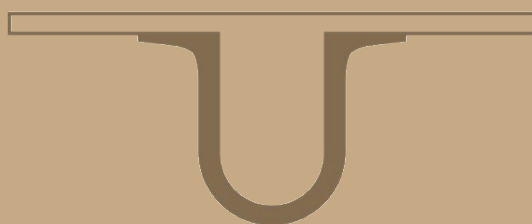




UNIVERSIDADE D  
COIMBRA



Wilson Pinheiro Abdon Filho

**UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DAS CÓPULAS  
E SUA APLICAÇÃO À ESTIMAÇÃO DO VALOR  
EM RISCO E DO DÉFICE ESPERADO**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em  
Finanças, orientada pela Professora Doutora Ana Cristina Martins  
Rosa e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade  
de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia.**

setembro de 2019



# **Uma introdução à teoria das cópulas e sua aplicação à estimação do Valor em Risco e do Défice Esperado**

**Wilson Pinheiro Abdon Filho**



UNIVERSIDADE D  
COIMBRA



Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

September 2019



## **Agradecimentos**

À minha orientadora, Professora Doutora Ana Cristina Martins Rosa, pelo seu apoio, disponibilidade e solicitude constantes e, também, pelos ensinamentos que extrapolam o âmbito académico e que irei, com certeza, aplicar na minha vida para o bem comum.

Ao Professor Doutor José Luís Esteves dos Santos, sem a ajuda do qual não teria sido capaz de solucionar problemas burocráticos que representavam um entrave à realização deste mestrado.

Aos meus professores da Universidade Federal da Bahia e da Universidade de Coimbra pela inspiração que são para mim para ser cada vez melhor.

Aos funcionários do departamento de matemática da Universidade de Coimbra e da Universidade Federal da Bahia por serem todos tão prestativos.

À minha mulher, Inês Lourenço de Carvalho, por estar ao meu lado ao longo deste percurso, não só nos bons momentos, mas também por me suportar nos momentos difíceis.

Ao meu amigo Alexandre Vale que, enquanto meu chefe, sempre demonstrou compreensão e ofereceu a sua cooperação para que eu conseguisse conciliar da melhor forma os estudos e o trabalho.

Aos meus colegas e amigos, pelos bons momentos e interajuda.

Àqueles meus amigos que já partiram.

Aos meus irmãos, pais, sobrinhos, tios e avós, a quem amo, pelo que representam para mim, em especial, aos meu pais, Nivia Maria e Wilson Pinheiro, por me prepararem para as dificuldades da vida.

À família da minha mulher por estar presente quando foi preciso, à sua mãe, Fátima Lobo, ao seu avó, Valdomiro Lobo e, em especial, à sua avó materna, Laura Getúlia, por ser tão amiga e dedicada.

Aos Serviços de Ação Social da Universidade de Coimbra e à Direção Geral de Ensino Superior, pela bolsa de estudos, concedida ao longo deste mestrado e, em especial, à Dra. Cristina Miranda Cabral.



## Resumo

No presente trabalho é efetuada uma breve introdução à Teoria das Cópulas bidimensionais e ilustrada a sua aplicação à estimação do Valor em Risco e do Défice Esperado. Os temas nele abordados foram agrupados em quatro capítulos.

No Capítulo 1 é apresentada uma resenha histórica sobre a origem desta teoria bem como alguns dos seus desenvolvimentos mais recentes, em particular no domínio das finanças.

O Capítulo 2, que constitui a parte fundamental do trabalho, debruça-se sobre as principais propriedades teóricas das cópulas. Destacam-se, neste capítulo, a demonstração do Teorema de Sklar e o estudo da dependência entre duas variáveis aleatórias reais através das cópulas produto, comonotónica e contramonotónica. Inclui também a construção de exemplos clássicos de famílias de cópulas, tais como as famílias Arquimedianas, Elíticas e de Valores Extremos.

No Capítulo 3, relacionam-se as cópulas com as medidas de associação mais populares nas aplicações, nomeadamente os coeficientes de correlação de Pearson, de Kendall e de Spearman, estabelecendo as propriedades destes dois últimos a partir de tais relações.

O Capítulo 4 é dedicado a um exemplo de aplicação da Teoria das Cópulas à estimação do Valor em Risco e do Défice Esperado, duas medidas de risco essenciais no contexto das finanças. Para concretizar este objetivo, são implementadas técnicas estatísticas adaptadas ao contexto das cópulas, nomeadamente, o método da pseudo-máxima verosimilhança e o método de simulação de Monte Carlo.

Nos Anexos A e B são resumidos alguns resultados auxiliares usados no trabalho. No Anexo C figura o código do programa que permitiu obter os resultados relativos ao exemplo considerado na secção 4.3.

**Palavras Chave:** Cópulas, Medidas de Associação, Valor em Risco, Défice Esperado, Método de simulação de Monte Carlo.

## Abstract

In this work, we present a brief introduction to bivariate copula theory and illustrate its application to VaR and ES estimation. The themes covered are grouped into four chapters.

Chapter 1 presents an historical overview concerning the origin of copula theory as well as some of its most recent applications, particularly in finance.

Chapter 2 deals with the main theoretical properties of copula functions, including the proof of Sklar's theorem and the study of dependence between two real random variables by means of product, monotonic and countermonotonic copulas. It also comprises the methods for defining classical examples of copula families such as Archimedean, elliptical and extreme-value copulas.

In Chapter 3, copulas are related with some of the most popular association measures, namely Pearson, Kendall and Spearman correlation coefficients. Based on these relations, we deduce essential properties of the two last ones.

Chapter 4 is devoted to an example showing the usefulness of bivariate copulas to estimate Value-at-Risk and Expected Shortfall, which are two key risk measures. To achieve this goal, we use suitable statistical techniques in the context of copulas, namely the pseudo-maximum likelihood and the Monte Carlo simulation methods.

In Annexes A and B, some auxiliary results are summarized. Annex C contains the program code which allowed us to obtain the results concerning the example presented in section 4.3.

**Keywords:** Copula, Association measures, Value-at-Risk, Expected Shortfall, Monte Carlo simulation methods.



# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Uma introdução às funções cópula</b>	<b>3</b>
2.1 Funções cópula bidimensionais . . . . .	3
2.2 Cópulas e Vetores Aleatórios Reais . . . . .	5
2.3 Alguns exemplos de funções Cópula . . . . .	19
2.3.1 Cópula de Fréchet . . . . .	19
2.3.2 Cópulas Arquimedianas . . . . .	20
2.3.3 Cópulas Elíticas . . . . .	23
2.3.4 Cópulas de Valores Extremos . . . . .	24
<b>3 Medidas de Associação</b>	<b>27</b>
3.1 Coeficiente de Correlação de Pearson . . . . .	27
3.2 Coeficiente de Correlação de Kendall . . . . .	30
3.3 Coeficiente de Correlação de Spearman . . . . .	33
3.4 Coeficientes de Dependência nas Caudas . . . . .	34
<b>4 Aplicação das cópulas à estimação do Valor em Risco e do Déficit Esperado</b>	<b>37</b>
4.1 Valor em Risco e Déficit Esperado . . . . .	37
4.2 Estimação do Valor em Risco e do Déficit Esperado pelo MSMC . . . . .	39
4.3 Exemplo de aplicação . . . . .	43
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>
<b>Anexo A</b>	<b>53</b>
<b>Anexo B</b>	<b>55</b>
<b>Anexo C</b>	<b>57</b>



# Lista de Figuras

4.1	Histogramas e Densidade empírica das séries . . . . .	43
4.2	DJ e R2000 - Papeis de probabilidade relativos às leis normal, Cauchy e logística. . .	44
4.3	Diagrama de Dispersão - DJxR2000 . . . . .	45



# Lista de Tabelas

2.1	Família de Cópulas arquimedianas importantes. . . . .	22
3.1	Medidas de associação. . . . .	36
4.1	Medidas descritivas dos dados DJ e R2000. . . . .	43
4.2	Resumo do ajustamento das distribuições Marginais - DJ. . . . .	44
4.3	Resumo do ajustamento das distribuições Marginais - R2000. . . . .	45
4.4	Estimativas dos coeficientes de correlação. . . . .	45
4.5	Estimativas dos parâmetros das cópulas. . . . .	46
4.6	Valores do VaR - Cópula t-Student . . . . .	46
4.7	Valores do VaR - Cópula de Frank . . . . .	46
4.8	Valores do ES -Cópula t-Student . . . . .	47
4.9	Valores do ES - Cópula de Frank . . . . .	47



# Capítulo 1

## Introdução

É sabido que o conhecimento da lei de probabilidade de um vetor aleatório real determina o conhecimento das leis de probabilidade dos seus subvetores e, em particular, das correspondentes leis marginais. Contudo, fora do contexto da independência, a informação sobre as leis marginais do vetor não é suficiente para caracterizar a sua lei de probabilidade, uma vez que ela também depende da estrutura de dependência entre as margens. Um dos exemplos em que é relativamente fácil modelar essa estrutura de dependência é o da lei normal, pois ela é resumida através da matriz de correlação do vetor, cuja estimação não envolve grandes dificuldades. Este facto justifica, de certa forma, a popularidade da lei normal na construção de modelos multivariados, que têm sido exaustivamente utilizados nas aplicações da Teoria das Probabilidades e da Estatística às mais diversas áreas do conhecimento. O problema de determinar a relação entre uma função de distribuição multivariada e as respetivas funções de distribuição marginais remonta aos trabalhos de Fréchet (1951) (cf. [26]), Féron (1956) (cf. [23]) e Dall’Aglia (1959) (cf. [15]). Uma solução concreta para este problema surgiu na sequência da troca de correspondência entre Féron e Abe Sklar (que, na época, se debruçava sobre espaços métricos probabilísticos, em colaboração com Berthold Schweizer) e foi concretizada através do denominado Teorema de Sklar, publicado em 1959 (cf. [55]). O Teorema de Sklar, considerado o pilar da teoria das cópulas, inspirou também o seu autor na introdução da palavra “cópula” para designar uma função que estabelece a ligação entre a distribuição de um vetor aleatório real e as correspondentes distribuições marginais, à semelhança do seu significado em termos gramaticais. Nos anos que se seguiram, a maioria dos resultados sobre cópulas foram obtidos no contexto dos espaços métricos probabilísticos e foi preciso esperar pelos anos 80 (século XX) para que a Teoria das Cópulas começasse a ser alvo de maior interesse por parte dos investigadores. Destacam-se, neste período, os trabalhos pioneiros de Schweizer e Wolf (cf. [53]), que evidenciam a utilidade das cópulas para definir medidas não paramétricas de dependência entre variáveis aleatórias reais, e de Genest e Mackay (cf. [28]), onde são introduzidas as cópulas Arquimedianas. Em contrapartida, as décadas que se seguiram foram férteis no desenvolvimento da Teoria das Cópulas, que ficou bem patente a todos os níveis, quer pela organização de várias conferências sobre o assunto, quer pela publicação dos livros de Joe (1997) (cf. [34]) e Nelsen (1999) (reeditado em 2006) (cf. [42] e [43]), duas obras que permanecem indispensáveis até à atualidade, quer ainda pelos inúmeros trabalhos relativos a aplicações das cópulas nos contextos das finanças, das ciências atuariais, da engenharia e da medicina (vejam-se, a este propósito, os trabalhos citados no prefácio da obra de Durante e Sempi

(2014) (cf. [19]), por exemplo, ou mesmo a lista de trabalhos apresentada na Wikipédia, consultando o site <https://en.wikipedia.org/wiki/Copula>, onde encontramos aplicações muito recentes nos domínios da Sociologia, da Astronomia, da Engenharia Civil e da Geodesia).

Porém, tal como afirmam tais autores, foi a área das finanças uma das que mais se beneficiou com os modelos construídos com base nas cópulas, devido à sua grande flexibilidade para modelar a dependência. De facto, na gestão dos riscos financeiros inerentes a mercados e portfólios, a modelação adequada da dependência reveste-se de crucial importância. Por exemplo, a forte dependência entre os ativos de um portfólio pode ser devastadora, na medida em que as perdas tendem a ocorrer, simultaneamente, em todos os ativos. A dependência está, assim, diretamente relacionada com o risco do portfólio.

Sem pretensão de exaustividade, referimos algumas obras que descrevem as principais vertentes da aplicação da Teoria das Cópulas neste domínio: McNeil et al. (2005) (cf. [39]) e Cherubini et al. (2004, 2011) (cf. [12] e [13]) que constituem textos fundamentais para compreender os modelos utilizados nos vários ramos das finanças; em Jaworski et al. (2010) (cf. [33]) encontramos artigos de síntese sobre aspetos particulares da modelação via cópulas, assim como estudos empíricos sobre a sua aplicação nas finanças e na atividade seguradora (destaca-se, nesta obra, o artigo de Choros et al (2010) (cf. [14]) sobre a estimação paramétrica e não paramétrica de uma função cópula, tanto no contexto i.i.d. como no contexto das séries temporais); Patton (2009, 2012a e 2012b) (cf. [47], [48] e [46]) dedica-se à aplicação das cópulas aos modelos de séries temporais envolvendo dados económicos e financeiros; Manner e Reznikova (2012) (cf. [38]) descrevem diversos modelos de cópulas cuja estrutura de dependência depende do tempo, comparando o seu desempenho; finalmente, salientamos ainda os artigos de síntese de Andersen et al. (2013) (cf. [3]) e Embrechts and Hofert (2014) (cf. [21]), no âmbito da gestão do risco financeiro.

De acordo com [35], o risco financeiro está relacionado com as possíveis perdas que ocorrem nos mercados financeiros, tais como perdas devidas a grandes variações dos preços de ativos ou de taxas de juro, assim como ao incumprimento de obrigações financeiras. O risco de mercado, que constitui um dos tipos de risco financeiro, diz respeito às perdas decorrentes das oscilações dos preços dos ativos, causadas pelas flutuações do mercado. Dois dos métodos mais populares para avaliar o risco de mercado são o Valor em Risco (conceito introduzido na sequência da crise financeira de 1987, apesar de ter sido usado empiricamente antes desta data) e o Déficit Esperado (proposto por Artzner et al. (cf. [5])). A sua popularidade é justificada pelo facto de quantificarem o risco através de um único número que permite atribuir um valor monetário ao risco. Contudo, no que diz respeito aos portfólios, o cálculo destas medidas de risco é baseado na lei de probabilidade do retorno do portfólio que, em geral, é desconhecida. Por esta razão, o cálculo de tais medidas passa frequentemente pela utilização de métodos de estimação não paramétricos. Neste contexto, a flexibilidade das funções cópula, aliada a técnicas de estimação eficientes, como é o caso do método de simulação de Monte Carlo, tem-se revelado de crucial importância nas aplicações. (cf. [1], [36] e [17]).



## Capítulo 2

# Uma introdução às funções cópula

### 2.1 Funções cópula bidimensionais

Nesta secção, baseada em [10], [19], [32], [43] e [51], será apresentada a definição analítica de função cópula bem como algumas das suas propriedades fundamentais. Dedicar-nos-emos exclusivamente às funções cópula bidimensionais.

**Definição 2.1.1.** Uma cópula é uma função  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , verificando as seguintes condições:

- (1)  $\forall u \in [0, 1], C(u, 0) = 0 = C(0, u)$ ;
- (2)  $\forall u \in [0, 1], C(u, 1) = u$  e  $C(1, u) = u$ ;
- (3)  $\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$ , com  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ ,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (2.1)$$

**Observação 2.1.1.** O primeiro membro da desigualdade (2.1) denomina-se  $C$ -Volume do retângulo  $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$  e é representado por  $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2])$ . Quando  $V_C([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0$  dizemos que  $C$  é uma função bicrescente.

Comecemos por apresentar alguns exemplos elementares de funções cópula.

**Exemplo 2.1.1.** As funções definidas por

- (1)  $\Pi(u, v) = u.v$ ;
- (2)  $M(u, v) = \min\{u, v\}$ ;
- (3)  $W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$ ,  $(u, v) \in [0, 1]^2$ , são cópulas. Designam-se, na literatura, por cópula Produto, cópula Comonotónica e cópula Contramonotónica, respetivamente.

Em qualquer um dos casos, é fácil estabelecer a validade das condições (1) e (2) da Definição 2.1.1. A título de exemplo, iremos apenas mostrar que a função  $W$  satisfaz (3). Para tal, basta ver que, dados  $(u_1, u_2)$  e  $(v_1, v_2)$  nas condições referidas,

$$V_W([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = \begin{cases} \max\{u_2 + v_2 - 1, 0\}, & \text{se } u_2 + v_1 \leq 1 \wedge u_1 + v_2 \leq 1, \\ \max\{u_1 + v_1 - 1, 0\} - (u_1 + v_1 - 1), & \text{se } u_2 + v_1 \geq 1 \wedge u_1 + v_2 \geq 1, \\ u_2 - u_1, & \text{se } u_2 + v_1 \leq 1 \wedge u_1 + v_2 \geq 1, \\ v_2 - v_1, & \text{se } u_2 + v_1 \geq 1 \wedge u_1 + v_2 \leq 1. \end{cases}$$

As propriedades que se seguem são dedicadas às principais propriedades de regularidade de uma função cópula (cf. [43], pp. 11-14).

**Lema 2.1.1.** Sejam  $C$  uma cópula,  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  e  $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ , então

$$v \mapsto C(u_2, v) - C(u_1, v) \quad \text{e} \quad u \mapsto C(u, v_2) - C(u, v_1), \quad (2.2)$$

são crescentes em  $[0, 1]$ .

*Demonstração.* Com efeito, para  $u_1, u_2, v_1$  e  $v_2$ , nas condições dadas, como consequência da Definição 2.1.1,  $C$  satisfaz a expressão 2.1. Então

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \geq C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) \quad \text{e} \quad C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) \geq C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1). \quad \square$$

**Proposição 2.1.1.** Seja  $C$  uma cópula. Então:

- (1)  $C$  é não decrescente em cada argumento;
- (2)  $\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, 1]^2, |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$ ;
- (3)  $\forall (u, v) \in [0, 1]^2, W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$ .

*Demonstração.* (1) Para o primeiro argumento, basta considerar  $u_1 = 0$  no Lema 2.1.1. Para o segundo argumento, consideramos  $v_1 = 0$  no Lema 2.1.1.

(2) Sejam  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$  arbitrariamente fixos. Pela desigualdade triangular, vem

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)| + |C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1)|.$$

Invocando mais um vez o Lema 2.1.1, temos que:

- se  $u_1 \leq u_2$ , tomando  $v = 0$  e  $v = 1$

$$0 \leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) \leq C(u_2, 1) - C(u_1, 1) = u_2 - u_1;$$

- se  $u_2 \leq u_1$ , um raciocínio semelhante conduz a

$$0 \leq C(u_1, v_2) - C(u_2, v_2) \leq C(u_1, 1) - C(u_2, 1) = u_1 - u_2.$$

Consequentemente,

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2)| \leq |u_1 - u_2|.$$

De forma análoga, obtemos

$$|C(u_1, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |v_2 - v_1|.$$

(3) A segunda desigualdade decorre diretamente da condição (2) da Definição 2.1.1 e da monotonia  $C$  em relação a cada argumento. Para provar a primeira, basta notar que, para todo  $(u, v)$  em  $[0, 1]^2$ , se tem

$$V_C([u, 1] \times [v, 1]) = C(u, v) - u - v + 1 \geq 0 \quad \text{e} \quad V_C([0, u] \times [0, v]) = C(u, v) \geq 0.$$

□

A dupla desigualdade estabelecida na propriedade anterior denomina-se desigualdade das *Fronteiras de Fréchet-Hoeffding* e, por esta razão, as cópulas  $M$  e  $W$  também se designam por *Fronteiras de Fréchet-Hoeffding Superior e Inferior*, respetivamente.

**Observação 2.1.2.** (i) A propriedade (2) da Proposição 2.1.1 permite afirmar que  $C$  satisfaz uma condição de *Lipschitz*, pelo que é uma função uniformemente contínua em  $[0, 1]^2$ ;

(ii) para simplificar, usaremos a notação  $C_1 \prec C_2$  sempre que  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$ .

**Proposição 2.1.2.** Seja  $C$  uma função cópula.

(1) Para  $v \in [0, 1]$ ,  $\partial_1 C(u, v)$ <sup>1</sup> existe para quase todo o  $u \in [0, 1]$ <sup>2</sup> e, nos pontos em que existe, tem-se

$$0 \leq \partial_1 C(u, v) \leq 1. \quad (2.3)$$

(2) Para  $u \in [0, 1]$ ,  $\partial_2 C(u, v)$  existe para quase todo o  $v \in [0, 1]$ <sup>3</sup> e, nos pontos em que existe, tem-se

$$0 \leq \partial_2 C(u, v) \leq 1. \quad (2.4)$$

(3) Se, para todo o  $(u, v) \in [0, 1]^2$ ,  $\partial_i C(u, v)$ ,  $i = 1, 2$ , existem, então são funções não decrescentes em cada argumento.

*Demonstração.* A existência das derivadas parciais decorre do teorema sobre a diferenciabilidade de uma função monótona (cf. [58], pp. 27). Para provar (2.3), aplicamos as propriedades (1) e (2) da Proposição 2.1.1, que conduzem a

$$\forall \varepsilon > 0, 0 \leq \frac{C(u + \varepsilon, v) - C(u, v)}{\varepsilon} \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{C(u, v) - C(u - \varepsilon, v)}{\varepsilon} \leq 1,$$

donde se deduz a desigualdade pretendida. Aplicando o mesmo raciocínio ao segundo argumento de  $C$ , obtemos 2.4.

(3) A demonstração é evidente, tendo em conta a monotonia de  $C$  relativamente a cada argumento. □

## 2.2 Cópulas e Vetores Aleatórios Reais

Nesta secção, debruçar-nos-emos sobre a relação existente entre as funções cópula e as leis de probabilidade sobre  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ <sup>4</sup>. Começaremos por caracterizar tais funções em termos probabilísticos

<sup>1</sup> Adotando as notações usuais:  $\partial_1 C(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$  e  $\partial_2 C(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial v}$ .

<sup>2</sup> Ou seja, exceto num conjunto de medida de *Lebesgue* nula.

<sup>3</sup> Ou seja, exceto num conjunto de medida de *Lebesgue* nula.

<sup>4</sup>  $\mathbb{B}_2$  denota a tribo de Borel sobre  $\mathbb{R}^2$ .

e, de seguida, veremos a sua utilidade na descrição da estrutura de dependência entre as margens de um vetor aleatório bidimensional. A ferramenta matemática essencial para concretizar este objetivo é o teorema de Sklar, considerado o pilar da teoria das cópulas. As definições e os resultados apresentados podem ser encontrados em [32], [43], [50] e [51]. Admitiremos que todas as variáveis e vetores aleatórios referidos no texto estão definidos no mesmo espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ .

**Proposição 2.2.1.** Uma função  $C$  é uma cópula se e somente se é a restrição a  $[0, 1]^2$  da função de distribuição de um vetor aleatório real bidimensional cujas margens seguem a lei uniforme em  $[0, 1]$ <sup>5</sup>.

*Demonstração.* Seja  $F$  a função de distribuição de um vetor aleatório real  $(U_1, U_2)$  tal que  $U_1 \sim \mathbb{U}[0, 1]$  e  $U_2 \sim \mathbb{U}[0, 1]$ . Como, por definição,

$$F(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2), \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

é óbvio que a restrição de  $F$  a  $[0, 1]^2$  verifica as condições (1), (2) e (3) da Definição 2.1.1.

Para estabelecer a implicação contrária, basta ver que, dado uma cópula  $C$ , a função definida por

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_1 < 0 \vee x_2 < 0, \\ 1, & \text{se } x_1 > 1 \wedge x_2 > 1, \\ x_1, & \text{se } 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge x_2 > 1, \\ x_2, & \text{se } x_1 > 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1, \\ C(x_1, x_2), & \text{se } 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1, \end{cases}$$

é uma função de distribuição sobre  $\mathbb{R}^2$  que caracteriza uma lei de probabilidade cujas margens seguem a lei  $\mathbb{U}[0, 1]$ .  $\square$

Vejamos como se pode construir, de forma trivial, uma cópula.

**Exemplo 2.2.1.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com funções de distribuição  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , contínuas em  $\mathbb{R}$ . Como  $U_i = F_i(X_i) \sim \mathbb{U}[0, 1]$ , pela propriedade (1) do Lema A.0.2, então a restrição da função de distribuição de  $(U_1, U_2)$  a  $[0, 1]^2$  é uma cópula.

**Observação 2.2.1.** Constatamos desde já, que as cópulas Comonotónica e Contramonotónica correspondem às leis de probabilidade dos vetores da forma  $(U_1, U_2)$  com  $U_2 = U_1$ , q.c. e  $U_2 = 1 - U_1$ , q.c., respetivamente, em que  $U_1 \sim \mathbb{U}[0, 1]$ .

A próxima proposição relaciona as derivadas parciais de um cópula com as leis condicionadas de um vetor aleatório que verifique as condições da proposição anterior.

**Proposição 2.2.2.** Seja  $C$  uma cópula tal que  $\partial_1 C$  e  $\partial_2 C$  existem em  $[0, 1]$ . Seja ainda  $(U_1, U_2)$  um vetor aleatório real tal que  $U_i \sim \mathbb{U}$ ,  $i = 1, 2$ , e cuja função de distribuição, restrita a  $[0, 1]^2$ , coincide com  $C$ . Então, para todos  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ ,

$$\partial_2 C(u_1, U_2) \quad \text{é uma versão de} \quad P(U_1 \leq u_1 | U_2) \quad (2.5)$$

$$\text{e} \quad \partial_1 C(U_1, u_2) \quad \text{é uma versão de} \quad P(U_2 \leq u_2 | U_1). \quad (2.6)$$

<sup>5</sup>Aqui denotada por  $\mathbb{U}[0, 1]$ .

*Demonstração.* Provaremos apenas (2.5) pois a demonstração de (2.6) é análoga.

Seja  $u_1 \in [0, 1]$  arbitrariamente fixo. Relembrando que

$$P(U_1 \leq u_1 | U_2) = E(\mathbb{1}_{\{U_1 \leq u_1\}} | U_2), \text{ q.c.}$$

e que  
devemos mostrar que

$$E(\mathbb{1}_{\{U_1 \leq u_1\}} | U_2) = E(\mathbb{1}_{\{U_1 \leq u_1\}} | \sigma(U_2))^6,$$

- $\partial_2 C(u_1, U_2)$  é mensurável em relação a  $\sigma(U_2)$ ;

•

$$\forall A \in \sigma(U_2), E(\mathbb{1}_{\{U_1 \leq u_1\}} \mathbb{1}_A) = E(\partial_2 C(u_1, U_2) \mathbb{1}_A). \quad (2.7)$$

Ora, a primeira condição é justificada pela propriedade (3) da Proposição 2.1.2, uma vez que a monotonia de  $\partial_2 C(u_1, \cdot)$  assegura a sua mensurabilidade e  $\partial_2 C(u_1, U_2)$  é função de  $U_2$ .

No que diz respeito à segunda, comecemos por notar que, basta estabelecer a igualdade para  $A$  pertencendo a uma classe geradora de  $\sigma(U_2)$  fechada para a intersecção de conjuntos (cf. [49], pp. 138). Mas, sendo a tribo de Borel sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{B}$ , gerada por

$$\mathcal{E} = \{ ] - \infty, a ] : a \in \mathbb{R} \}$$

e  $U_2^{-1}(\mathbb{B}) = \sigma(U_2) = U_2^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(U_2^{-1}(\mathcal{E}))$ , constatamos que

$$\mathcal{E}' = \{ U_2^{-1}(E) : E \in \mathcal{E} \}$$

é uma classe geradora de  $\sigma(U_2)$  que satisfaz o referido requisito<sup>7</sup>.

Portanto, podemos tomar  $A = U_2^{-1}( ] - \infty, a ] )$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

O segundo membro de (2.7) é então dado por

$$E(\partial_2 C(u_1, U_2) \mathbb{1}_{ ] - \infty, a ] } (U_2)).$$

Como  $U_2 \sim U[0, 1]$ , esta esperança é nula para  $a \leq 0$ . Além disso, reduz-se a

$$\int_0^b \partial_2 C(u_1, u_2) du_2,$$

com  $b = 1$  se  $a \geq 1$  e  $b = 0$  se  $0 < a < 1$ .

Consequentemente

$$E(\partial_2 C(u_1, U_2) \mathbb{1}_A) = C(u_1, b) - C(u_1, 0) = C(u_1, b)$$

pois  $C(u_1, 0) = 0$ , pela Definição 2.1.1.

Por outro lado, usando de novo o facto de  $U_2 \sim \mathbb{U}[0, 1]$ , o primeiro membro de (2.7) é igual a

$$E(\mathbb{1}_{\{U_1 \leq u_1\}} \mathbb{1}_{ ] - \infty, a ] } (U_2)) = C(u_1, b) \mathbb{1}_{ ] 0, +\infty ] } (a),$$

<sup>6</sup> $\sigma(U_2)$  denota, como é habitual, a tribo gerada por  $U_2$ . A existência desta esperança está naturalmente garantida.

<sup>7</sup> $\forall E'_1, E'_2 \in \mathcal{E}'$ ,  $E'_1 \cap E'_2 = U_2^{-1}(E_1) \cap U_2^{-1}(E_2) = U_2^{-1}(E_1 \cap E_2)$ , com  $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ .

onde  $b$  é definido como anteriormente. A igualdade entre as duas expressões obtidas conclui a demonstração.  $\square$

Nas condições da hipótese da proposição anterior, escrevemos

$$P(U_1 \leq u_1 | U_2 = u_2) = \partial_2 C(u_1, u_2) \quad \text{e} \quad P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = \partial_1 C(u_1, u_2),$$

para  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ .

A fim de motivar o teorema de Sklar, consideremos a função de distribuição definida por

$$F(x_1, x_2) = \left[ 1 + e^{-x_1} + e^{-x_2} + (1 - \theta)e^{-x_1 - x_2} \right]^{-1}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

onde  $\theta$  é um número real pertencente a  $[-1, 1]$ <sup>8</sup>.

É evidente que as correspondentes funções de distribuição marginais são dadas por  $F_i(x_i) = (1 + e^{-x_i})^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , e caracterizam a distribuição logística univariada com parâmetros de localização e de escala iguais a 0 e 1, respetivamente.

O parâmetro  $\theta$  pode ser entendido como uma medida de associação entre as margens de um vetor aleatório real com função de distribuição  $F$ , uma vez que a sua nulidade corresponde ao caso em que tais variáveis são independentes. Ora, podemos escrever

$$F(x_1, x_2) = C_\theta(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

com

$$C_\theta(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{1 - \theta(1 - u_1)(1 - u_2)}, \quad (u_1, u_2) \in [0, 1]^2.$$
<sup>9</sup>

Constatando, deste modo, que  $F$  se exprime à custa de  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , e do parâmetro  $\theta$ , que controla o grau de dependência entre as margens do vetor, através de uma função cópula. É precisamente este o objetivo do referido teorema, cujas potencialidades serão descritas mais adiante.

Dada a sua importância, o teorema de Sklar tem merecido uma grande atenção na literatura. Apesar de ter sido anunciado em [55], a sua demonstração completa foi publicada, pela 1ª vez, em [56]. Desde então, surgiram várias versões da demonstração deste teorema (veja-se [18], [19] e [57], por exemplo). Outras propostas mais recentes podem ser encontradas em [24] e [50]. A versão que apresentamos, de carácter probabilístico, baseia-se em [50] e [32] onde é usada a noção de transformada de Rüschendorf, que constitui uma generalização da transformada distribucional. A Proposição 2.2.3 é dedicada às propriedades desta função que serão utilizadas na demonstração do teorema de Sklar. Para provar a Proposição 2.2.3, necessitaremos dos resultados auxiliares apresentados nos Lemas 2.2.1 e 2.2.2.

**Definição 2.2.1.** Sejam  $X$  uma variável aleatória real com função de distribuição  $F$  e  $V$  uma variável aleatória tal que  $V \sim \mathbb{U}[0, 1]$ , independente de  $X$ . Chamamos função de distribuição modificada à

<sup>8</sup>Esta função caracteriza a generalização da distribuição logística bivariada proposta por [2].

<sup>9</sup>Quando  $\theta = 1$ , definimos  $C_1(0, 0) = 0$ .

função definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall v \in [0, 1], F^*(x, v) := P(X < x) + vP(X = x).^{10} \quad (2.8)$$

A variável aleatória real  $U = F^*(X, V)$  denomina-se transformada *Rüschendorf* de  $X$ .

Para simplificar as notações, consideremos  $\Delta F(x) = F(x) - F(x^-)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , e  $q_u = F^{-1}(u)$ ,  $u \in (0, 1)$ , onde  $F^{-1}$  denota a inversa generalizada de  $F$  (cf. Definição A.0.1).

**Lema 2.2.1.** Sendo  $F$  uma função de distribuição sobre  $\mathbb{R}$ , tem-se

$$\forall u \in (0, 1), \forall (x, v) \in ]q_u, +\infty[ \times (0, 1), F^*(x, v) \leq u \iff u = F(q_u) = F(x). \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Seja  $u \in (0, 1)$  arbitrariamente fixo. Para  $(x, v)$  no conjunto considerado, tem-se

$$u \geq F^*(x, v) = vF(x) + (1 - v)F(x^-) \geq F(x^-) \geq F(q_u) \geq u,$$

tendo em conta a propriedade (4) do Lema A.0.1.

Portanto, vem  $u = F(q_u) = F(x^-) + v\Delta F(x) = F(x^-)$ , pelo que  $\Delta F(x) = 0$ , o que implica que  $u = F(q_u) = F(x)$ .

Inversamente, sendo  $x > q_u$  e  $F(q_u) = F(x) = u$ , conclui-se que  $F(x^-) = F(x) = u$ , pois  $F(x^-) \geq F(q_u)$ . Logo,  $F(x^-) + v\Delta F(x) = u$ . □

**Lema 2.2.2.** Seja  $0 < v \leq 1$ . Se  $P(0 < F^*(X, v) < 1) = 1$ , então existe um conjunto  $N_v \in \mathbb{B}^{11}$ , com  $P_X(N_v) = 0$ , tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus N_v, F^{-1}(F^*(x, v)) = x.$$

*Demonstração.* Pode ser consultado em [45], pp. 120. □

**Proposição 2.2.3.** Sejam  $X$  uma variável aleatória real com função de distribuição  $F$  e  $U = F^*(X, V)$  a sua transformada de Rüschendorf. Então:

$$U \sim \mathbb{U}[0, 1] \quad \text{e} \quad X = F^{-1}(U), \text{ q.c..}$$

*Demonstração.* Para provar que  $U \sim \mathbb{U}[0, 1]$ , mostraremos que  $P(U \leq u) = u$ , para todo  $u \in (0, 1)$ .

Seja então  $u \in (0, 1)$  arbitrariamente fixo. Como  $U = F(X^-) + V\Delta F(X)$ , podemos escrever

$$P(U \leq u) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3), \quad (2.10)$$

com

<sup>10</sup>Evidentemente, também podemos escrever  $F^*(x, v) = F(x^-) + v[F(x) - F(x^-)] = vF(x) + (1 - v)F(x^-)$ .

<sup>11</sup> $\mathbb{B}$  denota a tribo de Borel sobre  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} A_1 &= \{F(X^-) + V\Delta F(X) \leq u, X < q_u\}, \\ A_2 &= \{F(X^-) + V\Delta F(X) \leq u, X = q_u\}, \\ A_3 &= \{F(X^-) + V\Delta F(X) \leq u, X > q_u\}. \end{aligned}$$

Calculemos seguidamente  $P(A_1)$  e  $P(A_2)$ . A propriedade (5) do Lema A.0.1 e o facto de  $F(x^-) + v\Delta F(x) \leq F(x)$ , para todo  $(x, v)$  em  $\mathbb{R} \times (0, 1)$ , permitem afirmar que

$$]-\infty, q_u[ \times (0, 1) \subseteq \{(x, v) \in \mathbb{R} \times (0, 1) : F(x^-) + v\Delta F(x) < u\},$$

pelo que  $A_1 = \{X < q_u\}$ , logo  $P(A_1) = F(q_u^-)$ . Por outro lado, usando o Lema 2.2.1, tem-se

$$A_3 = \{F(X) = F(q_u) = u, X > q_u\}.$$

Consideremos  $D = \{y \geq q_u : F(y) = u\}$ . Se  $D = \emptyset$ , então  $A_3 = \emptyset$ . No caso contrário, definamos  $z = \sup D$ , que verifica  $F(z^-) \leq u$  e  $F(z) \geq u$ . Ora,

- $x > q_u \wedge F(x) = F(q_u) = u \implies x \in ]q_u, z]$ , se  $z \in D$ ;
- $x > q_u \wedge F(x) = F(q_u) = u \implies x \in ]q_u, z[$ , se  $z \notin D$ .

Assim, no primeiro caso, vem

$$A_3 \subseteq \{q_u < X \leq z\} \implies P(A_3) \leq F(z) - F(q_u) = 0$$

e, no segundo caso,

$$A_3 \subseteq \{q_u < X < z\} \implies P(A_3) \leq F(z^-) - F(q_u) = 0.$$

Consequentemente, de (2.10), podemos escrever

$$\begin{aligned} P(U \leq u) &= F(q_u^-) + P(F(X^-) + V\Delta F(X) \leq u, X = q_u) \\ &= F(q_u^-) + P(F(q_u^-) + V\Delta F(q_u) \leq u) \cdot P(X = q_u), \end{aligned}$$

uma vez que  $X$  e  $V$  são independentes.

Para concluir, basta distinguir os casos em que  $P(X = q_u) = 0$  e  $P(X = q_u) \neq 0$ .

• se  $P(X = q_u) = 0$ , então  $F(q_u) = F(q_u^-) = u$ , pela propriedade (8) do Lema A.0.1, e, portanto,  $P(U \leq u) = u$ .

• se  $P(X = q_u) \neq 0$ , tem-se

$$P(F(q_u^-) + V\Delta F(q_u) \leq u) = P\left(V \leq \frac{u - F(q_u^-)}{\Delta F(q_u)}\right) = \frac{u - F(q_u^-)}{\Delta F(q_u)},$$

e obtendo-se

$$P(U \leq u) = F(q_u^-) + \frac{u - F(q_u^-)}{\Delta F(q_u)} P(X = q_u) = u.$$

Provaremos agora que  $X = F^{-1}(U)$ , q.c..



Começemos por notar que como  $V \sim \mathbb{U}[0, 1]$ ,  $P_V$  coincide com a medida de Lebesgue em  $\mathbb{B}(]0, 1])$ <sup>12</sup>, que denotaremos por  $m$ .

Para  $0 < v \leq 1$ , consideremos  $M_v = \{x \in \mathbb{R} : F^*(x, v) = 0\}$ . Então

$$P(F^*(X, v) = 0) = E(\mathbb{1}_{M_v}(X)).$$

Tendo em conta a independência entre  $X$  e  $V$ , tem-se

$$P(F^*(X, V) = 0) = \int_0^1 E(\mathbb{1}_{M_v}(x)) dm(v).$$

Como  $U = F^*(X, V) \sim \mathbb{U}[0, 1]$ , o primeiro membro da igualdade anterior é nulo, o mesmo acontecendo com o integral que figura no segundo membro. Logo,

$$P(F^*(X, v) = 0) = 0,$$

para quase todo o  $v \in ]0, 1]$ .

Analogamente se verifica que  $P(F^*(X, v) = 1) = 0$ , para quase todo o  $v \in ]0, 1]$ .

Concluimos, assim, que existe  $L \in \mathbb{B}(]0, 1])$ , com  $m(L) = 0$ , tal que  $P(0 < F^*(X, v) < 1) = 1$ , para todo o  $v \in M = ]0, 1] \setminus L$ .

Por outro lado, o Lema 2.2.2 assegura que, para todo o  $v \in M$ , existe  $N_v \in \mathbb{B}$ , com  $P_X(N_v) = 0$ , tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus N_v, F^{-1}(F^*(x, v)) = x.$$

Consequentemente,

$$P(X \in N_V, V \in M) = \int_M P_X(N_v) dm(v) = 0,$$

atendendo de novo à independência entre  $V$  e  $X$ .

Deste modo, sendo  $N = \{V \notin M\} \cup \{X \in N_V, V \in M\}$ , deduzimos que  $P(N) = 0$ . O facto de a igualdade  $X(\omega) = F^{-1}(F^*(X(\omega), V(\omega)))$ , se verificar para  $\omega \in \Omega \setminus N \subseteq \{0 < V \leq 1\}$  permite estabelecer o resultado pretendido. □

Estamos agora em condições de apresentar o teorema de Sklar.

**Proposição 2.2.4** (Teorema de Sklar). Seja  $F$  a função de distribuição do vetor aleatório real  $(X_1, X_2)$ , com funções de distribuição marginais  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então existe uma cópula,  $C$ , tal que

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)). \quad (2.11)$$

Inversamente, se  $C$  é uma cópula e  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , são funções de distribuição sobre  $\mathbb{R}$ , a função  $F$  definida em (2.11) é uma função de distribuição sobre  $\mathbb{R}^2$ , com funções de distribuição marginais  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ .

<sup>12</sup> $\mathbb{B}(]0, 1])$  representa a tribo de Borel sobre  $]0, 1]$ .

<sup>13</sup>Recordemos que, dada uma função  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , mensurável e não negativa, o teorema de Fubini-Tonelli permite escrever

$$E(\phi(V, X)) = \int_0^1 E(\phi(v, X)) dm(v) = \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{R}} \phi(v, x) dP_X(x) \right) dm(v).$$

*Demonstração.* Para provar a primeira parte, consideremos a transformada de Rüschen- dorf de  $X_i$ ,  $U_i = F^*(X_i, V)$ ,  $i = 1, 2$ , com  $V \sim \mathbb{U}[0, 1]$  e independente do vetor  $(X_1, X_2)$ . Atendendo à Proposição 2.2.3 e à propriedade (5) do Lema A.0.1, podemos escrever, para todo  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= P(F_1^{-1}(U_1) \leq x_1, F_2^{-1}(U_2) \leq x_2) \\ &= P(U_1 \leq F_1(x_1), U_2 \leq F_2(x_2)) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)), \end{aligned}$$

onde  $C$  é a função de distribuição de  $(U_1, U_2)$ , que é uma função cópula, pela Proposição 2.2.1, pois  $U_i \sim \mathbb{U}[0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ .

Inversamente, sendo  $C$  uma cópula, denotemos por  $(V_1, V_2)$ , com  $V_i \sim \mathbb{U}[0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , um vetor aleatório cuja função de distribuição, restrita a  $[0, 1]^2$ , coincide com  $C$ .

Com base na Definição 2.1.1 e nas propriedades de  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , é fácil ver que

$$C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F_{(V_1, V_2)}(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

é uma função de distribuição sobre  $\mathbb{R}^2$ , cujas funções de distribuição marginais são dadas por

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} F_{(V_1, V_2)}(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(1, F_2(x_2)) = F_2(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x_2 \rightarrow +\infty} F_{(V_1, V_2)}(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(F_1(x_1), 1) = F_1(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

□

**Observação 2.2.2.** Toda a função  $C$  que verifica (2.11) denomina-se cópula associada a  $F$  ou uma cópula do vetor  $(X_1, X_2)$ . Note-se que não é garantida a unicidade de  $C$  em  $[0, 1]^2$ . Tal função é apenas unicamente definida em  $F_1(\mathbb{R}) \times F_2(\mathbb{R})$ <sup>14</sup>, como veremos no corolário que se segue.

**Corolário 2.2.1.** Uma função cópula  $C$  que satisfaça (2.11) é unicamente definida em  $F_1(\mathbb{R}) \times F_2(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* É evidente que

$$\forall (u_1, u_2) \in F_1(\mathbb{R}) \times F_2(\mathbb{R}), \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (u_1, u_2) = (F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Portanto, se existissem duas cópulas,  $C_1$  e  $C_2$ , verificando (2.11), ter-se-ia

$$\forall (u_1, u_2) \in F_1(\mathbb{R}) \times F_2(\mathbb{R}), \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R} : C_1(u_1, u_2) = F(x_1, x_2) = C_2(u_1, u_2).$$

□

O exemplo seguinte, que encontramos em [39], pp. 188, ilustra o caso em que a função  $C$  não é única.

<sup>14</sup> $F_i(\mathbb{R})$  denota o contradomínio da função  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**Exemplo 2.2.2.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório discreto, com suporte  $\{0, 1\}^2$ , e tal que

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{2}{8}, \quad P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{8}.$$

Claramente, a sua função de distribuição é dada por

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \in ]-\infty, 0[ \times ]-\infty, 0[ \cup ]-\infty, 0[ \times ]-\infty, 0[, \\ 1/8, & (x_1, x_2) \in [0, 1[ \times [0, 1[, \\ 3/8, & (x_1, x_2) \in ]-\infty, 0[ \times [0, 1[ \cup [0, 1[ \times ]-\infty, 0[, \\ 1, & (x_1, x_2) \in [1, +\infty[ \times [1, +\infty[. \end{cases}$$

Como  $X_i \sim B(\frac{5}{8})^{15}$ ,  $i = 1, 2$ , temos as respetivas marginais

$$F_i(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i < 0, \\ 3/8, & 0 \leq x_i < 1, \\ 1, & x_i \geq 1. \end{cases}, \quad i = 1, 2.$$

Pelo teorema de Sklar, sabemos que existe uma cópula,  $C$ , tal que

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

No entanto, a única restrição imposta a  $C$  é que verifique

$$C(3/8, 3/8) = 1/8.$$

Ora, existe uma infinidade de cópulas para as quais esta igualdade é verdadeira. Por exemplo,

$$C_1(u_1, u_2) = \frac{2}{3}W(u_1, u_2) + \frac{1}{3}M(u_1, u_2)$$

e

$$C_2(u_1, u_2) = \frac{1}{16} \left( \sqrt{1+8u_1} - 1 \right) \left( \sqrt{1+8u_2} - 1 \right) \left( \sqrt{1+8u_1} + \sqrt{1+8u_2} - 2 \right).$$

Com efeito,  $C_1$  é uma cópula por se tratar de uma combinação linear convexa de duas cópulas. No que diz respeito a  $C_2$ , além de satisfazer trivialmente as condições (1) e (2) da Definição 2.1.1, também satisfaz (2.1), uma vez que, dados  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$ , com  $u_1 \leq u_2$  e  $v_1 \leq v_2$ ,  $V_{C_2}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = \frac{1}{16} [(x_2^2 - x_1^2)(y_2 - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2^2 - y_1^2)]$ , onde  $x_i = \sqrt{1+8u_i} - 1$  e  $y_i = \sqrt{1+8v_i} - 1$ ,  $i = 1, 2$ , sendo pois um número real não negativo.

Contudo, é fácil ver que

$$\forall (u_1, u_2) \in ]0, 1[^2 \setminus \{(3/8, 3/8)\}, \quad C_1(u_1, u_2) \neq C_2(u_1, u_2).$$

<sup>15</sup> $B(p)$ ,  $p \in ]0, 1[$ , denota a lei de Bernoulli de parâmetro  $p$ .

Com base no teorema de Sklar, pode ser estabelecido o seguinte resultado, que constitui uma generalização natural da Proposição 2.2.2 e cuja demonstração é semelhante.

**Proposição 2.2.5.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com funções de distribuição marginais  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , e cópula  $C$ . Se  $\partial_1 C$  e  $\partial_2 C$  existem em  $[0, 1]^2$ , tem-se

- (1)  $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\partial_2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))$  é uma versão de  $P(X_1 \leq x_1 | X_2)$ ;
- (2)  $\forall x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\partial_1 C(F_1(x_1), F_2(x_2))$  é uma versão de  $P(X_2 \leq x_2 | X_1)$ .

*Demonstração.* Pode ser consultada em [52], pp. 18. □

A próxima proposição (extraída de [19], pp. 42 e [33], pp. 12) mostra que, quando  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , são funções contínuas, é possível exibir a expressão analítica de  $C$  e assegurar que tal função é única. Neste caso,  $C$  será denotada por  $C_{X_1 X_2}$ .

**Proposição 2.2.6.** Seja  $F$  a função de distribuição do vetor aleatório  $(X_1, X_2)$ , com funções de distribuição marginais  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , contínuas em  $\mathbb{R}$ . Então a função cópula associada a  $F$  é única e dada por

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))^{16}, \quad (2.12)$$

onde  $F_i^{-1}$  denota a inversa generalizada de  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ .

*Demonstração.* Começemos por notar que a continuidade de  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , implica que

$$\forall v \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}, F_i^*(x, v) = F_i(x), i = 1, 2.$$

Consequentemente, as transformadas de Rüschenndorf de  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ , reduzem-se a  $U_i = F_i(X_i)$ ,  $i = 1, 2$ , e seguem a lei  $\mathbb{U}[0, 1]$ , pela propriedade (1) do Lema A.0.2.

Consideremos  $C$  a restrição a  $[0, 1]^2$  da função de distribuição do vetor  $(U_1, U_2)$ , que sabemos ser uma cópula. Para ver que  $C$  é uma cópula associada a  $F$ , basta decalcar o raciocínio efetuado na primeira parte da Proposição 2.2.4, invocando a propriedade (3) do Lema A.0.2. Por outro lado, para todo o  $u_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , tem-se

$$P(F_i(X_i) \leq u_i) = P(F_i(X_i) < u_i) = P(X_i < F_i^{-1}(u_i)) = P(X_i \leq F^{-1}(u_i)), i = 1, 2$$

usando a continuidade das funções  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , e a propriedade (5) do Lema A.0.1.

Portanto

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) = P(X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), X_2 \leq F_2^{-1}(u_2)),$$

o que mostra (2.12).

Provemos, finalmente, a unicidade. Como  $C$  verifica (2.11), ela é unicamente definida em  $F_1(\mathbb{R}) \times F_2(\mathbb{R})$ , atendendo ao Corolário 2.2.1.

<sup>16</sup> Adotamos aqui as convenções da Definição A.0.1 e do Lema A.0.1, relativamente às notações  $F_i(\pm\infty)$ ,  $i = 1, 2$ , e, em conformidade, consideramos  $F(-\infty, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0$ ,  $F(x_1, -\infty) = \lim_{x_2 \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2) = 0$ ,  $F(+\infty, y) = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2) = F_2(x_2)$  e  $F(x_1, +\infty) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2) = F_1(x_1)$ , para  $x_1, x_2 \in [-\infty, +\infty]$ .

Ora, sendo  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , função contínuas, este conjunto contém  $(0, 1)^2$  mas não necessariamente os produtos de intervalos da forma  $[0, 1[$ ,  $]0, 1]$  e  $[0, 1]$ .

Resta, pois, analisar os casos em que  $0 \notin F_i(\mathbb{R})$  ou  $1 \notin F_i(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2$ :

- se  $0 \notin F_1(\mathbb{R})$ , então  $F_1^{-1}(0) = -\infty$  e  $C(0, u_2) = F(-\infty, F_2^{-1}(u_2)) = 0$ ,  $u_2 \in [0, 1]$ .
- se  $1 \notin F_1(\mathbb{R})$ , então  $F_1^{-1}(1) = +\infty$  e  $C(1, u_2) = F(+\infty, F_2^{-1}(u_2)) = F_2(F_2^{-1}(u_2)) = u_2$ ,  $u_2 \in [0, 1]$ , tendo em conta a propriedade (4) do Lema A.0.1.

De forma análoga se conclui que  $C(u_1, 0) = 0$  e  $C(u_1, 1) = u_1$ ,  $u_1 \in [0, 1]$ , quando  $0 \notin F_2(\mathbb{R})$  ou  $1 \notin F_2(\mathbb{R})$ , respetivamente.

Portanto, se  $C'$  for outra função cópula associada a  $F$ , ela verificará as condições (1) e (2) da Definição 2.1.1, pelo que coincide com  $C$  em  $[0, 1]^2$ . □

Ilustraremos o método proposto na Proposição 2.2.6 retomando o exemplo sobre a distribuição logística bivariada apresentado na pp. 8.

**Exemplo 2.2.3.** Relembrando a expressão de  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , (cf. pp. 8), é fácil ver que

$$F_i(u_i)^{-1} = \begin{cases} -\infty & u_i = 0, \\ \ln\left(\frac{u_i}{1-u_i}\right) & 0 < u_i < 1, \\ +\infty & u_i = 1, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Consequentemente, de acordo com as convenções adotadas, obtemos

$$F(F_1(u_1)^{-1}, F_2(u_2)^{-1}) = \begin{cases} 0 & u_1 = 0 \vee u_2 = 0, \\ \frac{u_1 u_2}{1 - \theta(1-u_1)(1-u_2)} & 0 < u_1 \leq 1 \wedge 0 < u_2 \leq 1, \\ 1 & u_1 = 1 \wedge u_2 = 1, \end{cases}$$

ou seja

$$C(u_1, u_2) = \frac{u_1 u_2}{1 - \theta(1-u_1)(1-u_2)}, \quad (u_1, u_2) \in [0, 1]^2.$$

O interesse do teorema de Sklar abrange assim duas perspectivas, ambas importantes no âmbito das Probabilidades e Estatística. Por um lado, permite decompor a função de distribuição de um vetor aleatório real em termos das suas funções de distribuição marginais e de uma função cópula, que incorpora a estrutura de dependência das margens do vetor; esta decomposição viabiliza o estudo de tal função separadamente do estudo das marginais, além de permitir descrever e investigar a estrutura de dependência que lhes está subjacente.

Por outro lado, fornece um método flexível e eficaz para construir modelos bidimensionais, na medida em que não restringe a escolha das distribuições marginais nem da função cópula que as relaciona. Este método é particularmente útil quer na simulação dos modelos, quer na sua estimação.

Analisaremos seguidamente as relações existentes entre as funções cópula de  $(X_1, X_2)$  e as dos vetores cujas margens são transformações estritamente monótonas de  $X_1$  e  $X_2$ . Salientemos que (2.13) constitui uma das propriedades fundamentais das cópulas.

**Proposição 2.2.7.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com funções de distribuição marginais contínuas e  $h_i, i = 1, 2$ , funções reais de variável real estritamente monótonas.

(1) Se  $h_1$  e  $h_2$  são estritamente crescentes, tem-se

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C_{h_1(X_1), h_2(X_2)}(u_1, u_2) = C_{X_1, X_2}(u_1, u_2). \quad (2.13)$$

(2) Se  $h_1$  é estritamente crescente e  $h_2$  é estritamente decrescente, tem-se

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C_{h_1(X_1), h_2(X_2)}(u_1, u_2) = u_1 - C_{X_1, X_2}(u_1, 1 - u_2)^{17}. \quad (2.14)$$

(3) Se  $h_1$  e  $h_2$  são estritamente decrescentes, tem-se

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C_{h_1(X_1), h_2(X_2)}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C_{X_1, X_2}(1 - u_1, 1 - u_2). \quad (2.15)$$

*Demonstração.* Consideremos  $Y_i = h_i(X_i), i = 1, 2$ , que são variáveis aleatórias reais pois a monotonia de  $h_i$  assegura a sua mensurabilidade. Denotaremos por  $F$  e  $G$  as funções de distribuição de  $(X_1, X_2)$  e  $(Y_1, Y_2)$ , respetivamente, e por  $F_i$  e  $G_i, i = 1, 2$ , as correspondentes funções de distribuição marginais. Notemos ainda que, pela Proposição 2.2.6,  $C_{X_1, X_2}$  é única.

(1) Começamos por mostrar que  $G_i = F_i \circ h_i^{-1}, i = 1, 2$ . Com efeito, as propriedades (2), (3) e (5) do Lema A.0.1 permitem escrever, para todos  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$P(Y_i \leq y_i) = P(X_i \leq h_i^{-1}(y_i)) = F_i \circ h_i^{-1}(y_i), i = 1, 2.$$

Provemos agora que as funções  $G_i, j = 1, 2$ , são contínuas em  $\mathbb{R}$ . Para tal, basta notar que  $G_i$  é contínua em  $h_i(\mathbb{R})$ , pois o mesmo acontece com  $h_i^{-1}$ , pela propriedade (7) do Lema A.0.1, e que, para  $y_i \notin h_i(\mathbb{R})$ ,

$$P(h_i^{-1}(y_i^-) < X < h_i^{-1}(y_i^+)) = 0 \Rightarrow F_i \circ h_i^{-1}(y_i^+) = F_i(h_i^{-1}(y_i^-)) = F_i(h_i^{-1}(y_i)),$$

pelas propriedades (6) e (2) do Lema A.0.1.

Consequentemente, está também assegurada a unicidade de cópula associada a  $(Y_1, Y_2)$ .

Para concluir, resta ver que

$$\begin{aligned} \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, G(y_1, y_2) &= F(h_1^{-1}(y_1), h_2^{-1}(y_2)) \\ &= C_{X_1, X_2}(F_1 \circ h_1^{-1}(y_1), F_2 \circ h_2^{-1}(y_2)) \\ &= C_{X_1, X_2}(G_1(y_1), G_2(y_2)), \end{aligned}$$

invocando o teorema de Sklar.

(2) Novamente, a função cópula de  $(Y_1, Y_2)$  é única, pois a continuidade de  $G_2$  decorre da continuidade de  $F_2 \circ (-h_2)^{-1}$ , tendo em conta o raciocínio efetuado em (1) e o facto de  $-h_2$  ser estritamente crescente.

<sup>17</sup>Evidentemente, no caso de  $h_1$  ser estritamente decrescente e  $h_2$  estritamente crescente, é válida uma igualdade análoga, em que o segundo membro é dado por  $u_2 - C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2)$ .

Usando a igualdade

$$\forall y_2 \in \mathbb{R}, P(-Y_2 < -y_2) = P(-Y_2 \leq -y_2) = 1 - G_2(y_2),$$

obtemos então

$$\begin{aligned} \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, G(y_1, y_2) &= P(Y_1 \leq y_1) - P(Y_1 \leq y_1, -Y_2 < -y_2) \\ &= G_1(y_1) - C_{X_1, X_2}(G_1(y_1), 1 - G_2(y_2)), \end{aligned}$$

já que, por (1), as cópulas de  $(X_1, X_2)$  e  $(Y_1, -Y_2)$  coincidem.

(3) Uma vez mais, está garantida a unicidade da cópula de  $(Y_1, Y_2)$ , por argumentos semelhantes aos utilizados em (2). De igual modo, aplicando a propriedade (1) ao vetor aleatório  $(-Y_1, -Y_2)$  e escrevendo

$$\begin{aligned} \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, G(y_1, y_2) &= 1 - P(Y_1 > y_1) - P(Y_2 > y_2) + P(Y_1 > y_1, Y_2 > y_2) \\ &= 1 - P(-Y_1 < -y_1) - P(-Y_2 < -y_2) + P(-Y_1 < -y_1, -Y_2 < -y_2) \\ &= G_1(y_1) - 1 + G_2(y_2) + C_{X_1, X_2}(1 - G_1(y_1), 1 - G_2(y_2)), \end{aligned}$$

somos conduzidos ao resultado pretendido.  $\square$

Dedicar-nos-emos agora ao estudo da estrutura de dependência entre duas variáveis aleatórias reais induzida pelas cópulas Produto, Comonotónica e Contramonotónica.

A primeira proposição, cuja demonstração é evidente, fornece uma caracterização da independência através da cópula produto.

**Proposição 2.2.8.** Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias reais com funções de distribuição contínuas em  $\mathbb{R}$ .  $X_1$  e  $X_2$  são independentes se e somente se  $C_{X_1, X_2} = \Pi$ , onde  $\Pi$  é a cópula produto.

Nas proposições que se seguem, relativas às cópulas Comonotónica e Contramonotónica será útil a próxima definição.

**Definição 2.2.2.** As variáveis aleatórias reais  $X_1$  e  $X_2$  dizem-se

- Comonotónicas se a função  $M(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2\}$ ,  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ , é uma cópula de  $(X_1, X_2)$ ;
- Contramonotónicas se a função  $W(u_1, u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$ ,  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ , é uma cópula de  $(X_1, X_2)$ .

**Proposição 2.2.9.** As variáveis aleatórias reais  $X_1$  e  $X_2$  são Comonotónicas se e somente se existe uma variável aleatória real,  $Z$ , e funções reais de variáveis reais crescentes,  $h_1$  e  $h_2$ , tais que

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (h_1(Z), h_2(Z)).^{18} \quad (2.16)$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $X_1$  e  $X_2$  são Comonotónicas. Denotando por  $F$  a função de distribuição de  $(X_1, X_2)$  e por  $F_i$  a função de distribuição de  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ , e sendo  $U$  uma variável aleatória

<sup>18</sup>ou  $P_{(X_1, X_2)} = P_{(h_1(Z), h_2(Z))}$  em alternativa.

uniformemente distribuída em  $(0, 1)$ , pela propriedade (5) do Lema A.0.1, podemos escrever

$$\begin{aligned}\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, F(x_1, x_2) &= \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\} \\ &= P(U \leq F_1(x_1), U \leq F_2(x_2)) \\ &= P(F_1^{-1}(U) \leq x_1, F_2^{-1}(U) \leq x_2).\end{aligned}$$

Como  $F_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ , são funções crescentes, verifica (2.16), com  $h_i = F_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $Z = U$ .

Inversamente, se  $P_{(X_1, X_2)}$  satisfazendo (2.16), tem-se

$$F(x_1, x_2) = P(h_1(Z) \leq x_1, h_2(Z) \leq x_2) = P(Z \in A_1, Z \in A_2), \quad (2.17)$$

onde  $A_i$  (imagem inversa de  $] - \infty, x_i]$  por  $h_i$ ) é um intervalo da forma  $] - \infty, a_i]$  ou  $] - \infty, a_i[$ ,  $i = 1, 2$ .

Portanto,  $A_1 \subseteq A_2$  ou  $A_2 \subseteq A_1$ , pelo que

$$P(Z \in A_1, Z \in A_2) = \min\{P(Z \in A_1), P(Z \in A_2)\} = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}.$$

□

**Proposição 2.2.10.** As variáveis aleatórias reais  $X_1$  e  $X_2$  são Contramonotónicas se existe uma variável aleatória real,  $Z$ , e funções reais de variáveis reais  $h_1$  e  $h_2$ , com  $h_1$  crescente e  $h_2$  decrescente, tais que

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (h_1(Z), h_2(Z))^{19}. \quad (2.18)$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $X_1$  e  $X_2$  são Contramonotónicas.

Adotando as notações usadas na demonstração da proposição anterior e considerando a variável aleatória  $U \sim \mathbb{U}[0, 1]$ , vem, novamente pela propriedade (5) do Lema A.0.1,

$$\begin{aligned}\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, F(x_1, x_2) &= \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\} \\ &= P(U \leq F_1(x_1), 1 - U \leq F_2(x_2)) \\ &= P(F_1^{-1}(U) \leq x_1, F_2^{-1}(1 - U) \leq x_2) \\ &= P(F_1^{-1}(U) \leq x_1, F_2^{-1} \circ g(U) \leq x_2),\end{aligned}$$

com  $g(x) = 1 - x$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Como  $F_1^{-1}$  é uma função crescente e  $F_2^{-1} \circ g$  é decrescente,  $P_{(X_1, X_2)}$  verifica (2.18).

Reciprocamente, se  $P_{(X_1, X_2)}$  satisfaz (2.18), permanece válida a igualdade (2.17), com  $A_i$  a imagem inversa de  $] - \infty, x_i]$  por  $h_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Tendo em conta a monotonia de  $h_i$ ,  $i = 1, 2$ , distingamos os seguintes casos:

- se  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , então  $P(\Omega) = P((Z \in A_1) \cup (Z \in A_2)) = P(Z \in A_1) + P(Z \in A_2) - P(Z \in A_1, Z \in A_2)$ , logo

$$P(Z \in A_1, Z \in A_2) = P(Z \in A_1) + P(Z \in A_2) - 1 = F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1.$$

- se  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ , então  $P((Z \in A_1) \cup (Z \in A_2)) \leq 1$ , pelo que  $F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 \leq 0$ .

Concluimos, assim, que  $F(x_1, x_2) = \max\{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\}$ .

<sup>19</sup>ou  $P_{(X_1, X_2)} = P_{(h_1(Z), h_2(Z))}$  em alternativa.



□

No caso de a função cópula de  $(X_1, X_2)$  ser única, as proposições anteriores conduzem-nos ao seguinte resultado.

**Corolário 2.2.2.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com funções de distribuição marginais contínuas em  $\mathbb{R}$  e cópula  $C_{X_1, X_2}$ . Então

(1)  $C_{X_1, X_2} = M$  se e somente se existe uma função real de variável real crescente,  $h$ , tal que  $X_2 = h(X_1)$ , q.c.;

(2)  $C_{X_1, X_2} = W$  se e somente se existe uma função real de variável real decrescente,  $h$ , tal que  $X_2 = h(X_1)$ , q.c..

*Demonstração.* Provaremos apenas (1), já que a demonstração de (2) é análoga.

Suponhamos que  $C_{X_1, X_2} = M$ . Considerando  $U = F_1(X_1)$  na demonstração da proposição anterior, obtemos

$$(X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (F_1^{-1} \circ F_1(X_1), F_2^{-1} \circ F_2(X_2)) \stackrel{d}{=} (X_1, h(X_1)),$$

logo, tomando  $h = F_2^{-1} \circ F_1$ , verifica-se que

$$P(X_2 = h(X_1)) = P(X_1 \in \mathbb{R}, X_2 = h(X_1)) = P_{(X_1, h(X_1))}(B) = 1,$$

pois  $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y = h(x)\}$ .

De forma análogo, no segundo caso, veja que,  $X_2 = h(X_1)$ , q.c.  $\implies (X_1, X_2) \stackrel{d}{=} (X_1, h(X_1))$ , logo  $X_1$  e  $X_2$  são comonotónicas, e pela Proposição 2.2.9 a cópula de  $(X_1, X_2)$  é única, então  $C_{X_1, X_2} = M$ . □

## 2.3 Alguns exemplos de funções Cópula

Encontramos em [43], por exemplo, vários métodos que permitem construir uma função cópula. Inúmeros exemplos de funções deste tipo podem também ser consultados em [19] e, mais recentemente, em [41]. Segundo [39], os exemplos mais populares podem enquadrar-se em três categorias: as que traduzem estruturas de dependência importantes, ditas fundamentais; as que são construídas a partir de funções de distribuição bivariadas através do teorema de Sklar, ditas implícitas; as que são construídas a partir de métodos específicos e cujas expressões analíticas são conhecidas de forma explícita e, por esta razão, se designam por explícitas.

As cópulas Produto, Comonotónica e Contramontónica<sup>20</sup> (no caso bidimensional) pertencem à primeira categoria e já foram abordadas neste trabalho. Os exemplos seguidamente apresentados têm por objetivo ilustrar funções cópula que pertencem à segunda e terceira categoria e constituem exemplos clássicos repetidamente referidos na literatura, além de serem muito populares nas aplicações.

### 2.3.1 Cópula de Fréchet

As cópulas propostas por Fréchet não são mais do que combinações lineares convexas das cópulas Produto, Comonotónica e Contramontónica. Assim, dados dois parâmetros  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , com

<sup>20</sup>A função  $W$  é uma cópula apenas no caso bidimensional.

$\alpha + \beta \leq 1$ , elas são da forma

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \alpha M(u, v) + (1 - \alpha - \beta)\Pi(u, v) + \beta W(u, v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

### 2.3.2 Cópulas Arquimedianas

A família das cópulas Arquimedianas tem sido exaustivamente estudada nas últimas décadas (cf. [19], [30], [32], [39] e [43], entre outros).

Estas cópulas são construídas com base numa função auxiliar  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ , contínua, estritamente decrescente e tal que  $\varphi(1) = 0$ . De acordo com [43], incluiremos nesta classe as funções definidas em  $]0, 1]$  que verificam  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$ , convencionando que  $\varphi(0) = +\infty$ , e neste caso, consideraremos que o contradomínio de  $\varphi$  é  $[0, +\infty[$ .

**Definição 2.3.1.** Seja  $\varphi$  uma função satisfazendo as condições anteriores. Chamamos pseudo-inversa de  $\varphi$  à função  $\varphi^{[-1]} : [0, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) < t \leq +\infty, \end{cases}$$

onde  $\varphi^{-1}$  denota a função inversa (usual) de  $\varphi$ <sup>21</sup>.

É fácil ver que  $\varphi^{[-1]}$  é uma função decrescente e contínua em  $[0, +\infty[$ , sendo estritamente decrescente em  $[0, \varphi(0)]$ .

A proposição seguinte, que demonstraremos mais adiante, fundamenta a construção das cópulas Arquimedianas.

**Proposição 2.3.1.** Sejam  $\varphi$  uma função verificando as condições acima referidas e  $\varphi^{[-1]}$  a sua pseudo-inversa. A função  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2, C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (2.19)$$

é uma cópula se e somente se  $\varphi$  é convexa.

**Definição 2.3.2.** Uma cópula bidimensional diz-se Arquimediana se é da forma (2.19). A função  $\varphi$  denomina-se um gerador da cópula.

**Observação 2.3.1.** (i) Se  $\varphi(0) = +\infty$ ,  $\varphi$  diz-se um gerador estrito e  $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ .

(ii) O gerador da cópula não é único, uma vez que toda a função do tipo  $k\varphi$ , com  $k \in \mathbb{R}^+$ , gera a mesma cópula que  $\varphi$ .

Para demonstrar a Proposição 2.3.1, usaremos dois resultados preliminares apresentados nos Lemas 2.3.1 e 2.3.2. Restringir-nos-emos, neste trabalho, ao caso dos geradores estritos, remetendo para [43] a abordagem geral<sup>22</sup>.

<sup>21</sup>Também aqui adotamos a convenção:  $\varphi^{-1}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^{-1}(t) = 0$ .

<sup>22</sup>Notamos ainda que serão usados vários conceitos e propriedades relativos a funções cujos domínios e contradomínios são subconjuntos da reta acabada. Tais resultados encontram-se, por exemplo, em [44], pp. 115-120, e [54], pp. 140-144.

**Lema 2.3.1.** A função  $C$  definida em (2.19) verifica as condições (1) e (2) da Definição 2.1.1.

*Demonstração.* Basta notar que, para todo o  $u \in [0, 1]$ ,

$$C(u, 1) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{-1}(\varphi(u)) = u,$$

e

$$C(u, 0) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0,$$

pela monotonia de  $\varphi^{-1}$  e tendo em conta que  $\varphi(0) \leq \varphi(u) + \varphi(0) \leq +\infty$ .

Analogamente se mostra que  $C(0, v) = 0$  e  $C(1, v) = v$ , para  $v \in [0, 1]$ . □

**Lema 2.3.2.** A função  $C$  definida em (2.19) é bicrescente se e somente se, para todo o  $v \in [0, 1]$ , se tem

$$\forall u_1, u_2 \in [0, 1], u_1 \leq u_2 \implies C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1. \quad (2.20)$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $C$  é bicrescente. Invocando o Lema 2.3.1, sabemos que dado  $v \in [0, 1]$  arbitrariamente fixo, se tem

$$\forall u_1, u_2 \in [0, 1], u_1 \leq u_2, V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) \geq 0 \iff C(u_1, v) - u_1 - C(u_2, v) + u_2 \geq 0,$$

o que mostra (2.20).

Admitamos agora que  $C$  verifica (2.20) e consideremos  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$  arbitrariamente fixos, com  $u_1 \leq u_2$  e  $v_1 \leq v_2$ . Como  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  são contínuas, o mesmo acontece com  $C$ .

Além disso,  $C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2)$ . Portanto, existe  $t \in [0, 1]$  tal que

$$C(t, v_2) = v_1 \iff \varphi(t) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1).$$

Consequentemente, vem

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{-1}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\ &= \varphi^{-1}[\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2))) + \varphi(t)] \\ &\quad - \varphi^{-1}[\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2))) + \varphi(t)] \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(C(u_2, v_2)) + \varphi(t)) - \varphi^{-1}(\varphi(C(u_1, v_2)) + \varphi(t)) \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2), \end{aligned}$$

por hipótese, uma vez que  $C(u_1, v_2) \leq C(u_2, v_2)$ . □

Estamos finalmente em condições de provar a Proposição 2.3.1.

*Demonstração.* Observe-se que, pelos Lemas 2.3.1 e 2.3.2, basta apenas provar que  $\varphi$  é convexa se e somente se  $C$  verifica (2.20).

Consideremos  $u_1, u_2, v \in [0, 1]$  arbitrariamente fixos, com  $u_1 \leq u_2$ , e admitamos que  $C$  verifica (2.20), ou seja,

$$u_1 + \varphi^{-1}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(v)),$$

o que é ainda equivalente a

$$\varphi^{-1}(a) + \varphi^{-1}(b+c) \leq \varphi^{-1}(b) + \varphi^{-1}(a+c), \quad (2.21)$$

onde  $a = \varphi(u_1)$ ,  $b = \varphi(u_2)$  e  $c = \varphi(v)$  são tais que  $a \geq b$  e  $c \geq 0$ .

Sejam agora  $s, t \in [0, +\infty]$ , com  $0 \leq s < t$ . Tomando  $a = \frac{s+t}{2}$ ,  $b = s$  e  $c = \frac{t-s}{2}$  em (2.21), obtemos

$$\varphi^{-1}\left(\frac{s+t}{2}\right) \leq \frac{\varphi^{-1}(s) + \varphi^{-1}(t)}{2},$$

o que implica que  $\varphi^{-1}$  é convexa no sentido de Jensen<sup>23</sup>. Usando o facto de  $\varphi^{-1}$  ser contínua, concluímos que  $\varphi^{-1}$  é convexa, o mesmo acontecendo com  $\varphi$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $\varphi^{-1}$  é convexa e mostremos que a desigualdade (2.21) é válida. Fixemos  $a, b, c$  em  $[0, 1]$  tais que  $a \geq b$  e  $c > 0$ <sup>24</sup> e consideremos  $\alpha = \frac{a-b}{a-b+c} \in [0, 1]$ . Então  $a = (1-\alpha)b + \alpha(a+c)$  e  $b+c = \alpha b + (1-\alpha)(a+c)$ .

Pela definição de função convexa, temos

$$\varphi^{-1}(a) \leq (1-\alpha)\varphi^{-1}(b) + \alpha\varphi^{-1}(a+b) \quad (2.22)$$

e

$$\varphi^{-1}(b+c) \leq \alpha\varphi^{-1}(b) + (1-\alpha)\varphi^{-1}(a+b). \quad (2.23)$$

Somando (2.22) e (2.23) membro a membro, vem

$$\varphi^{-1}(a) + \varphi^{-1}(b+c) \leq \varphi^{-1}(b) + \varphi^{-1}(a+c),$$

o que corresponde a (2.21). □

Na tabela 2.1, figuram alguns dos mais importantes exemplos de cópulas Arquimedianas, bem como os correspondentes geradores (cf. [11], pp. 24, e [27], pp. 245).

Tabela 2.1 Família de Cópulas arquimedianas importantes.

Designação	Gerador	Cópula	Parâmetro
Frank	$-\ln\left(\frac{\exp\{-\alpha t\}-1}{\exp\{\alpha\}-1}\right)$	$\frac{-1}{\alpha} \ln\left\{1 + \frac{(\exp\{-\alpha u_1\}-1)(\exp\{-\alpha u_2\}-1)}{(\exp\{-\alpha\}-1)}\right\}$	$\alpha > 0$
Gumbel	$(-\ln(t))^\alpha$	$\exp\left\{-\left[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right]^{1/\alpha}\right\}$	$\alpha \geq 1$
Clayton	$t^{-\alpha} - 1$	$[u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1]^{-1/\alpha}$	$\alpha > 0$

Quando  $\alpha = 1$ , a cópula de Gumbel coincide com a cópula  $\Pi$ .

<sup>23</sup>Ou midpoint convexa, na nomenclatura inglesa.

<sup>24</sup>Se  $c = 0$ , (2.21) é trivialmente verificada.

### 2.3.3 Cópulas Elíticas

A construção das cópulas elíticas está naturalmente associada à classe das distribuições elíticas, que constituem uma generalização da lei normal multivariada. Além da lei normal, pertencem a esta classe as distribuições logística, de Cauchy, de Laplace e de Student, entre outras.

As definições e os resultados apresentados nesta secção foram consultados em [22] e [29].

**Definição 2.3.3.** Sejam  $\mu \in \mathbb{R}^2$  e  $\Sigma$  uma matriz real,  $2 \times 2$ , simétrica e definida positiva. Dizemos que o vetor aleatório real  $X = (X_1, X_2)$  tem uma distribuição elítica não degenerada com vetor de localização  $\mu$  e matriz de dispersão  $\Sigma$  se

$$X = \mu + YAU,$$

onde  $A$  é uma matriz real  $2 \times 2$  tal que  $\Sigma = AA^T$ ,  $Y$  é uma variável aleatória real não negativa e  $U = (U_1, U_2)$  é um vetor aleatório uniformemente distribuído no conjunto  $S_d = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_e = 1\}$ <sup>25</sup>, independente de  $Y$ .

**Observação 2.3.2.** (i) Os parâmetros  $\mu$  e  $\Sigma$  estão naturalmente relacionados com a esperança e a matriz de covariância de  $X$ . Com efeito, se  $E(Y^2) < +\infty$ , então  $E(X) = \mu$  e a matriz de covariância de  $X$  é dada por  $\frac{E(Y^2)}{2}\Sigma$ , pois  $U$  é centrada e tem matriz de covariância  $I/2$ <sup>26</sup>. Consequentemente, a matriz de correlação de  $X$  coincide com a matriz de correlação correspondente a  $\Sigma$ , aqui denotada por  $R$ .

(ii) Quando  $\Sigma$  é não singular,  $X$  é absolutamente contínua se e somente se  $Y$  é absolutamente contínua. Neste caso, mostra-se que a função densidade de  $X$ ,  $h$ , é da forma

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} g((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

onde  $g : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ , denominada o gerador de função densidade, se relaciona com a função densidade de  $Y$ ,  $f_Y$ , do seguinte modo:

$$f_Y(r) = 2\pi r g(r^2), \quad r \geq 0.$$

Por esta razão, escreve-se habitualmente  $X \sim E_2(\mu, \Sigma, g)$ . A designação de distribuição elítica decorre do facto de  $h$  ter curvas de nível elipsoidais, uma vez que depende de  $x$  apenas através da expressão  $(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)$ .

(iii) Sendo  $\mu_i = E(X_i)$  e  $\sigma_i^2 = \Sigma_{ii}$ ,  $i = 1, 2$ , as variáveis aleatórias  $Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$ ,  $i = 1, 2$ , são identicamente distribuídas, pelo que as leis marginais de  $X$  pertencem à mesma família, apesar de poderem diferir na localização e no fator de escala.

As cópulas elíticas são construídas com base no teorema de Sklar e, por esta razão, não é fácil exhibir explicitamente a sua expressão analítica.

<sup>25</sup> $\|\cdot\|_e$  denota a norma euclidiana.

<sup>26</sup> $I$  denota a matriz identidade  $2 \times 2$ .

**Definição 2.3.4.** Sejam  $X = (X_1, X_2)$  um vetor aleatório real absolutamente contínuo com distribuição  $E_2(\mu, \Sigma, g)$ ,  $F$  a sua função de distribuição e  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , as correspondentes funções de distribuição marginais. Uma cópula elítica é definida por

$$\begin{aligned} \forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, C(u_1, u_2) &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{F_1^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{F_2^{-1}(u_2)} \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} g((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

com  $x = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Limitar-nos-emos a detalhar os dois casos particulares mais populares nas aplicações, nomeadamente a distribuição normal e a distribuição de Student. Assim, no primeiro caso, temos

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{t}{2}\right), t \in \mathbb{R}_0^+,$$

e escrevemos  $X \sim N(\mu, \Sigma)$  enquanto que, no segundo caso,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{t}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}, t \in \mathbb{R}_0^+,$$

e escrevemos  $X \sim t(\nu, \mu, \Sigma)$ .

Como a função cópula de  $(X_1, X_2)$  é invariante face a transformações estritamente crescentes de  $X_1$  e  $X_2$  (cf. Proposição (2.2.7)), sabemos que  $C_{X_1, X_2} = C_{Z_1, Z_2}$ . Ora,  $(Z_1, Z_2) \sim N(0, R)$  no caso gaussiano e  $(Z_1, Z_2) \sim t(\nu, 0, R)$ , no caso da lei de Student<sup>27</sup>. Tendo em conta que as suas leis marginais são, respetivamente, a lei normal centrada e reduzida e a lei de Student com  $\nu$  graus de liberdade, deduzimos facilmente as expressões simplificadas de  $C_{X_1, X_2}$ .

Com efeito, denotando por  $\rho$  o coeficiente de correlação linear entre  $X_1$  e  $X_2$  e por  $\phi^{-1}$  (respetivamente  $T_\nu^{-1}$ ) a inversa da função de distribuição da lei  $N(0, 1)$  (respetivamente t-Student), vem

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C_G(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{t_1^2 - 2\rho t_1 t_2 + t_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) dt_1 dt_2$$

e

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C_T(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{T_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{t_1^2 - 2\rho t_1 t_2 + t_2^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dt_1 dt_2.$$

### 2.3.4 Cópulas de Valores Extremos

A designação desta classe de cópulas indicia que são definidas com base na teoria dos valores extremos. Para motivar a sua construção, consideremos  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real absolutamente contínuo com função de distribuição  $F$  e funções de distribuição marginais  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ . Seja ainda  $C_F$ <sup>28</sup> a respetiva cópula. Dada uma amostra aleatória de  $(X_1, X_2)$ ,  $(X_{i,1}, X_{i,2})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , consideremos o vetor aleatório  $M_n = (M_{n,1}, M_{n,2})$ , com  $M_{n,j} = \max\{X_{1,j}, \dots, X_{n,j}\}$ ,  $j = 1, 2$ ,

<sup>27</sup>Para  $\nu > 2$ .

<sup>28</sup>Para simplificar,  $C_{X_1, X_2}$  será aqui denotada por  $C_F$ .

cuja função de distribuição é  $F^n$ . Se  $C_n$  denotar a cópula associada a  $M_n$ , o teorema de Sklar permite escrever

$$\begin{aligned} \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C_n(u_1, u_2) &= F^n((F_1^n)^{-1}(u_1), (F_2^n)^{-1}(u_2)) \\ &= \left( F((F_1^{-1}(u_1^{1/n}), (F_2^{-1}(u_2^{1/n}))) \right)^n \\ &= \left( C_F(u_1^{1/n}, u_2^{1/n}) \right)^n. \end{aligned}$$

Uma cópula de valores extremos é obtida tomando o limite da expressão anterior quando  $n$  tende para  $+\infty$ .

**Definição 2.3.5.** Dizemos que  $C$  é uma cópula de valores extremos se existe uma cópula  $C_F$  tal que

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C(u_1, u_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_F^n(u_1^{1/n}, u_2^{1/n}).$$

Nestas condições, também dizemos que  $C_F$  pertence ao domínio de atração de  $C$ .

A noção de cópula de valores extremos está diretamente relacionada com a de cópula max-estável, seguidamente apresentada.

**Definição 2.3.6.** Uma cópula  $C$  diz-se max-estável se verifica

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, C(u_1, u_2) = C^n(u_1^{1/n}, u_2^{1/n}).$$

A próxima proposição caracteriza as cópulas de valores extremos à custa das cópulas max-estáveis, o que facilita o seu manuseamento.

**Proposição 2.3.2.** Uma cópula é de valores extremos se e somente se é max-estável.

*Demonstração.* É claro que toda a cópula max-estável é de valores extremos. Provemos que a implicação contrária também é verdadeira.

Seja então  $C$  uma cópula de valores extremos e  $C_F$  pertencente ao seu domínio de atração. Para  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$  e  $m \in \mathbb{N}$  arbitrariamente fixos, consideremos  $n = ms$ ,  $s \in \mathbb{N}$ . Escrevendo

$$C_F^n(u_1^{1/n}, u_2^{1/n}) = \left[ C_F^s((u_1^{1/m})^{1/s}, (u_2^{1/m})^{1/s}) \right]^m$$

e tomando o limite, quando  $s$  tende para  $+\infty$ , em ambos os membros, obtemos

$$C(u_1, u_2) = C^m(u_1^{1/m}, u_2^{1/m}),$$

o que permite concluir que  $C$  é max-estável. □

**Exemplo 2.3.1.** Vejamos alguns exemplos de cópulas de valores extremos.

- (1) As cópulas Produto e Comonotónica são exemplos triviais de cópulas de valores extremos.
- (2) A cópula de Gumbel de parâmetro  $\alpha > 0$  é de valores extremos, uma vez que,  $\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2$  e

$n \geq 1$

$$\begin{aligned}\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, n \in \mathbb{N}, C^n(u_1^{1/n}, u_2^{1/n}) &= \exp\left(-\left[(-\ln u_1^{1/n})^\alpha + (-\ln u_2^{1/n})^\alpha\right]^{1/\alpha}\right)^n \\ &= \exp\left(-\left[(1/n)^\alpha ((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha)\right]^{1/\alpha}\right)^n \\ &= \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right]^{1/\alpha}\right) \\ &= C(u_1, u_2).\end{aligned}$$



## Capítulo 3

# Medidas de Associação

Tal como foi afirmado anteriormente, o teorema de Sklar permite separar o comportamento das margens de um vetor aleatório real da sua estrutura de dependência, incorporando essa estrutura na expressão analítica de uma função cópula. As cópulas providenciam, assim, uma via intuitiva para analisar e compreender a associação entre duas (ou mais) variáveis aleatórias reais.

Por outro lado, na prática, é mais fácil medir o grau de associação entre variáveis aleatórias reais através de um indicador numérico, vulgarmente designado por medida de associação. É pois natural que se estabeleçam as relações existentes entre as funções cópula e as medidas de associação. Como é sabido, encontramos, na literatura, inúmeras medidas deste tipo, descrevendo aspetos distintos do conceito de associação, pelo que iremos nos debruçar apenas sobre as mais populares, nomeadamente o coeficiente de correlação (linear) de Pearson, os coeficientes  $\tau$  de Kendall e  $\rho$  de Spearman, bem como aos coeficientes de dependência nas caudas.

As definições e os resultados apresentados neste capítulo são essencialmente baseados em [16], [20], [22], [39] e [43].

### 3.1 Coeficiente de Correlação de Pearson

O coeficiente de correlação linear é, sem dúvida, a medida de associação mais usada nas aplicações.

**Definição 3.1.1.** Sejam  $X_1$  e  $X_2$  variáveis aleatórias reais admitindo momento simples de segunda ordem e tais que  $V(X_i) > 0$ ,  $i = 1, 2$ . O coeficiente de correlação linear entre  $X_1$  e  $X_2$  é dado por

$$\rho_L(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}}.$$

As propriedades elementares deste coeficiente, por demais conhecidas, encontram-se resumidas na próxima proposição.

**Proposição 3.1.1.** O coeficiente  $\rho_L$  goza das seguintes propriedades:

- (1)  $-1 \leq \rho_L(X_1, X_2) \leq 1$ ;
- (2)  $|\rho_L(X_1, X_2)| = 1$  se e somente se existem números reais  $a$  e  $b$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $X_2 = aX_1 + b$ , q.c.; se  $\rho_L(X_1, X_2) = -1$ , tem-se  $a < 0$  e se  $\rho_L(X_1, X_2) = 1$ , tem-se  $a > 0$ ;

(3) se  $X_1$  e  $X_2$  são independentes, então  $\rho_L(X_1, X_2) = 0$ ;

(4)  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \rho_L(\alpha_1 X_1 + \beta_1, \alpha_2 X_2 + \beta_2) = \text{sinal}(\alpha_1 \alpha_2) \rho_L(X_1, X_2)$ <sup>1</sup>.

Sabemos que, em geral, a implicação contrária de (3) é falsa. Contudo, se o vetor aleatório  $(X_1, X_2)$  for gaussiano, a nulidade de  $\rho_L(X_1, X_2)$  é equivalente à independência entre  $X_1$  e  $X_2$  e, neste caso, este coeficiente constitui, portanto, uma medida de associação natural entre as margens do vetor.

O mesmo acontece na família das distribuições elíticas, que partilham muitas das propriedades da lei normal, em particular o facto de a estrutura de dependência das margens ser caracterizada pela matriz de correlação do vetor (veja-se, por exemplo, [22], pp. 187, ou [39], pp. 201).

No que diz respeito a (4), convém salientar que transformações não lineares de  $X_1$  e  $X_2$ , ainda que estritamente crescentes, podem afetar não só a existência do coeficiente (pondo em causa a existência dos momentos de segunda ordem das variáveis marginais) como também a sua invariância. Encontramos em [22], pp. 186, um exemplo que ilustra esta situação.

Mais ainda, a exigência relativa à existência de  $E(X_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ , constitui, desde logo, uma desvantagem considerável uma vez que impede a sua definição para distribuições com caudas pesadas, como é o caso da distribuição de Cauchy, por exemplo.

Outro inconveniente deste coeficiente é evidenciado pela identidade de Höfdding, seguidamente apresentada, que nos dá uma expressão alternativa para  $Cov(X_1, X_2)$ .

**Proposição 3.1.2.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com função de distribuição  $F$  e funções de distribuição marginais  $F_1$  e  $F_2$ , tal que  $E(X_i^2) < +\infty$ ,  $i = 1, 2$ . Então

$$Cov(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (F(x_1, x_2) - F_1(x_1)F_2(x_2)) dx_1 dx_2.$$

*Demonstração.* Consideremos o vetor aleatório  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ , identicamente distribuído com  $(X_1, X_2)$  e independente de  $(X_1, X_2)$ . É fácil ver que

$$2Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2)].$$

Atendendo a que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a - b = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbb{1}_{\{x \geq b\}} - \mathbb{1}_{\{x \geq a\}}) dx$$

e aplicando esta igualdade às diferenças  $X_1 - \tilde{X}_1$  e  $X_2 - \tilde{X}_2$ , obtemos

$$2Cov(X_1, X_2) = E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbb{1}_{\{\tilde{X}_1 \leq x_1\}} - \mathbb{1}_{\{X_1 \leq x_1\}}) (\mathbb{1}_{\{\tilde{X}_2 \leq x_2\}} - \mathbb{1}_{\{X_2 \leq x_2\}}) dx_1 dx_2 \right],$$

o que, pelo teorema de Fubini, conduz a

$$2Cov(X_1, X_2) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) - P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2)) dx_1 dx_2.$$

□

<sup>1</sup>Com  $\text{sinal}(x) = \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x) - \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Constatamos, assim, que o coeficiente de correlação linear não permite analisar a estrutura de dependência das margens de um vetor aleatório real independentemente das suas distribuições marginais, uma vez que depende explicitamente de  $F_1$  e  $F_2$ . Mais ainda, este facto influencia o intervalo de variação de  $\rho_L(X_1, X_2)$ , como veremos de seguida.

**Corolário 3.1.1.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com funções de distribuição marginais  $F_1$  e  $F_2$ , tal que  $E(X_i^2) < +\infty$  e  $V(X_i) > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Os possíveis valores de  $\rho_L(X_1, X_2)$  formam um intervalo  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ , contido em  $[-1, 1]$ , que depende de  $F_1$  e  $F_2$ . Além disso,

(1)  $\rho_L(X_1, X_2) = \rho_{\min}$  se e somente se  $X_1$  e  $X_2$  são Contramonotónicas e  $\rho_L(X_1, X_2) = \rho_{\max}$  se e somente se  $X_1$  e  $X_2$  são Comonotónicas;

(2)  $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$ .

*Demonstração.* (1) A Proposição 3.1.1 e o teorema de Sklar permitem escrever

$$\rho_L(X_1, X_2) = \frac{1}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (C(F_1(x_1), F_2(x_2)) - F_1(x_1)F_2(x_2)) dx_1 dx_2, \quad (3.1)$$

onde  $C$  é uma cópula associada ao vetor  $(X_1, X_2)$ .

Consequentemente, usando a desigualdade das fronteiras de Fréchet-Hoeffding, concluímos que, fixadas as funções  $F_1$  e  $F_2$ , se tem

$$\rho_L^W(X_1, X_2) \leq \rho_L(X_1, X_2) \leq \rho_L^M(X_1, X_2),$$

onde  $\rho_L^W(X_1, X_2)$  e  $\rho_L^M(X_1, X_2)$  são os coeficientes obtidos quando substituímos, em (3.1), a cópula  $C$  pelas cópulas  $W$  e  $M$ , respetivamente, isto é, quando  $X_1$  e  $X_2$  são Contramonotónicas e Comonotónicas, respetivamente. Portanto,  $\rho_{\min} = \rho_L^W(X_1, X_2)$  e  $\rho_{\max} = \rho_L^M(X_1, X_2)$ .

Para mostrar (2), comecemos por notar que  $\rho_L^M(X_1, X_2) \geq 0$ . Ora

$$\rho_L^M(X_1, X_2) = 0 \implies \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\} = F_1(x_1)F_2(x_2), \quad (3.2)$$

para todo os  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Mas esta igualdade apenas poderia ocorrer se  $X_1$  ou  $X_2$  fosse um variável degenerada, o que contraria o facto de  $V(X_i) > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Analogamente se conclui que  $\rho_L^W(X_1, X_2) < 0$ . □

Encontramos em [39], pp. 205, um exemplo (envolvendo duas variáveis aleatórias seguindo a lei Lognormal) que ilustra o caso em que  $\rho_{\min} > -1$  e  $\rho_{\max} < 1$ .

As limitações do coeficiente de correlação linear justificam a introdução de medidas de associação alternativas, sendo particularmente relevantes, no âmbito do presente trabalho, as que dependem apenas de uma função cópula. Tal como veremos nas próximas secções, duas medidas que cumprem este requisito são os coeficientes de correlação de Kendall e de Spearman. Admitiremos, no que se segue, que as variáveis aleatórias reais envolvidas são absolutamente contínuas, o que assegura a unicidade da cópula associada ao correspondente vetor aleatório.

Além disso, sempre que não houver ambiguidade,  $(U_1, U_2)$  denotará um vetor aleatório real tal que  $U_i \sim \mathbb{U}[0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , e cuja função de distribuição, restrita a  $[0, 1]^2$ , coincide com a cópula em causa.

### 3.2 Coeficiente de Correlação de Kendall

Intuitivamente, este coeficiente tem por base a ideia de concordância entre duas variáveis aleatórias reais, no sentido de que valores elevados de uma delas tendem a ser acompanhados por valores elevados da outra, o mesmo acontecendo com os valores reduzidos. Mais concretamente, se  $(x'_1, x'_2)$  e  $(x''_1, x''_2)$  denotarem duas observações do vetor aleatório  $(X_1, X_2)$ , dizemos que  $(x'_1, x'_2)$  e  $(x''_1, x''_2)$  são concordantes se  $(x'_1 - x''_1)(x'_2 - x''_2) > 0$  e discordantes se  $(x'_1 - x''_1)(x'_2 - x''_2) < 0$ . Em termos probabilísticos, o grau de concordância entre  $X_1$  e  $X_2$  é traduzido do seguinte modo.

**Definição 3.2.1.** Sejam  $(X_1, X_2)$  e  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  vetores aleatórios reais independentes e identicamente distribuídos. Chamamos coeficiente de correlação  $\tau$  de Kendall de  $(X_1, X_2)$  ao número real

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0).$$

Vejam qual a relação deste coeficiente com a função cópula de  $(X_1, X_2)$ .

**Proposição 3.2.1.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com função cópula  $C_{X_1, X_2}$ . Então

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) dC_{X_1, X_2}(u_1, u_2) - 1. \quad (3.3)$$

*Demonstração.* Consideremos  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  um vetor aleatório independente e identicamente distribuído com  $(X_1, X_2)$ . É fácil ver que

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 2P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - 1,$$

pois  $X_i$  e  $\tilde{X}_i$ ,  $i = 1, 2$ , são absolutamente contínuas e independentes. Ora

$$P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) = P(X_1 > \tilde{X}_1, X_2 > \tilde{X}_2) + P(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2).$$

Analisemos, então, os dois termos que figuram no segundo membro desta igualdade.

$$\begin{aligned} P(X_1 > \tilde{X}_1, X_2 > \tilde{X}_2) &= E\left(\mathbb{1}_{\{X_1 > \tilde{X}_1, X_2 > \tilde{X}_2\}}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E\left(\mathbb{1}_{\{X_1 > \tilde{X}_1, X_2 > \tilde{X}_2\}} | X_1 = x_1, X_2 = x_2\right) dF(x_1, x_2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tilde{X}_1 < x_1, \tilde{X}_2 < x_2) dF(x_1, x_2), \end{aligned}$$

tendo em conta a independência entre  $(X_1, X_2)$  e  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ . Denotando por  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , as funções de distribuição marginais de  $(X_1, X_2)$  e aplicando o teorema Sklar, podemos assim escrever

$$P(X_1 > \tilde{X}_1, X_2 > \tilde{X}_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{X_1, X_2}(F_1(x_1), F_2(x_2)) dC_{X_1, X_2}(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

de onde se obtém

$$P(X_1 > \tilde{X}_1, X_2 > \tilde{X}_2) = \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) dC_{X_1, X_2}(u_1, u_2),$$

efetuando a mudança de variável  $u_1 = F_1(x_1)$  e  $u_2 = F_2(x_2)$ .

De igual modo, o condicionamento por  $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$  conduz a

$$P(X_1 < \tilde{X}_1, X_2 < \tilde{X}_2) = \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) dC_{X_1, X_2}(u_1, u_2),$$

o que permite concluir a igualdade pretendida.  $\square$

**Observação 3.2.1.** Note-se que (3.3) é equivalente a

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 4E(C_{X_1, X_2}(U_1, U_2)) - 1. \quad (3.4)$$

Em particular, tem-se  $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_\tau(F_1(X_1), F_2(X_2))$ .

O nosso próximo objetivo será apresentar as propriedades fundamentais do coeficiente de correlação  $\tau$  de Kendall.

Para tal, iremos recorrer aos dois resultados auxiliares que figuram no próximo lema.

**Lema 3.2.1.** Se  $C$  e  $C'$  são duas cópulas, tem-se

$$(1) \quad \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC'(u_1, u_2) = \frac{1}{2} - \int_0^1 \int_0^1 \partial_1 C(u_1, u_2) \partial_2 C'(u_1, u_2) du_1 du_2^2; \quad (3.5)$$

$$(2) \quad C \prec C' \implies \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) \leq \int_0^1 \int_0^1 C'(u_1, u_2) dC'(u_1, u_2). \quad (3.6)$$

*Demonstração.* A demonstração de (1) sai fora do âmbito deste trabalho e pode ser consultada em [43], pp. 164. Quanto a (2), usamos a monotonia do integral em relação à função integranda e a fórmula de integração por partes (cf. [40], pp. 338) que justificam as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 C'(u_1, u_2) dC'(u_1, u_2) &\geq \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC'(u_1, u_2) = \int_0^1 \int_0^1 C'(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) \\ &\geq \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2). \end{aligned}$$

$\square$

Estamos agora em condições de apresentar as propriedades fundamentais do coeficiente de correlação de Kendall.

**Proposição 3.2.2.** O coeficiente  $\rho_\tau$  goza das seguintes propriedades:

- (1)  $\rho_\tau(X_1, X_2) \in [-1, 1]$ ;
- (2)  $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_\tau(X_2, X_1)$ ;
- (3) se  $C_{X_1, X_2} \prec C_{Y_1, Y_2}$ , então  $\rho_\tau(X_1, X_2) \leq \rho_\tau(Y_1, Y_2)$ ;
- (4) se  $X_1$  e  $X_2$  são independentes, então  $\rho_\tau(X_1, X_2) = 0$ ;
- (5) se  $h$  é uma função real de variável real estritamente crescente (respetivamente decrescente), então

<sup>2</sup>Recordemos que, pela Proposição 2.1.2, a função integranda está definida para quase todos os  $u_1, u_2 \in [0, 1]$ .

$\rho_\tau(h(X_1), X_2) = \rho_\tau(X_1, X_2)$  (respetivamente  $\rho_\tau(h(X_1), X_2) = -\rho_\tau(X_1, X_2)$ );<sup>3</sup>

(6)  $\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 \iff C_{X_1, X_2} = M$  e  $\rho_\tau(X_1, X_2) = -1 \iff C_{X_1, X_2} = W$ .

*Demonstração.* As duas primeiras propriedades são consequências imediatas da definição e a terceira deduz-se de (3.4). A prova de (4) é também evidente, uma vez que a independência entre  $X_1$  e  $X_2$  implica que  $C_{X_1, X_2} = \Pi$ , e portanto

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 du_1 du_2 = 0$$

usando (3.5). Relativamente a (5) basta aplicar as propriedades (1) e (2) da Proposição 2.2.7, tomando  $h_1 = h$  e  $h_2 = Id_{\mathbb{R}}$ . Com efeito, se  $h$  é estritamente crescente, a igualdade entre  $\rho_\tau(h(X_1), X_2)$  e  $\rho_\tau(X_1, X_2)$  decorre da igualdade entre as respetivas cópulas; se  $h$  é estritamente decrescente, então

$$\partial_1 C_{h(X_1), X_2}(u_1, u_2) = \partial_1 C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2)^4$$

e

$$\partial_2 C_{h(X_1), X_2}(u_1, u_2) = \partial_2(u_2 - C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2)) = 1 - \partial_2 C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2)^5$$

o que, por (3.5), conduz a

$$\begin{aligned} \rho_\tau(h(X_1), X_2) &= \\ &= 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \partial_1 C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2) du_1 du_2 + 4 \int_0^1 \int_0^1 \partial_1 C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2) \partial_2 C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2) du_1 du_2 \\ &= 1 - 4 \int_0^1 \left( \int_0^1 \partial_1 C_{X_1, X_2}(s, u_2) ds \right) du_2 + 4 \int_0^1 \left( \int_0^1 \partial_1 C_{X_1, X_2}(s, u_2) \partial_2 C_{X_1, X_2}(s, u_2) ds \right) du_2 \\ &= 1 - 4 \int_0^1 u_2 du_2 + 4 \int_0^1 \int_0^1 \partial_1 C_{X_1, X_2}(s, u_2) \partial_2 C_{X_1, X_2}(s, u_2) ds du_2 \\ &= -1 + 4 \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) dC_{X_1, X_2} = -\rho_\tau(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Resta provar (6). Atendendo novamente a (3.5), as implicações,

$$C_{X_1, X_2} = M \implies \rho_\tau(X_1, X_2) = 1 \text{ e } C_{X_1, X_2} = W \implies \rho_\tau(X_1, X_2) = -1$$

são fáceis de verificar.

Para mostrar que  $\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 \implies C_{X_1, X_2} = M$ , notemos que

$$C_{X_1, X_2} \prec M \implies E(C_{X_1, X_2}(U_1, U_2)) \leq E(M(U_1, U_2)).$$

Por outro lado,  $\min\{U_1, U_2\} \leq U_1$ , q.c., logo

$$E(M(U_1, U_2)) \leq E(M(U_1, U_1)).$$

Ora, de (3.4), vem

<sup>3</sup>Naturalmente, as mesmas igualdades são válidas para  $\rho_\tau(X_1, h(X_2))$ .

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 \implies E(C_{X_1, X_2}(U_1, U_2)) = E(M(U_1, U_2)),$$

pelo que  $E(C_{X_1, X_2}(U_1, U_2)) = E(M(U_1, U_2))$ , ou seja

$$0 = E(M(U_1, U_2) - C_{X_1, X_2}(U_1, U_2)) = \int_0^1 \int_0^1 (M(u_1, u_2) - C_{X_1, X_2}(u_1, u_2)) dC_{X_1, X_2}(u_1, u_2).$$

Mas, sendo a função integranda não negativa, a nulidade do integral implica que  $C_{X_1, X_2} = M$ .

Debrucemo-nos finalmente sobre a implicação  $\rho_\tau(X_1, X_2) = -1 \implies C_{X_1, X_2} = W$ . Sendo  $W \prec C_{X_1, X_2}$  e  $E(W(U_1, U_2)) \geq 0$ , podemos escrever

$$0 = E(W(U_1, 1 - U_1)) \leq E(W(U_1, U_2)) \leq E(C_{X_1, X_2}(U_1, U_2)).$$

Então

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = -1 \implies E(C_{X_1, X_2}(U_1, U_2)) = 0 = E(W(U_1, U_2))$$

de onde se deduz a igualdade pretendida, através de um raciocínio semelhante ao anterior.  $\square$

### 3.3 Coeficiente de Correlação de Spearman

O coeficiente de correlação de Spearman, também conhecido por coeficiente de correlação ordinal, é definido como o coeficiente de correlação linear entre as ordens de  $X_1$  e  $X_2$ , isto é, quando  $X_1$  e  $X_2$  são transformadas através das respetivas funções de distribuição marginais  $F_1$  e  $F_2$ .

**Definição 3.3.1.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real. Chamamos coeficiente de correlação de Spearman entre  $X_1$  e  $X_2$  ao número real

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho_L(F_1(X_1), F_2(X_2)). \quad (3.7)$$

Tal como afirma a próxima Proposição,  $\rho_S$  depende apenas da função cópula de  $(X_1, X_2)$ .

**Proposição 3.3.1.** Sendo  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com cópula  $C_{X_1, X_2}$  tem-se

$$\rho_S(X_1, X_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3. \quad (3.8)$$

*Demonstração.* Considerando  $U_i = F_i(X_i)$ ,  $i = 1, 2$ , a definição de  $\rho_L$  e a Proposição 3.1.2 permitem escrever

$$\begin{aligned} \rho_S(X_1, X_2) &= 12 \text{Cov}(U_1, U_2) = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3. \end{aligned}$$

$\square$

Vejamos seguidamente que  $\rho_S$  goza das mesmas propriedades que  $\rho_\tau$ .

**Proposição 3.3.2.** O coeficiente  $\rho_S$  verifica as propriedades (1) a (6) apresentadas na Proposição 3.2.2.

*Demonstração.* As propriedades (1), (2) e (4) decorrem diretamente das propriedades de  $\rho_L$  enquanto que (3) se obtém de (3.8). Para mostrar (5), usamos novamente (3.8) e as igualdades (2.13) e (2.14) da Proposição 2.2.7, considerando  $h_1 = h$  e  $h_2 = Id_{\mathbb{R}}$ . Em ambos os casos, os resultados são triviais, sendo que, se  $h$  for estritamente decrescente, basta verificar que

$$\begin{aligned}\rho_S(X_1, X_2) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 (u_2 - C_{X_1, X_2}(1 - u_1, u_2)) du_1 du_2 - 3 \\ &= 3 - 12 \int_0^1 \int_0^1 C_{X_1, X_2}(s, u_2) ds du_2 = -\rho_S(X_1, X_2).\end{aligned}$$

No que diz respeito a (6), as implicações

$$C_{X_1, X_2} = M \implies \rho_S(X_1, X_2) = 1 \text{ e } C_{X_1, X_2} = W \implies \rho_S(X_1, X_2) = -1$$

são consequências imediatas da Proposição 3.3.1, calculando os respectivos integrais.

Por outro lado, das propriedades de  $\rho_L$ , sabemos que

$$|\rho_L(F_1(X_1), F_2(X_2))| = 1 \iff F_2(X_2) = aF_1(X_1) + b, \text{ q.c., com } a \neq 0,$$

ou seja,

$$X_2 = F_2^{-1}(aF_1(X_1) + b), \text{ q.c.,}$$

pela propriedade (3) do Lema A.0.2.

Assim, temos  $X_2 = h(X_1)$ , q.c., com  $h$  uma função real de variável real crescente ou decrescente consoante  $a > 0$  ou  $a < 0$ , respetivamente, o que estabelece o resultado pretendido, pelo Corolário 2.2.2.  $\square$

### 3.4 Coeficientes de Dependência nas Caudas

Os coeficientes de dependência nas caudas são medidas de associação que permitem quantificar o grau de dependência entre duas variáveis aleatórias reais quando elas assumem simultaneamente valores extremos (muito elevados ou muito pequenos). Contrariamente a  $\rho_\tau$  e  $\rho_S$ , são medidas locais, no sentido de que apenas são definidas nos quadrantes inferior e superior da correspondente distribuição conjunta.

**Definição 3.4.1.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com funções de distribuição marginais  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ . Os coeficientes de dependência nas caudas inferior e superior de  $(X_1, X_2)$  são definidos, respetivamente, por

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} P(X_2 \leq F_2^{-1}(t) | X_1 \leq F_1^{-1}(t))$$

e

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{t \rightarrow 1^-} P(X_2 > F_2^{-1}(t) | X_1 > F_1^{-1}(t)),$$

quando estes limites existem.



Se  $\lambda_L(X_1, X_2) = 0$  (respetivamente  $\lambda_U(X_1, X_2) = 0$ ), dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são independentes na cauda inferior (respetivamente superior); se  $\lambda_L(X_1, X_2) \in ]0, 1]$  (respetivamente  $\lambda_U(X_1, X_2) \in ]0, 1]$ ), dizemos que  $X_1$  e  $X_2$  são dependentes na cauda inferior (respetivamente superior).

**Observação 3.4.1.** Note-se que as probabilidades condicionadas que figuram nas expressões de  $\lambda_L$  e  $\lambda_U$  estão bem definidas já que, sendo  $X_1$  e  $X_2$  absolutamente contínuas, se tem

$$\forall t \in ]0, 1], P(X_1 \leq F_1^{-1}(t)) = P(X_1 < F_1^{-1}(t)) = P(F_1(X_1) < t) = t$$

e

$$\forall t \in [0, 1[, P(X_1 > F_1^{-1}(t)) = 1 - P(X_1 \leq F_1^{-1}(t)) = 1 - t,$$

pela propriedade (5) do Lema A.0.1.

Por outro lado, os limites referidos nem sempre existem. Para um exemplo em que tal acontece, veja-se [19], pp. 114.

A proposição que se segue relaciona  $\lambda_L$  e  $\lambda_U$  com a função cópula de  $(X_1, X_2)$ , evidenciando o seu interesse neste contexto.

**Proposição 3.4.1.** Seja  $(X_1, X_2)$  um vetor aleatório real com cópula  $C_{X_1, X_2}$ . Então:

- (1)  $\lambda_L(X_1, X_2)$  existe se e somente se  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C_{X_1, X_2}(t, t)}{t}$  existe;
- (2)  $\lambda_U(X_1, X_2)$  existe se e somente se  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - C_{X_1, X_2}(t, t)}{1 - t}$  existe.

*Demonstração.* Em ambos os casos, basta aplicar a definição de probabilidade condicionada e reescrever os respetivos numeradores em termos de  $C_{X_1, X_2}$ . Com efeito, denotando por  $F$  a função de distribuição de  $(X_1, X_2)$  e por  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , as respetivas funções de distribuição marginais, obtemos

$$P(X_1 \leq F_1^{-1}(t), X_2 \leq F_2^{-1}(t)) = F(F_1^{-1}(t), F_2^{-1}(t)) = C_{X_1, X_2}(t, t)$$

e

$$P(X_1 > F_1^{-1}(t), X_2 > F_2^{-1}(t)) = 1 - P(X_1 \leq F_1^{-1}(t)) - P(X_2 \leq F_2^{-1}(t)) + F(F_1^{-1}(t), F_2^{-1}(t)).$$

A igualdade  $\frac{1 - 2t + C_{X_1, X_2}(t, t)}{1 - t} = 2 - \frac{1 - C_{X_1, X_2}(t, t)}{1 - t}$  conclui a prova de (2).  $\square$

Na prática, o cálculo dos limites que figuram em (1) e (2) pode ser simplificado recorrendo à derivada da função  $g(t) = C_{X_1, X_2}(t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , bem como às derivadas parciais de  $C_{X_1, X_2}$ , quando existem.

**Corolário 3.4.1.** Nas condições da proposição anterior, tem-se:

- (1) se  $g$  é derivável numa vizinhança do ponto 0 e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g'(t)$  existe, então  $\lambda_L(X_1, X_2)$  existe e coincide com o valor deste limite;
- (2) se  $g$  é derivável numa vizinhança do ponto 1 e  $\lim_{t \rightarrow 1^-} g'(t)$  existe, então  $\lambda_U(X_1, X_2)$  existe e  $\lambda_U(X_1, X_2) = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} g'(t)$ ;

(3) se  $C_{X_1, X_2}$  é diferenciável numa vizinhança do ponto 0 e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (\partial_1 C(t, t) + \partial_2 C(t, t))$  existe, então  $\lambda_L(X_1, X_2)$  existe e coincide com o valor deste limite;

(4) se  $C_{X_1, X_2}$  é diferenciável numa vizinhança do ponto 1 e  $\lim_{t \rightarrow 1^-} (\partial_1 C(t, t) + \partial_2 C(t, t))$  existe então  $\lambda_U(X_1, X_2)$  existe e  $\lambda_U(X_1, X_2) = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} (\partial_1 C(t, t) + \partial_2 C(t, t))$ .

*Demonstração.* A regra de L'Hôpital justifica as afirmações (1) e (2). Quanto a (3) e (4), trata-se de uma aplicação da "regra da cadeia" à função  $C_{X_1, X_2}(f(t), f(t))$ , com  $f$  a função identidade.  $\square$

Sob as hipóteses das propriedades (3) e (4), podemos ainda escrever

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (P(U_1 \leq t | U_2 = t) + P(U_2 \leq t | U_1 = t))$$

e

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (P(U_1 > t | U_2 = t) + P(U_2 > t | U_1 = t)).$$

Relembrando a Proposição 2.2.2.

A próxima proposição, cuja demonstração é evidente, indica-nos as principais propriedades destes coeficientes.

**Proposição 3.4.2.** Os coeficientes  $\lambda_L$  e  $\lambda_U$  verificam as propriedades (2), (3)<sup>6</sup> e (4) da Proposição 3.2.2. Além disso, satisfazem (5) para uma função  $h$  estritamente crescente. Tem-se ainda:

$$\begin{aligned} C_{X_1, X_2} = M &\implies \lambda_L(X_1, X_2) = \lambda_U(X_1, X_2) = 1, \\ C_{X_1, X_2} = W &\implies \lambda_L(X_1, X_2) = \lambda_U(X_1, X_2) = 0. \end{aligned}$$

A tabela 3.1 resume as expressões de  $\rho_\tau$ ,  $\rho_S$ ,  $\lambda_U$  e  $\lambda_L$  para as cópula referidas na secção 2.3.

Tabela 3.1 Medidas de associação.

Cópula	$\rho_\tau$	$\rho_S$	$\lambda_U$	$\lambda_L$
Gumbel	$\frac{\alpha - 1}{\alpha}$	—	$2 - 2^{1/\alpha}$	0
Clayton	$\frac{\alpha}{\alpha + 2}$	—	0	$\begin{cases} 2^{-1/\alpha}, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha \leq 0, \end{cases}$
Frank	$1 - \frac{4}{\alpha}[1 - D_1(\alpha)]$	$1 - \frac{12}{\alpha}[D_1(\alpha) - D_2(\alpha)]$	0	0
Normal	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\rho)$	$\frac{6}{\pi} \arcsen(\rho/2)$	0	0
t-Student	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\rho)$	$\frac{6}{\pi} \arcsen(\rho/2)$	$2T_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{(1+\rho)}}\right)$	$2T_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{(1+\rho)}}\right)$
Fréchet	$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2)}{3}$	$(\alpha - \beta)$	$\alpha$	$\alpha$

Na tabela anterior,  $T_{\nu+1}$  representa a função de distribuição da lei de Student com  $\nu + 1$  graus de liberdade; além disso,

$$D_j(x) = \frac{j}{x^j} \int_0^x \frac{t^j}{e^t - 1} dt, \quad j = 1, 2.$$

Note-se que não existe uma expressão explícita para  $\rho_S$  no caso das cópulas de Gumbel e Clayton.

<sup>6</sup>Admitindo a existência dos limites que definem  $\lambda_L(Y_1, Y_2)$  e  $\lambda_U(Y_1, Y_2)$ .

## Capítulo 4

# Aplicação das cópulas à estimação do Valor em Risco e do Déficit Esperado

A determinação do Valor em Risco e do Déficit Esperado da rentabilidade de uma carteira de ativos não é, em geral, uma tarefa fácil, pois pressupõe o conhecimento da função de distribuição conjunta das rentabilidades dos ativos que compõem a carteira. Dependendo do número de ativos envolvidos e da expressão analítica dessa função de distribuição, as fórmulas explícitas de tais medidas de risco podem ser bastante complexas, o que inviabiliza o seu cálculo por métodos diretos, na grande maioria dos casos. O recurso a técnicas estatísticas de estimação, em particular, o método de simulação de Monte Carlo (MSMC), combinadas com a teoria das cópulas, constitui um caminho relativamente simples e eficaz para ultrapassar este problema.

O presente capítulo, baseado fundamentalmente em [7] e [39] tem dois objetivos: por um lado, pretende ilustrar a utilização de cópulas bidimensionais paramétricas na modelação da rentabilidade mensal de uma carteira composta por dois ativos, a partir dos valores históricos dos preços desses ativos; por outro lado, pretende também exemplificar a aplicação do MSMC na estimação do Valor em Risco e do Déficit Esperado associados à carteira.

A implementação dos algoritmos que servem de suporte ao exemplo apresentado na secção 4.3 foi efetuada à custa do software R (cf. Anexo C), adaptando os códigos anexados a [7] e disponibilizados publicamente no site <http://www.ub.edu/rfa/R/copulas.html>.

### 4.1 Valor em Risco e Déficit Esperado

Duas das medidas mais populares para quantificar o risco de mercado em carteiras de ativos financeiros são o Valor em Risco e o Déficit Esperado, doravante designados por VaR e ES, respetivamente (em conformidade com as abreviaturas de Value-at-Risk e Expected Shortfall, terminologia usada na literatura inglesa).

**Definição 4.1.1.** Seja  $L$  a variável aleatória real que representa a perda associada a uma carteira de ativos num horizonte temporal prefixado. Dado  $\alpha \in (0, 1)$ , o VaR de  $L$  com nível de confiança  $\alpha$  é o número real definido por

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(L > x) \leq 1 - \alpha\}.$$

O  $VaR_\alpha(L)$  traduz, pois, o menor valor da perda que é excedido em quando muito  $(1 - \alpha) \times 100\%$  dos casos e não é mais do que o quantil de ordem  $\alpha$  da distribuição de  $L$ . Os valores típicos de  $\alpha$  são evidentemente próximos de 1, podendo variar entre 0.95 e 0.99.

**Observação 4.1.1.** Adotamos aqui a definição proposta por [16], pp. 67, [31], pp. 104, e [39], pp. 38, convencionando que valores negativos de  $L$  correspondem a ganhos enquanto que valores positivos correspondem a perdas.

No caso (usual) em que  $L$  é absolutamente contínua,  $VaR_\alpha(L)$  pode ser facilmente expresso à custa da lei de probabilidade de  $-L$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L) &= \inf\{x \in \mathbb{R} : P(-L \leq -x) \leq 1 - \alpha\} \\ &= -\sup\{y \in \mathbb{R} : P(-L \leq y) \leq 1 - \alpha\} \\ &= -\inf\{y \in \mathbb{R} : P(-L \leq y) > 1 - \alpha\}. \end{aligned}$$

Assim, se designarmos por  $F_{-L}$  a função de distribuição de  $-L$  e por  $(F_{-L}^{-1})^*$  a versão contínua à direita da sua inversa generalizada<sup>1</sup>, constatamos que

$$VaR_\alpha(L) = -(F_{-L}^{-1})^*(1 - \alpha).$$

Claro que, se  $F_L$  for uma função estritamente crescente, tem-se  $VaR_\alpha(L) = -VaR_{1-\alpha}(-L)$ .

Apesar de ser muito utilizado, o  $VaR$  tem vários inconvenientes, de entre os quais se destacam os seguintes: não fornece qualquer informação sobre a ordem de grandeza das perdas superiores ao seu valor; não é uma medida coerente de risco, no sentido da axiomática proposta por [6], uma vez que viola o axioma da subaditividade, baseado no princípio de que a diversificação de uma carteira de ativos tenderá a diminuir o seu risco. De facto, considerando as perdas de dois ativos, modeladas pelas variáveis aleatórias reais  $L_1$  e  $L_2$ , e a perda total da carteira,  $L = L_1 + L_2$ , o  $VaR$  não verifica, em geral, a desigualdade

$$VaR_\alpha(L) \leq VaR_\alpha(L_1) + VaR_\alpha(L_2),$$

exigida pelo dito axioma (cf. [37], pp. 105 (Exemplo 7.12)).

Por este motivo, os autores acima referidos introduziram em medida de risco alternativa, denominada défice esperado, que satisfaz todos os axiomas relativos à coerência (cf. [39], pp. 243).

**Definição 4.1.2.** Seja  $L$  a variável aleatória real que representa a perda associada a uma carteira de ativos num horizonte temporal prefixado, tal que  $E(|L|) < +\infty$ . Para  $\alpha \in (0, 1)$ , o défice esperado com nível de confiança  $\alpha$  é definido por

$$ES_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) du.$$

A igualdade estabelecida na próxima proposição permite interpretar o significado de  $ES_\alpha(L)$  de forma mais intuitiva.

<sup>1</sup> Sendo  $X$  uma variável aleatória real com função de distribuição  $F$ , a versão contínua à direita da inversa generalizada de  $F$  é dada por

$$(F^{-1})^*(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > u\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq u\}, \quad u \in (0, 1).$$

**Proposição 4.1.1.** Nas condições da definição anterior, suponhamos que  $L$  é absolutamente contínua. Então

$$ES_\alpha(L) = E(L|L > VaR_\alpha(L)).$$

*Demonstração.* Por definição, temos

$$E(L|L > VaR_\alpha(L)) = E(L|L > F_L^{-1}(\alpha)) = \frac{E\left(L \mathbb{1}_{]F_L^{-1}(\alpha), +\infty[}(L)\right)}{P(L > F_L^{-1}(\alpha))}. \quad (4.1)$$

Ora, sendo  $F_L$  uma função contínua,  $P(L > F_L^{-1}(\alpha)) = 1 - \alpha$ . Além disso, tendo em conta as propriedades (1) e (3) do Lema A.0.2, sabemos que  $L = F_L^{-1}(U)$  q.c., com  $U \sim \mathbb{U}[0, 1]$ . Portanto, o numerador de (4.1) é igual a

$$E\left(F_L^{-1}(U) \mathbb{1}_{]F_L^{-1}(\alpha), +\infty[}(F_L^{-1}(U))\right),$$

que, por sua vez, coincide com  $E\left(F_L^{-1}(U) \mathbb{1}_{]_{\alpha, 1}[}(U)\right)$ , já que  $F_L^{-1}$  é estritamente crescente, pela propriedade (7) do Lema A.0.1.

Para concluir a prova, resta ver que

$$E\left(F_L^{-1}(U) \mathbb{1}_{]_{\alpha, 1}[}(U)\right) = \int_{\alpha}^1 F_L^{-1}(u) du = \int_{\alpha}^1 VaR_u(L) du.$$

□

Constatamos, deste modo, que  $ES_\alpha(L)$  quantifica as perdas esperadas que ocorrem além do  $VaR_\alpha(L)$ .

**Observação 4.1.2.** (i) De acordo com a observação 4.1.1, é também habitual exprimir  $ES_\alpha(L)$  à custa da distribuição de  $-L$ . Supondo, para simplificar, que  $F_L$  é estritamente crescente, podemos escrever

$$ES_\alpha(L) = -E\left(-L | -L < VaR_{1-\alpha}(-L)\right).$$

(ii) Notamos que a literatura não é consensual no que diz respeito às definições e às notações adotadas para estas medidas de risco. As diferenças residem sobretudo no facto de alguns autores se basearem na distribuição dos ganhos (convencionando, evidentemente, que as perdas correspondem a ganhos negativos), contrariamente à abordagem seguida neste trabalho. Salientamos ainda que a nomenclatura usada para designar o défice esperado não é unânime. Com efeito,  $ES$  é também frequentemente denominado por  $T(\text{ail})VaR$ ,  $C(\text{onditional})VaR$ ,  $A(\text{verage})VaR$  e  $CTE$  (Conditional Tail Expectation), por vezes com ligeiras diferenças nas respetivas definições. Em [16], são detalhadas as propriedades de tais medidas, bem como as relações existentes entre elas.

## 4.2 Estimação do Valor em Risco e do Défice Esperado pelo MSMC

Consideremos uma carteira composta por dois ativos, cujas rentabilidades mensais continuamente compostas são modeladas pelas variáveis aleatórias reais  $X_1$  e  $X_2$ , e denotemos por  $w_1$  e  $w_2$  os

pesos (prefixados) associados a  $X_1$  e  $X_2$ , respetivamente, com  $w_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ ,  $w_1 + w_2 = 1$ . Pelo anexo B, a rentabilidade continuamente composta mensal da carteira é, assim, representada pela variável aleatória  $R = \ln(w_1 e^{X_1} + w_2 e^{X_2})$ . Notemos que, sendo  $R$  definida por uma transformação não linear de  $X_1$  e  $X_2$ , a sua lei de probabilidade não é, em geral, fácil de determinar mesmo que conheçamos a distribuição de  $(X_1, X_2)$ . Contudo, no presente trabalho, admitimos que  $(X_1, X_2)$  é um vetor absolutamente contínuo cuja lei de probabilidade é desconhecida. Pretendemos estimar  $VaR_\alpha(-R)$  e  $ES_\alpha(-R)$ , para um determinado valor de  $\alpha$ , usando o MSMC, com base nas observações  $(x_1^t, x_2^t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , de  $(X_1, X_2)$ , calculadas a partir dos valores históricos dos preços mensais (de fecho) dos ativos,  $p_{i,t}$ ,  $t = 0, \dots, T$ ,  $i = 1, 2$ , do seguinte modo:

$$x_i^t = \ln \left( \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right), t = 1, \dots, T, i = 1, 2.$$

Apesar de ser pouco realista, trabalharemos sob a hipótese de que os pares  $(x_1^t, x_2^t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , constituem uma amostra de  $(X_1, X_2)$  no sentido independente e identicamente distribuído<sup>2</sup>, focando a nossa atenção na modelação da estrutura de dependência entre  $X_1$  e  $X_2$ .

Antes de mais, comecemos por relembrar a igualdade (2.11), que relaciona a função de distribuição de  $(X_1, X_2)$  com as respetivas funções de distribuição marginais, através de uma cópula  $C$ .

Se  $C$  for absolutamente contínua, com função densidade  $c^3$ , obtemos, por diferenciação, a expressão da função densidade de  $(X_1, X_2)$ :

$$f(x_1, x_2) = c \left( F_1(x_1), F_2(x_2) \right) f_1(x_1) f_2(x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

onde  $f_i$  designa a função densidade de  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Seguindo a abordagem paramétrica, supomos que  $C$  pertence a uma das famílias paramétricas absolutamente contínuas apresentadas na secção 2.3,  $\{C_\theta, \theta \in \Theta\}$ ,  $\Theta \subseteq \mathbb{R}^2$  (nomeadamente Frank, Gumbel, Clayton, normal e t-Student) mas que o parâmetro correspondente à lei de probabilidade de  $(X_1, X_2)$  é desconhecido, sendo, por isso, necessário proceder à sua estimação. Nestas condições, escrevemos

$$f(x_1, x_2; \theta) = c \left( F_1(x_1), F_2(x_2); \theta \right) f_1(x_1) f_2(x_2), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.2)$$

Analogamente, admitimos que a distribuição de  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ , se pode ajustar a um determinado modelo paramétrico e, sempre que for conveniente, denotaremos por  $F_i(x_i; \delta_i)$  (respetivamente  $f_i(x_i; \delta_i)$ ) a correspondente função de repartição (respetivamente função densidade). Assim, a função de log-verosimilhança do nosso modelo, construída com base na amostra considerada, tem a forma

$$\ln \prod_{t=1}^T f(x_1^t, x_2^t; \delta_1, \delta_2, \theta) = \sum_{t=1}^T \ln \left( c \left( F_1(x_1^t; \delta_1), F_2(x_2^t; \delta_2); \theta \right) \right) + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^2 \ln f_i(x_i^t; \delta_i), \quad (4.3)$$

<sup>2</sup>É por demais sabido que as séries financeiras apresentam algum tipo de dependência temporal, o que levou ao desenvolvimento de metodologias mais adequadas a esse contexto. Tais metodologias, genericamente designadas por cópulas dinâmicas, saem fora do âmbito deste trabalho, podendo ser consultadas em [8], [13], [39] e [48], entre outros.

<sup>3</sup>Sendo  $C$  uma cópula absolutamente contínua, uma versão da sua função densidade é dada por  $c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$ ,  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ , desde que esta derivada exista (cf. [12], pp. 81, [19], pp. 83, [39], pp. 197).

de acordo com a igualdade (4.2) e as notações acima introduzidas. Vejamos então os passos que constituem o algoritmo usado para estimar  $VaR_\alpha(-R)$  e  $ES_\alpha(-R)$  pelo MSMC:

Passo 1: Partindo das amostras individuais  $(x_i^1, \dots, x_i^T)$  de  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ , ajustar um modelo paramétrico às suas distribuições, obtendo, deste modo, uma estimativa de  $F_i$ ,  $\hat{F}_i = \hat{F}_i(\cdot; \hat{\delta}_i)$ ,  $i = 1, 2$ ;

Passo 2: Especificar uma cópula paramétrica  $C_\theta$  e estimar o seu parâmetro;

Passo 3: Seleccionar, de entre todas as cópulas acima referidas, a cópula estimada que melhor se ajusta aos dados,  $C_{\hat{\theta}}^*$ ;

Passo 4: Gerar, a partir da distribuição conjunta estimada nos passos 1 e 3, com função de distribuição<sup>4</sup>

$$\hat{F}_{\hat{\theta}}(x_1, x_2) = C_{\hat{\theta}}^*(\hat{F}_1(x_1), \hat{F}_2(x_2)), (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (4.4)$$

um elevado número,  $n$ , de vetores pseudo aleatórios  $(\hat{x}_{1,j}, \hat{x}_{2,j})$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;

Passo 5: Calcular as rentabilidades e as perdas associadas a tais vetores:  $\hat{r}_j = \ln(w_1 e^{\hat{x}_{1,j}} + w_2 e^{\hat{x}_{2,j}})$  e  $\hat{l}_j = -\hat{r}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , respetivamente, e, com base na amostra  $(\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n)$ , determinar as versões empíricas de  $VaR_\alpha(-R)$  e  $ES_\alpha(-R)$ .

Iremos agora descrever detalhadamente cada um dos passos anteriores.

Passo 1: Neste passo, usámos os métodos estatísticos tradicionais, tendo sido analisados vários modelos passíveis de serem ajustados aos dados em estudo. Os parâmetros foram estimados pelo método da máxima verosimilhança, que conduziu a

$$\hat{\delta}_i = \arg \max_{\delta_i} \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_i^t; \delta_i), \quad i = 1, 2.$$

Para a validação dos modelos, recorremos aos testes de Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises e Anderson-Darling. Os critérios de informação de Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC) permitiram escolher o(s) modelo(s) mais adequado(s).

Passo 2: A estimação dos parâmetros das cópulas foi implementada utilizando uma versão semi-paramétrica do denominado método da pseudo-máxima verosimilhança<sup>5</sup>, fundamentada do seguinte modo: sendo  $(X_1^t, X_2^t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , a amostra aleatória subjacente à amostra observada, os vetores  $(U_1^t, U_2^t) = (F_1(X_1^t), F_2(X_2^t))$ ,  $t = 1, \dots, T$ , podem ser considerados uma amostra aleatória de  $(U_1, U_2) = (F_1(X_1), F_2(X_2))$ , com  $U_i \sim \mathbb{U}[0, 1]$ ,  $i = 1, 2$ , cuja função de distribuição é a cópula  $C_\theta$ . Portanto, a partir de uma estimativa de  $F_i$ ,  $\bar{F}_i$ ,  $i = 1, 2$ , geramos observações (ditas pseudo-observações) da lei  $\mathbb{U}[0, 1]$ , tomando  $u_i^t = \bar{F}_i(x_i^t)$ ,  $i = 1, \dots, T$ . Os pares  $(u_1^t, u_2^t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , são então usados para estimar a cópula  $C_\theta$ , através do método da máxima verosimilhança, maximizando a função

$$\sum_{t=1}^T \ln c(\bar{F}_1(x_1^t), \bar{F}_2(x_2^t); \theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(u_1^t, u_2^t; \theta),$$

<sup>4</sup>Omitimos a referência às estimativas  $\hat{\delta}_i$ ,  $i = 1, 2$ , para simplificar a escrita.

<sup>5</sup>Conhecida, na literatura, por método da máxima verosimilhança canónica (cf. [12], pp. 160, [25], pp. 351) e aconselhado por vários autores.

em ordem a  $\theta$ .

**Observação 4.2.1.** (i) Repare-se que a função de log-verosimilhança aqui considerada se deduz de (4.3), desprezando os termos que não dependem de  $\theta$ , uma vez que  $\theta$  é, agora, o único parâmetro desconhecido do modelo, pois  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$ , foram estimados no passo 1.

(ii) Para evitar possíveis enviesamentos na estimação de  $\theta$ , as funções de distribuição marginais são estimadas, neste passo, à custa da função de repartição empírica corrigida, dada por

$$\bar{F}_i(x) = \frac{1}{T+1} \sum_{t=1}^T \mathbb{1}_{\{x_t^i \leq x\}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2.$$

De facto, se  $F_i$  fosse estimada a partir de  $\hat{F}_i$ ,  $i = 1, 2$ , os erros que eventualmente ocorressem na especificação dos modelos marginais (passo 1), repercutir-se-iam na estimação de  $\theta$ , o que não é desejável. Note-se ainda que, na versão corrigida da função de repartição empírica, o denominador da expressão que define a função é  $T+1$ , em vez de  $T$ . Esta alteração garante que as pseudo-observações pertencem ao interior de  $[0, 1]^2$ .

Para cada cópula, a estimativa de  $\theta$  construída pelo método da pseudo-máxima verosimilhança foi ainda comparada com a que se obtém pelo método dos momentos. Neste caso,  $\theta$  é estimado com base na sua relação com os coeficientes de correlação de Pearson, de Spearman e de Kendall, de acordo com as expressões que figuram na tabela 3.1. Para tal, procedeu-se à estimação destes coeficientes, considerando as seguintes estimativas:

$$\bullet \hat{\rho}_L(X_1, X_2) = \frac{\sum_{t=1}^T (x_1^t - \bar{x}_1)(x_2^t - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_1^t - \bar{x}_1)^2} \sqrt{\sum_{t=1}^T (x_2^t - \bar{x}_2)^2}}, \quad \text{com } \bar{x}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_i^t, \quad i = 1, 2;$$

$$\bullet \hat{\rho}_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{1 \leq t < s \leq T} \text{sin}al[(x_1^t - x_1^s)(x_2^t - x_2^s)];$$

$$\bullet \hat{\rho}_S(X_1, X_2) = \frac{12}{T(T^2-1)} \sum_{t=1}^T \left( \text{rank}(x_1^t) - \frac{T+1}{2} \right) \left( \text{rank}(x_2^t) - \frac{T+1}{2} \right), \quad \text{onde } \text{rank}(x_i^t) \text{ denota a posição de } x_i^t \text{ na amostra ordenada } x_i^{(1)} \leq x_i^{(2)} \leq \dots \leq x_i^{(T)}, \quad i = 1, 2.$$

**Passo 3:** Para a seleção da cópula que melhor se ajusta aos dados, foram novamente aplicados os critérios AIC e BIC.

**Passo 4:** Neste passo, foram simuladas  $n = 10^6$  réplicas do modelo descrito por (4.4), que conduziram aos vetores pseudo-aleatórios  $(\hat{x}_{1,j}, \hat{x}_{2,j})$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Para cada  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , o procedimento adotado envolve duas etapas:

- simulam-se duas variáveis aleatórias com distribuição  $\mathbb{U}[0, 1]$ , que tenham como função de distribuição conjunta  $C_{\hat{\theta}}^*$ ;

- denotando por  $\hat{u}_{1,j}$  e  $\hat{u}_{2,j}$  os valores resultantes desta simulação, calculamos

$$\hat{x}_{i,j} = \hat{F}_i^{-1}(\hat{u}_{i,j}), \quad i = 1, 2,$$



onde  $\hat{F}_i$  denota a função obtida no passo 1.

Passo 5:  $VaR_\alpha(-R)$  é estimado pelo quantil de ordem  $\alpha$  da amostra  $(\hat{l}_1, \dots, \hat{l}_n)$ ,  $\widehat{VaR}_\alpha$ . Relativamente à estimação de  $ES_\alpha(-R)$ , temos:

$$\widehat{ES}_\alpha(-R) = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{l}_j \mathbb{1}_{\{\hat{l}_j > \widehat{VaR}_\alpha\}}}{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{l}_j > \widehat{VaR}_\alpha\}}}.$$

**Observação 4.2.2.** No exemplo considerado neste trabalho, apresentado na próxima secção, as cópulas selecionadas no passo 3 pertencem às famílias t-Student e Arquimedianas. Em tais casos, os algoritmos que permitem concretizar a primeira etapa podem ser consultados em [4], pp. 219 e 220, e [12], pp. 181.

### 4.3 Exemplo de aplicação

Escolhemos a carteira formada pelos índices Dow Jones 30 (DJ) e Russell 2000 (R2000) para estimar o  $VaR$  e a  $ES$  deste portfólio utilizando a metodologia descrita na secção anterior. Para o estudo, foi selecionado um período de 19 anos (compreendido entre 01/01/2000 e 01/01/2019) e consideradas as rentabilidades continuamente compostas dos valores mensais de fecho de cada índice, num total de 227 dados para cada série, obtidos a partir do site <https://finance.yahoo.com/>.

Para implementar o passo 1, começámos por analisar as medidas descritivas das observações, que figuram na Tabela 4.1, assim como os respetivos histogramas, nos quais foram sobrepostas as densidades empíricas ajustadas (Fig. 4.1). Em ambos os casos, as amostras apresentam ligeira assimetria negativa, com caudas mais pesadas do que a normal, tal como se pode verificar pelos valores da curtose.

Tabela 4.1 Medidas descritivas dos dados DJ e R2000.

	DJ	R2000		DJ	R2000
Mínimo	-0.151526	-0.234509	Variância	0.001671	0.003160
Máximo	0.100792	0.152032	Desvio padrão	0.040876	0.056211
Mediana	0.007457	0.011089	Curtose	4.310347	4.30622
Média	0.003335	0.004806	Assimetria	-0.691890	-0.611688

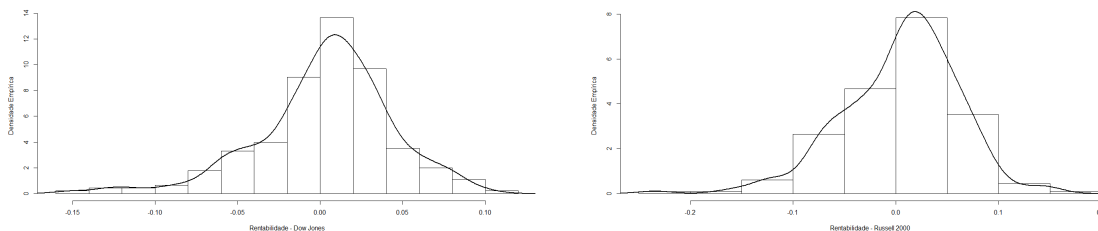


Fig. 4.1 Histogramas e Densidade empírica das séries

Ainda assim, foram postuladas as leis normal, de Cauchy, logística e t-Student para o ajustamento das distribuições subjacentes às amostras observadas. Contudo, os papéis de probabilidade correspondentes indicaram, para a série DJ (respetivamente para a série R2000), um mau ajustamento da lei t-Student (respetivamente das leis de Cauchy e t-Student), sugerindo a adequação das leis normal, de Cauchy e logística (respetivamente das leis normal e logística). Esta conclusão é evidenciada na figura 4.2.

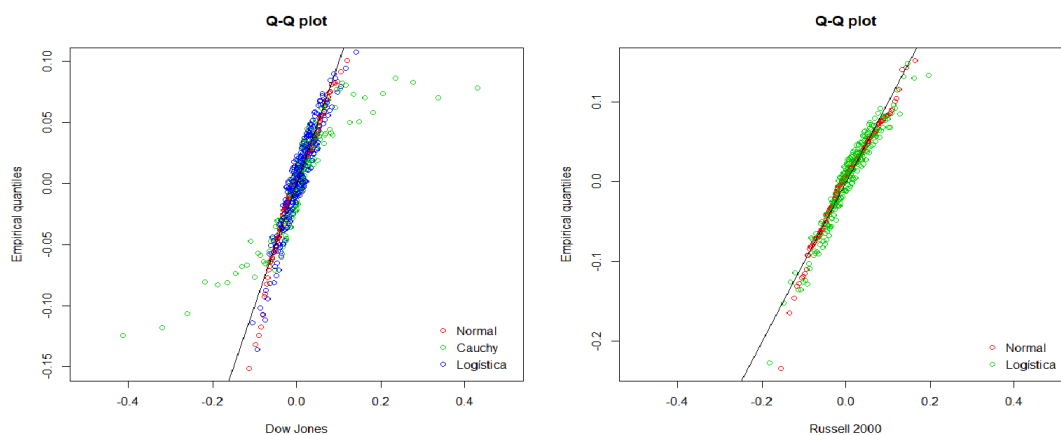


Fig. 4.2 DJ e R2000 - Papéis de probabilidade relativos às leis normal, Cauchy e logística.

Seguidamente, procedeu-se ao ajustamento das quatro leis de probabilidade referidas. Nas duas próximas tabelas, encontram-se resumidas as estimativas dos parâmetros de cada distribuição (onde  $\mu$  e  $\gamma$  dizem respeito aos parâmetros de localização e de escala, respetivamente; no caso da lei t-Student, é também indicada a estimativa de  $\nu$ , designada por  $df$ ), os valores de AIC e BIC, bem como os resultados dos testes de ajustamento mencionados na secção 4.2 (valor da estatística de teste e p-valor).

Tabela 4.2 Resumo do ajustamento das distribuições Marginais - DJ.

Distribuição	Parâmetros	Critérios	Kolmogorov-Smirnov	Cramer-von Mises	Anderson-Darling
Normal	$\mu = 0.003336$	AIC= -804.34	$KS = 0.0774$	$CM = 0.3400$	$AD = 1.8630$
	$\gamma = 0.040786$	BIC= -797.49	p-value= 0.132	p-value= 0.105	p-value= 0.109
Cauchy	$\mu = 0.008246$	AIC= -770.56	$KS = 0.0761$	$CM = 0.1902$	$AD = 2.1685$
	$\gamma = 0.020458$	BIC= -763.71	p-value= 0.144	p-value= 0.287	p-value= 0.074
Logística	$\mu = 0.005567$	AIC= -815.38	$KS = 0.0508$	$CM = 0.0990$	$AD = 0.7858$
	$\gamma = 0.022067$	BIC= -808.53	p-value= 0.601	p-value= 0.590	p-value= 0.491
t-Student	$\mu = 0.005425$ $\gamma = 0.034867$ $df = 8.27039$	AIC= -812.38 BIC= -802.10	$KS = 0.4611$ p-value < $2.10^{-16}$	$CM = 17.0260$ p-value= $1.5.10^{-8}$	$AD = 80.1180$ p-value= $2.6.10^{-6}$

Tabela 4.3 Resumo do ajustamento das distribuições Marginais - R2000.

Distribuição	Parâmetros	Crîtérios	Kolmogorov-Smirnov	Cramer-von Mises	Anderson-Darling
Normal	$\mu = 0.004806$ $\gamma = 0.056088$	AIC= -659.70 BIC= -652.85	$KS = 0.0792$ p-value= 0.116	$CM = 0.2584$ p-value= 0.180	$AD = 1.4049$ p-value= 0.201
Cauchy	$\mu = 0.014012$ $\gamma = 0.030398$	AIC= -605.47 BIC= -598.62	$kS = 0.09325$ p-value= 0.039	$CM = 0.37261$ p-value= 0.085	$AD = 3.5261$ p-value= 0.015
Logística	$\mu = 0.0078354$ $\gamma = 0.031010$	AIC= -665.68 BIC= -658.83	$KS = 0.0477$ p-value= 0.680	$CM = 0.1328$ p-value= 0.447	$AD = 0.9670$ p-value= 0.375
t-Student	$\mu = 0.0074178$ $\gamma = 0.048873$ $df = 8.292849$	AIC= -663.96 BIC= -653.68	$KS = 0.4421$ p-value < $2.2 \cdot 10^{-16}$	$CM = 16.3200$ p-value= $7.6 \cdot 10^{-9}$	$AD = 77.2820$ p-value= $2.6 \cdot 10^{-6}$

De acordo com os resultados obtidos, foi selecionada, em ambos os casos, a distribuição logística (tendo em conta o p-valor e os valores de AIC e BIC).

Devemos, agora, estimar os parâmetros das cópulas consideradas. Por forma a usar o método dos momentos, calculámos previamente as estimativas dos coeficientes de correlação de Pearson,  $\tau$  de Kendall e de Spearman, tendo sido conduzidos aos valores que se seguem.

Tabela 4.4 Estimativas dos coeficientes de correlação.

Pearson	$\tau$ de Kendall	Spearman
0.750463	0.568204	0.7422836

Verifica-se, pelo diagrama de dispersão (Figura 4.3), que os dados estão correlacionados positivamente e de forma linear.

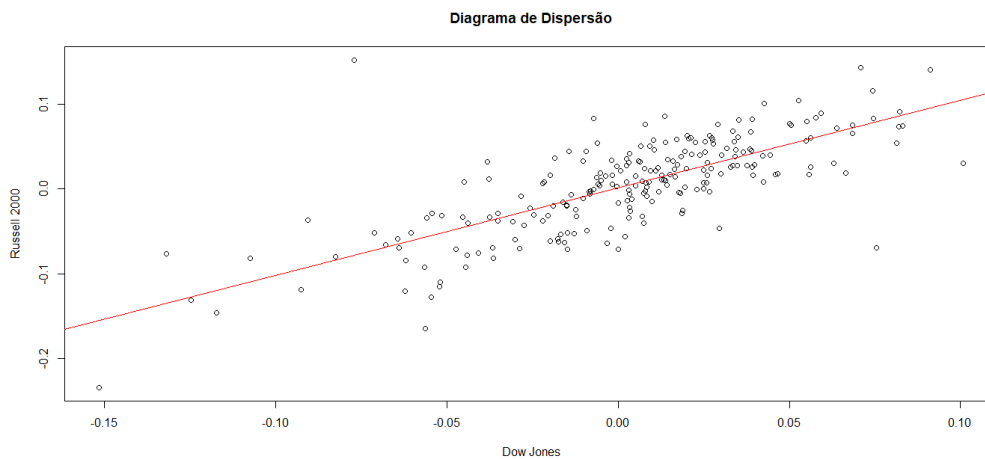


Fig. 4.3 Diagrama de Dispersão - DJxR2000

Na tabela seguidamente apresentada figuram os resultados relativos à estimação dos parâmetros das cópulas, quer através do MM, quer através do MPMV. Neste último caso, são também indicados os valores dos AIC e BIC.

Tabela 4.5 Estimativas dos parâmetros das cópulas.

Cópula	MM	MPMV	AIC	BIC
Frank	7.136935	7.134	-186.7344	-183.3095
Gumbel	2.315908	2.111	-171.5954	-168.1705
Clayton	2.631817	1.978	-185.8812	-182.4563
Normal	0.750463	0.744	-174.5037	-171.0787
t-Student	0.750463   df= 4	0.7737   df= 3.8963	-207.8054	-200.9555

Com base nos valores de AIC e BIC, fornecidos pelo MPMV, podemos concluir que as cópulas de Frank e t-Student são as que melhor se ajustam aos dados, sendo última a mais adequada. Portanto, para estimar o  $Var_\alpha$  e o  $ES_\alpha$ , trabalharemos com as distribuições logísticas anteriormente referidas e consideraremos as cópulas de Frank e t-Student agora ajustadas.

**Observação 4.3.1.** Notamos que, em alternativa aos códigos utilizados, a função *BiCopSelect*, da package *VineCopula*, permite selecionar a cópula que melhor se ajusta aos dados, a partir de uma vasta família de cópulas paramétricas.

Vejamos finalmente os resultados da estimação de tais medidas de risco, pelo MSMC, obtidos de acordo com a metodologia apresentada nos passos 4 e 5 da secção anterior. Foram fixados os níveis de confiança  $\alpha_1 = 0.9$ ,  $\alpha_2 = 0.99$  e  $\alpha_3 = 0.999$ , bem como os pesos  $w_1 = i/2$  e  $w_2 = (2 - i)/2$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Tabela 4.6 Valores do VaR - Cópula t-Student

$(w_1, w_2)$	MPMV			MM		
	0.9	0.99	0.999	0.9	0.99	0.999
(1, 0)	0.0428249	0.09582164	0.14673059	0.04296681	0.09580918	0.14630548
(1/2, 1/2)	0.04769469	0.10859352	0.16851131	0.04743463	0.10763328	0.16806308
(0, 1)	0.06021699	0.13434645	0.20707675	0.06027052	0.13455112	0.20695904

Tabela 4.7 Valores do VaR - Cópula de Frank

$(w_1, w_2)$	MPMV			MM		
	0.9	0.99	0.999	0.9	0.99	0.999
(1, 0)	0.0428089	0.09553449	0.14551646	0.04289001	0.09587445	0.14764356
(1/2, 1/2)	0.04957463	0.09721972	0.13482205	0.04952318	0.09716337	0.13578846
(0, 1)	0.06035104	0.13426298	0.2066745	0.06021513	0.13434933	0.20633013

Tabela 4.8 Valores do ES -Cópula t-Student

$(w_1, w_2)$	MPMV			MM		
	0.9	0.99	0.999	0.9	0.99	0.999
(1, 0)	0.06611331	0.1180042	0.1693504	0.06615511	0.117898	0.1686327
(1/2, 1/2)	0.07444821	0.1347112	0.1952518	0.07392062	0.133683	0.1928966
(0, 1)	0.09302488	0.1661595	0.2373473	0.09308506	0.1660192	0.236649

Tabela 4.9 Valores do ES - Cópula de Frank

Carteira	MPMV			MM		
	0.9	0.99	0.999	0.9	0.99	0.999
(1, 0)	0.06612112	0.1175013	0.1681843	0.06626481	0.1179106	0.1690563
(1/2, 1/2)	0.07101752	0.1135013	0.1500559	0.07116553	0.1140392	0.1506359
(0, 1)	0.09277153	0.1650426	0.236367	0.09286332	0.1657598	0.2373261

Exemplifiquemos o significado do valor de  $VaR_{0,99}$  e de  $ES_{0,99}$ , estimados com base na cópula t-Student, via MPMV, para uma carteira associada aos pesos  $(w_1, w_2) = (1/2, 1/2)$ .

Denotando por  $P_t$  o valor da carteira no mês  $t$ , a probabilidade de o investidor perder durante o próximo mês, no mínimo, um montante superior a  $(1 - \exp\{-0.10859352\})P_t$ , não excede 0.01. No caso de ocorrer uma perda superior a este valor, o seu valor esperado será de  $(1 - \exp\{-0.1347112\})P_t$ .



# Bibliografia

- [1] Alexander, C. (2009). *Market Risk Analysis: Volume IV: Value at Risk Models (v. 4)*. Wiley, 1 edition.
- [2] Ali, M. M., Mikhail, N., and Haq, M. (1978). A class of bivariate distributions including the bivariate logistic. *Journal of Multivariate Analysis*, 8(3):405–412.
- [3] Andersen, T. G., Bollerslev, T., Christoffersen, P. F., and Diebold, F. X. (2013). Financial risk measurement for financial risk management. In *Handbook of the Economics of Finance*, pages 1127–1220. Elsevier.
- [4] Arkady, S. and Alexander, K. (2017). *Introduction to Bayesian Estimation and Copula Models of Dependence*. Wiley.
- [5] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1997). Thinking coherently. *risk*. 10:68–71.
- [6] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9:203–228.
- [7] Bolancé, C., Bahraoui, Z., and Artís, M. (2014). Quantifying the risk using copulae with nonparametric marginals. *Insurance: Mathematics and Economics*, 58:46–56.
- [8] Braun, V. (2011). *Dynamic Copulas for Finance: An Application to Portfolio calculation*. Josef Eul Verlag GmbH.
- [9] Campbell, J. Y., Lo, A. W., and MacKinlay, A. C. (1996). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- [10] Cardoso, V. O. (2017). *Introdução à Teoria das cópulas*. Trabalho de Seminário em Estatística. Optimização e Matemática Financeira, DMUC.
- [11] Cherubini, U., Gobbi, F., and Mulinacci, S. (2016). *Convolution Copula Econometrics*. Springer-Briefs in Statistics. Springer International Publishing.
- [12] Cherubini, U., Luciano, E., and Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. The Wiley Finance Series. Wiley, 1 edition.
- [13] Cherubini, U., Mulinacci, S., Gobbi, F., and Romagnoli, S. (2011). *Dynamic Copula Methods in Finance (The Wiley Finance Series)*. The Wiley Finance Series. Wiley, 1 edition.
- [14] Choroś, B., Ibragimov, R., and Permiakova, E. (2010). Copula estimation. In Jaworski, P., Durante, F., Härdle, W. K., and Rychlik, T., editors, *Copula Theory and Its Applications*, pages 77–91, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- [15] Dall’Aglío, G. (1959). Sulla compatibilità delle funzioni di ripartizione doppia. *Itália*, 18:385–413.
- [16] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., and Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. John Wiley & Sons.

- [17] Dowd, K. (2002). *Measuring market risk*. Wiley.
- [18] Durante, F., Fernández-Sánchez, J., and Sempì, C. (2013). How to prove sklar's theorem. In Bustince, H., Fernandez, J., Mesiar, R., and Calvo, T., editors, *Aggregation Functions in Theory and in Practise*, pages 85–90, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- [19] Durante, F. and Sempì, C. (2014). *Principles of copula theory*. Chapman & Hall/CRC.
- [20] Embrechts, P. and Hofert, M. (2013). A note on generalized inverses. *Mathematical Methods of Operations Research*, 77(3):423–432.
- [21] Embrechts, P. and Hofert, M. (2014). Statistics and quantitative risk management for banking and insurance. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 1(1):493–514.
- [22] Embrechts, P., McNeil, A. J., and Straumann, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In Dempster, M. A. H., editor, *Risk Management*, pages 176–223. Cambridge University Press.
- [23] Ferón, R. (1956). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace à trois dimensions. *França*, 5:3–12.
- [24] Fernández-Sánchez, J. and Úbeda Flores, M. (2018). Proving sklar's theorem via zorn's lemma. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 26:81–85.
- [25] Franke, J., Härdle, W. K., and (auth.), C. M. H. (2008). *Statistics of Financial Markets: An Introduction*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2nd edition.
- [26] Fréchet, M. (1957). Les tableaux de corrélation et les programmes linéaires. *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute*, 25(1/3):23–40.
- [27] Fusai, G. and Roncoroni, A. (2008). *Implementing models in quantitative finance: methods and cases*. Springer Finance. Springer.
- [28] Genest, C. and MacKay, J. (1986). The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, 40.
- [29] Hofert, M., Kojadinovic, I., Machler, M., and Yan, J. (2018). *Elements of Copula Modeling with R*. Use R. Springer.
- [30] Härdle, W., Kleinow, T., and Stahl, G. (2002). *Applied quantitative finance*. Springer.
- [31] Jan-Frederik Mai, M. S. (2014). *Financial Engineering with Copulas Explained*. Financial Engineering Explained. Palgrave Macmillan.
- [32] Jan-Frederik Mai, M. S. (2017). *Simulating Copulas: Stochastic Models, Sampling Algorithms, and Applications*. Series in Quantitative Finance. World Scientific, 2nd edition.
- [33] Jaworski, P., Durante, F., Härdle, W. K., and Rychlik, T. (2010). *Copula Theory and Its Applications. Proceedings of the Workshop Held in Warsaw, 25-26 September 2009*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [34] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Monographs on Statistics and Applied Probability 73. Springer US.
- [35] Jorion, P. (2007). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3<sup>o</sup> edição. McGraw-Hill Education.
- [36] Longin, F. (2016). *Extreme Events in Finance: A Handbook of Extreme Value Theory and its Applications*. Wiley Handbooks in Financial Engineering and Econometrics. Wiley, 1 edition.



- [37] Maciej, J. C. and Ekkehard, K. (2014). *Portfolio Theory and Risk Management*. Mastering Mathematical Finance. Cambridge University Press, 1 edition.
- [38] Manner, Hans; Reznikova, O. (2012). A survey on time-varying copulas: Specification, simulations, and application. *Econometric Reviews*, 31.
- [39] McNeil, A. J., Rudiger, F., and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management - Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Series in Finance. Princeton University Press.
- [40] Móricz, F. (2002). Order of magnitude of double fourier coefficients of functions of bounded variation. *Analysis (Oldenbourg Wissenschaftsverlag)*, 22.
- [41] Nadarajah, S., Afuecheta, E., and Chan, S. (2017). A compendium of copulas. *Statistica [Online]. Web*, 77– n° 4:279–328.
- [42] Nelsen, R. B. (1999). *An Introduction to Copulas*. Lecture Notes in Statistics 139. Springer New York.
- [43] Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer series in statistics. Springer, 2nd ed edition.
- [44] Niculescu, C. and Persson, L.-E. (2010). *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*. CMS Books in Mathematics. Springer, 1st edition.
- [45] Oertel, F. (2015). An analysis of the rüschendorf transform - with a view towards sklar's theorem. *Dependence Modeling*, 3:113–125.
- [46] Patton, A. (2013). [*Handbook of Economic Forecasting*] Volume 2 || *Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series*.
- [47] Patton, A. J. (2009). *Copula-Based Models for Financial Time Series*, pages 767–785. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [48] Patton, A. J. (2012). A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 110:4–18.
- [49] Rogers, L. C. G. and Williams, D. (1994). *Diffusions, Markov processes, and martingales*, volume 1. 2nd ed edition.
- [50] Rüschendorf, L. (2009). On the distributional transform, sklar's theorem, and the empirical copula process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(11):3921–3927.
- [51] Rüschendorf, L. (2013). *Mathematical Risk Analysis. Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [52] Schmitz, V. (2003). Copulas and stochastic processes. *Tese de Doutorado, Universidade de Aachen*. Consultada em <https://d-nb.info/972691669/34> e acedida em 01/07/2019.
- [53] Schweizer, B. and Wolff, E. F. (1981). On nonparametric measures of dependence for random variables. *Ann. Statist.*, 9(4):879–885.
- [54] Shilov, G. E. (1996). *Elementary Real and Complex Analysis (Dover Books on Mathematics)*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, revised edition.
- [55] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 8:229–231.
- [56] Sklar, A. and Schweizer, B. (1974). Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables. *Studia Mathematica*, 52:43–52.

- [57] Ubeda-Flores, M. and Fernandez-Sanchez, J. (2017). *In Copula and dependence models with applications*. pp. 241-255. Springer.
- [58] van Rooij, W. H. S. (1982). *A Second Course on Real Functions*. Cambridge University Press, 1 edition.

## Anexo A

**Definição A.0.1.** ([20]) Para uma função crescente  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $T(-\infty) = \lim_{x \downarrow -\infty} T(x)$  e  $T(\infty) = \lim_{x \uparrow \infty} T(x)$ , a inversa generalizada  $T^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^1$  de  $T$  é definido por

$$T^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.1})$$

convencionando de que  $\inf \emptyset = \infty$ . Se  $T : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  é uma função de distribuição,  $T^{-1} : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  também se designa por função quantil.

**Lema A.0.1.** Seja  $T$  uma função nas condições da definição que satisfaz a definição A.0.1 e  $T^{-1}$  a sua inversa generalizada. Para  $x, y \in \mathbb{R}$ , tem-se:

- (1)  $T^{-1}(y) = -\infty$  (respetivamente  $T^{-1} = +\infty$ ) se e somente se  $T(x) \geq y$ , para todo  $x$  (respetivamente  $T(x) < y$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ );
- (2)  $T^{-1}$  é crescente; se  $T^{-1}(y) \in \mathbb{R}$ , então  $T^{-1}$  é contínua à esquerda em  $y$  e admite limite à direita em  $y$ ;
- (3)  $T^{-1}(T(x)) \leq x$ ; se  $T$  é estritamente crescente, então  $T^{-1}(T(x)) = x$ ;
- (4) se  $T$  contínua à direita, então  $T^{-1}(y) < +\infty \implies T(T^{-1}(y)) \geq y$ ; além disso, se  $y \in (\text{ran}T)^2 \cup \{\inf \text{ran}T, \sup \text{ran}T\}$ , então  $T(T^{-1}(y)) = y$ ; mais ainda, se  $y < \inf \text{ran}T$  (respetivamente  $y > \sup \text{ran}T$ ), então  $T(T^{-1}(y)) > y$  (respetivamente  $T(T^{-1}(y)) < y$ );
- (5)  $T(x) \geq y \implies x \geq T^{-1}(y)$ ; a implicação recíproca é válida se  $T$  é contínua à direita; além disso,  $T(x) > y \implies x \leq T^{-1}(y)$ ;
- (6)  $(T^{-1}(y-), T^{-1}(y+)) \subseteq \{x \in \mathbb{R} : T(x) = y\} \subseteq [T^{-1}(y-), T^{-1}(y+)]$ ;
- (7)  $T$  é contínua se e somente se  $T^{-1}$  é estritamente crescente em  $[\inf \text{ran}T, \sup \text{ran}T]$ ;  $T$  é estritamente crescente se e somente se  $T^{-1}$  é contínua em  $\text{ran}T$ ;
- (8) se  $T$  uma função de distribuição, então  $T(T^{-1}(u)-) \leq u \leq T(T^{-1}(u))$ ,  $u \in (0, 1)$ ;

**Lema A.0.2.** ([20],[45]<sup>3</sup>) Seja  $X$  uma variável aleatória real com função de distribuição  $F$ . Então;

- (1) se  $F$  é contínua, tem-se  $F(X) \sim \mathbb{U}[0, 1]$ ;

<sup>1</sup> $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

<sup>2</sup> $\text{ran}T$  denota o contradomínio de  $T$ .

<sup>3</sup>Para a prova de (3), pp 123 (Teorema 2.18).

(2) se  $U \sim \mathbb{U}[0, 1]$ ,  $F^{-1}(U)$  tem função de distribuição  $F$ ;

(3) se  $P(0 < F(X) < 1) = 1$ , tem-se  $X = F^{-1}(U)$ , q.c..

## Anexo B

**Definição B.0.1** ([9], pp. 9 e 11). Seja  $P_t$  o preço de um ativo no instante  $t$ . As rentabilidades simples (ou discreta) e continuamente composta deste ativo, do instante  $t - 1$  ao instante  $t$ , são definidas, respetivamente, por

$$RS_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad \text{e} \quad R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right). \quad (\text{B.1})$$

As rentabilidades simples e continuamente compostas relacionam-se, pois, através da igualdade

$$RS_t + 1 = e^{R_t}. \quad (\text{B.2})$$

Consideremos a carteira  $\pi$ , composta pelos ativos  $A_1$  e  $A_2$ , tal que cada ativo entra na carteira com as proporções  $w_1$  e  $w_2$ , respetivamente, com  $w_1 + w_2 = 1$ . Sejam  $RS_t^{A_1}$  e  $RS_t^{A_2}$  as rentabilidades simples de  $A_1$  e  $A_2$ , do instante  $t - 1$  ao instante  $t$ , respetivamente. Então, a rentabilidade simples da carteira  $\pi$ , do instante  $t - 1$  ao instante  $t$ , é dada por (cf. [9], pp. 11)

$$RS_t^\pi = w_1 RS_t^{A_1} + w_2 RS_t^{A_2}. \quad (\text{B.3})$$

Consequentemente, a rentabilidade continuamente composta da carteira,  $R_t^\pi$ , do instante  $t - 1$  ao instante  $t$ , pode ser escrita à custa das rentabilidades continuamente compostas de  $A_1$  e  $A_2$ , do seguinte modo:

$$1 + RS_t^\pi = w_1(1 + RS_t^{A_1}) + w_2(1 + RS_t^{A_2}) \implies R_t^\pi = \ln(w_1 e^{R_t^{A_1}} + w_2 e^{R_t^{A_2}}). \quad (\text{B.4})$$

Além disso, a perda da carteira, do instante  $t - 1$  ao instante  $t$ , é calculada através da expressão

$$P_{t-1} - P_t = P_{t-1} - e^{R_t} P_{t-1} = (1 - e^{R_t}) P_{t-1}.$$



# Anexo C

## Códigos do Software R

```
# -----  
# -----1- DOWNLOAD DAS PACKAGES  
# -----  
  
library("PerformanceAnalytics")  
library("copula")  
library("zoo")  
library("fCopulae")  
library("copBasic")  
library("QRM")  
library("MASS")  
library("moments")  
library("gofest")  
library("SuppDists")  
library("actuar")  
library("vcd")  
library("vsgofest")  
  
# -----  
# -----2- LEITURA DE DADOS  
# -----  
  
DJR2000_log<-read.table("DRm.csv",header=T,sep=";")  
dados<-cbind(DJR2000_log[,1:2])  
dados<-as.matrix(dados)  
  
# -----  
# -----3- MEDIDAS DESCRITIVAS DAS SÉRIES  
# -----  
  
summary(dados)  
skewness(dados[,1])  
skewness(dados[,2])  
kurtosis(dados[,1])  
kurtosis(dados[,2])  
sd(dados[,1])  
sd(dados[,2])  
var(dados[,1])  
var(dados[,2])  
  
# -----  
# -----4- HISTOGRAMA, DENSIDADE EMPÍRICA E DIAGRAMA DE DISPERSÃO
```

```
# -----  
# --Dow Jones--  
hist(dados[,1],xlab="Rentabilidade - Dow Jones",  
ylab="Densidade Empírica",main="",freq=F,nclass.scott)  
lines(density(dados[,1]),lw=2,col="black")  
# --Russell 2000--  
hist(dados[,2],xlab="Rentabilidade - Russell 2000",  
ylab="Densidade Empírica",main="",freq=F,nclass.scott)  
lines(density(dados[,2]),lw=2,col="black")  
# -----DIAGRAMA DE DISPERSÃO-----  
plot(dados[,1], dados[,2], main="Diagrama de Dispersão",  
xlab="Dow Jones", ylab="Russell 2000")  
abline(lm(dados[,2]~dados[,1]), col="red")  
# -----  
# -----5- MEDIDAS DE ASSOCIAÇÃO  
# -----  
# -- COEF. CORRELAÇÃO DE PEARSON  
p<-cor(dados)[1,2]  
p  
# -- COEF. TAU DE KENDALL  
tau<-cor(dados,method="kendall")[1,2]  
tau  
# -- COEF. RO DE SPEARMAN  
ro<-cor(dados,method="spearman")[1,2]  
ro  
# -----  
# -----6- AJUSTAMENTO DAS DISTRIBUIÇÕES MARGINAIS  
# -----  
## ----- Distribuição Normal -----  
# -- Dow Jones  
dist_gauss1<-fitdist(dados[,1],"norm")  
summary(dist_gauss1)  
# ---Kolmogorov-Smirnov test  
ks.test(dados[,1],"pnorm",mean=0.003335493,sd=0.040786058)  
# ---Cramer-von Mises test  
cvm.test(dados[,1],"pnorm",mean=0.003335493,sd=0.040786058)  
# ---Anderson-Darling test  
ad.test(dados[,1],"pnorm",mean=0.003335493,sd=0.040786058)
```



---

```
# -- Russell200
dist_gauss2<-fitdist(dados[,2],"norm")
summary(dist_gauss2)
# ---Kolmogorov-Smirnov test
ks.test(dados[,2],"pnorm",mean=0.004806195,sd=0.056087487)
# ---Cramer-von Mises test
cvm.test(dados[,2],"pnorm",mean=0.004806195,sd=0.056087487)
# ---Anderson-Darling test
ad.test(dados[,2],"pnorm",mean=0.004806195,sd=0.056087487)
# - - - - - Distribuição t-Student - - - - -
## -- Dow Jones
dist_t1<-fitdistr(dados[,1],"t")
dist_t1
dist_t1$loglik
AIC(dist_t1)
BIC(dist_t1)
# ---Kolmogorov-Smirnov test
ks.test(dados[,1],"pt",df=8.2703905422)
# ---Cramer-von Mises test
cvm.test(dados[,1],"pt",df=8.2703905422)
# ---Anderson-Darling test
ad.test(dados[,1],"pt",df=8.2703905422)
## -- Russell200
dist_t2<-fitdistr(dados[,2],"t")
dist_t2
dist_t2$loglik
AIC(dist_t2)
BIC(dist_t2)
# ---Kolmogorov-Smirnov test
ks.test(dados[,2],"pt",df=8.292849251)
# ---Cramer-von Mises test
cvm.test(dados[,2],"pt",df=8.292849251)
# ---Anderson-Darling test
ad.test(dados[,2],"pt",df=8.292849251)
```

```
# ---- Distribuição Cauchy ----
## --Dow Jones
dist_c1<-fitdist(dados[,1],"cauchy")
summary(dist_c1)
# --Kolmogorov-Smirnov test ks.test(dados[,1],"pcauchy",location=0.008246093,scale=0.020457953)
# --Cramer-von Mises test
cvm.test(dados[,1],"pcauchy",location=0.008246093,scale=0.020457953)
# --Anderson-Darling test
ad.test(dados[,1],"pcauchy",location=0.008246093,scale=0.020457953)
## --Russell200
dist_c2<-fitdist(dados[,2],"cauchy")
summary(dist_c2)
# --Kolmogorov-Smirnov test
ks.test(dados[,2],"pcauchy",location=0.01401198,scale=0.03039748)
# --Cramer-von Mises test
cvm.test(dados[,2],"pcauchy",location=0.01401198,scale=0.03039748)
# --Anderson-Darling test
ad.test(dados[,2],"pcauchy",location=0.01401198,scale=0.03039748)
# ---- Distribuição logística ----
## --Dow Jones
dist_l1<-fitdist(dados[,1],"logis")
summary(dist_l1)
# --Kolmogorov-Smirnov test
ks.test(dados[,1],"plogis",location=0.005567125 ,scale=0.022066461)
# --Cramer-von Mises test
cvm.test(dados[,1],"plogis",location=0.005567125 ,scale=0.022066461)
# --Anderson-Darling test
ad.test(dados[,1],"plogis",location=0.005567125 ,scale=0.022066461)
## --Russell200
dist_l2<-fitdist(dados[,2],"logis")
summary(dist_l2)
# --Kolmogorov-Smirnov test
ks.test(dados[,2],"plogis",location=0.007835442,scale=0.031010440)
# --Cramer-von Mises test
```

---

```

cvm.test(dados[,2],"plogis",location=0.007835442,scale=0.031010440)
# --- Anderson-Darling test
ad.test(dados[,2],"plogis",location=0.007835442,scale=0.031010440)
# ----- QQ-PLOT -----
par(mfrow=c(1,2))
legenda<-c("Normal","Cauchy","Logística")
legenda2<-c("Normal","Logística")
qqcomp(list(dist_gauss1,dist_c1,dist_11),legendtext=legenda,
xlim=c(-0.5,0.5),xlab="Dow Jones")
qqcomp(list(dist_gauss2,dist_12),legendtext=legenda2,
xlim=c(-0.5,0.5),xlab="Russell 2000")
# -----
# ----- -7- GERAR PSEUDO OBSERVAÇÕES
# -----
U<-pobs(dados)
# -----
# ----- -8- ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DAS CÓPULAS
# -----
# ----- Via - Método dos Momentos
# - CÓPULA DE FRÉCHET
FRECHETcop(rho = ro, tau = tau)
# - CÓPULA DE FRANK
frank_a<-iTau(francCopula(dim=2),tau=tau)
frank_a
# - CÓPULA DE GUMBEL
gumbel_a<-iTau(gumbelCopula(dim=2),tau=tau)
gumbel_a
# - CÓPULA DE CLAYTON
clayton_a<-iTau(claytonCopula(dim=2),tau=tau)
clayton_a
# - CÓPULA NORMAL
normal_ccl<-normalCopula(p,dim=2)
normal_ccl
# - CÓPULA t-STUDENT
t_ccl_df<-tCopula(p,dim=2,df.fixed=F)
t_ccl_df
# ----- Via - Método PMV
# - CÓPULA DE FRANK
frank_est<-fitCopula(francCopula(dim=2),U,method="mpl")
frank_est
logLik(franc_est)

```

```
AIC(frnk_est)
BIC(frnk_est)
# -- CÓPULA DE GUMBEL

gumbel_est<-fitCopula(gumbelCopula(dim=2),U,method="mpl")
gumbel_est
logLik(gumbel_est)
AIC(gumbel_est)
BIC(gumbel_est)

# -- CÓPULA DE CLAYTON

clayton_est<-fitCopula(claytonCopula(dim=2),U,method="mpl")
clayton_est
logLik(clayton_est)
AIC(clayton_est)
BIC(clayton_est)

# -- CÓPULA NORMAL

normal_est<-fitCopula(normalCopula(dim=2),U,method="mpl")
normal_est
logLik(normal_est)
AIC(normal_est)
BIC(normal_est)

# -- CÓPULA t-STUDENT

t_est<-fitCopula(tCopula(dim=2,df.fixed=F),U,method="mpl",
estimate.variance=T)
t_est
logLik(t_est)
AIC(t_est)
BIC(t_est)

# -----
# ----- -9- SIMULAÇÃO PELO MÉTODO DE MONTE CARLO
# -----

set.seed(100)
r<-1000000
a<-c(0.9,0.99,0.999)

# -----
# ----- -9.1 t-Student
# -----

# -- MPMV -----

tcop_ajMPMV<-tCopula(0.7737,dim=2,df=3.8963)
S_tcopMPMV<-rCopula(r,tcop_ajMPMV)
S.tco1MPMV<-qlogis(S_tcopMPMV[,1],location=0.005567125,scale=0.022066461)
S.tco2MPMV<-qlogis(S_tcopMPMV[,2],location=0.007835442,scale=0.031010440)
SIMUL_t_MPMV<-cbind(exp(S.tco1MPMV),exp(S.tco2MPMV))
```

```

MSMC_t_MPMV_P2_0<- -log(SIMUL_t_MPMV%*%t(cbind(2/2,0/2)))
MSMC_t_MPMV_P1_1<- -log(SIMUL_t_MPMV%*%t(cbind(1/2,1/2)))
MSMC_t_MPMV_P0_2<- -log(SIMUL_t_MPMV%*%t(cbind(0/2,2/2)))

# --MM-----

tcop_ajMM<-tCopula(0.750463,dim=2,df=4)
S_tcopMM<-rCopula(r,tcop_ajMM)
S.tco1MM<-qlogis(S_tcopMM[,1],location=0.005567125,scale=0.022066461)
S.tco2MM<-qlogis(S_tcopMM[,2],location=0.007835442,scale=0.031010440)
SIMUL_t_MM<-cbind(exp(S.tco1MM),exp(S.tco2MM))
MSMC_t_MM_P2_0<- -log(SIMUL_t_MM%*%t(cbind(2/2,0/2)))
MSMC_t_MM_P1_1<- -log(SIMUL_t_MM%*%t(cbind(1/2,1/2)))
MSMC_t_MM_P0_2<- -log(SIMUL_t_MM%*%t(cbind(0/2,2/2)))

#-----
#----- 9.2. Frank
#-----

# --MPMV-----

fcop_ajMPMV<-frankCopula(7.134,dim=2)
S_fcopMPMV<-rCopula(r,fcop_ajMPMV)
S.fco1MPMV<-qlogis(S_fcopMPMV[,1],location=0.005567125,scale=0.022066461)
S.fco2MPMV<-qlogis(S_fcopMPMV[,2],location=0.007835442,scale=0.031010440)
SIMUL_f_MPMV<-cbind(exp(S.fco1MPMV),exp(S.fco2MPMV))
MSMC_f_MPMV_P2_0<- -log(SIMUL_f_MPMV%*%t(cbind(2/2,0/2)))
MSMC_f_MPMV_P1_1<- -log(SIMUL_f_MPMV%*%t(cbind(1/2,1/2)))
MSMC_f_MPMV_P0_2<- -log(SIMUL_f_MPMV%*%t(cbind(0/2,2/2)))

# --MM-----

fcop_ajMM<-frankCopula(7.136935,dim=2)
S_fcopMM<-rCopula(r,fcop_ajMM)
S.fco1MM<-qlogis(S_fcopMM[,1],location=0.005567125,scale=0.022066461)
S.fco2MM<-qlogis(S_fcopMM[,2],location=0.007835442,scale=0.031010440)
SIMUL_f_MM<-cbind(exp(S.fco1MM),exp(S.fco2MM))
MSMC_f_MM_P2_0<- -log(SIMUL_f_MM%*%t(cbind(2/2,0/2)))
MSMC_f_MM_P1_1<- -log(SIMUL_f_MM%*%t(cbind(1/2,1/2)))
MSMC_f_MM_P0_2<- -log(SIMUL_f_MM%*%t(cbind(0/2,2/2)))

#-----
#----- 10- CALCULAR O VaR E O ES
#-----

#----- t-Student- MPMV

#_____ VaR e Proporções(2/2,0/2)_____
quantile(MSMC_t_MPMV_P2_0,a)

#_____ VaR e Proporções(1/2,1/2)_____
quantile(MSMC_t_MPMV_P1_1,a)

#_____ VaR e Proporções(0/2,2/2)_____
quantile(MSMC_t_MPMV_P0_2,a)

```

```

#_____ ES Proporções (2/2,0/2)_____
mean(MSMC_t_MPMV_P2_0[MSMC_t_MPMV_P2_0 > quantile(MSMC_t_MPMV_P2_0,a[1])])
mean(MSMC_t_MPMV_P2_0[MSMC_t_MPMV_P2_0 > quantile(MSMC_t_MPMV_P2_0,a[2])])
mean(MSMC_t_MPMV_P2_0[MSMC_t_MPMV_P2_0 > quantile(MSMC_t_MPMV_P2_0,a[3])])

#_____ ES Proporções(1/2,1/2)_____
mean(MSMC_t_MPMV_P1_1[MSMC_t_MPMV_P1_1 > quantile(MSMC_t_MPMV_P1_1,a[1])])
mean(MSMC_t_MPMV_P1_1[MSMC_t_MPMV_P1_1 > quantile(MSMC_t_MPMV_P1_1,a[2])])
mean(MSMC_t_MPMV_P1_1[MSMC_t_MPMV_P1_1 > quantile(MSMC_t_MPMV_P1_1,a[3])])

#_____ ES Proporções(0/2,2/2)_____
mean(MSMC_t_MPMV_P0_2[MSMC_t_MPMV_P0_2 > quantile(MSMC_t_MPMV_P0_2,a[1])])
mean(MSMC_t_MPMV_P0_2[MSMC_t_MPMV_P0_2 > quantile(MSMC_t_MPMV_P0_2,a[2])])
mean(MSMC_t_MPMV_P0_2[MSMC_t_MPMV_P0_2 > quantile(MSMC_t_MPMV_P0_2,a[3])])

#-----t-Student- MM

#_____ VaR e Proporções(2/2,0/2)_____
quantile(MSMC_t_MM_P2_0,a)

#_____ VaR e Proporções(1/2,1/2)_____
quantile(MSMC_t_MM_P1_1,a)

#_____ VaR e Proporções(0/2,2/2)_____
quantile(MSMC_t_MM_P0_2,a)

#_____ ES Proporções (2/2,0/2)_____
mean(MSMC_t_MM_P2_0[MSMC_t_MM_P2_0 > quantile(MSMC_t_MM_P2_0,a[1])])
mean(MSMC_t_MM_P2_0[MSMC_t_MM_P2_0 > quantile(MSMC_t_MM_P2_0,a[2])])
mean(MSMC_t_MM_P2_0[MSMC_t_MM_P2_0 > quantile(MSMC_t_MM_P2_0,a[3])])

#_____ ES Proporções(1/2,1/2)_____
mean(MSMC_t_MM_P1_1[MSMC_t_MM_P1_1 > quantile(MSMC_t_MM_P1_1,a[1])])
mean(MSMC_t_MM_P1_1[MSMC_t_MM_P1_1 > quantile(MSMC_t_MM_P1_1,a[2])])
mean(MSMC_t_MM_P1_1[MSMC_t_MM_P1_1 > quantile(MSMC_t_MM_P1_1,a[3])])

#_____ ES Proporções(0/2,2/2)_____
mean(MSMC_t_MM_P0_2[MSMC_t_MM_P0_2 > quantile(MSMC_t_MM_P0_2,a[1])])
mean(MSMC_t_MM_P0_2[MSMC_t_MM_P0_2 > quantile(MSMC_t_MM_P0_2,a[2])])
mean(MSMC_t_MM_P0_2[MSMC_t_MM_P0_2 > quantile(MSMC_t_MM_P0_2,a[3])])

#----- Frank- MPMV

#_____ VaR e Proporções(2/2,0/2)_____
quantile(MSMC_f_MPMV_P2_0,a)

#_____ VaR e Proporções(1/2,1/2)_____
quantile(MSMC_f_MPMV_P1_1,a)

#_____ VaR e Proporções(0/2,2/2)_____
quantile(MSMC_f_MPMV_P0_2,a)

#_____ ES Proporções (2/2,0/2)_____
mean(MSMC_f_MPMV_P2_0[MSMC_f_MPMV_P2_0 > quantile(MSMC_f_MPMV_P2_0,a[1])])
mean(MSMC_f_MPMV_P2_0[MSMC_f_MPMV_P2_0 > quantile(MSMC_f_MPMV_P2_0,a[2])])
mean(MSMC_f_MPMV_P2_0[MSMC_f_MPMV_P2_0 > quantile(MSMC_f_MPMV_P2_0,a[3])])

```

```
#_____ ES Proporções(1/2,1/2) _____
mean(MSMC_f_MPMV_P1_1[MSMC_f_MPMV_P1_1 > quantile(MSMC_f_MPMV_P1_1,a[1])])
mean(MSMC_f_MPMV_P1_1[MSMC_f_MPMV_P1_1 > quantile(MSMC_f_MPMV_P1_1,a[2])])
mean(MSMC_f_MPMV_P1_1[MSMC_f_MPMV_P1_1 > quantile(MSMC_f_MPMV_P1_1,a[3])])

#_____ ES Proporções(0/2,2/2) _____
mean(MSMC_f_MPMV_P0_2[MSMC_f_MPMV_P0_2 > quantile(MSMC_f_MPMV_P0_2,a[1])])
mean(MSMC_f_MPMV_P0_2[MSMC_f_MPMV_P0_2 > quantile(MSMC_f_MPMV_P0_2,a[2])])
mean(MSMC_f_MPMV_P0_2[MSMC_f_MPMV_P0_2 > quantile(MSMC_f_MPMV_P0_2,a[3])])

#----- Frank- MM

#_____ VaR e Proporções(2/2,0/2) _____
quantile(MSMC_f_MM_P2_0,a)

#_____ VaR e Proporções(1/2,1/2) _____
quantile(MSMC_f_MM_P1_1,a)

#_____ VaR e Proporções(0/2,2/2) _____
quantile(MSMC_f_MM_P0_2,a)

#_____ ES Proporções (2/2,0/2) _____
mean(MSMC_f_MM_P2_0[MSMC_f_MM_P2_0 > quantile(MSMC_f_MM_P2_0,a[1])])
mean(MSMC_f_MM_P2_0[MSMC_f_MM_P2_0 > quantile(MSMC_f_MM_P2_0,a[2])])
mean(MSMC_f_MM_P2_0[MSMC_f_MM_P2_0 > quantile(MSMC_f_MM_P2_0,a[3])])

#_____ ES Proporções(1/2,1/2) _____
mean(MSMC_f_MM_P1_1[MSMC_f_MM_P1_1 > quantile(MSMC_f_MM_P1_1,a[1])])
mean(MSMC_f_MM_P1_1[MSMC_f_MM_P1_1 > quantile(MSMC_f_MM_P1_1,a[2])])
mean(MSMC_f_MM_P1_1[MSMC_f_MM_P1_1 > quantile(MSMC_f_MM_P1_1,a[3])])

#_____ ES Proporções(0/2,2/2) _____
mean(MSMC_f_MM_P0_2[MSMC_f_MM_P0_2 > quantile(MSMC_f_MM_P0_2,a[1])])
mean(MSMC_f_MM_P0_2[MSMC_f_MM_P0_2 > quantile(MSMC_f_MM_P0_2,a[2])])
mean(MSMC_f_MM_P0_2[MSMC_f_MM_P0_2 > quantile(MSMC_f_MM_P0_2,a[3])])
```