

Adolfo Rafael Coelho de Freitas

# OPTIMIZAÇÃO DE PONTES DE BETÃO ARMADO PRÉ-ESFORÇADO COM ELEMENTOS PRÉ-FABRICADOS

## OPTIMIZATION OF PRECAST PRESTRESSED CONCRETE BRIDGES

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas,  
orientada pelo Professor Doutor Alberto Miguel Bizarro Martins e pelo Professor Doutor Luís Miguel da Cruz  
Simões

Julho, 2017



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



**FCTUC** DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Adolfo Rafael Coelho de Freitas

# **Optimização de Pontes de Betão Armado Pré-Esforçado com Elementos Pré-Fabricados**

## **Optimization of Precast Prestressed Concrete Bridges**

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Estruturas,  
orientada pelo Professor Doutor Alberto Miguel Bizarro Martins e pelo Professor Doutor Luís Miguel da Cruz  
Simões

Esta Dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor.  
O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC, declina qualquer  
responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões  
que possam surgir

Coimbra, 7 de Julho de 2017

## RESUMO

A construção de estruturas com elementos pré-fabricados de betão apresenta vantagens económicas e de qualidade de execução quando comparada com a betonagem *in situ*. A utilização de elementos pré-fabricados de betão armado pré-esforçado na construção de pontes é prática corrente. No entanto, o projecto destas estruturas reveste-se de alguma complexidade, envolvendo, para além da definição das dimensões gerais, também a determinação das forças de pré-esforço e das dimensões das secções transversais dos diversos elementos estruturais.

O uso de ferramentas de optimização estrutural surge naturalmente como forma de obter o projecto destas estruturas tendo em vista a redução de custos dos materiais e a obtenção de soluções económicas e estruturalmente eficientes.

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo numérico de análise e optimização tendo em vista a obtenção do projecto óptimo de pontes com tabuleiro de betão armado pré-esforçado executado com elementos pré-fabricados.

O modelo de análise tem em conta as acções consideradas relevantes no projecto deste tipo de estruturas, bem como, os efeitos diferidos do comportamento dos materiais e as etapas de transporte e construção.

Na optimização foram implementados algoritmos de optimização global, com especial foco no algoritmo genético. Foram consideradas variáveis de decisão seccionais e mecânicas associadas às forças de pré-esforço. Foram também tidos em conta os vários objectivos/restrições de projecto, principalmente tensões e deslocamentos, a considerar no projecto deste tipo de estruturas de acordo com as normas.

As características e capacidades do modelo numérico desenvolvido são ilustradas através da resolução de um conjunto de exemplos de aplicação relativos a problemas de optimização de pontes de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados.

Os resultados obtidos indicam que as vigas tipo U constituem a solução mais económica. Dos algoritmos de optimização global implementados o algoritmo genético é o mais adequado à resolução deste tipo de problemas de optimização estrutural.

**Palavras-chave:** optimização estrutural; pontes de elementos pré-fabricados; efeitos diferidos; optimização global; algoritmo genético; variáveis seccionais.

## ABSTRACT

Precast concrete construction presents economic and execution quality advantages over *in situ* construction. The use of precast prestressed concrete members in the construction of bridges is common practice. However, the design of these structures is rather complex involving, in addition to the definition of the overall dimensions, also the calculation of the prestressing forces and the cross-sectional dimensions of the various structural members.

The use of structural optimization tools naturally arises as a way to obtain the design of these structures in order to reduce material costs and to obtain economical and structurally efficient solutions.

In this work, an analysis and optimization numerical model was developed in order to obtain the optimum design of precast prestressed concrete bridges.

The analysis model takes into account all the relevant actions for the design of such structures, as well as the time-dependent effects of material behavior and also the transportation and construction stages.

In the optimization model global optimization algorithms were implemented, with special focus on the genetic algorithm. Sizing and mechanical design variables associated with the prestressing forces were considered. The various design objectives / constraints, mainly stresses and displacements for the design of these structures were also considered in accordance with the respective design codes.

The features and capabilities of the developed numerical model are illustrated by solving a set of numerical examples concerning the optimization of precast prestressed concrete bridges.

The results show that the precast U-beams lead to the most economical solution. Concerning the global optimization algorithms implemented, the genetic algorithm is the most adequate to solve this type of structural optimization problems.

**Keywords:** structural optimization; precast concrete bridges; time-dependent effects; global optimization; genetic algorithm; cross-sectional design variables

---

## ÍNDICE

|  |     |
|--|-----|
| Resumo .....   | ii  |
| Abstract.....  | iii |
| Índice .....   | iv  |
| Índice de Figuras .....  | vi  |
| Simbologia.....  | ix  |
| 1 Introdução.....  | 1   |
| 1.1 Enquadramento do tema .....  | 1   |
| 1.2 Objectivos do trabalho .....   | 2   |
| 1.3 Organização do trabalho .....  | 3   |
| 2 Estado da Arte .....   | 4   |
| 2.1 Introdução .....   | 4   |
| 2.2 Evolução histórica.....  | 4   |
| 2.3 Concepção estrutural.....  | 5   |
| 2.3.1 Configuração transversal .....   | 5   |
| 2.3.2 Configuração longitudinal .....  | 10  |
| 2.3.3 Outros tipos de pontes de elementos pré-fabricados .....                             | 13  |
| 2.3.4 Pré-esforço.....   | 14  |
| 2.3.5 Ligações.....  | 15  |
| 2.4 Pré-fabricação, armazenamento e transporte .....                                       | 16  |
| 2.5 Projecto de pontes de betão com elementos pré-fabricados .....                         | 18  |
| 2.6 Optimização .....  | 19  |
| 2.6.1 Optimização de estruturas de betão armado .....                                      | 19  |
| 2.6.2 Optimização de pontes de elementos pré-fabricados de betão armado pré-esforçado..... | 21  |
| 3 Modelação e Análise Estrutural.....  | 23  |
| 3.1 Introdução .....   | 23  |
| 3.2 Análise estrutural .....   | 23  |
| 3.2.1 Considerações gerais .....   | 23  |
| 3.2.2 Elemento finito de viga.....   | 25  |
| 3.2.3 Elemento finito de cabo de pré-esforço.....  | 28  |
| 3.2.4 Propriedades das secções transversais dos elementos .....                            | 29  |
| 3.3 Modelação do betão estrutural .....  | 35  |
| 3.3.1 Modelação do betão.....  | 35  |
| 3.3.2 Modelação das armaduras passivas e activas .....                                     | 37  |
| 4 Optimização Estrutural .....   | 39  |

---

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 4.1   | Introdução .....                                      | 39 |
| 4.2   | Formulação geral .....                                | 39 |
| 4.3   | Optimização global .....                              | 40 |
| 4.3.1 | Algoritmos genéticos .....                            | 42 |
| 4.3.2 | Outros algoritmos .....                               | 47 |
| 4.4   | Função objectivo .....                                | 48 |
| 4.5   | Variáveis de decisão .....                            | 49 |
| 4.6   | Restrições .....                                      | 50 |
| 4.6.1 | Restrições de projecto .....                          | 51 |
| 4.6.2 | Restrições de desempenho .....                        | 51 |
| 5     | Exemplos de Aplicação .....                           | 57 |
| 5.1   | Introdução .....                                      | 57 |
| 5.2   | Descrição geral dos exemplos numéricos .....          | 57 |
| 5.3   | Optimização de viaduto com três tramos .....          | 60 |
| 5.4   | Estudo paramétrico em função do vão .....             | 64 |
| 5.5   | Comparação entre algoritmos .....                     | 65 |
| 6     | Conclusões e Recomendações para Estudos Futuros ..... | 68 |
| 6.1   | Conclusões .....                                      | 68 |
| 6.2   | Recomendações para estudos futuros .....              | 69 |
|       | Referências Bibliográficas .....                      | 71 |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 2.1- Evolução da utilização de pré-fabricação em Portugal (Saraiva, 2012).....  | 5  |
| Figura 2.2- Exemplos de secções transversais pré-fabricadas sob betonagem <i>in situ</i> (NP EN 15050, 2008).....                    | 6  |
| Figura 2.3- Visão geral do campo de aplicação dos tipos de secções transversais .....  | 7  |
| Figura 2.4- Ponte em laje maciça (NP EN 15050, 2008).....  | 7  |
| Figura 2.5- Ponte pré-fabricada de laje maciça antes da betonagem, Spanbeton BV, Países baixos. (FIB, 2004).....                     | 8  |
| Figura 2.6 – Tabuleiro em vigas I pré-fabricadas com laje betonada <i>in situ</i> (NP EN 15050, 2008).....                           | 8  |
| Figura 2.7 – Tabuleiro em vigas I do viaduto da Ribeira da Calvaria, IC2 (Indubel,2010).....   | 9  |
| Figura 2.8 – Configuração de uma ou mais vigas pré-fabricadas em U (NP EN 15050, 2008)   | 9  |
| Figura 2.9 – Tabuleiro com vigas U no viaduto da A10 sobre a A1 no Carregado (Pavicentro, 2006).....                                 | 10 |
| Figura 2.10 – Detalhe de continuidade tipo 4, lajes separadas contínuas (NP EN 15050, 2008)  | 11 |
| Figura 2.11 – Detalhe da continuidade tipo 1, Ligação alargada <i>in situ</i> (NP EN 15050, 2008)                                    | 12 |
| Figura 2.12 – Ponte contínua com vigas pré-fabricadas rectangulares (FIB, 2004) .....  | 13 |
| Figura 2.13 – Vigas caixão curvas e exemplo de aplicação num viaduto, Spanbeton BV, Países Baixos (FIB, 2004) .....                  | 13 |
| Figura 2.14 – Elementos de calha numa ponte de caminho-de-ferro, Ergon, Bélgica (FIB, 2004).....                                     | 14 |
| Figura 2.15 – Sistema de pré-tensão (Caltrans, 2015).....  | 14 |
| Figura 2.16 – Colocação da viga de diafragma na ponte de Redfish Bay, Texas, Estados Unidos, 1994 (Roddenberry e Servos, 2012) ..... | 15 |
| Figura 2.17 – Esquema da armadura de reforço para o esforço de corte entre as vigas e a laje do tabuleiro (FIB, 2004) .....          | 15 |
| Figura 2.18 – Continuidade estrutural através de armaduras ordinárias (Sousa, 2004) .....  | 16 |
| Figura 2.19 – Pré-esforço aplicado ao longo de todo o comprimento do tabuleiro (Sousa, 2004).....                                    | 16 |
| Figura 2.20 – Pré-esforço aplicado na laje sobre os apoios (Sousa, 2004) .....   | 16 |
| Figura 2.21 – Linha de fabricação de elementos de viga, Spanbeton BV (FIB, 2004).....  | 17 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.22 – Transporte especial de uma viga com 210 toneladas, Ergon, Bélgica (FIB, 2004)   | 17 |
| Figura 2.23 – Colocação de tábuas de cofragem para betonagem da laje <i>in situ</i> , Ergon, Bélgica (FIB, 2004)  | 18 |
| Figura 3.1 – Elemento finito de viga (Martins, 2015)  | 25 |
| Figura 3.2– Elemento finito de viga com elemento de cabo de pré-esforço (adaptado (Martins et al., 2016b))  | 28 |
| Figura 3.3 – Parâmetros geométricos que definem os tabuleiros de vigas I  | 30 |
| Figura 3.4 – Parâmetros geométricos que definem os tabuleiros de vigas U  | 32 |
| Figura 3.5 – Diagramas tensões-extensões do aço típico de armaduras passivas (adaptado (NP EN 1992-1-1, 2010))  | 37 |
| Figura 3.6 – Diagrama tensões-extensões do aço típico de pré-esforço (adaptado (NP EN 1992-1-1, 2010))  | 38 |
| Figura 4.1 – Esquema de bacias de atracção e tipologias de mínimos numa função objectivo, com a variável de decisão $x$ (adaptado (MATLAB Documentation, 2016)) | 40 |
| Figura 4.2 – Representação esquemática para várias bacias de atracção num problema multidimensional (MATLAB Documentation, 2016)                                | 41 |
| Figura 4.3 – Representação 3D da função de Rastrigin e do seu mínimo global   | 43 |
| Figura 4.4– População inicial   | 44 |
| Figura 4.5– Esquema dos processos de criação de descendentes (adaptado (MATLAB Documentation, 2016))  | 45 |
| Figura 4.6– Distribuição da população ao longo de várias gerações (MATLAB Documentation, 2016)  | 46 |
| Figura 4.7 – Diagrama de blocos do programa desenvolvido  | 47 |
| Figura 4.8 – Equilíbrio interno de secção de betão armado sujeita a flexão composta (Martins, 2015)   | 53 |
| Figura 4.9 – Geometria equivalente do tabuleiro vigado para avaliar a capacidade resistente   | 54 |
| Figura 4.10 – Exemplo de diagrama de interacção adimensional para um elemento de betão (Martins, 2015)  | 55 |
| Figura 5.1 – Modelo estrutural simplificado utilizado ( <i>Exemplo A</i> )  | 58 |
| Figura 5.2 – Malha de elementos finitos do <i>Exemplo A</i>   | 58 |
| Figura 5.3 –Corte transversal do tabuleiro da solução final para a optimização da ponte com tabuleiro de 20m de largura utilizando vigas tipo I de catálogo     | 61 |



---

|  |    |
|--|----|
| Figura 5.4 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura otimizada<br>(Exemplo A usando vigas I de catálogo) .....        | 61 |
| Figura 5.5 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 1 – estrutura otimizada<br>(Exemplo A usando vigas I de catálogo) .....  | 62 |
| Figura 5.6 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada<br>(Exemplo A usando vigas I de catálogo) .....      | 62 |
| Figura 5.7 – Deformada para o caso de carga 4 – estrutura otimizada (Exemplo A usando<br>vigas I de catálogo) .....                        | 63 |
| Figura 5.8 – Gráfico geração- <i>penalty</i> para a optimização da ponte com tabuleiro de 12 m de<br>largura utilizando vigas tipo U ..... | 63 |
| Figura 5.9 – Gráfico vão-comprimento .....   | 65 |
| Figura 5.10 – Gráfico geração-custo para a optimização por algoritmo <i>enxame de partículas</i> .....                                     | 66 |
| Figura 5.11 – Corte transversal do tabuleiro da solução final para a optimização por algoritmo<br><i>enxame de partículas</i> .....        | 67 |
| Figura 6.1 – Janela inicial do programa desenvolvido .....   | 68 |

## SIMBOLOGIA

### Letras maiúsculas latinas

|                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| $A$                                 | Área de secção transversal de um elemento   |
| $A_1, A_2, A_3,$<br>$A_4, A_5, A_6$ | Áreas parciais utilizadas para calcular as propriedades geométricas das secções transversais dos tabuleiros |
| $A_{cabo j}$                        | Área da secção transversal equivalente atribuída a um elemento de cabo de pré-esforço $j$                   |
| $A_p$                               | Área de secção transversal de pré-esforço   |
| $A_{s1}$                            | Área da secção transversal da armadura inferior   |
| $A_{s2}$                            | Área da secção transversal da armadura superior   |
| $A_{\text{tabuleiro } i}$           | Área da secção transversal do tabuleiro atribuída a um elemento $i$   |
| $A_{\text{total}}$                  | Área total da secção transversal do tabuleiro atribuída a um elemento                                       |
| $\underline{B}^e$                   | Matriz de deformação ou de derivadas da função de forma   |
| $\underline{B}_p^e$                 | Matriz de deformação do elemento de cabo de pré-esforço   |
| $C$                                 | Custo; Valor da função objectivo  |
| $CBA$                               | Custo em euros por metro cubico de betão armado   |
| $CE$                                | Custos de elevação/aplicação de uma viga pré-fabricada  |
| $CG$                                | Centro geométrico   |
| $CP$                                | Centro plástico   |
| $CPE$                               | Custo em euros por metro cubico de armadura activa  |
| $CT$                                | Custo em euros do transporte de uma peça de viga pré-fabricada  |
| $\underline{D}$                     | Matriz de elasticidade  |
| $\underline{D}^e$                   | Matriz de elasticidade elementar  |
| $E$                                 | Módulo de elasticidade  |
| $E_c$                               | Módulo de elasticidade tangente do betão  |
| $E_{cm}$                            | Módulo de elasticidade secante do betão   |
| $E_{cm}(t)$                         | Valor médio do módulo de elasticidade do betão na idade $t$ em dias   |
| $E_p$                               | Módulo de elasticidade do aço de pré-esforço  |
| $\underline{F}$                     | Vector de forças nodais equivalentes global da estrutura  |
| $F(x)$                              | Função objectivo  |
| $F_c$                               | Força no betão  |
| $\underline{F}^e$                   | Vector elementar de forças nodais equivalentes  |
| $\underline{F}_G^e$                 | Vector elementar de forças nodais equivalentes em coordenadas globais                                       |
| $F_{pe}$                            | Força de pré-esforço  |

---

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $F_{pe1}$             | Força de pré-esforço nos vãos 1   |
| $F_{pe2}$             | Força de pré-esforço no vão 2   |
| $F_{s1}$              | Força na armadura inferior  |
| $F_{s2}$              | Força na armadura superior  |
| $I$                   | Momento de inércia  |
| $I_1, I_2, I_3, I_4,$ | Momentos de inércia parciais utilizados para calcular as propriedades                           |
| $I_5, I_6$            | geométricas das secções transversais do tabuleiro   |
| $I_{total}$           | Momento de inércia total equivalente da secção transversal do tabuleiro atribuída a um elemento |
| $I_z$                 | Momento de inércia em torno do eixo local z   |
| $J(t, \tau)$          | Função de fluência  |
| $\underline{K}$       | Matriz de rigidez global da estrutura   |
| $\underline{K}^e$     | Matriz de rigidez elementar   |
| $\underline{K}_G^e$   | Matriz de rigidez elementar em coordenadas globais  |
| $\underline{K}_p^e$   | Matriz de rigidez elementar do elemento de cabo de pré-esforço                                  |
| $L$                   | Comprimento   |
| $L_i$                 | Comprimento do elemento finito de betão armado  |
| $L_j$                 | Comprimento do elemento finito de cabo de pré-esforço   |
| $L_k$                 | Comprimento da peça de viga pré-fabricada no vão $k$  |
| $M$                   | Momento flector   |
| $M_{Ed}$              | Momento flector actuante  |
| $M_{Rd}$              | Momento flector resistente  |
| $M_k$                 | Massa da peça de viga pré-fabricada no vão $k$  |
| $N$                   | Esforço axial   |
| $\underline{N}$       | Matriz das funções de forma   |
| $N_{Ed}$              | Esforço axial actuante  |
| $N_i(x)$              | Função interpoladora da função de forma   |
| $N_p$                 | Esforço axial num elemento de cabo de pré-esforço   |
| $N_{Rd}$              | Esforço axial resistente  |
| $N_{strands}$         | Número de cabos num elemento finito de cabo de pré-esforço                                      |
| $N_{strands1}$        | Número de cabos nos vãos 1  |
| $N_{strands2}$        | Número de cabos no vão 2  |
| $S$                   | Momento estático  |
| $\underline{T}^e$     | Matriz de transformação de coordenadas do elemento  |
| $V$                   | Esforço transversal   |
| $\underline{X}^e$     | Vector elementar de esforços internos   |
| $X, Y, Z$             | Coordenadas globais   |

---

## Letras minúsculas latinas

|                        |  |
|------------------------|--|
| $a_j(t0)$              | Coefficiente da série de Dirichlet que aproxima a função de fluência                           |
| $b$                    | Largura  |
| $\underline{b}$        | Vector de componentes das forças volúmicas   |
| $bfi$                  | Largura dos banzos inferiores  |
| $bfs$                  | Largura dos banzos superiores  |
| $blj$                  | Largura da laje do tabuleiro   |
| $e$                    | Constante matemática   |
| $e(x)$                 | Traçado do cabo de pré-esforço   |
| $e_1, e_2, e_i$        | Valores das excentricidades do cabo de pré-esforço a respeito ao centro geométrico da viga     |
| $f$                    | Função objectivo   |
| $f(x_1, \dots, x_n)$   | Valor da função objectivo para uma solução descrita pelo vector das variáveis de decisão       |
| $f_{0,2k}$             | Tensão limite de proporcionalidade a 0,2% à tracção do aço das armaduras passivas              |
| $\underline{f}_{be}$   | Vector de forças nodais equivalentes à acção do peso próprio do elemento                       |
| $f_{cd}$               | Valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão                                     |
| $f_{ck}$               | Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade            |
| $f_{ctk,0,05}$         | Quantilho de 5% do valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples         |
| $f_{p0,1k}$            | Tensão limite de proporcionalidade a 0,1% à tracção do aço das armaduras activas               |
| $\underline{f}_p$      | Vector elementar de forças nodais equivalentes ao pré-esforço                                  |
| $f_{pk}$               | Valor característico da tensão de rotura à tracção do aço das armaduras de pré-esforço/activas |
| $f_t$                  | Tensão de rotura à tracção   |
| $\underline{f}_t$      | Vector de forças nodais elementares equivalentes às acções de vão                              |
| $f_{tk}$               | Valor característico da tensão de rotura à tracção do aço das armaduras passivas               |
| $f_{yk}$               | Tensão de cedência à tracção do aço das armaduras passivas                                     |
| $g_j$                  | J-ésimo objectivo de projecto; restrições de desigualdade                                      |
| $g_j(x_1, \dots, x_n)$ | Vector das restrições para uma solução descrita pelo vector das variáveis de decisão           |

---

|                   |   |
|-------------------|---|
| $h$               | Altura da peça da viga; altura da viga; altura da área comprimida   |
| $h_0$             | Espessura equivalente (em mm) da secção transversal de um elemento de betão                                     |
| $h_{CG}$          | Altura do centro geométrico da secção transversal de um elemento, medida a partir da face inferior da secção    |
| $h_k$             | Restrição de igualdade; k-ésimo   |
| $if_i$            | Inclinação dos banzos inferiores nas vigas tipo I   |
| $if_s$            | Inclinação dos banzos superiores nas vigas tipo I   |
| $inc$             | Inclinação das almas nas vigas tipo U   |
| $k_h$             | Coefficiente do modelo de retracção do EC2 e depende da espessura equivalente $h_0$                             |
| $lw$              | Comprimento das almas inclinadas nas secções transversais com peças de vigas tipo U                             |
| $n$               | Número de peças de viga pré-fabricadas; Número variáveis de decisão   |
| $n_{EFB}$         | Número de elementos finitos de betão armado   |
| $n_{EP}$          | Número de elementos finitos de cabo de pré-esforço  |
| $n_k$             | Número de peças de viga pré-fabricadas no vão k   |
| $n_{V\tilde{A}O}$ | Número de vãos com emprego de peças de vigas pré-fabricadas.  |
| $\underline{q}$   | Vector da carga distribuída   |
| $q_x$             | Valor da carga segundo a direcção x (coordenadas elementares)   |
| $q_y$             | Valor da carga segundo a direcção y (coordenadas elementares)   |
| $r(x)$            | Coordenada curvilínea   |
| $r_1, r_2, r_3$   | Valores das coordenadas curvilíneas do cabo de pré-esforço  |
| $s$               | Coefficiente que depende do tipo de cimento   |
| $t$               | Tempo   |
| $t_0$             | Idade do betão em dias no momento do carregamento   |
| $tf_i$            | Espessura/altura dos banzos inferiores  |
| $tf_s$            | Espessura/altura dos banzos superiores  |
| $tl_j$            | Altura da laje; espessura da laje do tabuleiro  |
| $t_s$             | Idade do betão em dias no inicio da retracção por secagem (ou expansão), normalmente corresponde ao fim da cura |
| $tw$              | Espessura das almas   |
| $u$               | Deslocamento segundo a direcção X (coordenadas globais)   |
| $\underline{u}$   | Vector de deslocamentos nodais  |
| $u'$              | Deslocamento axial de um elemento de cabo de pré-esforço  |
| $\underline{u}^e$ | Vector de deslocamentos nodais elementares  |
| $u_i^e$           | Deslocamento segundo a direcção x (coordenadas elementares)   |

---

---

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $v$                         | Deslocamento segundo a direcção Y (coordenadas globais)   |
| $v'$                        | Deslocamento transversal de um elemento de cabo de pré-esforço  |
| $v_i^e$                     | Deslocamento segundo a direcção y (coordenadas elementares)   |
| $(x_1, \dots, x_n)$         | Vector de $n$ variáveis de decisão  |
| $\underline{x}$             | Vector das variáveis de decisão   |
| $x$                         | Altura do eixo neutro   |
| $x(0)$                      | Ponto inicial de uma função objectivo   |
| $x, y, z$                   | Coordenadas elementares   |
| $y_c$                       | Distância da armadura inferior à resultante das forças no betão   |
| $y_{CP}$                    | Distância da armadura inferior ao centro plástico do betão  |
| $y_{fi}$                    | Distância do centro geométrico da secção à fibra inferior   |
| $y_{fs}$                    | Distância do centro geométrico da secção à fibra superior   |
| $y_{s2}$                    | Distância da armadura inferior à armadura superior  |
| <br>                        |   |
| Letras minúsculas gregas    |   |
| $\alpha$                    | Ângulo  |
| $\alpha_j$                  | Coefficiente da série de Dirichlet que aproxima a função de fluência  |
| $\beta_{as}(t)$             | Coefficiente do modelo de retracção do EC2 e depende da idade $t$ do betão em dias, traduzido a evolução da retracção autogénea com o tempo |
| $\beta_{ds}(t, t_s)$        | Coefficiente do modelo de retracção do EC2 e depende de $t$ , $t_s$ e $h_0$   |
| $\gamma$                    | Peso próprio  |
| $\delta$                    | Deslocamento  |
| $\delta_0$                  | Valor admissível do deslocamento  |
| $\varepsilon_{ca}$          | Extensão de retracção autogénea   |
| $\varepsilon_{ca}(t)$       | Extensão de retracção autogénea na idade $t$ em dias  |
| $\varepsilon_{ca}(\infty)$  | Extensão de retracção autogénea a tempo infinito  |
| $\varepsilon_{cd}$          | Extensão de retracção por secagem   |
| $\varepsilon_{cd}(t)$       | Extensão de retracção por secagem na idade $t$ em dias  |
| $\varepsilon_{cd,0}$        | Valor nominal da retracção livre por secagem  |
| $\varepsilon_{cn}(t)$       | Extensão no betão independente do estado de tensão aos $t$ dias de idade  |
| $\varepsilon_c(t)$          | Extensão no betão na idade $t$ dias   |
| $\varepsilon_{cs}(t, t_0)$  | Extensão no betão de origem mecânica aos $t$ dias de idade devido a uma tensão aplicada na idade $t_0$                                      |
| $\varepsilon_{s1}$          | Extensão na armadura superior   |
| $\varepsilon_{s2}$          | Extensão na armadura inferior   |
| $\underline{\varepsilon}^e$ | Vector elementar de deformações   |
| $\varepsilon_p$             | Extensão axial do elemento de cabo de pré-esforço   |

---

---

|                        |   |
|------------------------|---|
| $\theta^e$             | Deslocamento de rotação                                   |
| $\mu$                  | Valor reduzido do momento flector                         |
| $\mu_{Ed}$             | Valor reduzido do momento flector actuante                |
| $\mu_{Rd}$             | Valor reduzido do momento flector resistente              |
| $\nu$                  | Valor reduzido do esforço axial                           |
| $\nu_{Ed}$             | Valor reduzido do esforço axial actuante                  |
| $\nu_{Rd}$             | Valor reduzido do esforço axial resistente                |
| $\sigma$               | Tensão  |
| $\sigma_{adm}$         | Tensão admissível no elemento de betão estrutural         |
| $\sigma_c$             | Tensão no betão   |
| $\sigma_c(t_0)$        | Tensão no betão na idade $t_0$ dias                       |
| $\underline{\sigma}^e$ | Vector elementar de tensões                               |
| $\sigma_{fi}$          | Tensão normal na fibra inferior devido ao momento flector |
| $\sigma_{fs}$          | Tensão normal na fibra superior devido ao momento flector |
| $\sigma_n$             | Tensão normal devido ao esforço axial                     |
| $\sigma_p$             | Tensão no elemento de pré-esforço                         |
| $\tau$                 | Tensão tangencial   |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Enquadramento do tema

As pontes de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados são estruturas em que os seus componentes são produzidos nas dimensões pretendidas num local diferente ao da posição final de serviço. O betão armado pré-fabricado é reforçado com varões de aço convencional, com cabos de aço de alta resistência ou a combinação de ambos. Na pré-fabricação recorre-se à técnica de pré-esforço por pré-tensão onde os cabos de aço são pré-tensionados antes da aplicação do betão, e quando este atinge a resistência pretendida os cabos agora unidos ao betão são libertados das ancoragens, aplicando uma força de compressão na peça. Esta compressão permite melhorar o comportamento da peça, fazendo face à reduzida resistência à tracção do betão, possibilitando a execução de maiores vãos e suportar maiores cargas.

Esta solução é escolhida para um grande número de obras de arte no mundo, devido a diversas vantagens e à redução de custos em comparação com os elementos com betonagem *in-situ*. Estas vantagens têm origem em tempos de construção mais rápidos (produção de elementos em série; produção mais eficiente no local de fabrico especializado), melhor controlo de qualidade (mão-de-obra especializada; conhecimento e controlo das condições dos materiais usados mais exacto; minimização de betonagem em ambiente aquático) (Skanska, 2008). Contudo, existem aspectos que podem condicionar de forma negativa o projecto de estruturas pré-fabricadas como as tolerâncias geométricas para a montagem, a distância do estaleiro ao local de aplicação, acessos no local para os equipamentos de elevação e principalmente a massa dos elementos, visto que afecta os custos de transporte e de elevação. Outro aspecto relevante dos elementos pré-fabricados é o emprego de pré-esforço, o qual reduz significativamente a quantidade de betão e por consequência o peso de peça.

Historicamente em Portugal a construção de pontes, viadutos e passagens superiores com recurso a soluções pré-fabricadas não tem tido grande expressão. As empresas nacionais de pré-fabricação (ANIPB) identificam como os principais entraves à maior utilização de elementos pré-fabricados em Portugal os elementos com secções normalizadas, sem flexibilidade de alteração condicionando a solução global; deficiente disponibilização de informação aos agentes envolvidos na construção; formação nas universidades que leva ao desconhecimento técnico das soluções disponíveis; falta de legislação aplicável à pré-fabricação em betão; conhecimento limitado e menor atenção na fase de projecto sobre o comportamento das ligações (Saraiva, 2012).

---



O projecto de pontes de betão com elementos pré-fabricados reveste-se de alguma complexidade envolvendo a resolução de problemas como a definição do sistema estrutural, a escolha do tipo e número de elementos pré-fabricados a utilizar, a determinação das secções dos mesmos e o cálculo das forças de pré-esforço a aplicar considerando, não só a ponte completa, como também as várias etapas do processo construtivo. Tratando-se de estruturas de betão, os efeitos diferidos devem ser também tidos em conta. Deste modo, o uso de ferramentas de optimização estrutural surge como forma de tratar a elevada quantidade de informação associada ao projecto destas estruturas tendo em vista a redução de custos dos materiais e a obtenção de soluções económicas e estruturalmente eficientes.

## **1.2 Objectivos do trabalho**

Este trabalho, enquadrado na dissertação para Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Estruturas, tem como objectivo aplicar metodologias de optimização estrutural às pontes de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados bem como determinar o desempenho de vários algoritmos de optimização na resolução destes problemas.

É feito inicialmente um enquadramento e catalogando o conhecimento presente na área da pré-fabricação e optimização estrutural de pontes, apresentando uma visão geral do assunto que servirá como ponto de partida para a elaboração da dissertação.

Para concretizar os objectivos deste trabalho pretende-se desenvolver um modelo numérico tendo em vista a optimização de pontes de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados. Este modelo deve incluir um módulo destinado à análise estrutural e outro módulo destinado à optimização.

O módulo de análise estrutural deve ter em consideração todas as acções e efeitos relevantes para o projecto deste tipo de pontes, como por exemplo, a modelação dos efeitos diferidos do comportamento do betão e das fases construtivas e de transporte.

No módulo de optimização a função objectivo que se pretende minimizar deve contemplar os custos de um projecto real, os preços de material, mão-de-obra, transporte e aplicação. As variáveis de decisão a implementar devem definir os principais parâmetros caracterizadores do sistema estrutural. As restrições devem garantir que as soluções finais verificam as disposições normativas, bem como, critérios de exequibilidade construtiva.

Para minimizar o valor do custo respeitando as restrições é necessário implementar um algoritmo de optimização que permita resolver estes problemas de optimização de forma

eficiente. Pretende-se implementar vários algoritmos de optimização, a fim de comparar a aptidão de cada um destes para resolver o problema de optimização referido.

Para ilustrar as capacidades do modelo numérico a desenvolver pretende-se aplicá-lo à optimização de uma ponte rodoviária de dimensões reais executada com elementos pré-fabricados de betão.

### **1.3 Organização do trabalho**

A presente dissertação encontra-se organizada em seis capítulos.

No primeiro capítulo é feita uma introdução acerca das pontes de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados, contendo uma descrição desta solução construtiva e o seu enquadramento e o da aplicação de técnicas de optimização estrutural.

No segundo capítulo é exposta a evolução histórica do desenvolvimento e aplicação das técnicas de pré-fabricação em pontes. De seguida são tratados os aspectos gerais de concepção e projecto deste tipo de estruturas. Conclui-se com a referência a diversos trabalhos desenvolvidos na área de optimização de estruturas de betão armado e em particular de pontes pré-fabricadas.

O Capítulo 3 é constituído pela descrição do módulo de análise estrutural que integra o programa desenvolvido. Este módulo tem por base inicial o desenvolvido por Martins (2015) e é detalhada a formulação do método dos elementos finitos. Ao longo do texto são descritas a modelação numérica dos materiais e das secções transversais utilizadas.

O Capítulo 4 inicia-se com o enquadramento das metodologias de optimização e a justificação para a escolha da optimização global, com maior foco no algoritmo genético. De seguida são descritos os vários aspectos do módulo de optimização desenvolvido, nomeadamente as variáveis de decisão consideradas, os objectivos de projecto implementados e a correspondente função objectivo.

No Capítulo 5 são feitos dois modelos estruturais com o objectivo de demonstrar as capacidades do programa desenvolvido, bem como atestar as diferenças entre os tipos de secção transversal e entre os tipos de algoritmos.

No Capítulo 6 apresentam-se as conclusões e recomendações para estudos futuros.

Conclui-se com a listagem de referências bibliográficas utilizadas para a elaboração da presente dissertação.

## 2 ESTADO DA ARTE

### 2.1 Introdução

No presente capítulo apresenta-se uma revisão bibliográfica acerca da temática deste trabalho, ou seja, a optimização de pontes de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados. Inicialmente é apresentada uma evolução histórica do desenvolvimento e aplicação das técnicas de pré-fabricação em pontes. De seguida são tratados os aspectos gerais de concepção e projecto deste tipo de estruturas. Conclui-se com a referência a diversos trabalhos desenvolvidos na área de optimização de estruturas de betão armado e em particular de pontes pré-fabricadas.

### 2.2 Evolução histórica

A aplicação e a evolução de pontes de elementos pré-fabricados têm uma longa história, com os primeiros projectos datados desde os começos do desenvolvimento do betão pré-fabricado. Sendo possível encontrar exemplos deste tipo de solução, datados dos anos 30 do século XX, na maior parte dos países desenvolvidos da época. Desses exemplos são maioritariamente em pontes de pequeno vão e limitados a vigas de secção transversal pouco esbeltas e a pequenas obras (Cunha, 2010).

Nos anos 50 e 60 do século XX começou a existir uma maior área de aplicação deste tipo de soluções devido a dois factores principais. O advento da produção industrial de cabos de aço de pré-esforço de grande comprimento usados nas fábricas de pré-fabricação permitiu o desenvolvimento de elementos maiores e mais esbeltos. Sendo o outro factor o grande aumento do tráfego automóvel no pós-guerra e construção de vias rápidas, obrigou à necessidade de um sistema rápido, económico e com o menor impacto no tráfego existente, para a construção de um elevado número de pontes num curto intervalo de tempo (FIB, 2004).

As secções transversais evoluíram ao longo do tempo. Inicialmente os tabuleiros pré-fabricados eram soluções simples, compostas por um conjunto de vigas rectangulares colocadas lado a lado e pós-esforçadas transversalmente, obtendo-se uma estrutura equivalente a uma laje maciça. Posteriormente utilizaram-se vigas I ou T, com laje superior, e vigas em U para formar secções em caixão, sendo actualmente as soluções mais correntes na construção de pontes de elementos pré-fabricados. Mais recentemente têm-se assistido à construção de soluções mistas aço-betão, vãos compostos por um único elemento pré-fabricado e a construção por segmentos (Cunha, 2010).

Relativamente ao sistema estrutural longitudinal final, os vãos simplesmente apoiados têm sido substituídos por soluções de continuidade sobre os apoios. Esta evolução deveu-se a motivos relacionados com a durabilidade, que é melhorada através da supressão das juntas, uma vez que estas potenciam a aceleração da degradação especialmente devido a infiltrações de água. Para além disso, estas soluções apresentam eficiência estrutural e económica, pois permitem a adopção de esbeltezas maiores, uma melhor utilização dos materiais, um menor número de aparelhos de apoio e ainda melhor comportamento à acção sísmica (Cunha, 2010).

Em Portugal a utilização de vigas pré-fabricadas para a execução da superestrutura encontra-se em ascensão (Viana, 2012), onde se verifica a maior aplicação em obras em zonas urbanas, sobre linhas férreas e em geral locais de difícil colocação de cimbres (Camara, 2001).



Figura 2.1- Evolução da utilização de pré-fabricação em Portugal (Saraiva, 2012).

## 2.3 Conceção estrutural

Na construção de uma estrutura recorrendo a vigas pré-fabricadas existe uma série de decisões que têm de ser tomadas.

A resposta da estrutura depende da rigidez relativa dos elementos resistentes (tabuleiro, vigas e pilares) e do seu arranjo. Assim apresentam-se os aspectos mais relevantes da concepção estrutural deste tipo de estruturas e a forma como influenciam o comportamento da mesma.

### 2.3.1 Configuração transversal

A escolha da secção transversal da viga é uma das decisões iniciais a tomar na concepção de pontes pré-fabricadas e tem de ter em consideração factores como os processos de fabrico;

procedimento de transporte e montagem; método de pré-esforço empregue (pré ou pós-tensão) e o tipo de laje do tabuleiro.

Actualmente as soluções mais correntes para as secções transversais dos elementos de viga são as secções de tipo “I” ou tipo “U”, sendo na maior parte dos casos usadas em vãos simplesmente apoiados, normalmente suportados por apoios de borracha laminada. Esta configuração é muito simples e pouco sensível aos assentamentos nos apoios. No entanto se existirem vários vãos, poderá ser mais económico a introdução de algum tipo de continuidade entre os elementos (FIB, 2000).

As obras de arte em que é utilizada esta configuração apresentam tipicamente vãos até 45 m, visto que depois de esse limite as vantagens económicas perdem terreno em relação a outro tipo de soluções. Nas figuras seguintes são apresentados alguns tipos de vigas pré-fabricadas (Figura 2.2) e uma visão geral do campo de aplicação das secções transversais, em função do comprimento de vão (Figura 2.3).

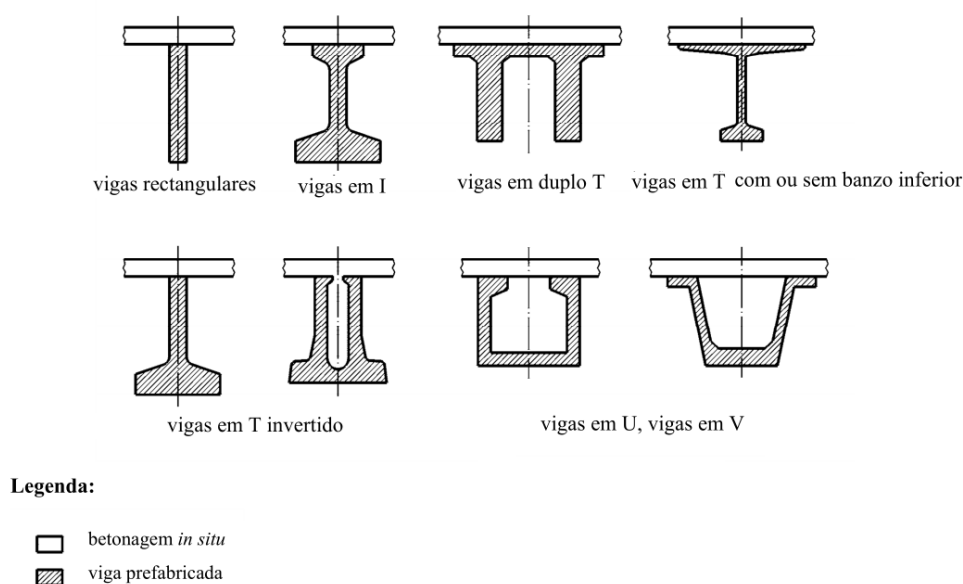


Figura 2.2- Exemplos de secções transversais pré-fabricadas sob betonagem *in situ* (NP EN 15050, 2008).

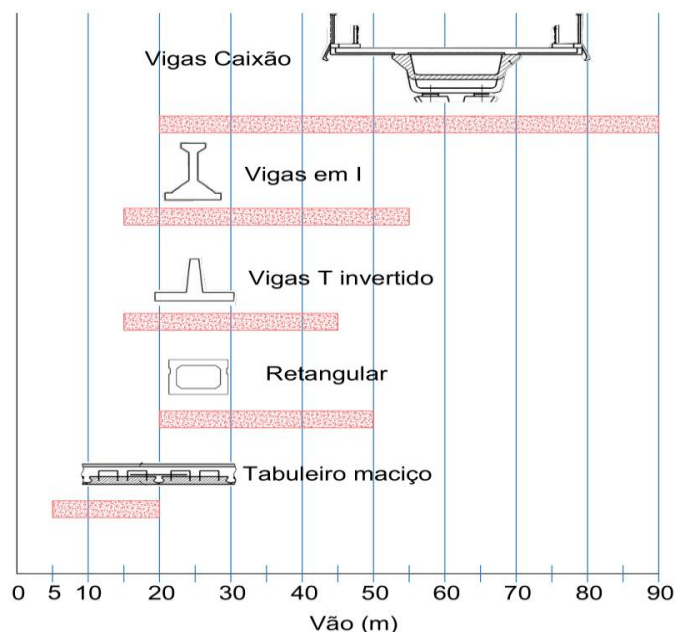


Figura 2.3- Visão geral do campo de aplicação dos tipos de secções transversais

### a) Lajes maciças

Como definido na norma NP EN 15050 (2008) as pontes com este tipo de configuração transversal definem-se por tabuleiros constituídos por lajes pré-fabricadas em toda a sua extensão, tendo cavilhas de esforço transverso longitudinais, completados por betonagem *in situ* (Figura 2.4) ou por lajes pré-fabricadas esforçadas transversalmente.

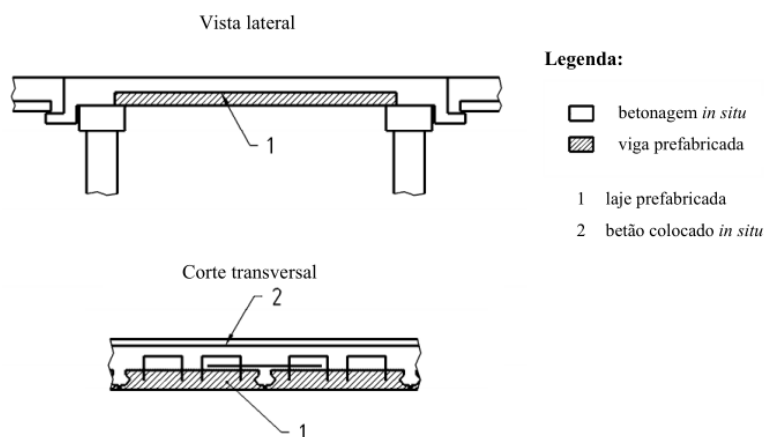


Figura 2.4- Ponte em laje maciça (NP EN 15050, 2008).

Este tipo de solução é usado em passagens inferiores em túnel, tabuleiros de pequenas pontes. A utilização desta configuração resulta em estruturas pesadas, mas muito fáceis de construir, e

é válida para pequenos vãos, normalmente até 13 m, apesar de existirem casos pontuais com vãos maiores.

Mais recentemente foram desenvolvidas soluções usadas em Espanha, no Reino Unido e nos Países Baixos. Nestas a laje pré-fabricada é composta por perfis em I ou T invertidos colocados lado a lado e que são reforçados com armadura e preenchidos com betão *in situ*. A solução resulta em pontes com muito boa durabilidade, mas pesadas (FIB, 2004).

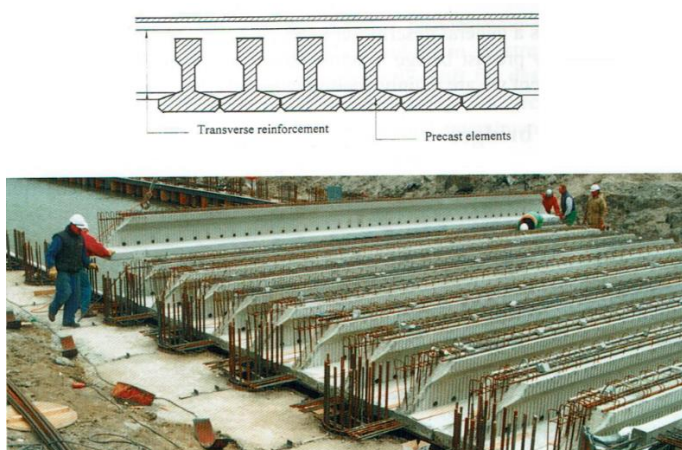


Figura 2.5- Ponte pré-fabricada de laje maciça antes da betonagem, Spanbeton BV, Países baixos. (FIB, 2004)

### b) Vigas de secção aberta pré-fabricadas

A utilização de vigas de parede aberta constitui a solução principal para pontes pré-fabricadas construídas desde os anos 60 do século XX, especialmente nos Estados Unidos, sendo provavelmente o tipo de ponte mais comum no mundo (Roddenberry e Servos, 2012). O tabuleiro destas pontes é constituído por várias vigas em I ou T invertido, com espaçamento definido. Após a colocação das vigas nos apoios as ligações nas extremidades dos vãos e as lajes do tabuleiro são executadas com betão armado *in situ*.

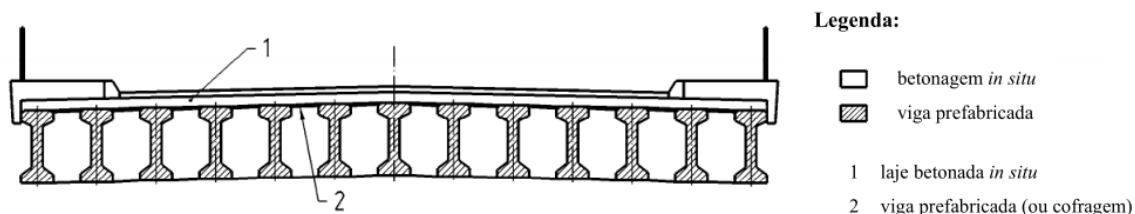


Figura 2.6 – Tabuleiro em vigas I pré-fabricadas com laje betonada *in situ* (NP EN 15050, 2008)

Este sistema com vigas em T invertido é adequado para vãos entre os 15 e 45 m e possibilita o inferior do tabuleiro fechado, enquanto a utilização de vigas de secção I permite vãos entre 15 e 55 m (FIB, 2004).



Figura 2.7 – Tabuleiro em vigas I do viaduto da Ribeira da Calvaria, IC2 (Indubel,2010)

### c) Vigas caixão

Esta solução consiste no uso de vigas pré-esforçadas de secção fechada, sendo rectangulares ou outro tipo de secção tubular. É comum a utilização de secção em U que é fechada após a sua colocação no local final. O fecho é feito com recurso a pré-lajes ou a lajes de betão armado executadas *in situ*.

Existem duas configurações que usam este tipo de vigas. A primeira, da mesma forma que para as vigas de secção aberta, o tabuleiro é executado com as vigas de secção fechada, ou fechada *in situ*, lado a lado, encostadas ou a pequena distância, chamada de grelha múltipla (NP EN 15050, 2008).

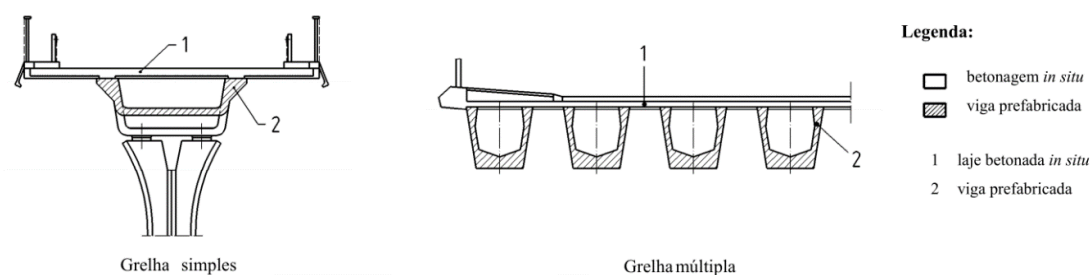


Figura 2.8 – Configuração de uma ou mais vigas pré-fabricadas em U (NP EN 15050, 2008)



Na segunda são usadas grandes vigas trapezoidais com a laje do tabuleiro executada *in situ*. Geralmente as pontes que usam estas vigas são projectadas como estruturas contínuas com vãos até 90 m. No entanto, por razões de logística e transporte a dimensão de uma única viga está limitado a cerca de 45 m. Quando são necessários vãos maiores, estes são constituídos por várias peças de viga ligadas através da aplicação de pós-tensão.

Este segundo método construtivo é relativamente recente, tendo sido desenvolvido e aplicado principalmente em Espanha. Apesar de este ser dos tipos mais complexos de pontes de elementos pré-fabricados permite vãos superiores em comparação a outro tipo de configuração transversal, em pontes contínuas e mesmo em pontes isostáticas (FIB, 2004).



Figura 2.9 – Tabuleiro com vigas U no viaduto da A10 sobre a A1 no Carregado (Pavicentro, 2006)

### 2.3.2 Configuração longitudinal

#### a) Pontes simplesmente apoiadas – Tabuleiros isostáticos

No primeiro período da construção de pontes pré-fabricadas era considerado lógico projectar os tabuleiros das pontes como estruturas simplesmente apoiadas com libertação de esforços transversos nos vãos intermédios e nas extremidades inicial/final da ponte. As vigas eram normalmente posicionadas em apoios individuais, sendo dimensionados para permitir as deformações devido à acção térmica, aos assentamentos, à retracção e à fluência. Esta configuração também permite deslocamentos independentes entre secções do tabuleiro (FIB, 2004).

Este modelo estrutural é conhecido por apresentar uma boa durabilidade, pelo que ainda existem milhares de pontes que continuam a ter um desempenho satisfatório.

As principais vantagens são a facilidade e rapidez de execução e a simplicidade de cálculo. Devido à natureza isostática que leva às deformações que ocorram na estrutura não alterarem a distribuição dos momentos flectores (Cunha, 2010).

Apesar de as vigas pré-fabricadas terem demonstrado desempenhos excelentes a longo prazo existem desvantagens inerentes aos sistemas de tabuleiros simplesmente apoiados. Os aparelhos de apoio, que são necessários em cada extremidade, são dispendiosos e a existência de juntas de dilatação prejudica o conforto na circulação. Estas afectam negativamente a durabilidade e acrescem as despesas de manutenção (Viana, 2012).

Para contrariar estes efeitos é necessário em projecto prever e detalhar correctamente os sistemas de apoio dotando-os de uma galeria de acesso para inspecção e manutenção destes, assim como, a implementação de sistemas de drenagem nos mesmos. Posteriormente, para fazer face a estes problemas desenvolveram-se novas soluções como a de tabuleiro contínuo ou a ponte integral (FIB, 2004). As soluções de continuidade para o tabuleiro encontram-se abordadas no Anexo D da NP EN 15050 (2008).

#### b) Pontes simplesmente apoiadas com laje contínua

Nesta solução a continuidade parcial do tabuleiro é obtida por realizar apenas a laje contínua, mantendo as vigas pré-fabricadas simplesmente apoiadas. Este tipo de continuidade encontra-se referido na norma com os tipos 4, 5 e 6.

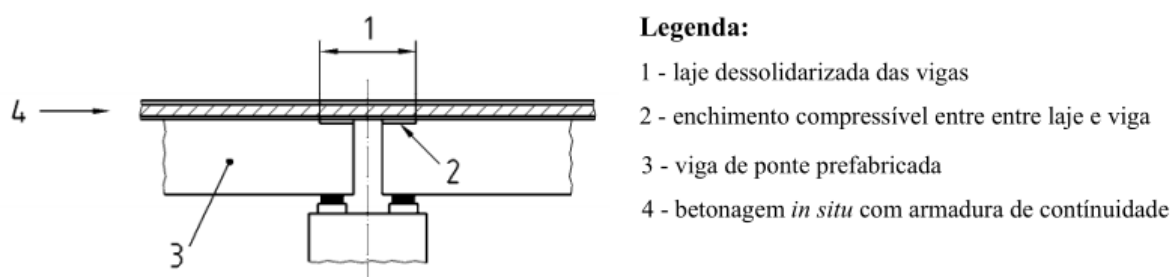


Figura 2.10 – Detalhe de continuidade tipo 4, lajes separadas contínuas (NP EN 15050, 2008)

Geralmente este sistema é elaborado primeiro através da montagem das vigas pré-fabricadas nos apoios definitivos independentes, sendo de seguida feita a betonagem *in situ* da laje. Apesar de esta ligação tornar a superfície do tabuleiro contínuo, o sistema estrutural da ponte continua a funcionar como vários vãos simplesmente apoiados, devido à pouca rigidez da laje de continuidade que não resiste significativamente à flexão negativa.

Com a supressão das juntas de dilatação é alcançada a melhoria do conforto para o tráfego rodoviário- Esta solução apresenta ainda simplicidade de cálculo, pois a estrutura tem comportamento predominantemente isostático e há uma ligeira melhoria da durabilidade, pela estanquidade da solução (Cunha, 2010).

Em termos de durabilidade é preciso manutenção na membrana de impermeabilização da laje e a lajeta de continuidade é susceptível a fissuração (Sousa, 2004). Outras desvantagens incluem na aparência estética, a ausência da transmissão de forças verticais entre secções do tabuleiro (FIB, 2004) e o fraco comportamento sísmico.

### c) Pontes contínuas – Tabuleiros com ligação sobre os apoios

Trata-se de uma solução para pontes de vários vãos com continuidade integral entre cada vão adjacente que é assegurada por integração das vigas pré-fabricadas num encastramento de betão armado no topo dos pilares. Estas ligações estão descritas como tipo 1 e 2 no Anexo D da NP EN 15050 (2008).

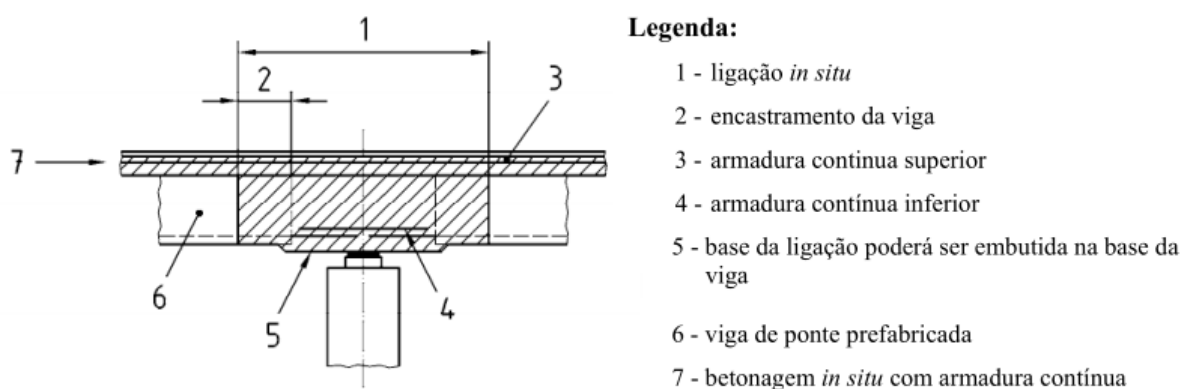


Figura 2.11 – Detalhe da continuidade tipo 1, Ligação alargada *in situ* (NP EN 15050, 2008)

Sendo este o sistema mais utilizado actualmente, consegue superar muitos dos problemas que ocorrem nos tabuleiros isostáticos e de continuidade parcial especialmente em termos de durabilidade. Apresenta também benefícios ao nível da redistribuição de esforços, e um melhor comportamento sísmico. Caracteriza-se também por vantagens económicas em virtude da redução da quantidade de materiais e despesas de manutenção. Tem-se ainda vantagens a nível de conforto e estéticas, pela maior esbelteza e maior uniformidade do alçado da obra

No entanto, apresenta também desvantagens nos tempos de execução, especialmente se for utilizado pré-esforço de continuidade. Tem-se maior complexidade de cálculo devido aos

esforços adicionais que se têm na estrutura hiperstática em virtude do impedimento das deformações do tabuleiro (Sousa, 2004).



Figura 2.12 – Ponte contínua com vigas pré-fabricadas rectangulares (FIB, 2004)

### 2.3.3 Outros tipos de pontes de elementos pré-fabricados

Outros tipo de pontes de elementos pré-fabricados incluem: pontes de viga caixão curvas; pontes em calha; pontes atirantadas e pontes em arco

As pontes de vigas caixão curvas são semelhantes às vigas caixão normais. Para ser obtida a forma curva final as vigas são betonadas em moldes especiais, que normalmente não é possível a aplicação do pré-esforço por pré-tensionamento, sendo substituído por pós-tensionamento. Esta solução teve origem nos meados dos anos 90 do século XX, com o objectivo de obter soluções pré-fabricadas com melhor valor estético. A rigidez à torção das vigas caixão apresenta-se adequada a pontes com curvatura horizontal, e com o raio de curvatura ente os 200 m e 100 m (FIB, 2004).

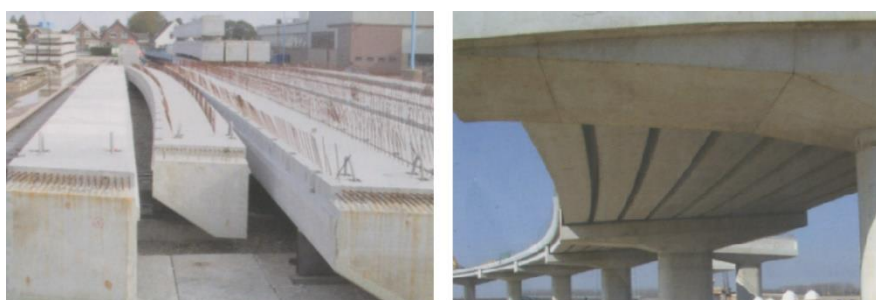


Figura 2.13 – Vigas caixão curvas e exemplo de aplicação num viaduto, Spanbeton BV, Países Baixos (FIB, 2004)

As pontes em calha são um tipo relativamente recente de tabuleiro, sendo este caracterizado por secções esbeltas e com elevado momento de inércia. Foram desenvolvidas principalmente para pontes ferroviárias de alta velocidade. Os elementos de calha são estruturas mistas aço-betão, com perfis de aço nas laterais e com os cabos de pré-esforço na parte inferior da peça.

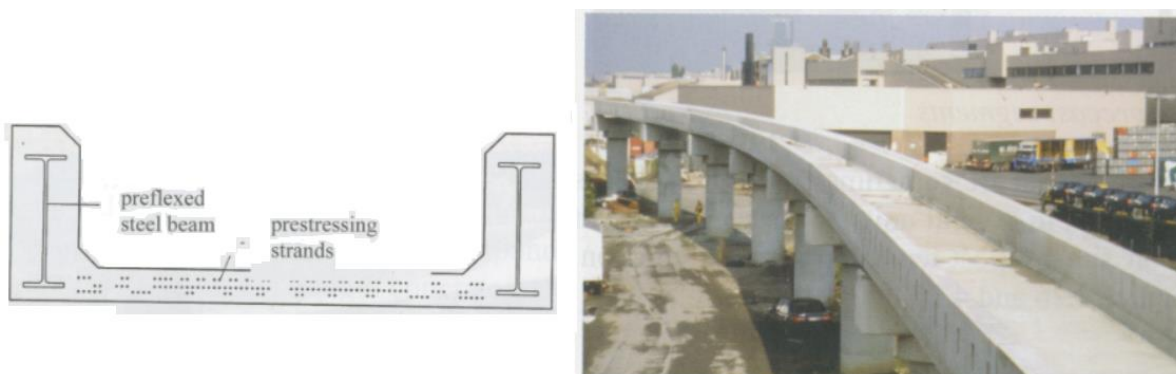


Figura 2.14 – Elementos de calha numa ponte de caminho-de-ferro, Ergon, Bélgica (FIB, 2004)

### 2.3.4 Pré-esforço

Os elementos pré-fabricados de vigas podem utilizar um sistema de pré-tensionamento, ou de pós-tensão, ou uma combinação de ambos.

A pré-tensão é o sistema onde as armaduras são tensionadas antes da betonagem, sendo a transmissão de forças feita por aderência. No momento em que o betão atinge a presa necessária são libertadas as armaduras das amarrações. Sendo esta a metodologia, demonstrada na Figura 2.15, característica da produção fabril de peças pré-fabricadas (Appleton, 2013b).

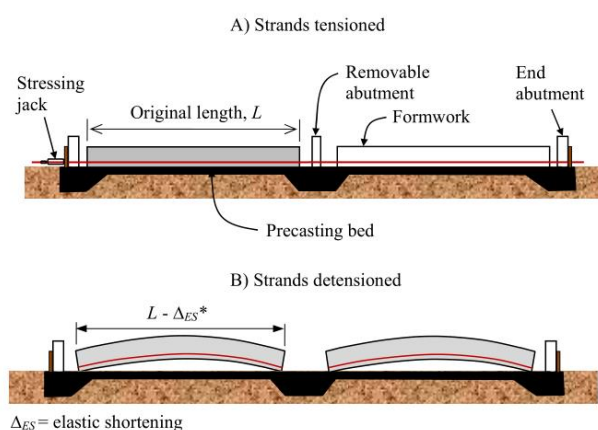


Figura 2.15 – Sistema de pré-tensão (Caltrans, 2015)

Um sistema de pós-tensão tem a armadura activa de pré-esforço em cabos, que são tensionados depois de o betão ganhar presa, ficando a transmissão de forças a verificar-se nas ancoragens e ao longo das armaduras.

O pré-tensionamento, onde os cabos de pré-esforço se encontram embutidos directamente no elemento de betão armado, providencia uma melhor protecção do aço contra a corrosão, em comparação a um sistema de pós-tensão (Appleton, 2013b).

### 2.3.5 Ligações

Existem três grupos principais de ligações na construção de pontes de elementos pré-fabricados: ligação entre a viga pré-fabricada e a viga de diafragma; a ligação entre a viga pré-fabricada e a laje; e as ligações nos apoios.

Como nas extremidades dos elementos de viga habitualmente existe grande quantidade de armadura, a conexão com a viga de diafragma é feita com o encaixe de varões ou outro sistema de ancoramento entre ambas as peças.



Figura 2.16 – Colocação da viga de diafragma na ponte de Redfish Bay, Texas, Estados Unidos, 1994 (Roddenberry e Servos, 2012)

A interface de corte entre as vigas pré-fabricadas e a laje betonada *in situ* é suportada por armadura de reforço que se encontra saliente do topo da viga.

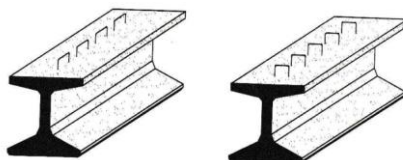


Figura 2.17 – Esquema da armadura de reforço para o esforço de corte entre as vigas e a laje do tabuleiro (FIB, 2004)

As ligações nos apoios entre elementos do tabuleiro têm como objectivo estabelecer continuidade estrutural. A solução mais simples para se fazer a continuidade no tabuleiro é com recurso a armaduras ordinárias dispostas na laje sobre os apoios, betonando o espaço entre vigas formando uma carlinga (Cunha, 2010).

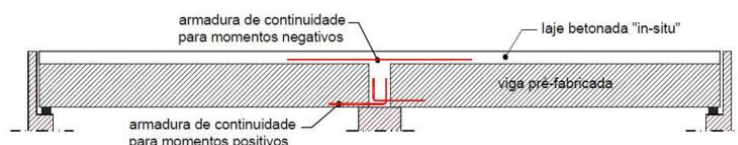


Figura 2.18 – Continuidade estrutural através de armaduras ordinárias (Sousa, 2004)

Outra forma de ser obtida a continuidade ao longo do tabuleiro é com o recurso a armaduras de pré-esforço, por via de pós-tensionamento, aderente ou não aderente. O uso de pré-esforço para garantir a ligação contínua entre elementos adjacentes permite vencer vãos maiores em relação a apenas armadura passiva. O pré-esforço é empregue para formar a continuidade através de ancoragens, onde o cabo atravessa todo o comprimento do tabuleiro, ou no local da laje sobre os apoios (Cunha, 2010).

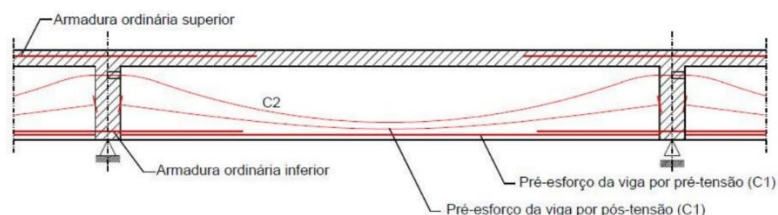


Figura 2.19 – Pré-esforço aplicado ao longo de todo o comprimento do tabuleiro (Sousa, 2004)

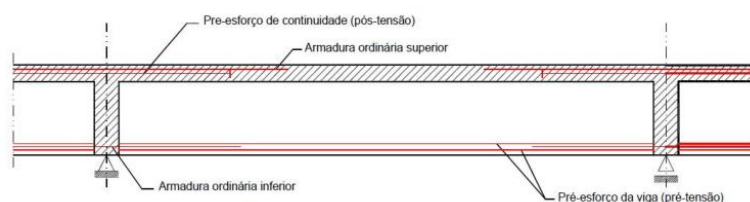


Figura 2.20 – Pré-esforço aplicado na laje sobre os apoios (Sousa, 2004)

## 2.4 Pré-fabricação, armazenamento e transporte

A pré-fabricação de vigas pode ser efectuada numa empresa de pré-fabricados ou num estaleiro de pré-fabricação junto ao local da obra onde serão aplicadas. A escolha entre cada uma destas opções pode estar condicionada por factores como a distância a percorrer, o comprimento das peças, o número de peças a transportar, o tipo de equipamento elevatório disponível na empresa construtora e as características do local da obra.

O fabrico numa empresa especializada tem o inconveniente de não ser viável para grandes distâncias devido ao comprimento e peso das peças a transportar. O fabrico das vigas no local da obra tem a vantagem de não haver necessidade de transporte das peças para o local da obra, contudo esta escolha obriga a um estaleiro de maiores dimensões, que pode ser inexecutável por falta de espaço ou devido a condicionamentos do terreno no local da obra (Viana, 2012).

Os elementos industriais de betão armado pré-fabricado são produzidos em instalações permanentes sob um sistema de controlo de qualidade. Os elementos são na generalidade betonados no molde sobre uma linha de cabos de pré-esforço. Mas para os elementos de grandes dimensões e grande massa, como as vigas caixão, outras técnicas de pré-esforço poderão ser usadas. Os moldes são normalmente de aço, mas em alguns países como a Bélgica utilizam-se moldes compostos por peças de aço modulares que em conjunto podem ser combinadas para criar qualquer tipo de secção padronizada (FIB, 2004).



Figura 2.21 – Linha de fabricação de elementos de viga, Spanbeton BV (FIB, 2004)

O transporte de peças pesadas e de grande comprimento poderá requerer um tipo de camião especial e apenas poderá ser efectuado em itinerários específicos, como demonstra a Figura 2.22.



Figura 2.22 – Transporte especial de uma viga com 210 toneladas, Ergon, Bélgica (FIB, 2004)



O trabalho de estaleiro passa pela elaboração e betonagem *in situ* dos componentes estruturais adicionais necessários como vigas de diafragma e ligações de continuidade.



Figura 2.23 – Colocação de tábuas de cofragem para betonagem da laje *in situ*, Ergon, Bélgica (FIB, 2004)

## 2.5 Projecto de pontes de betão com elementos pré-fabricados

O dimensionamento de estruturas de betão com elementos pré-fabricados deve seguir os critérios gerais de obras totalmente betonadas *in situ* (Camara, 2006). Estes critérios estão definidos no Eurocódigo 2, parte 1-1 (EC2-1-1) (NP EN 1992-1-1, 2010).

Da mesma forma, o projecto de pontes com elementos pré-fabricados é baseado nos mesmos procedimentos e verificações normativas existentes para as pontes em geral. O regulamento específico para o projecto de pontes de betão é o Eurocódigo 2, parte 2 (EC2-2) (EN 1992-2, 2005). A utilização de elementos pré-fabricados implica ainda a verificação de alguns critérios adicionais.

No projecto de estruturas de pontes de betão tanto para a situação de uso de betão armado *in situ* como no da pré-fabricação os efeitos diferidos tomam relevância que tem de ser acautelada. Os efeitos diferidos mais relevantes são a retracção, a fluência, e a relaxação das armaduras pré-esforçadas. No EC2-2 encontram-se indicações adicionais ao EC2-1-1 para o cálculo destes efeitos.

No caso particular das pontes pré-fabricadas devem ser tidos em consideração aspectos adicionais no dimensionamento dos diversos elementos.

Deste modo, devem ser tidas em conta as acções durante todo o processo construtivo, nomeadamente, durante as fases de fabrico, armazenamento, transporte, elevação para os apoios simples, elaboração do tabuleiro, forças hiperestáticas a quando da continuidade do tabuleiro;

pós-tensionamento (NP EN 15050, 2008). As acções específicas o transporte e execução encontram-se regulamentadas no Eurocódigo 1 parte 1-6 (EC1-1-6) (EN 1991-1-6, 2005).

As zonas de ligação devem ser analisadas e dimensionadas com particular atenção (Camara, 2001), incluindo a ligação entre betões de idades diferentes que afecta a aderência entre duas peças e a transmissão de forças entre os elementos pré-fabricados e o preenchimento de betão *in situ*. As ligações betão-betão estão presentes nas juntas de betonagem em elementos pré-fabricados com as partes betonadas *in situ*. Esta ligação depende da integridade, textura e teor de humidade do substrato. Este factor quando não é acondicionado adequadamente pode originar na peça final problemas de rigidez e retracção diferencial (Júlio et al., 2004).

Os procedimentos normativos de inspecção e controlo de qualidade, que asseguram com maior precisão as características mecânicas do aço e do betão, levam alguns países a permitir a utilização de margens de segurança mais baixas (adopção de valores menores aos da norma para os coeficientes parciais relativos ao aço e ao betão, respectivamente  $\gamma_s$  e  $\gamma_c$ ) (FIB, 2004).

Tal como para os outros parâmetros os princípios regulamentares de projecto nas pontes para as acções sísmicas não são significativamente diferentes entre as pontes de elementos pré-fabricados e as pontes betonadas *in situ*. O factor mais importante nas pontes pré-fabricadas são as ligações entre elementos estruturais, ou seja, as extremidades das vigas e as lajes e lajetas de continuidade. Também devem ser tidas em atenção as conexões de elementos arquitectónicos como os blocos de betão usados nas laterais do tabuleiro. São recomendados vários princípios para um projecto seguro para acção sísmica, em particular para a largura dos apoios e concepção de batentes.

## 2.6 Optimização

### 2.6.1 Optimização de estruturas de betão armado

Inicialmente a investigação de optimização de estruturas restringia-se a estruturas metálicas. Sendo observado mais recentemente a aplicação de técnicas de optimização ao projecto de estruturas de betão armado.

Em termos gerais a resolução de um problema de optimização de estruturas pode ser levada a cabo por métodos de pesquisa directa ou métodos heurísticos. Os métodos de pesquisa directa constituem a abordagem tradicional e são baseados no cálculo de gradientes. A pesquisa da solução óptima é efectuada através de um processo iterativo utilizando algoritmos de programação matemática. Estes algoritmos podem distinguir-se segundo o tipo de função objectivo, linear ou não-linear, a existência ou não de restrições, se se destinam a funções com

uma ou várias variáveis de decisão e se estas são de natureza contínua ou discreta (Martins, 2015). Os métodos heurísticos, cuja utilização tem vindo a crescer recentemente em virtude do desenvolvimento das capacidades computacionais, consistem em algoritmos simples, mas que exigem um elevado custo computacional, na medida em que requerem um grande número de iterações nas quais a função objectivo é avaliada e as restrições de projecto são verificadas. Estes métodos que podem utilizar caminhos aleatórios ou algoritmos de base biológica, tais como, algoritmos genéticos, algoritmos evolutivos, enxame de partículas, colónia de formigas, fornecem a melhor solução até então encontrada, não garantindo o óptimo global (Martins, 2015).

No artigo de Sarma e Adeli (1998) é feita uma revisão bibliográfica dos artigos na temática de optimização de estruturas de betão armado na perspectiva da minimização do custo. Nesta revisão dos trabalhos publicados até então inclui-se a optimização de elementos de viga, lajes, pilares, pórticos, pontes e outros, apresentando-se um sumário das conclusões mais relevantes. Os autores concluem que existe uma falta de aplicação de técnicas de optimização estrutural a estruturas tridimensionais, especialmente em estruturas com grande número de elementos que podem ser muito beneficiadas economicamente. Para além disso, na optimização deverão ser considerados os custos de ciclo de vida da estrutura e não só na fase de construção.

Em Guerra e Kiouisis (2006) foi desenvolvida, com recurso ao MATLAB, uma formulação para a optimização de estruturas porticadas de betão armado usando um algoritmo de programação não-linear de modo a obter soluções de custo mínimo, considerando os custos de materiais e mão-de-obra e que satisfizessem os requisitos da norma ACI 2005. No final os autores concluem que o MATLAB demonstrou positivamente capacidade de implementar o algoritmo sequencial quadrático na optimização de estruturas de betão armado.

No artigo de Alreshaid et al. (2004) foi elaborada a optimização do custo de elementos de betão armado, onde se teve especial atenção às taxas de armadura com um estudo paramétrico do custo do aço. No final são recomendadas taxas de armadura óptimas para vigas e pilares tendo em conta as verificações requeridas no Kuwait e na norma ACI 1999.

Em Martins (2015) para o projecto de pontes atirantadas de betão foi desenvolvido um programa computacional em MATLAB, onde estava incluído um módulo de análise estrutural baseado no método dos elementos finitos e um módulo de análise de sensibilidades e optimização. No módulo de análise estrutural foram considerados os efeitos diferidos do betão, as fases construtivas e os efeitos geometricamente não-lineares. A análise de sensibilidades foi efectuada recorrendo ao método analítico discreto directo. O autor formulou o projecto de pontes atirantadas de betão como um problema de optimização multi-objectivo, em que se

procura a minimização do custo e a verificação de deslocamentos e tensões de acordo com os limites estabelecidos nos Eurocódigos. O programa de computador desenvolvido foi aplicado à resolução de diversos exemplos tendo-se estudado o problema da determinação das forças de pré-esforço a aplicar aos tirantes e o problema da minimização do custo da estrutura considerando como variáveis de decisão as forças de pré-esforço e as dimensões das secções transversais dos diversos elementos da estrutura.

### **2.6.2 Optimização de pontes de elementos pré-fabricados de betão armado pré-esforçado**

Um dos primeiros estudos dentro da temática de optimização de pontes de elementos pré-fabricados de betão armado pré-esforçado foi realizado por Lounis e Cohn (1993) no Canadá onde, dentro da realidade da América do Norte, este tipo de ponte já possuía décadas de aplicação. Numa primeira parte do trabalho em vez de tomarem como variáveis de decisão as dimensões geométricas das secções transversais das vigas padronizadas, tiveram como objectivo optimizar a configuração estrutural da ponte, tanto a transversal (número, tipo e espaçamento de vigas) como a configuração longitudinal (número de vão, tipo de continuidade). No final do trabalho para cada tipo de configuração estrutural, que cumprisse as verificações das normas da *American Association of State Highway and Transportation Officials* (AASHTO) e da *Ontario Highway Bridge Design Code* (OHBCD), e tendo em conta a função objectivo para minimizar o custo, foram criados quadros e tabelas dos campos de aplicação de cada tipo em função do vão com o intuito de auxiliar o pré-dimensionamento deste tipo de pontes.

Em relação aos métodos heurísticos, Aydın e Ayvaz (2009) utilizaram um programa em Visual Basic para aplicação de um algoritmo genético na optimização da secção transversal do tabuleiro da ponte, utilizando vigas tipo I standard Americanas. Este trabalho teve como função objectivo minimizar o preço dos elementos de vigas e como variáveis de decisão as dimensões de secção transversal das vigas, área de armaduras activas e o número de vigas no tabuleiro. Os esforços e deslocamentos foram verificados pela norma AASHTO e para as cargas a aplicar. No final o programa de algoritmo genético deu soluções até 28% mais económicas, em comparação com o dimensionamento tradicional. Os autores consideram esta metodologia mais eficiente devido à inclusão do número de vigas do tabuleiro e uso apenas de variáveis discretas.

Mais recentemente ainda dentro dos métodos heurísticos têm sido desenvolvidos vários trabalhos dentro da optimização de pontes de elementos pré-fabricados, mais focado em sistemas de vigas caixão tipo U numa configuração de grelha simples por uma equipa espanhola. Onde se incluem os seguintes artigos.

No artigo de Martí e González-Vidosa (2010), foi feita a comparação entre dois métodos heurísticos no projecto para uma ponte pedonal. Sendo a função objectivo minorar o custo cumprindo as regulamentações da norma espanhola IAP e com variáveis de decisão de geometria e quantidade de betão e de armadura passiva e activa da secção da viga tipo U. Esses dois métodos heurísticos foram *simulated annealing* e *threshold accepting*. É realizado um estudo paramétrico em relação ao comprimento de vão e feito o tratamento estatístico de médias, desvios padrão, mínimos de custo e tempos de computação das soluções obtidas por estes algoritmos de pesquisa. É concluído que ambos os métodos se revelaram eficientes na pesquisa de soluções, apesar do método *simulated annealing* levar vantagem em relação aos valores médios e mínimos de custo.

Em Martí et al. (2013) foi aplicado o método *hybrid simulated annealing* para o projecto de uma ponte rodoviária com uma configuração de duas vigas tipo U com vãos isostáticos. Este algoritmo híbrido é derivado do algoritmo aplicado por Martí e González-Vidosa (2010) com o objectivo de colmatar as desvantagens que este apresentou. Os autores consideraram uma função objectivo e variáveis de decisão semelhantes às do trabalho precedente. Foi realizado também um estudo paramétrico da variação de preço de mercado de vários materiais. No final analisa-se de que forma os aumentos do preço dos vários materiais influenciam o custo e a geometria final da solução.

Em Martí et al. (2014) foi também tido em conta o dimensionamento dos elementos de laje da ponte pré-fabricada. Assim, foi utilizado um algoritmo memético híbrido que combina a pesquisa de populações de soluções dos algoritmos genéticos e da pesquisa na vizinhança das variáveis. Este algoritmo foi aplicado no projecto de uma ponte com a mesma configuração transversal do trabalho anterior mais uma laje. Este problema era composto por 40 variáveis discretas, e foi necessário correr o algoritmo várias vezes para ser calibrado para se ter soluções com pouco desvio entre tentativas. No final foi demonstrado que com esta metodologia eram conseguidas poupanças no custo da ponte entre 8% e 50%.

Finalmente nos trabalhos de Yepes et al. (2015) e Martí et al. (2016), para além de se procurar minimizar o custo foram também tidos em conta aspectos ecológicos. Assim, na função objectivo foram incluídos os custos associados, quer às emissões de CO<sub>2</sub>, quer ao consumo energético durante todo o processo construtivo. No primeiro trabalho foi usada como metodologia de optimização o algoritmo *hybrid glowworm swarm* e foi determinado que a maneira mais eficaz de reduzir as emissões de CO<sub>2</sub> é o uso de betão de elevada resistência. Em relação a ao consumo energético verificou-se que não entra em conflito com uma solução óptima de custo e que a redução de 1 euro no custo global da ponte traduz-se na poupança de 4kW h.

## 3 MODELAÇÃO E ANÁLISE ESTRUTURAL

### 3.1 Introdução

O programa de computador desenvolvido tendo em vista a optimização de pontes de betão armado com elementos pré-fabricados é dividido em dois módulos, o módulo de análise estrutural e o módulo de optimização estrutural.

Na resolução de um problema de optimização estrutural é necessário determinar o custo da estrutura e avaliar se a resposta da mesma face aos carregamentos cumpre as restrições de projecto. A resposta da estrutura é determinada através do módulo de análise estrutural.

Neste capítulo é explicada a forma como o módulo de análise estrutural realiza o cálculo das tensões e dos deslocamentos por via do método dos elementos finitos. Deste modo, apresenta-se a formulação dos elementos finitos utilizados, o cálculo das propriedades das secções transversais e a modelação dos materiais utilizados neste trabalho.

### 3.2 Análise estrutural

#### 3.2.1 Considerações gerais

O modelo numérico desenvolvido tendo em vista a optimização de pontes com elementos pré-fabricados de betão é constituído por dois módulos, um destinado à análise estrutural e outro destinado à optimização. Este modelo foi implementado num programa de computador desenvolvido em ambiente MATLAB. Para o módulo de análise estrutural adoptou-se o módulo desenvolvido por Martins (2015) no âmbito da sua tese de doutoramento em que se estudou a análise e optimização de pontes atirantadas de betão. Este módulo é baseado no método dos elementos finitos e permite a análise de estruturas reticuladas planas sujeitas a acções estáticas. Neste módulo de análise são também tidos em conta os efeitos geometricamente não-lineares, as fases construtivas e os efeitos diferidos do betão.

O módulo de análise estrutural sofreu algumas modificações para o adaptar ao caso das pontes com elementos pré-fabricados e o compatibilizar com o novo módulo de optimização.

A maior modificação realizada a este módulo adoptado de Martins (2015) foi a alteração do código MATLAB para permitir a chamada *computação em paralelo* (subcapítulo 4.3), aspecto crucial para a implementação dos algoritmos de optimização global.

Outras alterações tiveram em vista a melhoria dos tempos de cálculo. Deste modo, nos cálculos de vários parâmetros, como as propriedades das secções transversais e as matrizes de rigidez elementares, sendo iguais para diversos elementos optou-se por efectuar o cálculo apenas uma vez, atribuindo-se os resultados a todos os elementos finitos com as mesmas propriedades.

A modelação e análise estrutural foi feita através da aplicação a duas dimensões do método dos elementos finitos. Apesar de actualmente existirem programas comerciais que permitem a utilização de modelos tridimensionais, estes programas não permitem o acesso ao seu código-fonte, o que dificulta a implementação do módulo de optimização em conjunto com o módulo de análise estrutural.

O uso de elementos pré-fabricados de betão em pontes cinge-se principalmente a pontes pedonais e viadutos rodoviários, constituindo sistemas estruturais mais simples e apresentando vãos de menores dimensões quando comparados com outros tipos de pontes como as pontes de tirantes. Logo, a utilização de modelação bidimensional não afecta severamente a qualidade das soluções obtidas. De referir ainda que adopção de um módulo de análise plano não resulta em perda de generalidade do programa, pois a formulação seguida no desenvolvimento do módulo de optimização pode ser facilmente adaptada a um módulo de análise tridimensional.

Contudo a resposta tridimensional a acções dinâmicas como os sismos e efeitos da aplicação não simétrica de cargas transversais no tabuleiro que podem induzir esforços de torção devem ser também consideradas no projecto de pontes. A implementação de um módulo de análise tridimensional constitui um desenvolvimento futuro do presente trabalho.

Como já referido, a análise estrutural foi efectuada com recurso ao método dos elementos finitos que tem por base a resolução do seguinte sistema de equações de equilíbrio a respeito das forças nodais da estrutura:

$$\underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{F} \quad (3.1)$$

sendo a matriz de rigidez global da estrutura representada por  $\underline{K}$ , o vector de deslocamentos nodais por  $\underline{u}$  e o vector de forças nodais equivalentes global da estrutura por  $\underline{F}$ .

A estrutura contínua é discretizada em elementos finitos a que são atribuídas propriedades como o tipo de elemento finito, material, secção transversal (área e inércia), carga e outros. E para cada um destes elementos determinam-se a matriz de rigidez elementar ( $\underline{K}^e$ ) e o vector de forças nodais equivalentes ( $\underline{F}^e$ ), sendo posteriormente agrupados para formarem, respectivamente, a matriz de rigidez ( $\underline{K}$ ) e o vector de forças nodais equivalentes globais da estrutura ( $\underline{F}$ ).

Da resolução da Equação 3.1 obtêm-se os valores das incógnitas do sistema de equações de equilíbrio. Estas incógnitas representam os deslocamentos nodais da malha de elementos finitos em que foi discretizada a estrutura.

A partir dos valores dos deslocamentos dos nós da malha de elementos finitos calculam-se as deformações e tensões a nível elementar através das seguintes expressões

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{B}^e \cdot \underline{u}^e \quad (3.2)$$

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D}^e \cdot \underline{\varepsilon}^e \quad (3.3)$$

em que  $\underline{\varepsilon}^e$  é o vector elementar de deformações,  $\underline{B}^e$  a matriz de deformação,  $\underline{u}^e$  o vector de deslocamentos nodais elementares,  $\underline{\sigma}^e$  o vector elementar de tensões e  $\underline{D}^e$  a matriz de elasticidade.

No programa encontram-se disponíveis vários tipos de elementos finitos, nomeadamente, elemento finito biela, elemento viga de Euler-Bernoulli, elemento biela com módulo de Ernst, elemento cabo de pré-esforço e elemento viga de Euler-Bernoulli com matriz de rigidez elástica e geométrica. De seguida são apresentados os dois tipos de elementos finitos utilizados nesta dissertação, o elemento finito de viga de Euler-Bernoulli e o elemento finito de cabo de pré-esforço.

### 3.2.2 Elemento finito de viga

A modulação numérica do tabuleiro das pontes é realizada através de uma malha de elementos finitos do tipo viga Euler-Bernoulli. O elemento finito de viga da formulação Euler-Bernoulli consiste num elemento bidimensional com 2 nós e 6 graus de liberdade (Figura 3.1). Considera-se ainda que o módulo de elasticidade ( $E$ ), a área da secção transversal do elemento ( $A$ ) e a inércia em torno do eixo  $z$  ( $I_z$ ), são constantes ao longo do seu comprimento.

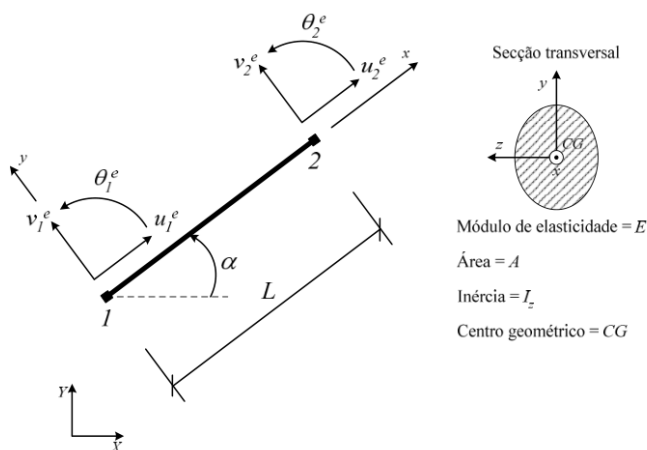


Figura 3.1 – Elemento finito de viga (Martins, 2015)



Na formulação deste elemento assumem-se as hipóteses da teoria clássica de flexão de vigas, daí a designação de elemento de viga de Euler-Bernoulli. Deste modo, as hipóteses consideradas são as seguintes (Onâte, 1992):

- 1– Os deslocamentos transversais ( $v$ ) de todos os pontos contidos numa secção transversal são pequenos e iguais aos do eixo longitudinal do elemento;
- 2– O deslocamento perpendicular ao plano que contém o eixo do elemento (deslocamento segundo  $z$ ) é nulo;
- 3– As secções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação permanecem planas e ortogonais a esse eixo após a deformação.

Através das hipóteses enunciadas e os graus de liberdade nodais indicados pode exprimir-se o campo de deslocamentos no elemento em função dos deslocamentos nodais e das funções de forma, que são apresentadas em (Martins, 2015).

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{u}^e = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & : & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & : & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Estabelecendo o equilíbrio no elemento através da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais ou do Princípio da Energia Potencial Mínima é possível obter as expressões da matriz de rigidez e dos vectores de forças nodais equivalentes elementares. Desta forma, a matriz de rigidez elementar é dada pela conhecida expressão geral (Onâte, 1992):

$$\underline{K}^e = \int_V \underline{B}^{eT} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}^e dV \quad (3.5)$$

A partir da qual se obtém:

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Relativamente ao vector de forças nodais equivalentes à acção do peso próprio do elemento, tem-se a seguinte expressão

$$\underline{f}_b^e = \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{b} \, dV = \left\{ -\frac{g_x \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L^2}{12} \quad -\frac{g_x \cdot L}{2} \quad -\frac{g_y \cdot L}{2} \quad \frac{g_y \cdot L^2}{12} \right\}^T \quad (3.7)$$

onde  $g_x$  e  $g_y$  representam as componentes axial e transversal da carga devido ao peso próprio. Estas são obtidas através do produto do peso volúmico ( $\gamma$ ) do material do elemento pela respectiva área de secção transversal ( $A$ ) e com base no ângulo ( $\alpha$ ) entre o eixo do elemento e a direcção horizontal.

No que respeita ao vector de forças nodais equivalentes às acções de vão tem-se a seguinte expressão geral para o caso da carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento do elemento

$$\underline{f}_t^e = \int_0^L \underline{N}^T \cdot \underline{q} \, dx = \left\{ \frac{q_x \cdot L}{2} \quad \frac{q_y \cdot L}{2} \quad \frac{q_y \cdot L^2}{12} \quad \frac{q_x \cdot L}{2} \quad \frac{q_y \cdot L}{2} \quad -\frac{q_y \cdot L^2}{12} \right\}^T \quad (3.8)$$

em que  $q_x$  e  $q_y$  representam, respectivamente, os valores das cargas segundo as direcções locais  $x$  e  $y$ .

Tal como já foi referido, após o cálculo das matrizes de rigidez elementares e dos vectores de forças nodais equivalentes elementares, procede-se ao seu agrupamento na matriz de rigidez global da estrutura e no vector de forças nodais equivalentes global da estrutura. Após a resolução do sistema de equações de equilíbrio da estrutura e consequente determinação dos deslocamentos nodais pela Equação 3.1, passa-se à determinação dos esforços internos e das tensões estritas e generalizadas a nível elementar.

Os esforços internos, esforço axial, esforço transversal e de momento flector são calculados pela expressão 3.9, segundo a convenção de Resistência de Materiais, nos nós inicial e final do elemento finito de viga

$$\underline{X}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ \theta_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \theta_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Por uma questão de simplicidade na definição dos objectivos de projecto a considerar no problema de optimização, descritos no Capítulo 4, é efectuado o cálculo, para o ponto central

do elemento, da tensão axial nas fibras superior ( $\sigma_{fs}$ ) e inferior ( $\sigma_{fi}$ ) da secção devido à deformação de flexão. E ainda da tensão axial ( $\sigma_n$ ) devido à deformação axial e a tensão tangencial máxima ( $\tau$ ). Resultando no seguinte vector de tensões elementares:

$$\underline{\sigma}^e = \begin{pmatrix} \sigma_n \\ \sigma_{fs} \\ \sigma_{fi} \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N}{A} \\ \frac{M \cdot y_{fs}}{I_z} \\ \frac{M \cdot y_{fi}}{I_z} \\ \frac{V \cdot S}{I_z \cdot b} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

sendo  $y_{fs}$  e  $y_{fi}$  a posição da fibra superior e da fibra inferior da secção medidas a partir do centro geométrico da mesma,  $S$  o momento estático da meia-secção e  $b$  representa a largura desta. Este procedimento obriga a uma discretização adequada da estrutura da ponte para a obtenção de resultados adequados para a sua distribuição de tensões.

### 3.2.3 Elemento finito de cabo de pré-esforço

Para a modelação das armaduras activas foram utilizados elementos finitos de cabo de pré-esforço, de 2 nós e com traçado linear (Figura 3.2).

O elemento finito de cabo de pré-esforço é definido associado a elementos viga partilhando os mesmos deslocamentos nodais. A modelação do pré-esforço por via de um elemento finito de cabo de pré-esforço permite a contabilização automática das variações de tensão nos cabos provocadas pelas deformações instantâneas e diferidas do betão. Tal não poderia ser realizado facilmente com a modelação do efeito do pré-esforço por via de cargas equivalentes.

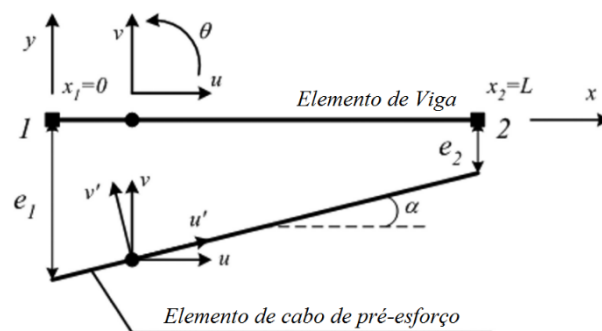


Figura 3.2– Elemento finito de viga com elemento de cabo de pré-esforço (adaptado (Martins et al., 2016b))

O traçado do elemento finito de cabo é definido por  $e(x)$ , a excentricidade do cabo ao longo do comprimento da viga. Este parâmetro é dado em função das excentricidades atribuídas ao elemento cabo  $e_1$  e  $e_2$ , medidas a partir do centro geométrico do elemento finito de viga. É

importante também referir que os valores da excentricidade do cabo são actualizados durante o processo de optimização para que a distância à face da viga que foi definida inicialmente se mantenha, apesar do centro geométrico da viga se alterar ao longo da optimização devido à alteração das dimensões da secção transversal.

A formulação adoptada neste trabalho para o elemento de cabo de pré-esforço encontra-se descrita detalhadamente em Martins et al. (2016b). O comportamento do cabo de pré-esforço é caracterizado pelo seu deslocamento axial ( $u'(x)$ ) e recorrendo à aproximação do campo de deslocamentos axiais é possível escrever a deformação axial do elemento ( $\varepsilon_p$ ) como

$$\varepsilon_p = \frac{du}{dx} = \underline{B}_p \cdot \underline{u}^e \quad (3.11)$$

onde  $\underline{B}_p$  é a matriz de deformação e  $\underline{u}^e$  é o vector dos deslocamentos nodais

A matriz de rigidez elementar do elemento de cabo de pré-esforço ( $\underline{K}_p^e$ ) é obtida por intermédio da expressão do Método dos Elementos Finitos, da seguinte forma

$$\underline{K}_p^e = \int_V \underline{B}_p^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}_p dV = \int_0^L \underline{B}_p^T \cdot E_p \cdot A_p dV \quad (3.12)$$

em que  $E_p$  é o módulo de elasticidade do aço de alta-resistência e  $A_p$  a área da secção transversal do cabo.

O efeito do pré-esforço é contabilizado no módulo de análise por via de forças nodais equivalentes e são calculadas através da deformação axial no elemento finito de cabo (Equação 3.13). Estas forças equivalentes são aplicadas nos nós dos elementos finitos de viga.

$$\underline{f}_p^e = F_{pe} \cdot \{\cos \alpha_1 \quad \sin \alpha_1 \quad -e_1 \cdot \cos \alpha_1 \quad \vdots \quad -\cos \alpha_2 \quad -\sin \alpha_2 \quad e_2 \cdot \cos \alpha_2\}^T \quad (3.13)$$

Como simplificação a força de pré-esforço  $F_{pe}$  aplicada no modelo é considerada como a força útil de pré-esforço, já incluindo todas as perdas instantâneas (perdas devido à deformação elástica do betão, à reentrada dos cabos nas ancoragens e ao atrito entre os cabos e as bainhas).

A partir da deformação do elemento de cabo  $\varepsilon_p$  determina-se o esforço axial  $N_p$  que produz os seguintes esforços a respeito do eixo do elemento de viga

$$\begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} = N_p \cdot \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ e_i \cdot \cos \alpha \end{Bmatrix} = (E_p \cdot A_p \cdot \varepsilon_p) \cdot \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ e_i \cdot \cos \alpha \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

### 3.2.4 Propriedades das secções transversais dos elementos

Para o cálculo de parâmetros necessários à análise estrutural, como as matrizes de rigidez elementares, é preciso calcular valores da área e da inércia da secção transversal dos diversos

elementos da estrutura. Como estes mudam ao longo das iterações do algoritmo de optimização foi definida uma formulação geral para o cálculo destas propriedades em função das variáveis de decisão. De uma forma geral, para os vários tipos de secções transversais de tabuleiro utilizadas, estas foram subdivididas em áreas parciais e inércias parciais. Sendo obtida a área total equivalente pela soma das parciais e a inércia total equivalente por aplicação do teorema de Steiner.

Como explicado no subcapítulo 2.3.1 as secções transversais dos elementos finitos de viga mais correntes são os tabuleiros compostos com peças de vigas pré-fabricadas do tipo “I” ou tipo “U”, com espaçamento definido e laje do tabuleiro em betão armado betonada *in situ*.

Também se encontram modelados no programa diversos tipos de secções transversais adicionais, como secção rectangular cheia e oca, secção circular e secção em caixão uni e tricelular. Apesar de não serem utilizados especificamente nos exemplos mostrados neste trabalho contribuem para aumentar o âmbito de aplicação dos módulos de análise e optimização desenvolvidos.

#### a) Secção de tabuleiro com peças de vigas tipo I

Esta secção transversal é constituída por uma laje superior sobre elementos de viga tipo “I”. A laje caracteriza-se através da altura e largura,  $t_{lj}$  e  $b_{lj}$ , respectivamente. Para cada viga tipo “I” de altura  $h$  são definidas mais cinco áreas parciais, onde são descritas as áreas rectangulares do banzo inferior ( $t_{fi}$  e  $b_{fi}$ ), banzo superior ( $t_{fs}$  e  $b_{fs}$ ) e almas( $tw$ ) e áreas triangulares dependentes das inclinações dos banzos ( $if_i$  e  $if_s$ ).

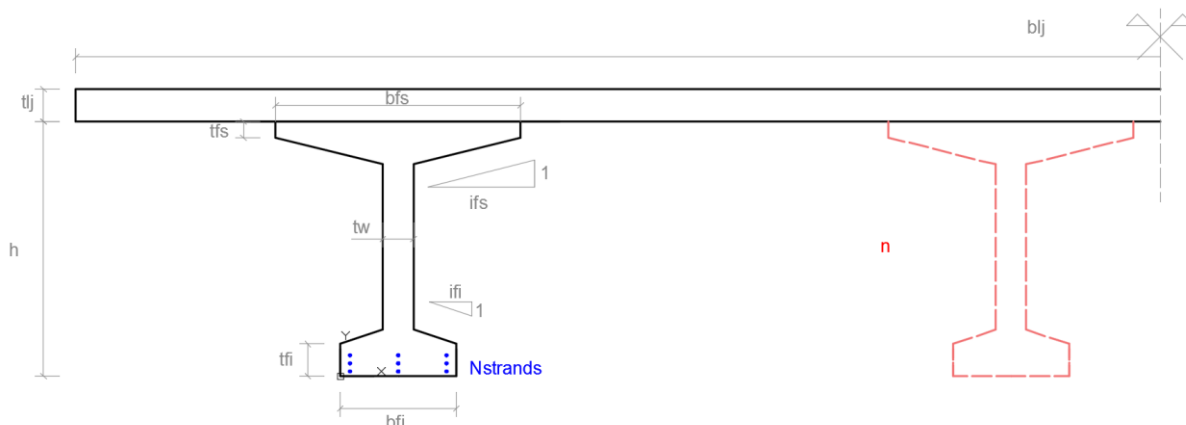


Figura 3.3 – Parâmetros geométricos que definem os tabuleiros de vigas I

$$A_1 = b_{fi} \times t_{fi}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{b_{fi}}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \left( \frac{b_{fi}}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \cos(\tan^{-1} if_i) \right) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
 A_3 &= tw \times (h - tfi - tfs) \\
 A_4 &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{bfs}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \left( \frac{bfs}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \cos(\tan^{-1} ifs) \right) \\
 A_5 &= bfs \times tfs \\
 A_6 &= blj \times tlj \\
 largura_{viga} &= \max(bfi; bfs)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

A partir das áreas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$  e  $A_6$  a área total da secção transversal do tabuleiro é definida por

$$A_{total} = n \times (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) + A_6 \tag{3.17}$$

E para estas áreas parciais foram também escritas as seguintes inércias parciais

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{bfi \times tfi^3}{12} \\
 I_2 &= \frac{\left( \frac{bfi}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \left( \frac{bfi}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \cos(\tan^{-1} ifi)^3}{36} \\
 I_3 &= \frac{tw \times (h - tfi - tfs)^3}{12} \\
 I_4 &= \frac{\left( \frac{bfs}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \left( \frac{bfs}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \cos(\tan^{-1} ifs)^3}{36} \\
 I_5 &= \frac{bfs \times tfs^3}{12} \\
 I_6 &= \frac{blj \times tlj^3}{12}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Com estas inércias parciais, a inércia total da secção transversal do tabuleiro total é dada pela aplicação do teorema de Steiner da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 I_{total} &= n \times \left( \left( I_1 + \left( hcg - \frac{1}{2} tfi \right)^2 \times A_1 \right) + 2 \left( I_2 + \left( \left( tfi + \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. \frac{\left( \frac{bfi}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \cos(\tan^{-1} ifi)}{3} \right) - hcg \right)^2 \times A_2 \right) + \left( I_3 + \left( abs \left( \left( tfi + \frac{1}{2} (h - tfi - tfs) \right) - \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. hcg \right) \right)^2 \times A_3 \right) + 2 \left( I_4 + \left( h - tfs - \left( \frac{\left( \frac{bfs}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \cos(\tan^{-1} ifs)}{3} \right) \right)^2 \times A_4 \right) + \left( I_5 + \right. \\
 &\left. \left( h - \frac{1}{2} tfs - hcg \right)^2 \times A_5 \right) + \left( I_6 + \left( h + \frac{1}{2} tlj - hcg \right)^2 \times A_6 \right)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Por último a fórmula que define a posição do centro geométrico da secção, tendo como referência a face inferior da mesma, é expressa pelo produto entre o valor de área e a distância à face inferior de cada subárea a dividir pela área total do tabuleiro:

$$hcg = \frac{1}{A_{total}} \left( \left( n \cdot \left( A_1 \cdot \left( \frac{1}{2} tfi \right) + 2 \cdot A_2 \cdot \left( tfi + \left( \frac{1}{3} \left( \frac{bfi}{2} - \frac{tw}{2} \right) \cdot \cos(\tan^{-1} ifi) \right) \right) + A_3 \cdot \left( tfi + \frac{1}{2} (h - tfi - tfs) \right) + 2 \cdot A_4 \cdot \left( h - tfs - \left( \frac{1}{3} \left( \frac{bfs}{2} - \frac{tw}{2} \right) \cdot \cos(\tan^{-1} ifs) \right) \right) + A_5 \cdot \left( h - \frac{1}{2} tfs \right) \right) \right) + \left( A_6 \left( h + \frac{1}{2} \cdot tlj \right) \right) \right) \quad (3.20)$$

### b) Secção de tabuleiro com peças de vigas tipo U

Utilizando a mesma notação e metodologia que no ponto anterior as propriedades dos tabuleiros com vigas do tipo U são definidas por áreas e inércias parciais que são conjugadas numa área total e inércia total do tabuleiro. Para o cálculo da área, tem-se as expressões em 3.21.

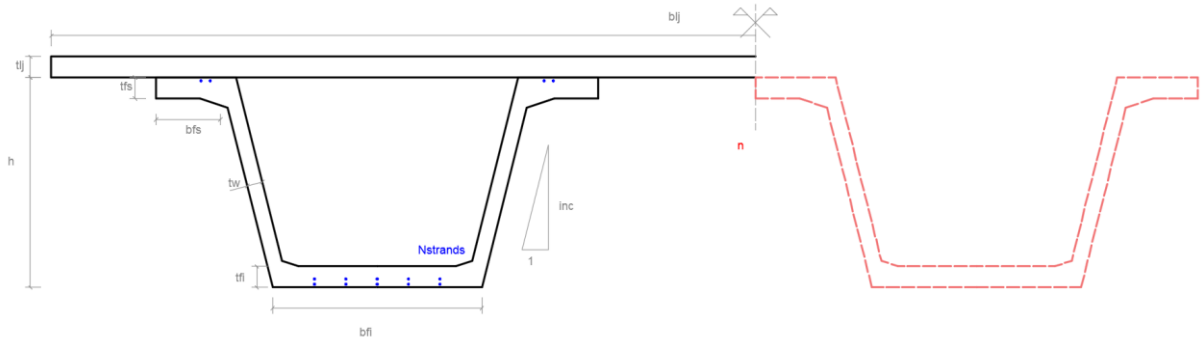


Figura 3.4 – Parâmetros geométricos que definem os tabuleiros de vigas U

$$\begin{aligned} A_1 &= (bfi - 2tw) \times tfi \\ lw &= \frac{h}{\sin(\tan^{-1} inc)} \\ A_2 &= lw \times tw \\ A_3 &= \frac{1}{2} \left( tfs \times \frac{tfs}{inc} \right) \\ A_4 &= bfs \times tfs \\ A_5 &= blj \times tlj \\ A_{total} &= n \times (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + A_5 \\ largura_{viga} &= bfi + 2 \cdot bfs + 2 \left( lw \times \cos(\tan^{-1} inc) + \sqrt{tw^2 + \left( \frac{tw}{inc} \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

E para o cálculo da inércia tem-se:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{bfi \times tfi^3}{12} \\
 I_{2u} &= \frac{tw \times lw^3}{12} \\
 I_{2v} &= \frac{lw \times tw^3}{12} \\
 I_2 &= \frac{1}{2}(I_{2u} + I_{2v}) + \frac{1}{2}(I_{2u} - I_{2v}) \cdot \cos(2 \cdot (-\tan^{-1}(inc))) \\
 I_3 &= \frac{\left(\frac{tfs}{inc}\right) \times tfs^3}{36} \\
 I_4 &= \frac{bfs \times tfs^3}{12} \\
 I_5 &= \frac{blj \times tlj^3}{12}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
 I_{total} = n \times & \left( \left( I_1 + \left( hcg - \frac{1}{2} tfi \right)^2 \times A_1 \right) + 2 \left( I_2 + \left( \left( tfi + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\left( \frac{bfi}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \cos(\tan^{-1} ifi)}{3} \right) - hcg \right)^2 \times A_2 \right) + \left( I_3 + \left( abs \left( \left( tfi + \frac{1}{2} (h - tfi - \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. tfs \right) - hcg \right) \right)^2 \times A_3 \right) + 2 \left( I_4 + \left( h - tfs - \left( \frac{\left( \frac{bfs}{2} - \frac{tw}{2} \right) \times \cos(\tan^{-1} ifs)}{3} \right) \right)^2 \times \right. \\
 & \left. A_4 \right) + \left( I_5 + \left( h - \frac{1}{2} tfs - hcg \right)^2 \times A_5 \right) \right) + \left( I_6 + \left( h + \frac{1}{2} tlj - hcg \right)^2 \times A_6 \right)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

com o centro geométrico em relação à face inferior do tabuleiro

$$\begin{aligned}
 hcg = \frac{1}{A_{total}} & \left( \left( n \cdot \left( A_1 \cdot \left( \frac{1}{2} tfi \right) + 2 \cdot A_2 \cdot \left( tfi + \left( \frac{1}{3} \left( \frac{bfi}{2} - \frac{tw}{2} \right) \cdot \cos(\tan^{-1} ifi) \right) \right) + \right. \right. \right. \\
 & A_3 \cdot \left( tfi + \frac{1}{2} (h - tfi - tfs) \right) + 2 \cdot A_4 \cdot \left( h - tfs - \left( \frac{1}{3} \left( \frac{bfs}{2} - \frac{tw}{2} \right) \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos(\tan^{-1} ifs) \right) \right) + A_5 \cdot \left( h - \frac{1}{2} tfs \right) \right) \right) + \left( A_6 \cdot \left( h + \frac{1}{2} \cdot tlj \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$



### c) Secção de tabuleiro com peças de vigas tipo I de catálogo

Ao contrário do tabuleiro com vigas I representadas por uma série de variáveis geométricas, as propriedades de área, inércia e perímetro dos elementos de viga encontram-se previamente definidos em catálogos de fabricantes, ficando no processo de optimização a escolha de um tipo de viga entre as existentes no catálogo, o número de elementos de viga  $n$  e espessura da laje  $tlj$ .

Quadro 3.1 – Propriedades das secções transversais das peças de viga pré-fabricadas (Mota-Engil, 2009)

| viga | Área [ $m^2$ ]        | Inércia [ $m^4$ ]     | Centro geométrico [ $m$ ] | Perímetro [ $m$ ] |
|------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|-------------------|
| I70  | $2,49 \times 10^{-1}$ | $1,58 \times 10^{-2}$ | 0,34                      | 3,65              |
| I90  | $3,16 \times 10^{-1}$ | $3,45 \times 10^{-2}$ | 0,45                      | 4,42              |
| II10 | $3,88 \times 10^{-1}$ | $6,43 \times 10^{-2}$ | 0,57                      | 5,19              |
| II30 | $4,42 \times 10^{-1}$ | $1,01 \times 10^{-1}$ | 0,66                      | 5,56              |
| II50 | $4,97 \times 10^{-1}$ | $1,48 \times 10^{-1}$ | 0,75                      | 5,94              |
| I200 | $6,57 \times 10^{-1}$ | $3,54 \times 10^{-1}$ | 1,03                      | 7,32              |

Ficando de seguida as expressões que definem as propriedades da secção transversal do tabuleiro

$$\begin{aligned} A_1 &= n \times A_{catálogo} \\ A_2 &= blj \times tlj \\ A_{total} &= A_1 + A_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$hcg = \left( A_1 \cdot hcg_{catálogo} + A_2 \cdot \left( h_{catálogo} + \frac{tlj}{2} \right) \right) / A_{total} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{catálogo} \\ I_2 &= \frac{blj \times tlj^3}{12} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$I_{total} = \left( I_1 + (hcg - hcg_{catálogo})^2 \times A_1 \right) + \left( I_2 + \left( h_{catálogo} + \frac{tlj}{2} \right)^2 \times A_2 \right)$$

### d) Secção de cabo de aço de pré-esforço

Aos elementos finitos de cabo de pré-esforço é atribuída a secção transversal equivalente ao conjunto de um número de cordões,  $Nstrands$ , com a mesma excentricidade em relação ao centro geométrico do tabuleiro. Sabendo que cada cordão tem uma área nominal de  $1,5 \times 10^{-4} m^2$  a área total da secção de um conjunto de cordões é dada por

$$A_{total} = 1,5 \times 10^{-4} \cdot Nstrands \quad (3.28)$$

### 3.3 Modelação do betão estrutural

#### 3.3.1 Modelação do betão

A modelação do betão estrutural tem em conta os efeitos diferidos da maturação, fluência e retracção. Estes efeitos são contabilizados de acordo com os modelos do EC2 (NP EN 1992-1-1, 2010). A consideração destes efeitos no projecto de estruturas de betão assume especial relevância durante a construção e para condições de serviço.

A maturação do betão caracteriza-se por um aumento gradual da resistência e da rigidez ao longo do tempo. Este aumento de rigidez é traduzido no EC2 (NP EN 1992-1-1, 2010) por via da seguinte expressão, que representa o módulo de elasticidade do betão numa idade,  $t$ , em dias

$$E_{cm}(t) = \left( e^{s \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right)} \right)^{0,3} \times E_{cm} \quad (3.29)$$

onde  $E_{cm}$  é o valor médio do módulo de elasticidade do betão aos 28 dias de idade e  $s$  representa um coeficiente que depende do tipo de cimento.

O modelo de retracção tem efeito na deformação ao longo do tempo e é independente do estado de tensão (Martins et al., 2016a). Segundo o EC2 (EN 1992-2, 2005) a extensão total de retracção  $\varepsilon_{cs}(t)$  é dada pela soma de duas componentes, respectivamente a extensão de retracção por secagem ( $\varepsilon_{cd}$ ) e extensão de retracção autógena ( $\varepsilon_{ca}$ ).

A extensão de retracção por secagem deve-se à migração da água através do betão endurecido, desenvolvendo-se lentamente. Esta parcela da deformação por retracção é dada por:

$$\varepsilon_{cd}(t) = \beta_{ds}(t, t_s) \cdot k_h \cdot \varepsilon_{cd,0} \quad (3.30)$$

em que  $\beta_{ds}(t, t_s)$  e  $k_h$  são coeficientes que dependem da espessura equivalente do elemento de betão e da sua idade no início da retracção por secagem. Na expressão (3.29)  $\varepsilon_{cd,0}$  é um parâmetro que depende da humidade relativa do ambiente, do tipo de cimento e da resistência à compressão do betão.

A componente de extensão de retracção autógena varia linearmente em função da resistência do betão numa idade  $t$  e ocorre devido a reacções químicas durante a cura do betão, desenvolvendo-se na maior parte nos primeiros dias após a betonagem. Esta parcela da deformação por retracção é dada por:

$$\varepsilon_{ca}(t) = \beta_{as}(t) \cdot \varepsilon_{ca}(\infty) \quad (3.31)$$

sendo  $\varepsilon_{ca}(\infty)$  o valor da deformação por retracção autógena a longo prazo e  $\beta_{as}(t)$  a função que traduz a evolução da retracção autógena com o tempo.

O modelo de fluência considerado é baseado na viscosidade linear e tem em conta o efeito da maturação. A deformação total num elemento de betão no instante  $t$  ao qual foi aplicada uma tensão constante  $\sigma_c(t_0)$ , no elemento de betão armado em análise é dada pela soma da deformação dependente da tensão,  $\varepsilon_{c\sigma}(t, t_0)$  e da deformação independente do estado de tensão,  $\varepsilon_{cn}(t)$ :

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t, t_0) + \varepsilon_{cn}(t) = J(t, t_0) \times \sigma_c(t_0) + \varepsilon_{cn}(t) \quad (3.32)$$

onde  $J(t, t_0)$  representa a função de fluência. Esta soma é resultante do princípio da sobreposição de efeitos que é válido quando as tensões na peça de betão armado são inferiores a 45% do valor característico da resistência à compressão do betão. Nesta situação têm-se a deformação de fluência a variar linearmente com a tensão aplicada. Esta limitação de tensões foi considerada por via de uma restrição de projecto imposta na formulação do problema de optimização tal como será oportunamente descrito no Capítulo 4.

Numa estrutura de betão o estado de tensão sofre continuamente alterações durante a fase de construção e em serviço. Na situação de tensão variável e admitindo válido o princípio da sobreposição de efeitos, a Equação 3.31 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_c(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma_c(t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) \cdot \frac{\delta \sigma_c(\tau)}{\delta \tau} d\tau + \varepsilon_c(t) \quad (3.33)$$

Para a resolução desta equação existem diversas abordagens, tais como, métodos algébricos, métodos de integração passo-a-passo e métodos de aproximação da função de fluência (Martins, 2015). A metodologia aplicada por Martins (2015), que foi adoptada para este trabalho, consiste em utilizar a aproximação do coeficiente de fluência por uma série de Dirichlet (Bažant, 1988). Neste procedimento a lei constitutiva viscoelástica é transformada numa relação diferencial aproximando o coeficiente de fluência através de um número finito de termos de uma série de Dirichlet de funções exponenciais. Assim a função da fluência é escrita como

$$J(t, t_0) \cong \frac{1}{E_c} + \frac{1}{E_{cm}} \cdot \sum_{i=1}^n a_j(t_0) (1 - e^{-\alpha_j(t-t_0)}) \quad (3.34)$$

onde  $n$  é o número de termos da série de Dirichlet e os coeficientes  $a_j$  são determinados através do ajuste da curva de fluência pelo método dos mínimos quadrados. Os coeficientes  $1/\alpha_j$  são chamados de tempos de retardação e foram escolhidos de modo a ser coberta toda a gama de valores de tempo para a qual é necessário calcular os coeficientes de fluência (0 a 20000 dias  $\approx$  50 anos) .

No final são conhecidos os valores das deformações produzidas pelos efeitos diferidos e são aplicados ao modelo de elementos finitos da ponte por via de forças nodais equivalentes.

### 3.3.2 Modelação das armaduras passivas e activas

A modelação do betão estrutural envolve a modelação do betão e a modelação das armaduras passivas (armadura ordinária) e das armaduras activas (armadura de pré-esforço).

Segundo o EC2 (NP EN 1992-1-1, 2010) as armaduras passivas, têm o seu comportamento mecânico representado pelos diagramas de tensão-extensão da Figura 3.5

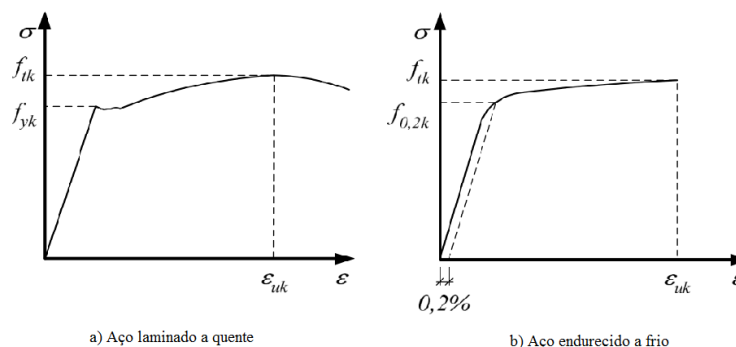


Figura 3.5 – Diagramas tensões-extensões do aço típico de armaduras passivas (adaptado (NP EN 1992-1-1, 2010))

O comportamento do aço de armaduras passivas é caracterizado pelos valores característicos da tensão de cedência à tracção,  $f_{yk}$ , ou tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,2%,  $f_{0,2k}$ , respectivamente para o aço laminado a quente e endurecido a frio. Para ambos têm-se a tensão de rotura à tracção  $f_{tk}$  e a correspondente extensão na carga máxima  $\epsilon_{uk}$ .

No modelo desenvolvido por Martins (2015), e adoptado para este trabalho considera-se como simplificação desprezar o efeito das armaduras passivas na análise da estrutura. Desta forma não é tida em conta a contribuição destas para as matrizes de rigidez elementares dos elementos finitos de betão, assumindo-se as secções transversais homogéneas de betão, situação usual em projecto de estruturas de betão.

Apesar desta simplificação no módulo de análise, a contribuição das armaduras passivas é tida em conta nas restrições de projecto (subcapítulo 4.6) relativas à verificação da resistência dos elementos de betão.

Para as armaduras activas, no EC2 (NP EN 1992-1-1, 2010) encontra-se definido o comportamento mecânico do aço de pré-esforço de acordo com a Figura 3.6.

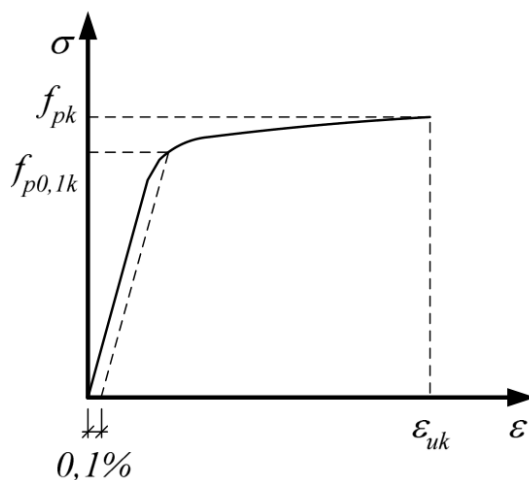


Figura 3.6 – Diagrama tensões-extensões do aço típico de pré-esforço (adaptado (NP EN 1992-1-1, 2010))

O diagrama da Figura 3.6 é caracterizado pelos valores característicos da tensão limite convencional de proporcionalidade a 0,1%,  $f_{p0,1k}$ , da resistência à tracção  $f_{pk}$ , e da extensão na carga máxima  $\epsilon_{uk}$ .

Relativamente à relaxação do aço de alta resistência, por simplicidade, o seu efeito não foi contabilizado nos exemplos resolvidos.

## 4 OPTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

### 4.1 Introdução

Como já referido o programa desenvolvido neste trabalho encontra-se dividido em dois módulos. Sendo neste capítulo descritos os aspectos relevantes tidos em conta no desenvolvimento do módulo de optimização estrutural.

É descrita a formulação geral de um problema de optimização estrutural e é justificada a abordagem deste problema por via de algoritmos de optimização global ao invés da utilização de algoritmos de optimização local. Descrevem-se os algoritmos de optimização global implementados neste trabalho, com especial foco nos algoritmos genéticos.

Finalmente apresentam-se os diversos elementos da formulação do problema de optimização estrutural utilizados neste trabalho, a função objectivo, as variáveis de decisão e as restrições.

### 4.2 Formulação geral

A optimização estrutural tem como objectivo obter a solução óptima para um determinado problema no âmbito da engenharia de estruturas. Um problema de optimização estrutural é definido com uma *função objectivo* que se pretende minimizar e sujeita a um conjunto de *restrições*. Os valores para estes dois parâmetros são obtidos em função das *variáveis de decisão* (VD), e por alteração dos seus valores é conseguida a melhoria do projecto. A formulação geral de um problema de optimização pode ser expressa através de

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\underline{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\underline{x}) \leq 0 \quad \text{com } j = 1; \dots; N_G \\ & h_k(\underline{x}) = 0 \quad \text{com } k = 1; \dots; N_E \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde  $F(\underline{x})$  representa a função objectivo a minimizar (secção 4.6), definida tipicamente em relação aos custos económicos ou a um critério estrutural;  $\underline{x}$  representa o vector de variáveis de decisão (secção 4.4);  $g_j$  representa as restrições de desigualdade (secção 4.5) e  $h_k$  representa as restrições de igualdade (Martins, 2015).

Genericamente os problemas de optimização em engenharia civil apresentam grande número de VD que resulta na elevada não-linearidade tanto da *função objectivo* como das *restrições*. Como consequência da alta não-linearidade destes problemas, como o caso particular da optimização estrutural de pontes com elementos pré-fabricados, eles apresentam para além do *mínimo global* muitos *mínimos locais*, que condicionam a qualidade das soluções finais obtidas. Como refere Arora (2004) não existem condições matemáticas que garantam a obtenção do

ótimo global. Contudo com a aplicação de técnicas de optimização global é possível melhorar a qualidade das soluções obtidas.

### 4.3 Optimização global

Os algoritmos de optimização dividem-se em dois grupos principais, algoritmos de pesquisa directa e algoritmos de optimização global. Os algoritmos pertencentes ao primeiro grupo são baseados em gradientes e até recentemente têm visto maior aplicação devido a possuírem tempos de cálculo computacional muito menores. Estes algoritmos procuram a solução óptima a partir de uma solução inicial que tende para o correspondente mínimo no interior da correspondente *bacia de atracção*. No entanto, como desvantagem pode referir-se o facto do mínimo obtido pode ser apenas local e não ser o mínimo global e obrigam a que função objectivo seja contínua e diferenciável (Arora, 2004).

O mínimo global é o ponto de uma função que apresenta o menor valor em todos os pontos admissíveis da função. Por outro lado, o mínimo local de uma função é o ponto onde o valor desta é menor ou igual em relação aos pontos vizinhos, mas possivelmente maior que outro ponto distante na função. As *bacias de atracção* são definidas para uma determinada função objectivo contínua  $f(x)$ , como o vector  $\Delta f(x)$  com a direcção/sentido para onde  $f(x)$  decresce mais rapidamente. O vector  $\Delta f(x)$  resulta no caminho desde o ponto de pesquisa  $x$  até ao mínimo local da correspondente *bacia de atracção* e difere consoante o ponto de pesquisa inicial  $x$ .

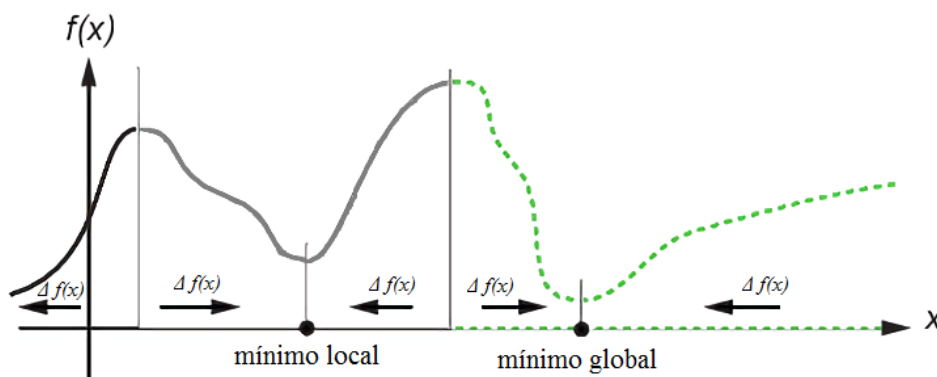


Figura 4.1 – Esquema de bacias de atracção e tipologias de mínimos numa função objectivo, com a variável de decisão  $x$  (adaptado (MATLAB Documentation, 2016))

Para colmatar as desvantagens dos algoritmos de pesquisa directa foram desenvolvidos os algoritmos de optimização global. Estes conseguem pesquisar mais exaustivamente o campo de soluções da função objectivo, seja por métodos determinísticos, como os algoritmos de *pesquisa de padrões*, ou por métodos estocásticos, tais como os algoritmos *genéticos* ou *enxame de partículas*. Os métodos estocásticos diferem dos outros porque utilizam processos semi-aleatórios aplicados a um conjunto inicial de soluções, designado por *população*, tentando

pesquisar mais que uma *bacia de atracção*. Devido à natureza semi-aleatória dos algoritmos estocásticos, estes podem não resultar na mesma solução final em diferentes corridas do mesmo problema e para as mesmas condições iniciais. No desenvolvimento do módulo de optimização foram implementados algoritmos de optimização global, com especial foco no *algoritmo genético*.

Para problemas multidimensionais, com múltiplas variáveis de decisão, e com a função objectivo pouco linear a figura seguinte demonstra esquematicamente os vectores de maior declive para os pontos locais mínimos para várias *bacias de atracção*, a partir de vários pontos iniciais.

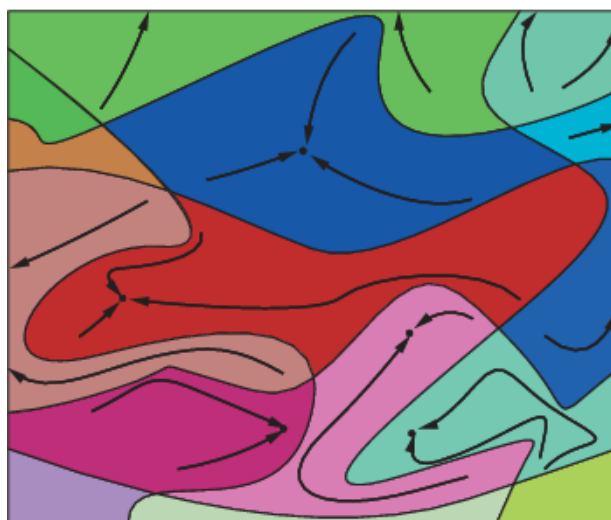


Figura 4.2 – Representação esquemática para várias bacias de atracção num problema multidimensional (MATLAB Documentation, 2016).

Como visto na secção 2.6.2, os *algoritmos genéticos* como outros métodos de optimização global, não eram utilizados na resolução de problemas de optimização em engenharia civil até recentemente, devido a duas desvantagens principais que tem vindo a ser minimizadas.

A primeira desvantagem é que requerem uma grande quantidade de cálculos computacionais morosos para resolver os próprios passos de uma iteração. Desvantagem que aumenta na maioria dos problemas de engenharia civil, onde se verifica que a própria avaliação das *restrições de desempenho* e da *função objectivo* requerem maior esforço de cálculo que os processos do algoritmo. Neste trabalho isto verificou-se especialmente na determinação dos esforços resistentes das secções transversais de betão armado requerendo muito mais tempo de cálculo do que a própria função objectivo.



Esta desvantagem foi amplamente reduzida nos últimos anos devido ao aumento exponencial da velocidade de processamento e da disponibilidade de processadores (CPU) de vários núcleos, que permitem a *computação em paralelo* de vários pontos da função objectivo. A adaptação das rotinas de MATLAB adoptadas de Martins (2015) e das que foram desenvolvidas de raiz para este trabalho, para o formato que permite a computação em paralelo resultou na diminuição de 75% dos tempos de cálculo em comparação à não utilização desta técnica.

A segunda desvantagem é a impossibilidade de provar matematicamente que uma solução final obtida pelo algoritmo genético corresponde à solução óptima global. Podendo esta desvantagem ser colmatada em certa medida executando o algoritmo várias vezes, utilizar população maior e permitir o programa correr por maior número de iterações.

### 4.3.1 Algoritmos genéticos

#### 4.3.1.1 Considerações gerais

O método principal escolhido neste trabalho para a resolução do problema de optimização é o chamado *algoritmo genético*. É um algoritmo de optimização global do tipo estocástico. Os algoritmos genéticos geram soluções usando processos inspirados pela evolução biológica (selecção natural, reprodução, mutação), sendo parte destes baseados em computações com números gerados aleatoriamente. O algoritmo em cada iteração modifica uma população de pontes individuais, a partir das soluções melhores e através de processos semi-aleatórios é criada uma geração seguinte. Após múltiplas iterações o conjunto da população converge para um mínimo da função objectivo.

Estes algoritmos têm a grande vantagem de usar apenas os valores da função objectivo, neste caso o custo da ponte, no processo da procura da solução óptima, sem consideração da forma da função e como é avaliada. Logo, a continuidade e a diferenciabilidade da função não são requeridas nem usadas nos cálculos do algoritmo (Arora, 2004). Assim os algoritmos genéticos têm um campo de aplicação muito mais amplo, em comparação com outros algoritmos existentes na literatura, podendo ser aplicados a problemas discretos, contínuos e não diferenciáveis. À partida os algoritmos genéticos apresentam maior aptidão para determinar a solução óptima global devido à sua capacidade de fazer o cálculo para vários pontos da função objectivo em simultâneo, que consoante o tamanho e a distribuição da população inicial adoptada, esses pontos pertencem a várias *bacias de atracção*.

Este algoritmo foi o escolhido como o principal na resolução do problema de optimização de pontes de betão com elementos pré-fabricados pelas vantagens descritas anteriormente e por ser capaz de lidar com variáveis que só podem ser descritas com números inteiros (variáveis

discretas). Têm-se como exemplo de variáveis discretas neste trabalho: tipo de viga de catálogo, número de vigas no tabuleiro, número de cabos de pré-esforço, *etc.*

#### 4.3.1.2 Etapas do algoritmo genético

Para auxiliar na explicação dos passos de uma iteração do algoritmo genético apresenta-se na Figura 4.3 um problema de optimização com objectivo de minimizar o valor da função de Rastrigin (Equação 4.2) com duas variáveis de decisão  $x$  e  $y$ . Na representação gráfica à direita é apresentada a função no plano  $x$ - $y$  com isolinhas para o valor da função, mostrando-se a alternância dos mínimos e máximos da função.

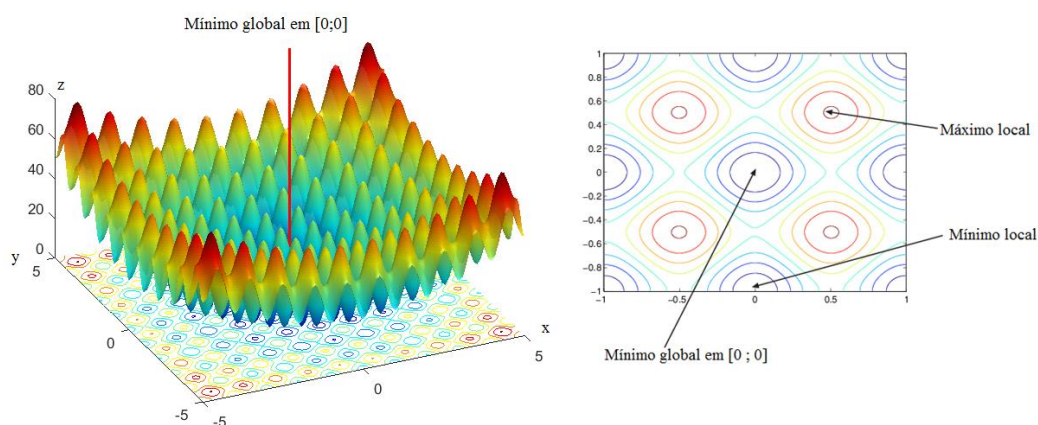


Figura 4.3 – Representação 3D da função de Rastrigin e do seu mínimo global.

A função de Rastrigin é definida como:

$$Ras(x, y) = 20 + x^2 + y^2 - 10(\cos(2\pi \times x) + \cos(2\pi \times y)) \quad (4.2)$$

e é usada como teste de performance de algoritmos. Este uso advém de a função apresentar, como se pode ver na Figura 4.3, grande número de mínimos locais, mas apenas um mínimo global com valor 0 no ponto [0;0] no plano  $x$ - $y$ , indicado pela linha vertical vermelha.

Estas características, que também são comuns aos problemas de engenharia civil, o elevado número de mínimos locais, fazem que os algoritmos de pesquisa directa que são baseados em gradientes apresentem dificuldade em obter a solução óptima global.

Segue-se uma descrição sumaria dos passos do algoritmo genético:

##### ***1- Criação aleatória de uma população inicial de pontes***

A população inicial tem um número de indivíduos definido, sendo um dos factores principais na qualidade da solução obtida e no tempo de computação. O aumento do tamanho da população

geralmente permite ao algoritmo genético pesquisar mais pontos na função objectivo e dessa forma obter melhores resultados. No entanto, quanto maior o tamanho da população mais tempo demora o algoritmo a calcular cada geração. O manual do MATLAB (MATLAB Documentation, 2016) tem várias sugestões para este parâmetro como o tamanho da população ser igual a, pelo menos, o número de variáveis de decisão. A opção seguida foi a de calibrar o tamanho da população, para cada problema resolvido, de modo a fornecer bons resultados finais sem requerer tempos de execução do programa proibitivos. Isto resultou, tipicamente, em populações entre 50 a 250 pontes, mais que isso o programa foi limitado pela memória (RAM) disponível no computador usado para executar o programa.

A população é criada com base numa distribuição semi-aleatória de valores atribuídos a cada variável de decisão de cada indivíduo da população. Esta distribuição de valores das variáveis é restringida por limites inferiores e superiores atribuídos às variáveis contínuas ou uma lista de valores possíveis para as variáveis discretas (*restrições de projecto*).

Para exemplificar estes conceitos, aplicou-se o algoritmo à minimização da função de Rastrigin (Equação 4.2), apresentando-se na Figura 4.4 a respectiva população inicial gerada para um valor de 20 indivíduos.

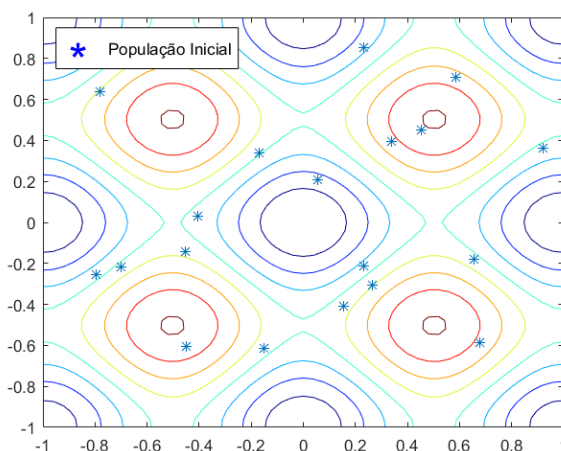


Figura 4.4– População inicial.

**2- Criação iterativa de novas populações, tendo como base os indivíduos da iteração actual, seguindo os seguintes passos:**

- a. Cálculo das *restrições de desempenho* e da *função objectivo* para cada indivíduo da população actual.
- b. Escalonamento dos valores obtidos em a. através do valor da função objectivo normalizada (valor *penalty*)

c. Dependendo do seu valor *penalty* cada indivíduo da população de pontes sofre um dos seguintes processos: *selecção elite*, *reprodução* e *mutação*.

A cada iteração o algoritmo genético usa os indivíduos da população actual para criar descendentes que iram formar a população da geração seguinte. O algoritmo agrupa os indivíduos da população presente em três grupos com base no valor da função objectivo normalizada (valor *penalty*) de cada indivíduo. Cada grupo de pontes vai sofrer processos diferentes para criar os elementos da população seguinte, estes três tipos de descendentes são:

— Descendentes elite, são indivíduos da geração actual que apresentam os melhores valores *penalty* e automaticamente “sobrevivem” para a geração seguinte. O parâmetro do número de indivíduos de elite por população, após vários testes acabou por ser definido para o valor por defeito do MATLAB, ou seja, 5% do tamanho da população.

— Descendentes cruzados, são criados através da combinação aleatória dos vectores das variáveis de decisão (Equação 4.4) de um par de pontos da geração actual, classificados como indivíduos “pai”.

Este processo também é conhecido por *crossover* ou “reprodução” e nele uma percentagem da população actual, é classificada como indivíduos “pai” dessa geração. Foi calibrado o valor desta percentagem para 75%.

— Descendentes mutados, são os restantes pontos da população actual não afectados pelos processos anteriormente descritos. Nestes pontos as variáveis de decisão são alteradas para valores aleatórios de acordo com as *restrições de projecto*.

Na Figura 4.5, são representados esquematicamente os três processos de criação de descendentes.

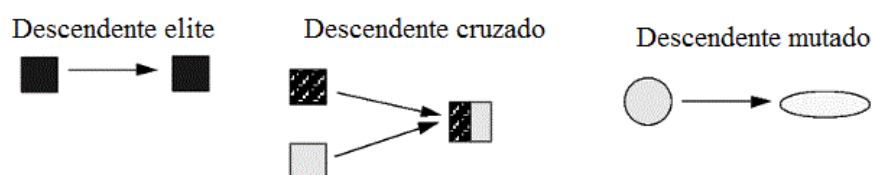


Figura 4.5– Esquema dos processos de criação de descendentes (adaptado (MATLAB Documentation, 2016))

d. Substituição da população actual pelos descendentes criados através dos processos descritos no ponto anterior, sendo criada a nova população para a iteração seguinte.

**3- Algoritmo calcula gerações sucessivamente até um dos critérios de paragem ser alcançado.**

Na Figura 4.6 pode observar a distribuição da população ao longo de várias gerações e a sua convergência para o mínimo global, no problema de minimizar a função de Rastrigin (Equação 4.2).

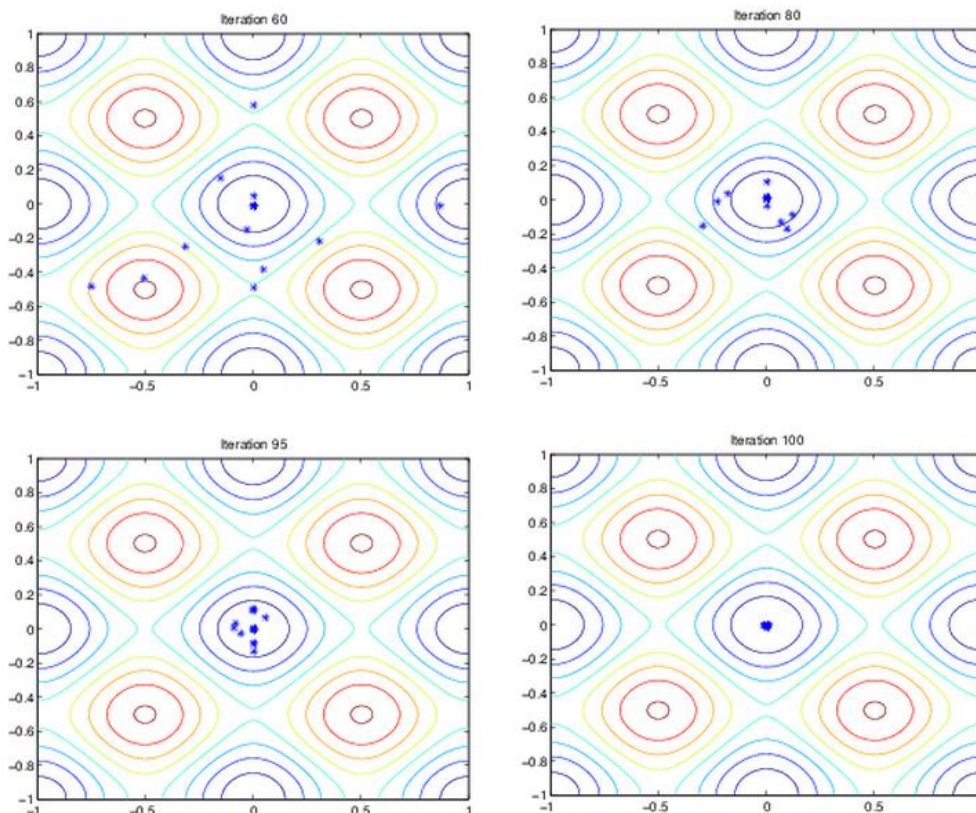


Figura 4.6– Distribuição da população ao longo de várias gerações (MATLAB Documentation, 2016).

Os critérios de paragem são calibrados para permitir ao algoritmo pesquisar em pontos pertencentes ao maior número de *bacias de atracção* e permitir a população convergir para o mínimo global. Os critérios de paragem que podem ser impostos ao algoritmo são: número de gerações, limites de tempo, número de gerações sem melhora da solução final e outros.

Na Figura 4.7 apresenta-se o esquema de diagrama de blocos do programa desenvolvido no caso da optimização com algoritmo genético. Os processos específicos do algoritmo genético encontram-se indicados a azul.

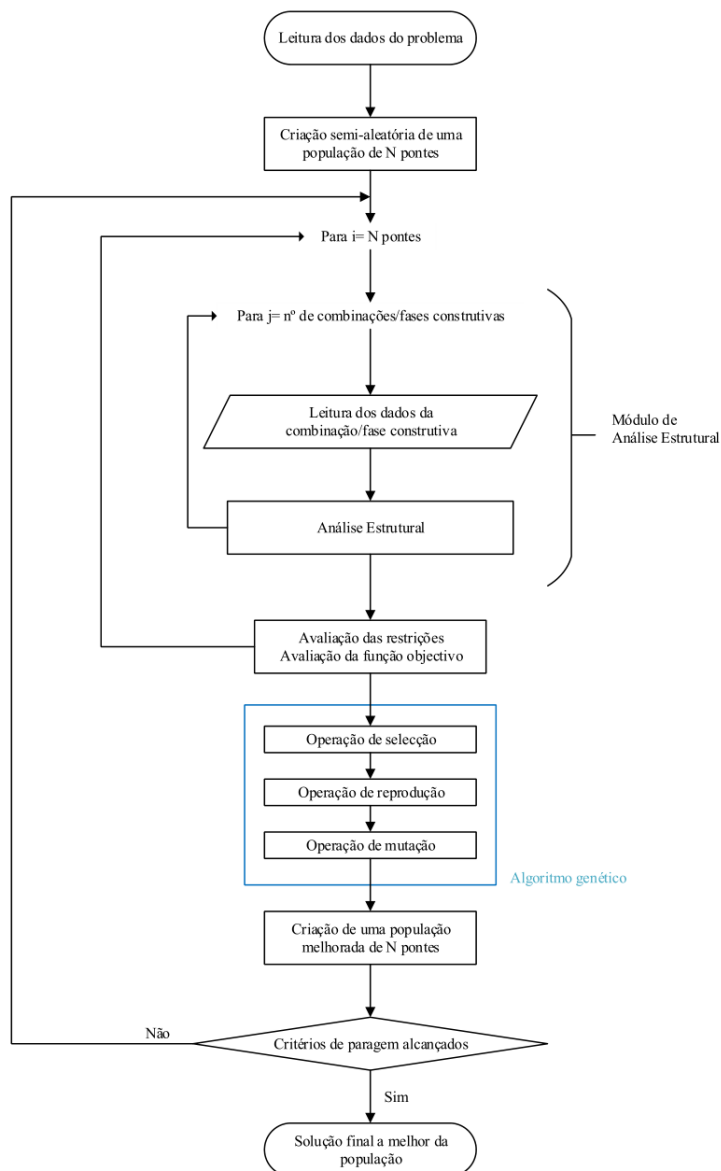


Figura 4.7 – Diagrama de blocos do programa desenvolvido

### 4.3.2 Outros algoritmos

Para comparar as soluções finais obtidas e os tempos de computação foram também utilizados outros algoritmos de optimização que aceitam restrições não-lineares.

O algoritmo de *enxame de partículas*, normalmente denominado por *particle swarm*, foi adicionado ao módulo de optimização usando a implementação em MATLAB deste algoritmo por Chen (2009). Tal como o *algoritmo genético* é um algoritmo estocástico e pode ser acelerado empregando a *computação em paralelo*. Da mesma forma que o algoritmo genético

este algoritmo tem por base uma população inicial de soluções, que são avaliadas com a função objectivo. Nele cada solução é uma partícula que se desloca pela função objectivo com uma determinada *velocidade* (grau de variação das VD) e *atracção* (coeficiente que aproxima as VD entre partículas) que se alteram em cada iteração para que no final o conjunto da população convirja para o mínimo global.

O outro algoritmo de optimização global utilizado neste trabalho foi o algoritmo de *pesquisa de padrões* ou *pattern search*. Este algoritmo ao contrário dos anteriores inicia a pesquisa do mínimo global a partir de um único ponto viável inicial. São calculados pontos em redor ao ponto inicial de pesquisa variando as variáveis de decisão com o propósito de encontrar o gradiente da função objectivo. Para o ponto em redor com menor valor da função objectivo esse é considerado o ponto inicial de pesquisa na iteração seguinte. Foi utilizada a implementação em MATLAB deste algoritmo existente na *global optimization toolbox* do próprio MATLAB.

#### 4.4 Função objectivo

A função objectivo é a expressão que o algoritmo de optimização trabalha para encontrar o seu valor mínimo, respeitando as restrições de projecto. Neste trabalho considerou-se o custo total de uma determinada ponte que é função das variáveis de decisão. A função de custo considerada é definida pela Equação 4.3 envolvendo várias parcelas.

$$C = \sum_{i=1}^{nEFB} CBA \cdot A_{tabuleiro_i} \cdot L_i + \sum_{j=1}^{nEP} CPE \cdot A_{cabo_j} \cdot L_j + \sum_{k=1}^{nV\tilde{A}O} (CT \cdot M_k + CE \cdot L_k) \cdot n_k \quad (4.3)$$

Assim, o custo da ponte é dado pelos somatórios em função de  $nEFB$  o número de elementos finitos de betão armado,  $nEP$  o número de elementos de cabos de pré-esforço e  $nV\tilde{A}O$  o número de vãos com emprego de peças de vigas pré-fabricadas.

Cada uma destas parcelas tem o seu custo afecto a custos unitários onde  $CBA$  é o custo do betão armado por metro cúbico,  $CPE$  o custo de armadura activa por metro cúbico,  $CT$  o custo do transporte de uma viga pré-fabricada e  $CE$  os custos de elevação/aplicação de uma viga pré-fabricada.

No caso da optimização por algoritmo genético, a função objectivo é avaliada em cada geração para cada indivíduo da população, excepto se a ponte em questão for considerada não viável

(não cumpre as *restrições de desempenho*), sendo então atribuído a esse elemento da população um determinado valor *penalty*.

Este valor *penalty* consiste na soma de todos os valores das restrições de desempenho normalizadas, mais o valor da função objectivo máximo de entre os elementos viáveis dessa geração. O valor máximo da função objectivo numa dada geração nem sempre existe, dependendo da modelação e do exemplo em questão. Isto pode ocorrer principalmente nas iterações iniciais devido à optimização por algoritmos genéticos não partir de uma solução viável, mas de uma população semi-aleatória gerada dentro de parâmetros pré-definidos (*restrições de projecto*).

#### 4.5 Variáveis de decisão

As *variáveis de decisão* do problema de optimização são os parâmetros a que é conferida liberdade de variação e são iterativamente modificadas pelo algoritmo de optimização com o propósito de encontrar o mínimo da função objectivo. Como já referido, na formulação geral de um problema de optimização (Equação 4.1) a função objectivo e os objectivos de projecto têm a sua resposta relacionada com os valores das variáveis de decisão definidas.

Nas estruturas de engenharia civil a sua resposta estrutural é condicionada principalmente pela rigidez dos elementos constituintes e a função objectivo (custo) depende principalmente do material e volume dos elementos. Logo, na optimização estrutural são consideradas como variáveis de decisão os parâmetros que afectam esses factores. Usualmente as dimensões das secções transversais dos elementos da estrutura, parâmetros definidores da geometria da mesma ou propriedades dos materiais que a constituem.

Para além das variáveis de decisão existem outros parâmetros caracterizadores que influenciam a resposta da estrutura e que não são alterados no decurso do processo de optimização sendo designados como *parâmetros pré-definidos*. Tem-se como caso de parâmetro pré-definido a largura da laje do tabuleiro (*blj*), dependente do número de vias e tipologia pretendida.

Os valores das variáveis de decisão podem ser de natureza contínua ou discreta. As variáveis de decisão contínuas possuem um intervalo de variação podendo assumir qualquer valor dentro desse intervalo. As variáveis de decisão discretas apenas podem tomar valores isolados, dentro de uma lista de valores permitidos.

Como exemplo de variável de decisão contínua pode referir-se a altura de uma viga que pode tomar qualquer valor entre 0,50 e 2 m. De outra forma, se a variável de decisão for definida como discreta, o programa só atribui um valor pertencente a uma lista pré-definida na



modelação do problema, por exemplo [0,50; 0,75; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75; 2,00]. Adicionalmente as variáveis de decisão de natureza contínua podem ser consideradas como discretas. Neste trabalho, para a respectiva variável de decisão contínua foi criada a referente lista de valores discretos entre os limites das *restrições de projecto*, com discretização de 0,01m.

No âmbito dos problemas de optimização é usual representar as variáveis de decisão por  $x$ , podendo ser agrupadas no vector  $\underline{x}$ :

$$\underline{x} = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}^T \quad (4.4)$$

onde  $n$  representa o número de variáveis de decisão.

No Quadro 4.1 tem-se as variáveis de decisão consideradas neste trabalho.

Quadro 4.1 – Descrição dos tipos de variáveis de decisão implementadas

| <i>Nome</i> | <i>Descrição</i>   |
|-------------|--|
| $n$         | Número de elementos de viga  |
| $ifi/inc$   | Inclinação nos banzos inferiores (vigas I) /Inclinação das almas (vigas U) |
| $ifs$       | Inclinação nos banzos superiores   |
| $h$         | Altura do elemento de viga/Tipo de viga de catálogo                        |
| $tw$        | Espessura das almas  |
| $tfs$       | Espessura dos banzos superiores  |
| $tfi$       | Espessura dos banzos inferiores  |
| $bfs$       | Largura dos banzos superiores  |
| $bfi$       | Largura dos banzos inferiores (vigas I)                                    |
| $tlj$       | Espessura da laje de betão armado <i>in situ</i>                           |
| $Fpe$       | Força de pré-esforço   |
| $Nstrands$  | Número de cabos de pré-esforço   |

## 4.6 Restrições

Na resolução do problema de optimização cada solução possível para a ponte é um ponto na função objectivo, sendo definido pelo vector de variáveis de decisão. No entanto, do conjunto total de soluções para a estrutura nem todas demonstram um adequado comportamento estrutural (*ex.* tensões e deformações não respeitam as condições normativas) ou possibilidade geométrica (*ex.* espaçamento entre vigas negativo).

Para prevenir estas e outras situações são impostas no módulo de optimização condicionantes, chamadas de *objectivos* ou de *restrições*. As soluções que cumpram todos os constrangimentos são designadas por *soluções admissíveis*. Os objectivos de projecto representam, deste modo,

as condições de desempenho a atingir com o projecto da estrutura, visando a obtenção de uma solução económica, segura e estruturalmente eficiente (Martins, 2015).

Na implementação das condicionantes existem dois tipos de restrições, que são as *restrições de projecto* e as *restrições de desempenho*.

#### 4.6.1 Restrições de projecto

As *restrições de projecto* ou *design constraints* são impostas como limites superiores e inferiores às variáveis de decisão limitando a gama de valores entre os quais elas podem variar. No caso de uma variável de decisão modelada como discreta a imposição destes limites é feita na respectiva lista de valores permitidos. Estas restrições têm forma explícita e surgem de várias considerações do ponto de vista da funcionalidade, de fabricação ou de estética.

#### 4.6.2 Restrições de desempenho

As *restrições de desempenho* são funções não-lineares que dependem das variáveis de decisão. Estas restrições são expressas através dos seus valores normalizados que deverão ser menores que zero para a ponte em análise ser considerada como *solução admissível*.

O exemplo principal deste tipo de restrições são as limitações impostas nos deslocamentos e nas tensões resultantes da análise de cada estrutura da população. Também pertencem a este grupo as restrições que dependem da geometria da secção transversal do tabuleiro, como a esbelteza das vigas, os limites de espaçamento entre vigas e outros.

No caso particular do projecto de uma ponte de elementos pré-fabricados, o conjunto de objectivos a garantir relacionados com a verificação da resistência e das condições de serviço foi definido com base em disposições regulamentares e critérios adicionais como explicado na secção 2.5.

É especialmente importante nas pontes de elementos pré-fabricados proceder à verificação de objectivos de tensões não só para a ponte completa, mas também para as diversas etapas de transporte, armazenamento e elevação das peças durante do processo construtivo da mesma. Estes aspectos são verificados para um caso de carga e modelo estrutural adicional seguindo as especificações do EC1-1-6 (EN 1991-1-6, 2005). Este modelo adicional consiste numa só peça de viga pré-fabricada simplesmente apoiada, com a localização dos apoios nos pontos de amarração para a elevação, assumidos para as extremidades da peça. No modelo estrutural considera-se apenas a acção do peso próprio, majorada para ter em conta os efeitos dinâmicos e inerciais. Esta majoração do peso próprio foi assumida com o valor de 1,5, como recomendado por Mourachev et al. (1980).

De seguida descrevem-se as *restrições de desempenho* implementadas no módulo de optimização:

### a) Deslocamentos dos pontos da estrutura

O controlo da deformação da estrutura como está disposto na cláusula 7.4 do EC2-2 (EN 1992-2, 2005) é levado a cabo através da imposição de um objectivo que limita os valores dos deslocamentos dos pontos da estrutura (nós da malha de elementos finitos). Este objectivo pode ser expresso através de

$$g_1(\underline{x}) = \frac{|\delta|}{\delta_0} - 1 \leq 0 \quad (4.5)$$

onde  $\delta$  representa o valor do deslocamento (no nó em análise) e  $\delta_0$  representa o valor admissível para o deslocamento a controlar (podendo ser determinado pela norma).

Este objectivo é considerado na situação de ponte completa em condições de carga permanente em serviço. A norma EC2-2 (EN 1992-2, 2005) especifica para pontes não impõe um valor para o deslocamento máximo referindo apenas que deve ser apropriado, tendo em conta a natureza da estrutura, dos acabamentos e outros.

### b) Tensões nos elementos de betão estrutural em fase construtiva e em serviço

Como mencionado anteriormente no Capítulo 3 é feita uma limitação das tensões nos elementos de betão estrutural. Impuseram-se estes limites segundo o EC2 (EN 1992-2, 2005), para a ponte completa em condições de serviço e para as fases do processo construtivo. A adopção destes limites permite evitar a formação de fendas longitudinais, a micro-fendilhação e os níveis de fluência elevados, podendo a análise ser efectuada em regime de fluência linear.

Limitaram-se os valores das tensões de tracção ao valor do quantilho de 5% do valor característico da tensão de rotura do betão à tracção simples ( $f_{ctk, 0,05}$ ), Equação 4.6.

$$g_2(\underline{x}) = \frac{\sigma_c}{f_{ctk, 0,05}} - 1 \leq 0 \quad (4.6)$$

onde  $\sigma_c$  representa o valor máximo da tensão de tracção actuante no elemento de betão.

No que respeita às tensões de compressão limitaram-se a 45% do valor característico da tensão de rotura à compressão do betão ( $f_{ck}$ ), sendo este objectivo dado pela expressão

$$g_3(\underline{x}) = \frac{\sigma_c}{0,45 f_{ck}} - 1 \leq 0 \quad (4.7)$$

em que  $\sigma_c$  representa o valor máximo da tensão compressão actuante no elemento de betão.

### c) Tensões nos elementos de betão estrutural para a verificação da resistência

Considerou-se também um outro tipo de objectivo para verificação da resistência dos elementos de betão estrutural. Este objectivo é dado por:

$$g_4(x) = \frac{\sigma_c}{\sigma_{adm}} - 1 \leq 0 \quad (4.8)$$

onde  $\sigma_c$  representa o valor máximo de tensão actuante e  $\sigma_{adm}$  representa o valor da tensão admissível no elemento de betão.

O valor da tensão admissível é determinado com base nos valores dos esforços resistentes correspondentes obtidos para a secção de betão armado a partir do respectivo diagrama de interacção  $N_{Rd}-M_{Rd}$ , representado esquematicamente na Figura 4.10.

Este diagrama de interacção é determinado, para uma dada secção, através do equilíbrio interno da mesma, a partir do qual se obtém os respectivos esforços internos resistentes. De acordo com o EC2 (NP EN 1992-1-1, 2010) a capacidade resistente de um elemento de betão armado é baseada na definição de extensão máxima para o betão e para o aço. Neste trabalho foi adoptada esta abordagem e os correspondentes valores de extensão indicados na norma.

No cálculo da resistência da secção assumiu-se ainda que o aço apresenta comportamento elasto-plástico perfeito, assumiu-se também uma distribuição rectangular de tensões na zona comprimida do betão e desprezou-se a contribuição do betão traccionado. Assim, para uma dada distribuição de extensões na rotura da secção é possível determinar a correspondente distribuição de tensões e as respectivas forças no aço e no betão. Na Figura 4.8 representam-se os parâmetros intervenientes no equilíbrio interno de uma secção de betão duplamente armada sujeita a flexão composta.

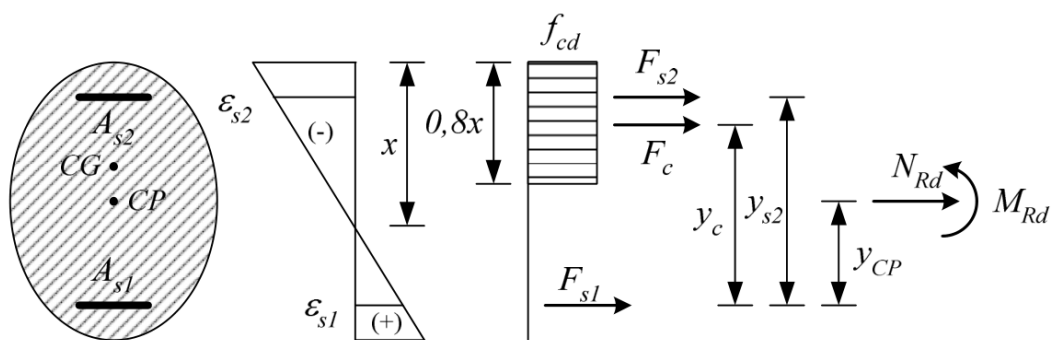


Figura 4.8 – Equilíbrio interno de secção de betão armado sujeita a flexão composta (Martins, 2015)

De acordo com o esquema da Figura 4.8 podem escrever-se as seguintes equações de equilíbrio

$$N_{Rd} = F_c + F_{s2} + F_{s1} \quad (4.9)$$

$$M_{Rd} = -F_c \cdot y_c - F_{s2} \cdot y_{s2} + N_{Rd} \cdot y_{CP} \quad (4.10)$$

onde  $F_c$  representa a força de compressão no betão,  $F_{s2}$  representa a força de compressão na armadura superior e  $F_{s1}$  a força de tracção na armadura inferior. Os valores destas forças serão positivos ou negativos consoante correspondam, respectivamente, a forças de tracção ou a forças de compressão.

De salientar o facto de que, para secções transversais com largura variável ao longo da altura, a força de compressão do betão é determinada dividindo a secção em faixas ao longo da altura e calculando a contribuição de cada uma delas. Deste modo o problema do cálculo do momento flector resistente se reduz ao problema de uma secção rectangular equivalente (Appleton, 2013a).

Na análise de um tabuleiro composto por múltiplas vigas integradas e uma laje a geometria equivalente é definida conforme exemplificado em Appleton (2013a), resultado na Figura 4.9

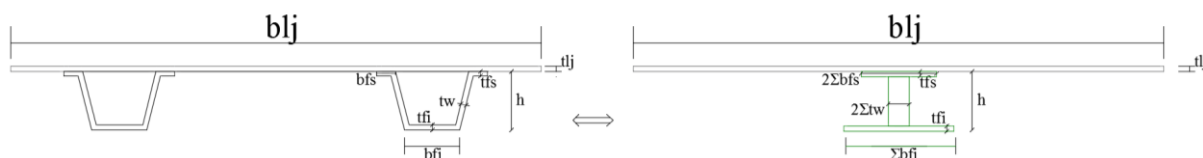


Figura 4.9 – Geometria equivalente do tabuleiro vigado para avaliar a capacidade resistente

Na Equação (4.10) o equilíbrio de momentos flectores é estabelecido a respeito da armadura inferior. Deste modo, os parâmetros  $y_c$ ,  $y_{s2}$  e  $y_{CP}$  representam as distâncias da armadura inferior, respectivamente, à resultante das forças de compressão no betão, à armadura superior e ao centro plástico da secção. O centro plástico da secção corresponde à posição da resultante das forças quando a secção está totalmente comprimida ou totalmente traccionada, ou seja, quando a distribuição de tensões e extensões é constante em toda a secção.

Para um determinado diagrama de extensões na rotura calculam-se os esforços resistentes obtendo-se um ponto no diagrama de interacção. Repetindo este processo iterativamente para todos os possíveis diagramas de rotura entre os limites para as extensões para o betão e aço presentes no EC2 obtêm-se todos os pares de esforços resistentes ( $N_{Rd}$ - $M_{Rd}$ ) que constituem o diagrama de interacção para uma determinada quantidade de armadura. Este diagrama pode ser expresso pelas Equações 4.11 e 4.12 em termos de grandezas adimensionais utilizando os valores reduzidos dos esforços resistentes, dados pelas expressões do valor reduzido do esforço axial resistente ( $\nu_{Rd}$ ) e do valor reduzido do momento flector resistente ( $\mu_{Rd}$ ).

$$v_{Rd} = \frac{N_{Rd}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \quad (4.11)$$

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Rd}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \quad (4.12)$$

No modelo numérico desenvolvido foi implementado o cálculo dos diagramas de interacção seguindo o procedimento descrito, sendo gerado um diagrama para cada secção transversal de viga de cada ponte da população nas diversas gerações.

Na Figura 4.10 representa-se, esquematicamente, o diagrama de interacção adimensional adoptado para a verificação da resistência dos elementos de betão estrutural. A verificação da resistência da secção é efectuada comparando os valores das tensões devidos aos esforços actuantes com os valores das tensões correspondente aos esforços resistentes. Assim, para os pontos correspondentes a esforços actuantes que se encontrem no interior do perímetro delimitado pelo diagrama de interacção está garantida a resistência da secção.

No cálculo dos objectivos definidos pela Equação 4.8 e tal como ilustra na Figura 4.10, uma dada tensão actuante ( $\sigma_c$ ) a que corresponde um par de esforços actuantes ( $N_{Ed}-M_{Ed}$ ) calculam-se os respectivos esforços resistentes ( $N_{Rd}-M_{Rd}$ ) e a correspondente tensão admissível ( $\sigma_{adm}$ ).

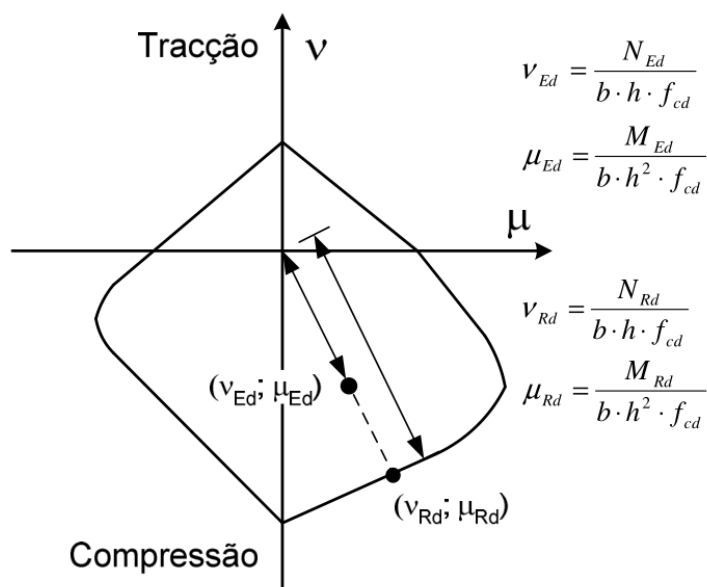


Figura 4.10 – Exemplo de diagrama de interacção adimensional para um elemento de betão (Martins, 2015)

#### d) Tensões nos cabos de pré-esforço

É estabelecido um limite segundo o EC2-1-1 (NP EN 1992-1-1, 2010) de 75% do valor característico da tensão de rotura à tracção do aço de pré-esforço para a verificação da resistência dos elementos de cabo, sendo o objectivo escrito da seguinte forma:

$$g_5(\underline{x}) = \frac{\sigma_p}{0,75 \cdot f_{pk}} - 1 \leq 0 \quad (4.13)$$

em que se têm  $\sigma_p$  como a tensão no elemento de pré-esforço e  $f_{pk}$  o valor característico da tensão de rotura à tracção do aço das armaduras de pré-esforço.

#### e) Outras restrições

Foram implementadas restrições adicionais que não podiam ser adequadamente consideradas como limites nas variáveis de decisão (*restrições de projecto*, secção 4.5.1), tendo sido consideradas também como objectivos normalizados.

Estas restrições suplementares são expressas em função de relações entre dois ou mais valores das variáveis de decisão que descrevem a geometria das vigas e laje. E são definidas principalmente por razões estéticas e construtivas. Têm-se como exemplos: limitar a esbelteza das vigas; altura da alma da viga maior que a soma da altura dos banzos; o número de cabos de pré-tensão em função do número de elementos pré-fabricados de viga para resultar num número igual para todas as peças; limites superiores e inferiores para o espaçamento entre elementos pré-fabricados de viga; área de cabos de pré-esforço compatível com as dimensões da secção transversal da viga.

## 5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

### 5.1 Introdução

Neste capítulo as características e capacidades do modelo numérico desenvolvido são ilustradas através da resolução de um conjunto de exemplos de aplicação relativos a problemas de optimização de pontes de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados.

Deste modo, foram criados dois modelos estruturais. O primeiro consiste num viaduto contínuo de 3 vãos. Neste primeiro modelo são comparadas as soluções entre tipos de secção transversal para várias larguras de tabuleiro e comparados os algoritmos de optimização implementados.

O segundo modelo é composto por um vão de comprimento variável e foi utilizado para comparar a relação custo-vão entre tipos de secção transversal do tabuleiro.

### 5.2 Descrição geral dos exemplos numéricos

Para a demonstração das capacidades do modelo numérico desenvolvido são utilizados dois modelos estruturais de um viaduto que diferem entre si no número de vãos. O primeiro, *Exemplo A*, trata-se de um viaduto com 3 vãos contínuos, com os comprimentos de 10 m nos vãos laterais (denominados de vão 1) e 20 m no vão central (denominado de vão 2).

O outro modelo, *Exemplo B*, consiste num viaduto de apenas um vão em que se varia o comprimento, entre os 10 m e os 40 m. Este é utilizado para a avaliação da relação custo-vão para as pontes com secções transversais tipo I e tipo U.

As verificações para a fase de transporte e execução são realizadas com a metodologia mencionada no subcapítulo 4.6.2, para um sistema estrutural e de cargas adicional de acordo com o EC1-1-6 (EN 1991-1-6, 2005).

Como os exemplos de aplicação têm como foco principal a optimização do tabuleiro e com o intuito de acelerar a computação e melhorar a qualidade das soluções finais obtidas a estrutura foi simplificada, sem os pilares como uma viga contínua hiperestática, como se observa na Figura 5.1. A simplificação reduz o número de variáveis de decisão, conseqüentemente, o número de soluções possíveis. Para contextualizar, no modelo numérico do *Exemplo A* utilizando vigas do tipo U, mesmo após esta simplificação existem  $3,03 \times 10^{29}$  soluções possíveis, em relação às variáveis de decisão discretas consideradas. Apesar desse espaço de soluções só uma outra menor parte é que cumpre os objectivos de projectos impostos e é considerada como *solução admissível*.



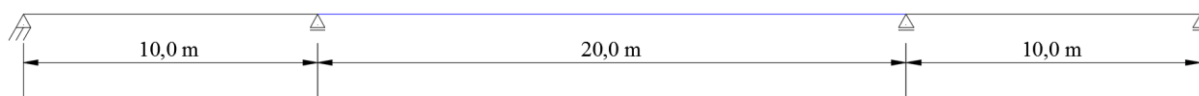


Figura 5.1 – Modelo estrutural simplificado utilizado (*Exemplo A*)

O tabuleiro destes viadutos foi modelado com recurso a uma malha linear de elementos finitos do tipo viga com de 1,0 metro de comprimento e um elemento finito do tipo cabo ao logo de cada vão. O modelo estrutural do *Exemplo A* possui um de total 41 nós e 43 elementos finitos, como demonstrado na Figura 5.3

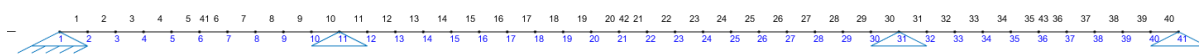


Figura 5.2 – Malha de elementos finitos do *Exemplo A*

Aos elementos finitos do tipo viga, para além da definição da secção transversal em estudo, são atribuídas as propriedades do betão classe C35/45 e aço A500NR para as armaduras ordinárias. Relativamente à armadura passiva fixou-se a taxa de armadura igual a 2% da área de secção transversal de betão. Para os elementos finitos tipo cabo foi definido um aço de pré-esforço Y1860.

O modelo estrutural do *Exemplo A* foi utilizado na resolução dos problemas de optimização da ponte de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados utilizando-se vigas do tipo U (13 variáveis de decisão), do tipo I (14 variáveis de decisão) e do tipo I de catálogo (7 variáveis de decisão).

Foi ainda elaborado um outro problema utilizando o *Exemplo A*, onde se considerou adicionalmente a escolha do tipo de secção transversal de vigas tipo U ou de vigas tipo I, como variável de decisão discreta. Mas constatou-se que tornava o problema demasiado complexo, mesmo para o algoritmo *genético*. Resultando em soluções finais de pouca qualidade em comparação a otimizar os dois tipos de peças de viga separadamente.

No *Exemplo A* também é feita a comparação de resultados obtidos com os algoritmos *genético* e *enxame de partículas* para um viaduto com 12,0 m de largura e executado com vigas tipo U e utilizando apenas variáveis de decisão contínuas (11 variáveis de decisão).

Em termos de combinações para o modelo de 3 vãos (*Exemplo A*) são consideradas 3 fases (modelos estruturais e de carregamentos) para os Estados Limites Últimos e para os Estados Limites de Serviço, onde é feita a alternância de sobrecargas, mais uma fase correspondente ao transporte e aplicação. Totalizando 7 fases a analisar e a verificação dos respectivos objectivos por ponte individual da população. Para o modelo de um só vão (*Exemplo B*) como não é

necessário as verificações da alternância de sobrecargas são consideradas 3 combinações (ULS, SLS, transporte) por ponte.

Os valores utilizados para os parâmetros da função objectivo (Equação 4.3) são descritos no Quadro 5.1. O custo *CBA* provem de Martins et al. (2016a) e os restantes de Martí et al. (2013). Os valores usados para estes custos unitários são provenientes de fontes diferentes e de anos diferentes, não estando exactamente correctas as relações entre custos, mas devido á formulação geral do programa, podem ser posteriormente adaptados mais exactamente ao problema e à situação pretendida.

Quadro 5.1 – Custos unitários considerados na função objectivo

| <i>Custo dos materiais</i>        |           | <i>Custos de transporte</i> |           | <i>Custos de aplicação</i>     |           |
|-----------------------------------|-----------|-----------------------------|-----------|--------------------------------|-----------|
| Unidade                           | custo (€) | Peso máximo da viga [kN]    | custo (€) | Comprimento máximo de viga [m] | custo (€) |
| m <sup>3</sup> de betão armado    | 450       | 550                         | 975       | 20                             | 2900      |
| m <sup>3</sup> de armadura activa | 26540     | 660                         | 1275      | 25                             | 3000      |
|                                   |           | 800                         | 1650      | 30                             | 5100      |
|                                   |           | 1000                        | 1825      | 35                             | 5200      |
|                                   |           | 2000                        | 2825      | 40                             | 6200      |
|                                   |           | 4000                        | 3825      |                                |           |

Para as *restrições de projecto* são mostradas no Quadro 5.2 os limites adoptados para as variáveis de decisão utilizadas na modelação dos exemplos de aplicação.

Quadro 5.2 – Limites inferiores e superiores impostos às variáveis de decisão

| <i>Nome</i>     | <i>Limite inferior</i> | <i>Limite superior</i> |
|-----------------|------------------------|------------------------|
| <i>n</i>        | 2                      | 8                      |
| <i>ifi/inc</i>  | 2                      | 5                      |
| <i>ifs</i>      | 14                     | 23                     |
| <i>h</i>        | 0,5 m                  | 2,0 m                  |
| <i>tw</i>       | 0,10 m                 | 1,0 m                  |
| <i>tfs</i>      | 0,10 m                 | 0,50 m                 |
| <i>tfi</i>      | 0,10 m                 | 1,0 m                  |
| <i>bfs</i>      | 0,50 m                 | 2,0 m                  |
| <i>bfi</i>      | 0,20 m                 | 3,0 m                  |
| <i>tlj</i>      | 0,15 m                 | 1,0 m                  |
| <i>Fpe</i>      | 280 kN                 | 41850 kN               |
| <i>Nstrands</i> | 4                      | 200                    |

### 5.3 Optimização de viaduto com três tramos

Para o *Exemplo A* composto por três vãos alternados de 10 m (vão 1 a que correspondem as variáveis de decisão *Fpe1* e *Nstrands1*) e 20 m (vão 2 a que correspondem as variáveis de decisão *Fpe2* e *Nstrands2*) têm-se os seguintes resultados para os diferentes tipos de elementos pré-fabricados e para as larguras de tabuleiro de 12 e 20 m, utilizando a optimização por algoritmo *genético* com uma população de 50 pontes. Todas as variáveis apresentadas foram modeladas como discretas.

Quadro 5.3 – Resultados para o modelo de três vãos (Exemplo A)

|                             |                     | <i>Vigas U</i> |            | <i>Vigas I</i> |            | <i>Vigas I catálogo</i> |      |
|-----------------------------|---------------------|----------------|------------|----------------|------------|-------------------------|------|
| <i>blj (m)</i>              |                     | 20             | 12         | 20             | 12         | 20                      | 12   |
| <i>Variáveis de decisão</i> | <i>n</i>            | 4              | 2          | 5              | 3          | 6                       | 4    |
|                             | <i>inc; ifi/ifs</i> | 5              | 3          | 5/23           | 4/23       | –                       | –    |
|                             | <i>h (m)</i>        | 1,59           | 1,09       | 1,09           | 1,09       | 1,10                    | 1,10 |
|                             | <i>tw (m)</i>       | 0,14           | 0,14       | 0,16           | 0,16       | –                       | –    |
|                             | <i>tfs (m)</i>      | 0,10           | 0,10       | 0,10           | 0,10       | –                       | –    |
|                             | <i>tfi (m)</i>      | 0,16           | 0,20       | 0,10           | 0,12       | –                       | –    |
|                             | <i>bfs (m)</i>      | 0,63           | 0,60       | 1,70           | 1,82       | –                       | –    |
|                             | <i>bfi (m)</i>      | 1,05           | 1,14       | 0,77           | 0,57       | –                       | –    |
|                             | <i>tlj (m)</i>      | 0,15           | 0,17       | 0,19           | 0,18       | 0,18                    | 0,15 |
|                             | <i>Fpe1 (kN)</i>    | 1629           | 814        | 6110           | 5499       | 2444                    | 1629 |
|                             | <i>Fpe2 (kN)</i>    | 6514           | 2444       | 20367          | 14053      | 13442                   | 8146 |
|                             | <i>Nstrands1</i>    | 8              | 4          | 30             | 27         | 12                      | 8    |
|                             | <i>Nstrands2</i>    | 32             | 12         | 100            | 69         | 66                      | 40   |
| <i>Custo(€)</i>             | 150 487,83          | 92 796,02      | 176 650,07 | 106 518,10     | 183 104,00 | 110 927,18              |      |

Como se pode ver no Quadro 5.3 para ambas as larguras do tabuleiro o modelo utilizando vigas tipo U foi a que resultou em soluções finais de custo mais baixo. O uso de vigas tipo U em vez de vigas tipo I economiza o custo final em 14,8% na ponte de 20 m de largura e em 12,9% na ponte com 12 m de largura de tabuleiro.

Também de notar que a optimização das vigas I de catálogo produziu soluções marginalmente mais caras em comparação ao problema com vigas I. A consideração de um maior número variáveis de decisão seccionais, no problema com vigas I, permitiu a redução do custo em 3,5% na ponte *blj* igual a 20 m e em 4,0% na ponte *blj* igual a 12 m.

A computação do modelo numérico de vigas I de catálogo foi sempre a mais expediente, em média duas vezes mais rápida que os outros exemplos. Devido ao menor número de variáveis de decisão.

De seguida são apresentadas as janelas de resultados do programa relativas ao corte transversal do tabuleiro (Figura 5.3), aos esforços para a solução final da ponte com tabuleiro de 20m de largura utilizando vigas tipo I de catálogo numa das combinações de carga de Estados Limites Últimos. E a deformada final numa combinação de carga de Estados Limites de Serviço.

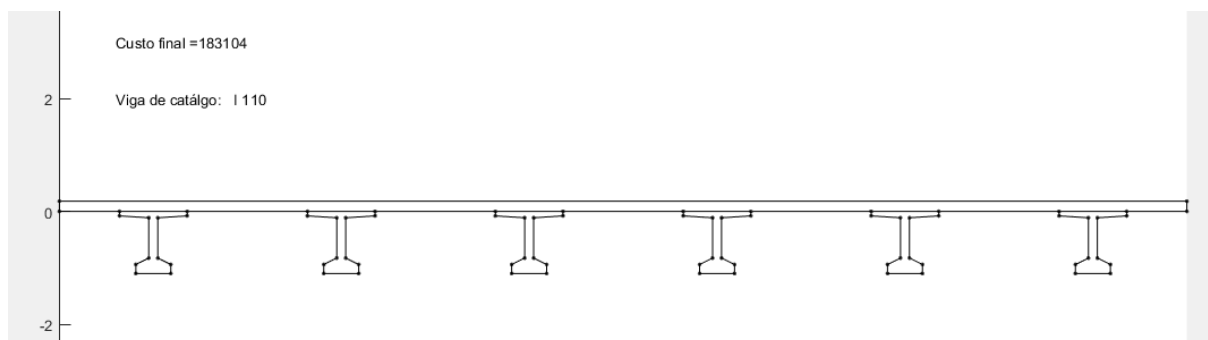


Figura 5.3 –Corte transversal do tabuleiro da solução final para a optimização da ponte com tabuleiro de 20m de largura utilizando vigas tipo I de catálogo

Este primeiro diagrama (Figura 5.4), corresponde ao esforço axial. A força de pré-esforço é a única contribuinte para o surgimento de esforço axial nos elementos da ponte. Pode-se observar a diferença da força de pré-esforço aplicada entre os vãos de 10 m e o vão de 20 m. Os elementos onde se verifica esforço axial positivo, tracção, são os elementos finitos do tipo de cabo de pré-esforço. Em simetria sob esforço axial negativo, compressão, são os elementos finitos de betão.

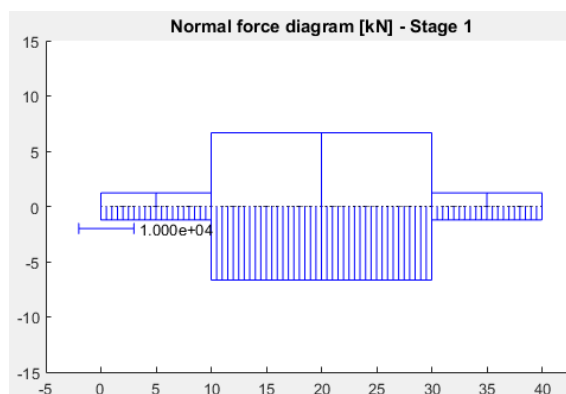


Figura 5.4 – Diagrama de esforço axial para o caso de carga 1 – estrutura optimizada (Exemplo A usando vigas I de catálogo)

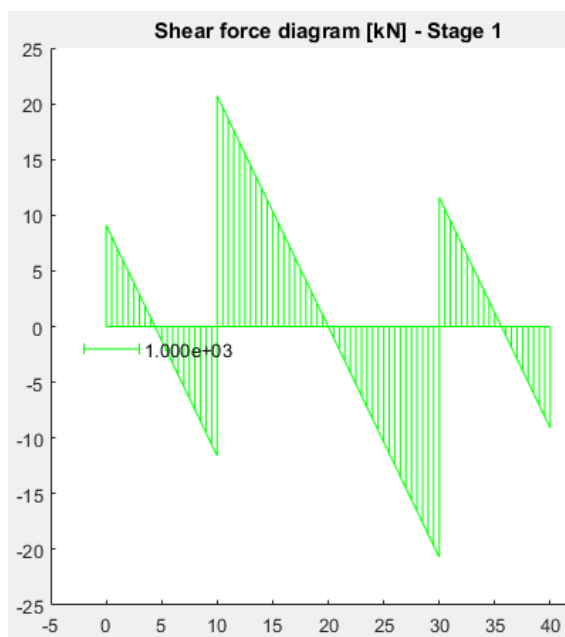


Figura 5.5 – Diagrama de esforço transversal para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo A usando vigas I de catálogo)

No diagrama de momento flector (Figura 5.6) existe um salto do valor do momento entre os vãos contínuos, e tal como nos restantes diagramas de esforços, esta diferença surge das díspares forças aplicadas de pré-esforço entre os vãos de 10 m e 20 m.

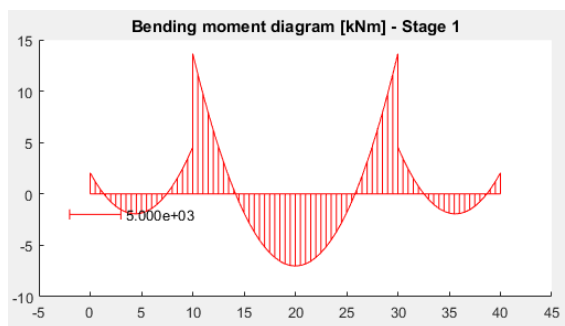


Figura 5.6 – Diagrama de momento flector para o caso de carga 1 – estrutura otimizada (Exemplo A usando vigas I de catálogo)

Na Figura 5.7 tem-se a configuração deformada da estrutura para o caso de carga de Estado Limite de Serviço para todos os vãos carregados. Como se pode observar esta resulta em deslocamentos nodais muito pequenos, bem abaixo dos limites impostos nos deslocamentos. Nos exemplos resolvidos a limitação de deslocamentos nunca foi condicionante para a solução ótima.

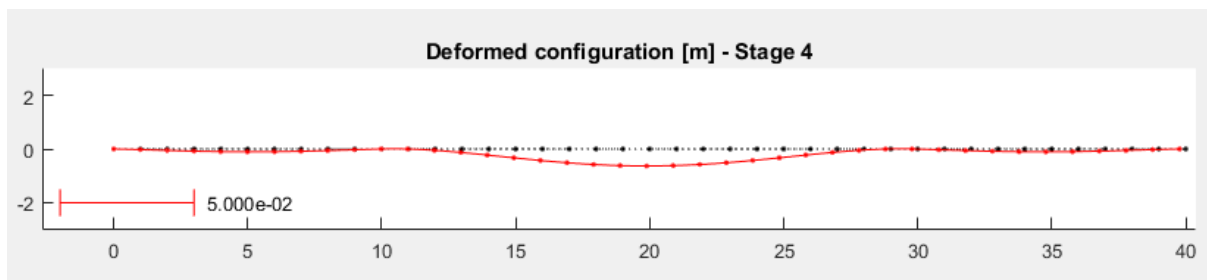


Figura 5.7 – Deformada para o caso de carga 4 – estrutura otimizada (Exemplo A usando vigas I de catálogo)

Na Figura 5.8 ilustra-se o gráfico geração-*penalty* para uma corrida de optimização para o problema da ponte do *Exemplo A*, com tabuleiro de 12 m de largura utilizando vigas tipo U, por algoritmo *genético*. Como já referido no Capítulo 4, devido à natureza estocástica do algoritmo *genético* todas as corridas do algoritmo são diferentes, mas todas tendem a convergir para um mínimo da função objectivo.

Na corrida ilustrada na Figura 5.8 não existiu na população inicial, gerada aleatoriamente dentro dos limites do Quadro 5.2, nenhuma ponte considerada *solução admissível*. Tal como explicado na secção 4.4, o algoritmo optimiza o valor de *penalty*. Logo até surgir na população uma *solução admissível* o algoritmo optimiza efectivamente apenas para o desempenho estrutural desprezando o custo. O que ocorre até à interacção 95 da corrida da Figura 5.8.

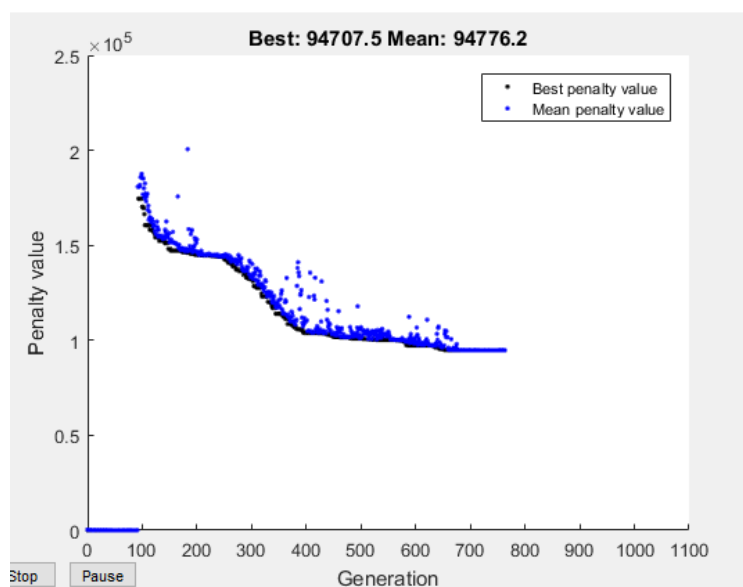


Figura 5.8 – Gráfico geração-*penalty* para a optimização da ponte com tabuleiro de 12 m de largura utilizando vigas tipo U

## 5.4 Estudo paramétrico em função do vão

Para o modelo estrutural do *Exemplo B*, de um só vão de comprimento variável, é feita a optimização pelo algoritmo *genético* de vários viadutos com largura de tabuleiro de 12 m para vãos entre 15 m e 40 m. Os problemas foram calculados com uma população de 50 pontes e todas as variáveis apresentadas foram modeladas como discretas.

Quadro 5.4– Resultados para o modelo de um vão para cada respectivo comprimento

|                             |                 | <i>Vigas Tipo U</i> |           |           |           |           |           |            |
|-----------------------------|-----------------|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
|                             |                 | <i>Vão (m)</i>      | 15        | 20        | 25        | 30        | 35        | 40         |
| <i>Variáveis de decisão</i> | <i>n</i>        |                     | 2         | 2         | 2         | 2         | 2         | 3          |
|                             | <i>inc</i>      |                     | 3         | 3         | 5         | 5         | 5         | 5          |
|                             | <i>h (m)</i>    |                     | 1,96      | 1,91      | 1,90      | 1,96      | 1,96      | 1,98       |
|                             | <i>tw (m)</i>   |                     | 0,14      | 0,14      | 0,14      | 0,14      | 0,14      | 0,14       |
|                             | <i>tfs (m)</i>  |                     | 0,10      | 0,10      | 0,10      | 0,10      | 0,12      | 0,10       |
|                             | <i>tfi (m)</i>  |                     | 0,20      | 0,20      | 0,20      | 0,20      | 0,20      | 0,20       |
|                             | <i>bfs (m)</i>  |                     | 0,64      | 0,64      | 0,70      | 0,76      | 0,56      | 0,50       |
|                             | <i>bfi (m)</i>  |                     | 1,06      | 0,97      | 1,38      | 1,29      | 1,76      | 1,78       |
|                             | <i>tlj (m)</i>  |                     | 0,17      | 0,18      | 0,18      | 0,17      | 0,17      | 0,15       |
|                             | <i>Fpe (kN)</i> |                     | 1629      | 4073      | 6924      | 10590     | 14256     | 20163      |
| <i>Nstrands</i>             |                 | 8                   | 20        | 34        | 52        | 70        | 99        |            |
| <i>Custo(€)</i>             |                 |                     | 33 721,80 | 43 895,80 | 56 837,20 | 72 596,60 | 87 202,30 | 125 649,00 |

|                             |                 | <i>Vigas Tipo I</i> |           |           |           |           |            |            |
|-----------------------------|-----------------|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
|                             |                 | <i>Vão (m)</i>      | 15        | 20        | 25        | 30        | 35         | 40         |
| <i>Variáveis de decisão</i> | <i>n</i>        |                     | 3         | 3         | 3         | 4         | 3          | 4          |
|                             | <i>ifi/ifs</i>  |                     | 5/23      | 5/23      | 4/22      | 5/23      | 4/23       | 5/23       |
|                             | <i>h (m)</i>    |                     | 0,92      | 1,16      | 1,54      | 1,26      | 1,90       | 1,98       |
|                             | <i>tw (m)</i>   |                     | 0,16      | 0,17      | 0,18      | 0,17      | 0,19       | 0,18       |
|                             | <i>tfs (m)</i>  |                     | 0,10      | 0,10      | 0,10      | 0,10      | 0,10       | 0,10       |
|                             | <i>tfi (m)</i>  |                     | 0,10      | 0,11      | 0,13      | 0,18      | 0,20       | 0,20       |
|                             | <i>bfs (m)</i>  |                     | 1,82      | 1,58      | 1,46      | 1,02      | 1,46       | 1,19       |
|                             | <i>bfi (m)</i>  |                     | 0,48      | 0,66      | 0,68      | 1,03      | 1,04       | 1,05       |
|                             | <i>tlj (m)</i>  |                     | 0,18      | 0,20      | 0,21      | 0,17      | 0,21       | 0,15       |
|                             | <i>Fpe (kN)</i> |                     | 5499      | 7943      | 9776      | 17922     | 17108      | 21996      |
| <i>Nstrands</i>             |                 | 27                  | 39        | 48        | 88        | 84        | 108        |            |
| <i>Custo(€)</i>             |                 |                     | 35 635,00 | 48 048,20 | 62 415,50 | 90 872,40 | 105 676,00 | 131 205,00 |

Com estes resultados é elaborado o seguinte gráfico entre a relação de custo-vão para cada tipo de peça pré-fabricada, e a respectiva linha de tendência exponencial ajustada aos valores obtidos (Figura 5.6).

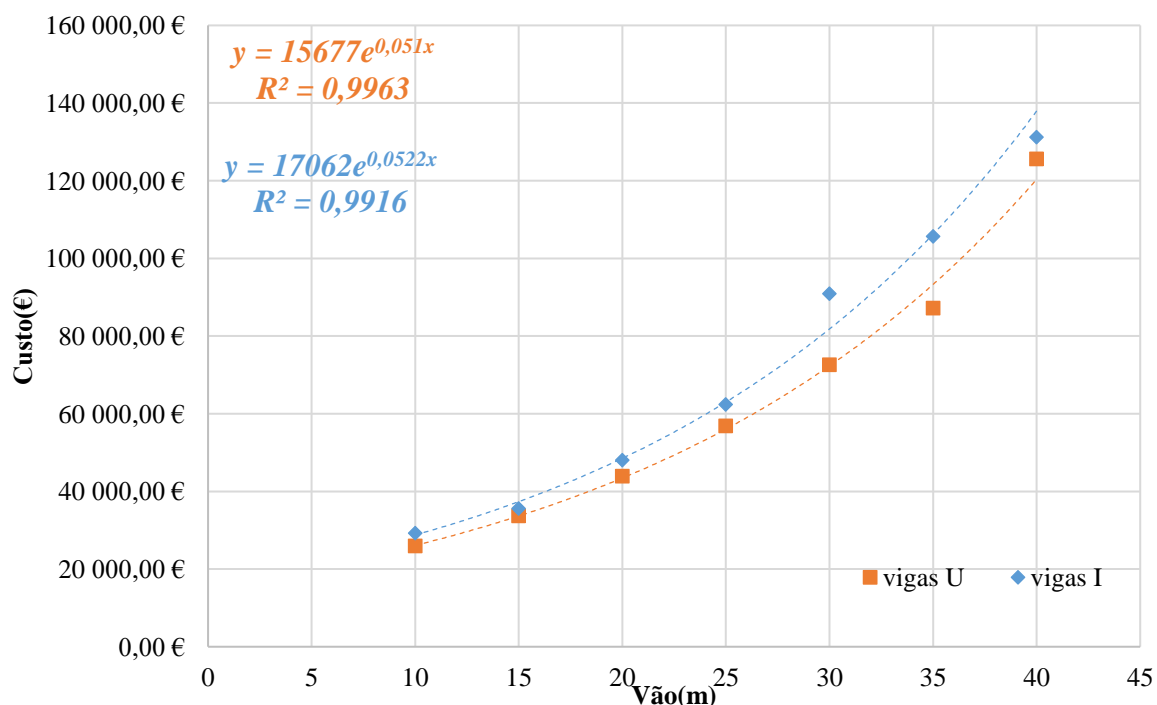


Figura 5.9 – Gráfico vão-comprimento

Conclui-se através dos quadros e do gráfico que o uso de vigas pré-fabricadas do tipo U é a solução mais económica para os vários comprimentos de vão para este tipo de viaduto. Também se observa uma boa correlação exponencial entre a evolução do custo em função do vão para ambos os tipos de viga. Apresentando-se as respectivas equações na Figura 5.9.

### 5.5 Comparação entre algoritmos

Finalmente foi realizada uma comparação entre vários algoritmos de optimização global aplicados ao *Exemplo A*, usando peças pré-fabricadas do tipo U, o tabuleiro com largura de 12 m. Como os algoritmos de *pesquisa de padrões* e *exame de partículas* não são capazes de aceitar variáveis discretas foram apenas consideradas as variáveis de decisão contínuas e imposto um valor de 2 no número de vigas do tabuleiro e de 3 para a inclinação das almas.

São apresentados os resultados entre o algoritmo *genético* e o *exame de partículas*, ambos com recurso à *computação em paralelo* e uma população de 50 pontes (Quadro 5.5). Também foi realizada a optimização deste problema com recurso ao algoritmo de *pesquisa de padrões*, mas a função objectivo revelou-se demasiado não-linear para este método, resultando em soluções



finais de pouca qualidade, muito distantes do mínimo global da função objectivo, em comparação com os outros dois algoritmos de optimização global.

Quadro 5.5 – Comparação entre algoritmos de optimização global

| <i>Algoritmo</i>                |                  | <i>Genético</i> | <i>Enxame de Partículas</i> |
|---------------------------------|------------------|-----------------|-----------------------------|
| <i>Variáveis de decisão</i>     | <i>h (m)</i>     | 1,84            | 1,94                        |
|                                 | <i>tw (m)</i>    | 0,14            | 0,14                        |
|                                 | <i>tfs (m)</i>   | 0,10            | 0,10                        |
|                                 | <i>tfi (m)</i>   | 0,19            | 0,19                        |
|                                 | <i>bfs (m)</i>   | 0,55            | 0,58                        |
|                                 | <i>bfi (m)</i>   | 1,08            | 1,18                        |
|                                 | <i>tlj (m)</i>   | 0,19            | 0,17                        |
|                                 | <i>Fpe1 (kN)</i> | 814             | 814                         |
|                                 | <i>Fpe2 (kN)</i> | 3258            | 2851                        |
|                                 | <i>Nstrands1</i> | 4               | 4                           |
|                                 | <i>Nstrands2</i> | 16              | 14                          |
|                                 | <i>Custo (€)</i> |                 | 95 103,10 €                 |
| <i>Iterações</i>                |                  | 392             | 475                         |
| <i>Tempo de computação(min)</i> |                  | 20,87           | 12,13                       |

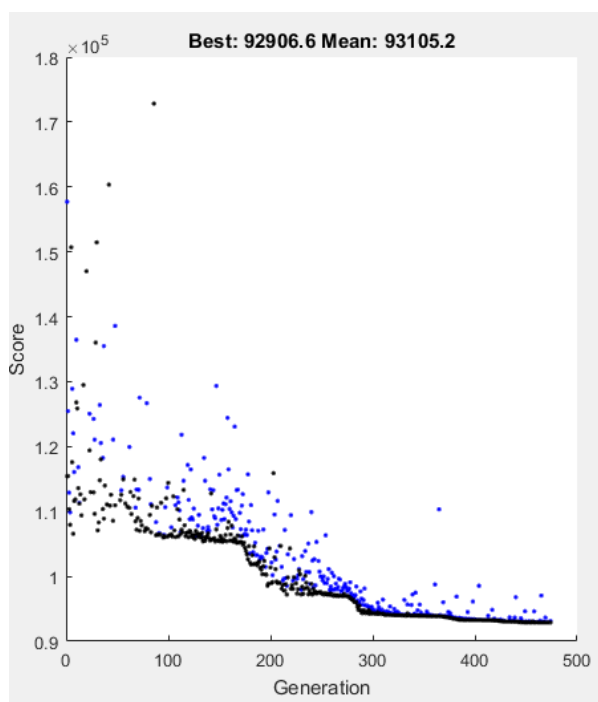


Figura 5.10 – Gráfico geração-custo para a optimização por algoritmo *enxame de partículas*

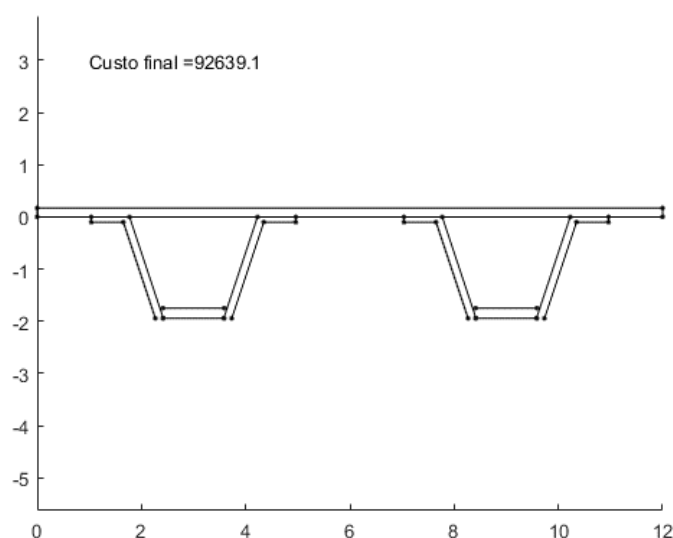


Figura 5.11 – Corte transversal do tabuleiro da solução final para a otimização por algoritmo *enxame de partículas*

Apesar de o algoritmo de *enxame de partículas* apresentar melhor desempenho, em comparação com o algoritmo genético, ao nível do custo da solução final (em média menor 2,6%) e do tempo computacional (em média menor 42%), tem duas grandes condicionantes que levam a concluir que não se encontra adaptado a ser aplicado em problemas de otimização deste tipo de estruturas.

A primeira como já foi referido é a impossibilidade da utilização de variáveis discretas, aspecto que tem especial importância nas pontes de elementos pré-fabricados. A outra desvantagem é a obrigação de iniciar com uma população de *soluções admissíveis*. Esta população inicial é obtida de forma aleatória para garantir uma distribuição inicial de pontos uniforme. Inicialmente o tempo para a criação da população era relativamente desprezável, mas à medida que foi adicionada complexidade ao modelo numérico, por adição de combinações de carga e de *restrições de desempenho*, este tornou-se quase proibitivo. Para os resultados apresentados no quadro 5.3, a população inicial demorou cerca de 12 horas a ser obtida. Apesar de ser necessário criar a população inicial apenas uma vez, a quantidade de tempo para tal minimiza as vantagens no tempo de computação do próprio algoritmo.

## 6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

### 6.1 Conclusões

Neste trabalho pretendia-se aplicar metodologias de optimização estrutural às pontes de betão armado pré-esforçado com elementos pré-fabricados e determinar o desempenho de vários algoritmos de optimização global. Para tal foi criada uma ferramenta de auxílio ao projecto de pontes, composta por dois módulos principais. O módulo de análise estrutural e o módulo de optimização têm por base inicial o código de MATLAB desenvolvido por Martins (2015).

O módulo de análise estrutural tem por base o método dos elementos finitos e leva em conta os efeitos diferidos do betão. No módulo de optimização foram defendidas a *função objetivo*, as *variáveis de decisão*, *restrições de projecto e de desempenho*, relativas ao tipo de pontes deste trabalho. Estes parâmetros têm em consideração as disposições normativas dos Eurocódigos e outros critérios construtivos e estéticos. O conjunto dos módulos desenvolvidos permitem minimizar o custo da estrutura, obtendo-se as dimensões das secções transversais dos elementos que verificam as restrições. Resultando em soluções económicas e estruturalmente eficientes.

A alteração do código inicial para possibilitar a utilização da *computação em paralelo* revelou-se essencial para a obtenção expedita de resultados, diminuindo-se os tempos de computação entre 4 e 8 vezes. Minimizando um dos maiores entraves à aplicação dos algoritmos de optimização globais a problemas de engenharia civil.

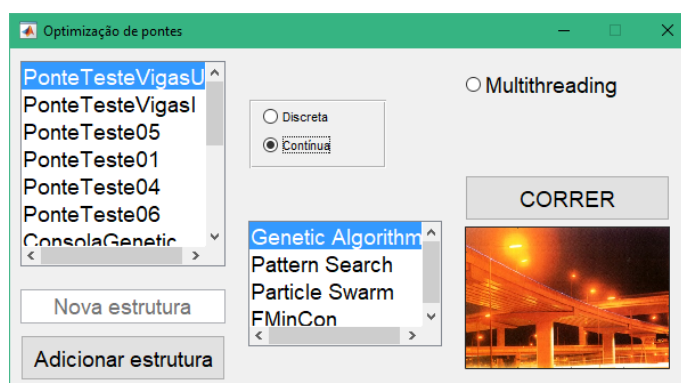


Figura 6.1– Janela inicial do programa desenvolvido

O algoritmo *genético* revelou-se adequado para a optimização deste tipo de estruturas especialmente por ter em conta natureza discreta de muitos parâmetros que descrevem as pontes de elementos pré-fabricados. Nas desvantagens o algoritmo *genético* apresenta grande consumo dos recursos do computador em comparação a outros algoritmos. Tanto de processador, mitigado

pela *computação em paralelo*, e de memória. Que levou a não ter sido possível correr estes exemplos para maiores populações, por falta de memória RAM.

Nos resultados obtidos para os exemplos apresentados conclui-se que a utilização de vigas pré-fabricadas tipo U conduz a custos menores em comparação com as vigas tipo I. No caso das vigas tipo I a consideração de variáveis de decisão seccionais permitiu ao algoritmo reduzir os custos em 4,0% relativamente à utilização de secções transversais pré-determinadas de catálogo. Também se verificou que o facto de considerar o tipo de viga como variável de decisão torna os problemas demasiado complexos para o algoritmo *genético*.

Através do estudo paramétrico do vão em viadutos determinou-se a correspondente correlação exponencial custo-vão e que no geral o emprego de vigas tipo U no tabuleiro é a solução mais económica.

Os outros tipos de algoritmos de optimização mostraram resultados iniciais promissores, apesar de não serem capazes de lidar com variáveis de decisão discretas. Mas à medida que se foi adicionando complexidade ao problema, por adição de restrições e fases construtivas, estes mostram-se incapazes de resolver os problemas de forma satisfatória como o algoritmo *genético*.

Para o algoritmo *pesquisa de padrões* os problemas de optimização resolvidos eram demasiado não-lineares. Resultando em soluções de menor qualidade e afastadas do mínimo global da função objectivo, em comparação com os outros algoritmos testados.

O algoritmo *exame de partículas*, relativamente ao algoritmo *genético*, mostrou melhor desempenho em termos tempo de cálculo, tendo-se obtido soluções mais económicas nos problemas só com variáveis de decisão contínuas. Mas a necessidade do algoritmo *exame de partículas* de iniciar os seus processos com uma população pré-determinada de *soluções admissíveis* minimizou completamente essas vantagens. A pré-determinação da população para os problemas mais complexos pode chegar a 12 horas.

## 6.2 Recomendações para estudos futuros

Relativamente à continuação futura desta temática tem-se no âmbito das pontes de elementos pré-fabricados:

A modelação de pré-laje na análise estrutural, visto que no presente na execução de pontes com elementos pré-fabricados o uso de pré-laje é pratica corrente;

Consideração da excentricidade dos cabos ao longo da viga como variável de decisão;

Consideração de variáveis de decisão para secção transversal das vigas variável ao longo do tabuleiro. Este aspecto permite soluções mais económicas e mais próximas dos projectos actuais. Foi feita uma tentativa inicial para a resolução deste problema, mas devido às características presentes do programa resultava em saltos muito grandes nas dimensões entre elementos finitos adjacentes.

Mais especificamente no âmbito da optimização estrutural, a generalidade dos módulos de análise estrutural e de optimização do programa desenvolvido possibilita a aplicação a outros tipos de estruturas. Deste modo, indicam-se as seguintes sugestões de desenvolvimento:

A evolução natural do programa desenvolvido passa pela adopção de um módulo de análise tridimensional. Este facto possibilitará entre outros contabilizar o efeito da torção e os efeitos transversais das cargas de trânsito, do pré-esforço e dos sismos;

Seria relevante efectuar o estudo paramétrico dos custos dos materiais. Esta análise determina de que forma as flutuações dos preços do aço e do betão influenciam as soluções finais no custo e na geometria;

Resolução do problema de optimização considerando os custos ambientais incluindo, para tal, na função objectivo os custos associados às emissões de CO<sub>2</sub>.

Resolução do problema de optimização relativo à análise de ciclo de vida em que se procura minimizar, não apenas o custo de construção, mas também os custos associados à inspecção, manutenção e reparação da estrutura ao longo da sua vida útil.

Efectuar o estudo de algoritmos híbridos aplicados a problemas de optimização estrutural. Nos algoritmos híbridos são conjugados dois algoritmos de optimização, com o intuito de colmatar as desvantagens de ambos. Assim, reduzindo os tempos de cálculo, melhorando a qualidade das soluções obtidas e a capacidade de resolução de problemas de maior complexidade;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alreshaid, K., Mahdi, I.M. e Soliman, E. (2004). “Cost optimization of reinforced concrete elements”. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, Vol. 5, issue 3-4, 161-174.
- Appleton, J. (2013a). “Estruturas de Betão”, Vol, 1, 1ª edição. Edições Orion, Amadora, Portugal.
- Appleton, J. (2013b). “Estruturas de Betão”, Vol, 2, 1ª edição. Edições Orion, Amadora, Portugal.
- Arora, J.S. (2004). “Introduction to Optimum Design”, Second Edition edição. Elsevier Academic Press, San Diego, California, EUA.
- Aydin, Z. e Ayvaz, Y. (2009). “Optimum topology and shape design of prestressed concrete bridge girders using a genetic algorithm”. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 41, issue 1, 151-162.
- Bažant, Z.P. (1988). “Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete”. John Wiley & Sons Ltd, Evanston, Illinois, EUA.
- Caltrans (2015). “Bridge Design Practice”, Precast Pretensioned Concrete Griders, Chapter 8. California Department of Transportation, Sacramento, Califórnia, Estados Unidos da América.
- Camara, J.N.d. (2001). “Pré-fabricação de pontes e viadutos”, Lisboa.
- Camara, J.N.d. (2006). “Construção em Betão Pré-Fabricado Um desafio para o “futuro””, A Flexão e o Corte no Eurocódigo 2, Alguns resultados de investigação no IST. Ordem dos Engenheiros.
- Chen, S. (2009). “psomatlab”, Versão 1.31.2.
- Cunha, F.N.M.d. (2010). “Dimensionamento de tabuleiros de pontes com betão pré-fabricado”. Dissertação de Mestrado, FEUP -Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Porto, Porto.
- EN 1991-1-6 (2005). “Eurocode 1 - Actions on structures”, Part 1-6: General actions - Actions during execution. CEN - Comité Européen de Normalisation.
- EN 1992-2 (2005). “Eurocode 2 - Design of concrete structures - Concrete bridges - Design and detailing rules”. CEN - Comité Européen de Normalisation.

- FIB (2000). “Guidance for good bridge design”, Guide to good practice, bulletin 9. Federation International du Béton, Lausana, Suíça.
- FIB (2004). “Precast concrete bridges”, state-of-art report, bulletin 29. Federation International du Béton, Lausana, Suíça.
- Guerra, A. e Kiouisis, P.D. (2006). “Design optimization of reinforced concrete structures”. *Computers and Concrete*, Vol. 3, issue 5, 313 - 334.
- Júlio, E.N.B.S., Branco, F.A.B. e Silva, V.t.D. (2004). “Concrete-to-concrete bond strength. Influence of the roughness of the substrate surface”. *Construction and Building Materials*, Vol. 18, issue 9, 675-681.
- Lounis, Z. e Cohn, M.Z. (1993). “Optimization of precast prestressed concrete bridge girder systems”. *PCI J*, Vol. 38, issue 4, 60-78.
- Martí, J.V., García-Segura, T. e Yepes, V. (2016). “Structural design of precast-prestressed concrete U-beam road bridges based on embodied energy”. *Journal of Cleaner Production*, Vol. 120, issue, 231-240.
- Martí, J.V. e González-Vidoso, F. (2010). “Design of prestressed concrete precast pedestrian bridges by heuristic optimization”. *Advances in Engineering Software*, Vol. 41, issue 7-8, 916-922.
- Martí, J.V., Gonzalez-Vidoso, F., Yepes, V. e Alcalá, J. (2013). “Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing”. *Engineering Structures*, Vol. 48, issue, 342-352.
- Martí, J.V., Yepes, V., González-Vidoso, F. e Luz, A. (2014). “Diseño automático de tableros óptimos de puentes de carretera de vigas artesa prefabricadas mediante algoritmos meméticos híbridos”. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 30, issue 3, 145-154.
- Martins, A.M.B. (2015). “Análise e Optimizacao de Pontes Atirantadas de Betao”. Tese de doutoramento, FCTUC - Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Martins, A.M.B., Simões, L.M.C. e Negrão, J.H.J.O. (2016a). “Optimização de forças e secções dos tirantes de pontes atirantadas de betão”, In *Encontro Nacional BETÃO ESTRUTURAL*, FCTUC- Coimbra.
- Martins, A.M.B., Simões, L.M.C. e Negrão, J.H.J.O. (2016b). “Optimum design of concrete cable-stayed bridges with prestressed decks”. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, Vol. 17, issue 5-6, 339-349.
- MATLAB Documentation (2016). Global Optimization Toolbox. The MathWorks, Inc.

- Mourachev, V., Sigalov, E. e Baïkov, V. (1980). “Construções de Betão Armado”. Edições Lopes Da Silva, Porto.
- NP EN 1992-1-1 (2010). “Eurocódigo 2 - Projecto de estruturas de betão”, Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. IPQ - Instituto Português da Qualidade.
- NP EN 15050 (2008). “Produtos prefabricados de betão”, Elementos de pontes. IPQ - Instituto Português da Qualidade.
- Onãte, E. (1992). “Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos”, Análisis elástico linear, 1ª edição. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Bracelona, Espanha.
- Roddenberry, M. e Servos, J. (2012). “Prefabricated/Precast Bridge Elements and Systems (PBES) for Off-System Bridges”, Final Report. Florida Department of Transportation, FAMU-FSU College of Engineering, Tallahassee, Flórida, Estados Unidos da América.
- Saraiva, F. (2012). “Estruturas Pré-fabricadas em Betão”. Pavicentro, IST, Lisboa.
- Sarma, K.C. e Adeli, H. (1998). “Cost optimization of concrete structures”. Journal of Structural Engineering, Vol. 124, issue 5, 570-578.
- Skanska Norge AS (2008). “Bridge construction using precast concrete elements”, Noruega.
- Sousa, C.F.F.d. (2004). “Continuidade estrutural em tabuleiros de pontes consreuídos com vigas pré-fabricadas. Soluções com ligação em betão armado”. Dissertação de Mestrado, FEUP -Departamento de Engenharia Civil da Univercidade do Porto, Porto.
- Viana, L.F.D. (2012). “Simulação da construção do tabuleiro de pontes composto por vigas pré-fabricadas apoiada na tecnologia de realidade virtual”. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- Yepes, V., Martí, J.V. e García-Segura, T. (2015). “Cost and CO2 emission optimization of precast–prestressed concrete U-beam road bridges by a hybrid glowworm swarm algorithm”. Automation in Construction, Vol. 49, Part A, issue, 123-134.