



**FCTUC** DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

David Nuno Soares Valério

# **Modelo de fibras para análise de peças lineares de betão**

## **Fibers model for analysis of linear pieces of concrete**

Dissertação de Mestrado Integrado em Engenharia Civil, na área de Especialização em Mecânica Estrutural, orientada pelo Professor Doutor Vitor Dias da Silva e pelo Professor Doutor Eduardo Nuno Brito Santos Júlio.

Esta Dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor.  
O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC, declina qualquer  
responsabilidade legal ou outra em relação a erros ou omissões  
que possam surgir

Coimbra, 21 de Dezembro de 2016

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Doutor Vítor Dias da Silva, gostaria de expressar todo o meu agradecimento pela enorme disponibilidade, apoio, e conhecimento transmitido através das críticas e opiniões manifestadas durante a sua dedicada orientação da presente tese de dissertação.

Ao Professor Doutor Eduardo Júlio pelo incentivo, otimismo e capacidade de estabelecer pontes para a realização deste trabalho, um sincero agradecimento.

Ao Professor Doutor Hugo Costa por todo o seu apoio, disponibilidade e inextinguível capacidade para todas as questões práticas, tornando fácil a resolução de todos os problemas surgidos ao longo da realização da parte experimental deste trabalho, quero deixar vincada a minha profunda gratidão.

Ao técnico do laboratório do Departamento de Engenharia Civil do ISEC, António Amaral, deixo um agradecimento pela disponibilidade, boa vontade e boa disposição com que ajudou este trabalho a ser realizado.

A todos os meus amigos que através das valiosas relações diárias me acompanharam no caminho percorrido até aqui.

Por fim, um profundo agradecimento a quem está sempre presente em todos os momentos. À Sara por toda a dedicação e carinho, ao Pedro por toda a confiança e aos meus pais por toda a compreensão e paciência que tiveram comigo, tanto nesta como em todas as fases da minha vida.

## RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo desenvolver uma ferramenta numérica, a que se chamou *FiNAL* (*Fiber Nonlinear Analysis*), para análise de estruturas reticuladas constituídas por peças lineares de betão sujeitas a flexão composta reta. A secção pode ter uma forma arbitrária, sendo discretizada em fibras de secção quadrada, a partir de curvas poligonais que definem o seu contorno e o de eventuais partes ocas no seu interior. A extensão é admitida constante na fibra. A lei constitutiva do betão é definida pelo utilizador, sem limitações, sendo o problema matemático resolvido iterativamente através do método de Newton-Raphson. A abordagem implementada no *FiNAL* permite efetuar análise não-linear geométrica e material.

O *FiNAL* foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação de alto nível *Octave*, destinada ao tratamento de problemas para computação numérica, que apresenta como principal vantagem o facto de ser uma ferramenta *OpenSource* e de utilização livre. É assinalável a sua simplicidade e eficácia na realização de operações matriciais. O *Octave* é quase totalmente compatível com a vertente numérica do *MatLab*.

Para validar o *FiNAL* foi conduzido um programa experimental, no qual foram medidos os deslocamentos de provetes em betão reforçado com fibras. São determinadas experimentalmente as relações tensão-extensão para os tipos de betão considerados nos exemplos de aplicação.

Dificuldades inesperadas na realização dos ensaios, não permitiram a demonstração cabal das capacidades do *software FiNAL*.

## ABSTRACT

The present dissertation's aim is to develop a numerical tool, that was called *FiNAL* (*Fiber Nonlinear Analysis*), for the analysis of linear concrete elements subjected to composed bending. The section, which may have an arbitrary shape, is discretized into square section fibers from polygonal curves that define the section and possible hollow sections. Fiber's strain is assumed constant. The constitutive law of concrete can be any, being the mathematical problem solved iteratively by Newton Raphson method. The approach implemented in *FiNAL* allows to perform geometric and material nonlinear analysis.

The *FiNAL* was developed using *Octave* high-level programming language for the treatment of numerical computation problems, which presents as main advantage the fact of being an open source, freely used and distributed tool. Its simplicity and effectiveness in performing matrix operations is remarkable. *Octave* is almost fully compatible with the numerical aspect of *MatLab*.

In order to validate *FiNAL*, was conducted an experimental program in which reinforced concrete with fibers specimens displacements were measured. The stress-strain relations for the considered concretes in the application examples are experimentally determined.

Unexpected difficulties with the experimental tests, did not allow a clear demonstration of *software FiNAL* capabilities.

---

## ÍNDICE

AGRADECIMENTOS .....	i
RESUMO .....	ii
ABSTRACT .....	iii
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Enquadramento .....	1
1.2 Objetivos .....	1
1.3 Estrutura da dissertação .....	2
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	4
2.1 Modelos de fibras para análise de estruturas .....	4
2.2 Betões auto-compactáveis e betões reforçados com fibras .....	9
3 DESCRIÇÃO DO <i>SOFTWARE FiNAL</i> .....	17
3.1 Introdução .....	17
3.2 Rotina para geração de fibras .....	17
3.3 Entrada de dados do programa global .....	26
3.4 Sub-Rotinas .....	32
3.4.1 Função “Secção” .....	32
3.4.2 Função “Forças de Fixação” .....	33
3.4.3 Função “Gradiente” .....	36
3.4.4 Função “Barra” .....	37
3.5 Programa Principal .....	47
3.6 Exemplo 2 .....	50
4 CAMPANHA EXPERIMENTAL .....	66
4.1 Introdução .....	66
4.2 Materiais .....	66
4.2.1 Ligantes .....	66
4.2.2 Água e Adjuvantes .....	67

---

4.2.3	Agregados.....	68
4.2.4	Fibras.....	69
4.3	Composição do BACRF.....	70
4.4	Geometria dos Provetes.....	71
4.5	Produção e Cura dos Provetes.....	72
4.5.1	Amassadura dos betões.....	72
4.5.2	Condições de cura.....	74
4.6	Ensaio dos provetes.....	75
4.7	Discussão dos resultados e determinação da lei constitutiva.....	81
5	TESTE E VALIDAÇÃO DO <i>FiNAL</i> .....	87
5.1	Incorporação da lei constitutiva no <i>FiNAL</i> .....	87
5.2	Reprodução do ensaio experimental através da ferramenta numérica.....	88
5.3	Comparação de resultados.....	89
6	CONCLUSÕES.....	91
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	92

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Enquadramento

A resposta de uma determinada estrutura pode ser analisada recorrendo a métodos analíticos ou a métodos numéricos. Os primeiros permitem obter soluções matematicamente exatas mas, regra geral, recorrem a modelos físicos simplificados. Os segundos permitem descrever modelos mais complexos, sendo o cálculo efetuado através de auxílio computacional.

Na abordagem numérica são consideradas grandes rotações e deslocamentos. As deformações são infinitesimais, sendo o problema analisado através do método dos deslocamentos com uma formulação Lagrangeana total: calculam-se as forças de fixação e a matriz de rigidez da estrutura, a partir de deslocamentos e rotações referidos à configuração indeformada. Utiliza-se o algoritmo de Newton-Raphson para a resolução do sistema de equações resultante.

O betão reforçado com fibras é um material compósito com inúmeras vantagens face ao betão armado convencional, o que tem conduzido ao crescimento da sua utilização em estruturas de engenharia civil. Para um projetista é indispensável o conhecimento tão completo quanto possível das propriedades dos materiais, sendo que só assim é possível um correto dimensionamento. Devido à sua capacidade deformativa, adotou-se o referido betão para testar a ferramenta numérica desenvolvida.

## 1.2 Objetivos

A presente dissertação teve como principal objetivo o desenvolvimento do *software FiNAL* para análise de estruturas constituídas por peças lineares de betão, geralmente designadas “estruturas reticuladas”, recorrendo à linguagem de programação *Octave*.

Os objetivos específicos do algoritmo a desenvolver incluíam a capacidade de determinar tensões, extensões, esforços internos e deslocamentos em estruturas reticuladas, considerando os efeitos de não-linearidade material e geométrica.

A validação do *software*, a maximização da precisão e a minimização do tempo de cálculo foram igualmente estabelecidos como objetivos da dissertação.

O procedimento descritivo do *FiNAL* é elaborado com base num exemplo ilustrativo, no qual se procede à análise estática de um arco de betão armado. Os resultados associados a cada tipo de

análise – influenciados pela consideração, ou não, de determinada não-linearidade – são observados, avaliados e comparados entre si.

O programa experimental conduzido serve para determinar a relação tensão-extensão de cada tipo de betão considerado nos casos de aplicação. A relação constitutiva que se obtém é incorporada no *FiNAL*.

Os três tipos de betão considerados, aos quais corresponde uma lei constitutiva a determinar experimentalmente, correspondem a betões reforçados com fibras, contendo diferentes dosagens de fibras entre si. Estas diferenças servem para ilustrar a aptidão do *FiNAL* para realizar análise não-linear, independentemente do comportamento material.

Com o conhecimento das três leis constitutivas, procede-se à análise numérica dos três casos através da ferramenta de cálculo, com a qual se obtém os deslocamentos. Por outro lado realiza-se experimentalmente a medição dos deslocamentos verificados pelas peças correspondentes aos casos analisados. A comparação entre os deslocamentos numéricos obtidos e os deslocamentos experimentais observados tem o intuito de aferir a captação numérica dos efeitos geométricos.

A consideração de três casos permite não só reforçar a avaliação da capacidade do *FiNAL* em traduzir o comportamento real de estruturas, como também averiguar a influência da percentagem de fibras para o comportamento do betão com a mesma matriz cimentícia.

### **1.3 Estrutura da dissertação**

A presente dissertação está organizada em 6 capítulos.

No Capítulo 1 são contextualizados o âmbito e os objetivos da dissertação. Refere-se ainda a estrutura e o conteúdo deste documento.

No Capítulo 2 apresenta-se um resumo do estado-da-arte sobre abordagem numérica baseada em modelos de fibras. Aborda-se ainda a evolução e as principais características mecânicas dos betões auto-compactáveis reforçados com fibras, adotados para validar o *software* desenvolvido.

No Capítulo 3 descreve-se o funcionamento do *software FiNAL*. Recorre-se ao exemplo de uma estrutura em forma de arco, com carregamento, secção transversal e condições de apoio bem definidas, para melhor ilustrar os aspetos relevantes.



O Capítulo 4 apresenta o programa experimental conduzido com o objetivo de determinar as leis constitutivas dos betões a considerar nos casos de estudo, com o intuito de calibrar e validar a ferramenta numérica desenvolvida.

No Capítulo 5 apresentam-se os resultados experimentais e os obtidos com recurso ao *FiNAL*. É efetuada a validação do algoritmo através da confrontação destes.

No Capítulo 6, apresentam-se as conclusões obtidas e os tópicos que o presente trabalho permitiu identificar como potencialmente interessantes, a desenvolver em trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Modelos de fibras para análise de estruturas

Nas últimas décadas, tem havido um forte desenvolvimento das estratégias de modelação capazes de analisar a resposta não-linear de estruturas de betão armado. Neste contexto, segundo Scapone et al. (1996), as estratégias de modelação podem catalogar-se de acordo com o seu nível crescente de complexidade e refinamento: i) Modelos Globais - a resposta não-linear da estrutura é representada ao nível de determinados graus de liberdade; ii) Elementos Finitos Discretos - neste caso a estrutura é modelada com elementos finitos que representam barras; iii) Elementos Finitos Microscópicos - os elementos e as ligações da estrutura são discretizados num elevado número de elementos finitos, pelo que este modelo permite modelar a aderência aço-betão, a fluência do betão, a relaxação do aço, ou fenómenos térmicos.

Os modelos de elementos finitos discretos são aqueles que apresentam o melhor compromisso entre simplicidade e precisão.

Os modelos mais promissores para análise não-linear de elementos viga-coluna de betão armado são os denominados modelos de fibras (Spacone et al, 1996). Estes modelos assentam no princípio da divisão da secção transversal dos elementos viga-coluna em subdomínios de forma geométrica simples cujo material constituinte se possa considerar homogéneo em termos da relação constitutiva. A cada subdomínio é associado um conjunto de fibras caracterizadas pelo seu centro geométrico na secção transversal, pela sua área de influência e pela relação constitutiva do material do subdomínio em que está inserida. Nos modelos de fibras é generalizada a assunção do princípio de que as secções planas se mantêm planas após deformação e despreza-se o efeito da deformação por corte (Spacone et al., 1991; Guedes, 1997; Iturribizia, 2007).

O elemento viga-coluna, apesentado na Figura 2.1, é dividido num número discreto de secções que, por sua vez, se encontram divididas em fibras.

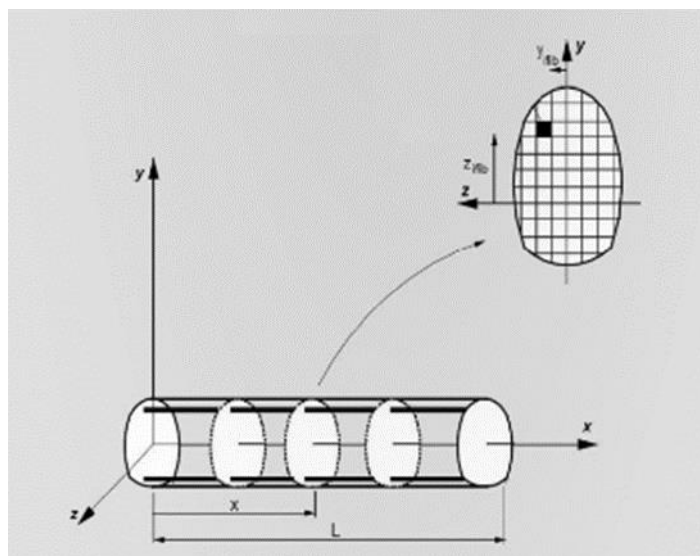


Figura 2.1 – Modelo de Fibras (adaptado de Spacone et al., 1991).

Costa (2013) e Pereira (2016) avaliaram a capacidade do programa de elementos finitos, vocacionado para a análise de estruturas reticuladas planas, *Evals*, de simular o efeito *beam growth* (ou alongamento da viga). Este é um fenómeno que se prende com o agravamento do efeito da não-linearidade do betão armado, sobretudo nas zonas onde o momento é mais elevado (como nas zonas dos apoios), em situações de ação sísmica. A diferença de rigidez entre as partes comprimidas e tracionadas da secção fazem deslocar a linha neutra para a zona mais comprimida, passando o eixo longitudinal a estar na zona tracionada. Desta forma o comprimento das fibras sobre o eixo aumenta e a distância entre os eixos dos pilares que apoiam a viga também. Costa (2013) e Pereira (2016) avaliaram o efeito *beam growth* em estruturas porticadas de betão armado através do programa *Evals*, recorrendo ao Método das Forças Fictícias conjuntamente com modelos de fibras.

Spacone et al. (1991) apresentaram um elemento fibra viga-coluna para a análise estática e dinâmica de estruturas porticadas de betão armado. A formulação do elemento é baseada na flexibilidade e apoia-se nas funções de interpolação de forças que satisfazem o equilíbrio dos momentos fletores e do esforço axial ao longo do elemento. Sendo que o elemento não faz uso de funções de interpolação de deslocamentos, é necessário realizar um processo iterativo para determinar as forças de fixação durante o “estado de determinação do elemento”.

Aqui, descreve-se o “estado de determinação do elemento”, isto é, o processo de obtenção das forças de fixação do elemento, dadas as deformações do elemento. Este processo iterativo “corre” todas as secções do elemento em análise, e só passa à análise do elemento seguinte quando é atingida a convergência dentro do elemento que se está a analisar.

O primeiro passo do processo iterativo consiste na determinação dos incrementos de forças do elemento a partir dos incrementos de deformações do elemento, estes últimos obtidos através de uma matriz de transformação dos deslocamentos da estrutura.

As forças internas do elemento são atualizadas, somando os incrementos de forças às forças obtidas na iteração anterior. A partir das funções de interpolação, com os incrementos de forças no elemento obtêm-se os incrementos de forças na secção.

Por sua vez, com os incrementos de forças na secção e com a matriz de flexibilidade da secção, determinam-se os incrementos de deformação, com os quais são atualizadas as deformações da secção.

As forças de fixação são determinadas através das deformações calculadas pela relação força-deformação da secção. Desta forma, calculam-se as forças desequilibradas e determinam-se as deformações residuais da secção.

Após a análise das secções do elemento, é determinada a matriz de rigidez depois de calculada a matriz de flexibilidade do elemento, através da integração das matrizes de flexibilidade da secção.

Finalmente, se as forças desequilibradas em todas as secções do elemento forem suficientemente pequenas, é atingida a convergência. Por outro lado, se algumas secções não convergirem, calcula-se a deformação residual do elemento através da integração das deformações residuais das secções do elemento. O processo iterativo repete-se introduzindo no elemento um incremento de deformação igual à deformação residual determinada.

Externamente ao ciclo da “determinação do estado do elemento” ocorre o processo iterativo principal, no qual depois de ter atingido a convergência para todos os elementos é feita a montagem das matrizes de rigidez e forças de fixação dos elementos. O processo iterativo é executado através do método do Newton-Raphson que termina quando o teste de convergência das forças desequilibradas for satisfeito.

Marí (2000) propôs-se a realizar um modelo numérico para uma análise não-linear dependente do tempo de pórticos de betão tridimensionais construídos faseadamente. Neste modelo, é tido em conta a história da carga e da temperatura, o comportamento material não-linear, a fendilhação, a retração, o envelhecimento do betão, bem como a relaxação do aço pré-tensionado e os efeitos da não-linearidade geométrica. Por forma a contabilizar a não-linearidade geométrica, é utilizada uma formulação Lagrangeana atualizada, na qual a direção

do sistema de referência local é atualizada com a deformação da estrutura. A abordagem utilizada para a análise de grandes deslocamentos é restringida a pequenas extensões e pequenos incrementos de rotações. As forças internas e a rigidez são calculadas no sistema de coordenadas locais e transformadas para o sistema de coordenadas globais, onde as equações de equilíbrio para toda a estrutura são assembladas e resolvidas através do “método da rigidez”. Assim, a constante variação da matriz de transformação dos deslocamentos para cada elemento, tem em consideração o efeito da não-linearidade geométrica, juntamente com a relação não-linear da extensão com o deslocamento.

Para incorporar os diferentes comportamentos materiais, a secção é dividida em fibras, em que cada fibra se assume num estado uniaxial de tensão. É também assumido que as secções planas se mantêm planas após a deformação e desprezam-se as deformações por corte.

A extensão total de uma determinada fibra, num determinado ponto da estrutura e num dado tempo é obtida pela soma da extensão mecânica,  $\varepsilon^m(t)$ , com a extensão não mecânica  $\varepsilon^{nm}(t)$ . Esta última inclui a extensão devida a fluência do betão  $\varepsilon^c(t)$ , devida à retracção do betão  $\varepsilon^s(t)$ , extensão, devida ao envelhecimento do betão  $\varepsilon^a(t)$  e devido ao efeito da temperatura  $\varepsilon^T(t)$ .

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^m(t) + \varepsilon^{nm}(t) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon^{nm}(t) = \varepsilon^c(t) + \varepsilon^s(t) + \varepsilon^a(t) + \varepsilon^T(t) \quad (2.2)$$

Para incorporar o comportamento não-linear e dependente do tempo do betão, o domínio do tempo é dividido em intervalos de tempo e os incrementos de deslocamentos e extensões são sucessivamente adicionados ao total anterior, como se avançasse no tempo.

Dentro do domínio do tempo é definido o número de passos de construção. Cada passo corresponde a uma situação na estrutura na qual houve alguma variação na geometria, carregamento ou condições de apoio. O tempo decorrente entre dois passos de construção diferentes é dividido em intervalos de tempo, nos quais as propriedades dos materiais, a matriz de rigidez e o vetor de forças são atualizados.

Os incrementos de extensão não mecânica, são avaliados em função dos fenómenos de fendilhação e retracção do betão, relaxação das armaduras de pré-tensão e das alterações de temperatura ocorridas no intervalo de tempo entre  $t_{n-1}$  e  $t_n$ . Os incrementos de carga, no instante  $t_n$ , resultam dos incrementos da extensão não mecânica que foram obtidos. Assim, no instante  $t_n$ , o incremento de carga a aplicar à estrutura resulta da soma das cargas desequilibradas obtidas

no instante  $t_{n-1}$  com os incrementos de carga devidos à extensão não mecânica e os incrementos de carga externos. A carga total obtida em cada instante de tempo é dividida em incrementos de carga, por forma a ser possível traçar a curva de carga-deslocamento (nas fases elástica, fendilhada, plástica e última).

A precisão do modelo numérico é aferida através da comparação com os resultados laboratoriais obtidos da análise de um modelo de uma ponte pré-tensionada de dois vãos, à escala 1:2. O estudo do comportamento do modelo de teste, sob cargas constantes, é prolongado ao longo de 500 dias. Os resultados mostram que se consegue precisão no cálculo da evolução de tensões, extensões, flechas, reações e forças internas ao longo do tempo.

A utilização do modelo de fibras torna o modelo numérico adequado para analisar estruturas sujeitas a qualquer combinação dos fenómenos de flexão desviada, carregamento axial e torção, tanto na fase de construção como no período de serviço. Em cada nível de carga, é utilizado um método de elementos finitos baseado no método dos deslocamentos, no qual as equações de equilíbrio resultantes são resolvidas

O custo computacional dos elementos fibra viga-coluna está diretamente dependente do número de fibras com o qual se discretiza a secção do elemento (Svetlana M.Kostic e Filio C.Filippou, 2012). Num estudo realizado pelos autores, foi avaliado o efeito que o número de fibras no qual se discretiza a secção tem na exatidão dos resultados obtidos para uma consola encastrada na base sob carregamento cíclico combinando esforço axial com flexão desviada. O estudo incidiu na análise de uma secção em “I”, em que o material constituinte é o aço, e de uma segunda secção, de forma retangular, em que o material considerado é o betão armado.

Nas condições de carregamento referidas, os resultados mostram que, para a secção em “I”, com quatro fibras em cada banzo e quatro fibras na alma (perfazendo um total de 12 fibras), obtêm-se resultados bastante próximos dos exatos no que diz respeito ao comportamento dos elementos de aço após cedência. No entanto, sob condições de carga que envolvem flexão predominante em torno do eixo fraco sob força axial constante ou variável, o erro da energia total de dissipação é tal que se aconselha um refinamento da discretização da secção com 24 ou 40 fibras. Através da discretização com 108 fibras pode admitir-se a obtenção da solução exata, para efeitos práticos.

Para as secções retangulares de betão armado, a secção é dividida em duas zonas com comportamento mecânico distinto: o betão não confinado e o betão confinado, cujo comportamento mecânico depende da quantidade e das propriedades da armadura longitudinal e transversal. O estudo para este tipo de secções conduziu a conclusões similares às que foram extraídas da análise das secções em “I”. Neste caso, uma discretização da secção em 17 fibras

(um esquema de 3x3 fibras no betão confinado e 2 fibras em cada lado não confinado) apresenta resultados com uma boa aproximação da solução exata. Porém, por forma a obter uma estimativa mais fiável da rigidez inicial do elemento, bem como da resposta a nível local, particularmente os deslocamentos axiais do elemento viga-coluna, poderá ser necessária uma discretização mais exaustiva.

Com o trabalho de Kashani et al. (2016) desenvolveu-se uma técnica avançada para modelar a resposta cíclica não-linear de colunas de betão armado de pontes, cuja secção é circular, e onde utiliza o método da discretização da secção em fibras. O modelo utiliza uma formulação de flexibilidade com base no trabalho de Spacone et al. (1991), contudo, o novo modelo proposto tem em consideração a influência da encurvadura não elástica das armaduras verticais e da interação de rigidez dos estribos com a armadura longitudinal. O modelo incorpora a consideração da rotura das armaduras longitudinais devido à fadiga de baixos ciclos. É assim conseguido um modelo capaz de prever, até ao colapso, o ciclo de resposta não-linear de colunas circulares de betão armado. A técnica de modelação implementada pode ser utilizada quer por investigadores quer por engenheiros em análises sísmicas não-lineares do comportamento de pontes de betão armado.

## **2.2 Betões auto-compactáveis e betões reforçados com fibras**

Segundo Okamura e Ouchi (2003), a criação de estruturas de betão duradouras requer uma compactação adequada, que exige mão-de-obra especializada. Contudo, a indústria da construção no Japão sofreu uma severa redução no número de trabalhadores especializados, o que conduziu a uma perda na qualidade da construção. Neste sentido, o Japão, desde 1983 e ao longo de vários anos, enfrentou com especial gravidade o problema da durabilidade das estruturas de betão. Neste contexto, como propôs Okamura em 1986, o desenvolvimento do betão auto-compactável (BAC) foi uma solução encontrada para conseguir estruturas duradouras, independentemente da qualidade do trabalho de construção, visto que o BAC tem a capacidade de se compactar devido ao seu peso próprio, não havendo a necessidade de efetuar vibração.

Após o desenvolvimento de um betão auto-compactável protótipo, na Universidade de Tóquio, deu-se início a uma pesquisa intensiva, nomeadamente por institutos de investigação e companhias de construção com interesse nessa matéria.

A primeira aplicação do BAC ocorreu na construção de um edifício em 1990. Um ano mais tarde, foi aplicado na construção da torre pré-esforçada de uma ponte atirantada, que se encontra ilustrada na Figura 2.2, a ponte Shin-kiba Ohashi (Okamura e Ouchi, 2003).



Figura 2.2 -Ponte Shin-kiba Ohashi.

O BAC confere rapidez e facilidade de execução, redução de recursos técnicos e humanos em obra, melhoria geral do ambiente (eliminação do ruído da vibração), possibilidade do dimensionamento de elementos arquitetónicos com maior grau de complexidade geométrica e exigentes acabamentos finais e alcance de maior durabilidade do betão estrutural. O alcance desta inovação poderia induzir o pensamento de que o BAC, passados mais de 20 anos, representasse, na construção, a maior “fatia do bolo”. (Santos, Gomes, e Vinagre, 2012).

O BAC é um material homogéneo com elevada trabalhabilidade, capaz de se mover, libertar o ar, fluir no interior das cofragens e preencher completamente os espaços entre as armaduras só por ação do peso próprio, sem bloqueio por parte dos agregados. A elevada fluidez e resistência à segregação necessárias para alcançar um betão auto-compactável é conseguida com a limitação do volume de agregados grossos, uma baixa relação água/cimento e introdução de superplastificantes. O primeiro método de produção de betão auto-compactável, chamado “Método Geral”, foi desenvolvido por Okamura em 1993. Desde então, mais métodos têm sido apresentados (Delgado, 2011).

O betão reforçado com fibras (BRF) é um material recente em aplicações de engenharia civil. A capacidade de absorção de energia, a ductilidade, o comportamento sob fendilhação e a resistência às ações dinâmicas e estáticas são melhoradas pela correta adição de fibras à composição dos materiais de matriz cimentícia (Barros, 1996).

O principal propósito no desenvolvimento de materiais compósitos reforçados com fibras tem sido o melhoramento das propriedades mecânicas dos materiais de comportamento frágil. Quando sujeitos a esforços de tração, as matrizes frágeis não reforçadas sofrem deformações, elasticamente, até determinado ponto. Após a resposta elástica, seguem-se as fases de microfissuração, macro-fissuração e fractura final. Assim, a introdução das fibras no betão conduz à



alteração das propriedades no regime pós-elástico da deformação dos materiais. A importância destas alterações advém de vários fatores como é o caso da resistência da matriz, o tipo de fibra, as características de adesão associadas à superfície da fibra, a quantidade e orientação das fibras e a dimensão máxima do agregado (Ulrix e Ferreira, 2011).

Nas últimas quatro décadas, têm-se vindo a realizar vários estudos relativos às propriedades dos BRF, quer no estado fresco, quer no estado endurecido. No entanto, só nos últimos quinze anos, o estudo do comportamento estrutural dos elementos de BRF adquiriu verdadeiramente relevância, podendo-se considerar que, relativamente ao seu potencial, a sua aplicação ainda é limitada (Oliveira, 2010).

Ocorreram, nos últimos anos, importantes progressos envolvendo a composição dos betões, as próprias fibras e a interface fibras/betão. Como exemplo destes avanços pode referir-se: i) surgimento no mercado de uma nova geração de aditivos, como os superplastificantes, permitindo reduzir a perda de trabalhabilidade das misturas; ii) a crescente utilização de microfíleres, contribuindo assim para reduzir o índice de vazios, aumentar a resistência mecânica, diminuir a permeabilidade e porosidade do material; iii) a diversificação das propriedades de fibras disponíveis, podendo-se conjugá-las numa mesma mistura e assim alcançar um aumento de resistência, ductilidade e tenacidade; iv) crescente desenvolvimento dos BAC, o que favorece uma distribuição uniforme das fibras (Naaman, 2009).

O comportamento dos BRF é consequência conjunta das propriedades dos elementos constituintes da matriz, isto é, do betão propriamente dito, das propriedades mecânicas e características geométricas das fibras e da composição e processos de fabrico destes compósitos.

No que se refere às propriedades mecânicas das fibras, têm destacada importância a resistência e a rigidez. A sua esbelteza ou fator de forma (razão entre comprimento e diâmetro), a sua percentagem na mistura (em volume ou em peso) e características da textura da superfície, são propriedades geométricas relevantes.

Utilizando-se métodos convencionais de amassadura e não se adequando convenientemente a composição do compósito, a esbelteza e percentagem de fibras devem ser limitadas para que as propriedades do compósito não sejam adversamente afetadas pela diminuição da trabalhabilidade da mistura (Barros, 1996).

Sendo o aumento da ductilidade do betão uma das finalidades da utilização de fibras no reforço de betão, é necessário que as fibras utilizadas possuam módulo de elasticidade e tensão de rotura muito superior ao módulo de elasticidade e tensão de rotura do betão (Gomes, 2013).

Existem vários tipos de fibras, sendo que para fins estruturais, as mais comuns são as de aço ou as poliméricas (Costa, 2012).

O enquadramento normativo europeu NP EN 14889, trata das fibras destinadas a serem utilizadas em todos os tipos de betão e argamassa incluindo betão projetado, betão para pavimentos, betão para prefabricação, betão fabricado no local e betão para reparações. Segundo esta norma, dependendo da natureza, as fibras são classificadas em vários grupos, de acordo com a Figura 2.3 (Ulrix e Ferreira, 2011).

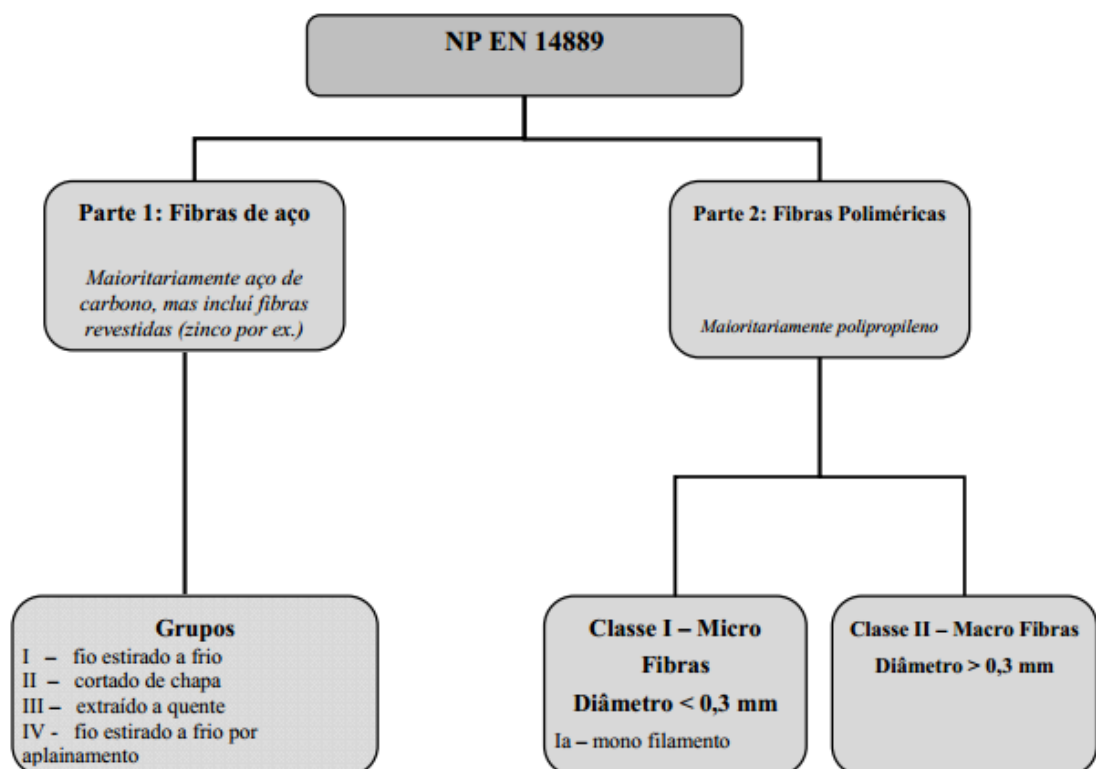


Figura 2.3 - Classificação das fibras segundo NP EN 14889 (Ulrix e Ferreira, 2011).

Relativamente às fibras de aço, a *American Society for Testing Materials* apresenta uma classificação dividida em quatro grupos idêntica à presente na norma europeia. A *Japanese Society of Civil Engineers* classifica as fibras de acordo com a sua secção transversal: secção quadrada, circular ou “meia-lua” (ACI Comite 544, 2002).

O tipo de fibra empregue influencia a durabilidade dos BRF. As fibras metálicas e sintéticas garantem maior durabilidade que as fibras de vidro e naturais. Os modos de rotura que as fibras podem apresentar são: i) cedência; ii) deslizamento relativamente à matriz envolvente (Barros, 1996). Na Figura 2.4 é possível observar o aspeto da superfície de rotura num betão reforçado com fibras de aço.



Figura 2.4 - Superfície de rotura de betão reforçado com fibras de aço (ACI Comite 544, 2002).

Deve-se empregar fibras de elevada resistência e esbelteza, por forma que a rotura do compósito seja por cedência das fibras. Contudo, segundo Barros, 1996, para além da perda de trabalhabilidade provocada pela crescente esbelteza e percentagem de fibras empregues, o modo de rotura dos compósitos por cedência das fibras inibe a principal vantagem do reforço das fibras, ou seja, o incremento da capacidade de absorção de energia. Desta forma, a esbelteza do material não deve ser superior a 100 e a percentagem de fibras não deve exceder os 3%.

Genericamente, a metodologia convencional de fabricação de betões simples (sem qualquer tipo de reforço) é aplicável a betões reforçados com fibras, requerendo apenas pequenas adaptações. A eficácia das fibras requer o impedimento da aglomeração de fibras durante o processo de amassadura, pelo que o tempo de amassadura é, normalmente, superior ao despendido na amassadura de betões simples e a introdução de fibras deve ser efetuada de forma lenta.

A aglomeração de fibras é tanto maior quanto maior for a esbelteza e a percentagem de fibras, e por isso, há uma perda de trabalhabilidade da mistura. Para uma elevada percentagem de fibras, esta perda de trabalhabilidade pode ser compensada através utilização de composições

de granulometria mais fina, fibras de menor rigidez e menor esbelteza. A utilização de plastificantes redutores de água permite diminuir a percentagem de água e consequentemente aumentar a resistência do compósito sem diminuir a trabalhabilidade da mistura.

Os procedimentos de cura dos BRF são os mesmos aplicados aos betões convencionais (Barros, 1996). A inovação no comportamento dos betões reforçados com fibras, prende-se com a elevada capacidade de absorção de energia, ou seja, com a introdução de fibras na matriz cimentícia, a energia necessária para vencer os mecanismos de reforço das fibras, que se estabelecem após a fendilhação, é muito superior à energia dissipada na fratura da matriz (Barros, 1996).

Na Figura 2.5 ilustra-se a forma como as fibras atuam no controlo da abertura de fendas do BRF.

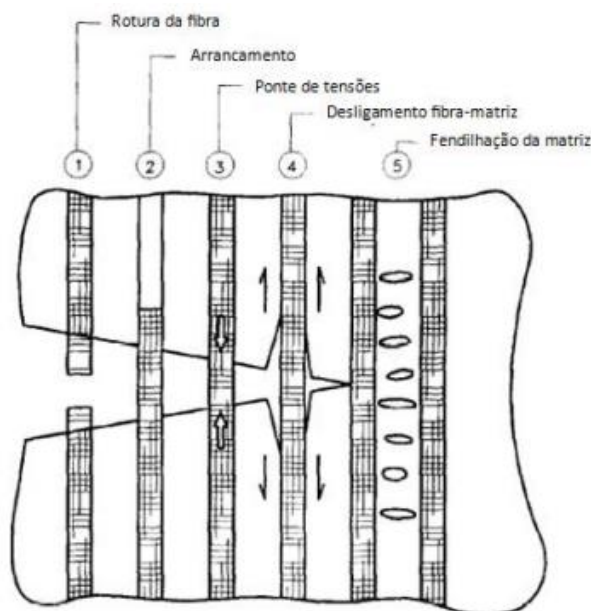


Figura 2.5 - Interação entre fibra e matriz (Gomes, 2013).

A resistência à compressão é aumentada ligeiramente com o aumento da percentagem e esbelteza das fibras (Figura 2.6), sendo que destes dois fatores, a percentagem de fibras é o mais influente. Utilizando fibras com boas propriedades de fixação à matriz, como no caso das fibras que possuem extremidades dobradas ou alargadas, verificam-se maiores aumentos da resistência à compressão. O efeito do reforço de fibras na resistência à compressão nota-se sobretudo após o pico de carga, no ramo de amolecimento em compressão (Braz e Nascimento, 2015).

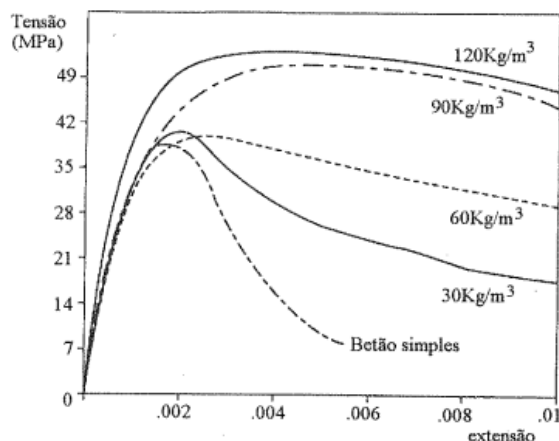


Figura 2.6 - Influência de percentagem de fibras na relação tensão-extensão, registada em ensaios de compressão em provetes de betão reforçado com fibras de aço Dramix 50/50 (Barros, 1996).

Barros (1996) refere que, na maioria dos casos, a resistência à compressão aumenta ligeiramente com a percentagem e esbelteza das fibras, sendo mas significativo o aumento com a percentagem do que com a esbelteza.

O betão convencional tem como grande limitação a sua baixa resistência à tração, que é apenas da ordem dos 7 a 10% da resistência à compressão, sendo o reforço com fibras uma boa forma de ultrapassar esta limitação.

O comportamento de tração do BRF é fortemente influenciado pela presença de fibras, especialmente na fase pós-fissuração. No entanto, este efeito benéfico é sentido apenas para percentagens de volume de fibras elevadas (a partir de 1.5 a 2%). Em termos práticos, um volume de 5% de fibras lisas e retas de aço, pode levar a um aumento dessa resistência na ordem dos 130%, caso as fibras estejam orientadas na direção de tração. Uma orientação aleatória das fibras pode conduzir, ainda assim, a um ganho de resistência de 60% (Braz e Nascimento, 2015).

Na realidade, quando a percentagem de fibras é inferior a 2%, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do betão reforçado com fibras de aço é similar ao do betão com a mesma composição, excetuando as fibras (ACI Comite 544, 2002).

No BRF, a deformação, tanto por fluência como por retração, diminui com o aumento da percentagem de fibras, sendo insignificante a influência da geometria da fibra. A contribuição das fibras é mais significativa em fases mais avançadas do processo de retração. Já o efeito da

idade, tamanho e condições de cura dos provetes de BRF produzem retrações semelhantes comparativamente às verificadas no betão convencional (Barros, 1996).

Recentemente, tem sido bastante explorada a possibilidade de conjugar as vantagens do betão auto-compactável com as vantagens resultantes da adição de fibras aos materiais de matriz cimentícia, resultando daí um compósito, caracterizado por ser um material de matriz cimentícia reforçado com fibras de aço, tendo a capacidade de fluir no interior de uma cofragem unicamente por ação do peso próprio, designado por betão auto-compactável reforçado com fibras de aço (BACRFA). Todavia, este desafio é de complexidade acrescida, uma vez que o efeito das fibras na perturbação do fluxo de BAC no estado fluido tem que ser tido em conta na conceção das misturas (Barros, Pereira, Santos, e Lourenço, 2016.)

Ulrix e Ferreira (2011) referem que a combinação do BRFA, conjuntamente com o BAC, faz mover sinergias no âmbito da mecanização e da industrialização dos processos de construção, o que para além de reduzir as necessidades de mão de obra faz aumentar a qualidade final do produto.

Para assegurar os requisitos de auto-compactabilidade, é necessário considerar o efeito das fibras na perturbação do fluxo do betão no estado fresco, pelo que o estudo da adição de fibras ao betão auto-compactável é de dificuldade acrescida, pois depende tanto dos parâmetros de composição da matriz como dos parâmetros e dosagens das fibras (Costa, 2012).

## 3 DESCRIÇÃO DO SOFTWARE *FiNAL*

### 3.1 Introdução

Este capítulo serve para apresentar o *FiNAL*, um *software* capaz de realizar análise geométrica e materialmente não-linear de estruturas reticuladas. Na primeira secção, descreve-se a rotina para geração de fibras. Seguidamente, mostram-se as matrizes e os vetores que servem para o armazenamento dos dados. Apresentam-se ainda as funções necessárias para o desenvolvimento do programa principal. Sendo estas funções dependentes entre si (funções compostas), uma função só é apresentada depois de apresentadas todas as funções de que ela depende. Por fim, é explicado o programa de cálculo principal, complementando o capítulo com a exposição de um exemplo.

### 3.2 Rotina para geração de fibras

É aqui apresentada uma ferramenta para discretizar em fibras, de forma automática, uma qualquer secção.

Antes de se iniciar a geração de fibras é introduzida a dimensão do lado das fibras, *fdim*, com as quais se pretende discretizar a secção. Quanto menor for o lado das fibras pretendido, maior será o número de fibras em que se divide a secção. A extensão assume-se constante em cada fibra, pelo que a distribuição de extensões na secção será tanto mais próximo da realidade quanto maior for o número de fibras com que se discretiza a secção. Pode então concluir-se que a exatidão do cálculo aumenta com a consideração de um maior número de fibras.

Sabendo a dimensão do lado das fibras que se quer considerar (num compromisso de gestão entre maior exatidão de resultados e maior esforço de cálculo), determina-se a área de influência das fibras de betão, *Abet*.

$$A_{bet} = fdim^2 \quad (3.1)$$

Numa secção compósita, como a secção de betão armado, é necessário introduzir os dados das fibras correspondentes aos varões de aço. Desta forma, deverá indicar-se qual o número de varões presentes na secção, que serão traduzidos em *nfb* fibras de aço. A área de cada fibra de aço, *Afa*, corresponde à área do varão. As coordenadas das fibras de aço que correspondem às coordenadas do centro geométrico dos varões são armazenadas nos vetores *yac* e *zac*. São também introduzidos os dados que definem a forma da secção a considerar. Caso se pretenda

analisar uma secção com uma ou mais partes ocas, deve-se definir o conjunto de polígonos que represente o contorno exterior da secção, assim como o contorno das partes ocas da mesma.

Assim, relativamente à secção, introduz-se o número total de pontos do contorno, *npc*, o número de polígonos, *npol*, e o número de pontos em cada polígono, *npp*. As coordenadas dos pontos dos polígonos são armazenadas nos vetores *xc* e *yc*, seguindo a ordem estabelecida na numeração dos polígonos e dos seus respetivos pontos constituintes.

Após a entrada de todos os dados dá-se início à geração das fibras. Por forma a tornar mais clara a explicação do processo de geração de fibras, irá utilizar-se como exemplo uma secção retangular composta por duas partes ocas (Figura 3.1), a qual é discretizada em fibras com 10 mm de dimensão.

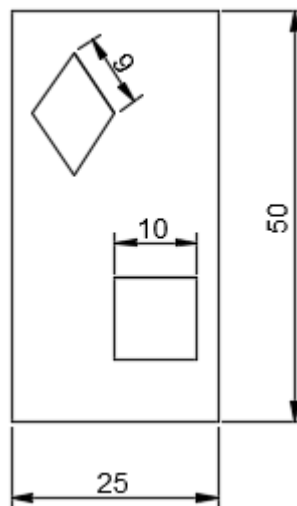


Figura 3.1 - Secção do exemplo 1 (dimensões em cm).

Começa-se por gerar uma figura contendo os pontos dos polígonos constituintes da secção, cujas coordenadas estão armazenadas nos vetores *xc* e *yc*. Estes pontos são representados no desenho da figura por asteriscos vermelhos, como se ilustra na Figura 3.2.



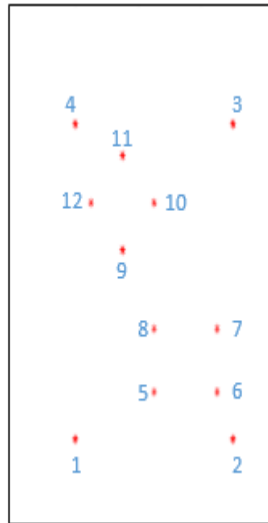


Figura 3.2 – Pontos com as coordenadas da secção representados a vermelho (exemplo 1).

Para proceder ao desenho da secção, inicia-se um ciclo que se irá repetir tantas vezes quanto o número de polígonos,  $npol$ , existentes na secção. Antes do ciclo, inicializa-se a variável  $na$ , que corresponde à posição (em função da numeração atribuída aos vértices) do primeiro vértice do polígono que se está a desenhar, ou seja, o polígono  $ip$ . No caso de a secção ser constituída por mais do que um polígono (secção oca), o contador  $na$  tem que ser atualizado no fim do ciclo, para atualizar a posição do primeiro vértice do polígono seguinte e assim se repetir novamente o ciclo para o desenho de um novo polígono. Ora, o número da posição do primeiro vértice de um segundo polígono é simplesmente a posição do último vértice do polígono anterior,  $nbb$ , “mais um”:

$$na = nbb + 1 \quad (3.2)$$

O valor da variável  $nbb$ , isto é, a posição do último vértice do polígono que se está a desenhar no interior do ciclo, é determinada em função do número de pontos desse polígono,  $npp(ip)$  e da posição do seu primeiro ponto,  $na$ .

$$nbb = na + npp(ip) - 1 \quad (3.3)$$

As coordenadas dos pontos do polígono são então armazenadas nos vetores  $x$  e  $y$ . Para tal, atribuem-se aos elementos destes vetores, os valores que estão nos vetores de armazenamento das coordenadas de todos os pontos da secção, definidos na entrada de dados,  $xc$  e  $yc$ , entre as posições  $na$  e  $nbb$  (posição dos ponto inicial e final do polígono que se está a desenhar).

$$\begin{cases} x(1 : npp(ip)) = xc(na : nbb) \\ y(1 : npp(ip)) = yc(na : nbb) \end{cases} \quad (3.4)$$

Como o desenho das linhas do polígono se faz unindo ordenadamente os pontos do polígono, através da instrução *plot (x,y)*, é necessário acrescentar um ponto fictício para que o polígono seja “fechado”. Por exemplo, num quadrado, com os vértices numerados segundo sentido dos ponteiros do relógio, o ponto 1 seria unido ao ponto 2, o ponto 2 ao ponto 3 e o ponto 3 ao ponto 4. É necessário que o ponto 4 se una com o ponto 1, mas para tal, é necessário criar um ponto cujas coordenadas coincidam com as do ponto 1.

$$\begin{cases} x(npp(ip) + 1) = xc(I) \\ y(npp(ip) + 1) = yc(I) \end{cases} \quad (3.5)$$

Para o exemplo 1, e no seguimento da Figura 3.2, os pontos são unidos da forma referida e apresentada na Figura 3.3.

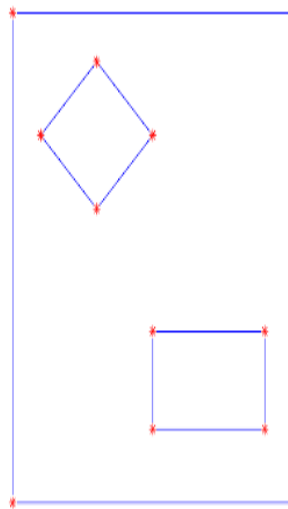


Figura 3.3 – União dos pontos através das linhas representadas a azul (exemplo 1).

Definida a geometria da secção, passa-se à sua discretização em fibras, através da sua divisão em elementos quadrados. Numa discretização mais simples, preparada apenas para contabilizar o comportamento em flexão reta, bastaria dividir a secção em camadas horizontais. No entanto, optando por dividir a secção nas duas direções está a dar-se a possibilidade de incorporar um comportamento diferenciado das fibras, quando sujeita a flexão nas duas direções. Portanto, a metodologia passa por dividir a secção transversal duas vezes, em direções diferentes.

Começa-se por fazer a divisão em camadas horizontais. Para tal, é calculada a altura do polígono, *dymax*, que é o resultado da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos seus vértices, *ymax* e *ymin*, respetivamente:

$$dymax = ymax - ymin \quad (3.6)$$

Retirando a parte inteira da divisão da altura do polígono, *dymax*, pela dimensão do lado das fibras, *fdim*, obtém-se o número de linhas com as quais se vai discretizar a secção.

$$nlinhas = fix\left(\frac{dymax}{fdim}\right) \quad (3.7)$$

Com o número de linhas obtido, **nlinhas**, que logicamente só pode ser um número inteiro, é necessário reajustar o valor da dimensão considerada para as fibras, **fdim**, que agora se passa a designar pela variável **dy**. Este ajuste introduz uma alteração muito pouco significativa em relação à dimensão considerada inicialmente.

$$dy = \frac{dymax}{nlinhas} \quad (3.8)$$

Conforme referido, nesta fase a secção é dividida em linhas. No entanto, como a secção poderá conter partes ocas, é pretendido que estas linhas ocupem apenas as zonas preenchidas com material, como ilustrado na Figura 3.4. Isto é feito através da “captura” dos pontos resultantes das intersecções entre as **nlinhas** linhas de divisão da secção e as linhas que unem os vértices dos polígonos.

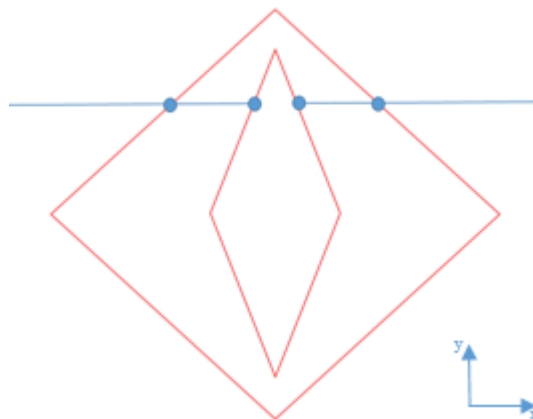


Figura 3.4 – Secção genérica - Intersecção das linhas com os lados dos polígonos.

O processo de obtenção dos pontos resultantes da intersecção das **nlinhas** linhas com os **npol** polígonos é contruído através de um ciclo que gera **nlinhas** linhas, dentro do qual se vai investigar os pontos onde a cada linha gerada, **il**, intersecta os lados de cada polígono, **ip**.

Sempre que é gerada uma linha, a sua ordenada **cy** é atualizada, somando à ordenada da linha anterior o afastamento entre linhas **dy**.

Sendo gerada uma linha no ciclo das linhas, inicia-se o ciclo dos polígonos, onde se vai avaliar, para cada lado do polígono, se ocorre intersecção com a linha gerada. Isto acontece quando se verifica uma das seguintes condições (dependendo se o lado do polígono é ascendente ou descendente):

$$yc(i) \leq cy \wedge yc(j) \geq cy \quad (3.9)$$

$$yc(j) \leq cy \wedge yc(i) \geq cy \quad (3.10)$$

Os índices  $i$  e  $j$  referem-se aos pontos adjacentes (unidos por uma linha) do polígono. Quando o ponto  $i$  for o último ponto do polígono, então o ponto  $j$  corresponde ao primeiro ponto desse mesmo polígono, por forma a gerar o lado de fecho da figura, como anteriormente explicado. Acontece então que quando se verifica uma das duas condições apresentadas anteriormente, significa que ocorreu uma intersecção, e é necessário guardar essa informação em duas variáveis. A primeira variável a atualizar é o contador do número total de pontos de intersecção,  $nps$ . A segunda variável,  $npcy$ , armazena o número total de pontos de intersecção com a mesma ordenada da linha gerada no ciclo dentro do qual se está a fazer a pesquisa por pontos de intersecção. Após ser contabilizada a intersecção, são registadas as coordenadas do ponto resultante.

$$xl = xc(i) + \left[ \frac{xc(j) - xc(i)}{yc(j) - yc(i)} \times (cy - yc(i)) \right] \quad (3.11)$$

$$yl = cy \quad (3.12)$$

Fazendo uso da Figura 3.5, fica mais clara a compreensão de como são determinadas as coordenadas dos pontos de intersecção nas duas expressões anteriores. As coordenadas são armazenadas na posição definida pelo contador  $nps$ .

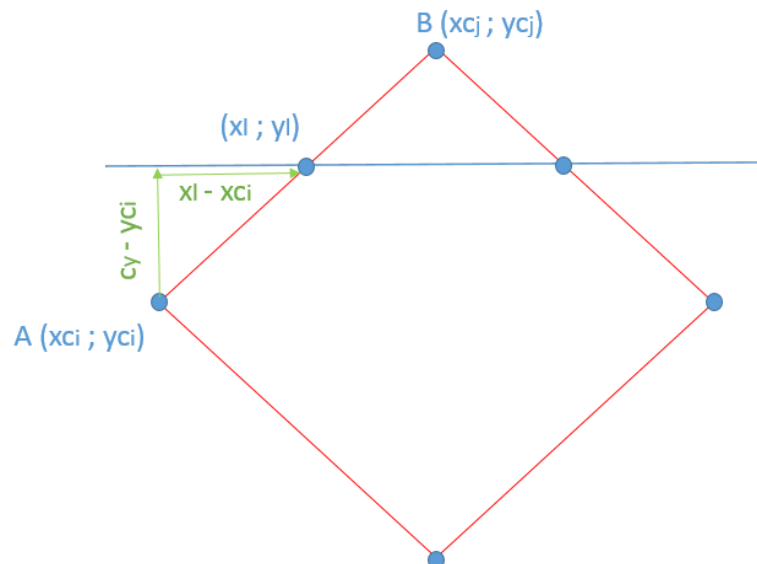


Figura 3.5 – Obtenção das coordenadas do ponto resultante da intersecção.

No final da determinação de todos os pontos de intersecção de uma linha com as linhas dos polígonos, é feita uma renumeração dos novos pontos determinados. Isto para evitar a criação de linhas nas zonas “ocas”. Esta renumeração é melhor compreendida, atentando à Figura 3.6.

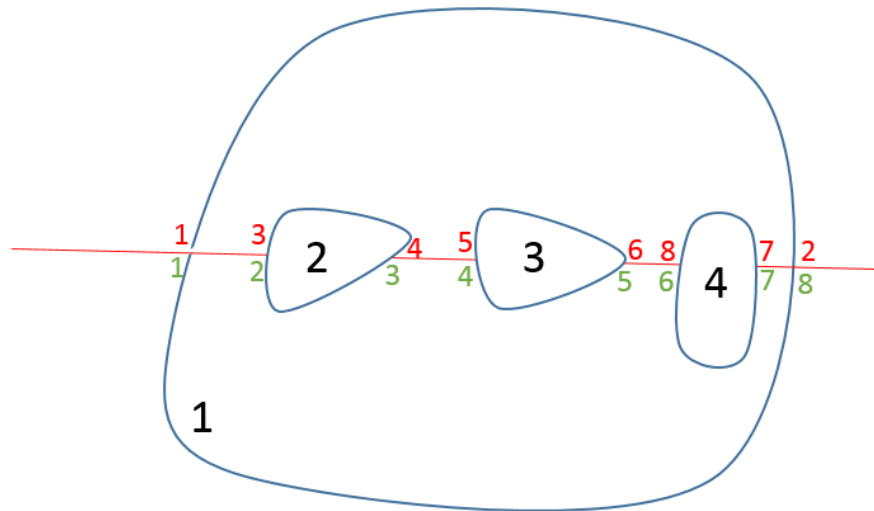


Figura 3.6 – Renumeração dos pontos constituintes de uma secção genérica.

A preto encontra-se a numeração dos polígonos. A vermelho encontra-se a numeração dos pontos da intersecção da linha com os polígonos, sendo que estes pontos são procurados, percorrendo a ordem da numeração dos polígonos. Obviamente que a sequência com que, em cada polígono, estes pontos são encontrados, depende da ordem com que os seus pontos foram numerados.

Após terem sido detetados os *npcy* pontos de intersecção com a mesma ordenada da linha *il*, estes são renumerados para que a numeração coincida com a ordem com que aparecem na secção. Assim, no caso da figura genérica que em cima é apresentada, a numeração a vermelho daria lugar à numeração a verde.

A renumeração é feita simplesmente aplicando a função *sort* ao vetor que armazena as abcissas dos pontos de intersecção, *xl*. Esta função fará com que a posição dos valores que ficam armazenados no vetor *xl* seja a correspondente à ordenação desses valores por ordem crescente. Tendo todos os pontos das intersecções ordenados, basta uni-los sequencialmente, dois a dois, para que não haja união dos definidos pelos polígonos das zonas ocas. Desta forma, o contador *i* varia de 1 até ao número total de pontos *nps*, mas percorrendo os valores intervaladamente de 2 em 2 valores. No exemplo da Figura 3.6, *i* tomaria valores iguais a 1,3,5,7. Para cada ponto correspondente ao ponto *i*, é traçada uma linha que une esse ponto ao ponto *i+1* (1-2 ; 3-4 ; 5-6 ; 7-8).

$$\begin{cases} x(1) = xl(i) \\ y(1) = yl(i) \\ x(2) = xl(i + 1) \\ y(2) = yl(i + 1) \end{cases} \quad (3.13)$$

No caso do exemplo 1, a realização do processo até aqui descrito transforma a secção numa secção dividida em linhas, exceto nas suas duas partes ocas, como mostra a Figura 3.7.

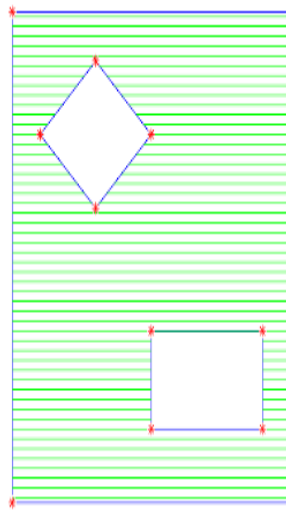


Figura 3.7 – Geração de linhas apenas nas zonas contendo material (exemplo 1).

Chegado a este ponto, a secção transversal encontra-se dividida em linhas horizontais, com afastamento vertical igual à dimensão do lado das fibras corrigido,  $dy$ . Basta agora dividir estas linhas em pontos com afastamento horizontal igual à dimensão das fibras. A intersecção das duas linhas origina pontos, que correspondem a fibras com uma área de influência igual ao quadrado da dimensão das fibras  $dy$ .

O processo de divisão das linhas em pontos passa por ir acrescentando pontos, ao longo das linhas previamente definidas, afastados de  $dy$ , iniciando-se este processo na menor abcissa global, para que não haja desfasamento horizontal entre os pontos. Assim, à abcissa do ponto anterior, isto é, abcissa do centro da fibra,  $xf$ , é somado o valor  $dy$ , enquanto este processo se realizar no interior do polígono. Quando um ponto resultante deste processo tiver abcissa superior à abcissa máxima de um ponto extremo do polígono ( $xf > xl$ ), o processo é terminado. As ordenadas dos pontos determinados correspondem à ordenada  $yl$  da linha horizontal coincidente com o alinhamento dos pontos extremos do polígono que se está a dividir. Enquanto for possível acrescentar pontos, o valor total do número de fibras,  $nf$ , vai sendo atualizado e as

coordenadas das fibras armazenadas nos vetores  $cx_f$  e  $cy_f$ . Após todas as linhas serem divididos em pontos, a secção encontra-se finalmente discretizada em fibras.

Na secção usada como exemplo, para as dimensões da secção indicadas e para a adoção de fibras com 10 mm de dimensão, a secção é discretizada em 1085 fibras, em que o centro de cada fibra é representado por um ponto vermelho, como se pode observar na Figura 3.8.

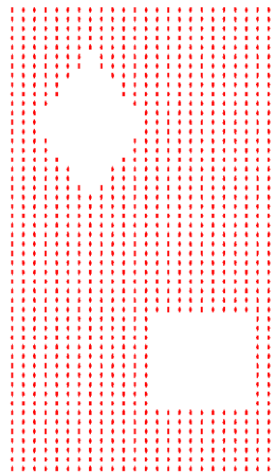


Figura 3.8 – Aspecto final após a discretização da secção em fibras estar completo (exemplo 1).

Após obter as coordenadas dos pontos médios das fibras ( $cx_f$  e  $cy_f$ ) estas são novamente calculadas em relação ao eixo de referência definido para a secção. Se se pretender que a origem dos eixos coincida com o centro de gravidade da secção ( $x_{or}$  e  $y_{or}$ ), as coordenadas dos pontos médios das fibras, em relação aos eixos de referência, são dadas por:

$$\begin{cases} y_f = cx_f - x_{or} \\ z_f = cy_f - y_{or} \end{cases} \quad (3.14)$$

O cálculo automático do centro de gravidade é simples. Sendo que todas as secções a que o programa é aplicável são simétricas, o valor de  $x_{or}$  é simplesmente o ponto médio das abcissas dos pontos do contorno da secção. O valor de  $y_{or}$  é calculado com base na área e no momento estático de cada fibra.

$$x_{or} = \frac{\max(xc) + \min(xc)}{2} \quad (3.15)$$

$$y_{or} = \frac{\sum A_i \times cy_{f_i}}{\sum A_i} \quad (3.16)$$

Contudo, a análise é perfeitamente válida com outro ponto de referência, uma vez que o centro geométrico só é relevante na análise linear.

### 3.3 Entrada de dados do programa global

Acerca de uma estrutura reticulada que se pretenda analisar, conhece-se a informação relativamente ao número de nós e respetivas coordenadas, número de elementos barra constituintes, nós correspondentes a cada elemento barra, forças aplicadas nos nós e graus de liberdade bloqueados (dependendo das condições de apoio da estrutura). A introdução dos dados da estrutura é feita no princípio do programa de cálculo, juntamente com os dados da secção transversal dos elementos barra, necessários para a discretização da secção em fibras, que foi abordada na secção anterior.

A maioria dos dados inicialmente conhecidos são armazenados sob a forma de matrizes por forma a condensar a informação e facilitar a sua utilização nos processos de cálculo envolvidos ao longo da ferramenta numérica.

Em relação ao número de nós da estrutura reticulada, armazena-se a informação numa variável escalar designada **nn**. Por sua vez, as coordenadas de cada nó são inseridas numa matriz designada **coord**, que apresenta **nn** linhas e 2 colunas correspondentes à posição dos nós nos dois eixos do plano, como se representa na expressão (3.17). Assim, na primeira linha da matriz armazenam-se as coordenadas do nó 1, na segunda linha as coordenadas do nó 2 e assim sucessivamente.

$$\mathbf{coord} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{nn} & y_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

O número de elementos barra da estrutura é introduzido na variável **nb**. Sendo que um segmento de reta é determinado pelo conhecimento dos dois pontos extremos, a definição de cada elemento barra é efetuada numa matriz designada **bar**, cuja dimensão é de **nb** linhas e 2 colunas nas quais se identificam os números dos nós das extremidades inicial e final. A matriz **bar**, é indicada na expressão (3.18), onde um elemento genérico **nj<sub>i</sub>** representa o nó da extremidade *j*, da barra *i*.

$$\mathbf{bar} = \begin{bmatrix} n1_1 & n2_1 \\ n1_2 & n2_2 \\ \vdots & \vdots \\ n1_{nb} & n2_{nb} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$



O carregamento aplicado à estrutura é definido pela indicação das características das forças aplicadas (intensidade, direção e sentido) e ainda pela definição dos pontos de aplicação das respetivas forças. Uma vez que as cargas só poderão ser aplicadas nas extremidades das barras (nos nós), o estabelecimento do número de barras da estrutura está dependente do carregamento a que a mesma está sujeita.

Começa-se por definir o número de cargas aplicadas à estrutura, numa variável designada **nc**, entendendo-se que essas cargas poderão ser forças concentradas ou momentos concentrados. De seguida, define-se todo o carregamento por intermédio de uma matriz denominada **cargas**, com **nc** linhas e 3 colunas, em que a primeira coluna é referente ao número do nó onde é aplicada a carga, a segunda coluna contém o grau de liberdade segundo o qual esta é aplicada e a terceira coluna apresenta a correspondente intensidade. Na expressão (3.19) apresenta-se a definição da matriz **cargas**, onde uma carga genérica *j* é aplicada no nó *nnj* segundo o grau de liberdade *gdlj* com a intensidade de *Pj*.

$$\mathbf{cargas} = \begin{bmatrix} nn_1 & gdl_1 & P_1 \\ nn_2 & gdl_2 & P_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ nn_{nc} & gdl_{nc} & P_{nc} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

A variável **nblock** armazena a informação relativa ao número de ligações ao exterior, ou seja, o número de graus de liberdade restringidos. A definição das condições de apoio da estrutura, isto é, os graus de liberdade bloqueados, é feita com recurso à matriz **apoio**, de **nblock** linhas e 2 colunas, em que a primeira coluna se refere ao número do nó restringido e a segunda coluna ao grau de liberdade segundo o qual esse mesmo nó está bloqueado (podendo este ser 1, 2 ou 3). Na expressão (3.20) encontra-se a definição da matriz **apoio**, onde a ligação exterior da estrutura *j* é efetuada no nó *nnj* segundo o grau de liberdade *gdlj*.

$$\mathbf{apoio} = \begin{bmatrix} nn_1 & gdl_1 \\ nn_2 & gdl_2 \\ \vdots & \vdots \\ nn_{nblock} & gdl_{nblock} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

No corpo principal do algoritmo é necessária a utilização de uma matriz de incidência **A**, cujos elementos são 0 ou 1, que possibilite expressar forças, deslocamentos e rigidez ora relativamente à estrutura desmontada ora à estrutura montada. Esta matriz é criada pelo programa com base nos dados de entrada apresentados. Considerando uma barra *i* com nós *n1* e *n2*, os graus de liberdade na estrutura desmontada e na estrutura montada são os representados nas Figura 3.9 e Figura 3.10 respetivamente.

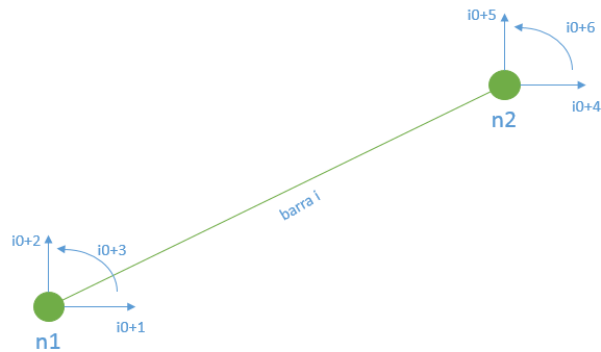


Figura 3.9 – Graus de liberdade na estrutura desmontada.

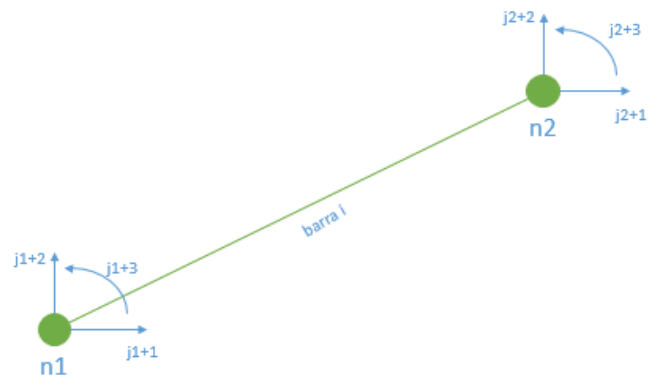


Figura 3.10 - Graus de liberdade na estrutura montada.

A partir das figuras apresentadas, é possível definir a matriz de incidência correspondente à barra  $i$ .

Sendo  $i$  o número da barra,  $n_1$  o número do nó da primeira extremidade e  $n_2$  o número do nó da segunda extremidade, definem-se os parâmetros  $i_0$ ,  $j_1$  e  $j_2$  para realizar a correspondência entre os graus de liberdade e assim construir a matriz de incidência, indicada no Quadro 3-1.

$$i_0 = 6 \times (i - 1) \quad (3.21)$$

$$j_1 = (n_1 - 1) \times 3 \quad (3.22)$$

$$j_2 = (n_2 - 1) \times 3 \quad (3.23)$$

Quadro 3-1 – Matriz de incidência correspondente à barra  $i$ .

	$j_{1+1}$	$j_{1+2}$	$j_{1+3}$	$j_{2+1}$	$j_{2+2}$	$j_{2+3}$
$i_{0+1}$	1	0	0			
$i_{0+2}$	0	1	0			
$i_{0+3}$	0	0	1			
$i_{0+4}$				1	0	0
$i_{0+5}$				0	1	0
$i_{0+6}$				0	0	1

Por muito complexa que seja a estrutura, a matriz de incidência será sempre formada pelo conjunto de uma série de matrizes identidade de menor dimensão. Deste modo, recorre-se à matriz auxiliar  $A_{b0}$  por forma a constituir a base da matriz de incidência da estrutura. Partindo da matriz  $A_{b0}$  é efetuado um ciclo no qual são calculadas as matrizes de incidência para cada barra e agregadas numa matriz de incidência designada  $A_{\theta}$ . Esta matriz contém os graus de liberdade que estão bloqueados pelas condições de apoio, necessitando por isso ainda de ser trabalhada.

$$A_{b0} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Para se compreender como é que a matriz auxiliar  $A_{b0}$  permite chegar à matriz  $A_{\theta}$ , entenda-se a nomenclatura adotada com o exemplo de um caso genérico em que se tem  $A_{(a:b, c:d)} = B$ . Esta expressão significa que o valor dos elementos da matriz  $A$ , desde a linha  $a$  à linha  $b$  e da coluna  $c$  à coluna  $d$ , tomam os valores da matriz  $B$ . De modo semelhante,  $C_{(a:b)} = D$  significa que o valor dos elementos que estão entre as linhas  $a$  e  $b$  do vetor  $C$  assumem os valores do vetor  $D$ . Por conseguinte, compreendendo o exemplo fornecido e observando a matriz de incidência dada como exemplo no Quadro 3-1, percebe-se que:

$$A_{\theta(i0+1:i0+3, j1+1: j1+3)} = A_{b0} \quad (3.25)$$

$$A_{\theta(i0+4:i0+6, j2+1: j2+3)} = A_{b0} \quad (3.26)$$

Na matriz  $A_{\theta}$  existem tantas colunas quanto graus de liberdade não bloqueados da estrutura, isto é, incluindo os que serão eliminados pelos apoios ( $nn \times 3$ ), sendo por isso necessário eliminar dessa matriz as colunas respeitantes aos graus de liberdade restringidos. Tal, é possível com a elaboração de um vetor, ao qual é chamado **sblock**, que armazena a informação relativa aos números dos graus de liberdade bloqueados, ordenados por ordem crescente. Sendo  $i$  a

designação do número do grau de liberdade bloqueado, o ciclo repete-se tantas vezes quanto o número de bloqueios (*nblock*):

$$iblock(i) = (apoio(i,1) - 1) \times 3 + apoio(i,2) \quad (3.27)$$

O vetor *iblock* contém os números de todos os graus de liberdade bloqueados e é agora ordenado por ordem crescente, recorrendo para tal a uma função própria do programa Octave, “sort”. A título exemplificativo, se  $A = [2,5,1,10,3]$  então  $sort(A) = [1,2,3,5,10]$ .

Ao vetor *iblock* ordenado, dá-se o nome de *sblock*.

$$sblock = sort(iblock) \quad (3.28)$$

Por fim, são retiradas as colunas correspondentes aos graus de liberdade restringidos. Esta eliminação vai sendo feita partindo da coluna correspondente ao grau de liberdade mais elevado para a coluna correspondente ao grau de liberdade menos elevado, passando todas as colunas, após uma dada coluna ser retirada, a ocupar uma posição anterior relativamente à posição que ocupavam antes da eliminação da coluna. Para tal é necessário estabelecer que, sendo *j* o grau de liberdade bloqueado (retirado por ordem decrescente do vetor *sblock*):

$$nla = nb \times 6 \quad (3.29)$$

$$ngl0 = nn \times 3 \quad (3.30)$$

$$ngl = ngl0 - nblock \quad (3.31)$$

O processo genericamente descrito pela Figura 3.11 é numericamente efetuado do seguinte modo:

$$A_{0(1:nla, j:ngl0-1)} = A_{0(1:nla, j+1:ngl0)} \quad (3.32)$$

$$A = A_{0(1:nla, 1:ngl)} \quad (3.33)$$

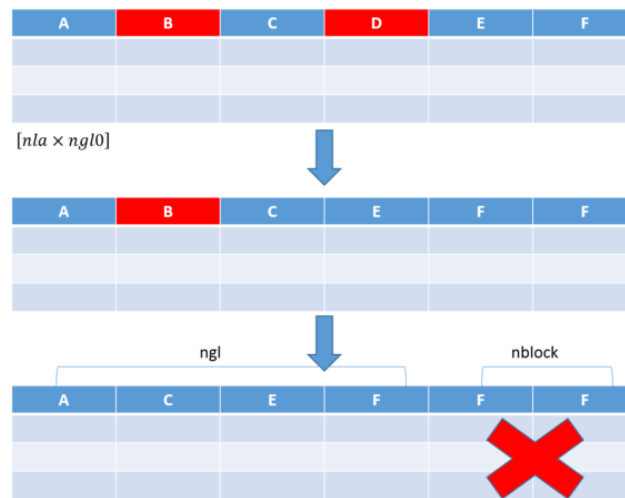


Figura 3.11 – Transformação da matriz  $A_0$  na matriz  $A$  - Eliminação dos graus de liberdade restringidos (representados a vermelho).

À semelhança do sucedido com a matriz de incidência, também os elementos do vetor de cargas segundo os graus de liberdade restringidos devem ser eliminados, construindo-se um vetor  $P$  cuja dimensão é  $ngl$ . É definido um vetor auxiliar  $P_0$  contendo tantos elementos quanto o número total de graus de liberdade da estrutura sem bloqueios, isto é,  $nn \times 3$ . O preenchimento deste vetor auxiliar é levado a cabo por intermédio de um ciclo que é repetido um número de vezes igual ao número de cargas aplicadas. Sendo  $i$  o número da carga, ou seja, a linha da matriz *cargas*, define-se este ciclo através das seguintes expressões:

$$j = (cargas(i, 1) - 1) \times 3 + cargas(i, 2) \quad (3.34)$$

$$P_0(j) = cargas(i, 3) \quad (3.35)$$

A eliminação dos elementos do vetor  $P_0$  relativos aos graus de liberdade bloqueados é efetuada por intermédio de um ciclo no qual os elementos referentes aos graus de liberdade que são restringidos são eliminados, fazendo com que todos os elementos posteriores ao eliminado recuem uma posição, num processo em tudo semelhante ao efetuado para a matriz de incidência.

$$P_{0(j:ngl0-1)} = P_{0(j+1:ngl0)} \quad (3.36)$$

$$P = P_{0(1:ngl)} \quad (3.37)$$

### 3.4 Sub-rotinas

No início do programa de cálculo, após se ter definido a entrada de todos os dados, é necessário estabelecer sub-rotinas, que serão invocadas ao longo do programa de cálculo para executar determinadas tarefas. Uma sub-rotina poderá ser chamada dentro de outra sub-rotina.

No *Octave*, as sub-rotinas são definidas por meio do comando “*function*”, onde se atribui um determinado nome à função e constrói-se o seu algoritmo para executar aquilo que é pretendido.

#### 3.4.1 Função “Secção”

A função “secção” calcula o esforço axial e o momento fletor numa secção discretizada em fibras, a partir da extensão na origem dos eixos (fibra de referência) e da sua curvatura, utilizando as leis constitutivas unidimensionais do aço e do betão. Para cada fibra  $i$  gerada, calcula-se, em função da coordenada  $z$  do centro de gravidade da mesma, o valor da extensão nessa fibra, segundo a expressão (3.38).

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + C \times z_f(i) \quad (3.38)$$

Para a extensão calculada, determina-se também a tensão instalada na fibra, através da lei constitutiva do betão ou do aço consoante o caso. ( $\varepsilon \rightarrow \sigma$ ).

Deste modo, os esforços na secção são determinados com o somatório da contribuição de todas as fibras, de área  $A$ .

$$N = \sum A \times \sigma \quad (3.39)$$

$$M = \sum A \times \sigma \times z_f(i) \quad (3.40)$$

A função “secção” calcula também a derivada do esforço axial em ordem à extensão na fibra de referência, utilizando para isso a área da secção de cada fibra, bem como o módulo de elasticidade tangente.

$$\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = \sum A \times E_t \quad (3.41)$$

São elaboradas duas matrizes com o objetivo de armazenar toda a informação acerca da secção que é determinada na presente sub-rotina.

Os dados relativos às extensões verificadas na secção são guardados numa matriz designada *armazena*, e os esforços são introduzidos numa matriz chamada *esforços*. Estas matrizes contêm organizada por colunas a seguinte informação:

Quadro 3-2 – Colunas da matriz *armazena*.

<i>Barra (ib)</i>	<i>Secção (sec)</i>	$\epsilon_{min}$	$\epsilon_{máx}$	$\epsilon_0$
-------------------	---------------------	------------------	------------------	--------------

Quadro 3-3 – Colunas da matriz *esforços*.

<i>Barra (ib)</i>	<i>Secção (sec)</i>	<i>N</i>	<i>M</i>
-------------------	---------------------	----------	----------

### 3.4.2 Função “Forças de Fixação”

Na função “forças de fixação”, calculam-se as forças de fixação de um elemento barra nas coordenadas locais, com base nas rotações de extremidade e no alongamento da barra.

Os deslocamentos transversais são aproximados por intermédio de um polinómio de terceira ordem genericamente dado pela expressão (3.42).

$$v = az^3 + bz^2 + cz + d \quad (3.42)$$

Tomando a linha que une as duas extremidades da barra na configuração deformada como o eixo de referência, representado na Figura 3.12, definem-se as condições de fronteira a partir das quais se determinam as curvaturas nas extremidades da barra – rotações  $\phi_0$  e  $\phi_1$ .

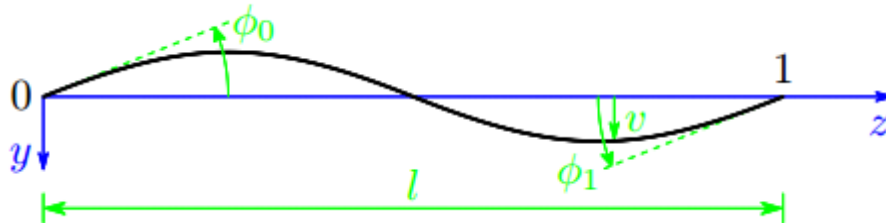


Figura 3.12 – Sistema de coordenadas do elemento barra e rotações nodais  $\phi_0$  e  $\phi_1$ .

$$\begin{cases} v_{z=0} = v_{z=l} = 0 \\ \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=0} = -\phi_0 \\ \left(\frac{dv}{dz}\right)_{z=l} = -\phi_1 \end{cases} \quad (3.43)$$

Com as condições estabelecidas em (3.43), a forma genérica do polinómio da expressão (3.42) pode ser reescrita na forma apresentada na expressão (3.44).

$$v = -\frac{1}{l^2}(\phi_0 + \phi_1)z^3 + \frac{1}{l}(2\phi_0 + \phi_1)z^2 - \phi_0 z \quad (3.44)$$

Por fim, a segunda derivada desta equação, em ordem a  $z$ , permite definir as expressões para o cálculo das curvaturas.

$$\begin{cases} C_0 = \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=0} = -\frac{2}{l}(2\phi_0 + \phi_1) \\ C_1 = \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=l} = -\frac{2}{l}(2\phi_1 + \phi_0) \end{cases} \quad (3.45)$$

O deslocamento axial do eixo da barra é interpolado por um polinómio de segunda ordem, o que conduz a uma distribuição linear da extensão. Sendo  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_1$  as extensões axiais nas secções extremas 0 e 1, a extensão média longitudinal na fibra de referência é definida pela expressão (3.46) e ilustrada na Figura 3.13.

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2} \quad (3.46)$$

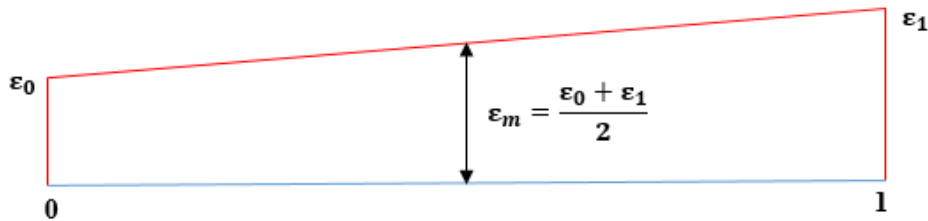


Figura 3.13 – Extensão média.

Numa dada secção transversal, dadas a extensão na fibra de referência  $\varepsilon$ , e a curvatura  $C$ , a força axial  $N$  e o momento fletor  $M$  são determináveis através da função “secção”. Assim, para as secções 0 e 1 pode escrever-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \\ C_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_0 = (\varepsilon_0, C_0) \\ M_0 = (\varepsilon_0, C_0) \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ C_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = (\varepsilon_1, C_1) \\ M_1 = (\varepsilon_1, C_1) \end{cases}$$

Uma vez que apenas são consideradas forças nodais, a força axial na barra é constante, isto é,  $N_0 = N_1$ .

$$N_0(\varepsilon_0, C_0) = N_1(\varepsilon_1, C_1) \quad (3.48)$$



A expressão (3.46) pode ser resolvida em ordem à extensão na secção 1, pelo que se tem:

$$\varepsilon_1 = 2\frac{\Delta l}{l} - \varepsilon_0 \quad (3.49)$$

Da conjugação das expressões (3.48) e (3.49) resulta a equação não-linear:

$$F = N_0(\varepsilon_0, C_0) - N_1(2\frac{\Delta l}{l} - \varepsilon_0, C_1) = 0 \quad (3.50)$$

Assim, a única incógnita deste problema é a extensão na secção 0,  $\varepsilon_0$ , a qual pode ser determinada através de um processo iterativo, usando o método Newton-Raphson, de acordo com (3.51).

$$\varepsilon_{0i+1} = \varepsilon_{0i} - F_i \left( \frac{dF}{d\varepsilon_0} \right)_i^{-1} \quad \text{com} \quad \frac{dF}{d\varepsilon_0} = \frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon_1} \quad (3.51)$$

Deste modo, a função “forças de fixação” consiste num processo iterativo que termina quando o valor de  $F$ , isto é, a diferença entre o esforço axial nas extremidades da barra, for menor do que o valor do erro pré-definido.

Recorrendo à função “secção” (este é um caso em que uma função é chamada no interior de outra função, neste caso a função “secção” é chamada no interior da função “forças de fixação”) começa-se por determinar, na secção 0, o esforço axial  $N_0$ , o momento fletor  $M_0$  e a derivada  $\frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon_0}$ . Como dados de entrada tem-se a curvatura da secção  $C_0$  e a extensão na origem  $\varepsilon_0$ , que na primeira iteração se assume igual à extensão média  $\varepsilon_m$ .

Posteriormente a função “secção” é novamente chamada, desta vez para determinar  $N_1$ ,  $M_1$  e  $\frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon_1}$ . Neste caso, os dados de entrada são a curvatura na secção  $C_1$  e a extensão na origem da secção  $\varepsilon_1$  que é calculada em função da extensão  $\varepsilon_0$  como indicado na expressão (3.49).

Por fim, uma vez determinados os momentos fletores nas extremidades e o esforço axial da barra, executa-se o método de Newton-Raphson descrito pela expressão (3.51) e procede-se ao teste da força  $F$  para verificar a necessidade de continuar o processo iterativo.

Quando ao fim da décima iteração não é conseguido um valor de  $F$  com um erro na ordem dos  $10^{-6}$ , o processo iterativo é interrompido e é dado um aviso de que não foi conseguida a convergência, identificando o número da barra onde o problema de convergência ocorre e fornecendo uma matriz com o valor da extensão  $\varepsilon_0$ , e os esforços axiais nas extremidades,  $N_0$  e

$N_1$ . Este aviso é muito útil, uma vez que os problemas de convergência poderão não ser inteiramente reais, pois poderá apenas tratar-se de uma dificuldade em atingir o nível de exigência definido, continuando a ser ainda residual, embora maior, a diferença entre os esforços axiais.

No programa da função, os esforços axiais  $N_0$  e  $N_1$  são designados *axial0* e *axial1* e as derivadas  $\frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon_0}$  e  $\frac{\partial N_1}{\partial \varepsilon_1}$  são chamadas *dn0de0* e *dn1de1*. O valor da força  $F$ , da expressão (3.50), é representado pela variável *f000*. Assim, o processo descrito pela expressão (3.51) é programado no *FiNAL*, da seguinte maneira:

$$dfde0 = dn0de0 + dn1de1 \quad (3.52)$$

$$f000 = axial0 - axial1 \quad (3.53)$$

$$f001 = \frac{f000}{dfde0} \quad (3.54)$$

$$ep0m = ep0m - f001 \quad (3.55)$$

Logicamente que a expressão (3.55) não pode ser interpretada como uma equação matemática, mas como uma instrução do programa que traduz o caráter iterativo do processo de determinação da extensão, ou seja, calcula-se sempre um valor partindo do valor determinado anteriormente. Uma vez conhecido o valor de  $\varepsilon_0$  pode calcular-se  $\varepsilon_1$  e os valores das forças de fixação –  $N$ ,  $M_0$  e  $M_1$ .

### 3.4.3 Função “Gradiente”

A matriz de rigidez material da barra tem que ser calculada numericamente, utilizando para tal as seguintes derivadas:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial N}{\partial C_0} & \frac{\partial N}{\partial C_1} \\ \frac{\partial M_0}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_0}{\partial C_0} & \frac{\partial M_0}{\partial C_1} \\ \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_m} & \frac{\partial M_1}{\partial C_0} & \frac{\partial M_1}{\partial C_1} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

O cálculo da matriz de rigidez a partir destas derivadas é apresentado mais à frente.

Sabendo que a definição de derivada de uma função num ponto é definida pela expressão (3.57), as derivadas são determinadas numericamente, utilizando o processo descrito para o cálculo das forças de fixação (pelo que é necessário invocar a função “forças de fixação” para realizar todas as operações envolvidas). O cálculo dos esforços é realizado tanto para os valores “reais” de curvatura e extensão, como para pequenos incrementos destes valores.

$$f'(a) = \lim_{(h \rightarrow 0)} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \quad (3.57)$$

De realçar o facto de estes esforços calculados com incrementos de extensão e curvaturas não deverem ser armazenados. Ou seja, os esforços determinados na função “forças de fixação” não deverão ser guardados quando essa função for chamada no interior da função “gradiente”.

Para tal necessita-se do sinalizador, *flag* que assume o valor 0 quando se chama a função “forças de fixação” dentro da função “gradiente” e assume o valor 1 quando se chama a função “forças de fixação” fora da função “gradiente”. Esta informação relativa ao valor da variável *flag* é transportada até a função “secção” (função “gradiente” > função “forças de fixação” > função “secção”), onde os dados das extensões e dos esforços são armazenados, caso *flag*=1, nas matrizes [*amazena*] e [*esforços*].

#### 3.4.4 Função “Barra”

Na função “barra”, dadas as coordenadas das extremidades da barra e as variáveis cinemáticas ( $u_0, v_0, \theta_0, u_1, v_1, \theta_1$ ), em que *u* e *v* são os deslocamentos e  $\theta$  as rotações nas extremidades 0 e 1 dessa mesma barra, efetua-se o cálculo das forças de fixação bem como dos elementos da matriz de rigidez dessa barra, expressos em coordenadas globais.

No caso de estruturas reticuladas planas com deslocamentos finitos e deformações infinitesimais, a análise do problema assente numa formulação lagrangeana requer o cálculo das forças de fixação e da matriz de rigidez da estrutura para deslocamentos e rotações dados, referidos à configuração indeformada. Na Figura 3.14 apresentam-se as grandezas que definem a cinemática da deformação de uma barra:

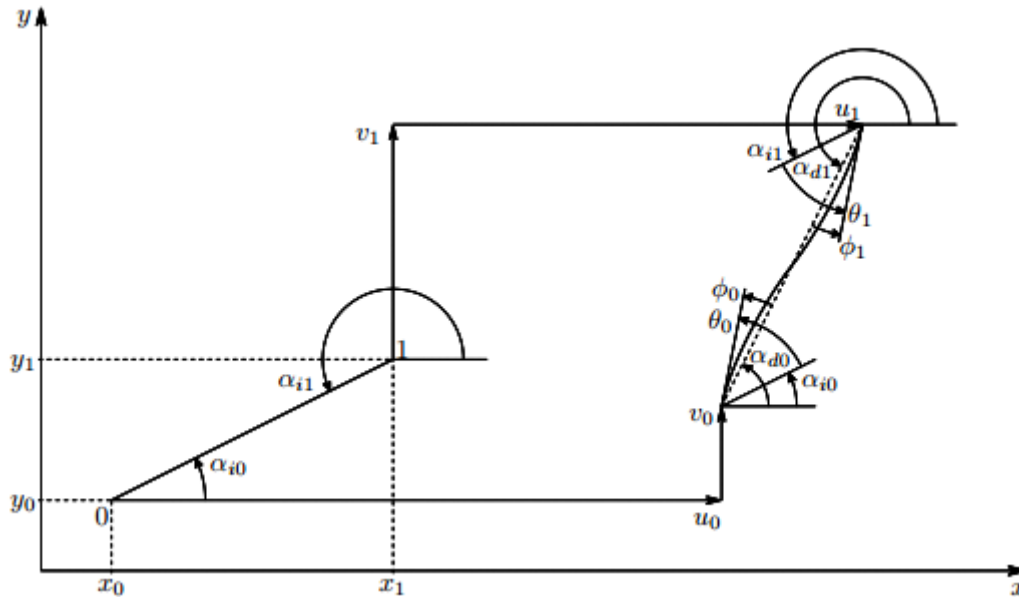


Figura 3.14 – Configuração original e deformada de uma barra sujeita a deslocamentos e rotações finitas.

Dadas as coordenadas  $(x_0, y_0)$  de uma extremidade e  $(x_1, y_1)$  da outra extremidade da barra, calcula-se o comprimento indeformado da barra,  $l_0$ .

$$l_0 = \sqrt{l_{0x}^2 + l_{0y}^2} \quad \text{com} \quad \begin{cases} l_{0x} = x_1 - x_0 \\ l_{0y} = y_1 - y_0 \end{cases} \quad (3.58)$$

O comprimento da barra deformada,  $l$ , obtém-se através do conhecimento das coordenadas dos nós da barra indeformada bem como do conhecimento do vetor de deslocamentos desses nós, conforme a Figura 3.14:

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} \quad \text{com} \quad \begin{cases} l_x = (x_1 + u_1) - (x_0 + u_0) \\ l_y = (y_1 + v_1) - (y_0 + v_0) \end{cases} \quad (3.59)$$

A extensão média da fibra de referência barra é definida pela extensão de engenharia, dada pela expressão (3.60)

$$\varepsilon_m = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (3.60)$$

As rotações  $\phi_0$  e  $\phi_1$  são calculadas a partir dos ângulos que definem a orientação da barra nas configurações indeformada ( $\alpha_{i0}$  e  $\alpha_{i1}$ ) e deformada ( $\alpha_{d0}$  e  $\alpha_{d1}$ ), bem como das rotações das extremidades ( $\theta_0$  e  $\theta_1$ ).

$$\begin{cases} \phi_0 = \alpha_{i0} + \theta_0 - \alpha_{d0} \\ \phi_1 = \alpha_{i1} + \theta_1 - \alpha_{d1} \end{cases} \quad (3.61)$$

Seguidamente descreve-se, em primeiro lugar, a abordagem para definir a rotação da primeira extremidade da barra (extremidade 0). O ângulo na configuração indeformada ( $\alpha_{i0}$ ) calcula-se com base na expressão (3.62), em função dos comprimentos indeformados da barra.

$$\alpha_{i0} = \cos^{-1}\left(\frac{l_{0x}}{l_0}\right) \quad (3.62)$$

Caso se tenha  $y_1 < y_0$  então o ângulo  $\alpha_{i0}$  vem dado pela expressão (3.63), como se ilustra na Figura 3.15.

$$\alpha_{i0} = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{l_{0x}}{l_0}\right) \quad (3.63)$$

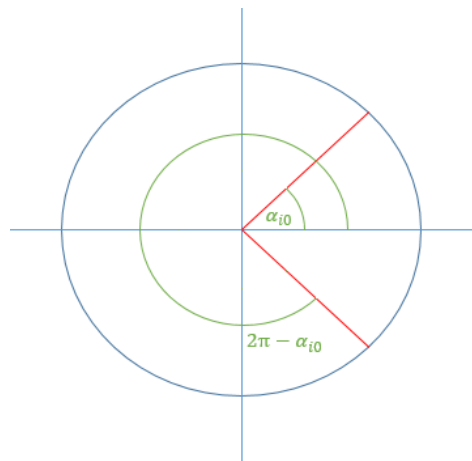


Figura 3.15 – Definição do ângulo  $\alpha_{i0}$ .

O ângulo que define a orientação da barra na configuração deformada ( $\alpha_{d0}$ ) é determinado de igual modo, dependendo nesta circunstância dos comprimentos calculados na situação deformada, ou seja, substituindo  $l_0$ ,  $l_{0x}$  e  $l_{0y}$  por  $l$ ,  $l_x$  e  $l_y$  respetivamente.

A utilização das expressões (3.61) contém o pressuposto de que todos os ângulos estão definidos no intervalo  $[0, 2\pi]$ . As somas  $\alpha_i + \theta$  deverão cumprir esta imposição, caso contrário será necessário corrigir o seu valor para um ângulo equivalente que se encontre dentro do intervalo referido.

Designando o resultado da soma dos ângulos por  $\alpha_{i0} + \theta_0$  por **f00** estabelecem-se condições para a correção do ângulo. Assim, caso o valor de **f00** seja superior a  $2\pi$  ou inferior a 0, o procedimento passa por determinar o número de voltas completas no círculo trigonométrico desse ângulo e descontar esse valor ao ângulo **f00** inicialmente calculado. O número de voltas completas é matematicamente representado pela parte inteira da divisão de **f00** por  $2\pi$ . Deste

modo, o valor de  $f_{00}$  ficará contido, em módulo, no intervalo  $[0, 2\pi]$ , sendo apenas necessário somar  $2\pi$  a esse valor caso o seu sinal seja negativo. O procedimento descrito com vista à “correção” do ângulo  $f_{00}$  está sistematizado na Figura 3.16.

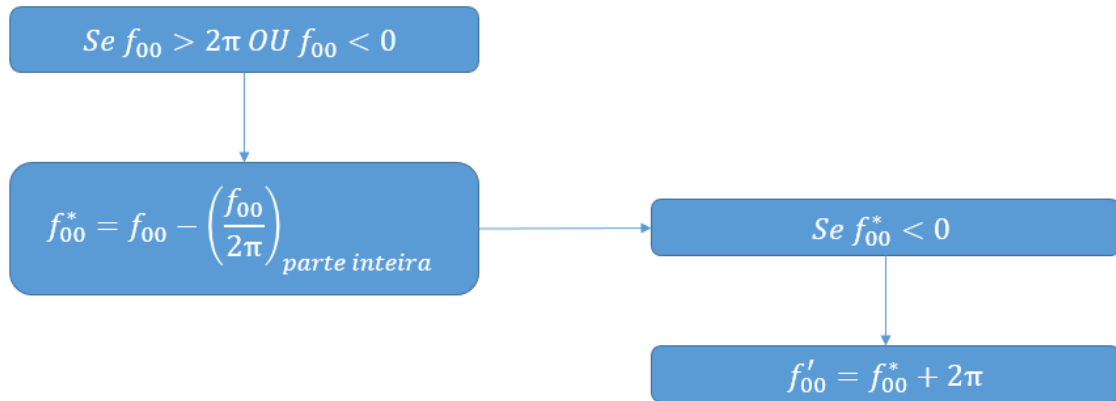


Figura 3.16 – Correção do ângulo  $f_{00}$ .

Tendo-se já procedido à correção da soma do ângulo  $f_{00}$  ( $\alpha_{i0} + \theta_0$ ), caso esta seja necessária, aplica-se a seguir a expressão (3.61) para determinar a rotação  $\phi_0$ . Contudo, falta ainda proceder à verificação dos casos particulares de determinação das rotações  $\phi$ , representados na Figura 3.17. Sendo estas rotações pequenas (deformações infinitesimais), a identificação destes casos particulares é realizada através de um ângulo pequeno, designado  $\alpha_{lim}$ , cujo valor considerado é de  $\pi/6$ .

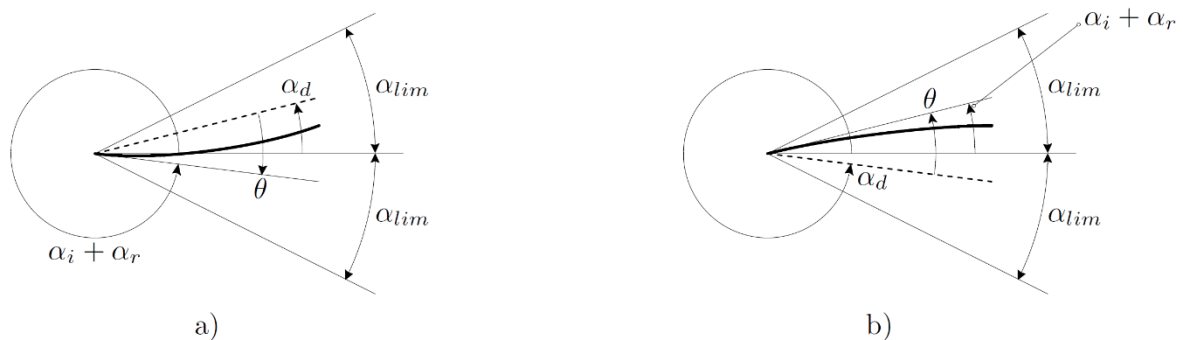


Figura 3.17 – Casos particulares do cálculo das rotações  $\phi$

No caso representado na alínea a) da figura anterior, tem-se:

$$\begin{cases} \alpha_d < \alpha_{lim} \\ \alpha_i + \theta > 2\pi - \alpha_{lim} \end{cases} \rightarrow \phi = -[\alpha_d + 2\pi - (\alpha_i + \theta)] = \alpha_i + \theta - \alpha_d - 2\pi \quad (3.64)$$

Já na situação ilustrada na alínea b), vem:

$$\begin{cases} \alpha_d > 2\pi - \alpha_{lim} \\ \alpha_i + \theta < \alpha_{lim} \end{cases} \rightarrow \phi = \alpha_i + \theta + 2\pi - \alpha_d = \alpha_i + \theta - \alpha_d + 2\pi \quad (3.65)$$

Na extremidade final da barra, os ângulos que definem a orientação da barra, quer na configuração indeformada,  $\alpha_{i1}$ , quer na configuração deformada  $\alpha_{d1}$ , são determinados diretamente por intermédio dos ângulos homólogos calculados na extremidade inicial, somando a estes  $\pi$  radianos (expressão (3.66)). A estes ângulos deverão ser subtraídos  $2\pi$  radianos caso o valor resultante do seu cálculo através das expressões (3.66) os coloque fora do intervalo  $[0, 2\pi]$ .

$$\begin{cases} \alpha_{i1} = \alpha_{i0} + \pi \\ \alpha_{d1} = \alpha_{d0} + \pi \end{cases} \quad (3.66)$$

Para esta extremidade da barra, o procedimento é idêntico ao descrito para a extremidade inicial, sendo obviamente necessário repetir quer a verificação da pertença do ângulo  $f01$  (resultante da soma de  $\alpha_{i1} + \theta_1$ ) ao intervalo  $[0, 2\pi]$  quer a verificação do ângulo  $\phi_1$  face aos casos particulares mencionados na determinação das rotações  $\phi$ , usando o ângulo  $\alpha_{lim}$ .

Para a determinação das forças de fixação e dos coeficientes de rigidez da barra é conveniente utilizar um sistema de eixos local. Na Figura 3.18 apresentam-se as coordenadas usadas para a barra nos sistemas de eixos local e global. As forças de fixação em ambos os sistemas de coordenadas são ilustradas na Figura 3.19.

Com a extensão média,  $\epsilon_m$  (expressão (3.60)) e as rotações  $\phi_0$  e  $\phi_1$  é possível determinar todos os parâmetros de entrada necessários para invocar a função “forças de fixação” (expressão (3.45)). Como já foi referido, o retorno desta função consiste nos esforços  $N$ ,  $M_0$  e  $M_1$ , relativos às coordenadas locais.



Figura 3.18 – Coordenadas do elemento barra: a) coordenadas locais; b) coordenadas globais.

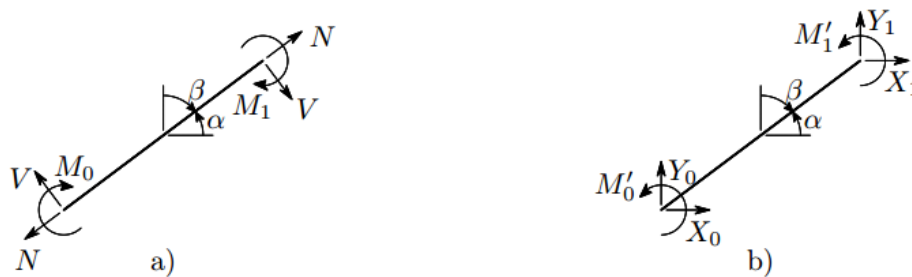


Figura 3.19 – Forças de fixação da barra: a) coordenadas locais; b) coordenadas globais.

Sabendo que  $V = -\frac{M_0+M_1}{l}$  e estabelecendo as devidas considerações estáticas, as forças de fixação nas coordenadas globais podem ser calculadas partindo das coordenadas locais, efetuando as relações geométricas necessárias, através das expressões (3.67) e (3.68):

$$\begin{cases} F_1 = X_0 = -N \cos \alpha - V \cos \beta \\ F_2 = Y_0 = -N \cos \beta - V \cos \alpha \\ F_3 = -M_0 \\ F_4 = X_1 = N \cos \alpha + V \cos \beta \\ F_5 = Y_1 = N \cos \beta - V \cos \alpha \\ F_6 = -M_1 \end{cases} \quad (3.67)$$

em que:

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{l_x}{l} \\ \cos \beta = \frac{l_y}{l} \end{cases} \quad (3.68)$$



Note-se que as forças das expressões (3.67), em coordenadas globais, resultam da transformação das forças em coordenadas locais por meio de uma matriz de incidência  $A$ , sendo  $F_g = A^T \times F_l$ , em que:

$$F_l = \begin{bmatrix} V \\ M_0 \\ V \\ M_1 \\ N \\ N \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Ou seja, já que as forças de fixação em coordenadas locais são determinadas dentro da função “forças de fixação”, de onde se retiram os valores de  $N$ ,  $M_0$  e  $M_1$ , a função “forças de fixação” é chamada no interior da função “barra” e as expressões anteriores são aplicadas por forma a produzir-se o vetor com as forças de fixação da barra em coordenadas globais.

A matriz de rigidez expressa em coordenadas globais pode ser calculada a partir da matriz de rigidez correspondente às coordenadas locais, através da mesma matriz de incidência  $A$ , usada para obter as expressões (3.67), e que no *FiNAI* se designou por matriz *amat*.

Uma matriz de incidência transforma acréscimos infinitesimais de deslocamento nas coordenadas globais  $\{D'\}$  em acréscimos infinitesimais de deslocamentos nas coordenadas locais  $\{D\}$ , assim  $\{D\} = [amat]\{D'\}$ .

$$amat = \begin{bmatrix} -\cos\beta & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\cos\alpha & -\cos\beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \cos\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

A matriz de rigidez decompõe-se nas partes material e geométrica, sendo que esta última não depende do material quando se usa uma função de interpolação para o deslocamento da secção transversal da barra. Assim, é retirada a parte geométrica da matriz de rigidez linearizada (valor dos coeficientes de rigidez e suas derivadas calculados para um esforço axial nulo) de uma barra com comportamento material linear que, para as coordenadas locais da Figura 3.18 é dada pela expressão (3.71).

$$K_l = K_{ml} + K_{gl} \quad (3.71)$$

Sendo a matriz de rigidez geométrica,  $K_{gl}$ , dada por:

$$K_{gl} = N \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & 0 & 0 \\ \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

A componente da matriz de rigidez material é calculada com base nas derivadas produzidas numericamente pela função “gradiente” (conforme explicado na secção 3.4.3), sendo essas derivadas aqui apresentadas, omitindo a sua extensa dedução.

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\partial V}{\partial D_1} = \frac{6}{l^3} \left( \frac{\partial M_0}{\partial C_0} + \frac{\partial M_0}{\partial C_1} + \frac{\partial M_1}{\partial C_0} + \frac{\partial M_1}{\partial C_1} \right) \\ K_{21} &= \frac{\partial M_0}{\partial D_1} = -\frac{6}{l^2} \left( \frac{\partial M_0}{\partial C_0} + \frac{\partial M_0}{\partial C_1} \right) \\ K_{31} &= K_{11} \\ K_{41} &= \frac{\partial M_1}{\partial D_1} = -\frac{6}{l^2} \left( \frac{\partial M_1}{\partial C_0} + \frac{\partial M_1}{\partial C_1} \right) \\ K_{51} &= \frac{\partial N}{\partial D_1} = -\frac{6}{l^2} \left( \frac{\partial N}{\partial C_0} + \frac{\partial N}{\partial C_1} \right) \\ K_{61} &= K_{51} \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= \frac{\partial V}{\partial D_2} = -\frac{2}{l^2} \left( 2 \frac{\partial M_0}{\partial C_0} + \frac{\partial M_0}{\partial C_1} + 2 \frac{\partial M_1}{\partial C_0} + \frac{\partial M_1}{\partial C_1} \right) \\
 K_{22} &= \frac{\partial M_0}{\partial D_2} = \frac{2}{l} \left( 2 \frac{\partial M_0}{\partial C_0} + \frac{\partial M_0}{\partial C_1} \right) \\
 K_{32} &= K_{12} \\
 K_{42} &= \frac{\partial M_1}{\partial D_2} = \frac{2}{l} \left( 2 \frac{\partial M_1}{\partial C_0} + \frac{\partial M_1}{\partial C_1} \right) \\
 K_{52} &= \frac{\partial N}{\partial D_2} = \frac{2}{l} \left( 2 \frac{\partial N}{\partial C_0} + \frac{\partial N}{\partial C_1} \right) \\
 K_{62} &= K_{52}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
 K_{13} &= K_{11} \\
 K_{23} &= K_{21} \\
 K_{33} &= K_{31} \\
 K_{43} &= K_{41} \\
 K_{53} &= K_{51} \\
 K_{63} &= K_{61}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
 K_{14} &= \frac{\partial V}{\partial D_4} = -\frac{2}{l^2} \left( 2 \frac{\partial M_0}{\partial C_1} + \frac{\partial M_0}{\partial C_0} + 2 \frac{\partial M_1}{\partial C_1} + \frac{\partial M_1}{\partial C_0} \right) \\
 K_{24} &= \frac{\partial M_0}{\partial D_4} = \frac{2}{l} \left( 2 \frac{\partial M_0}{\partial C_1} + \frac{\partial M_0}{\partial C_0} \right) \\
 K_{34} &= K_{14} \\
 K_{44} &= \frac{\partial M_1}{\partial D_4} = \frac{2}{l} \left( 2 \frac{\partial M_1}{\partial C_1} + \frac{\partial M_1}{\partial C_0} \right) \\
 K_{54} &= \frac{\partial N}{\partial D_4} = \frac{2}{l} \left( 2 \frac{\partial N}{\partial C_0} + 2 \frac{\partial N}{\partial C_1} \right) \\
 K_{64} &= K_{54}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
 K_{15} &= \frac{\partial V}{\partial D_5} = -\frac{1}{l^2} \left( \frac{\partial M_0}{\partial \varepsilon_m} + \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_m} \right) \\
 K_{25} &= \frac{\partial M_0}{\partial D_5} = \frac{1}{l} \left( \frac{\partial M_0}{\partial \varepsilon_m} \right) \\
 K_{35} &= K_{15} \\
 K_{45} &= \frac{\partial M_1}{\partial D_5} = \frac{1}{l} \left( \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_m} \right) \\
 K_{45} &= \frac{\partial M_1}{\partial D_5} = \frac{1}{l} \left( \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_m} \right) \\
 K_{55} &= \frac{\partial N}{\partial D_5} = \frac{1}{l} \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_m} \right) \\
 K_{65} &= K_{55}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
 K_{16} &= K_{15} \\
 K_{26} &= K_{25} \\
 K_{36} &= K_{35} \\
 K_{46} &= K_{45} \\
 K_{56} &= K_{55} \\
 K_{66} &= K_{65}
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Assim, as componentes material  $K_{bm}$  e geométrica  $K_{bg}$  da matriz de rigidez são calculadas separadamente relativamente ao referencial das coordenadas locais, resultando da sua soma a matriz de rigidez da barra  $K_b$ .

$$K_b^l = K_{bm}^l + K_{bg}^l \tag{3.79}$$

A matriz de rigidez correspondente às coordenadas globais pode ser calculada a partir da matriz de rigidez correspondente às coordenadas locais através da operação

$$K_b^g = amat^T K_b^l amat \tag{3.80}$$

### 3.5 Programa Principal

Tendo estabelecido a informação relativa à entrada de dados e às sub-rotinas desempenhadas pelas funções, introduz-se o cálculo principal do programa. Este cálculo consiste num processo iterativo onde são determinadas a matriz de rigidez e as forças de fixação (com auxílio das funções) que possibilitam seguidamente o cálculo dos deslocamentos da estrutura através do método de Newton-Raphson. O processo é repetido tantas vezes quantas as necessárias para que ocorra a convergência necessária. A solução para o valor dos deslocamentos globais permite definir a configuração deformada da estrutura

O processo iterativo inicia-se com o cálculo dos deslocamentos da estrutura desmontada  $D_d$ , fazendo uso do conhecimento da matriz de incidência  $A$  e do vetor de deslocamentos globais da estrutura  $D$ , obtidos na iteração anterior, sendo que para a primeira iteração são adotados valores arbitrários.

$$D_d = A \times D \quad (3.81)$$

Logo em seguida, no interior do ciclo principal que se encontra a ser executado, é iniciado um novo processo iterativo, repetido tantas vezes quantas o número de barras existentes na estrutura, onde é solicitada, de cada uma das vezes, a sub-rotina correspondente à função “barra” para que esta calcule as forças de fixação  $F_b$  e a matriz de rigidez  $K_b$  da barra a que cada iteração se refere. As informações recolhidas de cada barra em cada iteração são armazenadas num único vetor de forças  $F_d$  e numa única matriz de rigidez  $K_d$  correspondentes à estrutura desmontada. Para definir o posicionamento correto dos elementos a armazenar em cada iteração, estabelece-se que  $i_0 = (i_b - 1) \times 6$ , sendo  $i_b$  o número da barra a que se destina a iteração em curso.

$$F_{d_{i_0+1:i_0+6}} = F_b \quad (3.82)$$

$$K_{d_{i_0+1:i_0+6, i_0+1:i_0+6}} = K_b \quad (3.83)$$

O ciclo termina quando o processo tiver sido repetido para todas as barras e estiver terminado o preenchimento do vetor de forças  $F_d$  e da matriz de rigidez  $K_d$  referentes à estrutura desmontada.

Continuando dentro do ciclo principal de determinação dos deslocamentos  $D$ , é produzido o vetor de forças  $F$  relativas à estrutura montada e a matriz  $K$  também relativa à estrutura montada. Para executar esta assemblagem é necessário recorrer à matriz de incidência  $A$ .

$$F = A^T \times F_d \quad (3.84)$$

$$K = A^T \times K_d \times A \quad (3.85)$$

Os deslocamentos na estrutura montada são calculado por intermédio do Método de Newton-Raphson, conforme explicitado pela expressão (3.86), sendo posteriormente efetuado o teste de convergência.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D} + \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{F}) \quad (3.86)$$

O referido teste de convergência consiste na avaliação da norma do vetor de forças desequilibradas  $(\mathbf{P} - \mathbf{F})$ , devendo esta ser inferior a  $10^{-8}$  para que o processo iterativo cesse. Quando se atinge a convergência, os deslocamentos finais  $\mathbf{D}$  referentes à estrutura montada são convertidos e armazenados num vetor  $\mathbf{D}_d$  correspondente aos deslocamentos na estrutura desmontada.

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{A} \times \mathbf{D} \quad (3.87)$$

Os deslocamentos de todas as barras estão reunidos num único vetor  $\mathbf{D}_d$ , pelo que é necessário efetuar um ciclo repetido para todas as barras, onde são extraídos para um vetor específico os deslocamentos de cada barra.

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D}_{d_{i_0+1:i_0+6}} \quad (3.88)$$

Para cada barra, isto é, em cada iteração, as coordenadas das extremidades da barra, na sua configuração indeformada, são armazenadas num vetor  $\mathbf{C}_b$ , em que:

$$\begin{cases} x(1) = C_b(1) \\ y(1) = C_b(2) \\ x(2) = C_b(3) \\ y(2) = C_b(4) \end{cases} \quad (3.89)$$

Se às coordenadas originais da barra se somarem os deslocamentos, obtém-se a configuração deformada dessa mesma barra. Efetuando o procedimento para todas as barras e sobrepondo o desenho da deformada de cada barra no mesmo desenho, consegue-se o desenho da deformada de toda a estrutura. O cálculo das coordenadas referentes à configuração deformada é feito através da expressão (3.90) e ilustrado na Figura 3.20.

$$\begin{cases} x(1) = C_b(1) + D_b(1) \\ y(1) = C_b(2) + D_b(2) \\ x(2) = C_b(3) + D_b(4) \\ y(2) = C_b(4) + D_b(5) \end{cases} \quad (3.90)$$

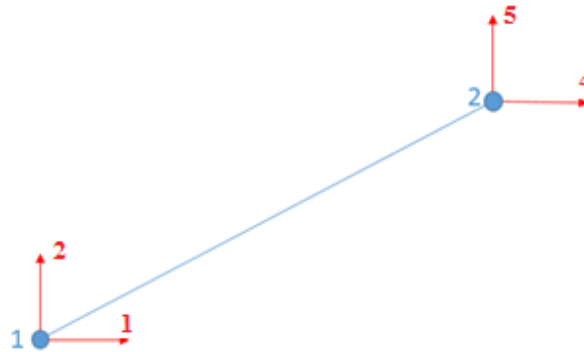


Figura 3.20 – Nós da barra e respetivos vetores de deslocamento.

Alternativamente, com o objetivo de melhorar a robustez do processo iterativo, evitando grandes incrementos nos deslocamentos, a expressão (3.86) pode ser substituída pela expressão (3.91), onde o comprimento do vetor  $dD$  é reduzido de modo que tanto deslocamentos como rotações não ultrapassem limites pré-definidos.

$$\begin{cases} D = D + dD \\ dD = K^{-1}(P - F) \end{cases} \quad (3.91)$$

Com a matriz de incidência  $A$ , a partir dos acréscimos de deslocamento na estrutura montada  $dD$ , calculam-se os acréscimos na estrutura desmontada  $dDd$ .

$$dDd = A \times dD \quad (3.92)$$

Os valores do vetor de deslocamentos  $dDd$  são comparados com os valores limite, definidos para as translações e rotações máximas. Da divisão do maior elemento de  $dDd$  pelo valor limite estabelecido resulta um fator que quando superior a 1 é aplicado a todos os deslocamentos, através da expressão (3.93) por forma a manter-se sempre a proporcionalidade dos elementos do vetor deslocamento.

$$dD_r = dD \times \frac{1}{fator} \quad (3.93)$$

Tendo calculado o vetor  $dD_r$ , onde nenhum acréscimo de deslocamento relativo à iteração anterior é superior ao limite estabelecido, determina-se o novo vetor de deslocamentos  $D$ , somando  $dD_r$  aos deslocamentos  $D$  da iteração anterior.

Este processo alternativo à expressão 3.86 pode conduzir à necessidade de mais iterações para a convergência, pelo que apenas se aconselha adotar este “artifício” quando, para um dado problema, o programa não converge com a aplicação direta da expressão (3.86).

O tempo de acesso à memória do computador (que depende da programação do algoritmo) é um bom indicador do desempenho do programa. O tempo *CPU* (*central processing unit*), isto é, o tempo de cálculo, pode ser obtido com a função *cputime*. Deste modo, após realizados todos os cálculos, o programa fornece o tempo de cálculo que foi despendido.

### 3.6 Exemplo 2

Neste ponto, apresenta-se o exemplo 2 para exemplificar o que anteriormente foi exposto, nomeadamente o modo como é possível efetuar diferentes tipos de análises, comparando ainda os seus resultados.

Adota-se uma estrutura em arco abatido, e.g., a Ponte Infante D. Henrique, no Porto, ou a Ponte Salginatobel, na Suíça, de Robert Maillart.

Para a forma do arco, define-se um vão de 100 metros e uma flecha de 11 metros e determina-se a forma do arco através da geometria anti-funcular das cargas, para que não se gerem esforços de flexão no arco. A geometria anti-funcular é obtida através do diagrama de momentos resultante da aplicação do carregamento do arco a uma viga simplesmente apoiada. A relação entre o momento máximo obtido a meio-vão e nos restantes nós terá que ser a mesma relação entre a flecha máxima e a altura de cada nó do arco.

Em termos de ligações ao exterior, o arco considerado é rotulado nos apoios.

Apresentando o arco um vão de 100 metros, será satisfatório subdividi-lo em barras de 10 em 10 metros medidas na horizontal. Nos nós de cada barra será aplicada uma carga concentrada de 2000 kN. Conforme o procedimento atrás referido, a geometria do arco é definida através do diagrama de momentos (Figura 3.22) obtido pelo diagrama de momentos da estrutura ilustrada na Figura 3.21.

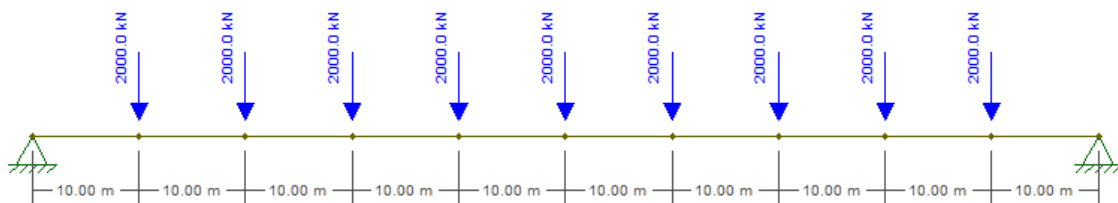


Figura 3.21 – Viga simplesmente apoiada sujeita ao mesmo carregamento a aplicar no arco.



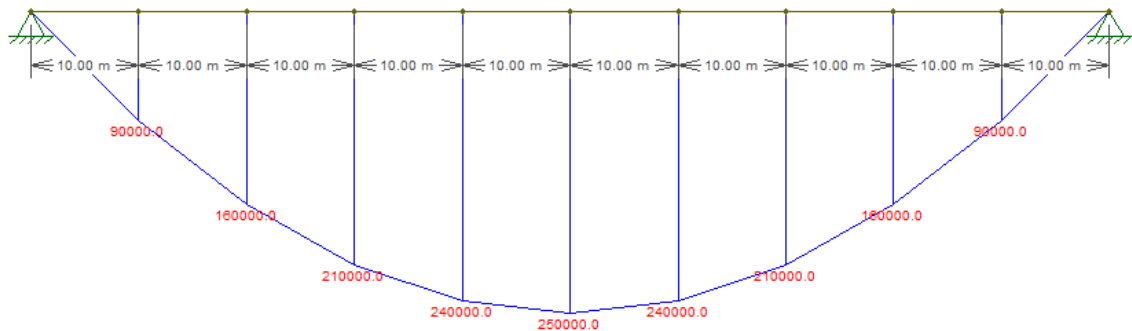


Figura 3.22 – Diagrama de momentos da estrutura representada na Figura 3.21.

O quociente entre o momento máximo de 250000 kN.m e os restantes momentos é igualado ao quociente entre a flecha de 11 metros e as restantes alturas, que são assim determinadas. Tendo então determinadas as alturas do arco a cada 10 metros, está definida a geometria do arco, sendo a identificação dos graus de liberdade, a numeração das barras e a numeração dos nós apresentadas na Figura 3.23, Figura 3.24 e Figura 3.25, respetivamente.

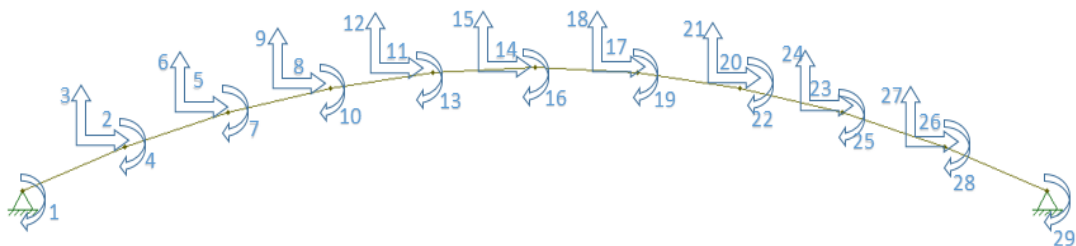


Figura 3.23 – Graus de Liberdade globais da estrutura.

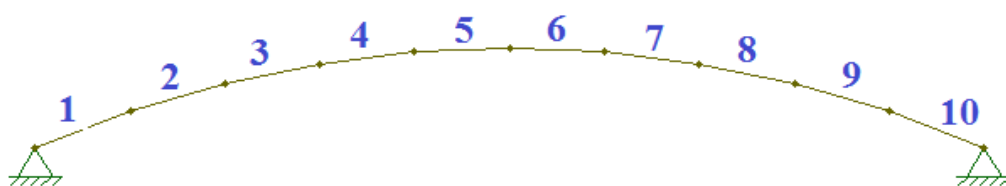


Figura 3.24 – Numeração das barras.

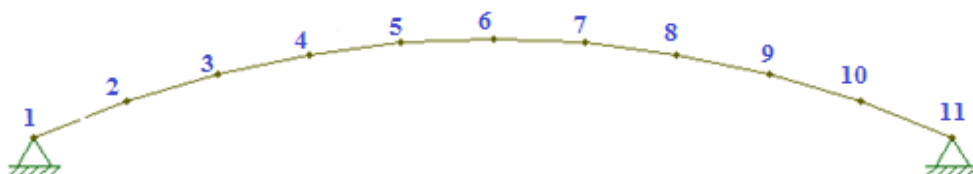


Figura 3.25 – Numeração dos nós.

O arco de betão descrito neste exemplo apresenta uma secção em caixão, em que a largura é o triplo da sua altura e as paredes possuem espessura de 15 cm. A área da secção é de 1.755 m<sup>2</sup> e o momento de inércia é de 0.5444625 m<sup>4</sup>. A secção é simetricamente armada com varões  $\phi 16$ , contendo um total de 50 varões distribuídos igualmente nas duas faces. O dimensionamento da secção da Figura 3.26 foi definido de modo a que as extensões resultantes do cálculo se localizem na zona não-linear da Figura 3.27.

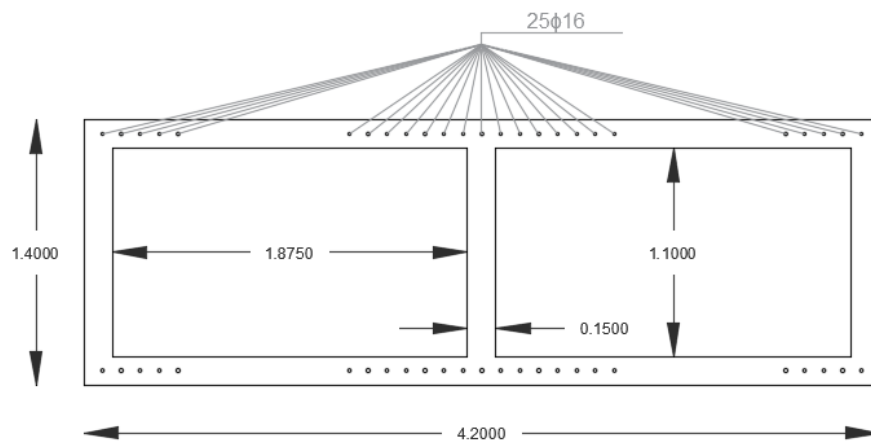


Figura 3.26 – Secção em caixão do exemplo considerado (arco).

O betão considerado é da classe C30/35, para o qual o módulo de elasticidade secante,  $E_{cm}$  é de 33 GPa e o valor característico da tensão de rotura à compressão aos 28 dias,  $f_{ck}$  é de 30 MPa. O comportamento não-linear do betão é o indicado pela EN 1992-1-1 (EC2), do qual se apresenta a representação esquemática da relação tensões-extensões na Figura 3.27. O valor de  $\epsilon_{c1}$  é a extensão correspondente à tensão máxima que segundo o EC2, para um betão da classe C30/35 toma o valor de 2.2 ‰.

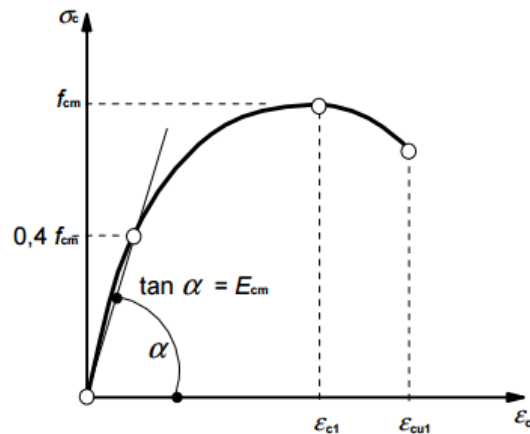


Figura 3.27 – Relação tensões-extensões para análise estrutural (NP EN 1992-1-1:2010).

Pretende-se agora apresentar a forma como, no caso do exemplo já descrito, se processa a entrada de dados na ferramenta numérica. Uma vez que a forma de tratar os dados necessários antes de iniciar o cálculo foi apresentada na secção 3.3 referente à “Entrada de dados do programa global”, ilustra-se aqui o procedimento aplicado ao caso concreto do exemplo 2.

As coordenadas dos nós das barras constituintes da estrutura, que neste caso é um arco, são definidas com base no cálculo do anti-funicular da carga, como anteriormente indicado. A matriz destinada ao armazenamento das referidas coordenadas é a matriz *coord*, que de um modo genérico é descrita pela expressão (3.17) e no caso concreto do exemplo 2 é dada pela expressão (3.94).

$$\text{coord} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 3.96 \\ 20 & 7.04 \\ 30 & 9.24 \\ 40 & 10.56 \\ 50 & 11 \\ 60 & 10.56 \\ 70 & 10.56 \\ 80 & 9.24 \\ 90 & 7.04 \\ 100 & 3.96 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

A estrutura foi dividida em dez elementos barra ( $nb=10$ ) e conseqüentemente apresenta onze nós ( $nn=11$ ). De acordo com a numeração das barras e dos nós da Figura 3.24 e da Figura 3.25,

definem-se todos os elementos barra através da matriz **bar** da expressão (3.18). A barra 1 tem como extremidades os nós 1 e 2, a barra 2 os nós 2 e 3 e assim sucessivamente, como está presente na matriz dada na expressão (3.95).

$$bar = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ 7 & 8 \\ 8 & 9 \\ 9 & 10 \\ 10 & 11 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

São aplicadas cargas em todos os nós das barras, exceto nos apoios, pelo que se contabiliza um total de nove cargas aplicadas ( $nc=9$ ) desde o nó número 2 até ao nó número 10. Todas as cargas são verticais, pelo que a sua direção de aplicação corresponde ao grau de liberdade 2 e a intensidade de cada uma delas é de 2000 kN, sendo este valor negativo pelo motivo da carga ser aplicada no sentido descendente. São assim conhecidos todos os dados necessários para preencher a matriz **cargas** referente à caracterização do carregamento da estrutura. Neste caso, a partir da matriz genérica da expressão (3.19), resulta a matriz da expressão (3.96).

$$cargas = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \times 10^6 \\ 3 & 2 & -2 \times 10^6 \\ 4 & 2 & -2 \times 10^6 \\ 5 & 2 & -2 \times 10^6 \\ 6 & 2 & -2 \times 10^6 \\ 7 & 2 & -2 \times 10^6 \\ 8 & 2 & -2 \times 10^6 \\ 9 & 2 & -2 \times 10^6 \\ 10 & 2 & -2 \times 10^6 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Uma vez que o arco apresenta um apoio duplo em cada extremidade, isto é, nos nós 1 e 11, são contabilizadas quatro ligações ao exterior ( $nblock=4$ ) estando assim, em cada um dos apoios bloqueada a translação horizontal (segundo o grau de liberdade 1) e a translação vertical (segundo o grau de liberdade 2). As condições de apoio mencionadas são assim estabelecidas na matriz **apoi**, apresentada na expressão (3.20) e que neste caso assume os valores apresentados na expressão (3.97).

$$apoio = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 11 & 1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

É necessário introduzir os dados relativos à geometria da secção para que se dê a sua divisão em fibras, conforme foi abordado na “Rotina para geração de fibras”. Dado que a secção do presente exemplo tem a forma de caixão, é necessário ter em conta as partes ocas, definindo-se por isso os três polígonos ( $npol=3$ ), representados na Figura 3.28 a cores diferentes.

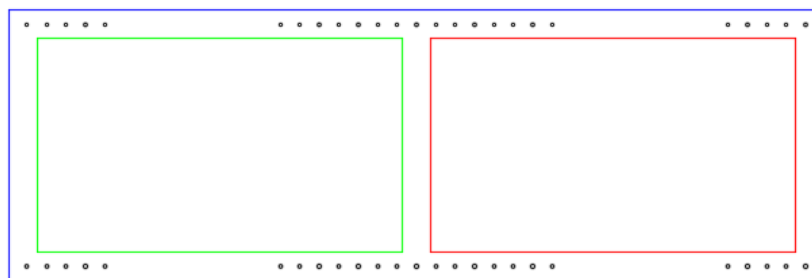


Figura 3.28 – Três polígonos constituintes da figura: Polígono 1 (azul); Polígono 2 (verde); Polígono 3 (vermelho).

Os vértices dos polígonos, ou seja, os pontos de contorno da figura são numerados, seguindo a ordem da numeração dos polígonos. Assim, enumeram-se os doze pontos ( $npc=12$ ), começando a enumeração pelo polígono azul, depois o polígono verde e por último do polígono vermelho. A numeração dos vértices apresenta-se na Figura 3.29.

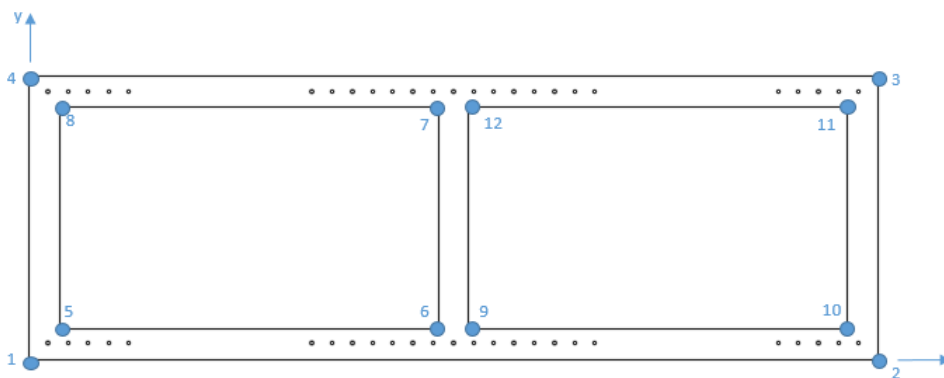


Figura 3.29 – Numeração dos vértices dos polígonos.

Cada polígono contém quatro vértices, assim o vetor  $npp$  que contém o número de pontos de cada polígono, ordenados pela ordem dos polígonos, é o seguinte:

$$npp = [4 \quad 4 \quad 4]$$

As coordenadas dos doze pontos são armazenadas nos vetores  $\mathbf{x}_c$ , para o caso das abcissas, e  $\mathbf{y}_c$  para o caso das ordenadas.

$$\mathbf{x}_c = [0 \quad 4.20 \quad 4.20 \quad 0 \quad 0.15 \quad 2.025 \quad 2.025 \quad 0.15 \quad 2.175 \quad 4.05 \quad 4.05 \quad 2.175]$$
$$\mathbf{y}_c = [0 \quad 0 \quad 1.4 \quad 1.4 \quad 0.15 \quad 0.15 \quad 1.25 \quad 1.25 \quad 0.15 \quad 0.15 \quad 1.25 \quad 1.25]$$

Assim se conclui a introdução de todos os dados necessários para que o *FiNAL* resolva, realizando todos os procedimentos ilustrados, a estrutura do exemplo 2 aqui apresentado.

Como é sabido, numa estrutura verifica-se comportamento de não-linearidade material sempre que a relação tensão-extensão não é elástica-linear ou visco-elástica linear. A não-linearidade geométrica aparece sempre que é necessário considerar alterações à geometria da estrutura, seja porque esta sofre deslocamentos ou rotações demasiado grandes para se considerar que a geometria da estrutura se manteve inalterada, seja porque é necessário considerar a interação entre os deslocamentos e os esforços internos.

No *FiNAL*, caso não seja necessário considerar a não-linearidade geométrica, prescreve-se uma única iteração. Quanto à não-linearidade material, esta pode ser ignorada com a introdução de uma lei constitutiva linear do betão. A consideração conjunta de uma única iteração e do material com lei constitutiva linear, permite a realização de uma análise linear. No extremo oposto, e certamente mais interessante, com o estabelecimento de várias iterações e a consideração de uma lei constitutiva não-linear, é alcançada a inclusão simultânea da não-linearidade geométrica e da não-linearidade material, ou seja, considera-se uma análise duplamente não-linear.

Seguidamente pretende-se comparar a disparidade de resultados que pode decorrer de três análises distintas:

- Uma **análise linear**, ou seja, considerando o comportamento geometricamente e materialmente lineares. Para não ser considerado o efeito de não-linearidade geométrica, é realizada apenas uma iteração e assume-se a lei constitutiva linear do betão.
- Uma **análise geometricamente não-linear**, mas mantendo o comportamento materialmente linear do betão.
- Uma **análise duplamente não-linear**, isto é, contendo não-linearidade material e não-linearidade geométrica.

Deve aqui ser feita a ressalva que o programa de cálculo foi desenvolvido, não para calcular estruturas por análise linear, mas sim por análise não-linear, sendo mesmo assim possível tirar-se partido dele para se obterem deslocamentos decorrentes de uma análise linear, como aliás já foi anteriormente explicado. No entanto, por força da formulação inerente ao programa, não é

possível obterem-se esforços “desligados” da configuração deformada da estrutura, como é efetuado para uma análise completamente linear.

Com o auxílio de um software independente de cálculo linear, como é o *Ftool*, é possível efetuar uma análise linear e obter daí os deslocamentos e os esforços verificados na estrutura. Posto isto, apenas se efetuou análise linear com a utilização do programa desenvolvido para que, comparando com os resultados do software *Ftool*, se afira a correção dos deslocamentos obtidos e valide o desempenho do programa.

Para além de se efetuarem as comparações entre os resultados obtidos com as diferentes análises possíveis, é importante estudar a importância de diferentes discretizações para os resultados do mesmo tipo de análise. Para se perceber a influência que o aumento do número de fibras apresenta para o rigor do cálculo dos deslocamentos, foram realizados os mesmos tipos de análise com diferentes quantidades de fibras e posteriormente fez-se a comparação dos resultados obtidos para essas diferentes discretizações. Desta forma, é possível aferir qual é a exigência necessária para que, no âmbito dos problemas estudados, haja uma proximidade suficientemente razoável entre o valor de cálculo e o valor real, com o mínimo prejuízo possível para o tempo de cálculo.

É com o objetivo de avaliar esta influência exercida pela discretização que se realizou, para a estrutura em arco do exemplo 2, três análises do tipo linear com a consideração de fibras com dimensão de 30 mm, 10 mm e 5 mm. No caso da geometria da secção adotada para o arco, o número de fibras resultante da discretização da secção em fibras de betão com as referidas dimensões é de 1884, 17660 e 70200 fibras, respetivamente.

Como foi sublinhado, a discretização em fibras da secção pode ser tão exaustiva quanto se queira. De uma forma genérica, podendo-se incorporar mais ou menos fibras, a secção apresenta o aspeto da Figura 3.30.

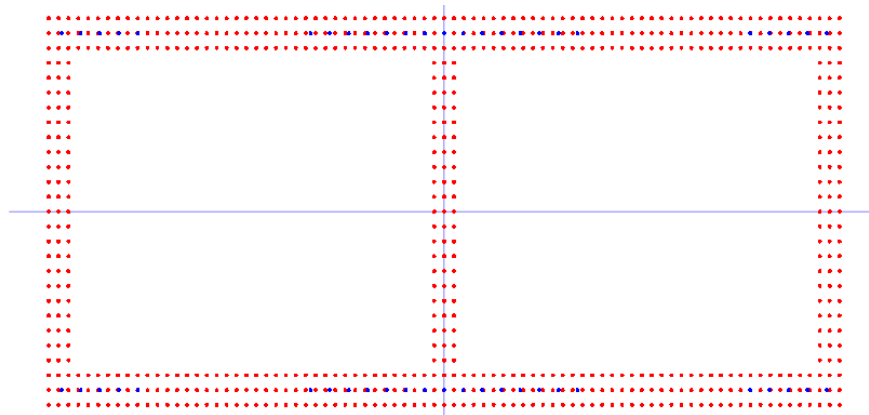


Figura 3.30 – Aspeto da secção discretizada em fibras (situação correspondente a fibras de 50 mm). A vermelho encontram-se as fibras de betão, a azul as fibras de aço.

Por forma a ilustrar a influência da dimensão das fibras nos resultados obtidos, realiza-se, para diferentes discretizações da secção, uma análise linear do arco sujeito ao carregamento da Figura 3.31. O Quadro 3-4 apresenta o valor obtido do deslocamento vertical no topo do arco, isto é, o deslocamento correspondente ao grau de liberdade 15.

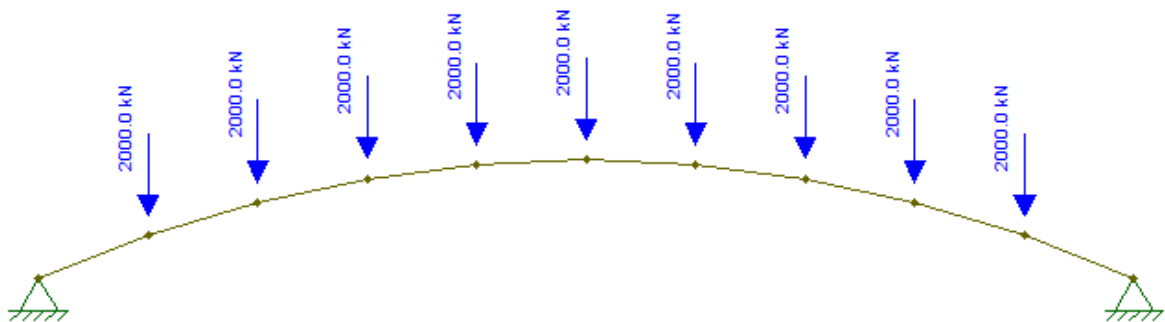


Figura 3.31 – Situação de carregamento simétrico.

Quadro 3-4 – Comparação do valor do deslocamento obtido para diferentes níveis de discretização, numa análise linear.

<b>Dimensão das fibras (mm)</b>	<b>Deslocamento vertical - Grau Liberdade 15 (cm)</b>
30	-7.916
10	-7.600
5	-7.648



Como é possível observar, ao passo que a diferença nos resultados de uma análise com fibras de 30 mm para fibras de 10 mm é de 3.16 mm, a diferença entre considerar fibras com 10 mm ou fibras com 5 mm já é apenas de 0.48 mm.

A análise de deslocamentos e rotações nos restantes graus de liberdade também sugere que é significativo o acréscimo de precisão quando se consideram fibras de 10 mm ao invés de fibras de 30 mm. Contudo, não se verifica uma diferença significativa quando se consideram fibras com dimensão de 5 mm, sendo este aumento de discretização desfavorável ao nível da economia do tempo de cálculo (é de notar que reduzindo para metade a dimensão da fibra, se quadruplica o número de fibras).

Podendo-se concluir que, para a estrutura apresentada, é bastante satisfatória uma análise considerando 17660 fibras de betão, efetua-se a comparação, com este mesmo grau de discretização, dos deslocamentos obtidos com os três diferentes possíveis tipos de análise. Assim poderá avaliar-se a importância da consideração ou não consideração de não-linearidades material e/ou geométrica. Embora o Quadro 3-5 resuma, novamente, o deslocamento segundo um grau de liberdade, para cada um dos tipos de análise com recurso ao *FiNAI* são obtidos os deslocamentos de todos os graus de liberdade da estrutura do exemplo 2.

Quadro 3-5 – Comparação do valor do deslocamento obtido para diferentes tipos de análises efetuadas.

<b>Análise</b>	<b>Deslocamento vertical - Grau Liberdade 15 (cm)</b>
Linear	-7.600
Geometricamente Não-Linear	- 7.703
Duplamente Não-Linear	- 7.81

Deve-se sublinhar que na análise duplamente não-linear, considera-se o contributo das armaduras, contrariamente ao que sucede na análise linear ou na análise geometricamente não-linear. Da análise dos resultados, é possível afirmar que a comparação dos deslocamentos obtidos com uma análise duplamente não-linear com os deslocamentos obtidos das restantes análises serve apenas para salientar o facto de que, em estruturas em arco, a análise linear subestima as deformações, sendo por isso menos segura.

A forma da deformada do arco, na análise com fibras de 10 mm, é visível na Figura 3.32. Esta deformada, correspondente à análise duplamente não-linear, mostra que há um deslocamento, para baixo, de todo o arco, sendo máximo (7.81 cm) no nó central e nulo nos apoios. Os deslocamentos nos nós simétricos em relação ao eixo de simetria do arco são iguais.

Tendo valores absolutos diferentes, as deformadas do arco considerando o mesmo carregamento simétrico, apresentam aspeto qualitativo semelhante nas duas restantes análises possíveis.

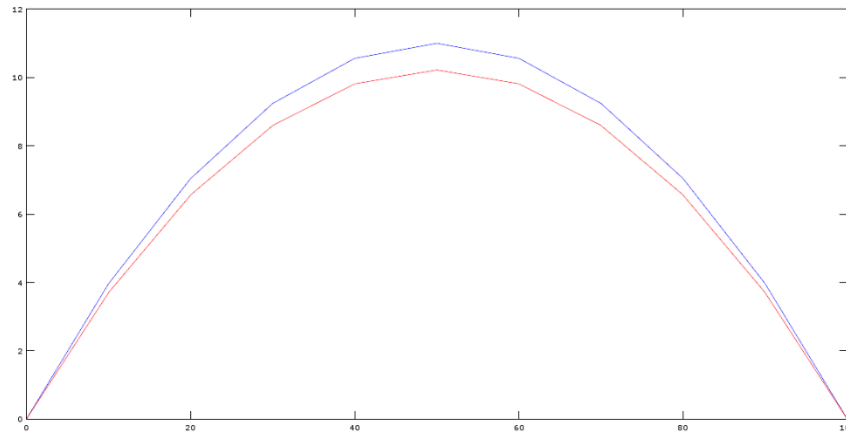


Figura 3.32 – Análise duplamente não-linear com carregamento simétrico-Configuração indeformada (azul) e configuração deformada (vermelho);Fator de amplificação dos deslocamentos igual a 10.

Os valores dos deslocamentos, segundo cada um dos 29 graus de liberdade da estrutura, que permitem ao programa desenhar a deformada apresentada figura anterior, são os seguintes:

Quadro 3-6 – Valores dos deslocamentos correspondentes a cada grau de Liberdade. Rotações representadas a cinzento (rad) e translações a branco (m).

<b>1</b>	-0.0023	<b>17</b>	-0.0038
<b>2</b>	0.0048	<b>18</b>	-0.0744
<b>3</b>	-0.0246	<b>19</b>	0.0007
<b>4</b>	-0.0022	<b>20</b>	-0.0064
<b>5</b>	0.0069	<b>21</b>	-0.0636
<b>6</b>	-0.0465	<b>22</b>	0.0013
<b>7</b>	-0.0019	<b>23</b>	-0.0069
<b>8</b>	0.0064	<b>24</b>	-0.0465
<b>9</b>	-0.0636	<b>25</b>	0.0019
<b>10</b>	-0.0013	<b>26</b>	-0.0048
<b>11</b>	0.0038	<b>27</b>	-0.0246
<b>12</b>	-0.0744	<b>28</b>	0.0022
<b>13</b>	-0.0007	<b>29</b>	0.0023
<b>14</b>	0.0000		
<b>15</b>	-0.0781		
<b>16</b>	0.0000		

É igualmente interessante comparar os esforços obtidos para os diferentes tipos de análise. A primeira secção de cada barra é designada por “secção 0” e a última por “secção 1”. Assim, para um determinado nó comum a duas barras, são conhecidos os seus esforços à esquerda (secção 1 da barra anterior) e à direita (secção 0 da barra posterior) do nó.

Para uma análise linear, retirada do software de cálculo *Ftool*, e uma análise duplamente não-linear, através do *FiNAL*, obtêm-se diferenças nos esforços de cálculo obtidos.

Quadro 3-7 – Esforços resultantes de uma análise linear e não-linear para a situação de carregamento simétrico.

Barra	Secção	Linear		Duplamente Não-Linear	
		N (kN)	M (kN.m)	N (kN)	M (kN.m)
1	0	-24339.8	0.00	-24500.0	0.00
1	1	-24339.8	-445.40	-24497.0	-368.85
2	0	-23673.4	-445.40	-23838.0	-368.85
2	1	-23673.4	-791.80	-23832.0	-698.41
3	0	-23160.9	-791.80	-23329.0	-698.41
3	1	-23160.9	-1039.20	-23322.0	-953.86
4	0	-22812.9	-1039.20	-22983.0	-953.86
4	1	-22812.9	-1187.60	-22978.0	-1114.20
5	0	-22636.9	-1187.60	-22809.0	-1114.20
5	1	-22636.9	-1237.10	-22807.0	-1168.80
6	0	-22636.9	-1237.10	-22809.0	-1168.80
6	1	-22636.9	-1187.60	-22809.0	-1114.20
7	0	-22812.9	-1187.60	-22983.0	-1114.20
7	1	-22812.9	-1039.20	-22983.0	-953.88
8	0	-23160.9	-1039.20	-23329.0	-953.88
8	1	-23160.9	-791.80	-23329.0	-698.43
9	0	-23673.4	-791.80	-23838.0	-698.43
9	1	-23673.4	-445.40	-23838.0	-368.86
10	0	-24339.8	-445.40	-24500.0	-368.86
10	1	-24339.8	0.00	-24500.0	0.00

Verifica-se que da análise linear para a análise duplamente não-linear há um aumento no esforço axial de cálculo (na barra 6, por exemplo, há um agravamento de 0.75%).

Até este ponto, analisou-se uma situação de carregamento simétrico, em que em todos os nós estão aplicados 2000 kN. Se nos nós de uma metade do arco houver uma redução de 10% das cargas aplicadas (Figura 3.33), é esperado um aumento dos momentos fletores obtidos, pois

para o novo carregamento considerado, a forma do arco deixa de ser a forma anti-funcular das cargas.

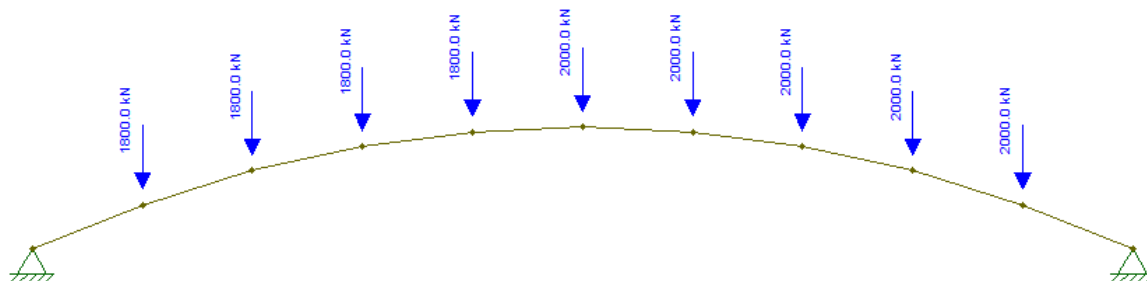


Figura 3.33 – Situação de carregamento não simétrico.

No Quadro 3-8 , apresentam-se os esforços resultantes de uma análise duplamente não-linear.

Quadro 3-8 – Esforços resultantes de uma análise duplamente não-linear para um carregamento não simétrico.

Barra	Secção	N (kN)	M (kN.m)
1	0	-23382.0	0.00
1	1	-23232.0	3020.40
2	0	-22799.0	3020.40
2	1	-22634.0	4379.00
3	0	-22344.0	4379.00
3	1	-22344.0	3934.90
4	0	-22026.0	3934.90
4	1	-22026.0	1795.30
5	0	-21852.0	1795.30
5	1	-21852.0	-1742.50
6	0	-21835.0	-1742.50
6	1	-21591.0	-4273.20
7	0	-22000.0	-4273.20
7	1	-21812.0	-5469.80
8	0	-22342.0	-5469.80
8	1	-22342.0	-5137.90
9	0	-22855.0	-5137.90
9	1	-22855.0	-3249.90
10	0	-23526.0	-3249.90
10	1	-23526.0	0.00

Com uma redução de 10% da carga num dos lados, não houve alterações relativas muito significativas para o esforço axial, ao passo que os momentos fletores viram os seus valores disparar (enquanto que o momento máximo na situação com carregamento simétrico era de

1168.80 kN.m, o momento máximo na situação com carregamento não simétrico é 5469.8 kN.m, ou seja, reduzindo a carga em 10% num dos lados do arco, há um aumento de 78.64 % para o valor do momento fletor máximo).

Adicionalmente, outro facto observável é que para um carregamento não simétrico, os momentos fletores máximos surgem nas zonas mais próximas dos apoios, enquanto com carregamento simétrico, os máximos são verificados próximos do topo do arco. Esta migração da maior concentração de esforços da zona central do arco para as extremidades é tanto maior quanto maior for a diferença entre o carregamento aplicado nos dois lados do arco.

Naturalmente, é perceptível que para uma situação com estas características, a deformada do arco é qualitativamente diferente à deformada resultante de um carregamento simétrico, pois para a situação duplamente não-linear com carregamento não simétrico, o aspeto da deformada perde a sua simetria e o seu aspeto “linear” na variação dos deslocamentos verticais nos nós, dando-se o deslocamento do arco para o lado onde é aplicada menos carga (neste caso é o lado esquerdo). A Figura 3.34 apresenta o aspeto da deformada do arco, para a situação de carregamento em estudo. O valor dos deslocamentos encontram-se no Quadro 3.9.

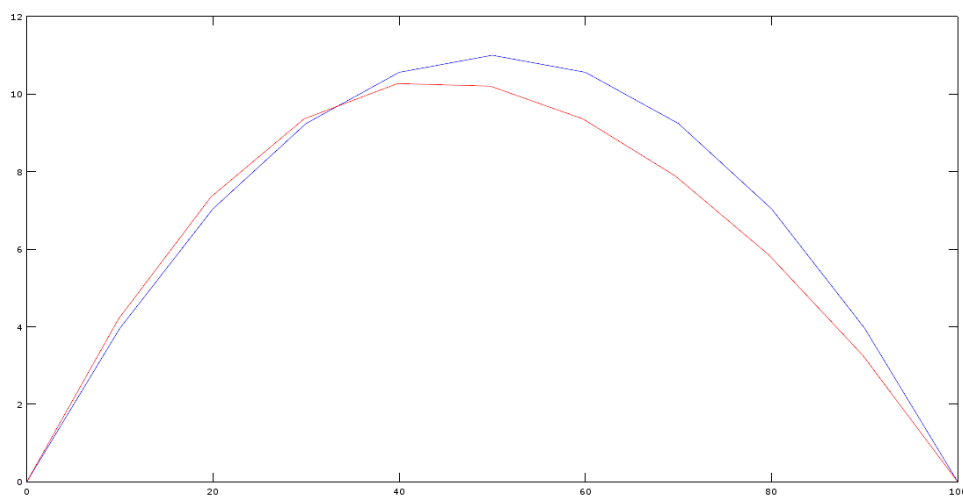


Figura 3.34 – Análise duplamente não-linear da situação com carregamento não simétrico - Configuração indeformada (azul) e configuração deformada (vermelho); Fator de amplificação dos deslocamentos igual a 10.

Quadro 3.9 – Valores dos deslocamentos correspondentes a cada grau de liberdade relativamente à Figura 3.33. Rotações representadas a cinzento (rad) e translações a branco (m).

<b>1</b>	0.0033	<b>7</b>	0.0004	<b>13</b>	-0.0053	<b>19</b>	-0.0034	<b>25</b>	0.0035
<b>2</b>	-0.0160	<b>8</b>	-0.0231	<b>14</b>	-0.0231	<b>20</b>	-0.0355	<b>26</b>	-0.0244
<b>3</b>	0.0279	<b>9</b>	0.0167	<b>15</b>	-0.0834	<b>21</b>	-0.1458	<b>27</b>	-0.0748
<b>4</b>	0.0022	<b>10</b>	-0.0033	<b>16</b>	-0.0053	<b>22</b>	-0.0001	<b>28</b>	0.0065
<b>5</b>	-0.0232	<b>11</b>	-0.0214	<b>17</b>	-0.0291	<b>23</b>	-0.0358	<b>29</b>	0.0077
<b>6</b>	0.031	<b>12</b>	-0.029	<b>18</b>	-0.1282	<b>24</b>	-0.1275		

Por forma avaliar o erro decorrente de uma análise linear relativamente a uma análise duplamente não-linear, considera-se agora uma situação de carregamento não simétrico, idêntica à da Figura 3.33, mas desta vez com uma redução de 20% da carga (equivale a dizer que se aplicaram 1600 kN no lado esquerdo do arco). Os deslocamentos calculados com a análise linear e duplamente não-linear, segundo cada grau de liberdade, são indicados no Quadro 3.10.

Quadro 3.10 – Avaliação do erro decorrente de uma análise linear face a uma análise duplamente não-linear.

<b>gdl</b>	<b>Linear</b>	<b>Não-linear</b>	<b>Erro (%)</b>
1	0.004	0.008	50.1
2	-0.018	-0.033	45.4
3	0.034	0.071	51.9
4	0.003	0.006	53.0
5	-0.026	-0.048	45.3
6	0.047	0.105	55.1
7	0.000	0.001	114.3
8	-0.026	-0.047	45.0
9	0.029	0.083	65.3
10	-0.003	-0.005	32.0
11	-0.024	-0.042	43.6
12	-0.017	0.011	256.5
13	-0.006	-0.009	37.9
14	-0.025	-0.042	41.0
15	-0.076	-0.086	11.0
16	-0.006	-0.010	40.9
17	-0.030	-0.050	38.7
18	-0.124	-0.170	26.9
19	-0.004	-0.007	46.2

20	-0.037	-0.059	37.8
21	-0.144	-0.211	31.9
22	0.000	-0.001	83.1
23	-0.037	-0.059	37.8
24	-0.126	-0.192	34.2
25	0.003	0.005	28.8
26	-0.025	-0.040	37.8
27	-0.074	-0.115	35.2
28	0.006	0.010	34.8
29	0.008	0.012	35.8

Da análise do quadro anterior, é possível constatar que a análise linear subestima grandemente o valor dos deslocamentos. A título de exemplo, com cálculo linear, o deslocamento do topo do arco é subestimado em 11 %. Para se ter uma percepção visual das diferenças dos deslocamentos obtidos, apresenta-se a Figura 3.35 (para uma melhor visualização, os deslocamentos são multiplicados por um fator de amplificação de 10).

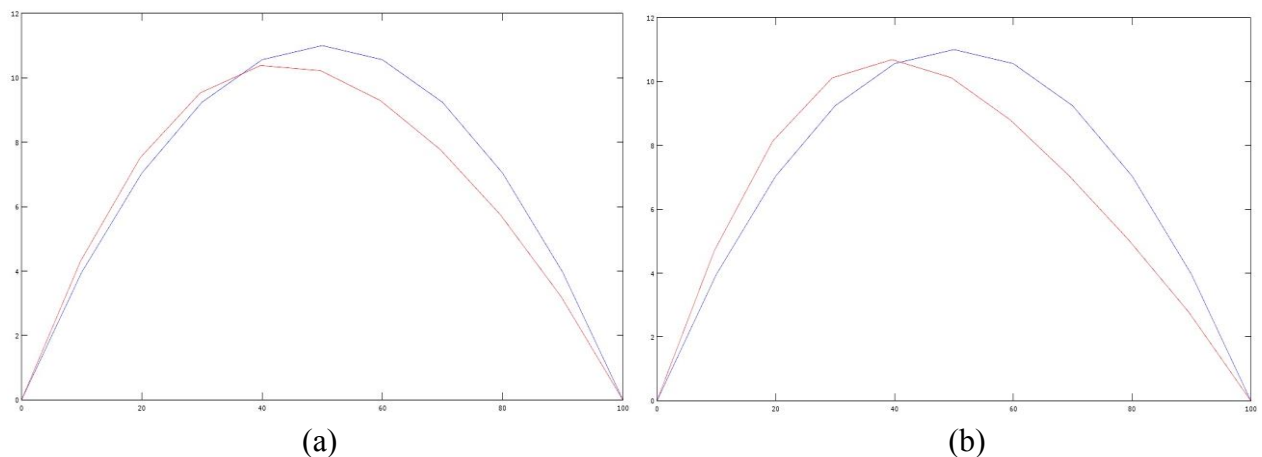


Figura 3.35 - (a) Deformada da análise linear; (b) Deformada da análise duplamente não-linear.

Caso se continue a reduzir a carga de um dos lados do arco, este irá instabilizar a partir de determinada diferença. É o que acontece quando a redução da carga é de 30% (ou seja, aplicando-se apenas 1400 kN no lado esquerdo do arco e mantendo 2000 kN no lado direito).

Numa análise duplamente não-linear, a instabilidade da estrutura é detetada já que se verifica não convergência do problema, o que é consequência da incapacidade dos esforços internos da estrutura equilibrarem as forças exteriores aplicadas. Por outro lado, numa análise linear, obter-se-iam esforços e uma configuração deformada, mesmo sem que esta correspondesse a uma situação estável de equilíbrio.

## 4 CAMPANHA EXPERIMENTAL

### 4.1 Introdução

Conforme anteriormente referido, no âmbito do presente trabalho, decidiu-se conduzir um programa experimental, tendo por objetivo validar o *software FiNAL*. Tendo este *software* sido desenvolvido com o intuito de analisar peças sujeitas à flexão composta, adotaram-se ensaios com carregamento excêntrico, aplicado no eixo de simetria de uma secção em “U”. Com os recursos disponíveis, procurou-se produzir provetes suficientemente esbeltos para acentuar a importância que a não-linearidade geométrica assume nos casos de aplicação. Para produzir os diferentes provetes, adotou-se um betão reforçado com fibras de aço, por ser um material com características melhoradas, nomeadamente maior capacidade de absorção de energia, maior ductilidade e maior capacidade de resistência à tração, sendo expectável, deste modo, obter maiores deformações e maiores deslocamentos, permitindo explorar melhor o *FiNAL*.

Para reproduzir os ensaios de flexão composta com o *software FiNAL* é necessário conhecer as leis constitutivas dos betões ensaiados. Para tal, realiza-se um conjunto de ensaios de compressão e de tração (efetuam-se dois ensaios em compressão e dois ensaios em tração, para cada mistura).

No presente capítulo, caracterizam-se os constituintes adotados e as misturas de betão reforçado com fibras (BRF), bem como os métodos de produção, cura e ensaio dos provetes.

Relativamente às características pretendidas para o BRF, estabeleceram-se valores de resistência mecânica em compressão na ordem dos 60 MPa.

### 4.2 Materiais

#### 4.2.1 Ligantes

A escolha do cimento para produzir betão neste trabalho recaiu sob o CEM I 52,5 R da Secil-Maceira (cimento constituído por um único constituinte principal, o clínquer) por este ser um cimento que permite alcançar betões de muito elevada resistência.

Como adição, adotou-se um filer calcário, com o objetivo de aumentar o volume de ligante sem que para tal aumente a dosagem de cimento, de modo a garantir a auto-compactabilidade do



betão. Quando suficientemente moído, a utilização de filer calcário permite reduzir a dosagem de água, uma vez que melhora a granulometria das partículas a constituir o betão (Ribeiro, 2012).

A Figura 4.1 apresenta os ligantes que foram usados no presente trabalho.



Figura 4.1 – (a) Cimento CEM I 52.5 R; (b) Filer calcário.

#### 4.2.2 Água e Adjuvantes

Como é sabido, a água e os adjuvantes constituem a parte fluida da pasta ligante do betão. A água a utilizar na amassadura não deve apresentar partículas nem substâncias dissolvidas passíveis de comprometer as propriedades do betão. Uma vez que foi utilizada água potável proveniente da rede pública de abastecimento, acautelou-se devidamente a adequação das suas características.

Segundo Costa (2007), a adição de adjuvantes na mistura procura conferir um melhoramento da plasticidade e da trabalhabilidade no estado fresco, possibilitando reduzir a água na mistura e por conseguinte aumentar a resistência do betão no estado endurecido (note-se que para conseguir uma boa trabalhabilidade sem aditivos é necessária uma quantidade de água superior à água necessária para a hidratação do ligante, acabando assim por se ver afetada a resistência do betão). Adicionalmente, a utilização destes produtos resulta num aumento da durabilidade do betão, visto possuírem efeito redutor da permeabilidade do betão produzido.

Os plastificantes experienciaram uma grande evolução no decurso do século XX, havendo nos dias de hoje superplastificantes de terceira geração que permitem reduções na dosagem de água que podem chegar até 40% (Costa, 2012). No trabalho aqui apresentado, foi utilizado um superplastificante à base de polímeros de éter policarboxílico (PCE), concretamente o

MasterGlenium Sky 526, para o qual entre as diversas vantagens se destaca a capacidade de produção de betão reforçado com fibras, com a reologia adequada à obtenção da fluidez e da viscosidade necessárias para efetuar o seu escoamento e auto-compactação sem ocorrência de segregação.

Quadro 4-1 – Características técnicas do Glenium Sky 526

<b>Glenium Sky 526</b>	
Função principal:	Superplastificante / Forte redutor de água
Função secundária:	Acelerador de endurecimento
Marcação CE:	EN 934-2 com T3.1, T3.2 e T7
Aspeto	Líquido turvo castanho
Densidade relativa (20°C)	1,063 ±0,02 g/cm <sup>3</sup>
pH, 20°C	5,7±1
Viscosidade (20°C)	<140 cps
Teor de cloretos:	≤0,1%

### 4.2.3 Agregados

Na produção de betão usam-se geralmente agregados de densidade normal, de origem calcária, siliciosa, ou granítica, sendo estes classificados de acordo com a sua granulometria em agregados finos, no caso das areias, e agregados grossos, no caso das britas.

No presente trabalho foi usado apenas um tipo de agregado fino, uma vez que para uma grande quantidade de fibras é importante não comprometer a trabalhabilidade da mistura. Nesse sentido, utilizou-se areia fina 0/1 mm (Figura 4.2).



Figura 4.2 – Areia fina siliciosa 0/1 mm.

#### 4.2.4 Fibras

Optou-se por utilizar micro-fibras de aço Dramix® Straight produzidas pela empresa belga Bekaert, com designação comercial OL10/0.12, o que significa que possuem 10 mm de comprimento e 0.12 mm de diâmetro. As fibras, visíveis na Figura 4.3, apresentam um banho de bronze.



Figura 4.3 - Micro-fibras utilizadas no presente trabalho.

O Quadro 4-2 resume a informação relativa à massa volúmica de todos os constituintes do BRF adotado no presente estudo, anteriormente descritos.

Quadro 4-2 – Massas volúmicas.

<b>Constituinte</b>	<b><math>\rho</math> (kg/dm<sup>3</sup>)</b>
Areia (FS)	2,63
Adição	2,70
Cimento	3,12
Fibras	7,85
Adjuvante	1,06

### 4.3 Composição do BACRF

O estudo do betão auto-compactável reforçado com fibras (BACRF) foi realizado definindo uma mistura inicial de referência, a partir da qual se partiu para a formulação de diferentes misturas com a incorporação na mistura inicial de distintas percentagens volumétricas de fibras.

A metodologia utilizada na composição dos betões teve por base o método proposto por Lourenço et al. (2004), sendo definidos os principais parâmetros da pasta ligante em função dos valores alvo pretendidos, considerando a expressão de Feret, quantificando posteriormente os agregados e as fibras a utilizar na matriz.

Para atestar a influência da variação da percentagem volumétrica de fibras na lei constitutiva do betão, consideraram-se três misturas diferentes com 3%, 2% e 1% de fibras, relativamente ao volume total da mistura.

A variação na quantidade de fibras a incluir na mistura de referência afeta os restantes constituintes que devem ser ajustados caso a caso. Para as diferentes percentagens de fibras consideradas, mantendo a relação água/cimento, é necessário realizar o ajuste da quantidade de superplastificante para compensar a perda de trabalhabilidade que é induzida pelas fibras na mistura. Havendo, para 1 m<sup>3</sup> de betão, um aumento da quantidade de fibras incorporadas, é também necessário aumentar a quantidade de superplastificante, sendo necessário compensar esse acréscimo de quantidade com remoção suficiente de agregado para produzir 1 m<sup>3</sup> de betão. Atribuiu-se a designação D\_0 à mistura de referência (sem fibras), tendo sido dadas as designações D\_1, D\_2 e D\_3 às misturas com 1 %, 2 % e 3 % de fibras, respetivamente. As dosagens dos constituintes são apresentadas no Quadro 4-3, sendo de referir ainda que se assumiu um teor de ar de 3%.

Quadro 4-3 – Dosagens das misturas

		D_0	D_1	D_2	D_3
Constituinte	Designação	Massa (kg/m <sup>3</sup> )	Massa (kg/m <sup>3</sup> )	Massa (kg/m <sup>3</sup> )	Massa (kg/m <sup>3</sup> )
<b>Cimento</b>	CEM I 52.5R	600	600	600	600
<b>Adição</b>	Fíler calcário	400	400	400	400
<b>Água</b>	Água potável	270	270	270	270
<b>Adjuvante</b>	MasterGlenium 526	2,7	3,3	3,6	3,9
<b>Agregado</b>	Areia fina 0/1mm	940	912	885	844
<b>Fibras</b>	Mico fibras aço 10/0.12	0	78.5	157	235,5

#### 4.4 Geometria dos Provetes

Como foi referido na introdução ao presente capítulo, para além dos provetes produzidos com o intuito de posteriormente testar o *software*, é necessário produzir provetes para realizar ensaios de determinação da lei constitutiva do betão. Os diferentes provetes apresentam a seguinte geometria:

- Provetes prismáticos, de  $80 \times 80 \times 500 \text{ mm}^3$  para o ensaio de determinação da lei constitutiva na zona de compressão (Figura 4.4-a);
- Provetes de  $500 \text{ mm}$  de altura com secção estrangulada, em forma de “osso de cão” ( $80 \times 80 \text{ mm}^2$  na zona mais larga e  $40 \times 80 \text{ mm}^2$  na zona mais estreita, sendo a transição efetuada ao longo de  $60 \text{ mm}$  de cada um dos topos) para o ensaio de determinação da lei constitutiva na zona de tração (Figura 4.4-b);
- Provetes prismáticos produzidos num molde triplo prismático de  $40 \times 40 \times 160 \text{ mm}^3$  para ensaios de determinação da resistência à compressão e à tração por flexão.
- Provetes de  $500 \text{ mm}$  de altura, com secção em U e paredes com  $20 \text{ mm}$  de espessura para validação da lei constitutiva (Figura 4.4-c);

As dimensões dos provetes em “U” deve-se essencialmente à intenção de produzir peças suficientemente esbeltas, de modo a sofrerem deslocamentos transversais apreciáveis. A geometria dos provetes para a determinação da lei constitutiva é condicionada pela capacidade de carga dos atuadores onde se realizam os ensaios.

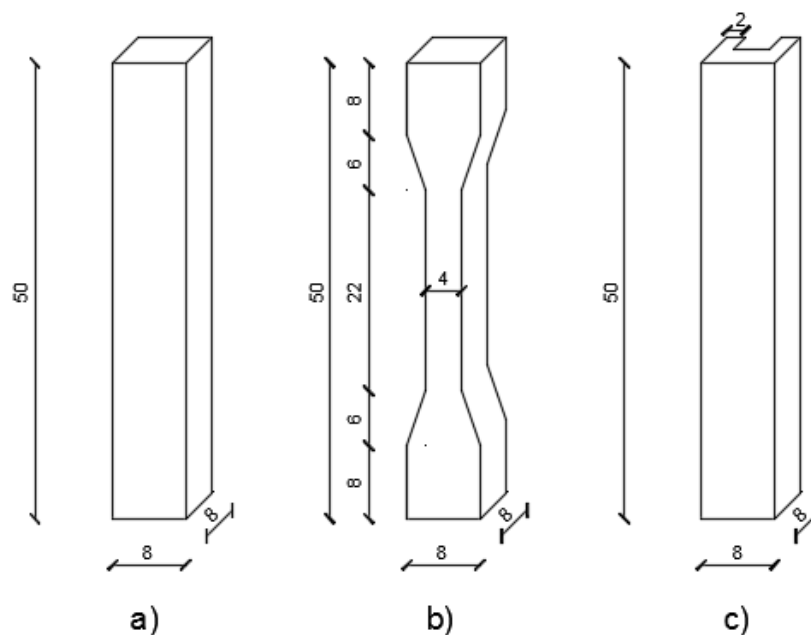


Figura 4.4-Geometria dos provetes (dimensões em cm).

## 4.5 Produção e Cura dos Provetes

### 4.5.1 Amassadura dos betões

Para executar as amassaduras dos BACRF, começou-se por pesar todos os constituintes necessários, com recurso a uma balança digital com precisão de um 1 g e uma outra balança digital com precisão de 0,01 g na qual apenas se pesou o superplastificante. Posteriormente à pesagem, os constituintes foram inseridos no interior de uma misturadora de eixo vertical, com capacidade para 80 l, onde se efetuou a amassadura do material. O processo da amassadura efetuado pode ser resumido nos seguintes pontos:

- Introduziu-se na misturadora a areia, o cimento e o filer juntamente com cerca de 80 % do total de água de mistura;
- Misturou-se o material lentamente e retirou-se o material aderente às paredes da misturadora com o auxílio de uma pá;
- Adicionou-se o superplastificante juntamente com 20 % da água total;
- Prosseguiu-se com a mistura em velocidade lenta, mantendo a preocupação de ir eliminando o material aderente nas paredes;
- Adicionaram-se as fibras à misturadora;
- Manteve-se misturadora a trabalhar à mesma velocidade até obter uma mistura homogénea, sem a existência de duas fases distintas;

Durante os processos de amassadura, registou-se um bom desempenho dos betões no que se refere à trabalhabilidade e à capacidade de escoamento e auto-compactibilidade, com libertação de ar da matriz ligante. No entanto, como é natural, a facilidade do escoamento do betão no seu estado fresco verificou-se tanto maior quanto menor a percentagem de fibras envolvida na mistura.

Os equipamentos anteriormente referidos, utilizados no processo descrito, encontram-se ilustrados na Figura 4.5 e na Figura 4.6.



Figura 4.5 – Balança onde foram pesados os materiais (exceto superplastificante) com precisão de 1 grama.



(a)



(b)

Figura 4.6 – (a) Misturadora em funcionamento durante a amassadura; (b) Misturadora após o processo de amassadura.

Terminadas as amassaduras, encheram-se os moldes para produzir os diferentes provetes necessários para a realização dos ensaios, como ilustra a Figura 4.7.

Para a produção dos provetes em “U” e dos provetes com forma de “osso de cão” foi necessário introduzir “negativos” nos moldes que conferissem ao provete a forma desejada.



Figura 4.7 – Moldes de provetes betonados, para ensaios de determinação da lei constitutiva em zona de compressão e de tração.

#### 4.5.2 Condições de cura

Sensivelmente 24 horas após a betonagem, os provetes foram desmoldados e armazenados no laboratório, assumindo-se como condições de cura, atendendo à altura do ano,  $20 \pm 2$  °C de temperatura e 40 a 50 % de humidade relativa.

A Figura 4.8 apresenta os provetes desmoldados e armazenados no laboratório.



Figura 4.8 – Provetes armazenados no laboratório.



## 4.6 Ensaio dos provetes

Foram realizados ensaios de caracterização do betão endurecido, seguindo a norma NP EN 12390 – “Ensaio do betão endurecido”, para todos os provetes produzidos.

A realização dos ensaios realizou-se aos 120 dias após a produção dos provetes. O efeito da fluência no comportamento reológico do betão não é relevante, uma vez que se realizam ensaios de curta duração.

Nos ensaios de compressão e tração para determinar a lei constitutiva, ensaiaram-se dois provetes de cada mistura. Já nos ensaios de compressão excêntrica, para validar o *FiNAL*, ensaiou-se um provete de cada mistura.

### a) Caracterização da lei constitutiva em compressão

Na Figura 4.9-a apresenta-se a configuração do *setup* do ensaio.

Os ensaios de compressão foram realizados com controlo de deslocamento, por intermédio de um servo-atuador com 1000 kN de capacidade, à velocidade constante de 0,01 mm/s. O valor da força aplicada no centro de gravidade da secção é medido com a célula de carga do servo-atuador e o encurtamento entre duas secções monitorizadas é registado através de dois transdutores de deslocamento (LVDT's: *Linear Voltage Differential Transducer*), com curso de 50 mm, instrumentados de maneira a medir os deslocamentos em faces opostas do provete. Os referidos LVDT's estão fixados ao provete de betão por intermédio de tubos metálicos, colocados em secções distanciadas 15 cm entre si e centradas a meio do provete (Figura 4.9-b).



(a)



(b)

Figura 4.9 – (a) Servo-atuador e estrutura de reação; (b) Instrumentação dos LVDT's.

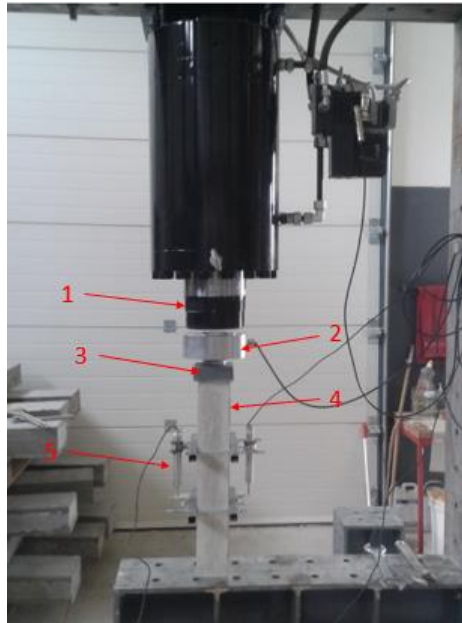


Figura 4.10 – 1-Servo-atuador com capacidade de 1000 kN; 2- Célula de carga; 3-Chapa metálica; 4- Provete de betão; 5-LVDT.

O facto da célula de carga possuir uma convexidade é importante, pois permite algum grau de liberdade na zona de transmissão da carga, mantendo a carga centrada de início ao fim do ensaio. Precisamente devido à forma da célula de carga, é necessário colocar uma chapa de aço que uniformize a distribuição das cargas no provete, caso contrário, haveria uma zona de contacto extremamente reduzida que levaria ao esmagamento do betão. Adicionalmente à chapa, nas extremidades de contacto do provete foram colocados dois cartões para uma melhor distribuição das tensões.

Após a rotura do betão, o ensaio de compressão não é imediatamente interrompido, com a intenção de estudar o seu comportamento pós pico.

#### **b) Caracterização da lei constitutiva em tração**

Os ensaios para caracterização da zona de tração da lei constitutiva dos betões estudados, foram realizados num servo-actuador com capacidade até 300 kN por controlo de deslocamento, a uma velocidade de ensaio de 0.01 mm/s. Ao actuador foi acoplada uma rótula espacial para permitir eventuais movimentos do provete durante o ensaio, mantendo a carga aplicada no centro de gravidade

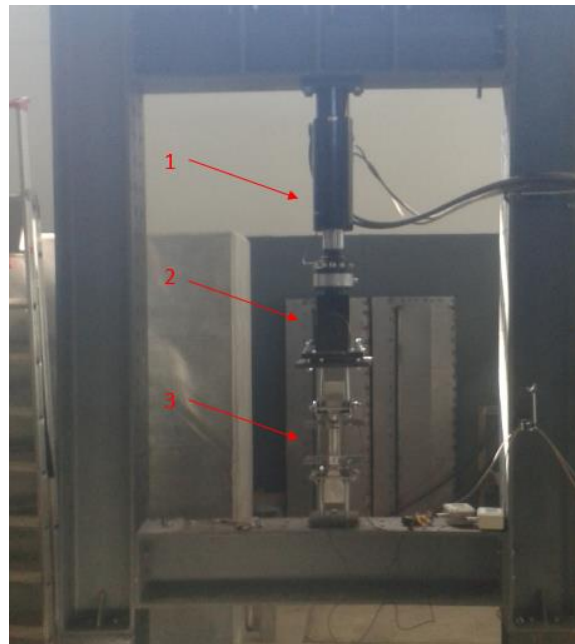


Figura 4.11 – Setup: 1- Atuador; 2-Rótula espacial; 3-Provete

As secções de leitura do provete são situadas na zona estrangulada, sendo o afastamento de uma relativamente a outra de 15 cm. Para medir os deslocamentos foi necessário desenvolver uma forma de integrar os LVDT's no provete. A melhor maneira encontrada foi a criação de peças metálicas que funcionaram como prensa, fixando o provete à viga de reação e à rótula espacial. A instrumentação desenvolvida pode ser melhor compreendida com a visualização da Figura 4.12.

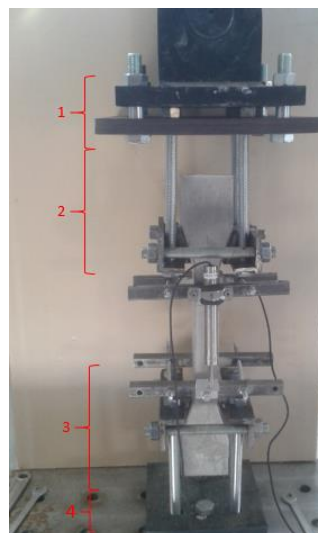


Figura 4.12 – 1-Fixação de uma chapa à rótula; 2-Fixação do provete à chapa superior; 3-Fixação do provete à chapa inferior; 4-Fixação da chapa à viga de reação.

### c) Ensaio de compressão e ensaio à flexão

O procedimento deste ensaio foi levado a cabo segundo o que está preconizado na norma EN 196-1, para determinação da resistência mecânica de cimentos e argamassas. O material foi colocado num molde triplo normalizado para a realização destes ensaios, e desmoldado em cerca de 24 horas, juntamente com as restantes peças produzidas.

Os três provetes desmoldados do molde triplo são ensaiados à flexão. Desse ensaio sobram 6 partes que são ensaiadas em compressão.

O valor médio dos resultados obtidos no ensaio dos referidos provetes são apresentados no Quadro 4-4. Embora os valores obtidos com este ensaio sejam superiores às resistências registadas nos ensaios de compressão e de tração direta realizados nos provetes com 50 cm de comprimento, o desenvolvimento da lei constitutiva obtida é muito similar.

Quadro 4-4 – Resistência mecânicas obtidas através dos ensaios da norma EN 196-1.

	<b>Compressão [MPa]</b>	<b>Flexo-tração [MPa]</b>
<b>D_1</b>	61.6	16.1
<b>D_2</b>	69.2	21.6
<b>D_3</b>	80.6	28.3

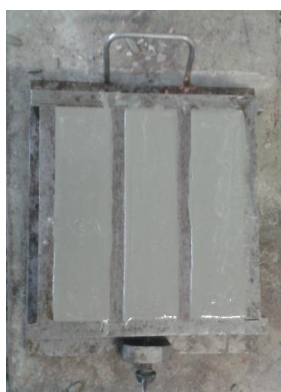


Figura 4.13 – Material no interior do molde triplo.



Figura 4.14 – (a) Ensaio de flexão; (b) Ensaio de compressão.

#### **d) Ensaio para validação da lei constitutiva e aferição do *FiNAL***

Este ensaio foi conduzido com o objetivo de validar o *FiNAL* através do confronto dos deslocamentos calculados com os obtidos experimentalmente.

Os provetes foram ensaiados com a mesma velocidade e no mesmo servo-atuador utilizado nos ensaios de caracterização da lei constitutiva em compressão, diferindo no facto de o carregamento ser aplicado fora do centro geométrico da secção, embora estando contido no seu eixo de simetria, o que provoca flexão reta composta no provete. Como tal, para além de sofrer encurtamento, a peça roda em torno de um eixo paralelo ao vetor momento, podendo ainda, no caso de instabilizar, rodar em torno de um eixo perpendicular ao mesmo vetor momento. Deste modo, é necessário registar no ensaio todos os possíveis deslocamentos, pelo que se usaram cinco LVDT's.

O esquema do ensaio é apresentado na Figura 4.15, onde é possível constatar a existência de LVDT's capazes, no seu conjunto, de medir todos os deslocamentos possíveis do provete. A numeração adotada é função do “canal” a que ficaram ligados no sistema de aquisição de dados (*datalogger*). Os LVDT's 26 e 22, alinhados com o eixo da peça, registam a variação de comprimento segundo o eixo do provete, o LVDT 16 regista o deslocamento provocado pela flexão do provete e os LVDT's 17 e 18 detetam eventuais deslocamentos laterais devido à instabilidade do provete.

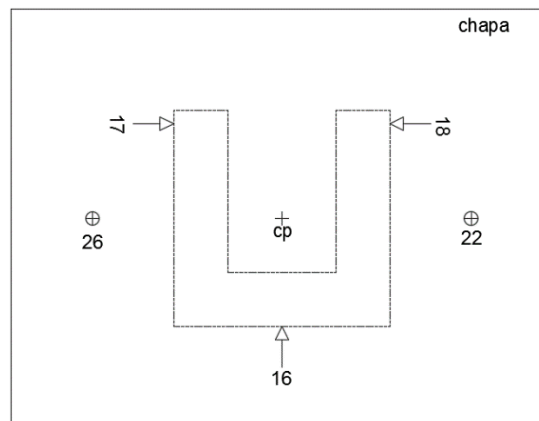


Figura 4.15 –Esquema de medição do ensaio.



Figura 4.16 – Disposição dos LVDT's para medição dos deslocamentos.

#### 4.7 Discussão dos Resultados e determinação da lei constitutiva

No Quadro 4-5 expõem-se os resultados obtidos referentes à resistência de compressão dos provetes no ensaio “caracterização da lei constitutiva em compressão”.

Quadro 4-5 – Forças e tensões de rotura para os provetes ensaiados (compressão).

		<b>1% de fibras</b>	<b>2% de fibras</b>	<b>3% de fibras</b>
<b>Força (kN)</b>	1º ensaio	379,46	399,48	385,25
	2º ensaio	376,16	399,02	391,66
	média	<b>377,81</b>	<b>399,25</b>	<b>388,455</b>
<b>Tensão (MPa)</b>	1º ensaio	59,291	62,4188	60,193
	2º ensaio	58,775	62,34	61,19
	média	<b>59,033</b>	<b>62,3794</b>	<b>60,6915</b>

Com os resultados dos ensaios à compressão, verifica-se que há um aumento considerável na resistência quando se passa de 1% de fibras (mistura D\_1) para 2% de fibras (mistura D\_2). Contudo, a resistência diminui quando se passa para uma adição de 3% de fibras (mistura D\_3), resultado que se atribui à perda de trabalhabilidade e aumento do teor de ar registados, por poder conduzir à diminuição da resistência e da rigidez. Este resultado corrobora o observado em estudos anteriores (Barros, 1996), nos quais se registaram benefícios limitados das fibras para a contribuição da resistência de pico à compressão.

Na Figura 4.17 é possível observar o modo de rotura de um provete com 3% de volume de fibras. Por comparação com provetes com 1% de fibras (Figura 4.18), constata-se que o betão desagrega-se tanto mais quanto menor é a percentagem de fibras.

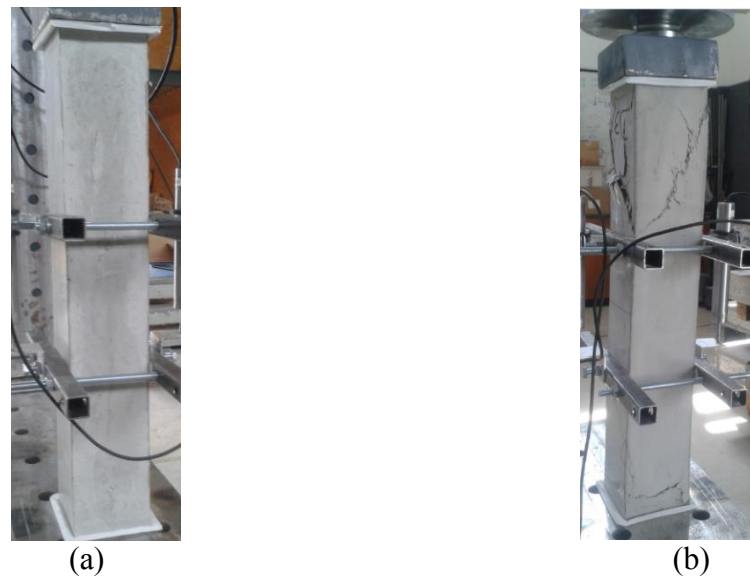


Figura 4.17 – (a) Provete antes do ensaio; (b) Provete após o ensaio.



Figura 4.18 – Maior desagregação do material após o ensaio (provete com 1% de fibras).

Após a realização dos ensaios de compressão, os resultados foram analisados com o objetivo de estudar o andamento do diagrama tensão-extensão. Posteriormente, às curvas obtidas foram ajustados traçados polinomiais de sexto grau, verificando-se valores de  $R^2$  próximos da unidade. Finalmente, a lei constitutiva de cada betão (com 1,2 ou 3% de fibras) foi determinada a partir da média das duas equações polinomiais obtidas em cada par de ensaios.

A lei constitutiva determinada em cada um dos ensaios apresenta-se nos gráficos da Figura 4.19 até à Figura 4.24.



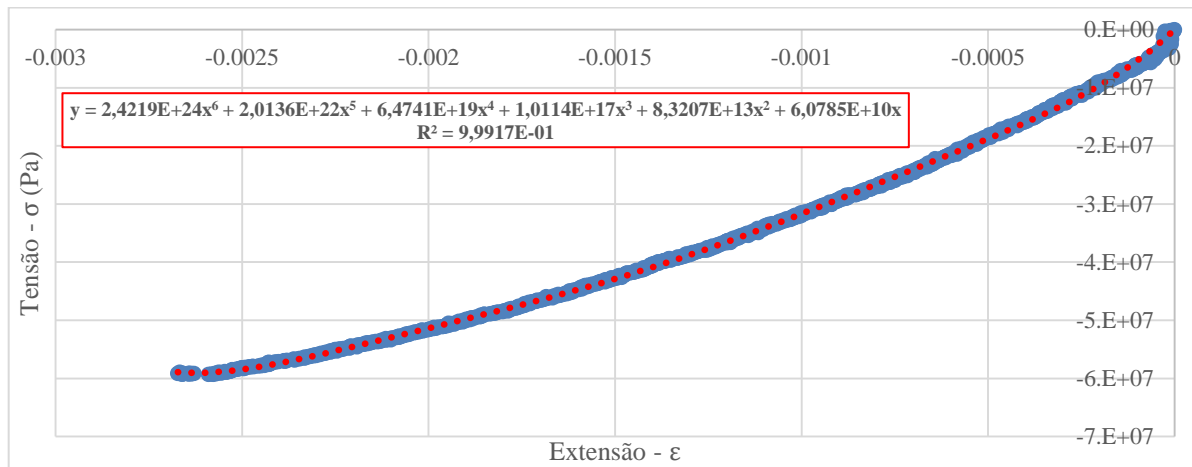


Figura 4.19 – Diagrama tensão-extensão do 1º ensaio de compressão do betão D\_1.

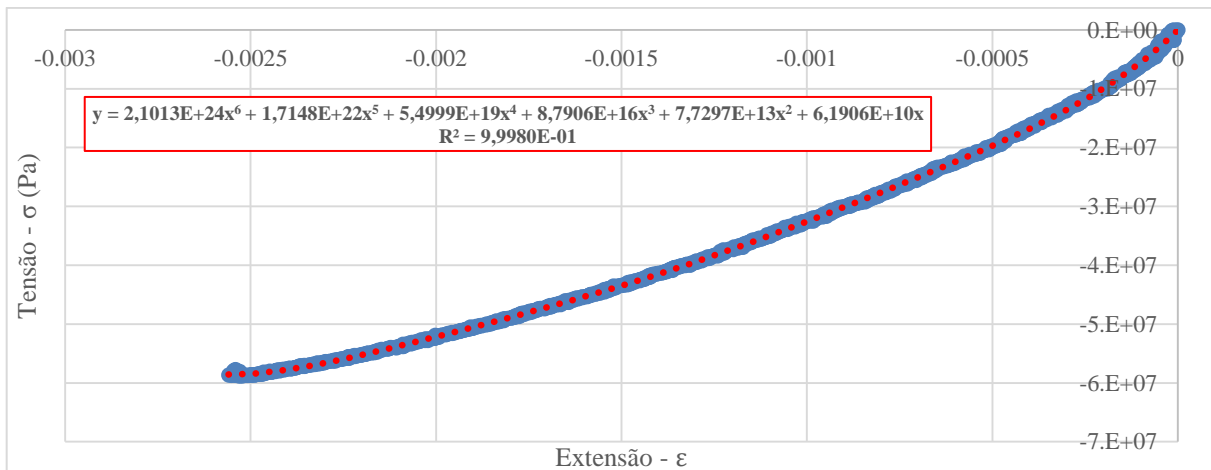


Figura 4.20 – Diagrama tensão-extensão do 2º ensaio de compressão do betão D\_1.

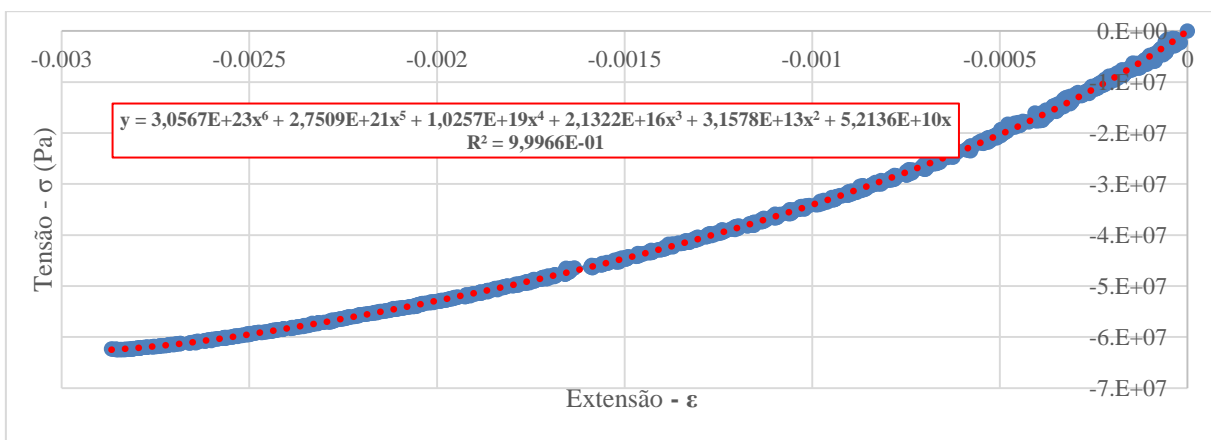


Figura 4.21 – Diagrama tensão-extensão do 1º ensaio de compressão do betão D\_2.

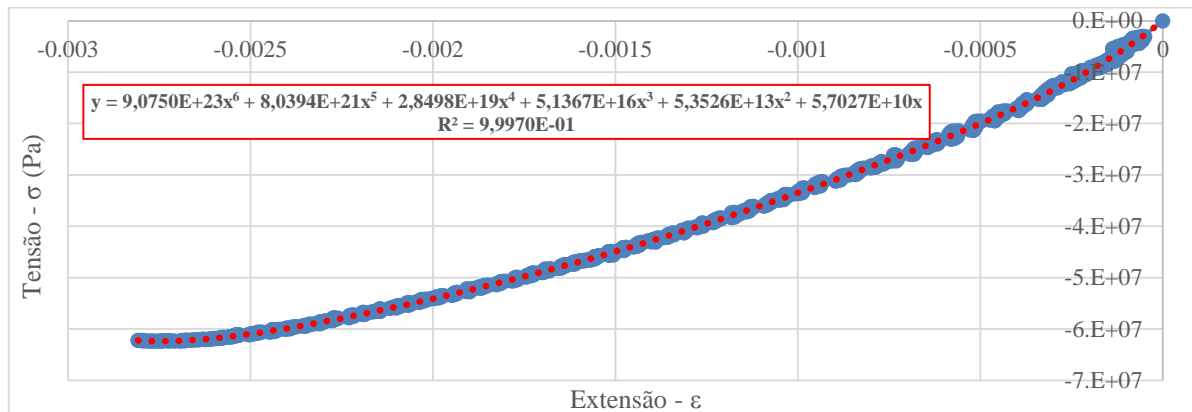


Figura 4.22 – Diagrama tensão-extensão do 2º ensaio de compressão do betão D\_2.

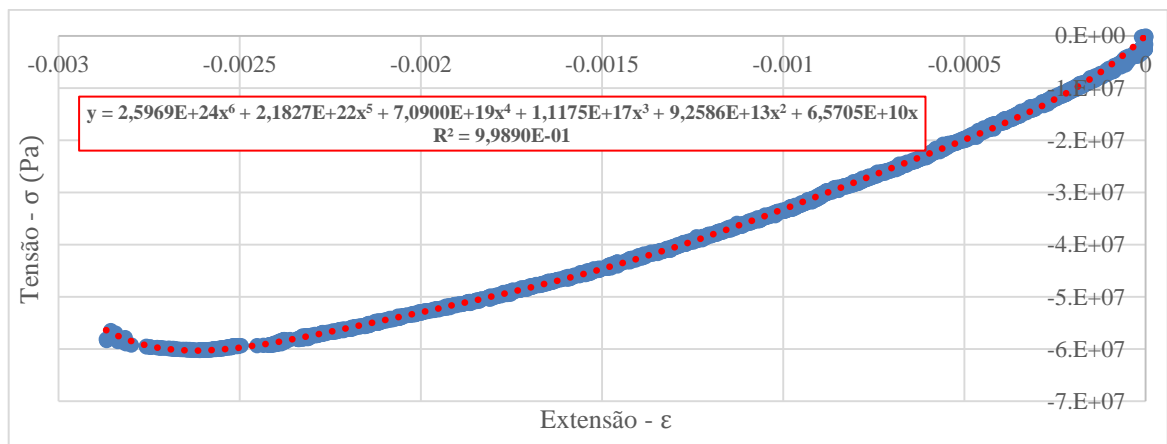


Figura 4.23 – Diagrama tensão-extensão do 1º ensaio de compressão do betão D\_3.

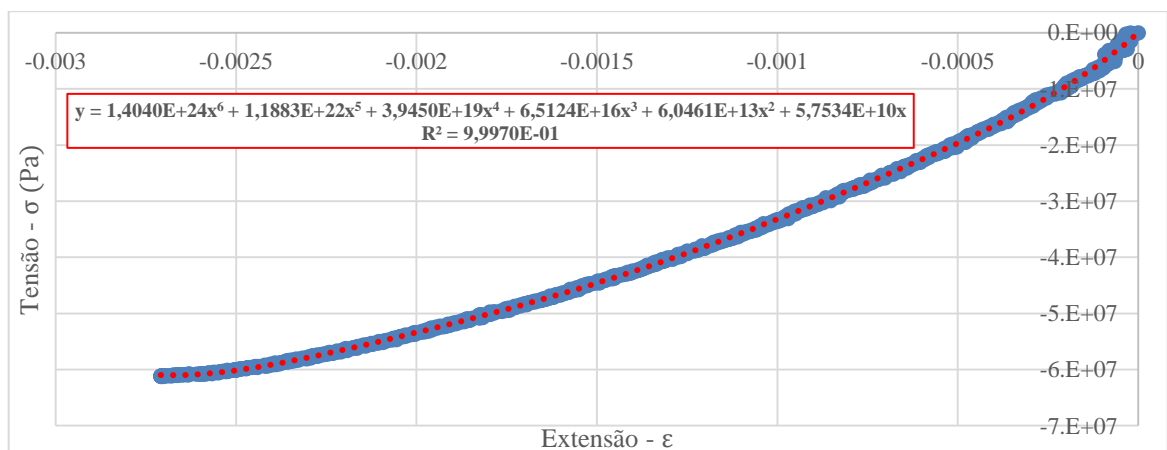


Figura 4.24 – Diagrama tensão-extensão do 2º ensaio de compressão do betão D\_3.

As equações determinadas para as leis constitutivas, no ramo de compressão, são as definidas no Quadro 4-6.

Quadro 4-6 – Leis constitutivas no ramo de compressão.

Betão	Lei Constitutiva – Ramo de Compressão
D_1	$\sigma = (2.2616 \times 10^{24})\varepsilon^6 + (1.8642 \times 10^{22})\varepsilon^5 + (5.9870 \times 10^{19})\varepsilon^4 + (9.4523 \times 10^{16})\varepsilon^3 + (8.0252 \times 10^{13})\varepsilon^2 + (6.1373 \times 10^{10})\varepsilon^1$
D_2	$\sigma = (6.0659 \times 10^{23})\varepsilon^6 + (5.3952 \times 10^{21})\varepsilon^5 + (1.9378 \times 10^{19})\varepsilon^4 + (3.6345 \times 10^{16})\varepsilon^3 + (4.2552 \times 10^{13})\varepsilon^2 + (5.4582 \times 10^{10})\varepsilon^1$
D_3	$\sigma = (2.005 \times 10^{24})\varepsilon^6 + (1.6855 \times 10^{22})\varepsilon^5 + (5.5175 \times 10^{19})\varepsilon^4 + (8.8437 \times 10^{16})\varepsilon^3 + (7.6524 \times 10^{13})\varepsilon^2 + (6.1620 \times 10^{10})\varepsilon^1$

No Quadro 4-7. expõem-se os resultados obtidos referentes à resistência de tração dos provetes no ensaio “caracterização da lei constitutiva em tração”.

Quadro 4-7 – Forças e tensões de rotura para os provetes ensaiados (tração).

		1% de fibras	2% de fibras	3% de fibras
<b>Força (kN)</b>	1º ensaio	11,352	12,642	15,033
	2º ensaio	11,169	13,092	19,062
	média	<b>11,261</b>	<b>12,867</b>	<b>17,048</b>
<b>Tensão (MPa)</b>	1º ensaio	3,548	3,951	4,698
	2º ensaio	3,490	4,091	5,957
	média	<b>3,519</b>	<b>4,021</b>	<b>5,327</b>

Da análise dos ensaios de tração, verifica-se que, com o aumento de fibras regista-se um aumento na resistência mecânica do betão.

Os resultados dos ensaios de tração, até próximo da zona de pico, são fielmente ajustados por intermédio de uma reta, cuja equação a considerar, para cada um dos três casos, resulta da média das duas equações representativas do par de ensaios realizado. As expressões para as leis constitutivas no ramo de tração são apresentadas no Quadro 4-8 e encontram-se representadas na Figura 4.25.

Quadro 4-8 – Leis constitutivas no ramo de tração.

Betão	Lei Constitutiva – Ramo de Tração
D_1	$\sigma = (2.49055 \times 10^{10})\varepsilon^1$
D_2	$\sigma = (2.24130 \times 10^{10})\varepsilon^1$
D_3	$\sigma = (2.20910 \times 10^{10})\varepsilon^1$

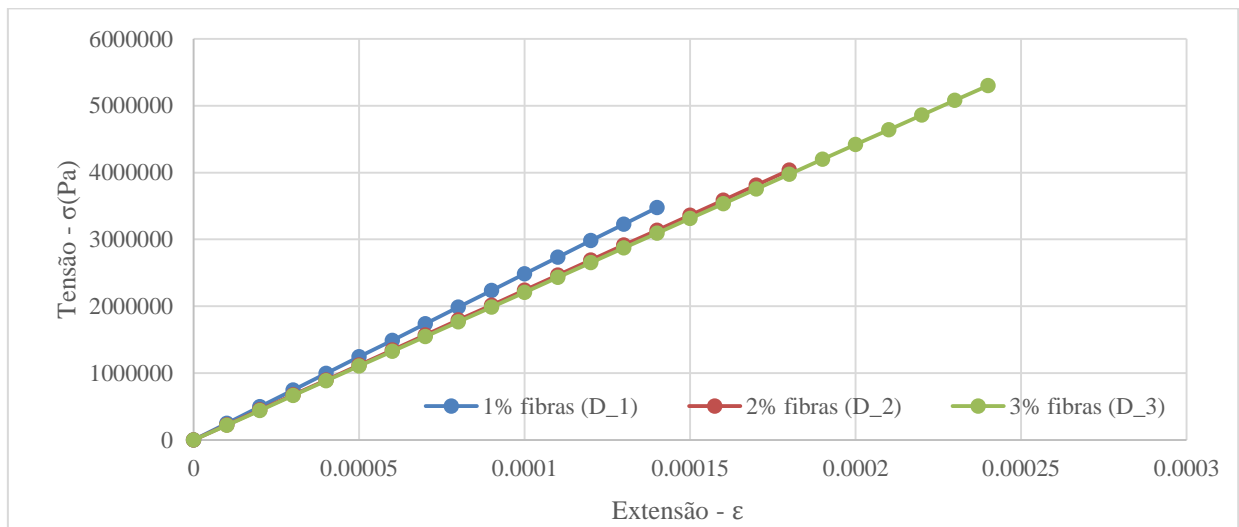


Figura 4.25 – Diagrama tensão-extensão médio para cada um dos três pares de ensaios.

## 5 TESTE E VALIDAÇÃO DO *FiNAI*

No capítulo anterior, foram definidas três leis constitutivas referentes a três betões com diferentes composições. Para cada um destes betões, foi produzido um provete com 50 cm de altura e secção em forma de “U” que posteriormente foi ensaiado com o objetivo de medir os deslocamentos experimentados durante o ensaio (“ensaio para validação da lei constitutiva e aferição do *FiNAI*”, apresentado no capítulo 4.6). Este ensaio não teria o mesmo propósito se posteriormente não fosse reproduzido através da ferramenta numérica desenvolvida no presente trabalho. Por fim, os resultados entre o medido experimentalmente e o calculado numericamente são comparados.

### 5.1 Incorporação da lei constitutiva no *FiNAI*

Uma vez determinadas experimentalmente as leis constitutivas dos betões estudados, resta apenas incorporá-las na ferramenta numérica, por forma a determinar, no interior da função “secção”, as tensões e o módulo de elasticidade tangente de cada fibra a partir da sua extensão.

A zona de compressão da lei constitutiva, definida por um polinómio de sexto grau, é válida até valores próximos da extensão de rotura, pelo que se fixou  $\varepsilon = -0.025$  como o limite do domínio da curva. No entanto, durante o processo iterativo é possível que o valor da extensão esteja fora do domínio considerado antes que se atinja a convergência. Para evitar problemas de convergência, é necessário que o ramo descendente da curva não seja utilizado. Assim, para extensões superiores (em módulo) à extensão de rotura, a lei constitutiva é descrita através de uma lei fictícia que é representada por intermédio de uma reta de inclinação igual ao módulo de elasticidade tangente na origem. De forma a ilustrar a explicação apresentada, veja-se a Figura 5.1, onde está representado a azul a curva referente à lei constitutiva do betão com 1% de fibras, cuja equação do ramo de compressão está contida no Quadro 4-6. A verde está traçada a tangente na origem da curva, e a vermelho o troço fictício, representativo da relação tensão/extensão para extensões superiores, em módulo, a  $\varepsilon = -0.0025$ .

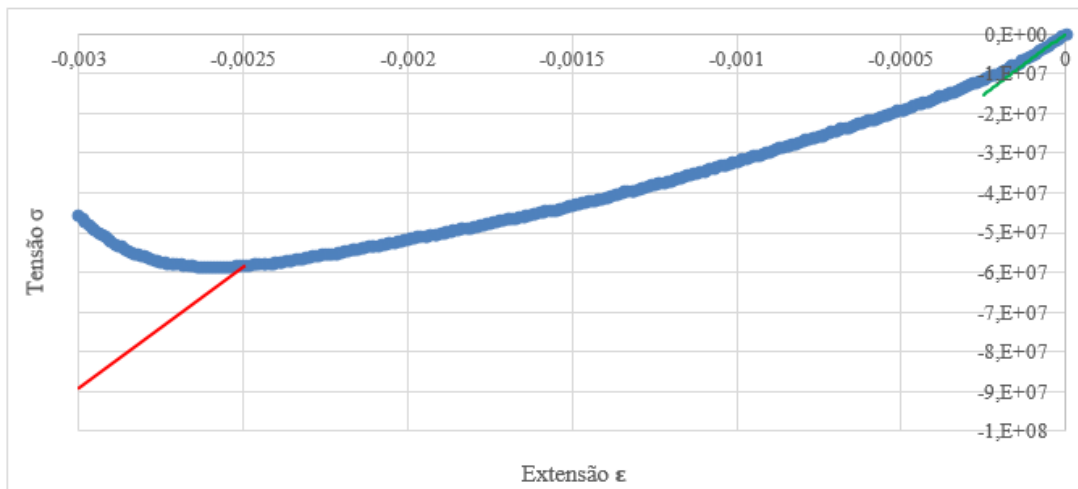


Figura 5.1– Lei constitutiva introduzida na ferramenta numérica.

Quando a extensão de uma determinada fibra é positiva, isto é, a fibra está em tração, não é necessário qualquer tipo de “manipulação” da lei constitutiva, pois o comportamento descrito no ramo de tração é linear, como se mostra no Quadro 4-8.

## 5.2 Reprodução do ensaio experimental através da ferramenta numérica

No interior da função “secção”, a extensão de uma dada fibra é calculada em função da extensão na origem da secção e do posicionamento da fibra relativamente à fibra de referência, com coordenadas ( $x_{or}$ ,  $y_{or}$ ). Tal como mostrado no capítulo referente à descrição da rotina para a geração de fibras, o *FiNAL* está programado para posicionar a fibra de referência, isto é, a fibra onde se considera a aplicação da carga, coincidente com o centro geométrico da secção.

Para proceder à validação do algoritmo desenvolvido, foi ensaiado a um prisma com 50 cm de comprimento e secção em “U”, submetido a um carregamento excêntrico (carga aplicada a meia altura da secção). Assim sendo, para reproduzir numericamente o ensaio efetuado, é conveniente alterar o posicionamento da fibra de referência, pelo que se deve substituir no algoritmo a expressão (3.16) pela expressão (5.1).

$$y_{or} = \frac{\max(y_c) + \min(y_c)}{2} \quad (5.1)$$

Na entrada de dados do algoritmo devem ser introduzidas as instruções que descrevam as condições do ensaio. A discretização do provete é efetuada com dois elementos barra, de 25 cm de comprimento cada, já que a consideração de mais elementos barra não aumenta a precisão do cálculo. Deste modo, o problema aqui em estudo assume as condições da Figura 5.2 onde é possível estudar os deslocamentos em três nós distintos, sendo especialmente importante o estudo do nó intermédio e do nó superior cujos deslocamentos foram medidos

experimentalmente através do posicionamento adequado dos LVDT's (Figura 4.15 e Figura 4.16).

A introdução dos dados na ferramenta numérica para o problema representado na Figura 5.2 foi realizada de acordo com as explicações apresentadas no capítulo da descrição da ferramenta numérica. É de referir que os cálculos foram operados com a consideração de fibras com 1 mm de dimensão, o que na secção "U" do presente caso, origina uma discretização de 4000 fibras na secção.

A reprodução dos três ensaios é então efetuada através da realização do cálculo dos deslocamentos, para diferentes carregamentos. Para cada situação referente a uma determinada lei constitutiva, são considerados múltiplos valores da carga P (incrementos de 20 kN até a uma carga final de 160 kN), por forma a comparar a evolução da relação carga/deslocamento calculada com o que foi obtido na medição experimental.

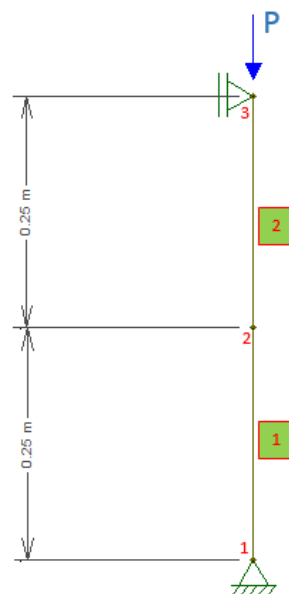


Figura 5.2 – Esquemática da estrutura representativa do ensaio, introduzida na ferramenta numérica. Numeração dos nós a vermelho e numeração das barras a sombreado.

### 5.3 Comparação de resultados

O resultado numérico dos deslocamentos obtidos em função da força P aplicada, conforme é apresentado na secção anterior, é comparado com os resultados obtidos experimentalmente, por controlo de deslocamento, como foi referido no capítulo 4, aquando da descrição dos ensaios efetuados.

A estrutura calculada e representada na Figura 5.2 apresenta 5 graus de liberdade, sendo que aqui importa estudar apenas o grau de liberdade 2 (deslocamento horizontal do nó 2) e o grau

de liberdade 5 (deslocamento de vertical do nó 3), pois foram esses deslocamentos que foram medidos experimentalmente através do posicionamento dos LVDT's (Figura 4.15 e Figura 4.16). A Figura 5.3 apresenta comparação dos deslocamentos medidos e calculados, no caso do betão com 1% de fibras.

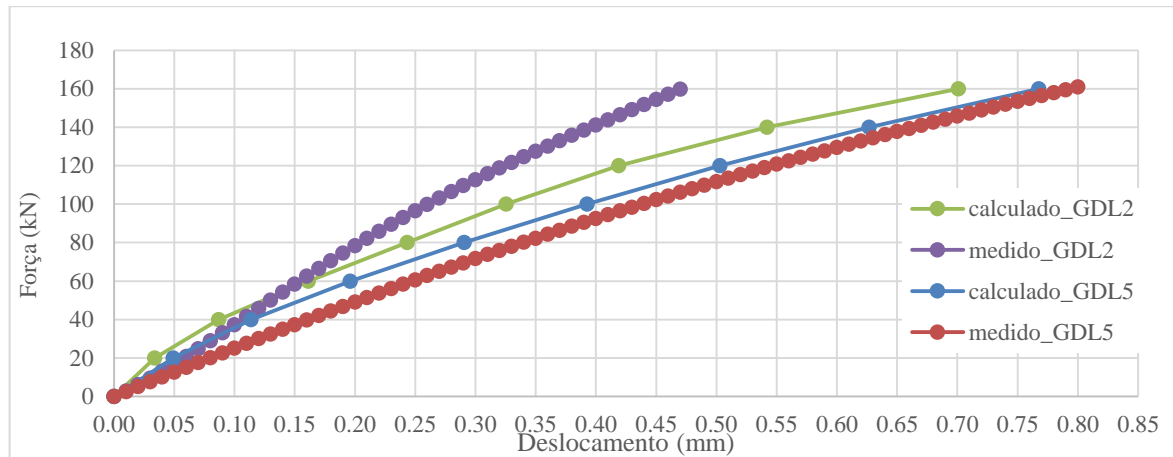


Figura 5.3 – Resultados experimentais (medido) e resultados numéricos (calculado) dos deslocamentos verificados nos provetes com 1% de fibras na sua composição.

Aquando da comparação de resultados, constata-se que as condições dos ensaios experimentais dos provetes em “U” para aferição do *FiNAL* não foram definidas de modo correto. Nos ensaios, a base do provete deveria possuir capacidade de rotação, o que aqui não aconteceu, uma vez que a colocação do provete sobre a viga de reação não corresponde ao comportamento rotulado da base. Adicionalmente, a resistência ao deslocamento horizontal no topo do provete que é exercida pelo atuador é desconhecida, visto não se saber a deformabilidade do vedante do êmbolo. As duas imprecisões referidas expõem as deficiências do modelo experimental. Esta indefinição nas condições de apoio tornam-se gravosas para o cálculo do deslocamento transversal (GDL 2), sendo o deslocamento longitudinal (GDL 5) menos influenciado.

A correta comparação dos resultados, como era desejável na presente secção, só é realizável com a repetição dos ensaios que para tal foram destinados. Por questões relacionadas com os prazos definidos para a execução deste trabalho, essa tarefa terá que ser adiada para eventuais trabalhos futuros.

A título exemplificativo da comparação que foi possível nestas condições, apresenta-se o caso do provete com 1% de fibras, onde é possível confirmar que a evolução deslocamento transversal (GDL 2) em função da carga assume configurações distintas na situação calculada e medida. Por outro lado, o resultado calculado e o medido do deslocamento longitudinal (GDL5) apresentam uma boa aproximação. Nos dois restantes casos de percentagens de fibras, a relação observada entre os resultados é semelhante à da Figura 5.3.



## 6 CONCLUSÕES

Neste último capítulo destacam-se as conclusões que de alguma forma já foram sendo referidos no curso do presente documento:

- I. A precisão do cálculo é tanto maior quanto maior o número de fibras consideradas na discretização da secção, contudo, associado a esse aumento de precisão está sempre um aumento no tempo de cálculo necessário. Reduzindo a dimensão das fibras a metade, há um aumento no tempo de cálculo de três a quatro vezes;
- II. A consideração dos efeitos geométricos na análise é importante para um estudo mais rigoroso do comportamento de uma estrutura. Uma análise não-linear revela-se mais correta, já que a rigidez diminuiu com a deformação devido aos efeitos geométricos e portanto é menor quando se considera o equilíbrio na configuração deformada;
- III. Verifica-se a capacidade da ferramenta numérica para efetuar análise linear de estruturas. As deficiências dos ensaios experimentais impossibilitam a correta avaliação da sua capacidade para efetuar análise não-linear. Contudo, os bons resultados obtidos no cálculo do encurtamento das peças, reforçam a confiança na capacidade da ferramenta numérica.

Em futuros trabalhos que pretendam prosseguir o estudo do campo em que se insere a presente dissertação, propõe-se: (i) preparar a ferramenta numérica desenvolvida para calcular forças partindo de deslocamentos impostos; (ii) alargar a aplicação da ferramenta numérica a estruturas tridimensionais e introduzir a possibilidade de analisar simultaneamente flexão segundo dois planos; (iii) repetir os ensaios de verificação da ferramenta numérica, através de modelos experimentais mais adequados (melhores condições de apoio, como no exemplo da Figura 6.1, onde o provete é bi-rotulado) e com provetes mais esbeltos;

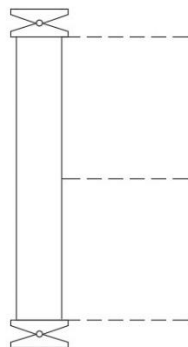


Figura 6.1 – Exemplificação de um caso em que as condições de apoio são mais adequadas para a execução dos ensaios experimentais. Zonas de leitura marcadas com tracejado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACI Comite 544. (2002). *State of the Art Report on Fiber Reinforced Concrete Reported* (ACI 544.1R-96 Reapproved 2002). ACI Structural Journal, 96 (Reapproved), 66.

Barros, J.A.O. (1996); *Estado-da-arte dos betões reforçados com fibras*; Engenharia Civil – Universidade do Minho.

Barros, J.A.O., Pereira, E.N.B., Santos, S.P.F. e Lourenço, L.A.P. (2006). *Possibilidades e Desafios do Betão Auto-compactável Reforçado com Fibras – Do Laboratório à Aplicação Real*.

Braz, M. e Nascimento, F. (2015). *Concreto Reforçado com Fibras*.

Costa, H. (2012). *Betões Estruturais de Agregados Leves. Aplicações em Prefabricação e Reforço de Estruturas*. Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Costa, R. (Março, 2013). *Modelação de Ligações Viga-Pilar na Análise de Estruturas Porticadas Planas de Betão Armado*. Tese de Doutoramento, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Delgado, P. D. (Junho, 2011). *Propriedades do betão auto-compactável no estado endurecido: Estado da arte*. Tese de Mestrado, Universidade da Beira Interior, Covilhã.

Gomes, J. (2013). *Influência das fibras metálicas no comportamento ao esforço transversal de vigas SFRC*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

Guedes, J. (1997). *Seismic Behaviour of Reinforced Concrete Bridges Modelling*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

Iturribizia, S. L. [2007]. *Análisis de secciones compuestas mediante modelos de fibras*.

Kashani, M.M., Lowes, L., Crewe, A., Alexander, N. e Dhakal, R. (2016). *Nonlinear Fiber Element Modeling of RC Bridge Piers Considering inelastic Buckling of Reinforcement*. Engineering Structures 116, 163-177.

Kostic, S.M., e Filippou, F.C. (2012). *Section Discretization of Fiber Beam-Column Elements for Cyclic Inelastic Response*. Journal of Structural Engineering.

Lourenço, J., Júlio, E., Maranha, P.; *Betões de Agregados Leves de Argila Expandida*; APEB, Lisboa (2004).

Mari, A. R. (2000). *Numerical Simulation of the Segmental Construction of Three Dimensional Concrete Frames*. Engineering Structures, 22(6), 585-596.

Naaman, A. E. (2009). *High Performance Fiber Reinforced Cement Composites: Classification and Applications*. CMB-CI International Workshop, Krachi, Pakistan.

Okamura, H. e Ouchi, M. (2003). *Self-Compacting Concrete*. Journal of Advanced Concrete Technology. Japan Concrete Institute.

Oliveira, F. (2010). *Design-Oriented Constitutive Model For Steel Fiber Reinforced Concrete*. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, Department d' Enginyeria de la Construcció.

Pereira, M. (Janeiro, 2016). *Avaliação do Efeito Beam Growth no Comportamento de Estruturas Porticadas de Betão Armado*. Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, Coimbra.

Ribeiro, F. (2012). *Betão de Elevado Desempenho Reforçado com Fibras*. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.

Santos, J., Gomes, A. e Vinagre, J. (2012). *O Betão Autocompactável e o seu Desempenho. Estado da Arte em Termos de Investigação*. Encontro Nacional de Betão Estrutural – BE2012, Porto.

Spacone, E., Taucer, F.F e Filippou, F.C. (1996). *A Fiber Beam-Column Model for Non-linear Analysis of R/C Frames: Part 1. Formulation*. Earthquake Engineering And Structural Dynamics, 25(7), 711-72.

Taucer, F. F., Spacone, E. e Filippou, F.C. (1991). *A Fiber Beam Column Element for Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures*. Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley.

Ulrix, E. e Ferreira, N. (2011). State of the Art – *Betões com Fibras em Aplicações Subterrâneas*.