



UNIVERSIDADE D
COIMBRA



Sara Isabel Cerqueira Fernandes

**PREÇOS DE OPÇÕES E EXPECTATIVAS
IMPLÍCITAS DOS INVESTIDORES
RELATIVAMENTE AOS ÍNDICES S&P500 E VIX**

Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em
Finanças, orientada pela Professora Doutora Ana Margarida Monteiro e
pelo Professor Doutor António Alberto Santos e apresentada ao
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à
Faculdade de Economia.

Setembro de 2019

PREÇOS DE OPÇÕES E EXPECTATIVAS IMPLÍCITAS DOS INVESTIDORES RELATIVAMENTE AOS ÍNDICES S&P500 E VIX

Sara Isabel Cerqueira Fernandes



**UNIVERSIDADE DE
COIMBRA**



Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Agradecimentos

Na realização desta dissertação contei com o auxílio de múltiplas pessoas às quais expresso a minha imensa gratidão. Portanto expresso os meus agradecimentos para:

A professora doutora Ana Margarida Monteiro e o professor doutor António Alberto Santos, orientadores desta dissertação, por todas as sugestões que enriqueceram este trabalho, por todos os ensinamentos, pelo rigor, pela exigência, pelo apoio, paciência e disponibilidade.

As amigas que Coimbra me proporcionou, nomeadamente, Melissa, Beatriz e Mariana, pela partilha de momentos, pela amizade, pelas palavras de incentivo em todas as ocasiões.

As amigas da faculdade, Luísa, Daniela e Carina por todos os conselhos, partilha de informação, por todo o carinho e preocupação.

A colega de casa e amiga, Marina Dourado por todos os anos de amizade e, pela ajuda incansável em todas as ocasiões fossem elas de altos ou baixos.

Ao meu namorado por todo o carinho e companheirismo, pela preocupação, pelas palavras de conforto e acima de tudo por todo o apoio que me deu durante esta etapa.

A minha família, que foram o pilar fundamental durante todo o percurso, por serem incansáveis, por me apoiarem incondicionalmente e por tornarem possível a concretização deste objetivo.

Resumo

O estudo realizado nesta dissertação pretende estimar funções densidade neutras face ao risco obtidas a partir dos preços associados a contratos de opções. Estas densidades poderão ser úteis na caracterização do risco intuído pelos investidores. São considerados para o efeito os preços teóricos das opções *call* e *put* de estilo europeu, obtidos através da fórmula fechada de Black-Sholes-Merton e da mistura de duas distribuições lognormais. Estes dois cenários constituem a base para as experiências de simulação efetuadas, que permitem uma análise em termos de fiabilidade nos processos de estimação. Também serão utilizados dados de mercado, observações intradiárias associadas aos índices S&P500 e VIX, transacionadas no mercado *Chicago Board Options Exchange*. A estimação é feita considerando dois métodos distintos. Foi usado um método paramétrico que considera uma mistura de duas distribuições lognormais, e um método não paramétrico usando aproximações polinomiais locais para o preço da opção juntamente com funções *kernel*. Neste caso, é considerado um estimador polinomial cúbico incorporando no problema de otimização restrições de não arbitragem, bem como pesos que permitem medir a relevância de cada um dos preços, neste caso, considerámos os dados associados ao *open interest*. A formulação usada tira partido da utilização conjunta de observações associadas a preços de *calls* e *puts*. Esta abordagem permite o contraste de informação e a inclusão de restrições de não arbitragem que se revelam de vital importância. Esta abordagem contrasta com a usualmente presente na literatura que faz uso da paridade *put-call*.

Uma comparação é efetuada entre as estimações das funções densidade neutras face ao risco para os dois métodos abordados. Consideram-se inicialmente os dados teóricos gerados pelo modelo de Black-Scholes-Merton e pela mistura de duas distribuições lognormais de forma a conseguir analisar a robustez das abordagens propostas. Por último, foram utilizados os dados sobre os índices de mercado S&P500 e VIX na tentativa de avaliar as características do mercado fazendo-se uma análise das densidades obtidas.

Conteúdo

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Revisão de literatura	3
2.1 Métodos paramétricos	4
2.1.1 Mistura de distribuições lognormais	5
2.2 Métodos semiparamétricos	5
2.3 Métodos não paramétricos	6
2.3.1 Funções <i>kernel</i>	6
3 Preço de opções no modelo de Black-Scholes-Merton	9
4 Relação entre preços de opções e a função densidade neutra face ao risco	13
4.1 Derivadas da função preço da opção	13
4.2 Restrições de não arbitragem	14
5 Estimação da função densidade neutra face ao risco	17
5.1 Mistura de distribuições lognormais	17
5.2 Estimação não paramétrica usando funções <i>kernel</i>	19
5.2.1 Estimador local polinomial cúbico	22
5.2.2 Seleção da largura da banda de suavização e dos pesos	23
6 Análise empírica	25
6.1 Dados simulados usando Black-Scholes-Merton	25
6.2 Dados simulados usando mistura de distribuições lognormais	28
6.3 Dados de mercado	30
7 Conclusão	35
Bibliografia	37

Lista de Figuras

6.1	Preços teóricos de calls e puts (esquerda); função densidade neutra ao risco - densidade lognormal (direita)	26
6.2	Preços de opções call e put simulados pelo modelo de Black-Scholes-Merton com perturbação e as suas respectivas médias estimadas considerando restrições de não arbitragem e/ou pesos (esquerda) e estimação das FDNR para as funções call e put sem restrições e sem pesos considerando funções kernel (direita)	26
6.3	Estimação das FDNR para as calls e puts considerando funções kernel com restrições e sem pesos (esquerda) e com restrições e com pesos (direita)	27
6.4	Preços de opções call e put gerados pelo método da mistura de distribuições lognormais (à esquerda) e respetiva FDNR (à direita)	29
6.5	Preços de opções call e put simulados pelo método da mistura de distribuições lognormais com perturbação (esquerda) e estimação das FDNR considerando a mistura de distribuições lognormais e funções kernel (direita)	29
6.6	Preços das opções <i>call</i> e <i>put</i> nos índices S&P500 e VIX	31
6.7	Comparação entre os preços de opções de índice S&P500 e os preços médios estimados com pesos e sem pesos usando funções kernel (esquerda) e estimação da FDNR usando funções kernel considerando moneyness (direita) e preços (centro)	32
6.8	Comparação entre os preços de opções de índice VIX e os preços médios estimados com pesos e sem pesos usando funções kernel (esquerda) e estimação da FDNR usando funções kernel considerando moneyness (direita) e preços (centro)	32
6.9	Estimações para o S&P500 e VIX; comparação entre estimações não paramétricas e através da mistura de duas lognormais	33

Lista de Tabelas

- 6.1 Estimação dos parâmetros da mistura de duas distribuições lognormais. Comparação entre parâmetros verdadeiros (Verd.) e estimados (Estim.). Estatísticas teste obtidas a partir da matriz Hessiana e assumindo uma distribuição normal assintótica 28

Capítulo 1

Introdução

À medida que os mercados financeiros se tornam mais sofisticados, são introduzidos contratos mais complexos do que simples negociações de compra e venda surgindo, neste âmbito, os derivativos financeiros. Derivativos financeiros são instrumentos financeiros celebrados e valorizados tendo como referência o valor de um, ou mais, ativos designados por ativos subjacentes. Estes ativos podem ser ações, índices acionistas, matérias-primas, obrigações, taxas de câmbio ou taxas de juro. Neste tipo de mercado celebram-se acordos para entrega diferida, isto é, os acordos celebrados nestes contratos presumem que os mesmos sejam liquidados numa data ou em várias datas futuras preestabelecidas. Exemplos de derivativos financeiros são os contratos *forward*, os contratos de futuros e os contratos de opções.

Existem vários mercados onde são transacionados os contratos de derivativos, um deles é o *Chicago Board Options Exchange* (CBOE, www.cboe.com), que iniciou a sua atividade em 1973. Neste caso, procurou-se organizar este tipo de transações o que permitiu um aumento significativo do número de contratos celebrados.

Os derivativos podem oferecer aos investidores uma ampla variedade de oportunidades para personalizar as suas relações no mercado de acordo com as suas necessidades de investimento. Nestes mercados financeiros existem diferentes tipos de intervenientes. Há os que procuram obter cobertura para o risco de variação futura do preço do ativo subjacente, *hedgers*, os que compõem a sua carteira apostando nos movimentos do preço do ativo subjacente, especuladores, ou ainda os que tomam posição em dois ou mais instrumentos financeiros de modo a obter lucro, ou seja, procuram as oportunidades de arbitragem, arbitragistas.

Black and Scholes [5] e Merton [17] (Black-Scholes-Merton) revolucionaram a forma como o preço das opções é calculado nos mercados financeiros apresentando uma fórmula para a atribuição de preços a opções do estilo europeu. O modelo Black-Sholes-Merton assume que o preço do ativo subjacente segue uma distribuição lognormal, admitindo retorno esperado e volatilidade constantes. Existe, no entanto, uma forte evidência empírica sugerindo que a volatilidade não é constante ao longo dos diferentes preços de exercício e das diferentes datas de vencimento. As limitações deste modelo levaram ao desenvolvimento de vários outros modelos, nomeadamente a modelos que pressupõem que a volatilidade é uma variável estocástica.

As opções financeiras são, actualmente, negociadas de forma intensiva em diversos mercados, essas transações podem revelar informação determinante relativa ao sentimento do mercado. Devido

à sua natureza prospetiva, os preços das opções observadas congregam as percepções dos agentes financeiros sobre o comportamento do ativo subjacente uma vez que fornecem informações sobre os fatores de risco associados a ele. Com base na relação entre os preços das opções e os preços de exercício, as expectativas destes agentes de mercado podem ser refletidas numa função densidade neutra face ao risco, relativa aos estados futuros do ativo subjacente. As funções densidade neutras face ao risco podem ser usadas para diferentes propósitos, nomeadamente inferir sobre o risco de mercado e calcular o preço de novos contratos de opções.

Cox and Ross [8] apresentaram uma relação entre os preços das opções e a função densidade neutra face ao risco no contexto de modelos baseados na ausência de arbitragem. Neste caso, considera-se que os preços das opções de estilo europeu podem ser representadas como o valor esperado dos ganhos futuros descontados à taxa de juro sem risco.

Esta dissertação incide na estimação de funções densidade neutras face ao risco através de dois métodos distintos, a mistura de distribuições lognormais e estimação não paramétrica usando funções *kernel*. São utilizadas simulações efetuadas a partir dos preços teóricos de opções, gerados pelo modelo de Black-Scholes-Merton e pela mistura de distribuições lognormais, e preços de opções sobre os índices S&P500 e VIX, transacionados no mercado *Chicago Board Options Exchange* (CBOE). O VIX é um índice de volatilidade implícita relativa a opções sobre o índice S&P500 com maturidade de 30 dias.

Assim, a organização deste trabalho acomoda sete capítulos. Começamos no segundo capítulo por explicar o conceito de opções e fazer uma síntese bibliográfica sobre diferentes abordagens presentes na literatura para a estimação da função densidade neutra face ao risco, mencionando as qualidades e limitações de cada uma delas. No terceiro capítulo, apresentamos a forma de cálculo do valor dos preços de opções mais conhecida no mercado financeiro, o modelo de Black-Scholes-Merton, onde explicitamos ainda as principais limitações do modelo. No quarto capítulo, relatamos a relação entre preços de opções e uma função densidade neutra face ao risco sob a hipótese de ausência de arbitragem. Prossequindo, apresentamos as restrições de não arbitragem impostas pela teoria, sem as quais resultados menos fiáveis seriam obtidos nos processos de estimação. No capítulo cinco, desenvolvemos, com base na literatura, as duas abordagens propostas para estimar as funções densidade neutras face ao risco e as funções preço das opções. As estimações são realizadas definindo problemas de otimização que procuram minimizar a distância entre os preços observados e as fórmulas dos preços definidos pelas abordagens consideradas, a mistura de duas distribuições lognormais e o uso dos polinómios locais cúbicos considerando funções *kernel*. Note-se que os preços observados são os de mercado ou os gerados pelos modelos teóricos de Black-Scholes-Merton ou da mistura de distribuições lognormais. No capítulo seis, apresentamos uma análise empírica relativa às duas abordagens em estudo nesta dissertação, recorrendo para tal ao programa R. Estimamos assim a função densidade neutra face ao risco subjacente ao preço destas opções. Por fim, no capítulo sete, comentamos os resultados obtidos.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Opções financeiras são contratos que envolvem duas contrapartes, um comprador e um vendedor (Black and Scholes [5]; Jondeau et al. [15]). Estes contratos conferem ao seu comprador o direito, mas não a obrigação, de comprar (opção de compra ou *call*) ou vender (opção de venda ou *put*) uma quantidade específica de um determinado bem ou instrumento financeiro¹, denominado por ativo subjacente, a um preço predeterminado designado por preço de exercício, dentro de um período de tempo especificado. O preço a pagar pela celebração deste contrato é designado por prémio da opção. Nas opções de estilo europeu apenas é permitido o seu exercício numa data futura que se designa por maturidade ou data de vencimento, enquanto nas opções de estilo americano é permitido o seu exercício em qualquer momento do seu período de vida até à data de vencimento. O comprador da opção, qualquer que seja o estilo, não é obrigado a exercê-la, isto é, a comprar ou a vender o ativo subjacente tendo em conta os termos do contrato, ele só o fará se o exercício da mesma for do seu interesse. Simetricamente, o vendedor da opção não tem a possibilidade de recusar o seu exercício. Caso o comprador opte pelo exercício, o vendedor tem a obrigação de entregar ou comprar o ativo subjacente, nas condições preestabelecidas. Quem compra uma opção tem uma posição longa, pelo contrário, quem vende uma opção tem uma posição curta. Nesta dissertação, apenas consideraremos opções de estilo europeu.

Relativamente às opções, os dados *open interest* dizem respeito ao número total de contratos pendentes que ainda não foram liquidados num dado momento. Estes são representativos da intensidade de negociação do contrato e transmitem, por isso, informação sobre as perspetivas do mercado. Os valores *open interest* associados a preços de opções *at-the-money* são mais informativos, dado que estes são os contratos mais transacionados. Pode tornar-se útil classificar as opções em negociação, tendo como referência a diferença entre o preço do ativo subjacente e o seu preço de exercício. Uma opção é considerada *at-the-money* quando o preço do ativo subjacente é igual ou próximo do preço de exercício, ou seja, quando efetuando o seu exercício, na data de vencimento, o seu lucro for nulo ou próximo de zero. Uma opção para a qual o seu ganho é positivo diz-se que expira *in-the-money*. Por outro lado, se o resultado do seu exercício gera uma perda de rendimentos, então a opção expira *out-of-the-money*.

Designemos por S_t o preço do ativo subjacente no momento t , negociado no mercado à vista, T a data de vencimento da opção e X o seu preço de exercício. Considerando uma opção *call* europeia, se

¹ Podem ser considerados mais do que um ativo subjacente

o preço do ativo subjacente na data de vencimento, S_T , for menor do que X , o titular da opção pode comprar o ativo subjacente no mercado à vista por um valor inferior a X , portanto, não será ótimo exercer a opção e o seu valor em T será 0. Por outro lado, se o preço do ativo subjacente for maior do que X , é racional exercer a opção e o seu valor será $S_T - X$. Considerando uma opção *put* europeia, o seu exercício apenas fará sentido na situação em que $S_T < X$. Sejam $C(S_T, T, X)$ e $P(S_T, T, X)$, os valores das opções *call* e *put* europeias, respetivamente, na data de vencimento T , tem-se:

$$C(S_T, T, X) = \max(0, S_T - X), \quad (2.1)$$

$$P(S_T, T, X) = \max(0, X - S_T). \quad (2.2)$$

Os preços dos contratos de opções fornecem informações sobre as expectativas de mercado, designadamente uma possível correspondência entre o preço do ativo subjacente e o seu preço de exercício. Pode usar-se o preço destes derivados para obter informação acerca da distribuição de probabilidade do preço futuro do ativo subjacente (Cox and Ross [8]).

Cox and Ross [8] apresentam a densidade neutra face ao risco pressupondo a não existência de oportunidades de arbitragem, assumindo que os investidores são neutros ao risco. Breeden and Litzenberger [6] demonstraram que, para um conjunto de opções sobre um determinado ativo subjacente com um intervalo de preços de exercício diferentes e com a mesma data de vencimento, é possível obter informação sobre a função densidade neutra face ao risco (FDNR), relativa ao ativo subjacente, a partir da segunda derivada da função do preço das opções. Existem tipos de abordagens distintas, para estimar as FDNR (Jondeau et al. [15]). Estas podem ser divididas em métodos paramétricos, métodos semiparamétricos e métodos não paramétricos (Monteiro et al. [18]). Os métodos paramétricos propõem uma família de distribuições e tentam então identificar os parâmetros que sejam consistentes com os preços observados no mercado. Os métodos não paramétricos são mais flexíveis, não atribuindo uma forma explícita para a FDNR. A estimação por métodos semiparamétricos combina características dos dois tipos de estimação anteriores. São menos intensivos em termos de dados do que os métodos não paramétricos e além disso são mais flexíveis que os métodos paramétricos. De uma forma geral, consideram um número de parâmetros superior ao dos métodos paramétricos mas bastante inferior ao dos não paramétricos.

2.1 Métodos paramétricos

Os métodos paramétricos propõem uma expressão direta para a FDNR, sem se referir a qualquer dinâmica dos preços. Eles assumem uma forma estrutural para o problema, sendo necessário apenas identificar alguns parâmetros desconhecidos (Jondeau et al. [15] Santos and Guerra [23]). Esses parâmetros, por sua vez, podem ser estimados otimizando certas funções objetivo. Um exemplo de métodos paramétricos diz respeito ao modelo de mistura de distribuições lognormais (Bahra [4] e Melick and Thomas [16]).

2.1.1 Mistura de distribuições lognormais

A mistura de distribuições lognormais proposta por Melick and Thomas [16] e Bahra [4] assume uma forma funcional para a FDNR. Em teoria, pode assumir-se qualquer forma funcional para a FDNR, f , e os seus parâmetros podem ser estimados envolvendo um processo de otimização. Esta otimização obtém-se, por exemplo, minimizando o quadrado da diferença entre os valores dos preços observados e os preços definidos pela mistura de distribuições lognormais, envolvendo os parâmetros a estimar.

Os autores referem que as distribuições observadas relativas aos preços dos ativos financeiros podem situar-se na vizinhança de distribuições lognormais. Cada função densidade lognormal é definida por dois parâmetros onde o valor desses parâmetros e os pesos relativos aplicados às funções densidade determinam a forma geral da FDNR implícita na mistura. Desse modo, consideram plausível usar a combinação linear convexa de funções densidade lognormais dada por (Bahra [4]):

$$f(S_T) = \sum_{s=1}^k \psi_s L(S_T | \alpha_s, \beta_s), \quad (2.3)$$

onde $L(S_T | \alpha_s, \beta_s)$ é a s -ésima função densidade lognormal na mistura com k componentes, com parâmetros α_s e β_s e, ψ_s representando os pesos de cada uma das densidades, satisfazendo a condição: $\sum_{s=1}^k \psi_s = 1$, $\psi_s \geq 0$, para $s = 1, \dots, k$.

Melick and Thomas [16] aplicaram esta metodologia para estimar a função densidade relativa aos preços de opções de estilo americano sobre contratos de futuros sobre petróleo, durante a crise do Golfo Pérsico, assumindo na sua abordagem uma mistura de três distribuições lognormais independentes.

Bahra [4] estima as FDNR usando opções sobre matérias-primas, transacionadas na LIFFE (*London International Financial Futures and Options Exchange*), e opções sobre divisas transacionadas na Bolsa de Valores de Filadélfia. Uma vez que nos mercados com os quais o autor se preocupa, as opções são negociadas apenas através de um intervalo relativamente pequeno de preços de exercício, existem limites para o número de parâmetros que podem ser estimados a partir dos dados. Assim, optam por usar uma mistura de duas distribuições lognormais que possui apenas cinco parâmetros: $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ e ψ .

2.2 Métodos semiparamétricos

Em algumas situações, os métodos semiparamétricos podem mostrar-se mais eficientes do que estimações realizadas por métodos totalmente não paramétricos que, aparentemente, apresentam dificuldades quando o estudo recai sobre pequenas amostras. A estimação por métodos semiparamétricos revela também uma maior flexibilidade comparativamente aos métodos paramétricos uma vez que estes restringem as formas possíveis para a densidade. Um exemplo de métodos semiparamétricos, estudado por Abadir and Rockinger [1] e Bu and Hadri [7], está relacionado com o uso de funções hipergeométricas. A sua abordagem abrange uma grande classe de distribuições conhecidas na estatística e suas respetivas misturas, tais como a normal, gama, gama inversa, weibull e pareto. Espera-se desta forma que a variedade de densidades consideradas permita obter resultados congruentes que captem a variabilidade dos dados, essencialmente os de mercado.

Dadas as observações dos preços das opções *call* europeias, Bu and Hadri [7] estimam os parâmetros da FDNR usando métodos de otimização não lineares para minimizar o quadrado dos desvios entre os preços das opções *call* teóricas ou de mercado e os preços das opções *call* dadas por funções hipergeométricas. Bu and Hadri [7] ressaltam ainda a importância deste método semiparamétrico no seu estudo, alegando que o pressuposto do método não paramétrico permite dar à FDNR uma boa qualidade de ajuste, ao mesmo tempo que o pressuposto paramétrico assegura a obtenção de funções densidade apropriadas nas suas estimações.

2.3 Métodos não paramétricos

Os métodos não paramétricos consideram-se úteis quando se possui pouca informação sobre a estrutura dos dados ou quando a partir da aplicação de métodos paramétricos ou semiparamétricos não são obtidos resultados fiáveis (Santos and Guerra [23]). Estes são mais flexíveis que os métodos paramétricos e permitem um amplo conjunto de formas para a função densidade, porém requerem tamanhos de amostras maiores, para possível extração de funções densidade em geral (Monteiro and Santos [19]). Para estes métodos, a estimação da função densidade é feita a partir dos dados, sem fazer qualquer suposição paramétrica sobre a distribuição subjacente (Gramacki [12]).

2.3.1 Funções *kernel*

Os métodos de estimação não paramétricos usando funções *kernel*, têm sido amplamente estudados na literatura para estimar funções densidade. Sendo o objectivo fulcral estimar a função densidade desconhecida g num ponto x , do seu domínio, escolhido arbitrariamente (Gramacki [14]), tendo por base n valores observados, X_1, X_2, \dots, X_n , de forma independente e distribuídos de forma idêntica, deve considerar-se uma região, que define uma vizinhança, em torno deste ponto x . O estimador *kernel* para a função densidade desconhecida g , estudado por Parzen [21] e Rosenblatt [22] é assim definido por:

$$\hat{g}(x, h) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) \quad (2.4)$$

onde K é uma função *kernel*, h um parâmetro não negativo que controla o tamanho da vizinhança local, denominado por largura da banda de suavização. Adotando uma configuração univariada (Gramacki [13]), a função *kernel* a ser usada na estimação da densidade, deve satisfazer as seguintes condições: $\int K(x)dx = 1$, $\int xK(x)dx = 0$, $\int x^2K(x)dx < \infty$, $K(x) \geq 0$ para todo x .

Diversos autores apresentam processos de estimação que recuperam a função do preço das opções, ou a sua primeira derivada e necessitam, em seguida, de obter a segunda derivada para alcançar a densidade (Ait-Sahalia and Lo [3], Ait-Sahalia and Duarte [2], Song and Xiu [24]). Ait-Sahalia and Lo [3] adotaram um procedimento estatístico baseado em regressões não paramétricas associadas a funções *kernel*. Este método propõe estimar a FDNR usando preços de mercado, relativos a um determinado período temporal, com o intuito de estimar a função dos preços de opções *call* e *put*, $\hat{C}(\cdot)$ e $\hat{P}(\cdot)$ e, posto isto, diferenciar este estimador duas vezes em ordem a X de modo a obter a densidade. Para este propósito, os autores utilizam uma técnica estatística considerando um estimador local polinomial constante conhecido como estimador de Nadaraya-Watson (Nadaraya [20] e Watson [25]).

Contudo, como os métodos não paramétricos são intensivos na quantidade de dados que requerem, a eficácia deste estimador diminui rapidamente à medida que aumenta o número de variáveis explicativas. Por outro lado, sem se imporem restrições sobre a regressão não paramétrica para a função dos preços das opções, as estimativas podem contradizer os princípios económicos básicos. Assim sendo, Ait-Sahalia and Lo [3] propuseram uma redução da dimensão da função de regressão usando uma especificação semiparamétrica, supondo que a função do preço das opções é dada pela fórmula paramétrica de Black-Scholes-Merton, exceto o parâmetro da volatilidade implícita para essa opção, que é estimado não parametricamente. A parte paramétrica da função do preço das opções, permite obter resultados satisfatórios reduzindo substancialmente o tamanho da amostra. Esta abordagem, no entanto, apresenta alguns inconvenientes. As estimativas não paramétricas podem violar a restrição da convexidade imposta pela teoria para a função dos preços, mas as estimativas paramétricas, por serem excessivamente rígidas, não são capazes de explicar propriedades interessantes como a assimetria e a curtose aparentes nas estimativas não paramétricas das densidades, principalmente para opções com maturidades mais longas.

Ait-Sahalia and Duarte [2] revisitaram o problema associado ao procedimento de estimação proposto por Ait-Sahalia and Lo [3]. Os autores propõem um cenário baseado na regressão local polinomial linear em oposição ao estimador de regressão de Nadaraya-Watson que é um estimador local polinomial constante. Além disso, incorporam restrições impostas pela teoria económica, como a monotonicidade e convexidade, nas duas primeiras derivadas da função dos preços. Uma configuração univariada é adotada, fazendo com que os preços das opções dependam apenas dos preços de exercício e obtendo resultados expectáveis em tamanhos de amostras mais pequenas.

Suponha-se que m é uma função suave para os preços das opções dependendo, por simplificação, apenas de um valor x , uma relação entre os preços observados e a função pode ser dado por

$$m_i = m(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

em que ε_i é um termo de erro contemplando o facto dos preços observados poderem ter erros de medição. Suponhamos que a função de regressão m pode ser aproximada localmente para z numa vizinhança de um determinado valor x , usando a expansão de Taylor:

$$m(z) = \sum_{l=0}^p \beta_l(x) \times (z-x)^l, \quad \text{com } p, l \in \mathbb{R}_0^+, \quad (2.6)$$

com $\beta_l(x) = m^{(l)}(x)/(l!)$. De forma a assegurar que os coeficientes estimados refletem a natureza local da representação, deve usar-se uma regressão ponderada colocando mais peso em pontos próximos de x , pela introdução de uma função *kernel* $K(\cdot)$, uma banda de suavização h e usando como pesos $K((X_i - x)/h)$ (Fan and Gijbels [10]).

Fan and Gijbels [10] ao comparar o estimador de Nadaraya-Watson (de ordem $p = 0$) a uma aproximação local polinomial linear (ordem $p=1$) verificaram que a segunda representa uma melhoria em termos de flexibilidade e propriedades do estimador. Em geral, uma aproximação local polinomial linear tem certas vantagens em relação ao estimador local constante de Nadaraya-Watson, não só quando são estimadas as funções dos preços, mas também para as estimativas das suas derivadas. O estimador local polinomial linear atribui pesos assimétricos que se ajustam à relativa escassez de dados,

enquanto os pesos do estimador de Nadaraya-Watson são sempre simétricos. Isto traduz uma melhoria, principalmente quando se está próximo dos limites do suporte da densidade, ou seja, das caudas de distribuição (Ait-Sahalia and Duarte [2]). Fan and Gijbels [10] recomendam ainda a escolha de um polinómio de grau superior à derivada de interesse, para uma possível redução do enviesamento. Sendo o objetivo principal, na estimação de densidades neutras face ao risco, a determinação da segunda derivada, fará mais sentido considerar uma ordem $p = 3$, deste modo ajusta-se um polinómio cúbico em cada ponto de discretização da função preço. No entanto, os polinómios de maior ordem levam também a um aumento da variabilidade causada pela introdução de mais parâmetros locais e além disso outros problemas decorrentes da inclusão dos termos cruzados na regressão local polinomial cúbica.

Song and Xiu [24] consideram na sua abordagem estimações não paramétricas usando funções *kernel*, considerando dados do final do dia relativos aos índices *S&P500* e *VIX*. Os autores propõem como estratégia o uso de estimadores locais polinomiais lineares para obter as derivadas de primeira ordem do estimador da função do preço das opções, e em seguida adotam outra diferenciação do estimador em relação ao preço de exercício para estimar a densidade neutra face ao risco.

Os dados diários requerem janelas de tempo longas para que os estimadores não paramétricos apresentem um bom desempenho. Este requisito provoca uma perda de interpretação da FDNR como sendo condicionada a uma apreciação do presente. A disponibilidade crescente de dados com alta frequência permite aumentar drasticamente o tamanho da amostra, possibilitando estimar as FDNR com precisão em qualquer ponto no tempo, sem precisar agrupar os preços de opção por longos períodos ou especificar variáveis relevantes. Dalderop [9] usa dados intradiários para estimar FDNR variáveis no tempo, considerando um estimador com funções *kernel* dependendo do tempo e do preço do ativo subjacente. O autor considera diferentes ordens de aproximação: um estimador local polinomial constante para a dimensão tempo e um estimador local polinomial cúbico para a *moneyness*.

Monteiro and Santos [19] propõem um procedimento alternativo para a estimação da FDNR. Os autores estimam as densidades neutras face ao risco usando as informações compatíveis contidas nos preços intradiários observados nas opções *call* e *put*, sem usar a paridade *put-call*. A sua abordagem permite incorporar ambos os preços no problema de otimização, aumentando a quantidade de informação que é recuperada do mercado e evitando erros por falta de sincronicidade. Desenvolvem ainda uma estrutura simples e intuitiva para incluir restrições sem arbitragem diretamente numa função critério baseada num estimador local polinomial cúbico. Por fim, introduzem dados relativos ao *open interest* como pesos na função critério associada ao problema, com o intuito de explicar a relevância de cada preço de opção. A sua abordagem permite resolver alguns dos principais problemas apresentados em tentativas anteriores, tais como a não monotonicidade e a não convexidade das funções dos preços das opções *call* e *put* estimadas. Além disso, abordam também problemas relacionados com a violação de requisitos básicos associados a uma função de densidade, como os seus limites e a não negatividade associada.

Capítulo 3

Preço de opções no modelo de Black-Scholes-Merton

O modelo de Black and Scholes [5] e Merton [17] (Black-Scholes-Merton) é um modelo matemático bastante relevante e que serve, ainda atualmente, como referencial nos mercados financeiros. Os autores foram os primeiros a chegar a uma fórmula fechada que permite calcular um valor para o preço de uma opção financeira numa data anterior ao seu vencimento.

As hipóteses iniciais subjacentes a este modelo são as de que os mercados são perfeitos, contínuos e competitivos. Assume-se que os ativos subjacentes são perfeitamente divisíveis e que a sua negociação pode ocorrer continuamente, é permitida a venda a descoberto, a taxa de juro sem risco é constante, o ativo não paga dividendos, não existem custos de transação, nem existem oportunidades de arbitragem.

O modelo de Black-Scholes-Merton assume que o preço do ativo subjacente segue uma distribuição lognormal e evolui de acordo com um processo estocástico denominado Movimento Browniano Geométrico (MBG):

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dZ_t, \quad (3.1)$$

onde dS_t representa as variações instantâneas do preço do ativo subjacente, dt é um intervalo de tempo infinitesimal e Z_t é um processo Browniano, μ é a taxa instantânea de rentabilidade esperada, e σ a volatilidade do preço do ativo subjacente. Ambos os parâmetros, μ e σ , são considerados constantes ao longo da vida da opção.

Consideremos uma opção cujo valor $V(S_t, t)$ depende apenas de S_t e t . A função V poderá, neste caso, assumir o valor de uma opção *call*, de uma opção *put*, ou até mesmo o valor de toda uma carteira de opções diferentes. Aplicando o lema de Itô, obtemos a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dV = \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dZ_t + \left(\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \quad (3.2)$$

Neste caso, o ativo subjacente segue uma distribuição lognormal dado que:

$$\ln(S_T) \sim N \left[\ln S_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t), \sigma \sqrt{T - t} \right]. \quad (3.3)$$

Alternativamente, pode dizer-se que a FDNR do retorno do ativo subjacente segue uma distribuição normal.

A equação diferencial de Black-Scholes que modela o preço de uma opção *call* ou *put* em função do preço do ativo subjacente e do tempo é dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}(S_t, t) + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t}(S_t, t) - rV(S_t, t) = 0. \quad (3.4)$$

Esta formulação para o estabelecimento do preço de uma opção é consistente com o princípio de neutralidade face ao risco. Sendo assim, podemos por exemplo deduzir a expressão da função preço da *call* calculando o valor esperado dos ganhos futuros na maturidade descontado à taxa de juro sem risco. A equação (3.4) pressupõe que a taxa de juro sem risco, r , e a volatilidade do preço do ativo subjacente, σ , são conhecidos e constantes ao longo da vida da opção, tal como referido anteriormente. Contudo, nota-se que esta equação não contempla o parâmetro μ , portanto o único parâmetro da equação diferencial estocástica (3.1) que afeta o preço do ativo subjacente é a volatilidade, σ . Sob o princípio de neutralidade face ao risco, o valor da opção não varia com a atitude dos investidores face ao risco, dado que não existe nenhuma variável que reflita o nível de aversão dos investidores.

A equação diferencial (3.4) não define completamente o valor da função $V(\cdot)$. Assim, de forma a poder ser obtida uma solução única, é necessário impor condições iniciais (ganhos na maturidade) e de fronteira. As condições iniciais em $t=T$, são dadas pelas equações (2.1) e (2.2) se a opção é do tipo *call* ou *put*, respetivamente. Sabendo-se que $S_t > 0$, as condições de fronteira impõem-se quando S_t tende para 0 e para $+\infty$. No caso de uma opção *call*, tendo-se em consideração o preço de exercício descontado à taxa de juro sem risco, r , o seu valor é dado por:

$$C(S_t, t) \approx S_t - Xe^{-r(T-t)}, \quad (3.5)$$

quando $S_t \rightarrow +\infty$. Neste caso, a opção é exercida pois garante-se que $S_t > X$. Assim, obtém-se a primeira condição de fronteira

$$\lim_{S_t \rightarrow +\infty} (S_t - C(S_t, t)) = Xe^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0. \quad (3.6)$$

Quando $S_t \rightarrow 0$, entende-se que o valor da opção seja nulo dado que o valor do seu ativo subjacente também o é, traduzindo-se aqui a segunda condição de fronteira:

$$\lim_{S_t \rightarrow 0^+} C(S_t, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.7)$$

No caso das opções *put*, a primeira condição de fronteira, para $S_t \rightarrow +\infty$, é dada por:

$$\lim_{S_t \rightarrow +\infty} P(S_t, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

pois traduz-se a ideia de que a opção não é exercida quando o valor do ativo subjacente é muito superior ao do preço de exercício. Quando $S_t \rightarrow 0$, o valor de uma opção *put* deverá coincidir com o preço de exercício descontado à taxa de juro sem risco, r , tendo como condição de fronteira:

$$\lim_{S_t \rightarrow 0^+} P(S_t, t) + S_t = Xe^{-r(T-t)}, \quad t \geq 0. \quad (3.9)$$

A partir daqui, podemos obter as fórmulas de Black-Scholes-Merton, para o preço de opções *call* e *put* dadas por:

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} X N(d_2), \quad S_t > 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.10)$$

$$P(S_t, t) = e^{-r(T-t)} X N(-d_2) - S_t N(-d_1), \quad S_t > 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.11)$$

sendo

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (3.12)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

em que $N(d)$ representa a função de distribuição de probabilidade acumulada de uma variável normal padronizada, $N(0, 1)$, e é dado por:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{1}{2}s^2} ds. \quad (3.13)$$

Na situação em que se admite que o ativo subjacente paga dividendos a uma taxa de dividendo contínua, D , as fórmulas de Black-Scholes-Merton, para o preço de opções *call* e *put* assumem a forma:

$$C(S_t, t) = S_t e^{-D(T-t)} N(d_1) - e^{-r(T-t)} X N(d_2), \quad S_t > 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.14)$$

$$P(S_t, t) = e^{-r(T-t)} X N(-d_2) - S_t e^{-D(T-t)} N(-d_1), \quad S_t > 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.15)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (3.16)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

No modelo de Black-Scholes-Merton, nem todos os parâmetros são conhecidos, é o caso de σ , a volatilidade do preço do ativo subjacente (Bahra [4], Jondeau et al. [15]). Dos parâmetros que determinam o preço de uma opção, este é o único que não é observável no momento t e portanto a sua estimação pode ser inferida a partir dos valores das opções observados no mercado, resolvendo-se as equações (3.10) e (3.11), no caso das opções *call* ou *put*, respetivamente. Os valores observados da volatilidade designam-se por volatilidades implícitas justamente porque resultam da inversão das fórmulas dos preços para as opções.

Note-se que a evidência empírica observada nos mercados financeiros contraria o pressuposto de lognormalidade para a distribuição do preço do ativo subjacente. Trata-se assim de uma limitação severa ao modelo.

A volatilidade implícita que, é observada no mercado, apresenta-se usualmente como uma função convexa do preço de exercício, que é normalmente referida como o sorriso da volatilidade. De facto, observa-se de uma forma geral que as opções para os quais os preços de exercício são inferiores ou superiores ao preço do ativo subjacente apresentam valores mais altos para a volatilidade implícita do que as opções para as quais os preços de exercício são iguais ao preço do ativo subjacente.

Em suma, quanto mais convexa for a curva do sorriso da volatilidade, maior é a probabilidade que o mercado atribui a resultados extremos para S_T . Desta forma, a função densidade neutra face ao risco, gerada pelos valores observados no mercado, apresentará caudas mais grossas do que as que são consistentes com uma função densidade lognormal (Bahra [4]).

Capítulo 4

Relação entre preços de opções e a função densidade neutra face ao risco

Sob certas condições, podemos estabelecer o preço das opções financeiras sob a hipótese de neutralidade face ao risco. Como foi referido anteriormente, a equação de Black-Scholes pode ser deduzida com base neste pressuposto. De facto, a solução desta equação é independente das preferências dos investidores face ao risco, isto é, estes não exigem qualquer prémio para assumir riscos.

Uma medida de probabilidade neutra face ao risco sustenta a ideia de que o preço atual de uma opção pode ser obtido pelo valor esperado dos ganhos futuros descontado à taxa de juro sem risco (Cox and Ross [8]). Existe uma medida de probabilidade neutra face ao risco, se e só se não existirem oportunidades de arbitragem.

Identifica-se como arbitragem uma estratégia de negociação onde existe uma probabilidade positiva de obter um lucro futuro, sem risco de perda e sem que seja exigido ao investidor uma entrada inicial de capital. Em termos de mercado, observam-se, por vezes, oportunidades de arbitragem nos preços dos derivados financeiros. Antes de se procurar encontrar a melhor estimativa para a FDNR, é necessário eliminar os preços que contenham práticas de arbitragem. Garante-se a não existência de oportunidades de arbitragem para a função preço da opção *call* europeia, dependente do preço de exercício, quando esta é positiva, decrescente e convexa, a função preço da opção *put* europeia deverá ser positiva, crescente e convexa.

4.1 Derivadas da função preço da opção

Para uma série de preços de opções sobre o mesmo ativo subjacente, a mesma maturidade e diferentes preços de exercício, é possível determinar as probabilidades associadas a cada um desses preços de exercício na maturidade das opções. Cox and Ross [8] demonstram a relação entre os preços das opções *call* e a FDNR. Sob o princípio de neutralidade face ao risco o valor de opções *call* e *put* europeias, no instante t , descontado à taxa de juro sem risco, r , é dado por:

$$C(S_t, X, T, r, D) = e^{-r(T-t)} \int_X^{+\infty} f(S_T | S_t, T, r, D) (S_T - X) dS_T, \quad (4.1)$$

$$P(S_t, X, T, r, D) = e^{-r(T-t)} \int_0^X f(S_T | S_t, T, r, D) (X - S_T) dS_T, \quad (4.2)$$

sendo f a função densidade neutra face ao risco. No que se segue, por uma questão de simplificação, vamos deixar implícita a informação (S_t, X, T, r, D) e escrevemos $C(X)$ e $P(X)$ para designar respetivamente $C(S_t, X, T, r, D)$ e $P(S_t, X, T, r, D)$.

Breeden and Litzenberger [6] apresentaram uma relação teórica entre os preços das opções e a densidade neutra ao risco, os autores propuseram obter a FDNR a partir da segunda derivada do valor da opção *call* europeia em ordem ao preço de exercício, X . Derivando a função C em ordem ao preço de exercício obtém-se:

$$\frac{\partial C(X)}{\partial X} = e^{-r(T-t)} [F(X | S_t, T, r, D) - 1], \quad (4.3)$$

sendo F a função de distribuição acumulada associada a f . No caso da função P a sua primeira derivada em relação ao preço de exercício é dada por:

$$\frac{\partial P(X)}{\partial X} = e^{-r(T-t)} F(X | S_t, T, r, D). \quad (4.4)$$

Derivando duas vezes a função preço da opção *call* em ordem ao preço de exercício como proposto por Breeden and Litzenberger [6] obtém-se:

$$\left. \frac{\partial^2 C(X)}{\partial X^2} \right|_{X=S_T} = e^{-r(T-t)} f(S_T | S_t, T, r, D). \quad (4.5)$$

Para a função $P(\cdot)$ a segunda derivada em ordem ao preço de exercício é dada por:

$$\left. \frac{\partial^2 P(X)}{\partial X^2} \right|_{X=S_T} = e^{-r(T-t)} f(S_T | S_t, T, r, D). \quad (4.6)$$

4.2 Restrições de não arbitragem

De acordo com os princípios da ausência de arbitragem a função preço da opção *call* deve ser positiva, $C(X) \geq 0$, $\forall X \in [0, +\infty[$, e também decrescente. Dado que a função densidade deve ser positiva e tendo em conta (4.3), a sua primeira derivada deverá ser no mínimo $-e^{-r(T-t)}$ e no máximo 0 (Ait-Sahalia and Duarte [2]):

$$-e^{-r(T-t)} \leq \frac{\partial C(X)}{\partial X} \leq 0, \quad (4.7)$$

De forma análoga, a primeira derivada da função preço da opção *put* deve satisfazer o intervalo:

$$0 \leq \frac{\partial P}{\partial X}(X) \leq e^{-r(T-t)} \quad (4.8)$$

Note-se que $\partial^2 C(\cdot)/\partial X^2$ e $\partial^2 P(\cdot)/\partial X^2$ são proporcionais à função densidade e portanto, se para algum estado $C(\cdot)$ e $P(\cdot)$ apresentarem condições de não convexidade, podem gerar-se valores de $f(\cdot)$ negativos para esses estados constituindo-se uma violação ao princípio de arbitragem.

De (4.5) e (4.6) impomos:

$$\frac{\partial^2 C(X)}{\partial X^2} \geq 0 \quad \text{e} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 P(X)}{\partial X^2} \geq 0 \quad (4.10)$$

Tendo em conta (4.3) e (4.4) obtemos:

$$-\frac{\partial C(X)}{\partial X} + \frac{\partial P(X)}{\partial X} = e^{-r(T-t)}, \quad (4.11)$$

de igual modo de (4.5) e (4.6) garante-se que:

$$\frac{\partial^2 C(X)}{\partial X} = \frac{\partial^2 P(X)}{\partial X}. \quad (4.12)$$

Note-se ainda que tendo em conta o comportamento das funções preço das opções *call* e *put* pode-se impor:

$$\max(0, S_t - Xe^{-r(T-t)}) \leq C(X) \leq S_t. \quad (4.13)$$

$$\max(0, Xe^{-r(T-t)} - S_t) \leq P(X) \leq +\infty. \quad (4.14)$$

Numa abordagem paramétrica, as restrições atrás mencionadas sobre a função do preço das opções *call* e *put* e suas respectivas derivadas poderão ser satisfeitas para uma forma funcional adotada. O problema surge quando se abdica da informação fornecida pela estrutura associada a métodos paramétricos. Abordagens propostas num contexto não paramétrico podem ser confrontadas com alguns dos principais problemas encontrados na literatura, como a não monotonicidade e a não convexidade das funções do preço das opções *call* e *put* estimadas. Além disso, podem ser obtidos valores negativos para a FDNR. Como forma de superar estas desvantagens, alguns autores (Ait-Sahalia and Duarte [2], Song and Xiu [24] e Monteiro and Santos [19]) introduzem restrições de forma, originando uma definição mais explícita das restrições de não arbitragem nos métodos e processos de otimização desenvolvidos.

Capítulo 5

Estimação da função densidade neutra face ao risco

Neste capítulo, são apresentadas diferentes abordagens para estimar as FDNR a partir dos preços das opções. A implementação do resultado de Breeden and Litzenberger [6] relativo ao cálculo da segunda derivada da função preço, está subjacente a todas as técnicas. Isso implica a caracterização de uma função do preço das opções que seja consistente com as condições de monotonicidade e convexidade e que possa ser diferenciada duas vezes. Iremos detalhar de seguida as duas metodologias usadas neste trabalho. Trata-se do método paramétrico baseado na mistura de duas distribuições lognormais e no método não paramétrico baseado em funções *kernel*. No primeiro caso, especificaremos uma forma funcional para a FDNR e estimaremos os seus parâmetros através de um problema de otimização que consiste na minimização da distância entre os preços observados e os preços definidos pela mistura de densidades. A estimação envolvendo funções *kernel* pressupõe uma estimação para a função preço das opções baseada na minimização do quadrado da distância entre os preços de mercado ou teóricos e os preços definidos da forma polinomial, ponderada pelas funções *kernel*.

5.1 Mistura de distribuições lognormais

A mistura de distribuições lognormais surge como uma extensão ao modelo de Black-Scholes-Merton que admite uma única distribuição lognormal. Como referido no capítulo 3, a abordagem de Black-Scholes-Merton implica que a FDNR relativa a S_T , f , siga uma distribuição lognormal, ou alternativamente, que a FDNR do retorno do ativo subjacente siga uma distribuição normal (Bahra [4]). Sendo assim, considerando α e β os parâmetros da densidade lognormal temos:

$$L(S_T|\alpha, \beta) = \frac{1}{S_T \beta \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(S_T) - \alpha)^2}{2\beta^2}}, \quad (5.1)$$

$$\alpha = \ln(S_t) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T - t) \quad (5.2)$$

$$\beta = \sigma \sqrt{T - t}. \quad (5.3)$$

A mistura de duas distribuições lognormais assume uma forma relativamente flexível. Em particular, ela deve ter a capacidade de captar as principais características dos preços das opções e refletir essas informações na densidade estimada.

Escolheu-se, nesta dissertação, comparar o método paramétrico da mistura de duas distribuições lognormais com o método não paramétrico baseado em funções *kernel*. No caso da mistura consideramos cinco parâmetros: α_1 , β_1 , α_2 , β_2 e ψ , os quatro primeiros dizem respeito aos parâmetros das densidades e o último, ψ , define os pesos atribuídos a cada uma, ψ e $1 - \psi$. Posto isto, e de acordo a combinação linear convexa enunciada na equação (2.3), a FDNR apresenta a relação:

$$f(S_T) = \psi L(S_T | \alpha_1, \beta_1) + (1 - \psi) L(S_T | \alpha_2, \beta_2). \quad (5.4)$$

Os preços para as opções *call* e *put* europeias, dadas respetivamente pelas equações (4.1) e (4.2), podem agora ser expressos por:

$$C(X) = e^{-r(T-t)} \int_X^\infty \left[\psi L(S_T | \alpha_1, \beta_1) + (1 - \psi) L(S_T | \alpha_2, \beta_2) \right] (S_T - X) dS_T, \quad (5.5)$$

$$P(X) = e^{-r(T-t)} \int_0^X \left[\psi L(S_T | \alpha_1, \beta_1) + (1 - \psi) L(S_T | \alpha_2, \beta_2) \right] (X - S_T) dS_T. \quad (5.6)$$

Com base em Melick and Thomas [16] e Bahra [4], obtém-se as seguintes fórmulas fechadas para os preços das opções europeias:

$$C(X) = e^{-r(T-t)} \left[\psi \left(e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} N(d_1) - XN(d_2) \right) + (1 - \psi) \left(e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} N(d_3) - XN(d_4) \right) \right], \quad (5.7)$$

$$P(X) = e^{-r(T-t)} \left[\psi \left(-e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} N(-d_1) - XN(-d_2) \right) + (1 - \psi) \left(-e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} N(-d_3) - XN(-d_4) \right) \right], \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\ln(X) + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1}, \\ d_2 &= d_1 - \beta_1, \\ d_3 &= \frac{-\ln(X) + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2}, \\ d_4 &= d_3 - \beta_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pretendemos resolver o problema de mínimos quadrados, que mede a distância entre os preços de opção definidos pelo modelo de mistura de distribuições lognormais e os preços observados. O

problema de minimização tem como variáveis $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \psi$ e pode ser descrito por:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{n_c} \left[C(X_i) - \hat{C}_i \right]^2 + \sum_{j=1}^{n_p} \left[P(X_j) - \hat{P}_j \right]^2 + \\ & + \left[\psi e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} + (1 - \psi) e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} - e^{r(T-t)} S_t \right]^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

sujeito a $\beta_1, \beta_2 > 0$ e $0 \leq \psi \leq 1$, para o intervalo de preços de exercício $\{X_i\}$, com $i = 1, \dots, n_c$, e $\{X_j\}$, com $j = 1, \dots, n_p$, sendo n_c e n_p o número de preços observados para as opções *call* e *put* respetivamente. \hat{C}_i e \hat{P}_j designam, respetivamente, os preços de opções *call* e *put* observados.

O último parênteses da equação (5.10) define uma restrição ao problema de minimização. Os dois primeiros termos exponenciais, $e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2}$ e $e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2}$, representam as médias de cada uma das distribuições lognormais. Assim, a sua soma ponderada representa a média da mistura das distribuições. O terceiro termo permite garantir a não existência de oportunidades de arbitragem, estipulando que o valor esperado da FDNR deve ser igual ao preço futuro do ativo subjacente.

5.2 Estimação não paramétrica usando funções *kernel*

Estimações não paramétricas envolvem abordagens mais flexíveis para modelar a evolução do preço de opções, já que com uma quantidade suficiente de dados é possível testar métodos envolvendo um maior número de parâmetros. A FDNR é proporcional à segunda derivada da função do preço das opções, como vimos anteriormente, deste modo o nosso objetivo é estimar a função do preço das opções.

Aït-Sahalia and Lo [3] tiveram um papel fundamental nos métodos não paramétricos aplicados à estimativa da densidade neutra face ao risco. Os autores adotaram como procedimento estatístico a regressão não paramétrica.

Sejam \hat{C}_i e \hat{P}_j os preços observados para as opções *call* e *put*, com respetivos preços de exercício X_i e X_j , para $i = 1, \dots, n_c$ e $j = 1, \dots, n_p$. Dada a existência de uma função suave, $C(\cdot)$ e $P(\cdot)$, para os preços de opção *call* e *put* respetivamente, podemos estabelecer uma relação não linear para os preços (Monteiro and Santos [19]):

$$\hat{C}_i = C(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n_c, \quad (5.11)$$

$$\hat{P}_j = P(X_j) + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, n_p, \quad (5.12)$$

sendo ε_i e ε_j o termo de erro que expressa o facto dos preços das opções observadas incluírem erros de medição.

Seguindo a abordagem de Aït-Sahalia and Lo [3], o objetivo é encontrar as funções $C(\cdot)$ e $P(\cdot)$ mais próximas do respetivo conjunto de observações $\{\hat{C}_i\}$ e $\{\hat{P}_j\}$, usando o erro quadrático médio como medida de proximidade,

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{n_c} \left[\hat{C}_i - C(X_i) \right]^2, \quad i = 1, \dots, n_c, \quad (5.13)$$

$$\text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^{n_p} \left[\hat{P}_j - P(X_j) \right]^2, \quad j = 1, \dots, n_p. \quad (5.14)$$

Os autores utilizaram, neste cenário, o estimador Nadaraya-Watson (Nadaraya [20], Watson [25]):

$$\hat{C}(X_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n_c} K\left[\frac{(X_i - x)}{h}\right] \hat{C}_i}{\sum_{i=1}^{n_c} K\left[\frac{(X_i - x)}{h}\right]}, \quad (5.15)$$

$$\hat{P}(X_j) = \frac{\sum_{j=1}^{n_p} K\left[\frac{(X_j - x)}{h}\right] \hat{P}_j}{\sum_{j=1}^{n_p} K\left[\frac{(X_j - x)}{h}\right]}. \quad (5.16)$$

Note-se que os preços das opções *call* são traduzidos em opções *put* usando a fórmula da paridade *put-call*. Este estimador define que o preço de uma opção para um conjunto de pontos x , pertencente ao intervalo definido pelos preços de exercício, é dado por uma média ponderada dos preços observados, \hat{C}_i e \hat{P}_j , imputando maior peso aos preços das opções cujos preços de exercício, X_i e X_j , estão mais próximos dos pontos x (Jondeau et al. [15]). De forma a ponderar a distância das observações da amostra a x , é considerada uma função *kernel*, $K((X_i - x)/h)$, com banda de suavização, h . Conforme documentado na literatura por, Gramacki [13] e Fan and Gijbels [10] a escolha deste parâmetro é mais importante quando comparado com a escolha da função *kernel*. Usualmente é considerado um *kernel* gaussiano, por apresentar curvas mais suaves, embora outros tipos de *kernel* gerem curvas bastante similares.

Do ponto de vista da aproximação das funções preço das opções, o estimador Nadaraya-Watson usa aproximações constantes locais. O problema de otimização associado considera uma função critério baseada numa regressão de mínimos quadrados expressa por:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{n_c} (\hat{C}_i - m_i)^2 K\left(\frac{X_i - x}{h_c}\right), \quad i = 1, \dots, n_c, \quad (5.17)$$

sendo m_i as variáveis do problema, estas representam os preços das opções.

A teoria económica define um conjunto de características atribuídas às funções do preço das opções e sem elas não é possível obter uma interpretação razoável. Nesse âmbito, informações adicionais sobre as características gerais podem ser acrescentadas ao processo de otimização sob a forma de um conjunto de restrições de não arbitragem, deste modo poderemos obter estimativas mais precisas. A função do preço de opções *call*, sob a hipótese de não arbitragem, deve ser estritamente decrescente e, sendo assim o processo de estimação anterior pode ser formulado através do problema de otimização:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{n_c} (\hat{C}_i - m_i)^2 K\left(\frac{X_i - x}{h_c}\right), \quad (5.18)$$

$$\text{sujeito a} \quad m_i \geq m_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n_c. \quad (5.19)$$

Além disso, do ponto de vista teórico a função do preço das opções deve também ser estritamente convexa, caso contrário, premissas económicas básicas seriam violadas. Desta forma, considera-se o

problema reformulado:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{n_c} (\hat{C}_i - m_i)^2 K\left(\frac{X_i - x}{h_c}\right), \quad (5.20)$$

$$\text{sujeito a} \quad m_i \geq m_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n_c, \quad (5.21)$$

$$\frac{m_{i+2} - m_{i+1}}{X_{i+2} - X_{i+1}} \geq \frac{m_{i+1} - m_i}{X_{i+1} - X_i}, \quad i = 1, \dots, n_c - 2. \quad (5.22)$$

O problema de otimização anterior aborda apenas a estimativa para a função do preço das opções *call*. No entanto, pela paridade *put-call*, o mesmo problema pode ser deduzido para a função do preço das opções *put*. Sendo assim, a regressão de mínimos quadrados com restrições de monotonicidade e convexidade para opções *put* apresenta a forma:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^{n_p} (\hat{P}_j - m_j)^2 K\left(\frac{X_j - x}{h_p}\right), \quad (5.23)$$

$$\text{sujeito a} \quad m_j \leq m_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n_p, \quad (5.24)$$

$$\frac{m_{j+2} - m_{j+1}}{X_{j+2} - X_{j+1}} \geq \frac{m_{j+1} - m_j}{X_{j+1} - X_j}, \quad j = 1, \dots, n_p - 2. \quad (5.25)$$

O processo de estimação anterior apenas permite a estimação direta da função do preço de opções, no entanto estimações numéricas adicionais para as segundas derivadas podem apresentar problemas e até ser negativas, violando por vezes a condição da área definida pela densidade ser igual a um.

Como inicialmente proposto por Fan and Gijbels [10], uma aproximação mais geral pode amenizar algumas desvantagens associadas ao estimador local polinomial constante. Nomeadamente, podemos complexificar o problema aumentando o grau do polinómio, em vez de considerar um polinómio constante podemos assim considerar de ordem 1, 2, 3, etc. Os estimadores da regressão de *kernel*, para um polinómio local de ordem p , são obtidos resolvendo o problema de minimização:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{l=0}^p \beta_l(x) \frac{(X_i - x)^l}{l!} \right)^2 K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) \quad (5.26)$$

que é, em cada ponto x , uma regressão de mínimos quadrados generalizados, onde $\beta(x)$ representa o vetor de decisão. O estimador da função média e suas respectivas derivadas são dados respetivamente por $\hat{\beta}_0(x)$ e $l!\hat{\beta}_l(x)$, $l = 1, 2, \dots, p$. Esta formulação geral engloba as ordens constante ($p = 0$), linear ($p = 1$), quadrática ($p = 2$) e cúbica ($p = 3$), o que a torna mais conveniente dentro do contexto estudado já que além das estimações para o valor médio da função do preço de opções, fornece estimações para as suas respetivas derivadas.

Sendo o objetivo principal estudar a segunda derivada, um polinómio cúbico local pode ser adotado como forma de obter essa estimação diretamente. Nesta dissertação, é adotada a abordagem proposta por Monteiro and Santos [19]. São considerados preços intradiários no contexto de uma regressão polinomial cúbica local, bem como restrições de não arbitragem no problema de otimização. São usadas informações contidas em ambos os preços das opções *call* e *put*, sem no entanto recorrer à fórmula de paridade *put-call* para converter as opções *put* em opções *call*. Por fim, são incluídos na função critério dados *open-interest* adicionando mais informação sobre as perspetivas de mercado.

5.2.1 Estimador local polinomial cúbico

As funções dos preços das opções *call* e *put* movem-se em direções opostas. Na cauda esquerda, os preços das opções *call* variam mais do que o das opções *put* e vice-versa na cauda direita. Nas caudas das distribuições, os valores das densidades devem tender a zero. Em suma, o comportamento das caudas é um problema fundamental (Monteiro and Santos [19]).

A teoria económica impõe restrições de monotonicidade e convexidade nas funções dos preços das opções. Para descartar oportunidades de arbitragem as opções *call* e *put* devem admitir as condições estabelecidas na secção 4.2. Usando tais restrições, define-se uma função critério dentro de uma estrutura de regressão não paramétrica.

Monteiro and Santos [19] enfatizam que, dentro da estrutura de regressão considerada, a variância dos termos de erro não é constante. Para lidar com essa característica dos dados, atribuem diferentes pesos a diferentes observações com o auxílio dos valores de *open interest* ou de volume, representados para opções *call* por $w_{i,c}$, e para opções *put* por $w_{j,p}$. Os mais informativos são os relativos aos preços *at-the-money*, os preços *deep-in-the-money* ou *deep-out-of-the-money* são menos informativos.

A estimativa é realizada minimizando uma função critério sujeita a um conjunto de restrições lineares de igualdade e desigualdade:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i=1}^{n_c} w_{i,c} \left(\hat{C}_i - \beta_{0,c}(x) - \sum_{l=1}^3 \beta_{l,c}(x) \frac{(X_i-x)^l}{l!} \right)^2 K\left(\frac{X_i-x}{h_c}\right) + \\ & + \sum_{j=1}^{n_p} w_{j,p} \left(\hat{P}_j - \beta_{0,p}(x) - \sum_{l=1}^3 \beta_{l,p}(x) \frac{(X_j-x)^l}{l!} \right)^2 K\left(\frac{X_j-x}{h_p}\right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\text{sujeito a} \quad -\beta_{1,c}(x) + \beta_{1,p}(x) = e^{-r(T-t)} \quad (5.28)$$

$$\beta_{2,c}(x) - \beta_{2,p}(x) = 0 \quad (5.29)$$

$$\max(0, S_t - xe^{-r(T-t)}) \leq \beta_{0,c}(x) \leq S_t \quad (5.30)$$

$$\max(0, xe^{-r(T-t)} - S_t) \leq \beta_{0,p}(x) \leq \infty \quad (5.31)$$

$$-e^{-r(T-t)} \leq \beta_{1,c}(x) \leq 0 \quad (5.32)$$

$$0 \leq \beta_{1,p}(x) \leq e^{-r(T-t)} \quad (5.33)$$

$$\beta_{2,c}(x) \geq 0 \quad (5.34)$$

$$\beta_{2,p}(x) \geq 0 \quad (5.35)$$

Para cada aproximação local em x , o problema (5.27) a (5.35) pode ser caracterizado como um problema de mínimos quadrados generalizados com restrições e pode ser resolvido como um problema de programação quadrática. Designe-se y como o vetor de observações de preços de opções *call* e *puts*, e considere-se as matrizes $X_c(x)$ e $X_p(x)$, com as linhas i e j dadas por:

$$\begin{aligned} X_{i,c}(x) &= \begin{bmatrix} 1 & (X_i-x) & (1/2)(X_i-x)^2 & (1/6)(X_i-x)^3 \end{bmatrix} \\ X_{j,p}(x) &= \begin{bmatrix} 1 & (X_j-x) & (1/2)(X_j-x)^2 & (1/6)(X_j-x)^3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo assim temos:

$$y = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{P} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_c \\ \beta_p \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_c(x) & 0 \\ 0 & X_p(x) \end{bmatrix}.$$

Dada uma matriz de pesos representada por W , e uma "matriz *kernel*" por $K = K(h_c, h_p)$, o problema de minimização (5.27) a (5.35) é expresso como um problema de otimização quadrática:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && (y - X\beta)^T W^{1/2} K W^{1/2} (y - X\beta) \\ & && \text{s.a} && \beta \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

onde \mathcal{B} representa o conjunto de restrições. Considerando:

$$\begin{aligned} y^* &= W^{1/2} K^{1/2} y \\ X^* &= W^{1/2} K^{1/2} X \end{aligned}$$

este último pode ser reescrito como um problema de minimização envolvendo uma norma sujeito a restrições convexas,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \|y^* - X^* \beta\| \\ & && \text{s.a} && \beta \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

que pode ser traduzido para um problema de programação quadrática

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \beta^T H \beta + f^T \beta \\ & && \text{s.a} && \beta \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Para cada ponto x , a aproximação local polinomial cúbica permite obter os valores de $\beta_{l,k}(x)$, $l = 0, 1, 2, 3$ e $k = \hat{C}, \hat{P}$. O principal objectivo são as estimativas $\hat{\beta}_{2,c}(x)$ e $\hat{\beta}_{2,p}(x)$, com $\hat{\beta}_{2,c}(x) = \hat{\beta}_{2,p}(x)$, que permitem obter a densidade neutra face ao risco em x . As restrições implícitas relativas aos argumentos de não arbitragem, atuam como componentes de suavização de modo a obter estimativas para a densidade neutra face ao risco mais confiáveis e intuitivas.

5.2.2 Seleção da largura da banda de suavização e dos pesos

Funções *kernel*, relativas a processos de estimação de regressão não paramétricos, medem localmente a distância até ao ponto x . O seu valor depende da distância das observações a x , escalado por um parâmetro de suavização, reconhecido como o fator mais relevante em termos de características e qualidade de ajuste do modelo (Aït-Sahalia and Lo [3]).

Nesta dissertação, são consideradas duas larguras de banda de suavização, h_c associado a observações relativas a opções *call*, e h_p a observações de opções *put*. Estima-se o valor destes parâmetros procurando FDNR suaves e confiáveis, salvaguardando valores não negativos para a densidade, um comportamento esperado para as caudas e uma área sob a curva próxima de um.

Ora como referido, os parâmetros h_c e h_p definem uma vizinhança em torno de x . Já os pesos $W_c(\cdot)$ e $W_p(\cdot)$ atribuem uma importância aos dados dos preços de acordo com o seu valor. Seguindo a

abordagem de Monteiro and Santos [19], são considerados os valores de *open-interest* associados a contratos de opções *call* e *put* para essas funções de ponderação.

Capítulo 6

Análise empírica

Neste capítulo é efetuado um estudo numérico da estimação da FDNR pelas duas abordagens apresentadas anteriormente, ou seja, as abordagens que levaram à formulação dos problemas (5.10) e (5.27)-(5.35). A eficácia das duas abordagens é ilustrada para dados simulados e dados reais. Os primeiros referem-se a dados teóricos gerados de acordo com o modelo de Black-Scholes-Merton e com o método da mistura de distribuições lognormais, sendo que estes preços são perturbados adicionando um ruído aleatório com o intuito de imitar os preços observados no mercado. Os restantes dados dizem respeito a preços de opções sobre os índices de mercado S&P500 e VIX. Na resolução dos problemas será utilizado o software R.

6.1 Dados simulados usando Black-Scholes-Merton

Começamos por gerar um conjunto de preços teóricos para opções *call* e *put* com base nas equações (3.14) e (3.15), definidas pelo modelo de Black-Scholes-Merton. Recorremos à função `price.bsm.option` do package `RND` do R para esse propósito. Para gerar os preços das opções precisamos fornecer à função, a taxa de juro r , o prazo até ao vencimento da opção $(T - t)$, a volatilidade σ , a taxa de dividendo contínua D , o valor atual do ativo subjacente S_0 , e o preço de exercício X . Adotamos os seguintes valores para estes *inputs*: $r = 0.02$, $(T - t) = 90/365$, $\sigma = 0.2$, $D = 0.01$, $S_0 = 50$, para os preços de exercício consideramos valores entre 35 e 67, com variações de 0.01.

Depois de calculados os preços teóricos das opções, procedemos à obtenção da respetiva FDNR pelo cálculo numérico da segunda derivada considerando os respetivos preços das opções. Na Figura 6.1, à esquerda estão representados os preços de opções *call* e *put* calculados a partir do modelo de Black-Scholes-Merton, e à direita a respetiva FDNR. Constata-se pela análise ao gráfico da densidade neutra ao risco uma ligeira assimetria positiva. Isto significa que a probabilidade de haver um retorno positivo do ativo subjacente é superior à de haver um retorno negativo, expectável já que se trata de um modelo que segue uma densidade lognormal.

Partindo dos preços teóricos uma simulação é efectuada na tentativa de reproduzir dados de mercado e aplicar os métodos de estimação propostos. Usando o mesmo intervalo para os preços de exercício considera-se um incremento de 0.5. A cada preço teórico é adicionado um número aleatório, obtido de forma uniforme no intervalo $[2, 79]$, de observações de um termo de erro com média zero e variância proporcional ao preço teórico da opção. A metodologia adoptada segue de

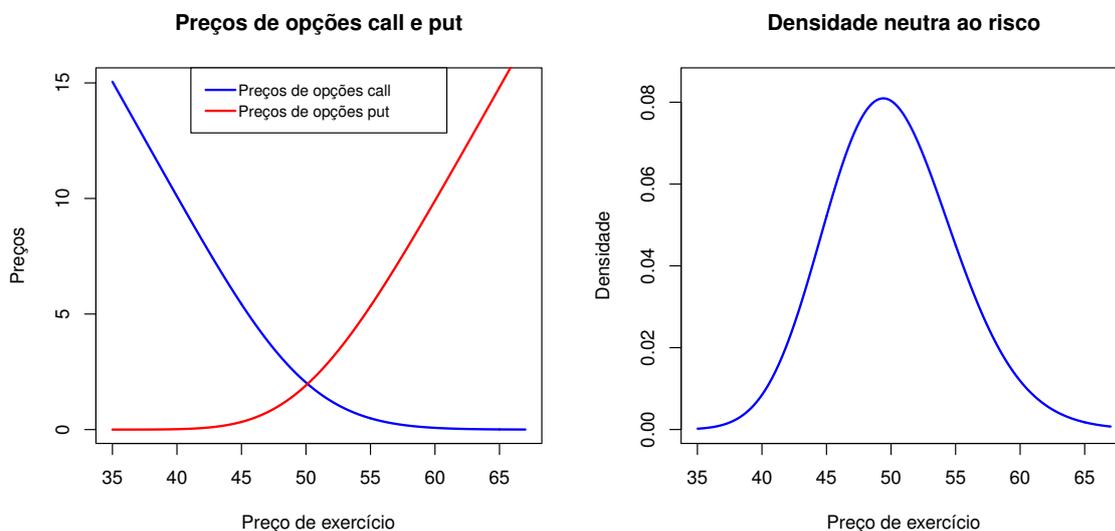


Figura 6.1 Preços teóricos de calls e puts (esquerda); função densidade neutra ao risco - densidade lognormal (direita)

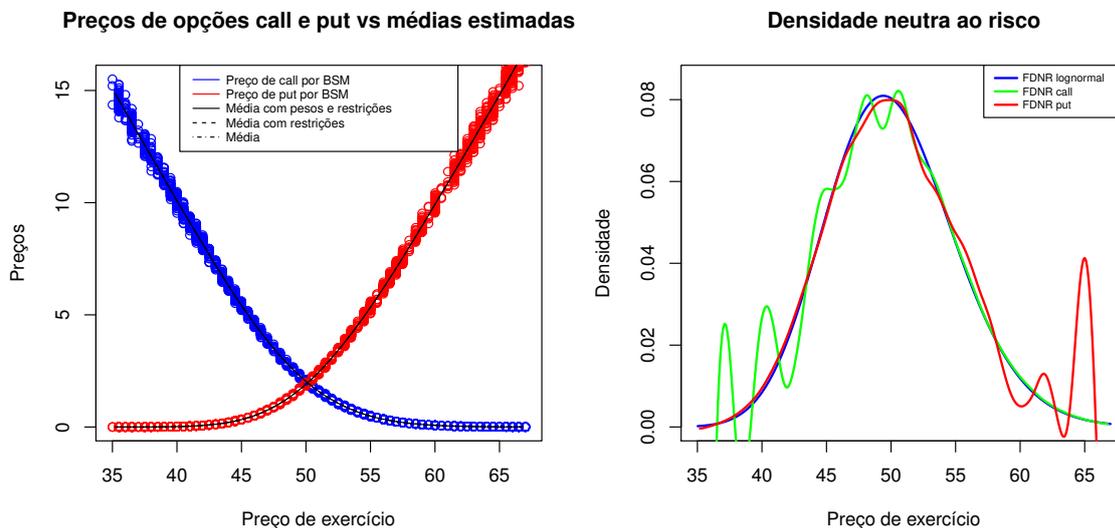


Figura 6.2 Preços de opções call e put simulados pelo modelo de Black-Scholes-Merton com perturbação e as suas respetivas médias estimadas considerando restrições de não arbitragem e/ou pesos (esquerda) e estimação das FDNR para as funções call e put sem restrições e sem pesos considerando funções kernel (direita)

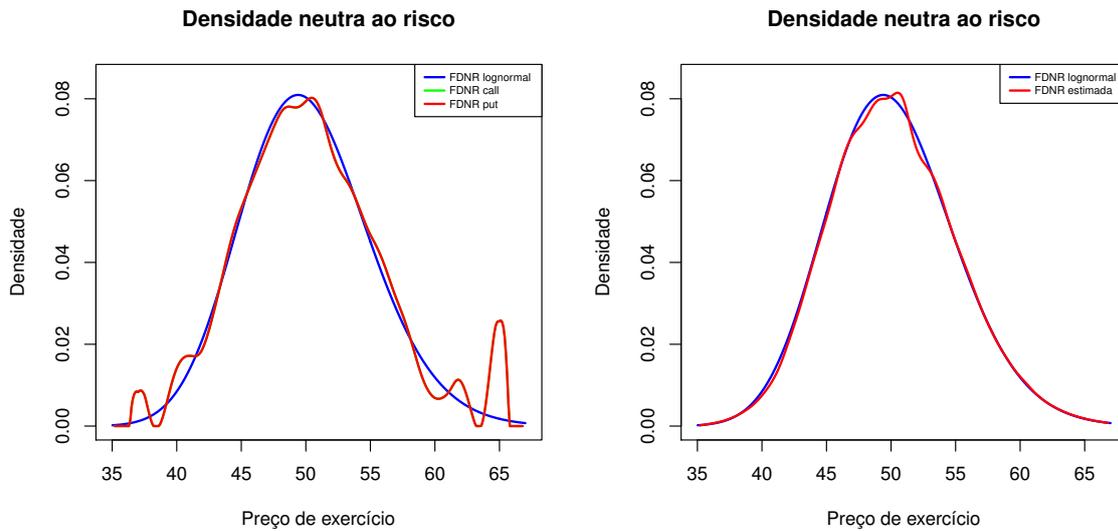


Figura 6.3 Estimação das FDNR para as calls e puts considerando funções kernel com restrições e sem pesos (esquerda) e com restrições e com pesos (direita)

perto a apresentada em Yatchew and Härdle [26], e no contexto de um modelo de regressão, os dados simulados são obtidos através da fórmula $y = m(X) + 0.02m(X)\varepsilon$, com $\varepsilon \sim N(0, 1)$. Considerando o intervalo $[35, 67]$ para o preço de exercício com acréscimos de 0.5, um número aleatório de observações são simuladas para cada preço de exercício. Tal como descrito acima, o número de observações obtidas para aplicar o processo de estimação poderá ascender aos milhares.

O objectivo da simulação é verificar se os métodos propostos conseguem recuperar de forma eficaz a FDNR, atendendo a que neste ambiente ela é conhecida. Na Figura 6.2 estão representados (esquerda) os dados simulados que irão ser usados no processo de estimação, onde diferentes versões dos estimadores não-paramétricos serão testados. Estas versões estão relacionadas com as condições de não-arbitragem, e a imposição de restrições aos parâmetros de forma a obter uma função de densidade, nomeadamente, a não-negatividade e a integração igual a um. Seguindo a abordagem proposta por Monteiro and Santos [19], consideramos o estimador local polinomial cúbico sujeito a um conjunto de restrições lineares dadas por (5.27) a (5.35). Este problema é resolvido como um problema de programação quadrática recorrendo-se à função `solve.QP` do package `quadprog` do R.

Na Figura 6.2, à esquerda, encontra-se a estimação relativa aos preços simulados com perturbação e a comparação entre as suas respectivas médias incluindo ou não restrições de não arbitragem e pesos. Como também é demonstrado na literatura por Ait-Sahalia and Duarte [2], Yatchew and Härdle [26] e Monteiro and Santos [19], de uma forma geral obtém-se um bom ajuste para a função média dos preços, não constituindo um grande desafio de estimação. Em oposição está a estimativa da segunda derivada. Na Figura 6.2 (direita) verificam-se os problemas de monotonicidade e convexidade da segunda derivada abordados na teoria. Além disso, comparando as funções de densidade dos preços das opções *call* e das opções *put*, repara-se que elas não coincidem e que revelam ainda a existência de valores negativos associados às funções. É também de notar, que os preços das opções *call* apresentam uma maior variação na cauda esquerda e os preços das opções *put* na cauda direita. No

lado esquerdo da Figura 6.3 temos uma comparação entre as FDNR para ambos os tipos de opções, mas agora considerando-se um problema com as restrições de não arbitragem anteriormente definidas. Verifica-se, comparativamente à análise anterior, uma melhoria significativa quando restrições são consideradas. As FDNR para ambas as funções dos preços das opções são agora coincidentes e mesmo quando os valores estimados são baixos, estes permanecem não negativos.

As FDNR continuam, no entanto, a apresentar pouca suavidade. Assim, seguindo a abordagem de Monteiro and Santos [19] são atribuídos diferentes pesos a diferentes observações usando os dados relativos ao *open interest*. Na Figura 6.3, à direita, está representada a evolução comparativamente às estimações anteriores, onde pesos e restrições de não arbitragem são incluídos no problema de otimização. Nota-se pela sua análise, que com a introdução dos pesos nas estimações, a FDNR apresenta um resultado mais suave que as estimações anteriores, obtendo um comportamento esperado para as caudas da densidade. Na Figura 6.3 (esquerda) poder-se-á verificar uma sobreposição perfeita das figuras relativas às FDNR obtidas através do preço das opções *call* e das opções *put*. Tal resulta da paridade *put-call*, o que implica que as segundas derivadas em relação ao preço de exercício coincidem.

6.2 Dados simulados usando mistura de distribuições lognormais

Os preços de opções de uma mistura de distribuições lognormais são obtidos usando a função `price.mln.option` do package `RND` do R. Essa função calcula o valor das opções *call* e *put* tendo em consideração as fórmulas (5.7), (5.8) e (5.9). Para gerar os preços, fornecemos à função os mesmos inputs utilizados na constituição dos preços calculados pelo modelo de Black-Scholes-Merton, exceto o intervalo considerado para os preços de exercício, que apresentará valores entre 28 e 72, com variações de 0.01. Para os parâmetros $\psi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ definimos os seguintes valores: $\psi = 0.3, \alpha_1 = 3.75, \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = 4, \beta_2 = 0.1$.

Estes valores serão usados na estimação da FDNR para a mistura de distribuições lognormais.

Par.	Verd.	Estim.	Er Padr.	t-stat	p-value
ψ	0.3	0.332	0.121	2.743	0.001
α_1	3.75	3.762	0.048	77.124	0.000
β_1	0.1	0.106	0.020	5.335	0.000
α_2	4	4.005	0.025	161.726	0.000
β_2	0.1	0.097	0.009	11.236	0.000

Tabela 6.1 Estimação dos parâmetros da mistura de duas distribuições lognormais. Comparação entre parâmetros verdadeiros (Verd.) e estimados (Estim.). Estatísticas teste obtidas a partir da matriz Hessiana e assumindo uma distribuição normal assintótica

Na Figura 6.4, à esquerda, vemos os preços das opções *call* e *put* gerados pelo método da mistura de distribuições lognormais e, à direita, a respetiva FDNR. Pela observação da FDNR constatamos a presença de multimodalidade, visível na cauda esquerda, que é uma característica por vezes presente neste tipo de estimação paramétrica.

Seguindo novamente a metodologia apresentada por Yatchew and Härdle [26] geramos um conjunto de preços de opções com uma perturbação definida por um desvio padrão residual de 2%.

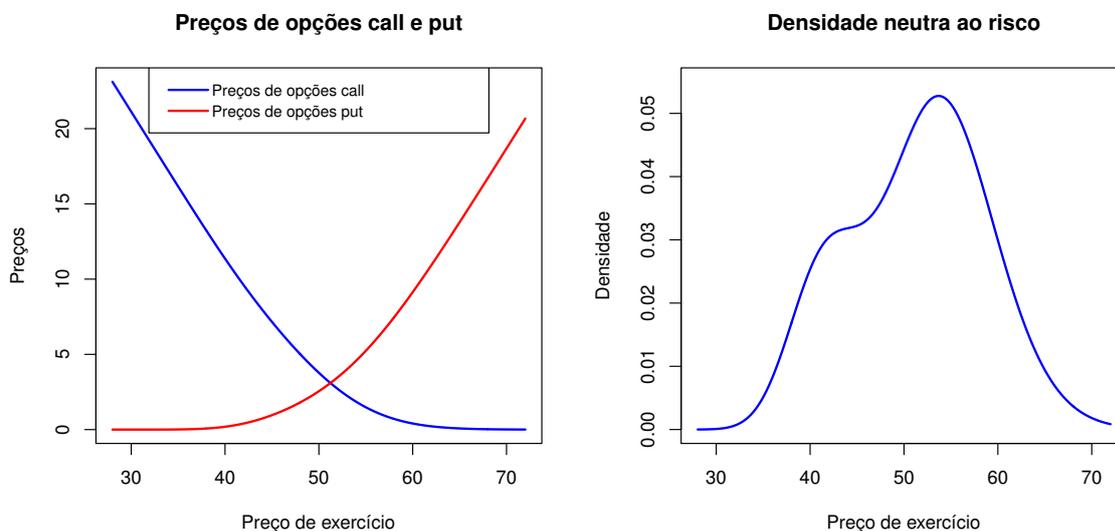


Figura 6.4 Preços de opções call e put gerados pelo método da mistura de distribuições lognormais (à esquerda) e respectiva FDNR (à direita)

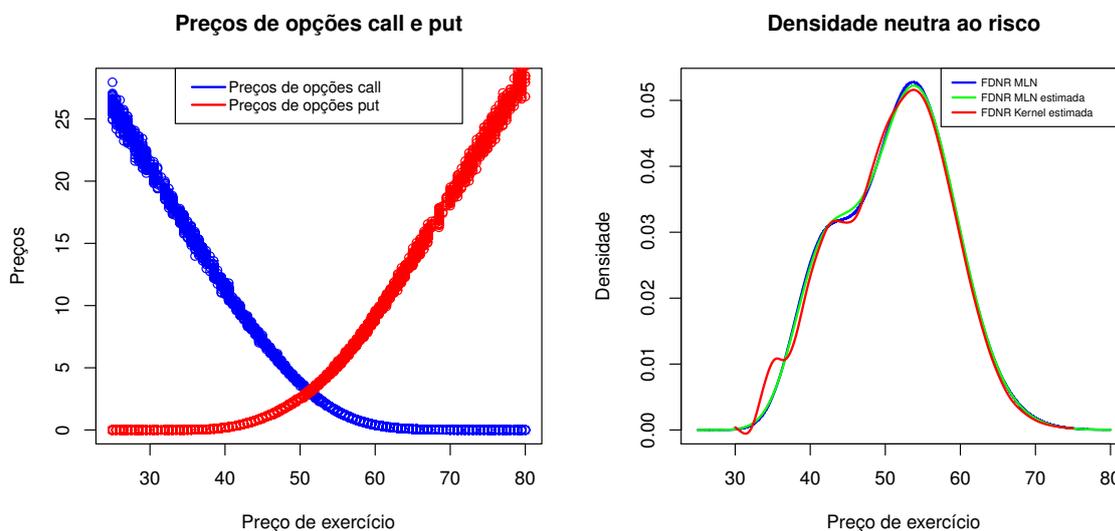


Figura 6.5 Preços de opções call e put simulados pelo método da mistura de distribuições lognormais com perturbação (esquerda) e estimação das FDNR considerando a mistura de distribuições lognormais e funções kernel (direita)

Assim, é considerado o intervalo para o preço de exercício $[25, 80]$ com acréscimos de 0.5, sendo simuladas um número aleatório de observações para cada um dos preços de exercício.

Na estimação da FDNR utilizando o método da mistura de distribuições lognormais, seguimos os procedimentos apresentados por Bahra [4], considerando o problema de minimização dado pela equação (5.10). Começamos então, nesta análise, por usar a função `extract.mln.option` do package RND do R, de forma a extrair os parâmetros que permitem otimizar o problema (5.10). Para isso fornecemos como dados de entrada a esta função os preços simulados pela mistura de distribuições lognormais com perturbação, sendo os outputs extraídos, o peso relativo de uma das funções densidade e os parâmetros de cada uma das densidades. Os valores obtidos encontram-se expostos na Tabela 6.1. Comparando os parâmetros inicialmente definidos no processo de geração dos preços de opções com os agora estimados, constatamos que são obtidas boas aproximações entre os dois conjuntos. As restantes estatísticas observadas na tabela permitem corroborar esta afirmação. De seguida, procedemos à estimação da FDNR para a mistura de distribuições considerando os preços perturbados da mistura e os valores dos parâmetros anteriormente obtidos. Recorremos à função `dm1n` do package RND do R para esse propósito.

Na Figura 6.5, à esquerda, temos a representação da estimação relativa aos preços perturbados gerados pela mistura de distribuições lognormais. Nota-se pela observação da Figura 6.5, à direita, que a estimação da FDNR correspondente à mistura, apresenta um ajuste quase perfeito da FDNR teórica, o que seria de esperar já que os preços respeitantes a esta estimação foram gerados pelo método da mistura de distribuições lognormais. Quanto à FDNR estimada considerando funções *kernel* observa-se que esta tenta capturar a informação relativa aos dados, não conseguindo no entanto um resultado com a mesma qualidade.

6.3 Dados de mercado

Nesta secção apresentam-se estimações de FDNR usando dados intradiários relativos a opções associadas a dois índices, S&P500 e VIX, cuja negociação ocorre no *Chicago Board Options Exchange (CBOE)*. A amostra correspondente a observações de 16 de abril a 20 de abril de 2018, para a qual é definido um tempo de maturidade de cerca de um mês, 18 de maio de 2018 para S&P500, e 16 de maio de 2018 para VIX. Apesar do período referenciado ser apenas de uma semana, o número de contratos observados apresentam valores da ordem de 10^4 . Esta ordem de grandeza deve-se à diversidade existente nos contratos transacionados, cada ativo subjacente dá origem a um grande número de contratos, além disso, a frequência de dados observados é de 5 minutos, e cada contrato é observado 79 vezes em cada dia. Para o índice S&P500 foram registadas 54619 e 72214 observações para opções *call* e *put*, respetivamente, e para o índice VIX, 15767 e 13178. Os preços dos contratos de *call* e *put* são incluídos diretamente no processo de estimação, sem a necessidade de uso da fórmula da paridade *put-call*, aumentando a quantidade de informação que é recuperada do mercado, evitando os problemas de falta de sincronismo e, permitindo a obtenção de melhores estimações. Para cada conjunto de dados são usados a média dos preços *bid-ask* com o intuito de representar os preços observados, sendo obtido para cada preço de exercício uma série para *calls* e para *puts*.

Existe heterogeneidade associada aos dados registados relativamente aos preços das *calls* e *puts*, no entanto, de modo a assegurar a qualidade dos dados, são necessários procedimentos de limpeza.

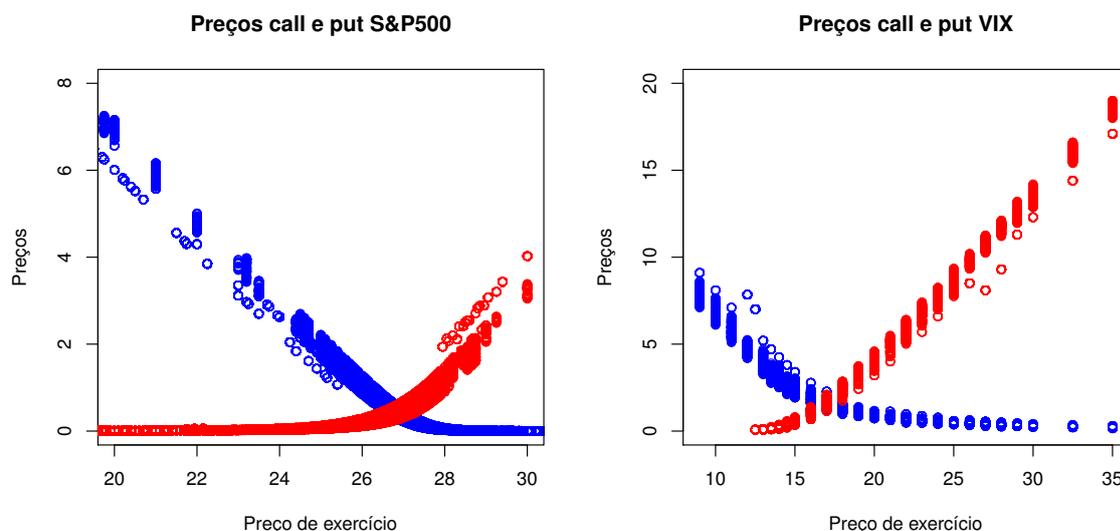


Figura 6.6 Preços das opções *call* e *put* nos índices S&P500 e VIX

Observações duplicadas que resultam do trabalho com dados de alta frequência, assim como contratos de opção com *bid* ou *open interest* igual a 0, são então eliminados. Longos períodos de tempo nas amostras podem trazer complicações sobre a manutenção da estrutura dos preços das opções. Como utilizamos um curto período de dados intradiários, as variações na taxa de juro sem risco, taxa de dividendo e preço do ativo subjacente não precisam de ser contabilizados. Ao mesmo tempo, são obtidos tamanhos de amostras comparáveis aos utilizados na literatura para estimações não paramétricas.

Apenas são considerados contratos com uma data fixa de vencimento, $(T - t) = 1/12$ e de acordo com os dados relativos aos *Treasury Bills*, é considerado um valor da taxa de juro sem risco r , igual a 2%. As médias dos preços *bid-ask* para as *calls* e *puts* para ambos os índices S&P500 e VIX encontram-se representados na Figura 6.6. Considerando o conjunto de dados S&P500, dividimos por 100 os preços *bid-ask* das opções e os seus respetivos preços de exercício. Nas *calls*, verifica-se que os preços de exercício inferiores a 24 apresentam um intervalo com preços de exercício mais dispersos, o mesmo acontecendo nas *puts* com valores acima de 28.

Os dados das opções utilizados na estimação das FDNR podem apresentar elementos com ordens de grandeza bastante diferentes, podendo levar a problemas mal condicionados numericamente. Seguindo a abordagem proposta por Fengler and Hin [11] é introduzida uma transformação sob hipótese de homogeneidade da função dos preços relativamente ao preço do ativo subjacente o que permite a redução da dimensão dos dados de entrada no processo de estimação. Nos próximos processos de estimação da FDNR, é testada a qualidade de um escalonamento dos dados, designado por *money*, que permite reduzir a ordem de grandeza dos mesmos.

Num cenário não paramétrico, procura-se obter estimações de uma FDNR que seja suave, que garanta valores não negativos para a densidade, que tenha um comportamento esperado nas caudas e uma área sob a curva próxima de um. A Figura 6.7 (linha azul no caso dos gráficos relativos às FDNR) revela a eficácia do método proposto no conjunto de dados do índice S&P500. Para a obtenção

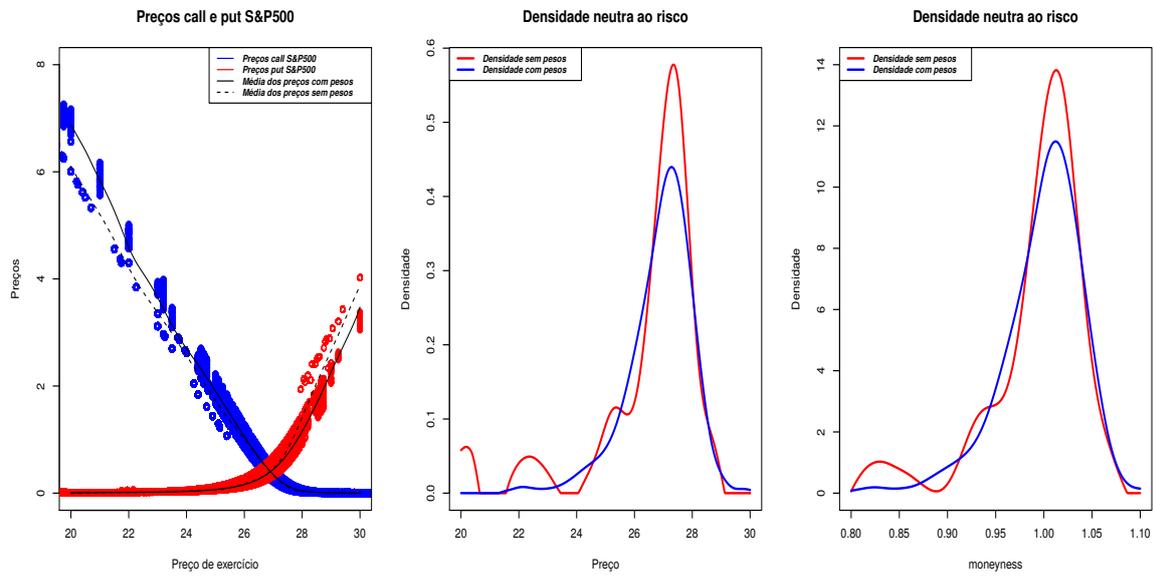


Figura 6.7 Comparação entre os preços de opções de índice S&P500 e os preços médios estimados com pesos e sem pesos usando funções kernel (esquerda) e estimação da FDNR usando funções kernel considerando moneyness (direita) e preços (centro)

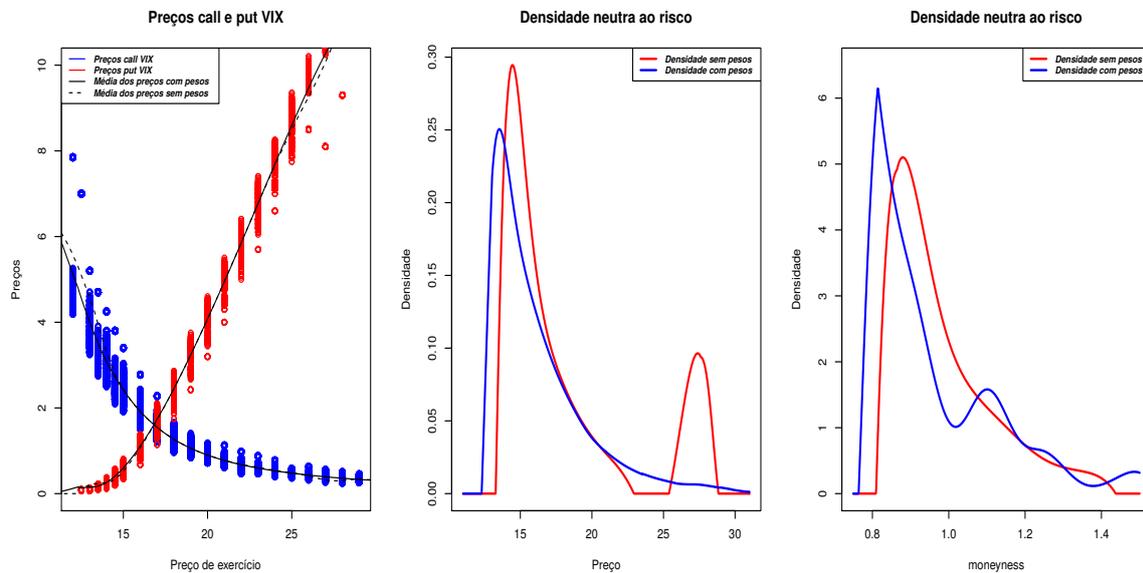


Figura 6.8 Comparação entre os preços de opções de índice VIX e os preços médios estimados com pesos e sem pesos usando funções kernel (esquerda) e estimação da FDNR usando funções kernel considerando moneyness (direita) e preços (centro)

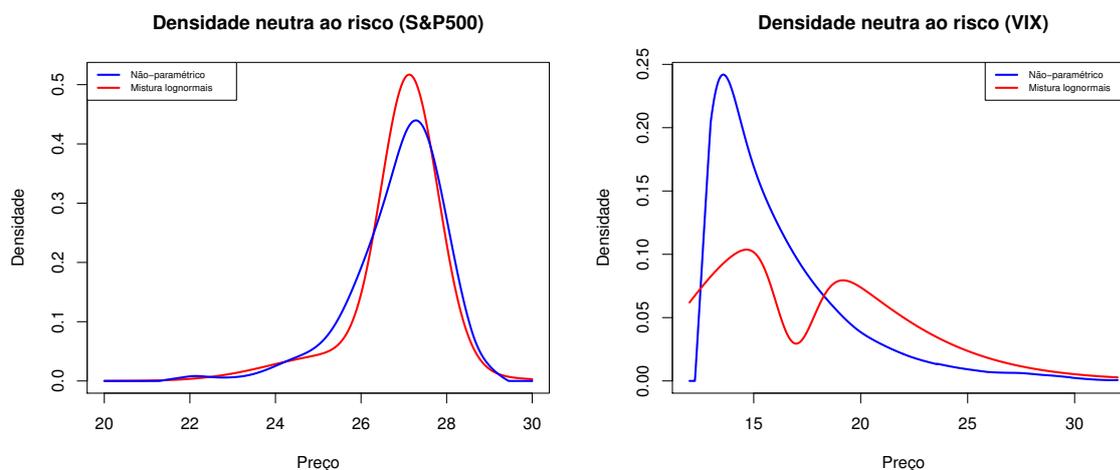


Figura 6.9 Estimções para o S&P500 e VIX; comparação entre estimções não paramétricas e através da mistura de duas lognormais

da figura foi considerado um polinómio cúbico com restrições e com pesos, e com restrições e sem pesos. Nota-se que, se os pesos representados por valores *open interest* não forem considerados, resultados menos estáveis são encontrados. É verificada a existência de assimetria negativa. Essa assimetria é consistente com o sentimento de mercado, sendo que os contratos de opções poderão ser encarados na perspectiva de um contrato de seguro, neste caso, para proteger das variações no preço do ativo subjacente. Além disso, comparando-se na Figura 6.7 os gráficos das FDNR, usando ou não a *moneyness*, constata-se considerando os pesos *open interest* que as estimções não apresentam diferenças significativas. Ao contrário do que acontece quando os pesos não são adicionado ao processo, observando-se que sem a o fator de escalonamento *moneyness* as caudas de distribuição apresentam um comportamento mais ruidoso.

Considerando-se agora o conjunto de dados relativos aos preços das opções sobre o índice VIX, observa-se na Figura 6.8, mais uma vez, uma boa aproximação das médias dos preços de opções de índice VIX relativamente aos respetivos preços das opções observadas. Apesar da existência de algumas observações discrepantes, o ajuste das médias mantém-se robusto. Nos restantes dois gráficos da mesma figura, verifica-se um resultado expectável, existindo neste caso a presença de assimetria positiva. Resultado compatível com o anteriormente apresentado para o S&P500, sendo que neste caso o contrato de seguro visa proteger contra acréscimos de volatilidade, e assim se verifica a assimetria positiva. Melhores estimativas são obtidas com a adição de pesos ao processo de estimação. Porém, para este conjunto de dados, usando *moneyness* não apresenta melhores características para a função densidade.

Por fim, apresentamos com o auxílio da Figura 6.9 uma comparação entre os resultados obtidos para a FDNR considerando os dois processos de estimação em análise na dissertação, método da mistura de distribuições lognormais e funções *kernel*. Relativamente às opções sobre o índice S&P500, tendo em consideração a natureza do ativo subjacente, o principal interesse é a cauda esquerda, pois revela a possibilidade de queda nos preços que é sentida atualmente nos mercados. Quanto ao índice VIX o principal interesse é a cauda direita, dado que está relacionada à possibilidade de aumento

da volatilidade, pela Figura 6.9, à direita, verifica-se um comportamento na FDNR mais próximo do expectável usando estimações não-paramétricas. Repara-se que na estimação através da mistura de distribuições lognormais a FDNR apresenta bimodalidade, obtida através de estimativas pouco robustas reforçando assim a flexibilidade dos métodos não paramétricos neste contexto.

As diferenças esperadas sobre os dois índices foram refletidas nas estimações não paramétricas estudadas ao longo da dissertação, revelando essencialmente a importância da abordagem proposta, já que estas foram mais flexíveis que os métodos paramétricos apresentados, que se mostraram mais rígidos e com maior dificuldade em se ajustar aos dados de mercado.

Capítulo 7

Conclusão

Os preços das opções financeiras fornecem informações sobre as expectativas futuras dos agentes de mercado relativamente à evolução do preço do ativo subjacente. A partir dos preços observados destes derivados financeiros, podem ser estimadas FDNR ilucidativas das probabilidades que o mercado atribui a movimentos futuros do preço deste ativo. As reações e as expectativas dos agentes financeiros são bastante importantes tanto para investidores como para gestores de risco e decisores políticos, portanto, é crucial a estimação de uma FDNR que seja robusta e consistente com o verdadeiro sentimento de mercado e assim ser possível atenuar o risco de tomar decisões erradas.

Nesta dissertação, foi feita uma comparação entre dois métodos estudados na literatura que permitem estimar a FDNR a partir dos preços das opções, como forma de examinar a robustez e poder informativo dessas estimações. Para este efeito, utilizámos uma abordagem paramétrica que usa uma mistura de duas distribuições lognormais e uma abordagem não paramétrica baseada em funções *kernel*. Definimos como dados de entrada quatro conjuntos de dados diferentes respeitantes a preços de opções *call* e *put*. Os dois primeiros conjuntos dizem respeito a dados gerados com base no modelo definido em Black-Scholes-Merton e no método da mistura de distribuições lognormais, onde, de forma a imitar os preços de mercado e assim testar a estabilidade e eficácia das FDNR estimadas, foi simulado um ruído para estes preços de opções. Os dois últimos conjuntos de dados referem-se a preços de opções intradiários sobre os índices de mercado S&P500 e VIX, sendo que ambos os preços das opções *call* e *put* foram incorporadas nos problemas de otimização sem usar a paridade *put-call*, aumentando a quantidade de informação que é recuperada do mercado e evitando erros por falta de sincronicidade.

De modo a assegurar a qualidade dos dados eliminamos todas as observações duplicadas, assim como contratos de opções cujos valores *bid* ou *open interest* eram iguais a zero.

Usando os dados simulados, demonstramos que ambos os métodos são capazes de recuperar, com precisão aceitável, as FDNR teóricas. Na abordagem não paramétrica, conseguimos ainda concluir a partir dos resultados obtidos a importância da atribuição das restrições de não arbitragem e dos pesos como forma de evitar problemas de monotonicidade e convexidade, assim como garantir a não-negatividade, integração em um, e suavidade das FDNR. Quando aplicamos os métodos aos preços opções com índices S&P500 e VIX obtemos resultados expectáveis para o método não paramétrico. Contudo, estimando as FDNR para a mistura de distribuições lognormais os resultados obtidos não se aproximam do esperado. Estes resultados refletem sobretudo a falta de flexibilidade das estimações

paramétricas em se adaptar aos dados. Avaliando o resultado obtido na estimação não paramétrica da FDNR para o índice S&P500, verificamos a existência de uma assimetria negativa, revelando uma maior probabilidade de existir um retorno significativamente negativo em vez de um retorno positivo de igual ordem. Ao subscrever opções sobre o índice VIX, o principal interesse é a cauda direita, já que esta está relacionada à possibilidade de aumento da volatilidade.

De uma forma geral, comparando as FDNR obtidas para os dois os índices são realçadas as principais motivações para a subscrição destas opções, como a proteção contra reduções (para índices S&P500) e aumentos (para índices VIX) sobre os valores dos respetivos ativos subjacentes.

Bibliografia

- [1] Abadir, K. M. and Rockinger, M. (2003). Density functionals, with an option-pricing application. *Econometric Theory*, 19(5):778–811.
- [2] Ait-Sahalia, Y. and Duarte, J. (2003). Nonparametric option pricing under shape restrictions. *Journal of Econometrics*, 116(1-2):9–47.
- [3] Ait-Sahalia, Y. and Lo, A. W. (1998). Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices. *Journal of Finance*, 53(2):499–547.
- [4] Bahra, B. (1997). Implied risk-neutral probability density functions from option prices: Theory and application. *Bank of England Quarterly Bulletin*.
- [5] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
- [6] Breeden, D. T. and Litzenberger, R. H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *The Journal of Business*, 51(4):621–51.
- [7] Bu, R. and Hadri, K. (2007). Estimating option implied risk-neutral densities using spline and hypergeometric functions. *The Econometrics Journal*, 10(2):216–244.
- [8] Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3(1):145 – 166.
- [9] Dalderop, J. (2019). Nonparametric filtering of conditional state-price densities.
- [10] Fan, J. and Gijbels, I. (1996). *Local polynomial modelling and its applications*. Number 66 in Monographs on statistics and applied probability series. Chapman Hall, London [u.a.].
- [11] Fengler, M. R. and Hin, L.-Y. (2015). Semi-nonparametric estimation of the call-option price surface under strike and time-to-expiry no-arbitrage constraints. *Journal of Econometrics*, 184(2):242 – 261.
- [12] Gramacki, A. (2018a). *Introduction*, pages 1–6. Springer International Publishing, Cham.
- [13] Gramacki, A. (2018b). *Kernel Density Estimation*, pages 25–62. Springer International Publishing, Cham.
- [14] Gramacki, A. (2018c). *Nonparametric Density Estimation*, pages 7–24. Springer International Publishing, Cham.
- [15] Jondeau, E., Poon, S.-H., and Rockinger, M. (2007). Financial modeling under non-gaussian distributions.
- [16] Melick, W. R. and Thomas, C. P. (1997). Recovering an asset’s implied pdf from option prices: An application to crude oil during the gulf crisis. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(1):91–115.

- [17] Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics*, 4(1):141–183.
- [18] Monteiro, A., H. Tütüncü, R., and N. Vicente, L. (2008). Recovering risk-neutral probability density functions from options prices using cubic splines and ensuring nonnegativity. *European Journal of Operational Research*, 187:525–542.
- [19] Monteiro, A. M. and Santos, A. A. F. (2019). Conditional risk-neutral density from option prices by local polynomial kernel smoothing with no-arbitrage constraints. *Review of Derivatives Research*.
- [20] Nadaraya, E. A. (1964). On estimating regression. *Theory of Probability & Its Applications*, 9(1):141–142.
- [21] Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Mathematical Statistics*, 33(3):pp. 1065–1076.
- [22] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some non-parametric estimates of a density function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 27.
- [23] Santos, A. and Guerra, J. (2014). Implied risk neutral densities from option prices: Hypergeometric, spline, lognormal, and edgeworth functions: Implied risk-neutral densities. *Journal of Futures Markets*, 35.
- [24] Song, Z. and Xiu, D. (2016). A tale of two option markets: Pricing kernels and volatility risk. *Journal of Econometrics*, 190(1):176–196.
- [25] Watson, G. S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, pages 359–372.
- [26] Yatchew, A. and Härdle, W. (2006). Nonparametric state price density estimation using constrained least squares and the bootstrap. *Journal of Econometrics*, 133(2):579–599.