Math. Semesterber. (2007) 54: 1–12
DOI 10.1007/s00591-006-0012-9

PHILOSOPHISCHE UND HISTORISCHE SICHT

Reinhard Kahle

Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

Zum 100. Geburtstag von Kurt Gödel am 28. April 2006

Eingegangen: 28. April 2006 / Angenommen: 21. November 2006 / Online: 24. Januar 2007

> Kurt Gödel's achievement in modern logic … is a landmark which will remain visible far in space and time.[1]

Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze zählen zurecht zu den wichtigsten Resultaten der mathematischen Logik. Hier wollen wir diese Ergebnisse in einer nicht technischen Form vorstellen. Wir beginnen dabei mit dem historischen Kontext und diskutieren anschließend den ersten Unvollständigkeitssatz im Hinblick auf seine Aussage, Beweisidee, Beweismethode, Bedeutung und Beziehung zum Satz von Tarski. Bei dem zweiten Unvollständigkeitssatz beschränken wir uns auf die Aussage und Bedeutung. Zum Abschluß geben wir einige Hinweise zu weiterführender Literatur.

1 Historischer Kontext

1.1 Hilberts Programm

Gödels Arbeiten basieren in erster Linie auf einem grundlagentheoretischen Programm, das auf David Hilbert (1862–1943) zurückgeht. Hilbert, der einer der

Dieser Artikel ist die deutsche Originalfassung eines auf Einladung von Fernando Ferreira und Jorge Nuno Silva verfaßten Beitrags für einen Sonderband des *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* aus Anlaß des hundertsten Geburtstages von Kurt Gödel. Eine leicht gekürzte und modifizierte Fassung dieses Artikels ist in portugiesischer Übersetzung in diesem *Boletim*, Band 55, Seiten 63–76, im Oktober 2006 erschienen. Für Hinweise und Anregungen zu dieser Arbeit danke ich Fernando Ferreira, Volker Halbach und Peter Schroeder-Heister.

R. Kahle (✉)
CENTRIA, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, P-3001-454 Coimbra, Portugal, E-mail: kahle@mat.uc.pt

[1] John von Neumann am 14. März 1951 bei der Verleihung des Einstein Award an Kurt Gödel. Zitiert nach [Daw84, S. 74].

entschiedenen Verfechter der von Georg Cantor (1845–1918) begründeten transfiniten Mengenlehre war, wurde schon vor der Jahrhundertwende mit den darin auftretenden Paradoxien konfrontiert. Nicht zuletzt durch eine von ihm selbst entdeckte Paradoxie, [PK02] – die der heute nach Cantor benannten Paradoxie der Menge aller Mengen sehr ähnlich ist – sah er sich veranlaßt, die Frage der Konsistenz formaler mathematischer Systeme detailliert zu untersuchen. Und so findet sich die Frage nach der „Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome" bereits an der zweiten Stelle der berühmten Liste der 23 Hilbertschen Probleme, die er 1900 auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris vortrug, [Hil00].

Von 1917 an haben sich Hilbert und einige seiner Mitarbeiter dann intensiv mit der Frage nach der Konsistenz beschäftigt. Dabei verlieh die Auseinandersetzung mit Luitzen Brouwer (1881–1966) und Hermann Weyl (1885–1955) über die Zulässigkeit gewisser – heute *klassisch* genannter – Schlußweisen in der Mathematik ihrer Untersuchung zusätzliche Dringlichkeit. Diese Arbeiten finden ihren Ausdruck in dem sogenannten *Hilbertschen Programm* (siehe z.B. [Sie99]), das sich wie folgt skizzieren läßt:

Ausgehend von einer *Formalisierung* der in der Arithmetik verwendeten mathematischen Objekte, Zusammenhänge und Schlußweisen soll gezeigt werden, daß sich in diesem formalen System kein Widerspruch herleiten läßt. Wichtig ist dabei, daß dieser Nachweis mit Mitteln geführt wird, die selbst nicht im Verdacht stehen einen Widerspruch zu enthalten. Ohne diese Mittel exakt zu definieren, prägte Hilbert dafür den Begriff *finite Methoden*, womit insbesondere unendliche Entitäten verboten waren.

Wenn man sich vor Augen hält, daß formale Beweise endliche Objekte sind – Folgen oder Bäume von Formeln –, die ausgehend von den Axiomen des formalen Systems nach festen Regeln gebildet werden, reduziert sich die Frage der Konsistenz auf den Nachweis, daß keiner dieser Beweise mit einer Formel endet, die mathematisch falsch ist, z.B. 0 = 1.[2]

Dieser Ansatz ist für sich genommen sehr erfolgversprechend, doch der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz zeigt, daß er sich in seiner ursprünglichen Intention nicht umsetzen läßt.

1.2 Formalisierung der Mathematik

Schon vor den grundlagentheoretischen Arbeiten von Hilbert hatten vor allem Gottlob Frege (1848–1925), Giuseppe Peano (1858–1932), Richard Dedekind (1831–1916) sowie Alfred North Whitehead (1861–1947) und Bertrand Russell (1872–1970) die Formalisierung der Mathematik in Angriff genommen. Frege hat dabei mit der Einführung der *Prädikatenlogik* vor allem die Logik revolutioniert, die seit Aristoteles praktisch eine abgeschlossene, auf den Syllogismen basierende Disziplin gewesen war. Mit seinem *logizistischen* Programm, das die Mathematik ganz auf die Logik zurückführen wollte, ist er allerdings gescheitert, da sich sein formales System als inkonsistent erwies: Russell entdeckte, daß es die Bildung der *Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten*, gestattet. Die Frage, ob diese Men-

[2] Es ist ausreichend, nur diese eine falsche Formel als Endformel eines Beweises zu betrachten: Ist eine andere falsche Formel beweisbar, so gibt es auf Grund der Schlußregel *Ex-falso-quod-libet* auch einen Beweis, der in $0 = 1$ endet.

ge zu sich selbst gehört oder nicht, führt zu der heute so genannten *Russellschen Antinomie*.

Russell selbst hat zusammen mit Whitehead in dem monumentalen Werk *Principia Mathematica*, [WRPM], den Versuch unternommen, ein alternatives formales System aufzustellen, das frei von Antinomien ist. Wie der Titel von Gödels epochaler Arbeit [Göd31] zeigt, bezieht er sich bei den Beweisen der Unvollständigkeit explizit auf Whiteheads und Russells Ansatz.

Parallel zu Frege hatte Peano eine Formalisierung der Arithmetik entwickelt, die heute unter dem Namen *Peano-Arithmetik* allgemein als Standard akzeptiert wird. Sie wird daher in der Regel als Ausgangspunkt für eine technische Darstellung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze gewählt.

1.3 Semantik

Für das Verständnis der Gödelschen Sätze ist es wichtig, einen Unterschied zu machen zwischen einem *formalen System*, wie es zum Beispiel in der Peano-Arithmetik oder in den Principia Mathematica vorliegt, und einer vorgegebenen *mathematischen Struktur*, wie sie zum Beispiel durch *die* natürlichen Zahlen gegeben ist. Eine mathematische Struktur wird dabei üblicherweise als ein *mengentheoretisches Konstrukt* angesehen. Die *Existenz* solcher Strukturen wird von mathematischer Seite in aller Regel durch einen „gesunden Platonismus“ gesichert.[3] Im Allgemeinen ist es das Ziel der Mathematik, die gültigen Sätze innerhalb solcher Strukturen zu finden. Mathematische Strukturen sind häufig sehr komplex, und es stellt sich die Frage, wie sie direkt und *vollständig* erfaßt werden können. „Vollständig erfassen“ bedeutet hier, daß man eine (zumindest prinzipielle) Möglichkeit hat, die in einer bestimmten Struktur richtigen und falschen Sätze zu charakterisieren.[4] Die formalen Systeme dienen dazu, die einer Struktur zu Grunde liegenden, unstrukturierten Mengen in systematischer Form zu untersuchen; ohne sie ist das Auffinden von mathematischen Wahrheiten in einer Struktur mehr oder weniger der Zufälligkeit preisgegeben – beziehungsweise der Genialität eines Mathematikers. Spätestens bei dem Versuch mathematisches Schließen zu automatisieren muß man aber ohnehin von formalen Systemen ausgehen.

Anders als für Strukturen, die nach Definition die mathematischen Sätze in wahre und falsche aufteilen, werden bei formalen Systemen zunächst nur Formeln (und darunter auch ihre Negationen) betrachtet. Ein System heißt *konsistent*, wenn sich keine Formel zugleich mit ihrer Negation beweisen läßt. Die Konsistenz ist fundamental für die Sinnhaftigkeit eines formalen Systems. Die Frage nach ihr liegt Hilberts Programm zugrunde.

Zusätzlich kann man aber fragen, ob sich in einem System *alle wahren* Sätze beweisen lassen (womit auch alle falschen widerlegt wären, da sich ihre Negationen beweisen ließen). Man beachte aber, daß diese Frage nur *relativ zu einer Semantik* einen Sinn ergibt, da „wahr“ und „falsch“ bezüglich Strukturen definiert sind. Wenn ein formales System eine Struktur (oder einen Teil dieser) adäquat charakterisiert, ist diese ein *Modell* des Systems. An dieser Stelle spaltet sich die

[3] Dieser Platonismus wird von philosophischer Seite höchst skeptisch betrachtet, und er gibt Anlaß zu vielen Kontroversen zwischen Mathematikern und Philosophen.

[4] Es ist eine Konsequenz der Gödelschen Unvollständigkeitssätze, daß viele mathematische Strukturen tatsächlich *zu komplex* sind, um formal vollständig erfaßt werden zu können.

Frage auf, ob ein System alle wahren Sätze beweist, je nachdem, ob man ein formales System betrachtet, das *genau ein Modell* charakterisieren soll (wie z.B. die Peano-Arithmetik), oder ein formales System, das *verschiedene Modelle* (genauer: *einen gemeinsamen Teil verschiedener Modelle*) charakterisieren soll (wie z.B. die Axiomatisierung der Gruppentheorie).

Im letzteren Fall wird das formale System mit Sicherheit in dem Sinne unvollständig sein, daß es eine Formel gibt, die weder beweisbar noch widerlegbar ist; man braucht nur eine Formel zu betrachten, die in einem Modell wahr ist und in einem anderen falsch ist.[5] Für derartige Systeme kann man sinnvollerweise nur nach der *semantischen Vollständigkeit* fragen, d.h. danach, ob das System alle Formeln herleitet, die in *allen* Modellen wahr sind (und keine weiteren).

Für die Systeme, die ein Modell eindeutig charakterisieren sollen, stellt sich allerdings die weitergehende Frage, ob sich tatsächlich für jede Formel diese oder ihre Negation herleiten läßt. Dies ist die Frage nach der *syntaktischen Vollständigkeit*.

1.4 Der semantische Vollständigkeitssatz

In diesem Kontext hat Gödel schon vor seinen Unvollständigkeitssätzen ein Resultat bewiesen, das allein ausgereicht hätte, ihm einen Platz unter den bedeutendsten Logikern zu sichern. In seiner Dissertation bewies er die (semantische) Vollständigkeit der Prädikatenlogik erster Stufe, [Göd30]. Dabei beantwortet er positiv die von Hilbert und Ackermann in [HA28] aufgeworfene Frage, ob die gegebenen Axiome der Prädikatenlogik erster Stufe alle Aussagen beweisen, die in *allen* Modellen der Prädikatenlogik *zugleich* wahr sind.

2 Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz

2.1 Die Aussage

Bei der Untersuchung formaler Systeme für die Arithmetik, wie sie in der Peano-Arithmetik, aber auch in den Principia Mathematica vorliegen, stieß Gödel auf die Unvollständigkeitsphänomene, die sich in zwei wohl zu unterscheidenden Theoremen äußern. Wir wollen zuerst das erste dieser Theoreme betrachten. Es besagt, vereinfacht formuliert, daß ein formales System, das mindestens die Arithmetik umfaßt, eine Formel besitzt, die sich in diesem System weder beweisen noch widerlegen läßt.

Diese Formulierung ist „vereinfacht", da wichtige technische Voraussetzungen hier nicht genannt wurden. Dabei handelt es sich einerseits um die *rekursive Aufzählbarkeit* der Axiome, andererseits um die Voraussetzung, daß das formale System *konsistent* ist.

Rekursiv aufzählbar ist ein Begriff der Berechenbarkeitstheorie, der ausdrückt, daß es eine (partiell) *rekursive* Funktion gibt, die die natürlichen Zahlen auf die Menge der Axiome abbildet. Die technische Definition partiell rekursiver Funk-

[5] Für die Gruppentheorie kann man zum Beispiel die Formel $\exists x \exists y (x \neq y)$ betrachten, die aussagt, daß es mindestens zwei Gruppenelemente gibt. Diese ist in der trivialen Gruppe falsch, in jeder nichttrivialen Gruppe wahr.

tionen versucht dabei den intuitiven Berechenbarkeitsbegriff zu formalisieren (die partiell rekursiven Funktionen sind z.B. mit den auf einem gängigen Computer berechenbaren Funktionen identisch).

Die *Konsistenz* muß vorausgesetzt werden, da sich in einem inkonsistenten System sämtliche Formeln beweisen lassen. Gödel benötigte in seinem Originalbeweis (dem auch die unten angegebene Beweisskizze folgt) die sogenannte *ω-Konsistenz* als stärkere Voraussetzung. Allerdings konnte J. Barkley Rosser (1907–1989) später zeigen, daß sich der Gödelsche Beweis so modifizieren läßt, daß die (einfache) Konsistenz als Voraussetzung ausreicht, [Ros36].

Unter diesen Voraussetzungen besagt der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz also, daß die Peano-Arithmetik syntaktisch unvollständig ist. Doch der Beweis stellt diese Unvollständigkeit nicht nur für die Peano-Arithmetik fest, sondern für jede mögliche Ergänzung dieses Systems um (rekursiv aufzählbar viele) weitere Axiome. Dies bedeutet, daß sich prinzipiell kein (rekursiv aufzählbares) syntaktisch vollständiges Axiomensystem für die Arithmetik aufstellen läßt.

2.2 Die Beweisidee

Die Grundidee des Beweises des ersten Unvollständigkeitssatzes ist denkbar einfach. Man betrachte das klassische Paradoxon des *Lügners*: *Dieser Satz ist falsch.* Offensichtlich können wir diesem Satz keinen der beiden Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* zuordnen, ohne einen Widerspruch herauszufordern. Analog betrachte man den Satz: *Dieser Satz ist nicht beweisbar.* Sollte sich dieser Satz in der Sprache der Peano-Arithmetik *korrekt* ausdrücken lassen, kann er weder beweisbar noch widerlegbar sein. („Korrekt“ bedeutet hier, daß seine inhaltliche Deutung – insbesondere von „beweisbar“ – den Möglichkeiten der Peano-Arithmetik entspricht.)

Wäre der besagte Satz beweisbar, würde er seiner Bedeutung widersprechen, was im Widerspruch zur korrekten Formalisierung steht. Wäre seine Negation beweisbar, besagt die inhaltliche Deutung, daß der Satz beweisbar wäre, was zu einem Widerspruch führen würde. Somit bleibt nur die Möglichkeit, daß weder dieser Satz noch seine Negation beweisbar ist, d.h. aber, daß die Peano-Arithmetik *unvollständig* ist.

2.3 Die Beweismethode

Ein Teil der Faszination des Beweises geht davon aus, wie es mit Gödels Methode gelingt, den oben diskutierten Satz innerhalb der Peano-Arithmetik[6] korrekt zu formalisieren. Dabei lassen sich zwei Aufgaben trennen: Zuerst ist es nötig, *Beweisbarkeit* zu formalisieren. Danach muß man eine Möglichkeit finden, die Selbstreferenz („*Dieser* Satz ...“) auszudrücken.

Das erste Problem löste Gödel durch die *Arithmetisierung* der betreffenden formalen Sprache, eine Methode, die heute auch *Gödelisierung* genannt wird. Dabei ordnet man den Symbolen der formalen Sprache natürliche Zahlen zu und kodiert Terme und Formeln durch endliche Folgen dieser Zahlen. Diese Folgen lassen sich ihrerseits durch Zahlen kodieren. Eine auf diese Weise einer Formel ϕ zugeordnete

[6] Im Folgenden schreiben wir häufig kurz PA für Peano-Arithmetik und sagen, „PA beweist ϕ“, in Zeichen $\mathsf{PA} \vdash \phi$, wenn die Formel ϕ in der Peano-Arithmetik beweisbar ist.

Zahl wird auch *Gödelnummer* dieser Formel genannt und durch $\ulcorner\phi\urcorner$ ausgedrückt. Da nun formale Beweise durch endliche Folgen von Formeln repräsentiert werden können, lassen auch sie sich durch eine Zahl repräsentieren, die eine Folge von Gödelnummern der im Beweis verwendeten Formeln kodiert.

Die wichtigste technische Bedingung bei dieser Kodierung ist, daß sich eine Funktion definieren läßt, die die Substitution auf der Ebene der Gödelnummern simuliert. Das bedeutet, daß man eine arithmetische Funktion definieren kann, die aus der Gödelnummer einer Formel mit einer freien Variablen und dem Kode für einen Term die Gödelnummer derjenigen Formel berechnet, die man bei der Substitution der freien Variablen durch den Term erhält. Gödel konnte zeigen, daß sich alle zum Operieren mit Gödelnummern benötigten Funktionen[7] innerhalb der Peano-Arithmetik definieren lassen.[8] Damit haben wir die Möglichkeit, innerhalb der Peano-Arithmetik über diese zu sprechen. Insbesondere läßt sich ein zweistelliges *Beweisprädikat* $\mathrm{Beweis}(x, y)$ definieren, so daß für jede Formel ϕ gilt: PA beweist ϕ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß PA auch $\mathrm{Beweis}(\bar{n}, \ulcorner\phi\urcorner)$ beweist.[9] Wir können nun den metasprachlichen Existenzquantor über die natürlichen Zahlen durch den objektsprachlichen der Peano-Arithmetik ersetzen und das *Beweisbarkeitsprädikat* $\mathrm{Bew}(x)$ als $\exists y\, \mathrm{Beweis}(y, x)$ definieren. Damit erhalten wir, daß für eine gegebene Formel ϕ mit Gödelnummer $\ulcorner\phi\urcorner$ die Peano-Arithmetik die Formel ϕ genau dann beweist, wenn sie $\mathrm{Bew}(\ulcorner\phi\urcorner)$ beweist; in Zeichen:[10]

$$\mathsf{PA} \vdash \phi \;\text{ genau dann, wenn }\; \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner\phi\urcorner). \tag{1}$$

In einem zweiten Schritt zeigte Gödel, daß sich auch die Selbstreferenz auf formaler Ebene repräsentieren läßt. Dies folgt direkt aus dem *Diagonalisierungslemma*[11], das besagt, daß es zu jeder Formel $\phi(x)$ mit genau einer freien Variablen x eine Formel ψ, den *Fixpunkt von* ϕ, gibt, so daß die Peano-Arithmetik $\phi(\ulcorner\psi\urcorner) \leftrightarrow \psi$ beweist, in Zeichen:

$$\mathsf{PA} \vdash \phi(\ulcorner\psi\urcorner) \leftrightarrow \psi. \tag{2}$$

Der Fixpunkt ψ läßt sich inhaltlich als der selbstreferentielle Satz „Ich habe die Eigenschaft ϕ“ lesen. Daß es zu jeder (formal in PA ausdrückbaren) Eigenschaft

[7] Dabei hat Gödel das für die Berechenbarkeitstheorie (und damit für die Computertechnologie) grundlegende Konzept der *rekursiven Funktion* eingeführt; auch dies ist eine weitere Leistung, derentwegen allein man Gödel als herausragenden Logiker einstufen müßte.

[8] Man beachte aber, daß die Zuordnung $\phi \mapsto \ulcorner\phi\urcorner$ keine arithmetische Funktion ist, allein schon deshalb, weil sie nicht Zahlen auf Zahlen, sondern Formeln (syntaktische Objekte) auf Zahlen abbildet. Sie ist aber auch nicht mit der arithmetischen Gleichheit verträglich: Zum Beispiel sind die Gödelnummern $\ulcorner 1+1=2\urcorner$ und $\ulcorner 2=2\urcorner$ verschieden.

[9] $\bar{n}$ ist hier der formale Term, die *Ziffer*, der Sprache der Peano-Arithmetik, der die Zahl n repräsentiert.

[10] An dieser Stelle geht die technische Voraussetzung der ω-Konsistenz ein; ohne sie würde man die Richtung von rechts nach links in dieser Äquivalenz nicht zeigen können. Der Grund dafür liegt an einem subtilen Unterschied zwischen dem metasprachlichen Quantor über die natürlichen Zahlen und einem Quantor einer nicht ω-konsistenten Theorie. Wie bereits gesagt, hat Rosser gezeigt, daß für einen Beweis des ersten Unvollständigkeitssatzes die einfache Konsistenz ausreichend ist; Rossers Beweis folgt aber nicht mehr direkt der hier wiedergegebenen Gödelschen Argumentation.

[11] In allgemeiner Form wurde das Diagonalisierungslemma erst von Rudolf Carnap (1891–1970) [Car34, S. 91] aus dem Gödelschen Originalbeweis extrahiert, siehe [Göd34, Cap. 7].

ϕ einen solchen Fixpunkt gibt, ist durchaus überraschend und entspricht nicht unbedingt unserer Intuition.[12] Tatsächlich lassen sich in der mathematischen Logik viele paradox anmutende Ergebnisse mit Hilfe dieses Diagonalisierungslemmas beweisen.[13]

Nun betrachten wir den Fixpunkt ψ_G von $\neg\mathrm{Bew}(x)$. ψ_G besagt inhaltlich, daß ψ_G nicht beweisbar ist. Formal gilt nun:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{PA} \vdash \psi_G & \text{genau dann, wenn } \mathsf{PA} \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \psi_G \urcorner) & \text{auf Grund von (1),} \\ & \text{genau dann, wenn } \mathsf{PA} \vdash \neg\psi_G & \text{auf Grund von (2),} \\ & & \text{mit } \neg\mathrm{Bew}(x) \text{ für } \phi(x). \end{array}$$

Unter der Voraussetzung, daß PA konsistent ist, folgt somit, daß PA weder ψ_G noch $\neg\psi_G$ beweist, d.h. daß PA (syntaktisch) *unvollständig* ist.

2.4 Bedeutung

Dieser erste Unvollständigkeitssatz besagt zuerst nur, daß es eine Formel ψ_G gibt, die in der Peano-Arithmetik weder beweisbar noch widerlegbar ist. Dies ist bezogen auf die Peano-Arithmetik zwar ein starkes Resultat, besagt es doch, daß die Axiomatisierung syntaktisch nicht vollständig ist. Man könnte aber einwenden, daß die Peano-Arithmetik nicht die einzig mögliche, und vielleicht eine ungeschickt gewählte Formalisierung der Arithmetik ist. Es gibt eine offensichtliche Erweiterung der Peano-Arithmetik, die eventuell besser geeignet ist: Da ψ_G besagt, daß ψ_G nicht beweisbar ist, und da gerade gezeigt wurde, daß ψ_G tatsächlich nicht beweisbar ist, ist die Formel aus semantischer Sicht wahr. Insofern kann man ψ_G im Prinzip einfach zu PA als neues Axiom hinzufügen. Nennen wir dieses System PA^+, so ist die bezüglich PA unabhängige Formel ψ_G in PA^+ (trivial) herleitbar. Die eigentliche Stärke des ersten (wie auch des zweiten) Gödelschen Unvollständigkeitssatzes besteht aber darin, daß das Ergebnis *generisch* ist, d.h. es läßt sich unmittelbar von PA auf das erweiterte System PA^+ übertragen. Lediglich die Formalisierung des Beweisbarkeitsprädikats muß im Hinblick auf das neue Axiom angepaßt werden; sämtliche Beweisschritte lassen sich anschließend aber völlig analog zu dem Beweis für das ursprüngliche System PA durchführen. Ganz allgemein läßt sich der Gödelsche Beweis sofort auf sämtliche (allerdings höchstens rekursiv aufzählbare) Axiomensysteme übertragen, die mindestens die Arithmetik umfassen.

Im Unterschied zur logischen Bedeutung ist die unmittelbare *mathematische* Relevanz des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes eher gering: Die als unabhängig nachgewiesene Formel hat keine direkte mathematische Bedeutung. Erst 1977 haben Paris und Harrington ein mathematisches Beispiel – eine Erweiterung des endlichen Ramsey-Satzes – für eine von PA unabhängige Formel gefunden [PH77]. Heute lassen sich noch andere mathematisch gehaltvolle Beispiele

[12] Man denke an die folgende Analogie: Wenn wir statt der Formel ϕ eine zahlentheoretische Funktion f und statt Äquivalenz Gleichheit betrachten und von der Gödelisierung absehen, stellt sich völlig analog die Frage, ob jede Funktion f einen Fixpunkt n mit $f(n) = n$ hat; dies ist z.B. für die Funktion $f(x) = x + 1$ offensichtlich nicht der Fall.

[13] Eine interessante abstrakte Verallgemeinerung verschiedener dieser Resultate findet sich in [Ser03].

angeben (siehe z.B. [Put00] oder – für beweisbar rekursive Funktionen – [FW98]), womit gezeigt ist, daß es sich bei dem Unvollständigkeitsphänomen nicht einfach um ein isoliertes, mathematisch irrelevantes Problem formaler Systeme handelt.

An dieser Stelle kann man fragen, ob eines der neueren mathematischen Beispiele in einer Darstellung der Unvollständigkeitssätze nicht den ursprünglichen Gödelschen Beweis ersetzen sollte. Daß dies nicht der Fall ist, liegt an der Allgemeinheit des Gödelschen Beweises, der die prinzipielle Unvollständigkeit beliebiger (rekursiv aufzählbarer) Erweiterungen der Peano-Arithmetik zeigt; diese Allgemeinheit läßt sich nicht unmittelbar aus den mathematischen Beispielen gewinnen.[14]

2.5 Der Satz von Tarski

Der Satz von Tarski besagt, daß sich Wahrheit (bezogen auf die Struktur der natürlichen Zahlen) nicht arithmetisch definieren läßt. Dieser Satz hat einen engen Bezug zum ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz: Für den Beweis des Unvollständigkeitssatzes sind wir von dem Satz „*Dieser Satz ist nicht beweisbar.*“ ausgegangen. Analog könnte man versuchen, die semantische Variante dieses Satzes zu formalisieren: *Dieser Satz ist nicht wahr*, konkreter: *Dieser Satz ist in der Struktur der natürlichen Zahlen nicht wahr.* Würde eine solche Formalisierung gelingen, würde dieser Satz aber nicht zu einer Unvollständigkeit führen, sondern direkt zu einem Widerspruch: Anders als für ein Axiomensystem, ist für eine semantische Struktur per definitionem festgelegt, daß jede Aussage wahr oder falsch ist. Damit folgt im Umkehrschluss, daß sich dieser Satz nicht formalisieren läßt, genauer: die Eigenschaft, in der Struktur der natürlichen Zahlen wahr zu sein, läßt sich nicht formalisieren (bzw. definieren). Dies ist aber genau die Aussage des Satzes von Tarski.

Damit weiß man auch, daß die Menge der Sätze, die in der Struktur der natürlichen Zahlen wahr ist, nicht rekursiv aufzählbar sein kann. In diesem Zusammenhang erweist sich die Voraussetzung der rekursiven Aufzählbarkeit im ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz als notwendig: Das Axiomensystem, das genau die in der Struktur der natürlichen Zahlen wahren Sätze als Axiome umfaßt, ist trivialerweise vollständig. Aber es ist nicht rekursiv aufzählbar.

3 Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz

3.1 Die Aussage

Das zweite Theorem besagt (unter den gleichen technischen Voraussetzungen wie das erste), daß sich in der Peano-Arithmetik nicht ihre eigene Konsistenz beweisen läßt. Mit Hilfe der für den Beweis des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes entwickelten Techniken läßt sich die Konsistenz der Peano-Arithmetik schlicht

[14] Es gibt auch noch einen anderen technischen Unterschied: Der als unabhängig erwiesene Satz in Gödels Beweis ist eine mit einem Existenzquantor versehene quantorenfreie Aussage (solche Aussagen werden als Σ_1-Aussagen bezeichnet). Die mathematischen Beispiele haben einen zusätzlichen Allquantor (sie gehören zur Klasse der Π_2-Aussagen). Damit hat der Gödelsche Satz im Vergleich zu diesen eine geringere *logische Komplexität*, was bei der Betrachtung von Komplexitäten formaler Systeme und Aussagen relevant ist.

durch die Formel $\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ ausdrücken. Das zweite Theorem läßt sich dann für die Peano-Arithmetik formal wie folgt ausdrücken: $\mathsf{PA} \nvdash \neg\mathrm{Bew}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$. Auch dieses Theorem läßt sich auf beliebige (rekursiv aufzählbare) Erweiterungen der Peano-Arithmetik ausdehnen.

Wir werden hier nicht auf den Beweis eingehen, der im Wesentlichen technischer Natur ist. Er baut aber direkt auf dem ersten Unvollständigkeitssatz auf. Im Allgemeinen muß man allerdings für das Beweisbarkeitsprädikat gewisse zusätzliche Bedingungen sicherstellen. Diese sind heute unter dem Namen *Hilbert–Bernays–Löb-Beweisbarkeitsbedingungen* bekannt.[15] Unter den gleichen Voraussetzungen wie für den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz läßt sich dann zeigen, daß die Formel $\neg\mathrm{Bew}(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$ zu der als unabhängig erwiesenen Formel ψ_G formal äquivalent ist, siehe z.B. [Smo77] oder [BBJ02, Kap. 18].

Es ist bemerkenswert, daß Gödel selbst in seiner Arbeit [Göd31], deren Titel sie als Teil I kennzeichnet, den zweiten Unvollständigkeitssatz zwar formuliert, den Beweis aber nur skizziert hat. Der Beweis ist für eine Fortsetzung angekündigt worden, die aber nie geschrieben wurde. Der erste ausgearbeitete Beweis des zweiten Unvollständigkeitssatzes findet sich im zweiten Band von Hilbert und Bernays' *Grundlagen der Mathematik* [HB39]. Eine vollständige Darstellung neueren Datums wurde auch in [Fel00, Kap. 11] gegeben.

3.2 Bedeutung

Der zweite Unvollständigkeitssatz hat zur Folge, daß sich Hilberts Programm in seiner ursprünglichen Form nicht durchführen läßt: Da wir keine Möglichkeiten haben, mit den Mitteln der Peano-Arithmetik die Konsistenz dieser Theorie zu beweisen, werden wir es erst recht nicht mit schwächeren formalen Mittel erreichen. Damit ist der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz in seiner Bedeutung deutlich höher einzustufen als der erste.

Historisch hat Gödel damit aber nicht etwa einen Schlußpunkt unter das Hilbertsche Programm gesetzt, sondern im Gegenteil eine Revision dieses Programms veranlaßt, die der Beweistheorie eine neue Orientierung gab. Da nach dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz ein Konsistenzbeweis einer mathematischen Theorie, die mindestens die Arithmetik umfaßt, stärkere Mittel benötigt, als in dieser Theorie verfügbar sind, kann man fragen, welche Mittel dazu nötig sind. Gerhard Gentzen (1909–1945) hat bereits kurz nach den Gödelschen Resultaten gezeigt, daß die *transfinite Induktion* für quantorenfreie Formeln bis zu einer gewissen Ordinalzahl ein geeignetes Mittel zum Nachweis der Konsistenz einer Theorie ist [Gen36]. In Abhängigkeit von der philosophischen Grundeinstellung läßt sich die transfinite Induktion durchaus als ein *konstruktiv gerechtfertigtes* Konzept ansehen. Damit lassen sich dann Konsistenzbeweise innerhalb der Mathematik führen,

[15] Es handelt sich dabei um die folgenden drei Eigenschaften für eine gegebene Theorie T (z.B. PA):

1. $T \vdash \phi$ impliziert $T \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \phi \urcorner)$,
2. $T \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \phi \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \mathrm{Bew}(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$,
3. $T \vdash \mathrm{Bew}(\ulcorner \phi \urcorner) \wedge \mathrm{Bew}(\ulcorner \phi \to \psi \urcorner) \to \mathrm{Bew}(\ulcorner \psi \urcorner)$.

Die abstrakte Untersuchung dieser Beweisbarkeitsbedingungen ist Gegenstand der sogenannten *Beweisbarkeitslogik(en)*, siehe z.B. [Boo93].

die zwar nicht mehr Hilberts ursprünglichem Finitheitsanspruch genügen, aber zumindest dem den Intuitionisten eigenen Konstruktivitätsanspruch. Dieser Ansatz liegt dem der modernen Beweistheorie angehörenden Programm der *Ordinalzahlanalyse* zugrunde, siehe z.B. [Poh96] oder [Rat06].

Gödel selbst hat mit einem alternativen Vorschlag *Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes* [Göd58] die Möglichkeit aufgezeigt, *Funktionen höheren Typs* für die beweistheoretische Untersuchung formaler Systeme zu benutzen. Auch aus diesem Ansatz sind bedeutende Entwicklungen in der mathematischen Logik hervorgegangen, siehe z.B. [AF98].

4 Weiterführende Literatur

Die Literatur zu den Gödelschen Sätzen läßt sich heute kaum noch überblicken; betrachtet man nicht nur die historischen, mathematisch technischen und philosophischen Beiträge, die sich direkt mit den Sätzen auseinandersetzen, so wird man in praktisch jeder beweistheoretischen Arbeit (und vielen anderen Arbeiten in der mathematischen Logik) einen direkten oder indirekten Bezug zu den Gödelschen Resultaten finden. Jedes gute Lehrbuch zur mathematischen Logik sollte die Gödelschen Sätze behandeln.[16] Für eine mathematisch vollständige Darstellung der Gödelschen Sätze ist der Beitrag von C. Smorynski *The incompleteness theorems* im *Handbook of Mathematical Logic* [Smo77] empfehlenswert.

Eine lesenswerte nicht-technische Abhandlung über die Gödelschen Theoreme und ihre philosophische Bedeutung (insbesondere in Bezug darauf, was philosophisch *nicht* aus ihnen folgt) ist das Buch *Gödel's Theorem* von T. Franzén [Fra05]. In einem anderen Buch [Fra04] stellt derselbe Autor die Theoreme in einem weiten mathematischen Kontext dar.

Eine gute Sammlung mit Beiträgen zur historischen Entwicklung sowie zur mathematischen und philosophischen Bedeutung der Gödelschen Sätze (einschließlich einer englischen Übersetzung der Originalarbeit) findet sich in dem Band *Gödel's Theorem in focus* [Sha88]. Kurze für ein allgemeines mathematisches Publikum verfaßte Beiträge zu den Unvollständigkeitssätzen sind auch in einem dem Gödeljubiläum gewidmetem Heft der *Notices of the American Mathematical Society* vom April 2006 enthalten [AMS06].

Die *Collected Works of Kurt Gödel* [GödCW] bieten neben der sowohl in deutsch als auch in englischer Übersetzung abgedruckten Originalarbeit von 1931 [Göd31] auch eine exzellente Einführung von Steven Kleene. Ferner enthalten die zuvor unveröffentlichten Schriften aus dem Nachlaß sowie der Briefwechsel Gödels aufschlussreiche Informationen zu den Unvollständigkeitssätzen.

Was die deutschsprachige Literatur betrifft, so ist auch heute noch das grundlegende zweibändige Werk von Hilbert und Bernays [HB34], [HB39] zu empfehlen.

[16] In einigen Darstellungen, wie z.B. [Sho67], wird der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz ausgehend von dem historisch späteren *Unentscheidbarkeitssatz von Church* bewiesen; eine solche Darstellung stellt zwar eine gute Verbindung zwischen diesen beiden fundamentalen Resultaten der mathematischen Logik her, der Reiz des Gödelschen Originalbeweises geht dabei aber etwas verloren. Zudem läßt sich der zweite Unvollständigkeitssatz nicht in gleicher Weise gewinnen. Für eine Diskussion alternativer Beweise des ersten Unvollständigkeitssatzes siehe [Kot04].

Neueren Datums ist eine interessante Aufsatzsammlung zu den Gödelschen Resultaten, [K^+03, B^+03]. Zudem wird der Originalartikel von Gödel [Göd31] immer seinen eigenen Reiz behalten.

Literatur

[AF98] Avigad, J., Feferman, S.: Gödel's functional ("dialectica") interpretation. In: Handbook of Proof Theory, S. Buss, ed., pp. 337–405. North-Holland, Amsterdam 1998.

[AMS06] A tribute to Kurt Gödel. Notices of the American Mathematical Society **53**(4), April 2006

[B^+03] Buldt, B. et al. (eds.): Wahrheit und Beweisbarkeit. Kurt Gödel. Kompendium zum Werk, Band 2. öbv et hpt, Wien 2003

[BBJ02] Boolos, G.S., Burgess, J.P., Jeffrey, R.C.: Computability and logic, 4th edn. Cambridge University Press, Cambridge 2002

[Boo93] Boolos, G.: The logic of provability. Cambridge University Press, Cambridge 1993

[Car34] Carnap, R.: Logische Syntax der Sprache. Springer, Wien 1934

[Dav65] Davis, M. (ed.): The Undecidable. Raven Press, New York 1965

[Daw84] Dawson Jr., J.W.: The reception of Gödel's incompleteness theorems. In: Philosophy of Science Association, vol. 2. 1984. Wiederabgedruckt in: Shanker, S.G. (ed.): Gödel's Theorem in focus, S. 74–95. Routledge, London 1988. Zitiert nach diesem Abdruck.

[Fel00] Felscher, W.: Lectures on Mathematical Logic. Vol. III: The Logic of Arithmetic. Gordon and Breach, Amsterdam 2000

[Fra04] Franzén, T.: Inexhaustibility. Lecture Notes in Logic, vol. 16. ASL and AK Peters, Wellesley 2004

[Fra05] Franzén, T.: Gödel's Theorem. AK Peters, Wellesley 2005

[FW98] Fairtlough, M.V., Wainer, S.S.: Hierarchies of provably recursive functions. In: Handbook of Proof Theory, S. Buss (ed.), pp. 149–207. North-Holland, Amsterdam 1998

[Gen36] Gentzen, G.: Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Math. Ann. **112**, 493–565 (1936)

[Göd30] Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. Monatsh. Math. Phys. **37**, 349–360 (1930)

[Göd31] Gödel, K.: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. Monatsh. Math. Phys. **38**, 173–198 (1931)

[Göd34] Gödel, K.: On undecidable propositions of formal mathematical systems. 1934. Notes taken by Stephen C. Kleene and J. Barkley Rosser. Abgedruckt in [Dav65, p. 39–74].

[Göd58] Gödel, K.: Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. Dialectica **12**, 280–287 (1958)

[GödCW] Gödel, K.: Collected Works. 5 Volumes, S. Feferman et al. (eds.). Oxford University Press, Oxford 1986–2003

[HA28] Hilbert, D., Ackermann, W.: Grundzüge der theoretischen Logik. Springer, Berlin 1928

[HB34] Hilbert, H., Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik I. In: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol 40. Springer, Berlin 1934, 2. Aufl. 1968

[HB39] Hilbert, D., Bernays, P.: Grundlagen der Mathematik II. In: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 50. Springer, Berlin 1939, 2. Aufl. 1970

[Hil00] Hilbert, D.: Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900. In: Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900, pp. 253–297. 1900

[K^+03] Köhler, E. et al. (Hrsg.): Wahrheit und Beweisbarkeit. Kurt Gödel. Dokumente und historische Analysen, Band 1. öbv et hpt, Wien 2003

[Kot04] Kotlarski, H.: The incompleteness theorems after 70 years. Ann. Pure Appl. Logic **126**, 125–138 (2004)

[PH77] Paris, J., Harrington, L.: A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic. In: Handbook of Mathematical Logic, J. Barwise (ed.), pp. 1133–1142. North-Holland, Amsterdam 1977
[PK02] Peckhaus, V., Kahle, R.: Hilbert's Paradox. Hist. Math. **29**(2), 157–175 (2002)
[Poh96] Pohlers, W.: Pure proof theory, aims, methods and results. Bull. Symb. Log., **2**(2), 159–188 (1996)
[Put00] Putnam, H.: Nonstandard models and Kripke's proof of the Gödel Theorem. Notre Dame J. Formal Logic **41**(1), 53–58 (2000)
[Rat06] Rathjen, M.: The art of ordinal analysis. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM), Madrid, Spain, August 22–30, 2006, volume II: Invited lectures, M. Sanz-Solé et al. (eds.), pp. 45–69. European Mathematical Society, Zürich 2006
[Ros36] Rosser, B.: Extensions of some theorems of Gödel and Church. J. Symb. Log., **1**, 87–91 (1936)
[Ser03] Serény, G.: Gödel, Tarski, Church, and the Liar. Bull. Symb. Log. **9**(1), 3–25 (2003)
[Sha88] Shanker, S.G. (ed.): Gödel's Theorem in focus. Routlegde, London 1988
[Sho67] Shoenfield, J.: Mathematical Logic. Addison–Wesley, Reading, Mass. 1967
[Sie99] Sieg, W.: Hilbert's programs: 1917 1922. Bull. Symb. Log. **5**(1), 1–44 (1999)
[Smo77] Smorynski, C.: The incompleteness theorems. In: Handbook of Mathematical Logic, J. Barwise (ed.), pp. 821–865. North-Holland, Amsterdam 1977
[WRPM] Whitehead, A.N., Russell, B.: Principia Mathematica, 3 Bde., 1. Aufl. Cambridge University Press, Cambridge 1910–13