



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superálgebras com Superinvolução

por

Herlisvaldo Costa Santos

Orientadora: Professora Doutora Irina Sviridova

Brasília
2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superálgebras com Superinvolução

por

Herlisvaldo Costa Santos

Orientadora: Professora Doutora Irina Sviridova

Brasília
2017

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Superálgebras com Superinvolução

por

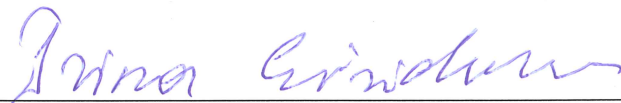
Herlisvaldo Costa Santos *

*Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade
de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de*

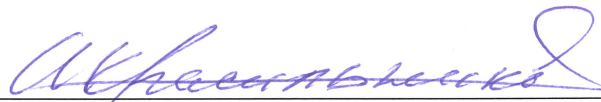
MESTRE EM MATEMÁTICA

Brasília, 29 de junho de 2017.

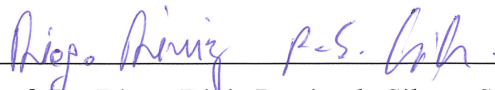
Comissão Examinadora:



Prof. Dra. Irina Sviridova - MAT/UnB (Orientadora)



Prof. Dr. Alexei Krassilnikov – MAT/UnB (Membro)



Prof. Dr. Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva - UFCG (Membro)

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237s Santos, Herlisvaldo C .
Superálgebras com Superinvolução / Herlisvaldo C. Santos;
orientador Irina Sviridova. -- Brasília, 2017.
93 p.

Dissertação (Mestrado – Mestrado em Matemática) –
Universidade de Brasília, 2017.

1.Superálgebras. 2.Superideal. 3.Superinvolução. I.Sviridova,
Irina, orient. II. Título.

Dedico este trabalho à:
Florinda Dos Santos Telles.
Svetlana Eliakova.
A todos os amigos.

Agradecimentos

- A professora Irina Sviridova, orientadora acadêmica, pela orientação, incentivo e dedicação que sempre me prestou durante a elaboração desta dissertação. Acima de tudo, agradeço a ela pela paciência e profissionalismo que tem ao ensinar e por transmitir com clareza e simplicidade certos conceitos matemáticos complexos.
- Aos professores da banca examinadora Alexei Krassilnikov e Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva pela leitura atenta e pelas correções que enriqueceram este trabalho.
- Aos professores da UNB que sem dúvida contribuíram para meu crescimento profissional e, em especial ao professor Luís Henrique de Miranda.
- Aos professores de graduação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro pela minha formação e incentivo, em especial aos professores Orlando Santos Pereira e Marcia Costa Chaves.
- A Elaine Cristine de Souza Silva por sua amizade e pelo seu apoio.
- Aos amigos e colegas do Departamento de Matemática-UNB, pela inúmeras experiências, apoio e incentivo. Especialmente, Wenison, Antonio Marcos, Valter, John Freddy. Também, a Quintino por está feliz com minha partida.
- A Svetlana Eliakova por ser a minha companheira nesta jornada.

Resumo

Nosso objetivo nesse trabalho é proporcionar às superálgebras associativas primitivas uma estrutura análoga àquelas para álgebras encontradas em [6, 7, 8] e classificar superálgebras primitivas com superinvolução tendo um superideal minimal. Finalizamos o trabalho com a classificação das superálgebras associativas de divisão com superinvolução e superálgebras simples com superinvolução.

Palavras-chave: superálgebra, superideal, superinvolução.

Abstract

Our objective in this work is to provide primitive associative superalgebras a structure analogous to those for the algebras found in [6, 7, 8] and to classify primitive superalgebras with superinvolution having a minimal superideal. We conclude the work with the classification of associative division superalgebras with superinvolution and simple superalgebras with superinvolution.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	2
1.1 Anéis Graduados	2
1.2 Anéis graduados de divisão	5
1.3 Álgebras Graduadas	6
1.4 Módulos Graduados	10
1.5 Homomorfismos Graduados	13
1.6 Anéis Graduados Primitivos	15
1.7 Teorema da Densidade para Álgebras Graduadas	18
1.8 Produto Tensorial de Álgebras	21
2 Álgebras Com Involuções e Superinvoluções	23
2.1 Superálgebras	23
2.2 Involuções e Superinvoluções	31
2.3 Supermódulos	34
2.3.1 Super-centralizador	38
2.3.2 Supermódulos Irredutíveis	40
2.4 Teorema da Densidade para Superanéis	41
3 Superálgebras Associativas de Divisão	71
3.1 Superálgebras de Divisão com Superinvolução	82

3.2 Superálgebras Simples com Superinvolução	85
Índice Remissivo	91
Referências Bibliográficas	92

Introdução

O teorema da densidade de Jacobson é bem conhecido na literatura. Ele afirma que um anel primitivo é um subanel denso do anel de transformações lineares de um espaço vetorial sobre um anel de divisão (veja [8]). Usando uma teoria análoga, Racine, em [10], provou um teorema análogo ao teorema de Jacobson para superanéis. No mesmo artigo, ele classifica as superálgebras com superinvoluções.

O principal objetivo desta dissertação é apresentar para superálgebras associativas uma teoria clássica análoga para álgebras associativas encontradas nos livros [7, 6, 8]. A dissertação está organizada da seguinte maneira.

No capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos e é assumido o conhecimento por parte do leitor de álgebra, teorema da densidade de Jacobson e conceitos relacionados. Iniciamos com a definição de anéis graduados, apresentamos a definição de álgebras associativas graduadas, módulos graduados, homomorfismo graduados e resultados relacionados. Por fim, apresentamos a definição de produto tensorial que é importante para entendimento do segundo capítulo.

No capítulo 2 consideramos as \mathbb{K} -álgebras com característica diferente de 2, onde \mathbb{K} é um corpo. Em seguida, definimos uma \mathbb{K} -superálgebras que é o tema central desta dissertação, apresentamos a definição de superinvolução. Finalizamos o capítulo, com o teorema da densidade para superanéis que é análogo ao teorema de Jacobson para anéis não graduados e algumas aplicações.

No capítulo 3 concluímos o trabalho com a classificação de todas as superálgebras de divisão com superinvolução e as superálgebras simples com superinvolução.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Anéis Graduados

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades de anéis graduados. As definições, teoremas e exemplos apresentados, são análogos aos dos livros [3] e [6].

Sejam $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ um anel (associativo) e \mathcal{G} um grupo qualquer.

Definição 1.1. O anel \mathcal{R} é dito \mathcal{G} -graduado se \mathcal{R} pode ser escrito como soma direta de subgrupos aditivos $\mathcal{R} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{R}_g$ tais que para todos $g, h \in \mathcal{G}$, $\mathcal{R}_g \cdot \mathcal{R}_h \subseteq \mathcal{R}_{gh}$.

Segue da definição que qualquer $r \in \mathcal{R}$ pode ser unicamente escrito como uma soma $r = \sum_{g \in \mathcal{G}} r_g$ com $r_g \in \mathcal{R}_g$. O subgrupo \mathcal{R}_g é chamado componente homogênea de \mathcal{R} , $g \in \mathcal{G}$. Um elemento $0 \neq r \in \mathcal{R}$ é homogêneo se existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $r \in \mathcal{R}_g$, neste caso, dizemos que r tem grau g e escrevemos: $\deg r = g$.

Um subgrupo aditivo $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ é graduado (ou homogêneo) se $\mathcal{S} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} (\mathcal{S} \cap \mathcal{R}_g)$. Ou seja, \mathcal{S} é graduado se, para qualquer $s \in \mathcal{S}$, $s = \sum_{g \in \mathcal{G}} s_g$ implica que $s_g \in \mathcal{S}$, para todo $g \in \mathcal{G}$. Similarmente, podemos definir subanéis graduados, ideais graduados.

Note que, se \mathcal{H} é um subgrupo de \mathcal{G} , então $\mathcal{S} = \bigoplus_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{R}_h$ é um subanel graduado de \mathcal{R} .

No caso em que I é um ideal graduado de \mathcal{R} então o anel quociente $\mathcal{R}/I = \{x+I \mid x \in \mathcal{R}\}$ é um anel graduado com componentes homogêneas definidas por:

$$(\mathcal{R}/I)_g := (\mathcal{R}_g + I)/I = \{r_g + I \mid r_g \in \mathcal{R}_g\}, \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

É fácil ver que todo anel possui a seguinte graduação que é chamada de **graduação trivial**.

Exemplo 1.2 (Graduação Trivial). *Sejam \mathcal{R} um anel e \mathcal{G} um grupo qualquer, a graduação trivial em \mathcal{R} é definida por: $\mathcal{R}_e = \mathcal{R}$ e $\mathcal{R}_g = \{0\}$ para $g \neq e$, onde $e \in \mathcal{G}$ é o elemento neutro do grupo \mathcal{G} .*

Exemplo 1.3. *Sejam \mathcal{R} um anel e x_1, \dots, x_k indeterminadas sobre \mathcal{R} . Para $m = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$, defina $x^m := x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$. Então o anel polinomial $S = \mathcal{R}[x_1, \dots, x_k]$ é um anel \mathbb{Z} -graduado, onde*

$$S_n = \left\{ \sum_{m \in \mathbb{N}^k} r_m x^m \mid r_m \in \mathcal{R} \text{ e } m_1 + \dots + m_k = n \right\}.$$

$U(\mathcal{R})$ é o conjunto dos elementos inversíveis de \mathcal{R} .

Proposição 1.4. *Sejam e o elemento neutro do grupo \mathcal{G} e \mathcal{R} um anel \mathcal{G} -graduado. Então \mathcal{R}_e é um subanel de \mathcal{R} .*

Demonstração. Como \mathcal{R} é graduado, por definição, $\mathcal{R}_e \mathcal{R}_e \subseteq \mathcal{R}_e$, ou seja, \mathcal{R}_e é fechado em respeito de multiplicação, logo \mathcal{R}_e é um subanel de \mathcal{R} . ■

Proposição 1.5. *Seja $\mathcal{R} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{R}_g$ um anel \mathcal{G} -graduado unitário. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $1 \in \mathcal{R}_e$, onde e é o elemento neutro do grupo \mathcal{G} .
2. \mathcal{R}_g é um \mathcal{R}_e -bimódulo, $\forall g \in \mathcal{G}$.
3. O inverso r^{-1} de um elemento homogêneo $r \in U(\mathcal{R})$ é homogêneo.

Demonstração.

1. Sejam $1_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}$ a unidade de \mathcal{R} e

$$1_{\mathcal{R}} = \sum_{g \in \mathcal{G}} x_g, \text{ onde } x_g \in \mathcal{R}_g, \quad (1.1)$$

a decomposição de $1_{\mathcal{R}}$ em componentes homogêneas. Observe que em (1.1), $x_g \neq 0$ para um número finito de $g \in \mathcal{G}$. Então para todo $h \in \mathcal{G}$,

$$x_h = x_h \cdot 1_{\mathcal{R}} = x_h \sum_{g \in \mathcal{G}} x_g = \sum_{g \in \mathcal{G}} x_h x_g.$$

Por comparação de grau, tem-se $x_h = x_h x_{\epsilon}$. Portanto,

$$x_{\epsilon} = 1_{\mathcal{R}} \cdot x_{\epsilon} = \left(\sum_{g \in \mathcal{G}} x_g \right) x_{\epsilon} = \sum_{g \in \mathcal{G}} x_g x_{\epsilon} = \sum_{g \in \mathcal{G}} x_g = 1_{\mathcal{R}}.$$

Consequentemente, $x_{\epsilon} = 1_{\mathcal{R}} \in \mathcal{R}_{\epsilon}$.

2. Segue da Proposição 1.4 que \mathcal{R}_{ϵ} é um subanel de \mathcal{R} . Temos pela definição de anel graduado que

$$\mathcal{R}_{\epsilon} \mathcal{R}_g \subset \mathcal{R}_g \text{ e } \mathcal{R}_g \mathcal{R}_{\epsilon} \subset \mathcal{R}_g, \quad \forall g \in \mathcal{G},$$

logo, \mathcal{R}_g é um \mathcal{R}_{ϵ} -bimódulo para todo $g \in \mathcal{G}$.

3. Suponha que $r_h \in U(\mathcal{R}) \cap \mathcal{R}_h$ com $h \in \mathcal{G}$. Seja $r \in \mathcal{R}$ tal que $r_h r = r r_h = 1$. Como \mathcal{R} é graduado então $r = r_{g_1} + \dots + r_{g_n}$ com $r_{g_i} \in \mathcal{R}_{g_i}$, $i = 1, \dots, n$. Logo,

$$1 = r_h r = r_h (r_{g_1} + \dots + r_{g_n}) = r_h r_{g_1} + \dots + r_h r_{g_n} \in \mathcal{R}_{\epsilon}, \quad g_i \in \mathcal{G}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Comparando os graus dos elementos e pela unicidade do elemento inverso do grupo \mathcal{G} , concluímos que existe um l tal que $h g_l = \epsilon$, $r_h r_{g_l} = r_{g_l} r_h = 1$ e $r_h r_{g_k} = 0$ para todo $k \neq l$ com $1 \leq k \leq n$. Logo $g_l = h^{-1}$, portanto, $r \in \mathcal{R}_{h^{-1}}$.

■

Definição 1.6. *Sejam \mathcal{R} e \mathcal{R}' dois anéis \mathcal{G} -graduados, um homomorfismo de anéis \mathcal{G} -graduados $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ é um homomorfismo de anéis tal que*

$$f(\mathcal{R}_g) \subseteq \mathcal{R}'_g, \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

Um homomorfismo de anéis graduados f é chamado isomorfismo se f é bijetivo. E quando existir um isomorfismo entre anéis graduados, escreveremos $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$.

Lema 1.7. *Sejam $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ dois anéis \mathcal{G} -graduados e f um isomorfismo de \mathcal{R} em \mathcal{R}' . Então a inversa de f , denotada por f^{-1} , é um isomorfismo de anéis graduados.*

Demonstração. Seja $f^{-1} : \mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ a inversa de f . Então f^{-1} é um isomorfismo de anéis. Logo, para provar que f^{-1} é um isomorfismo de anéis graduados, é suficiente observar que $f(\mathcal{R}_g) = \mathcal{R}'_g$ para todo $g \in \mathcal{G}$, e portanto $\mathcal{R}_g = f^{-1}(\mathcal{R}'_g)$, $\forall g \in \mathcal{G}$. ■

1.2 Anéis graduados de divisão

Nesta seção, \mathcal{R} representará um anel \mathcal{G} -graduado associativo com unidade, onde \mathcal{G} é um grupo qualquer. Representaremos por ϵ o elemento neutro do \mathcal{G} .

Definição 1.8. *Um anel \mathcal{G} -graduado \mathcal{R} é chamado anel graduado de divisão se todo elemento homogêneo não nulo do \mathcal{R} é inversível.*

É claro que se \mathcal{R} é um anel graduado de divisão, então \mathcal{R}_ϵ é um anel de divisão. Todo anel de divisão com qualquer \mathcal{G} -gradação é graduado de divisão, entretanto, existem anéis graduados de divisão que não são anéis de divisão.

Exemplo 1.9 (Álgebra de Grupos). *Para um grupo \mathcal{G} , a álgebra de grupo $\mathbb{K}\mathcal{G}$, onde \mathbb{K} é um corpo, tem uma gradação natural*

$$\mathbb{K}\mathcal{G} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} (\mathcal{G})_g, \text{ onde } (\mathbb{K}\mathcal{G})_g = \mathbb{K}g.$$

$\mathbb{K}\mathcal{G}$ é um anel \mathcal{G} -graduado de divisão. Considere $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_2$, então $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{K}\eta_0 + \mathbb{K}\eta_1$ é graduado de divisão, onde $\eta_i\eta_j = \eta_{i+j}$, $\forall i, j \in \mathbb{Z}_2$. Entretanto, não é um anel de divisão, pois $0 \neq \eta_0 + \eta_1 \in \mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ não possui inverso.

Dado um anel \mathcal{G} -graduado \mathcal{R} , podemos definir um novo anel chamado anel oposto de \mathcal{R} representado por \mathcal{R}^{op} .

Definição 1.10 (Anel oposto \mathcal{R}^{op}). *Seja \mathcal{R} um anel \mathcal{G} -graduado. O anel oposto de \mathcal{R} , \mathcal{R}^{op} , é o grupo aditivo \mathcal{R} com a multiplicação dada por*

$$r \underset{op}{\circ} r' := r' r$$

para quaisquer $r, r' \in \mathcal{R}$. Nessas condições, \mathcal{R}^{op} também é um anel \mathcal{G} -graduado, com $(\mathcal{R}^{op})_g = \mathcal{R}_g$.

1.3 Álgebras Graduadas

Seja \mathbb{K} um corpo de característica diferente de dois.

Definição 1.11. *Uma \mathbb{K} -álgebra \mathcal{A} é \mathcal{G} -graduada se existe uma família de \mathbb{K} -espaços vetoriais $\{\mathcal{A}_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ tal que*

- i. $\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{A}_g$;
- ii. $\mathcal{A}_g \mathcal{A}_h \subseteq \mathcal{A}_{gh}$ para todo $g, h \in \mathcal{G}$.

Observamos que toda álgebra graduada é, em particular, um anel graduado.

Da mesma forma que definimos subanel graduado, ideal graduado e anel graduado de divisão podemos definir subálgebra graduada, ideal graduado de uma álgebra graduada e álgebra graduada de divisão. As definições são análogas às feitas acima.

Exemplo 1.12. *Sejam n inteiro positivo e $A = M_n(\mathbb{K})$ a álgebra de matrizes com entrada no corpo \mathbb{K} . Considere $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_m$. Dado $(g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{Z}_m^n$, considere o subespaço*

$$A_\sigma = \langle e_{ij} | g_i^{-1} g_j = \sigma \rangle,$$

onde

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_j, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad e \quad e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}, \quad \text{com} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}. \quad (1.2)$$

Como $\{e_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ é uma base de A , então $A = \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}_m} A_\sigma$. Agora, observe que para todo $e_{ij} \in A_{\sigma_1}$ e $e_{ks} \in A_{\sigma_2}$, com $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z}_m$, temos:

1. $e_{ij}e_{ks} = 0 \in A_{\sigma_1\sigma_2}$, se $j \neq k$;
2. $e_{ij}e_{ks} = e_{is}$, se $j = k$. Neste caso, $e_{ij}e_{ks} \in A_{\sigma_1\sigma_2}$, pois $g_i^{-1}g_j = \sigma_1$, $g_k^{-1}g_s = \sigma_2$ e $j = k$. Logo, $g_i^{-1}g_s = g_i^{-1}(g_jg_k^{-1})g_s = (g_i^{-1}g_j)(g_k^{-1}g_s) = \sigma_1\sigma_2$.

Portanto, A é uma \mathbb{K} -álgebra \mathbb{Z}_m -graduada. Em particular, tomando $m = 2$ e $(0, 1) \in \mathbb{Z}_2^2$ ou $(1, 0) \in \mathbb{Z}_2^2$ obtemos:

$$M_2(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} A_\sigma,$$

onde $A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{K} \right\}$ e $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{K} \right\}$. Os pares ordenados $(0, 0), (1, 1) \in \mathbb{Z}_2^2$ geram a graduação trivial.

Exemplo 1.13. Sejam $M_3(\mathbb{K})$ e $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_3$. Considere $(0, 1, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1) \in \mathbb{Z}_3^3$.

1) Para $(0, 1, 2)$, obtemos:

- Elementos de grau 0,

$$\deg e_{11} = \overline{0+0} = 0 = \deg e_{22} = \deg e_{33}.$$

- Elementos de grau 1,

$$\deg e_{12} = \overline{0+1} = 1, \quad \deg e_{31} = \overline{1+0} = 1, \quad \deg e_{23} = \overline{2+2} = 1.$$

- Elementos de grau 2,

$$\deg e_{21} = \overline{2+0} = 2, \quad \deg e_{13} = \overline{0+2} = 2, \quad \deg e_{32} = \overline{1+1} = 2.$$

Logo,

$$A_0 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{array} \right) \mid a, e, i \in \mathbb{K} \right\}, \quad A_1 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{array} \right) \mid b, f, g \in \mathbb{K} \right\}, \quad (1.3)$$

$$A_2 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{array} \right) \mid c, d, h \in \mathbb{K} \right\}$$

2) Para (0, 1, 1), obtemos:

- Elementos de grau 0,

$$\deg e_{11} = \overline{0+0} = 0 = \deg e_{22} = \deg e_{33}, \quad \deg e_{32} = \overline{2+1} = 0, \quad \deg e_{23} = \overline{2+1} = 0.$$

- Elementos de grau 1,

$$\deg e_{12} = \overline{0+1} = 1, \quad \deg e_{13} = \overline{0+1} = 1.$$

- Elementos de grau 2,

$$\deg e_{21} = \overline{2+0} = 2, \quad \deg e_{31} = \overline{2+0} = 2.$$

Logo,

$$A_0 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{array} \right) \mid a, e, f, h, i \in \mathbb{K} \right\}, \quad A_1 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid b, c \in \mathbb{K} \right\}, \quad (1.4)$$

$$A_2 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{array} \right) \mid d, g \in \mathbb{K} \right\}$$

3) Para $(1,0,1)$, obtemos:

- Elementos de grau 0,

$$\deg e_{11} = 0 = \deg e_{22} = \deg e_{33}, \quad \deg e_{13} = \overline{2+1} = 0, \quad \deg e_{31} = \overline{2+1} = 0.$$

- Elementos de grau 1,

$$\deg e_{21} = \overline{0+1} = 1, \quad \deg e_{23} = \overline{0+1} = 1.$$

- Elementos de grau 2,

$$\deg e_{12} = \overline{2+0} = 2, \quad \deg e_{32} = \overline{2+0} = 2.$$

Logo,

$$A_0 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{array} \right) \mid a, c, e, g, i \in \mathbb{K} \right\}, \quad A_1 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid d, f \in \mathbb{K} \right\}, \quad (1.5)$$

$$A_2 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{array} \right) \mid d, g \in \mathbb{K} \right\}$$

Observe que a ordem dos g_i em $(g_1, g_2, g_3) \in \mathbb{Z}_3^3$ é importante.

Exemplo 1.14. Seja n um número inteiro positivo. Seja $T = M_n(\mathcal{A})$ a \mathbb{K} -álgebra de matrizes $n \times n$ com entradas na \mathbb{K} -álgebra \mathcal{G} -graduada \mathcal{A} . Então T tem uma \mathcal{G} -graduação definida da seguinte maneira:

$$(T)_{\mathcal{G}} := \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a_{11}^g & \cdots & a_{1l}^g & \cdots & a_{1n}^g \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1}^g & \cdots & a_{ll}^g & \cdots & a_{ln}^g \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^g & \cdots & a_{nl}^g & \cdots & a_{nn}^g \end{array} \right) \mid a_{ij}^g \in \mathcal{A}_g, 1 \leq i, j \leq n \right\}, \quad g \in \mathcal{G}.$$

1.4 Módulos Graduados

Seja \mathcal{R} um anel associativo \mathcal{G} -graduado, onde \mathcal{G} é um grupo qualquer. Denotaremos por ϵ o elemento neutro do grupo \mathcal{G} .

Seja \mathcal{N} um \mathcal{R}_ϵ -módulo à esquerda. Para cada $g \in \mathcal{G}$, consideramos $\mathcal{M}_g := \mathcal{R}_g \otimes_{\mathcal{R}_\epsilon} \mathcal{N}$, ou seja, \mathcal{M}_g é o produto tensorial dos \mathcal{R}_ϵ -módulos \mathcal{N} e \mathcal{R}_g . Dado $r_h \in \mathcal{R}_h$ com $h \in \mathcal{G}$, defina

$$r_h(r_g \otimes_{\mathcal{R}_\epsilon} n) := (r_h r_g) \otimes_{\mathcal{R}_\epsilon} n, \quad n \in \mathcal{N}, \quad r_g \in \mathcal{R}_g, \quad \forall g \in \mathcal{G}. \quad (1.6)$$

Observamos que $r_h(r_g \otimes_{\mathcal{R}_\epsilon} n) \in \mathcal{M}_{hg}$, pois $r_h r_g \in \mathcal{R}_{hg}$. Estendemos a ação (1.6) em todo \mathcal{R} e \mathcal{M}_g por aditividade. Seja $\mathcal{M} = \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{M}_g = \sum_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{R}_g \otimes_{\mathcal{R}_\epsilon} \mathcal{N}$, então \mathcal{M} é um \mathcal{R} -módulo \mathcal{G} -graduado, isto é, \mathcal{M} é \mathcal{R} -módulo tal que

$$\mathcal{R}_h \mathcal{M}_g \subseteq \mathcal{M}_{hg}$$

para quaisquer $g, h \in \mathcal{G}$. Existem \mathcal{R} -módulos graduados que não são induzidos por \mathcal{R}_ϵ -módulos. Em geral, temos a seguinte definição.

Definição 1.15. *Seja \mathcal{M} um \mathcal{R} -módulo à esquerda. Dizemos que \mathcal{M} é um \mathcal{R} -módulo graduado se existe uma família de subgrupos aditivos $\{\mathcal{M}_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ de \mathcal{M} tal que*

1. $\mathcal{M} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{M}_g$;
2. $\mathcal{R}_g \mathcal{M}_h \subseteq \mathcal{M}_{gh}, \quad \forall g, h \in \mathcal{G}$.

De modo semelhante, podemos definir \mathcal{R} -módulo graduado à direita.

O conjunto $X = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{M}_g$ é o conjunto dos elementos homogêneos de \mathcal{M} ; um elemento não nulo $u \in \mathcal{M}_g$ é dito ser homogêneo de grau g .

É claro que se \mathcal{R} é um anel graduado, então \mathcal{R} é um \mathcal{R} -módulo à esquerda graduado.

Exemplo 1.16. Sejam M um \mathcal{R} -módulo graduado e g_0 um elemento de \mathcal{G} . Para cada $g, h \in \mathcal{G}$, defina $\mathcal{M}'_g := \mathcal{M}_{gg_0}$ e seja $\mathcal{M}' = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{M}'_g$. Logo,

$$r_h m'_g \in \mathcal{M}_{hgg_0} = \mathcal{M}'_{hg}, \quad \forall r_h \in \mathcal{R}_h, \quad \forall m'_g \in \mathcal{M}'_g, \quad \forall h, g \in \mathcal{G}.$$

Então \mathcal{M}' é um \mathcal{R} -módulo graduado.

Dizemos que \mathcal{N} é um submódulo graduado de um \mathcal{R} -módulo \mathcal{M} se \mathcal{N} é um \mathcal{R} -submódulo e $\mathcal{N} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} (\mathcal{M}_g \cap \mathcal{N})$, ou equivalente, todas as componentes homogêneas de todo elemento do \mathcal{N} pertencem a \mathcal{N} , ou seja, se $n \in \mathcal{N}$ tal que $n = m_{g_1} + \dots + m_{g_k}$, então $m_{g_i} \in \mathcal{N}$ para todo $1 \leq i \leq k$. Em particular, um ideal à esquerda \mathcal{G} -graduado é um submódulo graduado do \mathcal{R} .

Dado um submódulo graduado \mathcal{N} de um \mathcal{R} -módulo graduado \mathcal{M} , podemos considerar o \mathcal{R} -módulo quociente \mathcal{M}/\mathcal{N} . O \mathcal{M} induz uma gradação em \mathcal{M}/\mathcal{N} . As componentes homogêneas de \mathcal{M}/\mathcal{N} são dadas por:

$$(\mathcal{M}/\mathcal{N})_g := \{m_g + \mathcal{N} \mid m_g \in \mathcal{M}_g\}.$$

É evidente que um \mathcal{R} -módulo graduado \mathcal{M} ($\mathcal{M} \neq \{0\}$) tem no mínimo dois submódulos graduados, $\{0\}$ e \mathcal{M} , os quais são chamados de triviais.

Dado um subconjunto S de um \mathcal{R} -módulo graduado à esquerda \mathcal{M} , definimos o anulador à esquerda de S como sendo

$$\text{Ann}^l(\mathcal{R}S) = \{r \in \mathcal{R} \mid rs = 0, \forall s \in S\},$$

de forma semelhante, podemos definir anulador para um módulo à direita.

Lema 1.17. Seja \mathcal{M} um \mathcal{R} -módulo graduado à esquerda. Então, $\text{Ann}^l(\mathcal{R}\mathcal{M})$ é um ideal bilateral graduado de \mathcal{R} .

Demonstração. Para cada $g \in \mathcal{G}$, considere $(\text{Ann}^l(\mathcal{R}\mathcal{M}))_g = \{r_g \in \mathcal{R}_g \mid r_g m = 0, \forall m \in \mathcal{M}\}$. Observamos que $(\text{Ann}^l(\mathcal{R}\mathcal{M}))_g$ é um subgrupo de $\text{Ann}^l(\mathcal{R}\mathcal{M})$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Por outro lado, se $r \in (\text{Ann}^l(\mathcal{R}\mathcal{M}))_g \cap \sum_{g \neq h \in \mathcal{G}} (\text{Ann}^l(\mathcal{R}\mathcal{M}))_h$, então $r = 0$, pois $\mathcal{R}_g \cap$

$\sum_{g \neq h \in \mathcal{G}} \mathcal{R}_h = (0)$. Logo, a soma $\sum_{g \neq h \in \mathcal{G}} (Ann^l(\mathcal{R}\mathcal{M}))_h$ é direta. Seja $r \in Ann^l(\mathcal{R}\mathcal{M})$, então $r = \sum_{h \in \mathcal{G}} r_h$, com $r_g \in \mathcal{R}_h$. Para todo $m_g \in \mathcal{M}_g$ e $g \in \mathcal{G}$, temos $r m_g = 0$ para todo $m \in \mathcal{M}$. Em particular, $0 = r m_g = \sum_{h \in \mathcal{G}} r_h m_g$ para todo $g \in \mathcal{G}$. Como \mathcal{M} é graduado, temos $r_h m_g = 0$ para todo $g \in \mathcal{G}$, daí segue que $r_h \in Ann^l(\mathcal{R}\mathcal{M})$. Logo, $Ann^l(\mathcal{R}\mathcal{M}) \subseteq \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} (Ann^l(\mathcal{R}\mathcal{M}))_g$. Portanto, $Ann^l(\mathcal{R}\mathcal{M}) = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} (Ann^l(\mathcal{R}\mathcal{M}))_g$. ■

Similarmente, o anulador de um \mathcal{R} -módulo à direita graduado é um ideal bilateral graduado de \mathcal{R} .

Definição 1.18. Um \mathcal{R} -módulo graduado \mathcal{M} é dito ser fiel se $Ann^l(\mathcal{R}\mathcal{M}) = (0)$.

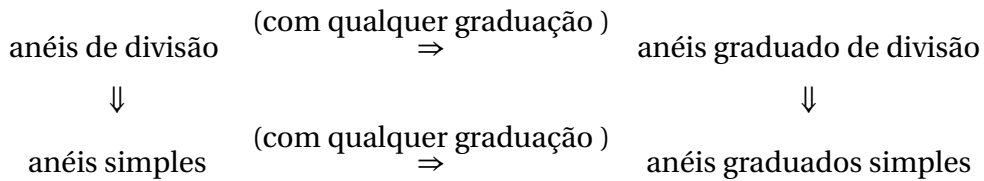
Definição 1.19. Um \mathcal{R} -módulo graduado \mathcal{M} diz-se simples (ou irredutível) se $\mathcal{R}\mathcal{M} \neq 0$ e 0 e \mathcal{M} são seus únicos submódulos graduados.

Definição 1.20. Seja \mathcal{R} um anel graduado. Dizemos que \mathcal{R} é simples (ou graduado simples) se não tiver ideais graduados próprios não nulos.

Lema 1.21. Todo o anel (álgebra) graduado de divisão é graduado simples.

Demonstração. Seja \mathcal{D} é um anel graduado de divisão. Suponha que exista um ideal graduado $\{0\} \neq I$. Logo, existe $0 \neq x_g \in I$, com $g \in \mathcal{G}$. Sendo \mathcal{D} anel graduado de divisão, existe $x_{g^{-1}} \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$ tal que $1 = x_{g^{-1}} x_g \in I$, ou seja, $I = \mathcal{D}$. ■

Sabemos que todo anel (álgebra) de divisão é graduado de divisão, com graduação trivial (ou qualquer outra graduação), logo é um anel (álgebra) graduado simples, pelo Lema 1.21. Assim, temos as seguintes implicações:



As implicações do diagrama acima não são inversíveis. No exemplo 1.9 vimos que $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ é um anel graduado de divisão, mas não é um anel de divisão. Usando Lema 1.21

concluimos que $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ é um anel (\mathbb{K} -álgebra) \mathbb{Z}_2 -graduado simples, entretanto, como anel (\mathbb{K} -álgebra) não é simples, pois $\mathbb{K}(\eta_0 + \eta_1) \subsetneq \mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ é um ideal próprio não graduado de $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$.

Exemplo 1.22. *Seja $M_n(\mathbb{K})$ o anel de matrizes com entradas no corpo \mathbb{K} . Quando $n > 1$, $M_n(\mathbb{K})$ é um anel simples, mas não é anel de divisão. $M_n(\mathbb{K})$ com \mathbb{Z}_m -gradação é graduado simples, mas não é graduado de divisão, veja [8].*

1.5 Homomorfismos Graduados

Nesta seção, consideraremos \mathcal{G} um grupo abeliano, \mathcal{M} um \mathcal{R} -módulo à esquerda, onde \mathcal{R} é um anel (\mathbb{K} -álgebra) \mathcal{G} -graduado. E a operação do grupo \mathcal{G} será representada por $+$. Seja \mathcal{M} um \mathcal{R} -módulo à esquerda \mathcal{G} -graduado, denotaremos por $End(\mathcal{R}\mathcal{M})$ o anel de todos os \mathcal{R} -endomorfismos de \mathcal{M} . É bom lembrar que $End(\mathcal{R}\mathcal{M})$ é um anel com as operações usuais, soma e composição de funções.

Definição 1.23 (Homomorfismo graduado). *Sejam $\mathcal{M} = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} \mathcal{M}_\beta$ e $\mathcal{M}' = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} \mathcal{M}'_\beta$ dois \mathcal{R} -módulos graduados. Um homomorfismo de módulos graduados (ou homogêneo) de grau $\gamma \in \mathcal{G}$ é um homomorfismo de \mathcal{R} -módulos $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ tal que $f(\mathcal{M}_\beta) \subseteq \mathcal{M}'_{\beta+\gamma}$ para todo $\beta \in \mathcal{G}$.*

Lema 1.24. *Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} dois \mathcal{R} -módulos graduados e f um homomorfismo homogêneo de \mathcal{R} -módulos graduados de \mathcal{M} em \mathcal{N} . Então*

1. $Ker(f) = \{m \in \mathcal{M} \mid f(m) = 0\}$ é um submódulo graduado de \mathcal{M} .
2. $Im(f) = \{f(m) \in \mathcal{N} \mid m \in \mathcal{M}\}$ é submódulo graduado de \mathcal{N} .

Demonstração. Seja f um homomorfismo de módulos graduados de \mathcal{M} em \mathcal{N} de grau γ . Provaremos que $Ker(f) = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} Ker_\beta(f)$, a prova de que $Im(f) = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} Im_\beta(f)$ segue de maneira similar.

Para cada $\beta \in \mathcal{G}$, defina $Ker_\beta(f) = \{m_\beta \in \mathcal{M}_\beta \mid f(m_\beta) = 0\}$. Primeiramente, observemos que $Ker_\beta(f)$ é um subgrupo de $Ker(f)$ para todo $\beta \in \mathcal{G}$. Por outro lado, se $m \in Ker_\beta(f) \cap \sum_{\beta \neq \alpha \in \mathcal{G}} Ker_\alpha(f)$, então $m \in \mathcal{M}_\beta \cap \sum_{\beta \neq \alpha \in \mathcal{G}} \mathcal{M}_\alpha$. Como $\mathcal{M}_\beta \cap \sum_{\beta \neq \alpha \in \mathcal{G}} \mathcal{M}_\alpha = \{0\}$, temos que $m = 0$. Com isso, a soma $\sum_{\beta \in \mathcal{G}} \mathcal{M}_\beta$ é direta. Seja $m \in Ker(f)$, então $m = \sum_{\beta \in \mathcal{G}} m_\beta$, onde $m_\beta \in \mathcal{M}_\beta$ para todo $\beta \in \mathcal{G}$ e $f(m) = 0$. Como f é homomorfismo graduado temos que $0 = f(m) = f(\sum_{\beta \in \mathcal{G}} m_\beta) = f(m_{\beta_1}) + \dots + f(m_{\beta_n})$. Logo, $f(-m_{\alpha_i}) = \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \in \mathcal{G}} f(m_{\alpha_j})$, ou seja, $f(m_{\alpha_i}) \in \mathcal{N}_{\alpha_i + \gamma} \cap \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \in \mathcal{G}} \mathcal{N}_{\alpha_j + \gamma}$, onde $1 \leq i, j \leq n$. Assim, como \mathcal{N} é graduado, temos que $\mathcal{N}_{\alpha_i + \gamma} \cap \sum_{\alpha_i \neq \alpha_j \in \mathcal{G}} \mathcal{N}_{\alpha_j + \gamma} = \{0\}$. Logo $f(m_{\alpha_i}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, com $\alpha_i \in \mathcal{G}$. Com isso, temos que $Ker(f) \subseteq \bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} Ker_\beta(f)$. Portanto, $Ker(f) = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} Ker_\beta(f)$. ■

Não é difícil ver que se ϕ é um homomorfismo graduado de grau γ de anéis \mathcal{G} -graduados, então $\gamma = e$.

O conjunto de todos os homomorfismos graduados de grau γ é um subgrupo aditivo $Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_\gamma$ do grupo $Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Consideramos

$$Hom_{\mathcal{R}}^{\text{gr}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_\gamma$$

Facilmente, verifica-se que se $f \in Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_\gamma \cap \sum_{\gamma \neq \alpha \in \mathcal{G}} Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_\alpha$ então $f = 0$ e, portanto $Hom_{\mathcal{R}}^{\text{gr}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{G}} Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_\gamma$ é um grupo abeliano graduado.

Um endomorfismo graduado (ou homogêneo) de módulos graduados de grau γ é um endomorfismo de grupo $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que f é um homomorfismo graduado. O conjunto de todos os endomorfismos graduados de grau γ é um subgrupo aditivo $Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})_\gamma$ do grupo $Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$. Observamos que $Hom_{\mathcal{R}}^{\text{gr}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = \bigoplus_{\gamma \in \mathcal{G}} Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})_\gamma$ é um anel graduado como as operações usuais de funções, que denotaremos por $End_{\mathcal{R}}^{\text{gr}}(\mathcal{M})$.

Em geral, temos $Hom_{\mathcal{R}}^{\text{gr}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \subsetneq Hom_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Entretanto, é conhecido que se o módulo \mathcal{M} é finitamente gerado ou se \mathcal{G} é um grupo finito então

$$End_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}) = End_{\mathcal{R}}^{\text{gr}}(\mathcal{M}) \text{ [[4], Corollary A.I.2.11.]}$$

1.6 Anéis Graduados Primitivos

Apresentaremos alguns resultados da teoria de anéis graduados primitivos.

Definição 1.25. *Seja \mathcal{R} um anel \mathcal{G} -graduado, $\mathcal{R} \neq 0$. Dizemos que \mathcal{R} é um anel \mathcal{G} -graduado primo se para quaisquer ideais bilaterais graduados não nulos I, J temos $IJ \neq (0)$.*

Dado um anel graduado \mathcal{R} , podemos considerar \mathcal{R} como um \mathcal{R} -módulo à esquerda graduado. Denotaremos por $Ann(\mathcal{R}\mathcal{R})$ o anulador de \mathcal{R} à esquerda.

Lema 1.26. *Seja \mathcal{R} um anel graduado primo. Então $Ann(\mathcal{R}\mathcal{R}) = (0)$.*

Demonstração. Seja \mathcal{R} um anel primo. Pelo **Lema 1.17** $Ann(\mathcal{R}\mathcal{R})$ é um ideal bilateral graduado do \mathcal{R} . Temos que \mathcal{R} é um ideal bilateral graduado de \mathcal{R} diferente de zero e $\mathcal{R}Ann(\mathcal{R}\mathcal{R}) = (0)$. Pela definição de anel graduado primo, segue que $Ann(\mathcal{R}\mathcal{R}) = (0)$. ■

Lema 1.27. *Seja I um ideal à esquerda graduado (ou à direita) de um anel graduado \mathcal{R} , então $I\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}I$) é um ideal bilateral graduado do anel \mathcal{R} .*

Demonstração. Não é difícil prova que $I\mathcal{R}$ é um ideal bilateral do \mathcal{R} . Para provarmos que $I\mathcal{R}$ é graduado, é suficiente observamos que $\mathcal{R} = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} \mathcal{R}_\beta$ e $I = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{G}} I_\alpha$. Logo, $I\mathcal{R} = (\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{G}} I_\alpha)(\bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} \mathcal{R}_\beta) = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{G}} \bigoplus_{\beta \in \mathcal{G}} I_\alpha \mathcal{R}_\beta$. ■

Utilizando o Lema 1.27, mostraremos que na definição de anel graduado primo, podemos considerar ideais unilaterais graduados.

Lema 1.28. *Um anel graduado \mathcal{R} é primo se, e somente se, para quaisquer ideais à esquerda (à direita) graduados não nulos I e J de \mathcal{R} tem-se $IJ \neq (0)$.*

Demonstração. Seja \mathcal{R} um anel graduado primo. Sejam I e J dois ideais à esquerda não nulos do \mathcal{R} . Pelo **Lema 1.27** $I\mathcal{R}$ e $J\mathcal{R}$ são ideais bilaterais graduados de \mathcal{R} . Pelo **Lema 1.17** $Ann(\mathcal{R}\mathcal{R})$ é um ideal bilateral graduado do \mathcal{R} . Observamos que $\forall r \in \mathcal{R}$ e

$\forall a \in \text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}), ra = 0$, logo $\mathcal{R}\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}) = (0)$, e portanto $(\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}))^2 = (0)$. Como \mathcal{R} é um anel graduado primo, segue do Lema que $\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}) = (0)$, pois caso contrário teríamos $(\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}))^2 \neq (0)$. Como $\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}) = (0)$ então $I\mathcal{R}$ e $J\mathcal{R}$ são ideais bilaterais graduados não nulos de \mathcal{R} . Como \mathcal{R} é um anel graduado primo, $I\mathcal{R}J\mathcal{R} \neq (0)$. Logo, $I\mathcal{R}J \neq (0)$ e $(0) \neq I\mathcal{R}J \subseteq IJ$. Portanto, $IJ \neq (0)$.

Para a recíproca, observamos que todo ideal bilateral graduado é em particular um ideal à esquerda (ou à direita) graduado. ■

Definição 1.29. *Um anel \mathcal{G} -graduado \mathcal{R} é dito semiprimo se $I^n = (0)$, para $n \geq 1$, implica $I = (0)$, para qualquer ideal bilateral graduado I de \mathcal{R} , ou seja, \mathcal{R} não possui ideais bilaterais graduados nilpotentes não nulos.*

Análogo a **Proposição 1.8**, obtemos a seguinte preposição.

Proposição 1.30. *Um anel graduado \mathcal{R} é graduado semiprimo se, e somente se, \mathcal{R} não contém ideais à esquerda (ou à direita) graduados nilpotentes.*

Demonstração. Seja \mathcal{R} um anel graduado semiprimo. Lembramos que $\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R})$ é um ideal bilateral graduado de \mathcal{R} e $(\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}))^2 = (0)$. Como \mathcal{R} é graduado semiprimo, segue que $\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}) = (0)$. Seja I um ideal à esquerda graduado não nulo de \mathcal{R} , então $I\mathcal{R}$ é um ideal bilateral graduado não nulo. Logo, $I^n\mathcal{R} \supset (I\mathcal{R})^n \neq (0)$, portanto $I^n \neq (0)$ para todo $n \geq 1$.

Para a recíproca é suficiente observar que todo ideal bilateral graduado é um ideal à esquerda graduado. ■

Definição 1.31. *Um anel \mathcal{G} -graduado \mathcal{R} é dito primitivo à esquerda se existe um \mathcal{R} -módulo graduado à esquerda simples e fiel.*

Um anel graduado primitivo à direita é definido de forma análoga para \mathcal{R} -módulo graduado à direita.

A caracterização usual de um anel graduado primo \mathcal{R} é dado pelo seguinte lema.

Lema 1.32. *Seja \mathcal{R} um anel graduado. Então \mathcal{R} é graduado primo se, e somente se, $a_\alpha\mathcal{R}b_\beta \neq \{0\}$ para todo $0 \neq a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ com $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$.*

Demonstração. Sejam \mathcal{R} um anel graduado primo, $0 \neq a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $0 \neq b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$, $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$. Pelo **Lema 1.27** $\text{Ann}({}_{\mathcal{R}}\mathcal{R}) = (0)$. Assim, $\mathcal{R}a_\alpha$ e $\mathcal{R}b_\beta$ são ideais à esquerda graduados não nulos de \mathcal{R} . Pelo **Lema 1.28** $\mathcal{R}a_\alpha\mathcal{R}b_\beta \neq (0)$. Portanto, $a_\alpha\mathcal{R}b_\beta \neq (0)$.

Reciprocamente, suponha que para quaisquer elementos não nulos $a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e $b_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ tenhamos $a_\alpha\mathcal{R}b_\beta \neq \{0\}$. Se I e J são ideais bilaterais graduados não nulos do \mathcal{R} , então existem elementos homogêneos não nulos $a_\alpha \in I_\alpha \subseteq \mathcal{R}_\alpha$ e $b_\beta \in J_\beta \subseteq \mathcal{R}_\beta$ para alguns $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$. Logo, $(0) \neq a_\alpha\mathcal{R}b_\beta \subseteq I\mathcal{R}J \subseteq IJ$. Portanto, $IJ \neq \{0\}$. ■

Para anéis graduados semiprimos, obtemos um resultado similar ao anterior, cuja a demonstração não é difícil.

Lema 1.33. *Um anel \mathcal{R} é graduado semiprimo se, e somente se, $a_\alpha\mathcal{R}a_\alpha \neq (0)$ para qualquer elemento homogêneo não nulo $0 \neq a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ e todo $\alpha \in \mathcal{G}$.*

As relações entre anel graduado primitivo, anel graduado primo e anel graduado semiprimo são dadas pelos seguintes resultados.

Lema 1.34. *Seja \mathcal{R} um anel graduado primitivo à esquerda, então \mathcal{R} é graduado primo.*

Demonstração. Sejam I, J ideais bilaterais graduados não nulos de \mathcal{R} . Sendo \mathcal{R} um anel graduado primitivo, então existe um \mathcal{R} -módulo à esquerda graduado irredutível e fiel \mathcal{M} . Sendo \mathcal{M} fiel, $I\mathcal{M} \neq (0)$ e $J\mathcal{M} \neq (0)$, observamos que $I\mathcal{M}$ e $J\mathcal{M}$ são submódulos graduados do \mathcal{M} . Assim, pela irredutibilidade \mathcal{M} , segue que $I\mathcal{M} = J\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Logo, $(0) \neq I\mathcal{M} = IJ\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Logo, $IJ \neq (0)$, portanto, \mathcal{R} é graduado primo. ■

Corolário 1.35. *Seja \mathcal{R} um anel graduado primo, então \mathcal{R} é semiprimo. Em particular, todo anel graduado primitivo é semiprimo.*

Demonstração. Seja I um ideal bilateral graduado não nulo de \mathcal{R} . Suponha por absurdo que existe $n \geq 1$ tal que $I^n = (0)$. Observe que $(0) = II^{n-1}$ como $I \neq (0)$ e \mathcal{R} é primo, segue que $I^{n-1} = (0)$. Utilizando o mesmo argumento anterior, concluímos que $I = 0$, absurdo. Logo, $I^n \neq (0)$ e, portanto, \mathcal{R} é um anel graduado primo. ■

1.7 Teorema da Densidade para Álgebras Graduadas

Começemos por alguns resultados que são análogos aos resultados clássicos para anéis (\mathbb{K} -álgebras) não graduados. Primeiramente, começaremos com o seguinte lema.

Lema 1.36. *Sejam \mathcal{R} um anel (\mathbb{K} -álgebra) graduado, \mathcal{M} um \mathcal{R} -módulo à esquerda graduado e $\mathcal{D} = \text{End}_{\mathcal{R}}^{\text{gr}}(\mathcal{M})$ o anel dos \mathcal{R} -endomorfismos graduados de \mathcal{M} . Então \mathcal{M} é um \mathcal{D} -módulo graduado à direita com ação $m \cdot f = (m)f$.*

Demonstração. Sejam \mathcal{R} um anel graduado, \mathcal{M} um \mathcal{R} -módulo à esquerda graduado e $\mathcal{D} = \text{End}_{\mathcal{R}}^{\text{gr}}(\mathcal{M})$. Então, $\forall m, n \in \mathcal{M}, \forall f, g \in \mathcal{D}$:

1. $m \cdot (fg) = ((m)f)g = (m \cdot f) \cdot g$.
2. $(m + n) \cdot f = (m + n)f = (m)f + (n)f = m \cdot f + n \cdot f$.
3. $m \cdot (f + g) = (m)(f + g) = (m)f + (m)g = m \cdot f + m \cdot g$.
4. $m \cdot 1_{\mathcal{D}} = (m)id_{\mathcal{M}} = m$.

Dados $f_{\gamma} \in \mathcal{D}_{\gamma}$ e $m_{\beta} \in \mathcal{M}_{\beta}$, temos $m_{\beta} \cdot f_{\gamma} = (m_{\beta})f_{\gamma} \in \mathcal{M}_{\beta+\gamma}$. Portanto, $\mathcal{M}_{\beta} \cdot \mathcal{D}_{\gamma} \subseteq \mathcal{M}_{\beta+\gamma}$. ■

Lema 1.37. *Seja \mathcal{R} um anel graduado. Sejam \mathcal{M} um \mathcal{R} -módulo à esquerda graduado, f_{β} um isomorfismo de \mathcal{R} -módulos graduado, com grau $\beta \in \mathcal{G}$ e f' a sua inversa. Então f' é um isomorfismo graduado de grau $-\beta$.*

Demonstração. Como f_{β} é um isomorfismo de \mathcal{R} -módulos, então f' também é um isomorfismo de \mathcal{R} -módulos. Agora, dado $m_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha}$, pela bijeção f_{β} , existe $\tilde{m} \in \mathcal{M}$ tal que $m_{\alpha} = (\tilde{m})f_{\beta}$. Sendo \mathcal{M} um \mathcal{R} -módulo graduado, temos $\tilde{m} = \sum_{i=1}^n \tilde{m}_{\gamma_i}$, com $\tilde{m}_{\gamma_i} \in \mathcal{M}$, $\gamma_i \in \mathcal{G}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Logo,

$$m_{\alpha} = (\tilde{m})f_{\beta} = \left(\sum_{i=1}^n \tilde{m}_{\gamma_i} \right) f_{\beta} = \sum_{i=1}^n (\tilde{m}_{\gamma_i}) f_{\beta} = (\tilde{m}_{\gamma_1}) f_{\beta} + \cdots + (\tilde{m}_{\gamma_n}) f_{\beta}.$$

Comparando os graus dos elementos e pela unicidade do elemento inverso do grupo \mathcal{G} , concluímos que existe um l tal que

$$m_\alpha = (\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta$$

para algum $1 \leq l \leq n$. Observamos que $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \in \mathcal{M}_{\gamma_l+\beta}$. Como $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ e $m_\alpha = (\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta$, temos que

$$m_\alpha = (\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \in \mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} \cap \mathcal{M}_\alpha.$$

Teremos que verificar dois casos:

- i. $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta = 0$;
- ii. $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \neq 0$.

No caso i., $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta = 0$ então $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \in \mathcal{M}_\delta, \forall \delta \in \mathcal{G}$. Segue daí que $\tilde{m}_{\gamma_l} = 0$, pois f_β é um homomorfismo bijetivo.

No caso ii., $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \neq 0$ então $\mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} = \mathcal{M}_\alpha$, pois caso contrário teríamos $(\tilde{m}_{\gamma_l})f_\beta \in \mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} \cap \mathcal{M}_\alpha = \{0\}$, uma contradição. Logo, $\mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} = \mathcal{M}_\alpha$. Como $\mathcal{M}_{\gamma_l+\beta} = \mathcal{M}_\alpha$, segue que $\gamma_l + \beta = \alpha$, ou seja, $\gamma_l = \alpha - \beta$.

Em ambos os casos, concluímos que $\tilde{m}_{\gamma_l} \in \mathcal{M}_{\alpha-\beta}$, ou seja, $\tilde{m}_{\gamma_l} = \tilde{m}_{\alpha-\beta}$.

Logo, $(m_\alpha)f' = ((\tilde{m}_{\alpha-\beta})f_\beta)f' = (\tilde{m}_{\alpha-\beta})(f_\beta f') = (\tilde{m}_{\alpha-\beta})id_{\mathcal{M}} = \tilde{m}_{\alpha-\beta}$. Portanto, f' é um isomorfismo graduado de grau $-\beta$. ■

Definição 1.38. *Sejam \mathcal{R} e \mathcal{D} dois anéis \mathcal{G} -graduados. Dizemos que \mathcal{M} é um $(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ -bimódulo \mathcal{G} -graduado se \mathcal{M} é um \mathcal{R} -módulo à esquerda \mathcal{G} -graduado e um \mathcal{D} -módulo à direita \mathcal{G} -graduado tal que*

$$(r_\alpha m_\beta)d_\tau = r_\alpha(m_\beta d_\tau)$$

para quaisquer $r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, d_\tau \in \mathcal{D}_\tau, m_\beta \in \mathcal{M}_\beta$ e $\alpha, \beta, \tau \in \mathcal{G}$.

Observamos que dado um \mathcal{R} -módulo à esquerda graduado \mathcal{M} , então \mathcal{M} é um $(\mathcal{R}, \text{End}_{\mathcal{D}}^{\text{gr}}(\mathcal{M}))$ -bimódulo graduado.

Definição 1.39. *Sejam \mathcal{D} um anel graduado de divisão, \mathcal{R} um anel graduado e \mathcal{M} um $(\mathcal{R}, \mathcal{D})$ -bimódulo graduado. Dizemos que \mathcal{R} age densamente em \mathcal{M} sobre \mathcal{D} se para qualquer inteiro positivo n , quaisquer elementos homogêneos $v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^n \in \mathcal{M}_\alpha$ linearmente independentes sobre \mathcal{D}_0 e quaisquer $w_\beta^1, \dots, w_\beta^n \in \mathcal{M}_\beta$, existe $r_{\beta-\alpha} \in \mathcal{R}_{\beta-\alpha}$ tal que $r_{\beta-\alpha} v_\alpha^i = w_\beta^i$.*

O seguinte lema já é conhecido na teoria anéis.

Lema 1.40 (Lema de Schur). *Seja \mathcal{R} anel (\mathbb{K} -álgebra) graduado. Suponha que \mathcal{M}, \mathcal{N} são dois \mathcal{R} -módulos à esquerda graduados irredutíveis e f_β um \mathcal{R} -homomorfismo homogêneo de grau β de \mathcal{M} em \mathcal{N} , com $\beta \in \mathcal{G}$. Se $f_\beta \neq 0$ então f_β é inversível.*

Demonstração. Seja $0 \neq f_\beta$ um homomorfismo graduado de grau β de \mathcal{M} em \mathcal{N} . Então a imagem de f_β , $Im f_\beta$, é um submódulo graduado de \mathcal{N} não nulo. Pela irredutibilidade de \mathcal{N} , $Im f_\beta = \mathcal{N}$, logo f_β é sobrejetiva. O núcleo de f_β , $Ker f_\beta$, é um submódulo graduado propriamente contido em \mathcal{M} . Pela irredutibilidade de \mathcal{M} , segue que $Ker f_\beta = \{0\}$, logo f_β é injetiva. Logo, f_β é uma bijeção e, portanto, f_β é inversível. ■

Utilizando o **Lema 1.40**, obtemos o seguinte resultado.

Lema 1.41 ([1], Lemma 2.4). *Seja \mathcal{R} um anel (\mathbb{K} -álgebra) graduado. Suponha que \mathcal{V} é um \mathcal{R} -módulo à direita graduado irredutível. Então $\mathcal{D} = End_{\mathcal{R}}^{gr}(\mathcal{V})$ é um anel (\mathbb{K} -álgebra) graduado de divisão.*

Demonstração. Segue do **Lema 1.40** tomando $\mathcal{V} = \mathcal{M} = \mathcal{N}$. ■

Teorema 1.42 ([1], Theorem 2.5). *Seja \mathcal{R} uma \mathbb{K} -álgebra graduada. Suponha que \mathcal{V} seja um \mathcal{R} -módulo à esquerda graduado irredutível e seja $\mathcal{D} = End_{\mathcal{R}}^{gr}(\mathcal{V})$. Se $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ são elementos homogêneos linearmente independentes sobre \mathcal{D} , então para quaisquer $w_1, \dots, w_n \in \mathcal{V}$, existe $r \in \mathcal{R}$ tal que $r v_i = w_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.*

1.8 Produto Tensorial de Álgebras

Definição 1.43 (Produto Tensorial). *Sejam E e F dois espaços vetoriais sobre \mathbb{K} , com bases $\{e_i | i \in I\}$ e $\{f_j | j \in J\}$, respectivamente. O **produto tensorial** de E e F denotado por $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ é o espaço vetorial com base $\{e_i \otimes f_j\}$. Os elementos da forma $e \otimes f$ são chamados de tensores e satisfazem:*

1. $(e_1 + e_2) \otimes f = (e_1 \otimes f) + (e_2 \otimes f)$;
2. $e \otimes (f_1 + f_2) = (e \otimes f_1) + (e \otimes f_2)$;
3. $r(e \otimes f) = (re) \otimes f = e \otimes (rf)$,

para quaisquer $e_1, e_2, e \in E$, $f_1, f_2, f \in F$ e $r \in \mathbb{K}$.

Definição 1.44 (Produto tensorial de álgebras). *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} duas \mathbb{K} -álgebras. Consideremos o \mathbb{K} -espaço vetorial $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$ com o produto \mathbb{K} -bilinear definida por*

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) &\rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \\ (a \otimes b, a' \otimes b') &\mapsto (a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb' \quad a, a' \in \mathcal{A}, b, b' \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

O espaço vetorial $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$, munido com esta multiplicação é uma \mathbb{K} -álgebra chamada de produto tensorial das álgebras \mathcal{A} e \mathcal{B} .

Sejam \mathcal{G} e \mathcal{H} dois grupos abelianos.

Lema 1.45. *Sejam $\mathcal{A} = \bigoplus_{g \in \mathcal{G}} \mathcal{A}_g$ e $\mathcal{B} = \bigoplus_{h \in \mathcal{H}} \mathcal{B}_h$ duas \mathbb{K} -álgebras associativas graduadas, \mathcal{G} -graduada e \mathcal{H} -graduada, respectivamente. Então $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{B}$ é uma \mathbb{K} -álgebra associativa $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ -graduada com sua componente homogênea de grau $(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{H}$ dada por:*

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{(g,h)} := \mathcal{A}_g \otimes \mathcal{B}_h.$$

Demonstração. Veja [9]. ■

Exemplo 1.46. Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -álgebra. A transformação linear

$$\begin{aligned} \varphi: M_n(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{A} &\rightarrow M_n(\mathcal{A}) \\ e_{ij} \otimes a &\mapsto ae_{ij} \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde

$$ae_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq n \text{ é um isomorfismo de álgebras.}$$

Observe que $\{ae_{ij} | 1 \leq i, j \leq n, a \in B\}$ é uma base para $M_n(\mathcal{A})$ como espaço vetorial, onde B é uma base de \mathcal{A} . A inversa de φ é:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: M_n(\mathcal{A}) &\rightarrow M_n(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{A} \\ ae_{ij} &\mapsto e_{ij} \otimes a. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Portanto, $M_n(\mathbb{K}) \otimes \mathcal{A} \cong M_n(\mathcal{A})$.

De modo semelhante, podemos provar que se $\mathcal{A} = M_m(\mathbb{K})$ então $M_n(\mathbb{K}) \otimes M_m(\mathbb{K}) \cong M_n(M_m\mathbb{K}) \cong M_{nm}(\mathbb{K})$.

Capítulo 2

Álgebras Com Involuções e Superinvoluções

Neste capítulo, \mathbb{K} representará um corpo de característica diferente de 2.

2.1 Superálgebras

Devemos salientar que a soma direta será representada por $+$ ou \oplus . Por exemplo uma \mathbb{K} -álgebra (anel) \mathbb{Z}_2 -graduada \mathcal{A} será representada como $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.

Definição 2.1 (Variedade). *Uma classe não vazia \mathfrak{K} de álgebras é chamada de variedade se as seguintes condições são válidas:*

1. Se $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ e \mathcal{B}' é uma subálgebra de \mathcal{B} então $\mathcal{B}' \in \mathfrak{K}$.
2. Se $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ e \mathcal{B}' é uma imagem de um homomorfismo de \mathcal{B} , então $\mathcal{B}' \in \mathfrak{K}$.
3. Se $\mathcal{B}_i \in \mathfrak{K}$, para todo $i \in I$ então $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_i \in \mathfrak{K}$.

Observamos que uma variedade também pode ser definida como classe de álgebras que satisfazem algum conjunto de identidades polinomiais. Neste caso, nossa definição é uma consequência do teorema de Birkhoff, veja [2].

Dizemos que uma variedade é homogênea se ela é definida por identidades multihomogêneas.

Exemplo 2.2. *Seja \mathfrak{K} a classe de todas álgebras associativas, ou seja, se $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ então $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ teremos $x(yz) = (xy)z$. Então \mathfrak{K} é uma variedade homogênea.*

Definição 2.3 (Álgebra de Grassmann). *Seja $\mathbb{K}\langle X \rangle$ a álgebra livre unitária de posto enumerável livremente gerada por $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Se I é o ideal bilateral de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado pelo conjunto de polinômios $\{x_i x_j + x_j x_i \mid i, j \geq 1\}$, consideramos $G = \mathbb{K}\langle X \rangle / I$. G chama-se a \mathbb{K} -álgebra de Grassmann infinitamente gerada unitária. Se escrevemos $e_i = x_i + I$, para $i = 1, 2, \dots$, obtemos $e_i e_j = (x_i + I)(x_j + I) = x_i x_j + I = x_i x_j - (x_i x_j + x_j x_i) + I = -x_j x_i + I = -(x_j + I)(x_i + I) = -e_j e_i$, para todo $i, j \geq 1$. Então G tem a seguinte apresentação*

$$G = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i, \text{ para todo } i, j \geq 1 \rangle.$$

Os elementos 1 e $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r}$, com $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, formam uma \mathbb{K} -base da álgebra G , a prova desse fato pode ser encontrado em [2]. Sejam

$$G_0 = \text{span}_{\mathbb{K}} \{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k}, k \geq 0\},$$

$$G_1 = \text{span}_{\mathbb{K}} \{e_{i_1} \dots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k+1}, k \geq 0\},$$

não é difícil provar que $G_0 G_0 + G_1 G_1 \subseteq G_0$ e $G_1 G_0 + G_0 G_1 \subseteq G_1$ e

$$G = G_0 \oplus G_1 \quad (G_0 \cap G_1 = (0)).$$

Logo, G é uma álgebra associativa \mathbb{Z}_2 -graduada.

Definição 2.4 (Envelope de Grassmann). *Sejam $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ uma \mathbb{K} -álgebra associativa \mathbb{Z}_2 -graduada e $G = G_0 + G_1$ a \mathbb{K} -álgebra de Grassmann infinitamente gerada. A subálgebra da álgebra $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{K}} G$*

$$G(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}_0 \otimes_{\mathbb{K}} G_0) + (\mathcal{A}_1 \otimes_{\mathbb{K}} G_1)$$

é chamada de envelope de Grassmann de \mathcal{A} .

Observamos que $G(\mathcal{A})$ também é uma \mathbb{K} -álgebra (anel) associativa \mathbb{Z}_2 -graduada com componentes homogêneas $G(\mathcal{A})_\alpha = \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathbb{K}} G_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 2.5. Sejam G a álgebra de Grassmann e $M_n(\mathbb{K})$ a \mathbb{K} -álgebra de matrizes com entradas no corpo \mathbb{K} . A transformação linear

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} G &\rightarrow M_n(G) \\ e_{ij} \otimes g &\mapsto ge_{ij} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde ge_{ij} é a matriz de $M_n(G)$ que tem g na entrada (i, j) e zero nas demais, é um isomorfismo de \mathbb{K} álgebras. Observamos que $\{ge_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, g \in B\}$ é uma base para $M_n(G)$ como espaço vetorial, onde os elementos de B são 1 e $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_r}$, com $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$. Considere a transformação linear

$$\begin{aligned} \Phi : M_n(G) &\rightarrow M_n(\mathbb{K}) \otimes G \\ ge_{ij} &\mapsto e_{ij} \otimes g. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Temos que

1. $\varphi(\Phi(\sum_{i,j} g_{ij}e_{ij})) = \varphi(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes g_{ij}) = \sum_{i,j} g_{ij}e_{ij}$.
2. $\Phi(\varphi(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes g_{ij})) = \Phi(\sum_{i,j} g_{ij}e_{ij}) = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes g_{ij}$.

Assim, $\varphi^{-1} = \Phi$ e, portanto, φ é bijetiva. Antes de mostrarmos que φ é um homomorfismo de \mathbb{K} -álgebra, observamos que para todos ge_{ij} , t_{sm} elementos da base de $M_n(G)$ temos:

$$ge_{ij}t_{sm} = gte_{ij}e_{sm} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq s \\ gte_{im}, & \text{se } j = s \end{cases}. \quad (2.3)$$

Como φ é linear, é suficiente verificar o homomorfismo para os elementos da base. Sejam $e_{ij} \otimes g, e_{sm} \otimes t \in M_n(\mathbb{K}) \otimes G$. Então

$$\varphi((e_{ij} \otimes g)(e_{sm} \otimes t)) = \varphi(e_{ij}e_{sm} \otimes gt) = \begin{cases} \varphi(0 \otimes gt), & \text{se } j \neq s \\ \varphi(e_{im} \otimes gt), & \text{se } j = s \end{cases} \implies \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq s \\ gte_{im}, & \text{se } j = s. \end{cases}$$

Se $j \neq s$, teremos

$$\varphi((e_{ij} \otimes g)(e_{sm} \otimes t)) = \varphi(0 \otimes gt) = 0 = e_{ij}e_{sm}gt = (e_{ij}g)(e_{sm}t) = \varphi(e_{ij} \otimes g)\varphi(e_{sm} \otimes t).$$

Se $j = s$, obtém-se

$$\varphi((e_{ij} \otimes g)(e_{sm} \otimes t)) = \varphi(e_{im} \otimes gt) = gte_{im} = e_{ij}e_{sm}gt = (e_{ij}g)(e_{sm}t) = \varphi(e_{ij} \otimes g)\varphi(e_{sm} \otimes t).$$

Logo $M_n(\mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} G \cong M_n(G)$. Considerando $M_n(\mathbb{K})$ como uma \mathbb{K} -graduada, concluímos que o envelope de Grassman de $M_n(\mathbb{K})$ é uma subálgebra de $M_n(G)$.

Agora, definiremos \mathcal{V} -superálgebras que é o tema central da dissertação.

Definição 2.6 (Superálgebra). *Seja \mathcal{V} uma variedade homogênea de álgebras. Uma \mathbb{K} -álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ é uma \mathcal{V} -superálgebra se o envelope de Grassmann dela está contido em \mathcal{V} .*

Observamos que em geral, $\mathcal{A} \notin \mathcal{V}$. Por exemplo, uma Superálgebra de Lie não é uma álgebra de Lie, em geral. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ é uma superálgebra de Lie se, e somente se, satisfaz

$$[a_\alpha, [b_\beta, c_\lambda]] = [[a_\alpha, b_\beta], c_\lambda] + (-1)^{\alpha\beta} [b_\beta, [a_\alpha, c_\lambda]] \text{ (superidentidade de Jacobi);}$$

$$[x_\alpha, y_\beta] = -(-1)^{\alpha\beta} [y_\beta, x_\alpha] \text{ (superanticomutatividade),}$$

$$\forall a_\alpha, x_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \forall b_\beta, y_\beta \in \mathcal{A}_\beta, \forall c_\gamma \in \mathcal{A}_\gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2.$$

Observamos que se \mathcal{A} é uma superálgebra de Lie, então para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{A}_1$ teremos

$$[x_1, x_2] = -1(-1)^{1 \cdot 1} [x_2, x_1] = [x_2, x_1].$$

Proposição 2.7. *Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -álgebra (anel). Então o envelope de Grassmann $G(\mathcal{A})$ é associativo se, e somente se, \mathcal{A} é associativa.*

Demonstração. Sejam $a, b, c \in \mathcal{A}$ e $g, h, f \in G$ então $a \otimes g, b \otimes h, c \otimes f \in G(\mathcal{A})$. Desde que $G(\mathcal{A})$ é associativo, temos

$$(ab)c \otimes ghf = ((ab \otimes gh)(c \otimes f)) = ((a \otimes g)(b \otimes h))(c \otimes f) = (a \otimes g)((b \otimes h)(c \otimes f)) = a(bc) \otimes ghf.$$

Logo, $((ab)c - a(bc)) \otimes ghf$. Tomando $g, h, f \in G$ tais que $ghf \neq 0$, obtemos $(ab)c - a(bc)$, ou seja, $(ab)c = a(bc)$.

Reciprocamente, suponha que \mathcal{A} é associativa. Então $G(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_0 \otimes G_0 + \mathcal{A}_1 \otimes G_1$ é associativo, pois a álgebra de Grassmann é associativa. ■

Usando Proposição 2.7, podemos concluir que uma superálgebra associativa é, simplesmente, uma \mathbb{K} -álgebra associativa \mathbb{Z}_2 -graduada, em particular, um superanel associativo \mathcal{R} é um anel associativo \mathbb{Z}_2 -graduado.

Nessa dissertação vamos considerar superálgebras e superanáis associativos.

Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ uma superálgebra. Então \mathcal{A} é uma superálgebra supercomutativa se

$$a_\alpha b_\beta = (-1)^{\alpha\beta} b_\beta a_\alpha, \quad \forall a_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \quad \forall b_\beta \in \mathcal{A}_\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Diremos neste caso que os elementos de \mathcal{A} super-comutam. Observe que no caso em que $\mathcal{A}_1 = \{0\}$, teríamos a definição de álgebra comutativa.

Exemplo 2.8. *Seja $G = G_0 + G_1$ a álgebra de Grassmann, então G é uma superálgebra supercomutativa. Lembramos que*

$$G_0 = \text{span}_{\mathbb{K}} \{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k}, k \geq 0\},$$

$$G_1 = \text{span}_{\mathbb{K}} \{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1}, k \geq 0\},$$

Logo, G_α é formado pela combinação de palavras elementos de comprimento

- par se $\alpha = 0$;

- ímpar se $\alpha = 1$.

Seja $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}$, com $n > 1$. Como $e_i e_j = -e_j e_i$ segue que

$$\begin{aligned}
(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}) e_j &= (e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}}) (e_{i_n} e_j) \\
&= (e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}}) (-e_j e_{i_n}) \\
&= -(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_j) e_{i_n} \\
&= -(-(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_j) (e_{i_{n-1}} e_{i_n})) \\
&\vdots \\
&= (-1)^n e_j (e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Seja $e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_{m-1}} e_{j_m}$, com $m > 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}) (e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_{m-1}} e_{j_m}) &= ((e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}) e_{j_1}) (e_{j_2} \cdots e_{j_{m-1}} e_{j_m}) \\
&\stackrel{(2.4)}{=} ((-1)^n e_{j_1} (e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n})) (e_{j_2} \cdots e_{j_{m-1}} e_{j_m}) \\
&\vdots \\
&\stackrel{\star}{=} (-1)^{nm} (e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_{m-1}} e_{j_m}) (e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}),
\end{aligned}$$

obtemos \star aplicando (2.4) $m - 1$ -vezes. Observamos que se n é par então

$$(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}) (e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_{m-1}} e_{j_m}) = (e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_{m-1}} e_{j_m}) (e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{n-1}} e_{i_n}).$$

Portanto, G_0 está contido no centro de G .

Sejam $w = \sum_{\#\{i\} < \infty} c_{(i)} e_{i_1} \cdots e_{i_{2m}} \in G_0$ e $w' = \sum_{\#\{i'\} < \infty} c_{(i')} e_{i'_1} \cdots e_{i'_{2m'+1}} \in G_1$, $w'' = \sum_{\#\{i''\} < \infty} c_{(i'')} e_{i''_1} \cdots e_{i''_{2m''+1}} \in G_1$. Então

i.

$$\begin{aligned}
ww' &= \left(\sum_{\#\{i\} < \infty} c_{(i)} e_{i_1} \cdots e_{i_{2m}} \right) \left(\sum_{\#\{i'\} < \infty} c_{(i')} e_{i'_1} \cdots e_{i'_{2m'+1}} \right) \\
&= \sum_{\#\{i\}, \#\{i'\} < \infty} c_{(i)} c_{(i')} e_{i_1} \cdots e_{i_{2m}} e_{i'_1} \cdots e_{i'_{2m'+1}} \\
&= \left(\sum_{\#\{i'\} < \infty} c_{(i')} e_{i'_1} \cdots e_{i'_{2m'+1}} \right) \left(\sum_{\#\{i\} < \infty} c_{(i)} e_{i_1} \cdots e_{i_{2m}} \right) = w'w = (-1)^{0 \cdot 1} w'w.
\end{aligned}$$

ii. Segue das observações acima que

$$(e_{i'_1} \cdots e_{i'_{2m'+1}})(e_{i''_1} \cdots e_{i''_{2m''+1}}) = -e_{i''_1} \cdots e_{i''_{2m''+1}} e_{i'_1} \cdots e_{i'_{2m'+1}}.$$

Logo, $w'w'' = -w''w' = (-1)^{1 \cdot 1} w''w'$.

Portanto,

$$w_\alpha w_\beta = (-1)^{\alpha\beta} w_\beta w_\alpha, \forall w_\alpha \in G_\alpha, \forall w_\beta \in G_\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Exemplo 2.9. A álgebra de matrizes $M_{p,q}(\mathcal{D})$, onde \mathcal{D} é uma álgebra associativa de divisão, é uma superálgebra associativa, onde a \mathbb{Z}_2 -graduação é definida como segue. Seja

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}) \in \mathbb{Z}_2^{p+q},$$

onde $\alpha_1 = \dots = \alpha_p$ e $\alpha_p \neq \alpha_{p+s} \forall 1 \leq s \leq q$. Sabemos que $M_{p,q}(\mathcal{D}) = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{Z}_2} A_\beta$, onde A_β é o subespaço gerado por $\langle e_{ij} | \alpha_j - \alpha_i = \beta \rangle$. Observamos que $\deg e_{ij} = \alpha_j - \alpha_i$, logo

$$\deg e_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } 1 \leq i, j \leq p \text{ ou } p+1 \leq i, j \leq p+q, \\ 1, & \text{se } \begin{cases} 1 \leq i \leq p \text{ e } p+1 \leq j \leq p+q \\ \text{ou} \\ 1 \leq j \leq p \text{ e } p+1 \leq i \leq p+q. \end{cases} \end{cases}$$

Portanto,

$$A_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc|ccc} \overbrace{a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p}}^p & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,p+q}}_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{a_{p+q,p+1} & \cdots & a_{p+q,p+q}}_q \end{array} \right) \right\} \left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right\} |a_{i,j} \in \mathcal{D},$$

$$A_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc|ccc} \underbrace{0 & 0 & \cdots & 0}_p & \overbrace{a_{1,p+1} & \cdots & a_{1,p+q}}^q \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,p+1} & \cdots & a_{2,p+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{p,p+1} & \cdots & a_{p,p+q} \\ \hline a_{p+1,1} & a_{p+1,2} & \cdots & a_{p+1,p} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{a_{p+q,1} & a_{p+q,2} & \cdots & a_{p+q,p}}_p & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \right\} \left. \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right\} |a_{i,j} \in \mathcal{D}.$$

Escolhendo $(\alpha_1, \dots, \alpha_q, \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_{q+p}) \in \mathbb{Z}_2^{q+p}$, onde $\alpha_1 = \dots = \alpha_q$ e $\alpha_q \neq \alpha_{q+s} \forall 1 \leq s \leq p$, obteremos

$$A_0 = \left(\frac{M_q(\mathcal{D})}{M_{p \times q}(0)} \mid \frac{M_{q \times p}(0)}{M_p(\mathcal{D})} \right), \quad A_1 = \left(\frac{M_q(0)}{M_{p \times q}(\mathcal{D})} \mid \frac{M_{q \times p}(\mathcal{D})}{M_p(0)} \right), \quad \text{onde } M_{p \times q}(0) \text{ é a matriz nula.}$$

Essa graduação é conhecida como **graduação elementar** de $M_{p,q}(\mathcal{D})$.

2.2 Involuções e Superinvoluções

Nesta seção, estudaremos o conceito de superinvolução. Nosso objetivo será definir superinvolução, entretanto, daremos a definição de involução e alguns exemplos. Caso o leitor esteja interessado em aprofundar o conhecimento sobre involução, consulte o livro [14].

Definição 2.10. *Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -álgebra. Uma função \mathbb{K} -linear $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é uma involução de \mathcal{A} , se satisfaz:*

1. $a^{**} = a$;
2. $(ab)^* = b^* a^*$,

para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$.

Exemplo 2.11. *Seja $M_k(\mathbb{K})$ a \mathbb{K} -álgebra de matrizes $k \times k$ sobre \mathbb{K} . Para uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_k(\mathbb{K})$ seja $A^t = (a_{ji})$ a matriz transposta. Então $*$ = t é uma involução de $M_k(\mathbb{K})$, chamada involução transposta.*

Exemplo 2.12. *A aplicação $s : M_{2n}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{2n}(\mathbb{K})$, definida por*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix},$$

onde $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$, é uma involução, chamada de involução simplética.

Exemplo 2.13. *Dado uma \mathbb{K} -álgebra \mathcal{A} denote \mathcal{A}^{op} a \mathbb{K} -álgebra oposta de \mathcal{A} . A álgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^{op}$ tem uma involução $*$, dada por:*

$$\begin{aligned} * : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{op} &\rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}^{op} \\ (a, b) &\longmapsto (b, a). \end{aligned}$$

Essa involução chama-se involução de troca.

Definição 2.14 (Superinvolução). *Uma superinvolução de uma superálgebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ é uma transformação linear de grau zero $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que*

$$a^{**} = a \quad \text{e} \quad (a_\alpha b_\beta)^* = (-1)^{\alpha\beta} b_\beta^* a_\alpha^*, \quad \forall a_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \forall b_\beta \in \mathcal{A}_\beta, \forall a \in \mathcal{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

No caso em que \mathcal{A} é um superanel, uma superinvolução é uma função $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ aditiva graduada de grau zero que satisfaz

$$a^{**} = a \quad \text{e} \quad (a_\alpha b_\beta)^* = (-1)^{\alpha\beta} b_\beta^* a_\alpha^*, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall a_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, b_\beta \in \mathcal{A}_\beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.15. *Seja \mathcal{A} uma superálgebra (superanel). Considere a nova superálgebra (superanel) \mathcal{A}^{sop} com mesma estrutura de espaço vetorial (grupo aditivo) \mathbb{Z}_2 -graduado como em \mathcal{A} , mas o produto de \mathcal{A}^{sop} é dada por*

$$x_\alpha \circ_{sop} x_\beta = (-1)^{\alpha\beta} x_\beta x_\alpha, \quad \forall x_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \forall x_\beta \in \mathcal{A}_\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

Chamamos essa superálgebra (superanel) de superálgebra super-oposta (super-oposto).

Logo, para todo $x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1 \in \mathcal{A}^{sop}$ obtemos

$$\begin{aligned} x \circ_{sop} y &= (x_0 + x_1) \circ_{sop} (y_0 + y_1) \\ &= x_0 \circ_{sop} (y_0 + y_1) + x_1 \circ_{sop} (y_0 + y_1) \\ &= x_0 \circ_{sop} y_0 + x_0 \circ_{sop} y_1 + x_1 \circ_{sop} y_0 + x_1 \circ_{sop} y_1 \\ &= y_0 x_0 + y_1 x_0 + y_0 x_1 - y_1 x_1. \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{sop}$ a soma direta das superálgebras (superanéis) \mathcal{A} e \mathcal{A}^{sop} . Isto é uma superálgebra (superanel), onde a graduação do \mathcal{B} é dada por

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_0^{sop}, \quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_1^{sop}.$$

Denotamos um elemento arbitrário x do \mathcal{B} como um par de elementos de \mathcal{A} , isto é, $x = (a, b)$, onde $a, b \in \mathcal{A}$. O produto em \mathcal{B} é dado por

$$(a_0 + a_1, b_0 + b_1)(a'_0 + a'_1, b'_0 + b'_1) = (a_0 a'_0 + a_0 a'_1 + a_1 a'_0 + a_1 a'_1, b'_0 b_0 - b'_1 b_1 + b'_0 b_1 + b'_1 b_0).$$

Lema 2.16. *Sejam \mathcal{A}^{sop} a superálgebra oposta da superálgebra \mathcal{A} e $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{sop}$. Então*

$$\begin{aligned} * : \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{B} \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

é uma superinvolução.

Demonstração. Não é difícil provar que $*$ está bem definida e é uma função linear. Sejam $x_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ e $x_\beta \in \mathcal{B}_\beta$. Então existem $a_\alpha, b_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ e $a_\beta, b_\beta \in \mathcal{A}_\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ tais que $x_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$, $x_\beta = (a_\beta, b_\beta)$. Portanto, $x_\alpha^* = (b_\alpha, a_\alpha)$, $x_\beta^* = (b_\beta, a_\beta)$. Logo, $x_\alpha^{**} = (b_\alpha, a_\alpha)^* = (a_\alpha, b_\alpha) = x_\alpha$ e

$$\begin{aligned} (x_\alpha x_\beta)^* &= ((a_\alpha, b_\alpha)(a_\beta, b_\beta))^* & (2.5) \\ &= (a_\alpha a_\beta, (-1)^{\alpha\beta} b_\beta b_\alpha)^* \\ &= (-1)^{\alpha\beta} (b_\beta b_\alpha, (-1)^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta) \\ &= (-1)^{\alpha\beta} (b_\beta, a_\beta)(b_\alpha, a_\alpha) \\ &= (-1)^{\alpha\beta} x_\beta^* x_\alpha^*. \end{aligned}$$

■

O lema acima, continua sendo válido para superanáis.

Note que uma superinvolução $* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ restrita à \mathcal{A}_0 é uma involução. Observamos ainda que dado uma álgebra associativa \mathcal{A} , podemos considerá-la como uma superálgebra com graduação trivial, logo uma superinvolução em \mathcal{A} é simplesmente uma involução, neste caso. Finalizaremos esta seção com o seguinte lema, cuja a demonstração não é difícil.

Lema 2.17. *Seja $*$ uma involução graduada de uma superálgebra (ou superanel) associativa \mathcal{A} . Então a função $\tilde{*}$ dada por $(a_\alpha \otimes g_\alpha)^{\tilde{*}} = (a_\alpha^* \otimes g_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, é uma superinvolução no envolvente de Grassmann.*

2.3 Supermódulos

A partir de agora, assumiremos que $\alpha, \gamma, \delta, \beta \in \mathbb{Z}_2$ e que qualquer equação envolvendo os índices é válido para todas as escolhas possíveis. Vale lembrar que uma superálgebra (superanel) é uma álgebra (anel) associativa \mathbb{Z}_2 -graduada.

Alguns destes resultados, podem ser encontrados nos livros [9] e [12]. Nesta seção, \mathcal{R} representará um superanel associativo e \mathcal{D} um superanel de divisão associativo.

Definição 2.18 (Supermódulo). *Um \mathcal{R} -supermódulo à direita \mathcal{M} é um \mathcal{R} -módulo à direita \mathbb{Z}_2 -graduado.*

De maneira semelhante, podemos definir supermódulos à esquerda. Segue que todas as observações feitas para módulo graduado, valem para supermódulo (veja as preliminares). Notemos que \mathcal{R} pode ser considerado como um \mathcal{R} -supermódulo à direita.

Dizemos que um subconjunto \mathcal{N} não-vazio de \mathcal{M} é um sub-supermódulo de \mathcal{M} se \mathcal{N} é submódulo graduado de \mathcal{M} .

Definição 2.19. *Seja \mathcal{R} um superanel. Dizemos que um subconjunto não vazio I de \mathcal{R} é um superideal à direita, se I é ideal à direita graduado do \mathcal{R} .*

Analogamente, podemos definir superideal à esquerda. Diremos que I é um superideal quando for um superideal à direita e à esquerda, ou seja, um ideal bilateral graduado.

Seja \mathcal{M} um \mathcal{R} -supermódulo à direita. O anulador de um \mathcal{R} -supermódulo \mathcal{M} , $Ann_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}) = \{r \in \mathcal{R} | mr = 0, \forall m \in \mathcal{M}\}$, é um ideal graduado bilateral do \mathcal{R} , logo um superideal. Observemos que um superideal I é um sub-supermódulo do \mathcal{R} -supermódulo \mathcal{R} .

Exemplo 2.20. *Considere a álgebra de grupo $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$, então $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ é um $\mathbb{K}\mathbb{Z}_2$ -supermódulo.*

Dado um \mathcal{R} -supermódulo à direita \mathcal{M} , seja $End(\mathcal{M}) = End(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})$, o anel dos \mathcal{R} -endomorfismos de \mathcal{M} . Sabemos que $End^{gr}(\mathcal{M})$ é um anel associativo \mathbb{Z}_2 -graduado,

logo $End^{gr}(\mathcal{M})$ é um superanel. Como \mathbb{Z}_2 é um grupo finito, segue que $End(\mathcal{M})$ é um superanel, pois neste caso, $End(\mathcal{M}) = End^{gr}(\mathcal{M})$.

Para as próximas secções, precisaremos da seguinte definição.

Definição 2.21. *Um superespaço à direita (ou esquerda) sobre um superanel (superálgebra) associativo de divisão $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ é um \mathcal{D} -supermódulo à direita (esquerda) $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$.*

Note que se \mathcal{V} é um \mathcal{D} -superespaço à direita (esquerda), então toda componente homogênea \mathcal{V}_β é \mathcal{D}_0 -espaço vetorial à direita (esquerda), pois \mathcal{D}_0 é um anel de divisão e \mathcal{V}_β é um \mathcal{D}_0 -módulo à direita (esquerda).

Para qualquer \mathcal{D} -supermódulo à direita (esquerda) \mathcal{V} e qualquer $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, definimos

$$\mathcal{V}(\gamma) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} \mathcal{V}_{\gamma+\alpha},$$

isto é, $\mathcal{V}(\gamma)$ é o \mathcal{D} -supermódulo \mathcal{V} com componentes homogêneas dada por $\mathcal{V}(\gamma)_\alpha = \mathcal{V}_{\gamma+\alpha}$. Quando, \mathcal{V} é um \mathcal{D} -supermódulo finitamente gerado, temos que $Hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\gamma), \mathcal{V}(\delta)) = End_{\mathcal{D}}(\mathcal{V})(\gamma - \delta)$, $\forall \gamma, \delta \in \mathbb{Z}_2$, veja o lema [[12], Proposition 2.8].

Exemplo 2.22. *Sejam n um número inteiro positivo e $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Seja*

$$T = M_n(\mathcal{D})(\delta_1, \dots, \delta_n)$$

o anel de matrizes $n \times n$ com entradas no superanel (superálgebra) \mathcal{D} ,

$$M_n(\mathcal{D})(\delta_1, \dots, \delta_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{D}(\delta_1 - \delta_2) & \cdots & \mathcal{D}(\delta_1 - \delta_n) \\ \mathcal{D}(\delta_2 - \delta_1) & \mathcal{D} & \cdots & \mathcal{D}(\delta_2 - \delta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}(\delta_n - \delta_1) & \mathcal{D}(\delta_n - \delta_2) & \cdots & \mathcal{D} \end{pmatrix} \right\}.$$

Com a seguinte graduação. Para qualquer $\gamma \in \mathbb{Z}_2$ a componente de grau γ é

$$T_\gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\gamma & \mathcal{D}_{\gamma+\delta_1-\delta_2} & \cdots & \mathcal{D}_{\gamma+\delta_1-\delta_n} \\ \mathcal{D}_{\gamma+\delta_2-\delta_1} & \mathcal{D}_\gamma & \cdots & \mathcal{D}_{\gamma+\delta_2-\delta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{D}_{\gamma+\delta_n-\delta_1} & \mathcal{D}_{\gamma+\delta_n-\delta_2} & \cdots & \mathcal{D}_\gamma \end{pmatrix}.$$

Uma vez que $\mathcal{D} = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_2} \mathcal{D}(\delta)_\gamma$, temos $T = \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_2} T_\gamma$. Além disso, se $A = (a_{ij}) \in T_\gamma$ e $B = (b_{ij}) \in T_\alpha$, então cada $a_{ij} \in \mathcal{D}_{\gamma+\delta_i-\delta_j}$ e $b_{jk} \in \mathcal{D}_{\alpha+\delta_j-\delta_k}$, assim $a_{ij}b_{jk} \in \mathcal{D}_{\gamma+\delta_i+\alpha-\delta_k} = \mathcal{D}(\delta_i - \delta_k)_{\gamma+\alpha}$. Logo, $AB \in T_{\gamma+\alpha}$, $\forall A \in T_\gamma$, $\forall B \in T_\alpha$ e, portanto, T é um superanel.

Proposição 2.23. *Sejam \mathcal{D} um superanel (superálgebra) associativo de divisão, \mathcal{V} um superespaço à direita sobre \mathcal{D} e $E = \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V})$. Se \mathcal{V} é finitamente gerado então para todo $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{Z}_2^n$,*

$$\text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{V}(\delta_n)) \cong M_n(E)(\delta_1, \dots, \delta_n),$$

é um isomorfismo de superanáis.

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\delta_i)$ como espaços vetoriais, a graduação é diferente, para todo $1 \leq i \leq n$. Denotemos $\mathcal{V}(\delta_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{V}(\delta_n) := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i)$,

$$H = \begin{pmatrix} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_1), \mathcal{V}(\delta_1)) & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_2), \mathcal{V}(\delta_1)) & \dots & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_n), \mathcal{V}(\delta_1)) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_1), \mathcal{V}(\delta_2)) & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_2), \mathcal{V}(\delta_2)) & \dots & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_n), \mathcal{V}(\delta_2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_1), \mathcal{V}(\delta_n)) & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_2), \mathcal{V}(\delta_n)) & \dots & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_n), \mathcal{V}(\delta_n)) \end{pmatrix}$$

e definimos os \mathcal{D} -homomorfismos seguintes:

$$e_i : \mathcal{V}(\delta_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i) \quad \pi_j : \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i) \rightarrow \mathcal{V}(\delta_j)$$

$$v \mapsto (0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0) \quad \text{e} \quad v = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n) \mapsto v_j.$$

i-ésima posição

Note-se que $\sum_{i=1}^n \pi_i \circ e_j$ é a aplicação identidade de $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i)$, porque

$$(v_1, \dots, v_n) \left(\sum_{i=1}^n \pi_i \circ e_j \right) = \sum_{i=1}^n (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0). \quad (2.6)$$

Além disso, $e_i \circ \pi_j = \begin{cases} id_{\mathcal{V}(\delta_i)}, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$, porque $\forall v \in \mathcal{V}(\delta_i)$

$$(v)(e_i \circ \pi_j) = (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0) \pi_j = \begin{cases} v, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (2.7)$$

Definimos a função

$$\begin{aligned}\varphi : \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}(\delta_n)) &\rightarrow H \\ f &\mapsto \varphi(f) = (e_i \circ f \circ \pi_j)_{i,j},\end{aligned}$$

isto é, dado um homomorfismo $f \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i))$ definimos $f_{i,j} = e_i \circ f \circ \pi_j$ (que são \mathcal{D} -homomorfismos de $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_i), \mathcal{V}(\delta_j))$) e construímos a matriz $n \times n$ de homomorfismos de $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i)$,

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Facilmente, vê-se que φ é um homomorfismo de superanéis, $f, g \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i))$

- $\varphi(f+g) = (e_i \circ (f+g) \circ \pi_j)_{i,j} = ((e_i \circ f + e_i \circ g) \pi_j)_{i,j} = (e_i \circ f \circ \pi_j + e_i \circ g \circ \pi_j)_{i,j} = (e_i \circ f \circ \pi_j)_{i,j} + (e_i \circ g \circ \pi_j)_{i,j} = \varphi(f) + \varphi(g)$.
- $\varphi(f)\varphi(g) = (e_i \circ f \circ \pi_j)_{i,j} (e_i \circ g \circ \pi_j)_{i,j} = (\sum_{k=1}^n (e_i \circ f \circ \pi_k) \circ (e_k \circ g \circ \pi_j))_{i,j} = ((e_i \circ f \circ \sum_{k=1}^n (\pi_k \circ e_k) \circ (g \circ \pi_j))_{i,j} = ((e_i \circ (f \circ g) \circ \pi_j))_{i,j} = \varphi(fg)$.
- $\varphi(\text{id}_{\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i)}) = (e_i \circ \text{id}_{\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i)} \circ \pi_j)_{i,j} = (e_i \circ \pi_j)_{i,j} = \text{id}_{M_n(E)}$.

Por outro lado, definimos a aplicação

$$\begin{aligned}\psi : H &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i)) \\ (f_{i,j})_{i,j} &\mapsto \psi((f_{i,j})_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^n \pi_i \circ f_{i,j} \circ e_j\end{aligned}$$

que está bem definida, porque a composição e soma de homomorfismos é um homomorfismo.

Dado $f \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i))$, por (2.6) f temos que

$$\psi(\varphi(f)) = \psi((e_i \circ f \circ \pi_j)_{i,j}) = \sum_{i,j=1}^n \pi_i \circ (e_i \circ f \circ \pi_j) \circ e_j = f$$

e dada $A = (f_{i,j})_{i,j} \in H$ temos que

$$\begin{aligned} \varphi(\psi((f_{i,j})_{i,j})) &= \varphi\left(\sum_{i,j=1}^n \pi_i \circ f_{i,j} \circ e_j\right) = \left(e_k \circ \left(\sum_{i,j=1}^n \pi_i \circ f_{i,j} \circ e_j\right) \circ \pi_l\right)_{k,l} \\ &=^* \left(\sum_{i=1}^n (e_k \circ \pi_i) \circ f_{i,j} \circ \sum_{j=1}^n (e_j \circ \pi_l)\right)_{k,l} = (f_{k,l})_{k,l} \quad , \text{*por (2.7).} \end{aligned}$$

Logo, φ e ψ são inversos e φ é isomorfismo de anéis. Portanto, $\text{End}_{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i)) \cong H$, observe φ é um isomorfismo de anéis que é compatível com a graduação. Como \mathcal{V} é finitamente gerado, segue que na entrada ij , temos

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}(\delta_j), \mathcal{V}(\delta_i)) \cong (\text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}))(\delta_i - \delta_j)$$

que é a entrada ij de $M_n(E)(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Portanto, $\text{End}_{\mathcal{D}}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}(\delta_i)) \cong M_n(E)(\delta_1, \dots, \delta_n)$. ■

Sejam $\dim_{\mathcal{D}_0} \mathcal{V}_0 = p$ e $\dim_{\mathcal{D}_0} \mathcal{V}_1 = q$. Se $p + q < \infty$ então $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \oplus \mathcal{V}_1$ tem dimensão finita sobre \mathcal{D}_0 . A prova desse fato pode ser encontrada em [[12], Proposition 2.8].

Lema 2.24. *Todo superespaço sobre um superanel de divisão \mathcal{D} é isomorfo a uma soma direta de superespaços 1-dimensionais $\mathcal{D}(\gamma)$.*

Demonstração. Veja [[12] Corollary 2.10]. ■

2.3.1 Super-centralizador

Sejam \mathcal{R} um superanel e \mathcal{M} um \mathcal{R} -supermódulo. Definimos $E(\mathcal{M}) := \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \mid (m+n)f = (m)f + (n)f, \forall m, n \in \mathcal{M}\}$ o conjunto dos endomorfismos do grupo aditivo do \mathcal{M} .

Não é difícil provar que $E(\mathcal{M})$ é um anel associativo com as operações $+$, \circ definidas por

$$(m)(f + g) := (m)f + (m)g \text{ e } (m)(f \circ g) := ((m)f)g \text{ (soma e composição).}$$

Observamos que o conjunto de todos os \mathcal{R} -endomorfismos do \mathcal{M} ($End(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})$) está contido em $E(\mathcal{M})$. Quando \mathcal{M} é um \mathcal{R} -supermódulo fiel, temos que \mathcal{R} é um subanel de $E(\mathcal{M})$. A demonstração do seguinte lema não é difícil.

Lema 2.25. *Para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, seja $E(\mathcal{M})_{\gamma} = \{f_{\gamma} \in E(\mathcal{M}) \mid (m_{\alpha})f_{\gamma} \in \mathcal{M}_{\gamma+\alpha}, \forall m_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2\}$. Então $E^{gr}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{\gamma \in \mathbb{Z}_2} E(\mathcal{M})_{\gamma}$ é um superanel.*

Dado um anel \mathbb{Z}_2 -graduado associativo \mathcal{A} e, seja \mathcal{A}^{op} o seu anel oposto. Observamos que \mathcal{A}^{op} é um superanel e $\forall (a_{\alpha} \otimes g_{\alpha}) \in \mathcal{A}_{\alpha} \otimes G_{\alpha}$ e $\forall (a_{\beta} \otimes g_{\beta}) \in \mathcal{A}_{\beta} \otimes G_{\beta}$,

$$\begin{aligned} (a_{\alpha} \circ_{op} a_{\beta}) \otimes g_{\alpha} g_{\beta} &= a_{\beta} a_{\alpha} \otimes g_{\alpha} g_{\beta} \\ &= (-1)^{\alpha\beta} (a_{\beta} a_{\alpha} \otimes g_{\beta} g_{\alpha}) \\ &= (-1)^{\alpha\beta} (a_{\beta} \otimes g_{\beta})(a_{\alpha} \otimes g_{\alpha}) \\ &= (a_{\alpha} \otimes g_{\alpha}) \underset{sop}{\circ} (a_{\beta} \otimes g_{\beta}), \end{aligned}$$

ou seja, calcular $a_{\alpha} \circ_{op} a_{\beta}$ em \mathcal{A}^{op} é equivalente calcular $(a_{\alpha} \otimes g_{\alpha}) \underset{sop}{\circ} (a_{\beta} \otimes g_{\beta})$ em $G(\mathcal{A})^{sop}$. Em vista disso, faz-se necessário definir o super-centralizador.

Definição 2.26. *Sejam \mathcal{R} um superanel e \mathcal{M} um \mathcal{R} -supermódulo. Definimos o super-centralizador do \mathcal{R} em \mathcal{M} como sendo*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1, \text{ onde } \mathcal{C}_{\gamma} = \{c_{\gamma} \in E(\mathcal{M})_{\gamma} \mid c_{\gamma} r_{\alpha} = (-1)^{\alpha\gamma} r_{\alpha} c_{\gamma}, \forall r_{\alpha} \in \mathcal{R}_{\alpha}, \alpha \in \mathbb{Z}_2\}.$$

Assim, os elementos de \mathcal{C} super-comutam com os de \mathcal{R} agindo em \mathcal{M} .

Observamos que o super-centralizador de \mathcal{R} em \mathcal{M} é um superanel, chamado de superanel super-comutativo de \mathcal{R} em \mathcal{M} . Notamos que $End(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})_0$ está contido em $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$, pois $c_0 r_{\alpha} = r_{\alpha} c_0 = (-1)^{0\alpha} r_{\alpha} c_0, \forall r_{\alpha} \in \mathcal{R}_{\alpha}, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2, c_0 \in End(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})_0$.

Lema 2.27. *Sejam \mathcal{M} um \mathcal{R} -supermódulo e $c_\beta \in \mathcal{C}_\beta$. Então $(\mathcal{M})c_\beta = \text{Im}(c_\beta)$ e $\text{Ker}(c_\beta) := \{m \in \mathcal{M} \mid (m)c_\beta = 0\}$ são sub-supermódulos de \mathcal{M} .*

Demonstração. Provemos que $\text{Im}(c_\beta)$ é um sub-supermódulo de \mathcal{M} , a prova de que $\text{Ker}(c_\beta)$ é um sub-supermódulo de \mathcal{M} segue de forma análoga.

Começamos a observar que $(\mathcal{M})c_\beta \neq \emptyset$, pois $0 \in (\mathcal{M})c_\beta$. Como c_β é endomorfismo do grupo aditivo do \mathcal{M} então $\text{Im}c_\beta$ e $\text{Ker}c_\beta$ são subgrupos do \mathcal{M} . Sejam $m_\alpha \in (\mathcal{M})c_\beta$ e $r_\delta \in \mathcal{R}_\delta$, então existe $\tilde{m}_{\alpha-\beta} \in \mathcal{M}_{\alpha-\beta}$ tal que $m_\alpha = \tilde{m}_{\alpha-\beta}c_\beta$. Logo,

- $m_\alpha r_\delta = (\tilde{m}_{\alpha-\beta})c_\beta r_\delta = (\tilde{m}_{\alpha-\beta}(-1)^{\delta\beta} r_\delta)c_\beta$.

Portanto, $m_\alpha r_\delta \in (\mathcal{M})c_\beta$. E por definição $\text{Im}(\mathcal{C}_\beta)$ é submódulo graduado do \mathcal{M} . ■

Lema 2.28. *Sejam $c_\beta \in \mathcal{C}_\beta$ uma bijeção e f a sua inversa. Então $f \in \mathcal{C}_{-\beta}$.*

Demonstração. Seja f a inversa de c_β . Dados $m, n \in \mathcal{M}$ então existem $a, b \in \mathcal{M}$ tais que $(a)c_\beta = m$ e $(b)c_\beta = n$, logo $(m+n)f = ((a)c_\beta + (b)c_\beta)f = ((a+b)c_\beta)f = a+b = (m)f + (n)f$ e, portanto, $f \in E(\mathcal{M})$. Note que dado $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, existe $\tilde{m}_{\alpha-\beta} \in \mathcal{M}_{\alpha-\beta}$ tal que $(\tilde{m}_{\alpha-\beta})c_\beta = m_\alpha$. Logo, $(m_\alpha)f = (\tilde{m}_{\alpha-\beta})c_\beta f = \tilde{m}_{\alpha-\beta}$ e, portanto, $f = (c_\beta)^{-1} \in E(\mathcal{M})_{-\beta}$. Observemos que para todo $r_\delta \in \mathcal{R}_\delta$ temos $c_\beta r_\delta = (-1)^{\delta\beta} r_\delta c_\beta$, consequentemente, $(c_\beta)^{-1} r_\delta = (-1)^{-\delta\beta} r_\delta (c_\beta)^{-1}$, ou seja, $(c_\beta)^{-1} \in \mathcal{C}_{\beta^{-1}} = \mathcal{C}_\beta$. ■

2.3.2 Supermódulos Irredutíveis

Definição 2.29. *Um \mathcal{R} -supermódulo à direita \mathcal{M} é irredutível se $\mathcal{M}\mathcal{R} \neq \{0\}$ e \mathcal{M} não tem sub-supermódulo próprio, ou seja, não existe um sub-supermódulo de \mathcal{M} tal que $\{0\} \neq \mathcal{N} \subsetneq \mathcal{M}$.*

É importante observar que um \mathcal{R} -supermódulo irredutível \mathcal{M} não é necessariamente um \mathcal{R} -módulo irredutível. A irredutibilidade, refere-se a sub-supermódulos do \mathcal{M} .

O próximo lema será importante para os próximos resultados.

Lema 2.30. *Sejam \mathcal{M} um \mathcal{R} -supermódulo irredutível e $f_\beta \in \mathcal{C}_\beta$. Se $f_\beta \neq 0$ então f_β é inversível.*

Demonstração. Seja $0 \neq f_\beta \in \mathcal{C}_\beta$. Segue do lema 2.27 que $Im(f_\beta)$ é um sub-supermódulo de \mathcal{M} não nulo. Pela irredutibilidade de \mathcal{M} , $Im(f_\beta) = \mathcal{M}$, logo f_β é sobrejetiva. Pelo lema 2.27 $Ker f_\beta$ é um submódulo graduado propriamente contido em \mathcal{M} . Pela irredutibilidade de \mathcal{M} , segue que $Ker f_\beta = \{0\}$, logo f_β é injetiva. Portanto, f_β é uma bijeção. ■

Corolário 2.31. *Sejam \mathcal{R} um superanel e \mathcal{M} um \mathcal{R} -supermódulo irredutível. Então o superanel comutativo \mathcal{C} de \mathcal{R} em \mathcal{M} é um superanel de divisão.*

Demonstração. Seja $0 \neq c_\beta \in \mathcal{C}_\beta$. Pelo **Lema 2.30**, c_β é inversível em \mathcal{C} , e por 2.28, o inverso de c_β pertence a $\mathcal{C}_{-\beta}$. Portanto, \mathcal{C} é um superanel de divisão. ■

2.4 Teorema da Densidade para Superanáis

Para todos os efeitos, consideraremos $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$. Sejam $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ um superanel e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{D} -supermódulo à esquerda. Então \mathcal{M}_α e \mathcal{M}_β são \mathcal{D}_0 -módulos à esquerda. Consideremos $Hom_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$ o conjunto de \mathcal{D}_0 -homomorfismos de \mathcal{M}_α em \mathcal{M}_β . Se a adição for definida de maneira usual, então $(Hom_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta), +)$ é um grupo abeliano. Agora, introduzimos as seguintes notações.

Seja S um subconjunto não vazio de $Hom_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$, definimos

$$S^\perp = \{x \in \mathcal{M}_\alpha \mid xS = \{0\}\}. \quad (2.8)$$

Similarmente, se T é um subconjunto de \mathcal{M}_α não vazio, então definimos

$$T^\perp = \{l \in Hom_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta) \mid Tl = \{0\}\}.$$

Lema 2.32. *Sejam $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ -supermódulo à esquerda e $S \subseteq Hom_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$ um subconjunto. Então S^\perp é um \mathcal{D}_0 -submódulo de \mathcal{M}_α .*

Demonstração. Seja $S \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$. Observemos primeiro que $S^\perp \neq \emptyset$, pois $0 \in \mathcal{M}_\alpha$ e $\forall f \in S \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$ temos $0f = 0$. Logo, $0S = \{0\}$, ou seja, $0 \in S^\perp$. Sejam $x, y \in S^\perp$, $r \in \mathcal{D}_0$, então $xS = \{0\}$ e $yS = \{0\}$. Logo, para todo $f \in S$

i. $(x - y)f = xf - yf = 0 - 0 = 0$;

ii. $(rx)f = r(xf) = r0 = 0$,

portanto, segue de *i.*, *ii.* que $x - y, rx \in S^\perp$. ■

O seguinte resultado será importante para demonstrar o teorema da densidade.

Lema 2.33. *Sejam $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ um superanel e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{D} -supermódulo. Seja $U = \text{End}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\beta)$ o anel de \mathcal{D}_0 -endomorfismos de \mathcal{M}_β e B um subgrupo aditivo de $\text{Hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$ tal que $BU \subseteq B$ e $\alpha, \beta = 0, 1$. Suponha que qualquer homomorfismo de qualquer U -submódulo de \mathcal{M}_β no U -módulo \mathcal{M}_β pode ser realizado por um elemento de \mathcal{D}_0 . Então para qualquer subconjunto finito $\{u_i | i = 1, \dots, n\}$ de \mathcal{M}_α*

$$B^\perp + \sum_{i=1}^n \mathcal{D}_0 u_i = (\cap_{i=1}^n u_i^\perp \cap B)^\perp. \quad (2.9)$$

Demonstração. Primeiro, provemos para $n = 1$. Escreva u no lugar de u_1 . É claro que $(B^\perp + \mathcal{D}_0 u)(u^\perp \cap B) = \{0\}$. Portanto, $(B^\perp + \mathcal{D}_0 u) \subseteq (u^\perp \cap B)^\perp$. Provemos que $(u^\perp \cap B)^\perp \subseteq (B^\perp + \mathcal{D}_0 u)$. Se $v \in (u^\perp \cap B)^\perp$ e $b \in u^\perp \cap B$, então $vb = 0$. Consequentemente, $ub \rightarrow vb$, $b \in B$ é um mapeamento de único valor de $uB \subseteq \mathcal{M}_\beta$ em \mathcal{M}_β . Como, $BU \subseteq U$, uB é um U -submódulo de \mathcal{M}_β . Além disso, o mapeamento é um homomorfismo de uB no U -módulo \mathcal{M}_β . Daí existe um $r_0 \in \mathcal{D}_0$ tal que $r_0(ub) = vb$ para todo $b \in B$. Assim, $(v - r_0 u)b = 0$, ou seja, $v - r_0 u \in B^\perp$. Portanto, $v \in B^\perp + \mathcal{D}_0 u$. Isto prova o caso para $n = 1$ do lema. Suponha que

$$B^\perp + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{D}_0 u_j = (\cap_{j=1}^{n-1} u_j^\perp \cap B)^\perp. \quad (2.10)$$

Consideremos $B' = \cap_{j=1}^{n-1} u_j^\perp \cap B$. Então B' é um subgrupo de B e $B'U \subseteq B'$. Consequentemente, pelo caso $n = 1$,

$$B'^\perp + \mathcal{D}_0 u_n = (u_n^\perp \cap B')^\perp. \quad (2.11)$$

Como $u_n^\perp \cap B' = \cap_{i=1}^n u_i^\perp \cap B$ e por 2.10,

$$\begin{aligned} (\cap_{i=1}^n u_i^\perp \cap B)^\perp &= B'^\perp + \mathcal{D}_0 u_n \\ &= (\cap_{i=1}^{n-1} u_i^\perp \cap B)^\perp + \mathcal{D}_0 u_n \\ &= B^\perp + \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{D}_0 u_j + \mathcal{D}_0 u_n = B^\perp + \sum_{j=1}^n \mathcal{D}_0 u_j. \end{aligned}$$

■

Definição 2.34. *Seja \mathcal{M} um \mathcal{R} -supermódulo, onde \mathcal{R} é um superanel. Definimos o anel comutativo de \mathcal{R}_0 em \mathcal{M}_α como*

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{d \in E(\mathcal{M}_\alpha) \mid dr_0 = r_0 d, \forall r_0 \in \mathcal{R}_0\} = \text{End}_{\mathcal{R}_0}(\mathcal{M}_\alpha), \text{ onde} \\ E(\mathcal{M}_\alpha) &:= \{d : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \mathcal{M}_\alpha \mid (m+n)d = (m)d + (n)d, \forall m, n \in \mathcal{M}_\alpha\}. \end{aligned}$$

Teorema 2.35. *Sejam \mathcal{D} um superanel de divisão e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{D} -supermódulo à esquerda. Sejam U o anel de \mathcal{D}_0 -transformações lineares de \mathcal{M}_β sobre si e B um subgrupo aditivo de $\text{Hom}_{\mathcal{D}_0}(\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta)$ tal que $B \subseteq U$. Suponha que*

- i \mathcal{M}_β é um U -módulo irredutível;
- ii O centralizador de \mathcal{M}_β é \mathcal{D}_0 .

Sejam $\{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto finito de vetores em \mathcal{M}_α que é linearmente independente módulo \mathcal{D}_0 -subespaço B^\perp no sentido que as classes $\bar{x}_1 = x_1 + B^\perp, \dots, \bar{x}_n = x_n + B^\perp$ são linearmente independentes no espaço quociente $\overline{\mathcal{M}}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha - B^\perp$. Sejam y_1, \dots, y_n arbitrários em \mathcal{M}_β . Então existem um $b \in B$ tal que

$$x_i b = y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Demonstração. Sejam \mathcal{D} um superanel de divisão e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{D} -supermódulo à esquerda. Então \mathcal{M}_α e \mathcal{M}_β são \mathcal{D}_0 espaços vetoriais. Logo, teremos exatamente as mesmas hipóteses do Teorema 1 [[8], p. 28].

■

Os seguintes lemas serão importantes para demonstrar o teorema da densidade para superanéis.

Lema 2.36. *Sejam $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ um superanel e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{R} -supermódulo à direita irredutível.*

1. *Se $\mathcal{M}_\alpha \neq \{0\}$ então \mathcal{M}_α é um \mathcal{R}_0 -módulo irredutível e para todo $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ não nulo, $m_\alpha \mathcal{R}_\beta = \mathcal{M}_{\alpha+\beta}$.*
2. *Se $\mathcal{M}_0 \neq \{0\}$ e $\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$ então o anel comutativo de \mathcal{R}_0 em \mathcal{M}_α pode ser identificado com \mathcal{C}_0 , a parte par do superanel comutativo \mathcal{C} de \mathcal{R} em \mathcal{M} .*

Demonstração.

1. Observando mais uma vez que \mathcal{R}_0 é um anel. Se \mathcal{N}_α é um \mathcal{R}_0 -submódulo de \mathcal{M}_α não nulo, então $\mathcal{N}_\alpha + \mathcal{N}_\alpha \mathcal{R}_1$ é um sub-supermódulo não nulo de \mathcal{M} , onde $\mathcal{N}_\alpha \mathcal{R}_1 = \{b \in \mathcal{M}_{\alpha+1} \mid b = \sum_{\text{finito}} b_{i\alpha} r_i, b_{i\alpha} \in \mathcal{N}_\alpha, r_i \in \mathcal{R}_1\}$. Portanto, $\mathcal{N}_\alpha + \mathcal{N}_\alpha \mathcal{R}_1 = \mathcal{M}$. Logo por comparação dos graus, $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha$ e \mathcal{M}_α é \mathcal{R}_0 -módulo irredutível. Agora, se $m_\alpha \mathcal{R}_0 = \{0\}$ para algum $0 \neq m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, seja $\mathcal{N}_\alpha = \{n_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \mid n_\alpha \mathcal{R}_0 = \{0\}\}$. Logo, \mathcal{N}_α é um \mathcal{R}_0 -submódulo de \mathcal{M}_α não nulo, pois $0 \neq m_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$, concluímos que $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha$ (\mathcal{M}_α é um \mathcal{R}_0 -módulo irredutível). Portanto, $\mathcal{M}_\alpha \mathcal{R}_0 = \{0\}$. Se $\mathcal{M}_\alpha \mathcal{R}_1 = \{0\}$ então $\mathcal{M}_\alpha \mathcal{R} = \{0\}$ e \mathcal{M}_α é um sub-supermódulo próprio de \mathcal{M} . Portanto, $\mathcal{M}_\alpha \mathcal{R}_1 \neq \{0\}$. Entretanto, $\mathcal{M}_\alpha \mathcal{R}$ é um sub-supermódulo próprio de \mathcal{M} . Logo, se $m_\alpha \neq 0$ então $m_\alpha \mathcal{R}_0 \neq \{0\}$ e $m_\alpha \mathcal{R}_0 = \mathcal{M}_\alpha$. Também, $m_\alpha \mathcal{R}_1 \supseteq m_\alpha \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1$ é um \mathcal{R}_0 -submódulo de $\mathcal{M}_{\alpha+1}$. Se $\mathcal{M}_\alpha \mathcal{R}_1 = \{0\}$, enquanto $\mathcal{M}_{\alpha+1} \neq \{0\}$ então \mathcal{M}_α é um sub-supermódulo próprio de \mathcal{M} , uma contradição. Consequentemente, $m_\alpha \mathcal{R}_1 = \mathcal{M}_\alpha \mathcal{R}_1 = \mathcal{M}_{\alpha+1}$.
2. Consideramos \mathcal{M}_α como \mathcal{R}_0 -módulo. Seja \mathcal{D} o anel comutativo de \mathcal{R}_0 em \mathcal{M}_α . Então para todo $d \in \mathcal{D}$, $r_0 \in \mathcal{R}_0$, e $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, temos

$$(m_\alpha r_0)d = (m_\alpha d)r_0.$$

Dado $d \in \mathcal{D}$, vamos estender essa ação para \mathcal{M} . Fixado $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ não nulo, temos $m_\alpha \mathcal{R}_1 = \mathcal{M}_{\alpha+1}$, defina uma ação de \mathcal{D} em $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ por

$$(m_\alpha r_1)d := (m_\alpha d)r_1 \text{ para todo } d \in \mathcal{D}, r_1 \in \mathcal{R}_1. \quad (2.12)$$

Note que $(m_\alpha r_1)d \in \mathcal{M}_{\alpha+1}$. Vamos mostrar que a ação está bem definida, isto é, se $m_\alpha r_1 = 0$ então $n_{\alpha+1} = (m_\alpha d)r_1 = 0$, onde $n_{\alpha+1} \in \mathcal{M}_{\alpha+1}$ com $\alpha + 1 \in \mathbb{Z}_2$. Se $n_{\alpha+1} \neq 0$ então $n_{\alpha+1} \mathcal{R}_1 = \mathcal{M}_\alpha$ (parte 1 do Lema 2.36), logo $m_\alpha = n_{\alpha+1} s_1$ para algum $s_1 \in \mathcal{R}_1$. Portanto,

$$m_\alpha = n_{\alpha+1} s_1 = ((m_\alpha d)r_1)s_1 = (m_\alpha d)(r_1 s_1) = ((m_\alpha)(r_1 s_1))d = ((m_\alpha r_1)s_1)d = (0)d = 0,$$

uma contradição (m_α é fixo e diferente de zero). Do jeito análogo podemos provar que d comuta com todos os elementos $s_1 \in \mathcal{R}_1$ em $\mathcal{M}_{\alpha+1}$. Por (2.12), d comuta com todos os elementos de \mathcal{R}_1 em \mathcal{M}_α . Para todo $n_{\alpha+1} \in \mathcal{M}_{\alpha+1}$ temos que existe $r_1 \in \mathcal{R}_1$ tal que $n_{\alpha+1} = m_\alpha r_1$. Logo, para todos $r_0 \in \mathcal{R}_0$, $r_1 \in \mathcal{R}_1$, e $d \in \mathcal{D}$

$$(n_{\alpha+1})dr_0 = (m_\alpha r_1)dr_0 = (m_\alpha d)(r_1 r_0) = (m_\alpha r_1 r_0)d = (m_\alpha r_1)(r_0 d) = (n_{\alpha+1} r_0)d,$$

logo, d comuta com \mathcal{R}_0 em $\mathcal{M}_{\alpha+1}$. Portanto, todo elemento de \mathcal{D} pode ser estendido à um único elemento de \mathcal{C}_0 . Assim, podemos identificar \mathcal{D} com \mathcal{C}_0 . ■

Note que para superanéis, \mathbb{K} -superálgebras e supermódulos é suficiente definir a operação de multiplicação apenas nos elementos homogêneos.

Definição 2.37. *Sejam \mathcal{R} e \mathcal{R}' superanéis. Dizemos que \mathcal{M} é um $(\mathcal{R}, \mathcal{R}')$ -super-bimódulo se \mathcal{M} é um \mathcal{R}' -supermódulo à direita e \mathcal{R} -supermódulo à esquerda tal que*

$$(r_\alpha m_\beta)r'_\gamma = r_\alpha(m_\beta r'_\gamma),$$

para quaisquer $r_\alpha \in \mathcal{R}$, $m_\beta \in \mathcal{M}$, $r'_\gamma \in \mathcal{R}'$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_2$.

Lema 2.38. *Sejam \mathcal{R} um superanel associativo, \mathcal{M} um \mathcal{R} -supermódulo à direita e $\mathcal{D} = \mathcal{C}^{sop}$ o superanel super-oposto do superanel comutativo de \mathcal{R} em \mathcal{M} . Então \mathcal{M} é um \mathcal{D} -supermódulo à esquerda com ação definida por*

$$c \cdot m := c_0 \cdot m_0 + c_0 \cdot m_1 + c_1 \cdot m_0 + c_1 \cdot m_1, \quad \forall m = m_0 + m_1 \in \mathcal{M} \text{ e } c = c_0 + c_1 \in \mathcal{C},$$

onde

$$c_\gamma \cdot m_\alpha := (-1)^{\gamma\alpha} m_\alpha c_\gamma. \quad (2.13)$$

Demonstração. Sejam $m_\alpha, m'_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, $m'_\beta \in \mathcal{M}_\beta$, $d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma$, $d_\beta \in \mathcal{D}_\beta$.

1. $(d_\gamma \circ_{sop} d_\beta) \cdot m_\alpha = (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)} m_\alpha (d_\gamma \circ_{sop} d_\beta) = (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)} (-1)^{\gamma\beta} m_\alpha (d_\beta d_\gamma)$
 $= ((-1)^{\alpha(\gamma+\beta)} (-1)^{\gamma\beta} m_\alpha d_\beta) d_\gamma = ((-1)^{\alpha(\gamma+\beta)} (-1)^{\gamma\beta} (-1)^{\alpha\beta} (d_\beta \cdot m_\alpha)) d_\gamma$
 $= (-1)^{\alpha(\gamma+\beta)} (-1)^{\gamma\beta} (-1)^{\alpha\beta} (-1)^{\gamma(\alpha+\beta)} d_\gamma \cdot (d_\beta \cdot m_\alpha) = d_\gamma \cdot (d_\beta \cdot m_\alpha);$
2. $d_\gamma \cdot (m_\alpha + m'_\beta) = d_\gamma \cdot m_\alpha + d_\gamma \cdot m'_\beta;$
3. $(d_\gamma + d'_\gamma) \cdot m_\alpha = (-1)^{\alpha\gamma} (m_\alpha d_\gamma + m_\alpha d'_\gamma) = d_\gamma \cdot m_\alpha + d'_\gamma \cdot m_\alpha;$
4. $1_{\mathcal{D}} \cdot m_\alpha = (-1)^{\alpha 0} m_\alpha 1_{\mathcal{D}} = m_\alpha$, onde $1_{\mathcal{D}}$ é a identidade de \mathcal{D} .

Temos que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ e

$$d_\gamma m_\alpha = (-1)^{\gamma\alpha} m_\alpha d_\gamma \in \mathcal{M}_{\gamma+\alpha}, \quad \forall m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha \text{ e } \forall d_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma. \quad (2.14)$$

Portando, \mathcal{M} é um \mathcal{D} -supermódulo. ■

Definição 2.39. *Dizemos que um superanel \mathcal{R} é primitivo à direita se \mathcal{R} tem um supermódulo à direita fiel e irredutível.*

Se $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ é um \mathcal{R} -supermódulo à direita irredutível, então pelo Lema 2.38 \mathcal{M} é um \mathcal{C}^{sop} -supermódulo à esquerda. Portanto, \mathcal{M} é um $(\mathcal{C}^{sop}, \mathcal{R})$ -super-bimódulo.

Definição 2.40. Um superanel \mathcal{R} é dito ser denso no supermódulo \mathcal{M} se para todo inteiro positivo n e toda escolha de $v_{1\alpha}, \dots, v_{n\alpha} \in \mathcal{M}_\alpha$ linearmente independentes sobre \mathcal{C}_0 e para toda escolha de $w_{1\beta}, \dots, w_{n\beta} \in \mathcal{M}_\beta$ existe um elemento $r_{\alpha-\beta} \in \mathcal{R}_{\alpha-\beta}$ tal que

$$v_{i\alpha}r_{\alpha-\beta} = w_{i\beta}, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Observemos que no caso em que \mathcal{R} é um superanel com graduação trivial, então a definição acima é a definição clássica de densidade. Nesse caso, $\mathcal{R}_1 = \{0\}$ e $\mathcal{C}^{sop} = \text{End}^{op}(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})$.

Seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ um superanel primitivo. Seja $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{R} -supermódulo à direita fiel e irredutível. No caso em que $\{0\} \neq \mathcal{M}_\alpha$ então pelo 2.36, $\{0\} \neq \mathcal{M}_\alpha$ é um \mathcal{R}_0 -módulo à direita irredutível e, portanto, um módulo semisimples. Mais uma vez, pelo 2.36 temos que para todo $0 \neq m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, obtemos $m_\alpha \mathcal{R}_0 = \mathcal{M}_\alpha$, ou seja, \mathcal{M}_α é um \mathcal{R}_0 -módulo finitamente gerado. Pelo **Teorema da Densidade de Jacobson** para anéis, \mathcal{R}_0 age densamente em ${}_{\mathcal{T}}\mathcal{M}_\alpha$, onde $\mathcal{T} = \text{End}_{\mathcal{R}_0}^{op}(\mathcal{M}_\alpha)$.

Lema 2.41. Sejam um $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ um superanel primitivo à direita e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{R} -supermódulo à direita fiel e irredutível. Se $\mathcal{M}_\alpha \neq \{0\}$ então a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{R}_0 &\rightarrow E = \text{End}_{\mathcal{T}}^{op}(\mathcal{M}_\alpha) \\ r &\mapsto \phi_r : \mathcal{M}_\alpha \rightarrow \mathcal{M}_\alpha \\ m &\mapsto mr \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Observemos que ϕ está bem definida e ϕ_r é uma bijeção para todo $0 \neq r \in \mathcal{R}_0$. Seja $0 \neq m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ um gerador de \mathcal{M}_α enquanto E -módulo, isto é, $\forall n_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, $\exists \psi \in E$ tal que $n_\alpha = (m_\alpha)\psi$. Seja $f \in E$ qualquer. Pelo Teorema da Densidade para anéis não graduados, existe um $r \in \mathcal{R}_0$ tal que $(m_\alpha)f = m_\alpha r$. Dado $n_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, temos que existe um $a \in E$ tal que $n_\alpha = a \cdot m_\alpha$, então

$$n_\alpha r = (a \cdot m_\alpha)r = a \cdot (m_\alpha r)f = a \cdot (m_\alpha)f = (a \cdot m_\alpha)f = (n_\alpha)f,$$

portanto, $f = \phi_r$, ou seja, ϕ é sobrejetiva. O seu núcleo é

$$\text{Ker}(\phi) = \{r \in \mathcal{R}_0 \mid \phi_r = 0\} = \{r \in \mathcal{R}_0 \mid (m_\alpha)r = 0, \forall m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\} = \text{Ann}_{\mathcal{R}_0}(\mathcal{M}_\alpha) = (0),$$

pois \mathcal{M}_α é um \mathcal{R}_0 -módulo fiel, logo ϕ é injetiva. A prova que φ é um homomorfismo de anéis não é difícil. Portanto, $\mathcal{R}_0 \cong E$. ■

Logo, quando \mathcal{M} é um \mathcal{R} -supermódulo à direita fiel e irredutível, \mathcal{R}_0 é um anel de transformações lineares de \mathcal{M}_α em si mesmo.

Teorema 2.42 (Teorema da Densidade). *Sejam $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ um superanel primitivo à direita, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{R} -supermódulo à direita irredutível e fiel, e $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1$ o superanel comutativo de \mathcal{R} em \mathcal{M} . Então \mathcal{R} é um superanel denso de transformações lineares em \mathcal{M} sobre $\mathcal{D} = \mathcal{C}^{\text{sup}}$.*

Demonstração. Observamos que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{C}_0^{\text{sup}}$ é um anel de divisão. Logo, \mathcal{M}_α e \mathcal{M}_β são espaços vetoriais à esquerda sobre $\mathcal{D}_0 = \mathcal{C}_0^{\text{sup}}$. Pelo Lema 2.41, \mathcal{R}_0 é o anel de transformações lineares de \mathcal{M}_β em si mesmo, e $\mathcal{R}_{\alpha-\beta}$ um grupo aditivo de transformações lineares de \mathcal{M}_α em \mathcal{M}_β tal que $\mathcal{R}_{\alpha-\beta}\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-\beta}$. Pelo Lema (2.36), \mathcal{M}_β é um \mathcal{R}_0 -módulo irredutível e o anel comutativo de \mathcal{R}_0 em \mathcal{M} é \mathcal{D}_0 . Estas são exatamente as hipóteses do Teorema 2.35 que nos permitem concluir que $\mathcal{R}_{\alpha-\beta}$ age densamente em \mathcal{M}_α . ■

Definição 2.43. *Um superanel associativo é artiniano à direita (à esquerda) se ele satisfaz a condição da cadeia descendente (DCC) para superideais à direita (à esquerda).*

Exemplo 2.44 (Inteiros de Gauss). *Definimos $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, onde $i^2 = -1$. Considere $\mathbb{Z}[i] = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$, onde $\mathcal{A}_0 = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{A}_1 = \mathbb{Z}[i]$. Então $\mathbb{Z}[i]$ é um superanel associativo, entretanto, não é artiniano à direita e à esquerda, pois $\{2^n \mathbb{Z}[i], n \geq 1\}$ é uma família de superideais de $\mathbb{Z}[i]$ que não satisfaz DCC, pois*

$$\{0\} \subsetneq \cdots \subsetneq 2^n \mathbb{Z}[i] \subsetneq \cdots \subsetneq 4\mathbb{Z}[i] \subsetneq 2\mathbb{Z}[i] \subsetneq \mathbb{Z}[i].$$

Definição 2.45. *Seja \mathcal{R} um superanel. Dizemos que \mathcal{R} é simples se $\mathcal{R}^2 \neq (0)$ e os únicos ideais graduados são os triviais, ou seja, \mathcal{R} e $\{0\}$.*

Exemplo 2.46. *Todo superanel de divisão \mathcal{D} é um superanel simples. É suficiente observar que se $0 \neq d_\alpha \in \mathcal{D}_\alpha$ então existe $d_{-\alpha} \in \mathcal{D}_{-\alpha}$ tal que $1 = d_\alpha d_{-\alpha} = d_{-\alpha} d_\alpha$.*

Exemplo 2.47. *Seja \mathbb{K} um corpo. Então com graduação trivial $M_n(\mathbb{K})$ é um superanel simples que não é um superanel de divisão.*

Teorema 2.48. *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ um superanel associativo simples e artiniano à direita. Então, como superanel, $\mathcal{A} \cong \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V})$, onde \mathcal{V} um superespaço de dimensão finita sobre uma superanel associativo \mathcal{D} .*

Demonstração. Seja $I = I_0 + I_1$ um ideal a direita minimal do superanel \mathcal{A} , existe pois \mathcal{A} é artiniano à direita. Pela minimalidade, I é um supermódulo irreduzível de \mathcal{A} , pois $I\mathcal{A} \neq (0)$ e $I\mathcal{A} \neq \mathcal{A}$. Desde que \mathcal{A} é simples, então I é um supermódulo fiel, pois se $(0) \neq \{y \in \mathcal{A} \mid Iy = (0)\} = B$ então B seria um superideal de \mathcal{A} não nulo propriamente contido em \mathcal{A} . Portanto pelo Teorema 2.42, \mathcal{A} é um superanel primitivo com supermódulo irreduzível e fiel $\mathcal{M} = I$. Logo, \mathcal{M} é um $\mathcal{D} = \mathcal{C}^{sop}$ -supermódulo à esquerda, onde \mathcal{C} é o superanel comutativo de \mathcal{A} em \mathcal{M} , observemos que \mathcal{D} é um superanel de divisão. Portanto, \mathcal{A} é isomorfo a um sub-superanel denso de $\text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M})$. Se \mathcal{M} tem dimensão infinita sobre \mathcal{D}_0 então algum \mathcal{M}_α tem dimensão infinita sobre \mathcal{D}_0 , para algum $\alpha \in \mathbb{Z}_2$. Sejam $v_{1_\alpha}, \dots, v_{n_\alpha}, \dots$ uma sequência infinita de elementos linearmente independente de \mathcal{M}_α sobre \mathcal{D}_0 . Seja $\mathcal{V}_j = \bigoplus_{i=1}^j \mathcal{D} v_{i_\alpha}$. Observamos que \mathcal{V}_j é um \mathcal{D} -supermódulo à esquerda e um grupo graduado de \mathcal{A} , com $j \geq 1$. Ainda, temos

$$\mathcal{V}_1 \subsetneq \mathcal{V}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{V}_j \subsetneq \mathcal{V}_n \subsetneq \dots, \forall n > j \geq 1. \quad (2.15)$$

Consideremos $\text{Ann}\mathcal{V}_j = \text{Ann}_0\mathcal{V}_j + \text{Ann}_1\mathcal{V}_j$, onde $\text{Ann}_\beta\mathcal{V}_j = \{b_\beta \in \mathcal{A}_\beta \mid \mathcal{V}_j b_\beta = \{0\}\}$, $\beta \in \mathbb{Z}_2$. Sendo \mathcal{V}_j um grupo graduado de \mathcal{A} , então $\text{Ann}\mathcal{V}_j$ é um superideal de \mathcal{A} para todo $j \geq 1$. Não é difícil provar que $\text{Ann}\mathcal{V}_{j+1} \subseteq \text{Ann}\mathcal{V}_j$. Provemos que $\text{Ann}\mathcal{V}_{j+1} \subsetneq \text{Ann}\mathcal{V}_j$ para todo $j \geq 1$. Como $v_{1_\alpha}, \dots, v_{(j+1)_\alpha}$ são linearmente independentes sobre \mathcal{D}_0 , pelo

teorema da densidade existe $r \in \mathcal{A}$ tal que $v_{(j+1)\alpha} r \neq 0$ e $v_{i\alpha} r = 0$, $\forall 1 \leq i \leq j$. Logo, $r \in \text{Ann}\mathcal{V}_j$, mas $r \notin \text{Ann}\mathcal{V}_{j+1}$. Daí concluímos que $\text{Ann}\mathcal{V}_{j+1} \subsetneq \text{Ann}\mathcal{V}_j$.

Logo, temos que

$$\text{Ann}\mathcal{V}_1 \supsetneq \text{Ann}\mathcal{V}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \text{Ann}\mathcal{V}_j \supsetneq \text{Ann}\mathcal{V}_n \supsetneq \cdots, \forall n > j \geq 1. \quad (2.16)$$

Portanto, (2.16) forma uma cadeia descendente adequadamente de superideais à direita de \mathcal{A} . Como \mathcal{A} é artiniiano, a cadeia se estabiliza, uma contradição. Então, não existe uma sequência infinita de elementos de \mathcal{M}_α linearmente independentes sobre \mathcal{D}_0 . Portanto, $\dim_{\mathcal{D}_0} \mathcal{M}$ é finita, sendo n , e pela densidade, $\mathcal{A} \cong \text{End}_{\mathcal{D}} \mathcal{M} = \text{End}_0(\mathcal{M}) + \text{End}_1(\mathcal{M})$. \blacksquare

Proposição 2.49. *Seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ um superanel primitivo à direita tendo um superideal à direita minimal. Então quaisquer dois \mathcal{R} -supermódulos irredutíveis e fieis à direita são isomorfos, e o isomorfismo é homogêneo.*

Demonstração. Sejam $I = I_0 + I_1$ um superideal à direita minimal de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ e $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_1$ um \mathcal{R} -supermódulo à direita irredutível e fiel. A fidelidade de \mathcal{M} garante que $m_\alpha I \neq \{0\}$ para algum $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$, pois $\text{Ann}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}) = (0)$. Como I é um superideal à direita de \mathcal{R} , então $m_\alpha I$ é um sub-supermódulo de \mathcal{M} não nulo, pela irredutibilidade de \mathcal{M} , devemos ter $m_\alpha I = \mathcal{M}$. Seja

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : I &\rightarrow m_\alpha I \\ a &\mapsto m_\alpha a, \end{aligned}$$

temos que φ_α é um homomorfismo de \mathcal{R} -supermódulos homogêneo de grau α . A demonstração que φ_α está bem definida, não é difícil. Sejam $a, b \in I$, $a_\beta \in I_\beta$ e $r_\beta \in \mathcal{R}_\beta$, então

- $(a + b)\varphi_\alpha = m_\alpha(a + b) = m_\alpha a + m_\alpha b = (a)\varphi_\alpha + (b)\varphi_\alpha$.
- $(ar_\beta)\varphi_\alpha = (m_\alpha a)r_\beta = (a)\varphi_\alpha r_\beta$.
- $(a_\beta)\varphi_\alpha = m_\alpha a_\beta \in \mathcal{M}_{\alpha+\beta}$.

Como $Im\varphi_\alpha \subseteq \mathcal{M}$ é um sub-supermódulo de \mathcal{M} não nulo, devemos ter $Im\varphi_\alpha = \mathcal{M}$, portanto, $Im\varphi_\alpha = m_\alpha I$. O anulador de m_α em I é um superideal à direita de \mathcal{R} propriamente contido em I , sendo I minimal, devemos ter $\{0\} = Ker\varphi_\alpha$, pois $Ann_I(m_\alpha) := \{a \in I | m_\alpha a = 0\} = Ker\varphi_\alpha$. Portanto, φ_α é um isomorfismo de \mathcal{R} -supermódulos de I em $m_\alpha I = \mathcal{M}$. Assim, cada \mathcal{R} -supermódulo à direita irredutível e fiel é isomorfo a I . Pegamos um \mathcal{R} -supermódulo à direita irredutível e fiel e provamos que ele é isomorfo à I , onde I é um superideal à direita minimal, logo podemos concluir que todo \mathcal{R} -supermódulo à direita irredutível e fiel é isomorfo à I . Portanto, todos os \mathcal{R} -supermódulos à direita irredutíveis e fieis são isomorfos entre si, basta utilizar composição de isomorfismo. ■

Observação 1. Quando dizemos que \mathcal{A} é uma superálgebra, estaremos considerando \mathcal{A} como uma \mathbb{K} -álgebra associativa \mathbb{Z}_2 -graduada, onde \mathbb{K} é um corpo de característica diferente de dois. Então a partir daqui, não repetiremos que uma superálgebra é uma \mathbb{K} -álgebra associativa \mathbb{Z}_2 -graduada, utilizaremos simplesmente a palavra superálgebra.

Definição 2.50. Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1$ um superespaço sobre uma superálgebra associativa de divisão $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1$, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1$ um superespaço sobre a superálgebra associativa de divisão $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ e $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um isomorfismo de superálgebras de \mathcal{C} em \mathcal{D} . Uma função $s_\gamma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, com $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, é dita ser um homomorfismo de superespaços σ -semilinear homogêneo de grau γ desde que

$$(u_\beta)s_\gamma \in \mathcal{W}_{\gamma+\beta} \quad e \quad (c_\alpha u_\beta)s_\gamma = (c_\alpha)\sigma((u_\beta)s_\gamma), \quad \forall c_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha, u_\beta \in \mathcal{V}_\beta.$$

Dada uma superálgebra associativa de divisão \mathcal{D} e um superespaço a direita de dimensão finita sobre \mathcal{D} , então pela proposição 2.23 concluímos que $End_{\mathcal{D}}(\mathcal{V}) \cong M_n(\mathcal{D})$, onde a graduação de $M_n(\mathcal{D})$ é dada na mesma proposição. Portanto, quando \mathcal{V} é de dimensão finita sobre \mathcal{D} , teremos que $End_{\mathcal{D}}(\mathcal{V})$ é uma superálgebra.

Teorema 2.51 (Teorema do Isomorfismo). Sejam $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ superálgebras de divisão associativas, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1$ um superespaço à esquerda de dimensão finita sobre \mathcal{C} e $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1$ um superespaço à esquerda de dimensão finita sobre \mathcal{D} . Então

$\phi : \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ é um isomorfismo de superálgebra se, e somente se, existe um isomorfismo de superálgebras $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e um isomorfismo σ -semi-linear de superespaços de \mathcal{V} em \mathcal{W} homogêneo de grau γ

$$s_\gamma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \text{ tal que } (a_\alpha)\phi = s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma, \forall a_\alpha \in (\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}))_\alpha. \quad (2.17)$$

Demonstração. Se s_γ é um isomorfismo σ -semi-linear de \mathcal{V} em \mathcal{W} homogêneo de grau γ então

$$\begin{aligned} \phi : \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}) &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W}) \\ a_\alpha &\mapsto s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma. \end{aligned}$$

é um isomorfismo graduado de $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ em $\text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{V})$. Antes de mais nada, observe que $s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$, com $a_\alpha \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$, podemos ver este fato através do seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{a_\alpha} & \mathcal{V} \\ s_\gamma^{-1} \uparrow & \curvearrowright & \downarrow s_\gamma \\ \mathcal{W} & \xrightarrow{s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma} & \mathcal{W} \end{array}$$

Não é difícil provar que ϕ está bem definida, pois dados $a_\alpha = b_\alpha \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ então,

$$(a_\alpha)\phi = s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma = s_\gamma^{-1} b_\alpha s_\gamma = (b_\alpha)\phi,$$

observemos que s_γ é uma função bem definida, portanto ϕ está bem definida:

1. $((a_0 + a_1) + (b_0 + b_1))\phi = s_\gamma^{-1}((a_0 + a_1) + (b_0 + b_1))s_\gamma = s_\gamma^{-1}(a_0 + a_1)s_\gamma + s_\gamma^{-1}(b_0 + b_1)s_\gamma = ((a_0 + a_1)\phi + (b_0 + b_1)\phi, \forall a_\alpha, b_\beta \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V});$
2. $(a_\alpha b_\beta)\phi = s_\gamma^{-1}(a_\alpha b_\beta)s_\gamma = s_\gamma^{-1} a_\alpha (s_\gamma s_\gamma^{-1}) b_\beta s_\gamma = (s_\gamma^{-1} a_\alpha s_\gamma)(s_\gamma^{-1} b_\beta s_\gamma) \stackrel{*}{=} (a_\alpha)\phi (b_\beta)\phi, \forall a_\alpha, b_\beta \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}),$ * segue da definição de ϕ .

3. $(v_\beta)s_\gamma \in \mathcal{W}_{\beta+\gamma}$, por definição de s_γ . Para todo $w_\beta \in \mathcal{W}_\beta$, temos

$$(w_\beta)(s_\gamma^{-1}a_\alpha s_\gamma) = \underbrace{((w_\beta)s_\gamma^{-1})}_{\in \mathcal{V}_{\beta+\gamma}} a_\alpha s_\gamma = \underbrace{(((w_\beta)s_\gamma^{-1})a_\alpha)}_{\in \mathcal{V}_{\beta+\gamma+\alpha}} s_\gamma \in \mathcal{W}_{\beta+\gamma+\alpha+\gamma} = \mathcal{W}_{\beta+\alpha},$$

pois $\gamma + \gamma = 0$ em \mathbb{Z}_2 . Portanto, $s_\gamma^{-1}a_\alpha s_\gamma \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})_\alpha$, $\forall a_\alpha \in \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})_\alpha$.

Logo ϕ é um homomorfismo de superálgebras. A inversa de ϕ é dada por

$$\begin{aligned} \psi : \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W}) &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V}) \\ a_\alpha &\mapsto s_\gamma a_\alpha s_\gamma^{-1}. \end{aligned}$$

A prova de que ψ é um homomorfismo de superálgebras, segue de forma análoga a prova de que ϕ é um homomorfismo de superálgebra. Observemos que $\psi\phi = id_{\text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})}$, $\phi\psi = id_{\text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})}$. Portanto, ϕ é um isomorfismo.

Por outro lado, suponha que $\phi : \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ é um isomorfismo de superálgebras.

Afirmção 2.52. *A função ϕ permite visualizar \mathcal{W} como um $\text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})$ -supermódulo à direita irredutível e fiel, com ação dada por $w \cdot a = (w)((a)\phi)$, $\forall a \in \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})$, $\forall w \in \mathcal{W}$.*

Observemos que a ação está bem definida. De fato, seja $f = g \in \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})$, logo $(f)\phi = (g)\phi \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ e $w \cdot f = (w)((f)\phi) = (w)((g)\phi) = w \cdot g$, $\forall w \in \mathcal{W}$. Verificar que \mathcal{W} é um $\text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})$ -módulo com a ação dada acima, não é difícil. Seja $f_\alpha \in \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})_\alpha$, como ϕ é de grau zero, temos que $(f_\alpha)\phi \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})_\alpha$. Logo, $w_\beta \cdot f_\alpha = (w_\beta)((f_\alpha)\phi) \in \mathcal{W}_{\alpha+\beta}$, $\forall w_\beta \in \mathcal{W}_\beta$, portanto \mathcal{W} é um $\text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})$ -supermódulo. Para provar que \mathcal{W} é um $\text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})$ -supermódulo à direita fiel é suficiente observar que $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ e

$$\text{Ann}_{\text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})}(\mathcal{W}) := \{f \in \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V}) \mid w \cdot f = 0, \forall w \in \mathcal{W}\} \subseteq \text{Ker}(\phi).$$

Como \mathcal{W} é um $\text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})$ -supermódulo fiel, temos $\mathcal{W} \cdot \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V}) \neq \{0\}$. Seja $0 \neq w \in \mathcal{W}$ então $w \cdot \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{W}$. Seja $w' \in \mathcal{W}$. Como a $\dim_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ é finita, então existem w_1, \dots, w_{k-1} tais que $\{w, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ é uma \mathcal{D} -base de \mathcal{W} . Consideremos $g \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ tal que $(w)g = w'$ e $(w_i)g = 0$, $\forall 1 < i \leq k-1$. Sendo ϕ isomorfismo, então existe $f =$

$(g)\phi^{-1} \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ tal que $w \cdot f = w'$ e, portanto, $w' \in w \cdot \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$. Concluimos que \mathcal{W} é um $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ -supermódulo à direita irredutível e fiel, portanto, a afirmação está provada.

Na afirmação 2.52 provamos que $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ é um superanel primitivo. Observamos que $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ possui um superideal à direita minimal, pois $M_n(\mathcal{C})$ é isomorfo à $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ e $M_n(\mathcal{C})$ possui um superideal graduado à direita minimal por exemplo,

$$I := \left\{ A \in M_n(\mathcal{C}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observemos que \mathcal{V} é um $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ -supermódulo à direita irredutível e fiel. Como $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ possui superideal à direita minimal, pela Proposição 2.49, \mathcal{V} e \mathcal{W} são isomorfos como $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ -supermódulos. Se $s_\gamma: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ é um isomorfismo de $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ -supermódulos homogêneo de algum grau $\gamma \in \mathbb{Z}_2$, então

$$(v_\alpha r_\beta) s_\gamma = ((v_\alpha) s_\gamma) \cdot r_\beta = ((v_\alpha) s_\gamma) ((r_\beta) \phi) \quad \forall v_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha, r_\beta \in (\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}))_\beta.$$

Portanto,

$$(w_\alpha) ((r_\beta) \phi) = (w_\alpha) (s_\gamma^{-1} r_\beta s_\gamma), \quad \forall w_\alpha \in \mathcal{W}_\alpha, r_\beta \in (\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V}))_\beta.$$

Para continuar a prova do teorema, precisamos definir em \mathcal{V} a multiplicação escalar por elementos de \mathcal{C} da seguinte forma, $(v) \mathcal{L}_c = cv, \forall v \in \mathcal{V}, c \in \mathcal{C}$. Note que \mathcal{L}_c está bem definida, a boa definição segue da definição de \mathcal{C} -supermódulo. Notemos que \mathcal{L}_c comuta com todo os elementos de $\text{End}_{\mathcal{C}} \mathcal{V}$, a prova desse fato é simples, pois é suficiente observar que se $f \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ então $c_\beta f = f c_\beta, \forall c_\beta \in \mathcal{C}_\beta$. Note que dados \mathcal{L}_c e \mathcal{L}_r , com $c, r \in \mathcal{C}$ então

$$(v) \mathcal{L}_{cr} = (cr) v = c(rv) = (rv) \mathcal{L}_c = (v) (\mathcal{L}_r \mathcal{L}_c), \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

portanto, $\mathcal{L}_{cr} = \mathcal{L}_r \mathcal{L}_c$ (iguais como funções).

Afirmação 2.53. *Sejam $c_\beta \in \mathcal{C}_\beta$ e $r_\beta \in \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})_\beta$ então $s_\gamma^{-1} \mathcal{L}_{c_\beta} s_\gamma$ comuta com todos $s_\gamma^{-1} r_\beta s_\gamma = (r_\beta) \phi \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$.*

De fato, seja $s_\gamma^{-1} r_\beta s_\gamma = (r_\beta) \phi \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$, com $r_\beta \in \text{End}_{\mathcal{E}}(\mathcal{V})_\beta$. Temos que $r_\beta \mathcal{L}_{c_\beta} = \mathcal{L}_{c_\beta} r_\beta$, $c_\beta \in \mathcal{C}_\beta$, logo

$$(s_\gamma^{-1} \mathcal{L}_{c_\beta} s_\gamma)(s_\gamma^{-1} r_\beta s_\gamma) = (s_\gamma^{-1} \mathcal{L}_{c_\beta})(s_\gamma s_\gamma^{-1})(r_\beta s_\gamma) = s_\gamma^{-1} r_\beta \mathcal{L}_{c_\beta} s_\gamma = (s_\gamma^{-1} r_\beta s_\gamma)(s_\gamma^{-1} \mathcal{L}_{c_\beta} s_\gamma).$$

Portanto, a afirmação está provada.

Seja $c \in \mathcal{C}$. Defina $(w)f = (w)(s_\gamma^{-1} \mathcal{L}_c s_\gamma)$, $\forall w \in \mathcal{W}$. Observemos que f é uma função de \mathcal{W} em \mathcal{W} , pois é simplesmente a composição de funções, o diagrama abaixo nos dá uma ideia e a direção da composição,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathcal{L}_c} & \mathcal{V} \\ s_\gamma^{-1} \uparrow & \curvearrowright & \downarrow s_\gamma \\ \mathcal{W} & \xrightarrow{f} & \mathcal{W} \end{array} .$$

Consideremos $\dim_{\mathcal{D}} \mathcal{W} = n$. Sejam $\psi \in \text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ e $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathcal{W} , onde e_i são elementos homogêneos. Como B é uma base de \mathcal{W} , podemos determinar de modo único $a_{ij} \in \mathcal{D}$, com $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, tais que

$$(e_i)\psi = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ji}e_j + \dots + a_{mi}e_m. \quad (2.18)$$

Seja $w \in \mathcal{W}$. Temos que $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ em que $b_i \in \mathcal{D}$ para $1 \leq i \leq n$. Pela linearidade de ψ e por (2.18), segue que

$$\begin{aligned} (w)f &= b_1(e_1)\psi + \dots + b_n(e_n)\psi \\ &= b_1(a_{11}e_1 + \dots + a_{m1}e_m) + \dots + b_n(a_{1n}e_1 + \dots + a_{mn}e_m) \\ &= (b_1 a_{11} + \dots + b_n a_{1n})e_1 + \dots + (b_1 a_{m1} + \dots + b_n a_{mn})e_n. \end{aligned}$$

Logo

$$[(w)\psi]_B = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} + \cdots + a_{mn} \end{pmatrix} = [b_1 \cdots b_n] \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [w]_B \cdot [\psi]_B. \quad (2.19)$$

Portanto, todo elemento de $End_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ tem uma representação matricial.

Pela afirmação 2.53 f comuta com todos elementos da forma $s_\gamma^{-1} c_\beta s_\gamma$. Como $f \in End_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ tem uma representação matricial e $f\psi = \psi f \ \forall \psi \in End_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$, concluímos que f é a multiplicação por um escalar.

Logo, f é uma multiplicação por escalar $\mathcal{L}_{(d_c)}$ em \mathcal{W} para algum $d_c \in \mathcal{D}$, ou seja, $f = \mathcal{L}_{d_c}$. Definamos a função σ em \mathcal{D} por $(c)\sigma = d_c$.

Para todo $a, c \in \mathcal{C}$, temos

1.

$$\begin{aligned} (w)\mathcal{L}_{((ac))\sigma} &= (w)s_\gamma^{-1} \underbrace{\mathcal{L}_{(ac)}}_{=\mathcal{L}_c\mathcal{L}_a} s_\gamma \\ &= (w)s_\gamma^{-1}(\mathcal{L}_c\mathcal{L}_a)s_\gamma \\ &= (w)s_\gamma^{-1}(\mathcal{L}_c(Id_V)\mathcal{L}_a)s_\gamma \\ &= (w)s_\gamma^{-1}\mathcal{L}_c \underbrace{(s_\gamma s_\gamma^{-1})}_{Id_V} \mathcal{L}_a s_\gamma \\ &= (w)(s_\gamma^{-1}\mathcal{L}_c s_\gamma)(s_\gamma^{-1}\mathcal{L}_a s_\gamma) \\ &= (w)\mathcal{L}_{(c)\sigma}\mathcal{L}_{(a)\sigma} \\ &= (w)\mathcal{L}_{(a)\sigma(c)\sigma}, \forall w \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(w)\mathcal{L}_{((a+c))\sigma} &= (w)s_\gamma^{-1} \underbrace{\mathcal{L}_{(a+c)}}_{=\mathcal{L}_c+\mathcal{L}_a} s_\gamma \\
&= (w)s_\gamma^{-1}(\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_c)s_\gamma \\
&= (w)s_\gamma^{-1}\mathcal{L}_a s_\gamma + (w)s_\gamma^{-1}\mathcal{L}_c s_\gamma \\
&= (w)\mathcal{L}_{(a)\sigma} + (w)\mathcal{L}_{(c)\sigma} \\
&= (w)(\mathcal{L}_{(a)\sigma} + \mathcal{L}_{(c)\sigma}) \\
&= (w)\mathcal{L}_{(a)\sigma+(c)\sigma}, \forall w \in \mathcal{W}.
\end{aligned}$$

Notemos que σ tem grau zero, pois $(w_\beta)s_\gamma^{-1}\mathcal{L}_{a_\alpha}s_\gamma \in \mathcal{W}_{\alpha+\beta}, \forall w_\beta \in \mathcal{W}_\beta, \forall a_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha$ então devemos ter por comparação de grau, $(a_\alpha)\sigma \in \mathcal{D}_\alpha$. Assim, $(ac)\sigma = (a)\sigma(c)\sigma$, $(a+c)\sigma = (a)\sigma + (c)\sigma$ e, portanto, $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dada por $c \mapsto (c)\sigma$ define um homomorfismo de superanéis de \mathcal{C} em \mathcal{D} . Similarmente, considere a multiplicação à esquerda em \mathcal{W} \mathcal{L}_d , então $(v)\mathcal{L}_{(d)\tau} := (v)s_\gamma\mathcal{L}_d s_\gamma^{-1}, \forall v \in \mathcal{V}$, onde $(w)\mathcal{L}_d = dw, \forall w \in \mathcal{W}$, com $d \in \mathcal{D}$, produz um homomorfismo de superanéis τ de \mathcal{D} em \mathcal{C} . Além disso, $(d)\tau\sigma = d$, σ é sobrejetiva. Assim, σ é um isomorfismo de \mathcal{C} em \mathcal{D} e

$$(c_\beta u_\alpha)s_\gamma = (c_\beta)\sigma(u_\alpha s_\gamma) \quad \forall u_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha, c_\beta \in \mathcal{C}_\beta,$$

isto é, s_γ é um isomorfismo σ -semi-linear de \mathcal{V} em \mathcal{W} . ■

Definição 2.54. *Um superanel \mathcal{R} é chamado primo se \mathcal{R} é um anel \mathbb{Z}_2 -graduado associativo primo.*

Definição 2.55. *Um superanel \mathcal{R} é dito semiprimo se \mathcal{R} é um anel \mathbb{Z}_2 -graduado associativo semiprimo.*

É claro que todas as propriedades válidas para anéis graduados primos, também são válidas para superanéis primos.

Para o próximo lema, precisaremos da seguinte definição.

Definição 2.56. *Sejam \mathcal{R} um superanel e $0 \neq e \in \mathcal{R}$. Dizemos que $e \in \mathcal{R}$ é um elemento idempotente se $e^2 = e$.*

Exemplo 2.57. *Seja \mathcal{R} um anel com identidade 1. Logo, 1 é um elemento idempotente.*

Exemplo 2.58. *Seja $\mathbb{F}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}\eta_0 + \mathbb{F}\eta_1$ a \mathbb{F} -álgebra de grupo, onde \mathbb{F} um corpo de característica diferente de dois. Então $\frac{\eta_0 + \eta_1}{2}$ é um elemento idempotente.*

A demonstração do seguinte lema não é difícil.

Lema 2.59. *Sejam \mathcal{R} um superanel e $e \in \mathcal{R}_0$ um elemento idempotente. Então $e\mathcal{R}e = e\mathcal{R}_0e + e\mathcal{R}_2e$ é um superanel e e é a unidade de $e\mathcal{R}e$.*

Definição 2.60. *Sejam \mathcal{R} e I um superideal à direita de \mathcal{R} não nulo. Um elemento $e \in I$ é dito idempotente primitivo se $0 \neq e \in I_0$, $e^2 = e$ e $I = e\mathcal{R}$.*

Assim, como no caso de anéis, o seguinte lema é básico para a estrutura de superanel primitivo com um superideal unilateral.

Lema 2.61. *Seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ um superanel associativo semiprimo. Se $I = I_0 + I_1$ é um superideal à direita minimal de \mathcal{R} então $I = e_0\mathcal{R}$, onde $e_0 \in I_0$ é um elemento idempotente primitivo. Neste caso, $e_0\mathcal{R}e_0 = e_0\mathcal{R}_0e_0 + e_0\mathcal{R}_1e_0$ é um superanel associativo de divisão e $\mathcal{R}e_0$ é um superideal à esquerda minimal.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ um superanel semiprimo e $I = I_0 + I_1$ um superideal à direita minimal de \mathcal{R} . Então I é irredutível como \mathcal{R} -supermódulo à direita, pois em particular, I é um \mathcal{R} -supermódulo minimal, ou seja, I não possui sub-supermódulo próprio diferente do nulo. Como I é um superideal de \mathcal{R} , então $\mathcal{R}I$ é um superideal bilateral de \mathcal{R} .

Afirmção 2.62. *Se $\mathcal{R}I = \{0\}$ então I é um ideal nilpotente e, portanto, $I = (0)$.*

De fato, é suficiente observar que $I \subseteq \mathcal{R}$. Logo, $I^2 = II \subseteq \mathcal{R}I = \{0\}$, sendo \mathcal{R} semiprimo devemos ter $I = (0)$. Portanto, a afirmação está provada.

Segue que $\mathcal{R}I$ é um superideal não nulo de \mathcal{R} . Logo, $\{0\} \neq (\mathcal{R}I)^2 = \mathcal{R} \underbrace{I\mathcal{R}}_{\subseteq I} I \subseteq \mathcal{R}I^2$ e, portanto, $I^2 \neq \{0\}$. Se $II_0 = \{0\}$ então $I_0I_0 \subseteq II_0 = \{0\}$ e $I_1I_0 = \{0\}$. Temos também que $I_0\mathcal{R} = I_0\mathcal{R}_0 + I_0\mathcal{R}_1 \subseteq I = I_0 + I_1$, como I é um superideal à direita minimal e $I_0\mathcal{R}$ é um superideal à direita, devemos ter, $I_0\mathcal{R} = I$ ou $I_0\mathcal{R} = \{0\}$. Como \mathcal{R} é semiprimo, logo $\text{Ann}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}\mathcal{R}) = 0$, portanto, se $I_0\mathcal{R} = (0)$ implica $I_0 = (0)$ e $I_0\mathcal{R}_1 = (0)$. Portanto, $I^2 = I_0I_0 + I_0I_1 + I_1I_0 + I_1I_1 = \{0\}$, uma contradição. Assim, $II_0 \neq \{0\}$, além disso $a_\alpha I \neq \{0\}$ para algum $a_\alpha \in I_\alpha$, pois caso contrário, teríamos $I^2 = \{0\}$, provamos acima. Então, como $I\mathcal{R} \subseteq I$ segue que $a_\alpha I\mathcal{R} \subseteq a_\alpha I$, portanto, $a_\alpha I$ é um superideal à direita não nulo contido em I (observemos que $a_\alpha \in I$ e I é um superideal à direita), portanto, $a_\alpha I = I$. Observamos que $I = I_0 + I_1$. Como $I = a_\alpha I$ então $I_\alpha + I_{\alpha+1} = a_\alpha I_0 + a_\alpha I_1$. Por comparação de grau, devemos ter $a_\alpha I_0 = I_\alpha$ e $a_\alpha e_0 = a_\alpha$ para algum $e_0 \in I_0$. Portanto,

$$a_\alpha e_0 = a_\alpha \Rightarrow (a_\alpha e_0)e_0 = a_\alpha e_0 \Rightarrow a_\alpha e_0^2 = a_\alpha e_0 \Rightarrow a_\alpha(e_0^2 - e_0) = 0, \text{ pois } a_\alpha e_0 = a_\alpha.$$

Afirmção 2.63. *Seja $J = \{r \in I \mid a_\alpha r = 0\}$. Então $J = J_0 + J_1$ é um sub-superideal propriamente contido no I , onde $J_\beta = \{r_\beta \in I_\beta \mid a_\alpha r_\beta = 0\}$.*

De fato, observamos que $J \neq \emptyset$, pois $0 \in J$. Temos que $J\mathcal{R} \subseteq J$ porque para todo $r \in J$, temos

$$r \in J \Rightarrow ru \in I, \forall u \in \mathcal{R} \Rightarrow ru \in J, \text{ pois } a_\alpha(ru) = (a_\alpha r)u = 0u = 0.$$

Sejam $r, c \in J$ então $a_\alpha r = 0$ e $a_\alpha c = 0$, logo

- $a_\alpha(rc) = 0$;
- $a_\alpha(r - c) = a_\alpha r - a_\alpha c = 0$.

Portanto, $rc, r - c \in J$. A afirmação está provada.

Uma vez que, $a_\alpha I = I$ e $I^2 \neq (0)$, temos que J está propriamente contido em I . Sendo I minimal, temos $J = \{0\}$. Portanto, $e_0^2 = e_0$. Seja $\mathcal{D} = e_0\mathcal{R}e_0 = e_0(\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1)e_0 = e_0\mathcal{R}_0e_0 + e_0\mathcal{R}_1e_0 = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$, observemos que \mathcal{D} é unitário e a unidade é e_0 . Se $e_0b_\beta e_0 \neq 0$, então $e_0b_\beta e_0\mathcal{R}$ é um superideal à direita de \mathcal{R} não nulo, $e_0b_\beta e_0 \in e_0b_\beta e_0\mathcal{R}$, pois

$e_0 b_\beta e_0 = (e_0 b_\beta e_0) e_0$, portanto, $\{0\} \neq e_0 b_\beta e_0 \mathcal{R} \subseteq I$ ($e_0 \in I_0$). Mais uma vez, observamos que I é superideal à direita minimal, logo $e_0 b_\beta e_0 \mathcal{R} = I$. Como $e_0 \in I_0$ e $b_\beta e_0 \in \mathcal{R}$ temos $e_0 b_\beta e_0 \mathcal{R} \subseteq e_0 \mathcal{R} \subseteq I$, pois I é superideal à direita de \mathcal{R} . Observemos que $e_0 \mathcal{R}$ é um superideal à direita contido em I , notemos que $e_0 \mathcal{R} \neq (0)$, pois $0 \neq e_0 = e_0 e_0 \in e_0 \mathcal{R}$. Como I é um superideal minimal, temos $e_0 \mathcal{R} = I$ e, portanto, $e_0 b_\beta e_0 \mathcal{R} = e_0 \mathcal{R}$. Então $e_0 b_\beta e_0 \mathcal{R} e_0 = e_0 \mathcal{R} e_0$, logo existe $c \in \mathcal{R}$ tal que $e_0 b_\beta e_0 c e_0 = e_0$. Observemos que $c \in \mathcal{R}_\beta$, como em \mathbb{Z}_2 temos $-\beta = \beta$, concluímos que $c \in \mathcal{R}_\beta$, logo $e_0 c e_0 = (e_0 b_\beta e_0)^{-1} \in \mathcal{D}_\beta$. Assim, \mathcal{D} é uma superanel de divisão.

Considere $\mathcal{L} = \mathcal{R} e_0 = \mathcal{R}_0 e_0 + \mathcal{R}_1 e_0 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$. Se $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_0 + \mathcal{L}'_1 \subseteq \mathcal{L}$ é um superideal à esquerda não nulo de \mathcal{R} , argumentando como acima trocando simplesmente as notações de esquerda por direita, $\mathcal{L}'^2 \neq \{0\}$ e existe $a_\alpha \in \mathcal{L}'_\alpha$ tal que $\mathcal{L}' a_\alpha \neq \{0\}$ (a demonstração é análoga a feita acima).

Portanto, $e_0 a_\alpha \neq 0$. Assim, $a_\alpha = a_\alpha e_0 \in \mathcal{R} e_0$, $a_\alpha e_0 = a_\alpha$, então $e_0 a_\alpha e_0 = e_0 a_\alpha 0 \neq e_0 a_\alpha = e_0 a_\alpha e_0 \in e_0 \mathcal{R} e_0 = \mathcal{D}$ (a demonstração é análoga a feita acima). Logo, $e_0 a_\alpha e_0$ é invertível em \mathcal{D} , $e_0 \in \mathcal{L}'$ e $\mathcal{L} = \mathcal{R} e_0 \subseteq \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ é um \mathcal{R} -superideal à esquerda minimal.

Mostramos que se, para algum elemento idempotente $e_0 \in I$, $e_0 \mathcal{R} e_0$ é uma superanel de divisão então $\mathcal{R} e_0$ é um superideal à esquerda. Um argumento análogo, prova que $e_0 \mathcal{R}$ é um superideal à direita minimal. ■

Sejam $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1$ um superespaço à esquerda sobre uma superálgebra de divisão $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_1$ um superespaço à direita sobre \mathcal{C} . Um emparelhamento bilinear $(\cdot)_\omega$ é uma função bi-aditiva $(\cdot)_\omega : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{C}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} (u_\alpha, w_\beta)_\omega &\in \mathcal{C}_{\alpha+\beta+\omega}, \\ (c_\gamma u_\alpha, w_\beta)_\omega &= c_\gamma (u_\alpha, w_\beta)_\omega, \\ (u_\alpha, w_\beta c_\gamma)_\omega &= (u_\alpha, w_\beta)_\omega c_\gamma, \end{aligned}$$

para todo $u_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$, $w_\beta \in \mathcal{W}_\beta$ e $c_\gamma \in \mathcal{C}_\gamma$. Dizemos que um emparelhamento bilinear $(\cdot)_\omega$ é não degenerado se

$$(u_\alpha, \mathcal{W})_\omega = \{0\} \implies u_\alpha = 0 \quad \text{e} \quad (\mathcal{V}, w_\beta)_\omega = \{0\} \implies w_\beta = 0.$$

Se $(,)_\omega$ é não degenerada dizemos que os superespaços \mathcal{V} e \mathcal{W} são duais. O \mathcal{C} -superespaço à direita \mathcal{W} pode ser visto como \mathcal{C}^{sop} -superespaço à esquerda através da ação

$$cw = w_0c_0 + w_1c_0 + w_0c_1 - w_1c_1,$$

onde $w = w_0 + w_1 \in \mathcal{W}$ e $c = c_0 + c_1 \in \mathcal{C}$,

onde $c_\gamma w_\beta := (-1)^{\beta\gamma} w_\beta c_\gamma$. Um elemento homogêneo $a_\alpha \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})_\alpha$ é dito ter um adjunto $a_\alpha^* \in \text{End}_{\mathcal{C}^{sop}}(\mathcal{W})$ se

$$(u_\beta a_\alpha, w_\delta)_\omega = (-1)^{\alpha\delta} (u_\beta, w_\delta a_\alpha^*)_\omega, \forall u_\beta \in \mathcal{V}_\beta, w_\delta \in \mathcal{W}_\delta.$$

Denotamos o sub-superanel de elementos de $\text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ tendo um adjunto por $\mathfrak{L}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$. Um elemento $a \in \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ tem posto finito se \mathcal{C}_0 -dimensão de $(\mathcal{V}a)$ é finita. Em particular, a tem posto 1 se $\mathcal{V}a = \mathcal{C}u$, para algum $u \in \mathcal{V}$. Denotamos o conjunto dos elementos de $\mathfrak{L}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$ tendo posto finito por $\mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$. Agora, provemos um completamente análogo o teorema de estrutura para anéis primitivos com um ideal à esquerda minimal.

Teorema 2.64. *Se \mathcal{R} é um superanel primitivo com um superideal à direita minimal então existem um superanel de divisão \mathcal{D} e \mathcal{D} -superespaços \mathcal{V} e \mathcal{W} tais que*

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathfrak{L}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V}). \quad (2.20)$$

Por outro lado, dados \mathcal{W}, \mathcal{V} superespaços duais sobre superálgebra de divisão \mathcal{D} , qualquer superanel \mathcal{R} satisfazendo (2.20) é primitivo e contém um superideal à direita minimal. $\mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$ é o único superideal minimal de \mathcal{R} .

Demonstração. Seja $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ um superanel primitivo com um superideal à direita minimal $I = I_0 + I_1$. Pelo Lema 2.61, $I = e_0\mathcal{R}$, onde $e_0 \in I_0$ é um elemento idempotente primitivo. Seja $\mathcal{V} = e_0\mathcal{R}$ o superespaço à esquerda sobre a superálgebra de divisão $\mathcal{D} = e_0\mathcal{R}e_0$ e $\mathcal{W} = \mathcal{R}e_0$ o superespaço à direita sobre \mathcal{D} . Para $u_\alpha = e_0a_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$ e $w_\beta = b_\beta e_0 \in \mathcal{W}_\beta$, defina

$$(u_\alpha, w_\beta)_0 := u_\alpha w_\beta = e_0 a_\alpha b_\beta e_0 \in \mathcal{D}_{\alpha+\beta}, (a_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, b_\beta \in \mathcal{R}_\beta).$$

Além disso, \mathcal{R} é primitivo, então \mathcal{R} é primo e $\{0\} = (u_\alpha, \mathcal{W})_0 = e_0 a_\alpha \mathcal{R} e_0$ implica que $u_\alpha = e_0 a_\alpha = 0$. Similarmente, $(\mathcal{V}, w_\beta)_0 = \{0\}$ implica que $w_\beta = 0$. Assim, \mathcal{V} e \mathcal{W} são superespaços duais. A multiplicação à direita

$$R_{r_\gamma} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad u \mapsto ur_\gamma, \quad r_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma,$$

induz um homomorfismo de superanéis de \mathcal{R} para $End_{\mathcal{D}}(\mathcal{V})$ que é injetivo por que \mathcal{V} é \mathcal{R} -supermódulo à direita fiel. A partir de $(u_\alpha R_{r_\gamma}, w_\beta) = e_0 a_\alpha r_\gamma b_\beta e_0$, vemos que a adjunta de R_{r_γ} é \mathcal{L}_{r_γ} com multiplicação à esquerda de \mathcal{W} por r_γ . Portanto, $R_{r_\gamma} \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$. Se $b_\beta \in \mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$ é de posto 1 então

$$\mathcal{V} b_\beta \subseteq \mathcal{D} u_\gamma \quad \text{para algum } u_\gamma \in \mathcal{V}_\gamma.$$

Seja $w_\gamma \in \mathcal{W}_\gamma$ tal que $(u_\gamma, w_\gamma)_0 = 1$, existe por que \mathcal{D} é um superanel de divisão. Se $u_\alpha b_\beta = d_{\alpha-\beta+\gamma} u_\gamma$ então

$$d_{\alpha-\beta+\gamma} = (d_{\alpha-\beta+\gamma} u_\gamma, w_\gamma)_0 = (u_\alpha b_\beta, w_\gamma)_0 = (u_\alpha, b_\beta^* w_\gamma)_0 = (u_\alpha, w_{\beta+\gamma})_0,$$

onde $w_{\beta+\gamma} = b_\beta^* w_\gamma$. Portanto,

$$u_\alpha b_\beta = d_{\alpha-\beta+\gamma} u_\gamma = (u_\alpha, w_{\beta+\gamma})_0 u_\gamma, \quad \forall u_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha.$$

Em particular, e_0 é de posto 1 e $(e_0 a_\alpha) e_0 = (e_0 a_\alpha e_0) e_0$. Logo, $u_\gamma = e_0 r_\gamma$ para algum $r_\gamma \in \mathcal{R}_\gamma$, e $w_{\beta+\gamma} = c_{\beta+\gamma} e_0$, para algum $c_{\beta+\gamma} \in \mathcal{R}_{\beta+\gamma}$,

$$\begin{aligned} u_\alpha b_\beta &= (u_\alpha, w_{\beta+\gamma})_0 u_\gamma \\ &= (u_\alpha, c_{\beta+\gamma} e_0) u_\gamma \\ &= e_0 a_\alpha c_{\beta+\gamma} e_0 u_\gamma \\ &= e_0 a_\alpha c_{\beta+\gamma} e_0 e_0 r_\gamma \\ &= u_\alpha (c_{\alpha+\gamma} e_0 r_\gamma) \\ &= u_\alpha R_{c_{\beta+\gamma} e_0 r_\gamma}, \quad \forall u_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha. \end{aligned}$$

Assim, toda transformação de posto 1 pertence a imagem de \mathcal{R} . Por isso, $\mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$ está contida na imagem de \mathcal{R} e podemos identificar \mathcal{R} como um sub-superanel de $\mathfrak{L}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$ contendo $\mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$.

Reciprocamente, dado \mathcal{V} e \mathcal{W} \mathcal{D} -superespaços duais, se \mathcal{R} é um sub-superanel de $\mathfrak{L}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$ contendo $\mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$ então é claro que \mathcal{R} age fielmente e é irredutivelmente em \mathcal{V} . Sejam $u_0 \in \mathcal{V}_0$ fixo e $L_\alpha = \{r_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha \mid \mathcal{V}_\beta r_\alpha \subseteq \mathcal{D}_{\alpha-\beta} u_0\}$.

Seja $L = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}_2} L_\alpha$. Queremos mostrar que L é um superideal à esquerda é minimal. Para um $y_\beta \in \mathcal{W}_\beta$ fixo, considere

$$\varphi(u_\alpha) = (u_\alpha, y_\beta)_0 u_0, \quad u_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha.$$

Uma vez que o adjunto é dado por

$$\Psi(w_\gamma) = y_\beta(u_0, w_\gamma)_0, \quad w_\gamma \in \mathcal{W}_\gamma,$$

esta função de posto 1 pertence a L_β . Denotemos L_β por b_β .

Queremos provar que todo elemento homogêneo a_α de L_α é um múltiplo de b_β à esquerda por algum elemento de $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$, donde, L é minimal. Argumentando como acima, se $(u_0, w_0)_0 = 1$,

$$u_\gamma a_\alpha = (u_\gamma, w_{\alpha+0})_0 u_0 = (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 u_0, \quad u_\gamma b_\beta = (u_\gamma, b_\beta^* w_0)_0 u_0.$$

Escolhendo $x_\beta \in \mathcal{V}_\beta$ tal que $(x_\beta, b_\beta^* w_0)_0 = 1$, temos

$$u_\gamma c_{\gamma+\beta} := (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 x_\beta, \quad c_{\gamma+\beta} \in \mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{R}$$

e

$$\begin{aligned} u_\gamma c_{\gamma-\beta} b_\beta &= (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 x_\beta b_\beta \\ &= (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 (x_\beta, b_\beta^* w_0)_0 u_0 \\ &= (u_\gamma, a_\alpha^* w_0)_0 u_0 \\ &= u_\gamma a_\alpha \quad \forall u_\gamma \in \mathcal{V}_\gamma. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, L é um superideal à esquerda de \mathcal{R} e, pelo Lema 2.61, \mathcal{R} contém um superideal minimal.

Uma vez que múltiplos de elementos de posto finito tem posto finito, então $\mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$ é um superideal de \mathcal{R} e qualquer superideal diferente de zero de \mathcal{R} contém elementos diferente de zero de posto finito. Argumentando como acima, vê-se que ele deve conter elementos de posto 1, portanto todos elementos de posto 1, e também todos elementos de $\mathfrak{F}_{\mathcal{W}}(\mathcal{V})$. ■

Se σ é um antiautomorfismo de um superanel \mathcal{D} , então σ é um isomorfismo de \mathcal{D} em \mathcal{D}^{sop} e \mathcal{W} é um \mathcal{D} -supermódulo à esquerda com a ação

$$d_{\delta} w_{\beta} := (-1)^{\delta\beta} w_{\beta} d_{\delta}^{\sigma}, \quad d_{\delta} \in \mathcal{D}_{\delta}, \quad w_{\beta} \in \mathcal{W}_{\beta}.$$

Definição 2.65. Dizemos que $(,)_{\omega} : \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ é um par sesquilinear de \mathcal{D} -superespaços à esquerda se

$$\begin{aligned} (d_{\delta} u_{\alpha}, w_{\beta})_{\omega} &= d_{\delta} (u_{\alpha}, w_{\beta})_{\omega}, \\ (u_{\alpha}, d_{\delta} w_{\beta})_{\omega} &= (-1)^{\delta\beta} (u_{\alpha}, w_{\beta})_{\omega} d_{\delta}^{\sigma}, \end{aligned}$$

para todo $u_{\alpha} \in \mathcal{V}_{\alpha}$, $w_{\beta} \in \mathcal{W}_{\beta}$, $d_{\delta} \in \mathcal{D}_{\delta}$.

Se $-$ é uma superinvolução em \mathcal{D} , então \mathcal{D} é isomorfo a \mathcal{D}^{sop} e podemos considerar o emparelhamento sesquilinear de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Referimos a ela como superforma.

Definição 2.66. Seja \mathcal{D} um superanel. Se $\epsilon \in Z(\mathcal{D})$ com $\epsilon\bar{\epsilon} = 1$, uma superforma ϵ -hermitiana é um emparelhamento sesquilinear satisfazendo

$$(u_{\alpha}, w_{\beta})_{\omega} = (-1)^{\alpha\beta} \overline{(w_{\beta}, u_{\alpha})_{\omega}}, \quad \forall u_{\alpha} \in \mathcal{V}_{\alpha}, \quad w_{\beta} \in \mathcal{W}_{\beta}.$$

Uma superforma $(,)_{\omega}$ é dita ser par ou ímpar se $\omega = 0$ ou 1 . Se $\epsilon = 1$ (respectivamente, -1), $(,)_{\omega}$ é dita ser hermitiana (respectivamente, antihermitiana). Dizemos que um \mathcal{D} -supermódulo à direita \mathcal{V} é auto-dual com respeito a uma superforma $(,)_0$ se para todos $d_{\delta} \in \mathcal{D}_{\delta}$, $v_{\alpha} \in \mathcal{V}_{\alpha}$, $w_{\beta} \in \mathcal{V}_{\beta}$

$$\begin{aligned} (d_{\delta} u_{\alpha}, w_{\beta})_0 &= d_{\delta} (u_{\alpha}, w_{\beta})_0, \quad (u_{\alpha}, d_{\delta} w_{\beta})_0 = (-1)^{\alpha\beta} (u_{\alpha}, w_{\beta})_0 \bar{d}_{\delta}, \\ (w_{\beta}, u_{\alpha})_0 &= (-1)^{\alpha\beta} \overline{(u_{\alpha}, w_{\beta})_0}. \end{aligned}$$

Teorema 2.67. *Um superanel primitivo $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1$ com um superideal à direita minimal tem um superinvolução $*$ se, e somente se, \mathcal{R} tem um supermódulo auto-dual à direita \mathcal{V} , o superanel comutativo \mathcal{C} de \mathcal{R} em \mathcal{V} tem uma superinvolução, e $*$ é a adjunta com respeito a uma superforma não degenerada hermitiana ou antihermitiana em \mathcal{V} .*

Demonstração. Se existe um idempotente par primitivo e simétrico $e_0 = e_0^*$ então $\mathcal{D} = e_0\mathcal{R}e_0$ é uma superálgebra de divisão com involução $\bar{} = *|_{\mathcal{D}}$ e o superideal à direita $\mathcal{V} = e_0\mathcal{R}_0 + e_0\mathcal{R}_1 = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1$ é um \mathcal{D} -superespaço à esquerda. Para $u_\alpha = e_0a_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$, $w_\beta = e_0b_\beta \in \mathcal{V}_\beta$ definimos

$$(u_\alpha, w_\beta)_0 := e_0a_\alpha(e_0b_\beta)^* = e_0a_\alpha b_\beta^* e_0 \in \mathcal{D}_{\alpha+\beta}.$$

Verifica-se que $(,)_0$ é uma forma biaditiva graduada de grau 0 e para todos $d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$, $v_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$, $w_\beta \in \mathcal{V}_\beta$,

$$\begin{aligned} (d_\delta u_\alpha, w_\beta)_0 &= d_\delta(u_\alpha, w_\beta)_0, & (u_\alpha, d_\delta w_\beta)_0 &= (-1)^{\alpha\beta}(u_\alpha, w_\beta)\bar{d}_\delta, \\ (w_\beta, u_\alpha)_0 &= (-1)^{\alpha\beta}\overline{(u_\alpha, w_\beta)_0}. \end{aligned}$$

Isso significa que \mathcal{V} é auto-dual com respeito a $(,)_0$. Sejam $u_\alpha = e_0a_\alpha$, $w_\beta = e_0b_\beta$ e $\tilde{w}_\delta = e_0\tilde{b}_\delta$ em \mathcal{V} . Então,

$$(u_\alpha \tilde{w}_\delta, w_\beta)_0 = u_\alpha \tilde{w}_\delta w_\beta^* = (-1)^{\delta\beta} u_\alpha (w_\delta \tilde{w}_\beta^*)^* = (-1)^{\delta\beta} (u_\alpha, w_\delta \tilde{w}_\beta^*)_0,$$

portanto, $*$ é o adjunto com respeito a superforma hermitiana $(,)_0$.

Se um superideal à direita minimal $I = I_0 + I_1$ contém um elemento homogêneo ϵ -simétrico $a_\alpha^* = \epsilon a_\alpha$, $\epsilon = \pm 1$, tal que $a_\alpha I \neq \{0\}$ então $I = e_0\mathcal{R}$ para algum idempotente primitivo adequado $e_0 \in I_0$, com $e_0^* = e_0$. Com efeito, desde que $a_\alpha I \neq \{0\}$ então $a_\alpha I = I$ e, argumentando como na prova do Lema 2.61, existe um idempotente $f_0 \in I_0$ tal que $a_\alpha f_0 = a_\alpha$ e $I = f_0\mathcal{R}$, $a_\alpha \in I = f_0\mathcal{R}$. Como $I = f_0\mathcal{R}$, então $a_\alpha = f_0b_\alpha$ para algum $b_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$. Logo,

$$a_\alpha = f_0b_\alpha \Rightarrow f_0a_\alpha = f_0^2b_\alpha = f_0b_\alpha \Rightarrow f_0(a_\alpha - b_\alpha) = 0 \Rightarrow a_\alpha = b_\alpha.$$

Então $f_0 a_\alpha = a_\alpha e$

$$a_\alpha = \epsilon a_\alpha^* = \epsilon (f_0 a_\alpha)^* = \epsilon a_\alpha^* f_0^* = (a_\alpha f_0) f_0^*.$$

Mais uma vez, argumento do Lema 2.61 prova que $e_0 = f_0 f_0^* \in I_0$ é um idempotente simétrico par não nulo, tal que $I = e_0 \mathcal{R}$.

Suponha a partir de agora que I é um superideal à direita minimal de \mathcal{R} e se $a_\alpha^* = \epsilon a_\alpha \in I_\alpha$, $\epsilon = \pm 1$, então $a_\alpha I = \{0\}$. Desejamos provar que se $b_\beta b_\beta^* \neq 0$ para algum $b_\beta \in J_\beta$, onde J é um superideal à direita minimal então $J^* J = \{0\}$. De fato, pelo Lema 2.36, $b_\beta b_\beta^* \neq 0$ implica que $\{0\} \neq b_\beta b_\beta^* \mathcal{R} \subseteq J$, pois $(b_\beta b_\beta^* \mathcal{R}_\beta) = J_\beta$, $\forall \beta \in \mathbb{Z}_2$. Portanto, $b_\beta b_\beta^* \mathcal{R} = J$ e $J^* = \mathcal{R} b_\beta b_\beta^*$. Desde que $b_\beta b_\beta^* \in J$ é simétrico, $J^* J = \mathcal{R} b_\beta b_\beta^* J = \{0\}$.

Afirmamos que existe um superideal à direita minimal I tal que $a_\alpha a_\alpha^* = 0$, para todo $a_\alpha \in I_\alpha$. Seja I um superideal à direita minimal de \mathcal{R} . Para qualquer $0 \neq a_\alpha \in I_\alpha$, pelo Lema 2.61 o Teorema 2.64, $I = a_\alpha \mathcal{R} = e_0 \mathcal{R}$ e $\mathcal{R} e_0 = \mathcal{R} a_\alpha$ é um superideal à esquerda minimal. Portanto, $(\mathcal{R} a_\alpha)^* = a_\alpha^* \mathcal{R}$ é um superideal à direita minimal. Se algum deste satisfaz $b_\beta b_\beta^* = 0$ para todo $b_\beta \in a_\alpha^* \mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ então acabamos. De outra forma, pelo argumento anterior,

$$\mathcal{R} a_\alpha a_\alpha^* \mathcal{R} = (a_\alpha^* \mathcal{R})^* (a_\alpha^* \mathcal{R}) = \{0\} \quad \forall a_\alpha \in I_\alpha. \quad (2.21)$$

Assim, por primalidade, $a_\alpha a_\alpha^* = 0$, para todo $a_\alpha \in I_\alpha$, que prova a afirmação.

De agora em diante, seja I um superideal à direita minimal de \mathcal{R} tal que $a_\alpha a_\alpha^* = 0$, para todo $a_\alpha \in I_\alpha$. Escrevendo $I = e_0 \mathcal{R} = e_0 \mathcal{R}_0 + e_0 \mathcal{R}_1$ como no Lema 2.61, temos $e_0 \mathcal{R} e_0^* \neq \{0\}$ por primalidade. Portanto, $e_0 \mathcal{R}_u e_0^* \neq \{0\}$ por pelo menos um $u \in \mathbb{Z}_2$. Escolhemos u para ser 0 se possível. Este será sempre o caso se $\mathcal{D}_1 = e_0 \mathcal{R}_1 e_0 \neq \{0\}$, pois $e_0 \mathcal{R} e_0^* \neq \{0\}$, desde que $e_0^* \mathcal{R} e_0^* = (e_0 \mathcal{R} e_0)^*$ é um superanel de divisão com unidade e_0^* , $e_0 \mathcal{R}_0 e_0^* \supseteq e_0 \mathcal{R}_1 e_0^* \mathcal{R}_1 e_0^* \neq \{0\}$. Podemos, portanto, assumir que se $v = 1$ então $\mathcal{D}_1 = \{0\}$.

Suponha que $e_0 \mathcal{R}_u e_0^* \neq \{0\}$. Se $e_0 (r_u + r_u^*) e_0^* \neq 0$, para algum $r_u \in \mathcal{R}_u$, fazendo $t_u = r_u + r_u^*$ podemos assumir que $(e_0 t_u e_0^*)^* = e_0 t_u e_0^* \neq 0$. Caso contrário, visto que $(e_0 r_u e_0^*)^* = -e_0 r_u e_0^*$, para todo $r_u \in \mathcal{R}_u$, escolhemos $t_u \in \mathcal{R}_u$ tal que $(e_0 t_u e_0^*)^* = -e_0 t_u e_0^* \neq$

0. Assim,

$$(e_0 t_u e_0^*)^* = \epsilon e_0 t_u e_0^*, \epsilon = \pm 1.$$

Como $e_0^* \mathcal{R} e_0 t_u e_0^* \neq \{0\}$, por primalidade, uma vez que $e_0^* \mathcal{R} e_0^*$ é um superanel de divisão, pode-se escolher $s_u \in \mathcal{R}_u$ tal que

$$e_0^* s_u e_0 t_u e_0^* = e_0^*.$$

Aplicando $*$,

$$\begin{aligned} e_0 &= e_0^{**} = (e_0^* s_u e_0 t_u e_0^*)^* \\ &= (-1)^{u^2} e_0 t_u^* e_0^* s_u^* e_0 \\ &= (-1)^{u^2} e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0 \\ &= (-1)^{u^2} (e_0 t_u e_0^*)^* s_u^* e_0 \\ &= (-1)^v \epsilon e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0, \text{ observemos que } u^2 = u, \forall u \in \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e_0^* s_u e_0 &= e_0^* s_u ((-1)^u \epsilon e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0) \\ &= (-1)^u \epsilon (e_0^* s_u e_0 t_u e_0^*) s_u^* e_0 \\ &= (-1)^v \epsilon e_0^* s_u^* e_0. \end{aligned}$$

e

$$(e_0^* s_u e_0)^* = (-1)^u e_0^* s_u e_0.$$

Por isso, temos

$$\begin{aligned} e_0^* s_u e_0 t_u e_0^* &= e_0^*, & e_0 t_u e_0^* s_u e_0 &= e_0, \\ (e_0 t_u e_0^*)^* &= \epsilon e_0 t_u e_0^*, & (e_0^* s_u e_0)^* &= (-1)^u \epsilon e_0^* s_u e_0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Seja $\mathcal{V} = I = e_0\mathcal{R}$, para $v_\alpha = e_0a_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$, $w_\beta = e_0b_\beta \in \mathcal{V}_\beta$,

$$\begin{aligned} v_\alpha w_\beta^* &= e_0a_\alpha(e_0b_\beta)^* \\ &= e_0a_\alpha b_\beta^* e_0^* \\ &= e_0a_\alpha b_\beta^* e_0^* s_u e_0 t_u e_0^*. \end{aligned}$$

Defina

$$(v_\alpha, w_\beta)_u := e_0a_\alpha b_\beta^* e_0^* s_u e_0 \in e_0\mathcal{R}_{\alpha-\beta+v}e_0 = \mathcal{D}_{\alpha-\beta+u}.$$

Temos que

$$(u_\alpha, u_\alpha)_u = e_0 \underbrace{a_\alpha a_\alpha^*}_{=0} e_0^* s_u e_0 = 0,$$

para todo $v_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$. Se $(v_\alpha, \mathcal{V})_u = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= (v_\alpha, \mathcal{V})_u = (v_\alpha, e_0\mathcal{R})_u \\ &= (e_0a_\alpha, e_0\mathcal{R}) = e_0a_\alpha\mathcal{R}^* e_0^* s_u e_0, \\ &\therefore e_0a_\alpha\mathcal{R}^* e_0^* s_u e_0 = \{0\}. \end{aligned}$$

Mas $e^* s_u e_0 \neq 0$, logo

$$e_0a_\alpha = 0, \text{ por primalidade.}$$

Similarmente, $(\mathcal{V}, w_\beta)_u = 0$ implica que $w_\beta = 0$, portanto, $(,)_u$ é não degenerada. É óbvio que $(,)$ é bi-aditiva e homogênea de grau 0. Se $d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$, $(d_\delta v_\alpha, w_\beta)_u = d_\delta(v_\alpha, w_\beta)_u$. Além disso,

$$\begin{aligned} (v_\alpha, d_\delta w_\beta)_u &= e_0a_\alpha b_\beta^* e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0 \\ &= e_0a_\alpha b_\beta^* e_0^* s_u e_0 t_u e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0 \\ &= (v_\alpha, w_\beta) \bar{d}_\delta, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{d}_\delta := e_0 t_u e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0.$$

Para $d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$,

$$\begin{aligned}
\overline{d_\delta} &= e_0 t_u e_0^* \overline{d_\delta}^* e_0^* s_u e_0 \\
&= e_0 t_u e_0^* (e_0 t_u e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0)^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{u^2} (-1)^{\delta u} e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0 d_\delta e_0 t_u^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\delta u} \epsilon e_0 d_\delta \epsilon e_0 \\
&= (-1)^{\delta u} d_\delta \\
&= d_\delta,
\end{aligned}$$

pois se $u = 1$ então δ deve ser 0. Para $c_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma$ e $d_\delta \in \mathcal{D}_\delta$,

$$\begin{aligned}
\overline{c_\gamma d_\delta} &= e_0 t_u e_0^* (c_\gamma d_\delta)^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\gamma \delta} e_0 t_u e_0^* d_\delta^* c_\gamma^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\gamma \delta} e_0 t_u e_0^* d_\delta^* (e_0 c_\gamma)^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\gamma \delta} e_0 t_u e_0^* d_\delta^* e_0^* s_u e_0 t_u e_0^* c_\gamma^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\gamma \delta} \overline{d_\delta} \overline{c_\gamma}.
\end{aligned}$$

Assim, $\overline{}$ é uma superinvolução de \mathcal{D} e $()_u$ é uma superforma sesquilinear não degenerada em \mathcal{V} cuja a adjunta é $*$. Finalmente

$$\begin{aligned}
\overline{(v_\alpha, w_\beta)_u} &= e_0 t_u e_0^* (e_0 a_\alpha b_\beta^* e_0^* s_u e_0)^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\alpha \beta} (-1)^{(\alpha - \beta)u} e_0 t_u e_0^* s_u^* e_0 b_\beta a_\alpha^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\alpha \beta} (-1)^{(\alpha - \beta)u} (-1)^u \epsilon e_0 b_\beta a_\alpha^* e_0^* s_u e_0 \\
&= (-1)^{\alpha \beta} (-1)^{(\alpha - \beta)u} (-1)^v \epsilon (w_\beta, v_\alpha)_u.
\end{aligned}$$

Se $u = 0$, então $()_0$ é ϵ -hermitiana. Se $u = 1$, assumimos que $\mathcal{D}_1 = \{0\}$ e portanto $(v_\alpha, w_\alpha)_1 = 0$ para todo $v_\alpha, w_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$. Donde o lado direito é 0 a menos que $\alpha - \beta = 1$. Assim, para todo $v_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha, w_\beta \in \mathcal{V}_\beta$,

$$\overline{(u_\alpha, w_\beta)_1} = (-1)^{\alpha \beta} \epsilon (w_\beta, u_\alpha) \text{ e}$$

$()_1$ é uma superforma ϵ -hermitiana. ■

Exemplo 2.68. *Sejam \mathcal{D} uma anel de divisão com involução $-$ e \mathcal{W} um \mathcal{D} -espaço vetorial à esquerda munido com um forma ϵ -hermitiana não-degenerada $g : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{D}$. Se A é um subanel de $\text{End}_{\mathcal{D}}(\mathcal{W})$ satisfazendo $\mathfrak{S}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}) \subseteq A \subseteq \mathfrak{L}_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})$, seja $V = V_0 + V_1$, $V_\alpha = \mathcal{W}$, isto é, como \mathcal{D} -espaço vetorial, V é uma soma direta de duas cópias de \mathcal{W} , e $R = M_2(A) = R_0 + R_1$, onde $R_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ com ação óbvia à direita em V . Dado \mathcal{D} com graduação trivial, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$. Então $h : V \rightarrow \mathcal{D}$ dada por*

$$h(v_\alpha, w_\alpha) := 0, \quad h(v_0, w_1) := g(v_0, w_1), \quad e \\ h(w_1, v_0) := -\overline{h(v_0, w_1)}$$

é uma superforma $(-\epsilon)$ -hermitiana ímpar não-degenerada que induz uma superinvolução $$ em R dada por*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \tilde{d} & -\tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{a} \end{pmatrix},$$

onde $\tilde{\cdot}$ é a involução de A induzida por g ., ou seja, $g(wa, w_2) = g(w, \tilde{a}w_2)$. Se $\mathcal{W} = f_0A$, onde f_0 é um elemento idempotente de A , então

$$e_0 = \begin{pmatrix} f_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é um elemento idempotente primitivo de R tal que $e_0R_0e_0^ = \{0\}$, mas é claro que $e_0R_1e_0^* \neq \{0\}$. Isso mostra que o último caso do Teorema 2.67 pode ocorrer, ou seja, Se $u = 0$, então $(\cdot)_0$ é ϵ -hermitiana. Se $u = 1$, podemos assumir que $\mathcal{D}_1 = \{0\}$ e portanto $(v_\alpha, w_\alpha)_1 = 0$ para todo $v_\alpha, w_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$. Donde o lado direito é 0 a menos que $\alpha - \beta = 1$. Assim, para todo $v_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha, w_\beta \in \mathcal{V}_\beta$,*

$$\overline{(u_\alpha, w_\beta)_1} = (-1)^{\alpha\beta} \epsilon(w_\beta, u_\alpha) e$$

$(\cdot)_1$ é uma superforma ϵ -hermitiana.

Capítulo 3

Superálgebras Associativas de Divisão

Seja \mathbb{K} um corpo. Uma \mathbb{K} -superálgebra é uma superálgebra associativa sobre \mathbb{K} .

Definição 3.1. *Sejam \mathcal{A} uma \mathbb{K} -superálgebra e I um superideal de \mathcal{A} . Dizemos que I é um superideal próprio se $I \subsetneq \mathcal{A}$.*

Definição 3.2. *Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -superálgebra. Definimos o centro de \mathcal{A} como*

$$Z(\mathcal{A}) := \{a \in \mathcal{A} \mid ab = ba, \forall b \in \mathcal{A}\}.$$

Seguinte lema afirma que o centro de uma superálgebra é um superanel.

Lema 3.3. *Sejam \mathcal{A} uma \mathbb{K} -superálgebra e $Z(\mathcal{A})$ o seu centro. Então $Z(\mathcal{A})$ é um sub-superanel, ou seja, $Z(\mathcal{A})$ é um subanel \mathbb{Z}_2 -graduado de \mathcal{A} .*

Demonstração. Observamos que $\emptyset \neq Z(\mathcal{A})$, pois $0 \in Z(\mathcal{A})$. Sejam $a, a' \in Z(\mathcal{A})$ então $ab = ba$, $a'b' = b'a'$, $\forall b, b' \in \mathcal{A}$. Logo,

- i. $(a - a')b = ab - a'b = ba - ba' = b(a - a')$, $\forall b \in \mathcal{A}$;
- ii. $(aa')b = a(a'b) = a(ba') = (ab)a' = b(aa')$, $\forall b \in \mathcal{A}$.

Portanto, $a - a'$, $aa' \in Z(\mathcal{A})$. Observemos que $Z(\mathcal{A}) = Z(\mathcal{A})_0 + Z(\mathcal{A})_1$, onde $Z(\mathcal{A})_\alpha := \{a_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \mid a_\alpha b = ba_\alpha, \forall b \in \mathcal{A}\}$. ■

Definição 3.4. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ uma \mathbb{K} -superálgebra unitária. Dizemos que \mathcal{A} é central se $\mathbb{K} = Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_0$. No caso em que \mathcal{A} é uma \mathbb{K} -superálgebra com graduação trivial, dizemos que \mathcal{A} é central se $\mathbb{K} = Z(\mathcal{A})$.

Observamos que a igualdade $\mathbb{K} = Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_0$ significa que $B = \mathbb{K} \cdot 1_{\mathcal{A}} = Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_0$ é um corpo isomorfo a \mathbb{K} .

Exemplo 3.5. Seja $\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 + \mathbb{C}_1$ o corpo dos números complexos, onde $\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}, \mathbb{C}_1 = i\mathbb{R}$, onde \mathbb{R} é o corpo dos números reais. Claramente, \mathbb{C} é uma \mathbb{R} -superálgebra central e o seu centro é \mathbb{C} , entretanto, com graduação trivial, \mathbb{C} não é uma álgebra central sobre \mathbb{R} , pois $\mathbb{R} \neq Z(\mathcal{A}) = \mathbb{C}$.

Dado $n > 1$, considere $M_n(\mathbb{C})$ a \mathbb{R} -álgebra de matrizes com entradas em \mathbb{C} . Temos que $M_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}_0) + M_n(\mathbb{C}_1) = M_n(\mathbb{R}) + iM_n(\mathbb{R})$. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow B, B = \{aI_{n \times n} \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq M_n(\mathbb{C}_0)$, dada por $\phi(a) = aI_{n \times n}$, onde $I_{n \times n}$ é a matriz identidade. É fácil ver que ϕ é um isomorfismo de \mathbb{R} -álgebras e que B é a interseção do centro com $M_n(\mathbb{C}_0)$. Portanto, $M_n(\mathbb{C})$ é uma superálgebra central.

Os seguintes lemas serão importantes para o resultado principal deste capítulo.

Lema 3.6. Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -superálgebra. Então $\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1$ é um superideal de \mathcal{A} .

Demonstração. Provar que $\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1$ é \mathbb{K} -espaço, não é difícil. Observamos que $\mathcal{A}_1^2 \subseteq \mathcal{A}_0$, logo $\mathcal{A}_1^2 \cap \mathcal{A}_1 = \{0\}$. Temos também que $\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^4 + \mathcal{A}_1^3 \subseteq \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1$.
 $\qquad \qquad \qquad \subseteq \mathcal{A}_0^2 \quad \subseteq \mathcal{A}_1^2$

Como $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$ temos que $\mathcal{A}_1^2\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1^2$. Portanto, $\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1$ é um superideal de \mathcal{A} . ■

Lema 3.7. Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -superálgebra simples. Então

- i. $\mathcal{A}_1 = (0)$ ou $\mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}_0$.
- ii. Se I é um ideal próprio de \mathcal{A}_0 não nulo, então
 - (a) $I + \mathcal{A}_1 I \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0$;
 - (b) $\mathcal{A}_1 I + I \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1$.

iii. Se J é um ideal próprio de \mathcal{A} não nulo, então as projeções $\pi_i : J \rightarrow \mathcal{A}_i$, $i = 0, 1$, onde $\pi_i(x) = x_i$, $x = x_0 + x_1$, são isomorfismos de \mathcal{A}_0 -módulos.

Demonstração.

- i. Se $\mathcal{A}_1 \neq \{0\}$ então $\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1$ é um superideal não nulo de \mathcal{A} , logo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_1$. Portanto, $\mathcal{A}_1^2 = \mathcal{A}_0$ por comparação de grau.
- ii. Seja I um ideal de \mathcal{A}_0 não nulo, então $I + I\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1I + \mathcal{A}_1I\mathcal{A}_1$ é fechado em relação a soma e multiplicação à direita e à esquerda por \mathcal{A}_0 e \mathcal{A}_1 , portanto é um ideal, e é graduado, pois $I + \mathcal{A}_1I\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$ e $I\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1I \subseteq \mathcal{A}_1$. Sendo $I \neq (0)$ segue que $(0) \neq I \subseteq I + I\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1I + \mathcal{A}_1I\mathcal{A}_1$ é um superideal não nulo de \mathcal{A} . Como \mathcal{A} é uma \mathbb{K} -superálgebra simples, devemos ter $\mathcal{A} = I + I\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1I + \mathcal{A}_1I\mathcal{A}_1$ e, portanto, $\mathcal{A}_0 = I + \mathcal{A}_1I\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_1 = I\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1I$.
- iii. A projeção é um homomorfismo de \mathcal{A}_0 -módulos, logo $\pi_0(\mathcal{A}_0)$ é um ideal de \mathcal{A}_0 . Temos que $J \cap \mathcal{A}_0$ e $\pi_0(\mathcal{A}_0)$ são ideais de \mathcal{A}_0 . Se $J \cap \mathcal{A}_0 = \pi_0(\mathcal{A}_0)$ então J seria graduado, uma contradição, pois \mathcal{A} é uma \mathbb{K} -superálgebra simples. Seja $I = J \cap \mathcal{A}_0$ e $I' = \pi_0(J)$. Multiplicando I e I' por \mathcal{A}_1 à esquerda e à direita e usando o fato que J é um ideal de \mathcal{A} , obtemos $\mathcal{A}_1I\mathcal{A}_1 \subseteq I$ e $\mathcal{A}_1I'\mathcal{A}_1 \subseteq I'$. Pelo item ii do lema 3.7, I e I' não podem ser próprios. Portanto, $I = (0)$ e $I' = \mathcal{A}_0$.
- Consequentemente, $J \cap \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0(J \cap \mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_1^2(J \cap \mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1(J \cap \mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_10 = 0$, e $\pi_1(J)$ contem $\mathcal{A}_1\pi_0(J) = \mathcal{A}_1$. Assim, as π_i são sobrejetivas, e têm núcleo zero, portanto π_i são bijeções.

■

Lema 3.8. *Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -superálgebra simples. Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ é uma superálgebra unitária, então \mathcal{A} é simples como \mathbb{K} -álgebra ou \mathcal{A}_0 é simples e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0u$, com $u \in Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_1$ e $u^2 = 1$.*

Demonstração. Notemos que \mathcal{A}_0 é uma álgebra unitária. Suponha que \mathcal{A} não é simples como \mathbb{K} -álgebra. Então \mathcal{A} tem um ideal próprio J , e podemos aplicar o lema

3.7 item iii. Escreva $u = \pi_1 \pi_0^{-1}(1)$. Sendo π_i bijeções, temos que existe um único $w = x_0 + x_1 \in J$ tal que $\pi_0(w) = 1$, logo $x_0 = 1$. Observamos que $\pi_0^{-1}(1) = w$, logo $u = \pi_1 \pi_0^{-1}(1) = \pi_1(w) = x_1$, portanto, $w = 1 + u \in J$. Sendo J ideal, segue que $u(1 + u) = u + u^2 \in J$, logo $u = \pi_1(w) = \pi_1(u + u^2) = u$, pela injetividade de π_1 , $w = u + u^2$ donde $u^2 = 1$. Mais uma vez, sendo J ideal, segue que $z_i(1 + u)$, $(1 + u)z_i \in J$ e $\pi_i(z_i(1 + u)) = z_i = \pi_i((1 + u)z_i)$, pela injetividade de π_i segue que $uz_i = z_i u$ para todo $z_i \in \mathcal{A}_i$. Assim, $u \in Z((A)) \cap \mathcal{A}_1$. Observamos que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1 1 = \mathcal{A}_1 u^2 = (\mathcal{A}_1 u)u \subseteq \mathcal{A}_0 u \subseteq \mathcal{A}_1$, portanto, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 u$.

Finalmente, se I é um ideal de \mathcal{A}_0 , temos

$$\mathcal{A}_1 I \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 u I \mathcal{A}_0 u = \mathcal{A}_0 u I u = \mathcal{A}_0 I u^2 = \mathcal{A}_0 I = I,$$

e pelo Lema 3.7 item ii, I não é próprio. Assim, \mathcal{A}_0 é simples. ■

O próximo lema será importante para demonstrar o Teorema Superálgebra de Divisão que será o resultado mais importante desse capítulo.

Lema 3.9. *Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ é uma superálgebra unitária simples central sobre \mathbb{K} então \mathcal{A} é simples como uma álgebra ou \mathcal{A}_0 é simples e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 u$, com $u \in Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_1$ e $u^2 = 1$. Além disso, \mathcal{A} ou \mathcal{A}_0 é simples e central como uma álgebra sobre \mathbb{K} e se \mathcal{A} tem dimensão finita a afirmativa é exclusiva.*

Demonstração. Veja [[5], Lemma 4, 5]. ■

Definição 3.10. *Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -álgebra. Um isomorfismo $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é dito um automorfismo de \mathcal{A} .*

Claramente a função identidade é um automorfismo de \mathcal{A} .

Exemplo 3.11. *Para qualquer \mathbb{K} -álgebra \mathcal{A} e $c \in \mathcal{A}$ inversível, denotamos por ψ_c a função $(x)\psi_c = cxc^{-1}$. Observamos que ψ_c é um automorfismo de \mathcal{A} . É claro que $\psi_c|_{\mathcal{A}_0}$ é um automorfismo de \mathcal{A}_0 .*

Dizemos que um automorfismo f de \mathcal{A} é automorfismo interno, se $f(x) = cxc^{-1}$ para algum $c \in \mathcal{A}$.

Uma involução $*$ é dita do primeiro tipo se a restrição ao centro é a identidade e do segundo tipo caso contrário. Usaremos a mesma terminologia para superinvoluções. Adotamos a seguinte convenção para lidar simultaneamente com superinvolução do primeiro e segundo tipo. Assumimos $Z(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}_0 = \mathbb{K}$ e $k = \{c \in \mathbb{K} \mid c^* = c\}$. Assim, $\mathbb{K} = k$ se $*$ é do primeiro tipo, $\mathbb{K} = k[\theta]$, onde $k[\theta]$ é uma extensão quadrática de k com $\theta^* = -\theta$ se a característica de \mathbb{K} é diferente de 2 ou $\theta^* = \theta + 1$ se a característica de \mathbb{K} é 2.

Seja \mathbb{K} um corpo, definimos $\mathbb{K}^2 := \left\{ \sum_{i < \infty} a_i^2 \mid a_i \in \mathbb{K} \right\}$. Se \mathbb{K} é de característica 2 então denotamos $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ o conjunto $\{\alpha + \alpha^2 \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$.

Antes de determinar as superálgebras associativas de divisão, anunciaremos alguns resultados preliminares.

Lema 3.12. *Seja \mathcal{D} uma \mathbb{K} -superálgebra associativa de divisão. Se $\mathcal{D}_1 \neq \{0\}$ então $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0 u, \forall 0 \neq u \in \mathcal{D}_1$.*

Demonstração. Seja $0 \neq u \in \mathcal{D}_1$. Como \mathcal{D} um superálgebra de divisão, logo existe $u^{-1} \in \mathcal{D}_1$ tal que $u^{-1}u = 1$. Logo, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1 1 = \mathcal{D}_1(u^{-1}u) = (\mathcal{D}_1 u^{-1})u \subseteq \mathcal{D}_0 u \subseteq \mathcal{D}_1$. Portanto, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}u$. ■

Lema 3.13. *Seja \mathcal{D} uma superálgebra de divisão central sobre um corpo \mathbb{K} . Se \mathcal{D} é uma \mathbb{K} -álgebra simples e $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0 u$, onde $u^2 \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$ com $0 \neq u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$. Então $\lambda \notin \mathbb{K}^2$.*

Demonstração. Suponha que $\lambda \in \mathbb{K}^2$, podemos supor que $\lambda^2 = 1$. Observamos que $(1 + \lambda)^2 = 2 + 2\lambda$. Logo, $\frac{1 + \lambda}{2}$ é idempotente. Portanto, $\mathbb{K} \frac{(1 + \lambda)}{2}$ é um ideal próprio de \mathcal{D} , logo \mathcal{D} não é simples. ■

Lema 3.14. *Sejam \mathcal{E} uma álgebra de divisão sobre \mathbb{K} , onde \mathbb{K} é um corpo de característica diferente de 2, e ϕ um automorfismo externo de \mathcal{E} sobre \mathbb{K} tal que $\phi^2 = \psi_a$, para algum $d \in \mathcal{E}$ com $(d)\phi = d$. Seja $\mathcal{D} = \mathcal{E} + \mathcal{E}v$, como \mathcal{E} -espaço vetorial à esquerda e defina $v^2 := d$ e $va := (a)\phi v, \forall a \in \mathcal{E}$. Então,*

1. \mathcal{D} é uma \mathbb{K} -superálgebra associativa.

2. \mathcal{D} é uma \mathbb{K} -álgebra de divisão se, e somente se, $d = (c)\phi c$ não tem solução em \mathcal{E} .

Demonstração.

1. Sejam $\mathcal{D}_0 = \mathcal{E}$ e $\mathcal{D}_1 = \mathcal{E}v$. Essa graduação é compatível com o produto em \mathcal{D} , resta checar que é associativa. É suficiente provar a associatividade para $\mathcal{E}v$, notemos que

$$\begin{aligned}
 (avbv)cv &= (a(b)\phi vv)cv \\
 &= (a(b)\phi v^2)cv \\
 &= (a(b)\phi d)cv \\
 &= a(b)\phi dcv \\
 &= a(b)\phi dc(d^{-1}d)v \\
 &= a(b)\phi(dcd^{-1})dv \\
 &= a(b)\phi(c)\phi^2 dv \\
 &= a(b)\phi(c)\phi^2(d)\phi v \\
 &= a(b(c)\phi d)\phi v \\
 &= av(b(c)\phi d) \\
 &= av(b(c)\phi vv) \\
 &= av(bvcv), \forall a, b, c \in \mathcal{E},
 \end{aligned}$$

isso prova a associatividade de \mathcal{D} .

2. Suponha que \mathcal{D} é uma \mathbb{K} -álgebra de divisão. Seja $c \in \mathcal{E}/\{0\}$. Consideremos $c = b^{-1}a$, onde $b^{-1} = 1$ e $a = c$. Então $a + bv \neq 0$. Logo, existe $m + nv \in \mathcal{D}$ tal que $(a + bv)(m + nv) = 1$. Desenvolvendo o lado esquerdo dessa igualdade, obtemos:

$$(a + bv)(m + nv) = am + b(n)\phi d + (an + b(m)\phi)v.$$

Logo,

$$(a + bv)(m + nv) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} am + b(n)\phi d = 1 \\ (n)\phi = -(a^{-1}b)\phi d m d^{-1} \end{cases} .$$

Portanto,

$$(a - b(a^{-1}b)\phi d)m = 1. \quad (3.1)$$

Por 3.1, obtemos

$$0 \neq (1)\phi = ((a)\phi - (b)\phi d a^{-1}b)(m)\phi.$$

Logo, $0 \neq ((a)\phi - (b)\phi d a^{-1}b)(m)\phi$. Consequentemente, $0 \neq (a)\phi - (b)\phi d a^{-1}b$.

Observamos que

$$0 \neq (a)\phi - (b)\phi d a^{-1}b \Leftrightarrow 0 \neq (b^{-1}a)\phi b^{-1}a - d.$$

Como $c = b^{-1}a \in \mathcal{D}$ é qualquer, concluímos que $0 \neq (c)\phi c - d, \forall c \in \mathcal{E}/\{0\}$. Para $c = 0$, obtemos $(c)\phi c = 0 \neq d$. Portanto, a equação $(c)\phi c = d$ não tem solução em \mathcal{E} .

Reciprocamente, suponha que a equação $(c)\phi c = d$ não tem solução em \mathcal{E} . Primeiro, observamos que $(c)\phi c = d$ não tem solução em \mathcal{E} se, e somente se, $(c)\phi c - d \neq 0, \forall c \in \mathcal{E}$. Não é difícil verificar que \mathcal{D}_0 e \mathcal{D}_1 não possuem divisores de zeros. Sejam $h = a + bv \in \mathcal{D}$, com $a, b \in \mathcal{E}/\{0\}$ e $m + nv \in \mathcal{D}$ tais que $(a + bv)(m + nv) = 0$. Desenvolvendo o lado esquerdo dessa igualdade, obtemos

$$\begin{cases} am + b(n)\phi d = 0 \\ an + b(m)\phi = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Então $n = -a^{-1}b(m)\phi$. Substituindo n na primeira equação do sistema 3.2, obtemos

$$(a - b(a^{-1}b)\phi d)m = 0.$$

Afirmção 3.15. $(a - b(a^{-1}b)\phi d) \neq 0$.

De fato, pois $(b^{-1}a)\phi b^{-1}a - d \neq 0$ se, e somente se, $a - b(a^{-1}b)\phi d \neq 0$. Como $(c)\phi c \neq d, \forall c \in \mathcal{E}$. Portanto, $a - b(a^{-1}b)\phi d \neq 0$ e a afirmação está provada. Temos que $(a - b(a^{-1}b)\phi d)m = 0$ como $a - b(a^{-1}b)\phi d \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$ e \mathcal{E} é uma \mathbb{K} -álgebra de divisão então $m = 0$. Logo, $n = -a^{-1}b(m)\phi a = -a^{-1}b(0)\phi d = 0$ e, portanto, \mathcal{D} não possui divisores de zeros.

Afirmção 3.16. *Sejam $a, b \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$, $x = -a^{-1}b(a)\phi$, $y = -ab(a^{-1})\phi$, $h = a^2 - b(a^{-1}b)\phi da$ e $m = a^2 - ab(a^{-1}b)\phi d$. Então*

$$(a) \quad (a + bv)(a + xv)h^{-1} = 1.$$

$$(b) \quad m^{-1}(a + yv)(a + bv) = 1.$$

Portanto, $a + bv \in \mathcal{D}$ é inversível.

De fato, para provar o item (a) é suficiente observamos que

$$\begin{aligned} (a + bv)(a + xv) &= a^2 + b(x)\phi d + (ax + b(a)\phi)v \\ &= a^2 + b(-a^{-1}b(a)\phi)\phi d + (a(-a^{-1}b(a)\phi) + b(a)\phi)v \\ &= a^2 - b(a^{-1}b)\phi d ad^{-1}d + (-aa^{-1}b(a)\phi) + b(a)\phi)v \\ &= a^2 - b(a^{-1}b)\phi da + (-b(a)\phi) + b(a)\phi)v \\ &= a^2 - b(a^{-1}b)\phi da + (-b(a)\phi) + b(a)\phi)v = h + 0v = h. \end{aligned}$$

Para provamos o item (b) é suficiente observamos que

$$\begin{aligned} (a + yv)(a + bv) &= a^2 + y(b)\phi d + (ab + y(a)\phi)v \\ &= a^2 + (-ab(a^{-1})\phi)(b)\phi d + (ab + (-ab(a^{-1})\phi)(a)\phi)v \\ &= a^2 - ab(a^{-1}b)\phi d + (ab - ab(a^{-1}a)\phi)v \\ &= a^2 - ab(a^{-1}b)\phi d + (ab - ab)v \\ &= a^2 - ab(a^{-1}b)\phi d + 0v = m. \end{aligned}$$

Portanto, $a + bv \in \mathcal{D}$ é inversível. Logo, a afirmação está provada.

Claramente, os inversos dos elementos da forma $a + 0v$, $bv \in \mathcal{D}/\{0\}$ são, respectivamente, a^{-1} , $(b^{-1}d^{-1})\phi v$. ■

Teorema 3.17 (Teorema Superálgebra de Divisão). *Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ é uma superálgebra de divisão central sobre o corpo \mathbb{K} então vale exatamente uma das seguintes condições, \mathcal{E} denota uma álgebra de divisão central sobre \mathbb{K} .*

(i) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 = \mathcal{E}$, isto é, $\mathcal{D}_1 = \{0\}$,

(ii) $\mathcal{D} = \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[u]$, $0 \neq u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{E} \otimes \mathbb{K}1$, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{E} \otimes \mathbb{K}u$,

(iii) $\mathcal{D} = \mathcal{E}$, $\mathcal{D}_0 = C_{\mathcal{E}}(u)$, o centralizador de u em \mathcal{E} , $\mathcal{D}_1 = \{d \in \mathcal{E} \mid du = u^{\sigma}d\}$ para alguma extensão de Galois quadrática $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{E}$ com automorfismo de Galois σ ,

(iv) $\mathcal{D} = M_2(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{K}} M_2(\mathbb{K})$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{E} \otimes \mathbb{K}[u]$, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{E} \otimes \mathbb{K}[u]w$, onde

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}), \quad \lambda \notin \mathbb{K}^2, \quad \text{char}\mathbb{K} \neq 2$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}), \quad \lambda \notin \mathcal{P}(\mathbb{K}), \quad \text{char}\mathbb{K} = 2,$$

e $\mathbb{K}[u]$ não está contido em \mathcal{E} ,

(v) $\mathcal{D} = \mathcal{E} + \mathcal{E}v$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{E}$, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{E}v$, $0 \neq v^2 = d \in \mathcal{E}$, $va = (a)\phi v$, $\forall a \in \mathcal{E}$, onde ϕ é um automorfismo externo de \mathcal{E} sobre \mathbb{K} tal que $\phi^2 = \psi_d$ e $(d)\phi = d$.

Esse último caso pode ocorrer somente se \mathcal{E} é de dimensão infinita sobre o centro \mathbb{K} .

Demonstração. Suponha que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ é uma superálgebra de divisão central sobre o corpo \mathbb{K} e que $\mathcal{D}_1 \neq \{0\}$, isto é, não estamos no caso (i). Segue do lema (3.12) que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0v$, $\forall 0 \neq v \in \mathcal{D}_1$. Para todo $a \in \mathcal{D}_0$, temos que

$$va = va(v^{-1}v) = (vav^{-1})v = (a)\psi_v v \Rightarrow (a)\psi_v = vav^{-1}$$

e, portanto, $\psi_v|_{\mathcal{D}_0}$ é um automorfismo de \mathcal{D}_0 como uma álgebra sobre $Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$. Uma vez que todo elemento de \mathcal{D}_1 é da forma $c_0 v$, $c_0 \in \mathcal{D}_0$, a restrição de ψ_v a $Z(\mathcal{D}_0)$ não depende da escolha em particular de $0 \neq v \in \mathcal{D}_1$.

Suponha primeiro que $\psi_v|_{\mathcal{D}_0}$ é um automorfismo interno de \mathcal{D}_0 , digamos que $\psi_v|_{\mathcal{D}_0} = \psi_c$ para algum $c \in \mathcal{D}_0$ determinado pela multiplicação por um elemento de $Z(\mathcal{D}_0)$. Portanto,

$$(a)\psi_v = (a)\psi_c \Leftrightarrow vav^{-1} = cac^{-1} \Leftrightarrow c^{-1}vav^{-1}c = a,$$

para todo $a \in \mathcal{D}_0$. Seja $u = c^{-1}v \in \mathcal{D}_1$, temos $uau^{-1} = a$, para todo $a \in \mathcal{D}_0$ e u centraliza \mathcal{D}_0 . Uma vez que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0 u$, u centraliza \mathcal{D}_1 também. Assim, $u \in Z(\mathcal{D})$ e $u^2 \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$, digamos que $0 \neq u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$. Sejam $\mathcal{E} = \mathcal{D}_0$ e $\mathcal{D} = \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[u]$. Note que \mathcal{D} é simples como uma álgebra se, e somente se, $\lambda \notin \mathbb{K}^2$. Se $\lambda \in \mathbb{K}^2$, podemos supor que $\lambda = 1$, veja o lema 3.13. Este é o único caso, onde a superálgebra de divisão não é simples como uma álgebra.

Suponha a seguir que $\psi_v|_{\mathcal{D}_0}$ não é um automorfismo interno de \mathcal{D}_0 sobre \mathbb{K} . Se $\psi_v|_{Z(\mathcal{D}_0)}$ não é a identidade então \mathbb{K} é o subcorpo fixado de $Z(\mathcal{D}_0)$. Podemos escolher $u \in Z(\mathcal{D}_0)$ tal que $Z(\mathcal{D}_0) = \mathbb{K}[u]$,

$$\begin{aligned} u^2 = \lambda \notin \mathbb{K}^2, \quad (u)\psi_v = -u, \quad \text{char}\mathbb{K} \neq 2 \\ u^2 + u = \lambda \notin \mathcal{P}(\mathbb{K}), \quad (u)\psi_v = 1 + u, \quad \text{char}\mathbb{K} = 2. \end{aligned}$$

Mas, então $avu = avu(v^{-1}v) = a(vuv^{-1})v = a(u)\psi_v v = (u)\psi_v av$ para todo $a \in \mathcal{D}_0$. Portanto, $\mathcal{D}_0 = C_{\mathcal{D}}(u)$, o centralizador de u em \mathcal{D} e $\mathcal{D}_1 = \{c \in \mathcal{D} | cu = a(u)\psi_v v\}$. Se \mathcal{D} é uma álgebra de divisão, este é o caso (iii) com $\mathcal{E} = \mathcal{D}$.

Se \mathcal{D} não é uma álgebra de divisão então \mathcal{D}_0 não é simples central sobre $\mathbb{K} = Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_0$ então, pelo Lema 3.9, \mathcal{D} é simples e central sobre \mathbb{K} . Seja $J \neq \{0\}$ um ideal à direita de \mathcal{D} . Se $0 \neq a_0 + a_1 \in J$ então pelo menos um $a_i \neq 0$, e multiplicando por a_i^{-1} à direita, $(1 + b_1) \in J$, para algum $b_1 \in \mathcal{D}_1$. Como $(1 + b_1)\mathcal{D} \subseteq J$. Se J contém um elemento $a'_0 + a'_1 \notin (1 + b_1)\mathcal{D}$ então, argumentando como acima, obtemos um elemento $1 + b'_1 \in J$, $b'_1 \neq b_1$. Neste caso, $0 \neq b_1 - b'_1 \in J$ e $1 \in J$ que deve ser o conjunto $J = \mathcal{D}$. Portanto, uma cadeia

descendente de ideais à direita não nulo em \mathcal{D} tem comprimento no máximo 2, logo \mathcal{D} é artiniano e além disso, \mathcal{D} é isomorfo à $M_2(\mathcal{E})$, onde \mathcal{E} é uma álgebra de divisão com centro \mathbb{K} . Se $\mathbb{K}[u]$ fosse imerso em \mathcal{E} então $\mathcal{D}_0 = C_{\mathcal{D}}(u) \cong M_2(C_{\mathcal{E}}(u))$ que não é uma álgebra de divisão. Portanto, $\mathbb{K}[u]$ não está imerso em \mathcal{E} , mas a extensão quadrática $\mathbb{K}[u]$ está imersa em $M_2(\mathbb{K})$ e podemos escolher w como

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \text{ e}$$

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{E} \otimes \mathbb{K}[u]w \text{ para } w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{char}\mathbb{K} \neq 2,$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \text{ e}$$

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{E} \otimes \mathbb{K}[u]w \text{ para } w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{char}\mathbb{K} = 2,$$

e estamos no caso (iv).

Finalmente, suponha que $\psi_v|_{\mathcal{D}_0}$ não é automorfismo interno, mas $\psi_v|_{Z(\mathcal{D}_0)}$ é a função identidade. Portanto, $Z(\mathcal{D}) = Z(\mathcal{D}_0)$. Isso não pode acontecer se \mathcal{D}_0 é de dimensão finita sobre seu centro, uma vez que todos os automorfismo de \mathcal{D}_0 sobre seu centro são internos. Agora, $\psi_v^2 = \psi_{v^2}$ é interno desde que $v^2 \in \mathcal{D}_0$ e $(v^2)\psi_v^2 = v^2$. Então temos o caso (v). Por outro lado, se \mathcal{E} é uma álgebra de divisão e central sobre \mathbb{K} e ϕ um outro automorfismo de \mathcal{E} sobre \mathbb{K} tal que $\phi^2 = \psi_d$, para algum $d \in \mathcal{E}$ com $d^\phi = d$, seja $\mathcal{D} = \mathcal{E} + \mathcal{E}v$, como um \mathcal{E} -espaço vetorial à esquerda e defina $v^2 := d$ e $va := (a)\phi v$, para $a \in \mathcal{E}$. Logo, pelo lema 3.14 \mathcal{D} é uma álgebra de divisão se, e somente se, $d = (c)\phi c$ não tem solução $c \in \mathcal{D}_0$. ■

3.1 Superálgebras de Divisão com Superinvolução

Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ uma superálgebra, sobre um corpo \mathbb{K} , com superinvolução $*$. Sabemos que $(\mathcal{A}_0, *|_{\mathcal{A}_0})$ é uma álgebra com involução.

Lema 3.18. *Sejam \mathcal{A} uma \mathbb{K} -superálgebra, onde \mathbb{K} é um corpo, e $*$ uma superinvolução de $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$. Então*

$$(a_0 + b_1)^{\tilde{*}} := a_0^* - b_1^*$$

define uma superinvolução em \mathcal{A} .

Demonstração. Observamos primeiro que $\tilde{*}$ está bem definida, pois dados $a_0 + a_1 = b_0 + b_1 \in \mathcal{D}$ então $a_i = b_i$, $i = 0, 1$. Logo, $(a_0 + a_1)^{\tilde{*}} = a_0^* - a_1^* = b_0^* - b_1^* = (b_0 + b_1)^{\tilde{*}}$. Como $*$ é uma superinvolução em \mathcal{D} , então temos

$$(a_0 + b_1)^{**} = a_0 + b_1, \text{ e } (a_i b_j)^* = (-1)^{ij} b_j^* a_i^*, \forall a_i \in \mathcal{D}_i, \forall b_j \in \mathcal{D}_j.$$

Portanto, $(a_0 + b_1)^{\tilde{\tilde{*}}} = (a_0^* - b_1^*)^{\tilde{*}} = a_0^{**} - (-b_1^{**}) = a_0 + b_1$ e

$$\begin{aligned} (a_i b_j)^{\tilde{*}} &= \begin{cases} (a_i b_j)^*, & \text{se } a_i b_j \in \mathcal{D}_0, \\ -(a_i b_j)^*, & \text{se } a_i b_j \in \mathcal{D}_1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_j^* a_i^*, & \text{se } a_i, b_j \in \mathcal{D}_0, \\ b_j^* a_i^*, & \text{se } a_i, b_j \in \mathcal{D}_1, \\ -b_j^* a_i^*, & \text{se } a_i \in \mathcal{D}_0, b_j \in \mathcal{D}_1 \\ -b_j^* a_i^*, & \text{se } a_i \in \mathcal{D}_1, b_j \in \mathcal{D}_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} b_j^{\tilde{*}} a_i^{\tilde{*}}, & \text{se } a_i, b_j \in \mathcal{D}_0, \\ -b_j^{\tilde{*}} a_i^{\tilde{*}}, & \text{se } a_i, b_j \in \mathcal{D}_1, \\ b_j^{\tilde{*}} a_i^{\tilde{*}}, & \text{se } a_i \in \mathcal{D}_0, b_j \in \mathcal{D}_1 \\ b_j^{\tilde{*}} a_i^{\tilde{*}}, & \text{se } a_i \in \mathcal{D}_1, b_j \in \mathcal{D}_0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Em todos os casos, temos $(a_i b_j)^{\tilde{*}} = (-1)^{ij} b_j^{\tilde{*}} a_i^{\tilde{*}}, \forall a_i \in \mathcal{D}_i, \forall b_j \in \mathcal{D}_j$. Logo, o resultado segue. ■

Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ uma \mathbb{K} -superálgebra de divisão com superinvolução $*$. Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ então $(\mathcal{D}, *)$ é uma álgebra com involução.

Suponha a partir de agora que $\mathcal{D}_1 \neq \{0\}$. Lidamos primeiro com o caso (ii) do Teorema da Superálgebra de Divisão.

Proposição 3.19. *Sejam $\bar{}$ uma involução de \mathcal{D}_0 e um elemento $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, onde \mathbb{K} é o centro de \mathcal{D}_0 , tal que $\bar{\lambda} = -\lambda$, então*

$$(a + bu)^* := \bar{a} + \bar{b}u$$

é uma superinvolução da superálgebra $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \otimes \mathbb{K}[u]$, $u^2 = \lambda$.

Demonstração. Observamos que $*$ está bem definida, pois $\bar{}$ é bem definida. A linearidade, segue da linearidade de $\bar{}$. Sejam $a + bu, c + du \in \mathcal{D}$, então

$$(a+bu)(c+du)^* = ((ac+bd\lambda)+(ad+bc)u)^* = (ac+bd\lambda)^{\bar{}} + (ad+bc)^{\bar{}}u = \bar{c}\bar{a} - \bar{d}\bar{b}\lambda + (\bar{d}\bar{a} + \bar{c}\bar{b})u.$$

Logo, se $a = c = 0$ então $bu, du \in \mathcal{D}_1$ e $(budu)^* = (-)^{11}(du)^*(bu)^*$ e, o resultado segue. ■

Teorema 3.20. *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[u]$, $0 \neq u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \otimes \mathbb{K}u$. Se \mathcal{D} tem uma superinvolução então podemos escolher u tal que $u^* = u$ e $\lambda^* = -\lambda$. Se a característica não é 2 isso implica que $*|_{\mathcal{D}_0}$ é uma involução do segundo tipo. Inversamente, se $\bar{}$ é uma involução de \mathcal{D}_0 e $\lambda \neq 0$ um elemento de \mathbb{K} , onde \mathbb{K} é o centro de \mathcal{D}_0 , tal que $\bar{\lambda} = -\lambda$, então a superálgebra $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \otimes \mathbb{K}[u]$, $u^2 = \lambda$, tem uma superinvolução $*$ estendendo $\bar{}$ dada por*

$$(a + bu)^* := \bar{a} + \bar{b}u.$$

Demonstração. O centro de \mathcal{D} , $Z(\mathcal{D}) = \mathbb{K}[u]$ e como $u \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_1$, $u^* \in Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_1 = \mathbb{K}[u]$. Se $u + u^* \neq 0$, substituindo u por $u + u^*$ se necessário, podemos supor que $u = u^*$. De outra forma, $u^* = -u$. Aplicando a superinvolução $*$ a $u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$, obtemos $\lambda^* = (u^2)^* = u^*u^* = -\epsilon u\epsilon u$, $\epsilon = \pm 1$. Assim,

$$\lambda^* = -\lambda$$

e $*$ em \mathcal{D}_0 deve ser do segundo tipo se $\text{char}\mathbb{K} \neq 2$. Nesse caso, substituindo u por θu se necessário, podemos supor que $u^* = u$. Então em todo caso u , pode ser escolhido com $u^* = u$, $u^2 = \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda^* = -\lambda$.

Reciprocamente, dada uma involução $\bar{}$ de \mathcal{D}_0 e um elemento $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, onde \mathbb{K} é o centro de \mathcal{D}_0 , tal que $\bar{\lambda} = -\lambda$, verifica-se que

$$(a + bu)^* := \bar{a} + \bar{b}u$$

é uma superinvolução (veja 3.19) da superálgebra $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \otimes \mathbb{K}[u]$, $u^2 = \lambda$, estendendo $\bar{}$. ■

Lidaremos com os casos (iii), (iv) e (v) do Teorema de Superálgebra de Divisão juntos.

Lema 3.21. *Sejam $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ é uma superálgebra de divisão e $0 \neq v \in \mathcal{D}_1$ então*

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{D}_0 &\rightarrow \mathcal{D}_0 \\ a &\rightarrow vav^{-1} \end{aligned}$$

é um automorfismo.

Demonstração. Primeiro, observamos que ϕ é a restrição de ϕ_v a \mathcal{D}_0 e como $v \in \mathcal{D}_1$ segue que $vav^{-1} \in \mathcal{D}_0$, $\forall a \in \mathcal{D}_0$. Logo, ϕ está bem definida. Note que ϕ é um isomorfismo. Portanto, ϕ é um automorfismo. ■

Proposição 3.22. *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + \mathcal{D}_1$ uma superálgebra de divisão com $\mathcal{D}_1 \neq \{0\}$ e $Z(\mathcal{D}) \cap \mathcal{D}_1 = \{0\}$. Se \mathcal{D} tem uma superinvolução $*$ então \mathcal{D}_1 contém um $0 \neq v = v^*$. Além disso,*

$$d^* = -d, \quad \text{onde } d = v^2. \quad (3.3)$$

$$(b^*)\phi = ((b)\phi^{-1})^*, \quad \forall b \in \mathcal{D}_0. \quad (3.4)$$

Reciprocamente, se $$ é uma involução de \mathcal{D}_0 , satisfazendo (3.3) e (3.4), então*

$$(a + bv)^* := a^* + (b^*)\phi v$$

estende $$ a uma superinvolução de \mathcal{D} .*

Demonstração. Uma vez que $b + b^*$ é simétrico, podemos supor que existe um elemento simétrico $v \in \mathcal{D}_1$ não nulo ou a característica não é 2 e $b_1^* = -b_1$ para todo $b_1 \in \mathcal{D}_1$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} -a_0 b_1 &= (a_0 b_1)^* = b_1^* a_0^* = -b_1 a_0^* \\ a_0 b_1 c_1 &= b_1 a_0^* c_1 = b_1 (-a_0^* c_1^*) = b_1 (-c_1^* a_0^{**}) = b_1 (-c_1^* a_0) = b_1 c_1 a_0. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0$, então \mathcal{D}_0 é comutativo. Isso contradiz a dimensão infinita no caso *iv*. Ficamos, à esquerda, com uma \mathcal{D} álgebra de quatérnios de divisão no caso *iii* e álgebra de coquatérnios no caso *iv*. Em ambos os casos, uma vez que $v^{2*} = -v^* v^* = -v^2 \in \mathbb{K}$, logo $*|_{\mathbb{K}}$ é do segundo tipo e, argumentando como acima, podemos supor que $u^* = u$. Nesse caso, $(uv)^* = v^* u^* = -vu = uv$, contradizendo nossa suposição que \mathcal{D}_1 consiste de elementos anti-simétricos. Portanto, \mathcal{D}_1 contem um elemento simétrico não nulo v .

Para $a \in \mathcal{D}$, $(av)^* = va^* = (a^*)\phi v$ e $av = (av)^{**} = ((av)^*)^* = (a^*)\phi v)^* = (((a^*)\phi)^*)\phi v = (a^*)\phi^* \phi v$. Portanto,

$$(a^*)\phi = (a)\phi^{-1*}, \forall a \in \mathcal{D}_0.$$

Reciprocamente, se $*$ é uma involução de \mathcal{D}_0 , satisfazendo (3.3) e (3.4), então verifica-se que

$$(a + bv)^* := a^* + (b^*)\phi v$$

estende a uma superinvolução em \mathcal{D} . ■

3.2 Superálgebras Simples com Superinvolução

Lema 3.23. *Seja \mathcal{A} uma \mathbb{K} -superálgebra, onde \mathbb{K} é um corpo. Se \mathcal{A} é um superanel associativo com superinvolução $*$ tal que $(\mathcal{A}, *)$ é simples então \mathcal{A} é simples (como um superanel) ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^*$, com \mathcal{B} um superanel simples.*

Demonstração. Seja $(\mathcal{A}, *)$ um superanel associativo com superinvolução que é simples como um superanel com superinvolução. Se \mathcal{B} é um superideal não nulo de \mathcal{A}

então $\mathcal{B} + \mathcal{B}^*$ e $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^*$ são superideais $*$ -estáveis de \mathcal{A} . Portanto, $\mathcal{B} + \mathcal{B}^* = \mathcal{A}$. Se $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$ então $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}^* = \{0\}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^*$. Se I é um superideal próprio de \mathcal{B} então $I + I^*$ é um superideal próprio de \mathcal{A} . Portanto, \mathcal{A} é simples ou $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^*$ com \mathcal{B} simples. ■

No segundo caso, \mathcal{B}^* é isomorfo ao superanel super-oposto. Vamos considerar um superanel \mathcal{A} com a parte ímpar não nula e, para evitar índices duplos, escreveremos no momento $\mathcal{A} = A + B$, onde $A = \mathcal{A}_0$ é a parte par e $B = \mathcal{A}_1$ a parte ímpar, onde B é um bimódulo de A .

Teorema 3.24. *Sejam $\mathcal{A} = A + B$ um superanel associativo com $B \neq \{0\}$ e $*$ uma superinvolução de \mathcal{A} . Se $(\mathcal{A}, *)$ é simples então $(A, *|_A)$ é simples ou*

$$A = A_1 \oplus A_2, \quad B = B_1 \oplus B_2, \quad (3.5)$$

onde $(A_i, *|_{A_i})$ são simples e B_i são A -bimódulos irredutíveis com

$$B_1^* = B_2, \text{ e } B_2^* = B_1, \quad (3.6)$$

tais que

$$\begin{aligned} A_1 B_1 = B_1 = B_1 A_2, \quad A_2 B_2 = B_2 = B_2 A_2, \\ B_1 B_2 = A_1, \quad B_2 B_1 = A_2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$A_2 B_1 = \{0\} = A_1 B_2 = B_2 A_2 = B_1 B_1 = B_2 B_2. \quad (3.8)$$

Demonstração. Seja I um ideal $*$ -estável não nulo de A . Então $I + BIB + IB + BI$ é um superideal $*$ -estável de \mathcal{A} . Logo,

$$I + BIB = A \quad \text{e} \quad IB + BI = B. \quad (3.9)$$

Se $I \cap BIB \neq (0)$ então $J = I \cap BIB$ é um ideal $*$ -estável de A e, por (3.9) trocando I por J obtemos, $J + BJB = A$. Entretanto, $BJB \subseteq BBIBB \subseteq AIA \subseteq I$. Portanto, $A = J + BJB \subset I$

e $I = A$. Isto é $(A, *|_A)$ é simples como um anel com involução ou para todo ideal *-estável próprio I de A , $I \cap BIB = \{0\}$. Nesse caso, sejam

$$A_1 = I, \quad A_2 = BIB, \quad B_1 = IB, \quad B_2 = BI. \quad (3.10)$$

Se $z \in IB \cap BI$ então, para todo $b \in B$, $bz \in BIB \cap BBI \subseteq BIB \cap I = \{0\}$. Similarmente, $bz = 0$ e

$$IB \cap BI \subseteq \text{Ann}_B(B) := \{z \in B \mid Bz = \{0\} = zB\}.$$

Com $\text{Ann}_B(B)$ é um A -bimódulo é um superideal *-estável de \mathcal{A} , logo deve ser $\{0\}$. Portanto, $IB \cap BI = \{0\}$ e vale (3.5). Se J é um ideal *-estável próprio de A_1 então é um ideal *-estável de $A = A_1 \oplus A_2$. Além disso, $BJB \subseteq BIB = A_2$ e J gera um superideal próprio de \mathcal{A} , o que é impossível. Portanto A_1 , e por simetria, A_2 são *-simples. A equação (3.6) segue de (3.10) e dos fatos que I é *-estável e que $*$ é de período 2. Seja C_1 um A -sub-bimódulo de B_1 não nulo. Então C_1^* é um A -sub-bimódulo de B_2 e $C_1 C_1^* + C_1^* C_1 + C_1^*$ é um superideal *-estável de \mathcal{A} . Portanto, $C_1 = B_1$ e B_1 é irredutível. Similarmente, B_2 é irredutível.

Em seguida, $A_2 B_1 = (BIB)IB \subseteq AIB \subseteq IB$; Mas, $BIBIB = BI(BIB) \subseteq BIA \subseteq BI$ e $A_2 B_1 \subseteq B_1 \cap B_2 = \{0\}$. Além disso, por (3.5) temos que $B_1 B_1 = IBIB = A_1 A_2 = \{0\}$. As equações (3.8) são provadas de forma semelhante.

Observemos que $B_1 B_2 \subseteq A_1$ e $B_2 B_1 \subseteq A_2$ é uma consequência de (3.10). Desde que $B_1 B_2$ é um ideal *-estável de A_1 , $B_1 B_1 = \{0\}$ ou A_1 . Se $B_1 B_1 = \{0\}$ então, por (3.8), $B_1 B = \{0\}$ e $B + B_2 B_1$ é um superideal *-próprio de \mathcal{A} , uma contradição. Logo, $B_1 B_2 = A_1$ e, similarmente, $B_2 B_1 = A_2$. Por (3.10), $A_1 B_1 \subseteq B_1$ e deve ser igual a B_1 pela irredutibilidade de B_1 . As outras equações de (3.7) são provadas de forma semelhante. ■

Observação 2. Se $\mathcal{A} = A_1 \oplus A_2 + B_1 \oplus B_2$ com A_i *-simples, B_i irredutíveis A -bimódulos satisfazendo (3.6), (3.7) e (3.8) então não existe um ideal *-estável próprio de A com $I \cap BIB \neq \{0\}$.

Proposição 3.25. Se $\mathcal{A} = M_{p,q}(\mathcal{D})$, $p, q > 0$, é uma superálgebra com $\mathcal{A}_0 = M_p(\mathcal{A}) \oplus M_q(\mathcal{D})$ e $(A, *|_A)$ é simples então $p = q$, $M_p(\mathcal{D})$ tem uma involução \sim e $(\mathcal{A}, *)$ é isomorfo

a $M_{2p}(\mathcal{D})$ com a superinvolução $*$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \tilde{d} & -\mu\tilde{b} \\ \tilde{\mu}c & \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

para $a, b, c, d \in M_p(\mathcal{D})$ e $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $\mu\tilde{\mu} = 1$. Se \sim é de primeiro tipo, então μ pode ser escolhido igual a 1. Reciprocamente, se $M_p(\mathcal{D})$ tem uma involução \sim então (3.11) define uma superinvolução na superálgebra simples $M_{p,p}(\mathcal{D})$.

Demonstração. Como \mathcal{A} tem uma superinvolução então, pelo Teorema 2.67, \mathcal{D} também tem. Nesse caso, desde que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$, \mathcal{D} tem uma involução $\bar{}$ e $M_p(\mathcal{D})$ tem uma involução $\tilde{a} = \bar{a}^t$, onde t é a involução transposta. Como $(A, *|_A)$ é simples, $M_q(\mathcal{D})$ é anti-isomorfo a $M_p(\mathcal{D})$ e $p = q$. O isomorfismo, $(A, *|_A)$ é dado por $(M_p(\mathcal{D}) \oplus M_p(\mathcal{D}), *)$ com $(a, b)^* = (\tilde{b}, \tilde{a})$. Sejam

$$f_{11} = \sum_{i=1}^p e_{ii}, \quad f_{22} = \sum_{i=p+1}^{2p} e_{ii}, \quad f_{12} = \sum_{i=1}^p e_{ip+i}, \quad f_{21} = \sum_{i=1}^p e_{p+ii},$$

temos

$$\begin{aligned} A &= M_p(\mathcal{D})f_{11} \oplus M_p(\mathcal{D})f_{22}, \\ D &= M_p(\mathcal{D})f_{12} \oplus M_p(\mathcal{D})f_{21}, \quad f_{11}^* = f_{22}, \quad f_{22}^* = f_{11}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$f_{12}^* = (f_{11}f_{12}f_{22})^* = f_{22}^*f_{12}^*f_{11}^* = f_{11}f_{12}^*f_{22}$$

e

$$f_{12}^* = cf_{12}, \text{ para algum } c \in M_p(\mathcal{D}).$$

Para todo $a \in M_p(\mathcal{D})$,

$$(af_{12})^* = ((af_{11})f_{12})^* = cf_{12}\tilde{a}f_{22} = c\tilde{a}f_{12}$$

enquanto,

$$(af_{12})^* = (f_{12}(af_{12}))^* = \tilde{a}f_{11}cf_{12} = \tilde{a}cf_{12}.$$

Portanto, $c \in Z(M_p(\mathcal{D}))$. Além disso, $f_{12} = (f_{12})^{**} = c\tilde{c}f_{12}$ implica que $c\tilde{c} = I_p$. Assim, $c = \mu \in \mathbb{K}$ com $\mu\tilde{\mu} = 1$. Similarmente, $f_{21}^* = df_{21}$, $d \in Z(M_p(\mathcal{D}))$. Porém, $f_{22} = f_{11}^* = (f_{12}f_{21})^* = -df_{21}cf_{12} = -dcf_{22}$ que implica $d = -c^{-1}$. Portanto, $(af_{12}^*) = -\mu\tilde{a}f_{12}$ e $(af_{21})^* = \tilde{\mu}\tilde{a}f_{21}$ ou

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \tilde{d} & -\mu\tilde{b} \\ \tilde{\mu}\tilde{c} & \tilde{a} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

para $a, b, d, c \in M_p(\mathcal{D})$, se \sim é de primeiro tipo então $\mu = \pm 1$ e, permutando os indicies se necessário, podemos supor que $f_{12}^* = -f_{12}$ e $f_{21}^* = f_{21}$. O inverso é fácil de verificar. ■

Proposição 3.26. *Se $\mathcal{A} = M_{p,q}(\mathcal{D})$, $p, q > 0$, é uma superálgebra com $A = A_1 \oplus A_2$, $A_1 = M_p(\mathcal{D})$, $A_2 = M_q(\mathcal{D})$ e $(A, *|_A)$ não é simples então $(A_1, *|_{A_1})$ e $(A_2, *|_{A_2})$ são do mesmo tipo. Se $*$ é do segundo tipo então $*$ induzida por uma superforma hermitiana par não degenerada. Se \mathcal{A} é de dimensão finita sobre um corpo de característica diferente de 2 e $*$ é do primeiro tipo então um $(A_i, *|_{A_i})$ é de tipo ortogonal e outro de tipo simplético. A graduação em V pode ser escolhida de modo que $*$ seja induzida por uma superforma hermitiana par não degenerada.*

Demonstração. Se \mathcal{A} tem uma superinvolução então, pelo Teorema 2.67, \mathcal{D} tem uma involução $\bar{}$ e $*$ é o adjunto da superforma não-degenerada antihermitiana ou hermitiana. Portanto, as involuções $*|_{A_1}$ e $*|_{A_2}$ são do mesmo tipo. Se forem do segundo tipo, podemos supor que $*$ é induzida por uma superforma hermitiana não-degenerada.

Mostramos a seguir que se elas são do mesmo tipo e a dimensão de \mathcal{A} é finita então $*|_{A_1}$ e $*|_{A_2}$ não podem ser ambas do mesmo tipo (ortogonal ou simplética). Suponha que são. Estendendo o corpo base, se necessário, podemos supor que $A = M_m(\mathcal{C})$, com $\mathcal{C} = \mathbb{K}$ ou $M_2(k)$, os coquatérnios, $A_1 = M_r(\mathcal{C})$, $A_2 = M_s(\mathcal{C})$, $r + s = m$ e que as

involuções $*|_{A_i}$ são dadas por $^{-t}$, onde $^{-}$ é a involução padrão e \mathcal{C} e t é a involução transposta. Denotemos e_{ij} as unidades matriciais de $M_m(\mathcal{C})$. Logo, $e_{ij}^* = e_{ji}$ para $1 \leq i, j \leq r$ ou $r+1 \leq i, j \leq m$. Fixemos i, j tais que $1 \leq i \leq r$ e $r+1 \leq j \leq m$. Então

$$e_{ij}^* = (e_{ii}e_{ij}e_{jj})^* = e_{jj}e_{ij}^*e_{ii} \text{ e } e_{ij}^* = ce_{ji} \text{ para algum } c \in \mathcal{C}.$$

Para todo $a \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} (ae_{ij})^* &= ((ae_{ii})e_{ij}e_{jj})^* = ce_{ji}\bar{a}e_{ii} = c\bar{a}e_{ji} \text{ e} \\ (ae_{ij})^* &= (e_{ij}(ae_{jj}))^* = \bar{a}ce_{ji}. \end{aligned}$$

Logo, $c \in Z(\mathcal{C})$. Similarmente, $e_{ji}^* = de_{ij}$ para algum $d \in Z(\mathcal{C})$. Além disso, $e_{ij} = (e_{ij})^{**} = \bar{c}de_{ij}$ e como $^{-}$ é a identidade em $Z(\mathcal{C})$, $d = c^{-1}$. Finalmente, $e_{ii} = e_{ii}^* = (e_{ij}e_{ji})^* = -de_{ij}ce_{ji} = -e_{ii}$, uma contradição.

A superálgebra $\mathcal{A} = M_{p,q}(\mathcal{D})$ é isomorfa a superálgebra dos endomorfismo do \mathcal{D} -superespaço à esquerda $V = V_0 + V_1$, onde $\{dim_{\mathcal{D}} V_0, dim_{\mathcal{D}} V_1\} = \{p, q\}$. Seja $*$ uma superinvolução de \mathcal{A} que estabiliza $A_1 = M_p(\mathcal{D})$ e $A_2 = M_q(\mathcal{D})$. A involução $*|_{A_1}$ (respectivamente, $*|_{A_2}$) é induzida por uma forma hermitiana ou skewhermitiana h_1 (respectivamente, h_2) em V_0 (respectivamente, V_1). Se $*|_{A_1}$ e $*|_{A_2}$ são do primeiro tipo, uma das involuções é do tipo ortogonal e a outra do tipo simplética. Portanto, podemos supor que h_1 é hermitiana e h_2 é skewhermitiana. A superforma hermitiana $h = h_1 \perp h_2$ induz uma superinvolução \star de $End(V)$ cuja a restrição a A_i coincide com $*|_{A_i}$. A composição de \star com $*$, $\star\star$, é um automorfismo de \mathcal{A} . É interno e a restrição a A_1 e A_2 é a identidade. verifica-se que isso força $\star\star$ a ser uma conjugação ψ_c pela soma $c = \gamma_1 + \gamma_2$ de elementos centrais não nulos γ_i de A_i . Alterando a superforma para $\gamma_1 h_1 + h_2 \gamma_2$ irá produzir a superinvolução desejada. Portanto, $*$ é induzida por uma superforma hermitiana par em V . ■

Índice Remissivo

- álgebra
 - de Grupos , 5
 - graduada, 6
 - de Grassmann, 24
 - oposta, 31
 - super-oposta, 32
- age densamente, 20
- anel
 - graduado, 2
 - graduado de divisão, 5
 - graduado primitivo, 16
 - graduado primo, 15
 - graduado semiprimo, 16
 - graduado simples, 12
 - oposto, 6
 - super-oposto, 32
- Densidade, 47
- emparelhamento bilinear, 60
- envelope de Grassmann, 24
- graduação
 - trivial, 3
 - elementar, 30
- homomorfismo graduado, 13
- involução, 31
- módulo
 - graduado, 10
 - graduado fiel, 12
 - graduado simples, 12
- super-centralizador, 39
- superálgebra, 26
- superinvolução, 32
- supermódulos, 34
- teorema
 - densidade, 48
 - isomorfismo, 51
 - superálgebra de divisão, 79
- variedade, 23

Referências Bibliográficas

- [1] A. Elduque and M. Kochetov. *Gradings on simple Lie algebras*. Vol. 189. Providence, RI: American Mathematical Society, 2013.
- [2] A. Giambruno, M. Zaicev, Polynomial identities and asymptotic methods, Math. Surveys Monographs 122, AMS, Providence, RI, 2005.
- [3] C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen. *Methods of graded rings*. Springer, 2004.
- [4] C. Năstăsescu and F. Van Oystaeyen. *Graded ring theory*. Vol. 28. North-Holland Mathematical Library, 1982.
- [5] C. T. C. Wall, Graded Brauer groups, J. Reine Angew. Mth. 213(1963), 187-199.
- [6] I. N. Herstein, Rings with involution , Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.
- [7] L. H. Rowen, Ring Theory, Vol. I, Academic Press, San Diego/London, 1988.
- [8] N. Jacobson, Structure of Rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1956.
- [9] R. Hazra. *Graded Rings and Graded Grothendieck Groups*. ArXiv.org (2014). <http://arxiv.org/abs/1405.5071> [math.RA]. Acessado: .
- [10] M.L. Racine, E.I. Zelmanov, *Simple Jordan superalgebras with semisimple even part*. J. Algebra, 270 (2003), no. 2.

- [11] J. S. Rose. *A course on group theory*. Courier Corporation, 1994.
- [12] J.P. Tignol, A. R. Wadsworth, *Value functions on simple algebras, and associated graded rings*. Springer Monographs in Mathematics, 2015.
- [13] M.L. Racine, *Primitive superalgebras with superinvolution*. J.Algebra, 206 (1998), 2.
- [14] M.A. Knus, A.S. Merkurjev, M.Rost, and J.-P. Tignol, *The book of involutions*. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol.44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.