



ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS POR INTERMÉDIO DE MARCHA  
NO TEMPO COM PARAMETRIZAÇÃO LOCAL ASSOCIADA AO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS

Tales Vieira Sofiste

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: Webe João Mansur

Delfim Soares Júnior

Rio de Janeiro

Agosto de 2018

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS POR INTERMÉDIO DE MARCHA  
NO TEMPO COM PARAMETRIZAÇÃO LOCAL ASSOCIADA AO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS

Tales Vieira Sofiste

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA  
CIVIL.

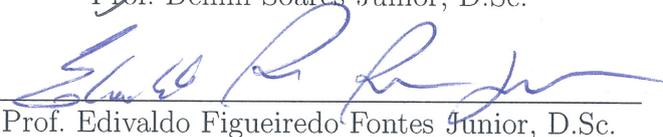
Examinada por:



Prof. Webe João Mansur, Ph.D.



Prof. Delfim Soares Júnior, D.Sc.



Prof. Edivaldo Figueiredo Fontes Júnior, D.Sc.



Prof. Franciane Conceição Peters, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

AGOSTO DE 2018

Sofiste, Tales Vieira

Análise dinâmica de estruturas por intermédio de marcha no tempo com parametrização local associada ao método dos elementos finitos/Tales Vieira Sofiste. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XII, 92 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Webe João Mansur

Delfim Soares Júnior

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 87 – 92.

1. Marcha no tempo. 2. Dinâmica de estruturas. 3. Método dos Elementos Finitos. I. Mansur, Webe João *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Juarez e Vania pelo amor, carinho, ajuda nos momentos difíceis e por sempre terem acreditado e me incentivado ao longo destes anos. Todas as conquistas não seriam possíveis sem vocês.

Aos meus irmãos, Ana Terra, Gabriel e Breno, pela amizade e que, mesmo de longe, estiveram presentes nesta conquista.

À Bruna, pelo amor, companheirismo e por estar ao meu lado nestes anos difíceis. Obrigado por fazer parte desta conquista e sempre me incentivar a ser uma pessoa melhor.

Aos meus orientadores, professores Webe e Delfim pelo grande auxílio, disponibilidade e por tornarem este trabalho possível.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS POR INTERMÉDIO DE MARCHA  
NO TEMPO COM PARAMETRIZAÇÃO LOCAL ASSOCIADA AO MÉTODO  
DOS ELEMENTOS FINITOS

Tales Vieira Sofiste

Agosto/2018

Orientadores: Webe João Mansur

Delfim Soares Júnior

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho descreve um novo método de marcha no tempo para análise dinâmica de estruturas. Nesta nova abordagem, os parâmetros de integração são definidos em nível local e diferentes valores podem ser atribuídos para cada elemento da discretização espacial do modelo. Além disso, estes parâmetros são computados de acordo com as propriedades do elemento e o usuário pode escolher em quais elementos o amortecimento numérico será introduzido. Uma vez que os parâmetros de integração são definidos localmente em função das propriedades do elemento, a nova técnica de marcha no tempo se adapta ao modelo, proporcionando elevada precisão. O método possui precisão de segunda ordem, tem estabilidade garantida, não necessita de procedimentos especiais de inicialização e possui dissipação de frequências altas controlável pelo usuário.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A TIME MARCHING PROCEDURE FOR STRUCTURAL DYNAMICS  
ANALYSIS WITH LOCAL PARAMETERIZATION ASSOCIATED TO THE  
FINITE ELEMENT METHOD

Tales Vieira Sofiste

August/2018

Advisors: Webe João Mansur

Delfim Soares Júnior

Department: Civil Engineering

The present work describes a new time marching procedure for structural dynamics analyses. In this novel technique, time integration parameters are locally defined and different values may be attributed to each structural element of the model. In addition, these parameters are evaluated according to the properties of the elements, and the user may select in which structural elements numerical dissipation will be introduced. Since the integration parameters are locally defined as function of the structural element itself, the time marching technique adapts according to the model, providing enhanced accuracy. The method is second order accurate, it has guaranteed stability, it is truly self-starting and it allows highly controllable algorithm dissipation in the higher modes.

# Sumário

|  |            |
|--|------------|
| <b>Lista de Figuras</b>                          | <b>ix</b>  |
| <b>Lista de Tabelas</b>                          | <b>xii</b> |
| <b>1 Introdução</b>                              | <b>1</b>   |
| 1.1 Considerações iniciais . . . . .             | 1          |
| 1.2 Breve revisão bibliográfica . . . . .        | 3          |
| 1.3 Objetivo e organização do trabalho . . . . . | 6          |
| <b>2 Formulação da dinâmica estrutural</b>       | <b>7</b>   |
| 2.1 Equação de movimento . . . . .               | 7          |
| 2.1.1 O princípio de D’alembert . . . . .        | 7          |
| 2.1.2 Sistema dinâmico elementar . . . . .       | 8          |
| 2.2 Discretização espacial . . . . .             | 10         |
| 2.2.1 Matriz de rigidez . . . . .                | 10         |
| 2.2.2 Matriz de massa . . . . .                  | 13         |
| <b>3 Integração direta no domínio do tempo</b>   | <b>17</b>  |
| 3.1 Método de Newmark . . . . .                  | 18         |
| 3.2 Método de Bathe . . . . .                    | 19         |
| 3.3 Método de SOARES JR [10] . . . . .           | 22         |
| 3.4 Método de SOARES JR [15] . . . . .           | 24         |
| <b>4 Metodologia proposta</b>                    | <b>28</b>  |
| 4.1 Formulação da nova metodologia . . . . .     | 28         |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.2      | Propriedades da nova metodologia . . . . . | 32        |
| 4.2.1    | Convergência . . . . .                     | 33        |
| 4.2.2    | Estabilidade . . . . .                     | 35        |
| 4.2.3    | Acurácia . . . . .                         | 39        |
| <b>5</b> | <b>Resultados e Discussões</b>             | <b>43</b> |
| 5.1      | Sistema massa-mola . . . . .               | 43        |
| 5.2      | Barra engastada homogênea . . . . .        | 51        |
| 5.3      | Barra engastada heterogênea . . . . .      | 59        |
| 5.4      | Viga biapoiada . . . . .                   | 68        |
| 5.5      | Pórtico plano . . . . .                    | 76        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões</b>                          | <b>85</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>          | <b>87</b> |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Sistema dinâmico elementar. . . . .   | 8  |
| 2.2 | Equilíbrio de um sistema dinâmico elementar. . . . .  | 9  |
| 2.3 | Elemento de barra com dois graus de liberdade. . . . .  | 11 |
| 2.4 | Elemento de viga com quatro graus de liberdade. . . . .   | 12 |
| 4.1 | Regiões de estabilidade do método e comportamento do raio espectral no plano $\gamma_e - \alpha_e$ . Adaptado de [10]. . . . .  | 37 |
| 4.2 | Raio espectral para $\Omega_e = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5$ e $3,0$ . (a) $a^e = 0,00$ ; (b) $a^e = 0,01$ ; (c) $a^e = 0,10$ e (d) $a^e = 1,00$ . . . . .  | 38 |
| 4.3 | Alongamento de período para $\omega_e^{max}/\omega = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25$ e $1,50$ . (a) $a^e = 0,00$ ; (b) $a^e = 0,01$ ; (c) $a^e = 0,10$ e (d) $a^e = 1,00$ . Linha tracejada corresponde à Regra Trapezoidal e linha pontilhada corresponde ao método das Diferenças Centrais. . . . . | 40 |
| 4.4 | Decaimento de amplitude para $\omega_e^{max}/\omega = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25$ e $1,50$ . (a) $a^e = 0,00$ ; (b) $a^e = 0,01$ ; (c) $a^e = 0,10$ e (d) $a^e = 1,00$ . . . . .  | 41 |
| 4.5 | Fator de amplitude para $\omega_e^{max}/\omega = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25$ e $1,50$ . (a) $a^e = 0,00$ ; (b) $a^e = 0,01$ ; (c) $a^e = 0,10$ e (d) $a^e = 1,00$ . . . . .   | 42 |
| 5.1 | Sistema massa-mola com três graus de liberdade. . . . .   | 43 |
| 5.2 | Deslocamento do nó 2 de 0 a 100s. . . . .   | 46 |
| 5.3 | Deslocamento do nó 2: (a) de 0 a 5s e (b) de 95 a 100s. . . . .   | 47 |
| 5.4 | Velocidade do nó 2 de 0 a 100s. . . . .   | 47 |
| 5.5 | Velocidade do nó 2: (a) de 0 a 8s e (b) de 90 a 100s. . . . .   | 48 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 5.6  | Deslocamento do nó 3 de 0 a 100s. . . . .  | 48 |
| 5.7  | Deslocamento do nó 3: (a) de 0 a 10s e (b) de 80 a 100s. . . . .                               | 49 |
| 5.8  | Velocidade do nó 3 de 0 a 100s. . . . .  | 49 |
| 5.9  | Velocidade do nó 3: (a) de 0 a 10s e (b) de 85 a 100s. . . . .                                 | 50 |
| 5.10 | Barra engastada e livre submetida a uma carga unitária. . . . .                                | 51 |
| 5.11 | Resposta analítica para o deslocamento horizontal em todos os nós. . . . .                     | 52 |
| 5.12 | Deslocamento horizontal do nó 26 - primeiro pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 55 |
| 5.13 | Deslocamento horizontal do nó 26 - primeiro pico ( $\Delta t = 2,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 55 |
| 5.14 | Deslocamento horizontal do nó 26 - primeiro pico ( $\Delta t = 4,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 56 |
| 5.15 | Deslocamento horizontal do nó 26 - último pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . .   | 56 |
| 5.16 | Deslocamento horizontal do nó 26 - último pico ( $\Delta t = 2,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . .   | 57 |
| 5.17 | Deslocamento horizontal do nó 26 - último pico ( $\Delta t = 4,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . .   | 57 |
| 5.18 | Erro relativo para o deslocamento horizontal de todos os nós. . . . .                          | 58 |
| 5.19 | Barra heterogênea engastada e livre submetida a uma carga unitária. . . . .                    | 59 |
| 5.20 | Deslocamento horizontal do nó 76 - primeiro pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 62 |
| 5.21 | Deslocamento horizontal do nó 76 - primeiro pico ( $\Delta t = 2,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 62 |
| 5.22 | Deslocamento horizontal do nó 76 - primeiro pico ( $\Delta t = 4,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 63 |
| 5.23 | Deslocamento horizontal do nó 76 - último pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . .   | 63 |
| 5.24 | Deslocamento horizontal do nó 76 - último pico ( $\Delta t = 2,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . .   | 64 |
| 5.25 | Deslocamento horizontal do nó 76 - último pico ( $\Delta t = 4,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . .   | 64 |
| 5.26 | Erro relativo para o deslocamento horizontal do nó 76. . . . .                                 | 65 |
| 5.27 | Deslocamento horizontal do nó 51 - primeiro pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 66 |
| 5.28 | Deslocamento horizontal do nó 51 - último pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . .   | 67 |
| 5.29 | Deslocamento horizontal do nó 76 - primeiro pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 67 |
| 5.30 | Deslocamento horizontal do nó 76 - último pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ). . . . .   | 68 |
| 5.31 | Viga biapoiada submetida a uma carga variável no meio do vão. . . . .                          | 68 |
| 5.32 | Resposta analítica para o deslocamento vertical em todos os nós. . . . .                       | 69 |
| 5.33 | Deslocamento do nó 26 ( $\Delta t = 0,25 \times 10^{-2}s$ ). . . . .                           | 73 |
| 5.34 | Deslocamento do nó 26 ( $\Delta t = 0,50 \times 10^{-2}s$ ). . . . .                           | 73 |
| 5.35 | Deslocamento do nó 26 ( $\Delta t = 1,00 \times 10^{-2}s$ ). . . . .                           | 74 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 5.36 | Deslocamento do nó 26 ( $\Delta t = 2,00 \times 10^{-2}s$ ). . . . .             | 74 |
| 5.37 | Erro relativo para o deslocamento vertical de todos os nós. . . . .              | 75 |
| 5.38 | Pórtico plano não homogêneo submetido a uma força vertical. . . . .              | 76 |
| 5.39 | Deslocamento horizontal do nó 51 - Resposta de referência. . . . .               | 77 |
| 5.40 | Deslocamento horizontal do nó 101 - Resposta de referência. . . . .              | 78 |
| 5.41 | Deslocamento vertical do nó 76 - Resposta de referência. . . . .                 | 78 |
| 5.42 | Deslocamento horizontal do nó 51 ( $\Delta t = 1,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . .  | 80 |
| 5.43 | Deslocamento horizontal do nó 51 ( $\Delta t = 2,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . .  | 81 |
| 5.44 | Deslocamento horizontal do nó 51 ( $\Delta t = 4,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . .  | 81 |
| 5.45 | Deslocamento horizontal do nó 101 ( $\Delta t = 1,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 82 |
| 5.46 | Deslocamento horizontal do nó 101 ( $\Delta t = 2,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 82 |
| 5.47 | Deslocamento horizontal do nó 101 ( $\Delta t = 4,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . . | 83 |
| 5.48 | Deslocamento vertical do nó 76 ( $\Delta t = 1,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . .    | 83 |
| 5.49 | Deslocamento vertical do nó 76 ( $\Delta t = 2,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . .    | 84 |
| 5.50 | Deslocamento vertical do nó 76 ( $\Delta t = 4,00 \times 10^{-5}s$ ). . . . .    | 84 |

# Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 5.1 | Parâmetros utilizados para o método proposto. . . . .   | 45 |
| 5.2 | Erros relativos para deslocamento e velocidade em todos os nós. . . . .                                       | 51 |
| 5.3 | Parâmetros utilizados em cada exemplo para o método proposto. . . . .   | 53 |
| 5.4 | Parâmetros $\gamma_e$ e $\alpha_e$ da abordagem proposta em cada exemplo para<br>cada passo de tempo. . . . . | 54 |
| 5.5 | Parâmetros utilizados em cada exemplo para o método proposto. . . . .   | 60 |
| 5.6 | Parâmetros $\gamma_e$ e $\alpha_e$ da abordagem proposta em cada exemplo para<br>cada passo de tempo. . . . . | 61 |
| 5.7 | Parâmetros utilizados em cada exemplo para o método proposto. . . . .   | 70 |
| 5.8 | Parâmetros $\gamma_e$ e $\alpha_e$ da abordagem proposta em cada exemplo para<br>cada passo de tempo. . . . . | 72 |
| 5.9 | Parâmetros utilizados para o método proposto. . . . .   | 79 |

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações iniciais

Métodos numéricos são importantes ferramentas na resolução de problemas complexos em diversos campos da engenharia. O avanço tecnológico dos materiais e das técnicas construtivas exigiu análises mais sofisticadas, que foram possibilitadas pelo grande desenvolvimento da capacidade de processamento dos computadores nas últimas décadas. Neste contexto, o método dos elementos finitos (MEF) se destaca por sua eficácia e aplicabilidade, sendo amplamente utilizado na análise de estruturas, transferência de calor e mecânica dos fluidos [1–4].

A análise de estruturas submetidas a carregamentos que variam com o tempo pode ser realizada a partir de duas formas: a determinística e a não determinística. A análise determinística se caracteriza quando o carregamento aplicado à estrutura é plenamente conhecido durante todo o intervalo da análise. A partir deste carregamento, denominado carregamento prescrito, são obtidos os deslocamentos da estrutura em função do tempo. Em contrapartida, a análise não determinística é caracterizada quando não se conhece exatamente o carregamento. Neste caso, os valores de carga são determinados estatisticamente e são denominados carregamentos aleatórios [5]. Neste contexto, busca-se obter respostas em termos de tensões, deformações ou deslocamentos em uma estrutura sujeita a uma carga arbitrária que varia em função do tempo. Portanto, o MEF é empregado para a discretização espa-

cial e a resposta dinâmica pode ser obtida, basicamente, através de duas abordagens, considerando-se análises no domínio do tempo: superposição modal e integração direta no tempo [5–7].

Na superposição modal, a resposta dinâmica é calculada através do somatório das respostas de cada modo de vibração da estrutura separadamente. Já na integração direta no domínio do tempo, que será o foco de estudo do presente trabalho, a resposta dinâmica é obtida por integração numérica, por intermédio de métodos de marcha no tempo (*time marching*), também conhecidos como métodos passo a passo (*step-by-step*) [6, 8].

Os métodos de marcha no tempo podem ser classificados como explícitos ou implícitos, cada qual apresentando vantagens e desvantagens, dependendo das características do problema em análise. Define-se como explícito o método no qual o cálculo da resposta no passo de tempo atual depende somente das respostas obtidas nos passos de tempo antecedentes [1, 5, 9]. Desta forma, no método explícito não é necessário solucionar um sistema de equações a cada passo de tempo e, por isso, são usualmente caracterizados por demandar menor custo computacional. Entretanto, métodos explícitos são condicionalmente estáveis, ou seja, o intervalo de tempo utilizado na análise deve ser inferior a um valor crítico. Em contrapartida, métodos implícitos geralmente requerem maior custo computacional e podem ser incondicionalmente estáveis. Sendo assim, podem apresentar passos de tempo maiores, ficando limitado somente ao critério de precisão [10].

Algoritmos adaptativos são usualmente referidos àqueles que possuem uma definição automática do passo de tempo utilizado na marcha temporal [11–14], geralmente calculado por uma ponderação entre custo computacional e precisão. A determinação automática do passo tempo não será o foco do presente trabalho. A abordagem utilizada é adaptativa no sentido de computar os parâmetros do método de forma automática, a partir das características do elemento em análise. Portanto, o cálculo dos parâmetros é feito elemento a elemento, o que permite uma diferente distribuição espacial.

Uma importante propriedade dos métodos de marcha no tempo é o amorteci-

mento numérico. Como a resposta de interesse se encontra na faixa de frequências baixas, frequências de alta magnitude são espúrias (ruídos) provenientes da discretização espacial. Desta forma, é conveniente que um método passo a passo para análise dinâmica estrutural apresente dissipação controlável de frequências altas.

Diante do exposto, o foco do presente trabalho será apresentar uma nova abordagem, baseada nas famílias de algoritmos propostas por SOARES JR [10, 15], com precisão de segunda ordem, incondicionalmente estável, adaptativo e com dissipação de frequências espúrias controlável a nível de elemento.

## 1.2 Breve revisão bibliográfica

O desenvolvimento de métodos de integração direta para análise dinâmica de estruturas tem sido alvo de inúmeras pesquisas nas últimas décadas. Diversas metodologias foram propostas buscando manter estabilidade, precisão e introdução de amortecimento numérico para dissipação de frequências espúrias.

O método das Diferenças Centrais (MDC) mostra-se eficiente quando é possível considerar a matriz de massa diagonal (*lumped mass*) e o amortecimento desprezível ou proporcional à matriz de massa, pois, nestes casos, não é necessário efetuar fatoração de matrizes na solução passo a passo. Ou seja, a solução de um sistema de equações reduz-se a inversão de matrizes diagonais, o que diminui consideravelmente o custo do processamento computacional. Entretanto, o MDC é condicionalmente estável e, dependendo das características do problema, pode exigir intervalos de tempo muito reduzidos na análise, perdendo a eficiência citada anteriormente [1, 16].

A família de algoritmos de Newmark [17] é amplamente reconhecida no meio científico e, portanto, uma das mais utilizadas. Dependendo dos parâmetros utilizados no método de Newmark é possível reproduzir tanto esquemas explícitos (*e.g.*, diferença central) quanto implícitos (*e.g.*, regra trapezoidal, aceleração linear). Além disso, esta família de algoritmos possui amortecimento numérico quando sua precisão é reduzida para primeira ordem, porém, neste caso, também apresenta dissipação significativa de frequências de baixa magnitude. Ressalta-se que o método de Newmark alcança precisão de segunda ordem somente sem apresentar amortecimento

numérico [18, 19]. O método de Newmark será empregado na comparação com a metodologia proposta e sua implementação é descrita no capítulo 3.

O método de Houbolt [20] foi um dos primeiros com amortecimento numérico aplicado à análise dinâmica de estruturas, sendo sua formulação semelhante ao método de Park [21], uma vez que ambos aproximam velocidade e aceleração por diferenças finitas regressivas múltiplas. Estes métodos são implícitos, incondicionalmente estáveis e possuem precisão de segunda ordem. Entretanto, apresentam a desvantagem da necessidade de procedimentos especiais de inicialização para que a marcha no tempo possa começar [18, 19, 22]. Visando contornar este problema, SOROUSHAN e FARJOODI [23] apresentaram uma formulação unificada para inicialização do método de Houbolt. CHUNG e HULBERT [24] propuseram uma nova família de algoritmos, espectralmente idêntica ao método de Houbolt, incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem.

O método Wilson- $\theta$  [25] consiste em uma extensão do método da aceleração linear (método de Newmark com parâmetros  $\gamma_N = \frac{1}{2}$  e  $\beta_N = \frac{1}{6}$ ). Sua formulação foi obtida considerando-se a variação linear da aceleração no intervalo de tempo  $t + \theta\Delta t$ . Desta forma, o método da aceleração linear de Newmark é reproduzido quando  $\theta = 1, 0$ . O método Wilson- $\theta$  é implícito, incondicionalmente estável e possui precisão de segunda ordem para valores de  $\theta \geq 1,37$  [26].

HILBER *et al.* [27] propuseram o método HHT (Hilber, Hughes & Taylor), também denominado Hilber- $\alpha$  (ou HHT- $\alpha$ ), baseado na família de algoritmos de Newmark. O objetivo dos autores foi introduzir dissipação de componentes de alta frequência sem perder a precisão de segunda ordem, uma deficiência do método de Newmark. Seguindo a mesma premissa, WOOD *et al.* [28] estabeleceram o método WBZ (Wood, Bossak & Zienkiewicz), também conhecido como método Bossak- $\alpha$  (ou WBZ- $\alpha$ ), que é semelhante ao método HHT e também foi baseado na formulação da família de algoritmos de Newmark. CHUNG e HULBERT [29] combinaram os métodos HHT e WBZ, elaborando o método  $\alpha$ -generalizado. A partir da combinação de valores para os parâmetros desta metodologia, é possível reproduzir os métodos HHT, WBZ, ou ainda, Newmark.

BAZZI e ANDERHEGGEN [30] desenvolveram o método  $\rho$ , uma família de algoritmos com esquemas implícitos ou explícitos, na qual a dissipação das frequências espúrias é controlada por um único parâmetro do método. HOFF e PAHL [31] elaboraram uma família de algoritmos com seis parâmetros independentes, na qual a grande maioria dos métodos citados anteriormente pode ser reproduzida. Os autores propõem um ajuste sistemático, reduzindo a família de algoritmos a uma abordagem de apenas um parâmetro, denominado método  $\theta_1$ .

Mais recentemente BATHE [32] propôs uma metodologia na qual cada passo de tempo é dividido em dois subpassos iguais, sendo que no primeiro subpasso é utilizada a regra trapezoidal e no segundo, o método regressivo de Euler. O objetivo do autor foi elaborar um método de simples implementação, incondicionalmente estável, com precisão de segunda ordem e que não apresentasse a necessidade de ajuste de parâmetros pelo usuário [33, 34]. Este método será utilizado na comparação com a metodologia proposta, logo sua implementação é descrita no capítulo 3.

SOARES JR [10] propôs uma nova família de algoritmos baseada somente em relações entre deslocamentos e velocidades, eliminando a necessidade do cálculo de acelerações. Portanto, trata-se de um método de simples implementação, além de não requerer procedimentos especiais de inicialização. Dando continuidade a esta abordagem, SOARES JR [15] apresentou uma formulação adaptativa, em que os parâmetros do método são calculados automaticamente, baseado nas propriedades do elemento. Uma vez que este cálculo é feito no referencial local, os parâmetros podem assumir valores distintos para cada elemento. A nova abordagem proposta no presente trabalho é uma continuidade dos métodos propostos por SOARES JR [10, 15], portanto a implementação destes métodos é mostrada no capítulo 3.

Diversos outros métodos explícitos [35–42] ou implícitos [43–45], bem como técnicas de subciclagem [46–48], métodos de ordem superior [49–52] ou métodos com intervalos de tempo adaptativos [53–56], podem ser encontrados na literatura. Além disso, para uma visão mais aprofundada acerca do assunto, cita-se as revisões bibliográficas realizadas por DOKAINISH e SUBBARAJ [16], SUBBARAJ e DOKAINISH [18], TAMMA *et al.* [22] e FUNG [19].

## 1.3 Objetivo e organização do trabalho

O objetivo do presente trabalho é apresentar uma nova abordagem da família de algoritmos proposta por SOARES JR [10, 15] para solução de problemas de dinâmica estrutural via método dos elementos finitos. A nova abordagem é de simples implementação, incondicionalmente estável, adaptativa, possui precisão de segunda ordem e apresenta a vantagem de possuir dissipação de frequências espúrias controlável pelo usuário a nível do elemento. Além disso, métodos clássicos (*e.g.* Regra Trapezoidal), podem ser reproduzidos através deste método.

Após introdução do trabalho, a formulação básica para solução de problemas de dinâmica estrutural (seção 2.1) bem como a discretização espacial pelo método dos elementos finitos (seção 2.2) serão apresentadas no capítulo 2. As análises serão feitas com elementos de barra (*bar*), viga (*beam*) e pórtico (*frame*), sendo que somente análise linear será considerada neste trabalho. Entretanto a modelagem apresentada pode ser extrapolada para outros tipos de elementos e levar em consideração também análise não linear.

O capítulo 3 dedica-se à apresentação dos métodos de marcha no tempo. São descritos os métodos de Newmark [17] e Bathe [33], utilizados na comparação com a nova abordagem proposta, bem como as famílias de algoritmos propostas por SOARES JR [10, 15], na qual a nova abordagem é fundamentada. No capítulo 4 a nova metodologia é proposta e suas características são discutidas.

No quinto capítulo os resultados obtidos através da nova metodologia proposta são expostos e comparados com os obtidos pelos métodos citados no capítulo 3. Além disso, erros relativos são apresentados, demonstrando a superioridade do método proposto. Por fim, considerações finais e conclusões relativas ao presente trabalho são feitas no capítulo 6.

# Capítulo 2

## Formulação da dinâmica estrutural

O presente capítulo dedica-se à formulação matemática da equação diferencial de segunda ordem a ser resolvida pelo método numérico proposto, denominada equação de movimento. Além disso, as matrizes de rigidez e massa utilizadas para a discretização espacial via método dos elementos finitos são obtidas.

### 2.1 Equação de movimento

#### 2.1.1 O princípio de D’Alembert

As equações de movimento de um sistema dinâmico qualquer equivalem à 2ª Lei de Newton, que diz que a variação da quantidade de movimento de uma partícula com massa  $m$  é igual à força que atua nela. Tal relação pode ser definida pela seguinte equação diferencial [5]:

$$F(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{du}{dt} \right), \quad (2.1)$$

onde  $F(t)$  corresponde ao vetor de forças,  $u(t)$  corresponde ao vetor posição e  $m$  à massa da partícula. Quando a massa não varia com o tempo, pode-se reescrever a Equação 2.1 como:

$$F(t) = m \frac{d^2u}{dt^2}, \quad (2.2)$$

ou ainda:

$$F(t) = m\ddot{u}(t). \quad (2.3)$$

A Equação 2.3 mostra que a força é igual ao produto da massa pela aceleração (dois pontos significam a segunda derivada com relação ao tempo). Pode-se reescrever esta equação da seguinte forma:

$$F(t) - m\ddot{u}(t) = 0, \quad (2.4)$$

na qual o termo  $m\ddot{u}$  é denominado *força inercial*. O conceito de que a massa desenvolve uma força inercial proporcional à aceleração e com sentido contrário é conhecido como o Princípio de D'Alembert. A força  $F(t)$  pode expressar forças elásticas (que se opõe ao deslocamento) e também forças de amortecimento viscoso (que se opõe à velocidade). Portanto, esta abordagem permite que as equações de movimento sejam expressas na forma de equilíbrio dinâmico.

### 2.1.2 Sistema dinâmico elementar

Um sistema dinâmico elementar de um grau de liberdade (livre para oscilar na direção horizontal) pode ser idealizado por um sistema básico constituído de uma massa, uma mola e um amortecedor, conforme ilustrado na Figura 2.1, onde  $m$  representa a massa do sistema,  $k$  a propriedade elástica (rigidez) e  $c$  a constante de amortecimento (perda de energia mecânica). A posição do sistema é definida em qualquer instante de tempo por  $u(t)$  e o carregamento externo aplicado é definido por  $P(t)$ .

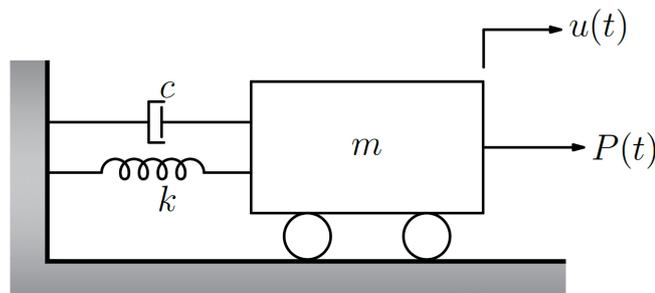


Figura 2.1: Sistema dinâmico elementar.

O equilíbrio dinâmico das forças que atuam neste corpo, representado pelo diagrama de corpo livre, é mostrado na Figura 2.2, onde  $f_I(t)$  corresponde à força inercial,  $f_S(t)$  à força elástica e  $f_D(t)$  à força de amortecimento.

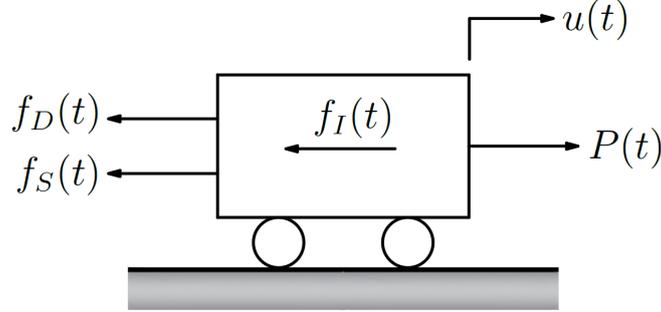


Figura 2.2: Equilíbrio de um sistema dinâmico elementar.

A equação de movimento que rege este sistema é dada pelo equilíbrio de todas as forças que atuam no sistema:

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = P(t). \quad (2.5)$$

Segundo o princípio de D'Alembert, a força inercial é dada pelo produto da massa pela aceleração:

$$f_I(t) = m\ddot{u}(t). \quad (2.6)$$

Pode-se assumir que a força de amortecimento é proporcional à velocidade (amortecimento viscoso):

$$f_D(t) = c\dot{u}(t). \quad (2.7)$$

A força elástica é definida pelo produto da rigidez pelo deslocamento do corpo, dada por:

$$f_S(t) = ku(t). \quad (2.8)$$

Ao substituir as Equações 2.6 a 2.8 na Equação 2.5, chega-se à equação de movimento para um sistema dinâmico elementar de um grau de liberdade [5]:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t). \quad (2.9)$$

Analogamente, para sistemas com inúmeros graus de liberdade discretizados por elementos finitos, a equação de movimento é dada por [1]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{P}(t), \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{P}(t)$  corresponde ao vetor de carregamentos (dependente do tempo) e  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  correspondem às matrizes de massa, amortecimento e rigidez. Estas matrizes podem ser constantes no tempo (análise linear) ou podem variar no tempo (análise não linear). A ordem destas matrizes é determinada pelo número de graus de liberdade adotados para discretizar a estrutura. Os termos  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{U}}(t)$  e  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  correspondem aos vetores deslocamento, velocidade e aceleração. Desta forma, a Equação 2.10 representa um sistema de  $N$  equações diferenciais de segunda ordem que definem a resposta em termos de deslocamento, velocidade e aceleração de um sistema com múltiplos graus de liberdade.

## 2.2 Discretização espacial

A discretização espacial do problema dinâmico foi feita a partir do método dos elementos finitos. Este método se destaca pela sua aplicabilidade em vários campos da engenharia, tais como transferência de calor, mecânica dos sólidos, eletromagnetismo e mecânica dos fluidos. Uma visão mais aprofundada deste método, suas aplicações, teorias e formulações podem ser encontradas na referências [1–4, 9, 57, 58]. A seguir serão apresentadas as matrizes de massa e rigidez de forma sucinta, uma vez que esta formulação pode ser facilmente encontrada nas bibliografias citadas.

### 2.2.1 Matriz de rigidez

#### Barra

O elemento de barra (*bar*) mostrado na Figura 2.3 possui dois graus de liberdade: deslocamento nodal ( $u_1$  e  $u_2$ ) no sentido axial em cada nó.

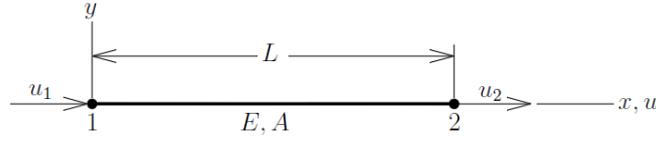


Figura 2.3: Elemento de barra com dois graus de liberdade.

O campo de deslocamento axial para este elemento pode ser descrito como:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde  $\mathbf{N}$  corresponde à matriz de funções de interpolação:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Tem-se que a matriz de rigidez deste elemento de barra é [1-3, 5, 7, 9]:

$$[\mathbf{k}] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T EA [\mathbf{B}] ds, \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz gradiente, dada por:

$$[\mathbf{B}] = \frac{d}{dx} [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Portanto:

$$[\mathbf{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

## Viga

De maneira análoga, o elemento de viga (*beam*) mostrado na Figura 2.4 apresenta quatro graus de liberdade: deslocamento nodal no sentido vertical ( $w_1$  e  $w_2$ ) e rotação no plano ( $\theta_1$  e  $\theta_2$ ).

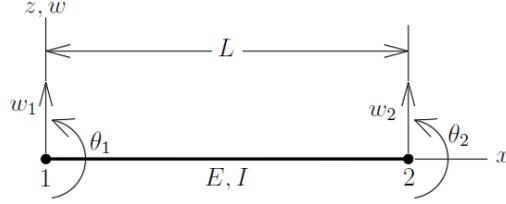


Figura 2.4: Elemento de viga com quatro graus de liberdade.

O campo de deslocamento para este elemento é descrito como:

$$\mathbf{w} = [\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{N}$  representa a matriz de funções de interpolação:

$$[\mathbf{N}] = \left[ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right]. \quad (2.17)$$

Tem-se que a matriz de rigidez para o elemento de viga é definida por [1–3, 5, 7, 9]:

$$[\mathbf{k}] = \int_0^L [\mathbf{B}]^T EI [\mathbf{B}] ds, \quad (2.18)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz gradiente, dada por:

$$[\mathbf{B}] = \frac{d^2}{dx^2} [\mathbf{N}] = \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right]. \quad (2.19)$$

Portanto:

$$[\mathbf{k}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

## Pórtico

A matriz de rigidez do elemento de pórtico plano pode ser obtida através da superposição dos elementos de barra (Figura 2.3) e viga (Figura 2.4). Este elemento possui seis graus de liberdade: deslocamento nodal na direção axial ( $u_1$  e  $u_2$ ), deslocamento nodal no sentido vertical ( $w_1$  e  $w_2$ ) e rotação no plano ( $\theta_1$  e  $\theta_2$ ). Portanto, a matriz de rigidez é dada por:

$$[\mathbf{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

ou ainda:

$$[\mathbf{k}] = \frac{E}{L^3} \begin{bmatrix} AL^2 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I & 6IL & 0 & -12I & 6IL \\ 0 & 6IL & 4IL^2 & 0 & -6IL & 2IL^2 \\ AL^2 & 0 & 0 & -AL^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I & -6IL & 0 & 12I & -6IL \\ 0 & 6IL & 2IL^2 & 0 & -6IL & 4IL^2 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

### 2.2.2 Matriz de massa

A matriz de massa representa uma discretização da distribuição contínua da massa de uma estrutura. É definida como matriz consistente (*consistent*) quando é obtida a partir das mesmas funções de interpolação (Equações 2.12 e 2.17) utilizadas para a obtenção da matriz de rigidez. A matriz de massa também pode ser obtida através da concentração da massa de cada elemento nos nós adjacentes. Neste caso, a matriz é diagonal e definida como matriz inconsistente (*lumped*). As duas definições

tem vantagens, desvantagens e particularidades, cabendo ao usuário decidir a mais adequada para a cada análise.

## Barra

Considerando o elemento de barra mostrado na Figura 2.3, a matriz de massa consistente para este elemento é dada por [1–3, 5, 7, 9]:

$$[\mathbf{m}_C] = \int_0^L \rho A [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dx, \quad (2.23)$$

onde  $\rho$  representa a massa específica do elemento,  $A$  é a área da seção transversal e  $[\mathbf{N}]$  representa a matriz de funções de interpolação para este elemento, dada pela Equação 2.12. Logo:

$$[\mathbf{m}_C] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

A matriz de massa inconsistente é obtida considerando a metade da massa total do elemento para cada nó. Desta forma, a matriz de massa inconsistente para o elemento de barra é dada por:

$$[\mathbf{m}_I] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

## Viga

De maneira análoga à Equação 2.23, a matriz de massa consistente para o elemento de viga (Figura 2.4) é dada por [1–3, 5, 7, 9]:

$$[\mathbf{m}_C] = \int_0^L \rho A [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dx. \quad (2.26)$$

Para o elemento de viga, a matriz de funções de interpolação  $[\mathbf{N}]$  é dada pela

Equação 2.17. Portanto:

$$[\mathbf{m}_C] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

A matriz inconsistente para o elemento de viga é obtida pelo mesmo procedimento realizado no elemento de barra:

$$[\mathbf{m}_I] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

### Pórtico

Da mesma maneira que foi realizada na seção anterior, a obtenção das matrizes de massa para elemento de pórtico é realizada pela superposição dos elementos de barra e viga. Portanto, a matriz de massa consistente para um elemento de pórtico é dada por:

$$[\mathbf{m}_C] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

ou ainda:

$$[\mathbf{m}_C] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

De maneira análoga, a matriz de massa inconsistente para um elemento de pórtico é dada por:

$$[\mathbf{m}_I] = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

## Capítulo 3

# Integração direta no domínio do tempo

A equação de movimento para sistemas discretizados por elementos finitos (Equação 2.10) representa um sistema de  $N$  (número de graus de liberdade não prescritos) equações diferenciais de segunda ordem. A solução deste sistema pode ser muito dispendiosa dependendo do número de graus de liberdade utilizado na discretização espacial. Desta forma, os métodos numéricos utilizam as propriedades intrínsecas das matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  com o intuito de diminuir o custo para solução deste sistema de equações [1].

Basicamente, a solução da equação de movimento pode ser feita através de duas abordagens: superposição modal e integração direta no tempo. Na superposição modal, a resposta é obtida através do somatório das respostas de cada modo de vibração [8]. Na integração direta no domínio do tempo, a resposta é obtida através da integração por meio de métodos de marcha no tempo, sendo que não é aplicada nenhuma transformação prévia nas equações de movimento. Esta abordagem baseia-se no fato de que a Equação 2.10 não é satisfeita em todo o domínio, mas sim em alguns pontos discretos de tempo  $\Delta t$  [1].

A seguir serão apresentados os métodos utilizados com intuito de comparação e os métodos nos quais a nova abordagem é baseada.

### 3.1 Método de Newmark

A família de algoritmos de Newmark [17] é baseada nas seguintes aproximações:

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \dot{\mathbf{U}}^n + \left[ (1 - \gamma_N) \ddot{\mathbf{U}}^n + \gamma_N \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} \right] \Delta t, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \dot{\mathbf{U}}^n \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta_N \right) \ddot{\mathbf{U}}^n + \beta_N \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} \right] \Delta t^2, \quad (3.2)$$

onde  $\gamma_N$  e  $\beta_N$  são os parâmetros que determinam a estabilidade e a acurácia do método,  $\Delta t$  é o passo de tempo adotado ( $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ ) e  $t^n = n\Delta t$ . Além disso, a equação de movimento para  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1}, \quad (3.3)$$

também deve ser considerada. Substituindo as Equações 3.1 e 3.2 na Equação 3.3, a seguinte relação é obtida:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \gamma_N \Delta t \mathbf{C} + \beta_N \Delta t^2 \mathbf{K}) \ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = & \mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{C} \left[ \dot{\mathbf{U}}^n + 1 (1 - \gamma_N) \Delta t \ddot{\mathbf{U}}^n \right] - \\ & \mathbf{K} \left[ \mathbf{U}^n + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \left( \frac{1}{2} - \beta_N \right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{U}}^n \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

o que permite estabelecer uma relação recursiva entre deslocamento, velocidade e aceleração. Sendo assim, para iniciar o processo, a aceleração inicial  $\ddot{\mathbf{U}}^0$  pode ser calculada (a partir das condições iniciais  $\dot{\mathbf{U}}^0$  e  $\mathbf{U}^0$ ) por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^0 = \mathbf{P}^0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^0 - \mathbf{K}\mathbf{U}^0. \quad (3.5)$$

Dependendo dos valores adotados para os parâmetros  $\beta_N$  e  $\gamma_N$ , métodos clássicos são reproduzidos pela família de algoritmos de Newmark. Para  $\gamma_N = 1/2$  e  $\beta_N = 1/4$  a Regra Trapezoidal é reproduzida. Para  $\gamma_N = 1/2$  e  $\beta_N = 1/6$ , a família de algoritmos reproduz o método da aceleração linear. A Regra Trapezoidal será utilizada para comparação dos resultados obtidos, uma vez que este método é amplamente reconhecido e utilizado no meio científico, possui precisão de segunda ordem, é incon-

dicionalmente estável e não apresenta decaimento de amplitude. A implementação passo-a-passo do método de Newmark, segundo BATHE [1], é apresentada a seguir:

---

**Algoritmo 3.1:** Solução passo-a-passo para o método de Newmark [1].

---

1. Montar as matrizes globais  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$ .
2. Inicializar  $\mathbf{U}^0$ ,  $\dot{\mathbf{U}}^0$  e  $\ddot{\mathbf{U}}^0$ .
3. Selecionar os parâmetros  $\beta_N$  e  $\gamma_N$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$  da análise.
4. Calcular as constantes de integração:

$$a_0 = \frac{1}{\beta_N \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\gamma_N}{\beta_N \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\beta_N \Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\beta_N} - 1$$

$$a_4 = \frac{\gamma_N}{\beta_N} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\gamma_N}{\beta_N} - 2 \right) \quad a_6 = \Delta t (1 - \gamma_N) \quad a_7 = \gamma_N \Delta t$$

5. Formar a matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$$

6. Triangularizar  $\hat{\mathbf{K}}$ :  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$

7. Para cada passo de tempo:

- a. Calcular o vetor de carregamentos efetivo no tempo  $t + \Delta t$  :

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{M} \left( a_0 \mathbf{U}^n + a_2 \dot{\mathbf{U}}^n + a_3 \ddot{\mathbf{U}}^n \right) + \mathbf{C} \left( a_1 \mathbf{U}^n + a_4 \dot{\mathbf{U}}^n + a_5 \ddot{\mathbf{U}}^n \right)$$

- b. Resolver em termos de deslocamento no tempo  $t + \Delta t$  :

$$\mathbf{LDL}^T \mathbf{U}^{n+1} = \hat{\mathbf{P}}^{n+1}$$

- c. Calcular aceleração e velocidade no tempo  $t + \Delta t$  :

$$\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = a_0 (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) - a_2 \dot{\mathbf{U}}^n - a_3 \ddot{\mathbf{U}}^n$$

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \dot{\mathbf{U}}^n + a_6 \ddot{\mathbf{U}}^n + a_7 \ddot{\mathbf{U}}^{n+1}$$


---

## 3.2 Método de Bathe

O método proposto por BATHE [32] é baseado na ideia da subdivisão de cada passo de tempo  $\Delta t$  em dois subpassos iguais  $\Delta t/2$ . No primeiro subpasso, é aplicada a Regra Trapezoidal e no segundo é aplicado o método regressivo de Euler. Portanto a equação de movimento deve ser atendida no subpasso de tempo  $t + \Delta t/2$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}^{n+1/2} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} + \mathbf{K} \mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{P}^{n+1/2}. \quad (3.6)$$

Aplicando-se as equações para a Regra Trapezoidal:

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} = \dot{\mathbf{U}}^n + \left[ \frac{\Delta t}{4} \right] \left( \ddot{\mathbf{U}}^n + \ddot{\mathbf{U}}^{n+1/2} \right), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^n + \left[ \frac{\Delta t}{4} \right] \left( \dot{\mathbf{U}}^n + \dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} \right). \quad (3.8)$$

Usando as Equações 3.6 a 3.8 é possível calcular os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais para o passo de tempo  $t + \Delta t/2$ . No segundo subpasso de tempo, a equação de movimento que deve ser satisfeita é:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1}. \quad (3.9)$$

Aplicando o método regressivo de Euler, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{U}^n - \frac{4}{\Delta t} \mathbf{U}^{n+1/2} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{U}^{n+1}, \quad (3.10)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^n - \frac{4}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} + \frac{3}{\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{n+1}. \quad (3.11)$$

Analogamente, com as Equações de 3.9 a 3.11 é possível calcular os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais no tempo  $t + \Delta t$ , ficando estabelecida a marcha no tempo.

Este método é implícito, incondicionalmente estável, possui precisão de segunda ordem e apresenta a vantagem de não possuir parâmetros a serem escolhidos pelo usuário, somente o passo de tempo da análise [34]. Entretanto, por apresentar duas vezes mais equações por passo de tempo, este método possui custo computacional aproximadamente duas vezes maior do que a Regra Trapezoidal [32]. A implementação deste método, de acordo com BATHE [1], é exposta a seguir.

---

**Algoritmo 3.2:** Solução passo-a-passo para o método de Bathe [1].

---

1. Montar as matrizes globais  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$ .
2. Inicializar  $\mathbf{U}^0$ ,  $\dot{\mathbf{U}}^0$  e  $\ddot{\mathbf{U}}^0$ .
3. Selecionar o intervalo de tempo  $\Delta t$  da análise.
4. Calcular as constantes de integração:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{16}{\Delta t^2} & a_1 &= \frac{4}{\Delta t} & a_2 &= \frac{9}{\Delta t^2} & a_3 &= \frac{3}{\Delta t} \\ a_4 &= 2a_1 & a_5 &= \frac{12}{\Delta t^2} & a_6 &= -\frac{3}{\Delta t^2} & a_7 &= -\frac{1}{\Delta t} \end{aligned}$$

5. Formar as matrizes de rigidez efetiva  $\hat{\mathbf{K}}_1$  e  $\hat{\mathbf{K}}_2$ :

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{K} + a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} \quad \hat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{K} + a_2\mathbf{M} + a_3\mathbf{C}$$

6. Triangularizar  $\hat{\mathbf{K}}_1$  e  $\hat{\mathbf{K}}_2$ :

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{D}_1\mathbf{L}_1^T \quad \hat{\mathbf{K}}_2 = \mathbf{L}_2\mathbf{D}_2\mathbf{L}_2^T$$

7. Para cada passo de tempo:

- 7.1. Primeiro sub-passo:

- a. Calcular o vetor de carregamentos efetivo no tempo  $t + \Delta t/2$ :

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+1/2} = \mathbf{P}^{n+1/2} + \mathbf{M} \left( a_0\mathbf{U}^n + a_4\dot{\mathbf{U}}^n + \ddot{\mathbf{U}}^n \right) + \mathbf{C} \left( a_1\mathbf{U}^n + \dot{\mathbf{U}}^n \right)$$

- b. Resolver em termos de deslocamento no tempo  $t + \Delta t/2$ :

$$\mathbf{L}_1\mathbf{D}_1\mathbf{L}_1^T \mathbf{U}^{n+1/2} = \hat{\mathbf{P}}^{n+1/2}$$

- c. Calcular velocidade e aceleração no tempo  $t + \Delta t/2$ :

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} = a_1 \left( \mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{U}^n \right) - \dot{\mathbf{U}}^n$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{n+1/2} = a_1 \left( \dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} - \dot{\mathbf{U}}^n \right) - \ddot{\mathbf{U}}^n$$

- 7.2. Segundo sub-passo:

- a. Calcular o vetor de carregamentos efetivo no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+1} = \mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{M} \left( a_3\mathbf{U}^{n+1/2} + a_6\mathbf{U}^n + a_1\dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} + a_7\dot{\mathbf{U}}^n \right) + \mathbf{C} \left( a_1\mathbf{U}^{n+1/2} + a_7\mathbf{U}^n \right)$$

- b. Resolver em termos de deslocamento no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{L}_2\mathbf{D}_2\mathbf{L}_2^T \mathbf{U}^{n+1} = \hat{\mathbf{P}}^{n+1}$$

- c. Calcular velocidade e aceleração no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\dot{\mathbf{U}}^{n+1} = -a_7\mathbf{U}^n - a_1\mathbf{U}^{n+1/2} + a_3\mathbf{U}^{n+1}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}^{n+1} = -a_7\dot{\mathbf{U}}^n - a_1\dot{\mathbf{U}}^{n+1/2} + a_3\dot{\mathbf{U}}^{n+1}$$

---

### 3.3 Método de SOARES JR [10]

SOARES JR [10] propôs uma nova família de algoritmos baseada apenas em relações entre deslocamentos e velocidades. As aproximações adotadas são obtidas pela integração da equação de movimento para um passo de tempo  $\Delta t$ :

$$\mathbf{M} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(t) dt + \mathbf{C} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\mathbf{U}}(t) dt + \mathbf{K} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{U}(t) dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt. \quad (3.12)$$

As integrais da Equação 3.12 são aproximadas por:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}(t) dt \approx \dot{\mathbf{U}}^{n+1} - \dot{\mathbf{U}}^n, \quad (3.13)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\mathbf{U}}(t) dt \approx \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n, \quad (3.14)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{U}(t) dt \approx \Delta t \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \alpha_2^S \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}^n + \frac{1}{2} \alpha_1^S \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}^{n+1}, \quad (3.15)$$

onde  $\alpha_1^S$  e  $\alpha_2^S$  são parâmetros do método. O deslocamento  $\mathbf{U}^{n+1}$  é definido por:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \delta_2^S \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \delta_1^S \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{n+1}, \quad (3.16)$$

onde  $\delta_1^S$  e  $\delta_2^S$  são parâmetros adicionais do método. Substituindo as Equações 3.13 a 3.16 na Equação 3.12, obtém-se a seguinte relação:

$$\left( \mathbf{M} + \delta_1^S \Delta t \mathbf{C} + \frac{1}{2} \alpha_1^S \Delta t^2 \mathbf{K} \right) \dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt + \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^n - \delta_2^S \Delta t \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^n - \mathbf{K} \left( \Delta t \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \alpha_2^S \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}^n \right). \quad (3.17)$$

Pela Equação 3.17 calcula-se a velocidade  $\dot{\mathbf{U}}^{n+1}$  e posteriormente obtém-se o deslocamento  $\mathbf{U}^{n+1}$  pela Equação 3.16, ficando estabelecida a marcha no tempo. Uma vez que esta metodologia é baseada somente em relações entre deslocamentos e velocidades, não se faz necessário o cálculo de acelerações. Portanto, além de apresentar menos equações por passo de tempo, este método não requer procedimentos especiais de inicialização. A integração numérica do vetor de carregamentos pode

ser realizada por diversos métodos numéricos. Será considerada neste trabalho a aproximação pela Regra Trapezoidal:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt \approx \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n). \quad (3.18)$$

Dependendo dos valores adotados para os parâmetros  $(\alpha_1^S, \alpha_2^S, \delta_1^S$  e  $\delta_2^S)$ , métodos clássicos (implícitos ou explícitos) podem ser reproduzidos pela metodologia proposta por SOARES JR [10], tais como a Regra Trapezoidal e o método das Diferenças Centrais.

Para a formulação implícita, este método é incondicionalmente estável, apresenta dissipação de frequências espúrias e possui precisão de segunda ordem. Apenas a formulação implícita será apresentada, uma vez que o método proposto no presente trabalho se baseia nesta formulação de SOARES JR [10]. Portanto, para procedimentos implícitos, deve-se adotar:

$$\delta_1^S = \frac{1}{2} + d^S \omega \Delta t, \quad (3.19)$$

$$\alpha_1^S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh(a^S \omega \Delta t), \quad (3.20)$$

$$\delta_2^S = 1 - \delta_1^S, \quad (3.21)$$

$$\alpha_2^S = 2(2\alpha_1^S)^{1/2} - \alpha_1^S - 2\delta_1^S, \quad (3.22)$$

onde  $\omega$  representa um parâmetro estimado baseado nas propriedades do modelo e pode ser computado como a menor frequência natural do modelo. Desta forma, o método se reduz a apenas dois parâmetros ( $a^S$  e  $d^S$ ). Para  $d^S > 0$  pode-se reduzir erros provenientes do alongamento de período. Já o parâmetro  $a^S$  controla a dissipação do método: para  $a^S = 0$  não é introduzido amortecimento numérico no modelo e para  $a^S > 0$ , o amortecimento numérico é introduzido pelo usuário. A implementação passo-a-passo deste método é mostrada a seguir.

---

**Algoritmo 3.3:** Solução passo-a-passo (implícita) do método de SOARES JR [10].

---

1. Montar as matrizes globais  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$ .
2. Inicializar  $\mathbf{U}^0$  e  $\dot{\mathbf{U}}^0$ .
3. Selecionar o intervalo de tempo  $\Delta t$  da análise e os parâmetros  $a^S$  e  $d^S$ .
4. Calcular ou estimar a menor frequência natural do modelo  $\omega$ .
5. Calcular os parâmetros do método:

$$\delta_1^S = \frac{1}{2} + d^S \omega \Delta t \quad \alpha_1^S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh(a^S \omega \Delta t)$$

$$\delta_2^S = 1 - \delta_1^S \quad \alpha_2^S = 2(2\alpha_1^S)^{1/2} - \alpha_1^S - 2\delta_1^S$$

6. Formar a matriz de rigidez efetiva:

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{M} + \delta_1^S \Delta t \mathbf{C} + \frac{1}{2} \alpha_1^S \Delta t^2 \mathbf{K}$$

7. Triangularizar  $\hat{\mathbf{K}}$ :  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$

8. Para cada passo de tempo:

- a. Calcular o vetor de carregamentos efetivo no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+1} = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n) + \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^n - \delta_2^S \Delta t \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^n - \mathbf{K} \left( \Delta t \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \alpha_2^S \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}^n \right)$$

- b. Resolver em termos de velocidade para o tempo  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{LDL}^T \dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \hat{\mathbf{P}}^{n+1}$$

- c. Calcular o deslocamento no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \delta_2^S \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \delta_1^S \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{n+1}$$


---

### 3.4 Método de SOARES JR [15]

SOARES JR [15] propôs um novo método, baseado no trabalho publicado anteriormente [10], no qual os parâmetros do método são computados de forma automática em cada passo de tempo, em nível do elemento, baseados nas características físicas e geométricas de cada elemento. Portanto, dependendo das características do modelo, os parâmetros podem apresentar uma diferente distribuição espacial e temporal. Ao integrar em nível do elemento a equação de movimento, obtém-se:

$$\mathbf{M}_e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}_e(t) dt + \mathbf{C}_e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\mathbf{U}}_e(t) dt + \mathbf{K}_e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{U}_e(t) dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}_e(t) dt, \quad (3.23)$$

onde o subscrito  $e$  indica variável local (nível do elemento). As integrais da Equação

3.23, aproximadas de forma análoga ao método mostrado na seção 3.3, são dadas por:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}_e(t) dt \approx \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_e^n, \quad (3.24)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\mathbf{U}}_e(t) dt \approx \mathbf{U}_e^{n+1} - \mathbf{U}_e^n, \quad (3.25)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{U}_e(t) dt \approx \Delta t \mathbf{U}_e^n + \frac{1}{2} \zeta_e^n \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}_e^n + \frac{1}{2} \eta_e^n \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1}, \quad (3.26)$$

onde  $\zeta_e^n$  e  $\eta_e^n$  são os parâmetros do método. Estes parâmetros são computados para cada elemento em cada passo de tempo. Como será considerada apenas análise linear neste trabalho e adaptações com relação ao trabalho original [15] serão feitas, estes parâmetros irão sempre assumir o mesmo valor para cada elemento, independente do passo de tempo (logo  $\zeta_e^n = \zeta_e$  e  $\eta_e^n = \eta_e$ ). O deslocamento  $\mathbf{U}^{n+1}$  é definido por:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \frac{1}{2} \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{n+1}. \quad (3.27)$$

Substituindo as Equações 3.24 a 3.27 na Equação 3.23 chega-se na seguinte relação recursiva:

$$\left( \mathbf{M}_e + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}_e + \frac{1}{2} \eta_e \Delta t^2 \mathbf{K}_e \right) \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}_e(t) dt + \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{U}}_e^n - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{U}}_e^n - \mathbf{K}_e \left( \Delta t \mathbf{U}_e^n + \frac{1}{2} \zeta_e \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}_e^n \right). \quad (3.28)$$

Uma vez realizado o procedimento de *assembly* (adição das matrizes de elemento na matriz global) é possível calcular a velocidade  $\dot{\mathbf{U}}^{n+1}$  pela Equação 3.28 e, posteriormente, o deslocamento  $\mathbf{U}^{n+1}$  pela Equação 3.27. Assim como no método exposto anteriormente, o cálculo das acelerações não é necessário, já que este método se baseia apenas em relações entre deslocamentos e velocidades. Portanto, este método também não necessita de procedimentos especiais de inicialização. Para a integração numérica do vetor de carregamentos, será adotada a Regra Trapezoidal:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt \approx \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n). \quad (3.29)$$

O parâmetro  $\eta_e$  controla a estabilidade do método: para valores de  $\eta_e = 0$ , o método será explícito (condicionalmente estável) e o método das Diferenças Centrais é reproduzido para  $\eta_e = 0$  e  $\zeta_e = 1,0$ . Para valores de  $\eta_e > 0$  o método será implícito e a Regra Trapezoidal é reproduzida para  $\eta_e = 0,5$  e  $\zeta_e = 0,5$ . Somente a configuração implícita deste método será focada. Portanto, a fim de minimizar erros provenientes do alongamento de período, SOARES JR [15] propõe uma expressão para o parâmetro  $\eta_e$ :

$$\eta_e = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}\omega_e^{max} \Delta t\right), \quad (3.30)$$

onde  $\omega_e^{max}$  representa a maior frequência natural do elemento. Para o cálculo desta variável, deve-se resolver o problema de autovalor generalizado em nível do elemento [1]:

$$\mathbf{K}_e \Phi_e = \omega_e^2 \mathbf{M}_e \Phi_e. \quad (3.31)$$

Já o parâmetro  $\zeta_e$  determina se o método apresenta dissipação de frequências espúrias. Para isto, deve ser calculado como [15]:

$$\begin{cases} \zeta_e = 1 - \eta_e & \text{sem inserção de amortecimento numérico,} \\ \zeta_e > 1 - \eta_e & \text{com inserção de amortecimento numérico.} \end{cases} \quad (3.32)$$

SOARES JR [15] apresenta uma estratégia para o cômputo do parâmetro  $\zeta_e$  a cada passo de tempo, fazendo com que este método se torne automático, sem a necessidade de inserção de parâmetros pelo usuário. Será apresentada aqui somente a formulação sem inserção de amortecimento numérico, uma vez que a metodologia proposta utiliza esta formulação de SOARES JR [15]. Os resultados obtidos em [15] demonstram o melhor desempenho deste método sobre a Regra Trapezoidal e o método HHT [27]. A implementação da formulação implícita (e sem inserção de amortecimento numérico) deste método é apresentada a seguir.

---

**Algoritmo 3.4:** Algoritmo simplificado (análise sem amortecimento numérico) [15].

---

1. Montar as matrizes locais  $\mathbf{K}_e$ ,  $\mathbf{M}_e$  e  $\mathbf{C}_e$ .
2. Inicializar  $\mathbf{U}^0$  e  $\dot{\mathbf{U}}^0$ .
3. Selecionar o intervalo de tempo  $\Delta t$  da análise.
4. Calcular  $\omega_e^{max}$  para cada elemento:

$$\mathbf{K}_e \Phi_e = \omega_e^2 \mathbf{M}_e \Phi_e$$

5. Calcular os parâmetros  $\eta_e$  e  $\zeta_e$  para cada elemento:

$$\eta_e = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4} \omega_e^{max} \Delta t\right) \quad \zeta_e = 1 - \eta_e$$

6. Calcular as matrizes auxiliares no referencial local:

$$\mathbf{AUX}_{1e} = \mathbf{M}_e + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}_e + \frac{1}{2} \eta_e \Delta t^2 \mathbf{K}_e$$

$$\mathbf{AUX}_{2e} = \mathbf{M}_e - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}_e - \frac{1}{2} \zeta_e \Delta t^2 \mathbf{K}_e$$

$$\mathbf{AUX}_{3e} = \Delta t \mathbf{K}_e$$

7. Realizar o *assembly* das matrizes auxiliares.
8. Triangularizar  $\mathbf{AUX}_1$ :  $\mathbf{AUX}_1 = \mathbf{LDL}^T$
9. Para cada passo de tempo:

- a. Calcular o vetor de carregamentos efetivo no passo  $t + \Delta t$ :

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+1} = \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n) + \mathbf{AUX}_2 \dot{\mathbf{U}}^n - \mathbf{AUX}_3 \mathbf{U}^n$$

- b. Resolver em termos de velocidade para o tempo  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{LDL}^T \dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \hat{\mathbf{P}}^{n+1}$$

- c. Calcular o deslocamento no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\dot{\mathbf{U}}^n + \dot{\mathbf{U}}^{n+1})$$


---

# Capítulo 4

## Metodologia proposta

### 4.1 Formulação da nova metodologia

A metodologia proposta no presente trabalho trata de uma nova abordagem do método de SOARES JR [15]. Para tal, foram utilizadas as aproximações deste método, incluindo (no cálculo dos parâmetros) a capacidade dissipativa do método anterior de SOARES JR [10]. Portanto, esta abordagem implícita é baseada somente em relações entre deslocamentos e velocidades, não sendo necessário cálculo de acelerações na marcha no tempo. Desta forma, trata-se de um método de fácil implementação que não necessita de procedimentos especiais de inicialização.

Para estabelecer as aproximações desta abordagem, integra-se a equação de movimento em nível do elemento:

$$\mathbf{M}_e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}_e(t) dt + \mathbf{C}_e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\mathbf{U}}_e(t) dt + \mathbf{K}_e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{U}_e(t) dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}_e(t) dt. \quad (4.1)$$

As integrais da Equação 4.1 são computadas pelas aproximações adotadas no método de SOARES JR [15]:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \ddot{\mathbf{U}}_e(t) dt \approx \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_e^n, \quad (4.2)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\mathbf{U}}_e(t) dt \approx \mathbf{U}_e^{n+1} - \mathbf{U}_e^n, \quad (4.3)$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{U}_e(t) dt \approx \Delta t \mathbf{U}_e^n + \frac{1}{2} \alpha_e \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}_e^n + \frac{1}{2} \gamma_e \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1}, \quad (4.4)$$

onde  $\alpha_e$  e  $\gamma_e$  são os parâmetros da nova abordagem, calculados para cada elemento. Desta forma, tais parâmetros podem assumir uma diferente distribuição espacial. O deslocamento  $\mathbf{U}^{n+1}$  é aproximado por:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \Delta t \dot{\mathbf{U}}^n + \frac{1}{2} \Delta t \dot{\mathbf{U}}^{n+1}. \quad (4.5)$$

Ao substituir as Equações 4.2 a 4.5 na Equação 4.1, obtém-se a relação recursiva:

$$\left( \mathbf{M}_e + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}_e + \frac{1}{2} \gamma_e \Delta t^2 \mathbf{K}_e \right) \dot{\mathbf{U}}_e^{n+1} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}_e(t) dt + \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{U}}_e^n - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{U}}_e^n - \mathbf{K}_e \left( \Delta t \mathbf{U}_e^n + \frac{1}{2} \alpha_e \Delta t^2 \dot{\mathbf{U}}_e^n \right). \quad (4.6)$$

Portanto, até aqui a nova abordagem proposta é a reprodução do método de SOARES JR [15], desconsiderando-se a variação temporal dos parâmetros proposta em [15]. A marcha no tempo é estabelecida após realizar o procedimento de *assembly* das matrizes locais. A velocidade  $\dot{\mathbf{U}}^{n+1}$  é computada a partir da Equação 4.6 e posteriormente o deslocamento  $\mathbf{U}^{n+1}$  é computado pela Equação 4.5. Para a integração de  $\mathbf{P}(t)$ , pode-se adotar diversos métodos numéricos sem afetar significativamente o resultado final da análise. No presente trabalho será adotada a aproximação pela Regra Trapezoidal:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{P}(t) dt \approx \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n). \quad (4.7)$$

Será fornecido pelo usuário uma propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  para cada elemento a fim de calcular os parâmetros  $\alpha_e$  e  $\gamma_e$  do método. Para os elementos onde não há a necessidade de amortecimento numérico local, deve-se adotar  $a^e = 0$  e para os elementos onde existe tal necessidade,  $a^e > 0$  deve ser adotado. Portanto, para  $a^e = 0$ , os parâmetros são calculados conforme SOARES JR [15]:

$$\gamma_e = \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{1}{4} \omega_e^{max} \Delta t \right), \quad (4.8)$$

$$\alpha_e = 1 - \gamma_e. \quad (4.9)$$

Já para valores de  $a^e > 0$ , os parâmetros são calculados pela abordagem de SOARES JR [10] (com modificações para adequar ao método proposto):

$$\gamma_e = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh(a^e \omega_e^{max} \Delta t), \quad (4.10)$$

$$\alpha_e = 2(2\gamma_e)^{\frac{1}{2}} - \gamma_e - 1, \quad (4.11)$$

onde a variável  $\omega_e^{max}$  representa a maior frequência natural do elemento, calculada a partir da resolução do problema de autovalor generalizado em nível do elemento, definido por:

$$\mathbf{K}_e \Phi_e = \omega_e^2 \mathbf{M}_e \Phi_e. \quad (4.12)$$

A seguir é apresentada a implementação passo-a-passo da nova abordagem e posteriormente suas propriedades são discutidas.

---

**Algoritmo 4.1:** Solução passo-a-passo da nova abordagem proposta.

---

1. Montar as matrizes locais  $\mathbf{K}_e$ ,  $\mathbf{M}_e$  e  $\mathbf{C}_e$ .
2. Inicializar  $\mathbf{U}^0$  e  $\dot{\mathbf{U}}^0$  e selecionar o intervalo de tempo  $\Delta t$  da análise.
3. Selecionar a propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  de cada elemento.
4. Calcular  $\omega_e^{max}$  para cada elemento:

$$\mathbf{K}_e \Phi_e = \omega_e^2 \mathbf{M}_e \Phi_e$$

5. Calcular os parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  para cada elemento:

- 5.1. Se  $a^e = 0$ :

$$\gamma_e = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{4}\omega_e^{max}\Delta t\right)$$

$$\alpha_e = 1 - \gamma_e$$

- 5.2. Se  $a^e > 0$ :

$$\gamma_e = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh(a^e \omega_e^{max} \Delta t)$$

$$\alpha_e = 2(2\gamma_e)^{\frac{1}{2}} - \gamma_e - 1$$

6. Calcular as matrizes auxiliares no referencial local:

$$\mathbf{AUX}_{1e} = \mathbf{M}_e + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{C}_e + \frac{1}{2}\gamma_e \Delta t^2 \mathbf{K}_e$$

$$\mathbf{AUX}_{2e} = \mathbf{M}_e - \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{C}_e - \frac{1}{2}\alpha_e \Delta t^2 \mathbf{K}_e$$

$$\mathbf{AUX}_{3e} = \Delta t \mathbf{K}_e$$

7. Realizar o *assembly* das matrizes auxiliares.

8. Triangularizar  $\mathbf{AUX}_1$ :  $\mathbf{AUX}_1 = \mathbf{LDL}^T$

9. Para cada passo de tempo:

- a. Calcular o vetor de carregamentos efetivo no passo  $t + \Delta t$ :

$$\hat{\mathbf{P}}^{n+1} = \frac{1}{2}\Delta t (\mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{P}^n) + \mathbf{AUX}_2 \dot{\mathbf{U}}^n - \mathbf{AUX}_3 \mathbf{U}^n$$

- b. Resolver em termos de velocidade para o tempo  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{LDL}^T \dot{\mathbf{U}}^{n+1} = \hat{\mathbf{P}}^{n+1}$$

- c. Calcular o deslocamento no tempo  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\Delta t (\dot{\mathbf{U}}^n + \dot{\mathbf{U}}^{n+1})$$


---

## 4.2 Propriedades da nova metodologia

Para analisar as propriedades do método em questão, retorna-se à equação de movimento que descreve a oscilação livre de um modelo com 1 grau de liberdade, que é dada por [5]:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0. \quad (4.13)$$

Definindo a frequência natural  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (4.14)$$

a taxa de amortecimento  $\xi$ :

$$\xi = \frac{c}{2m\omega}, \quad (4.15)$$

e substituindo as Equações 4.14 e 4.15 na Equação 4.13, pode-se reescrever a equação de movimento em termos de  $\omega$  e  $\xi$ :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2u = 0. \quad (4.16)$$

Considerando a equação de movimento em termos de  $\omega$  e  $\xi$  descrita pela Equação 4.16, pode-se obter a relação recursiva do presente método, dada por [10]:

$$\begin{bmatrix} u^{n+1} \\ \dot{u}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^n \\ \dot{u}^n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u^n \\ \dot{u}^n \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

onde  $\mathbf{A}$  corresponde à matriz de amplificação. Para o método em questão, os termos desta matriz são:

$$A_{11} = \frac{1 + \xi\omega\Delta t + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\omega^2\Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t + \frac{1}{2}\gamma\omega^2\Delta t^2}, \quad (4.18)$$

$$A_{12} = \frac{\left[1 + \frac{1}{4}(\gamma - \alpha)\omega^2\Delta t^2\right] \Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t + \frac{1}{2}\gamma\omega^2\Delta t^2}, \quad (4.19)$$

$$A_{21} = \frac{[-\omega^2 \Delta t^2] \left( \frac{1}{\Delta t} \right)}{1 + \xi \omega \Delta t + \frac{1}{2} \gamma \omega^2 \Delta t^2}, \quad (4.20)$$

$$A_{22} = \frac{1 - \xi \omega \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t + \frac{1}{2} \gamma \omega^2 \Delta t^2}. \quad (4.21)$$

### 4.2.1 Convergência

A análise da convergência do método é estudada a partir da expansão em série de Taylor da matriz de amplificação do método. Os termos desta expansão, comparados aos termos da expansão da matriz de amplificação analítica irão definir a ordem de precisão do método.

Sendo assim, a expansão da matriz de amplificação analítica em série de Taylor é descrita por [10]:

$$A_{11}^a = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{3} \xi \omega^3 \Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.22)$$

$$A_{12}^a = \Delta t - \xi \omega \Delta t^2 - \frac{1}{6} (1 - 4\xi^2) \omega^2 \Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.23)$$

$$A_{21}^a = -\omega^2 \Delta t + \xi \omega^3 \Delta t^2 + \frac{1}{6} (1 - 4\xi^2) \omega^4 \Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.24)$$

$$A_{22}^a = 1 - 2\xi \omega \Delta t - \left( \frac{1}{2} - 2\xi^2 \right) \omega^2 \Delta t^2 + \frac{2}{3} (\xi - 2\xi^3) \omega^3 \Delta t^3 + O(\Delta t^4). \quad (4.25)$$

Já para a nova abordagem proposta, a expansão em série de Taylor da matriz de amplificação é dada por [15]:

$$A_{11} = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 \Delta t^2 + \frac{1}{2} \xi \omega^3 \Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.26)$$

$$A_{12} = \Delta t - \xi \omega \Delta t^2 - \left( \frac{1}{4} (\gamma + \alpha) - \xi^2 \right) \omega^2 \Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.27)$$

$$A_{21} = -\omega^2 \Delta t + \xi \omega^3 \Delta t^2 + \left( \frac{1}{2} \gamma - \xi^2 \right) \omega^4 \Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.28)$$

$$A_{22} = 1 - 2\xi \omega \Delta t - \left( \frac{1}{2} (\gamma + \alpha) - 2\xi^2 \right) \omega^2 \Delta t^2 + \left( \frac{1}{2} (3\gamma + \alpha) \xi - 2\xi^3 \right) \omega^3 \Delta t^3 + O(\Delta t^4). \quad (4.29)$$

Ao comparar a expansão em série de Taylor da matriz de amplificação analítica com a expansão em série de Taylor da matriz de amplificação da nova metodologia, pode-se concluir que o método atinge precisão de segunda ordem se  $\gamma + \alpha = 1$ .

Quando for adotado  $a^e = 0$  (sem inserção de amortecimento numérico local), os parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  sempre estarão localizados entre os limites (Equações 4.8 e 4.9):

$$0 \leq \gamma_e \leq 0,5, \quad (4.30)$$

$$0,5 \leq \alpha_e \leq 1,0. \quad (4.31)$$

Sendo que, matematicamente, o valor mínimo para o parâmetro  $\gamma_e$  é  $\gamma_e^{min} = 0$ , o que leva a  $\alpha_e = 1,0$ . Já o valor máximo do parâmetro  $\gamma_e$  é  $\gamma_e^{max} = 0,5$ , levando a  $\alpha_e = 0,5$ .

Portanto, independentemente dos valores de  $\omega_e^{max}$ , a expressão  $\gamma + \alpha = 1$  sempre será satisfeita e, com isso, a metodologia atinge precisão de segunda ordem sempre que for adotado a propriedade de amortecimento numérico  $a^e = 0$  (sem inserção de dissipação local).

Para o caso com inserção de amortecimento numérico local ( $a^e > 0$ ), os parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  são calculados pelas Equações 4.10 e 4.11 e, portanto, a expansão em série de Taylor da matriz de amplificação é [10]:

$$A_{11} = 1 - \frac{1}{2}\omega^2\Delta t^2 + \frac{1}{2}\xi\omega^3\Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.32)$$

$$A_{12} = \Delta t - \xi\omega\Delta t^2 - \left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\omega^2\Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.33)$$

$$A_{21} = -\omega^2\Delta t + \xi\omega^3\Delta t^2 + \left(\frac{1}{4} - \xi^2\right)\omega^4\Delta t^3 + O(\Delta t^4), \quad (4.34)$$

$$A_{22} = 1 - 2\xi\omega\Delta t - \left(\frac{1}{2} - 2\xi^2\right)\omega^2\Delta t^2 + \left(-\frac{3}{2}a^e\omega_e^{max}\omega^2 + (\xi - 2\xi^3)\omega^3\right)\Delta t^3 + O(\Delta t^4). \quad (4.35)$$

Logo, ao comparar a expansão em série de Taylor da matriz de amplificação da nova abordagem proposta com a expansão da matriz de amplificação analítica, conclui-se que independente dos valores de  $a^e$  e  $\omega_e^{max}$ , o método atinge precisão de

segunda ordem.

É importante ressaltar que a inserção de amortecimento numérico para a presente metodologia é local, realizada somente em alguns elementos isolados (onde houver necessidade). Isto significa que, além de apresentar precisão de segunda ordem, o usuário poderá escolher o elemento que irá receber dissipação numérica e a magnitude da dissipação (controlada pelo parâmetro  $a^e$ ) em cada elemento. Ao se comparar com métodos clássicos, como o método de Newmark, a nova metodologia se mostra mais vantajosa. No método de Newmark, a inserção de amortecimento numérico é global, não sendo possível escolher o elemento que irá receber dissipação. Uma vez que o método de Newmark atinge somente precisão de primeira ordem quando o amortecimento numérico é ativado, toda a estrutura será resolvida com precisão de primeira ordem.

## 4.2.2 Estabilidade

Um método é dito estável quando a matriz  $\mathbf{A}$  não amplifica erros com o avanço da marcha no tempo. Pode-se classificar os métodos como incondicionalmente instáveis, incondicionalmente estáveis ou condicionalmente estáveis. Métodos incondicionalmente instáveis sempre irão apresentar erros que amplificam com a marcha no tempo independente do passo de tempo adotado na análise. Ao contrário, métodos incondicionalmente estáveis não apresentam tais erros, independentemente do passo de tempo adotado. Por fim, métodos condicionalmente estáveis possuem um valor crítico de intervalo de tempo para o qual a estabilidade é garantida. Ou seja, acima deste valor o método é instável e abaixo deste valor, estável. As condições necessárias para garantir estabilidade são [1, 9]:

- Raio espectral da matriz de amplificação menor ou igual a 1 ( $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$ )
- Autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  de multiplicidade maior que 1 são estritamente menores que 1 em módulo.

O raio espectral é dado pela máxima magnitude dos autovalores da matriz de

amplificação  $\mathbf{A}$ . Para esta metodologia, os autovalores são dados por:

$$\lambda_{1,2}(\mathbf{A}) = A_1 \pm (A_1^2 - A_2)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.36)$$

onde  $A_1$  é metade do traço da matriz  $\mathbf{A}$ :

$$A_1 = \frac{1 + \frac{1}{4}(-\gamma - \alpha - 1)\Omega^2}{1 + \xi\Omega + \frac{1}{2}\gamma\Omega^2}, \quad (4.37)$$

e  $A_2$  é o determinante da matriz  $\mathbf{A}$ :

$$A_2 = \frac{1 - \xi\Omega + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\Omega^2}{1 + \xi\Omega + \frac{1}{2}\gamma\Omega^2}, \quad (4.38)$$

sendo  $\Omega$  a frequência de amostragem:

$$\Omega = \omega\Delta t. \quad (4.39)$$

Ao analisar o raio espectral da matriz  $\mathbf{A}$  observa-se que este método pode ser incondicionalmente estável, condicionalmente estável ou incondicionalmente instável, dependendo dos valores adotados para os parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$ . Essas três regiões de estabilidade da nova abordagem e o comportamento do raio espectral são mostrados na Figura 4.1.

Quando for adotado  $a^e = 0$  (sem inserção de amortecimento numérico), o método estará localizado na linha  $AB$ , que divide as regiões condicionalmente estável e incondicionalmente instável. O ponto  $A$  ( $\gamma_e = 0$  e  $\alpha_e = 1$ ) corresponde ao método das Diferenças Centrais e o ponto  $B$  ( $\gamma_e = 0,5$  e  $\alpha_e = 0,5$ ) corresponde à Regra Trapezoidal. Portanto, a nova abordagem estará sempre localizada em um ponto intermediário entre estes métodos. Com isso, ressalta-se uma importante característica do método: como o método das Diferenças Centrais possui alongamento de período negativo e a Regra Trapezoidal possui alongamento de período positivo, a nova abordagem apresenta menores erros provenientes de alongamento de período,

proporcionando uma técnica mais eficaz. Além disso, a precisão da nova abordagem sempre será melhor ou, no mínimo, igual à Regra Trapezoidal.

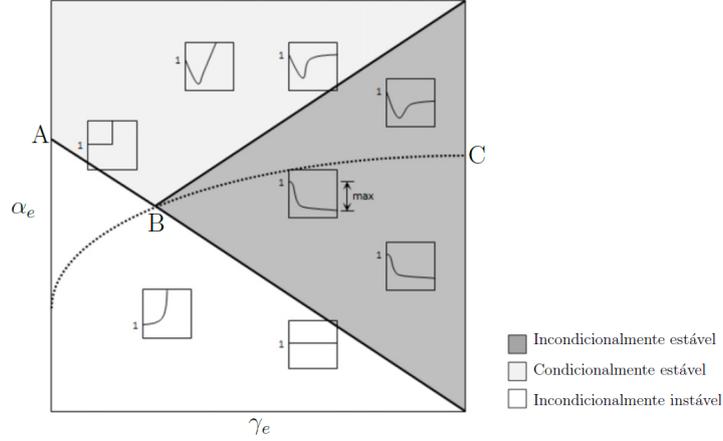


Figura 4.1: Regiões de estabilidade do método e comportamento do raio espectral no plano  $\gamma_e - \alpha_e$ . Adaptado de [10].

Portanto, em rigor o método é condicionalmente estável quando o amortecimento numérico não é inserido na análise. A frequência de amostragem crítica é dada por:

$$\Omega_c = 2(\alpha - \gamma)^{-1/2} \quad (4.40)$$

Ou seja, para valores de  $\Omega_c > \Omega$  o método é estável. Sendo assim, o cálculo dos parâmetros, realizado através das Equações 4.8 e 4.9, é baseado na frequência de amostragem máxima  $\Omega_{max}$  do elemento. Como  $\Omega_c > \Omega_{max}$  para qualquer modelo em análise, a estabilidade será sempre garantida para os casos sem inserção de amortecimento numérico.

Já para os casos onde for adotado amortecimento numérico na análise ( $a^e > 0$ ), o método estará localizado na curva tracejada entre os pontos  $B$  e  $C$  da Figura 4.1, sendo, portanto, incondicionalmente estável. Com isso, a estabilidade é garantida independente do valor adotado para a propriedade de amortecimento numérico  $a^e$ .

O raio espectral é exibido em função de  $\Omega_e$  variando de 0,5 em 0,5 do valor mínimo de 0,5 até o máximo de 3,0 ( $\Omega_e = \omega_e^{max} \Delta t$ ). Observa-se que para o caso sem amortecimento numérico (Figura 4.2 (a)) o comportamento do raio espectral (curva iniciando em 1,0 e atingindo valor elevado) demonstra que o método é condicionalmente estável. Para os casos quando há inserção de amortecimento numérico, o raio

espectral é sempre inferior a 1,0 (Figuras 4.2 (b), 4.2 (c) e 4.2 (d) ) e, portanto, o método é incondicionalmente estável.

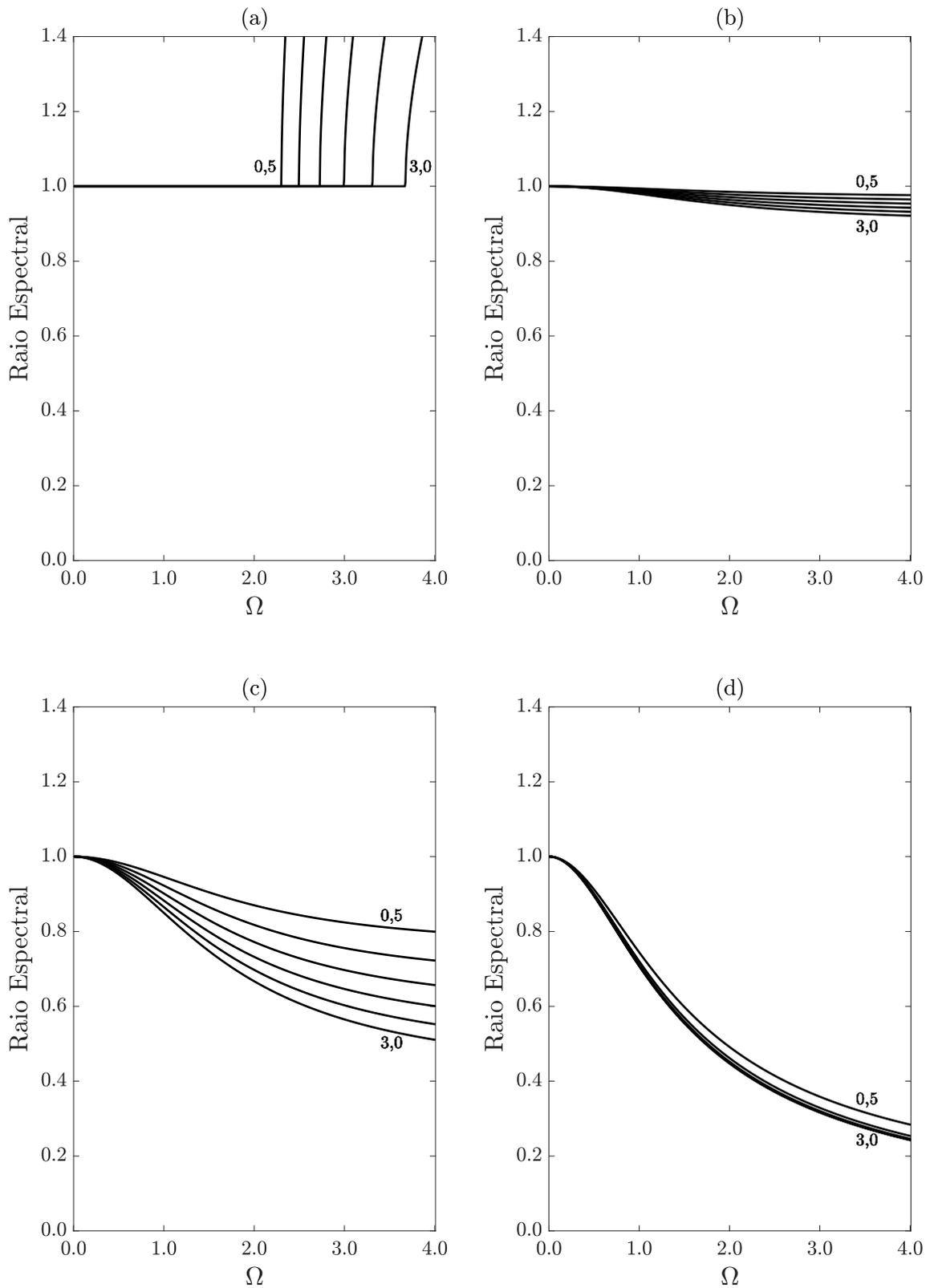


Figura 4.2: Raio espectral para  $\Omega_e = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5$  e  $3,0$ . (a)  $a^e = 0,00$ ; (b)  $a^e = 0,01$ ; (c)  $a^e = 0,10$  e (d)  $a^e = 1,00$ .

### 4.2.3 Acurácia

A acurácia do novo método será abordada a partir dos gráficos de alongamento de período, decaimento de amplitude e fator de amplitude, obtidos de acordo com SOARES JR [10, 15].

Para o alongamento de período, decaimento de amplitude e o fator de amplitude são mostradas as curvas com  $\omega_e^{max}/\omega$  variando de 0,25 em 0,25 até o máximo de 1,50 (somente as curvas para  $\omega_e^{max}/\omega = 0,25$  e  $\omega_e^{max}/\omega = 1,50$  são identificadas). Para  $a^e = 0$  reitera-se que são utilizadas as Equações 4.8 e 4.9 para o cômputo dos parâmetros de integração. Analogamente, para  $a^e > 0$  também foram plotadas as curvas com  $\omega_e^{max}/\omega$  variando de 0,25 em 0,25 até o máximo de 1,50. Neste caso os parâmetros são calculados pelas Equações 4.10 e 4.11.

Além do novo método, são plotados em todos os gráficos o alongamento de período apresentado pela Regra Trapezoidal (linha tracejada) e também pelo método das Diferenças Centrais (linha pontilhada). Conforme comentando na seção 4.2.2, quando não há inserção de amortecimento numérico, o alongamento de período da nova abordagem se situa em um intermediário entre a Regra Trapezoidal (positivo) e o método das Diferenças Centrais (negativo), permitindo menores erros de alongamento de período (Figura 4.3 (a)). Observa-se que em todos os casos o novo método é, no mínimo, igual à Regra Trapezoidal quando sem inserção de amortecimento numérico (na pior das hipóteses a Regra Trapezoidal é reproduzida). Para os casos com amortecimento numérico, observa-se que o alongamento de período é maior (Figuras 4.4 (b), 4.4 (c) e 4.4 (d)) que o apresentado pela Regra Trapezoidal, fato que é compensado pela dissipação de frequências espúrias.

O decaimento de amplitude apresentado pelo novo método é nulo para o caso sem amortecimento numérico (Figura 4.4 (a)) e positivo quando há inserção de amortecimento (Figuras 4.4 (b), 4.4 (c) e 4.4 (d)).

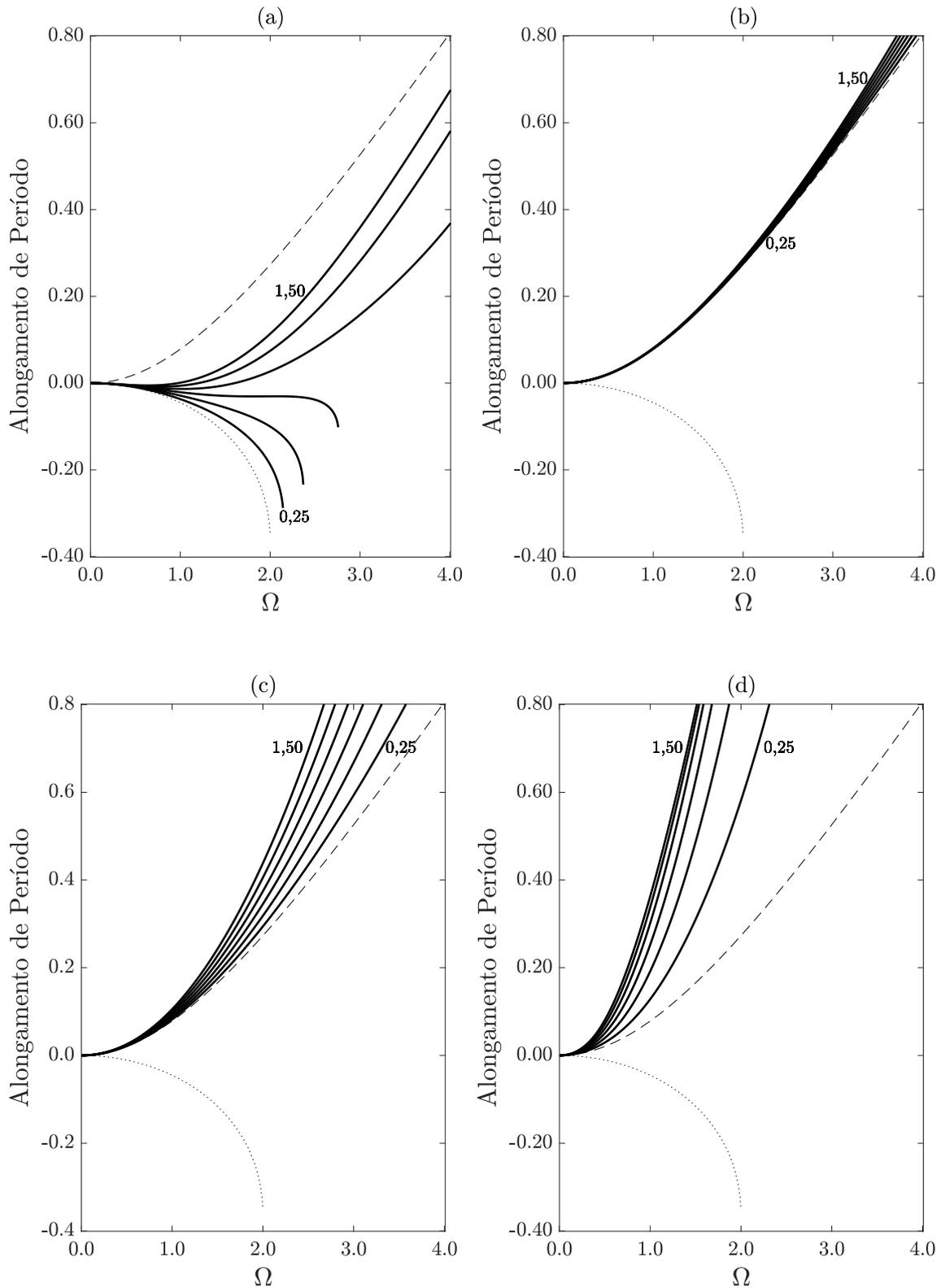


Figura 4.3: Alongamento de período para  $\omega_e^{max}/\omega = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25$  e  $1,50$ . (a)  $a^e = 0,00$ ; (b)  $a^e = 0,01$ ; (c)  $a^e = 0,10$  e (d)  $a^e = 1,00$ . Linha tracejada corresponde à Regra Trapezoidal e linha pontilhada corresponde ao método das Diferenças Centrais.

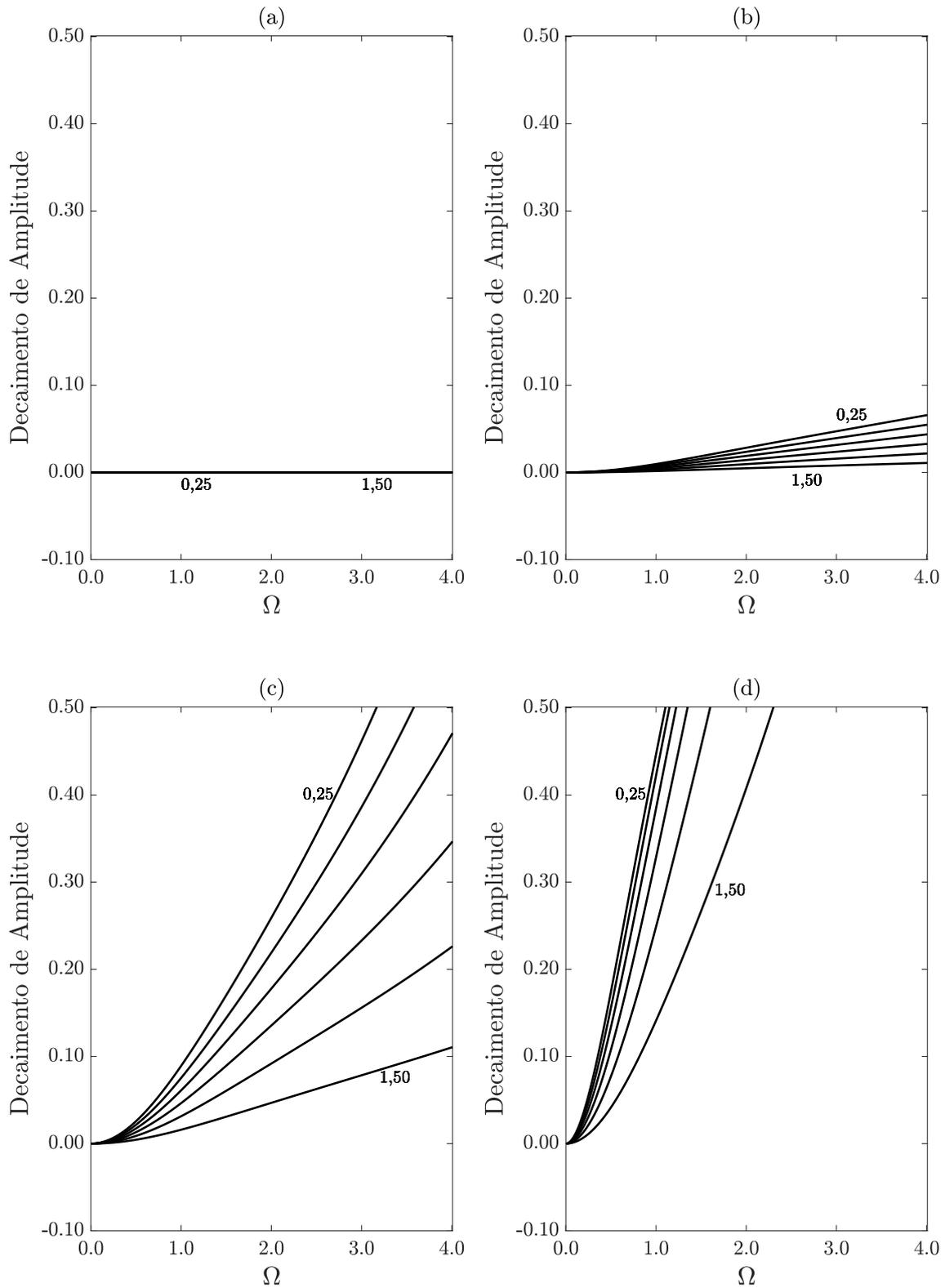


Figura 4.4: Decaimento de amplitude para  $\omega_e^{max}/\omega = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25$  e  $1,50$ . (a)  $a^e = 0,00$ ; (b)  $a^e = 0,01$ ; (c)  $a^e = 0,10$  e (d)  $a^e = 1,00$ .

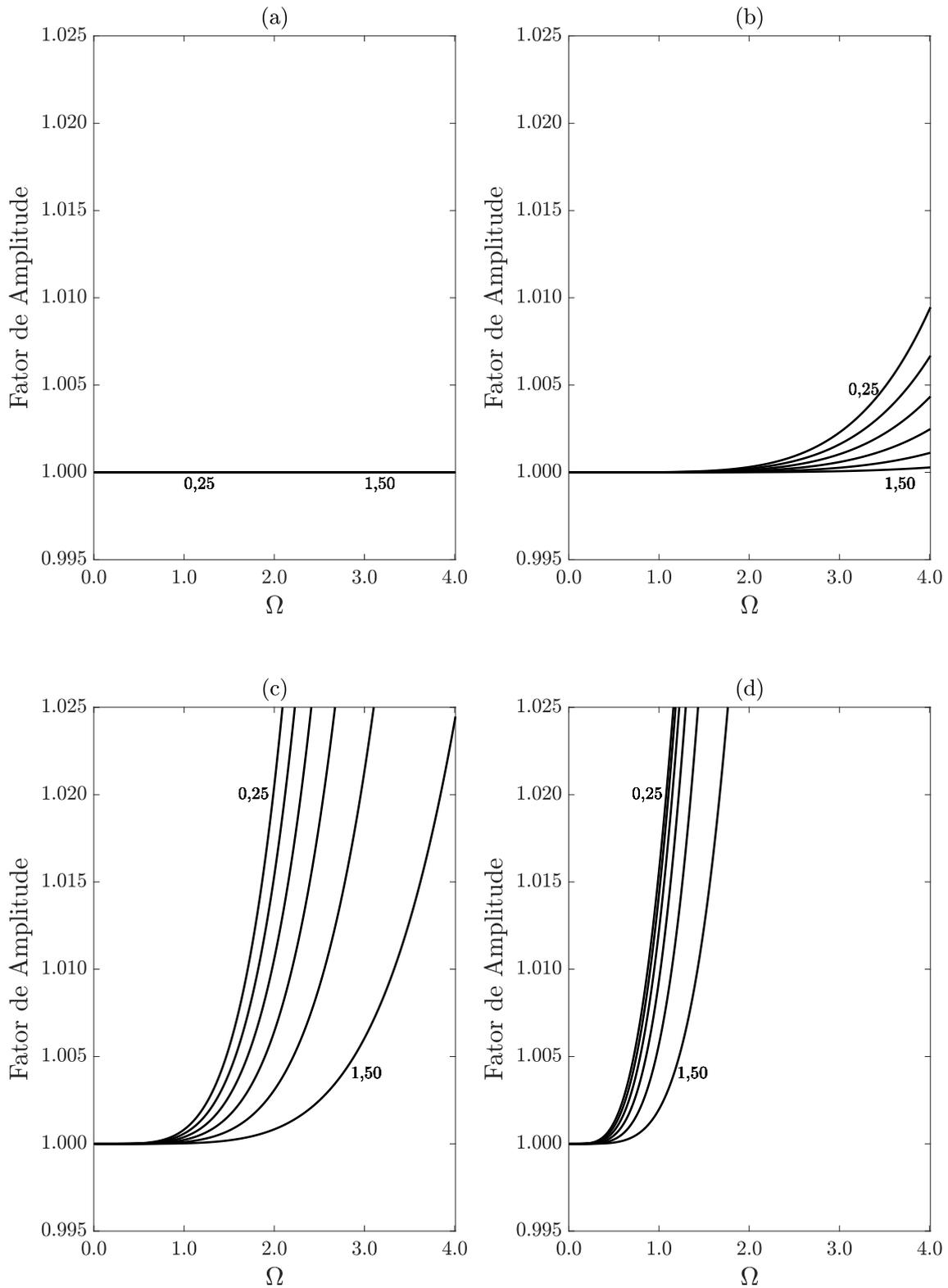


Figura 4.5: Fator de amplitude para  $\omega_e^{max}/\omega = 0,25; 0,50; 0,75; 1,00; 1,25$  e  $1,50$ .  
(a)  $a^e = 0,00$ ; (b)  $a^e = 0,01$ ; (c)  $a^e = 0,10$  e (d)  $a^e = 1,00$ .

# Capítulo 5

## Resultados e Discussões

Neste capítulo serão apresentados os resultados de cinco exemplos de aplicação da nova abordagem proposta e as comparações com métodos consagrados e soluções analíticas (quando existentes). O primeiro exemplo trata de um sistema massa-mola com três graus de liberdade (seção 5.1). Posteriormente, são apresentados exemplos com vários graus de liberdade, sendo uma barra homogênea com uma extremidade livre e a outra engastada (seção 5.2), uma barra heterogênea com uma extremidade livre e a outra engastada (seção 5.3), uma viga biapoiada (seção 5.4) e um pórtico plano (seção 5.5) analisados. Os resultados demonstraram o elevado desempenho da metodologia proposta.

### 5.1 Sistema massa-mola

A primeira aplicação foi extraída do trabalho de BATHE e NOH [34] e, apesar de simples, é possível verificar importantes propriedades dos métodos a partir deste exemplo. Trata-se de um sistema massa-mola com três graus de liberdade, conforme mostrado na Figura 5.1.

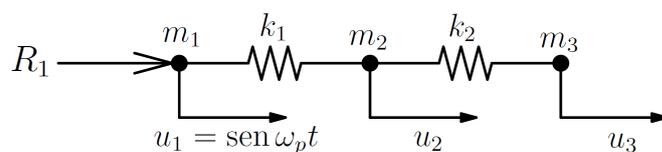


Figura 5.1: Sistema massa-mola com três graus de liberdade.

Para o modelo em análise, foi considerado deslocamento prescrito no nó 1, definido por:

$$u_1 = \text{sen } \omega_p t. \quad (5.1)$$

Sendo  $\omega_p = 1, 2$  e as propriedades físicas do sistema  $k_1 = 10^7$ ,  $k_2 = 1$ ,  $m_1 = 0$ ,  $m_2 = 1$ ,  $m_3 = 1$ . A equação que governa este sistema é dada por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Por se tratar de um problema com deslocamento prescrito no primeiro nó, pode-se reduzir o sistema aos deslocamentos incógnitos:

$$\begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 u_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Portanto, a reação  $R_1$  é dada por:

$$R_1 = m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 - k_1 u_2. \quad (5.4)$$

Com o intuito de comparar com os resultados, a mesma análise realizada por BATHE e NOH [34] foi reproduzida. Desta forma, o intervalo de tempo adotado foi  $\Delta t = 0,2618s$ , foi considerado deslocamento prescrito no 1º nó (definido pela equação 5.1) e condições iniciais nulas para os nós 2 e 3. Entretanto, buscando demonstrar o bom comportamento da metodologia proposta quanto ao alongamento de período e decaimento de amplitude na análise de longo prazo, foi utilizado o tempo total  $T = 100s$ . Portanto, além da nova abordagem, os métodos utilizados foram:

- Regra Trapezoidal - Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2} - \beta_N = \frac{1}{4}$ )
- Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2} - \beta_N = \frac{1}{2}$ )
- Newmark ( $\gamma_N = \frac{3}{10} - \beta_N = \frac{11}{20}$ )

- Bathe -  $\Delta t$
- Bathe -  $2 \times \Delta t$

A comparação foi feita com o método de Bathe considerando o mesmo passo de tempo utilizado pelos outros métodos (Bathe -  $\Delta t$ ) e com o dobro do passo de tempo (Bathe -  $2 \times \Delta t$ ). Como este método se baseia na divisão de cada passo de tempo em dois subpassos iguais (ver seção 3.2), ao comparar com Bathe -  $2 \times \Delta t$  leva-se em conta o mesmo custo computacional para todos métodos. Além disso, é apresentada uma resposta de referência, calculada por superposição modal considerando-se apenas o modo de vibração mais baixo mais a correção estática [1, 34].

A propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  e os parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  (calculados automaticamente) de cada elemento para a metodologia proposta são apresentados na Tabela 5.1. Foi utilizado  $a^e = 1$  para o 1º elemento, com intuito de incluir amortecimento numérico máximo neste elemento e  $a^e = 0$  para o 2º elemento, ou seja, sem inserção de dissipação local neste elemento.

Tabela 5.1: Parâmetros utilizados para o método proposto.

| Elemento | $a^e$ | $\gamma_e$ | $\alpha_e$ |
|----------|-------|------------|------------|
| 1º       | 1     | 2          | 1          |
| 2º       | 0     | 0,0461     | 0,9539     |

Observou-se que todos os métodos apresentaram boa aproximação para o deslocamento do nó 2, sem exibir decaimento de amplitude ou alongamento de período significativos, mesmo para a análise com intervalo de tempo maior (Figuras 5.2 e 5.3).

A Regra Trapezoidal e o método de Newmark com  $\gamma_N = \frac{1}{2}$  e  $\beta_N = \frac{1}{2}$  apresentaram erros elevados na previsão da velocidade do nó 2 (Figura 5.4). Em contrapartida, a metodologia proposta e o método de Bathe exibiram bons resultados, além da rápida dissipação das frequências espúrias, o que não foi verificado em Newmark com  $\gamma_N = \frac{3}{10}$  e  $\beta_N = \frac{11}{20}$  (Figura 5.5 (a)). Entretanto, mesmo necessitando de mais

passos de tempo para estabilizar, Newmark ( $\gamma_N = \frac{3}{10} - \beta_N = \frac{11}{20}$ ) mostrou resposta satisfatória na análise a longo prazo (Figura 5.5 (b)).

A análise do nó 3 demonstra o desempenho superior da nova abordagem proposta (Figura 5.6). Observa-se na Figura 5.7 (a) que todos os métodos apresentam resposta satisfatória na análise de curto prazo. Entretanto, apenas o método proposto se manteve eficiente nos tempos finais da análise, sendo que os demais apresentam elevado decaimento de amplitude e alongamento de período (Figura 5.7 (b)).

O comportamento observado para o deslocamento do nó 3 repetiu-se também para a velocidade (Figura 5.8). Todos os métodos aproximaram de forma eficaz na análise de curto prazo (Figura 5.9 (a)), mas apenas a nova abordagem não apresentou alongamento de período e decaimento de amplitude elevados nos tempos finais da análise (Figura 5.9 (b)).

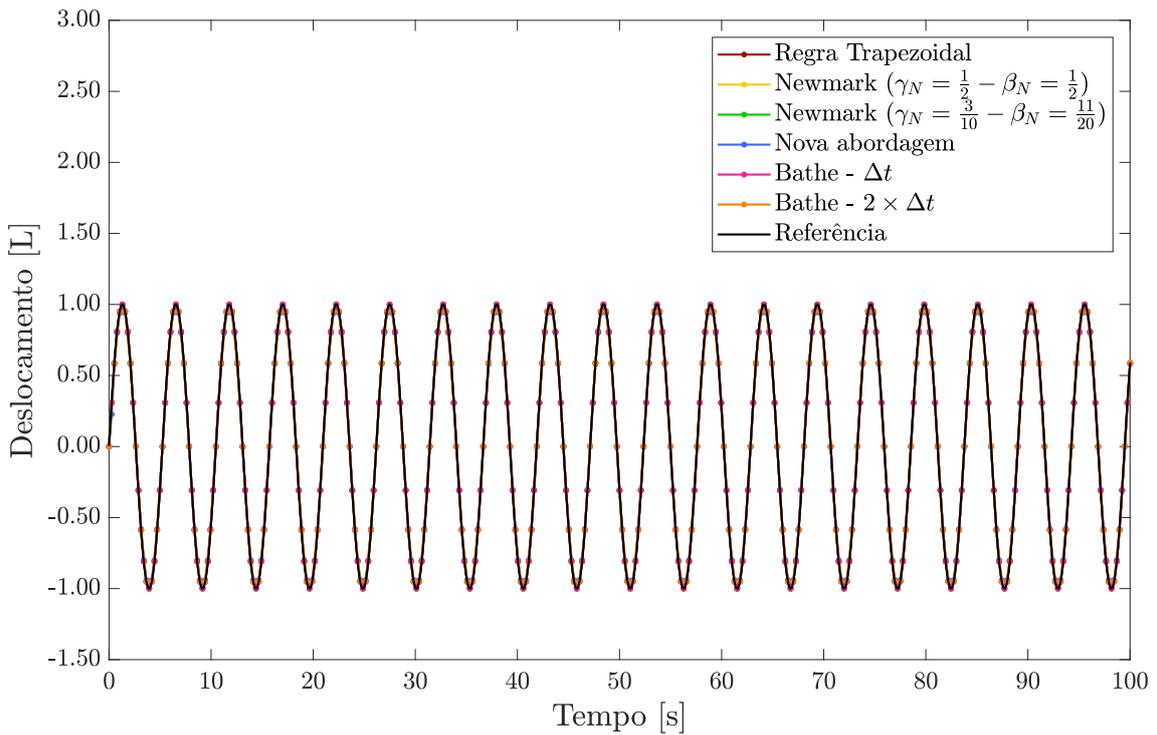


Figura 5.2: Deslocamento do nó 2 de 0 a 100s.

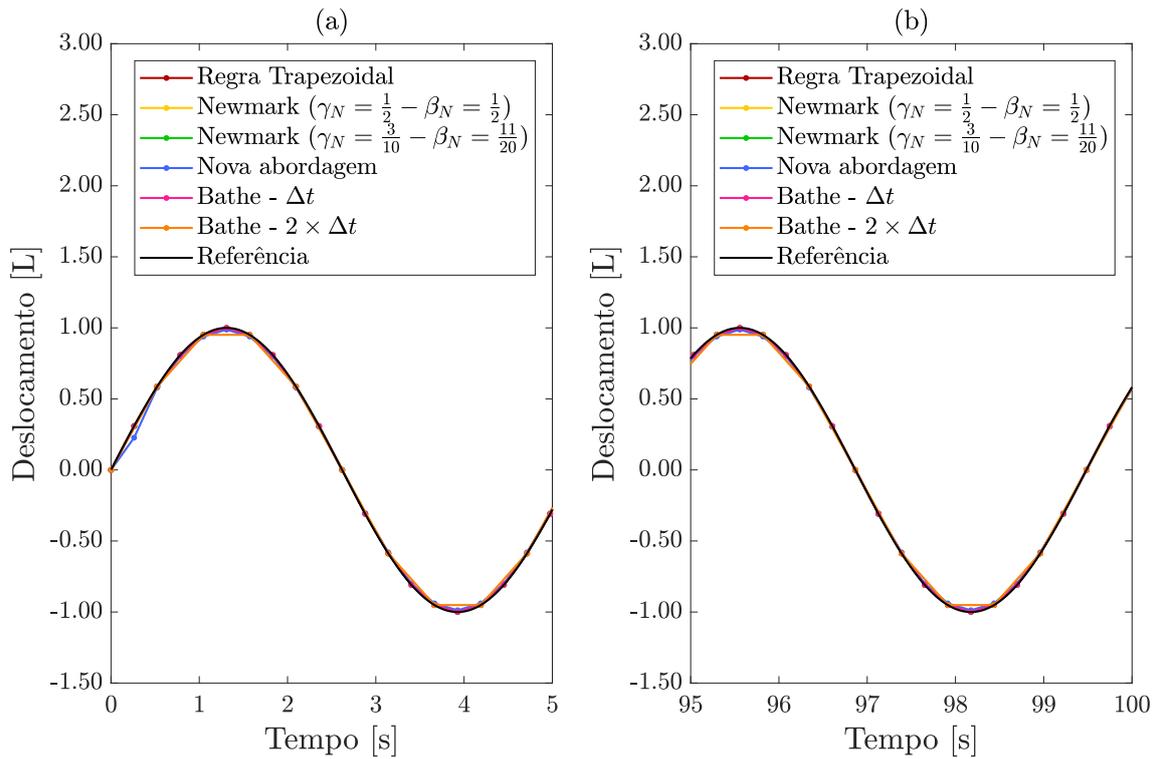


Figura 5.3: Deslocamento do nó 2: (a) de 0 a 5s e (b) de 95 a 100s.

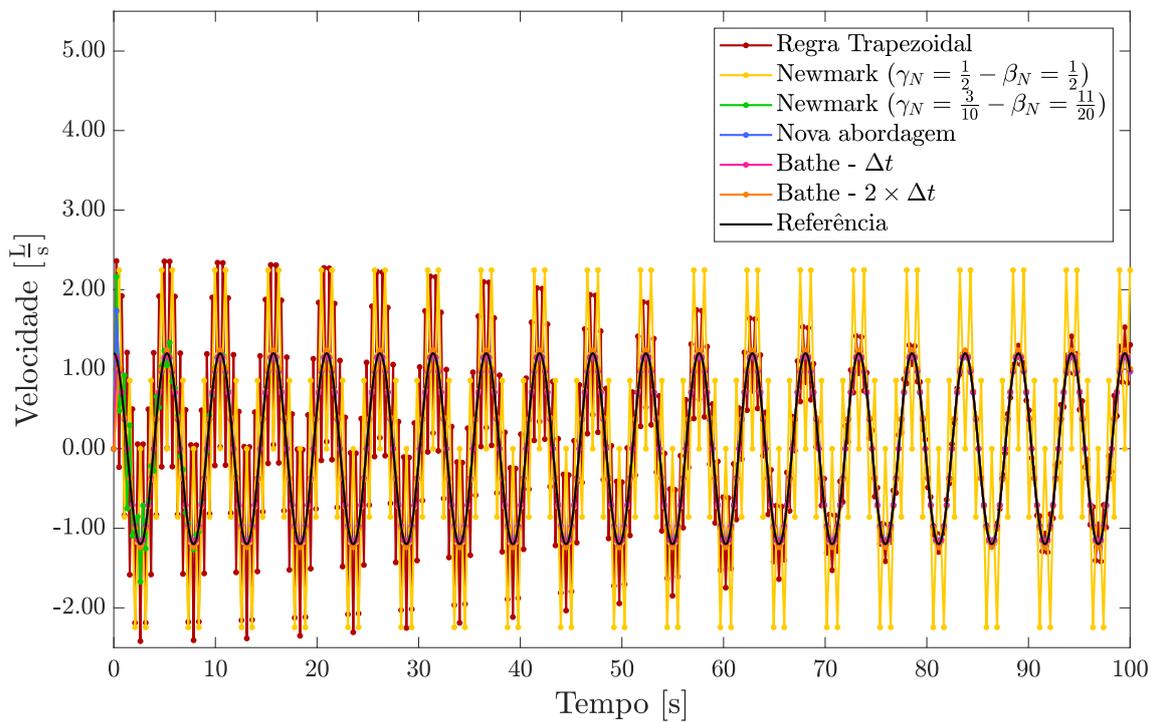


Figura 5.4: Velocidade do nó 2 de 0 a 100s.

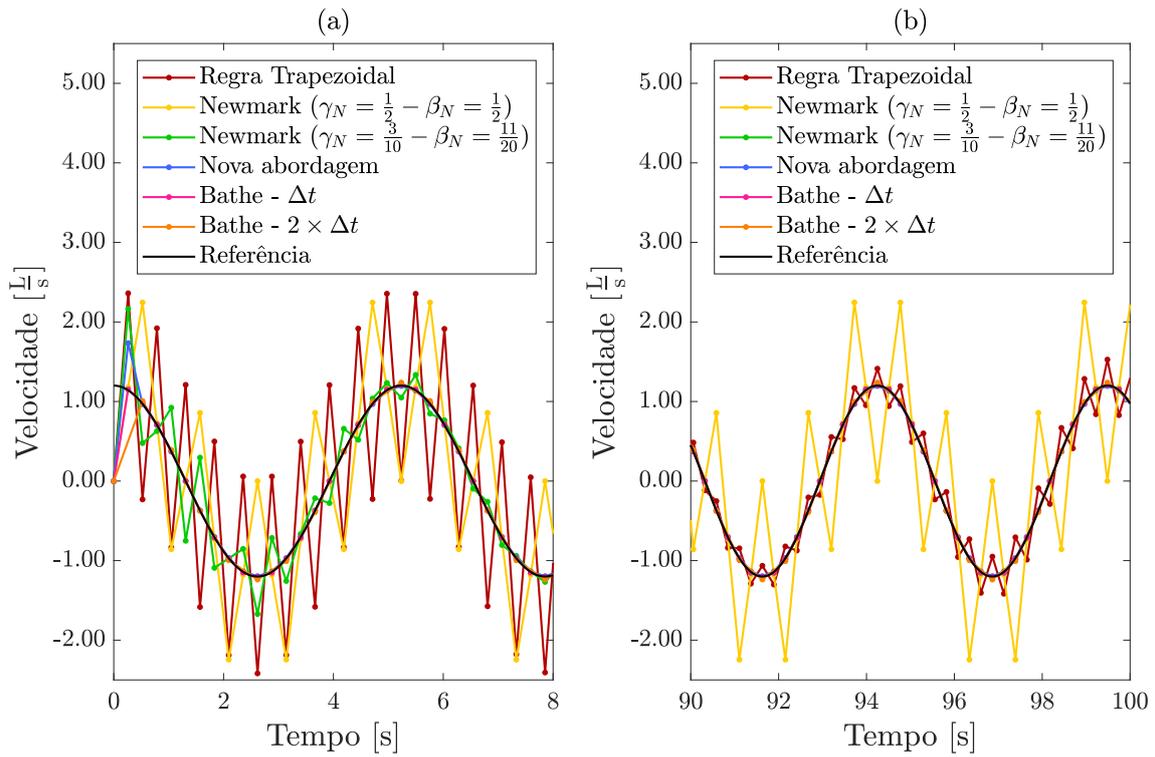


Figura 5.5: Velocidade do nó 2: (a) de 0 a 8s e (b) de 90 a 100s.

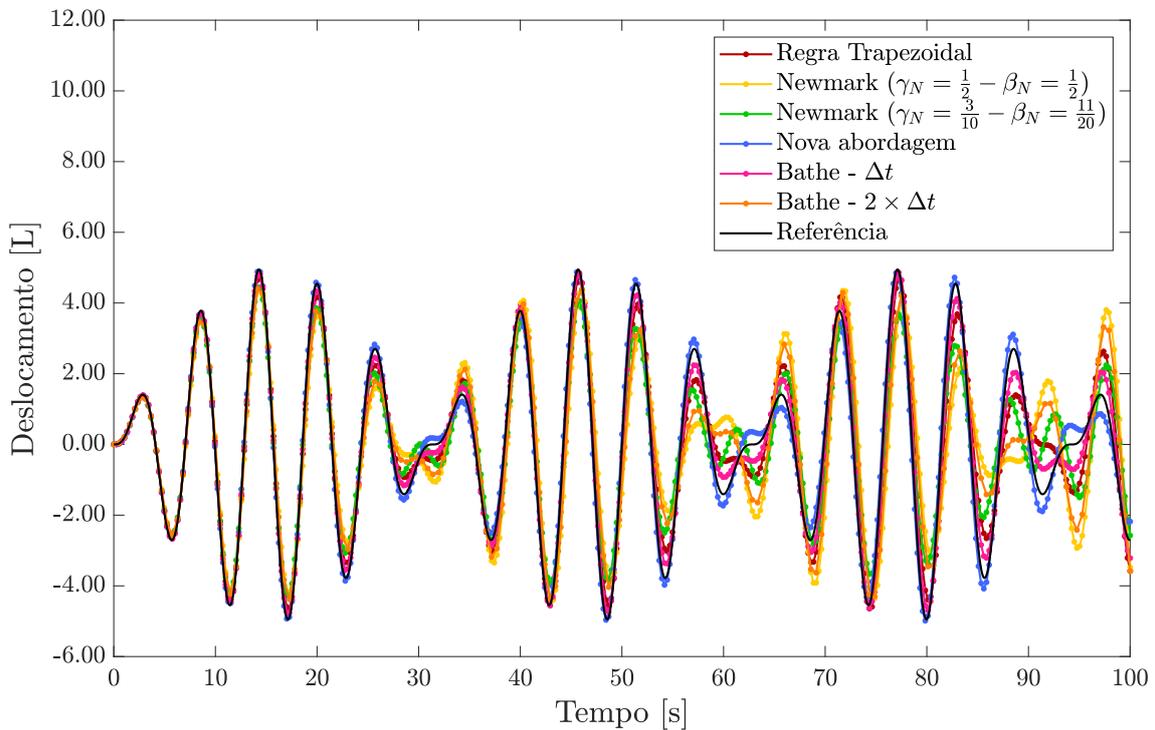


Figura 5.6: Deslocamento do nó 3 de 0 a 100s.

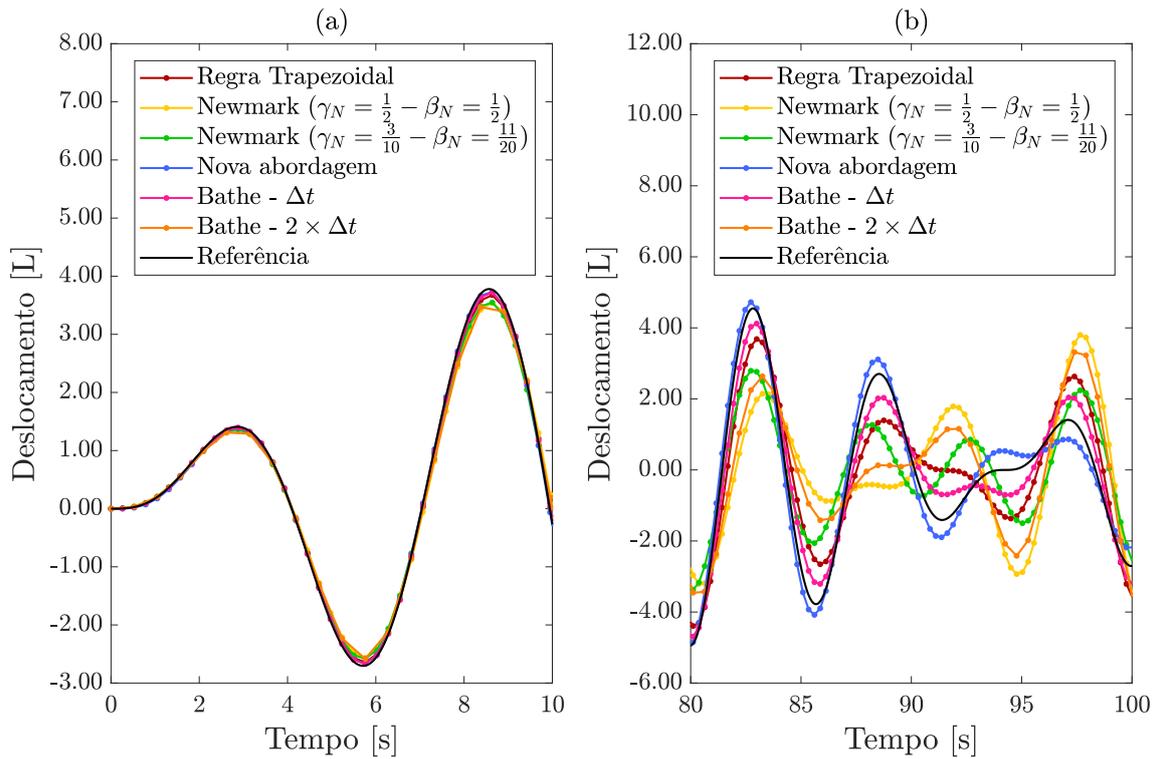


Figura 5.7: Deslocamento do nó 3: (a) de 0 a 10s e (b) de 80 a 100s.

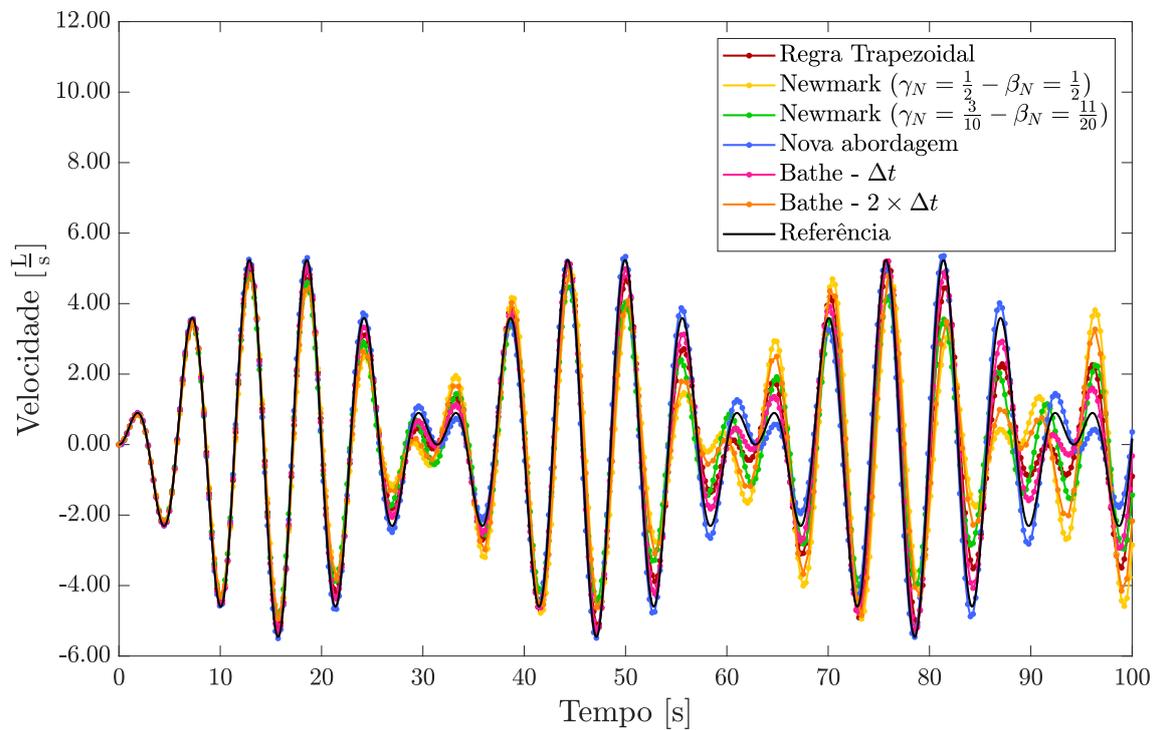


Figura 5.8: Velocidade do nó 3 de 0 a 100s.

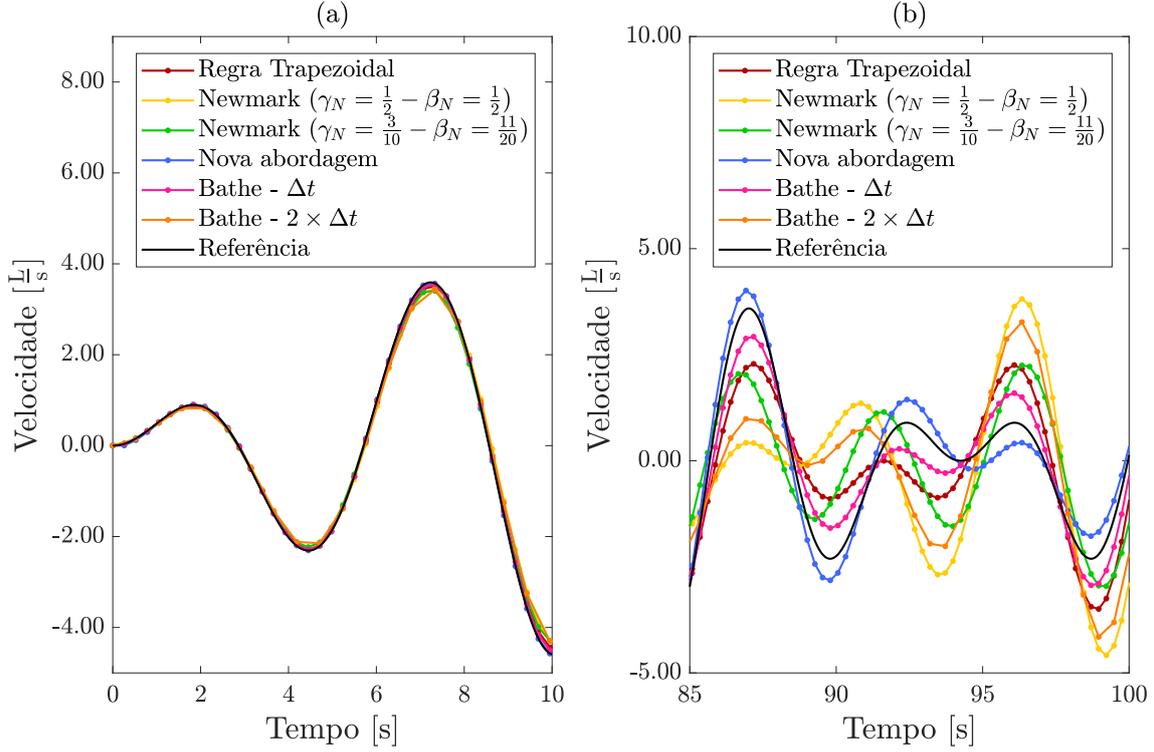


Figura 5.9: Velocidade do nó 3: (a) de 0 a 10s e (b) de 85 a 100s.

O erro relativo entre a resposta de referência e a resposta aproximada pode ser calculada pela seguinte equação:

$$\text{Erro} = \left[ \frac{\sum_{j=1}^{N_t} (u(t_j) - u_R(t_j))^2}{\sum_{j=1}^{N_t} (u_R(t_j))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \times 100\%, \quad (5.5)$$

onde  $N_t$  corresponde ao número total de passos de tempo,  $u(t_j)$  é a resposta aproximada no tempo  $t_j$  e  $u_R(t_j)$  a resposta de referência no tempo  $t_j$ . Os erros relativos para o deslocamento e para velocidade em todos os nós são resumidos na Tabela 5.2. Apesar de apresentar erro relativo maior para previsão do deslocamento do nó 2 ( $U_2$ ), a precisão da nova abordagem proposta ainda se mostra eficaz. Em contrapartida, ao comparar os demais erros relativos ( $\dot{U}_2$ ,  $U_3$  e  $\dot{U}_3$ ) para os métodos de mesmo custo computacional, observa-se que a nova abordagem apresenta resultados superiores a todos os demais. Além disso, a nova abordagem apresenta resultado superior para o nó 3 ( $U_3$  e  $\dot{U}_3$ ) mesmo se comparada com Bathe -  $\Delta t$ , o que sig-

nifica um resultado mais preciso alcançado com aproximadamente metade do custo computacional.

Tabela 5.2: Erros relativos para deslocamento e velocidade em todos os nós.

|             | Regra Trapezoidal | Newmark $\gamma_N = 1/2$<br>$\beta_N = 1/2$ | Newmark $\gamma_N = 3/10$<br>$\beta_N = 11/20$ | Nova abordagem | Bathe $\Delta t$ | Bathe $2 \times \Delta t$ |
|-------------|-------------------|---|--|----------------|------------------|---------------------------|
| $U_2$       | 0,05%             | 0,02%                                       | 0,02%  | 1,36%          | 0,02%            | 0,03%                     |
| $\dot{U}_2$ | 92,78%            | 103,50%                                     | 13,56%   | 8,00%          | 7,21%            | 10,64%                    |
| $U_3$       | 25,96%            | 59,50%                                      | 33,63%   | 9,79%          | 13,25%           | 48,10%                    |
| $\dot{U}_3$ | 23,55%            | 54,00%                                      | 30,52%   | 9,06%          | 12,04%           | 43,59%                    |

## 5.2 Barra engastada homogênea

A segunda aplicação trata de uma barra homogênea com uma extremidade engastada e a outra livre, submetida a uma força unitária (Figura 5.10). Para discretização espacial (MEF) foram utilizados 50 elementos (51 nós) de barra, com 2 graus de liberdade por elemento (deslocamento horizontal). As matrizes de massa e rigidez foram obtidas conforme mostrado na seção 2.2, considerando-se matriz de massa inconsistente (*lumped*) e amortecimento nulo. As propriedades geométricas e físicas adotadas foram: comprimento total da barra  $L = 1,0 [L]$ , área da seção transversal  $A = 0,1 [L^2]$ , módulo de elasticidade  $E = 1,0 \times 10^7 [F/L^2]$  e massa específica  $\rho = 10,0 [M/L^3]$ .

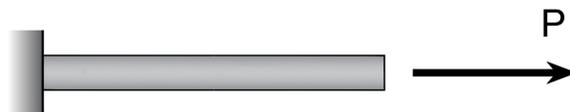


Figura 5.10: Barra engastada e livre submetida a uma carga unitária.

Portanto, considerando que a força unitária  $P$  é aplicada instantaneamente e mantida constante durante toda a análise, a resposta analítica para o deslocamento

horizontal deste modelo é dada por [10]:

$$u_A(x, t) = \frac{8PL}{\pi^2 EA} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{2n-1}{2L} \pi x \right) \left[ 1 - \cos \left( \frac{2n-1}{2L} \pi ct \right) \right], \quad (5.6)$$

onde  $c$  representa a velocidade de propagação da onda no meio, expressa por  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Sendo assim,  $c = 1,0 \times 10^3$  [L/s] para este exemplo. A resposta analítica para todos os nós é apresentada na Figura 5.11.

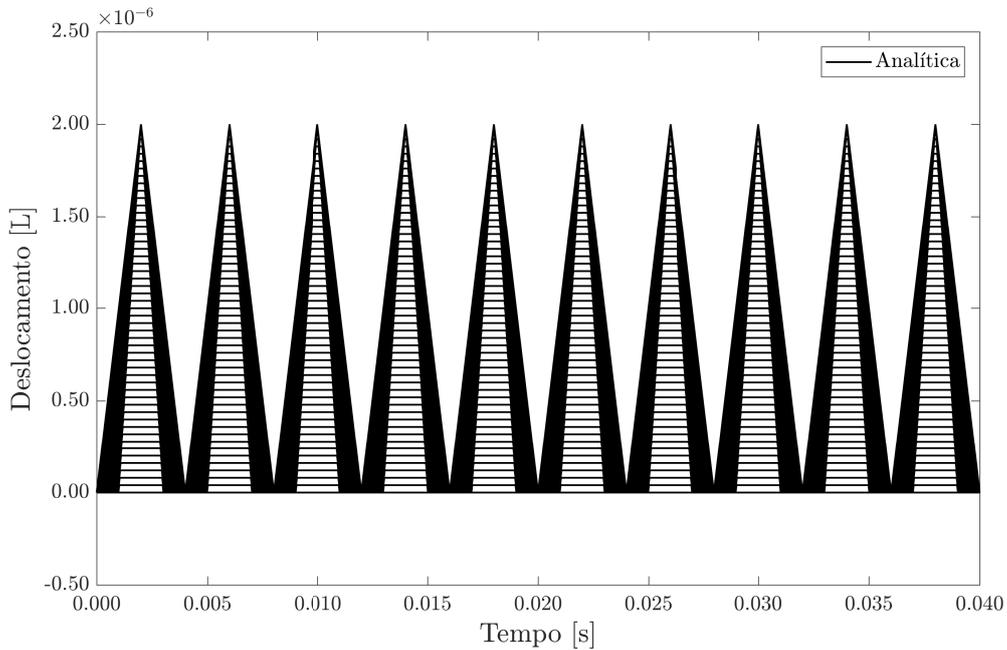


Figura 5.11: Resposta analítica para o deslocamento horizontal em todos os nós.

Os passos de tempo utilizados foram:  $\Delta t_1 = 1,0 \times 10^{-5}s$ ,  $\Delta t_2 = 2,0 \times 10^{-5}s$ ,  $\Delta t_3 = 4,0 \times 10^{-5}s$  e o tempo total em todas as análises foi  $T = 0,040s$ . Para realizar a comparação com a nova abordagem proposta, foram utilizados os seguintes métodos:

- Regra Trapezoidal - Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2} - \beta_N = \frac{1}{4}$ )
- Bathe -  $\Delta t$
- Bathe -  $2 \times \Delta t$

Conforme feito na seção 5.1, o método de Bathe foi comparado utilizando o mesmo passo de tempo (Bathe -  $\Delta t$ ) e também o dobro do passo de tempo (Bathe -

$2 \times \Delta t$ ), uma vez que este método se baseia na divisão de cada passo de tempo em dois subpassos iguais (ver seção 3.2).

Para a nova abordagem proposta, foram executados quatro exemplos distintos para cada passo de tempo. O primeiro exemplo foi sem a aplicação da propriedade de amortecimento numérico, já nos demais a propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  foi introduzida somente no primeiro elemento, junto ao engaste. Os valores adotados para a propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  dos exemplos executados são mostrados na Tabela 5.3.

Tabela 5.3: Parâmetros utilizados em cada exemplo para o método proposto.

| Exemplo | $a^e$       |                  |
|---------|-------------|------------------|
|         | 1º Elemento | Demais elementos |
| 1       | 0,00        | 0,00             |
| 2       | 0,01        | 0,00             |
| 3       | 0,10        | 0,00             |
| 4       | 1,00        | 0,00             |

O cálculo dos parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  da nova abordagem proposta depende das propriedades do elemento, da discretização temporal e da propriedade de amortecimento numérico  $a_e$ . Portanto, esses parâmetros assumem valores distintos para cada elemento dependendo do passo de tempo adotado, conforme mostrado na Tabela 5.4.

Buscou-se inserir amortecimento numérico em um ponto de possível formação de ruídos, ou seja, junto ao engaste. A principal ideia do método é remover em nível local as frequências espúrias provenientes da discretização espacial. Para os demais elementos, como não existe (ou existe em menor magnitude) formação de ruídos, o método é avaliado sem inserção de amortecimento numérico.

Os resultados do deslocamento horizontal do nó 26 (localizado no meio da barra), para os três passos de tempo adotados, considerando-se o primeiro pico da análise, são apresentados nas Figuras 5.12 a 5.14. As Figuras 5.15 a 5.17 apresentam o mesmo resultado para o último pico da análise.

Tabela 5.4: Parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  da abordagem proposta em cada exemplo para cada passo de tempo.

| $\Delta t$           | Exemplo | 1º Elemento |            | Demais elementos |            |
|----------------------|---------|-------------|------------|------------------|------------|
|                      |         | $\gamma_e$  | $\alpha_e$ | $\gamma_e$       | $\alpha_e$ |
| $1,0 \times 10^{-5}$ | 1       | 0,1225      | 0,8775     | 0,1225           | 0,8775     |
|                      | 2       | 0,5015      | 0,5015     | 0,1225           | 0,8775     |
|                      | 3       | 0,6495      | 0,6300     | 0,1225           | 0,8775     |
|                      | 4       | 1,6424      | 0,9824     | 0,1225           | 0,8775     |
| $2,0 \times 10^{-5}$ | 1       | 0,2311      | 0,7689     | 0,2311           | 0,7689     |
|                      | 2       | 0,5030      | 0,5030     | 0,2311           | 0,7689     |
|                      | 3       | 0,7961      | 0,7275     | 0,2311           | 0,7689     |
|                      | 4       | 1,9460      | 0,9996     | 0,2311           | 0,7689     |
| $4,0 \times 10^{-5}$ | 1       | 0,3808      | 0,6192     | 0,3808           | 0,6192     |
|                      | 2       | 0,5060      | 0,5060     | 0,3808           | 0,6192     |
|                      | 3       | 1,0699      | 0,8557     | 0,3808           | 0,6192     |
|                      | 4       | 1,9990      | 1,000      | 0,3808           | 0,6192     |

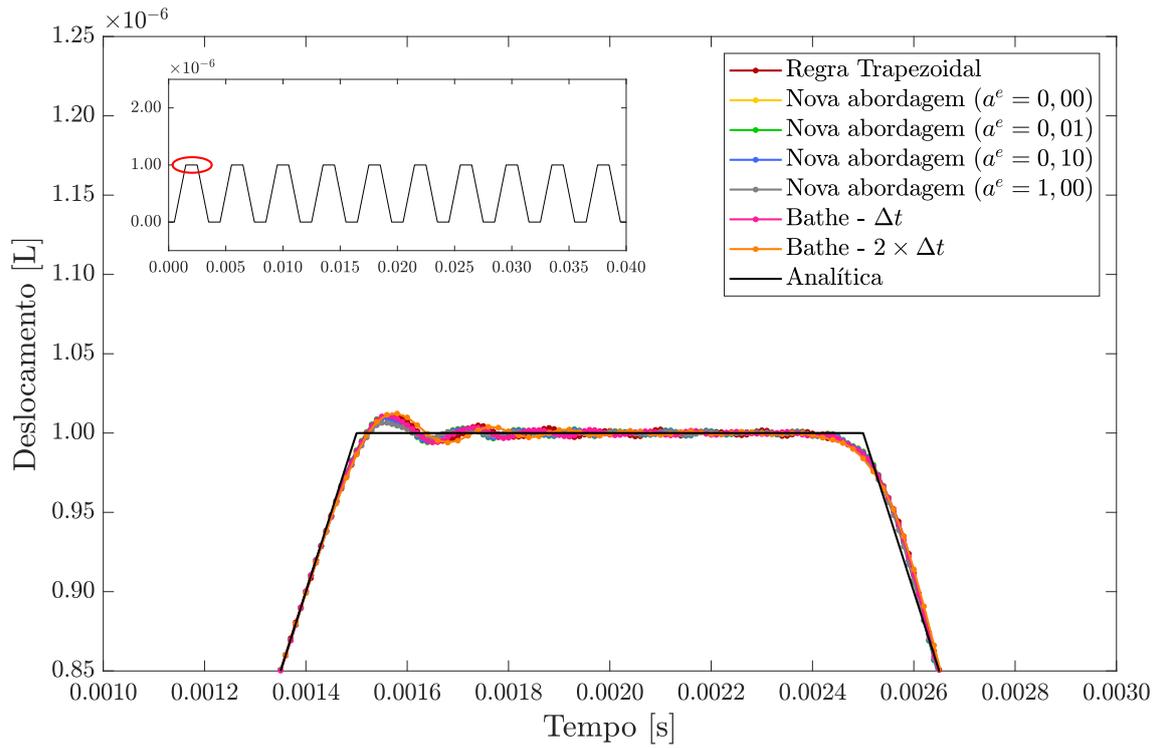


Figura 5.12: Deslocamento horizontal do nó 26 - primeiro pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ).

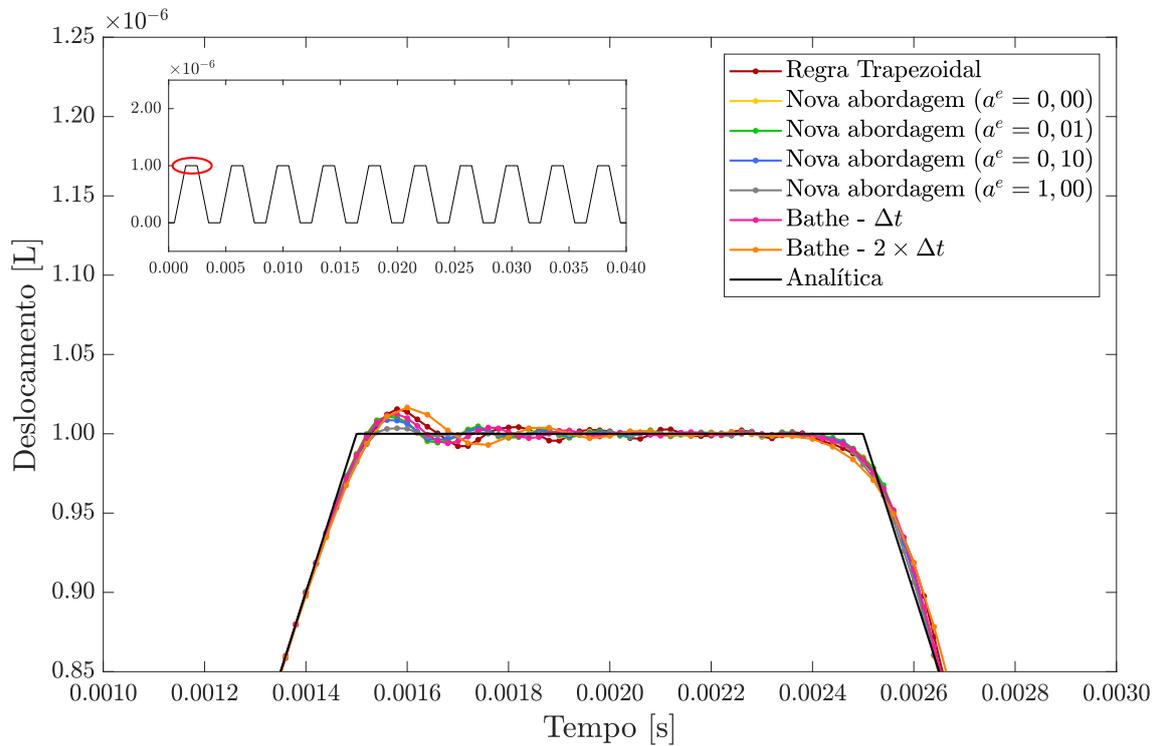


Figura 5.13: Deslocamento horizontal do nó 26 - primeiro pico ( $\Delta t = 2,0 \times 10^{-5}s$ ).

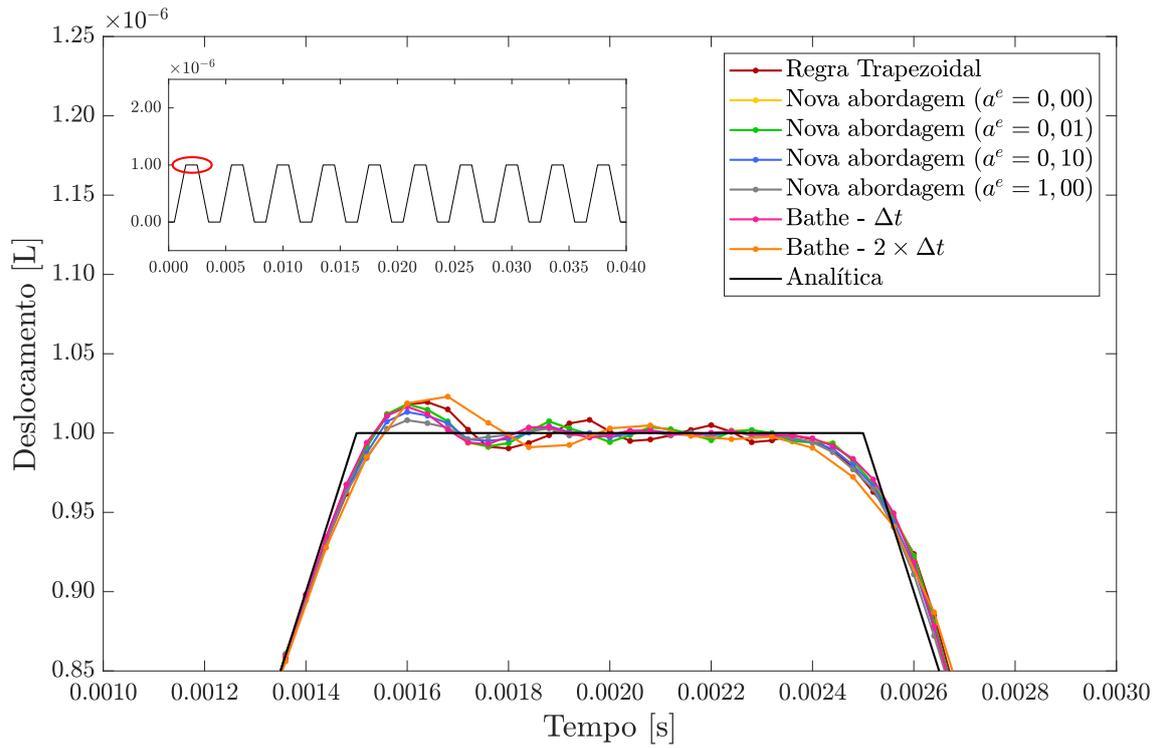


Figura 5.14: Deslocamento horizontal do nó 26 - primeiro pico ( $\Delta t = 4,0 \times 10^{-5} s$ ).

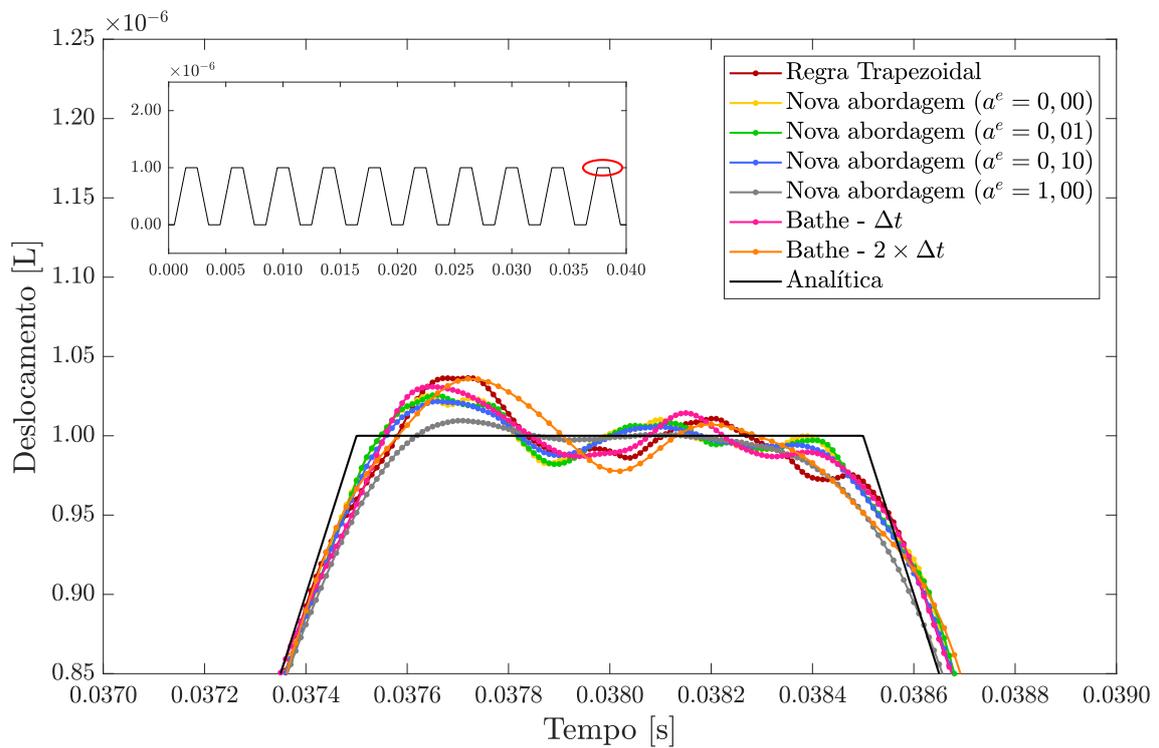


Figura 5.15: Deslocamento horizontal do nó 26 - último pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5} s$ ).

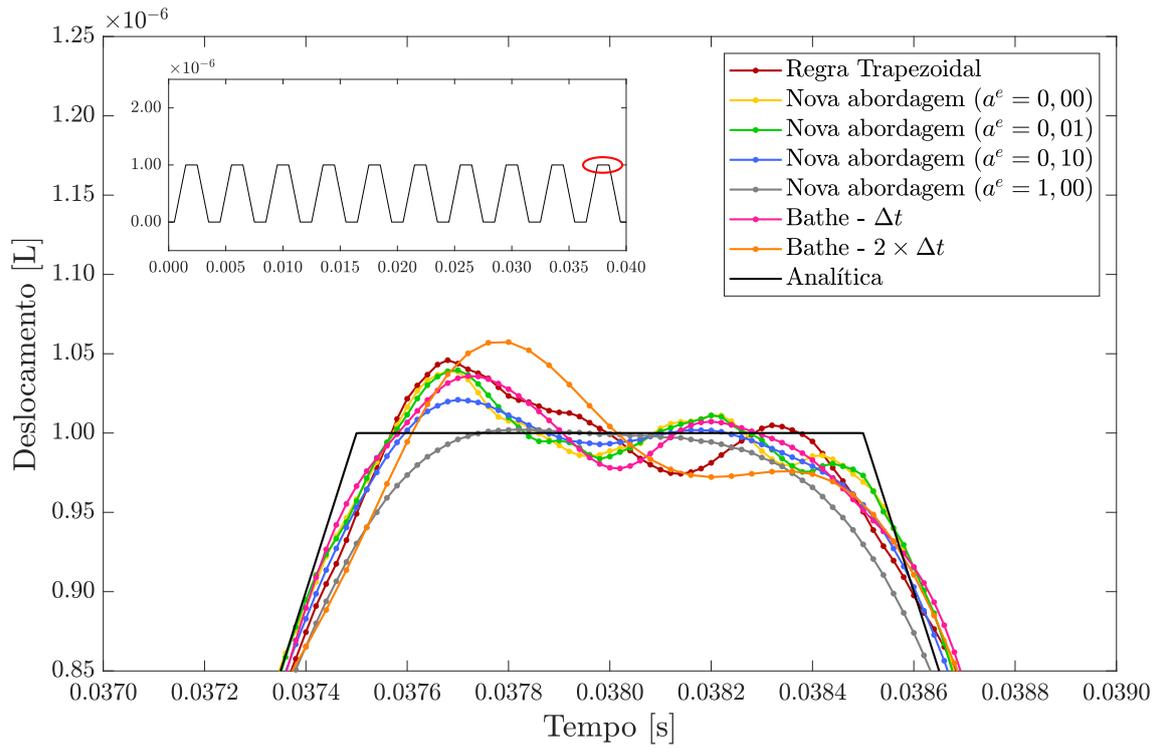


Figura 5.16: Deslocamento horizontal do nó 26 - último pico ( $\Delta t = 2,0 \times 10^{-5} s$ ).

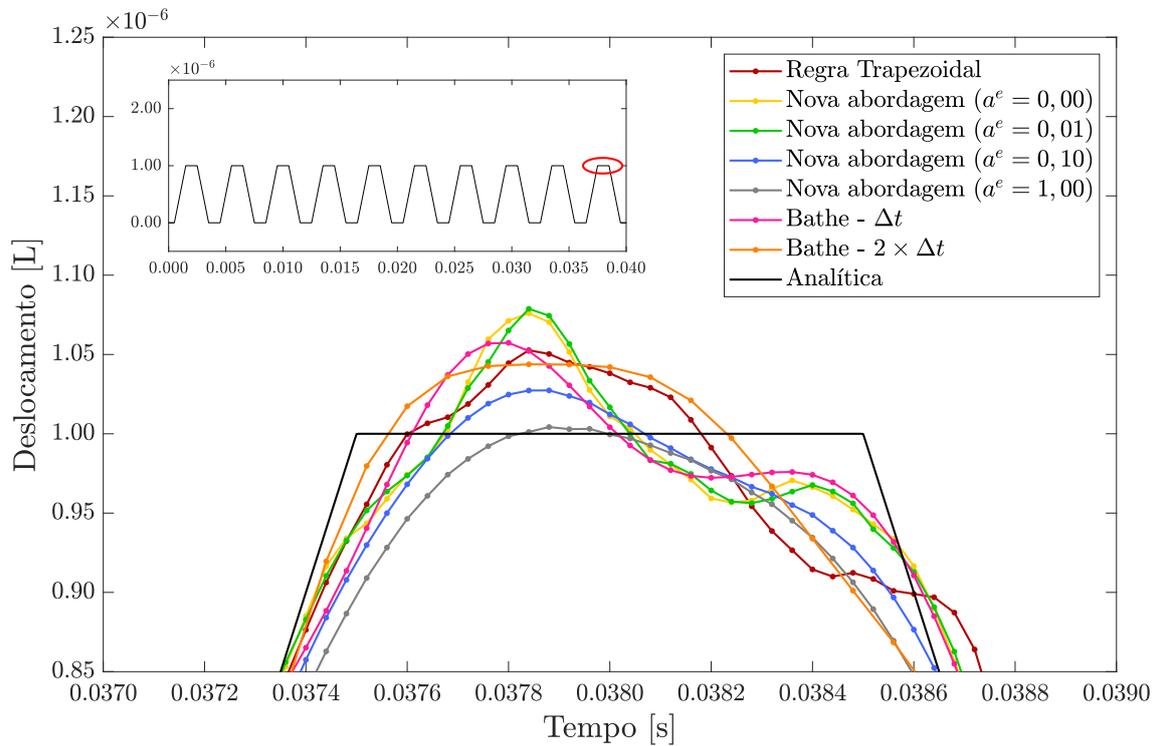


Figura 5.17: Deslocamento horizontal do nó 26 - último pico ( $\Delta t = 4,0 \times 10^{-5} s$ ).

O erro relativo considerando todos os nós, calculado pela Equação 5.5, é apresentado na Figura 5.18. Observa-se que para  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}$ , independente do parâmetro  $a^e$  adotado, a metodologia proposta apresentou menor erro na previsão da resposta analítica, até mesmo em relação ao método de Bathe -  $\Delta t$ . Além disso, ao comparar os métodos com mesmo custo computacional, a nova abordagem proposta apresenta maior precisão em todos os exemplos rodados para todos os passos de tempo, com ou sem adição de amortecimento numérico local.

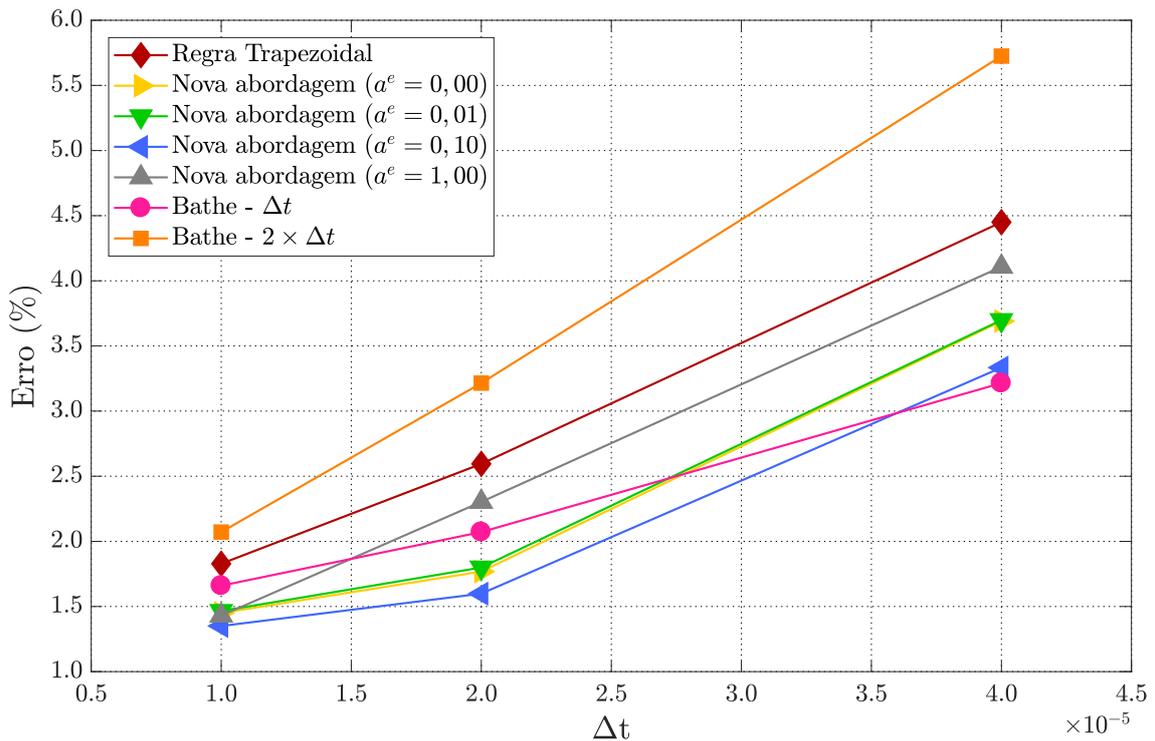


Figura 5.18: Erro relativo para o deslocamento horizontal de todos os nós.

Observa-se que mesmo para um modelo homogêneo, a introdução de amortecimento numérico resulta em uma resposta mais satisfatória: a melhor resposta foi obtida para um caso com inserção de amortecimento numérico (azul). Entretanto, a magnitude da dissipação deve ser suficiente para remover somente frequências espúrias, não podendo interferir nas frequências de baixa magnitude. No caso com maior inserção de amortecimento (cinza), os erros foram superiores ao caso sem amortecimento numérico (amarelo).

### 5.3 Barra engastada heterogênea

Além da barra engastada homogênea, a nova metodologia foi aplicada para um exemplo de barra engastada heterogênea, submetida a uma força unitária aplicada na extremidade, conforme a Figura 5.19. Foram adotados 100 elementos de barra (101 nós) para discretização espacial (MEF), considerando 1 grau de liberdade por nó (deslocamento horizontal) e, conseqüentemente, dois graus de liberdade por elemento. Foi considerada matriz de massa inconsistente (*lumped*) e amortecimento nulo, sendo todas as matrizes obtidas conforme descrito na seção 2.2. As propriedades físicas e geométricas adotadas foram: comprimento total da barra  $L = 1,0 [L]$ , área da seção transversal  $A = 0,1 [L^2]$  e massa específica  $\rho = 10,0 [M/L^3]$ . Além disso, foi considerado módulo de elasticidade do trecho  $AB$   $E_{AB} = 1,0 \times 10^{10} [F/L^2]$  e do trecho  $BC$   $E_{BC} = 1,0 \times 10^7 [F/L^2]$ .



Figura 5.19: Barra heterogênea engastada e livre submetida a uma carga unitária.

Os intervalos de tempo adotados nas análises foram:  $\Delta t_1 = 1,0 \times 10^{-5} s$ ,  $\Delta t_2 = 2,0 \times 10^{-5} s$ ,  $\Delta t_3 = 4,0 \times 10^{-5} s$  e o tempo total foi  $T = 0,020 s$ . Além da nova metodologia, foram utilizados os seguintes métodos, para efeito de comparação:

- Regra Trapezoidal - Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2} - \beta_N = \frac{1}{4}$ )
- Bathe -  $\Delta t$
- Bathe -  $2 \times \Delta t$

De maneira análoga ao realizado nas seções anteriores, o método de Bathe foi comparado tanto com o mesmo passo de tempo (Bathe -  $\Delta t$ ) quanto com o dobro do passo de tempo (Bathe -  $2 \times \Delta t$ ), com intuito de comparar soluções obtidas com o mesmo custo computacional.

Para a nova abordagem, foram executados exemplos análogos à seção 5.2, buscando inserir amortecimento numérico na região de possível formação de ruídos, que corresponde à região rígida para este modelo. Portanto, o primeiro exemplo foi sem inserção de amortecimento numérico ( $a^e = 0$ ) e nos demais adotou-se amortecimento numérico ( $a^e > 0$ ) somente na região rígida (trecho  $AB$ ). A Tabela 5.5 apresenta a propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  adotada em cada trecho para a barra heterogênea.

Tabela 5.5: Parâmetros utilizados em cada exemplo para o método proposto.

| Exemplo | $a^e$       |             |
|---------|-------------|-------------|
|         | Trecho $AB$ | Trecho $BC$ |
| 1       | 0,000       | 0,000       |
| 2       | 0,001       | 0,000       |
| 3       | 0,010       | 0,000       |
| 4       | 0,100       | 0,000       |

Os parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$ , computados de maneira automática, são apresentados na Tabela 5.6. Os valores da propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  foram escolhidos de forma a obter amortecimento numérico máximo ( $\gamma_e = 2,0$  e  $\alpha_e = 1,0$ ) no exemplo 4 (ver Tabela 5.5). Os exemplos 2 e 3 correspondem aos casos onde são inseridos valores intermediários de amortecimento numérico.

Regiões com elevada rigidez associadas a regiões com baixa rigidez são comumente utilizadas em modelos complexos com o intuito de simular ligações rígidas. Portanto, devido ao aumento da rigidez axial, o trecho  $AB$  tende a modelar um engaste no ponto  $B$ . Com isso, pode-se calcular a resposta analítica pela Equação 5.6 para o trecho  $BC$ , considerando o comprimento da barra igual a  $L/2$ .

Os resultados do deslocamento horizontal do nó 76, localizado no meio do trecho  $BC$  para os três intervalos de tempo são mostrados nas Figuras 5.20 a 5.22 para o primeiro pico da análise e nas Figuras 5.23 a 5.25 para o último pico da análise.

Na Figura 5.26 é apresentado o erro relativo, calculado pela Equação 5.5 para o deslocamento horizontal do nó 76. Observa-se que o novo método apresenta maior

precisão em todos casos quando comparados com métodos de mesmo custo computacional. Além disso, para  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5} s$  o novo método apresenta resposta mais satisfatória comparando até com Bathe -  $\Delta t$ .

Para este modelo, existe a necessidade de inserção de amortecimento numérico devido a formação de ruídos ocasionada pela mudança de rigidez entre os trechos AB e BC. Sendo assim, os casos com amortecimento numérico (verde, azul e cinza) apresentaram resposta mais satisfatória.

Tabela 5.6: Parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  da abordagem proposta em cada exemplo para cada passo de tempo.

| $\Delta t$           | Exemplo | Trecho AB  |            | Trecho BC  |            |
|----------------------|---------|------------|------------|------------|------------|
|                      |         | $\gamma_e$ | $\alpha_e$ | $\gamma_e$ | $\alpha_e$ |
| $1,0 \times 10^{-5}$ | 1       | 0,5000     | 0,5000     | 0,2311     | 0,7689     |
|                      | 2       | 0,5947     | 0,5865     | 0,2311     | 0,7689     |
|                      | 3       | 1,3396     | 0,9341     | 0,2311     | 0,7689     |
|                      | 4       | 2,0000     | 1,0000     | 0,2311     | 0,7689     |
| $2,0 \times 10^{-5}$ | 1       | 0,5000     | 0,5000     | 0,3808     | 0,6192     |
|                      | 2       | 0,6887     | 0,6586     | 0,3808     | 0,6192     |
|                      | 3       | 1,7786     | 0,9935     | 0,3808     | 0,6192     |
|                      | 4       | 2,0000     | 1,0000     | 0,3808     | 0,6192     |
| $4,0 \times 10^{-5}$ | 1       | 0,5000     | 0,5000     | 0,4820     | 0,5180     |
|                      | 2       | 0,8716     | 0,7690     | 0,4820     | 0,5180     |
|                      | 3       | 1,9810     | 1,0000     | 0,4820     | 0,5180     |
|                      | 4       | 2,0000     | 1,0000     | 0,4820     | 0,5180     |

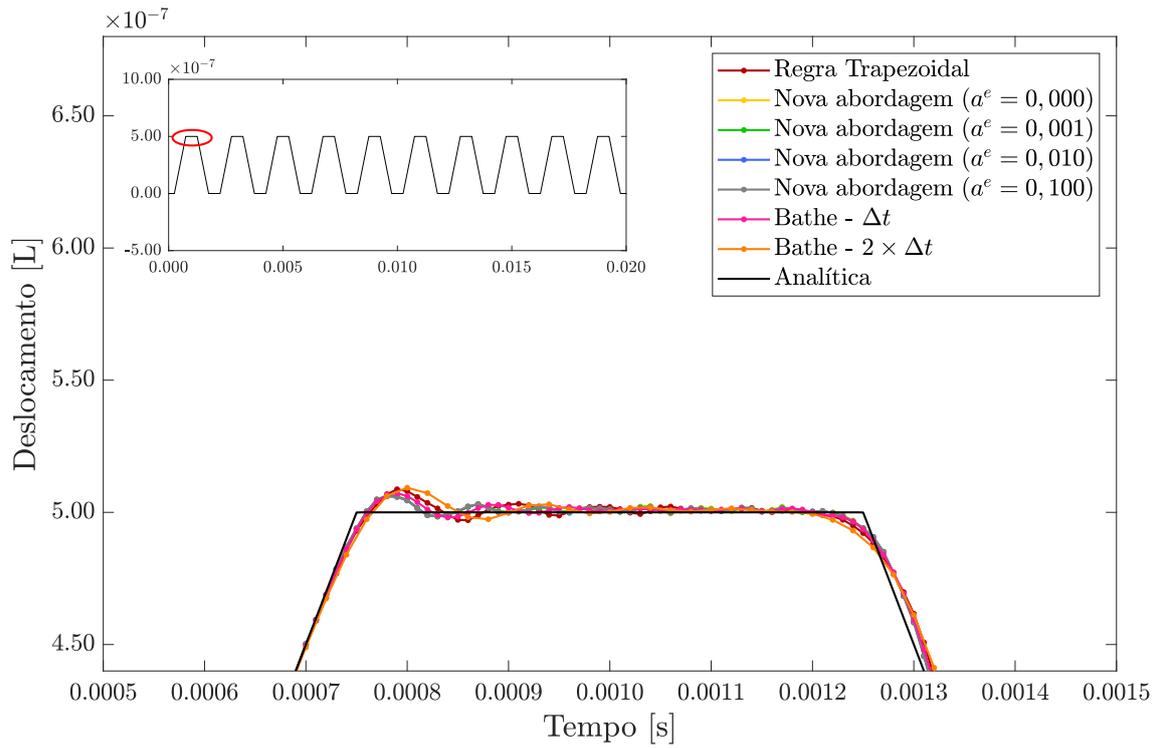


Figura 5.20: Deslocamento horizontal do nó 76 - primeiro pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5} s$ ).

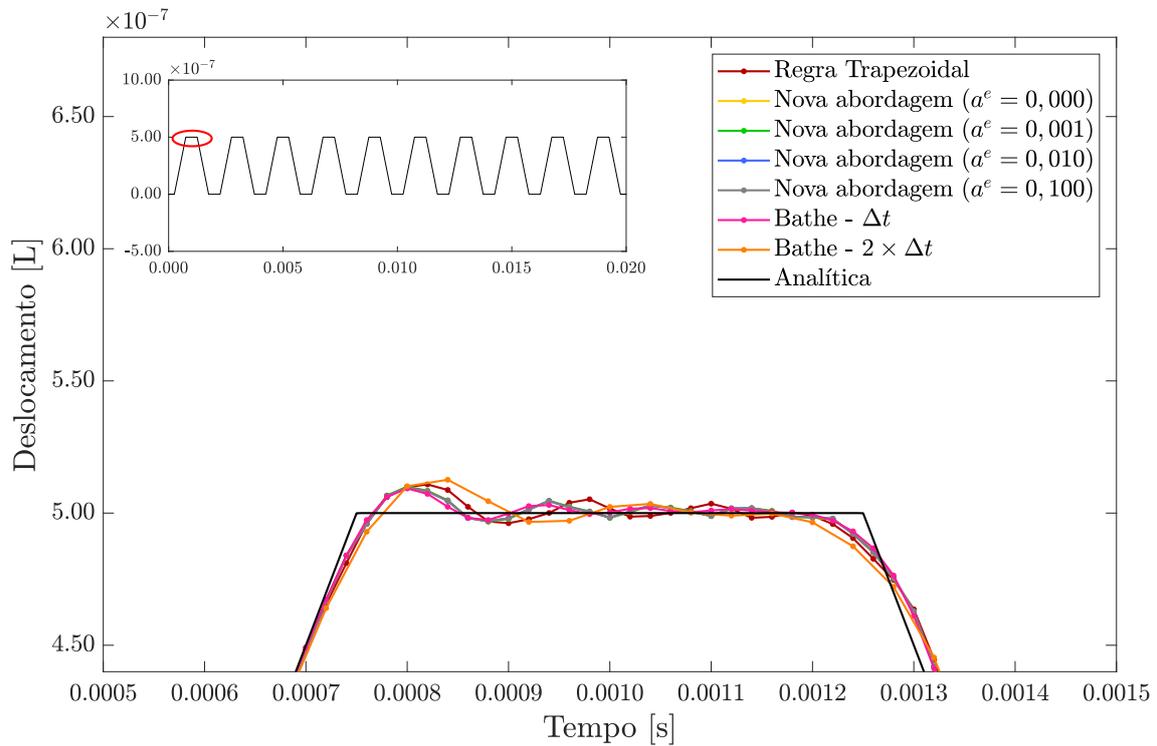


Figura 5.21: Deslocamento horizontal do nó 76 - primeiro pico ( $\Delta t = 2,0 \times 10^{-5} s$ ).

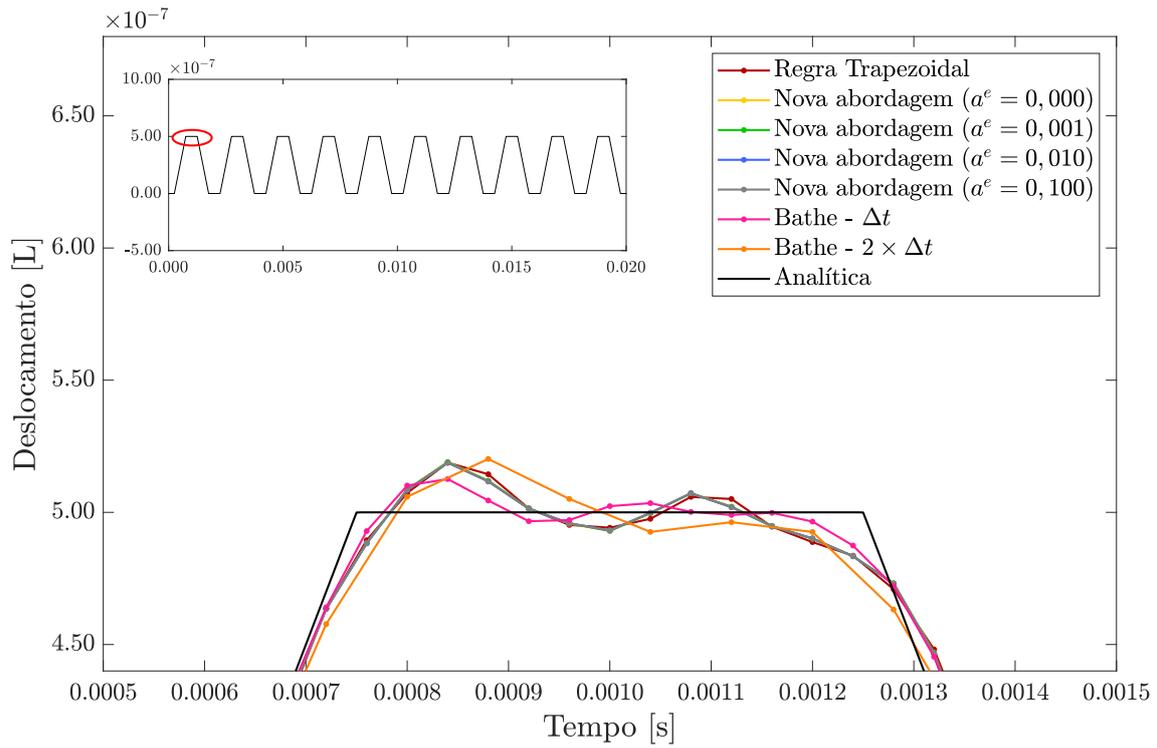


Figura 5.22: Deslocamento horizontal do nó 76 - primeiro pico ( $\Delta t = 4,0 \times 10^{-5} s$ ).

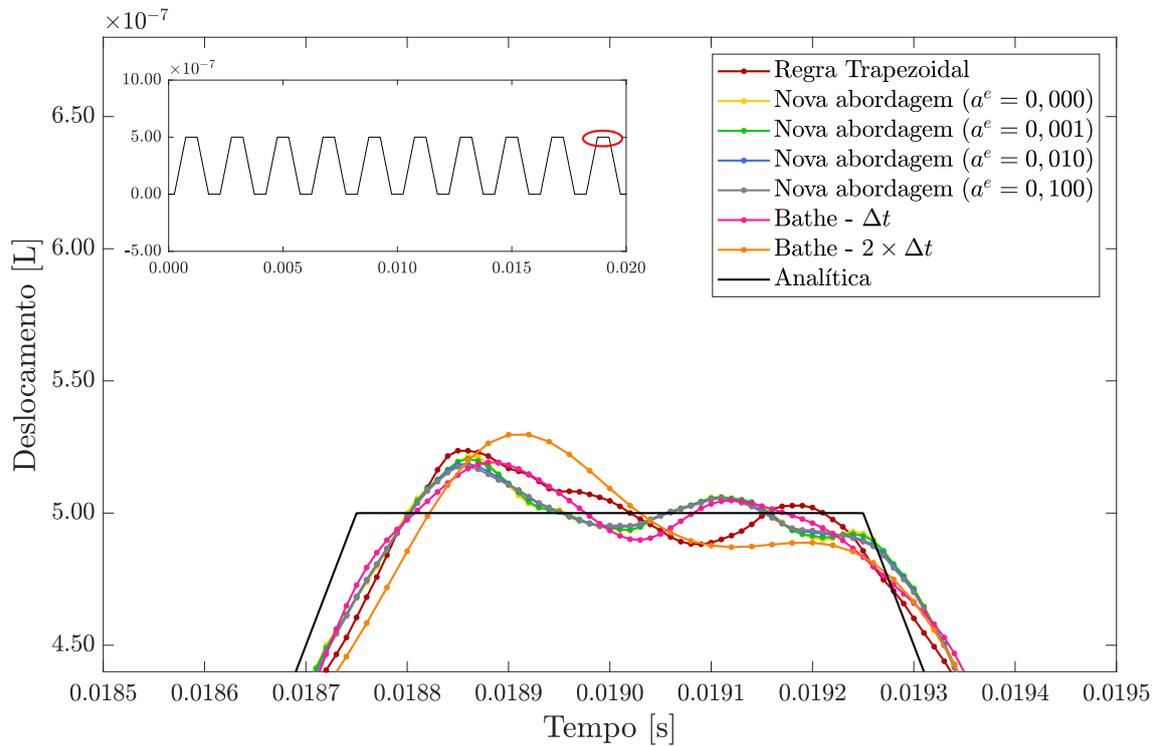


Figura 5.23: Deslocamento horizontal do nó 76 - último pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5} s$ ).

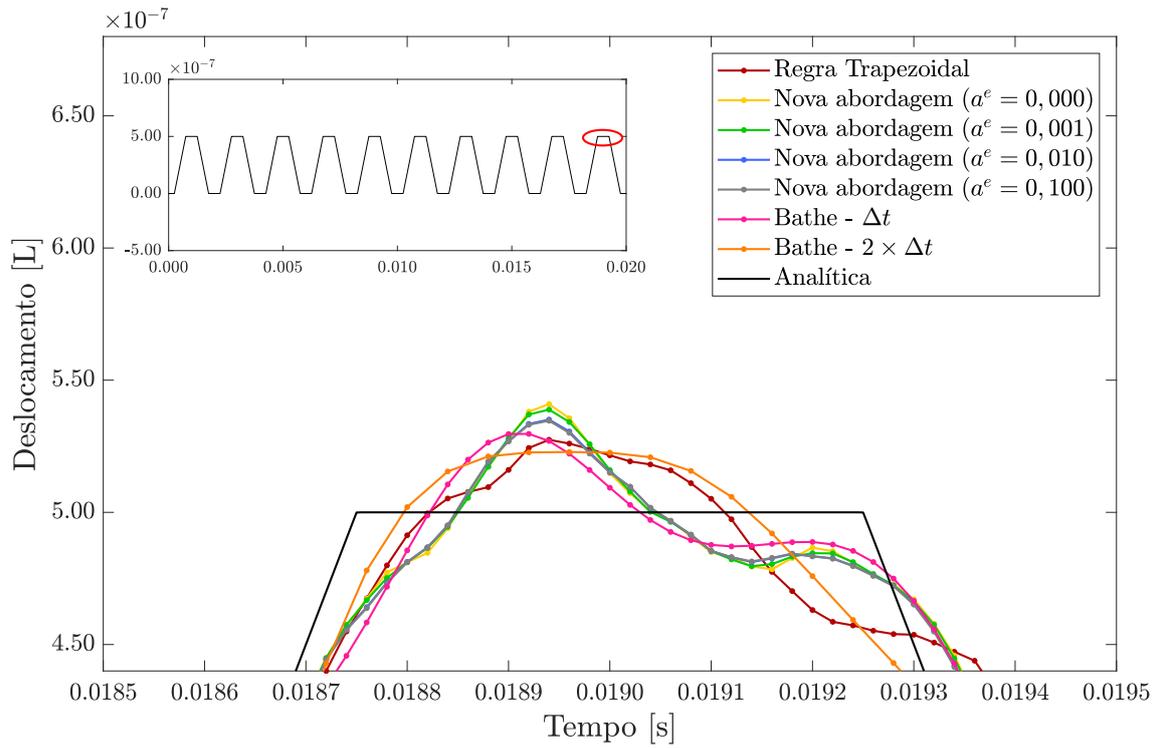


Figura 5.24: Deslocamento horizontal do nó 76 - último pico ( $\Delta t = 2,0 \times 10^{-5} s$ ).

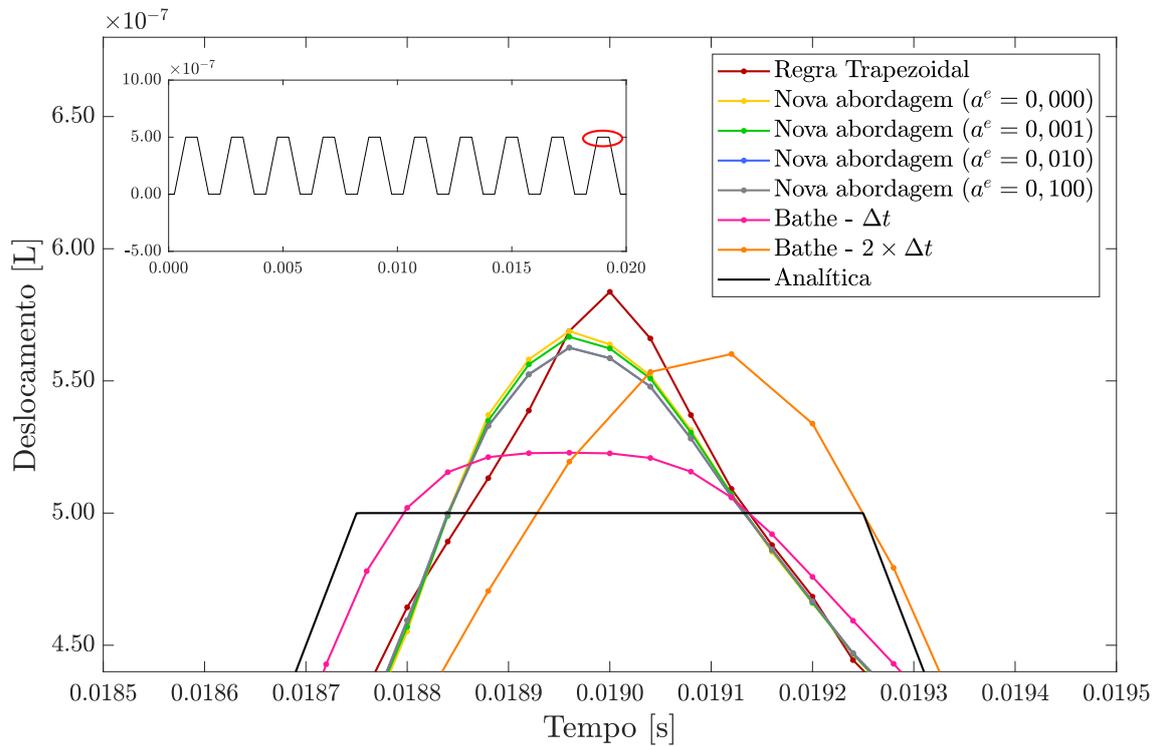


Figura 5.25: Deslocamento horizontal do nó 76 - último pico ( $\Delta t = 4,0 \times 10^{-5} s$ ).

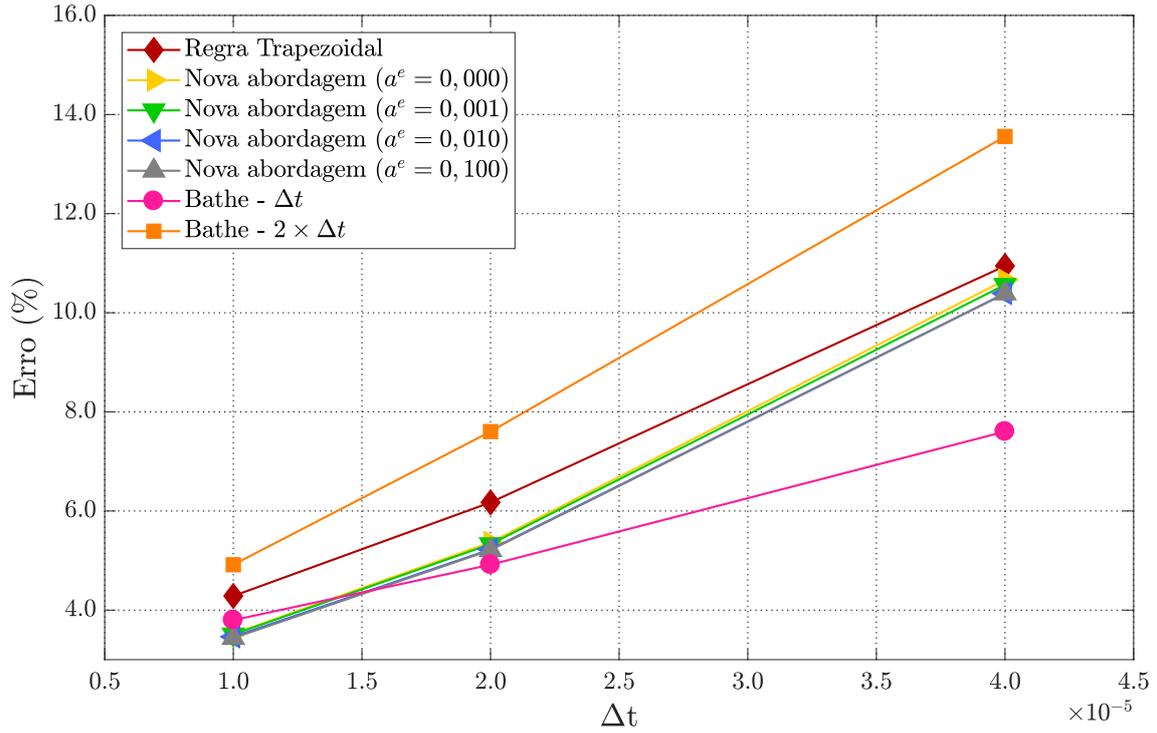


Figura 5.26: Erro relativo para o deslocamento horizontal do nó 76.

É sabido que para problemas escalares homogêneos 1D discretizados por elementos finitos lineares, o método da Diferenças Centrais permite reproduzir a resposta analítica do problema, uma vez que o passo de tempo crítico do MDC seja considerado (neste caso, os erros introduzidos pela discretização espacial são perfeitamente contrabalanceados pelos erros introduzidos pela discretização temporal). Assim sendo, considerando-se a particularidade do presente problema em estudo, a título de curiosidade, se modela o trecho  $BC$  da estrutura com os parâmetros  $\gamma = 0$  e  $\alpha = 1$ , replicando assim as propriedades do MDC neste trecho. Para o trecho  $AB$  será adotado o nova abordagem com inserção de amortecimento numérico.

O passo de tempo crítico do método das Diferenças Centrais é dado, neste caso, pela relação  $c\Delta t/l = 1$  [59], onde  $c$  corresponde à velocidade de propagação da onda no meio e  $l$  corresponde ao comprimento do elemento linear. A velocidade de propagação da onda no meio é dada por:  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Neste caso,  $c = 1,0 \times 10^3$  [L/s] para o trecho  $BC$  e  $l = 1,0 \times 10^{-2}$  [L]. Portanto o passo de tempo crítico para o MDC no trecho  $BC$  é  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}$  [s].

A seguir são mostrados os resultados do deslocamento horizontal do nó 51 (localizado na interface entre os trechos  $AB$  e  $BC$ ) para o primeiro pico (Figura 5.27)

e para o último pico da análise (Figura 5.28). O mesmo resultado, para o nó localizado no meio do trecho  $BC$  (nó 76), é apresentado nas Figuras 5.29 (primeiro pico) e 5.30 (último pico).

Observa-se que o novo método apresenta elevada eficiência em dissipação de frequências espúrias. Ruídos provenientes da região de elevada rigidez da barra são rapidamente dissipados e não são transferidos para a região com rigidez baixa, resultando em uma resposta mais apropriada.

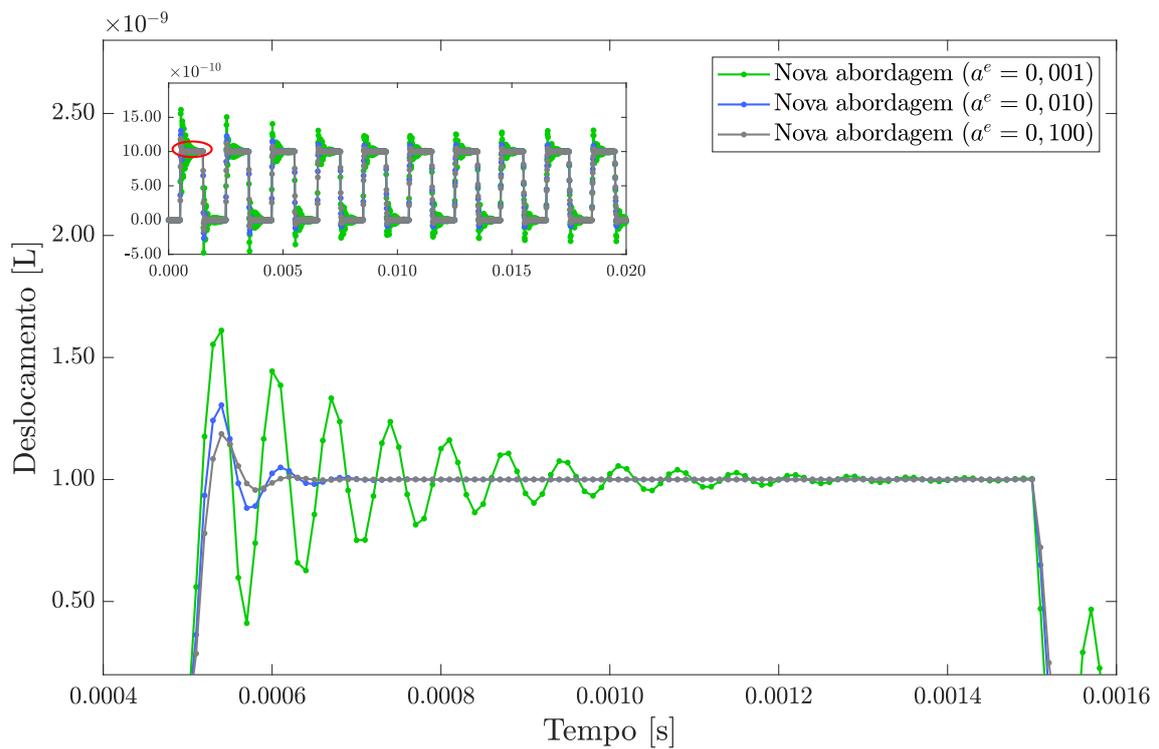


Figura 5.27: Deslocamento horizontal do nó 51 - primeiro pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ).

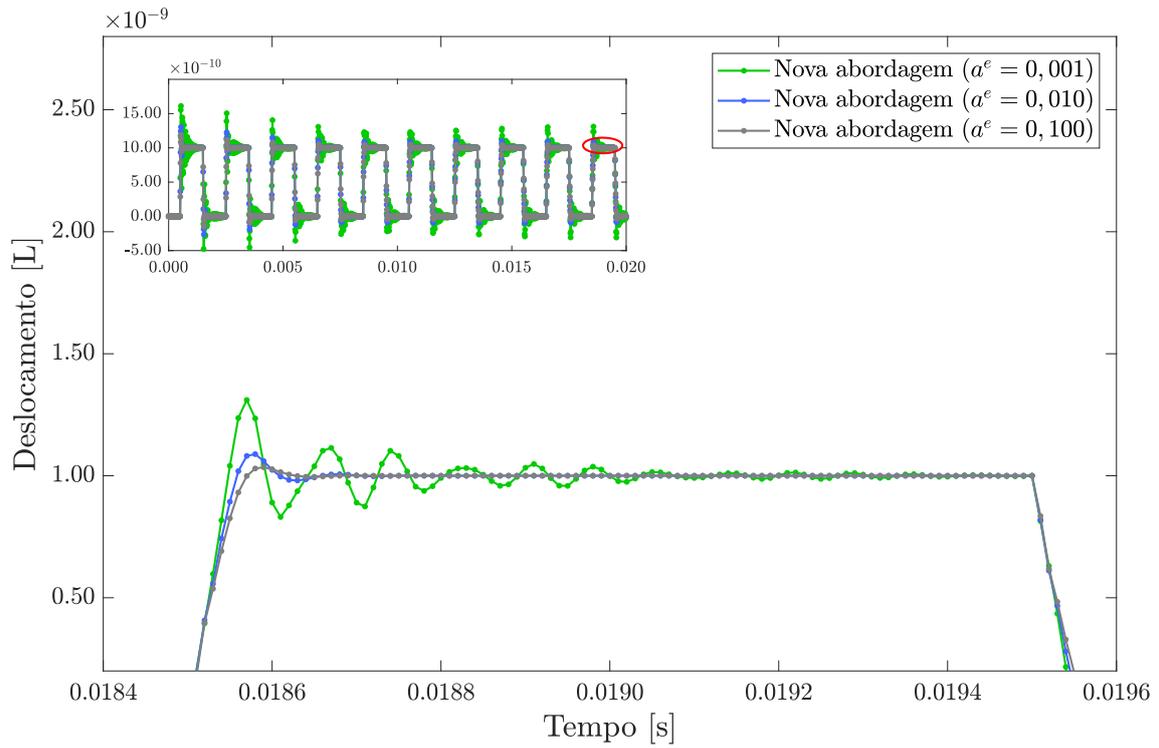


Figura 5.28: Deslocamento horizontal do nó 51 - último pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ).

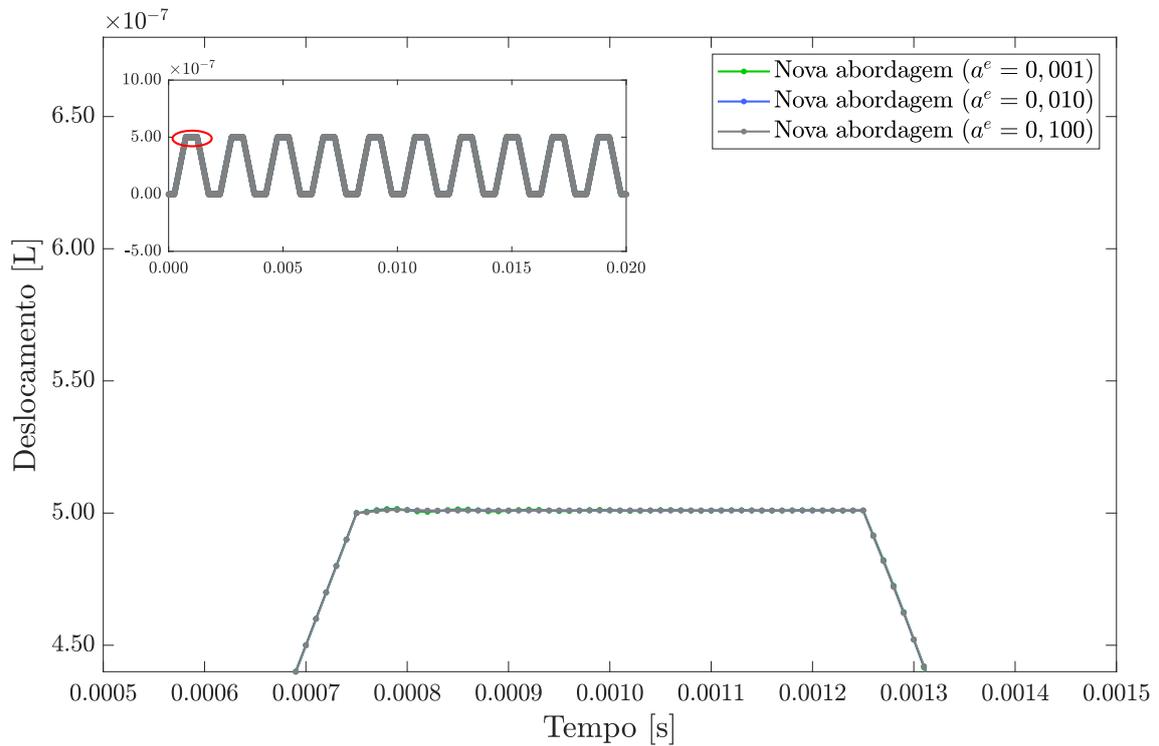


Figura 5.29: Deslocamento horizontal do nó 76 - primeiro pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5}s$ ).

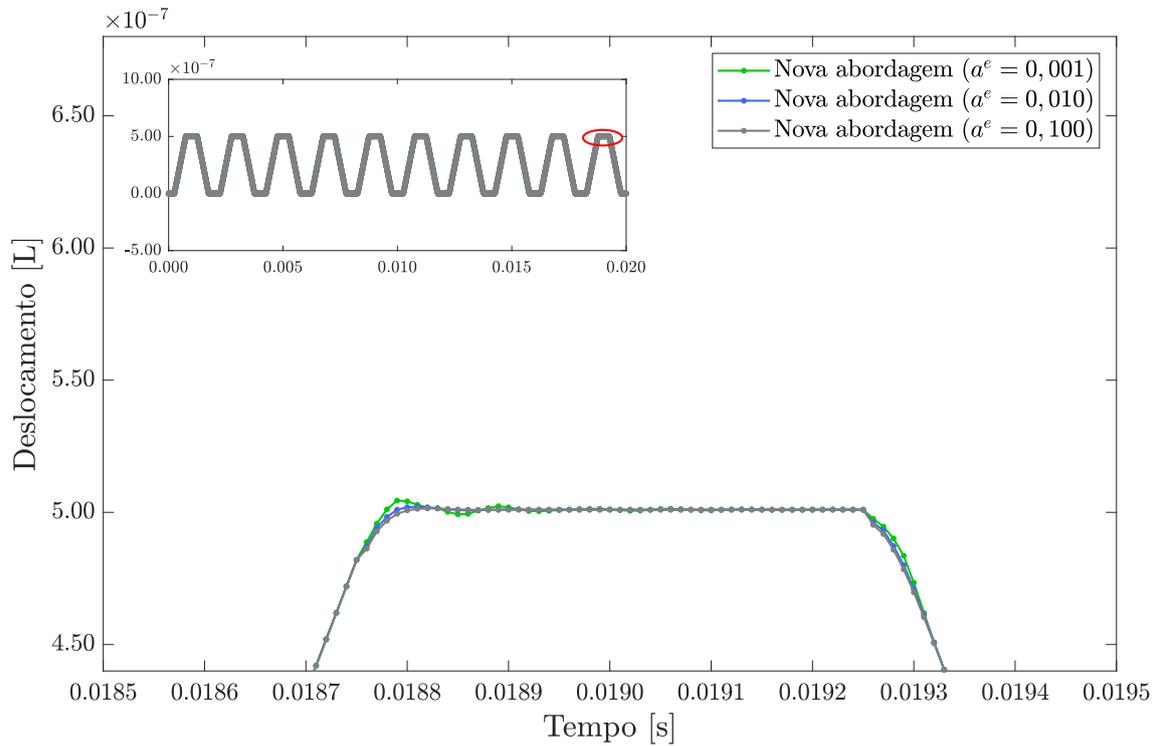


Figura 5.30: Deslocamento horizontal do nó 76 - último pico ( $\Delta t = 1,0 \times 10^{-5} s$ ).

## 5.4 Viga biapoiada

O quarto exemplo de aplicação da nova metodologia proposta, extraído de WEN *et al.* [39] (com modificações), é uma viga biapoiada homogênea, submetida a uma força vertical variável no meio do vão, conforme ilustrado na Figura 5.31. Foram adotados 50 elementos de viga (51 nós) para discretização espacial (MEF), com 2 graus de liberdade por nó (deslocamento vertical e rotação) e, conseqüentemente, 4 graus de liberdade por elemento. As matrizes de massa e rigidez foram obtidas conforme citado na seção 2.2 e foi considerada matriz de massa consistente e matriz de amortecimento nula.

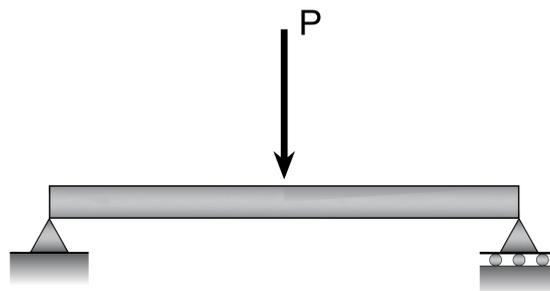


Figura 5.31: Viga biapoiada submetida a uma carga variável no meio do vão.

As propriedades geométricas e físicas adotadas foram: comprimento total da viga  $L = 5,0 [L]$ , área da seção transversal  $A = 4,0 \times 10^{-4} [L^2]$ , momento de inércia  $I = 1,0 \times 10^{-8} [L^4]$ , módulo de elasticidade  $E = 2,0 \times 10^{11} [F/L^2]$ , massa específica  $\rho = 5,0 \times 10^4 [M/L^3]$  e a carga variável aplicada foi:  $P(t) = F_0 \text{sen}(\omega_p t)$ , com  $F_0 = 1,0 \times 10^3 [F]$  e  $\omega_p = 4,0 [1/T]$ . A solução analítica para o deslocamento vertical desta viga é dada por [39]:

$$u_A(x, t) = \frac{2F_0}{\rho AL} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\omega_n^2 (1 - (\omega_p/\omega_n)^2)} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \left[ \text{sen}(\omega_p t) - \frac{\omega_p}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) \right], \quad (5.7)$$

onde  $\omega_n$  representa a frequência natural, determinada por:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (5.8)$$

Desta forma, a resposta analítica para o deslocamento vertical de todos os nós para o modelo em análise é mostrada na Figura 5.32.

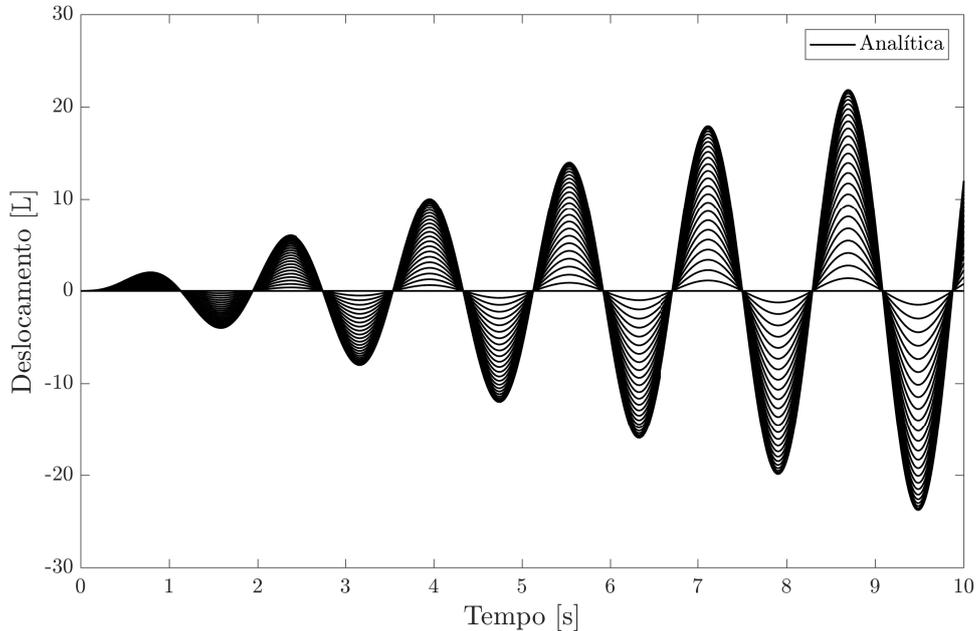


Figura 5.32: Resposta analítica para o deslocamento vertical em todos os nós.

O tempo total em todas análises foi  $T = 10s$  e foram empregados quatro passos de tempo:  $\Delta t_1 = 0,25 \times 10^{-2}s$ ,  $\Delta t_2 = 0,50 \times 10^{-2}s$ ,  $\Delta t_3 = 1,0 \times 10^{-2}s$  e  $\Delta t_4 =$

$2,0 \times 10^{-2} s$ . Além da metodologia proposta, foram utilizados os seguintes métodos para comparação:

- Regra Trapezoidal - Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2} - \beta_N = \frac{1}{4}$ )
- Bathe -  $\Delta t$
- Bathe -  $2 \times \Delta t$

Novamente, conforme feito nas seções anteriores, o método de Bathe foi comparado utilizando o mesmo incremento de tempo (Bathe -  $\Delta t$ ) e também o dobro do incremento de tempo (Bathe -  $2 \times \Delta t$ ).

Para o método proposto, foram executados quatro exemplos distintos para cada intervalo de tempo. De forma análoga ao que foi feito na seção anterior, o primeiro exemplo foi executado sem inserção de amortecimento numérico local e os demais com inserção de amortecimento numérico local nos elementos dos apoios (elementos 1 e 50). Os valores adotados para a propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  são expostos na Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Parâmetros utilizados em cada exemplo para o método proposto.

| Exemplo | $a^e$            |                  |
|---------|------------------|------------------|
|         | Elementos 1 e 50 | Demais elementos |
| 1       | 0,000            | 0,000            |
| 2       | 0,001            | 0,000            |
| 3       | 0,010            | 0,000            |
| 4       | 0,100            | 0,000            |

Os valores computados para os parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  da abordagem proposta são mostrados na Tabela 5.8, uma vez que estes parâmetros assumem valores distintos para cada elemento dependendo do intervalo de tempo escolhido.

Para os casos sem inserção de amortecimento local ( $a^e = 0,000$ ), a nova abordagem proposta irá reproduzir a Regra Trapezoidal em todos os intervalos de tempo utilizados. É importante ressaltar uma eficiente característica do método:

os parâmetros são computados a nível local, de acordo com o intervalo de tempo e as características do elemento. Sendo assim, o método é adaptativo e busca a melhor solução de acordo com o modelo em análise, sempre apresentando precisão igual ou superior à Regra Trapezoidal.

O exemplo em questão naturalmente não necessita de amortecimento numérico para obtenção de respostas satisfatórias, uma vez que é um modelo homogêneo, sem carregamento de impacto e não possui pontos de possível formação de ruídos. Sendo assim, a Regra Trapezoidal se mostra eficiente para obtenção dos deslocamentos deste modelo. Com isso, ressalta-se outra característica positiva do método: mesmo nos casos onde amortecimento numérico não se faz necessário, a nova abordagem irá adaptar os parâmetros automaticamente de forma a buscar a melhor solução possível para o modelo em análise. Neste caso, a melhor solução foi a Regra Trapezoidal.

Nos exemplos com amortecimento local, a inserção de dissipação se faz desnecessária, já que este modelo não apresenta pontos de formação de ruídos. Como o amortecimento numérico é inserido localmente, mesmo nos casos onde não há necessidade, a inserção de amortecimento numérico não deteriora a resposta. Apesar de não reproduzir exatamente a Regra Trapezoidal os resultados obtidos pela nova abordagem ficaram muito próximos da previsão obtida pela Regra Trapezoidal.

Nas Figuras 5.33 a 5.36 são apresentados os resultados para o deslocamento do nó situado no meio do vão, para todos intervalos de tempo. Além disso, na Figura 5.37 é apresentado o erro relativo, calculado pela Equação 5.5, para todos os nós. Observa-se que, quando comparado ao Bathe -  $2 \times \Delta t$  (mesmo custo computacional), a nova abordagem apresenta precisão superior.

Tabela 5.8: Parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  da abordagem proposta em cada exemplo para cada passo de tempo.

| $\Delta t$            | Exemplo | 1º Elemento |            | Demais elementos |            |
|-----------------------|---------|-------------|------------|------------------|------------|
|                       |         | $\gamma_e$  | $\alpha_e$ | $\gamma_e$       | $\alpha_e$ |
| $0,25 \times 10^{-2}$ | 1       | 0,5000      | 0,5000     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 2       | 0,8378      | 0,7511     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 3       | 1,9696      | 0,9998     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 4       | 2,0000      | 1,000      | 0,5000           | 0,5000     |
| $0,50 \times 10^{-2}$ | 1       | 0,5000      | 0,5000     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 2       | 1,4301      | 0,8809     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 3       | 1,9996      | 1,0000     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 4       | 2,0000      | 1,0000     | 0,5000           | 0,5000     |
| $1,00 \times 10^{-2}$ | 1       | 0,5000      | 0,5000     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 2       | 1,5864      | 0,9761     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 3       | 2,0000      | 1,0000     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 4       | 2,0000      | 1,0000     | 0,5000           | 0,5000     |
| $2,0 \times 10^{-2}$  | 1       | 0,5000      | 0,5000     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 2       | 1,9252      | 0,9993     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 3       | 2,0000      | 1,0000     | 0,5000           | 0,5000     |
|                       | 4       | 2,0000      | 1,0000     | 0,5000           | 0,5000     |

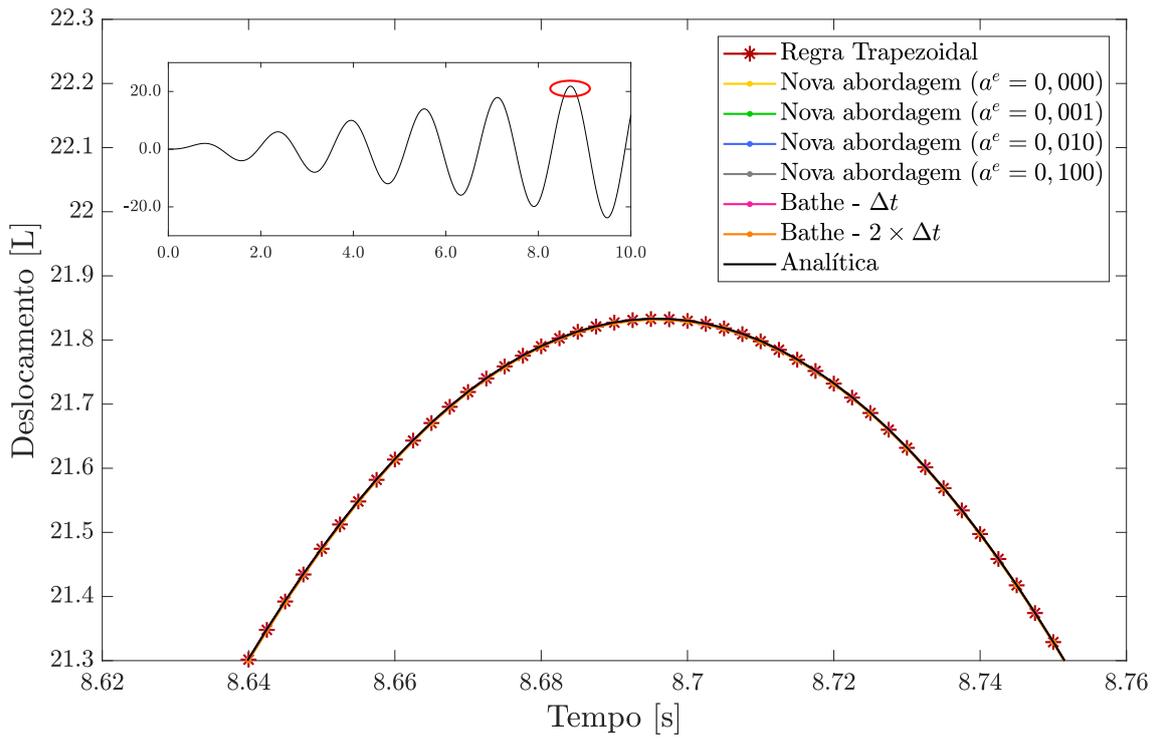


Figura 5.33: Deslocamento do nó 26 ( $\Delta t = 0,25 \times 10^{-2}s$ ).

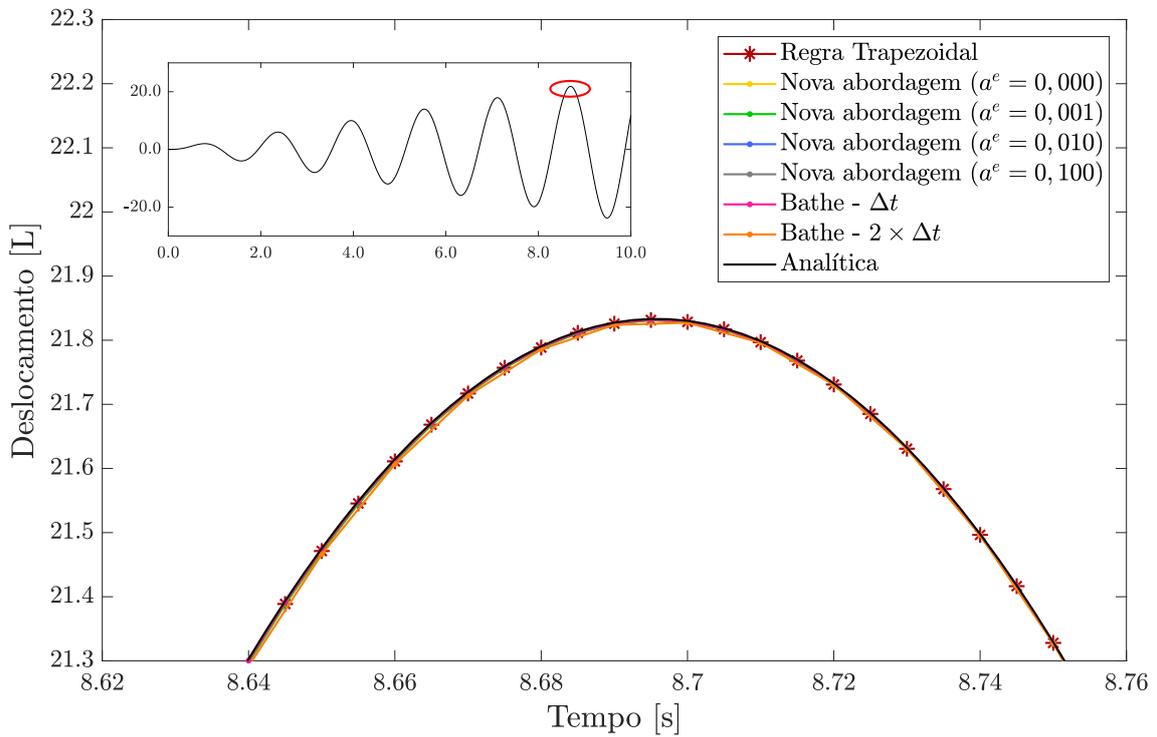


Figura 5.34: Deslocamento do nó 26 ( $\Delta t = 0,50 \times 10^{-2}s$ ).

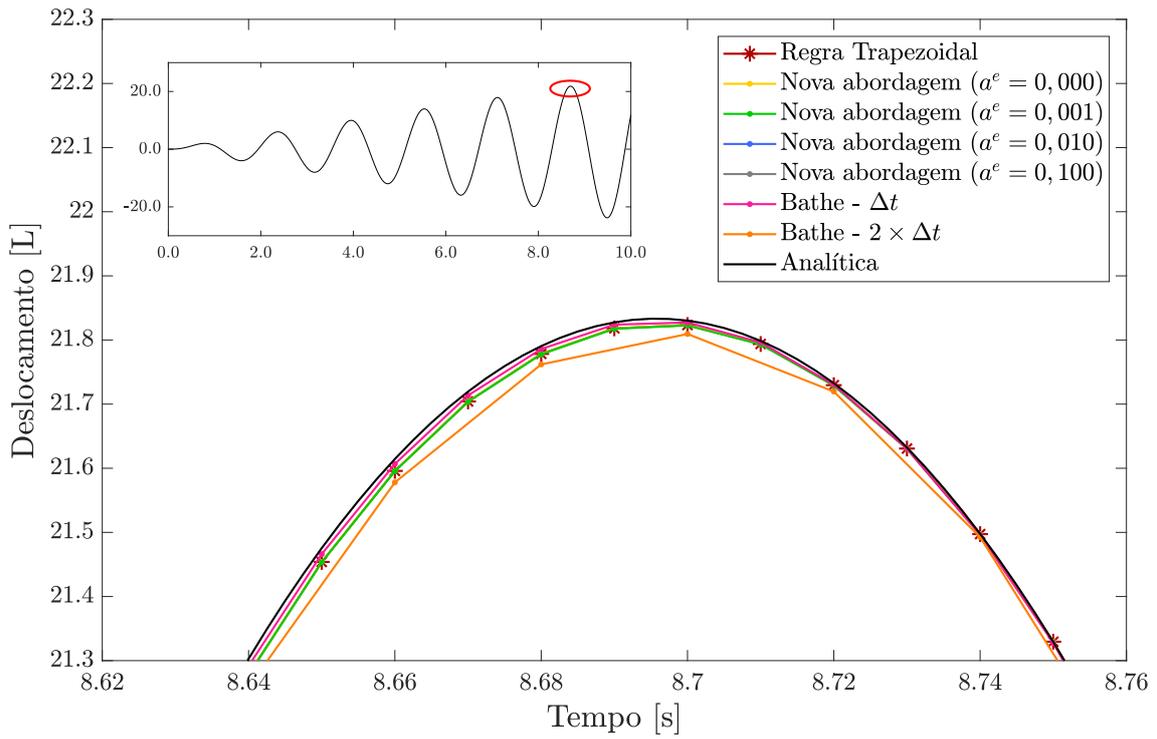


Figura 5.35: Deslocamento do nó 26 ( $\Delta t = 1,00 \times 10^{-2} s$ ).

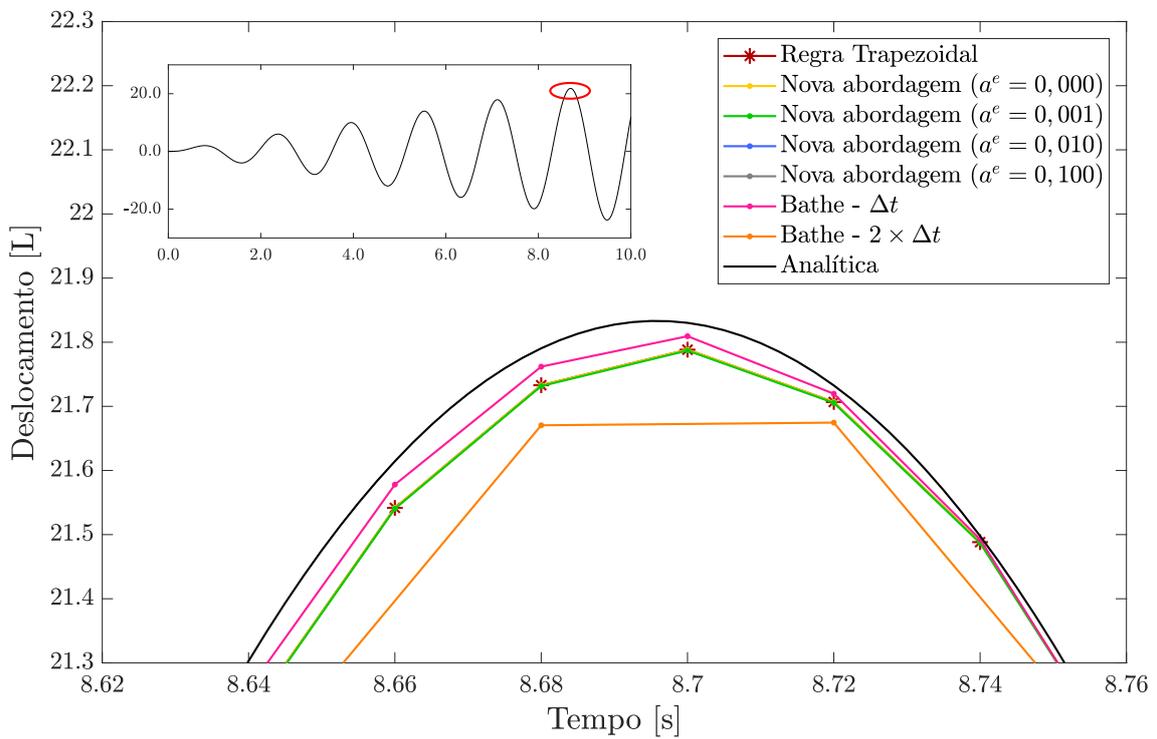


Figura 5.36: Deslocamento do nó 26 ( $\Delta t = 2,00 \times 10^{-2} s$ ).

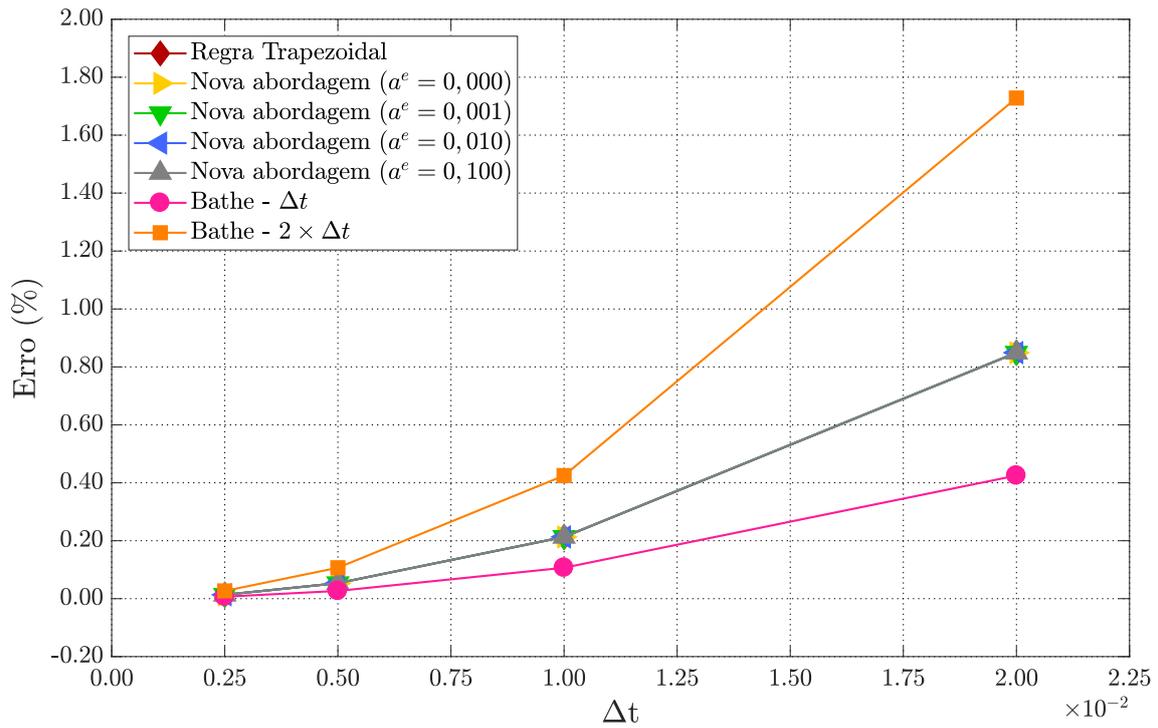


Figura 5.37: Erro relativo para o deslocamento vertical de todos os nós.

Ressalta-se que a propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  foi escolhida de forma a inserir o amortecimento numérico máximo ( $\gamma_e = 2$  e  $\alpha_e = 1$ ) para o exemplo 4. Os demais exemplos (2 e 3)  $a^e$  foi escolhido de forma a inserir um valor intermediário de amortecimento numérico (Tabela 5.8). Observa-se que, mesmo inserindo o máximo de amortecimento numérico a resposta não foi prejudicada, devido ao fato da dissipação ser local, sendo inserida somente nos elementos dos apoios neste caso.

## 5.5 Pórtico plano

O quinto exemplo de aplicação do novo método proposto consiste em um pórtico plano não homogêneo submetido a uma força vertical, conforme mostrado na Figura 5.38. Para discretização espacial (MEF) foram adotados 150 elementos de pórtico (151 nós) com 3 graus de liberdade por nó (deslocamento horizontal, deslocamento vertical e rotação). A discretização espacial de cada tramo do pórtico foi realizada de forma uniforme. Portanto, os tramos  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$  possuem 50 elementos cada e os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  correspondem aos nós 1, 51, 101 e 151, respectivamente. As matrizes de massa e rigidez foram computadas conforme desenvolvido na seção 2.2 e foram consideradas matriz de massa consistente e matriz de amortecimento nula.

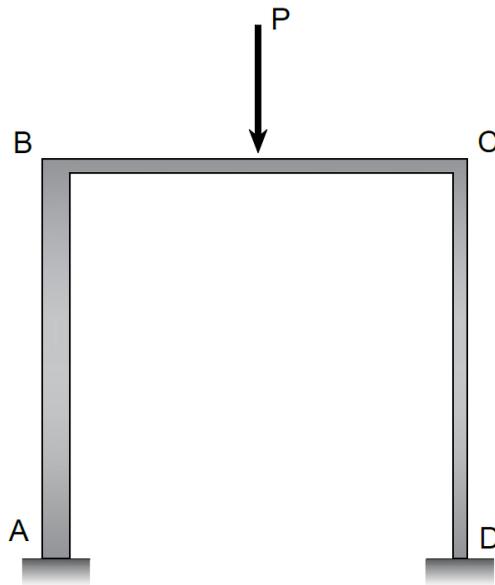


Figura 5.38: Pórtico plano não homogêneo submetido a uma força vertical.

As propriedades físicas e geométricas adotadas para o tramo  $AB$  foram: comprimento do tramo  $L_{AB} = 1,0 [L]$ , área da seção transversal  $A_{AB} = 0,1 [L^2]$ , momento de inércia  $I_{AB} = 1,0 \times 10^{-2} [L^4]$ , módulo de elasticidade  $E_{AB} = 1,0 \times 10^{12} [F/L^2]$  e massa específica  $\rho_{AB} = 10,0 [M/L^3]$ . Para os tramos  $BC$  e  $CD$  foram adotados: comprimento do tramo  $L_{BC} = L_{CD} = 1,0 [L]$ , área da seção transversal  $A_{BC} = A_{CD} = 0,1 [L^2]$ , momento de inércia  $I_{BC} = I_{CD} = 1,0 \times 10^{-2} [L^4]$ , módulo de elasticidade  $E_{BC} = E_{CD} = 1,0 \times 10^7 [F/L^2]$  e massa específica  $\rho_{BC} = \rho_{CD} = 10,0 [M/L^3]$ .

Para o carregamento, foi considerado uma carga unitária  $P = 1,0 [F]$  aplicada instantaneamente no meio do tramo  $BC$  (nó  $76$ ) e mantida constante durante todo o intervalo da análise. Os passos de tempo adotados foram:  $\Delta t_1 = 1,0 \times 10^{-5}s$ ,  $\Delta t_2 = 2,0 \times 10^{-5}s$  e  $\Delta t_3 = 4,0 \times 10^{-5}s$  e o tempo total em todas as análises foi  $T = 0,04s$ .

Como o problema em questão não possui solução analítica, a resposta de referência foi obtida por superposição modal, considerando 80 modos de vibração. Cada modo de vibração foi resolvido integrando pela Regra Trapezoidal com o mesmo intervalo de tempo utilizado na análise. As respostas de referência, em cada passo de tempo, para o deslocamento horizontal dos nós  $51$  (ponto  $B$ ) e  $101$  (ponto  $C$ ) e para o deslocamento vertical do nó  $76$  (ponto de aplicação da carga) são mostradas nas Figuras 5.39 , 5.40 e 5.41, respectivamente.

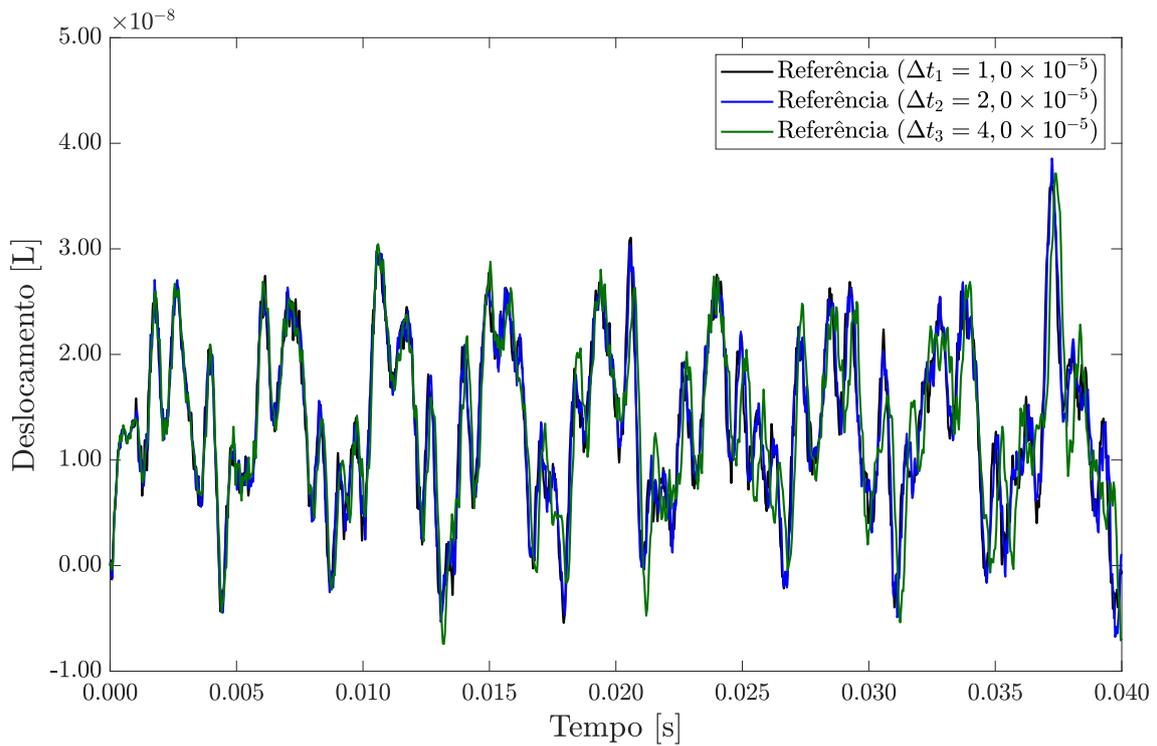


Figura 5.39: Deslocamento horizontal do nó  $51$  - Resposta de referência.

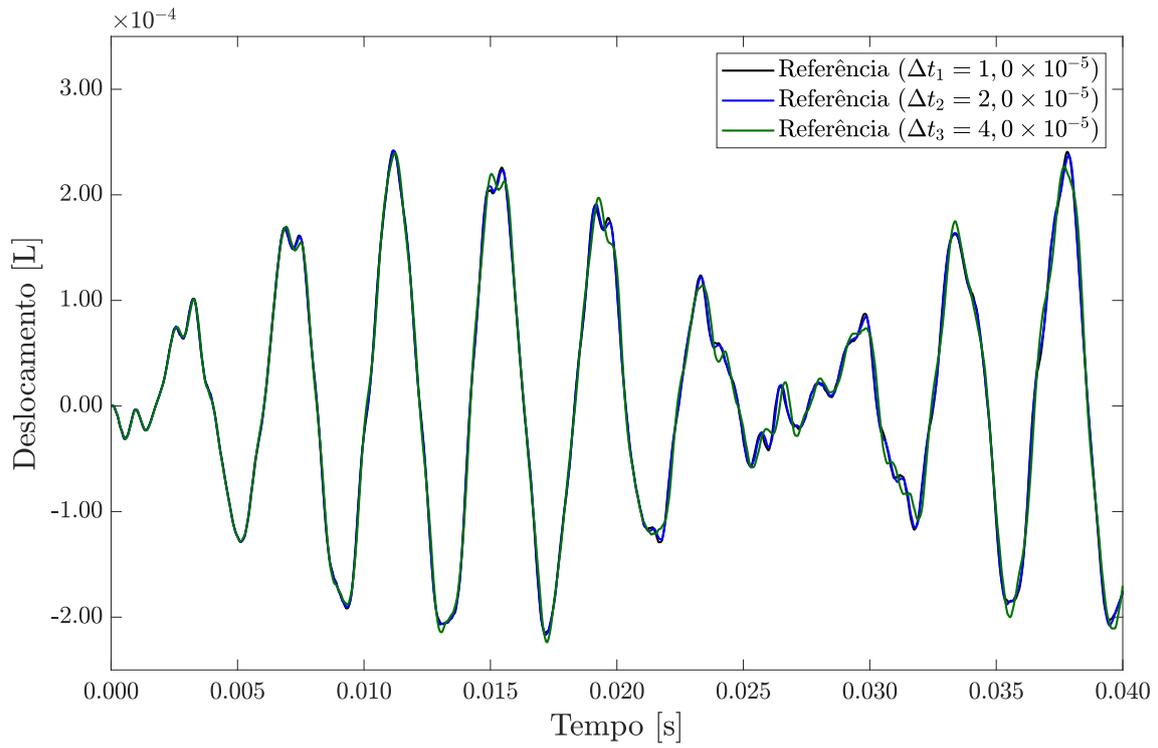


Figura 5.40: Deslocamento horizontal do nó 101 - Resposta de referência.

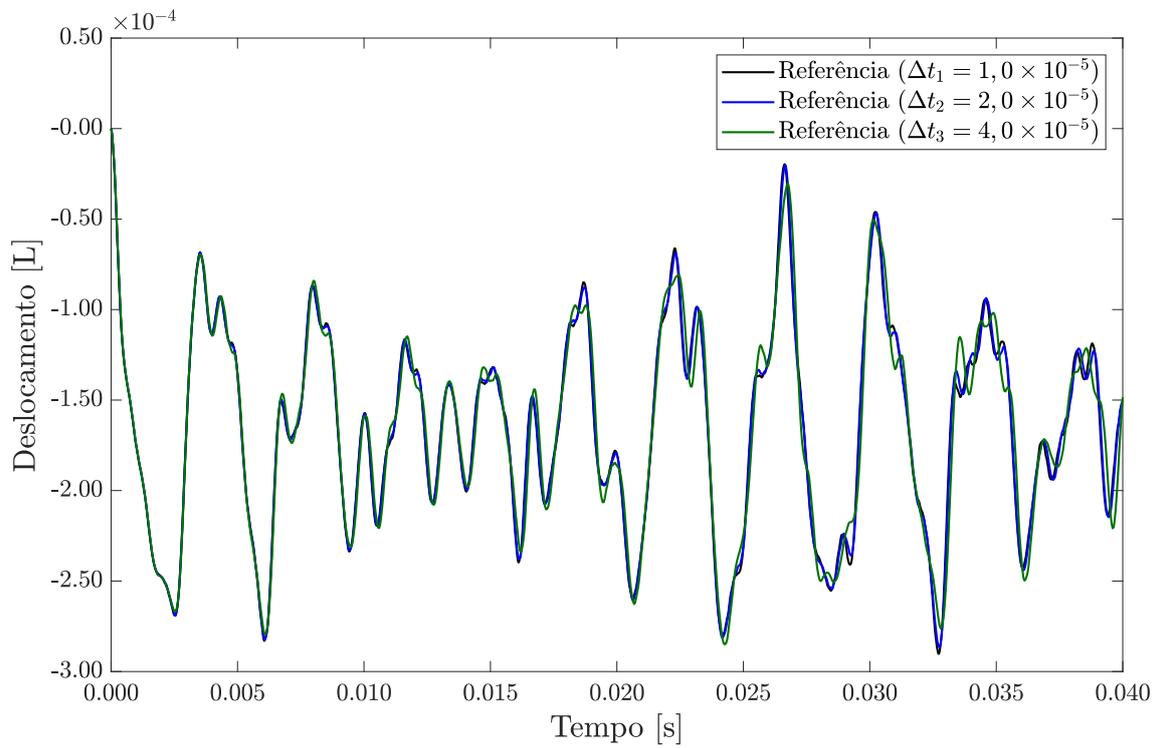


Figura 5.41: Deslocamento vertical do nó 76 - Resposta de referência.

Devido à configuração do problema em questão, a região que tende a apresentar maior ocorrência de frequências espúrias é o tramo  $AB$ , em virtude do aumento da rigidez nesta barra. Sendo assim, para a nova metodologia proposta foi executado um exemplo com inserção de amortecimento numérico local na barra  $AB$ , adotando o parâmetro  $a^e$  de forma a introduzir amortecimento numérico local máximo nesta região. Para as barras  $BC$  e  $CD$ , não foi inserido amortecimento numérico, sendo adotado  $a^e = 0$ . A propriedade de amortecimento numérico  $a^e$  adotada para cada elemento e os parâmetros  $\gamma_e$  e  $\alpha_e$  (computados automaticamente), são mostrados na Tabela 5.9.

Tabela 5.9: Parâmetros utilizados para o método proposto.

| Elementos | $a^e$ | $\gamma_e$ | $\alpha_e$ |
|-----------|-------|------------|------------|
| 1 ao 50   | 1,00  | 2,00       | 1,00       |
| 51 ao 150 | 0,00  | 0,50       | 0,50       |

Com intuito de comparação da precisão, além da nova abordagem proposta foram executados os seguintes métodos:

- Regra Trapezoidal - Newmark ( $\gamma_N = \frac{1}{2} - \beta_N = \frac{1}{4}$ )
- Bathe -  $\Delta t$
- Bathe -  $2 \times \Delta t$

Os resultados para o deslocamento horizontal do nó 51 (ponto  $B$ ), deslocamento horizontal do nó 101 (ponto  $C$ ) e o deslocamento vertical do nó 76 (ponto de aplicação da carga) são expostos nas Figuras 5.42 a 5.50.

Uma importante característica do método é a elevada eficiência em dissipar frequências espúrias. Pode-se observar nas Figuras 5.42 a 5.44, que a resposta obtida pelo novo método é próxima à apresentada pela Regra Trapezoidal. Entretanto a Regra Trapezoidal apresenta oscilações provenientes da participação de altas frequências e a nova abordagem apresenta uma resposta mais limpa e sem ruídos provenientes da discretização espacial.

Portanto, a nova abordagem se adapta à melhor aproximação na região sem amortecimento numérico (região menos rígida). Para este caso a melhor aproximação foi a obtida pela Regra Trapezoidal. Além disso, onde há necessidade de dissipação de frequências espúrias (região mais rígida), a nova abordagem remove a participação destas frequências sem deteriorar a resposta. Observa-se em todas as Figuras de 5.42 a 5.44 que a Regra Trapezoidal apresenta ruídos enquanto a nova abordagem não apresenta.

Ressalta-se que mesmo com um modelo com discretização espacial simples, onde a Regra Trapezoidal, a princípio apresenta respostas satisfatórias, o novo método foi superior. Desta forma, para modelos discretizados com elementos mais complexos e malhas mais refinadas, as características positivas de dissipação da nova abordagem serão ainda mais expressivas.

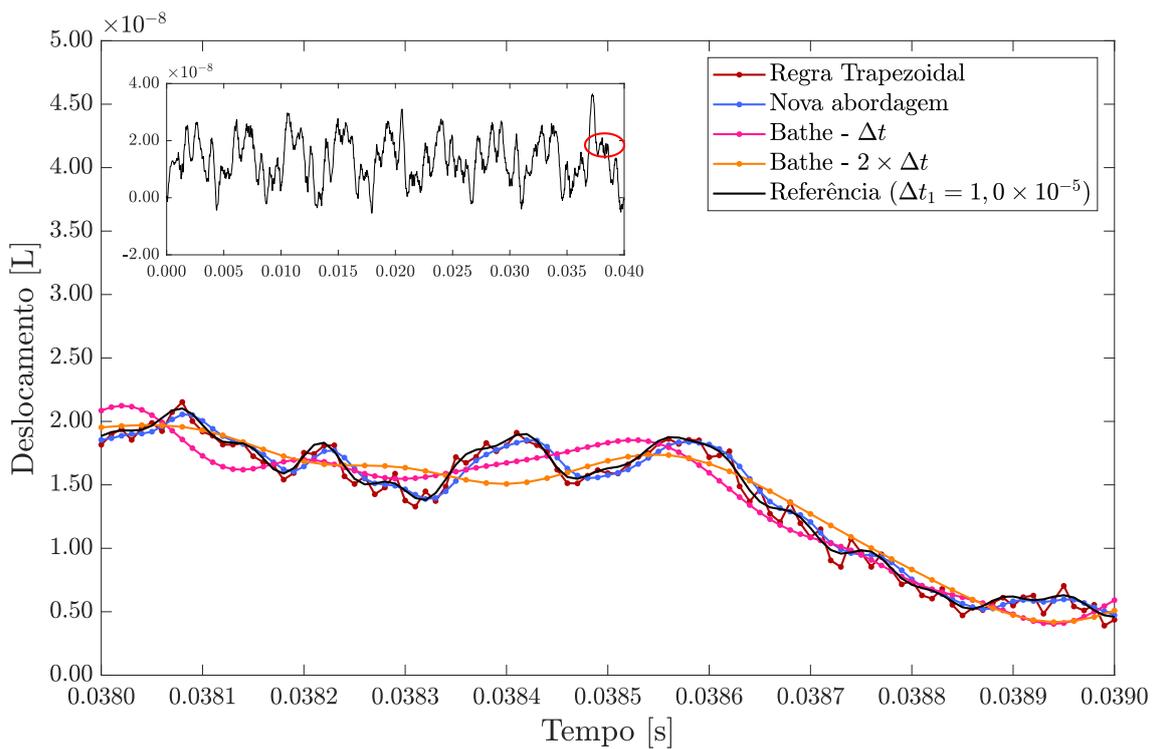


Figura 5.42: Deslocamento horizontal do nó 51 ( $\Delta t = 1,00 \times 10^{-5} s$ ).

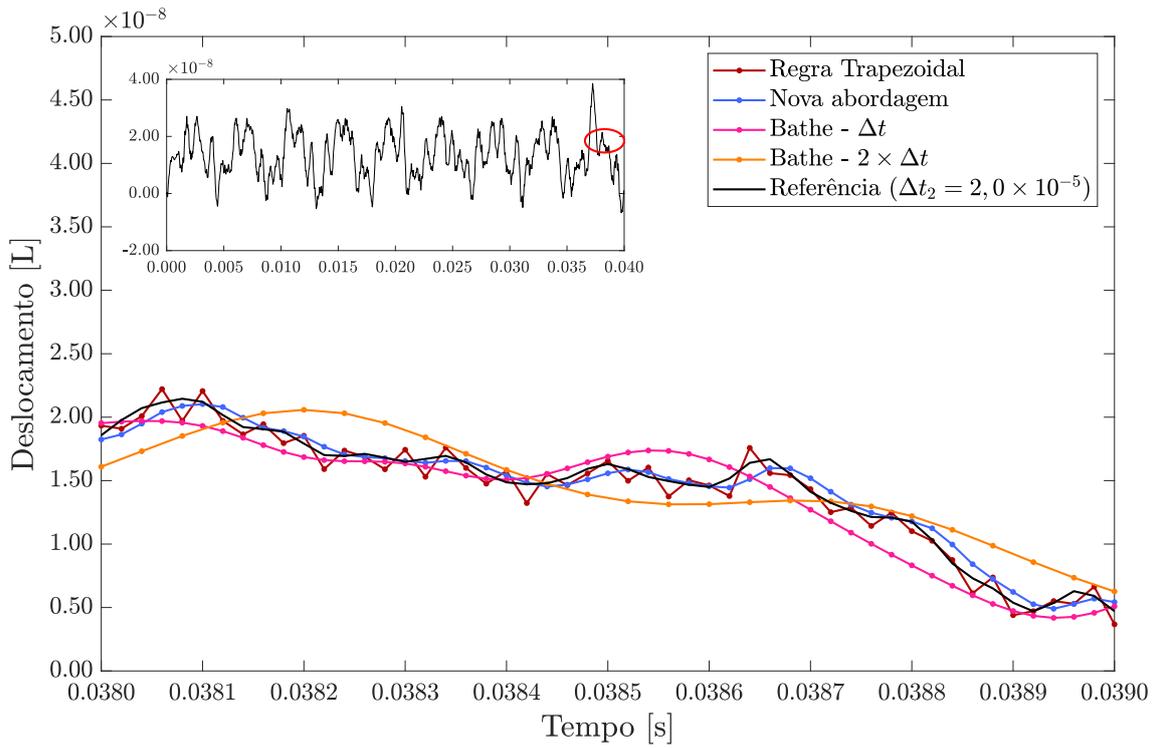


Figura 5.43: Deslocamento horizontal do nó 51 ( $\Delta t = 2,00 \times 10^{-5} s$ ).

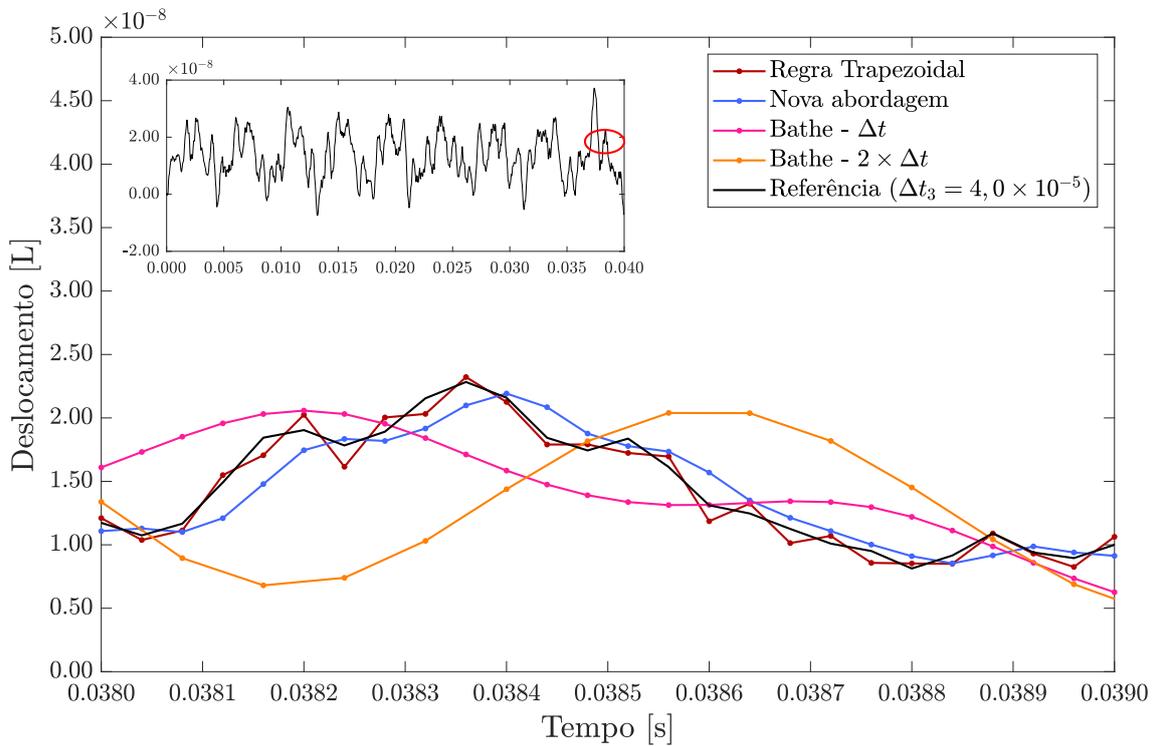


Figura 5.44: Deslocamento horizontal do nó 51 ( $\Delta t = 4,00 \times 10^{-5} s$ ).

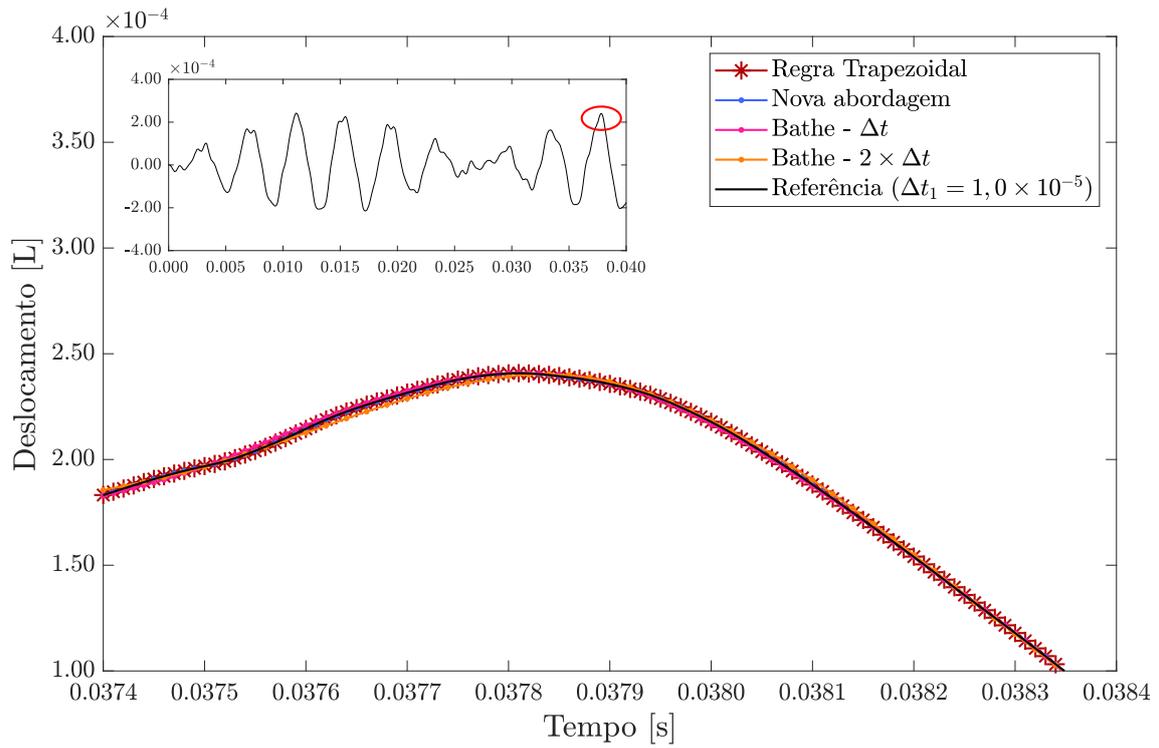


Figura 5.45: Deslocamento horizontal do nó 101 ( $\Delta t = 1,00 \times 10^{-5} s$ ).

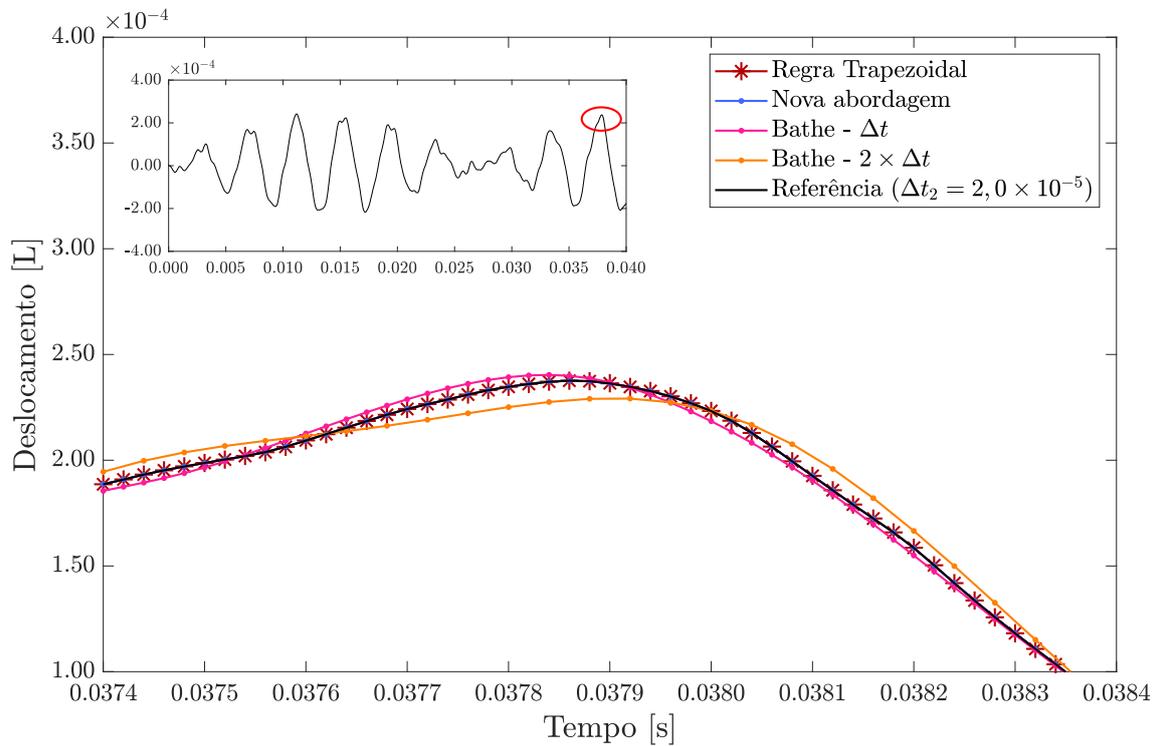


Figura 5.46: Deslocamento horizontal do nó 101 ( $\Delta t = 2,00 \times 10^{-5} s$ ).

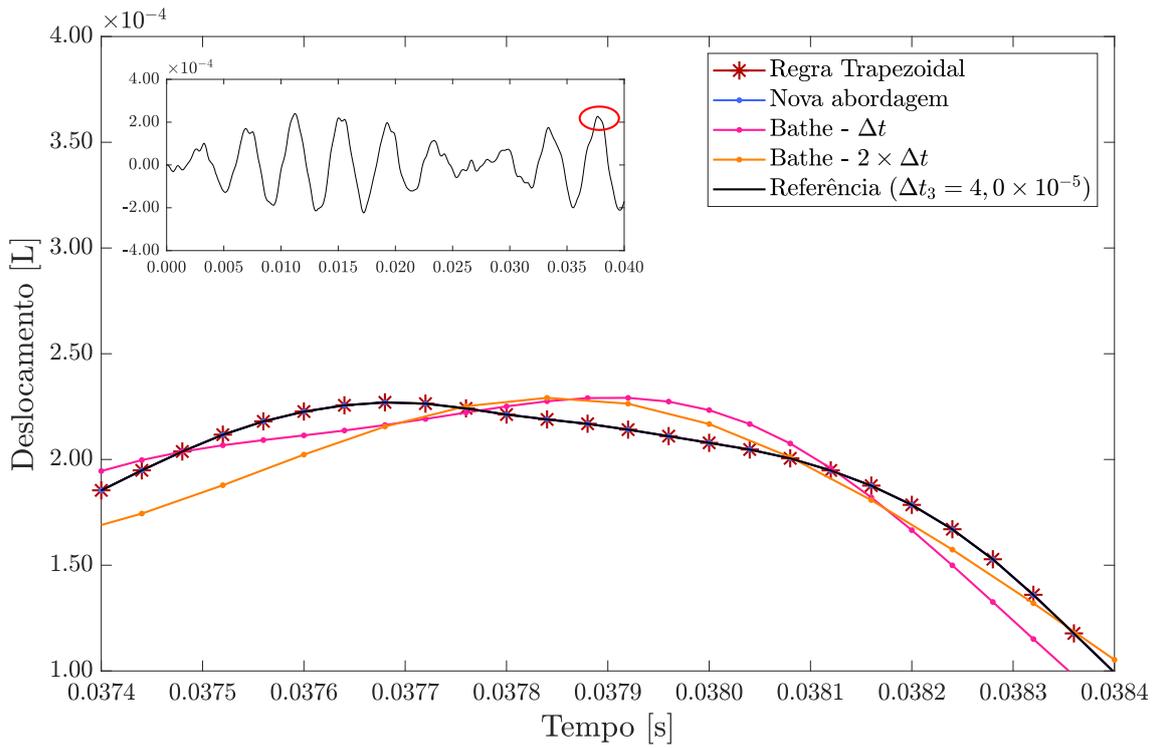


Figura 5.47: Deslocamento horizontal do nó 101 ( $\Delta t = 4,00 \times 10^{-5} s$ ).

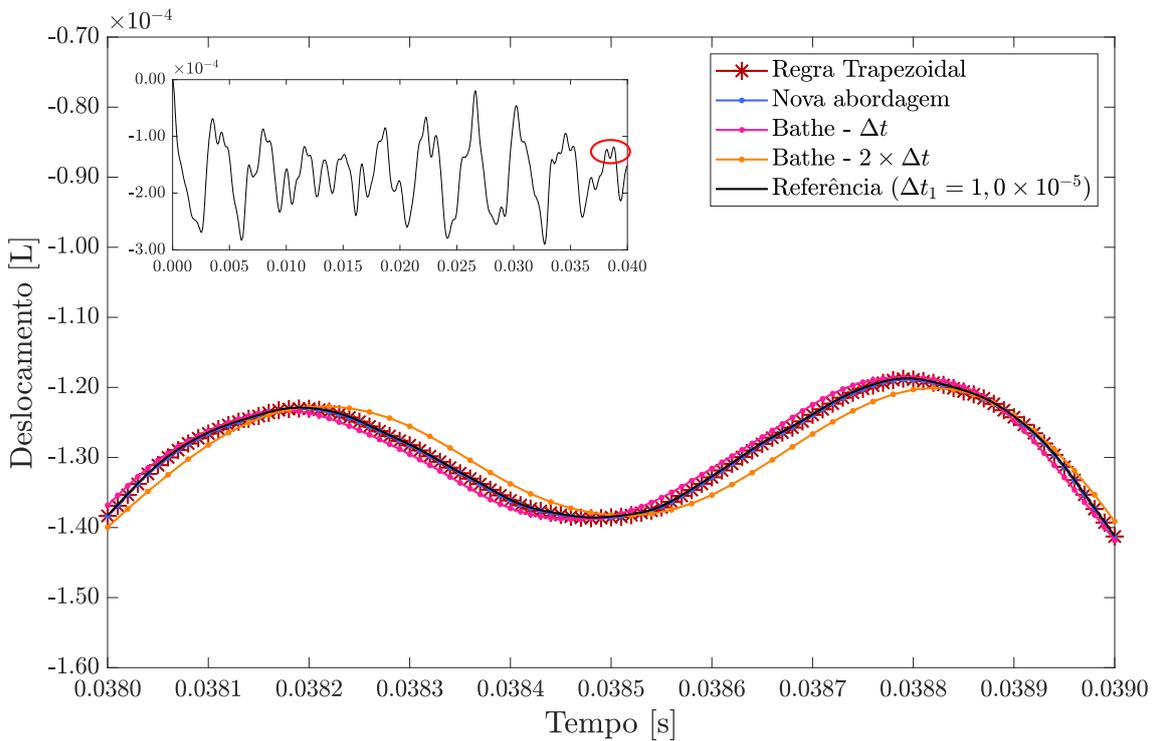


Figura 5.48: Deslocamento vertical do nó 76 ( $\Delta t = 1,00 \times 10^{-5} s$ ).

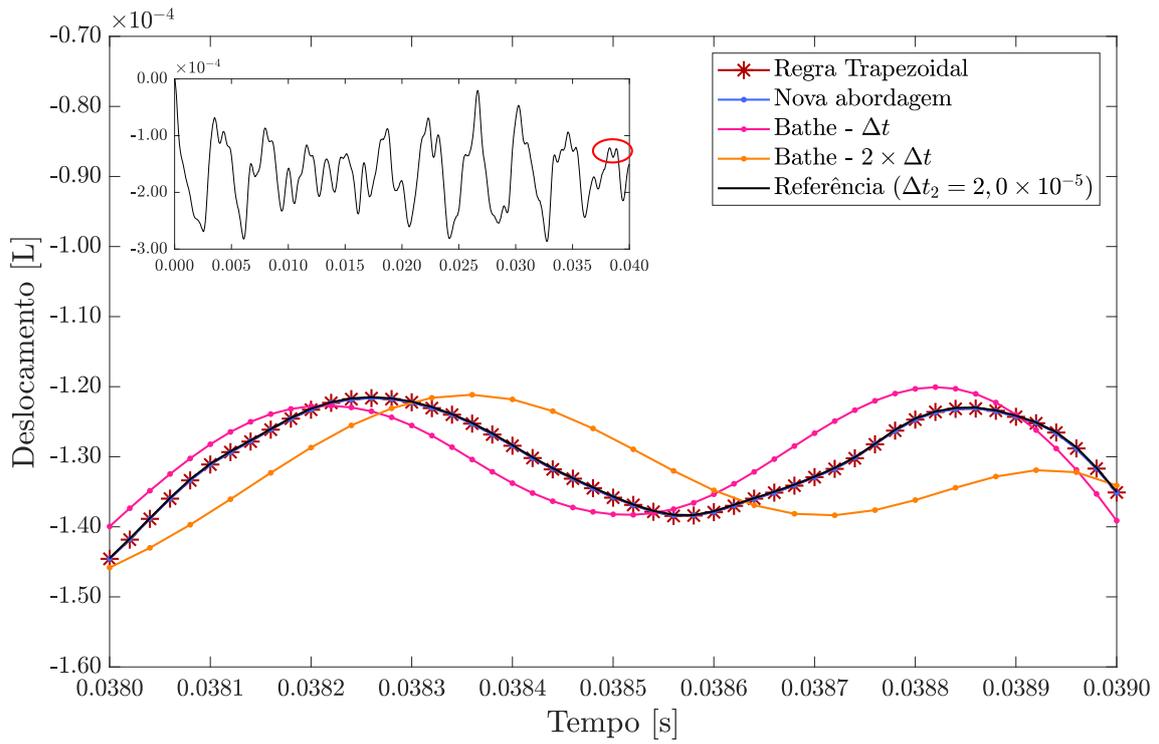


Figura 5.49: Deslocamento vertical do nó 76 ( $\Delta t = 2,00 \times 10^{-5} s$ ).

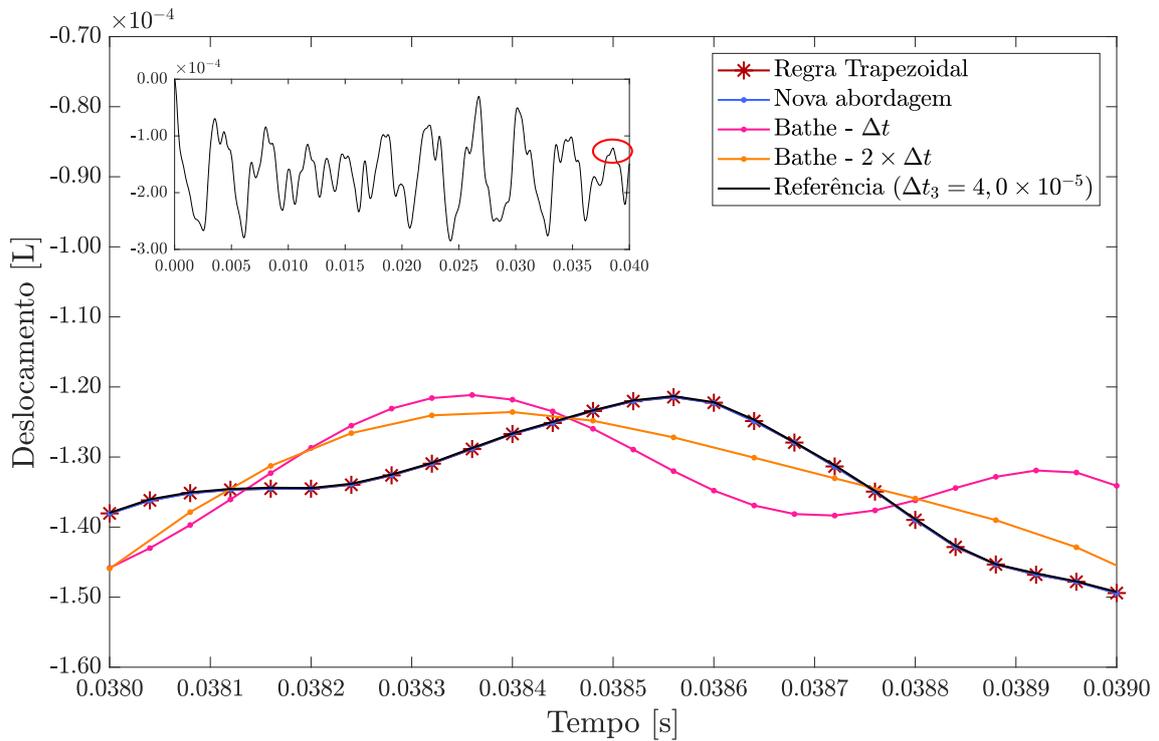


Figura 5.50: Deslocamento vertical do nó 76 ( $\Delta t = 4,00 \times 10^{-5} s$ ).

# Capítulo 6

## Conclusões

No presente trabalho foi desenvolvida uma nova metodologia de integração numérica no domínio do tempo para resolução de problemas de dinâmica estrutural. A nova abordagem possui dois parâmetros ( $\gamma_e$  e  $\alpha_e$ ) que são computados de forma automática para cada elemento em cada passo de tempo. Esta característica permite uma diferente distribuição espacial e temporal dos parâmetros, fazendo com que o método se adapte de acordo com a necessidade do problema.

Como o novo método baseia-se somente em relações entre deslocamentos e velocidades, o cálculo de acelerações em cada passo de tempo não se faz necessário. Desta forma, além de apresentar menos equações por passo de tempo (e, consequentemente, menor custo computacional), o método proposto no presente trabalho não necessita de procedimentos especiais de inicialização da marcha no tempo (*i.e.* cálculo de aceleração inicial de forma externa ao algoritmo).

Além disso, a nova abordagem possui dissipação numérica de frequências espúrias controlável pelo usuário em nível de elemento. Tal controle é realizado por apenas um parâmetro ( $a^e$ ) e a metodologia permanece com precisão de segunda ordem quando o amortecimento numérico é inserido, característica que não é apresentada por alguns métodos clássicos, tal como o método de Newmark.

O novo método possui estabilidade garantida independente da propriedade de amortecimento numérica adotada pelo usuário ou o passo de tempo da análise. Conforme discutido na seção 4.2.2, a nova abordagem é condicionalmente estável quando

não há inserção de amortecimento numérico, mas os parâmetros são computados de forma que a instabilidade nunca seja alcançada. Já para o caso com inserção de amortecimento numérico, o método é incondicionalmente estável.

Conforme demonstrado nas aplicações numéricas, o novo método se mostra altamente eficaz para a solução da equação de movimento obtida pela discretização espacial por intermédio do método dos elementos finitos. Em todos os exemplos mostrados, a precisão da nova abordagem foi superior ao método de Bathe -  $2 \times \Delta t$  (comparação com mesmo custo computacional) e superior ou igual (em alguns casos reproduzindo a Regra Trapezoidal) ao método de Newmark. Observou-se, ainda, que em alguns exemplos o método se mostrou superior ao método de Bathe. Ou seja, uma melhor eficiência foi obtida com aproximadamente metade do custo computacional.

Além das vantagens descritas anteriormente, o método é simples e de fácil implementação em códigos já existentes, tendo como entrada somente o elemento a ser inserido o amortecimento numérico e a magnitude de tal amortecimento, não cabendo ao usuário a escolha de parâmetros do método. Portanto, na abordagem apresentada neste trabalho, a propriedade de amortecimento numérico passa a ser tratada como uma propriedade do meio, dada por elemento, da mesma forma que módulo de elasticidade, área da seção transversal, momento de inércia, etc. Sendo assim, a metodologia apresentada neste trabalho se mostra altamente promissora inclusive para utilização em *softwares* comerciais.

# Referências Bibliográficas

- [1] BATHE, K. J. *Finite element procedures*. 2<sup>a</sup> ed. New Jersey, Prentice Hall, 2014.
- [2] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons., 1989.
- [3] LOGAN, D. L. *A first course in the finite element method*. Cengage Learning, 2011.
- [4] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The finite element method: the basis*, v. 1. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [5] CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. *Dynamic of Structures*. 3 ed. Berkeley, Computers & Structures, Inc., 1995.
- [6] LANDAU, L. *Comportamento Dinâmico Não Linear de Estruturas pelo Método de Superposição Modal*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1983.
- [7] PAZ, M., LEIGH, W. E. *Structural dynamics: theory and computation*. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [8] ROSSI, D. F., FERREIRA, W. G., MANSUR, W. J., et al. “A review of automatic time-stepping strategies on numerical time integration for structural dynamics analysis”, *Engineering Structures*, v. 80, pp. 118–136, 2014.
- [9] HUGHES, T. J. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. New Jersey, Prentice Hall, 1987.
- [10] SOARES JR, D. “A simple and effective new family of time marching procedures for dynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, pp. 1138–1166, 2015.
- [11] ZIENKIEWICZ, O., XIE, Y. “A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis”, *Earthquake engineering & structural dynamics*, v. 20, n. 9, pp. 871–887, 1991.

- [12] HULBERT, G. M., JANG, I. “Automatic time step control algorithms for structural dynamics”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 126, n. 1-2, pp. 155–178, 1995.
- [13] CHOI, C.-K., CHUNG, H.-J. “Error estimates and adaptive time stepping for various direct time integration methods”, *Computers & structures*, v. 60, n. 6, pp. 923–944, 1996.
- [14] LAGES, E. N., SILVEIRA, E., CINTRA, D., et al. “An adaptive time integration strategy based on displacement history curvature”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 93, n. 12, pp. 1235–1254, 2013.
- [15] SOARES JR, D. “A simple and effective single-step time marching technique based on adaptive time integrators”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 109, n. 9, pp. 1344–1368, 2017.
- [16] DOKAINISH, M., SUBBARAJ, K. “A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I. Explicit methods”, *Computers & Structures*, v. 32, n. 6, pp. 1371–1386, 1989.
- [17] NEWMARK, N. M. “A method of computation for structural dynamics”, *Journal of the engineering mechanics division*, v. 85, n. 3, pp. 67–94, 1959.
- [18] SUBBARAJ, K., DOKAINISH, M. “A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—II. Implicit methods”, *Computers & Structures*, v. 32, n. 6, pp. 1387–1401, 1989.
- [19] FUNG, T. “Numerical dissipation in time-step integration algorithms for structural dynamic analysis”, *Progress in Structural Engineering and Materials*, v. 5, n. 3, pp. 167–180, 2003.
- [20] HOUBOLT, J. C. “A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft”, *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 17, n. 9, pp. 540–550, 1950.
- [21] PARK, K. “An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 42, n. 2, pp. 464–470, 1975.
- [22] TAMMA, K., ZHOU, X., SHA, D. “The time dimension: a theory towards the evolution, classification, characterization and design of computational al-

- gorithms for transient/dynamic applications”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 7, n. 2, pp. 67–290, 2000.
- [23] SOROUSIAN, A., FARJOODI, J. “A unified starting procedure for the Houbolt method”, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, v. 24, n. 1, pp. 1–13, 2008.
- [24] CHUNG, J., HULBERT, G. M. “A family of single-step Houbolt time integration algorithms for structural dynamics”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 118, n. 1, pp. 1–11, 1994.
- [25] WILSON, E., FARHOOMAND, I., BATHE, K. “Nonlinear dynamic analysis of complex structures”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 1, n. 3, pp. 241–252, 1972.
- [26] BATHE, K., WILSON, E. “Stability and accuracy analysis of direct integration methods”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 1, n. 3, pp. 283–291, 1972.
- [27] HILBER, H. M., HUGHES, T. J., TAYLOR, R. L. “Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 5, n. 3, pp. 283–292, 1977.
- [28] WOOD, W., BOSSAK, M., ZIENKIEWICZ, O. “An alpha modification of Newmark’s method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, n. 10, pp. 1562–1566, 1980.
- [29] CHUNG, J., HULBERT, G. “A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method”, *Journal of applied mechanics*, v. 60, n. 2, pp. 371–375, 1993.
- [30] BAZZI, G., ANDERHEGGEN, E. “The  $\rho$ -family of algorithms for time-step integration with improved numerical dissipation”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 10, n. 4, pp. 537–550, 1982.
- [31] HOFF, C., PAHL, P. “Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 67, n. 3, pp. 367–385, 1988.
- [32] BATHE, K.-J. “Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: a simple implicit time integration scheme”, *Computers & structures*, v. 85, n. 7, pp. 437–445, 2007.

- [33] BATHE, K.-J., BAIG, M. M. I. “On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics”, *Computers & Structures*, v. 83, n. 31, pp. 2513–2524, 2005.
- [34] BATHE, K.-J., NOH, G. “Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics”, *Computers & Structures*, v. 98, pp. 1–6, 2012.
- [35] TAMMA, K. K., NAMBURU, R. R. “A robust self-starting explicit computational methodology for structural dynamic applications: Architecture and representations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 29, n. 7, pp. 1441–1454, 1990.
- [36] CHUNG, J., LEE, J. M. “A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, n. 23, pp. 3961–3976, 1994.
- [37] HULBERT, G. M., CHUNG, J. “Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 137, n. 2, pp. 175–188, 1996.
- [38] YIN, S.-H. “A new explicit time integration method for structural dynamics”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 13, n. 03, pp. 1250068, 2013.
- [39] WEN, W.-B., JIAN, K.-L., LUO, S.-M. “An explicit time integration method for structural dynamics using septuple B-spline functions”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 97, n. 9, pp. 629–657, 2014.
- [40] KOLAY, C., RICLES, J. M. “Development of a family of unconditionally stable explicit direct integration algorithms with controllable numerical energy dissipation”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 43, n. 9, pp. 1361–1380, 2014.
- [41] GUI, Y., WANG, J.-T., JIN, F., et al. “Development of a family of explicit algorithms for structural dynamics with unconditional stability”, *Nonlinear Dynamics*, v. 77, n. 4, pp. 1157–1170, 2014.
- [42] REZAIEE-PAJAND, M., KARIMI-RAD, M. “A family of second-order fully explicit time integration schemes”, *Computational and Applied Mathematics*, pp. 1–24, 2017.

- [43] HILBER, H. M., HUGHES, T. J. “Collocation, dissipation and [overshoot] for time integration schemes in structural dynamics”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 6, n. 1, pp. 99–117, 1978.
- [44] REZAIEE-PAJAND, M., SARAFRAZI, S. R. “A mixed and multi-step higher-order implicit time integration family”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 224, n. 10, pp. 2097–2108, 2010.
- [45] SHOJAEI, S., ROSTAMI, S., ABBASI, A. “An unconditionally stable implicit time integration algorithm: Modified quartic B-spline method”, *Computers & Structures*, v. 153, pp. 98–111, 2015.
- [46] NEAL, M. O., BELYTSCHKO, T. “Explicit-explicit subcycling with non-integer time step ratios for structural dynamic systems”, *Computers & Structures*, v. 31, n. 6, pp. 871–880, 1989.
- [47] DANIEL, W. “Analysis and implementation of a new constant acceleration subcycling algorithm”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, n. 15, pp. 2841–2855, 1997.
- [48] WU, Y., SMOLINSKI, P. “A multi-time step integration algorithm for structural dynamics based on the modified trapezoidal rule”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 187, n. 3-4, pp. 641–660, 2000.
- [49] TARNOW, N., SIMO, J. “How to render second order accurate time-stepping algorithms fourth order accurate while retaining the stability and conservation properties”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 115, n. 3-4, pp. 233–252, 1994.
- [50] FUNG, T. “Unconditionally stable higher-order Newmark methods by substepping procedure”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 147, n. 1-2, pp. 61–84, 1997.
- [51] FUNG, T. “Higher-order accurate time-step-integration algorithms by post-integration techniques”, *International journal for numerical methods in engineering*, v. 53, n. 5, pp. 1175–1193, 2002.
- [52] MANCUSO, M., UBERTINI, F. “A methodology for the generation of low-cost higher-order methods for linear dynamics”, *International journal for numerical methods in engineering*, v. 56, n. 13, pp. 1883–1912, 2003.

- [53] BERGAN, P. G., MOLLESTAD, E. “An automatic time-stepping algorithm for dynamic problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 49, n. 3, pp. 299–318, 1985.
- [54] ZENG, L. F., WIBERG, N.-E., LI, X., et al. “A posteriori local error estimation and adaptive time-stepping for newmark integration in dynamic analysis”, *Earthquake engineering & structural dynamics*, v. 21, n. 7, pp. 555–571, 1992.
- [55] LI, X., ZENG, L. F., WIBERG, N.-E. “A simple local error estimator and an adaptive time-stepping procedure for direct integration method in dynamic analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, v. 9, n. 4, pp. 273–292, 1993.
- [56] ZHANG, D., WHITEN, W. “Step size control for efficient discrete element simulation”, *Minerals engineering*, v. 14, n. 10, pp. 1341–1346, 2001.
- [57] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The finite element method: solid mechanics*, v. 2. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [58] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The finite element method: fluid dynamics*, v. 3. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [59] SOARES JR, D. “A Simple Explicit–Implicit Time-Marching Technique for Wave Propagation Analysis”, *International Journal of Computational Methods*, p. 1850082, 2018.