



André Gonçalves Salgado

# Estimação de funções de densidade neutras face ao risco: um estudo comparativo

Dissertação de Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças, orientada pela Professora Doutora Ana Margarida Machado Monteiro e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.

Março de 2017



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



# Estimação de funções de densidade neutras face ao risco: um estudo comparativo

André Gonçalves Salgado



UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças  
Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

March 2017



## **Agradecimentos**

Chegou a hora de agradecer a quem, direta ou indiretamente, contribuiu para a concretização deste trabalho. Assim, a minha profunda gratidão vai para:

A Professora Ana Margarida Monteiro, a quem expresso a minha profunda gratidão, desde logo pelo envolvimento na escolha do tema desta investigação. O seu interesse, disponibilidade e valiosas contribuições foram essenciais para a realização deste trabalho.

Os docentes que, ao longo da minha formação na Universidade de Aveiro e na Universidade de Coimbra, contribuíram para que eu chegasse a esta etapa.

Os colegas e amigos que, comigo, partilharam trabalhos e outras vivências académicas.

A minha família pelo apoio prestado ao longo deste percurso.

O meu avô Amadeu pela ajuda na revisão desta dissertação.

Os meus primos Pedro, Carla, Inês e Rita pela maneira calorosa como me receberam em Coimbra durante este ano e meio de mestrado.

Os meus pais Manuel e Ana e às minhas irmãs Maria e Leonor, pelo amor e carinho partilhado.



## Resumo

O estudo aqui apresentado consiste, fundamentalmente, na implementação e teste de duas abordagens para a estimação da função de densidade de risco neutro, utilizando para esse fim, os preços de opções de compra obtidos através da fórmula de Black-Scholes ou da fórmula de Heston e, posteriormente, preços do índice S&P 500, transacionados no mercado *Chicago Board Options Exchange (CBOE)*. Neste âmbito foram testadas duas abordagens paramétricas: a mistura de duas densidades lognormais e a densidade beta generalizada do tipo 2.

A implementação destas duas abordagens paramétricas, foi feita, fundamentalmente, com recurso ao software R. Aqui utilizámos os pacotes *Risk Neutral Density Extraction Package (RND)*, *Generalized Beta Distribution of the Second Kind (GB2)* e *Numerical Methods and Optimization in Finance (NMOF)*. Neste estudo utilizámos os resultados do artigo de Fengler e Hin [15], para escalonar os dados de entrada do problema, com o objetivo de melhorar o condicionamento dos problemas de otimização envolvidos na estimação dos parâmetros da função de densidade de risco neutro.

Estas duas abordagens foram analisadas, recorrendo à comparação dos preços teóricos e de mercado com os preços estimados, através das duas abordagens, inicialmente por via da análise gráfica e, posteriormente, utilizando o *root mean square error (RMSE)*, de modo a obter uma análise mais precisa.

Consequentemente, fizemos uma análise gráfica da função de densidade de risco neutro, de acordo com as duas abordagens estudadas, para os vários conjuntos de dados. De acordo com esta análise, salientámos alguns aspetos relativos à função de densidade de risco neutro, como a assimetria e o peso das caudas da distribuição, e de que maneira estas podem ser reveladoras de sentimentos da economia.





# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos básicos de matemática financeira</b>	<b>5</b>
2.1 Derivados financeiros . . . . .	5
2.2 Preço de opções e modelo de Black-Scholes . . . . .	6
2.2.1 Enquadramento teórico das opções . . . . .	6
2.2.2 Modelo de Black-Scholes . . . . .	8
2.2.3 Volatilidade implícita e limitações do modelo de Black-Scholes . . . . .	9
2.3 Distribuição de risco neutro . . . . .	10
2.4 Fontes de erro no preço das opções . . . . .	11
<b>3 Revisão de literatura</b>	<b>13</b>
3.1 Relação entre os preços das opções e a extração da função de densidade de risco neutro	13
3.2 Modelos estruturais . . . . .	14
3.2.1 Modelo de elasticidade constante da variância . . . . .	14
3.2.2 Modelo de volatilidade estocástica de Heston . . . . .	15
3.3 Modelos não-estruturais . . . . .	15
3.3.1 Modelos paramétricos . . . . .	16
3.3.2 Modelos semi-paramétricos . . . . .	20
3.3.3 Modelos não-paramétricos . . . . .	20
<b>4 Estimação das funções de densidade neutras face ao risco</b>	<b>23</b>
4.1 Aspectos numéricos na estimação dos modelos de preços de opções . . . . .	23
4.1.1 Métrica usada na comparação dos diferentes modelos . . . . .	23
4.1.2 Escalonamento dos dados . . . . .	24
4.1.3 Mistura de duas densidades lognormais . . . . .	25
4.1.4 Densidade beta generalizada do tipo 2 . . . . .	25
4.2 Resultados empíricos . . . . .	26
4.2.1 Dados de Black-Scholes . . . . .	26
4.2.2 Dados de Heston . . . . .	30

---

4.2.3	Dados de mercado para os preços de opções . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>

# Lista de Figuras

2.1	Perfil de ganho de uma opção <i>call</i> relativos à posição longa e curta, sem ter em conta o prémio pago pelo investidor em posição longa. . . . .	7
2.2	Perfil de ganho de uma opção <i>put</i> relativos à posição longa e curta, sem ter em conta o prémio pago pelo investidor em posição longa. . . . .	7
4.1	Estimação da função de densidade de risco neutro, para os dados de Black-Scholes, usando os modelos de MLN2 e GB2. . . . .	27
4.2	Comparação da função de densidade de risco neutro estimada, para os três conjuntos de dados gerados pela fórmula de Black-Scholes, usando o modelo GB2 e MLN2 respetivamente. . . . .	28
4.3	Comparação entre os preços de Black-Scholes e os preços estimados usando os modelos de MLN2 e GB2. . . . .	29
4.4	Estimação da função de densidade de risco neutro, para os dados de Heston, usando os modelos de MLN2 e GB2. . . . .	31
4.5	Comparação da função de densidade de risco neutro estimada, para os três conjuntos de dados gerados pela fórmula de Heston, usando o modelo GB2 e MLN2 respetivamente. . . . .	32
4.6	Comparação entre os preços de Heston e os preços estimados usando os modelos de MLN2 e GB2. . . . .	33
4.7	Estimação da função de densidade de risco neutro, para os três conjuntos de dados relativos ao S&P 500 , usando os modelos de MLN2 e GB2. . . . .	35
4.8	Comparação entre a função de densidade de risco neutro estimada para os três conjuntos de dados relativos ao S&P 500 , usando o modelo GB2 e o MLN2 respetivamente. . . . .	36
4.9	Comparação entre os preços de mercado e os preços estimados usando os modelos de MLN2 e GB2. . . . .	37



# Lista de Tabelas

4.1	RMSE para os preços das opções <i>call</i> estimados (dados de Black-Scholes). . . . .	30
4.2	RMSE para os preços das opções <i>call</i> estimados (dados de Heston). . . . .	34
4.3	RMSE para os preços das opções <i>call</i> estimados (dados do S&P 500). . . . .	38



# Capítulo 1

## Introdução

O mercado de derivados financeiros tem sofrido grandes desenvolvimentos nos últimos anos, com um maior número de contratos e de complexidade crescente, a serem transacionados. Os preços destes ativos, particularmente os contratos *forward*, contratos de futuros e as opções, refletem as expectativas dos intervenientes, relativamente à evolução da economia. Considerando a hipótese de neutralidade face ao risco, os contratos de futuro e os *forward* dão-nos o valor esperado do ativo subjacente na maturidade do contrato. Os preços dos contratos de opções contêm, por isso, informação muito atrativa, sendo possível, através deles, estimar a função de densidade de risco neutro implícita.

Para os agentes do mercado, a grande vantagem do uso da função de densidade de risco neutro implícita, é a possibilidade de atribuir probabilidades a uma série de eventos futuros, usando as perspectivas do mercado, em determinada altura. A estimação da função de densidade de risco neutro apresenta a vantagem de facilitar o cálculo do preço de opções novas, complexas ou ilíquidas, tal como refere Ait-Sahalia e Lo [2].

Os contratos de opções permitem controlar o risco de operações financeiras, por exemplo se o investidor quiser proteger-se contra uma subida do ativo subjacente pode adquirir opções de compra definindo antecipadamente o preço pelo qual quer comprar o ativo. As opções servem igualmente para fazer especulação financeira e aproveitar os desfasamentos das cotações em mercados diferentes procurando, assim, obter lucros sem correr riscos.

Os autores Black, Scholes e Merton apresentaram, pela primeira vez, uma fórmula para a atribuição de preços a opções do tipo europeu, que alterou significativamente a dinâmica dos mercados financeiros. Contudo, esta fórmula assume que o preço do ativo subjacente ao contrato de opções, segue uma distribuição de probabilidade lognormal com retorno esperado e volatilidade constantes. Assumindo esta hipótese teríamos, obrigatoriamente, volatilidades implícitas ao longo dos vários preços de exercício e dos diferentes prazos de maturidade constantes. Contudo, invertendo a fórmula apresentada por Black e Scholes (Black-Scholes) e calculando as volatilidades implícitas para cada preço de exercício da opção, concluímos que estas são distintas. Tentando resolver esta limitação, vários métodos têm sido estudados com o objetivo de extrair a função de densidade de risco neutro dos preços das opções; e vários estudos têm sido feitos com o objetivo de analisar a robustez e o poder informativo das mesmas estimações.

Breeden e Litzenberger [9] mostram que a segunda derivada da função de preço da opção de compra, em ordem ao preço de exercício, está relacionada com a função de densidade de risco neutro. Sendo assim conclui-se que, através da informação contida nos preços das opções de compra, é possível conhecer a informação dada pela função de densidade de risco neutro.

A literatura relacionada com a estimação da função de densidade de risco neutro, é extensa. Os modelos descritos nessa literatura podem ser divididos em duas categorias principais: modelos estruturais e não-estruturais. Um modelo é designado como estrutural, se propõe uma descrição completa para a evolução da dinâmica do preço do ativo subjacente e, em alguns casos, para o processo da volatilidade. E é considerado não-estrutural, se propõe uma descrição para a função de densidade de risco neutro, não especificando uma dinâmica para a evolução do preço do ativo. Os modelos não-estruturais podem ser divididos em três tipos, a saber: os paramétricos, os semi-paramétricos e os não-paramétricos. Os modelos paramétricos especificam um conjunto relativamente pequeno de parâmetros, para a função de densidade de risco neutro. Os não-paramétricos, não tentam dar uma forma explícita para a função de densidade de risco neutro, podendo desta forma ter mais facilidade em captar informação dos preços que estejam em conformidade com a realidade dos mercados. Finalmente, os modelos semi-paramétricos apresentam características dos paramétricos e dos não-paramétricos.

Tendo em conta que as abordagens utilizadas para estimar a função de densidade de risco neutro, originam diferentes resultados, é importante analisar o comportamento dos diversos métodos. Assim, o objetivo deste estudo é, exatamente, analisar diferentes métodos, com a finalidade de obter o modelo mais eficiente para identificar as expectativas do mercado em relação ao futuro.

Neste trabalho sugerimos dois modelos paramétricos: a mistura de duas densidades lognormais e a densidade beta generalizada do tipo 2, para estimar a função de densidade de risco neutro. A abordagem referida, foi testada com dados de preços de opções decorrentes do modelo de Black-Scholes e do modelo de volatilidade estocástica de Heston, e ainda com dados de mercado do índice S&P500 obtidos no mercado *Chicago Board of Options Exchange (CBOE)*, de modo a testar a sua aplicabilidade à realidade dos mercados financeiros.

A organização deste estudo assenta em cinco capítulos. No segundo, faz-se uma revisão dos conceitos básicos respeitantes à temática dos derivados e das opções. Explicado o conceito de opções, apresentaremos o modelo de Black-Scholes de atribuição de preços a opções, explicando, de seguida, as suas principais limitações. Prosseguindo, explicaremos as condições necessárias à existência de uma medida de probabilidade de risco neutro. Estas condições garantem, de facto, que as distribuições de probabilidade estimadas são de risco neutro.

No terceiro capítulo apresentaremos uma revisão de literatura onde explicaremos as várias abordagens utilizadas na estimação da função de densidade de risco neutro, que tentam resolver as limitações e restrições do modelo de Black-Scholes.

No quarto capítulo vamos apresentar as abordagens usadas nesta dissertação, para comparar os preços de opções de Black-Scholes ou de Heston ou os preços de opções de mercado, com os preços de opções obtidos através dos dois modelos utilizados na estimação das funções de densidade de risco neutro. De seguida iremos apresentar o escalonamento feito aos dados do problema, com o objetivo de melhorar o condicionamento dos problemas de otimização, envolvidos na estimação dos parâmetros da função de densidade de risco neutro. E abordaremos a metodologia utilizada com recurso ao R.



Deste modo vamos, a partir dos preços de opções de mercado ou dos preços de opções de Black-Scholes ou de Heston, estimar a função de densidade de risco neutro, implícita nos preços destas opções. Desta forma, determinaremos os parâmetros das funções de densidade que pretendemos estimar, considerando o quadrado da diferença entre os preços de mercado ou os preços de Heston ou de Black-Scholes; e os preços estimados decorrentes das abordagens da estimação da função de densidade de risco neutro usadas.

Estimaremos também os preços de opções de compra, de acordo com os dois modelos usados na estimação da função de densidade de risco neutro e, de seguida, vamos comparar estes com os valores dos dados (teóricos ou de mercado), pela análise gráfica e do *root mean square error* (RMSE). Finalmente, no quinto capítulo comentaremos os resultados obtidos na dissertação e vamos propor futuras investigações que se possam enquadrar no âmbito desta dissertação.



## Capítulo 2

# Conceitos básicos de matemática financeira

### 2.1 Derivados financeiros

Os contratos de derivativos são instrumentos financeiros transacionáveis, cujo preço é dependente de variáveis básicas, entre as quais alguns bens ou ativos financeiros. Exemplos desses bens ou ativos financeiros subjacentes a um contrato de derivativos são as ações, os índices acionistas, as mercadorias, as divisas e as obrigações.

O acordo que se celebra neste tipo de contrato, prevê que o mesmo seja liquidado num momento futuro. Estes produtos são transacionados num mercado com características muito específicas - o mercado de derivativos.

Os derivativos podem ser utilizados como investimento financeiro, juntamente com outros ativos. Este investimento tem um forte caráter especulativo. É um tipo de investimento que se torna positivo para o mercado, porque aumenta o número de tomadas de decisão do mesmo, incrementando a sua liquidez.

Estes contratos são muito utilizados para gerir o risco associado à variação do preço de certos ativos, como índices acionistas e taxas de juro. Pretende-se assim compensar o movimento do preço do ativo em determinado sentido, tomando uma posição oposta no mercado de derivativos e minorando as possíveis perdas decorrentes de situações adversas no mercado.

Estes derivativos também são utilizados pelos arbitragistas, para aproveitarem desfasamentos de cotações em diferentes mercados, com o objetivo de obter lucros isentos de risco. Os mesmos arbitragistas tiram, assim, partido das imperfeições dos mercados.

Os exemplos mais básicos de derivativos são os contratos *forward*, os contratos de futuros e os contratos de opções. O contrato de futuros é um contrato pelo qual duas partes se comprometem a transacionar, numa data futura, um determinado ativo financeiro a um preço que é estabelecido na altura da celebração do mesmo contrato. Este tipo de contrato é altamente padronizado e caracteriza-se pela sua negociabilidade. Por negociabilidade entende-se que estes contratos são objeto de transação em mercados formais, organizados e centralizados, o que potencia a sua liquidez.

Os contratos *forward* são contratos muito semelhantes aos contratos de futuros. Este tipo de contrato faz recair, sobre as partes, a negociação de todos os termos do contrato. A inexistência de

padronização neste tipo de contrato, faz com que os mesmos requeiram mais tempo comercial que os contratos de futuros. Assim, estes contratos são menos líquidos que os contratos de futuros. Os contratos *forward* têm um elevado risco de incumprimento por não possuírem qualquer mecanismo de redução de risco, tendo cada contratante de suportar o risco de incumprimento da sua contraparte. Por essa razão, as entidades que atuam no mercado de *forwards* são, normalmente, investidores sofisticados e de grande dimensão, pois têm de minorar o risco de incumprimento, visto que os contratantes só se envolvem com outras entidades que tenham um elevado padrão de crédito.

Tal como os contratos *forward* e os contratos de futuros, os contratos de opções fixam, no presente, o preço de uma transação que ocorre no futuro; porém, os termos do contrato são assimétricos, visto que o vendedor fica sujeito a que o comprador exerça ou não a opção.

## 2.2 Preço de opções e modelo de Black-Scholes

### 2.2.1 Enquadramento teórico das opções

Uma opção é um tipo de contrato através do qual, o comprador da mesma, adquire o direito de comprar ou de vender uma determinada quantidade do ativo subjacente, por um dado valor, designado por preço de exercício. No caso de o contrato conferir o direito de compra, trata-se de uma opção de compra (*call*). Se o mesmo contrato conferir o direito de venda, trata-se de uma opção de venda (*put*).

Definido que está o conceito de opção abordam-se, a seguir, dois tipos diferentes de opções: quando o direito tiver de ser exercido numa determinada data (maturidade) no futuro trata-se de uma opção europeia ou do tipo europeu. Caso o direito da opção possa ser exercido em qualquer momento antes da maturidade, trata-se de uma opção americana ou do tipo americano. Nesta dissertação vamos focar-nos apenas em opções do tipo europeu.

Quem compra a opção (comprador) adquire um direito, enquanto quem vende a opção (vendedor ou subscritor) assume a obrigação de comprar ou vender o ativo, num determinado momento futuro - no caso das opções europeias. Assim, o vendedor fica sujeito a que o comprador exerça ou não a opção que detém. O preço a pagar pela opção, ou seja, aquilo que o comprador paga ao vendedor quando o contrato é celebrado, é designado por prémio ou preço da opção. Este preço vai compensar o vendedor pela concessão do direito de comprar ou vender o ativo ao comprador da opção. Quem compra ou detém uma opção assume uma posição longa. Ao contrário, quem vende ou subscreve uma opção toma uma posição curta.

No caso das opções europeias, na data de maturidade assumida pelas partes, o comprador da opção apenas a exerce se o *payoff* for positivo; se o preço do ativo subjacente for superior ao preço de exercício nas opções *call*, ou na situação em que o preço do ativo subjacente for inferior ao preço de exercício nas opções *put*.

Não existindo custos de transação, podemos representar o perfil de ganho de uma opção europeia na maturidade, de acordo com as seguintes expressões (opção *call* e opção *put*), onde  $E$  é o preço de exercício da opção,  $S_T$  é o preço do ativo subjacente na maturidade e  $T$  é a maturidade da opção:

$$C(S_T, T, E) = \max(S_T - E; 0), \quad (2.1)$$

$$P(S_T, T, E) = \max(E - S_T; 0). \quad (2.2)$$

Os perfis de ganhos relativos às posições longa e curta na data da maturidade da opção são dados pelas figuras 2.1 e 2.2.

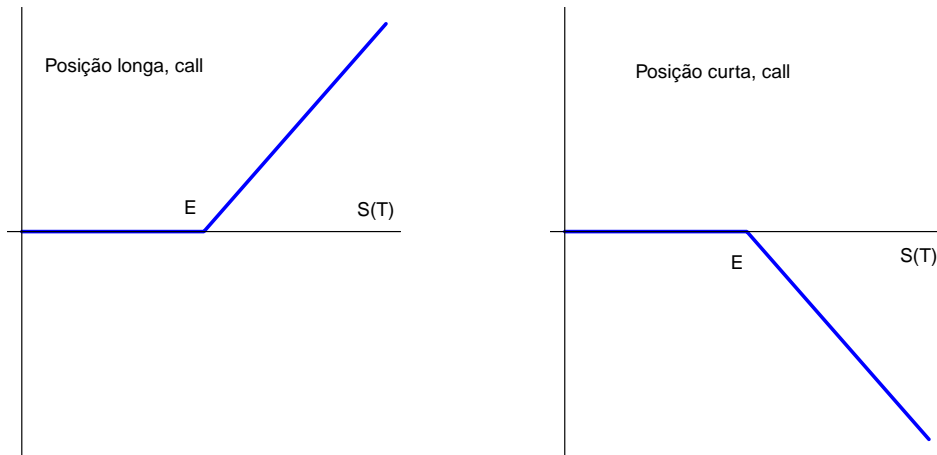


Fig. 2.1 Perfil de ganho de uma opção *call* relativos à posição longa e curta, sem ter em conta o prémio pago pelo investidor em posição longa.

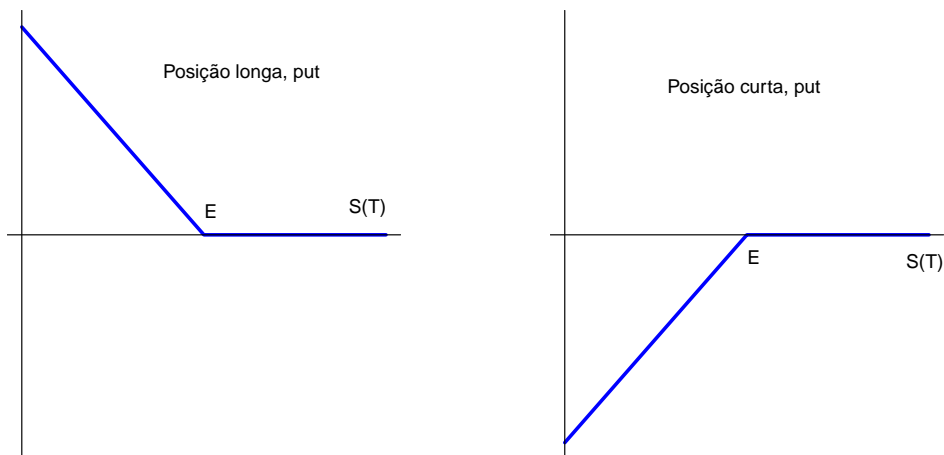


Fig. 2.2 Perfil de ganho de uma opção *put* relativos à posição longa e curta, sem ter em conta o prémio pago pelo investidor em posição longa.

Assim, podemos concluir que o preço da opção *call* reflete a probabilidade de exercício da mesma, ou seja, quando esse exercício gera lucro ao seu detentor.

Também se podem distinguir as opções classificando-as como *in-the-money*, *at-the-money* ou *out-of-the-money*. Uma opção está *in-the-money* no caso de exercida no imediato, a mesma resultaria num saldo positivo. Diz-se que a opção está *out-of-the-money* se, pelo contrário, o resultado do seu exercício imediato gera uma perda de rendimentos. Uma opção está *at-the-money* quando for indiferente exercê-la, ou seja, quando o lucro for nulo ou próximo de zero.

### 2.2.2 Modelo de Black-Scholes

Os contributos de Black e Scholes [6] e de Merton [22] permitiram que a teoria de atribuição de preços a opções tivesse um forte desenvolvimento. O modelo conhecido como modelo de Black-Scholes possibilitou, de forma explícita, atribuir preços a opções. Este modelo assume que o preço do ativo subjacente tem uma distribuição lognormal e que a sua evolução até à maturidade segue um movimento browniano geométrico, com retorno esperado e volatilidade constantes:

$$dS_t = S_t \mu dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.3)$$

onde  $S_t$  é o preço do ativo subjacente no instante  $t$ ,  $dS_t$  representa as variações instantâneas do preço do ativo subjacente,  $\mu$  é a taxa instantânea de rentabilidade esperada,  $\sigma$  é o desvio-padrão instantâneo dos retornos desse ativo e  $dW_t$  é o incremento para o movimento browniano geométrico. Os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  são assumidos como constantes. Esta equação é o modelo mais difundido para descrever o comportamento do preço de um ativo.

O Lema de Itô ajuda a provar que o processo seguido por uma função  $f$  dependente das variáveis  $S_t$  e  $t$  obedece à seguinte equação diferencial estocástica:

$$df(S_t; t) = \left( \frac{\partial f}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (2.4)$$

Considerando o lema de Itô e aplicando a equação (2.3), resulta que  $S_t$  tem uma distribuição lognormal e que  $\log(S_t) \sim N(\alpha, \beta)$  onde  $\alpha = \log(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$  e  $\beta = \sigma^2 t$ , o que significa que o preço do ativo subjacente tem uma distribuição lognormal.

O preço da opção e do seu ativo subjacente evoluem num cenário de incerteza, que é inerente à natureza dos mercados financeiros. Um dos princípios subjacentes ao modelo de Black-Scholes é o facto de possibilitar a construção de uma carteira com retorno certo, correspondente à taxa de juro sem risco, que se assume ser conhecida e constante ao longo do período de vida da opção. Essa carteira é constituída por uma posição longa no ativo e uma posição curta numa opção sobre esse mesmo ativo subjacente, com o montante de cada posição a depender do delta da opção,  $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S_t}$ . Esta carteira apenas se manterá imune a variações do ativo subjacente num período instantâneo de tempo, tendo frequentemente de se ajustar às posições para se manter neutra ao risco.

Neste sentido, surge a equação diferencial de Black-Scholes, que estabelece a condição que o preço da opção de compra terá de respeitar, sob as hipóteses de neutralidade face ao risco dos

investidores, à ausência de custos de transação, informação perfeita e simétrica nos mercados e, ainda, considerando que o ativo financeiro não paga quaisquer dividendos durante o tempo de vida da opção:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(S_t, t) + rS_t \frac{\partial C}{\partial S_t}(S_t, t) - rC(S_t, t) = 0. \quad (2.5)$$

As fórmulas fechadas de Black-Scholes para uma *call* e uma *put* europeias, que constituem a solução da equação diferencial, serão respetivamente:

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2); \quad S_t > 0; \quad t \in [0, T], \quad (2.6)$$

$$P(S_t, t) = E e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1); \quad S_t > 0; \quad t \in [0, T], \quad (2.7)$$

em que

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{E}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2.8)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{E}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2.9)$$

onde  $r$  é a taxa de juro sem risco,  $N(d)$  representa a função de distribuição normal estandardizada para o valor  $d$  e  $T$  a maturidade da opção.

A atribuição de preços a opções, segundo a teoria de Black-Scholes, não faz uso da rentabilidade esperada  $\mu$ . De facto, as preferências dos investidores face ao risco não são tidas em conta, dado que o risco, associado a uma opção pode ser teoricamente eliminado, já que a componente estocástica é eliminada na dedução da equação diferencial de Black-Scholes. Neste caso, considera-se que os investidores são neutros face ao risco.

### 2.2.3 Volatilidade implícita e limitações do modelo de Black-Scholes

A volatilidade referente ao preço do ativo subjacente é uma medida da dispersão do mesmo. Quanto maior for este parâmetro, maior é a possibilidade do preço do ativo subjacente apresentar grandes variações, o que leva a que o risco associado também seja maior.

O modelo de Black-Scholes assume que o preço do ativo subjacente segue um modelo estocástico com o retorno esperado e a volatilidade constantes. Pela análise da realidade verificamos que a volatilidade não é constante. Esta vai variar com o valor do ativo subjacente e com a maturidade das opções. Isto faz com que haja um desfasamento entre os preços gerados por este modelo relativamente aos preços de mercado. Nós podemos estimar a volatilidade invertendo a fórmula de Black-Scholes em ordem a  $\sigma$  (designada por volatilidade implícita) e usando os valores das opções no mercado como dados de entrada.

Utilizando a fórmula de Black-Scholes e especificando a taxa de juro sem risco  $r$ , a maturidade  $T$ , o preço de exercício  $E$  e o preço da opção  $C_{Mercado}$ , vamos obter o valor da volatilidade implícita

associada ao preço de mercado da opção, resolvendo em ordem a  $\sigma$  a seguinte equação:

$$C(\sigma) = C_{\text{Mercado}} \quad (2.10)$$

Observa-se que a volatilidade implícita calculada para cada preço de exercício é diferente; e que a volatilidade implícita é diferente ao longo das maturidades consideradas, o que entra em contradição com as hipóteses do modelo de Black-Scholes que define a volatilidade como sendo constante ao longo dos intervalos de preços de exercício e maturidades considerados. Em teoria, no contexto do modelo de Black-Scholes, a volatilidade implícita deveria ser representada por uma linha reta horizontal (representando  $\sigma$ ), mas isto não acompanha a realidade dos mercados, tal como foi dito anteriormente.

Usualmente, as volatilidades implícitas observadas no mercado, são uma função convexa dos preços de exercício (normalmente as opções *out-the-money* tem grande volatilidade, comparadas com as opções *in-the-money*), o que vai criar o bem conhecido sorriso de volatilidade.

Torna-se, assim, determinante a obtenção de um processo eficaz de estimação da volatilidade. Uma das possibilidades é considerar a volatilidade como uma variável estocástica. Assim, teríamos duas variáveis estocásticas, que seriam o preço do ativo subjacente e a sua volatilidade, como é proposto, por exemplo, no modelo de Heston [17], exposto mais à frente.

### 2.3 Distribuição de risco neutro

Uma medida de probabilidade de risco neutro, assume que o valor presente do ativo é igual ao valor esperado dos ganhos no futuro, descontado à taxa de juro sem risco. A existência de uma medida de probabilidade de risco neutro está diretamente relacionada com a inexistência de oportunidades de arbitragem. Sendo assim, podemos afirmar que existe uma medida de probabilidade de risco neutro, se e só se, não existirem oportunidades de arbitragem

Deste modo, para que as funções de densidade de risco neutro estimadas tenham significado, é condição necessária que os preços das opções *call* não contenham oportunidades de arbitragem. Na prática, as condições de não-arbitragem estabelecem um conjunto de preços dos contratos onde não se consegue obter lucros, sem risco associado.

Reiner [23] e Gatheral [16] são dos primeiros a obter condições necessárias para a não existência de arbitragem em opções do tipo europeu. Carr e Madan [11] e Davis e Hobson [14] investigaram em que condições um conjunto discreto de preços observados de opções *call* está isento de oportunidades de arbitragem. Roper [24] estuda o caso de um intervalo contínuo de preços de opções *call*.

Não existem oportunidades de arbitragem se, e só se, a função preço da *call*,  $C$ , dependente do preço de exercício  $E$ , satisfizer as seguintes condições enunciadas por Cornuejols e Tütüncü [12]:

- (a)  $C(E)$  estritamente decrescente, isto é, os preços das *calls* devem diminuir à medida que os preços de exercício aumentarem.
- (b)  $C(E)$  estritamente convexa, isto é, os preços das opções devem ser convexos relativamente aos preços de exercício.
- (c)  $C(E)$  estritamente positiva no intervalo  $[E_1, E_n]$



No caso dos preços das opções não proporcionarem oportunidades de arbitragem, as distribuições de probabilidade estimadas com recurso aos preços das opções, são distribuições de risco neutro. Dado o nosso conjunto de preços de mercado relativos a opções *call* sobre o índice *S&P500*, vamos eliminar os preços que violem alguma destas condições, assegurando a neutralidade face ao risco das distribuições de probabilidade estimadas.

## 2.4 Fontes de erro no preço das opções

Os preços de opções *call* usados como dados de entrada para a estimação da função densidade de risco neutro, estão sujeitos a vários tipos de erros. Isto faz com que os preços observados se desviem daqueles que representariam verdadeiramente as expectativas do mercado. Estes tipos de erros incluem:

- (a) Erros nos dados - erros no registo dos preços das opções.
- (b) Não-sincronização - surge da necessidade de utilizarmos múltiplos preços (preço da opção e preço do ativo subjacente) como dados de entrada do modelo.
- (c) Efeitos da liquidez - decorrente do impacto potencial da liquidez sobre os preços.
- (d) Discretização - decorrente das cotações dos preços serem negociados com incrementos discretos.

É frequente obter evidências de erros no preço das opções; porém, nem sempre é possível determinar se existe, realmente, erro e qual a origem do mesmo. Sendo assim, podemos eventualmente incluir séries de preços de opções que violam restrições básicas de não-arbitragem, como a monotonia ou a convexidade.

Quando ocorrem violações destas restrições de não-arbitragem, não é fácil verificar se esta violação é devida a erros no registo dos dados, à não-sincronização dos dados de entrada ou ao efeito da liquidez diferenciada.

Os preços das opções *call* utilizadas no nosso estudo consistem na média do preço *bid*, que é o preço mais alto que um investidor está disposto a pagar pela opção, e o *ask*, que é o preço mais baixo que um investidor está disposto a vender determinada opção. Estes valores são registados para cada preço de exercício, retirados do mercado no final de cada dia de negociação. No entanto, como grande parte das transações com opções ocorre com pouca frequência e com grande variação no tempo, as informações de mercado utilizadas quando são retirados os últimos preços *bid* e *ask* nem sempre estão bem sincronizados.

O grau de liquidez reflete-se no preço das opções. Isto representa uma fragilidade do modelo que nós usamos para calcular as volatilidades implícitas e a função de densidade de risco neutro para os preços das opções. Na prática, temos diferentes níveis de liquidez para os diferentes preços de exercício, relativamente à mesma maturidade. Este problema pode ser amenizado, utilizando somente opções com preços de exercício muito líquidos. Porém, ao estimarmos a função de densidade de risco neutro, usando apenas opções líquidas, restringimos a estimação ao intervalo de preços de exercício líquidos, ignorando assim a informação contida nos preços de exercício pouco líquidos. Para além disso, quando temos poucos preços de exercício negociados com alguma liquidez, se restringirmos a

nossa amostra a estes preços de exercício impedimos, assim, a aplicação de métodos de estimação da função de densidade de risco neutro implícita, que envolvam um número razoável de parâmetros.

O facto dos preços das opções serem cotados com valores discretos, provoca um nível de incerteza relativo à estimação da função de densidade neutra ao risco. Mesmo na situação em que não existam outros tipos de erros, não conseguimos saber, com boa precisão, o preço a que a opção realmente teria sido negociada, caso os preços fossem transacionados num intervalo contínuo, de números reais positivos.

## Capítulo 3

# Revisão de literatura

O modelo de Black-Scholes [6] apresenta muitas limitações, tal como vimos no capítulo anterior. Na prática, o pressuposto de que os preços futuros seguem uma distribuição lognormal não é válida.

O objetivo deste estudo é analisar e estudar diferentes métodos com a finalidade de obter o modelo mais eficiente para capturar as expectativas do mercado em relação ao futuro. Na prática existem vários métodos para estimar a função de densidade de risco neutro, consoante a abordagem escolhida. Os modelos vão ser divididos, fundamentalmente, em duas categorias: estruturais e não-estruturais.

Assim, temos os modelos estruturais, que se vão basear nos pressupostos relativos ao processo seguido pelo ativo subjacente. Enquanto os modelos não-estruturais geram a função de densidade de risco neutro sem descrever a dinâmica do preço e da volatilidade do ativo subjacente.

### 3.1 Relação entre os preços das opções e a extração da função de densidade de risco neutro

Breedon e Litzenberger [9] estabeleceram uma relação entre os preços das opções e a função de densidade de probabilidade neutra ao risco para o preço do ativo subjacente, na maturidade das opções. Assim, para um conjunto de opções sobre um determinado ativo subjacente com diferentes preços de exercício, e em que a maturidade é a mesma, é possível obter informação acerca da função de densidade de risco neutro para o preço do ativo subjacente.

Breedon e Litzenberger [9] mostraram, assim, que a segunda derivada da função preço da opção relaciona-se com a função de densidade de risco neutro do ativo subjacente, na maturidade do contrato.

De seguida ilustra-se a relação para as *calls*. No caso das *puts*, a relação é obtida de maneira similar. O preço da opção *call* é o *payoff* esperado num ambiente de neutralidade face ao risco, descontado à taxa de juro sem risco,

$$C(E) = e^{-r(T-t)} \int_E^{+\infty} f(S_T)(S_T - E) dS_T, \quad (3.1)$$

onde a expressão  $C(E)$  designa o preço de opções *call* europeias, com preço de exercício  $E$  no momento  $t$ . Breedon e Litzenberger diferenciaram o integral em ordem ao preço de exercício  $E$

obtendo:

$$\frac{\partial C(E)}{\partial E} = -e^{-r(T-t)} \int_E^{+\infty} f(S_T) dS_T = -e^{-r(T-t)} [1 - F(E)], \quad (3.2)$$

onde  $F$  é a função de distribuição correspondente à função de densidade probabilidade de risco neutro,  $f$ . Assim, temos que a função de densidade de risco neutro  $f(S_T)$  é dada pela seguinte fórmula:

$$\frac{\partial^2 C(E)}{\partial E^2} = e^{-r(T-t)} f(S_T). \quad (3.3)$$

Tal como referimos anteriormente esta condição é válida se a função dos preços das opções *call* for monótona decrescente e convexa relativamente ao preço de exercício; caso contrário significa que haverá oportunidades de arbitragem e as probabilidades neutras ao risco estimadas podem assumir valores não aceitáveis [5].

## 3.2 Modelos estruturais

Os modelos estruturais são modelos aplicados ao processo estocástico seguido pelo ativo subjacente. O modelo de Black-Scholes pressupõe que o preço do ativo segue uma distribuição lognormal em qualquer data futura. Tal como vimos anteriormente, a existência do sorriso da volatilidade indica que o modelo de Black-Scholes não se adequa aos dados relativos aos preços de opções no mercado.

De maneira a suplantarem esta limitação do modelo de Black-Scholes, desenvolveram-se novos modelos para serem alternativos ao movimento browniano geométrico. Vamos de seguida referir alguns deles.

### 3.2.1 Modelo de elasticidade constante da variância

Cox e Ross [13] demonstram a atribuição de preços a opções por meio da utilização de um processo de difusão com elasticidade da variância constante, como forma de modelar a heterocedasticidade dos retornos das ações: ao contrário dos pressupostos do modelo de Black-Scholes, o modelo de elasticidade constante da variância considera que a variância da taxa de retorno das ações depende das mudanças dos preços dessas nos períodos anteriores.

O modelo de elasticidade constante de variância, num ambiente de neutralidade face ao risco, pressupõe que o processo relativo ao preço do ativo subjacente obedece a uma equação diferencial estocástica:

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t^\alpha dz_t \quad (3.4)$$

onde  $r$  é uma taxa de juro isenta de risco,  $q$  é a taxa de dividendo do ativo,  $z_t$  é um processo de Wiener,  $\sigma$  é um parâmetro de volatilidade e  $\alpha$  é uma constante positiva.

Quando  $\alpha = 1$ , o modelo de elasticidade constante de variância é o modelo de movimento browniano geométrico que utilizámos anteriormente. Quando  $\alpha < 1$ , a volatilidade aumenta à medida que o preço do ativo diminui. Isso origina uma distribuição de probabilidade semelhante àquela

observada para ações com uma cauda esquerda pesada e uma cauda direita menos pesada. Para  $\alpha > 1$ , a volatilidade aumenta à medida que preço do ativo aumenta. Isso cria uma distribuição de probabilidade com uma cauda direita pesada e uma cauda esquerda menos pesada. Isto vai corresponder a um sorriso de volatilidade no qual a volatilidade implícita é função crescente do preço de exercício.

Os parâmetros deste modelo são escolhidos por meio da minimização da soma dos quadrados das diferenças entre os preços gerados pelo modelo e os preços de mercado.

### 3.2.2 Modelo de volatilidade estocástica de Heston

Heston [17] propôs um modelo baseado no facto da volatilidade variar de forma estocástica. Enquanto que, anteriormente, consideramos a volatilidade uma função determinística, sendo apenas dependente do valor do ativo e do tempo, agora vamos considerar a volatilidade como sendo uma variável estocástica. Sendo assim, temos duas componentes estocásticas no processo: o preço do ativo e a sua volatilidade.

Começa-se por assumir que o preço do ativo no momento  $t$  segue uma evolução de acordo com a seguinte fórmula

$$dS_t = \mu S_t dt + S_t \sqrt{v_t} dz_{1,t}, \quad (3.5)$$

este modelo, na prática vai adicionar um segundo processo de Wiener à dinâmica do preço do ativo, com objetivo de modelar a evolução estocástica da volatilidade,

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dz_{2,t}, \quad (3.6)$$

onde  $S_t$  e  $v_t$  são processos de preço e de volatilidade, respetivamente,  $z_{1,t}$  e  $z_{2,t}$  são processos de Wiener correlacionados com termo de correlação  $\rho$ ,  $\theta$  é a volatilidade a longo termo,  $\mu$  é a taxa instantânea de rentabilidade esperada,  $\sigma_v$  é volatilidade do processo de volatilidade e  $\kappa$  é a velocidade com que a volatilidade retorna à sua média de longo prazo.

O parâmetro  $\rho$  define a correlação entre o retorno e a volatilidade, o que pode mudar a função de densidade neutra face ao risco gerando assimetria no retorno do ativo. Por exemplo, caso  $\rho > 0$  então a volatilidade do ativo aumenta quando o preço do ativo cresce. Quando  $\rho < 0$ , a diminuição do preço leva a um aumento na volatilidade e o peso da cauda esquerda de função densidade de risco neutro irá aumentar.

Para além disto, Heston apresenta uma fórmula fechada para o preço de uma opção *call* europeia.

## 3.3 Modelos não-estruturais

Os modelos não-estruturais são modelos aplicados à função de densidade de risco neutro, não apresentando explicitamente uma dinâmica para o preço e para a volatilidade do ativo. Estes modelos podem dividir-se em modelos paramétricos, semi-paramétricos e não-paramétricos. Os modelos paramétricos especificam um conjunto relativamente pequeno de parâmetros para a função de densidade de risco neutro.

Um modelo não-paramétrico poderá ter mais facilidade em obter preços que estejam de acordo com a realidade dos mercados. Estes modelos são, por isso, mais flexíveis, embora apresentem como desvantagem o facto de, usualmente, necessitarem de grandes quantidades de dados. Os modelos semi-paramétricos apresentam semelhanças com os modelos paramétricos e os não-paramétricos.

### 3.3.1 Modelos paramétricos

Um modelo é considerado paramétrico se propuser uma forma para a função de densidade de risco neutro sem assumir uma dinâmica para a evolução do preço ou da volatilidade.

#### Mistura de densidades lognormais

Bahra [5] e Melick e Thomas [21] foram pioneiros na utilização da mistura de densidades lognormais para estimar a função de densidade de risco neutro. Melick e Thomas [21] estudaram o impacto da Guerra do Golfo nos preços do petróleo entre 1990 e 1991, utilizando uma mistura de três densidades lognormais, enquanto Bahra [5] optou por uma mistura de duas densidades lognormais, aplicando os seus estudos às expectativas de taxas de juro e de inflação implícitas nos preços de opções sobre obrigações. Esta teoria vai assumir uma forma funcional para a função de densidade de risco neutro que possa acomodar vários processos estocásticos para o preço do ativo subjacente.

Nós sabemos que os preços das opções europeias *call* e *put* podem ser expressos como o valor esperado dos ganhos em  $T$  descontado à taxa de juro sem risco:

$$C(E, t, T) = e^{-r(T-t)} \int_E^{+\infty} f(S_T)(S_T - E) dS_T, \quad (3.7)$$

$$P(E, t, T) = e^{-r(T-t)} \int_0^E f(S_T)(E - S_T) dS_T, \quad (3.8)$$

em que as expressões  $C(E, t, T)$  e  $P(E, t, T)$  designam o preço de opções europeias *call* e *put*, respetivamente, com preço de exercício  $E$  no momento  $t$ . Na realidade, a função de densidade de risco neutro depende de outros parâmetros para além do  $S_T$  mas, por simplicidade, escrevemo-la apenas como função de  $S_T$ .

Em teoria, podemos assumir qualquer forma funcional para a função de densidade de risco neutro,  $f(S_T)$  e os seus parâmetros podem ser recuperados por otimização numérica, como veremos mais à frente. Esta otimização é feita minimizando a diferença entre os preços obtidos através do modelo de mistura de lognormais e os preços teóricos ou de mercado. Anteriormente, pelo modelo de Black-Scholes assumiu-se que a distribuição do preço do ativo em  $T$  segue uma distribuição lognormal e, conseqüentemente, é plausível considerar que poderá ser a soma ponderada de funções de densidade lognormais.

Sendo assim, temos que:

$$f(S_T) = \sum_{i=1}^k \gamma_i f_i(S_T; \alpha_i, \beta_i), \quad (3.9)$$

onde  $f_i(S_T; \alpha_i, \beta_i)$  é uma distribuição lognormal com parâmetros  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ ,  $k$  é o número de densidades presentes na mistura e  $\gamma_i$  são os pesos atribuídos a cada uma, sendo assim temos

$$f_i(S_T; \alpha_i, \beta_i) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi} \beta_i} e^{-\frac{(\ln(S_T) - \alpha_i)^2}{2\beta_i^2}}, \quad (3.10)$$

$$\alpha_i = \ln(S_t) + \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)(T - t), \quad (3.11)$$

$$\beta_i = \sigma_i \sqrt{T - t}. \quad (3.12)$$

De maneira a garantir que  $f$  é uma função de densidade de probabilidade, temos que assegurar que  $\gamma_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, k$  e que  $\sum_{i=1}^k \gamma_i = 1$ . Cumprindo estas duas condições, tem-se que  $f$  é uma combinação de funções de densidade lognormais.

Nesta dissertação, utiliza-se a mistura de duas densidades lognormais (MLN2) para estimar a função de densidade de risco neutro. A escolha de uma mistura de duas lognormais baseia-se no facto de estas necessitarem de um número pequeno de parâmetros, 5. Portanto, vamos ter os seguintes parâmetros  $(\gamma_1, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$  e a função de densidade de risco neutro, que pode ser, assim, representada:

$$f(S_T) = \gamma_1 f_1(S_T; \alpha_1, \beta_1) + (1 - \gamma_1) f_2(S_T; \alpha_2, \beta_2). \quad (3.13)$$

As funções  $f_1$  e  $f_2$ , para  $S_T > 0$  são definidas pela fórmulas (3.10), (3.11) e (3.12). De acordo com as fórmulas (3.7) e (3.8) e considerando estas condições para a função de densidade de risco neutro, podemos expressar o preço para a *call* e para a *put* da seguinte maneira:

$$C(E, t, T) = e^{-r(T-t)} \int_E^{+\infty} \sum_{i=1}^2 \gamma_i f_i(S_T; \alpha_i, \beta_i) (S_T - E) dS_T \quad (3.14)$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_E^{+\infty} [\gamma_1 f_1(S_T; \alpha_1, \beta_1) + (1 - \gamma_1) f_2(S_T; \alpha_2, \beta_2)] (S_T - E) dS_T, \quad (3.15)$$

$$P(E, t, T) = e^{-r(T-t)} \int_0^E \sum_{i=1}^2 \gamma_i f_i(S_T; \alpha_i, \beta_i) (E - S_T) dS_T \quad (3.16)$$

$$= e^{-r(T-t)} \int_0^E [\gamma_1 f_1(S_T; \alpha_1, \beta_1) + (1 - \gamma_1) f_2(S_T; \alpha_2, \beta_2)] (E - S_T) dS_T, \quad (3.17)$$

Segundo Bahra [5], obtemos a seguinte fórmula fechada para os preços das opções *call* europeias:

$$C(E, t, T) = e^{-r(T-t)} \left[ \gamma_1 \left[ e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} N(d_1) - EN(d_2) \right] + (1 - \gamma_1) \left[ e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} N(d_3) - EN(d_4) \right] \right], \quad (3.18)$$

em que

$$d_1 = \frac{-\ln(E) + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1}, \quad (3.19)$$

$$d_2 = d_1 - \beta_1, \quad (3.20)$$

$$d_3 = \frac{-\ln(E) + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2}, \quad (3.21)$$

$$d_4 = d_3 - \beta_2. \quad (3.22)$$

Aplicando a paridade *put-call*, Bahra [5] obteve a seguinte fórmula fechada para o preço da opção *put* europeia:

$$P(E, t, T) = e^{-r(T-t)} \left[ \gamma_1 \left[ -e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} N(-d_1) + EN(-d_2) \right] + (1 - \gamma_1) \left[ -e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} N(-d_3) + EN(-d_4) \right] \right]. \quad (3.23)$$

Este cálculo pode ser aplicado a todos os preços de exercício considerando de seguida um problema de mínimos quadrados, entre os preços de opção estimados pelo modelo de distribuição da mistura e os preços observados no mercado ou os preços de Black-Scholes ou de Heston, sendo as variáveis do problema os parâmetros  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  e o peso  $\gamma_1$ . Sendo assim, vamos minimizar a seguinte função:

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1} \sum_{i=1}^{nc} [C_i - C(E_i, t, T)]^2 + \sum_{i=1}^{np} [P_i - P(E_i, t, T)]^2. \quad (3.24)$$

onde  $C_i$  e  $P_i$  são os preços de opções *call* e *put* de mercado ou decorrentes do modelo de Black-Scholes ou de Heston e  $nc$  e  $np$  denotam o número de opções *calls* e *puts* com a mesma maturidade, e para diferentes preços de exercício num determinado dia de negociação.

Adicionalmente, como assumimos o pressuposto de ausência de arbitragem, vamos ter que a média da função de densidade de risco neutro deverá ser igual ao preço *forward* do ativo subjacente. Esta igualdade pode ser representada pela seguinte fórmula:

$$S_t e^{r(T-t)} = E(S_T) = \gamma_1 e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} + (1 - \gamma_1) e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2}. \quad (3.25)$$

As duas últimas componentes da equação anterior representam as médias das componentes lognormais da função de densidade de risco neutro. Desta maneira, a soma ponderada representa a média da função de densidade de risco neutro. Esta equação vai constituir uma restrição ao problema de minimização anterior.

## Densidade beta generalizada do tipo 2

Esta abordagem paramétrica, baseia-se no pressuposto de que a distribuição de probabilidade de risco neutro pertence a uma família geral de distribuições; e que os seus parâmetros desconhecidos vão ser estimados a partir de um conjunto de opções.



A distribuição de probabilidade beta generalizada de tipo 2 (GB2), foi inicialmente proposta por Bookstaber e McDonald [8] e é utilizada, por exemplo, por Anagnostou, Bedendo, Hodges e Tompkins [3]. A função de densidade beta generalizada do tipo 2, incorpora quatro parâmetros positivos  $\theta = (a, b, p, q)$ , que permitem gerar combinações de média, variância, assimetria e curtose de uma variável aleatória positiva, permitindo assim que a forma da função de densidade seja flexível. A função de densidade beta generalizada do tipo 2 é, assim, definida por McDonald [20]:

$$g(y; a, b, p, q) = \frac{|a|y^{ap-1}}{b^{ap}B(p, q)[1 + (y/b)^a]^{p+q}}, \quad (3.26)$$

para  $y > 0$  e  $g(y; a, b, p, q) = 0$  para  $y \leq 0$ , em que  $a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$ , a função  $B(p, q)$  é definida por:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (3.27)$$

sendo  $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx, t > 0$ .

A média e a forma da função de densidade beta generalizada do tipo 2 é determinada pelos quatro parâmetros da distribuição. O parâmetro  $b$  afeta diretamente a média da função de densidade beta generalizada do tipo 2, dado que

$$E(S_T) = \frac{bB\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)}{B(p, q)}. \quad (3.28)$$

Para valores elevados do parâmetro  $a$ , o valor de  $b$  será próximo da média da distribuição. Os outros três parâmetros da função de densidade beta generalizada do tipo 2, têm um efeito direto sobre a forma da distribuição. O parâmetro  $a$  está associado à velocidade com que as caudas da função de densidade se aproximam do eixo dos  $xx$ . Assim, valores elevados de  $a$  implicam uma aproximação mais rápida do eixo dos  $xx$ .

Nós usamos a distribuição beta generalizada de tipo 2, porque esta fornece uma grande flexibilidade. A distribuição de beta generalizada do tipo 2, contempla distribuições tais como: gama, Burr e Pareto podendo estas, assim, ser expressas como casos específicos da distribuição de probabilidade beta generalizada do tipo 2. Assim, o uso desta estimação paramétrica, permite estimar parâmetros que podem definir um leque alargado de distribuições.

Sobre o pressuposto de que a distribuição de probabilidade de risco neutro pertence à família de distribuição beta generalizada de tipo 2, os valores das opções *call* e *put* podem ser expressos da seguinte forma:

$$C(E, t, T) = e^{-r(T-t)} \int_E^{+\infty} g(S_T; a, b, p, q)(S_T - E)dS_T, \quad (3.29)$$

$$P(E, t, T) = e^{-r(T-t)} \int_0^E g(S_T; a, b, p, q)(E - S_T)dS_T. \quad (3.30)$$

Os quatro parâmetros da função de densidade beta generalizada do tipo 2 são estimados, minimizando a soma dos erros quadráticos entre os preços de opções teóricos e de mercado, e os preços

das opções estimados de acordo com as equações acima referidas,

$$\min_{a,b,p,q} \sum_{i=1}^{nc} [C_i - C(E_i, t, T)]^2 + \sum_{i=1}^{np} [P_i - P(E_i, t, T)]^2, \quad (3.31)$$

onde  $C_i$  e  $P_i$  são os preços de opções *call* e *put* de mercado, ou decorrentes do modelo de Black-Scholes ou de Heston e  $nc$  e  $np$  denotam o número de opções *calls* e *puts* com a mesma maturidade e para diferentes preços de exercício, num determinado dia de negociação.

Ainda para mais, como assumimos o pressuposto de ausência de arbitragem, vamos ter que a média da função de densidade de risco neutro, deverá ser igual ao preço *forward* do ativo subjacente. Assim, representamos essa igualdade pela seguinte fórmula:

$$S_t e^{r(T-t)} = E(S_T) = \frac{bB\left(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a}\right)}{B(p, q)}. \quad (3.32)$$

A estimação dos parâmetros envolve um problema de mínimos quadrados. Esta equação vai constituir uma restrição ao problema de minimização anterior.

### 3.3.2 Modelos semi-paramétricos

Os modelos semi-paramétricos são caracterizados por apresentarem características dos modelos paramétricos e dos não-paramétricos. Por norma, o número de parâmetros aqui estimados vai ser superior aos definidos pelos modelos paramétricos, e inferior ao número de parâmetros definido pelos modelos não-paramétricos.

Abadir e Rockinger [1] propuseram uma aproximação semi-paramétrica, para a estimação da função de densidade de risco neutro, baseada numa família de distribuições hipergeométricas que, de forma semelhante ao caso da distribuição beta generalizada do tipo 2, permite considerar um número mais alargado de distribuições considerando, desta forma, um número maior de parâmetros a estimar - cerca de 7. Neste abordagem podem considerar-se distribuições do tipo normal, gama, gama inversa, Weibull, Pareto e misturas destas densidades de probabilidade.

Assim, este método permite a estimação da função de densidade de probabilidade sem assumir uma forma específica para esta.

Esta função tem a vantagem de ser mais eficiente do que a estimação totalmente não paramétrica, para pequenas amostras, e mais flexível do que os métodos paramétricos, porque alarga o conjunto das formas assumidas para a função de densidade.

### 3.3.3 Modelos não-paramétricos

Os modelos paramétricos estudados anteriormente são modelos que dependem da especificação de vários parâmetros. Muitas vezes, pode ser de grande utilidade considerar um estimador que não especifique condições tão rígidas para o comportamento do ativo ou da função densidade de risco neutro uma vez que se poderá adaptar melhor aos dados.

Um estimador não-paramétrico não propõe uma forma explícita para a função de densidade de risco neutro nem para a dinâmica do preço do ativo subjacente. Este poderá assim ter mais facilidade em captar os preços que estejam em conformidade com a realidade dos mercados. Apesar de estes modelos, serem mais flexíveis, estes têm a desvantagem de por norma necessitarem de grandes quantidades de dados do mercado.

### Métodos de suavização da volatilidade implícita

Este método foi inicialmente apresentado por Shimko [25]. Para que se possam calcular as derivadas da função preço das opções *call*, é preciso encontrar funções contínuas e diferenciáveis em todos os pontos. Perante a inexistência de um espectro contínuo de preços de exercício, torna-se necessário interpolar os valores observados. Após serem analisadas diversas possibilidades de interpolação, tendo em conta os preços de opções observados no mercado, Shimko [25] optou por utilizar as volatilidades implícitas obtidas a partir da fórmula de Black-Scholes.

Depois disto, é estabelecida uma interpolação entre estes valores considerando que a função de volatilidade é representada por uma função polinomial, como por exemplo uma função quadrática, dentro do intervalo dos preços de exercício. A escolha da função quadrática deve-se ao facto das volatilidades implícitas aparentarem ter uma forma semelhante à de uma parábola. Esta função é estimada considerando um problema de mínimos quadrados.

De seguida, usando a fórmula de Black-Scholes, obtêm-se valores para o preço da *call*. Usando um processo numérico são agora duas vezes diferenciados, permitindo obter numericamente as funções de distribuição acumulada e de densidade de probabilidade neutra ao risco implícitas no intervalo de preços de exercício. Fora deste intervalo de preços de exercício, supõe-se que a volatilidade é constante, ou seja, a função de densidade escolhida é lognormal. A distribuição final é formada pela junção das três partes.

Volta-se a referir que a fórmula de Black-Scholes serve apenas para calcular as volatilidades implícitas, não se impondo os pressupostos do modelo de Black-Scholes.

Malz [19] vai fazer algumas alterações à abordagem apresentada por Shimko [25]. Definindo o delta de uma opção como a taxa de variação do preço da opção relativamente ao preço do ativo subjacente, Malz [19] estabelece uma correspondência entre as volatilidades implícitas e os deltas das opções. Sendo assim, este autor estabelece um polinómio quadrático para descrever o comportamento das volatilidades estabelecidas em relação aos deltas dos preços das opções.

De acordo com os vários autores que aplicaram a técnica de Shimko [25] e de Malz [19] para que a estimação reflita a distribuição implícita dos preços das opções, é necessário garantir a existência de um número razoável de preços de exercício, dentro das opções analisadas. Campa, Chang e Reider [10] vão estabelecer uma interpolação para as volatilidades baseada em funções *spline* cúbicas. Este método permite que a suavidade da curva ajustada seja controlada e é menos restritivo quanto à forma da função. Bliss e Panigirtzoulou [7] aplicaram uma função *spline* cúbica para descrever a curva da volatilidade e, tal como na abordagem usada por Malz [19], as volatilidades implícitas vão estar relacionadas com os deltas das opções. Sendo assim, depois de se calcular os parâmetros associados à função *spline* cúbica, pode-se calcular os valores das opções relativamente ao preço de exercício. Utilizando estes dados, pode-se agora estimar a função de densidade de risco neutro.

Na prática, as estimações de densidade de probabilidade com base nestes métodos vão apresentar uma grande irregularidade. O facto de não existirem opções com preços de exercício muito afastados do valor do ativo subjacente torna este método limitado na estimação das caudas.

### **Métodos com funções *kernel***

Os métodos com funções *kernel* não definem um processo específico para o ativo subjacente, mas propõem funções que se adequam aos dados relativos aos preços das opções. Nestas funções, cada observação de uma amostra pode ser representada através de uma função *kernel*. Assim, uma determinada função pode ser representada como a média ponderada das observações relativas a essa mesma função. A função de densidade considerada como função *kernel* pode ser, por exemplo, a função de densidade da lei normal.

Ait-Sahalia e Lo [2] propõem um método para estimação da função de densidade de risco neutro, estabelecendo uma função para o preço de opções, com base nas funções *kernel*. Este estimador vai considerar cinco variáveis: preço do ativo subjacente, preço de exercício, maturidade, taxa de juro e de dividendo. Este trabalho também propõe um estimador para a volatilidade.

A estimação dos parâmetros desta função faz-se, resolvendo um problema de mínimos quadrados, resultante do ajuste entre os preços estimados pela função proposta e os preços de opções teóricos ou de mercado. Assim, a função de densidade de risco neutro obtém-se, calculando a segunda derivada da função para o preço da opção em relação ao preço de exercício.

Este método, tal como os demais métodos não-paramétricos, apresenta a desvantagem de precisar de uma grande quantidade de dados. Este estimador captura as características que são mais relevantes na perspetiva de preço futuro do ativo como, por exemplo, a assimetria negativa e excesso de curtose na função de densidade de risco neutro e o sorriso de volatilidade nos preços das opções.

## Capítulo 4

# Estimação das funções de densidade neutras face ao risco

### 4.1 Aspectos numéricos na estimação dos modelos de preços de opções

O objetivo desta estimação é encontrar valores para os parâmetros dos modelos, de tal forma que os preços estimados se aproximem, quanto possível, dos preços observados no mercado ou dos preços de Black-Scholes ou de Heston. Trata-se, assim, de um problema que consiste na minimização da função objetivo não linear, definida anteriormente. O software R será utilizado para a resolução desta otimização.

Sendo assim, neste estudo vamos fazer uma estimação da função de densidade de risco neutro, recorrendo à abordagem da mistura de duas densidades lognormais e da densidade beta generalizada do tipo 2. O desempenho destas abordagens será testado com dados de preços de opções geradas pelo modelo de Black-Scholes e pelo de volatilidade estocástica de Heston, e ainda com dados de mercado, de modo a testar a sua aplicabilidade na prática.

#### 4.1.1 Métrica usada na comparação dos diferentes modelos

A comparação da estimação de funções de densidade de risco neutro, baseadas na análise gráfica, nem sempre nos ajuda a tirar conclusões significativas sobre a qualidade da estimação. Por este motivo, vamos estudar a qualidade da estimação da função de densidade de risco neutro, examinando os resultados provenientes de alguns resumos estatísticos.

A escolha de uma função para a perda de informação é particularmente relevante, quando estimamos modelos de atribuição de preços a opções. Na extensa e crescente literatura sobre atribuição de preços a opções, têm sido sugeridos muitos modelos diferentes para a função de perda de informação. Contudo, é importante haver alguma consistência na escolha desta função. Assim, ao comparar diferentes modelos, é bom que a função de perda de informação em todas as análises dos modelos seja idêntica já que, se fosse ao contrário, a comparação entre modelos não seria possível.

Os instrumentos mais utilizados para testar a precisão da estimação são os erros nos preços, calculados como a diferença entre os preços das opções teóricos e de mercado e os preços das opções obtidos a partir da função de densidade de risco neutro estimada ou, alternativamente, como a diferença entre a volatilidade implícita observada e a volatilidade do modelo estimado.

Entre os instrumentos mais utilizados neste âmbito estão o *mean square error* (MSE), o *mean square percentage error* (MSPE) e o *root mean square error* (RMSE). Nesta dissertação resolvemos utilizar o RMSE, já que é uma métrica muito intuitiva e prática e, tendo sido utilizada por muitos autores, permite fazer a comparação com outros trabalhos nesta área.

### Análise com *root mean square error* (RMSE)

O *root mean square error* (RMSE) dos resíduos das opções relativamente aos preços de exercício é usada como uma medida de resumo da qualidade geral do modelo estimado. Sendo assim, vamos utilizar o RMSE para comparar os valores estimados  $C(E_i, t, T)$  com os valores teóricos ou de mercado  $C_i$ .

O RMSE é assim a perda de informação do modelo relativamente aos preços reais das opções. Quanto menor for o valor do RMSE, mais próximos são os valores estimados dos valores reais. Este valor dá-nos uma medida quantitativa para comparar dois ou mais modelos.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C(E_i, t, T) - C_i)^2}{n}} \quad (4.1)$$

No nosso estudo, vamos usar o RMSE como métrica, para comparar o modelo estimado pela função de densidade de risco neutro com a mistura de duas densidades lognormais, e através da densidade beta generalizada do tipo 2.

#### 4.1.2 Escalonamento dos dados

Os dados de entrada dos processos utilizados para estimação das funções de densidade de risco neutro, podem apresentar elementos com ordens de grandeza muito diferentes. Este facto vai fazer com que as matrizes envolvidas no processo de otimização apresentem um número de condição muito elevado, o que origina problemas numericamente mal condicionados. Sendo assim, vamos ter que escalonar as variáveis de entrada, de modo a obter um problema melhor condicionado. Utilizamos uma abordagem apresentada por Fengler e Hin [15] para escalonar os dados de entrada.

A hipótese de taxa de juro e taxa de dividendo nulas não se adequa à realidade dos mercados financeiros e estas nem sempre são fáceis de ser obtidas com precisão. Fengler e Hin [15] introduziram uma transformação que permite reduzir o número de variáveis envolvidas, acomodando valores não-nulos para a taxa de juro e para os dividendos e, além disso, permitindo reduzir a ordem de grandeza dos dados de entrada do problema.

Dada a transformação proposta por Fengler e Hin [15], usamos como fator do escalonamento o preço do contrato de futuro, cuja data de vencimento coincide com a data de maturidade das opções.

Assim, consideramos, por exemplo, o preço do ativo com o valor de 1 e os preços de exercício divididos pelo fator do escalamento, neste caso o valor do contrato de futuro.

### 4.1.3 Mistura de duas densidades lognormais

A implementação da mistura de duas densidades de lognormais vai ser realizada com recurso à função *extract.mln.density* do pacote *RND* do R. Esta função utiliza a rotina *optim* do pacote *stats* do R, para resolver o problema de otimização associado.

Como esta implementação vai ter uma função objetivo (3.24), que não é linear nem convexa, vamos ter que fornecer à função boas aproximações para o ponto inicial. No caso das opções geradas pela fórmula de Black-Scholes vamos usar, como aproximações iniciais, os valores exatos da função de densidade lognormal teórica.

Para a estimação do ponto inicial, vamos definir um vetor com pesos no intervalo  $[0, 1]$ , de acordo com a fórmula (3.13). Estes valores são igualmente espaçados com intervalos de 0.1. Assim, vamos proceder à otimização em duas fases: primeiro, fixando os valores dos pesos das distribuições lognormais e estimando os demais parâmetros, através da minimização do problema; a seguir, o conjunto de parâmetros associado ao peso que minimiza melhor o nosso problema, vai ser considerado como ponto inicial para a minimização do problema com cinco variáveis.

Depois de encontrar os parâmetros que minimizam a função objetivo vamos, através da função *price.mln.option* do pacote *RND* do R, estimar os preços das opções, de acordo com estes parâmetros. Uma vez obtidos os preços estimados pela mistura de duas densidades lognormais, vamos comparar os mesmos com os preços de Black-Scholes ou de Heston, ou com os preços de mercado, através da análise gráfica e do *root mean square error* (RMSE).

Depois de comparar os preços das opções, passamos ao gráfico da função de densidade de risco neutro, cujos parâmetros foram anteriormente estimados. Para este efeito utilizamos a função *dmln* do pacote *RND* do R.

### 4.1.4 Densidade beta generalizada do tipo 2

A implementação da densidade beta generalizada do tipo 2, vai ser realizada com recurso à função *extract.gb.density* do pacote *RND* do R. Esta função utiliza a rotina *optim* do pacote *stats* do R, para resolver o problema de otimização associado. Como esta implementação vai ter uma função objetivo (3.31), que não é linear nem convexa, vamos procurar dar à função boas aproximações para o ponto inicial.

Para a estimação do ponto inicial, começamos por definir um vetor com diferentes valores do parâmetro  $a$ , de acordo com a fórmula (3.26), sendo estes pontos igualmente espaçados. Assim, vamos proceder à otimização, fixando o valor do parâmetro  $a$  e estimando os demais parâmetros através da minimização do problema. O conjunto de parâmetros associado ao parâmetro  $a$ , que minimiza o nosso problema, vai ser considerado como ponto inicial.

Depois de encontrar os parâmetros que minimizam a função objetivo, vamos, através da função *price.gb.option* do pacote *RND* do R, estimar os preços das opções de acordo com estes parâmetros. Depois de obtidos os preços estimados pela densidade beta generalizada do tipo 2, vamos comparar os

mesmos com os preços de Black-Scholes ou de Heston, ou então com os preços de mercado, através da análise gráfica e do *root mean square error* (RMSE).

Depois de comparar os preços das opções, passamos ao gráfico da função de densidade de risco neutro, cujos parâmetros foram anteriormente estimados. Para este efeito utilizamos a função *dgb2* do pacote *GB2* do R.

## 4.2 Resultados empíricos

Num primeiro conjunto de testes, vamos estudar a capacidade dos nossos métodos para recuperar a função de densidade de risco neutro, usando preços de opções teóricas e preços de opções de mercado. O primeiro conjunto de dados refere-se a preços gerados de acordo com a fórmula de Black-Scholes. O segundo refere-se a dados gerados de acordo com o modelo de volatilidade estocástica de Heston.

Por último, vamos recolher dados de mercado de opções *call* relativas ao índice S&P500, cuja transação ocorre no mercado *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE).

### 4.2.1 Dados de Black-Scholes

Começamos por gerar um conjunto de dados relativos a preços de opções, de acordo com a fórmula de Black-Scholes. Para esse efeito, vamos estabelecer valores para o preço do ativo subjacente no instante inicial, o preço de exercício, a taxa de juro isenta de risco, a taxa de dividendo, a volatilidade e um conjunto de três maturidades.

Neste sentido, estabelecemos que o valor do ativo subjacente  $S_0$  é 100, a taxa de juro  $r$  é 5%, a taxa de dividendo  $q$  é 0%, a volatilidade  $\sigma$  toma um valor de 0.2 e consideramos um conjunto de vinte preços de exercício, compreendidos entre 70 e 130. Com estes valores vamos gerar um conjunto de vinte opções *call*. Para o nosso estudo, estabelecemos um conjunto de três maturidades  $T = \{3, 6, 12\}$ , consideradas em meses. Para gerar o preço de opções *call* de acordo com a fórmula de Black-Scholes vamos utilizar a função *price.bsm.option* pertencente ao pacote *RND* do R.

A função de densidade de risco neutro teórica associada a este conjunto de preços é uma distribuição lognormal, já que os preços das opções *call*, gerados pela fórmula de Black-Scholes, têm subjacente esta hipótese. Assim, assumindo esta hipótese, vamos comparar os dois modelos estimados pela mistura de duas densidades lognormais e pela densidade beta generalizada do tipo 2 com a respetiva densidade teórica lognormal.

Sendo assim, inserimos os dados de entrada de acordo com o escalonamento de Fengler e Hin [15] referido atrás, de modo a reduzir a ordem de grandeza dos dados de entrada do problema.

### Estimações obtidas

Pela análise dos gráficos na figura 4.1, obtidos através da estimação das funções de densidade de risco neutro, constatamos que a mistura de duas densidades lognormais origina uma excelente aproximação relativamente à função de densidade de risco neutro teórica, neste caso, a função de densidade lognormal. Este resultado era expectável, já que a função de densidade lognormal é um caso particular da mistura de duas densidades lognormais quando o parâmetro do peso da primeira lognormal é igual a 1 e conseqüentemente o peso atribuído à segunda lognormal é nulo.



Relativamente à função de densidade beta generalizada do tipo 2, obtém-se uma boa aproximação à densidade teórica lognormal considerando uma maturidade de três meses. Contudo, aumentando o prazo de maturidade das opções geradas, vamos obter resultados menos bons para a estimação.

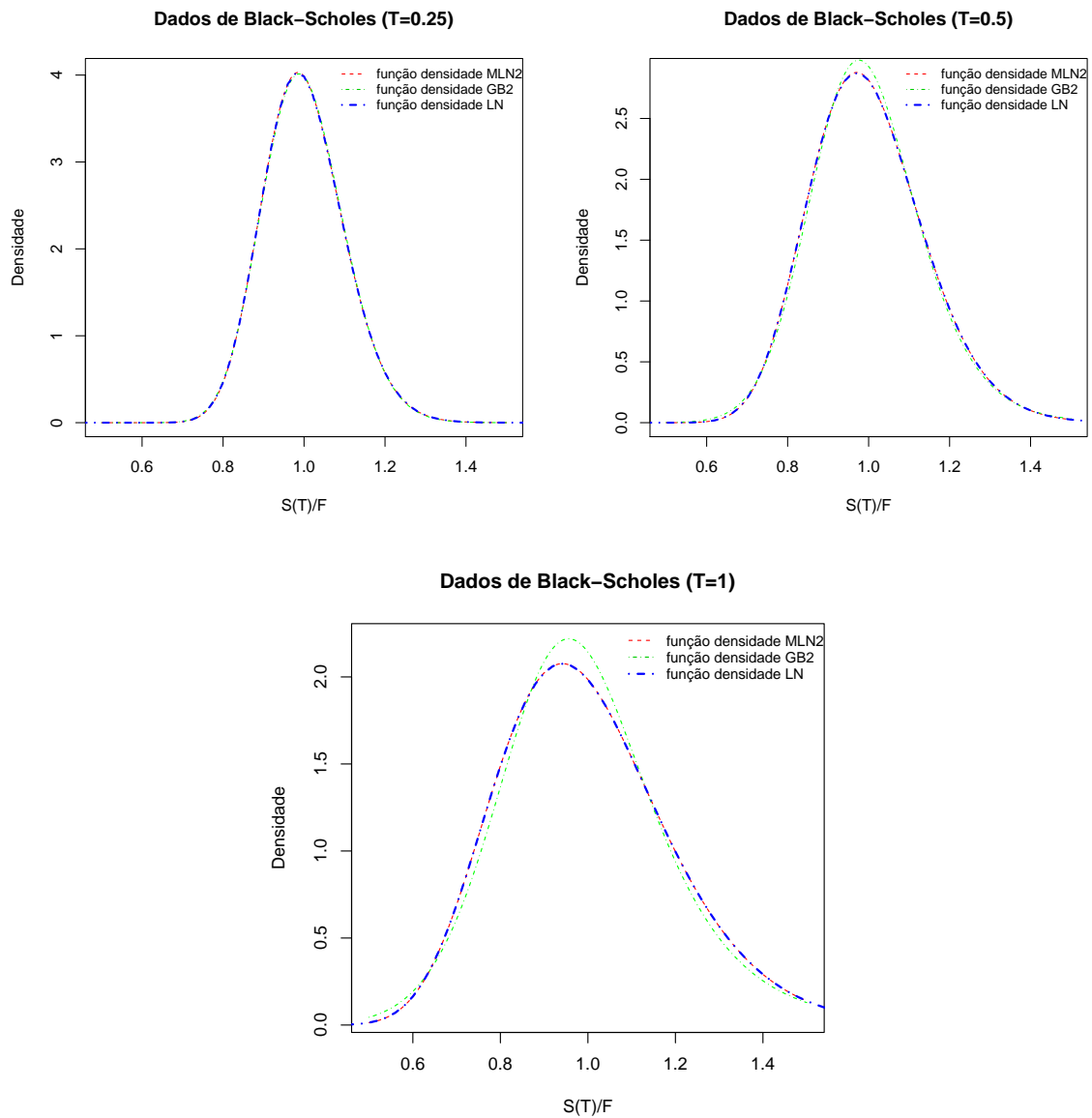


Fig. 4.1 Estimação da função de densidade de risco neutro, para os dados de Black-Scholes, usando os modelos de MLN2 e GB2.

Pela análise da figura 4.2 verificamos que, se aumentarmos o prazo de maturidade das opções geradas pelo modelo de Black-Scholes, em qualquer um dos modelos que utilizámos na estimação da função de densidade de risco neutro, criamos um incremento na curtose da respetiva função de densidade de risco neutro. Isto é um acontecimento expetável já que, ao aumentarmos o prazo de maturidade das opções, estamos a aumentar o período temporal exposto à incerteza do mercado

financeiro, o que faz aumentar a probabilidade de que o ativo assuma valores mais afastados do preço inicial, aumentando assim o peso das caudas da distribuição.

Analisando a figura 4.1 verificamos que a estimação obtida por qualquer um dos modelos é reveladora de assimetria positiva nas funções de densidade de risco neutro estimadas. Ou seja, para todas as funções de densidade estimadas, obtemos uma cauda direita mais pesada, quer dizer, existe maior probabilidade de haver um retorno significativo positivo, do que um retorno significativo negativo. Na figura 4.2 verificamos que ao aumentarmos o prazo de maturidade da opções, esta característica se acentua.

Estes resultados são expetáveis, já que os dados são gerados de acordo com a fórmula de Black-Scholes, e a função de densidade teórica lognormal vai apresentar assimetria positiva e, consequentemente, uma cauda direita mais pesada.

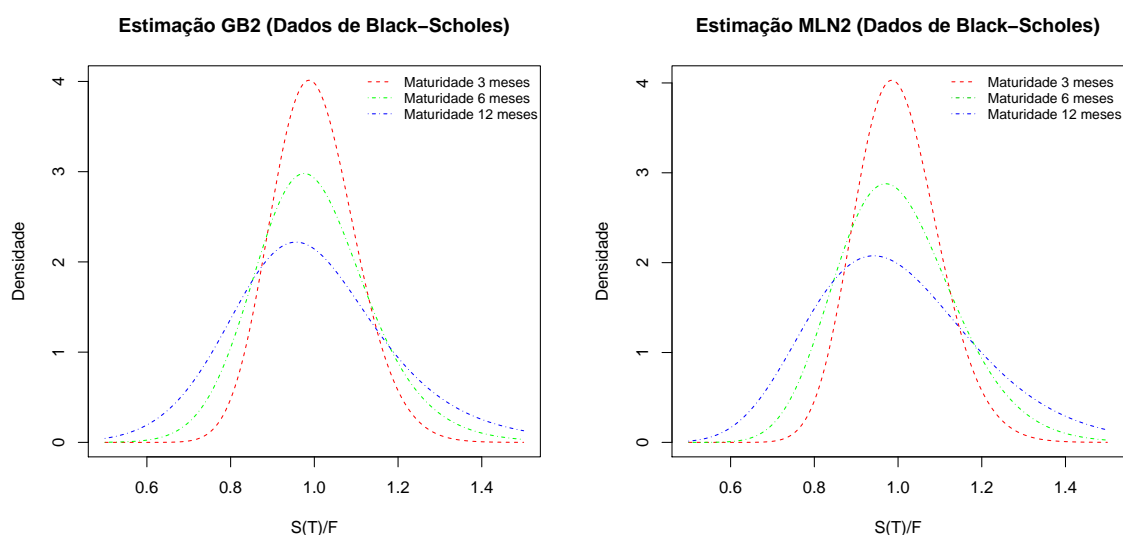


Fig. 4.2 Comparação da função de densidade de risco neutro estimada, para os três conjuntos de dados gerados pela fórmula de Black-Scholes, usando o modelo GB2 e MLN2 respetivamente.

Pela análise da figura 4.3, verificamos que os preços das opções gerados pelas duas aproximações, originam uma aproximação muito boa relativamente aos preços teóricos das opções, assumindo que estes são gerados de acordo com a fórmula de Black-Scholes.

Para melhor análise das estimações, calculamos o resíduo entre os preços teóricos e os preços obtidos de acordo com as funções de densidade de risco neutro estimadas. Sendo assim, vamos calcular o *root mean square error* (RMSE), comparando, desta forma, os preços de opções gerados pela fórmula de Black-Scholes com os preços das opções obtidos através da estimação dos modelos propostos.

Considerando o resíduo assim estimado, verificamos que os resultados são bons utilizando qualquer uma das abordagens, como podemos ver na tabela 4.1. O RMSE, para qualquer maturidade considerada, vai ser muito superior nas opções obtidas pela estimação da função de densidade de risco neutro, através de uma densidade beta generalizada do tipo 2, do que na mistura de duas densidades lognormais. No caso em que o quociente entre o RMSE (GB2) e RMSE (MLN2) é menor, o valor é da ordem de  $10^{12}$ . Isto mostra bem a diferença em termos de ordem de grandeza dos erros obtidos.

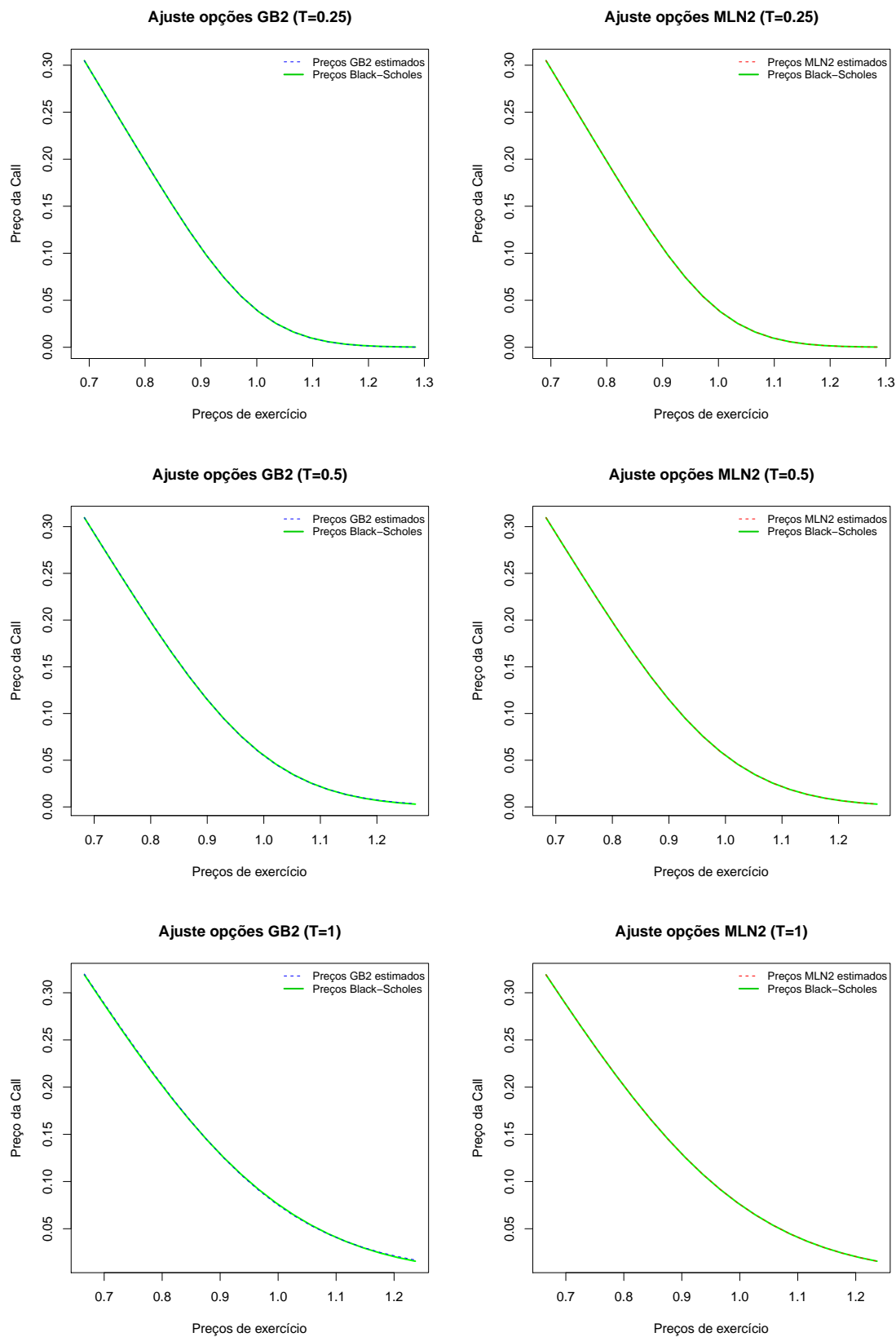


Fig. 4.3 Comparação entre os preços de Black-Scholes e os preços estimados usando os modelos de MLN2 e GB2.

De modo a estudar a influência de fornecer, como ponto inicial do processo de otimização, os valores exatos da função de densidade lognormal teórica, calculámos o RMSE, estimando o ponto inicial da mistura de duas densidades lognormais, de modo análogo ao que foi feito nos dados de Heston e nos dados de mercado. O RMSE, assim obtido, para os vários conjuntos de dados, tem o valor de  $2.33 \times 10^{-7}$  para o conjunto 1, de  $2.33 \times 10^{-7}$  para o conjunto 2 e de  $3.96 \times 10^{-7}$  para o conjunto 3. Assim, podemos concluir que, mesmo não utilizando os valores exatos da função de densidade lognormal teórica como ponto inicial, obtemos um excelente ajuste dos preços de opções *call* estimados relativamente aos preços de Black-Scholes.

	MLN2	GB2	RMSE (GB2) / RMSE (MLN2)
Dados de Black-Scholes (3 meses)	$1.20 \times 10^{-16}$	$1.24 \times 10^{-4}$	$1.03 \times 10^{12}$
Dados de Black-Scholes (6 meses)	$7.19 \times 10^{-17}$	$3.46 \times 10^{-4}$	$4.81 \times 10^{12}$
Dados de Black-Scholes (1 ano)	$1.17 \times 10^{-16}$	$7.83 \times 10^{-4}$	$6.68 \times 10^{12}$

Tabela 4.1 RMSE para os preços das opções *call* estimados (dados de Black-Scholes).

#### 4.2.2 Dados de Heston

Com o objetivo de testar a capacidade dos nossos métodos de recuperar a função de densidade de risco neutro, atribuímos diferentes parâmetros ao processo de evolução do preço do ativo subjacente. Para isto, utilizamos um modelo de volatilidade estocástica, apresentado por Heston [17]. Para este efeito, geramos preços de opções *call* para uma maturidade de um ano. Nesta maturidade, geramos um conjunto de dezasseis preços de opções *call*. Para gerar o preço das opções *call*, de acordo com o modelo de volatilidade estocástica de Heston, utilizamos a função *callHestoncf* pertencente ao pacote *NMOF* do R.

O valor inicial do ativo subjacente  $S_0$  é 100, sendo que os preços de exercício estão compreendidos entre 70 e 130 e encontram-se igualmente espaçados com um intervalo de 4. Estabelecemos, deste modo que a taxa de juro  $r$  é 2%, a taxa de dividendo  $q$  é 1%, a volatilidade da volatilidade  $\sigma_v$  é 0.5, a volatilidade inicial  $v_0$  e a volatilidade a longo termo  $\theta$  é 0.2 e a velocidade com que a volatilidade retorna à sua média a longo prazo,  $\kappa$ , é 0.2.

De maneira análoga, ao que foi feito com os dados gerados com a fórmula de Black-Scholes, procedemos ao escalonamento dos dados, de forma a reduzir a ordem de grandeza dos dados de entrada do problema.

Com o objetivo de avaliar a capacidade dos modelos em estimar uma boa aproximação à função de densidade de risco neutro, estabelecemos três cenários, onde se vão atribuir diferentes valores ao  $\rho = \{-0.7, 0, 0.7\}$  que vai quantificar a existência de correlação entre a evolução do preço e a evolução da volatilidade. Isto significa que, atribuindo valores positivos a este parâmetro, estamos a considerar que a volatilidade do ativo aumenta, quando o preço do ativo aumenta e vice-versa. Quando o  $\rho$  assume um valor negativo estamos a considerar que a volatilidade diminui, quando o preço do ativo aumenta e vice-versa. Ao definirmos  $\rho = 0$ , assumimos a inexistência de correlação entre a evolução do preço e a evolução da volatilidade.

### Estimações obtidas

Pela análise da figura 4.4, verificamos que a função de densidade de risco neutro, estimada por qualquer um dos modelos, relativamente ao conjunto gerado com o parâmetro  $\rho = -0.7$ , designado por conjunto 1, apresenta evidências de uma cauda esquerda pesada e de forte assimetria negativa.

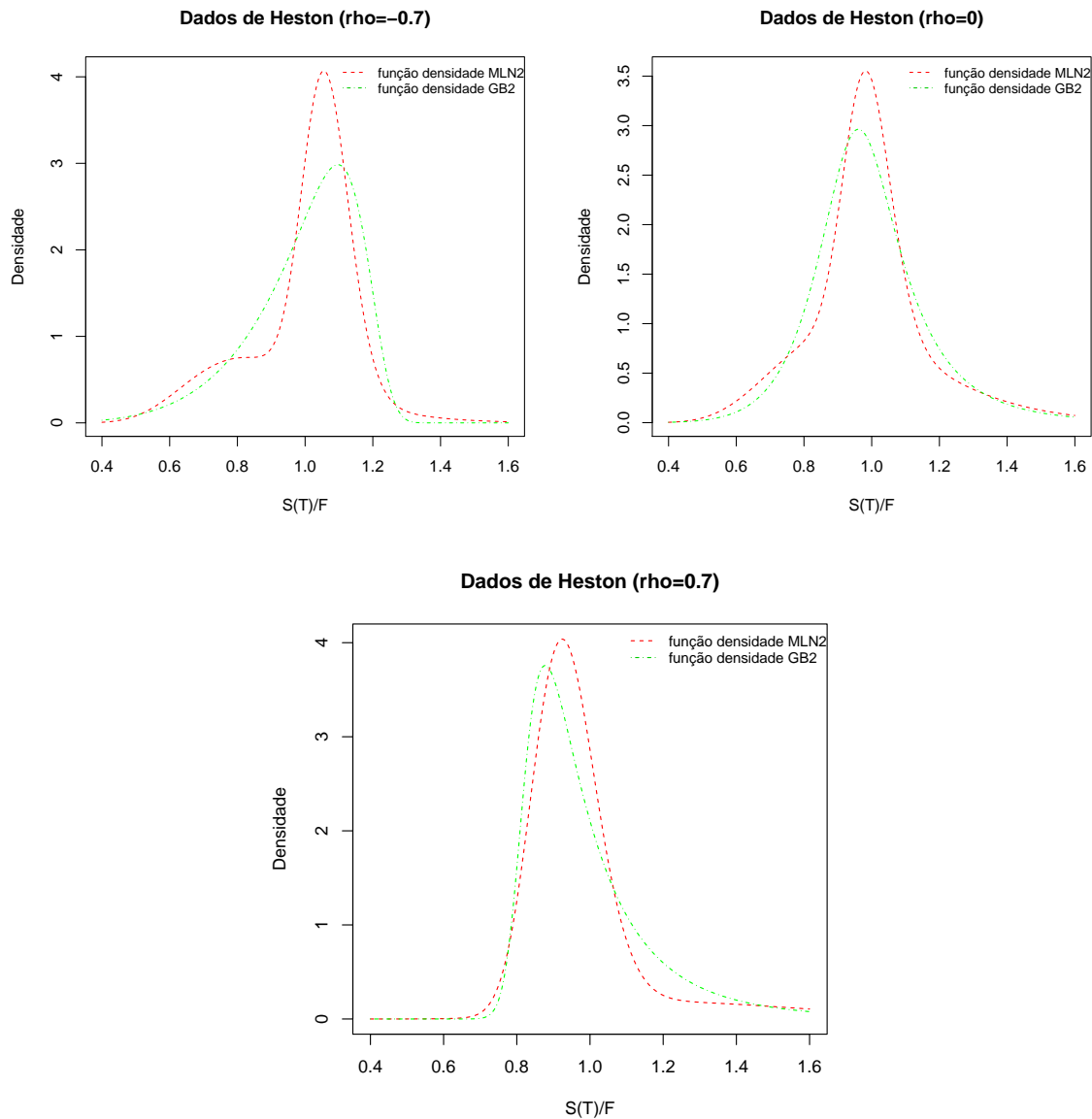


Fig. 4.4 Estimação da função de densidade de risco neutro, para os dados de Heston, usando os modelos de MLN2 e GB2.

Quando consideramos a mesma abordagem usando o parâmetro  $\rho = 0$ , obtemos dados de opções *call*, que designamos por conjunto 2. A estimação assim obtida apresenta evidências de alguma simetria. Assim, a inexistência de correlação entre a evolução do retorno e da volatilidade, origina simetria na função de densidade de risco neutro.

Relativamente ao conjunto 3, gerado com o parâmetro  $\rho = 0.7$ , temos evidências de uma cauda direita pesada e de assimetria positiva, para os dois modelos estimados. Desta maneira, a existência de correlação positiva entre a evolução do retorno e da volatilidade, faz com que a função de densidade de risco neutro apresente assimetria positiva e, conseqüentemente, origina uma cauda direita pesada.

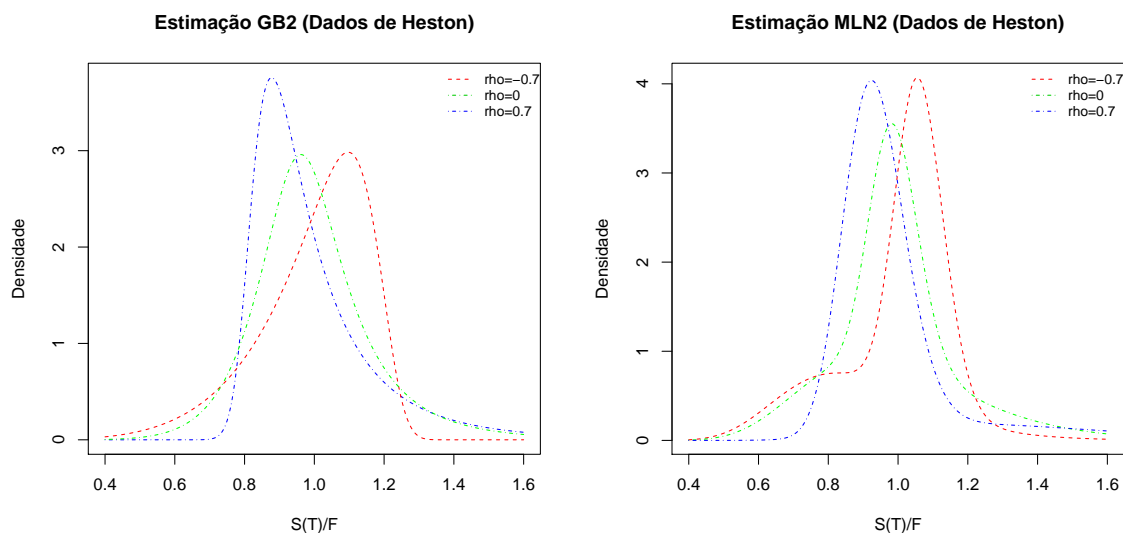


Fig. 4.5 Comparação da função de densidade de risco neutro estimada, para os três conjuntos de dados gerados pela fórmula de Heston, usando o modelo GB2 e MLN2 respetivamente.

Constata-se na figura 4.5 que, ao variarmos o parâmetro  $\rho$  do modelo de Heston, em qualquer um dos modelos utilizados na estimação da função de densidade de risco neutro, estamos a influenciar o grau de assimetria e, conseqüentemente, a existência de cauda direita ou esquerda pesada, conforme o parâmetro  $\rho$  tome valores positivos ou negativos, respetivamente. A cauda da distribuição é tão mais pesada quanto maior for o valor em módulo do parâmetro  $\rho$ .

Pela análise da figura 4.6, verificamos que os preços das opções, estimados pela aproximação da mistura de duas densidades lognormais, originam uma aproximação muito boa relativamente aos preços das opções gerados pelo modelo de volatilidade estocástica de Heston. Analisando a relação entre os preços de Heston e os preços obtidos a partir estimação da função de densidade beta generalizada do tipo 2, notamos um ligeiro desvio relativamente aos preços de Heston das opções *call*, sendo esse facto particularmente evidente no conjunto 3.

Para uma melhor análise da situação, vamos comparar os preços de Heston das *calls* com os estimados pelos modelos, com base no *root mean square error* (RMSE). Pela análise da tabela 4.2, podemos verificar em qualquer um dos conjuntos considerados que o RMSE é superior quando estimamos o modelo através da densidade beta generalizada do tipo 2 do que com a mistura de duas densidades lognormais. Porém, verificamos que nos dados relativos ao conjunto 2, ou seja, quando atribuímos ao valor 0 à correlação entre o retorno e a volatilidade, a diferença entre o RMSE (GB2) e o RMSE (MLN2) é pouco significativa. Assim, podemos concluir que a simetria da função de densidade de risco neutro aproxima as estimações relativas aos dois modelos.

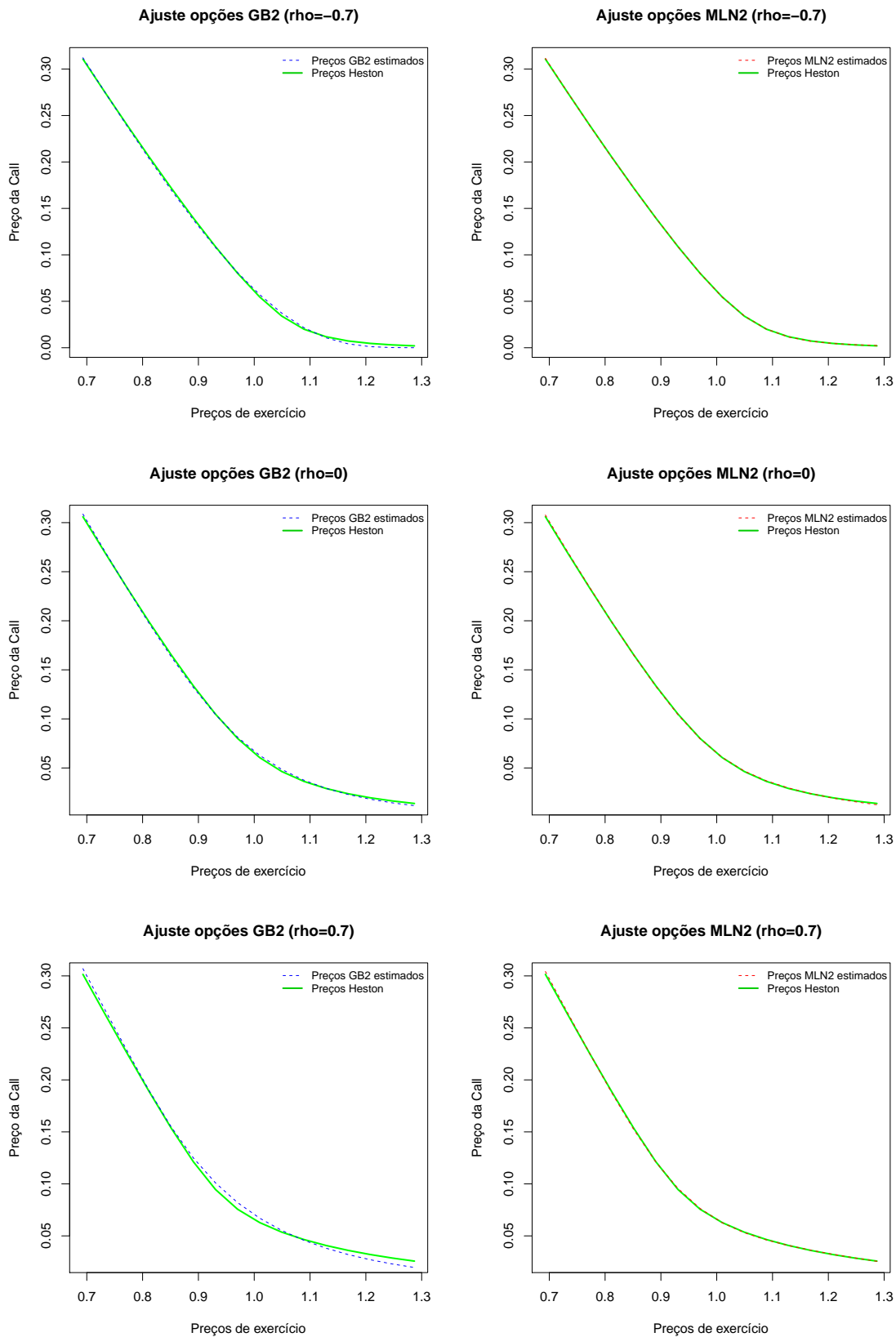


Fig. 4.6 Comparação entre os preços de Heston e os preços estimados usando os modelos de MLN2 e GB2.

	MLN2	GB2	RMSE (GB2) / RMSE (MLN2)
Dados de Heston ( $\rho = -0.7$ )	$2.82 \times 10^{-4}$	$2.10 \times 10^{-3}$	7.45
Dados de Heston ( $\rho = 0$ )	$7.23 \times 10^{-4}$	$1.62 \times 10^{-3}$	2.24
Dados de Heston ( $\rho = 0.7$ )	$9.59 \times 10^{-4}$	$4.24 \times 10^{-3}$	4.42

Tabela 4.2 RMSE para os preços das opções *call* estimados (dados de Heston).

### 4.2.3 Dados de mercado para os preços de opções

As estimativas da função de densidade de risco neutro são obtidas através de dados trimestrais para os preços das opções *call* sobre o índice S&P500, cuja transação ocorre no mercado *Chicago Board of Options Exchange (CBOE)*. Assim, começamos por retirar os dados relativos ao preço do contrato de futuro do índice S&P500 com determinadas datas de expiração (Março, Junho e Setembro). A data de expiração dos contratos de futuro corresponde à terceira sexta-feira de cada um dos meses anteriores. Assim, consideramos dados de opções *call* com a maturidade a coincidir com a data de expiração do contrato de futuro. Para cada conjunto de dados tomámos como preço das opções *call* a média aritmética dos preços *bid* e *ask*, relativos a cada preço de exercício, tendo em conta o volume de transação.

De modo a assegurar a qualidade dos dados relativos ao preço das opções *call*, retiramos todas as opções com um volume de transação diário inferior a 10. Como estas opções têm pouca liquidez, não refletem, realmente, o sentimento do mercado. As opções com um volume de transação diário superior a 10, podem representar melhor as expectativas do mercado.

Deste modo, recolhemos informação de opções transacionadas no dia 27 de janeiro de 2017, com vencimento no dia 15 de março de 2017, sendo que a informação contida nestas opções vai ser designada por Conjunto 1. Também recolhemos dados relativos a preços de opções *call* transacionados no mesmo dia, mas com maturidades no dia 16 de junho de 2017 (Conjunto 2) e no dia 15 de setembro de 2017 (Conjunto 3).

Sendo assim, inserimos os dados de entrada de acordo com o escalonamento de Fengler e Hin [15], referido atrás, de maneira a reduzir a ordem de grandeza dos dados do problema.

### Estimações obtidas

Quando consideramos dados de mercado, a função de densidade de risco neutro pode apresentar uma grande variedade de formas. Nesse sentido, no próximo conjunto de testes vamos averiguar a eficácia dos nossos métodos a recuperar a função de densidade de risco neutro, para um conjunto de opções transacionadas no mercado.

Constata-se na figura 4.7 que, para os conjuntos de dados 2 e 3, a função de densidade de risco neutro obtida pelo dois métodos de estimação, apresenta a cauda esquerda da distribuição pesada, sendo este facto particularmente evidente na estimação obtida através da estimação pela mistura de duas densidades lognormais.



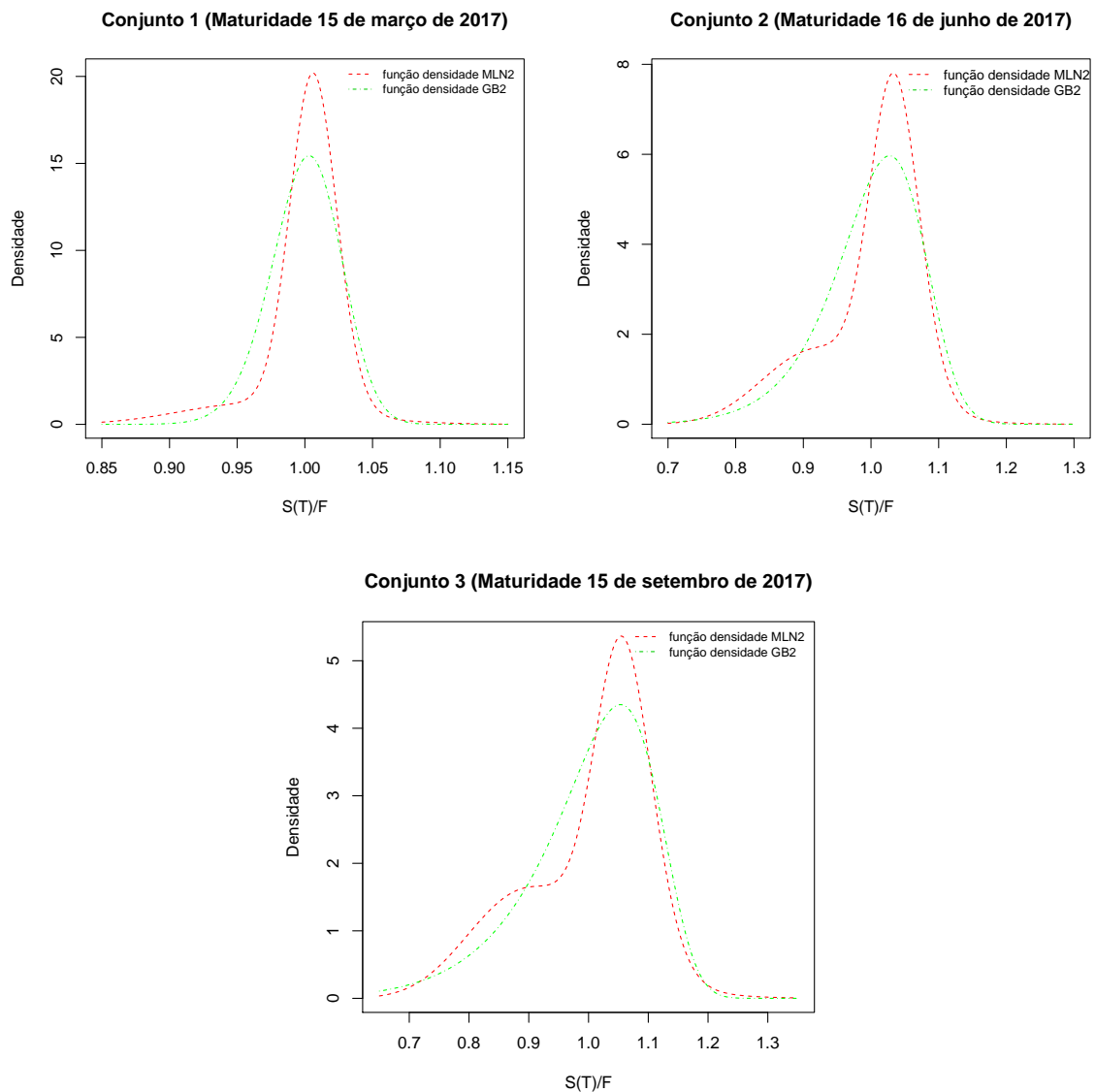


Fig. 4.7 Estimação da função de densidade de risco neutro, para os três conjuntos de dados relativos ao S&P 500, usando os modelos de MLN2 e GB2.

Assim, pela análise das funções de densidade de risco neutro estimadas, da figura 4.7, parece haver evidências de existência de assimetria negativa, principalmente nos conjuntos de dados 2 e 3. A existência de assimetria negativa na estimação de funções de densidade de risco neutro com base no preço de opções, é consistente com o sentimento de que há mais probabilidade de existir um retorno significativo negativo, do que um retorno significativo positivo de igual ordem. Desta maneira é possível que as experiências passadas de *crashes* se reflitam nos preços das opções. Esta característica revela, de certa maneira, o pessimismo dos investidores.

A literatura afirma que as funções de densidade de risco neutro, estimadas depois de um *crash*, apresentam grande assimetria negativa e curtose elevada, quando comparamos com as funções de densidade de risco estimadas antes de um *crash*.

A existência de assimetria negativa é mais evidente na estimação da função de densidade de risco neutro, através da mistura de duas densidades lognormais. Dado que recolhemos opções *call* no dia 27 de janeiro de 2017, para três maturidades diferentes, agora vamos comparar as estimações obtidas para as diferentes maturidades das opções. Assim, verificamos na figura 4.8 que, para qualquer um dos modelos usados na estimação, quando a maturidade aumenta, a curtose também aumenta, originando assim que a distribuição apresente caudas mais pesadas. Tal como referimos anteriormente, este facto é evidente na cauda esquerda da distribuição.

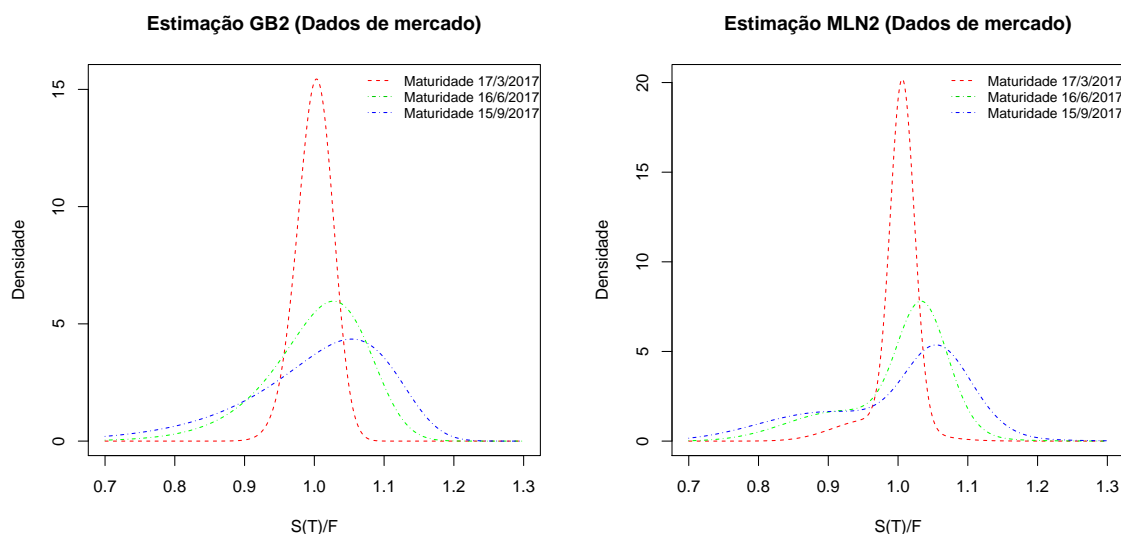


Fig. 4.8 Comparação entre a função de densidade de risco neutro estimada para os três conjuntos de dados relativos ao S&P 500, usando o modelo GB2 e o MLN2 respetivamente.

Constata-se na figura 4.8 que o progressivo aumento da curtose da função de densidade de risco neutro é algo expectável, já que aumentando o período de exposição do ativo à incerteza, aumentamos o probabilidade de o ativo assumir valores mais afastados do inicial, provocando assim o aumento do peso das caudas da distribuição. A existência de assimetria negativa, ou seja, a crença de que há maior probabilidade de existir um retorno significativamente negativo do que um retorno significativamente positivo de igual ordem, é reveladora de um certo pessimismo dos investidores, tal como referimos anteriormente.

Analisando a figura 4.7, verificamos que a estimação da função de densidade de risco neutro, através da mistura de duas densidades lognormais, parecem apresentar características que se assemelham a uma distribuição bimodal, sendo esse facto particularmente evidente nas funções de densidade de risco neutro estimadas, relativas aos conjuntos 2 e 3.

Estimamos, agora, os preços das opções *call* de acordo com os dois modelos utilizados na estimação da função de densidade de risco neutro. Pela análise da figura 4.9, o ajuste entre os preços estimados pelos modelos e os preços de mercado é bom para os três conjuntos de dados estudados, quando analisamos a estimação da função de densidade de risco neutro, através da mistura de duas densidades lognormais. Porém, quando analisamos a relação entre os preços de mercado e os preços estimados, a partir da estimação da função de densidade beta generalizada do tipo 2, notamos um ligeiro desvio relativamente aos preços de mercado das opções *call*. No entanto, para qualquer uma

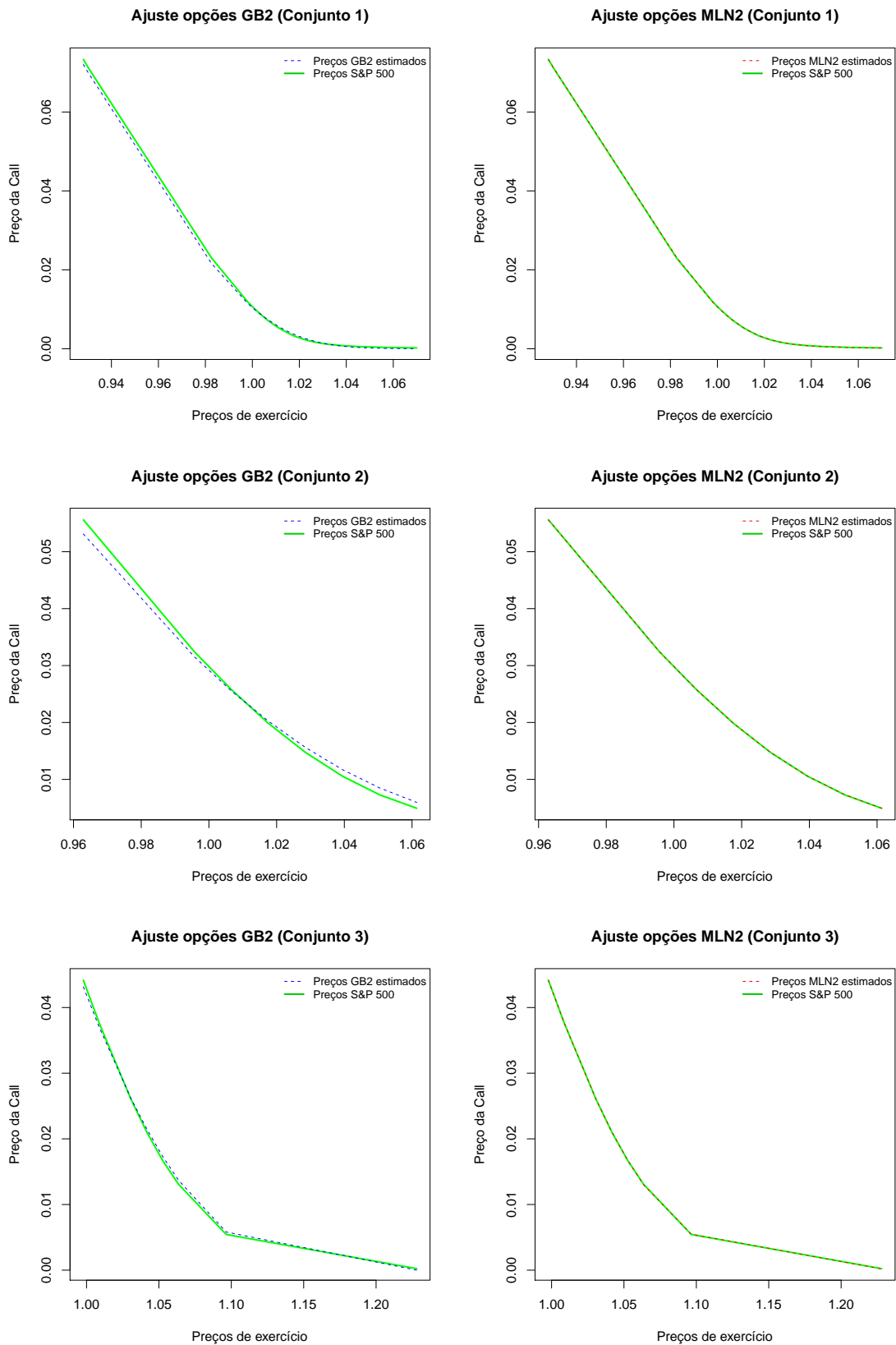


Fig. 4.9 Comparação entre os preços de mercado e os preços estimados usando os modelos de MLN2 e GB2.

das maturidades consideradas, e recorrendo a qualquer das abordagens utilizadas na estimação da função de densidade de risco neutro, obtemos preços estimados que se encontram entre o *bid* e *ask* para qualquer preço de exercício considerado. Estas estimações de preços de opções são consideradas aceitáveis, já que se encontram dentro do intervalo *bid-ask*.

	MLN2	GB2	RMSE (GB2) / RMSE (MLN2)
Dados do S&P 500 (Conjunto 1)	$5.29 \times 10^{-5}$	$4.98 \times 10^{-4}$	9.41
Dados do S&P 500 (Conjunto 2)	$1.75 \times 10^{-5}$	$1.21 \times 10^{-3}$	69.14
Dados do S&P 500 (Conjunto 3)	$4.23 \times 10^{-5}$	$5.74 \times 10^{-4}$	13.57

Tabela 4.3 RMSE para os preços das opções *call* estimados (dados do S&P 500).

Para uma melhor análise da situação, comparamos os preços de mercado das opções *call* e os estimados pelos modelos, calculando o erro (RMSE). Pela análise da tabela 4.3 podemos verificar, em qualquer um dos conjuntos considerados, que o RMSE é muito maior quando estimamos o modelo através da densidade beta generalizada do tipo 2 do que com a mistura de duas densidades lognormais. Em qualquer dos conjuntos considerados, o quociente entre o RMSE (GB2) e o RMSE (MLN2) é superior a 9, o que mostra a diferença em termos de ordem de grandeza dos erros das estimações obtidas.

## Capítulo 5

# Conclusão

Os preços das opções fornecem uma preciosa fonte de informação, no que diz respeito à distribuição futura do preço do ativo subjacente, particularmente no que se refere à incerteza sobre esse preço. Essas informações são aqui traduzidas, inicialmente, em densidades de probabilidade neutras ao risco, assumindo uma família paramétrica (uma mistura de duas densidades lognormais ou uma densidade beta generalizada do tipo 2) mas, poderiam igualmente ser traduzidas por uma abordagem mais flexível, definida por abordagens semi-paramétricas ou não-paramétricas.

Neste trabalho comparámos os dois modelos paramétricos citados anteriormente: a mistura de duas densidades lognormais e a densidade beta generalizada do tipo 2. Para esse efeito, utilizámos preços de opções gerados pelos modelos de Black-Scholes e pelo modelo de Heston e preços de opções de mercado do índice S&P 500.

Os preços das opções *call* foram usados como dados de entrada para estimação da função de densidade de risco neutro. Como vimos no subcapítulo 2.4 a estimação da função de densidade de risco neutro, por via do preço de opções, requer algum cuidado no tratamento dos dados. Neste trabalho garantimos a ausência de oportunidades de arbitragem, de acordo com as condições apresentadas no subcapítulo 2.4, para os dados de preços de opções de mercado utilizados.

De modo a diminuir o impacto da iliquidez das opções relativas aos vários preços de exercício, reduzimos a nossa amostra somente a opções com volume de transação diário superior a 10. Esta medida, apresenta a desvantagem de ignorar a informação contida em opções pouco líquidas, limitando assim a informação contida na estimação.

O facto de reduzirmos a nossa amostra, pode impedir a aplicação de métodos de estimação da densidade de risco neutro, com um número razoável de parâmetros. Porém, isso não representa um problema no nosso estudo, visto que os modelos estimados têm poucos parâmetros. Isto pode representar uma mais valia, no caso de escassez de dados.

Quando inserimos, tanto os dados de Black-Scholes ou de Heston como os de mercado, nas rotinas, deparámo-nos com problemas relacionados com a ordem de grandeza desses dados e também com a obtenção de um bom ponto inicial para o processo de otimização adjacente. O escalonamento feito aos dados do problema que foi proposto por Fengler e Hin [15], melhorou o condicionamento dos problemas de otimização, associados à obtenção dos parâmetros para a estimação da função de densidade de risco neutro. Para além disso, a estimação de um ponto inicial para os processos

de otimização vai melhorar, em muito, os resultados provenientes dos problemas de otimização considerados.

Os resultados que obtivemos nesta dissertação, mostram a eficácia dos dois modelos de estimação da função de densidade de risco neutro utilizados. Porém, o resíduo calculado entre os preços gerados pelo modelo de Black-Scholes ou de Heston ou os observados do S&P 500 e os preços estimados, mostram que a mistura de duas densidades lognormais estima preços de opções com menores erros. Este facto é particularmente evidente, quando fazemos o quociente entre o RMSE (GB2) e o RMSE (MLN2), já que estes assumem valores superiores a 1 sendo que, na maior parte dos casos, este valor é muito superior a 1, o que é revelador da diferença em termos de ordem de grandeza do RMSE, calculado para os dois modelos.

No caso dos preços de opções de mercado do S&P 500, obtemos uma estimação dos preços das opções *call* satisfatória, já que os valores estimados encontram-se sempre no intervalo de preços *bid-ask*, referente a cada preço de exercício.

Os resultados mostram que a função de densidade de risco neutro, estimada para o índice S&P 500 e para qualquer um dos modelos estudados, vai apresentar assimetria negativa e a cauda esquerda pesada ou seja, há mais probabilidade de existir um retorno significativamente negativo do que um retorno significativamente positivo de igual ordem. A existência desta assimetria negativa justifica-se, em grande medida, pelos traumáticos *crashes* existentes no passado. Isso induz um certo receio às perspetivas dos investidores, tal como vem referenciado em Anagnou, Bedendo, Hodges e Tompkins [3].

Também verificámos que o alargamento do prazo de maturidade, tanto para os preços das opções do índice S&P 500, como para os preços gerados de Black-Scholes, faz com que a função de densidade de risco neutro fique com as caudas mais pesadas, o que é natural, já que ao aumentarmos o prazo de exposição do ativo à incerteza, aumentamos a probabilidade de o ativo assumir valores mais afastados do inicial, provocando assim o aumento do peso das caudas da distribuição.

Assim, pela análise das funções de densidade de risco neutro, estimadas pelos dois modelos, verificámos que estas funções apresentam uma grande diversidade de formas. Este resultado vem ao encontro dos resultados obtidos noutros trabalhos nesta área, como os realizados por Anagnou, Bedendo, Hodges e Tompkins [3], Liu, Shackleton, Taylor e Xu [18] e Arnerić, Aljinović e Poklepović [4].

Assim, a mistura de duas densidades lognormais provou ser muito flexível, o que significa ser possível obter uma grande variedade de distribuições implícitas e assim capturar características normalmente observadas nos ativos financeiros, como assimetrias e as caudas pesadas nas funções de densidade de risco neutro estimadas.

Extraír este tipo de informações é de primordial importância, não só para os participantes no mercado como para os decisores políticos, como os bancos centrais. Os participantes do mercado estão interessados em prever a volatilidade futura, uma vez que esta é uma variável importante na gestão de carteiras. Para o banco central, é importante ser capaz de interpretar as expectativas dos participantes do mercado, de modo a melhor elaborar a futura política monetária. A capacidade do banco central para entender as expectativas do mercado, é de grande importância para comparar a visão desta instituição sobre a economia com a visão do mercado, também porque as expectativas do mercado podem ser auto-realizáveis até certo ponto.

Uma das limitações do nosso estudo é que os resultados são realizados apenas para o índice S&P 500, ou seja, para um mercado muito transacionado. Eventualmente, a mesma pesquisa poderia ter dificuldades em ser realizada noutros mercados, cujo volume de transação relativo a opções seja pequeno, devido ao facto das opções serem negociadas com pouca frequência, o que origina contratos de opções ilíquidos.

Os modelos de estimação da função de densidade de risco neutro testados neste trabalho, podem ser aplicados a opções sobre mercadorias e sobre taxas de juros, com o objetivo de comparar os resultados obtidos.

Este estudo também pode ser aprofundado, aplicando a estimação da função de densidade de risco neutro através de uma aproximação semi-paramétrica, com a mistura de duas densidades hipergeométricas, como proposto por Abadir e Rockinger [1] ou considerando uma aproximação não-paramétrica.





# Bibliografija

- [1] Abadir, K. M. and Rockinger, M. (2003). Density functionals, with an option-pricing application. *Econometric Theory*, 19(05):778–811.
- [2] Aït-Sahalia, Y. and Lo, A. W. (1998). Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices. *The Journal of Finance*, 53(2):499–547.
- [3] Anagnou, I., Bedendo, M., Hodges, S. D., and Tompkins, R. (2002). The relation between implied and realised probability density functions.
- [4] Arneric, J., Aljinović, Z., and Poklepović, T. (2015). Extraction of market expectations from risk-neutral density.
- [5] Bahra, B. (1997). Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application.
- [6] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pages 637–654.
- [7] Bliss, R. R. and Panigirtzoglou, N. (2002). Testing the stability of implied probability density functions. *Journal of Banking & Finance*, 26(2):381–422.
- [8] Bookstaber, R. M. and McDonald, J. B. (1987). A general distribution for describing security price returns. *Journal of business*, pages 401–424.
- [9] Breeden, D. T. and Litzenberger, R. H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of business*, pages 621–651.
- [10] Campa, J. M., Chang, P. K., and Reider, R. L. (1998). Implied exchange rate distributions: evidence from otc option markets. *Journal of International Money and Finance*, 17(1):117–160.
- [11] Carr, P. and Madan, D. B. (2005). A note on sufficient conditions for no arbitrage. *Finance Research Letters*, 2(3):125–130.
- [12] Cornuejols, G. and Tütüncü, R. (2006). *Optimization methods in finance*, volume 5. Cambridge University Press.
- [13] Cox, J. C. and Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of financial economics*, 3(1-2):145–166.
- [14] Davis, M. H. and Hobson, D. G. (2007). The range of traded option prices. *Mathematical Finance*, 17(1):1–14.
- [15] Fengler, M. R. and Hin, L.-Y. (2015). Semi-nonparametric estimation of the call-option price surface under strike and time-to-expiry no-arbitrage constraints. *Journal of Econometrics*, 184(2):242–261.

- [16] Gatheral, J. (2004). A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives. *Presentation at Global Derivatives & Risk Management, Madrid*.
- [17] Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, 6(2):327–343.
- [18] Liu, X., Shackleton, M. B., Taylor, S. J., and Xu, X. (2007). Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions. *Journal of Banking & Finance*, 31(5):1501–1520.
- [19] Malz, A. M. (1996). Option-based estimates of the probability distribution of exchange rates and currency excess returns. *Federal Reserve Bank of New York Working Paper*.
- [20] McDonald, J. B. (1984). Some generalized functions for the size distribution of income. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, pages 647–663.
- [21] Melick, W. R. and Thomas, C. P. (1997). Recovering an asset's implied pdf from option prices: an application to crude oil during the gulf crisis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(01):91–115.
- [22] Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, pages 141–183.
- [23] Reiner, E. (2000). Calendar spreads, characteristic functions, and variance interpolation. *Mimeo*.
- [24] Roper, M. (2010). Arbitrage free implied volatility surfaces. *preprint*.
- [25] Shimko, D. C. (1994). Options on futures spreads: Hedging, speculation, and valuation. *Journal of Futures Markets*, 14(2):183–213.