O caso dinâmico (envolvendo várias maturidades) recorre a funções *spline* bicúbicas e a não negatividade das funções estimadas é imposta em nós e segmentos da malha rectangular referente à discretização espacial e temporal. As várias abordagens propostas foram testadas com dados relativos a preços de opções simulados e observados no mercado e mostraram a sua viabilidade e eficiência.

Vale a pena ainda referir que o conhecimento da distribuição associada ao preço do activo tem várias aplicações. Pode ser útil para a gestão do risco, como foi referido anteriormente. Pode ainda servir para obter as expectativas dos operadores de mercado, em particular as suas expectativas relativas a eventos de ocorrência extrema. Outra das aplicações das distribuições de probabilidade de risco neutro é o cálculo de preços de opções cujo ganho seja uma qualquer função do preço do activo subjacente na maturidade, como é o caso, por exemplo, das opções exóticas.

1.3 Organização do trabalho

Esta dissertação está organizada em seis capítulos, cujo conteúdo se descreve seguidamente.

No Capítulo 2 apresentam-se alguns conceitos básicos de finanças e de matemática financeira necessários à compreensão deste trabalho. No Capítulo 3 descrevemos, resumidamente, as diferentes abordagens existentes na literatura para a estimação da função de densidade de risco neutro. Apresentamos, no Capítulo 4, os novos métodos para a estimação da função de densidade de risco neutro para o caso estático em que apenas uma maturidade é considerada. Os resultados numéricos obtidos a partir de dados relativos a preços de opções são apresentados no Capítulo 5, para o caso estático, e envolvendo dados simulados a partir da fórmula de Black-Scholes e dados observados no mercado. O estudo da estimação da evolução temporal da função de densidade de risco neutro é apresentado no Capítulo 6. Este capítulo inclui testes envolvendo preços de opções simulados e observados no mercado. O Capítulo 7 faz o balanço das contribuições da tese, comenta os resultados obtidos e aponta caminhos para trabalho futuro.

Os Apêndices A e B apresentam as definições de funções *spline* cúbicas e bicúbicas respectivamente. Nos apêndices C e D é feito um pequeno resumo sobre programação quadrática e programação semidefinida.

Capítulo 2

Alguns conceitos básicos em finanças e matemática financeira

O sistema financeiro tem, actualmente, um papel determinante na vida das pessoas. Dele fazem parte todos os tipos de mercados e os seus intervenientes tais como governos, bancos, companhias de seguros, companhias de investimento e todos os indivíduos que operam nesses mercados. Devido ao facto de estabelecerem a ligação entre a vida dos indivíduos e as estruturas económicas, estes mercados têm uma influência crescente na vida da sociedade. Os mercados diferem consoante o tipo de instrumentos financeiros que utilizam. Cada mercado financeiro tem as suas características e serve, por isso, diferentes tipos de clientes. Podemos estabelecer uma classificação dos mercados de acordo com o prazo que decorre entre a celebração de um determinado contrato financeiro e a sua liquidação. Se a entrega do bem negociado for imediata diremos que se trata de um *mercado à vista* e, neste caso, o comprador paga ao vendedor e recebe o bem na mesma altura. Se, por outro lado, se estabelecer um contrato de modo a que o bem seja entregue numa data futura então estamos na presença de um *mercado de derivados*.

Existe uma ligação forte entre as finanças e a matemática. A matemática

financeira estuda os tópicos da matemática que estão na base desta ligação. Podemos encontrar apresentações pormenorizadas sobre matemática financeira, nomeadamente sobre a atribuição de preços a determinados produtos derivados financeiros, em diversos livros tais como os de Baxter e Rennie [11], Björk [15], Duffie [37], Hull [56], Neftci [78] e Wilmott, Howison e Dewynne [94].

2.1 Activos financeiros

A riqueza de um indivíduo, de uma organização ou do Estado é um conceito lato e, por isso, assume formas diferentes. De um modo geral, qualquer bem que se possua é um factor de riqueza. De facto, podemos considerar elementos de riqueza bens como a terra, as casas, as máquinas, ou outros mais difíceis de quantificar, como, por exemplo, o capital humano ou ainda outros mais estruturados como sejam os fundos de investimento. Designamos por activo financeiro qualquer direito monetário detido por uma entidade sobre uma outra. Temos, como exemplo, a *moeda*, os *depósitos de poupança* e os títulos emitidos pelo Estado ou por empresas (tais como *bilhetes do Tesouro* e *obrigações*, *acções de empresas*, *fundos de investimento* e *índices accionistas*). Para além destes bens, existem ainda outros mais estruturados como sejam os contratos de derivados financeiros, sendo os mais conhecidos os *contratos forward*, os *contratos de futuros* e os *contratos de opções*.

Os *depósitos de poupança* referem-se, usualmente, a depósitos bancários e as suas taxas de juro são determinadas pelas taxas de juro de curto prazo do mercado.

Os títulos emitidos pelo Estado ou por empresas são formas de empréstimo, por parte de particulares, a essas entidades. O pagamento da quantia subscrita é feito no final do contrato e, durante o período a que dizem respeito, os títulos pagam, periodicamente, os juros contratualizados. Enquanto os *bilhetes do Tesouro* contemplam usualmente prazos curtos, até um ano, as *obrigações* dizem normalmente respeito a períodos mais alargados.

As *acções*, sendo direitos monetários sobre as empresas, permitem que os

seus titulares recebam uma parte dos lucros das empresas (designados por dividendos) ou, no caso da venda destas, uma parte dos ganhos obtidos.

Os *fundos de investimento* são compostos por diversos títulos, como, por exemplo, acções e obrigações, e procuram captar a poupança. Os seus títulos podem ou não ser negociados em bolsa consoante as características que o compõem.

Os *índices accionistas* são instrumentos de congregação de acções que pretendem avaliar o desempenho de um determinado conjunto de empresas num determinado sector de mercado, ou avaliar o mercado de forma mais abrangente, dependendo das características das empresas que o constituem. Podem dizer respeito ao sector das matérias primas, como seja os cereais, ao sector dos transportes, da construção civil ou, por outro lado, dizer respeito às empresas que têm maior volume diário de transacções em bolsa. Um índice de acções é uma medida possível para a variação nos preços das acções e, neste sentido, pode ser um bom indicador de estratégias para os diferentes sectores de mercado a que diz respeito. As suas acções são escolhidas por forma a representarem, o mais completa e eficazmente, a informação do mercado. É imposto a um índice que as suas acções tenham um volume de transacções acima da média das acções do mesmo sector, dado que se as acções não forem líquidas o índice torna-se obsoleto.

O valor de um índice congrega, de forma organizada, as cotações das acções que o constituem. Usualmente, a actualização do valor dos índices é feita de acordo com a actualização dos preços de transacção das acções, de forma continuada, durante o horário dos mercados bolsistas. A determinação do valor de um índice pode fazer-se de diferentes formas usando, por exemplo, apenas os preços das acções ou adicionando outra informação, nomeadamente a relativa ao número de acções emitidas. Podemos, por exemplo, estabelecer o valor de um índice recorrendo a uma média do preço das N acções que o constituem:

$$I_t = \mu \frac{\sum_{i=1}^N n_i S_i^t}{\sum_{i=1}^N n_i S_i^0}, \quad (2.1)$$

em que n_i representa o número de acções relativas à empresa i no momento inicial, isto é, no dia a partir do qual o índice se inicia, S_i^0 e S_i^t representam

os preços das acções da empresa i , respectivamente, no momento inicial e no momento actual t . A constante μ permite ajustar o valor do índice, tendo em conta factores de mercado, não usuais, que interferem no preço das acções, como sejam, por exemplo, a fusão de empresas que constituem o índice ou a entrada ou saída de empresas no índice.

Dado que iremos apresentar contratos financeiros que incidem sobre determinados activos, passaremos a designar estes por activos subjacentes ao contrato estipulado ou, no caso de não haver dúvidas em relação ao contrato referido, simplesmente por activos subjacentes, e os respectivos contratos por contratos derivados ou simplesmente derivados. A noção de activo subjacente é, no entanto, mais vasta dado que os agentes de mercado especializados podem propor a negociação de um contrato sobre praticamente quase tudo que se possa pensar.

Os contratos de derivados permitem cobrir os riscos da actividade financeira, nomeadamente o risco bolsista, o risco cambial e o risco da taxa de juro. Desta forma, os índices accionistas tornam-se um activo subjacente importante bem como as taxas de juro. Surgem, naturalmente, derivados sobre taxas de juro, em que se negociam taxas de juro sobre determinados montantes que irão ser, por exemplo, recebidos no futuro. Na secção seguinte vamos detalhar as características de alguns contratos de derivados.

2.2 Derivados financeiros

Os derivados são produtos financeiros cujo valor é dependente do valor de um ou mais activos financeiros. Estes produtos são transaccionados em mercados financeiros com características próprias — os mercados de derivados. Nestes mercados, o acordo celebrado entre as partes do contrato prevê que ele seja liquidado num momento futuro.

Existem vários tipos de contratos financeiros derivados, como, por exemplo, *contratos forward*, *swaps*, *contratos de futuros* e *contratos de opções*. Embora qualquer activo possa ser usado para estabelecer um contrato deste tipo, os contratos sobre os índices accionistas e as taxas de juro são, do ponto de vista

dos mercados, particularmente importantes pela capacidade de gerir o risco associado, como foi sublinhado na Secção 2.1.

Os instrumentos financeiros derivados podem ser usados como investimento a par de outros activos financeiros. Algumas vezes, este investimento é acompanhado de uma forte componente especulativa. De facto, alguns intervenientes de mercado, apostando em determinado comportamento associado ao activo subjacente, negociam contratos de derivados que lhes permitam obter os lucros perspectivados. Esta atitude torna-se benéfica em termos de mercado porque aumenta as diferentes tomadas de posição, incrementando, assim, a liquidez do mercado.

Os produtos financeiros derivados podem ainda ser usados para efectuar uma cobertura face ao risco (*hedging*), permitindo uma gestão do próprio risco. Pretende-se, desta forma, compensar um movimento de preços de activos em determinado sentido tomando uma posição contrária no mercado de derivados, limitando, assim, as perdas no caso de ocorrerem situações adversas de mercado.

Estes instrumentos derivados podem ser usados, igualmente, para aproveitar desfasamentos de cotações em mercados diferentes, procurando, desta forma, obter lucros sem correr riscos. De facto, existem intervenientes de mercado atentos às cotações dos derivados em mercados diferentes. Assim, se forem observadas diferenças nos preços relativamente a dois mercados distintos pode ser efectuada uma compra e venda simultânea nos dois mercados, de modo a obter um ganho sem risco. Podemos, por isso, dizer que a arbitragem tira partido das imperfeições dos mercados. Estas oportunidades de arbitragem tendem a repor o equilíbrio dos preços uma vez que o mercado reage rapidamente a estas operações de compra e venda.

A liquidez associada a determinados mercados de derivados é elevada porque estes instrumentos fazem com que as estratégias nos mercados financeiros sejam mais elaboradas e eficazes no controlo do risco.

2.2.1 Contratos de futuros

Os *contratos de futuros* celebram um acordo entre duas partes que permite a compra ou a venda, de um determinado activo financeiro, num determinado momento futuro e por um preço acordado no acto da celebração do acordo. Dizemos que o comprador do contrato assume uma posição longa e que o vendedor assume uma posição curta.

Estes contratos caracterizam-se pelo facto de serem altamente estruturados, isto é, com regras perfeitamente definidas e conhecidas por ambas as partes no momento da celebração do acordo. De facto, eles são transaccionados em mercados especializados e organizados — os mercados de futuros — que estipulam as diversas características dos contratos, como, por exemplo, a especificação do activo subjacente, a variação mínima dos preços, a forma de liquidação do contrato, as várias taxas de operações, ou, ainda, a altura em que o contrato é liquidado. O preço pago pelo contrato é a única característica que é negociada entre as partes.

Atendendo a que a clareza das regras no mercado de futuros é muito grande, a transparência negocial originada é igualmente elevada. Este facto faz aumentar a liquidez e potencia o mercado de futuros.

Uma das especificidades dos contratos de futuros é o facto dos investidores poderem anular o contrato antes da data de maturidade, evitando, assim, o seu cumprimento. Esta situação é muito frequente e ocorre, por exemplo, no caso de um investidor prever flutuações nos preços que contrariem a posição assumida no mercado de futuros. O investidor pode, então, assumir uma posição contrária à inicial, num contrato com o mesmo activo subjacente e a mesma maturidade, compensando a posição tomada anteriormente. Este mecanismo é facilitado pela existência da *câmara de compensação*. Trata-se de uma instituição da própria bolsa que se interpõe entre as partes do contrato, passando cada uma destas a negociar com a câmara, o que reduz o risco de incumprimento. De facto, as exigências feitas às partes, nomeadamente a *conta de margem*, permite que sejam dadas garantias para as posições tomadas pela câmara nos contratos. A conta de margem possibilita acomodar e incorporar as flutuações diárias do preço do contrato. Este processo designa-se por

marcação-ao-mercado (*marking-to-market*) e traduz o efeito da valorização ou desvalorização do contrato perante o preço de referência calculado diariamente. Se a conta de margem descer para além de um determinado valor pode ser necessário reforçá-la. Este processo minimiza o risco de incumprimento. Logo, as perdas avultadas, no caso de ocorrerem, não serão descontadas apenas no final mas sim durante o tempo de vida do contrato.

Na maturidade de um contrato de futuros, o seu preço F_T é igual ao preço do activo subjacente S_T . Se assim não fosse, isto é, se por exemplo $F_T > S_T$, seria possível a um investidor vender o contrato de futuros, comprar o activo subjacente e entregá-lo ao comprador lucrado assim $F_T - S_T$. Caso idêntico ocorreria se $F_T < S_T$, em que o investidor compra o contrato de futuros, recebe o activo subjacente e vende-o lucrado $S_T - F_T$. O mercado encarrega-se de eliminar estas situações de arbitragem.

A Figura 2.1 descreve o ganho (ou perda se corresponder a um prejuízo) de um investidor com uma posição longa, em que o preço pago pelo contrato de futuros é designado por F . De forma semelhante, o ganho de um investidor considerando a posição curta é descrito pela Figura 2.2.

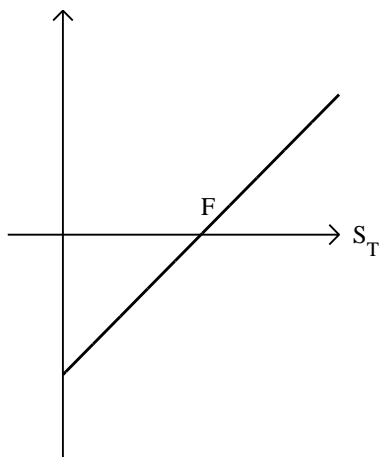


Figura 2.1: Ganho de um investidor em posição longa num contrato de futuros ou *forward*.

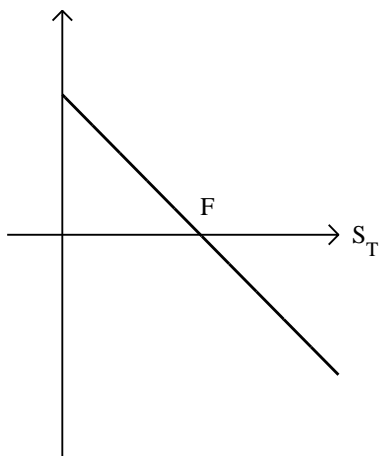


Figura 2.2: Ganho de um investidor em posição curta num contrato de futuros ou *forward*.

Se o contrato de futuros não for liquidado antes da sua maturidade, então, nessa data, o comprador compromete-se a liquidar a sua posição, comprando o activo ou liquidando-o financeiramente, conforme o caso. O vendedor compromete-se, de igual forma, a vender o activo ou a liquidar financeiramente a sua posição.

Ao assumir a posição longa, o comprador aposta numa subida das cotações, o que, ao acontecer, trará um ganho de $S_T - F$. Se isso não acontecer terá um ganho negativo, isto é, o prejuízo sofrido será de $F - S_T$. Por outro lado, o vendedor aposta numa descida das cotações e, conseqüentemente, o valor do seu ganho será igual ao prejuízo comprador ($F - S_T$) e o valor do seu prejuízo será igual ao ganho do comprador ($S_T - F$).

2.2.2 Contratos *forward*

Os contratos *forward* assemelham-se aos contratos de futuros, no sentido em que estabelecem um acordo para a compra ou venda de um determinado bem num momento futuro.

Estes contratos são efectuados em mercados informais (*over-the-counter*

ou *ao balcão*), recaindo sobre as partes a negociação de todos os parâmetros do contrato, como, por exemplo, o prazo de vencimento e o preço. Esta personalização dos contratos pode ser uma vantagem pois permite uma adequação às necessidades e desejos das partes. Por outro lado, a falta de padronização dos contratos faz com que os termos do contrato interessem apenas às partes intervenientes. Trata-se de contratos que requerem maior tempo negocial do que os contratos de futuros e exigem um esforço de informação elevado para estabelecer o preço mais ajustado. Ao contrário dos contratos de futuros, estes contratos não exigem conta de margem. Estas são algumas das razões que fazem com que os contratos *forward* tenham uma menor liquidez e um maior risco de incumprimento do que os contratos de futuros.

Uma das aplicações destes contratos é feita nos mercados cambiais de modo a prevenir valorizações ou desvalorizações da moeda estrangeira relativamente à local.

2.2.3 Contratos de opções

Os contratos de opções conferem aos compradores ou titulares um direito de opção. Esta particularidade distingue estes contratos dos apresentados anteriormente, na medida em que esta assimetria de posições pode ser usada para um maior controlo do risco.

Uma *opção* é um contrato através do qual o comprador adquire o direito (mas não a obrigação) de comprar ou vender uma determinada quantidade de um activo por um determinado preço (preço de exercício). Se o contrato conferir o direito de compra diremos que se trata de uma *opção de compra* (*call option*). Se, por outro lado, o contrato conferir o direito de venda trata-se de uma *opção de venda* (*put option*).

Se o direito tiver de ser exercido numa determinada data futura, designada por maturidade ou prazo de vencimento, diremos que se trata de uma *opção europeia* ou de *tipo europeu*. No caso do direito de opção poder ser exercido ao longo de um período de tempo (entre a celebração do contrato e a sua maturidade), estamos na presença de uma *opção americana* ou de *tipo americano*.

Enquanto o comprador adquire um direito, o vendedor assume a obrigação de comprar ou vender o activo. Assim sendo, o vendedor, ou subscritor da opção, fica submetido à vontade do comprador. Esta sujeição é compensada com o pagamento, por parte do comprador, de uma determinada quantia, designada por *prémio* ou *preço da opção*. Dizemos que quem compra uma opção assume uma *posição longa* e quem vende assume uma *posição curta*.

O direito facultado ao comprador da opção traduz-se, em termos gráficos, em perfis de ganho diferentes dos perfis dos contratos *forward* e de futuros. Designemos por S_T o preço do activo subjacente na data de vencimento e por E o preço de exercício estipulado no contrato de opção. O ganho do comprador é dado por

$$\max(S_T - E, 0) = (S_T - E)^+.$$

Se o preço do activo no mercado à vista for superior ao preço acordado no contrato, o direito é exercido. Neste caso, depois de comprar o activo ao preço E , o investidor pode vendê-lo ao preço S_T , lucrando a diferença. Se, pelo contrário, o preço do activo for inferior a E no mercado à vista, o direito não é exercido e o contrato expira. No caso em que $S_T = E$ o ganho da opção é igual a zero. O exercício da opção dependerá dos custos de transacção associados e do interesse do investidor em possuir o activo.

Em relação à opção de venda, o ganho do comprador é dado por

$$\max(E - S_T, 0) = (E - S_T)^+.$$

Neste caso, a opção é exercida caso o valor do activo subjacente seja inferior ao preço de exercício. Concretamente, se no mercado à vista o activo valer $S_T < E$, o investidor com a posição longa exerce a opção e vende o activo ao preço E , obtendo um ganho de $E - S_T$. Se ocorrer a situação $S_T > E$, o investidor não exerce a opção uma vez que não vai vender por um preço mais baixo do que o preço do mercado à vista. A situação em que $S_T = E$ é semelhante à das opções de compra. Os diagramas de ganho relativos às posições do comprador e do vendedor na data de vencimento são dadas pelas Figuras 2.3 e 2.4.

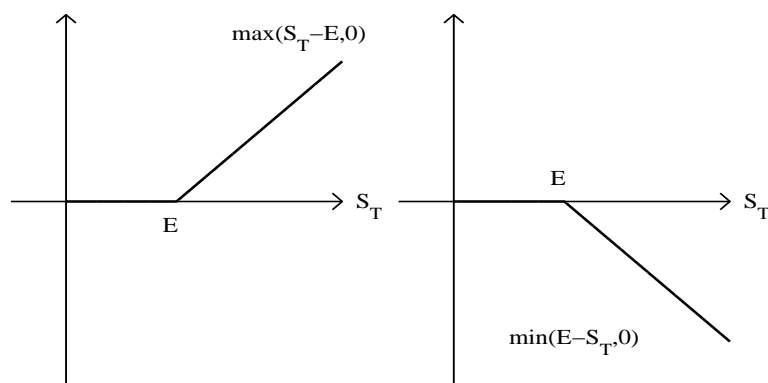


Figura 2.3: Ganhos da opção de compra relativos às posições longa e curta, respectivamente à esquerda e à direita.

Se tivermos em conta o prémio pago pelo investidor em posição longa, os gráficos respeitantes ao lucro são um pouco diferentes dado que sofrem uma translação no sentido contrário ao do eixo dos yy , como se vê pelas Figuras 2.5 e 2.6.

É possível distinguir o estado das opções classificando-as como *in-the-money*, *at-the-money* ou *out-of-the-money*. Uma opção está *in-the-money* se, no caso de ser exercida imediatamente, resultar num saldo positivo. Diz-se que a opção está *out-of-the-money* se, pelo contrário, o resultado do seu exercício imediato levar a uma perda de rendimentos. Uma opção está *at-the-money* quando for indiferente exercê-la, ou seja, quando o lucro for nulo ou perto de zero.

De entre as opções mais transaccionadas nos mercados de derivados podemos destacar as opções sobre mercadorias, acções, índices de acções, taxas de juro e futuros. Esta diversidade de contratos de opções conduz a diferentes atitudes e estratégias de mercado.

Para além das opções que referimos existem outras, com perfis de ganho diferentes e mais elaborados do que os já vistos. Assim temos, por exemplo, opções cujo ganho depende da trajectória do preço do activo subjacente, opções sobre opções, opções americanas cujo exercício antecipado está restrito

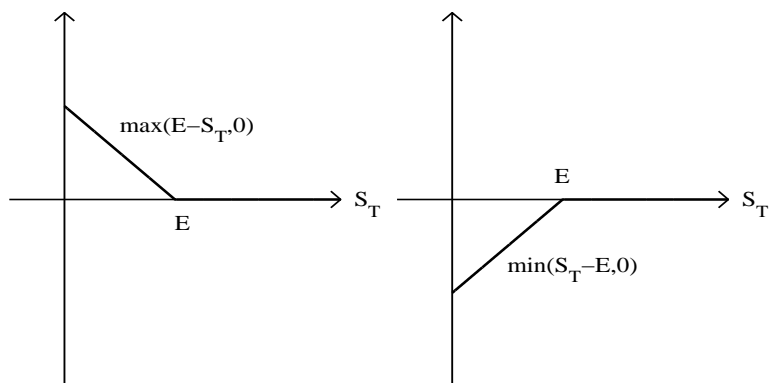


Figura 2.4: Ganhos da opção de venda relativos às posições longa e curta, respectivamente à esquerda e à direita.

a determinadas datas. Estes são alguns exemplos de *opções exóticas*, em que a fórmula dos ganhos e perdas é diferente do tradicional. Muitas das opções exóticas são derivados complexos e difíceis de modelar matematicamente.

2.2.4 Arbitragem

Tal como vimos anteriormente, um dos grupos intervenientes no mercado é o dos *arbitragistas*. Estes operam no mercado procurando oportunidades de arbitragem. Uma operação de arbitragem permite a realização de operações financeiras com obtenção de lucros e sem risco.

Uma forma básica de ilustrar este conceito é considerar o preço de uma opção de compra superior ao do activo subjacente. A oportunidade de arbitragem consistiria em vender a opção de compra por C_t e comprar o activo por S_t , obtendo-se um lucro $C_t - S_t$ sem quaisquer riscos. Assim, para não existir arbitragem, o preço de uma opção de compra nunca pode ser superior ao do activo subjacente.

As oportunidades de arbitragem no mercado são bastante mais complexas do que a apresentada anteriormente e dizem normalmente respeito à compra e venda simultânea de activos equivalentes em mercados diferentes, tirando partido das imperfeições dos mercados, nomeadamente das diferenças de cotação.

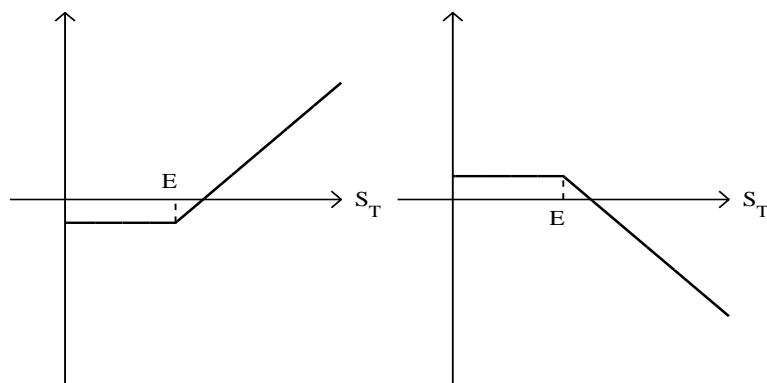


Figura 2.5: Ganhos da opção de compra relativos às posições longa e curta, respectivamente à esquerda e à direita, com inclusão do prémio.

Suponhamos, para o efeito desta discussão, que existe no mercado uma taxa de juro isenta de risco, como, por exemplo, a de um depósito bancário. A ausência de arbitragem pressupõe que o ganho obtido com um conjunto de activos financeiros é igual ao obtido com um depósito bancário no mesmo valor, caso contrário o mercado tenderia rapidamente a restabelecer o equilíbrio, isto é, o preço subiria no mercado onde estava sub-estimado e desceria no mercado onde estava sobre-estimado. Assim sendo, se se pretender obter maiores lucros, será preciso correr mais riscos. De facto, não é certo que investindo em activos financeiros tais como acções e opções se obtenha um lucro superior ao de um depósito bancário.

Quando as oportunidades de arbitragem são exploradas, o mercado tende a estabelecer rapidamente o equilíbrio dos preços. Podemos dizer que os arbitragistas contribuem para que as oportunidades de arbitragem sejam de pequena dimensão.

As condições de não-arbitragem traduzem-se, de forma mais prática, em intervalos nos quais os preços dos contratos podem variar sem que se consiga obter lucros sem risco. Desta forma traduz-se o facto de só poder existir lucro quando os ganhos forem superiores aos custos de transacção envolvidos.

O funcionamento eficiente dos mercados organizados baseia-se na inexis-

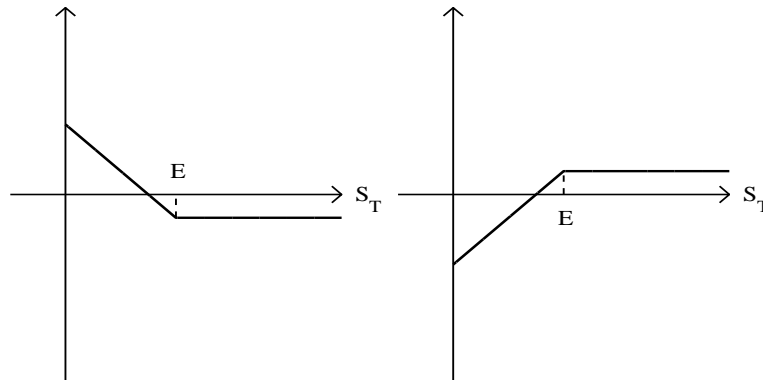


Figura 2.6: Ganhos da opção de venda relativos às posições longa e curta, respectivamente à esquerda e à direita, com inclusão do prémio.

tência de oportunidades de arbitragem. Também os modelos de avaliação de derivados se baseiam nesta premissa. De facto, na prática elas existem apenas durante curtos períodos de tempo e tendem a ser eliminadas com o subsequente movimento de preços.

Apresentamos, a seguir, uma definição informal de arbitragem [29].

Definição 2.2.1 *Uma operação de arbitragem é uma estratégia de transacção que*

- *tem um cash flow inicial positivo e não tem risco de perda no final*

ou que

- *não necessita de cash flow inicial, não tem risco de perda e tem uma probabilidade positiva de gerar lucros no futuro.*

2.3 Modelo de Black-Scholes

Os artigos de Black e Scholes [16] e de Merton [74] permitiram que a teoria de atribuição de preços a opções e outros derivados tivesse um forte desenvolvimento. O modelo que ficou conhecido como modelo de Black-Scholes (BS) pos-

sibilita, de uma forma explícita, atribuir preços a opções. Vamos apresentar, de seguida, os pressupostos que levaram à constituição deste modelo.

Supõe-se que é impossível prever o valor futuro de um activo financeiro subjacente a uma opção europeia, isto é, que o movimento do preço do activo é errático, apresentando um movimento aleatório. O facto dos mercados financeiros incorporarem, imediatamente, qualquer mudança ou informação, relativa ao mercado ou ao activo, sustenta a hipótese de que um activo financeiro apresenta um comportamento aleatório. Supõe-se também que o preço actual do activo incorpora toda a informação passada. Usualmente estas condições são referenciadas como dizendo respeito à hipótese de mercados eficientes.

Consideramos, desta forma, que a variação relativa do retorno do activo subjacente S contém, para além de uma componente determinística, uma componente estocástica. Considera-se, assim, o modelo diferencial estocástico:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (2.2)$$

em que μ representa a deriva (*drift*) e a volatilidade σ está associada ao desvio padrão dos retornos do activo, sendo, por isso, uma medida da incerteza para as variações deste. O termo W_t segue um processo estocástico de Wiener, também designado por movimento Browniano. A equação diferencial estocástica (2.2) é usualmente reescrita na forma:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (2.3)$$

Usando o Lema de Itô [78] prova-se que o processo seguido por uma função $u(S_t, t)$ dependente das variáveis S_t e t obedece à equação diferencial estocástica

$$du(S_t, t) = \left(\frac{\partial u}{\partial S} \mu S_t + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial S} \sigma S_t dW_t, \quad (2.4)$$

em que as derivadas são tomadas em (S_t, t) . Aplicando o Lema de Itô à função $u(S_t, t) = \ln(S_t)$ obtemos

$$d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t. \quad (2.5)$$

Considerando S_0 o preço do activo em $t_0 = 0$, demonstra-se que $\ln(S_t) - \ln(S_0)$ segue uma lei normal¹ $N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma\sqrt{t})$, ou seja,

$$\ln(S_t) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \ln(S_0), \sigma\sqrt{t}\right). \quad (2.6)$$

Desta forma, a função de densidade para $\ln(S_t)$ é a seguinte:

$$u_t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{[x - \ln(S_0) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t]^2}{2\sigma^2 t}}. \quad (2.7)$$

Sabe-se, no entanto, que uma variável aleatória segue uma distribuição lognormal quando o logaritmo natural da variável aleatória apresenta uma distribuição normal. Prova-se, portanto, que a função de densidade seguida por S_t pode ser expressa por:

$$h_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t} [\ln(\frac{x}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t]^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Finalmente, notamos que é frequente denominar o processo seguido por S_t por movimento Browniano geométrico.

2.3.1 Equação diferencial de Black-Scholes

Vamos considerar, agora, os preços dos activos financeiros em estreita ligação com os preços dos derivados e, em particular, com os preços das opções. O desenvolvimento da equação de Black-Scholes para atribuição de preços a opções europeias necessita de mais alguns pressupostos, que apresentamos de seguida.

Em primeiro lugar, supõe-se que o preço de um activo segue um movimento Browniano geométrico. Depois, é permitida a venda a descoberto (*short-selling*), isto é, a venda de activos que não se possuem. Neste caso, o vendedor pode utilizar o resultado da venda para fazer outros investimentos. Não são consideradas oportunidades de arbitragem, no sentido que foi

¹A distribuição normal de média $m \in \mathbb{R}$ e desvio padrão $\sigma > 0$ (ou variância σ^2) é caracterizada pela função de densidade $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. O facto de uma variável aleatória real X seguir esta distribuição representa-se por $X \sim N(m, \sigma)$.

apresentado na Secção 2.2.4. Não existem custos de transacção associados às operações financeiras realizadas. É conhecida uma taxa de juro r , constante e isenta de risco, para o período de vida da opção. Admite-se, ainda, que os activos financeiros são divisíveis, que a negociação dos activos é efectuada continuamente e que não há dividendos relativos ao activo subjacente durante a vida da opção.

Consideremos, então, um activo financeiro cujo preço é modelado pela equação diferencial estocástica (2.3) em que μ e σ são constantes. Vamos considerar que $v(S, t)$ designa o preço de uma opção europeia que depende do preço do activo S e do tempo t e é duas vezes continuamente diferenciável. Consideremos uma carteira Φ constituída da seguinte forma: vende-se a opção e compra-se uma determinada quantidade de activos subjacentes à opção. No momento t , o valor da carteira Φ é dado por

$$\Phi(S, t) = -v(S, t) + \Delta S. \quad (2.9)$$

O desenvolvimento da equação de Black-Scholes faz-se em quatro etapas: (1) aplicação do Lema de Itô [78] à função Φ ; (2) eliminação da componente estocástica na equação diferencial estocástica resultante em (1), através de $\Delta = \frac{\partial v}{\partial S}(S_t, t)$; (3) obtenção de uma equação com derivadas parciais determinística; (4) aplicação do princípio da ausência de arbitragem $\frac{d\Phi}{dt}(S, t) = r\Phi(S, t)$. O resultado final é a seguinte equação com derivadas parciais (linear, de segunda ordem e parabólica)

$$\frac{\partial v}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(S, t) + rS \frac{\partial v}{\partial S}(S, t) - rv(S, t) = 0, \quad (2.10)$$

conhecida por equação com derivadas parciais de Black-Scholes ou de Black-Scholes-Merton. É de notar que o parâmetro μ não aparece na equação. Deduz-se, por isso, que a atribuição de preços a opções não depende da deriva μ . Pelo contrário, a volatilidade σ e a taxa de juro isenta de risco r afectam o preço das opções.

A equação (2.10) reduz-se, por mudanças de variáveis, a uma equação de difusão e admite uma família de soluções. Para determinar soluções particulares é necessário colocar condições de fronteira e condições iniciais ou finais.

No prazo de vencimento T , isto é, na maturidade da opção, o valor de uma opção deve ser dado por

$$C(S, T) = \max(S - E, 0) \quad (2.11)$$

se se tratar de uma opção de compra e por

$$P(S, T) = \max(E - S, 0), \quad (2.12)$$

se se tratar de uma opção de venda. As condições finais (2.11) e (2.12) são essenciais para determinar o preço das opções de compra e venda.

Relativamente às condições de fronteira, consideramos que, para S a tender para 0 a opção de compra deve valer 0 uma vez que não faz sentido pagar uma determinada quantia por algo que não tem valor, isto é,

$$\lim_{S \rightarrow 0^+} C(S, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.13)$$

Se, pelo contrário, o valor do activo tende para $+\infty$ é natural que o valor da opção de compra seja da magnitude de S , isto é, que $\max(S - E, 0) = S - E \approx S$. Descontando à taxa de juro r , obtemos

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} (S - C(S, t)) = Ee^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

No caso de termos uma opção de venda $P(S, t)$, quando consideramos $S = 0$, o ganho, na maturidade, é dado por $\max(E - S, 0) = E$. Assim, o preço da opção de venda deve coincidir com o preço de exercício descontado à taxa de juro constante r :

$$P(0, t) = Ee^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

Por outro lado, se o preço do activo tomar valores muito grandes, $S \rightarrow +\infty$, a opção de venda terá menor probabilidade de ser exercida, isto é,

$$\lim_{S \rightarrow +\infty} P(S, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.16)$$

A equação diferencial (2.10), em que $v(S, t)$ representa agora uma opção de compra $C(S, t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, t) + rS \frac{\partial C}{\partial S}(S, t) - rC(S, t) = 0, \quad (2.17)$$

sujeita à condição final (2.11) e às condições de fronteira (2.13)-(2.14), apresenta a solução analítica

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \quad S > 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.18)$$

em que

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.19)$$

e

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (2.20)$$

A fórmula (2.18)-(2.20) designa-se por fórmula de Black-Scholes para o preço da opção de compra europeia. Poder-se-ia, de forma semelhante, escrever a fórmula de Black-Scholes para o preço das opções de venda europeias, ao resolver a equação de Black-Scholes (2.10) com $v = P$ e sujeita à condição final (2.12) e às condições de fronteira (2.15)-(2.16).

2.3.2 Paridade *put-call*

As opções de compra e venda, *call* e *put* respectivamente, podem combinar-se de modo a estabelecer um equilíbrio entre os seus preços e o preço do activo subjacente. Este equilíbrio, que se designa por paridade *put-call*, determina-se usando argumentos de arbitragem. A paridade *put-call* permite calcular o preço da opção de compra a partir do preço da opção de venda, e vice-versa, desde que sejam conhecidos o preço do activo subjacente e a taxa de juro isenta de risco. Suporemos, ao longo deste trabalho, que esta taxa de juro é constante e com capitalização contínua excepto, quando algo for dito em contrário.

Vamos considerar, para o efeito desta discussão, opções *call* e *put* de tipo europeu, sobre o mesmo activo, admitir que o activo não distribui dividendos e negligenciar os custos de transacção. Formamos, assim, uma carteira que contém uma posição longa numa opção de venda, uma posição curta numa opção de compra e, ainda, uma unidade do activo subjacente. Supomos que as opções têm o mesmo preço de exercício e a mesma maturidade T . Considerando, no instante t , o valor do activo subjacente igual a S , o valor desta

carteira, nesse instante, é dado por

$$\Phi(S, t) = P(S, t) - C(S, t) + S,$$

em que $P(S, t)$ e $C(S, t)$ designam, respectivamente, os valores das opções de venda e de compra. No prazo de vencimento das opções, esta carteira tem o valor E tanto para $S \leq E$ como para $S \geq E$:

$$\begin{aligned} \Phi(S, T) &= \max(E - S, 0) - \max(S - E, 0) + S \\ &= E. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Considerando o princípio da ausência de arbitragem, em qualquer momento t anterior à maturidade, o valor da carteira deverá ser igual ao preço de exercício E descontado à taxa de juro sem risco, isto é, igual a

$$P(S, t) - C(S, t) + S = Ee^{-r(T-t)}. \quad (2.22)$$

Deduzimos, assim, a relação designada por *paridade put-call*. A dedução desta relação baseia-se no princípio da ausência de arbitragem entre os mercados dos activos subjacentes e dos derivados. Assim, o facto desta relação não se verificar implica uma possibilidade de arbitragem.

Se considerarmos um activo subjacente que distribui dividendos, a uma taxa anual q , a relação paridade *put-call* será

$$P(S, t) - C(S, t) + Se^{-q(T-t)} = Ee^{-r(T-t)}. \quad (2.23)$$

As relações (2.22) e (2.23) são apenas válidas para opções de tipo europeu. A sua generalização para opções de tipo americano é mais complicada.

2.3.3 Volatilidade implícita e sorrisos

A volatilidade referente ao activo subjacente é uma medida da dispersão dos preços do activo. Quanto maior for este parâmetro, maior é a possibilidade do preço do activo apresentar variações, e daí que o risco seja também maior.

No modelo de Black-Scholes, a volatilidade é a única variável que não é directamente observável e é suposta constante. Os estudos empíricos [39]

mostram, no entanto, que a volatilidade não é constante. Ela varia, por exemplo, com o valor do activo subjacente, com a maturidade das opções e, por isso, com o tempo. De facto, há um desfasamento entre os preços gerados pelo modelo de BS e os preços de mercado. Desta forma, pode-se determinar o valor da volatilidade, associada ao preço de mercado, ‘invertendo’ a fórmula de BS e ajustando-a aos dados. O valor assim calculado para a volatilidade designa-se por *volatilidade implícita*. Ou seja, considerando a fórmula de BS e especificando a taxa de juro isenta de risco r , o valor do activo S , a distância $(T - t)$ à maturidade T , o preço de exercício E e o preço da opção C é possível obter a volatilidade implícita associada a C resolvendo em σ a equação:

$$C(S, t; E, \sigma) = C.$$

No contexto teórico de Black-Scholes a volatilidade implícita deveria ser representada por uma linha recta horizontal (representando σ) mas, como foi referido, esta abordagem não acompanha a realidade dos mercados. Considerando, por exemplo, um conjunto de preços referentes às opções C_1, \dots, C_n , de tipo europeu, relativas ao mesmo activo subjacente, com diferentes preços de exercício, $E_1 < \dots < E_n$, cuja distância à maturidade é $T - t$, e invertendo a fórmula de BS obtemos um conjunto de valores para a volatilidade $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, ou seja, as respectivas volatilidades implícitas. O seu gráfico, em função do preço de exercício, apresenta um traçado usualmente designado por *sorriso da volatilidade*.

O comportamento da volatilidade, ou seja, o seu *sorriso*, pode variar com o tipo de activo subjacente e também com o tempo. Por exemplo o *sorriso* para opções de compra sobre mercadorias é diferente do *sorriso* para opções de compra sobre índices de acções. Concretamente, verifica-se que, para índices de acções, a volatilidade implícita decresce quando o preço de exercício sobe.

Se considerarmos os valores da volatilidade implícita para um conjunto de preços de opções, sobre o mesmo activo, com diferentes preços de exercício e diferentes maturidades podemos, também, observar a sua evolução temporal. A modelação do comportamento da volatilidade assume uma importância determinante no contexto da atribuição de preços a opções pois permite estabelecer o preço para outras opções sobre esse activo.

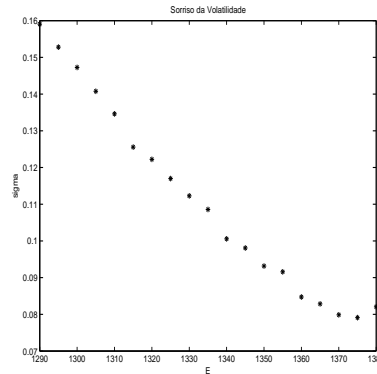


Figura 2.7: Sorriso da volatilidade para preços de opções relativos ao índice S&P500.

Torna-se, por isso, determinante a obtenção de um processo eficaz de estimação da volatilidade. Foram muitas as abordagens, propostas até agora, para estimar este parâmetro (algumas descritas em [65] e [45]). Assim, uma das possibilidades é alterar o modelo de Black-Scholes no sentido de se considerar a volatilidade como função do tempo e do activo subjacente. Outra possibilidade é considerar a volatilidade como uma variável estocástica. Nesta abordagem podemos ter duas variáveis estocásticas, uma relativa ao preço do activo outra relativa à sua volatilidade. Foram ainda apresentados modelos que propõem, para a variação do preço do activo subjacente, um processo de Wiener e ainda um processo de Poisson. Este último é responsável pela introdução de saltos no preço do activo subjacente. A Secção 3, nomeadamente a Subsecção 3.1.1 ilustra, de uma forma mais geral, as diferentes abordagens do problema.

2.4 Neutralidade face ao risco

A atribuição de preços a opções segundo a teoria de Black-Scholes não faz uso da deriva μ . De facto, as preferências dos investidores face ao risco não são tidas em conta dado que o risco associado à opção pode ser teoricamente

eliminado (a componente estocástica é eliminada na dedução da equação diferencial de BS). Neste caso, considera-se que os investidores são neutrais face ao risco. Como observaram Cox e Ross [31], a fórmula de BS pode ser deduzida, também, supondo que os investidores são neutrais face ao risco.

2.4.1 Risco neutral

Nesta abordagem supõe-se que a taxa de juro isenta de risco é válida para todos os activos, isto é, o retorno esperado para qualquer activo é a taxa de juro sem risco, uma vez que não são necessárias compensações por correr riscos. Neste caso, o valor da opção de compra europeia, sobre um activo que não paga dividendos, pode ser estabelecido como sendo o valor esperado do ganho futuro na maturidade, descontado à taxa de juro sem risco r , ou seja,

$$C(S, t) = e^{-r(T-t)} \hat{E}[\max(S_T - E, 0)], \quad (2.24)$$

em que $\hat{E}(\cdot)$ designa o valor esperado, de uma variável aleatória, num ambiente de neutralidade face ao risco, S é o valor determinístico do activo a considerar no instante t e S_T é a variável aleatória que descreve o comportamento do activo na maturidade da opção. O resultado seguinte permite desenvolver a fórmula (2.24).

Proposição 2.4.1 *Seja R uma variável aleatória a seguir uma distribuição lognormal. Então*

$$E[\max(R - E, 0)] = E(R)N(d_1) - EN(d_2),$$

em que $E(\cdot)$ representa o valor esperado de uma variável aleatória, N é a função de distribuição de uma lei de probabilidade normal com média 0 e desvio padrão 1, isto é,

$$\begin{aligned} N(d_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_i} e^{-\frac{1}{2}q^2} dq, \quad i = 1, 2, \\ d_1 &= \frac{\ln\left[\frac{E(R)}{E}\right] + \frac{p^2}{2}}{p}, \\ d_2 &= \frac{\ln\left[\frac{E(R)}{E}\right] - \frac{p^2}{2}}{p}, \end{aligned}$$

e p é o desvio padrão de $\ln(R)$.

Considerando, agora, a variável aleatória S_T a seguir uma lei lognormal com função de densidade (2.8) (em que t é substituído por $T - t$ e S_0 por S) e a hipótese de neutralidade face ao risco (em que a deriva μ é substituída pela taxa de juro isenta de risco r) temos que

$$\hat{E}(S_T) = Se^{r(T-t)}.$$

De acordo com o que foi apresentado anteriormente em (2.24) e utilizando a Proposição 2.4.1 com $R = S_T$, vem que

$$\begin{aligned} C(S, t) &= e^{-r(T-t)} \hat{E}[\max(S_T - E, 0)] \\ &= e^{-r(T-t)} (Se^{r(T-t)} N(d_1) - EN(d_2)) \\ &= SN(d_1) - e^{-r(T-t)} EN(d_2) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{\hat{E}(S_T)}{E}) + \frac{p^2}{2}}{p} = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln(\frac{\hat{E}(S_T)}{E}) - \frac{p^2}{2}}{p} = \frac{\ln(\frac{S}{E}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{aligned}$$

Obtém-se, assim, a fórmula de Black-Scholes.

2.4.2 Distribuição (implícita) de risco neutro

Quando consideramos, num ambiente de neutralidade face ao risco, que o preço actual de um activo é igual ao valor esperado dos ganhos futuros descontado à taxa de juro sem risco, supomos que existe uma medida de probabilidade que permite o cálculo do valor esperado. Designamos esta medida por medida de probabilidade de risco neutro.

Consideremos que existem n activos cujos preços actuais são dados por $S_0^i, i = 1, \dots, n$. No fim do período $[t, T]$ a economia atingirá um dos estados ω do espaço dos estados Ω . O ganho do activo i , no fim do período, será representado por $S_1^i(\omega)$. Suporemos que se conhecem todos S_0^i e $S_1^i(\omega)$ mas que se desconhece o estado ω que se irá atingir, sendo este encontrado de forma aleatória. Como exemplo, podemos considerar um determinado activo subjacente, que pode ser uma acção ou um índice, e um derivado que pode

ser uma opção financeira sobre o activo subjacente. Neste caso, Ω designa o espaço dos estados para o preço terminal do activo subjacente e $S_1^i(\omega)$ designa o ganho, referente à opção i , quando na maturidade o estado atingido pelo activo subjacente for ω . Se a opção for de compra e de tipo europeu, com preço de exercício E_i e maturidade T , então $S_1^i(\omega) = (\omega - E_i)^+$.

Vamos apresentar uma definição de trabalho para a medida de probabilidade de risco neutro.

Definição 2.4.2 *Consideremos uma economia com as características apresentadas anteriormente. Seja r a taxa de juro isenta de risco no período $[t, T]$. Uma medida de probabilidade de risco neutro no*

- **caso discreto** sobre o espaço dos estados $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ é definida por um vector de números positivos (p_1, p_2, \dots, p_m) tal que

1. $\sum_{j=1}^m p_j = 1$
2. $S_0^i = e^{-r(T-t)} \sum_{j=1}^m p_j S_1^i(\omega_j), i = 1, \dots, n;$

- **caso contínuo** e sobre o espaço dos estados $\Omega = (a, b)$ é definida por uma função de densidade $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

1. $\int_a^b p(\omega) d\omega = 1,$
2. $S_0^i = e^{-r(T-t)} \int_a^b p(\omega) S_1^i(\omega) d\omega, \quad i = 1, \dots, n.$

A existência desta medida de probabilidade de risco neutro está relacionada com a ausência de oportunidades de arbitragem. De acordo com a definição de arbitragem dada em (2.2.4) podemos enunciar o seguinte teorema [37].

Teorema 2.4.3 *Uma medida de probabilidade de risco neutro existe se e só se não existirem oportunidades de arbitragem.*

Se conhecermos uma medida de probabilidade de risco neutro, relativa aos estados futuros de um determinado activo subjacente, podemos estabelecer o preço de um activo derivado, cujos ganhos futuros dependam do activo e passem, desta forma, a ser conhecidos. Supondo que as oportunidades de arbitragem não existem, garante-se a existência de uma medida de probabilidade de risco neutro.

Do ponto de vista do investidor que assume uma posição longa numa opção de compra e supondo que se conhece a função de densidade de risco neutro, a aba direita terá mais interesse do que a aba esquerda, uma vez que se obtém lucros quando $S_T > E$. Por sua vez, quem compra uma opção de venda está mais interessado na aba esquerda da função de densidade pois quando $S_T > E$ a opção não é exercida.

Uma questão relevante que se coloca é saber como estimar esta medida de probabilidade. Consideremos um cenário em que se tem um conjunto de derivados sobre um activo subjacente. Pretendemos calcular a medida de probabilidade de risco neutro para o preço do activo subjacente numa data futura fixa. Dado que os ganhos dos derivados dependem dos valores futuros do activo subjacente, é possível usar os preços desses derivados para obter informação acerca da distribuição de probabilidade para os valores futuros desse activo subjacente. Trata-se de obter a distribuição de probabilidade implícita nos preços dos derivados, sendo por isso comum designá-la por distribuição implícita. Se os preços dos derivados não proporcionarem oportunidades de arbitragem então a distribuição implícita é, também, uma distribuição de risco neutro.

Capítulo 3

Métodos para estimação das funções de densidade de risco neutro

Existem variados métodos para a estimação da função de densidade de risco neutro, consoante a abordagem escolhida. Assim, podemos ter métodos estruturados, que se baseiam em pressupostos relativos ao processo seguido pelo activo subjacente, e que apresentam um número limitado de parâmetros — os métodos paramétricos. Podemos, por outro lado, ter outro tipo de métodos, que apresentam uma maior flexibilidade e não supõem pressupostos tão fortes para o processo relativo ao activo subjacente — métodos não-paramétricos. Há, ainda, outros métodos cujas características se situam entre um grupo e outro — designamo-los por métodos semi-paramétricos.

Breeden e Litzenberger [20] apresentaram um resultado importante usado na estimação das funções de densidade. Estes autores mostraram que a segunda derivada da função preço da opção está relacionada com a função de densidade de risco neutro, relativa ao activo subjacente, na maturidade do contrato de opções. Concretamente, se considerarmos opções de compra, com

preços dependentes do preço de exercício, tem-se que

$$C(E) = e^{-r(T-t)} \int_E^{+\infty} p(S_T)(S_T - E)^+ dS_T,$$

e a função de densidade $p(S_T)$, relativa ao activo subjacente à opção, é dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial E^2} C(E) = e^{-r(T-t)} p(S_T). \quad (3.1)$$

3.1 Métodos paramétricos

Os métodos paramétricos supõem um determinado processo estocástico para o activo subjacente que, por sua vez, determina a função de densidade de risco neutro, isto é, estes métodos definem a evolução do preço do activo. Em alternativa, estes métodos podem considerar, directamente, uma determinada estrutura para a função de densidade de risco neutro.

3.1.1 Métodos aplicados ao processo estocástico seguido pelo activo subjacente

O modelo paramétrico mais conhecido é, certamente, o de Black e Scholes (BS) também designado por modelo de Black, Scholes e Merton, como foi referido na Secção 2.3. Este modelo assenta numa distribuição lognormal para o preço do activo subjacente.

A existência do sorriso da volatilidade traduz o facto do modelo de BS não se adequar aos dados relativos aos preços de opções no mercado. Para explicar este desfasamento surgiram novos modelos, alternativos ao movimento Browniano geométrico. O modelo de elasticidade constante da variância (Cox e Ross [31]), num ambiente de neutralidade face ao risco, pressupõe que o processo relativo ao preço do activo subjacente obedece à equação diferencial estocástica

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma S_t^{\alpha-1} dW_t,$$

em que r é a taxa de juro isenta de risco, q é a taxa de dividendo do activo, W_t segue um processo de Wiener, σ é um parâmetro de volatilidade e α é uma

constante positiva. A volatilidade para o preço do activo subjacente é medida, neste caso, por $\sigma S_t^{\alpha-1}$.

Quando $\alpha = 1$, este modelo reduz-se ao modelo de Black-Scholes. Para $\alpha < 1$, a volatilidade cresce à medida que o preço do activo decresce, o que se traduz, em termos de distribuição de probabilidade, numa cauda esquerda mais pesada e numa cauda direita mais leve do que a lognormal. Para $\alpha > 1$, a volatilidade cresce à medida que o preço do activo cresce, originando, assim, uma distribuição de probabilidade com uma cauda direita pesada e uma cauda esquerda mais leve.

Os modelos com saltos constituem uma outra abordagem e são uma alternativa aos processos de difusão nos quais se considera que a trajectória do preço do activo subjacente é contínua. Estes modelos contemplam a existência de saltos, com uma determinada amplitude, nos preços dos activos subjacentes, tal como apresentado, por exemplo, em Cox e Ross [31], nomeadamente através de

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + (k - 1)d\Pi_t,$$

em que Π_t segue um processo de Poisson e $k - 1$ representa a amplitude do salto.

Outra abordagem consiste em considerar modelos de difusão com saltos. Estes modelos foram inicialmente propostos por Merton [74] e, para além de suporem que a variação do preço activo é modelada por um processo de Wiener, consideram um processo de Poisson responsável pela introdução dos saltos. As distribuições de probabilidade, associadas a este modelo, têm caudas mais pesadas do que as obtidas pelo modelo de BS. Bates [10] aplicou um modelo deste tipo para analisar o *crash* bolsista de 1987.

Hull e White [57] e Heston [51] propuseram modelos baseados no facto da volatilidade variar de forma estocástica. Enquanto que no modelo

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma(t, S)dW_t$$

se supõe que a volatilidade é uma função determinística, dependente do activo e do tempo, estes autores consideram o modelo com volatilidade estocástica,

isto é, passa a haver duas variáveis estocásticas que são o preço do activo e a sua volatilidade. Hull e White [57] propuseram um modelo com volatilidade estocástica para o preço do activo na forma:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (r - q)dt + \sqrt{V_t}dW_t^s, \\ dV_t &= a(V_L - V_t)dt + \xi V_t^\alpha dW_t^V,\end{aligned}$$

em que a , V_L , ξ e α são constantes e W_t^s e W_t^L são processos de Wiener. A variável V_t é a taxa de variância para o activo subjacente. Estes modelos produzem preços consistentes com determinados sorrisos da volatilidade, ou seja, em determinadas circunstâncias adequam-se aos sorrisos observados no mercado.

3.1.2 Métodos aplicados à função de densidade de risco neutro

No âmbito desta classe de métodos, Ritchey [82] propôs uma abordagem baseada na mistura de funções de densidade normais, enquanto Bahra [9] e Mellick e Thomas [73] foram os pioneiros na abordagem da mistura de densidades lognormais.

Os preços das opções europeias podem ser representados como o valor esperado dos ganhos futuros descontado à taxa de juro sem risco, ou seja, é possível escrever

$$\begin{aligned}C_E(z) &= e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} p_z(S_T)(S_T - E)^+ dS_T, \\ P_E(z) &= e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} p_z(S_T)(E - S_T)^+ dS_T,\end{aligned}$$

para, respectivamente, opções de compra e de venda, em que, agora, S_T representa uma variável real. As expressões $C_E(z)$ e $P_E(z)$ designam, de facto, os preços destas opções com preço de exercício E , no momento t . A variável z designa um vector que representa informação sobre as distribuições consideradas. A função de densidade de risco neutro $p_z(S_T)$ depende de outras quantidades, como por exemplo, T , S_t , t , no entanto, por simplicidade, escrevemo-la apenas como função de S_T .

Se tivermos, por exemplo, uma mistura de duas densidades lognormais então o vector z é composto por 5 parâmetros: a média e o desvio padrão das leis normais associadas a cada uma delas e o peso correspondente à sua combinação linear. Designamos estes parâmetros por $(\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Neste caso, a função de densidade da mistura toma a forma

$$p_z(S_T) = \gamma \text{logn}(S_T; \alpha_1, \beta_1) + (1 - \gamma) \text{logn}(S_T; \alpha_2, \beta_2), \quad \gamma \in [0, 1], \quad (3.2)$$

em que, como vimos em (2.8), e para $S_T > 0$,

$$\text{logn}(S_T; \alpha, \beta) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\beta}} e^{-\frac{(\ln(S_T) - \alpha)^2}{2\beta^2}}. \quad (3.3)$$

Conhecidos dados de mercado para um conjunto de opções, os parâmetros das densidades lognormais podem ser obtidos minimizando a seguinte função:

$$E(z) = \sum_{E \in \mathcal{C}} [C_E - C_E(z)]^2 + \sum_{E \in \mathcal{P}} [P_E - P_E(z)]^2, \quad (3.4)$$

em que \mathcal{C} e \mathcal{P} são, respectivamente, os conjuntos de preços de exercício relativos às opções de compra e às opções de venda, e C_E e P_E são os preços observados. A função $E(z)$ mede o ajuste aos preços reais utilizando mínimos quadrados.

Usando a função de densidade de risco neutro e na ausência de oportunidades de arbitragem, o preço *forward* para o activo subjacente deve ser igual ao valor esperado para o preço do activo, isto é,

$$e^{r(T-t)} S_t = E(S_T) = \gamma e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} + (1 - \gamma) e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2}.$$

Esta restrição condiciona o ajuste anterior, dando lugar ao seguinte problema de mínimos quadrados com restrições:

$$\min_z E(z) \text{ s.a. } e^{r(T-t)} S_t = \gamma e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} + (1 - \gamma) e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2}. \quad (3.5)$$

Acrescente-se que a técnica da mistura de densidades lognormais tem sido explorada por outros autores tais como Aparício e Hodges [6], Bliss e Panigirtzoglou [17] e Bondarenko [18].

Os autores Jarrow e Rudd [64], Corrado e Sue [30], Longstaff [69] e Rubinstein [86] propuseram uma extensão ao modelo de BS, de modo a captar o efeito

do sorriso da volatilidade, envolvendo a distribuição para o activo subjacente. Desta forma, propuseram uma fórmula para preços de opções, baseada numa aproximação para a distribuição do activo subjacente. Assim sendo, a função de densidade de risco neutro é aproximada considerando um desenvolvimento de Edgeworth. Trata-se de uma estratégia semelhante à aproximação de uma função por um polinómio de Taylor. No caso do desenvolvimento de Edgeworth é usada uma função de densidade base, que pode ser, por exemplo, a densidade normal ou a lognormal, e à qual se adicionam termos correctores. Estes termos permitem uma maior variedade de formas, para a função de densidade e, por isso, permitem captar as características das distribuições implícitas. Esta aproximação para a função de densidade depende de vários parâmetros, que são estimados estabelecendo um ajuste entre os preços calculados usando esta aproximação para a função de densidade e os preços observados. Depois disso, a função de densidade é obtida derivando duas vezes a função de preço para as opções em relação ao preço de exercício. Note-se que as aproximações para as funções de densidade obtidas por este processo podem resultar em valores negativos.

Uma abordagem semelhante consiste em estabelecer uma fórmula para a função de densidade, baseada em polinómios de Hermite (ver Abken, Madan e Ramamurtie [2] e Madan e Milne [70]). Estes polinómios aproximam a função de densidade de risco neutro a partir, por exemplo, da função de densidade normal, permitindo estabelecer uma correcção para a densidade normal na medida em que se obtém uma expressão mais geral. A partir desta expressão obtém-se a função para o preço das opções. O ajuste entre os preços obtidos a partir desta expressão e os preços observados permite determinar os parâmetros relativos à função de densidade.

Rosenberg [84] aproxima a distribuição de risco neutro considerando que a densidade é representada por uma densidade lognormal $\text{logn}(S_T; \alpha, \beta)$, em que β deixa de ser um parâmetro real para ser substituído por uma representação funcional parametrizada por vários parâmetros, $\theta_1, \dots, \theta_n$. Garante-se, assim, que a função de densidade possa obter várias formas. Considera-se,

então, $\gamma \log n(S_T; \alpha, \beta(\theta_1, \dots, \theta_n))$ sendo

$$\beta(\theta_1, \dots, \theta_n) = e^{\theta_1 + \theta_2 \ln(S_T/S_t) + \theta_3 (\ln(S_T/S_t))^2 + \dots + \theta_n (\ln(S_T/S_t))^{n-1}}$$

e γ um parâmetro real de escalonamento. Os preços teóricos são calculados usando esta densidade e os parâmetros $\gamma, \alpha, \theta_1, \dots, \theta_n$ são calculados minimizando o ajuste entre os preços de mercado e os preços teóricos no sentido dos mínimos quadrados.

3.2 Métodos semi-paramétricos

Estes métodos caracterizam-se pelo facto de terem semelhanças com os métodos paramétricos e com os não-paramétricos. O seu número de parâmetros é, regra geral, maior que o dos métodos paramétricos mas não tão elevado como o dos métodos não-paramétricos. Abadir e Rockinger [1] e Bondarenko [18] apresentam métodos que possuem estas características.

Abadir e Rockinger [1], usando o resultado (3.1), apresentado por Breeden e Litzenberger [20], estabeleceram uma abordagem para a estimação da função de densidade considerando uma função geral, dependente de um conjunto de parâmetros, que define uma função para o preço da opção de compra, $C(E)$. A segunda derivada desta função geral permite representar uma família variada de densidades como, por exemplo, a densidade normal ou uma mistura de densidades. A estimação da função $C(E)$ faz-se recorrendo a um ajuste entre os preços das opções representados desta forma e os preços observados. Nesta estimação, é usado, por exemplo, um problema de mínimos quadrados para a determinação dos parâmetros.

Bondarenko [18] propõe a construção de um conjunto de funções de densidade admissíveis, escolhendo, depois, a que melhor se ajusta ao conjunto de dados relativos aos preços de opções. Estas funções de densidade são construídas a partir de uma função de densidade base ϕ , também designada por função núcleo (*kernel*), usando o operador convolução para duas funções. Esta função base pode ser, por exemplo, a função de densidade da distribuição normal. Assim, se designarmos por L^d um conjunto geral de densidades, incluindo

algumas com significado económico pouco claro, e por $\phi_b \in L^d$ a função de densidade base, o conjunto das funções de densidade admissíveis define-se por

$$J = \{g \in L^d : g = \phi_b * h, h \in L^d\},$$

em que $f * g = \int f(x-y)g(y)dy$ com f e g funções integráveis. A função de densidade óptima é obtida integrando duas vezes estas funções de densidade e estabelecendo um ajuste, no sentido dos mínimos quadrados, aos preços observados. Note-se que esta abordagem tem um número de parâmetros limitado, geralmente situado entre 20 e 30.

3.3 Métodos não-paramétricos

Os métodos paramétricos dependem fortemente da especificação do modelo. Se as condições paramétricas do modelo de Black e Scholes não se verificarem, como é o caso, por exemplo, da volatilidade poder variar com o preço do activo e com o tempo, então a fórmula de Black-Scholes já não se verifica. Sendo assim, pode ser vantajoso considerar um estimador que não pressuponha condições rígidas para o comportamento do activo ou da função de densidade. Um estimador não-paramétrico poderá ter mais facilidade em obter preços que estejam de acordo com a realidade dos mercados. Os modelos não-paramétricos são, por isso, mais flexíveis, embora apresentem como desvantagem o facto de, usualmente, necessitarem de grandes quantidades de dados.

3.3.1 Métodos aplicados ao sorriso da volatilidade

De acordo com a fórmula (3.1), se tivermos uma função para o preço das opções de compra podemos derivá-la duas vezes de modo a obter a função de densidade de risco neutro. De facto, se pudéssemos calcular o valor do preço da opção de compra para cada preço de exercício E a variar em \mathbb{R}^+ então, derivando duas vezes em relação a E , obteríamos a função de densidade de risco neutro. No entanto, os preços observados no mercado dizem apenas respeito a um conjunto discreto de preços de exercício. Assim, para definir a

função para o preço da opção pode usar-se uma técnica de interpolação dos preços observados, no entanto, na prática esta técnica produz maus resultados, pelo que é necessário procurar alternativas.

Shimko [88] apresenta um método baseado em interpolação. Em vez de interpolar os preços das opções directamente, este autor propôs interpolar as volatilidades implícitas. Primeiro, obtém as volatilidades implícitas relativas a um conjunto de preços de opções com diferentes preços de exercício e a mesma maturidade. Depois, estabelece uma interpolação destes valores considerando que a função de volatilidade é representada por uma função quadrática, dentro do intervalo dos preços de exercício. A escolha da função quadrática deve-se à constatação de que as volatilidades implícitas podem ter uma forma semelhante à de uma parábola. Esta função é estimada considerando um problema de mínimos quadrados. Seguidamente, obtém uma função para o preço da opção de compra, usando a fórmula de Black-Scholes, em que a volatilidade é representada pela função quadrática estimada. Por fim, deriva duas vezes esta função, em relação ao preço de exercício, obtendo uma expressão analítica para a função de densidade no intervalo dos preços de exercício. Fora deste intervalo, Shimko [88] supõe que a volatilidade é constante, ou seja, a função de densidade escolhida é a lognormal. Note-se que a fórmula de Black-Scholes serve apenas como calculadora para as volatilidades implícitas, não se impondo os pressupostos do modelo de Black-Scholes.

Malz [71] propôs algumas alterações à técnica apresentada por Shimko [88]. Sabendo que o delta de uma opção europeia é a taxa de variação do preço da opção em relação ao preço do activo subjacente ($\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$), Malz [71] estabelece uma correspondência entre as volatilidades implícitas e os deltas das opções. Sugere, assim, um polinómio quadrático para descrever o comportamento das volatilidades estabelecidas em relação aos deltas dos preços das opções.

Aparicio e Hodges [6] aproximam a função de volatilidade considerando o uso de funções *spline* (ver Apêndice A.1). Este enquadramento garante a suavidade suficiente para descrever a volatilidade e uma boa capacidade de ajuste aos preços das opções, alargando, também, o leque de formas que a

função de densidade pode tomar. Fora dos intervalos dos preços de exercício, procuram uma distribuição que lhes permita obter caudas mais pesadas do que as da distribuição lognormal. Para este efeito, recorrem à distribuição de Ramberg, que é uma generalização da distribuição Lambda. As distribuições obtidas por estes autores, relativas ao período anterior à queda da Bolsa de 1987, eram semelhantes à distribuição lognormal enquanto que as obtidas referente ao período posterior a 1987 são mais enviesadas à esquerda e com caudas mais pesadas.

Campa, Chang e Reider [25], depois de recolherem as volatilidades implícitas relativas às opções sobre taxas de câmbio, estabelecem uma interpolação para as volatilidades baseada em funções *spline* cúbicas. Fora do domínio observado, estendem, à esquerda, o primeiro polinómio obtido e, à direita, o último polinómio obtido. Fora deste intervalo consideram a distribuição normal.

Jackwerth [62] procura uma distribuição de risco neutro, suficientemente suave, que esteja de acordo com os preços de opções. Assim, estabelece uma discretização S_j , $j = 1, \dots, m$, para o preço do activo de modo que os preços de exercício observados E_i , correspondentes aos preços das opções, coincidam com algum dos valores da discretização do preço do activo, isto é, $i \in K \subset \{1, \dots, m\}$. Depois de calcular as volatilidades implícitas $\bar{\sigma}_i$, $i \in K$, procura um estimador para a função de volatilidade que seja suave e que estabeleça um ajuste a essas volatilidades. Para obter suavidade, este autor considera uma aproximação, por diferenças finitas, à segunda derivada da função de volatilidade:

$$(1-p) \sum_{j=1}^m \omega (\sigma_{j-1} - 2\sigma_j + \sigma_{j+1})^2 + p \sum_{i \in K} \left(\frac{\sigma_i - \bar{\sigma}_i}{\mu_i} \right),$$

em que p é um parâmetro real, ω e μ_i , $i \in K$, são pesos aplicados à função, σ_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, representa a volatilidade associada ao preço de exercício $E_j = S_j$ e σ_0 e σ_{m+1} são constantes. Depois de resolver o problema envolvendo a minimização desta função, calculam-se os preços das opções usando a fórmula de Black-Scholes. Seguidamente, deriva-se duas vezes a função do preço, de modo a obter a função de densidade de risco neutro.

O método seguido por Bliss e Panigirtzoglou [17] segue, por um lado, a abordagem proposta por Malz [71], em que as volatilidades implícitas são relacionadas com os deltas das opções. Mas, por outro lado, e tal como Campa, Chang e Reider [25], usa uma função *spline* para aproximar a função de volatilidade. Depois de calculados os parâmetros da função *spline*, são calculados os valores dos preços das opções relativamente ao preço de exercício E . Seguidamente, usam-se estes valores para calcular a função de densidade de risco neutro. Bliss e Panigirtzoglou [17] mostraram que este método é superior ao método da mistura de duas densidades lognormais.

Dado que nestas abordagens a função relativa à volatilidade é apenas calculada dentro do intervalo definido pelo menor e maior preços de exercício, resulta que, fora deste intervalo, a função de volatilidade é desconhecida. Brunner e Hafner [22] propõem um método aplicado ao sorriso da volatilidade em que, para o intervalo definido pelos preços de exercício, consideram uma função *spline* cúbica. Fora deste intervalo consideram uma mistura de duas distribuições lognormais. Dependendo da amplitude do intervalo dos preços de exercício, este método dará um maior peso relativo à estimação do sorriso ou à mistura das distribuições lognormais. Estes autores estabelecem, ainda, uma evolução temporal para a função de volatilidade. Acrescente-se, ainda, que outros autores, tais como, Brown e Toft [21] usam as funções *spline* como aproximação para a função de volatilidade.

Uma outra abordagem consiste em discretizar a superfície relativa à volatilidade, usando uma malha relativa ao tempo e ao espaço. Para calcular o preço das opções são usados métodos numéricos, como por exemplo métodos das diferenças finitas, ou outros mais elaborados. Dumas, Fleming e Whaley [39] estabelecem uma interpolação para os valores da volatilidade implícita associados aos preços de mercado. Para captar a variação da volatilidade, relativamente ao preço do activo e ao tempo, consideram quer uma função linear quer outra quadrática, em relação às duas variáveis. Depois de especificar a função de volatilidade, estimam os seus parâmetros considerando o melhor ajuste, no sentido dos mínimos quadrados, entre os preços de mercado e os preços fornecidos pelo modelo, envolvendo a função de volatilidade escolhida. Estes

autores obtiveram funções de densidade com enviesamento à esquerda, que é o oposto do assumido pelo modelo de Black-Scholes. Lagnado e Osher [67] e Crépey [33] usam um abordagem semelhante e requerem, adicionalmente, que a função referente à volatilidade seja suave. Coleman, Li e Verma [27], seguindo igualmente esta abordagem, usam funções *spline* bicúbicas para oferecer a suavidade suficiente à função de volatilidade. Também Jackson, Süli e Howison [59] propõem uma parametrização por funções *spline* para a função de volatilidade.

Tal como foi referido por [18] e [22] não há garantia de que os métodos aplicados ao sorriso da volatilidade produzam funções de densidade não negativas.

3.3.2 Métodos de árvore

Um método de árvore, como o apresentado por Cox, Ross e Rubinstein [32] e por Rubinstein [85], determina as probabilidades de risco neutro P_j , $j = 1, \dots, m$, associadas aos valores discretizados para o preço do activo subjacente S_j , $j = 1, \dots, m$. Trata-se de um método em que os valores obtidos para as probabilidades podem ser negativos exigindo, desta forma, que se verifiquem, *a posteriori*, todas as soluções obtidas.

Este método processa-se em três fases. Primeiro escolhe-se o conjunto de valores S_j , $j = 1, \dots, m$, para o preço do activo subjacente. Depois são atribuídos valores às probabilidades associadas a cada um dos valores S_j . Estas probabilidades são calculadas de acordo com a árvore binomial apresentada por Cox, Ross e Rubinstein [32], e estão de acordo com as volatilidades implícitas calculadas para opções de compra próximas da região *at-the-money*. Finalmente, as probabilidades de risco neutro P_j , são obtidas resolvendo o seguinte problema,

$$\begin{aligned}
 \min_{P_j} \quad & \sum_{j=1}^m (P_j - P_j')^2 \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^m P_j = 1, \\
 & P_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\
 & S_t = e^{-r\tau} \sum_{j=1}^m S_j P_j, \\
 & C_i = e^{-r\tau} \sum_{j=1}^m P_j (S_j - K_i)^+, \quad i = 1, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que N é o número de preços de opções e K_i é o preço de exercício correspondente à opção C_i . O preço do activo S_t e as opções C_i são obtidos recorrendo a essas probabilidades.

No limite, à medida que o número de opções se torna muito grande os valores obtidos para P_j tornam-se independentes da escolha das probabilidades P'_j , feita *a priori*. Rubinstein [85] aplicou este método a dados do índice S&P500 e encontrou densidades de risco neutro bimodais.

Jackwerth [60] desenvolve o modelo de Rubinstein [85] no sentido de incorporar informação relativa, por exemplo, a preços de opções que podem ser exercidas durante um determinado período ou a diferentes tipos de opções, como, por exemplo, as exóticas.

Derman e Kani [35] apresentaram uma árvore binomial alternativa, em que podem ser incorporadas opções com diferentes maturidades. Neste método torna-se necessário efectuar a interpolação e extrapolação dos preços observados. Dupire [40] segue uma árvore trinomial com uma abordagem semelhante à apresentada por Derman e Kani [35].

3.3.3 Métodos com funções de núcleo

Nos métodos com funções de núcleo (também conhecidos por métodos do núcleo) considera-se que cada ponto (observação) de uma determinada amostra pode ser representado por uma função designada por núcleo. Uma determinada função pode ser aproximada considerando uma média pesada de observações relativas a essa função. Suponhamos, por exemplo, que temos observações correspondentes às volatilidades implícitas σ_i , $i = 1, \dots, n$, referentes a vários preços de exercício E_i . Neste caso, a estimação com funções núcleo $k(x)$, em dimensão um, será dada por,

$$\sigma(E) = \frac{\sum_{i=1}^n k\left(\frac{E-E_i}{h}\right)\sigma_i}{\sum_{i=1}^n k\left(\frac{E-E_i}{h}\right)}. \quad (3.7)$$

Assim, a função de volatilidade no ponto E é dada pela média pesada das volatilidades observadas σ_i , $i = 1, \dots, n$.

Usualmente, são escolhidas como núcleo funções de densidade de probabilidade, sendo muito comum a escolha da função de densidade da lei normal

padrão, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.5x^2}$. Note-se que, relativamente à função $\sigma(E)$, quanto mais afastado o ponto E_i estiver de E menor será o peso da observação σ_i no valor da função. Os pesos considerados para cada observação devem tender para zero à medida que consideramos pontos do domínio da função afastados das observações E_i , $i = 1, \dots, n$. A escolha da dimensão da vizinhança, regulada por h , $h \in \mathbb{R}$, na qual as observações são relevantes controla a suavidade da função $\sigma(E)$ e é fundamental para a sua estimação. Como foi referido anteriormente, todas as observações σ_i correspondentes a E_i , $i = 1, \dots, n$, têm um peso de acordo com a proximidade de E_i ao ponto E . Sendo assim, cada observação σ_i , $i = 1, \dots, n$, está relacionada com uma região na qual a função que pretendemos estimar estará situada. Estes métodos têm, porém, o inconveniente de necessitarem de grandes quantidades de dados.

Aït-Sahalia e Lo [3] propuseram uma estimação para a função de densidade baseada no desenvolvimento de uma função para o preço das opções. O estimador usado considera cinco dimensões: preço do activo subjacente, preço de exercício, prazo até à maturidade, taxa de juro e taxa de dividendo. Estes autores consideram também, um estimador para a volatilidade, com três dimensões relativas ao preço do activo subjacente, preço de exercício e prazo até à maturidade. O seu objectivo é minimizar a distância, no sentido dos mínimos quadrados, entre o preço observado da opção e o preço teórico dependente de um determinado conjunto de parâmetros. A função de densidade de risco neutro é obtida, depois, derivando este estimador óptimo duas vezes em relação ao preço de exercício.

Considerando que a função de volatilidade depende do tempo t e da variável $\frac{S_t}{E}$, em que S_t representa o preço do activo e E o preço de exercício, Rookley [83] faz a estimação da função de volatilidade usando um estimador em duas dimensões. A função de densidade de risco neutro é obtida, também, calculando a segunda derivada da função dos preços em ordem ao preço de exercício. Finalmente, Pritsker [81] usa a estimação com funções núcleo para obter funções de densidade de risco neutro para taxas de juro.

3.3.4 Métodos de regularização da função de densidade

Estes métodos procuram estimar a distribuição de probabilidade directamente, a partir dos preços das opções, sem estabelecer uma forma específica para essa distribuição.

Jackwerth e Rubinstein [63] sugeriram vários métodos para determinar as probabilidades que minimizam uma função objectivo, sujeita à restrição de que os preços das opções sejam correctamente obtidos. Estes autores propõem um problema, envolvendo a minimização de uma função objectivo, que pode tomar diferentes formas. Os valores para as probabilidades P'_j , $j = 1, \dots, n$, propostos *a priori*, são dados do problema. No final do processo, procura-se obter os valores P_j resultantes do problema de minimização. As funções objectivo podem ser variadas:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{(P_j - P'_j)^2}{P'_j}, \\ & \sum_{j=1}^n |P_j - P'_j|, \\ & - \sum_{j=1}^n P_j \ln \left(\frac{P_j}{P'_j} \right), \end{aligned}$$

No entanto, estes autores verificaram que, tendo um conjunto pequeno (8 a 12) de preços de opções, os resultados são semelhantes quando se consideram estas diferentes funções objectivo. É proposta, ainda, uma função objectivo que se propõe minimizar a curvatura da distribuição de probabilidade, minimizando a aproximação por diferenças finitas à sua segunda derivada:

$$\sum_{j=1}^n (P_{j-1} - 2P_j + P_{j+1})^2,$$

em que $P_0 = 0$ e $P_{n+1} = 0$. Procura-se, tal como anteriormente, que as probabilidades obtidas recuperem o valor dos preços das opções e do activo, que a sua soma seja igual a 1 e, ainda, que não tomem valores negativos.

Mayhew [72] utiliza funções *spline* para estimar a função de densidade de risco neutro. O método pode ser usado para estimar a função densidade

directamente, ou para interpolar os preços das opções. Neste último caso, a função de densidade obtém-se calculando a segunda derivada da função para o preço da opção em relação ao preço de exercício. Assim, é proposta uma parametrização da função de densidade envolvendo funções spline. Os parâmetros são calculados resolvendo um sistema de equações não lineares, referentes às restrições sobre os preços das opções (estes devem ser obtidos usando a função densidade), e referentes às restrições de continuidade sobre a função *spline* e suas derivadas.

3.3.5 Métodos de entropia máxima

Estes métodos usam uma formulação baseada no princípio da entropia máxima. Juntando a esta formulação dados referentes ao activo subjacente, tais como preços de opções sobre o activo, taxas de juro e taxas de dividendo, é obtida a medida de probabilidade de risco neutro para o activo. Nesta abordagem é introduzida uma medida para quantificar a incerteza associada a uma distribuição de probabilidade. Esta medida pode ser expressa por:

$$S(p) = - \int_0^{+\infty} p(x) \ln(p(x)) dx, \quad (3.8)$$

sendo $p(x)$ a função de densidade associada àquela distribuição de probabilidade. Butchen e Kelly [23] maximizam a função (3.8), sujeita a restrições que garantam o facto de $p(x)$ ser uma função de densidade de probabilidade, nomeadamente, $p(x) \geq 0$, $\int_0^{+\infty} p(x) dx = 1$ e, ainda, que garantam o facto dos preços das opções serem iguais ao valor esperado do ganho futuro descontado à taxa de juro sem risco.

Butchen e Kelly [23] e Stutzer [89] apresentam, ainda, uma extensão da formulação anterior para este problema. Assim sendo, considerando uma função de densidade *a priori*, baseada nos dados de preços de opções, é obtida a função de densidade de risco neutro de modo a minimizar a distância entre as duas.

Avellaneda, Friedman, Homes e Samperi [7] generalizaram o método de entropia de um período temporal, apresentado por Butchen e Kelly [23] e Stutzer [89], para uma abordagem com vários períodos temporais. Cont e

Tankov [28] utilizam, também, uma abordagem baseada no método da entropia no contexto de modelos mistos com saltos e difusão.

3.3.6 Métodos com redes neuronais

Os métodos com redes neuronais não estipulam um processo para o activo subjacente, antes propõem funções que se adequem, de forma flexível, aos dados relativos aos preços de opções. As funções utilizadas caracterizam-se pelo facto de aproximarem, eficazmente, uma grande classe de funções lineares e não lineares. Estas funções são, por isso, adequadas para a estimação das funções de preços de opções, cujas fórmulas analíticas conhecidas são não lineares.

O objectivo é construir um modelo que determine as relações entre as variáveis, através da observação dos dados de mercado. A flexibilidade das funções utilizadas é devida ao uso de funções simples, tal como $\frac{1}{1+e^{-x}}$, que é estritamente crescente e em termos gráficos estabelece um equilíbrio entre um comportamento linear e não-linear.

Concretamente, os autores Hutchinson Lo e Poggio [58] consideram que a função para o preço de uma opção $f(S_t, E, \tau)$ depende do preço do activo S_t , do preço de exercício E e da distância à maturidade τ . Consideram, ainda, que esta função deverá ser suave em relação aos seus argumentos. Com vista à redução do número de variáveis tomam $\frac{S_t}{E}$ e $\frac{E}{E}$, em vez de S_t e E , supondo, desta forma, que a função depende apenas de duas variáveis: $f(\frac{S_t}{E}, 1, \tau)$. Garcia e Gençay [44] tomaram a função proposta por Hutchinson Lo e Poggio [58], distinguindo duas partes, uma que depende de $\frac{S_t}{E}$ e outra que depende de τ . Para cada uma destas partes, é proposta uma função, com estrutura semelhante, dependendo de $\frac{S_t}{E}$ e de τ separadamente. A estimação dos parâmetros da função faz-se resolvendo um problema de mínimos quadrados não lineares, resultante do ajuste entre os preços definidos pela função proposta e os dados relativos aos preços de opções. A função densidade de risco neutro é obtida calculando a segunda derivada da função para o preço da opção, em relação ao preço de exercício.

No âmbito das redes neuronais, Gottschling, Haefke e White [47] sugeri-

ram uma família de densidades que possui uma fórmula analítica para as suas primitivas. Primitivando duas vezes a função de densidade obtemos uma expressão analítica fechada para o preço de opções europeias. Depois de obter esta fórmula, a estimação dos parâmetros faz-se resolvendo um problema de mínimos quadrados não lineares, que estabelece um ajuste com os dados relativos aos preços das opções.

Capítulo 4

Métodos para estimação das funções de densidade usando programação quadrática e semidefinida

4.1 Dados do problema

Consideremos uma economia em que os activos são enquadrados num horizonte temporal que medeia entre o momento inicial e o momento final, ou seja, uma economia de um único período. Designamos o momento inicial do período por t e o momento final por T .

De acordo com a exposição feita na Subsecção 2.4.2, suponhamos que existem, por exemplo, n derivados cujos preços designaremos por V_0^i , $i = 1, \dots, n$. O ganho $V_1^i(\omega)$ referente a estes derivados depende do estado ω que a economia atingir no momento T . Os preços V_0^i são todos conhecidos, mas desconhece-se o estado ω a atingir.

Concretamente, podemos considerar um activo subjacente, como por exemplo uma determinada acção ou um índice de acções, e n derivados que podem ser opções financeiras sobre o activo subjacente. Neste caso, Ω designa

o espaço dos estados para o preço do activo subjacente no final do contrato e $V_1^i(\omega)$ designa o ganho referente à opção i , $i = 1, \dots, n$.

Para enquadrar e definir o nosso problema precisamos de conhecer os dados do mercado que a ele dizem respeito. Depois de escolher o activo subjacente, temos de escolher os derivados, isto é, fixar o seu prazo de vencimento, ou seja, a sua maturidade, assim como o conjunto de preços de exercício. Desta forma, fixamos um conjunto de opções de compra e de venda, relativas ao activo subjacente. Designamos por \mathcal{C} e \mathcal{P} o conjunto de preços de exercício E para os quais existem preços de opções C_E e P_E , respectivamente, de compra e venda. Devemos definir, ainda, o intervalo $[a, b]$, que contenha os possíveis estados finais para o preço do activo na data de vencimento, e uma taxa de juro r , isenta de risco, para o período entre o instante inicial e a maturidade, com capitalização contínua.

4.2 Formulação do problema de programação quadrática

O processo de estimação da função de densidade de risco neutro deve assegurar uma suavidade suficiente para esta função. Assim sendo, vamos construir esta aproximação usando funções *spline*. As funções *spline* são flexíveis e capazes de fornecer um bom ajuste aos dados.

Um problema típico, em interpolação por *splines*, consiste em determinar uma função $g(x)$ que se ajuste a um determinado conjunto de dados. Estes dados são compostos pelos valores da variável independente x_s , $s = 1, \dots, n_s$, e pelos valores correspondentes da variável dependente y_s , $s = 1, \dots, n_s$. Usualmente, a estimação consiste em determinar uma função *spline* $g(x)$, num determinado intervalo $[a, b]$, de modo a minimizar

$$\sum_{s=1}^{n_s} \theta_s (y_s - g(x_s))^2. \quad (4.1)$$

Os pesos θ_s pretendem medir a precisão dos dados — quando não há essa informação considera-se simplesmente $\theta_s = 1$.

No entanto, o problema da estimação da função de densidade de risco neutro é distinto uma vez que os valores da função de densidade nos nós não são conhecidos. Neste caso, o resíduo a minimizar é calculado através da diferença entre o preço teórico da opção, que depende da expressão da função de densidade de risco neutro, e o preço observado.

Existem funções *spline* de várias ordens, no entanto, as funções *spline* cúbicas fornecem um bom equilíbrio entre eficiência, traduzida por exemplo num reduzido tempo computacional, e a qualidade do ajuste. A escolha dos nós da função *spline* e do seu número é delicada e depende do problema considerado.

Relativamente ao nosso problema, escolhemos funções *spline* cúbicas (ver o Apêndice A.1 desta dissertação). Estas funções envolvem polinómios cúbicos da forma $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$. Escolhe-se o intervalo $[a, b]$ de modo a conter os possíveis valores futuros para o activo subjacente. Este intervalo é discretizado considerando um conjunto de valores $x_s, s = 1, \dots, n_s + 1$, designado por nós, em que $x_1 = a$ e $x_{n_s+1} = b$. Para cada intervalo $[x_s, x_{s+1}]$, a função de densidade de risco neutro é aproximada pelo polinómio cúbico $\alpha_s x^3 + \beta_s x^2 + \gamma_s x + \delta_s, s = 1, \dots, n_s$. Dado que uma função *spline* cúbica tem derivadas contínuas até à segunda ordem em cada nó interior e que consideramos uma função *spline* natural, a função *spline* que procuramos verifica as condições:

$$f_{s-1}(x_s) = f_s(x_s), \quad s = 2, \dots, n_s, \quad (4.2)$$

$$f'_{s-1}(x_s) = f'_s(x_s), \quad s = 2, \dots, n_s, \quad (4.3)$$

$$f''_{s-1}(x_s) = f''_s(x_s), \quad s = 2, \dots, n_s, \quad (4.4)$$

$$f''_1(x_1) = 0 \text{ e } f''_{n_s}(x_{n_s+1}) = 0. \quad (4.5)$$

Vamos, a seguir, formular o problema de optimização com o qual pretendemos determinar a função de densidade de risco neutro para os valores futuros do activo subjacente. Utilizaremos funções *spline* cúbicas e procuraremos um bom ajuste aos preços observados. Para estabelecer a aproximação por funções *spline* precisamos de escolher o número de nós e a sua localização. Os parâmetros das funções polinomiais $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s), s = 1, \dots, n_s$, que compõem

a função *spline* cúbica, são as variáveis do problema de optimização. Considerando funções *spline* cúbicas e $n_s + 1$ nós, teremos $4n_s$ variáveis que iremos representar por $y \in \mathbb{R}^{4n_s}$. Vamos designar por $p_y(\cdot)$ a função *spline* cúbica que representa a aproximação para a função de densidade de risco neutro. Note-se que não imporemos directamente as restrições (A.2) do Apêndice A.1 uma vez que, no nosso caso, os valores da função de densidade são desconhecidos e constituem o resultado ou solução do problema de optimização.

4.2.1 Função objectivo

O valor esperado para o preço terminal da opção, com preço de exercício E , descontado à taxa de juro sem risco r é, de acordo com Breeden e Litzenberger [20],

$$C_E = e^{-r(T-t)} \int_{\Omega} p(\omega)(\omega - E)^+ d\omega, \quad (4.6)$$

$$P_E = e^{-r(T-t)} \int_{\Omega} p(\omega)(E - \omega)^+ d\omega, \quad (4.7)$$

sendo $p(\omega)$ a função de densidade de risco neutro. Se considerarmos a aproximação p_y para a função de densidade de risco neutro, definida em $\Omega = [a, b]$, os valores esperados passam a ser:

$$C_E(y) = e^{-r(T-t)} \int_a^b p_y(\omega)(\omega - E)^+ d\omega, \quad (4.8)$$

$$P_E(y) = e^{-r(T-t)} \int_a^b p_y(\omega)(E - \omega)^+ d\omega, \quad (4.9)$$

isto é, trata-se dos preços de opções, fornecidos pelo modelo, considerando p_y como a função de densidade de risco neutro. Designando por C_E e P_E os preços observados, relativos ao preço de exercício E , então a quantidade

$$[C_E - C_E(y)]^2$$

é uma medida possível para a diferença entre o valor observado e o valor teórico. A função erro, referente ao resíduo total, é dada pela função de mínimos quadrados para um determinado valor de y :

$$E(y) = \sum_{E \in \mathcal{C}} [C_E - C_E(y)]^2 + \sum_{E \in \mathcal{P}} [P_E - P_E(y)]^2. \quad (4.10)$$

Vamos analisar, em maior pormenor, esta função objectivo. Seja C_E o preço de uma opção de compra com preço de exercício E , tal que $x_\ell \leq E \leq x_{\ell+1}$, para um dado ℓ em $\{1, \dots, n_s\}$. Note-se que os nós escolhidos são $x_1 = a, x_2, \dots, x_{n_s}, x_{n_s+1} = b$ e, ainda, que os preços de exercício podem ou não coincidir com os nós. Dado que y designa o conjunto das variáveis $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s)$, $s = 1, \dots, n_s$, o valor aproximado para a opção de compra $C_E(y)$ pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& e^{r(T-t)} C_E(y) \\
&= \int_a^b p_y(\omega)(\omega - E)^+ d\omega \\
&= \sum_{j=\ell}^{n_s} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_y(\omega)(\omega - E)^+ d\omega \\
&= \int_E^{x_{\ell+1}} p_y(\omega)(\omega - E) d\omega + \sum_{j=\ell+1}^{n_s} \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_y(\omega)(\omega - E) d\omega \\
&= \int_E^{x_{\ell+1}} (\alpha_\ell \omega^3 + \beta_\ell \omega^2 + \gamma_\ell \omega + \delta_\ell) (\omega - E) d\omega + \\
&\quad \sum_{j=\ell+1}^{n_s} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\alpha_j \omega^3 + \beta_j \omega^2 + \gamma_j \omega + \delta_j) (\omega - E) d\omega. \\
&= \int_E^{x_{\ell+1}} (\alpha_\ell \omega^4 + (\beta_\ell - E\alpha_\ell) \omega^3 + (\gamma_\ell - E\beta_\ell) \omega^2 + \\
&\quad (\delta_\ell - E\gamma_\ell) \omega - \delta_\ell E) d\omega + \\
&\quad \sum_{j=\ell+1}^{n_s} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\alpha_j \omega^4 + (\beta_j - E\alpha_j) \omega^3 + (\gamma_j - E\beta_j) \omega^2 + \\
&\quad (\delta_j - E\gamma_j) \omega - \delta_j E) d\omega \\
&= \left(\alpha_\ell \left(\frac{x_{\ell+1}^5}{5} - \frac{E^5}{5} \right) + (\beta_\ell - E\alpha_\ell) \left(\frac{x_{\ell+1}^4}{4} - \frac{E^4}{4} \right) + \right. \\
&\quad \left. (\gamma_\ell - E\beta_\ell) \left(\frac{x_{\ell+1}^3}{3} - \frac{E^3}{3} \right) + (\delta_\ell - E\gamma_\ell) \left(\frac{x_{\ell+1}^2}{2} - \frac{E^2}{2} \right) - \delta_\ell E(x_{\ell+1} - E) \right) +
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=\ell+1}^{n_s} \left(\alpha_j \left(\frac{x_{j+1}^5}{5} - \frac{x_j^5}{5} \right) + (\beta_j - E\alpha_j) \left(\frac{x_{j+1}^4}{4} - \frac{x_j^4}{4} \right) + \right. \\ \left. (\gamma_j - E\beta_j) \left(\frac{x_{j+1}^3}{3} - \frac{x_j^3}{3} \right) + (\delta_j - E\gamma_j) \left(\frac{x_{j+1}^2}{2} - \frac{x_j^2}{2} \right) - \delta_j E(x_{j+1} - x_j) \right). \quad (4.11)$$

Podemos afirmar, assim, que $C_E(y)$ é uma função linear nas variáveis y do problema, e que o mesmo se passa com $P_E(y)$. Desta forma, podemos concluir que a função objectivo $E(y)$ em (4.10) é quadrática.

4.2.2 Restrições do problema

Dado que pretendemos aproximar uma função de densidade, deveremos impor a não negatividade para essa aproximação. Assim, se $p_y(\cdot)$ designar, como anteriormente, essa aproximação, teremos

$$p_y(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in [a, b].$$

Uma das possibilidades de abordagem desta restrição é relaxá-la e considerar que a função *spline* cúbica é apenas não negativa em cada um dos nós x_s , $s = 1, \dots, n_s + 1$:

$$f_s(x_s) \geq 0, \quad s = 1, \dots, n_s + 1 \quad \text{e} \quad f_{n_s}(x_{n_s+1}) \geq 0. \quad (4.12)$$

Por outro lado, o integral da função de densidade, considerado em $\Omega = [a, b]$, deverá ser igual a um:

$$\int_a^b p_y(\omega) d\omega = 1.$$

Esta restrição pode ser facilmente discretizada considerando

$$\sum_{s=1}^{n_s} \int_{x_s}^{x_{s+1}} f_s(\omega) d\omega = 1. \quad (4.13)$$

As restrições (4.12) e (4.13) são lineares em relação às variáveis do problema $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s)$, $s = 1, \dots, n_s$. Vimos, anteriormente, que a função *spline* cúbica tem, por definição, derivadas contínuas até à segunda ordem em cada nó e

vimos ainda que se consideram funções *spline* naturais. Estas características são traduzidas pelas condições (4.2)–(4.5). Estas condições representam, igualmente, restrições lineares em relação às variáveis do problema pelo que todas as restrições do problema, consideradas até agora, são lineares.

O problema de optimização resultante tem uma função objectivo quadrática, como vimos na Subsecção 4.2.1, e todas as restrições são lineares. Trata-se, por isso, de um problema convexo de programação quadrática (QP) descrito na forma:

$$\min_y E(y) \text{ s.a } (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.12), (4.13). \quad (4.14)$$

Os problemas de programação quadrática são brevemente analisados no Apêndice A.3.

Ao assegurar a não negatividade da função *spline* cúbica em cada um dos nós poderemos estar a permitir que a função *spline* tome valores negativos entre os nós. Registe-se, no entanto, que esta abordagem foi suficiente para obter densidades de risco neutro não negativas na maior parte das simulações numéricas feitas.

Ao considerar o problema (4.14), a relação entre o número de estados pertencente ao espaço dos estados Ω e o número de preços observados torna-se importante. Se o primeiro for muito superior ao segundo então será necessário refazer o equilíbrio ou introduzir mais alguma informação, de modo a obter uma solução aceitável para o problema.

4.3 Reformulação do problema usando programação semidefinida e cónica

A estimação da função de densidade de risco neutro com garantia de não negatividade nos nós pode não ser sempre a estratégia adequada. Apresentamos, de seguida, um modelo alternativo em que a não negatividade da função de densidade de risco neutro estimada é sempre alcançada.

Para conseguir esse objectivo usamos um resultado, apresentado por Bertsimas e Popescu [13], que oferece condições necessárias e suficientes de não

negatividade para um polinómio, dependente de uma variável, num determinado intervalo.

Proposição 4.3.1 (Bertsimas e Popescu [13, Proposição 1 (d)]) *O polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^k y_r x^r$ verifica a condição $g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, se e só se existir uma matriz semidefinida positiva $X = [x_{ij}]_{i,j=0,\dots,k}$, tal que:*

$$\sum_{i,j:i+j=2\ell-1} x_{ij} = 0, \quad \ell = 1, \dots, k, \quad (4.15)$$

$$\sum_{i,j:i+j=2\ell} x_{ij} = \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{r=m}^{k+m-\ell} y_r \binom{r}{m} \binom{k-r}{\ell-m} a^{r-m} b^m, \quad (4.16)$$

$$\ell = 0, \dots, k, \quad (4.17)$$

$$X \succeq 0. \quad (4.18)$$

Nesta proposição a notação $\binom{r}{m}$ designa $\frac{r!}{m!(r-m)!}$.

Concretamente, para o polinómio cúbico $f_s(x) = \alpha_s x^3 + \beta_s x^2 + \gamma_s x + \delta_s$ a restrição de não negatividade é garantida pelo seguinte corolário:

Corolário 4.3.2 *O polinómio $f_s(x) = \alpha_s x^3 + \beta_s x^2 + \gamma_s x + \delta_s$ verifica a condição $f_s(x) \geq 0$, para todo $x \in [x_s, x_{s+1}]$ se e só se existir uma matriz quadrada, de ordem 4, $X^s = [x_{ij}^s]_{i,j=0,\dots,3}$ tal que*

$$\begin{aligned} x_{ij}^s &= 0, \text{ se } i+j \text{ for } 1 \text{ ou } 5, \\ x_{03}^s + x_{12}^s + x_{21}^s + x_{30}^s &= 0, \\ x_{00}^s &= \alpha_s x_s^3 + \beta_s x_s^2 + \gamma_s x_s + \delta_s, \\ x_{02}^s + x_{11}^s + x_{20}^s &= 3\alpha_s x_s^2 x_{s+1} + \beta_s (2x_s x_{s+1} + x_s^2) \\ &\quad + \gamma_s (x_{s+1} + 2x_s) + 3\delta_s, \\ x_{13}^s + x_{22}^s + x_{31}^s &= 3\alpha_s x_s x_{s+1}^2 + \beta_s (2x_s x_{s+1} + x_{s+1}^2) \\ &\quad + \gamma_s (x_s + 2x_{s+1}) + 3\delta_s, \\ x_{33}^s &= \alpha_s x_{s+1}^3 + \beta_s x_{s+1}^2 + \gamma_s x_{s+1} + \delta_s, \\ X^s &\succeq 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Note-se que o facto da matriz X^s ser semidefinida positiva implica que $x_{00}^s \geq 0$, o que corresponde à condição $f_s(x_s) \geq 0$ formulada para o problema QP.

Constata-se, assim, que as restrições de não negatividade para o problema QP estão incluídas nestas restrições.

De acordo com este corolário, se introduzirmos as variáveis semidefinidas positivas X^s e as restrições (4.19) na formulação do problema anterior, obteremos um novo problema de otimização. Este problema fornecerá uma função de densidade de risco neutro não negativa em todo o domínio:

$$\min_{y, X^1, \dots, X^{n_s}} E(y) \text{ s.a. (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.13), [(4.19), } s = 1, \dots, n_s]. \quad (4.20)$$

A classe de problemas de programação semidefinida é abordada, brevemente, no Apêndice A.4. O problema (4.20) possui uma função objectivo que depende apenas das variáveis $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s)$, $s = 1, \dots, n_s$, representadas por $y \in \mathbb{R}^{4n_s}$. Trata-se de uma função objectivo de mínimos quadrados lineares que podemos escrever na forma:

$$E(y) = (f - Gy)^\top (f - Gy) = \|f - Gy\|^2,$$

com $G \in \mathbb{R}^{n \times 4n_s}$ e $f \in \mathbb{R}^n$ (supondo que n é o número de preços observados), ou, ainda, na forma

$$d + c^\top y + \frac{1}{2} y^\top Q y$$

sendo $d \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^{4n_s}$ e $Q \in \mathbb{R}^{4n_s \times 4n_s}$.

Vamos apresentar todas as restrições do problema (4.20) e, com mais detalhe, as novas restrições. As condições (4.2)–(4.5) e (4.13) referem-se, como vimos, a restrições de igualdade, que são lineares a respeito das variáveis $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s)$, $s = 1, \dots, n_s$ do problema. Temos, por isso, $3n_s$ restrições lineares de igualdade que podemos representar na forma:

$$f_i^\top y = b_i, i = 1, \dots, 3n_s, \quad f_i \in \mathbb{R}^{4n_s} \text{ e } b_i \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

As novas restrições do problema (4.20) resultaram da introdução das condições (4.19) do Corolário 4.3.2. As três primeiras restrições do Corolário 4.3.2 envolvem apenas restrições SDP, isto é, podem escrever-se na forma:

$$H_k^s \bullet X^s = 0, k = 1, 2, 3, s = 1, \dots, n_s, \text{ em que } H_k^s \in S^4.$$

Note-se que S^4 designa o subespaço das matrizes reais simétricas de ordem 4 e o símbolo \bullet o produto interno (A.21). As restantes restrições envolvem restrições SDP e restrições lineares nas variáveis $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s)$. São, por isso, restrições mistas, que se podem representar na forma:

$$(g_k^s)^\top y + H_k^s \bullet X^s = 0, k = 4, 5, 6, 7, s = 1, \dots, n_s, \quad g_k^s \in \mathbb{R}^{4n_s}, H_k^s \in S^4.$$

Por fim, juntamos as variáveis SDP:

$$X^s \succeq 0, s = 1, \dots, n_s,$$

em que $X^s \succeq 0$ indica que X^s é uma matriz semidefinida positiva. O nosso problema pode escrever-se, por isso, na forma

$$\begin{aligned} \min_{y, X^1, \dots, X^{n_s}} \quad & c^\top y + \frac{1}{2} y^\top Q y \\ \text{s.a.} \quad & f_i^\top y = b_i, \quad i = 1, \dots, 3n_s, \\ & H_k^s \bullet X^s = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad s = 1, \dots, n_s, \\ & (g_k^s)^\top y + H_k^s \bullet X^s = 0, \quad k = 4, 5, 6, 7, \quad s = 1, \dots, n_s, \\ & X^s \succeq 0, \quad s = 1, \dots, n_s, \end{aligned} \tag{4.22}$$

Todas as restrições deste problema, à excepção das restrições semidefinidas positivas $X^s \succeq 0, s = 1, \dots, n_s$, são lineares em relação às variáveis $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s)$, $s = 1, \dots, n_s$, e às variáveis $X^s, s = 1, \dots, n_s$. As restrições semidefinidas positivas são convexas, daí que possamos afirmar que o problema de programação semidefinida é convexo com uma função objectivo quadrática.

O *software* disponível para programação semidefinida resolve apenas problemas com funções objectivo lineares. Uma vez que a função objectivo do problema (4.22) é quadrática em y torna-se necessário reformulá-lo. A reformulação é feita de modo a obter um problema de programação cónica de segunda ordem (SOCP) como se ilustra no parágrafo seguinte.

Consideremos um problema de optimização cuja função objectivo é quadrática: $r^\top y + \frac{1}{2} y^\top A y$, em que $r, y \in \mathbb{R}^{4n_s}$ e a matriz $A \in \mathbb{R}^{4n_s \times 4n_s}$ é definida positiva. Vamos obter um problema equivalente, substituindo a função objectivo por uma função linear. Para isso consideramos uma nova variável $t \in \mathbb{R}$

e impomos que

$$t \geq r^\top y + \frac{1}{2} y^\top A y. \quad (4.23)$$

Esta condição pode ser considerada na forma de restrição cónica de segunda ordem. De facto, como a matriz A é definida positiva, existe uma matriz invertível P que satisfaz $A = PP^\top$ (basta considerar a decomposição de Cholesky da matriz) e a função objectivo toma a forma

$$\frac{1}{2} (P^\top y)^\top (P^\top y) + r^\top y.$$

Definimos uma nova variável $z = (z_1, \dots, z_n)^\top$ tal que

$$z = P^\top y + P^{-1}r. \quad (4.24)$$

Se impusermos $t \geq \|z\|$ obtemos,

$$\begin{aligned} t \geq \|z\| &\iff (\text{supondo } t \geq 0) \\ &t^2 \geq \|z\|^2 \iff \\ t^2 \geq (y^\top P + r^\top (P^{-1})^\top) (P^\top y + P^{-1}r) &\iff \\ t^2 \geq y^\top A y + 2r^\top y + r^\top A^{-1}r & \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{t^2 - r^\top A^{-1}r}{2} \geq r^\top y + \frac{1}{2} y^\top A y. \quad (4.25)$$

Como t^2 é uma função monótona (supondo $t \geq 0$) e $r^\top A^{-1}r$ é constante, minimizar $\frac{t^2 - r^\top A^{-1}r}{2}$ é equivalente a minimizar t . Ou seja, minimizar t sujeito a (4.23) é equivalente a minimizar t sujeito a (4.25).

Note-se que, se impusemos que (t, z) pertença ao cone de segunda ordem $C_q = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4n_s} : t \geq \|z\|\}$, estamos a impor uma restrição cónica de segunda ordem (ver Apêndice A.4).

Assim, obtivemos um problema de programação cónica, mais concretamente de programação cónica de segunda ordem. Vamos, desta forma, procu-

rar adequar o nosso problema de modo a poder ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}
& \min_{y, X^1, \dots, X^{n_s}, t, z} && t \\
& \text{s.a} && f_i^\top y = b_i, \quad i = 1, \dots, 3n_s, \\
& && H_k^s \bullet X^s = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad s = 1, \dots, n_s, \\
& && (g_k^s)^\top y + H_k^s \bullet X^s = 0, \quad k = 4, 5, 6, 7, \quad s = 1, \dots, n_s, \\
& && z - P^\top y = P^{-1}r, \\
& && X^s \succeq 0, \quad s = 1, \dots, n_s, \\
& && (t, z) \in C_q.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Esta formulação pode ser resolvida, de forma eficiente, usando *software* para problemas de programação cônica de segunda ordem.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Foi feito um estudo numérico da estimação da função de densidade de risco neutro através das duas abordagens apresentadas anteriormente, baseadas, respectivamente, na resolução dos problemas formulados em (4.14) e (4.20), o último na forma (4.26). O desempenho das duas abordagens foi testado em dois conjuntos de dados e comparado com a abordagem da mistura de densidades lognormais (ver Secção 3.1.2). O primeiro conjunto refere-se a dados gerados de acordo com o modelo de Black-Scholes, enquanto o segundo diz respeito a dados de mercado extraídos da cotação de opções sobre o índice *S&P500*.

A matriz Hessiana do problema (4.14), que coincide com a do problema (4.20), apresenta elementos com ordens de grandeza muito diferentes. De facto, como se pode ver pela expressão (4.11), os termos $C_E(y)$ da função objectivo incluem potências, até à ordem 5, dos valores dos nós x_j , $j = 1, \dots, n_s + 1$. Esta ocorrência torna a matriz Hessiana do problema QP mal condicionada, o que origina um problema mal-condicionado. Para atenuar os efeitos deste mau condicionamento, efectuou-se um escalonamento dos problemas (4.14) e (4.20), resolvendo-se numericamente versões escalonadas equivalentes. Como factor de escalonamento, escolhemos o valor médio das componentes do vector dos nós, que designamos por x_{avg} . De facto, o intervalo no qual varia o preço do activo subjacente é determinante para a ordem de grandeza dos elementos da matriz Hessiana. Cada nó x_s , $s = 1, \dots, n_s + 1$, é escalonado usando x_{avg}

e, assim sendo, é substituído por $x'_s = x_s/x_{avg}$. Desta forma, as variáveis $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s)$, ou seja, os coeficientes das funções *spline*, são escalonadas respectivamente por a, b, c, d , cujos valores dependem de x_{avg} e das expressões de integração presentes em (4.11). Multiplicámos, ainda, cada termo da função objectivo dos problemas por $1/x_{avg}^2$. Depois de resolver o problema em relação às variáveis escalonadas $(\alpha'_s, \beta'_s, \gamma'_s, \delta'_s)$, $s = 1, \dots, n_s$, a solução inicial é recuperada considerando $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s) = (a\alpha'_s, b\beta'_s, c\gamma'_s, d\delta'_s)$, $s = 1, \dots, n_s$.

5.1 Dados simulados de preços de opções

Para o primeiro conjunto de dados gerámos dados relativos a preços de opções de acordo com a fórmula de Black-Scholes, usando, para o efeito, a função `blsprice` pertencente à *Financial Toolbox* do MATLAB. Para gerar os preços de opções precisamos de estabelecer o valor actual para o activo subjacente, o preço de exercício da opção, a taxa de juro isenta de risco, o prazo de vencimento da opção, o valor da volatilidade e a taxa de dividendo. Mais precisamente, considerámos que o valor actual para o activo subjacente é 50, a taxa de juro isenta de risco é 10%, o prazo de vencimento das opções é meio ano, a volatilidade é 20% e a taxa de dividendo é nula. Considerámos 20 preços de opções de compra cujos preços de exercício, igualmente espaçados, variam de 30 a 70. A função de densidade de risco neutro, que corresponde a estes preços é conhecida e a sua expressão $p(S_T) = \text{logn}(S_T; \alpha, \beta)$ dada por (3.3), em que α e β são dados por $\beta = \sigma\sqrt{T-t}$ e $\alpha = \ln(S_t) + \mu(T-t) - \frac{1}{2}\beta^2$, sendo $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $T-t = 0.5$ e $S_t = 50$. Esta função está representada a cheio nos gráficos da Figura 5.1.

Resolvemos os problemas (4.14) e (4.20) com o escalonamento referido anteriormente. Considerámos 25 nós, igualmente espaçados, variando entre 25 e 85. Os gráficos com as estimações da função de densidade de risco neutro, para as abordagens QP e SDP, estão representados, a tracejado, na Figura 5.1. Como se pode ver pelo gráfico, há um ajuste praticamente perfeito entre a função de densidade lognormal e as estimações obtidas. A matriz Hessiana referente aos problemas (4.14) e (4.20) é, de acordo com a formulação dos

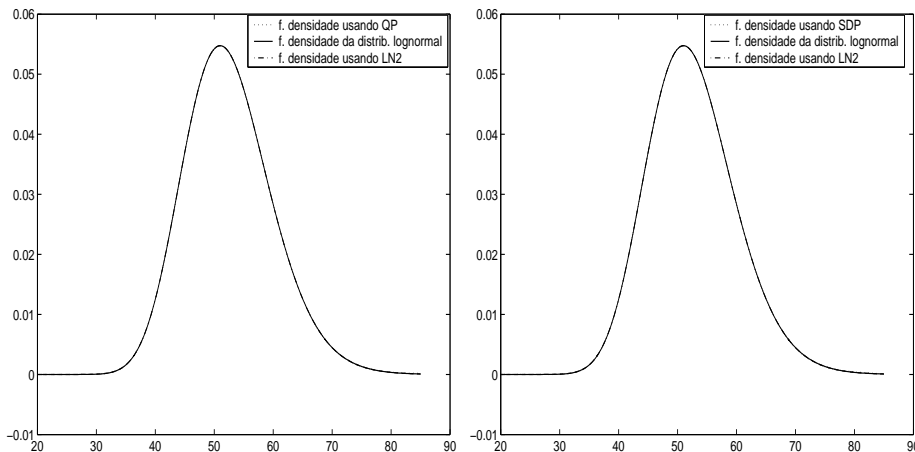


Figura 5.1: Estimação da função de densidade de risco neutro, a partir de dados de Black-Scholes, usando as abordagens QP, SDP e LN2.

problemas, semidefinida positiva. No entanto, devido a erros de arredondamento e ao facto da sua característica ser muito inferior à sua ordem, ela apresenta valores próprios negativos com ordens de grandeza muito baixas, do tipo 10^{-19} . Estes valores próprios negativos revelaram-se nefastos para o desempenho do método de restrições activas utilizado pelo MATLAB. O escalonamento feito às variáveis do problema reduziu drasticamente o mau condicionamento da matriz, o que permitiu o cálculo um pouco mais preciso dos valores próprios. Adicionalmente, modificámos a matriz Hessiana (H) usando $H + \xi I$ com $\xi = |\lambda_{min}|$ em que $|\lambda_{min}|$ é o menor valor próprio de H . Esta perturbação permitiu obter uma matriz Hessiana que, numericamente, é definida positiva (apesar de, teoricamente, ter um valor próprio nulo). Na abordagem SDP, este valor atribuído a ξ não garante uma matriz definida positiva, pelo que teve de ser aumentado para $\xi = |\lambda_{min}|10^3$.

Os gráficos da Figura 5.1 permitem observar que a função de densidade de risco neutro, aproximada pelas abordagens QP e SDP, tem um ajuste quase perfeito em relação à função de densidade lognormal. Por outro lado, os preços das opções de compra, calculados usando a função de densidade de risco neutro

	LN2	QP	SDP
dados BS	2.83×10^{-10}	2.31×10^{-9}	4.32×10^{-9}

Tabela 5.1: Resíduos para o ajuste dos preços (dados de Black-Scholes).

aproximada, têm um ajuste igualmente perfeito em relação ao preço teórico de Black-Scholes, como se pode ver na Figura 5.2. Calculámos os resíduos para os preços, comparando os preços teóricos com os preços obtidos de acordo com a função de densidade estimada. Considerámos o resíduo total (4.10) e verificámos que os resultados são muito semelhantes nos casos QP e SDP, tal como se pode ver na Tabela 5.1. Note-se que as abordagens QP e SDP recuperam a função de densidade lognormal com muita exactidão. Para garantir numericamente o sucesso das abordagens QP e SDP os nós, inicial e final, da função *spline* devem ser escolhidos com uma distância mínima em relação ao primeiro e ao último preço de exercício. Esta distância deve ser, de acordo com os nossos testes, aproximadamente 6% da amplitude da distribuição dos preços de exercício. O número de nós escolhido pode ser sensivelmente igual ou ligeiramente maior do que o número de preços de exercício. Verifica-se, no entanto, que a estimação para a função de densidade de risco neutro apresenta robustez em relação ao número de nós. De facto, se considerarmos 40, 35, 20 ou 15 nós, obtemos igualmente boas estimações. Por outro lado, se considerarmos o vector dos nós espaçado logaritmicamente, os resultados mantêm-se muito bons e os resíduos continuam a ser muito baixos: 2.07×10^{-9} para a abordagem QP e 1.37×10^{-7} para a SDP.

As dimensões do problema QP são as seguintes: 96 variáveis, 72 restrições de igualdade e 25 restrições de desigualdade. As dimensões da reformulação do problema SDP usando restrições cónicas de segunda ordem são: 96 variáveis lineares, 24 variáveis SDP, 97 variáveis SOC, 72 restrições lineares, 72 restrições envolvendo apenas variáveis SDP, 96 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SDP e 96 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SOC.

Comparação com a abordagem da mistura de densidades lognormais

A implementação numérica da mistura de densidades lognormais (LN2), apresentada na Secção 3.1.2, foi feita utilizando o código `fmincon`, pertencente à *Optimization Toolbox* do MATLAB, para resolver o problema (3.5). Neste caso, a aproximação para o preço da opção de compra é calculada considerando que a função de densidade de risco neutro é uma mistura de duas funções de densidade lognormais, tal como em (3.2).

Como a função objectivo (3.4), relativa à abordagem da mistura de densidades lognormais, não é linear nem convexa procurou-se fornecer à rotina `fmincon` boas aproximações para os pontos iniciais. No caso dos dados de Black-Scholes usámos, como valores iniciais, os valores exactos da função de densidade lognormal teórica.

Resolvemos o problema (3.5) para os dados de Black-Scholes apresentados anteriormente. A função de densidade de risco neutro estimada está representada, a tracejado, na Figura 5.1. Obteve-se um ajuste perfeito à função de densidade lognormal. Na Figura 5.2 estão representados os preços teóricos de Black-Scholes e os preços estimados usando as abordagens QP, SDP e LN2, calculando o preço da opção, dado por (4.8), usando a função de densidade estimada. O resíduo relativo aos preços, isto é, a diferença entre os preços teóricos e os preços aproximados usando a densidade estimada calculados de acordo com (4.10), é igualmente bom como se pode ver na Tabela 5.1.

5.2 Dados de mercado de preços de opções

As abordagens QP, SDP e LN2, para a estimação da função de densidade de risco neutro, foram também testadas com dados de mercado relativos a preços de opções. Recolhemos informação sobre preços de opções de compra e venda, relativos ao índice *S&P500*, transaccionado no mercado de opções de Chicago, o *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE). Trata-se de um dos mercados mais activos no mundo tendo sido escolhido por este motivo e pelo facto dos dados estarem disponíveis ao público. A informação sobre a taxa de

juro foi obtida a partir do banco *Federal Reserve Bank of New York* e a taxa de dividendo recolhida a partir da *Standard & Poors*. Relativamente à taxa de juro considerámos um bilhete do tesouro com um prazo de vencimento o mais próximo possível do prazo de vencimento das opções. Sendo assim, recolhemos informação referente ao dia 29 de Abril de 2003, considerando as opções com vencimento em 17 de Maio de 2003, e designámos esta informação por Conjunto 1. Recolhemos, igualmente, informação referente a preços de opções no dia 24 de Março de 2004, com vencimento em 17 de Abril de 2004 (Conjunto 2) e ainda com vencimento em 20 de Junho de 2004 (Conjunto 3).

5.2.1 Eliminação da arbitragem

Na Subsecção 2.4.2 foi apresentado um teorema que garante que uma medida de probabilidade de risco neutro existe se e só se não existirem oportunidades de arbitragem. No entanto, é possível observar, em determinados instantes, oportunidades de arbitragem, nomeadamente, nos preços de activos menos líquidos. Estes preços não reflectem verdadeiras oportunidades de arbitragem, no sentido em que são corrigidos logo que se inicia a transacção. Porém, para que as soluções obtidas pelos problemas QP, SDP e LN2, formulados anteriormente, tenham significado é necessário que os preços não contenham oportunidades de arbitragem. Vamos, de seguida, apresentar um teorema que estabelece condições necessárias e suficientes para garantir a ausência de arbitragem num conjunto de preços de opções de compra, de tipo europeu, com a mesma maturidade.

Consideremos um conjunto de n opções de compra, de tipo europeu, com preço de exercício E_i , $i = 1, \dots, n$, e com a mesma maturidade. O activo subjacente às opções tem preço inicial S_0 . Vamos considerar, sem perda de generalidade, que os preços de exercício E_i estão ordenados por ordem crescente. Designamos os preços das opções no início do período por C_0^i , $i = 1, \dots, n$. O teorema referido anteriormente é o seguinte.

Teorema 5.2.1 (Herzel [50]) *Sejam $E_1 < E_2 < \dots < E_n$ os preços de exercício relativos a opções de compra, de tipo europeu, com a mesma maturidade e relativas ao mesmo activo subjacente. Sejam C_0^i os preços actuais*

das opções de compra. Não existem oportunidades de arbitragem se e só se os preços C_0^i satisfizerem, em conjunto, as seguintes condições:

1. $C_0^i > 0$, $i = 1, \dots, n$.
2. $C_0^i > C_0^{i+1}$, $i = 1, \dots, n - 1$.
3. A função linear por troços $C(E)$ tal que $C(E_i) = C_0^i$, $i = 1, \dots, n$, definida no intervalo $[E_1, E_n]$ é estritamente convexa.

Este teorema permite eliminar oportunidades de arbitragem no conjunto de preços usado.

Para obter um conjunto de dados com significado, no sentido do Teorema 2.4.3, foram efectuados os seguintes procedimentos. Depois de recolher os dados de preços de opções de compra e venda, relativos ao índice *S&P500*, começámos por eliminar as opções cujos preços não estavam situados dentro do intervalo *bid-ask*. Seguidamente, usando a paridade *put-call*, gerámos preços de opções de compra a partir de preços de opções de venda. No caso de obtermos dois preços distintos para a opção de compra, relativos ao mesmo preço de exercício, escolhemos o preço correspondente à opção com maior volume de transacção. Depois de obter este conjunto alargado de preços, testámos todas as condições do Teorema 5.2.1 removendo os preços que violavam pelo menos uma dessas condições. Por fim, resolvemos os problemas de optimização correspondentes às formulações (4.14), (4.20) e (3.5).

5.2.2 Reformulação ponderada do problema

Com o objectivo de aferir a relevância e qualidade dos dados relativos aos preços de opções, incorporámos o volume de transacções referente a cada opção na função objectivo dos nossos problemas. De facto, as cotações de fim de sessão diária podem conter preços pouco líquidos, que não reflectem as cotações actualizadas de mercado. Os preços de opções pouco fiáveis estão relacionados com opções pouco transaccionadas. Por outro lado, as opções com um volume de transacções mais elevado representam melhor o *sentimento de mercado* e as expectativas dos investidores. Incorporámos o volume de

transacções na formulação do nosso problema, modificando a função objectivo dos problemas (4.14), (4.20) e (3.5):

$$\sum_{E \in \mathcal{C}} \theta_E [C_E - C_E(y)]^2 + \sum_{E \in \mathcal{P}} \mu_E [P_E - P_E(y)]^2. \quad (5.1)$$

O peso θ_E é o quociente entre o volume de transacções, referente à opção de compra C_E , e o volume de transacções referente a todas as opções de compra. De forma semelhante, o peso μ_E é o quociente entre o volume de transacções para a opção de venda P_E e o volume de transacções referente a todas as opções de venda. Se uma determinada opção não for transaccionada é-lhe atribuído um peso igual a zero.

5.2.3 As estimações obtidas

Os resultados numéricos obtidos para os três conjuntos de dados, apresentados no início desta secção, são detalhados a seguir. Relativamente ao primeiro conjunto (Figura 5.3 e Figura 5.4), o número inicial de opções de compra e venda era de 40 para cada tipo. Depois de eliminarmos as oportunidades de arbitragem reduzimos os dados a apenas 24 opções de compra e, para estes dados, considerámos 32 nós. Relativamente ao segundo conjunto de dados (Figura 5.5 e Figura 5.6), o número original de opções de compra e venda era de 38 para cada tipo. Depois de eliminarmos as oportunidades de arbitragem, reduzimos o número de dados do problema a apenas 23 opções de compra, para os quais definimos 28 nós. Finalmente, para o terceiro conjunto de dados (Figura 5.7 e Figura 5.8), o número original de opções de compra e de venda era de 29 opções de cada tipo e, depois de eliminar as oportunidades de arbitragem, reduzimos os dados a apenas 14 opções de compra para as quais considerámos 29 nós.

Nas abordagens QP e SDP, para os dados do índice *S&P500*, os nós da função *spline* devem ser escolhidos perto dos preços de exercício para que, numericamente, tenhamos bons resultados. A localização dos nós da função *spline* deve ser feita de modo mais cuidadoso do que no caso dos dados simulados de preços de opções. De facto, existe alguma sensibilidade à variação da posição dos nós. Quando estes são igualmente espaçados e a função a estimar

	LN2	QP	SDP
S&P500 conjunto 1	0.05549	0.04408	0.03413
S&P500 conjunto 2	0.02793	0.02733	0.01450
S&P500 conjunto 3	0.02142	0.00834	0.00396

Tabela 5.2: Resíduos para os preços (dados do índice S&P500).

é suficientemente regular, como no caso da função de densidade lognormal, os resultados são bons. No entanto, quando consideramos dados de mercado, a função de densidade pode apresentar uma grande variedade de formas.

Comparativamente ao que foi feito para os dados de Black-Scholes, fez-se, para os dados de mercado, o mesmo tipo de escalonamento e modificação da matriz Hessiana (ver Secção 5.1). A matriz Hessiana foi modificada de acordo com os valores de referência, $\xi = |\lambda_{min}|$ para o problema QP e $\xi = |\lambda_{min}|10^3$ para o problema SDP, escolhidos para os dados de Black-Scholes.

Para o primeiro e segundo conjunto de dados, a função de densidade de risco neutro estimada, obtida a partir das abordagens QP e SDP, apresenta multimodalidade, visível na cauda esquerda, como se pode ver pelas Figuras 5.3 e 5.5. A partir da estimação da função de densidade de risco neutro podemos calcular os preços estimados. Assim, de acordo com (4.8), calculámos os preços fornecidos pela estimação desta função de densidade. O ajuste entre os preços estimados e os preços S&P500 observados é bom, como se vê pela Figura 5.4 para os dados do Conjunto 1, pela Figura 5.6 para os dados do Conjunto 2 e pela Figura 5.8 para os dados do Conjunto 3. O resíduo é semelhante para as abordagens QP e SDP, de acordo com a Tabela 5.2. De facto, embora a ordem de grandeza dos resíduos seja maior do que no caso dos dados de Black-Scholes, podemos observar que o grau de precisão continua aceitável. Como consequência, os preços estimados obedecem ao intervalo *bid-ask*¹ referente aos preços observados. Note-se, ainda, que os resultados para a abordagem SDP são melhores do que para a abordagem QP. O ajuste para os preços é

¹Os preços *bid* e *ask* são estipulados pelo mercado e estabelecem um limite inferior e superior, respectivamente, para os preços de transacção das opções.

semelhante nos casos QP e SDP, mas é sempre melhor no caso SDP.

Observámos que a função de densidade estimada, usando a abordagem QP, toma valores negativos, da ordem de 10^{-5} , numa das caudas da distribuição, aproximadamente entre 700 e 735 para o Conjunto 1 (Figura 5.3), entre 1200 e 1223 para o Conjunto 2 (Figura 5.5) e entre 830 e 870 para o Conjunto 3 (Figura 5.7), apesar destas violações serem quase imperceptíveis. Tal como se esperava, o modelo envolvendo optimização semidefinida corrigiu este comportamento, apresentando uma estimativa para a função de densidade sempre não negativa.

Para determinar melhor o impacto de dados com arbitragem nas abordagens propostas, considerámos novos conjuntos de dados de mercado referentes às mesmas datas. Para cada conjunto tomámos como preço da opção a média aritmética dos preços *bid* e *ask* e, para além disso, não foram eliminados quaisquer preços. Na Figura 5.9 podemos ver o resultado da estimação da função de densidade, obtida para as abordagens SDP e LN2, considerando os dados referentes aos Conjuntos 1, 2 e 3. Note-se que a forma da função de densidade é semelhante à obtida para dados sem arbitragem no caso dos dois primeiros conjuntos de dados.

As dimensões do problema relativas ao Conjunto 1 são, para o problema QP, 124 variáveis, 93 restrições de igualdade e 32 restrições de desigualdade. Para o problema SDP-SOC estas dimensões são as seguintes: 124 variáveis lineares, 31 variáveis SDP, 125 variáveis SOC, 93 restrições lineares, 93 restrições envolvendo apenas variáveis SDP, 124 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SDP e 124 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SOC.

As dimensões do problema relativas ao Conjunto 2 são, para o problema QP, 108 variáveis, 81 restrições de igualdade e 28 restrições de desigualdade. No caso SDP-SOC temos 108 variáveis lineares, 27 variáveis SDP, 109 variáveis SOC, 81 restrições lineares, 81 restrições envolvendo apenas variáveis SDP, 108 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SDP e 108 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SOC.

As dimensões do problema relativas ao Conjunto 3 para o problema QP são as seguintes: 112 variáveis, 84 restrições de igualdade e 29 restrições de

desigualdade. Para o problema SDP-SOC passamos a ter 112 variáveis lineares, 28 variáveis SDP, 113 variáveis SOC, 84 restrições lineares, 84 restrições envolvendo apenas variáveis SDP, 112 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SDP e 112 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SOC.

Comparação com a abordagem da mistura de densidades lognormais

A abordagem da mistura de duas densidades lognormais foi resolvida, tal como anteriormente, usando a rotina `fmincon` pertencente à *Optimization Toolbox* do MATLAB. Foram considerados os pesos tal como nas abordagens QP e SDP. Para o primeiro e segundo conjuntos de dados a estimação da função de densidade, usando a mistura de duas densidades lognormais, difere da obtida pelas abordagens QP e SDP. De facto, nestes dois casos, a densidade estimada pelas abordagens QP e SDP é multimodal, enquanto que a densidade estimada pela abordagem LN2 não apresenta essa característica, como se pode ver pelas Figuras 5.3 e 5.5. Relativamente ao terceiro conjunto de dados a função de densidade obtida pela abordagem LN2 apresenta características de mistura de funções de densidade tal como abordagem SDP (Figura 5.7). O ajuste, dado pela abordagem LN2, entre os preços estimados e os preços de mercado é bom, mas, quando comparado com as outras duas abordagens, é sempre pior, como se pode ver na Tabela 5.2.

Note-se, ainda, que quando consideramos dados com arbitragem, obtemos para o terceiro conjunto de dados maiores diferenças relativamente à abordagem da mistura de duas lognormais como se vê na Figura 5.9.

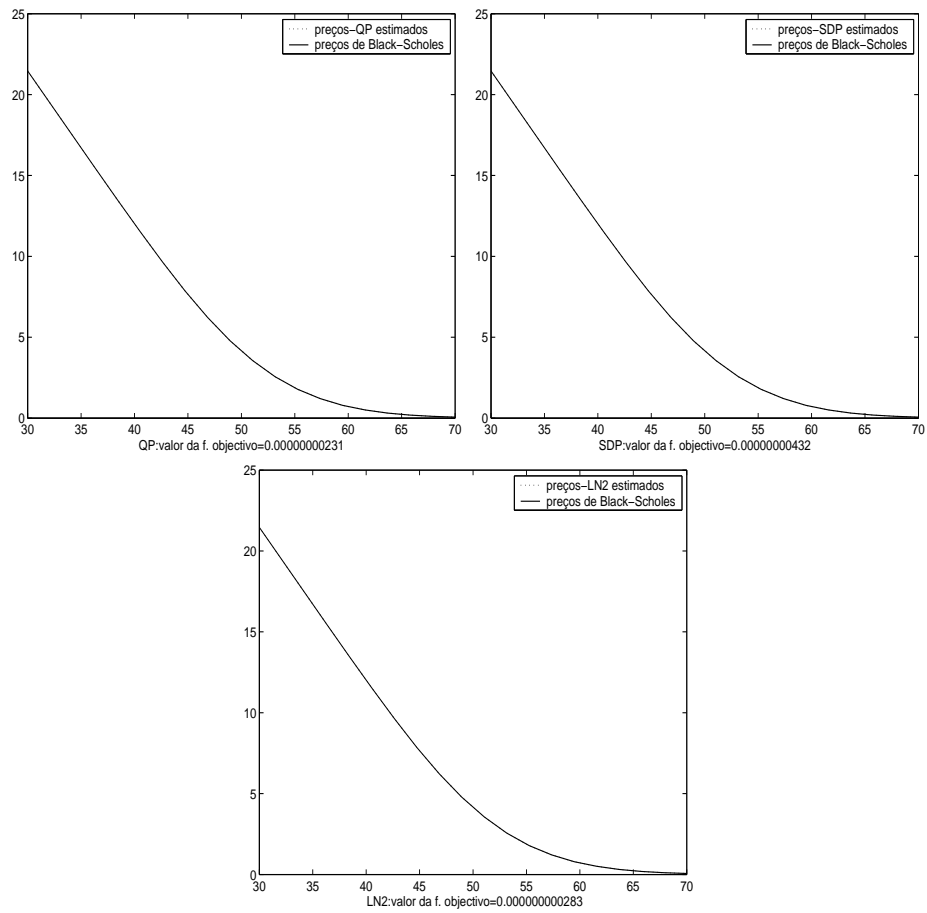


Figura 5.2: Ajuste entre os preços estimados e os preços teóricos de Black-Scholes, para as abordagens QP, SDP e LN2.

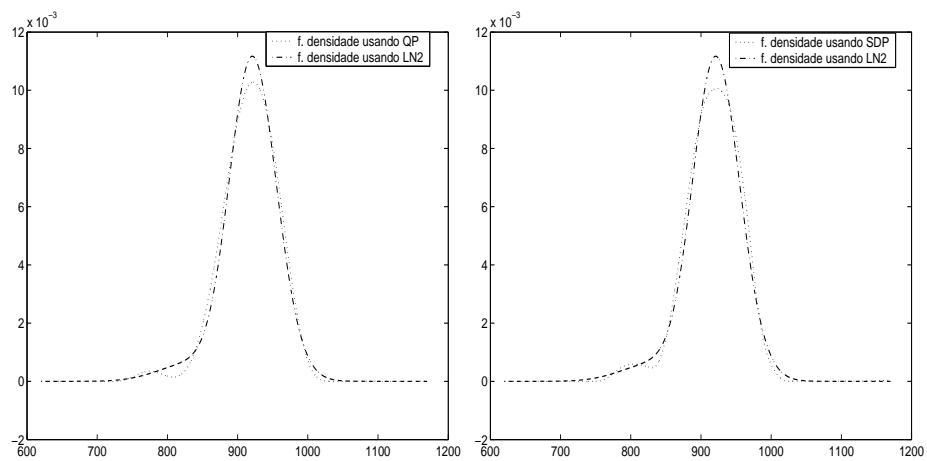


Figura 5.3: Estimação da função de densidade de risco neutro, para dados do índice S&P500 usando as abordagens QP, SDP e LN2 (Conjunto de dados 1).

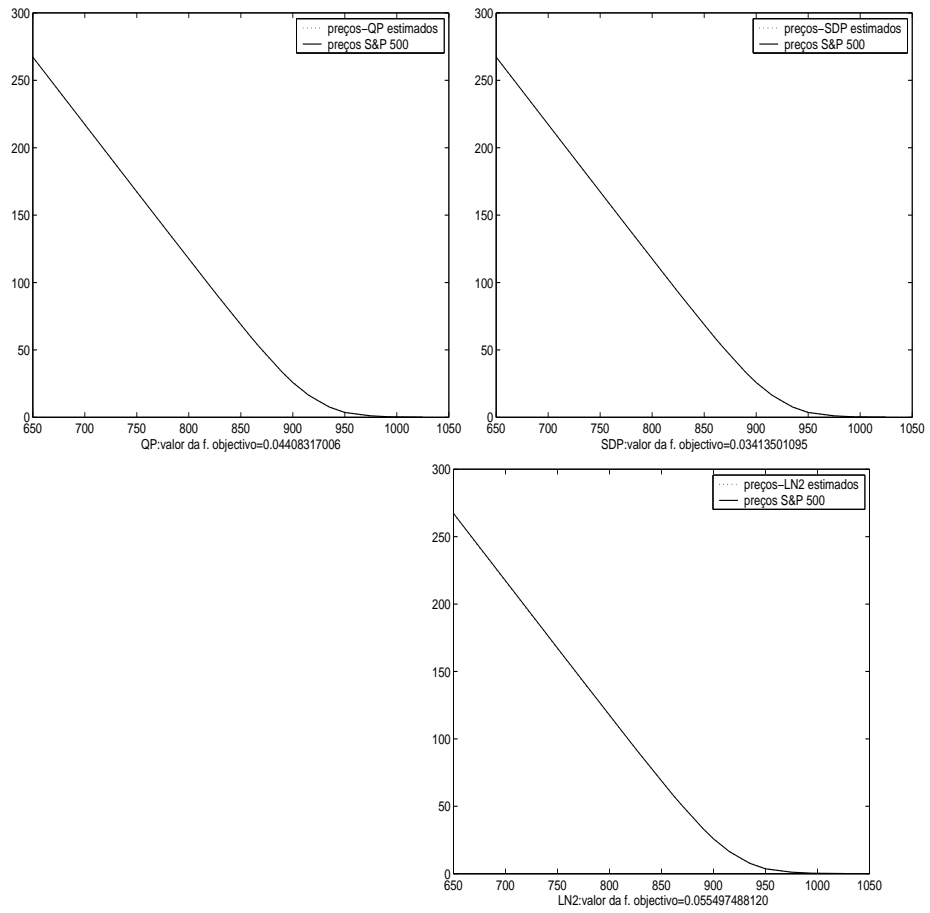


Figura 5.4: Preços estimados usando as abordagens QP, SDP e LN2 (Conjunto de dados 1).

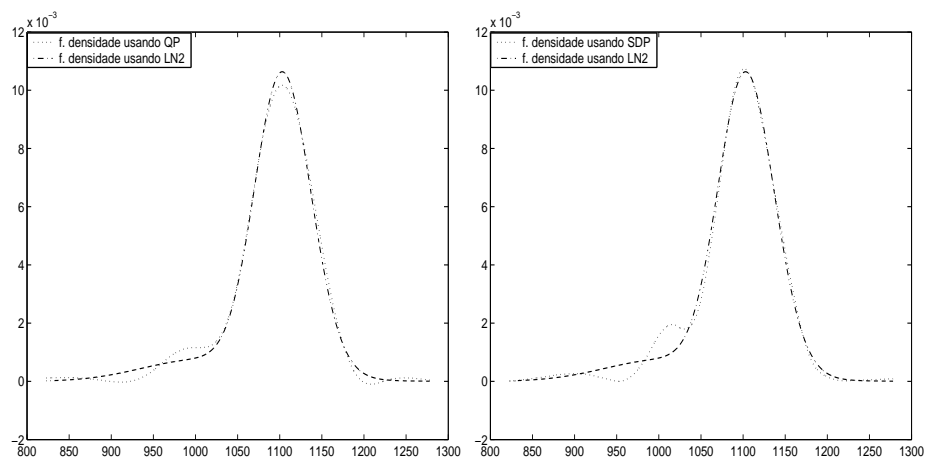


Figura 5.5: Estimação da função de densidade de risco neutro, para dados do índice S&P500 usando as abordagens QP, SDP e LN2 (Conjunto de dados 2).

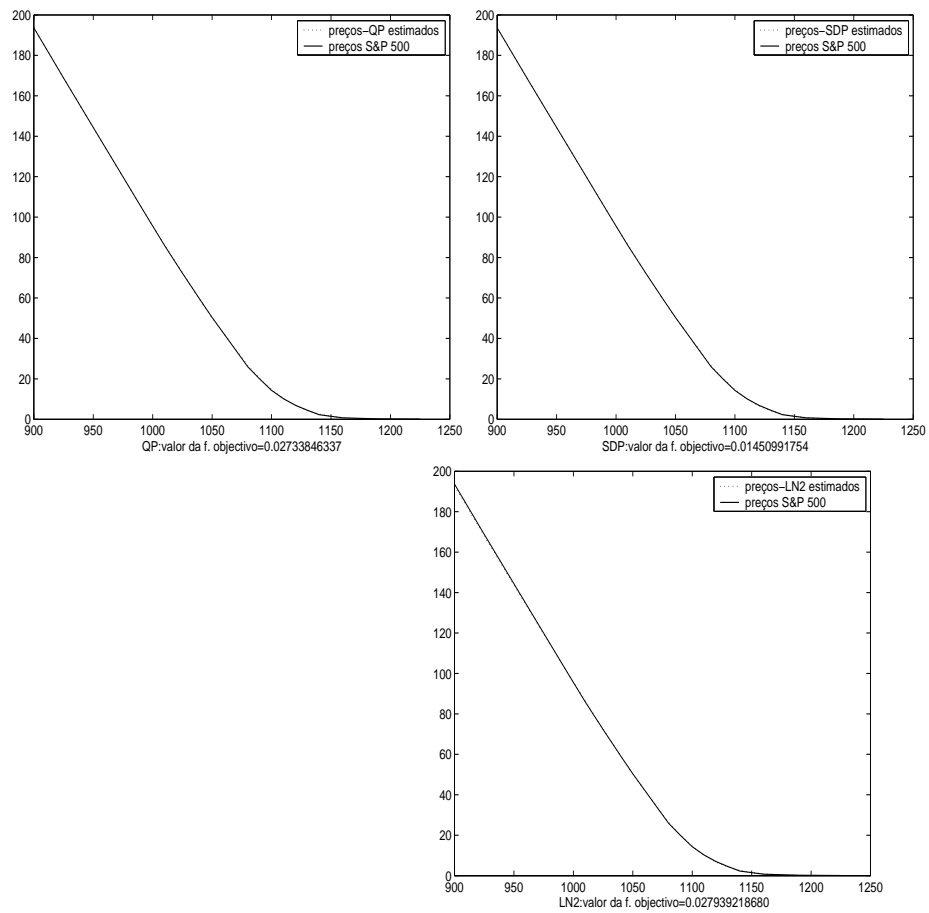


Figura 5.6: Preços estimados usando as abordagens QP, SDP e LN2 (Conjunto de dados 2).

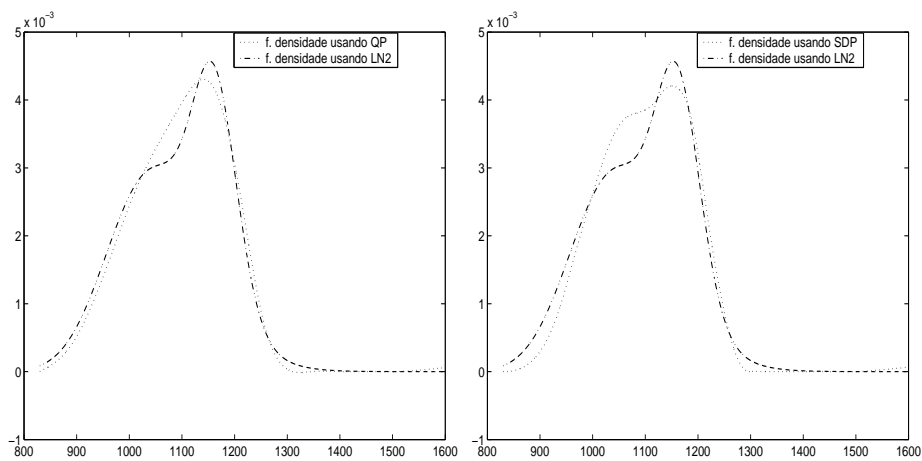


Figura 5.7: Estimação da função de densidade de risco neutro, para dados do índice S&P500 usando as abordagens QP, SDP e LN2 (Conjunto de dados 3).

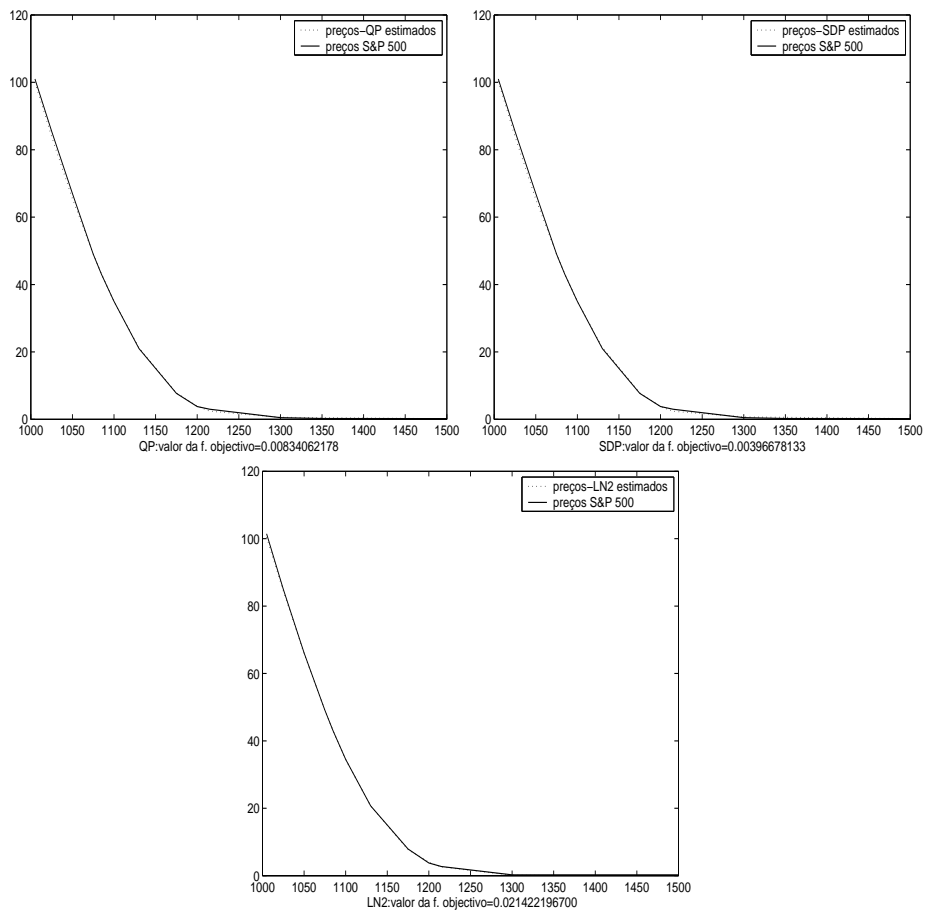


Figura 5.8: Preços estimados usando as abordagens QP, SDP e LN2 (Conjunto de dados 3).

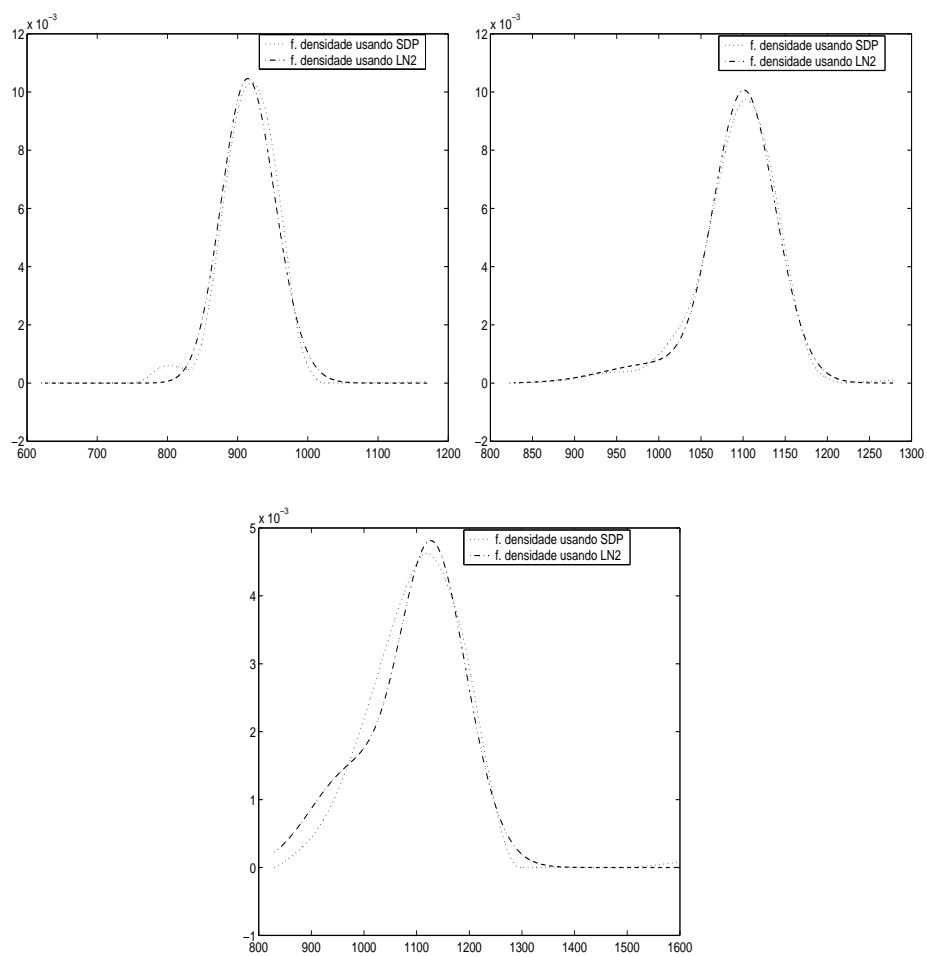


Figura 5.9: Estimação da função de densidade de risco neutro para dados com arbitragem, respectivamente, para os Conjuntos 1, 2 e 3.

Capítulo 6

Extensão à evolução temporal

Um estudo da evolução temporal das funções de densidade de risco neutro pode fornecer informação importante relativa às expectativas de evolução do preço do activo subjacente [76]. Pode permitir, por exemplo, uma gestão do risco mais eficiente. Por outro lado, vários autores tais como [3, 22, 27, 39, 48, 59] procuraram estimar a volatilidade associada ao activo subjacente como função do tempo. Desta forma, obtém-se uma superfície para a volatilidade do activo (enquanto função do seu valor e do instante temporal) que permite, de uma forma precisa, estabelecer o preço de opções.

Neste capítulo, vamos estudar a estimação da variação temporal da função de densidade de risco neutro. Para o efeito, recorreremos a funções *spline* bicúbicas, de modo a garantir a suavidade desejada. Consideramos uma função objectivo no sentido dos mínimos quadrados, em que, as variáveis de optimização são os parâmetros que definem as funções *spline*. Estas funções são usadas para representar a superfície relativa à função de densidade de risco neutro. Começamos por apresentar os modelos de optimização que, usando funções *spline* bicúbicas, permitem determinar a evolução da função de densidade de risco neutro para um determinado activo subjacente a partir do preço de opções.

6.1 Dados do problema

Consideramos um conjunto \mathcal{T} de prazos de vencimento ou maturidades, referentes a preços de opções. Para cada uma destas maturidades conhecemos o conjunto dos preços de opções, $\mathcal{C}_T, \mathcal{P}_T, T \in \mathcal{T}$, de compra e venda, respectivamente, e conhecemos, igualmente, o conjunto dos preços de exercício correspondentes $\mathcal{E}_{\mathcal{C}_T}, \mathcal{E}_{\mathcal{P}_T}, T \in \mathcal{T}$. As taxas de juro, referentes ao período entre o momento inicial e cada uma das maturidades, são conhecidas e podem variar com as maturidades. De acordo com o valor dos preços de exercício, e tendo em conta os valores possíveis para o preço terminal do activo subjacente, escolhemos um intervalo $[a, b]$ que deve conter esses valores. Escolhemos, ainda, um outro intervalo $[c, d]$ referente às maturidades e que contém o conjunto \mathcal{T} .

Para formular o problema de optimização de forma adequada, necessitamos de especificar o número e a localização dos nodos da função *spline* bicúbica, ou seja, os nós espaciais e temporais. Consideramos, contidos numa região R , $n_s + 1$ nós espaciais, referentes à discretização $a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n_s+1} = b$ do preço do activo em $[a, b]$. Consideramos, igualmente, $n_t + 1$ nós temporais, referentes à discretização $c = u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{n_t+1} = d$ do intervalo $[c, d]$ contendo as maturidades. Os nós espaciais estão relacionados com o valor dos preços de exercício e com o preço do activo subjacente, mas não têm que coincidir com eles. De forma semelhante, os nós temporais estão relacionados com as maturidades, mas não têm que coincidir com elas. Para cada região rectangular $R^{st} = [x_s, x_{s+1}] \times [u_t, u_{t+1}]$, $s = 1, \dots, n_s$, $t = 1, \dots, n_t$, o correspondente elemento da função *spline* bicúbica tem 16 parâmetros. Deste modo, o número total de parâmetros da função *spline* é $16n_s n_t$. Designamos por $y \in \mathbb{R}^{16n_s n_t}$ o conjunto desses parâmetros e por $p_y(\omega, u)$ a função *spline* bicúbica duas vezes continuamente diferenciável.

6.2 Formulação do problema de programação quadrática

A garantia da diferenciabilidade (contínua e de segunda ordem) de $p_y(\omega, u)$ exige a imposição desta propriedade na fronteira de cada subrectângulo R^{st} ,

$s = 1, \dots, n_s$, $t = 1, \dots, n_t$. Impomos, ainda, que as funções *spline* sejam naturais. Todas estas restrições são lineares em y e podem ser representadas na forma

$$(a^k)^\top y = b^k, \quad k = 1, \dots, n_c, \quad (6.1)$$

em que $n_c = (42n_s - 19)(n_t - 1) + 21n_s - 17$, para determinados vectores $a^k \in \mathbb{R}^{16n_s n_t}$ e escalares $b^k, k = 1, \dots, n_c$.

Dado que $p_y(\omega, u)$ pretende aproximar uma função de densidade deve também satisfazer

$$p_y(\omega, u) \geq 0, \quad \forall (\omega, u) \in [a, b] \times [c, d] \quad (6.2)$$

e

$$\int_a^b p_y(\omega, u) d\omega = 1, \quad \forall u \in [c, d]. \quad (6.3)$$

A não negatividade da função de densidade de risco neutro, imposta em (6.2), pode ser relaxada e imposta apenas ao longo das linhas da malha de discretização, ou seja,

$$p_y(\omega, u_t) \geq 0, \quad \forall \omega \in [a, b], \quad t = 1, \dots, n_t + 1 \quad (6.4)$$

e

$$p_y(x_s, u) \geq 0, \quad \forall u \in [c, d], \quad s = 1, \dots, n_s + 1. \quad (6.5)$$

Desta forma, garante-se a não negatividade da função nos segmentos de recta definidos pela malha de discretização, isto é, pertencentes às rectas definidas pelos nós

$$\omega = x_s, \quad s = 1, \dots, n_s + 1, \quad u = u_t, \quad t = 1, \dots, n_t + 1. \quad (6.6)$$

A condição (6.3) será imposta apenas nos nós temporais:

$$\int_a^b p_y(\omega, u_t) d\omega = 1, \quad t = 1, \dots, n_t + 1. \quad (6.7)$$

As restrições de igualdade (6.7) são lineares em relação às variáveis do problema. O mesmo acontece com as restrições (6.4) e (6.5) o que faz com que todas as restrições consideradas até agora sejam lineares.

Admitindo que $p_y(\omega, u)$ representa uma função de densidade de risco neutro, os valores esperados para os ganhos futuros das opções de compra e venda, com maturidade $T \in \mathcal{T}$ e preço de exercício $E \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}_T} \cup \mathcal{E}_{\mathcal{P}_T}$, descontados à taxa de juro sem risco, são dados por

$$C_{T,E}(y) = e^{-r(T-t_0)} \int_a^b p_y(\omega, T)(\omega - E)^+ d\omega, \quad (6.8)$$

$$P_{T,E}(y) = e^{-r(T-t_0)} \int_a^b p_y(\omega, T)(E - \omega)^+ d\omega. \quad (6.9)$$

De acordo com o que foi feito na Secção 4.2, consideremos o quadrado das distâncias, entre os preços teóricos e os preços observados, para ambas as opções de compra e venda:

$$[C_{T,E} - C_{T,E}(y)]^2 \quad \text{e} \quad [P_{T,E} - P_{T,E}(y)]^2.$$

Somando estas parcelas para todas as maturidades e preços de exercício, obtemos a função objectivo do nosso problema que consiste, precisamente, no resíduo no sentido dos mínimos quadrados:

$$\begin{aligned} E(y) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \left[\sum_{E \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}_T}} \theta_{T,E} [C_{T,E} - C_{T,E}(y)]^2 \right. \\ \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}_T}} \mu_{T,E} [P_{T,E} - P_{T,E}(y)]^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Os pesos $\theta_{T,E}$ e $\mu_{T,E}$ servem para medir o valor da contribuição do preço de cada opção na função objectivo. A relevância de cada preço pode ser medida de acordo com a informação de mercado existente (por exemplo, com base nos valores do número de transacções das opções).

Referimos, anteriormente, que as restrições relativas às funções *spline* eram todas lineares. Podemos verificar, facilmente, que cada termo da função objectivo é quadrático. De facto, tomando em consideração a fórmula para $C_{T,E}(y)$, com $T \in \mathcal{T}$ e $E \in \mathcal{E}_{C_T}$, e supondo, ainda, que $x_\ell \leq E \leq x_{\ell+1}$, para um dado $\ell \in \{1, \dots, n_s\}$, temos que

$$\begin{aligned}
& e^{r(T-t_0)} C_{T,E}(y) \\
&= \int_a^b p_y(\omega, T)(\omega - E)^+ d\omega \\
&= \sum_{s=\ell}^{n_s} \int_{x_s}^{x_{s+1}} p_y(\omega, T)(\omega - E)^+ d\omega \\
&= \int_E^{x_{\ell+1}} p_y(\omega, T)(\omega - E) d\omega + \sum_{s=\ell+1}^{n_s} \int_{x_s}^{x_{s+1}} p_y(\omega, T)(\omega - E) d\omega.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Sabemos que $p_y(\omega, T)$ é uma função *spline* cúbica, cujos coeficientes formam as variáveis do problema. Assim, para cada intervalo definido pelos nós espaciais, a expressão (6.11) é linear nas respectivas variáveis. Logo, a função objectivo $E(y)$ é quadrática. Pelo facto do valor de $E(y)$ ser sempre não negativo, conclui-se que a matriz da forma quadrática de $E(y)$ é (simétrica) semidefinida positiva.

As restrições (6.4) e (6.5) podem dar origem a duas formulações diferentes para o problema de estimação da função de densidade de risco neutro. Vamos considerar, primeiro, que as restrições de não negatividade, relativas à função de densidade de risco neutro, são impostas nos nodos da função *spline*:

$$p_y(x_s, u_t) \geq 0, \quad s = 1, \dots, n_s + 1, \quad t = 1, \dots, n_t + 1. \tag{6.12}$$

Obtemos, desta forma, a seguinte formulação para o problema de estimação:

$$\min_y E(y) \text{ s.a (6.1), (6.7), (6.12)}. \tag{6.13}$$

A função objectivo é quadrática, como vimos anteriormente, e as restrições de igualdade (6.1) e (6.7), e de desigualdade (6.12), são lineares relativamente às variáveis de optimização y . Trata-se, por isso, de um problema de programação quadrática que vimos ser convexo. Apesar da maior parte das estimações com

esta formulação resultarem em funções de densidade não negativas obteve-se, em alguns casos, valores negativos entre os nodos de valor absoluto muito pequeno.

6.3 Formulação do problema de programação semi-definida

O nosso objectivo é obter estimações, para a função de densidade, que ofereçam maior garantia de não negatividade. Propomos, por isso, uma outra abordagem baseada em programação semidefinida. Neste caso, a não negatividade das funções de densidade de risco neutro ao longo das rectas (6.6) é baseada na caracterização de não negatividade para polinómios, definidos em intervalos reais, apresentada por Bertsimas e Popescu [13] e descrita no Corolário 4.3.2 da Secção 4.3 para o caso cúbico.

De acordo com as restrições (6.4) e (6.5), esta caracterização é imposta ao longo das rectas definidas pela malha de discretização associada aos nós espaciais e temporais, x_s , $s = 1, \dots, n_s + 1$, e u_t , $t = 1, \dots, n_t + 1$. Desta forma, e de acordo com a caracterização de não negatividade referida em cima, introduzimos novas variáveis $X^\ell = [x_{ij}^\ell]_{i,j=0,\dots,3}$, $\ell = 1, \dots, 2n_s n_t + n_s + n_t$. Assim sendo, a função *spline* bicúbica $p_y(\omega, u)$ é não negativa em $[a, b] \times u_t$, $t = 1, \dots, n_t + 1$ e em $x_s \times [c, d]$, $s = 1, \dots, n_s + 1$, se e só se

$$\begin{aligned} H_k^\ell \bullet X^\ell &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \ell = 1, \dots, \bar{n}, \\ (g_k^\ell)^\top y + H_k^\ell \bullet X^\ell &= 0, \quad k = 4, 5, 6, 7, \quad \ell = 1, \dots, \bar{n}, \\ X^\ell &\succeq 0, \quad \ell = 1, \dots, \bar{n}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

em que $\bar{n} = 2n_s n_t + n_s + n_t$, para determinados vectores g_k^ℓ , $k = 3, 4, 5, 6$, $\ell = 1, \dots, \bar{n}$, e matrizes $X^\ell \succeq 0$, $\ell = 1, \dots, \bar{n}$.

Como vimos no caso estático (Secção 4.3), o facto de X^ℓ ser semidefinida positiva e o Corolário 4.3.2, implicam que a variável x_{00}^ℓ é não negativa. No contexto da nossa notação, isto permite concluir que o polinómio bicúbico definido nos nodos (x_s, u_t) , $s = 1, \dots, n_s + 1$, $t = 1, \dots, n_t + 1$, é sempre não-negativo. Conclui-se, assim, que as restrições lineares de desigualdade

impostas ao problema QP estão incluídas na abordagem SDP. Sendo assim, esta abordagem apresenta condições mais fortes de não negatividade. Podemos, agora, apresentar o problema de programação semidefinida para estimar a função de densidade de risco neutro:

$$\min_{y, X^1, \dots, X^{\bar{n}}} E(y) \text{ s.a (6.1), (6.7), (6.14)}. \quad (6.15)$$

Note-se que as restrições (6.14) são lineares em relação às variáveis de optimização, com a excepção das restrições $X^\ell \succeq 0$, $\ell = 1, \dots, \bar{n}$. Dado que todas as restrições são convexas e a função objectivo é quadrática, (6.15) é um problema convexo de programação semidefinida.

Tal como foi referido na Secção 4.3, o *software* disponível para optimização semidefinida resolve problemas com funções objectivo lineares, e daí resultar a necessidade de reformular o problema (6.15). De acordo com o que foi feito na Secção 4.3, a função objectivo é alterada, passando a consistir da minimização de uma nova variável $t \in \mathbb{R}$. É imposta uma nova restrição da forma $t \geq E(y)$ que pode ser reformulada como uma restrição cónica de segunda ordem. Desta forma, considerando o cone de segunda ordem $C_q = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{16n_s n_t} : t \geq \|z\|\}$ obtemos um problema de programação cónica, mais concretamente de programação cónica de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \min_{y, X^1, \dots, X^{\bar{n}}, t, z} \quad & t \\ \text{s.a} \quad & f_i^\top y = b_i, \quad i = 1, \dots, n_c + n_t + 1, \\ & H_k^\ell \bullet X^\ell = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \ell = 1, \dots, \bar{n}, \\ & (g_k^\ell)^\top y + H_k^\ell \bullet X^\ell = 0, \quad k = 4, 5, 6, 7, \quad \ell = 1, \dots, \bar{n}, \\ & z - P^\top y = P^{-1}r, \\ & X^\ell \succeq 0, \quad \ell = 1, \dots, \bar{n}, \\ & (t, z) \in C_q. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Este problema pode ser resolvido, de forma eficiente, com o *software* disponível para programação cónica e semidefinida.

6.4 Resolução numérica dos problemas de estimação

Foi feito um estudo numérico, com base nas abordagens descritas nas Secções 6.2 e 6.3, para a estimação da evolução temporal das funções de densidade de risco neutro. Usámos a rotina `quadprog` do MATLAB para resolver o problema QP (6.13), e a rotina `SDPT3` [91] para resolver o problema SDP (6.15), mais concretamente a reformulação SDP-SOCP dada em (6.16). A matriz Hessiana do problema apresenta elementos com ordens de grandeza muito diferentes. De facto, depois de calculadas as expressões $C_{T,E}(y)$ da função objectivo, obtemos termos com potências de x_s , $s = 1, \dots, n_s + 1$, até à ordem 5. Como estes nós podem tomar valores da ordem de 10^4 , a ordem de grandeza dos termos de $C_{T,E}(y)$ é elevada. Esta situação provoca mau condicionamento da matriz Hessiana, uma situação já analisada no Capítulo 5. Sendo assim, escalonámos os problemas QP e SDP escolhendo o valor médio x_{avg} das componentes dos vectores dos nós espaciais como factor de escalonamento. Resolvemos versões escalonadas dos problemas (6.13) e (6.15) (mais concretamente a sua reformulação SDP-SOCP dada em (6.16)). O escalonamento dos problemas originou novas variáveis, relacionadas de forma linear com as variáveis originais. A função objectivo foi ainda escalonada por $1/x_{avg}^2$.

6.5 Dados simulados de preços de opções

Num primeiro conjunto de testes foram gerados preços de opções calculados a partir da fórmula de Black-Scholes. Para isso usou-se a rotina `blsprice` pertencente à *Financial Toolbox* do MATLAB. Consideraram-se preços de opções relativos a sete maturidades, $\mathcal{T} = \{\frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{11}{12}, \frac{12}{12}\}$. Para cada maturidade gerámos 11 preços de opções de compra, com preços de exercício igualmente espaçados entre 20 e 100. Para gerar os preços das opções considerámos que o preço do activo subjacente é igual a 50, que a taxa de juro isenta de risco é de 10%, que a taxa de dividendo é nula e que a volatilidade é igual a 20%. Neste caso é conhecida a função de densidade de risco neutro lognormal correspondente aos preços de Black-Scholes calculados. A sua representação gráfica, para uma sequência de instantes temporais $t = (4/12 : 0.002 : 1)$ é

dada pela Figura 6.1.

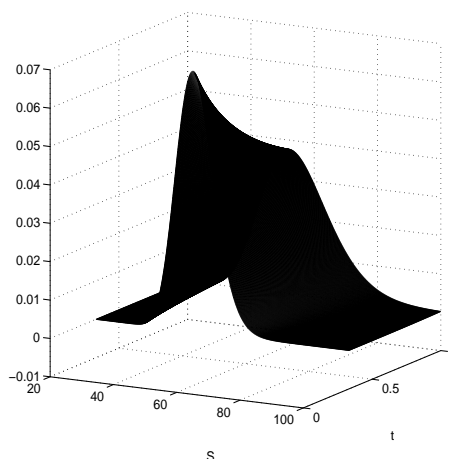


Figura 6.1: Funções de densidade de risco neutro lognormais representadas para uma sequência de instantes temporais $t = (4/12 : 0.002 : 1)$.

Escolhemos a região onde colocar os nodos da função *spline* de acordo com os estudos feitos em [5, 27]. Esta região está intimamente ligada ao preço do activo subjacente e às maturidades. De facto, um nó espacial x_s , $s \in \{1, \dots, n_s + 1\}$, da função *spline* muito afastado do preço do activo subjacente tem menor relevância, na estimação da função de densidade de risco neutro, do que outro, cujo valor esteja mais próximo. Os nodos (x_s, u_t) , $s = 1, \dots, n_s + 1$, $t = 1, \dots, n_t + 1$, da função *spline* formam uma malha rectangular, não uniforme. Existem 40 nós espaciais, referentes ao preço do activo, variando entre 20 e 100. Colocámos um maior número de nós perto da região *at-the-money*, sendo o seu número aproximadamente metade do número total de nós. Desta forma, pretende-se captar a importância desta região. Estes nós são constantes para os diferentes níveis temporais e podem não coincidir com os preços de exercício. Os nós temporais escolhidos foram $\{\frac{4}{12}, \frac{10}{12}, \frac{12}{12}\}$.

Para este conjunto de dados, não considerámos pesos $\theta_{T,E}$ e $\mu_{T,E}$ (ou seja, atribuímos-lhe o valor um). Verificámos, para esta instância do problema, que a Hessiana da função objectivo $E(y)$ tem característica inferior à sua ordem.

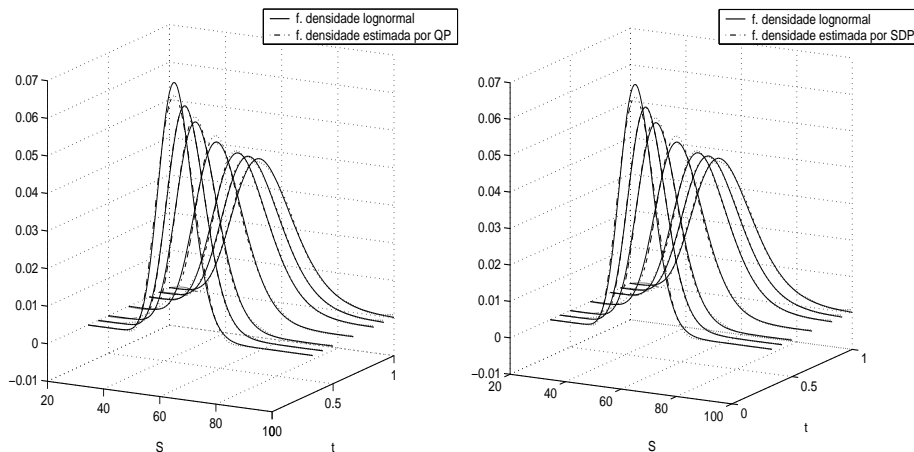


Figura 6.2: Ajuste entre as funções de densidade de risco neutro estimadas e as funções de densidade lognormais para dados de Black-Scholes, para cada uma das maturidades.

Constatámos, ainda, que apesar da Hessiana ser teoricamente semidefinida positiva se observa, numericamente, a presença de valores próprios negativos, de valor absoluto muito pequeno. A rotina `quadprog` do `MATLAB` exibiu algumas dificuldades, dada a presença desses valores próprios negativos. O escalonamento da Hessiana permitiu reduzir o mau condicionamento da matriz, mas, mesmo assim, houve necessidade de a perturbar adicionando um termo da forma ξI , em que $\xi = |\lambda_{min}|$, e λ_{min} é o menor valor próprio da matriz Hessiana. Este procedimento garantiu que, numericamente, a Hessiana fosse definida positiva.

Resolvemos a formulação escalonada dos problemas (6.13) e (6.16) e obtivemos a evolução temporal para as funções de densidade descrita nas Figuras 6.2 e 6.3. Na Figura 6.2 as funções de densidade estimadas são sobrepostas às lognormais conhecidas para cada nó temporal. Como se pode ver nestas figuras, para as maturidades consideradas, as abordagens QP e SDP apresentam resultados aceitáveis.

Relativamente a algumas densidades não se consegue um ajuste muito

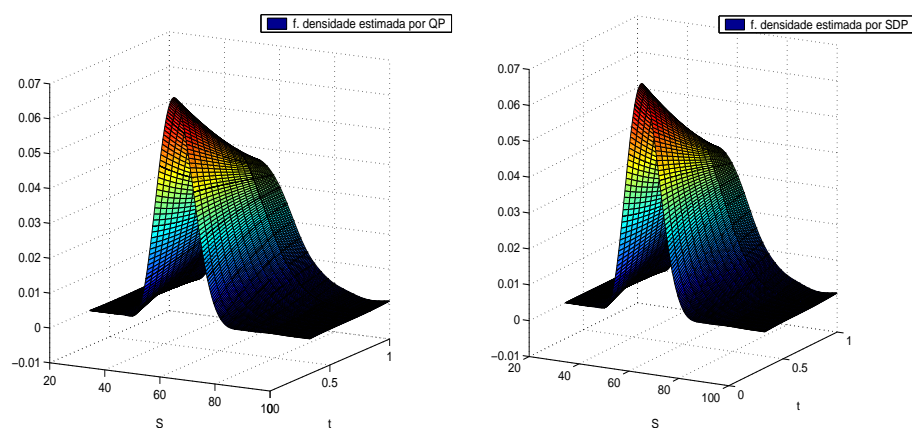


Figura 6.3: Funções de densidade de risco neutro, estimadas a partir de dados de Black-Scholes, usando as abordagens QP e SDP, representadas para uma sequência de 20 instantes temporais no intervalo $[4/12 \ 12/12]$ (coube ao MATLAB interpolar graficamente entre as diversas linhas temporais de discretização).

bom. Os preços de compra estimados, calculados usando a função de densidade de risco neutro estimada, e a fórmula (6.8), ajustam-se bem aos preços teóricos de Black-Scholes para todas as sete maturidades, conforme se pode ver graficamente na Figura 6.4. Os valores finais do resíduo $E(y)$, obtidos para a soma das sete maturidades, foram semelhantes para as abordagens QP e SDP, e encontram-se descritos na Tabela 6.1. As dimensões do problema

	QP	SDP
preços BS	3.49×10^{-3} (4.08×10^{-3})	3.69×10^{-3} (4.42×10^{-3})

Tabela 6.1: Resíduos obtidos para os preços de Black-Scholes usando as abordagens QP e SDP. Entre parêntesis estão indicados os valores absolutos por opção.

QP são as seguintes: 1248 variáveis, 2424 restrições de igualdade e 120 re-

restrições de desigualdade. O problema SDP, reformulado usando as restrições cónicas de segunda ordem (SOC), tem 1248 variáveis lineares, 197 variáveis SDP, 1249 variáveis SOC, 2424 restrições lineares, 352 restrições envolvendo apenas variáveis SDP, 476 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SDP e 1248 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SOC. Refira-se, finalmente, que o problema é relativamente robusto em relação ao número de nós escolhido para a discretização do activo. De facto, obtemos resultados semelhantes se considerarmos 20 ou 30 nós para o activo, ou ainda, se fizermos algumas alterações à sua localização.

Para demonstrar a eficiência da nossa abordagem na estimação temporal da função densidade de risco neutro, gerámos outro conjunto de dados, relacionado com preços de opções sobre activos que seguem um processo de difusão absoluta (ver [5, 27, 31, 67]) da forma:

$$dS_t = (r - d)S_t dt + 15dW_t, \quad t \in [0, \tau], \quad \tau > 0, \quad (6.17)$$

em que W_t segue um movimento Browniano e τ é uma data fixa. A escolha dos parâmetros foi feita de acordo com o estudo feito em [5, 27, 67]: o valor para o activo subjacente é 100, a taxa de juro isenta de risco é $r = 0.05$ e a taxa de dividendo é 0.02. Considerámos 7 maturidades, $\mathcal{T} = \{\frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}, \frac{12}{12}\}$, e, para cada uma das maturidades, 15 preços de opções de compra. Existe uma fórmula analítica para o preço das opções de compra de tipo europeu quando o activo subjacente segue um processo de difusão absoluta do tipo (6.17); ver [31]. Sendo assim, os preços das opções foram calculados de acordo com esta fórmula. Considerámos 30 nós, relativamente à discretização dos valores do activo subjacente, situados entre 50 e 150. O conjunto dos nós temporais é $\{\frac{5}{12}, \frac{12}{12}\}$. A perturbação da Hessiana é igual à do caso de Black-Scholes. Não considerámos a existência de pesos $\theta_{T,k}$ e $\mu_{T,k}$. Quando o activo subjacente segue o processo (6.17) é conhecida, também, uma fórmula analítica para a função de densidade (ver [31]). A sua representação gráfica é feita na Figura 6.5 para uma sequência de instantes temporais $t = (5/12 : 0.002 : 1)$.

Como se pode ver nas Figuras 6.8 e 6.7, as funções de densidade estimadas são semelhantes às obtidas a partir da fórmula teórica da função de densidade. Quando representamos graficamente as funções de densidade de

risco neutro estimadas e exactas, para as maturidades consideradas, obtemos, de uma forma geral, um ajuste aceitável. Observa-se, apenas, uma ligeira discrepância na função de densidade estimada para a primeira maturidade.

O resíduo $E(y)$, para os preços de opções, considerando todas as maturidades, é também aceitável, tanto no caso QP como no caso SDP, como se pode ver na Tabela 6.2.

	QP	SDP
preços dif. abs.	$5.30 \times 10^{-3}(4.84 \times 10^{-3})$	$5.28 \times 10^{-3}(4.83 \times 10^{-3})$

Tabela 6.2: Resíduos obtidos para os preços de difusão absoluta usando as abordagens QP e SDP. Entre parêntesis estão indicados os valores absolutos por opção.

Torna-se importante referir a limitação desta abordagem para recuperar a função de densidade exacta. De facto, se considerarmos, para cada maturidade, um número pequeno de nós espaciais (5 ou 6), obtêm-se resíduos excelentes para os preços das opções (da ordem de 10^{-7}) e, no entanto, a função de densidade estimada difere muito da função densidade exacta. Assim, para um número de nós muito pequeno a abordagem apresenta um resíduo excelente mas não consegue recuperar a função de densidade exacta.

Existe alguma robustez da estimação em causa relativamente ao número e localização dos nós da função *spline*. Por exemplo, se alterarmos o número de nós relativos à discretização do activo, escolhendo um número entre 20 e 40 os resultados são semelhantes. E, ainda, se alterarmos os nós relativos à discretização temporal, escolhendo outro conjunto, a estimação obtida continua semelhante.

O problema QP resolvido tem 464 variáveis, 594 restrições de igualdade e 60 restrições de desigualdade. O problema SDP, reformulado usando as restrições cónicas de segunda ordem (SOC), tem 464 variáveis lineares, 88 variáveis SDP, 465 variáveis SOC, 594 restrições lineares, 264 restrições envolvendo apenas variáveis SDP, 352 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SDP e 464 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SOC.

Maturidade	Preço de exercício/Preço do activo									
	85%	90%	95%	100%	105%	110%	115%	120%	130%	140%
.175	.190	.168	.133	.113	.102	.097	.120	.142	.169	.2
.425	.177	.155	.138	.125	.109	.103	.100	.114	.130	.150
.695	.172	.157	.144	.133	.118	.104	.100	.101	.108	.124
.94	.171	.159	.149	.137	.127	.113	.106	.103	.100	.110
1	.171	.159	.150	.138	.128	.115	.107	.103	.099	.108
1.5	.169	.160	.151	.142	.133	.124	.119	.113	.107	.102
2	.169	.161	.153	.145	.137	.130	.126	.119	.115	.111
3	.168	.161	.155	.149	.143	.137	.133	.128	.124	.123
4	.168	.162	.157	.152	.148	.143	.139	.135	.130	.128
5	.168	.164	.159	.154	.151	.148	.144	.140	.136	.132

Tabela 6.3: Volatilidades implícitas para o conjunto de preços de opções do índice S&P500 reportado em [5, 27].

6.6 Dados de mercado de preços de opções

Efectuámos estimações da função de densidade de risco neutro usando, também, dados de mercado relativos a preços de opções. Utilizámos as abordagens QP e SDP descritas nas Secções 6.2 e 6.3.

O primeiro conjunto de dados de preços de opções utilizado foi retirado do estudo reportado em [5, 27] e diz respeito a opções de compra de tipo europeu, de Outubro de 1995. O conjunto inclui 10 maturidades (em anos), e para cada maturidade existem 10 preços de exercício. Os dados são apresentados na Tabela 6.3 sob a forma de volatilidades implícitas. Assim, para cada uma das maturidades estão registadas as volatilidades implícitas referentes a dez preços de exercício {501.5; 531; 560.5; 590; 619.5; 649; 678.5; 708; 767; 826}. Note-se que na tabela, em vez dos preços de exercício, estão considerados os quocientes entre o preço de exercício e o preço do activo. Tal como em [5, 27], considerámos 7 maturidades: {0.175; 0.425; 0.695; 0.94; 1; 1.5; 2; 3; 4; 5}. As especificações referentes ao conjunto de dados citado são as seguintes: o preço do activo é 590, a taxa de juro isenta de risco é 0.06 e a taxa de

	QP	SDP
S&P500 (1995)	13.65(3.00×10^{-1})	13.82(3.01×10^{-1})

Tabela 6.4: Resíduos obtidos para os preços do índice S&P500 (dados de 1995), usando as abordagens QP e SDP, para as sete maturidades. Entre parêntesis estão indicados os valores absolutos por opção.

dividendo é 0.0262.

A região sobre a qual foram colocados os nós espaciais e temporais foi escolhida de forma cuidadosa de modo a que o intervalo de discretização do preço do activo subjacente esteja centrado (aproximadamente) em 590. Considerámos 28 nós espaciais, igualmente espaçados, pertencentes ao intervalo [472, 826]. O conjunto de nós relativo à discretização das maturidades é $\{0.175, 2\}$. A modificação da Hessiana, relativa à função objectivo, é a mesma efectuada anteriormente. Não considerámos a utilização de pesos $\theta_{T,K}$, $\mu_{T,K}$ neste problema, uma vez que não temos informação referente à precisão dos preços observados.

Como podemos ver pelas Figuras 6.9 e 6.10, as abordagens QP e SDP apresentam resultados semelhantes. Estes resultados diferem do comportamento das funções de densidade lognormais. Nota-se, ainda, uma evolução na forma da função de densidade estimada, que pode ser justificada com o aumento da incerteza associada às maturidades mais longas.

A Figura 6.11 apresenta o ajuste entre os preços estimados e os preços observados. O valor do resíduo, referente ao somatório das maturidades para as abordagens QP e SDP, é dado na Tabela 6.4.

As dimensões do problema QP são as seguintes: 432 variáveis, 552 restrições de igualdade e 56 restrições de desigualdade. As dimensões relativas ao problema SDP são dadas por: 432 variáveis lineares, 54 variáveis SDP, 433 variáveis SOC, 552 restrições lineares, 162 restrições envolvendo apenas variáveis SDP, 216 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SDP e 432 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SOC.

O segundo conjunto de dados, relativo ao índice S&P500, diz respeito a dados referentes a 4 de Outubro de 2006, com maturidade em Outubro, Novem-

bro e Dezembro de 2006. A informação sobre a taxa de juro foi obtida a partir do *Federal Reserve Bank of New York*. A taxa de dividendo foi recolhida a partir da *Standard & Poors*. Os preços de exercício são diferentes para cada uma das maturidades. Assim, temos o conjunto {1320, 1325, 1330, 1335, 1340, 1345, 1350, 1360, 1370, 1375, 1380, 1385} para a primeira maturidade, o conjunto {1320, 1330, 1335, 1345, 1350, 1360, 1370, 1375, 1380, 1385} para a segunda maturidade e o conjunto {1320, 1325, 1330, 1335, 1340, 1345, 1350, 1360, 1375, 1380, 1385} para a terceira maturidade. O tratamento dos dados foi semelhante ao efectuado anteriormente para os dados do índice S&P500 (ver Secção 5.2). Depois de obtermos os dados relativos aos preços de opções, os preços das opções de venda foram transformados em preços de opções de compra usando a paridade *put-call*. No caso de já existir um preço de opção de compra, relativo ao mesmo preço de exercício, foi escolhido o preço com maior volume de transacção. Seguidamente, verificámos a monotonia e convexidade, relativamente à função preço, de modo a eliminar a arbitragem dos dados.

Os nós temporais da função *spline* correspondem à primeira e última maturidades {0.044, 0.2}. A escolha da região para colocar os nós foi feita cuidadosamente. Houve um cuidado especial com a posição dos nós, nomeadamente, não escolhendo nós muito próximos uns dos outros. Sendo o valor do preço do activo subjacente 1345 foram considerados 16 nós espaciais, situados entre 1281 e 1675. Observámos que se a escolha do número de nós for muito pequena, por exemplo, menor que 10, a função de densidade de risco neutro estimada exhibe menor suavidade do que para um número de nós superior a 10. Tal como nos casos anteriores, a matriz Hessiana referente ao problema foi modificada do modo já referido. O resíduo final $E(y)$, referente às três maturidades, é apresentado na Tabela 6.5.

As Figuras 6.12 e 6.13 apresentam as funções de densidade estimadas usando a abordagem QP e SDP, relativamente a este conjunto de dados. Observa-se, nas duas figuras, um comportamento de mistura de densidades, sendo mais pronunciado na abordagem QP.

Usando a estimação da função de densidade de risco neutro, calculámos os preços que designamos por preços estimados. O ajuste, entre os preços

	QP	SDP
dados S&P500 (2006)	2.71(7.25×10^{-1})	2.97(7.56×10^{-1})

Tabela 6.5: Resíduos obtidos para os preços do índice S&P500 (dados de 2006), usando as abordagens QP e SDP, para as três maturidades. Entre parêntesis estão indicados os valores absolutos por opção.

observados e os preços estimados, está representado na Figura 6.14. Este ajuste é aceitável (excepto para a primeira maturidade). De facto, tanto para a abordagem QP como para a abordagem SDP, os preços estimados respeitam os intervalos *bid-ask* para as segunda e terceira maturidades. Os autores Hamida e Cont [48] referem o facto da solução ser aceitável quando os preços estimados estão no intervalo *bid-ask*.

O problema QP tem 288 variáveis, 363 restrições de igualdade e 32 restrições de desigualdade. O problema SDP, reformulado usando restrições cónicas de segunda ordem, tem as seguintes dimensões: 288 variáveis lineares, 46 variáveis SDP, 289 variáveis SOC, 363 restrições lineares, 158 restrições envolvendo apenas variáveis SDP, 184 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SDP e 288 restrições envolvendo variáveis lineares e variáveis SOC.

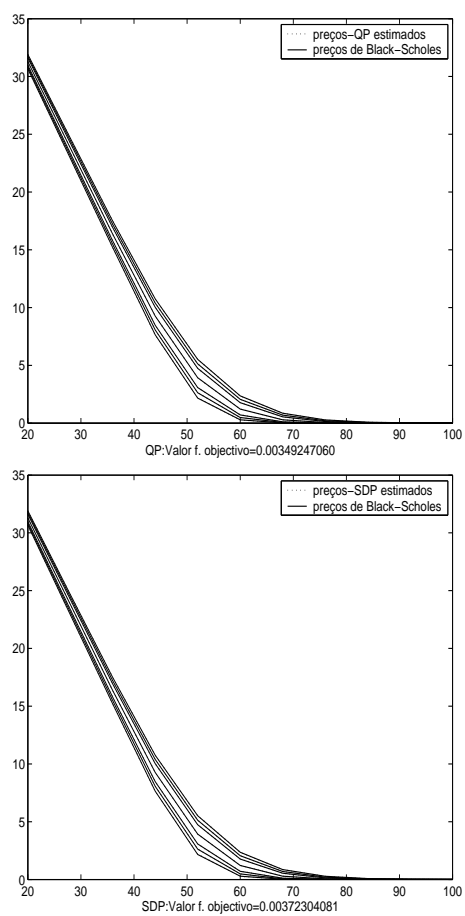


Figura 6.4: Ajuste entre os preços estimados, pelas abordagens QP e SDP, e os preços de Black-Scholes, para as sete maturidades.

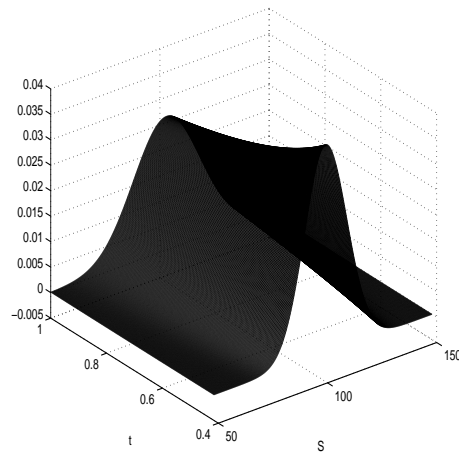


Figura 6.5: Funções de densidade de risco neutro, para os dados de difusão absoluta, representadas para uma sequência de instantes temporais $t = (5/12 : 0.002 : 1)$.

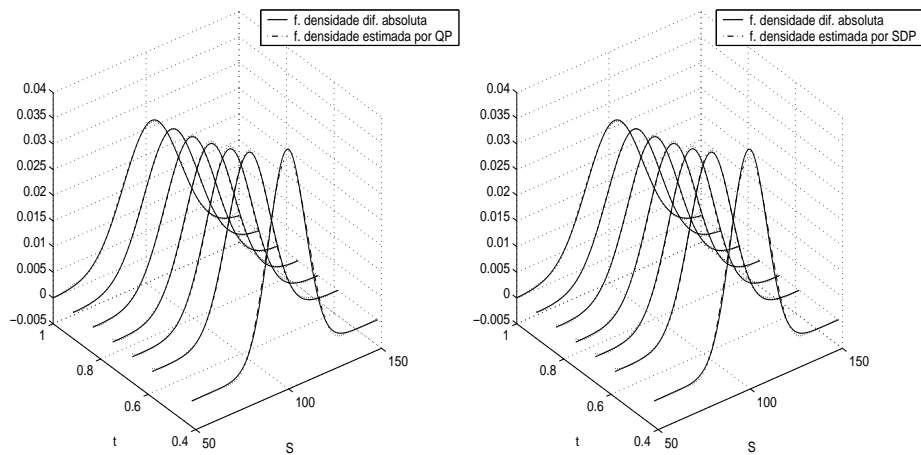


Figura 6.6: Ajuste entre as funções de densidade de risco neutro estimadas e as funções de densidade para dados de difusão absoluta, para cada uma das maturidades.

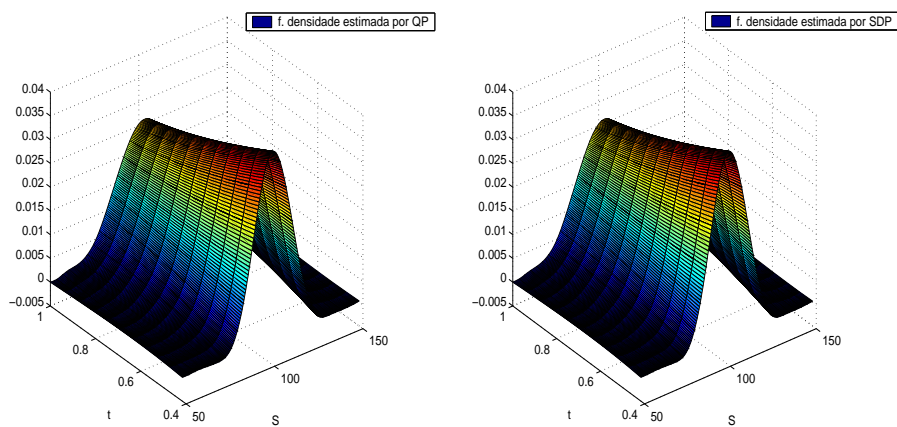


Figura 6.7: Funções de densidade de risco neutro, estimadas a partir de dados de difusão absoluta, usando as abordagens QP e SDP, representadas para uma sequência de 10 instantes temporais no intervalo $[5/12 \ 12/12]$ (coube ao MATLAB interpolar graficamente entre as diversas linhas temporais de discretização).

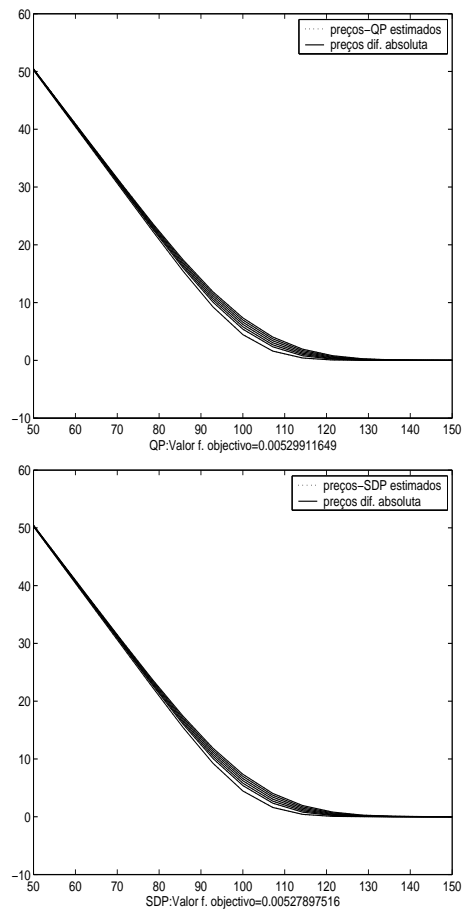


Figura 6.8: Ajuste entre os preços estimados, pelas abordagens QP e SDP, e os preços de difusão absoluta, para as sete maturidades.

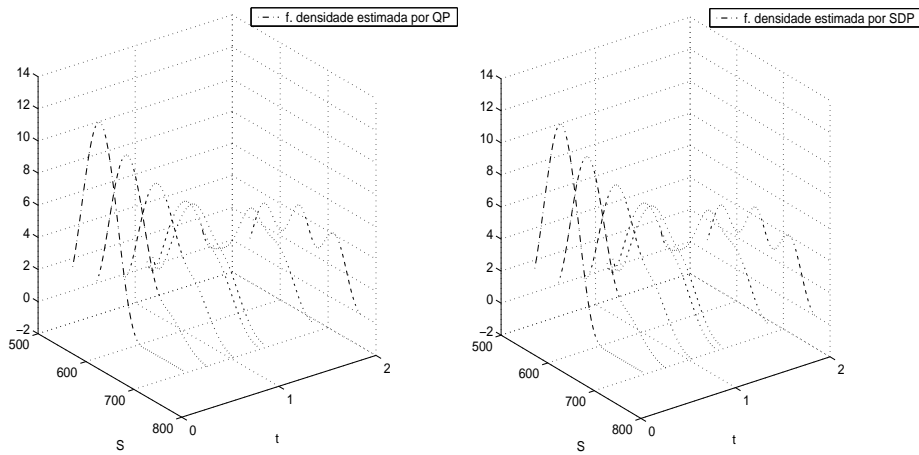


Figura 6.9: Funções de densidade de risco neutro estimadas para os dados de 1995 do índice S&P500, referentes às sete maturidades, usando as abordagens QP e SDP.

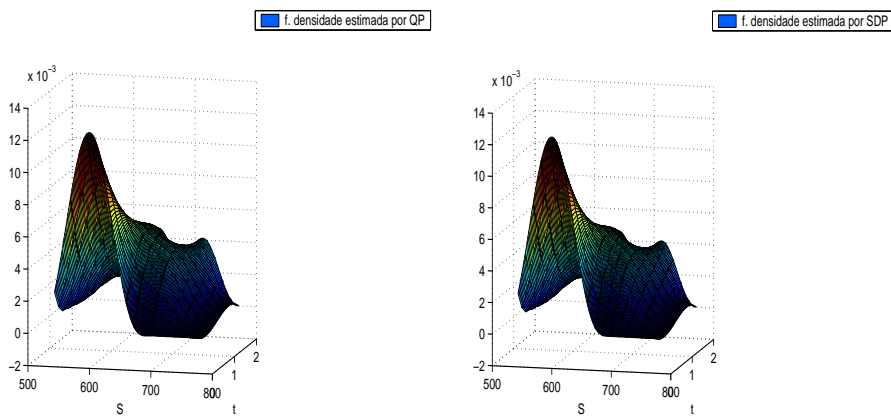


Figura 6.10: Funções de densidade de risco neutro, estimadas a partir de dados de 1995 do índice S&P500, usando as abordagens QP e SDP, representadas para uma sequência de 10 instantes temporais no intervalo $[0.175 \ 2]$ (coube ao MATLAB interpolar graficamente entre as linhas temporais de discretização).

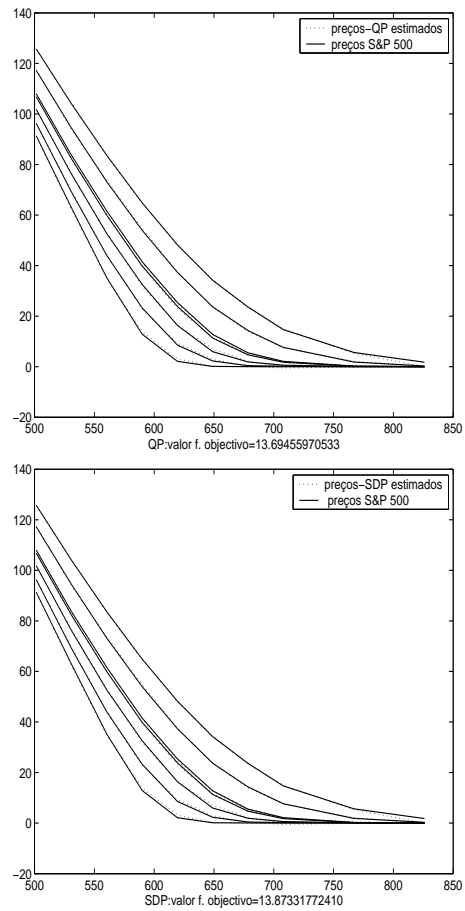


Figura 6.11: Ajuste entre os preços estimados, pelas abordagens QP e SDP, para os preços observados do índice S&P500 (dados de 1995), para as sete maturidades.

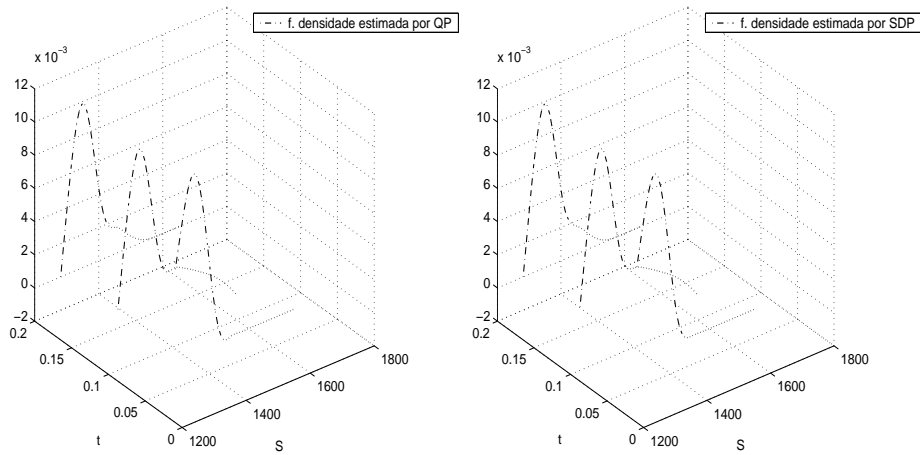


Figura 6.12: Funções de densidade de risco neutro estimadas para dados de 2006 do índice S&P500, referentes às três maturidades e usando as abordagens QP e SDP.

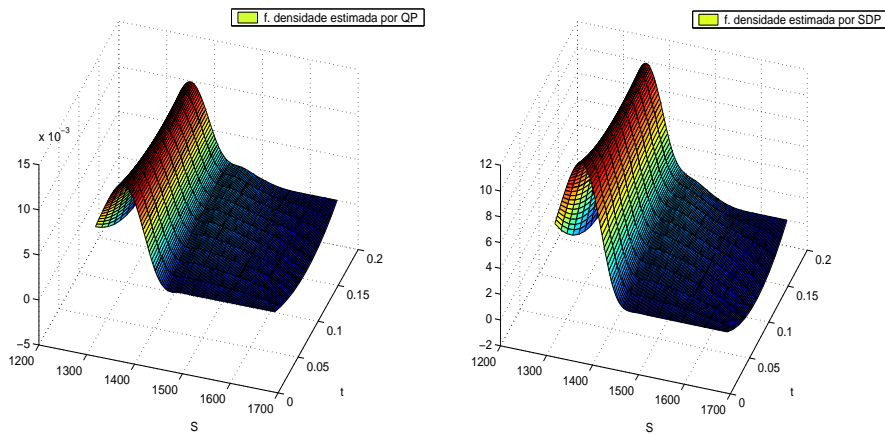


Figura 6.13: Funções de densidade de risco neutro, estimadas a partir de dados de 2006 do índice S&P500, usando as abordagens QP e SDP, representadas para uma sequência de 10 instantes temporais no intervalo $[0.044 \ 0.2]$ (coube ao MATLAB interpolar graficamente entre as linhas temporais de discretização).

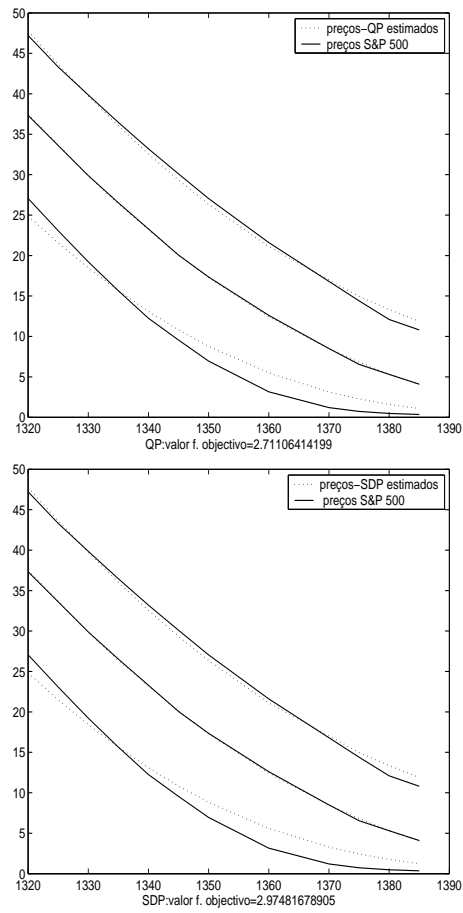


Figura 6.14: Ajuste entre os preços estimados, pelas abordagens QP e SDP, e os preços observados do índice S&P500 (dados de 2006), para as três maturidades.

Capítulo 7

Conclusões

7.1 Observações finais

Neste trabalho foram desenvolvidos novos métodos para a estimação da função de densidade de risco neutro, relativa ao preço de um activo subjacente. A estimação foi feita a partir dos preços das opções usando funções *spline* cúbicas e bicúbicas. O problema de determinação dos parâmetros do modelo resultou num problema de programação quadrática (QP) ou num problema de programação semidefinida (SDP).

Considerámos, inicialmente, problemas em que as opções financeiras tinham todas a mesma maturidade. Os problemas QP e SDP obtidos resultaram do facto da restrição de não negatividade, associada à função de densidade, ter sido imposta de duas formas distintas. Na primeira forma, foram adicionadas desigualdades lineares que garantem a não negatividade da função de densidade nos nós da função *spline*. Estas desigualdades mantiveram a estrutura QP do problema. Na segunda forma, a não negatividade é garantida em todo o domínio da função de densidade recorrendo a restrições semidefinidas positivas. O problema passa, por isso, a ser de programação semidefinida (SDP) e é convertido num problema de programação cónica de segunda ordem (SOCP). A abordagem QP permitiu obter, de uma forma geral, estimações não negativas tanto para preços simulados de opções como para preços de mercado. No entanto, houve situações em que foi necessário recorrer ao problema SDP para

obter estimações não negativas.

Foi feita a extensão do modelo de modo a serem utilizados preços de opções com várias maturidades. As funções de densidade de risco neutro para vários instantes temporais foram estimadas usando funções *spline* bicúbicas. Os problemas de optimização obtidos respeitam as formas anteriores, isto é, a imposição de não negatividade nos nodos origina um problema QP. Por outro lado, a imposição da não negatividade ao longo dos nós espaciais para os vários instantes temporais e ao longo dos nós temporais para os diferentes nós espaciais (isto é, nos segmentos de recta definidos pela malha rectangular) origina um problema SDP.

Os resultados obtidos mostram a eficiência dos métodos na estimação da função de densidade de risco neutro. No entanto, o valor do resíduo calculado entre os preços simulados ou observados e os preços estimados é sempre melhor no caso dos dados simulados. Quando consideramos dados de mercado, o ajuste dos preços não é tão bom como no caso dos dados simulados, embora, de uma forma geral, seja satisfatório uma vez que os preços estimados satisfazem, quase sempre, o intervalo de preços *bid-ask* definido pelo mercado.

7.2 Sugestões para trabalho futuro

O trabalho feito nesta dissertação pode ser melhorado apresentando, por exemplo, um processo para a determinação do número de nós óptimo e da sua posição, em função dos dados e do objectivo do estudo. Por exemplo, poderemos estar mais interessados na cauda esquerda da função de densidade se o objectivo for o controle do risco, ou na cauda direita se pretendermos estabelecer o preço de determinadas opções exóticas. O posicionamento dos nós pode reflectir estes diferentes objectivos.

Este trabalho pode igualmente ser aplicado na determinação do preço de opções exóticas. Mais concretamente, poderemos determinar o preço de opções digitais cujo preço depende do valor atingido pelo activo subjacente recorrendo ao conhecimento da sua função de densidade de risco neutro. Também a função de volatilidade pode ser estimada a partir do conhecimento da função

de densidade. De facto, podemos, a partir daqui, usar o conhecimentos dos preços estimados (usando a função de densidade) para obter a volatilidade estimada.

Apêndice A

A.1 Funções *spline* cúbicas

As funções *spline* são usadas nas mais variadas áreas, as mais comuns são as áreas da computação gráfica ou do processamento de sinal e imagem. No entanto, outros campos de aplicação têm surgido como, por exemplo, as finanças.

Definição A.1.1 *Uma função $g(x)$, definida num intervalo finito $[a, b]$, diz-se uma função *spline* de grau 3 ou *spline* cúbica, tendo como nós a sequência estritamente crescente x_s , $s = 1, \dots, n_s$, ($x_1 = a$, $x_{n_s+1} = b$), se as condições seguintes forem satisfeitas:*

1. *Em cada intervalo $[x_s, x_{s+1}]$, $s = 1, \dots, n_s$, a função é dada por um polinómio de grau inferior ou igual a 3.*
2. *A função $g(x)$ e as suas derivadas até à segunda ordem são contínuas em $[a, b]$.*

Observação A.1.2 1. *Se pretendermos determinar uma função *spline* $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que passe pelos pontos $(x_s, g(x_s))$, $s = 1, \dots, n_s + 1$, $x_1 = a$, $x_{n_s+1} = b$, designamos a função *spline* por *spline* interpoladora.*

2. *Qualquer polinómio de grau 3, definido em $[a, b]$, é uma função *spline* cúbica em $[a, b]$.*

3. De uma forma geral, uma função *spline* cúbica é dada por diferentes polinómios em cada subintervalo.

Definição A.1.3 Uma função *spline* cúbica natural $g(x)$ é uma função *spline* que satisfaz as seguintes restrições

$$g^{(2)}(a) = g^{(2)}(b) = 0.$$

As funções *spline* usam-se na aproximação de funções. Um problema usual consiste em considerar os valores da variável independente x_s , $s = 1, \dots, n_s + 1$, e os valores aproximados da variável dependente f_s , $s = 1, \dots, n_s + 1$, e procurar uma função $f(x)$ de modo que $f(x_s) = f_s$ ou $f(x_s) \simeq f_s$, $s = 1, \dots, n_s + 1$.

Quando os dados f_s são precisos pode dar-se maior relevância à função interpoladora $f(x)$, tal que $f(x_s) = f_s$, $s = 1, \dots, n_s + 1$. No entanto, pode pretender-se uma função suficientemente suave para poder, por exemplo, derivar ou integrar. As funções *spline* cúbicas permitem obter eficiência computacional, em termos de tempo e memória, e simultaneamente boas aproximações.

Um critério possível de aproximação é o dos mínimos quadrados

$$\min \sum_{s=1}^{n_s+1} [f_s - f(x_s)]^2. \quad (\text{A.1})$$

A escolha dos nós é uma tarefa delicada. De uma forma geral, devem ser colocados mais nós na região onde se presume que a função a aproximar varie mais rapidamente, mas isso requer, por vezes, várias tentativas. Quando consideramos funções *spline* cúbicas em cada intervalo $[x_s, x_{s+1}]$ referente aos nós, a função é dada por um polinómio cúbico $f_s(x) = \alpha_s x^3 + \beta_s x^2 + \gamma_s x + \delta_s$, $s = 1, \dots, n_s$. Deste modo, de acordo com a Definição A.1.1 e a Observação A.1.2, temos que

$$f_s(x_s) = f(x_s), \quad s = 1, \dots, n_s, \quad \text{e} \quad f_{n_s}(x_{n_s+1}) = f(x_{n_s+1}), \quad (\text{A.2})$$

$$f_{s-1}(x_s) = f_s(x_s), \quad s = 2, \dots, n_s, \quad (\text{A.3})$$

$$f'_{s-1}(x_s) = f'_s(x_s), \quad s = 2, \dots, n_s, \quad (\text{A.4})$$

$$f''_{s-1}(x_s) = f''_s(x_s), \quad s = 2, \dots, n_s, \quad (\text{A.5})$$

$$f''_1(x_1) = 0 \quad \text{e} \quad f''_{n_s}(x_{n_s+1}) = 0, \quad (\text{A.6})$$

o que resulta em $4n_s$ incógnitas e $4n_s$ condições.

A.2 Funções *spline* bicúbicas

É possível alargar o conceito de função *spline* cúbica a funções de duas variáveis.

Definição A.2.1 *Consideremos as seguintes seqüências estritamente crescentes:*

$$\begin{aligned} a &= x_1 < x_2 < \cdots < x_{n_s+1} = b, \\ c &= u_1 < u_2 < \cdots < u_{n_t+1} = d. \end{aligned}$$

A função $p(x, u)$, definida em $[a, b] \times [c, d]$, diz-se uma função *spline* bicúbica de grau 3 em x e u , com nós x_s , $s = 1, \dots, n_s + 1$, e u_t , $t = 1, \dots, n_t + 1$, se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

1. Em cada subrectângulo $R_{st} = [x_s, x_{s+1}] \times [u_t, u_{t+1}]$, $s = 1, \dots, n_s$, $t = 1, \dots, n_t$, $p(x, u)$ é dada por um polinómio de grau inferior ou igual a 3 em x e u .
2. A função $p(x, u)$ e as suas derivadas parciais $\frac{\partial^{i+j} p(x, u)}{\partial x^i \partial u^j}$, $0 \leq i < 3, 0 \leq j < 3$, são contínuas em \mathbb{R} .

Estas funções *spline* podem ser usadas no problema de aproximação de uma função de duas variáveis. Tal como no caso unidimensional, uma possibilidade de determinação da função *spline* consiste em considerar o problema de mínimos quadrados:

$$\min \sum_{s=1}^{n_s+1} \sum_{t=1}^{n_t+1} [f_{st} - p(x_s, u_t)]^2, \quad (\text{A.7})$$

em que f_{st} são as observações referentes aos nodos (x_s, u_t) , $s = 1, \dots, n_s$, $t = 1, \dots, n_t$.

A.3 Problemas de programação quadrática

Consideremos um problema de optimização com restrições na sua forma geral:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & h_i(x) = 0, i \in \mathcal{E}, \\ & h_i(x) \geq 0, i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

em que f e h_i , $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, são funções continuamente diferenciáveis, definidas de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O conjunto \mathcal{E} contém os índices relativos às restrições de igualdade e o conjunto \mathcal{I} contém os índices relativos às restrições de desigualdade. A função $f(x)$ designa-se por função objectivo e o conjunto dos pontos Ω que satisfazem todas as restrições designa-se por região admissível. Podemos, então, escrever o problema (A.8) na forma mais abreviada:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & x \in \Omega, \end{aligned} \tag{A.9}$$

Se a região Ω for um conjunto vazio então diz-se que o problema é não admissível.

É possível classificar os problemas de optimização consoante as suas características, nomeadamente, o tipo da função objectivo e das restrições do problema. Se a função objectivo $f(x)$ e as restrições $h_i(x)$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, forem lineares diremos que se trata de um problema de optimização ou programação linear. Se, por outro lado, alguma destas funções for não-linear diremos que se trata de um problema de optimização não-linear.

No caso particular da função objectivo ser quadrática e das restrições serem lineares, estamos na presença de um problema de programação quadrática (QP):

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x \\ \text{s.a} \quad & a_i^\top x = b_i, i \in \mathcal{E}, \\ & a_i^\top x \geq b_i, i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \tag{A.10}$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica, \mathcal{E} e \mathcal{I} são conjuntos finitos de índices e c, x e a_i , $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, são vectores com n elementos. Neste caso Ω é um conjunto convexo. Se a matriz Q for semidefinida positiva então a função objectivo

em (A.10) é convexa e tem-se, assim, um problema convexo de programação quadrática. Quando isto acontece, todo o minimizante local é global. Por outro lado, se a matriz Q for indefinida a função objectivo é não convexa e pode haver minimizantes locais que não são minimizantes globais.

A função Lagrangeana associada ao problema (A.10) é dada por

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^\top Qx + c^\top x - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i (a_i^\top x - b_i),$$

em que λ_i , $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, são os multiplicadores de Lagrange. Designe-se por $\mathcal{A}(x)$ o conjunto das restrições activas num qualquer ponto admissível x , ou seja,

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{E} \cup \{i \in \mathcal{I} : a_i^\top x - b_i = 0\}.$$

Vamos descrever as condições de optimalidade para o problema de programação quadrática (A.10). Começamos por apresentar as condições necessárias de primeira ordem usualmente designadas por condições de Karush-Kuhn-Tucker (condições KKT).

Teorema A.3.1 *Suponhamos que x^* é um minimizante local de (A.10). Então existe um vector de multiplicadores de Lagrange λ^* , com componentes λ_i^* , $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, tal que*

$$Qx^* + c - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i^* a_i = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$a_i^\top x^* = b_i, \quad \forall i \in \mathcal{E}, \quad (\text{A.12})$$

$$a_i^\top x^* \geq b_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (\text{A.13})$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (\text{A.14})$$

$$\lambda_i^* (a_i^\top x^* - b_i) = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{E}. \quad (\text{A.15})$$

Note-se a ausência explícita de uma qualificação de restrições neste resultado. Porém, é conhecido que o facto das restrições serem definidas por funções afins, o que é o caso, constitui, por si mesmo, uma qualificação de restrições.

Atendendo à condição de complementaridade (A.15) temos que, para $i \in \mathcal{I}$, se $a_i^\top x^* > b_i$ então $\lambda_i^* = 0$, isto é, quando a restrição não é activa o respectivo

multiplicador de Lagrange é nulo. Podemos, por isso, reescrever as condições KKT considerando o conjunto das restrições activas para $\mathcal{A}(x^*)$. Concluimos que, se x^* é um minimizante local de (A.10), então satisfaz,

$$Qx^* + c - \sum_{i \in \mathcal{A}(x^*)} \lambda_i^* a_i = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$a_i^\top x^* = b_i, \quad \forall i \in \mathcal{A}(x^*), \quad (\text{A.17})$$

$$a_i^\top x^* \geq b_i, \quad \forall i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{A}(x^*), \quad (\text{A.18})$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \cap \mathcal{A}(x^*). \quad (\text{A.19})$$

Sendo a função objectivo e as restrições duas vezes continuamente diferenciáveis, pode usar-se a informação relativa à curvatura das funções para seleccionar os minimizantes. De facto, a partir da informação das primeiras derivadas não sabemos se o valor da função objectivo cresce ou decresce. Vamos apresentar, de seguida, as condições necessárias e suficientes de segunda ordem. Estas relacionam o facto de x^* ser um minimizante do problema com a curvatura da função Lagrangeana. Consideremos o conjunto formado pelos gradientes das funções que definem as restrições activas e formemos a matrix $A = [a_i^\top]_{i \in \mathcal{A}(x^*)}$. Consideremos o espaço nulo $N(A)$ desta matrix. Defina-se a matrix Z cujas colunas formam uma base para $N(A)$.

Teorema A.3.2 *Suponhamos que x^* é um minimizante local para o problema (A.10). Seja λ^* um vector de multiplicadores de Lagrange que verifica (A.11)-(A.15). Então*

$$Z^\top QZ \text{ é semidefinida positiva.}$$

As condições suficientes relativas ao problema (A.10) garantem que x^* é um minimizante local do problema.

Teorema A.3.3 *Seja x^* um ponto admissível para o problema (A.10). Suponhamos que existe um vector de multiplicadores de Lagrange λ^* tal que as condições (A.11)-(A.14) são satisfeitas, que*

$$a_i^\top x = b_i, i \in \mathcal{I} \text{ implica } \lambda_i^* > 0,$$

e que $Z^\top QZ$ é definida positiva. Então x^ é um minimizante local.*

Vamos, de seguida, resumir alguns dos métodos para resolver problemas QP. Começamos com o *método de restrições activas*, que é eficaz na resolução de problemas de pequena dimensão. Este tipo de métodos gera sucessões de pontos admissíveis para o problema (A.10) fazendo decrescer a função objectivo. Suponhamos que a matriz Q é semidefinida positiva, isto é, consideremos um problema convexo. Em cada iteração k , este método considera o ponto admissível x_k e um conjunto de restrições de igualdade correspondentes às restrições activas no ponto, calcula uma direcção de descida p_k , que é solução de um problema quadrático sujeito às restrições lineares definidas anteriormente. Calculada a direcção p_k , é necessário definir quanto é que se avança segundo essa direcção e, para isso, recorre-se aos índices correspondentes às restrições não activas que verificam $a_i^\top p_k < 0$. O processo iterativo continua juntando ao conjunto das restrições activas uma das restrições para a qual se verifica $a_i^\top p_k < 0$. Este processo pára quando se obtém como direcção de descida p_k tal que $\|p_k\| \simeq 0$. Recorrendo ao sinal dos multiplicadores de Lagrange, associados às restrições de desigualdade activas consideradas, actualiza-se o conjunto das restrições activas consideradas ou dá-se por finalizado o processo de obtenção da solução.

O *método de projecção do gradiente* promove mudanças mais rápidas no conjunto das restrições activas quando comparado com o método de restrições activas, e é particularmente eficaz quando as restrições estabelecem limites inferiores e superiores ($\ell, u \in \mathbb{R}^n$) para as variáveis. Constrói-se um caminho sequencialmente linear, obtido por projecção da direcção de descida máxima sobre o conjunto admissível. Procura-se, neste caminho, um minimizante local para $\frac{1}{2}x(t)^\top Qx(t) + c^\top x(t)$, designado por ponto de Cauchy x^c . Seguidamente, resolve-se, de forma aproximada, um problema quadrático em que o conjunto das restrições activas diz respeito às componentes de x^c que coincidem com algum dos seus limites.

O *método de pontos interiores* considera um problema QP e o seu dual. Depois de estabelecidas as condições de optimalidade, estes métodos usam variações do método de Newton para satisfazer as restrições de igualdade que fazem parte dessas condições. Por outro lado, as restrições de desigualdade

presentes nessas condições são satisfeitas de forma estrita. Estes métodos geram iteradas afastadas da fronteira do conjunto admissível conseguindo, desta forma, uma maior eficiência para, sobretudo, problemas de grandes dimensões.

Uma descrição mais detalhada dos métodos usados para resolver problemas QP pode ser encontrada, por exemplo, em [19, 43, 46, 79].

A.4 Problemas de programação semidefinida

Nos problemas de programação semidefinida (SDP) pretende-se determinar uma matriz simétrica que otimiza uma função linear sujeita a restrições lineares, impondo que as matrizes sejam semidefinidas positivas. O conjunto das variáveis do problema é, assim, representado por uma matriz simétrica semidefinida positiva. Estes problemas podem ser expressos na forma:

$$\begin{aligned} \min_{X \in S^n} \quad & C \bullet X \\ \text{s.a.} \quad & A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X \succeq 0, \end{aligned} \tag{A.20}$$

em que $C, A_i, X \in S^n$, sendo S^n o subespaço das matrizes simétricas, reais, de ordem n , e $b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$. As matrizes A_i e C são dados do problema. A expressão $C \bullet X$ designa o produto interno das matrizes simétricas definido por

$$C \bullet X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} = \text{tr}(CX). \tag{A.21}$$

Atendendo a que as restrições semidefinidas são convexas estamos na presença de um problema convexo.

O dual do problema SDP escreve-se na forma:

$$\begin{aligned} \max_{y, S} \quad & b^\top y \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, \\ & S \succeq 0, \end{aligned} \tag{A.22}$$

em que $b, y \in \mathbb{R}^m$ e $S \in S^n$.

Para simplificar a escrita dos problemas pode considerar-se o operador linear $\mathcal{A} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dado por $\mathcal{A}X = (A_i \bullet X)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$, sendo o seu operador adjunto dado por $\mathcal{A}^* : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n$ e $\mathcal{A}^*y = \sum_{i=1}^m y_i A_i$. Os problemas primal e dual passam, assim, a ser escritos na forma:

$$\begin{aligned} \min_X \quad & C \bullet X \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{A}X = b, \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \tag{A.23}$$

e

$$\begin{aligned} \max_{y,S} \quad & b^\top y \\ \text{s.a} \quad & \mathcal{A}^*y + S = C, \\ & S \succeq 0. \end{aligned} \tag{A.24}$$

Vamos, de seguida, apresentar dois resultados relacionados com as dualidades fraca e forte para problemas SDP (ver [90]).

Proposição A.4.1 *Se X é uma solução admissível para (A.23) e (y, S) é uma solução admissível para (A.24) então $C \bullet X - b^\top y = X \bullet S \geq 0$.*

Assim, dados X e (y, S) , soluções admissíveis para o primal e para o dual, a diferença entre o valor da função objectivo do primal e do dual (*duality gap*) é sempre não negativa.

Proposição A.4.2 *Se X é uma solução admissível para (A.23) tal que $X \succ 0$ e (y, S) é uma solução admissível para (A.24), então (A.20) tem um conjunto, não vazio, compacto, de soluções óptimas e $C \bullet X - b^\top y = X \bullet S = 0$.*

Nas condições da Proposição A.4.2 podemos enunciar as seguintes condições necessárias e suficientes de optimalidade:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*y + S &= C, \quad S \succeq 0, \\ \mathcal{A}X &= b, \quad X \succeq 0, \\ X \bullet S &= 0. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Os algoritmos usados para resolver problemas SDP incluem generalizações de métodos de pontos interiores. De facto, estes métodos, originalmente desenvolvidos para programação linear e quadrática podem ser ajustados aos problemas SDP. Basicamente, procura-se resolver o problema primal-dual seguindo o caminho central. As variações em torno deste método produzem diferentes algoritmos para o problema. Existem também métodos para optimização convexa não diferenciável especialmente adequados a problemas SDP de grandes dimensões.

Os problemas SDP fazem parte de um grupo mais vasto de problemas designado por optimização cónica. Os problemas de optimização cónica tomam a forma

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \in K, \end{aligned} \tag{A.26}$$

em que $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e K é um cone fechado e convexo em \mathbb{R}^n . Quando concretizamos o cone K como sendo o cone de segunda ordem, ou cone quadrático:

$$C_q^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \| (x_2, \dots, x_n) \|\}, \tag{A.27}$$

dizemos que se trata de um problema de programação cónica de segunda ordem (SOCP). Se, por outro lado, o cone K corresponder ao cone das matrizes semidefinidas positivas:

$$C_s^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X = X^\top, X \succeq 0\}, \tag{A.28}$$

em que a variável X não é um vector mas uma matriz simétrica, dizemos que se trata de um problema de programação semidefinida. Podemos ter, por exemplo, um problema mais geral envolvendo restrições lineares e restrições cónicas referentes aos cones (A.27) e (A.28).

A.5 Dados S&P500

Apresentamos, de seguida, os dados referentes aos Conjuntos 1, 2 e 3 da Secção 5.2 e ao exemplo com três maturidades da Secção 6.6.

Conjunto 1 (Secção 5.2)		
Preço de exercício	Preço da opção de compra	Preço $(bid+ask)/2$
650	267.24	266.5
675	242.24	241.5
700	217.25	216.5
750	167.33	166.6
775	142.39	141.7
810	107.7	106.9
825	92.87	92.2
830	88.02	87.3
850	68.83	68.1
860	59.28	58.8
865	54.74	54.2
870	50.39	49.8
875	46.09	45.4
890	33.3	32.75
900	25.81	25.3
910	19.61	19.1
915	16.52	16.3
925	12.0	11.55
935	7.62	7.4
950	3.6	3.65
975	1.1	0.975
995	0.3	0.3
1025	0.1	0.275
1100	0.05	0.25

Tabela A.1: Dados S&P500 referentes ao Conjunto 1 da Secção 5.2, relativos ao dia 29 de Abril de 2003 e com vencimento em 17 de Maio de 2003. O preço do activo foi 916.84.

Conjunto 2 (Secção 5.2)		
Preço de exercício	Preço da opção de compra	Preço $(bid+ask)/2$
875	218.77	217.9
900	193.64	193.1
925	168.8	168.4
950	144.32	143.7
995	100.44	100.0
1025	72.26	71.7
1040	59.07	58.2
1050	50.38	49.6
1060	42.0	41.4
1080	26.0	26.35
1090	20.0	20.1
1100	14.3	14.75
1110	10.2	10.55
1120	7.0	7.1
1130	4.5	4.35
1140	2.3	2.65
1150	1.5	1.5
1160	0.75	0.9
1170	0.55	0.525
1190	0.20	0.20
1200	0.15	0.175
1225	0.05	0.075
1025	0.1	0.275
1100	0.05	0.25

Tabela A.2: Dados S&P500 referentes ao Conjunto 2 da Secção 5.2, relativos ao dia 24 de Março de 2004 e com vencimento em 17 de Abril de 2004. O preço do activo foi 1092.7.

Conjunto 3 (Secção 5.2)		
Preço de exercício	Preço da opção de compra	Preço $(bid+ask)/2$
900	199.81	196.3
1005	101.0	101.45
1025	85.5	85.0
1050	67.0	66.1
1075	49.0	49.1
1085	43.0	42.9
1100	35.0	34.5
1130	21.0	20.7
1175	7.7	7.9
1200	3.8	3.75
1350	0.25	0.25

Tabela A.3: Dados S&P500 referentes ao Conjunto 3 da Secção 5.2, relativos ao dia 24 de Março de 2004 e com vencimento em 19 de Junho de 2004. O preço do activo foi 1092.7.

Conjunto relativo às três maturidades (Secção 6.6)					
Mat. 21 Out. 2006		Mat. 18 Nov. 2006		Mat. 16 Dez. 2006	
PE	POC	PE	POC	PE	POC
1320	27.06	1320	37.33	1320	47.22
1325	23.07	1330	29.89	1325	43.31
1330	19.23	1335	26.52	1330	39.86
1335	15.64	1345	20.05	1335	36.46
1340	12.25	1350	17.35	1340	33.2
1345	9.55	1360	12.6	1345	30.1
1350	6.95	1370	8.5	1350	27.05
1360	3.15	1375	6.55	1360	21.6
1370	1.2	1380	5.3	1375	14.4
1375	0.725	1385	4.1	1380	12.1
1380	0.475			1385	10.8
1385	0.35				

Tabela A.4: Dados S&P500 referentes ao conjunto relativo às três maturidades (21 de Outubro de 2006, 18 de Novembro de 2006 e 16 de Dezembro de 2006) da Secção 5.2, relativos ao dia 4 de Outubro de 2006. O preço do activo foi 1342.5. Na tabela PE designa preço de exercício e POC designa preço da opção de compra.

Bibliografia

- [1] K. M. Abadir e M. Rockinger, *Density functionals, with an option-pricing application*, *Econometric Theory*, **19**, (2003), pp. 778-811.
- [2] P. A. Abken, D. B. Madan e S. Ramamurtie, *Estimation of risk-neutral and statistical densities by Hermite polynomial approximation: with an application to eurodollar futures options*, Working paper, Federal Reserve Bank of Atlanta, 1996.
- [3] Y. Aït-Sahalia e A. W. Lo, *Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices*, *Journal of Finance*, **53**, (1998), pp. 499-547.
- [4] F. Alizadeh e D. Goldfarb, *Second-order cone programming*, *Mathematical Programming*, **95**, (2003), pp. 3-51.
- [5] L. B. G. Andersen e R. Brotherton-Ratcliffe, *The equity option volatility smile: an implicit finite-difference approach*, *Journal of Computational Finance*, **1**, (1998), pp. 5-32.
- [6] S. D. Aparicio e S. Hodges, *Implied risk-neutral distribution: a comparison of estimation methods*, Working paper, Financial Options Research Centre, University of Warwick, (1998).
- [7] M. Avellaneda, C. Friedman, R. Holmes e D. Samperi, *Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization*, *Applied Mathematical Finance*, **4**, (1997), pp. 37-64.

- [8] M. Avellaneda e P. Laurence, *Quantitative Modeling of Derivative Securities: From Theory to Practice*, Chapman & Hall/CRC, Nova Iorque, 2000.
- [9] B. Bahra, *Implied risk-neutral probability density functions from options prices: theory and application*, Technical report, Bank of England, 1997.
- [10] D. S. Bates, *The crash of '87: was it expected? The evidence from option markets*, Journal of Finance, **46**, (1991), pp. 1009-1044.
- [11] M. Baxter e A. Rennie, *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [12] A. Ben-Tal e A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*, MPS-SIAM Series on Optimization, SIAM, Filadélfia, 2001.
- [13] D. Bertsimas e I. Popescu, *On the relation between option and stock prices: a convex programming approach*, Operations Research, **50**, (2002), pp. 358-374.
- [14] N. H. Bingham e R. Kiesel, *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, Londres, segunda edição, 2004.
- [15] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [16] F. Black e M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, **81**, (1973), pp. 637-659.
- [17] R. R. Bliss e N. Panigirtzoglou, *Testing the stability of implied probability density functions*, Journal of Banking & Finance, **26**, (2002), pp. 381-422.
- [18] O. Bondarenko, *Estimation of risk-neutral densities using positive convolution approximation*, Journal of Econometrics, **116**, (2003), pp. 85-112.
- [19] S. Boyd e L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

- [20] D. T. Breeden e R. H. Litzenberger, *Prices of state-contingent claims implicit in options prices*, Journal of Business, **51**, (1978), pp. 621-651.
- [21] G. Brown e K. B. Toft, *Constructing binomial trees from multiple implied probability distributions*, Journal of Derivatives, **7**, (1999), pp. 83-100.
- [22] B. Brunner e R. Hafner, *Arbitrage-free estimation of the risk-neutral density from implied volatility smile*, Journal of Computational Finance, **7**, (2003), pp. 75-106.
- [23] P. W. Buchen e M. Kelly, *The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **31**, (1996), pp. 143-159.
- [24] S. Bu-Qing, *Computational Geometry: Curve and Surface Modeling*, Academic Press, Londres, 1989.
- [25] J. M. Campa, P. H. Chang e R. L. Reider, *Implied exchange rate distributions: evidence from OTC option markets*, Journal of International Money and Finance, **17**, (1998), pp. 117-160.
- [26] T. Campbell, *Financial Institutions Markets and Economic Activity*, McGraw-Hill, Nova Iorque, (1982).
- [27] T. F. Coleman, Y. Li e A. Verma, *Reconstructing the unknown local volatility function*, Journal of Computational Finance, **2**, (1999), pp. 77-102.
- [28] R. Cont e P. Tankov, *Non-parametric calibration of jump-diffusion option pricing models*, Journal of Computational Finance, **7**, (2004), pp. 1-49.
- [29] G. Cornuéjols e R. Tütüncü, *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [30] C. H. Corrado e T. Sue, *Implied volatility skews and stock index skewness and kurtosis implied by S&P500 Index option prices*, Journal of Derivatives, **4**, (1997), pp. 8-19.

- [31] J. C. Cox e S. A. Ross, *The valuation of options for alternative stochastic processes*, Journal of Financial Economics, **3**, (1976), pp. 145-166.
- [32] J. C. Cox, S. A. Ross e M. Rubinstein, *Option pricing: a simplified approach*, Journal of Financial Economics, **7**, (1979), pp. 229-263.
- [33] S. Crépey, *Calibration of the local volatility in a trinomial tree using Tikhonov regularization*, Inverse Problems, **19**, (2003), pp. 91-127.
- [34] R. Cruz, *As opções no contexto da teoria financeira*, Série Moderna Finança, Bolsa de Derivados do Porto, 1997.
- [35] E. Derman e I. Kani, *Riding on a smile*, Risk, **7**, (1994), pp. 32-39.
- [36] P. Dierckx, *Curve and Surface Fitting with Splines*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [37] D. Duffie, *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, terceira edição, 2001.
- [38] D. J. Duffy, *Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach*, John Wiley & Sons, Chichester, 2006.
- [39] B. Dumas, J. Fleming e R. E. Whaley, *Implied volatility functions: empirical tests*, Journal of Finance, **53**, (1998), pp. 2059-2106.
- [40] B. Dupire, *Pricing with a smile*, Risk, **7**, (1994), pp. 18-20.
- [41] D. Y. Dupont, *Extracting risk-neutral probability distributions from options prices using trading volume as a filter*, Working paper, Institute for Advanced Studies, Economic Series, Viena (2001).
- [42] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Wiley & Sons, Nova Iorque, segunda edição, 1971.
- [43] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, Chichester, segunda edição, 1987.

- [44] R. Garcia e R. Gençay, *Pricing and hedging derivative securities with neural networks and a homogeneity hint*, Journal of Econometrics, **94**, (2000), pp. 93-115.
- [45] J. Gatheral, *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2006.
- [46] P. E. Gill, W. Murray e M. H. Wright *Practical Optimization*, Academic Press, Londres, 1981.
- [47] A. Gottschling, C. Haefke e H. White *Closed form integration of artificial neural networks with some applications to finance*, Working paper, University of California, San Diego (1995).
- [48] S. B. Hamida e R. Cont, *Recovering volatility from option prices by evolutionary optimization*, Journal of Computational Finance, **8**, (2005), pp. 43-76.
- [49] D. Hanselman e B. Littlefield, *Mastering MATLAB 6: A Comprehensive Tutorial and Reference*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.
- [50] S. Herzel, *Arbitrage opportunities on derivatives: a linear programming approach*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications and Algorithms, **12**, (2005), pp. 589-606.
- [51] S. L. Heston, *A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies, **6**, (1993), pp. 327-343.
- [52] D. J. Higham, *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics and Computation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [53] D. J. Higham e N. J. Higham, *MATLAB Guide*, SIAM, Filadélfia, segunda edição, 2005.
- [54] S. Hodges, *Options: Recent Advances in Theory and Practice*, editado por S. Hodges, Manchester University Press, Manchester, 1990.

- [55] R. A. Horn e C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [56] J. C. Hull, *Options Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, Upple Saddle River, quinta edição, 2003.
- [57] J. C. Hull e A. White, *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, Journal of Finance, **42**, (1987), pp. 281-300.
- [58] J. H. Hutchinson, A. W. Lo e T. Poggio, *A nonparametric approach to pricing and hedging derivative securities via learning networks*, Journal of Finance, **49**, (1994), pp. 851-889.
- [59] N. Jackson, E. Süli e S. Howison *Computation of deterministic volatility surfaces*, Journal of Computational Finance, **2**, (1999), pp. 5-32.
- [60] J. C. Jackwerth, *Generalized binomial trees*, Journal of Derivatives, **5**, (1997), pp. 7-17.
- [61] ———, *Option-implied risk-neutral distributions and implied binomial trees: a literature review*, Journal of Derivatives, **7**, (1999), pp. 66-82.
- [62] ———, *Recovering risk aversion from option prices and realized returns*, Review of Financial Studies, **13**, (2000), pp. 433-451.
- [63] J. C. Jackwerth e M. Rubinstein, *Recovering probability distributions from option prices*, Journal of Finance, **51**, (1996), pp. 1611-1631.
- [64] R. Jarrow e A. Rudd, *Approximate valuation for arbitrary stochastic processes*, Journal of Financial Economics, **10**, (1982), pp. 347-369.
- [65] A. Javaheri, *Inside Volatility Arbitrage: The Secrets of Skewness*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2005.
- [66] D. Kincaid e W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, 1991.

- [67] R. Lagnado e S. Osher, *A technique for calibrating derivative security pricing models: numerical solutions of an inverse problem*, Journal of Computational Finance, **1**, (1997), pp. 13-25.
- [68] A. J. Laub, *Matrix Analysis for Scientists & Engineers*, SIAM, Filadélfia, 2005.
- [69] F. A. Longstaff, *Option pricing and the martingale restriction*, Review of Financial Studies, **8**, (2005), pp. 1091-1124.
- [70] D. B. Madan e F. Milne, *Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis*, Mathematical Finance, **4**, (1994), pp. 223-245.
- [71] A. M. Malz, *Estimating the probability distribution of the future exchange rate from option prices*, Journal of Derivatives, **5**, (1997), pp. 18-36.
- [72] A. Mayhew, *On estimating the risk-neutral probability distribution implied by option prices*, Working Paper, University of California, Berkeley (1995).
- [73] W. R. Mellick e C. P. Thomas, *Recovering an asset's implied pdf from option prices: an application to crude oil during the Gulf Crisis*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **32**, (1997), pp. 91-115.
- [74] R. C. Merton, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, **4**, (1973), pp. 141-183.
- [75] A. M. Monteiro, R. H. Tütüncü e L. N. Vicente, *Recovering risk-neutral probability density functions from option prices using cubic splines and ensuring nonnegativity*, European Journal of Operational Research, **187**, (2007), pp. 525-542.
- [76] A. M. Monteiro, R. H. Tütüncü e L. N. Vicente, *Estimating the dynamics of risk-neutral densities*, em preparação.
- [77] J. J. Moré e S. J. Wright, *Optimization Software Guide*, SIAM, Filadélfia, segunda edição, 1994.

- [78] S. N. Neftci, *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, São Diego, segunda edição, 2000.
- [79] J. Nocedal e S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1999.
- [80] S. R. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell Publishers, Oxford, 2000.
- [81] M. Pritsker, *Nonparametric density estimation and tests of continuous time interest rate models*, Federal Reserve Board, Washington, DC (1997).
- [82] R. J. Ritchey, *Call option valuation for discrete normal mixtures*, Journal of Financial Research, **13**, (1990), pp. 285-296.
- [83] C. Rookley, *Fully exploiting the information content of intra day option quotes: applications in option pricing and risk management*, University of Arizona, Washington, DC, (1997), pp. 87-102.
- [84] J. V. Rosenberg, *Pricing multivariate contingent claims using estimated risk-neutral density functions*, Journal of International Money and Finance, **17**, (1998), pp. 229-247.
- [85] M. Rubinstein, *Implied binomial trees*, Journal of Finance, **49**, (1994), pp. 771-818.
- [86] ———, *Edgeworth binomial trees*, Journal of Derivatives, **5**, (1998), pp. 20-27.
- [87] H. M. C. V. Sebastião, *Instrumentos Financeiros Derivados*, Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, Ano Lectivo de 2005/2006.
- [88] D. Shimko, *Bounds of probability*, Risk, **6**, (1993), pp. 33-37.
- [89] M. Stutzer, *A simple nonparametric approach to derivative security valuation*, Journal of Finance, **51**, (1996), pp. 1633-1652.
- [90] M. J. Todd, *Semidefinite optimization*, Acta Numerica, **10**, (2001), pp. 515-560.

- [91] R. H. Tütüncü, K. C. Toh e M. J. Todd, *Solving semidefinite-quadratic-linear programs using SDPT3*, Mathematical Programming, **95**, (2003), pp. 189-217.
- [92] L. Vandenberghe e S. Boyd, *Semidefinite programming*, SIAM Review, **38**, (1996), pp. 49-95.
- [93] L. N. Vicente, *Introdução à Matemática Financeira*, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra, Ano Lectivo de 2006/2007.
- [94] P. Wilmott, S. Howison e J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [95] H. Wolkowicz, R. Saigal e L. Vandenberghe, *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms and Applications*, editado por H. Wolkowicz, R. Saigal e L. Vandenberghe, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- [96] S. J. Wright, *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM, Filadélfia, 1997.