Trabajo de las fuerzas internas

J. Güemez
Departamento de Física Aplicada,
Universidad de Cantabria, España

M. Fiolhais
CFisUC, Departamento de Física,
Universidade de Coimbra, Portugal

El concepto de fuerzas internas, es decir, fuerzas que se establecen entre las diversas partes componentes de un sistema extenso, genericamente notadas como $\vec{F}_k^{\rm int}$, juega un papel poco importante en la enseñanza de la física [1, pp. 194-196]. Las discusiones en las que interviene este concepto se suelen reducir a indicar que, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la resultante de las fuerzas internas es cero $\sum_k \vec{F}_k^{\rm int} = 0$, [2, p. 80], sin llegarse a reconocer que el trabajo realizado por dichas fuerzas, $\delta W^{\rm int} = \sum_k \vec{F}_k^{\rm int} \cdot {\rm d}\vec{r}_k$ puede ser no nulo [3].

Para un sistema extenso de masa $M = \sum_k {\rm m}_k$, —donde ${\rm m}_k$ es la masa de su k-esimo componente elemental (no tiene formas internas de acumular energía, no se deforma, no gira)—, la segunda ley de Newton aplicada a la k-esima partícula componente del sistema es $\vec{F}_k = {\rm m}_k\, \vec{a}_k$, con

$$(\vec{F}_k^{\rm int} + \vec{F}_k^{\rm ext})\, {\rm d}t = {\rm m}_k\, {\rm d}\vec{v}_k\,, \qquad (1)$$

donde la fuerza total $\vec{F}_k$ aplicada sobre esta partícula es igual a la suma vectorial de las fuerzas, internas $\vec{F}_k^{\rm int}$ y de las fuerzas externas $\vec{F}_k^{\rm ext}$ aplicadas sobre la misma.

Puesto que las fuerzas internas son pares de acción-reaccion, entonces, la suma de todas las fuerzas internas es nula, $\sum_k \vec{F}_k^{\rm int} = 0$. Sumando sobre todas las partículas del sistema, se tiene que

$$M{\rm d}\vec{v}_{\rm cm} = \vec{F}^{\rm ext}\, {\rm d}t\,;$$

que es la segunda ley de Newton para un sistema de partículas, donde $\vec{F}^{\rm ext} = \sum_k \vec{F}_k^{\rm ext}$ es el vector resultante de todas las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema, y donde $\vec{v}_{\rm cm}$ es la velocidad del centro de masas del sistema, definida como $\vec{v}_{\rm cm} = \sum_k {\rm m}_k \vec{v}_k \,/\, {\rm M}$. Multiplicando (producto escalar) ambos miembros de la anterior ecuación por la velocidad del centro de masas $\vec{v}_{\rm cm}$, se tiene $M\vec{v}_{\rm cm} \cdot {\rm d}\vec{v}_{\rm cm} = \vec{F}^{\rm ext} \cdot \vec{v}_{\rm cm}{\rm d}t$, de donde —con $\vec{v}_{\rm cm} \cdot {\rm d}\vec{v}_{\rm cm} = ½\, {\rm d}v_{\rm cm}^2$ y $\vec{v}_{\rm cm}{\rm d}t = {\rm d}\vec{r}_{\rm cm}$— se obtiene

$$\frac{1}{2}\, M{\rm d}v_{\rm cm}^2 = \vec{F}^{\rm ext} \cdot {\rm d}\vec{r}_{\rm cm}\,. \qquad (2)$$

Es interesante destacar que en esta Ec. (2) el diferencial del desplazamiento del centro de masas ${\rm d}\vec{r}_{\rm cm}$ no es, en general, el desplazamiento de la fuerza externa resultante $\vec{F}^{\rm ext}$ y que en esta fuerza resultante $\vec{F}^{\rm ext}$ pueden entrar tanto fuerzas que realicen trabajo como fuerzas que no realicen trabajo [5] y con diferentes desplazamientos. Por tanto, esta Ec. (2), otra forma de la segunda ley de Newton, no es un teorema trabajo-energía cinética [6], del mismo modo que el producto $\vec{F}^{\rm ext} \cdot {\rm d}\vec{r}_{\rm cm}$ —denominado pseudotrabajo [4]— no es, en general, un trabajo.

Para procesos generales realizados sobre un sistema extenso, ademas de la segunda ley de Newton se necesita el primer principio de la termodinámica para una descripcion completa del mismo [6]. En su forma general, el primer principio de la termodinámica se puede expresar como [7, pp. 101-102]

$${\rm d}K_{\rm cm} + {\rm d}U = \delta W^{\rm ext} + \delta Q \qquad (3)$$

En esta ecuación, ${\rm d}K_{\rm cm}$ es la variación de la energía cinética del centro de masas del sistema, informacion que se obtiene mediante la aplicación de la segunda ley de Newton al proceso.

En la Ec. (3), ${\rm d}U$ es la variación de la energía interna del sistema, que incluye, entre otras posibles variaciones,

$${\rm d}U = {\rm d}K^{\rm int} + {\rm d}\Phi + {\rm d}U_\xi + {\rm d}U(T) + \ldots$$

donde ${\rm d}K^{\rm int}$ es la variación de la energía cinética interna —o energía cinética relativa al centro de masas—, ${\rm d}\Phi$ es la variación de energía interna debida a interacciones tipo gravitatorio, electrostatico, etc., ${\rm d}U_\xi$ es la variación de energía química interna debido a reacciones químicas, y ${\rm d}U(T)$ como variación de la energía interna debida a variaciones de temperatura del sistema (por ejemplo, un gas) como un todo, etc.

El trabajo $\delta W^{\rm ext}$ realizado por las fuerzas externas es la suma $\delta W^{\rm ext} = \sum_k \vec{F}_k^{\rm ext} \cdot {\rm d}\vec{r}_k$ de los trabajos realizados por las fuerzas externas aplicadas, expresión que no se debe confundir con el producto anterior (pseudotrabajo) $\vec{F}_k^{\rm ext} \cdot {\rm d}\vec{r}_{\rm cm}$, para la resultante de las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema.

En la Ec. (3), el termino δQ es energía intercambiada por calor (es decir, no hay en este caso una fuerza cuyo punto de aplicación se desplaza). En los procesos a describir, por simplicidad, se va a considerar que ${\rm d}U(T) = 0$ (las partes internas del sistema no experimentan variaciones de temperatura) y que $\delta Q = 0$ (el sistema no intercambia energía por calor con el entorno).

Tanto las variaciones de energía interna relacionadas con interacciones gravitatorias o electrostáticas, como las variaciones de energía interna relacionadas con reacciones químicas, se pueden relacionar con el trabajo de las fuerzas internas como, por ejemplo

$$d\Phi = -\delta W^{\text{int}} \text{ o } dU_{\xi} = -\delta W^{\text{int}} .$$

Las fuerzas internas permiten tanto intercambiar entre sí formas de energía interna como transformar la energía interna, o parte de ella, en energía cinética del centro de masas.

Para destacar mejor el papel que juega la fuerza resultante de las fuerzas externas, que se incorpora en la segunda ley de Newton, y el papel que juega el trabajo de las fuerzas externas, que se encuentra en el primer principio de la termodinámica, se van a considerar varios tipos de procesos, dependiendo de que la resultante de las fuerzas externas aplicadas sobre un sistema extenso sea, o no, cero y de que el trabajo realizado por las fuerzas externas sea, o no, nulo. En cada caso, se mostrara el papel que juega el trabajo que realizan las fuerzas internas implicadas en el proceso.

En la Figura 1 se muestra un esquema de un proceso en el que dos partículas, 1, de masa m_1, y 2, de masa m_2, inicialmente situadas a distancia d_{i} interaccionan gravitacionalmente, alcanzando velocidades v_1 y v_2, respectivamente, cuando se encuentran a una distancia nal d_{f}. Para este proceso, $\sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}} = 0$, y $\sum_j W_j^{\text{ext}} = 0$.

Puesto que no hay fuerzas externas, se tiene que $dK_{\text{cm}} = 0$, el centro de masas del sistema no vara ni su velocidad ni su posición inicial. Y, puesto que el trabajo externo es nulo, se tiene que

$$dU = dK^{\text{int}} + d\Phi = 0 .$$

A su vez, la variación de la energía potencial gravitatoria a lo largo del proceso es igual al (menos) trabajo realizado por las fuerzas internas, $-\Delta\Phi = W^{\text{int}}$, con

$$Gm_1m_2\left(\frac{1}{d_{\text{f}}} - \frac{1}{d_{\text{i}}}\right) = W^{\text{int}} ; \qquad (4)$$

donde

$$W^{\text{int}} = \int_i^f \vec{F}_{2/1}^{\text{int}} \cdot dr_1 + \vec{F}_{2/1}^{\text{int}} \cdot dr_2 .$$

Este trabajo de las fuerzas internas es, a su vez, el responsable de las variaciones de la energía cinética interna del sistema, $\Delta K^{\text{int}} = W^{\text{int}}$, con

$$\frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 = W^{\text{int}}.$$

y con

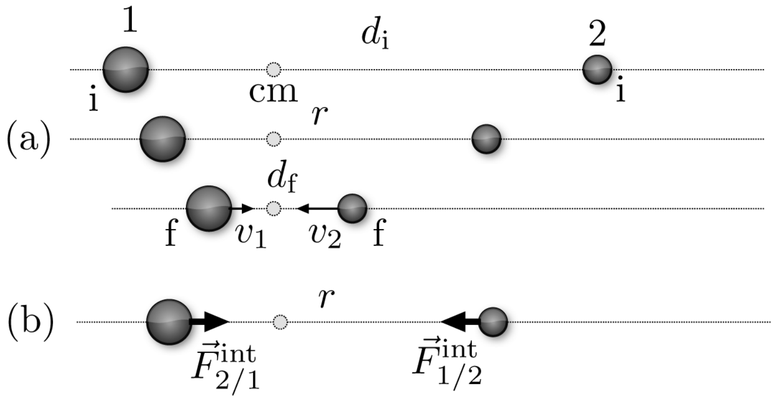


Fig. 1. (a) Dos partículas 1 y 2, inicialmente separadas una distancia d_{i}, se mueven bajo la accion de fuerzas gravitatorias, alcanzando velocidades v_1 y v_2 cuando la distancia entre ambas es d_{f}. (b) Fuerzas (internas) que actúan sobre las partículas en una posición genérica del proceso.

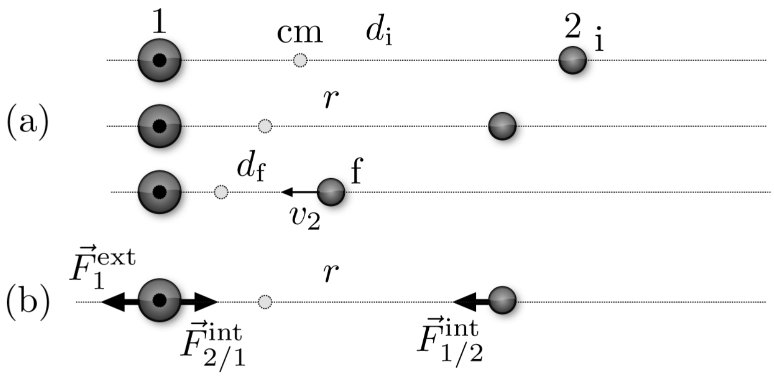
$$\frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 = Gm_1m_2\left(\frac{1}{d_{\text{f}}} - \frac{1}{d_{\text{i}}}\right)$$

La energía cinética interna, producida a lo largo del proceso, proviene de la disminucion de la energía potencial gravitatoria de interacción entre las partículas 1 y 2, siendo las fuerzas internas el intermediario, a traves del trabajo que realizan, de esta transformacion entre energías internas del sistema. En este proceso las fuerzas internas no mueven el centro de masas del sistema conjunto, y son el mecanismo que permite, mediante la realización de un trabajo interno, la transformación de la variación de las energías internas de interacción en variación de la energía cinética interna, redistribuyendo las energías internas y manteniendo constante la energía interna total.

En la Figura 2 se muestra un esquema de un proceso en el que las partículas, 1, fija, y 2, inicialmente situadas a distancia d_{i} interaccionan gravitacionalmente, alcanzando la partícula 2 una velocidad v_2 cuando se encuentra a una distancia nal d_{f} de la partícula 1. Puesto que la partícula 1 permanece en reposo, sobre ella debe aplicarse una fuerza externa $\vec{F}_1^{\text{ext}}$, que no realiza trabajo, que compense la fuerza interna $\vec{F}_{2/1}^{\text{int}}$ que la partícula 2 hace sobre ella. En este proceso $\sum_j \vec{F}_j^{\text{ext}} \neq 0$, y $\sum_j W_j^{\text{ext}} = 0$.

Puesto que la fuerza externa resultante no es nula, se tiene que $dK_{\text{cm}} = \vec{F}_{2/1}^{\text{int}} \cdot d\vec{r}_{\text{cm}}$, el centro de masas del sistema varía su velocidad y su posición. Y, puesto que el trabajo externo es nulo, se tiene que

Fig. 2. (a) Dos partículas 1, que esta jada, y 2, estan inicialmente separadas una distancia d_{i}. La partícula 2 se mueve bajo la accion de una fuerza gravitatoria, alcanzando una velocidad v_2 cuando su distancia a la partícula 1 es d_{f}. (b) Fuerzas externas y fuerzas internas que actúan sobre las partículas en una posición genérica del proceso.



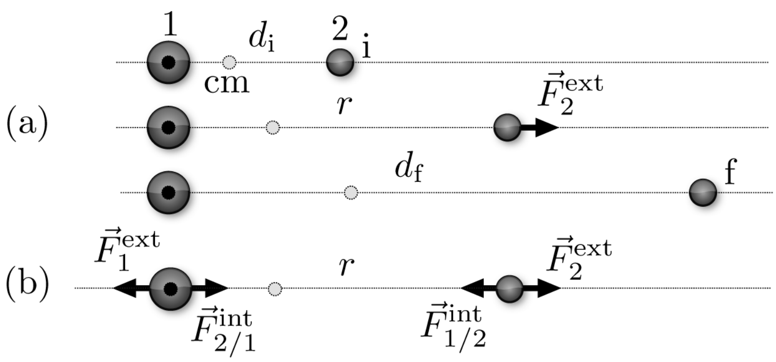


Fig. 3. (a) Dos partículas 1, que esta jada, y 2, sobre la que se aplica una fuerza externa, estan inicialmente separadas una distancia d_i. La partícula 2 se separa de la partícula 1 una distancia nal d_f . (b) Fuerzas externas y fuerzas internas que actúan sobre las partículas en una posición genérica del proceso.

$$\mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} + \mathrm{d}U = 0 :$$

La variación de la energía potencial gravitatoria a lo largo del proceso es igual al (menos) trabajo realizado por las fuerzas internas, $\mathrm{d}\Phi = -\delta W^{\mathrm{int}}$., y se tiene de nuevo la Ec. (4) donde ahora

$$W^{\mathrm{int}} = \int_i^f \vec{F}_{2/1}^{\,\mathrm{int}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2 \,,$$

pues en este caso la fuerza $\vec{F}_{2/1}^{\,\mathrm{int}}$ no realiza trabajo. Con $\mathrm{d}U = \mathrm{d}K^{\mathrm{int}} + \mathrm{d}\Phi$, este trabajo de las fuerzas internas es, a su vez, el responsable de la variación de la energía interna total del sistema, $\mathrm{d}K = \mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} +$ $+ \mathrm{d}K^{\mathrm{int}}$, con $\mathrm{d}K = W^{\mathrm{int}}$. As, se tiene $½\, m_2 v_2^2 = W^{\mathrm{int}}$, y que

$$\frac{1}{2}\, m_1 v_2^2 = \frac{1}{2}\, G m_1 m_2 \left(\frac{1}{d_\mathrm{f}} - \frac{1}{d_\mathrm{i}} \right).$$

La aplicación de la segunda ley de Newton a este proceso permite explicar, debido a las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema, el aumento de la energía cinética del centro de masas del mismo. Puesto que estas fuerzas externas no realizan trabajo, se necesita el primer principio de la termodinámica para explicar que el origen último de esta energía cinética, es la energía de interacción acumulada en la conguracion inicial de las partículas. Pero para superar la paradoja que supone constatar que el sistema adquiere energía cinética de traslación a traves de fuerzas externas que no realizan trabajo, es interesante utilizar el concepto de trabajo de las fuerzas internas. En este caso, y a traves de las fuerzas externas, el trabajo de las fuerzas internas permite disminuir la energía interna de interacción del sistema y desplazar el centro de masas del mismo (aunque para ello debe intervenir un cuerpo de masa infinita, el que fija la partícula 1).

En la Figura 3 se muestra un esquema de un proceso en el que las partículas, 1, fija, y 2, sobre la que se aplica una fuerza externa $\vec{F}_2^{\,\mathrm{ext}}$, inicialmente situadas a distancia d_i interaccionan gravitacionalmente, alcanzando la partícula 2, con velocidad cero, una posición a distancia nal d_f de la partícula 1. Puesto que la partícula 1 permanece en reposo, sobre ella debe aplicarse una fuerza externa $\vec{F}_1^{\,\mathrm{ext}}$, que no realiza trabajo, que compense la fuerza interna $\vec{F}_{2/1}^{\,\mathrm{int}}$ que la partícula 2 hace sobre ella. Y, puesto que la partícula 2 no vara su velocidad nula inicial, se debe tener que $\vec{F}_{2/1}^{\,\mathrm{int}} = \vec{F}_2^{\,\mathrm{ext}}$. En este proceso, $\sum_j \vec{F}_j^{\,\mathrm{ext}} = 0$, y $\sum_j W_j^{\mathrm{ext}} \neq 0$.

Puesto que la fuerza externa resultante es nula, se tiene que $\mathrm{d}K_{\mathrm{cm}} = 0$, el centro de masas del sistema, aunque sí varía su posición, no varía su velocidad, que es siempre nula. (Esto es semejante a lo que ocurre cuando, en un problema de termodinámica, se aplica una fuerza externa al pistón de un sistema cilindro-pistón que encierra un gas, fuerza que sí realiza trabajo, a la vez que sobre la base del cilindro se aplica otra fuerza igual y de sentido contrario, pero que no realiza trabajo. En este caso, el centro de masas del gas no varía su energía cinética, pero sí se desplaza.). Se tiene entonces que

$$\mathrm{d}U = \delta W^{\mathrm{ext}} \,.$$

La variación de la energía potencial gravitatoria a lo largo del proceso es igual al (menos) trabajo realizado por las fuerzas internas, con

$$-G m_1 m_2 \left(\frac{1}{d_\mathrm{f}} - \frac{1}{d_\mathrm{i}} \right) = W^{\mathrm{ext}} ;$$

donde $W^{\mathrm{ext}} = \int_\mathrm{i}^\mathrm{f} \vec{F}_2^{\,\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$. Con $-\mathrm{d}\Phi = \delta W^{\mathrm{int}}$, y puesto que $W^{\mathrm{ext}} = -W^{\mathrm{int}}$, donde $W^{\mathrm{int}} = \int_\mathrm{i}^\mathrm{f} \vec{F}_{1/2}^{\,\mathrm{int}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$, se tiene que $\Delta U = -W^{\mathrm{int}}$, con

$$G m_1 m_2 \left(\frac{1}{d_\mathrm{f}} - \frac{1}{d_\mathrm{i}} \right) = -\int_i^f \vec{F}_{1/2}^{\,\mathrm{int}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

La aplicación de la segunda ley de Newton a este proceso indica que el centro de masas del sistema no va a cambiar su velocidad. En este caso, el trabajo realizado por las fuerzas internas es el responsable de la disminución de la energía interna del sistema. Esto se puede conseguir gracias a la aplicación de una fuerza externa que sí realiza trabajo.

En la Figura 4 se muestra un esquema de un proceso en el que las partículas, 1, fija, y 2, sobre la que se aplica una fuerza externa $\vec{F}_2^{\,\mathrm{ext}}$, inicialmente situadas a distancia d_i interaccionan gravitacionalmente, alcanzando la partícula 2 una velocidad v_2, para una distancia nal d_f de la partícula 1. Puesto que la partícula 1 permanece en reposo, sobre ella debe aplicarse una fuerza externa $\vec{F}_1^{\,\mathrm{ext}}$, que no realiza trabajo, que compense la fuerza interna $\vec{F}_{1/2}^{\,\mathrm{int}}$ que la partícula 2 hace sobre ella. Y, puesto que la partícula 2 s vara su velocidad, se debe tener que $\vec{F}_{1/2}^{\,\mathrm{int}} < -\vec{F}_2^{\,\mathrm{ext}}$. En este proceso $\sum_j \vec{F}_j^{\,\mathrm{ext}} \neq 0$, y $\sum_j W_j^{\mathrm{ext}} \neq 0$..

Puesto que la fuerza externa resultante no es nula,

$$\frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, \mathrm{d}v_{\mathrm{cm}}^2 = (\vec{F}_2^{\,\mathrm{ext}} - \vec{F}_1^{\,\mathrm{ext}}) \cdot \mathrm{d}L_{\mathrm{cm}} \,,$$

y el centro de masas del sistema, varía su posición y su velocidad. Se tiene entonces que para este proceso

$$dK_{cm} + dU = \delta W^{ext},$$

donde $dU = dK^{int} + d\Phi$ y $-d\Phi = \delta W^{int}$. Con $Gm_1m_2 d(\frac{1}{r}) = \delta W^{int}$, donde $\delta W^{int} = \vec{F}^{int}_{1/2} \cdot d\vec{r}_2$, y con $dK = dK_{cm} + dK^{int} + dKint = ½\, m_2 v_2^2$, se tiene que

$$\frac{1}{2}\, m_1 dv_2^2 - \delta W^{int} = \delta W^{ext}, \qquad (5)$$

donde $\delta W^{ext} = \vec{F}_2^{ext} \cdot d\vec{r}_2$,. Se tiene por tanto que $\Delta K - W^{int} = W^{ext}$, con

$$\frac{1}{2}\, m_2 dv_2^2 = \int_i^f (\vec{F}_2^{ext} - \vec{F}^{int}_{1/2}) \cdot d\vec{r}_2 \qquad (6)$$

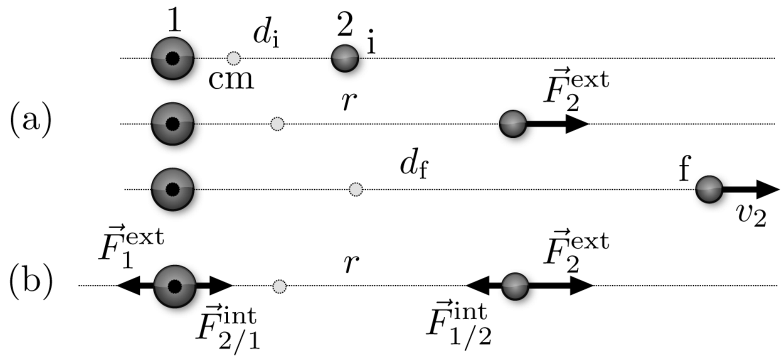


Fig. 4: (a) Dos partículas 1, que esta jada, y 2, sobre la que se aplica una fuerza externa, estan inicialmente separadas una distancia d_i. La partícula 2 alcanza una velocidad nal v_2 cuando se encuentra separada de la partícula 1 una distancia nal d_f. (b) Fuerzas externas y fuerzas internas que actúan sobre las partículas en una posición genérica del proceso.

En este proceso, parte del trabajo realizado por las fuerzas externas se emplea en realizar un trabajo contra las fuerzas internas, de tal forma que solo el trabajo restante realizado por las fuerzas externas se utiliza para acelerar el centro de masas del sistema.

Como se ha mostrado en los ejemplos considerados, dependiendo de las fuerzas externas aplicadas y del trabajo que estas realicen, el trabajo de las fuerzas internas puede jugar diferentes papeles.

En algunos casos, las fuerzas internas no mueven el centro de masas del sistema conjunto, pero son el mecanismo que permite la redistribución las energías internas, manteniendo constante la energía interna total.

Aunque pueda parecer una paradoja que fuerzas externas que no realizan trabajo permitan acelerar el centro de masas de un sistema, el papel del trabajo de las fuerzas internas permite entender esta clase de procesos.

Otra situación interesante se produce cuando fuerzas externas que sí realizan trabajo desplazan el centro de masas del sistema, pero sin acelerarlo. De nuevo, el trabajo de las fuerzas internas permite explicar esta situacion.

En conclusión, aunque la suma de las fuerzas internas es nula para un sistema que realiza un cierto proceso —lo que implica que las fuerzas internas no intervienen en la segunda ley de Newton que describa dicho proceso—, estas fuerzas internas sí pueden realizar trabajo —lo que signica que el trabajo de las fuerzas internas s puede intervenir en la ecuación del primer principio de la termodinámica que describa el mismo proceso [8].

Referencias

[1] J. M. Knudsen y P. G. Hjorth, *Elements of Newtonian Mechanics. Including Nonlinear Dynamics* (Springer, Heidelberg, 2000).

[2] J. J. Martínez Benjamín, *Mecánica Newtoniana* (Edicions UPC, 2000).

[3] L. Viennot, "Newton's Laws: A Very Persistent Consistency", *Phys. Educ.* 47 595-598 (2012).

[4] B. A. Sherwood, "Pseudowork and Real Work", *Am. J. Phys.* 51, 597-602 (1983).

[5] A. J. Mallinckrodt y H. S. Le, "All About Work", *Am. J. Phys.* 60 356-365 (1992).

[6] J. Güémez y M. Fiolhais, "From Mechanics to Thermodynamics: Analysis of Selected Examples", *Eur. J. Phys.* 34 345-357 (2013).

[7] C. Fernández Pineda y S. Velasco Maillo, *Introduccion a la Termodinámica* (Ed. Sntesis, Madrid 2009).

[8] J. Güémez, M. Fiolhais y L. Brito, "On the work of internal forces" *Eur. J. Phys.* 36 (2015) 045008 (10 pp) 8.