



UNIVERSIDADE DE COIMBRA

FACULDADE DE ECONOMIA

Árvores de Decisão Bicritério
em
Análise de Projectos

Pedro Manuel Cortesão Godinho

Coimbra

2003

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

FACULDADE DE ECONOMIA

Árvores de Decisão Bicritério
em
Análise de Projectos

Pedro Manuel Cortesão Godinho

Dissertação apresentada na Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra para obtenção do Grau de Doutor na área de Organização e Gestão de Empresas, especialidade de Ciências dos Sistemas nas Organizações, sob orientação do Prof. Doutor João Paulo Costa.

Coimbra

2003

Resumo

O presente trabalho apresenta uma abordagem multicritério à análise e selecção de estratégias em projectos de investimento, que utiliza árvores de decisão e modelos discretos de opções reais e se baseia na identificação das estratégias não dominadas. Apenas se por menoriza a utilização do tempo e do valor financeiro (ou o custo, que pode ser usado de forma análoga), mas a abordagem pode ser estendida a outros critérios. A dimensão das árvores de decisão correspondentes à abordagem pode levar a que a sua construção por um utilizador humano demore muito tempo, constituindo assim um entrave à sua aplicação. Há, no entanto, vários tipos de situações que podem ser modeladas utilizando um número limitado de parâmetros, o que permite que a construção das árvores seja automatizada em sistemas computacionais. Assim, apresenta-se um modelo bicritério, baseado na abordagem, para a análise de um tipo particular de tarefas que possam ser empreendidas através de um conjunto de diferentes processos.

As árvores que correspondem ao modelo podem atingir dimensões que tornem a sua construção e avaliação impraticáveis, mesmo em sistemas computacionais. Tendo este facto em conta, é proposto um algoritmo para a identificação mais rápida das estratégias não dominadas do modelo, que não requer a construção das correspondentes árvores. São efectuados alguns testes ao algoritmo, que permitem concluir que este tem um desempenho particularmente bom quando o número de estratégias não dominadas é pequeno.

Quando o número de estratégias não dominadas é grande, o agente de decisão pode ter dificuldade em seleccionar uma delas. Nestas situações, uma abordagem interactiva pode conduzi-lo na exploração do conjunto de estratégias, simplificando a sua tarefa. Assim, é proposta uma abordagem interactiva à selecção de uma estratégia, para o caso particular em que se utiliza o tempo médio.

O presente trabalho inicia-se pela apresentação das medidas clássicas de avaliação de projectos de investimento. Discutem-se ainda os casos em que é apropriado utilizar cada uma delas, e propõe-se um enquadramento para a utilização simultânea de diferentes medidas. Apresentam-se depois os instrumentos e modelos para incorporação do risco, e das decisões sequenciais, no valor dos projectos. É proposta uma abordagem multicritério para análise de projectos que utiliza árvores de decisão. Apresenta-se um modelo bicritério baseado nessa abordagem, e analisam-se algumas propriedades matemáticas desse modelo. Apresenta-se um algoritmo para a identificação das estratégias não dominadas do modelo, bem como os resultados de alguns testes a esse algoritmo. Finalmente, propõe-se uma abordagem interactiva à selecção de uma estratégia, quando se utiliza o tempo médio no modelo bicritério.

Title: Using Bicriteria Decision Trees in Project Analysis

Abstract

This work presents a multicriteria approach to the analysis and selection of strategies in investment projects. This approach uses decision trees and discrete-time real option models, and it is based on the identification of the non-dominated strategies. The present work only considers the use of two criteria, time and financial value, but this approach can be extended to other criteria. Since the decision trees that correspond to the approach may sometimes become quite large, their construction by human users may be a hard task. However, there are several particular situations that may be modelled with a limited number of parameters, allowing the corresponding trees to be automatically built by a computer. A specific model, based on the multicriteria approach, is defined for the analysis of some tasks that can be undertaken through the use of several different processes.

The trees generated by the model will usually be very large, and calculations may take a long time and require large amounts of memory. Therefore, the use of the model may become impracticable, even on a computer. With this fact in mind, an algorithm is proposed for a faster identification of the non-dominated strategies, without actually building the tree. Some tests are performed, in order to compare the performance of the algorithm with the performance of the method that consists on building and evaluating the tree. It is concluded that the algorithm performs particularly well when the number of non-dominated strategies is small.

When there is a large number of non-dominated strategies, the decision-maker will often have some difficulties in selecting the preferred alternative. In such cases, an interactive approach may help the decision-maker to choose a strategy. So, an interactive approach to the selection of a strategy is proposed, for the particular situation in which average time is used.

The present work begins with a presentation of the classical measures for project evaluation, and it discusses which situations may be suited for the use of different measures. It also proposes a multicriteria framework for the simultaneous use of different measures, and presents some tools and models for incorporating risk in project value when sequential decisions may be made. A multicriteria approach, based on the use of decision trees, is then presented. A bicriteria model, based on that approach, is also presented, as well as some of its mathematical properties. An algorithm is proposed for a faster identification of the non-dominated strategies of the model. Finally, an interactive approach to the selection of a strategy in the bicriteria model is also presented.

Agradecimentos

O tema desta dissertação foi-me sugerido pelo Professor João Paulo Costa. Ao longo de todo o processo de elaboração do trabalho foi um orientador permanentemente disponível para discutir as matérias em tratamento e apresentar sugestões, do que resultou clarificação de ideias em alguns casos, correcções de rumo noutros. No final do processo a leitura crítica que fez do manuscrito foi contributo inestimável para a sua harmonização final. Por todo este apoio, pelo encorajamento nas ocasiões mais difíceis do trabalho, e ainda pela amizade, aqui fica o meu apreço e gratidão.

Pela mão do Professor João Clímaco fui recebido na Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra; com sua orientação e também do Professor João Sousa Andrade tive, em boa hora, o privilégio e o gosto de preparar a minha dissertação de mestrado. Ambos estes Professores sempre me honraram com manifestações de interesse pelo bom andamento do meu trabalho, e também com conselhos e desinteressada amizade, o que, para mim, constituiu um importante incentivo na preparação do presente trabalho.

Manifestações de interesse pelo meu trabalho recebi-as também da Professora Adelaide Duarte, do Professor José Soares da Fonseca e do Professor Paulino Teixeira. Estas constituíram para mim um estímulo, que aqui agradeço.

A Joana, o Óscar, o Paulo e o Vítor, com quem partilhei o gabinete, foram sempre amigos com quem pude contar. O excelente ambiente de trabalho e de convívio nesse gabinete foram um enquadramento precioso para o desenrolar deste trabalho. Para eles, o meu sincero agradecimento.

À Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra estou grato pelo acolhimento e por todo o apoio que me foi disponibilizado. Uma palavra de especial apreço vai para a biblioteca da FEUC; a Sra. D. Manuela Branquinho foi incedível na atenção e no esforço para rápida obtenção das publicações que solicitei.

O INESC de Coimbra apoiou-me nas deslocações ao estrangeiro, e disponibilizou-me material informático, o que agradeço.

Parte da investigação que foi efectuada no âmbito da presente dissertação foi apoiada pela FCT e FEDER, através dos projectos PRAXIS/PCSH/C/CEG/28/96 e POCTI/32405/GES/2000.

Por último (mas não menos importante) um agradecimento muito especial à Ana, aos meus pais e ao Luís, pela amizade, carinho e apoio; as sugestões pontuais que o meu pai fez ao manuscrito final levaram a uma melhoria da forma; agradeço ainda à Catarina a ajuda na produção da capa.

À Ana.

Aos meus pais.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objectivos	3
1.2	Organização do trabalho	4
2	Avaliação de projectos – métodos clássicos	7
2.1	Os objectivos da empresa e dos seus accionistas	9
2.2	O <i>cash flow</i>	10
2.2.1	A inflação e o <i>cash flow</i>	12
2.2.2	Tempo discreto e tempo contínuo	13
2.3	O Valor Actual Líquido (VAL)	14
2.4	O custo do capital	17
2.4.1	O custo médio ponderado do capital (WACC)	18
2.4.2	A utilização de modelos de equilíbrio do mercado	22
2.4.2.1	O modelo de equilíbrio dos activos financeiros (CAPM)	22
2.4.2.2	O modelo de equilíbrio por arbitragem (APT)	29
2.5	A utilização de <i>cash flows</i> equivalentes certos	33
2.6	O financiamento e a avaliação do projecto	36
2.6.1	O WACC	37
2.6.2	O VAL ajustado (VAA)	37
2.6.3	Outras abordagens	40
2.7	A Taxa Interna de Rentabilidade (TIR)	42
2.8	Outras medidas de avaliação financeira de projectos	49
2.8.1	Medidas de valor equivalente	50
2.8.2	Medidas de taxa de rentabilidade	54
2.8.3	Índices de rentabilidade	59
2.8.4	Medidas de período de recuperação	61
2.8.5	Medidas de rentabilidade contabilística	62
2.9	A utilização das medidas financeiras de avaliação de projectos	63

2.9.1	A utilização de medidas das diferentes classes	63
2.9.1.1	Motivos para a utilização de medidas diferentes do VAL . .	63
2.9.1.2	Situações em que é apropriado utilizar medidas das diferen- tes classes	65
2.9.2	A utilização simultânea de diferentes medidas	70
2.9.2.1	A utilização simultânea de medidas da mesma classe	71
2.9.2.2	A utilização simultânea de medidas de classes diferentes . .	73
2.10	Avaliação multicritério de projectos de investimento	75
2.11	Resumo	79
3	Incorporação do risco e decisões sequenciais na avaliação de projectos	81
3.1	Críticas à utilização tradicional das medidas financeiras	81
3.2	Simulação de Monte Carlo	85
3.3	Árvores de decisão	87
3.3.1	A utilização de árvores de decisão na avaliação de projectos	89
3.3.2	Árvores de decisão estocásticas	92
3.3.3	A utilização de múltiplos atributos em árvores de decisão	93
3.4	Opções reais	95
3.4.1	Conceitos básicos sobre opções	97
3.4.2	VAL "estático" e VAL "estratégico" ou "expandido"	98
3.4.3	A utilização da Análise de Opções Reais em árvores de decisão . . .	99
3.4.3.1	A abordagem da carteira de réplica	99
3.4.3.2	A abordagem das probabilidades neutrais face ao risco . . .	102
3.4.4	A modelação e a avaliação de opções	106
3.4.5	Problemas específicos das opções reais	109
3.4.5.1	O activo subjacente para projectos de investimento	110
3.4.5.2	O risco de mercado e o risco privado	111
3.4.5.3	Outras diferenças entre opções financeiras e opções reais . .	112
3.4.6	Análise da decisão e opções reais	113
3.5	Resumo	114

4	Uma abordagem multicritério à análise de projectos em situação de incerteza	117
4.1	A importância do critério tempo na análise de projectos	117
4.2	A abordagem	119
4.2.1	Linhas gerais da abordagem	120
4.2.2	O nodo de passagem do tempo	121
4.2.3	Linhas gerais da avaliação das árvores de decisão	122
4.2.4	A agregação dos valores dos critérios em nodos de incerteza	124
4.2.4.1	Agregação do critério valor financeiro	124
4.2.4.2	Agregação do critério tempo	124
4.2.5	A avaliação dos nodos de decisão	129
4.3	Definições e bases matemáticas da abordagem	131
4.3.1	Coerência na agregação de valores de critérios	131
4.3.2	Coerência na agregação do valor financeiro e do tempo	132
4.3.3	Fundamentos para a eliminação de subestratégias dominadas	140
4.4	Exemplo de aplicação	141
4.5	Análise de algumas questões referentes à abordagem	145
4.6	Resumo	152
5	Um modelo bicritério para análise de tarefas homogéneas	155
5.1	Apresentação do modelo	156
5.2	O modelo	157
5.2.1	Definição do modelo	157
5.2.2	A agregação dos critérios	158
5.2.3	Alguns conceitos referentes ao modelo	160
5.2.4	Questões relativas à utilização do modelo	164
5.3	Exemplos de aplicação	165
5.4	Limitações e possíveis extensões do modelo	169
5.5	Resumo	172
6	Propriedades matemáticas do modelo bicritério	175
6.1	Objectivos do estudo das propriedades matemáticas	176
6.2	Propriedades matemáticas para o caso geral	178
6.3	Propriedades matemáticas para a utilização do tempo médio	197
6.4	Propriedades matemáticas para a utilização do tempo máximo	208
6.5	Resumo	210

7	A geração de estratégias no modelo bicritério – um algoritmo	213
7.1	Apresentação do algoritmo	213
7.2	O algoritmo	216
7.3	Definição detalhada do algoritmo	224
7.4	Exemplo de funcionamento do algoritmo	229
7.5	Testes ao desempenho do algoritmo	235
7.5.1	Características dos testes	235
7.5.2	Resultados dos testes	240
7.5.3	Síntese dos resultados	253
7.6	A utilização do algoritmo com o tempo máximo	255
7.6.1	Porquê utilizar o tempo máximo	256
7.6.2	Resultados dos testes	256
7.6.3	Síntese dos resultados	263
7.7	Outras aplicações do algoritmo	264
7.8	Resumo	266
8	A utilização do tempo médio no modelo bicritério – uma abordagem interactiva	269
8.1	A utilização do modelo com o tempo médio	269
8.2	Descrição geral da abordagem interactiva	271
8.3	Um procedimento interactivo para a escolha de uma estratégia	273
8.4	Uma técnica para a identificação de uma estratégia	275
8.4.1	A meta-árvore	276
8.4.2	Inicializações e conceitos relevantes	278
8.4.3	Cálculo de limites inferiores para os critérios	279
8.4.4	A pesquisa da meta-árvore	280
8.5	Algoritmos	282
8.5.1	Algoritmo para o procedimento de escolha de uma estratégia	282
8.5.2	Algoritmo para a técnica de identificação de uma estratégia	284
8.6	Exemplo de aplicação da abordagem interactiva	286
8.6.1	Definição do exemplo e interacção inicial do procedimento	286
8.6.2	Primeira utilização da técnica para gerar uma estratégia	287
8.6.3	Utilização do procedimento para obter uma estratégia satisfatória	294
8.7	Resumo	297
9	Considerações finais	299

Bibliografia	305
A Glossário	321
B Notação	325
B.1 Notação dos métodos clássicos de avaliação de projectos e opções reais . . .	325
B.2 Notação da abordagem multicritério	328
B.3 Notação do modelo bicritério	329
B.4 Notação do algoritmo	331
B.5 Notação da abordagem interactiva utilizada com o tempo médio	333
C Tabelas com os resultados dos testes	337
C.1 Testes relativos ao modelo geral	337
C.2 Testes relativos ao tempo máximo	345

Lista de Figuras

3.1	Nodo de incerteza com dois arcos (à esquerda) e nodo de decisão com dois arcos (à direita).	87
3.2	Árvore de decisão correspondente à escolha entre uma lotaria e um valor certo.	88
3.3	Árvore de decisão para cálculo do VAL no exemplo da mina descrito no texto. Os valores monetários encontram-se em euros.	90
3.4	Árvore de decisão com probabilidades neutrais face ao risco, utilizada para cálculo do VAL no exemplo da mina descrito no texto. Os valores monetários encontram-se em euros.	105
3.5	Exemplo de uma <i>lattice</i> binomial (à esquerda) e de uma <i>lattice</i> trinomial (à direita). Ambas têm quatro níveis, cada um correspondente a um intervalo de tempo.	107
4.1	Nodo de passagem do tempo.	121
4.2	Equivalência entre um nodo de passagem do tempo e uma sequência de nodos de incerteza.	121
4.3	Exemplo de nodo binomial com um tempo incerto.	125
4.4	Nodo binomial genérico com tempo incerto.	126
4.5	Aplicação da primeira regra para avaliação dos nodos de decisão. A, B e C são subestratégias.	129
4.6	Aplicação da segunda regra para avaliação dos nodos de decisão. A, B e C são subestratégias.	130
4.7	Árvore de decisão correspondente ao exemplo descrito no texto. Os valores financeiros encontram-se em milhares de euros e os tempos em anos.	143
4.8	Representação das estratégias não dominadas para o exemplo de utilização da abordagem descrito no texto.	146
4.9	Representação de duas estratégias, referidas no texto, com a mesma distribuição de probabilidade do tempo final.	150
5.1	Nodo de incerteza binomial representando o avanço do projecto por cada utilização do processo P_i	158
5.2	Equivalentes certos pedidos ao agente de decisão para cada processo, por forma a calcular as probabilidades ajustadas ao tempo.	159

5.3	Parte da árvore de decisão correspondente ao modelo, para dois processos, com $x_{1,1} = 0.35$, $x_{2,1} = 0.55$, $x_{1,2} = 0.30$ e $x_{2,2} = 0.60$	161
5.4	Exemplo de árvore de estratégia, para dois processos, com $x_{1,1} = 0.35$, $x_{2,1} = 0.55$, $x_{1,2} = 0.30$ e $x_{2,2} = 0.60$	162
5.5	Combinações tempo/custo para as estratégias não dominadas da aplicação relativa ao exemplo da produção de camisolas descrito no texto. Só um ponto se não situa na mancha alongada à direita do gráfico.	167
7.1	Conjuntos iniciais calculados pelo algoritmo, para o exemplo descrito no texto.	216
7.2	Fluxograma com representação simplificada do algoritmo descrito no texto.	218
7.3	Fluxograma para determinação do conjunto V	219
7.4	B. Fluxograma para determinação do intervalo I para o qual se vai calcular $S(i, I)$	220
7.5	D. Fluxograma para determinação do valor de <i>proxmudanca</i>	221
7.6	C. Fluxograma para o cálculo de $S(i, I)$	222
7.7	Representação dos nodos de incerteza, e dos correspondentes equivalentes certos, assumidos para o exemplo descrito no texto.	229
7.8	Árvores de estratégia representando as estratégias não dominadas do exemplo descrito no texto.	235
7.9	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 1 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. . . .	241
7.10	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 2 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. . . .	242
7.11	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 3 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. Para este conjunto de sequências não foi possível obter os resultados relativos ao método básico, pois a memória do sistema utilizado foi insuficiente para executar esses testes. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.	243
7.12	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 4 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.	244
7.13	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 5 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.	245

7.14	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 6 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.	246
7.15	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e da dimensão das árvores (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 7 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.	247
7.16	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda), do número de estratégias não dominadas e da dimensão das árvores (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 8 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.	247
7.17	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 9 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. . . .	249
7.18	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 10 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. . . .	250
7.19	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 11 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. . . .	251
7.20	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 12 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. . . .	251
7.21	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 13 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. . . .	252
7.22	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 14 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. . . .	254
7.23	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 1 de sequências e utilizando o tempo máximo (a curva referente ao algoritmo confunde-se com o eixo das abcissas).	258
7.24	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 2 de sequências e utilizando o tempo máximo (a curva referente ao algoritmo confunde-se com o eixo das abcissas).	258

7.25	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 3 de sequências e utilizando o tempo máximo. Para este conjunto de sequências não foi possível obter os resultados relativos ao método básico, pois a memória do sistema utilizado foi insuficiente para executar esses testes.	259
7.26	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 4 de sequências e utilizando o tempo máximo (a curva referente ao algoritmo confunde-se com o eixo das abcissas).	260
7.27	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 6 de sequências e utilizando o tempo máximo (a curva referente ao algoritmo confunde-se com o eixo das abcissas).	261
7.28	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 5 de sequências e utilizando o tempo máximo (os tempos do método básico e do algoritmo são sempre iguais entre si, e iguais a 0, confundindo-se as respectivas curvas com o eixo das abcissas).	261
7.29	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e da dimensão das árvores (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 7 de sequências e utilizando o tempo máximo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.	262
7.30	Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda), do número de estratégias não dominadas e da dimensão das árvores (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 8 de sequências e utilizando o tempo máximo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.	263
8.1	Correspondência entre um caminho da meta-árvore e uma árvore de estratégia incompleta.	277
8.2	Exemplo de selecção de uma alternativa num nodo da meta-árvore. Assume-se uma restrição $C(s) \leq 15$	281
8.3	Árvores representando as estratégias que minimizam o tempo (à esquerda) e o custo (à direita), para o exemplo descrito no texto.	287
8.4	Nodo inicial da meta-árvore, e respectivas árvores de estratégia incompletas, para o exemplo descrito no texto. A_1 e A_2 representam as duas alternativas a considerar.	289
8.5	Inclusão do segundo nodo na meta-árvore, e respectivas árvores de estratégia incompletas, para o exemplo descrito no texto. A_3 e A_4 representam as duas alternativas a considerar.	290
8.6	Inclusão do quarto nodo na meta-árvore, e respectivas árvores de estratégia incompletas, para o exemplo descrito no texto. A_7 e A_8 representam as duas alternativas a considerar, A_5 e A_6 são as alternativas do nodo anterior e A_3 a única alternativa potencial.	292

8.7	Inclusão do sétimo nodo na meta-árvore, e respectivas árvores de estratégia, para o exemplo descrito no texto. A_{13} e A_{14} representam as duas alternativas a considerar, A_9 , A_{10} , A_{11} e A_{12} são as alternativas correspondentes aos dois nodos anteriores e A_3 e A_9 são as alternativas potenciais.	293
8.8	Configuração final da meta-árvore para a aplicação da técnica ao exemplo descrito no texto. A_{15} e A_{16} representam as duas alternativas do último nodo acrescentado, sendo mostradas as respectivas árvores de estratégia incompletas. A_{13} é a alternativa correspondente à melhor estratégia obtida que respeita o limite de custo.	295
8.9	Estratégia obtida quando se aplica a técnica para identificação de uma estratégia, com $C^M = 5.641$, ao exemplo descrito no texto.	296

Lista de Tabelas

7.1	Valores obtidos quando se fazem as inicializações no caso do exemplo descrito no texto.	230
C.1	Resultados obtidos para o conjunto 1 de sequências.	337
C.2	Resultados obtidos para o conjunto 2 de sequências.	338
C.3	Resultados obtidos para o conjunto 3 de sequências.	338
C.4	Resultados obtidos para o conjunto 4 de sequências.	339
C.5	Resultados obtidos para o conjunto 5 de sequências.	339
C.6	Resultados obtidos para o conjunto 6 de sequências.	340
C.7	Resultados obtidos para o conjunto 7 de sequências.	341
C.8	Resultados obtidos para o conjunto 8 de sequências.	341
C.9	Resultados obtidos para o conjunto 9 de sequências.	342
C.10	Resultados obtidos para o conjunto 10 de sequências.	342
C.11	Resultados obtidos para o conjunto 11 de sequências.	342
C.12	Resultados obtidos para o conjunto 12 de sequências.	343
C.13	Resultados obtidos para o conjunto 13 de sequências.	343
C.14	Resultados obtidos para o conjunto 14 de sequências.	344
C.15	Resultados obtidos para o conjunto 1 de sequências utilizando o tempo máximo.	345
C.16	Resultados obtidos para o conjunto 2 de sequências utilizando o tempo máximo.	345
C.17	Resultados obtidos para o conjunto 3 de sequências utilizando o tempo máximo.	346
C.18	Resultados obtidos para o conjunto 4 de sequências utilizando o tempo máximo.	346
C.19	Resultados obtidos para o conjunto 5 de sequências utilizando o tempo máximo.	347
C.20	Resultados obtidos para o conjunto 6 de sequências utilizando o tempo máximo.	347

C.21 Resultados obtidos para o conjunto 7 de sequências utilizando o tempo máximo.	348
C.22 Resultados obtidos para o conjunto 8 de sequências utilizando o tempo máximo.	349

Capítulo 1

Introdução

As decisões de alocação de capital são provavelmente as mais difíceis e mais importantes das empresas. Com efeito, a tomada de decisões incorrectas pode não só penalizar os proprietários das empresas (os seus accionistas), mas também colocar em perigo a sobrevivência destas. Para auxiliar a decisão de alocação do capital entre os projectos de investimento disponíveis para uma empresa, são muitas vezes utilizados critérios que têm por base medidas de avaliação financeira de projectos (também referidas simplesmente por medidas financeiras). Diferentes medidas financeiras podem basear-se em diferentes pressupostos, ou considerar diferentes perspectivas sobre a rentabilidade do projecto, e podem também conduzir a decisões de alocação do capital diferentes. Métodos de análise multicritério podem ser usados para chegar a uma decisão a partir de um conjunto de medidas com resultados contraditórios. No entanto, é necessário averiguar quais as situações em que se devem utilizar as diferentes medidas, e quais destas faz sentido utilizar simultaneamente.

A avaliação de projectos não pode ser dissociada da forma como eles são geridos depois de implementados. Na verdade, o resultado da avaliação de um projecto depende da estratégia assumida para a sua implementação, ou seja, da forma como se planeia responder aos diferentes cenários que possam ocorrer. As medidas financeiras estão particularmente vocacionadas para situações em que se pode determinar antecipadamente o valor esperado dos benefícios e custos (geralmente o valor esperado dos *cash flows*) que o projecto vai gerar em cada período. Nas situações em que existe risco¹, o valor esperado destes benefícios e custos pode depender da estratégia de implementação do projecto. Neste tipo de situações, a utilização de medidas financeiras pode ser facilitada pelo recurso a instrumentos auxiliares que ajudem também a determinar qual a melhor estratégia de implementação.

¹No presente trabalho, as expressões *risco* e *incerteza* vão ser utilizadas como referências à impossibilidade de conhecer com exactidão as consequências de uma decisão. Assumir-se-á, geralmente, que estas consequências podem ser descritas através de distribuições de probabilidades.

As árvores de decisão são um instrumento auxiliar útil para avaliar projectos, quando existe risco e quando estão envolvidas decisões sequenciais a tomar ao longo deles. No entanto, a utilização clássica de árvores de decisão na avaliação de projectos de investimento pode conduzir a uma incorporação incoerente do risco no seu valor. Para ultrapassar este problema, foram desenvolvidos modelos de avaliação baseados na teoria das opções, designados por modelos de opções reais, que podem ser utilizados na avaliação de árvores de decisão, permitindo, assim, que estas sejam utilizadas para uma avaliação teoricamente coerente de projectos de investimento.

A utilização clássica de árvores de decisão na avaliação de projectos está orientada para a obtenção do valor financeiro destes. No entanto, existem alguns factores que não podem ser incorporados neste valor financeiro, e que são fundamentais para determinar se estes devem ser empreendidos, e qual a estratégia mais favorável para a sua implementação. O tempo é, muitas vezes, um elemento importante para esta decisão: o adiamento ou atraso de um projecto pode permitir que um concorrente estabeleça uma posição mais vantajosa no mercado, pode conduzir a uma degradação na relação com clientes, ou pode impedir a empresa de aproveitar oportunidades que venham a surgir; por outro lado, o adiantamento de um projecto pode trazer benefícios diversos para a empresa. Nestes casos, o impacto do tempo nem sempre pode ser quantificado no valor financeiro. Assim, torna-se importante que se definam abordagens à análise de projectos que incorporem múltiplos critérios em árvores de decisão. Uma abordagem baseada na identificação de todas as estratégias não dominadas² pode ser particularmente útil, uma vez que deixa ao agente de decisão³ a liberdade de escolher o método a utilizar para seleccionar a melhor estratégia.

A dimensão das árvores de decisão cresce de forma exponencial com o número de situações de decisão e de situações de incerteza. Assim, existe a possibilidade de as árvores se tornarem muito grandes, levando muito tempo a serem construídas e avaliadas, e podendo mesmo a sua definição e avaliação tornarem-se impraticáveis. A utilização de múltiplos critérios pode tornar estes problemas mais sérios, uma vez que passam a existir mais valores que têm que ser introduzidos nas árvores, e considerados na sua análise. O problema da definição das árvores é particularmente importante, uma vez que esta definição tem geralmente que ser empreendida por um analista⁴, enquanto a avaliação pode muitas vezes ser efectuada de forma automática por um sistema computacional.

Há vários tipos de situações que podem ser modeladas utilizando um número limitado

²Uma estratégia é não dominada se não existe nenhuma outra estratégia melhor ou igual em todos os critérios e estritamente melhor em pelo menos um critério.

³No presente trabalho vai considerar-se a existência de um analista e um agente de decisão. O analista é o responsável pela modelação e utilização dos métodos envolvidos. O agente de decisão é o responsável por todas as decisões. Note-se que os papéis de analista e agente de decisão podem ser desempenhados pela mesma pessoa.

⁴Ver nota 3.

de parâmetros, sendo as correspondentes árvores definidas a partir de um conjunto de regras. Estes modelos podem auxiliar a resolução do problema da definição das árvores, pois permitem a sua automatização em sistemas computacionais.

A utilização de um modelo em que as árvores de decisão podem ser construídas de forma automática, em sistemas computacionais, liberta o analista das dificuldades inerentes à sua definição. No entanto, é possível que a natureza dos projectos a considerar conduza a árvores de grande dimensão, cuja construção e avaliação possa levar muito tempo e requerer muito espaço de memória. Num modelo baseado na identificação das estratégias não dominadas o problema da avaliação é particularmente importante, pois o número destas estratégias pode ser muito elevado. Assim, a utilização do modelo baseada na construção e avaliação das correspondentes árvores de decisão pode ser inviável. Para ultrapassar este problema é conveniente desenvolver algoritmos ou abordagens que permitam a aplicação do modelo sem requerer a construção e avaliação explícita das árvores correspondentes.

Se uma aplicação do modelo conduzir a um grande número de estratégias não dominadas, o agente de decisão pode ter dificuldade em seleccionar uma delas. Nestas situações, pode ser utilizado um procedimento interactivo para apoiar o agente de decisão na selecção de uma estratégia. Um tal procedimento apenas o irá confrontar com um pequeno número de estratégias em cada interacção. Desta forma, a tarefa do agente de decisão ficará facilitada, uma vez que já não lhe será pedido que examine simultaneamente um número elevado de alternativas. Em vez disso, ele será conduzido na exploração do conjunto de estratégias não dominadas, sendo as suas decisões limitadas a pequenos conjuntos de alternativas.

No caso de o procedimento interactivo estar integrado numa abordagem interactiva mais global, então este pode ainda apresentar outras vantagens. Com uma abordagem interactiva, apenas será necessário identificar um número pequeno de estratégias em cada interacção. Se for possível desenvolver técnicas ou algoritmos rápidos para a identificação de um número pequeno de estratégias, então os tempos de espera envolvidos em cada interacção serão pequenos. Uma abordagem interactiva pode, assim, evitar tempos de espera longos, necessários para identificar conjuntos numerosos de estratégias não dominadas, e requerer apenas um esforço computacional mais pequeno, demorando um tempo mais curto, para a identificação das estratégias correspondentes a cada interacção.

1.1 Objectivos

Exposta a motivação da presente dissertação, definiu-se um conjunto de objectivos, que agora se descrevem de forma sucinta.

1. Determinar as situações em que as diferentes medidas financeiras podem ser úteis, e definir um enquadramento que permita determinar que medidas financeiras podem ser usadas simultaneamente.
2. Definir uma abordagem multicritério, baseada na identificação das estratégias não dominadas, que utilize árvores de decisão na análise de projectos de investimento.
3. Elaborar um modelo, baseado na abordagem multicritério, que possa ser aplicado a algumas situações particulares, e que permita a definição das árvores a partir de um número limitado de parâmetros.
4. Desenvolver um algoritmo que permita uma identificação rápida das estratégias não dominadas do modelo.
5. Desenvolver uma abordagem interactiva à utilização do modelo.

Todo o trabalho vai ser desenvolvido na prossecução destes objectivos, e a sua organização vai obedecer à estrutura geral que se descreve na secção seguinte.

1.2 Organização do trabalho

Para além do presente capítulo, de carácter introdutório, e de um capítulo final que faz um balanço do trabalho e aponta vias para investigação futura, o corpo do trabalho está organizado em 7 capítulos, iniciando-se cada um deles com uma breve introdução ao tema e terminando com um curto resumo. O conteúdo genérico de cada um dos capítulos (excluindo o presente) descreve-se seguidamente.

O *capítulo 2* irá focar-se no modo como devem ser utilizados os métodos clássicos de avaliação de projectos de investimento, e irá ainda analisar a utilização destes métodos em modelos multicritério. Serão analisados os objectivos que devem presidir às decisões das empresas e discutida a utilização das medidas de avaliação financeira na averiguação do contributo dos projectos de investimento para estes objectivos. Várias medidas de avaliação financeira de projectos serão apresentadas, e discutir-se-ão alguns tópicos referentes à sua aplicação. Averiguar-se-ão os casos em que pode fazer sentido a utilização de cada uma das medidas, e considerar-se-á ainda a utilização simultânea de diferentes medidas financeiras. Será também discutida a aplicação de métodos multicritério na avaliação de projectos de investimento.

A utilização tradicional das medidas financeiras apresenta dificuldades importantes nas situações em que existe risco e, simultaneamente, a possibilidade de tomar decisões ao longo do projecto. O *capítulo 3* vai debruçar-se sobre os instrumentos e modelos para incorporação

do risco, e das decisões sequenciais, no valor dos projectos. Discutir-se-ão as críticas, feitas por vários autores, à utilização de medidas financeiras na avaliação de projectos em situações que envolvam risco e decisões sequencias. Apresentar-se-ão instrumentos que podem auxiliar a utilização de medidas financeiras (simulação de Monte Carlo e árvores de decisão), e modelos de opções reais, para ultrapassar as dificuldades relativas à aplicação de medidas financeiras.

A utilização exclusiva do valor financeiro pode ser insuficiente para a análise de alguns projectos. A abordagem multicritério que consta do *capítulo 4* utiliza árvores de decisão na análise e selecção de estratégias em projectos de investimento, baseando-se na identificação de estratégias não dominadas e permitindo escolher posteriormente um método multicritério para seleccionar a preferida pelo agente de decisão. Será detalhada a utilização de dois critérios, que são o tempo e o valor financeiro (ou o custo, que pode ser utilizado de forma análoga).

As árvores de decisão para a análise multicritério de projectos de investimento podem tornar-se muito grandes, levando muito tempo a serem construídas e avaliadas, e a sua definição e avaliação podem mesmo tornar-se impraticáveis. No entanto, existem vários tipos de situações que podem ser modeladas utilizando um número limitado de parâmetros, sendo as correspondentes árvores definidas de forma automática a partir de um conjunto de regras. O *capítulo 5* apresentará um modelo, baseado na abordagem multicritério, que vai permitir a definição das árvores a partir de um conjunto limitado de parâmetros. Este modelo pressupõe que o tempo e o custo são os critérios de decisão relevantes, e permite a análise de uma tarefa homogénea que pode ser empreendida através da utilização de vários processos diferentes. Serão também apresentados alguns exemplos de aplicação do modelo.

O modelo bicritério resolve o problema da definição das árvores por parte do analista. No entanto, a dimensão das árvores torna frequentemente impraticável a sua construção e avaliação em sistemas computacionais, devido ao tempo e memória requeridos. No *capítulo 6* serão apresentadas algumas propriedades matemáticas que podem auxiliar no desenvolvimento de algoritmos e abordagens que permitam uma utilização mais eficiente do modelo. Consideram-se as propriedades que podem ser aplicadas à formulação mais geral do modelo, e também as que podem ser aplicadas a dois casos particulares que se acredita serem de interesse: os casos em que se utiliza o tempo médio e o tempo máximo como forma de agregação do tempo.

O *capítulo 7* desenvolve um algoritmo para a identificação das estratégias não dominadas do modelo bicritério, o qual não requer a construção das árvores de decisão. Este algoritmo utiliza algumas propriedades matemáticas do modelo e algumas ideias da programação dinâmica probabilística. Mostrar-se-á um exemplo de aplicação do algoritmo. Serão ainda apresentados os resultados de alguns testes ao seu desempenho.

A geração de todas as estratégias não dominadas é uma das abordagens possíveis à utilização do modelo bicritério. No *capítulo 8* propõe-se uma abordagem diferente; esta é interactiva, para selecção de uma estratégia, e definida para um caso particular de utilização do modelo – o caso em que se utiliza o tempo médio como forma de agregação do tempo. Apresentar-se-ão os componentes desta abordagem: um procedimento interactivo, que conduz o agente de decisão na pesquisa das estratégias, e uma técnica para identificar uma nova estratégia em cada interacção. Um exemplo vai ilustrar a aplicação desta abordagem interactiva.

Finalmente, o balanço que se faz da prossecução dos objectivos estabelecidos consta do *capítulo 9*, no qual, por um lado se comentam os resultados obtidos, e por outro se discutem brevemente linhas de trabalho futuro que estes possam apontar.

No *Apêndice A* apresenta-se um glossário onde se definem os conceitos que não são comuns na literatura sobre análise e avaliação de projectos, e aqueles cuja forma como estão definidos apresente características particulares. No *Apêndice B* reproduz-se a notação utilizada no presente trabalho; deste apêndice, organizado em cinco secções correspondentes às áreas do trabalho a que a notação se refere, é excluída a notação que apenas se utiliza localmente em definições, demonstrações ou exemplos específicos. Tabelas com os principais resultados obtidos nos testes ao algoritmo do capítulo 7 constam do *apêndice C*.

Capítulo 2

Avaliação de projectos – métodos clássicos

A generalidade das grandes empresas tem um número elevado de proprietários – os seus accionistas. Podendo ter preferências distintas, estes colocam os gestores da empresa perante a dificuldade de satisfazer a todos. Como será detalhado na primeira secção do presente capítulo, pode considerar-se que, se os gestores agirem por forma a maximizar o valor total da empresa estarão a agir no melhor interesse de todos os accionistas. Assim, este trabalho irá focar-se no modo de seleccionar os projectos a empreender por uma empresa, com a finalidade de atingir o objectivo de maximização do valor. Neste capítulo, será discutida a utilização de metodologias clássicas na avaliação de projectos de investimento.

Há já muitos anos que a comunidade científica considera que uma das medidas de avaliação financeira de projectos - o Valor Actual Líquido (VAL) - tem maior sustentação teórica que as restantes, pois os critérios baseados nesta medida, se bem utilizados, conduzem à maximização do valor da empresa. Assim, considera-se geralmente que os critérios de escolha ou aceitação de projectos baseados no VAL devem ser preferidos aos restantes critérios (ver, por exemplo, [22], [35], [38] ou [49]). No entanto, numerosos inquéritos que têm vindo a ser feitos em empresas de diferentes países permitem concluir que, apesar da utilização do VAL apresentar um aumento, outras medidas de rentabilidade dos projectos, como a Taxa Interna de Rentabilidade (TIR) e o período de recuperação⁵, continuam a ser amplamente utilizadas⁶ ([28], [46], [63], [110], [112], [141], [156], por exemplo). A ampla

⁵Como nota Lefley [112], a generalidade dos estudos não faz distinção entre o período de recuperação convencional e o período de recuperação a valores actualizados, considerando apenas uma medida com a designação genérica de período de recuperação.

⁶Aparentemente o VAL encontra uma maior dificuldade para se impor nas pequenas empresas do que nas grandes empresas. Enquanto o estudo de 1997 de Block [28] aponta o VAL como sendo apenas a 4^a medida mais utilizada pelas pequenas empresas dos Estados Unidos, depois do período de recuperação, da taxa média de rentabilidade contabilística e da TIR (por esta ordem), o estudo de 1999 de Farragher, Kleiman e Sahu [63] indica que o VAL já se encontra a disputar com a TIR o primeiro lugar nas medidas mais utilizadas pelas grandes empresas do EUA.

utilização do período de recuperação é um dado particularmente curioso, dado que esta medida mostra grande resistência às severas críticas que lhe são feitas pela generalidade dos autores⁷.

A utilização generalizada de medidas que são consideradas pelos académicos como teoricamente pouco fundamentadas pode estar relacionada com o facto de essas medidas poderem ser mais fáceis de comunicar e entender ([97], [112]), de endereçarem diferentes dimensões, ou perspectivas, da rentabilidade ([1], [46], [74], [112]), ou pode estar relacionada com a existência de conflitos entre os interesses dos gestores e os dos accionistas ([43], [46], [112]). Pode ainda acontecer que, nalgumas situações específicas, diferentes das situações típicas normalmente consideradas na literatura, existam medidas que sejam mais apropriadas do que o VAL ([1], [8], [74], [130], [131]). Pode, assim, ser interessante analisar, não só a medida com maior sustentação teórica (o VAL), mas também outras que são utilizadas pelas empresas ou propostas na literatura.

Estas medidas de avaliação financeira de projectos são a base de critérios que permitem decidir qual a melhor alocação do capital entre os projectos de investimento disponíveis para a empresa. Lorie e Savage, no seu artigo de 1955 ([121]), consideravam três problemas relativos à selecção de investimentos na presença de racionamento de capital. Estes problemas tinham em conta *propostas de investimento independentes* e *propostas de investimento mutuamente exclusivas*⁸. Sem considerar racionamento de capital, os problemas a resolver serão dois, e podem colocar-se da seguinte forma: Dado um projecto de investimento independente de todos os restantes, deve o projecto ser aceite ou rejeitado? Dado um conjunto de alternativas de investimento mutuamente exclusivas, qual deve ser seleccionada? Note-se que, neste último caso, se não existir a obrigação de implementar um dos projectos então deve englobar-se, no conjunto de propostas mutuamente exclusivas, a possibilidade de não investir em nenhum projecto. Neste capítulo, ir-se-ão considerar os critérios clássicos, baseados nas medidas financeiras, que a literatura apresenta para resolver estes problemas.

No presente capítulo começará por analisar-se quais devem ser os objectivos da empresa por forma a satisfazer os seus accionistas. As medidas de avaliação financeira de projectos deverão servir para medir o contributo dos projectos de investimento para estes objectivos. Na base da maioria destas medidas está o conceito de *cash flow*. Definir-se-á o que é o *cash flow* e discutir-se-ão alguns tópicos relacionados com este conceito, como a utilização de valores nominais ou valores reais e a utilização de *cash flows* em tempo contínuo ou

⁷O período de recuperação mede um tempo – o tempo que demora a recuperação do capital investido. Assim, é possível que a sua popularidade se deva à importância que os gestores atribuem ao critério tempo. Alguns motivos que justificam esta importância serão discutidos no capítulo 4.

⁸Dois ou mais propostas de investimento são independentes se a aceitação de uma não influencia significativamente a aceitação das outras, nem é significativamente influenciada por esta. Duas ou mais propostas de investimento são mutuamente exclusivas se a aceitação de uma delas implica que se não possa aceitar mais nenhuma dessas propostas. Note-se que outros tipos de dependência mais complexos se podem normalmente obter usando apenas a independência e a exclusão mútua ([74]).

em tempo discreto. Será então apresentado VAL e os critérios associados a esta medida, e discutido o cálculo de um parâmetro essencial na utilização deste – o custo do capital. O risco é usualmente incorporado no cálculo do VAL através de um ajustamento no custo do capital. No entanto, é também possível incorporar o risco através da utilização de *cash flows* equivalentes certos, e esta forma de ajustamento dos *cash flows* será também discutida. Considerar-se-ão ainda os efeitos do financiamento na avaliação dos projectos. Passar-se-á à apresentação de uma outra medida que é normalmente destacada na literatura, a TIR, e serão discutidos os seus critérios de aplicação e os pressupostos de reinvestimento que lhe estão associados. Outras medidas da rentabilidade dos projectos serão de seguida apresentadas. Discutir-se-ão então os casos em que pode fazer sentido a utilização de cada uma das medidas, e considerar-se-á ainda a utilização simultânea de diferentes medidas financeiras. No final, será sucintamente discutida a aplicação de métodos multicritério na avaliação de projectos de investimento, com ênfase nos métodos mais referidos na literatura financeira.

2.1 Os objectivos da empresa e dos seus accionistas

Qualquer empresa tem obrigações para com um conjunto de interessados⁹ (como os seus proprietários, trabalhadores, clientes e fornecedores) e para com a sociedade em geral. No entanto, a principal obrigação da empresa é para com os seus proprietários (os seus accionistas). Assim, os gestores desta devem agir prioritariamente de acordo com os interesses dos seus accionistas. Mas esta afirmação pode parecer algo ambígua. Afinal, se a empresa tiver muitos accionistas, estes podem ter preferências muito distintas – enquanto alguns podem preferir concentrar o seu consumo no curto prazo, outros podem preferir fazê-lo no médio ou longo prazo.

Tendo em conta a possível diversidade de preferências dos seus accionistas, o que devem fazer os gestores de uma empresa? Que accionistas devem satisfazer? Esta questão foi abordada pelo economista americano Irving Fisher, na sua obra "*The Theory of Interest*", publicada em 1930. Segundo Fisher, na presença de mercados de capitais perfeitos, as preferências dos accionistas podem ser separadas das decisões de investimento, isto é, as decisões de investimento que mais favorecem cada accionista individual são independentes das preferências desse accionista, sendo, assim, as mesmas para todos os accionistas ([35], capítulo 2; [49], capítulo 1). Deste modo, se os gestores agirem por forma a maximizar o valor total da empresa estarão a agir no melhor interesse não só do conjunto de todos os accionistas mas também de cada accionista individual. O objectivo principal dos gestores deve, assim, ser a *maximização do valor da empresa*.

⁹A palavra "interessado" é aqui utilizada com o mesmo significado do inglês *stakeholder*.

Este princípio da separação das decisões de investimento e de consumo tem por base o papel dos mercados de capitais. Se os accionistas de uma empresa preferirem consumir mais cedo, podem endividar-se ou vender a sua participação na empresa. Se preferirem consumir mais tarde, podem investir o dinheiro que entretanto a empresa lhes possa ter atribuído em depósitos bancários ou títulos financeiros. No entanto, para que esta separação das decisões de investimento e de consumo seja totalmente válida existe um pressuposto crucial – o pressuposto de os mercados de capitais serem perfeitos, isto é:

- não existirem barreiras que impeçam o acesso ao mercado e não existir nenhum participante individual suficientemente poderoso para exercer um efeito significativo sobre o preço;
- o acesso ao mercado de capitais não ter custos e não existirem resistências que impeçam a livre transacção de títulos;
- a informação relevante sobre cada um dos títulos estar ampla e livremente disponível;
- não existirem distorções decorrentes dos impostos.

Claramente que os mercados de capitais não são perfeitos (ver, por exemplo, [73]) e, assim sendo, não existe nenhuma forma simples de o gestor conciliar as diferentes preferências dos seus accionistas. No entanto, e como argumentam Brealey e Myers ([35], capítulo 2), a maioria dos estudos publicados indicam que, em geral, estes funcionam ”relativamente bem” (a obra de Brealey e Myers apresenta, no capítulo 13, vários estudos que apontam nesse sentido, e os desvios encontrados em [73] também não são muito significativos). Além disso, algumas das distorções mais importantes provocadas por imperfeições dos mercados podem ser explicitamente consideradas, por forma a ser possível manter a separação das decisões de investimento e consumo. Assim, a maximização do valor da empresa pode seguramente ser utilizada como uma boa aproximação à satisfação das preferências dos seus accionistas. Por outro lado, este é um objectivo que faz, intuitivamente, sentido. Assim, ir-se-á considerar que o objectivo dos gestores deve ser a *maximização do valor da empresa*.

2.2 O *cash flow*

Um conceito que está na base de grande parte das medidas de avaliação financeira de projectos é o de *cash flow*. O *cash flow* é utilizado como medida do benefício monetário líquido produzido por um determinado projecto num determinado momento t , e será representado por F_t . De acordo com Carlos Barros [16], o conceito de *cash flow* designa os fluxos líquidos gerados pelo projecto que assumem a forma de numerário. Assim, o *cash flow* de um projecto relativo a um determinado momento ou período de tempo será a *diferença entre os recebimentos e os pagamentos em numerário relativos ao projecto que ocorrem nesse momento ou período de tempo*.

Poder-se-á pensar que o resultado contabilístico também poderia constituir uma boa medida para a quantificação dos benefícios provenientes de um projecto num determinado momento. No entanto, a utilização do resultado contabilístico apresenta duas desvantagens importantes relativamente à utilização do *cash flow*. A primeira é o facto de o resultado contabilístico poder depender de critérios ou procedimentos contabilísticos que não afectem os efeitos do projecto. Assim, poderia acontecer que certo projecto fosse considerado um bom projecto se se utilizasse um determinado procedimento contabilístico, e um mau projecto se fosse utilizado outro procedimento diferente, o que introduziria um factor de arbitrariedade na avaliação do projecto. A segunda desvantagem decorre do facto de a incorporação, no resultado contabilístico, das entradas ou saídas monetárias ser muitas vezes feita num momento diferente daquele em que esses movimentos realmente ocorrem. Assim, o resultado contabilístico é também uma má medida do momento em que os recebimentos e os pagamentos ocorrem. As desvantagens do resultado contabilístico relativamente ao *cash flow* são discutidas mais aprofundadamente em [16] e [163].

Barros [16] desagrega o *cash flow* em *cash flow de investimento* e *cash flow de exploração*. O *cash flow* de investimento no momento t irá ser representado por F_t^I , e define-se como

$$F_t^I = \left(\begin{array}{c} \text{Investimento em} \\ \text{capital fixo} \end{array} \right)_t + \left(\begin{array}{c} \text{Variação do} \\ \text{fundo de manei} \end{array} \right)_t - \left(\begin{array}{c} \text{Valor residual} \\ \text{do investimento} \end{array} \right)_t, \quad (2.1)$$

em que o índice t em todas as parcelas de (2.1) indica que os valores se referem ao momento t .

O *cash flow* de exploração no momento t irá ser representado por F_t^E e define-se como

$$F_t^E = \left(\begin{array}{c} \text{Resultados Líquidos} \\ \text{de Exploração} \end{array} \right)_t + \left(\begin{array}{c} \text{Amortizações e Reintegrações} \\ \text{do Exercício} \end{array} \right)_t + \left(\begin{array}{c} \text{Provisões do} \\ \text{Exercício} \end{array} \right)_t + \left(\begin{array}{c} \text{Encargos} \\ \text{Financeiros} \end{array} \right)_t \quad (2.2)$$

A partir das duas parcelas em que o *cash flow* se desagrega, é possível calcular o *cash flow* líquido F_t , que tem vindo e continuará a ser designado simplesmente por *cash flow*:

$$F_t = F_t^I + F_t^E \quad (2.3)$$

Quando se estiver na presença de risco e/ou incerteza, será impossível saber com exactidão o valor dos *cash flows* que irão ocorrer no futuro. Neste caso, assumir-se-á que o valor utilizado para o *cash flow* será a melhor estimativa possível para o seu valor esperado, calculada de acordo com toda a informação disponível. Não se considera assim que esta

estimativa seja afectada por excesso de optimismo ou pessimismo ou por interesses pessoais dos responsáveis por esta.

Definido que está o conceito de *cash flow*, analise-se o que deve ser incluído nos *cash flows* de um projecto. Os *cash flows* de um projecto devem ser todos os *cash flows* adicionais que se seguem à sua aceitação, e apenas estes. Assim, não faz sentido imputar aos *cash flows* de um projecto custos em que empresa iria incorrer mesmo sem o projecto, nem benefícios que teria sem este. É importante não esquecer os custos de oportunidade relativos à utilização de recursos da empresa que, se o projecto não for aceite, podem ser vendidos ou ter outra utilização (por exemplo, terrenos ou máquinas que sejam propriedade da empresa); a estes recursos deve ser imputado um custo correspondente ao valor da sua melhor utilização alternativa. É também necessário estimar e incluir nos *cash flows* todos os efeitos derivados do projecto; são exemplo os benefícios e custos adicionais que traz às actividades que já são desenvolvidas pela empresa e as possibilidades de vir a permitir desenvolver novos projectos.

2.2.1 A inflação e o *cash flow*

Quando se pretende decidir se um projecto deve ou não ser empreendido, ou seleccionar projectos dentro de um conjunto de propostas, consideram-se as estimativas dos *cash flows* para o tempo de vida dos projectos. A inflação que irá ocorrer durante este tempo de vida dos projectos irá afectar o valor desses *cash flows*, uma vez que o aumento de preços fará normalmente aumentar as receitas e os custos. Coloca-se, assim, a questão de saber se os valores a utilizar para estimar os *cash flows* devem ser *valores reais*, valores relativos ao momento em que é feita a estimativa e que não têm em conta a inflação que se venha a verificar, ou *valores nominais*, valores relativos ao momento em que os *cash flows* ocorrem e que têm em conta a inflação esperada.

A literatura sobre avaliação de projectos desde há muito tempo que defende que é indiferente utilizar valores reais ou valores nominais, *desde que se trate a inflação de uma forma coerente* (ver, por exemplo, [35], capítulo 6, ou [49], capítulo 3). Por tratar a inflação de forma coerente entende-se utilizar taxas de actualização e limiares de comparação que considerem um tratamento da inflação idêntico ao que ocorre nos *cash flows*. A relação entre taxas de actualização (ou taxas usadas como limiares de comparação) que considerem valores reais e taxas que considerem valores nominais é dada pela seguinte expressão:

$$\text{Taxa a valores reais} = \frac{1 + \text{Taxa a valores nominais}}{1 + \text{Taxa de inflação}} - 1 \quad (2.4)$$

Muitos autores ([35] e [49], por exemplo) mostram que, para os métodos que consideram o valor temporal do dinheiro (isto é, os métodos considerados mais correctos, onde se incluem, entre outros, o VAL e a TIR), os resultados obtidos são equivalentes quando se

utilizam valores reais e quando se utilizam valores nominais. No entanto, como também é referido por esses autores, esta equivalência baseia-se no pressuposto de que os *cash flows* aumentam de acordo com a taxa de inflação prevista. Quando algumas parcelas que intervêm nos *cash flows* não crescem com a inflação, a equivalência apenas se mantém se se fizerem correcções adicionais aos *cash flows* a valores reais.

Considerem-se, por exemplo, as amortizações. As amortizações não são um custo desembolsável, e por isso não devem ser subtraídas aos *cash flows*¹⁰. No entanto, estas afectam os *cash flows* na medida em que são consideradas um custo para efeitos fiscais, isto é, aumentam os *cash flows* na medida em que diminuem o imposto a pagar. Não é geralmente permitido que se considere o efeito da inflação no valor do investimento para efeito de determinação das amortizações, isto é, estas são independentes da taxa de inflação. Como consequência, o benefício fiscal¹¹ proveniente das amortizações não estará dependente da taxa de inflação quando se consideram valores nominais. Tal significa que, se forem utilizados valores reais, é necessário fazer uma correcção ao valor deste benefício por forma a considerar a sua diminuição a valores reais.

Embora a utilização de valores reais possa parecer mais simples, por não ser necessário entrar em conta com estimativas da inflação, na realidade será mais complexa e necessitará destas estimativas se, na determinação dos *cash flows*, intervierem parcelas que não estejam sujeitas a um crescimento de acordo com essa taxa. Tal pode acontecer, não só por alguns componentes se manterem constantes a valores nominais, mas também por poderem existir componentes sujeitos a índices de preços diferentes.

O presente trabalho não pretende focar-se no cálculo dos *cash flows*; em vez disso utiliza os *cash flows* como *inputs* pré-determinados para as medidas e métodos que irão ser considerados. Assim, será assumido daqui em diante que estão a considerar-se *cash flows* e taxas de actualização, ou limiares de comparação, que consideram o mesmo tipo de valores (nominais ou reais), sendo, por isso, coerentes.

2.2.2 Tempo discreto e tempo contínuo

Na análise que se faz do projecto, pode considerar-se que os *cash flows* ocorrem em *tempo discreto* ou em *tempo contínuo*. Os *cash flows* em tempo discreto são aqueles que ocorrem no fim, no início, ou no interior de períodos de tempo discretos, enquanto os *cash flows* em tempo contínuo são aqueles em que os fluxos monetários ocorrem continuamente e a uma determinada taxa através de um determinado período de tempo ([139], capítulo 2). Quando

¹⁰Note-se que, para o cálculo do resultado líquido, as amortizações são consideradas um custo. Por não serem um custo desembolsável, são novamente adicionadas na expressão (2.2) para o cálculo dos *cash flows* de exploração.

¹¹Ao longo deste trabalho, optou-se por utilizar a expressão "benefício fiscal" como tradução da expressão inglesa "*tax shield*".

se considera tempo discreto, utilizam-se normalmente períodos de tempo de igual duração, por forma a facilitar a análise.

As duas abordagens permitem normalmente obter aproximações aceitáveis para uma situação real. As obras que tratam a avaliação de projectos dão em geral mais relevo à abordagem de tempo discreto do que à de tempo contínuo (ver, por exemplo, [22], [35], [38], [49], [139] e [184]), embora muitas vezes indiquem também como se podem calcular as medidas mais importantes em tempo contínuo. A utilização da teoria das opções na avaliação de projectos veio aumentar, nas últimas décadas, o relevo dado à análise em tempo contínuo. Dixit e Pindyck [53] é um exemplo de trabalho dedicado à análise em tempo contínuo das decisões de investimento. Têm também surgido, nos últimos anos, muitas obras colectivas sobre a utilização da teoria das opções na avaliação de projectos que se focam em análises em tempo contínuo; é o caso de [37] e [176].

O presente trabalho focar-se-á na análise em tempo discreto das decisões de investimento. Embora tal possa parecer limitativo, na verdade é possível fazer a aproximação a uma análise em tempo contínuo através de uma análise em tempo discreto que considere intervalos de tempo pequenos. Tal aproximação é efectuada em alguns modelos, por exemplo para avaliação de projectos tratados como opções quando não é possível obter uma expressão analítica (por exemplo [175]). Ir-se-á ainda convencionar que se considera que o *cash flow* relativo a um determinado período será tratado como ocorrendo no momento final desse período.

2.3 O Valor Actual Líquido (VAL)

A medida que é, de forma quase unânime, considerada como teoricamente melhor fundamentada é o Valor Actual Líquido (VAL). O VAL representa a contribuição líquida do projecto para o valor da empresa, medindo, assim, directamente a forma como este contribui para aquele que deve ser o principal objectivo dos gestores – a maximização do valor.

Para o cálculo do VAL é necessário utilizar uma taxa de actualização, r , que representa o custo do capital. O cálculo do custo do capital será discutido na secção 2.4, mas pode, para já, apresentar-se uma intuição muito simplificada para esta taxa: o custo do capital será a taxa de rentabilidade esperada, capitalizada pelo período considerado (normalmente anual), exigida pelo mercado para investimentos com risco idêntico ao do projecto. Seja, assim, r o custo do capital, N , o tempo de vida do projecto, em número de períodos (normalmente anos), e $F_t, t = 0, \dots, N$, o valor esperado do *cash flow* do período t . O VAL do projecto pode ser calculado como

$$VAL = \sum_{t=0}^N \frac{F_t}{(1+r)^t} \quad (2.5)$$

É importante considerar algumas notas acerca do cálculo do VAL. A primeira é que, tal como foi indicado na subsecção 2.2.2, se está a considerar que os *cash flows* ocorrem no final do período a que dizem respeito, e que o período 0 corresponde apenas ao momento inicial (normalmente o momento em que se faz o investimento inicial).

Uma outra nota está relacionada com o último *cash flow* considerado. Muitas vezes, e particularmente quando o tempo de vida do projecto tem um grande número de períodos, opta-se por truncar o projecto num momento anterior ao final do seu tempo de vida, momento normalmente designado por horizonte de análise. Nessa situação, o último *cash flow* considerado terá que ser definido como a soma do *cash flow* gerado no último período antes do horizonte de análise, com a estimativa do valor que o projecto terá nesse horizonte. Se essa estimativa for correctamente feita, a truncagem não afecta o VAL do projecto, sendo este procedimento legítimo para o seu cálculo. Este procedimento pode, no entanto, afectar o valor de outras medidas que irão ser consideradas.

Uma última nota para referir a estrutura de prazo das taxas de actualização. A expressão (2.5) considera que o custo do capital é constante mas, tal como acontece com as taxas de juro, não tem que ser forçosamente assim. A taxa de rentabilidade exigida por período pode variar com o número de períodos a que os investimentos se referem, mesmo que o risco correspondente aos diferentes períodos seja idêntico. Quando tal situação se verifica passam a existir diferentes taxas de actualização para diferentes números de períodos. Se $r_t, t = 1, \dots, N$, for a taxa de actualização por período para o capital investido durante t períodos, o VAL do projecto passar-se-á a calcular como

$$VAL = F_0 + \sum_{t=1}^N \frac{F_t}{(1+r_t)^t} \quad (2.6)$$

Alguns autores separam o VAL em duas parcelas, que correspondem às duas parcelas da expressão (2.6) (considerando que o somatório constitui uma única parcela). A segunda, que consiste no valor actualizado de todos os *cash flows* do projecto que não ocorrem no momento 0, é designada por *Valor Actual* (VA) do projecto; o simétrico da parcela é também por vezes referido como o *investimento inicial* (I_0). Assim, pode escrever-se

$$VAL = F_0 + VA = -I_0 + VA \quad (2.7)$$

É fácil constatar que a medida do VAL pode ser utilizada como base de critérios para decidir se um projecto deve ou não ser aceite, e ainda para comparar projectos mutuamente

exclusivos. O critério de aceitação/rejeição de um projecto de investimento independente é: aceitar o projecto se este tiver $VAL > 0$, rejeitá-lo se tiver $VAL < 0$ (se $VAL = 0$, é indiferente aceitá-lo ou rejeitá-lo)¹². O critério para selecção de uma alternativa entre um conjunto de propostas mutuamente exclusivas é: aceitar a alternativa com maior VAL. Usando estes critérios, o valor da empresa é maximizado.

Park e Sharp-Bette ([139], pag. 260), notam que "... virtualmente todos os autores em engenharia económica concordam que o critério do VAL é baseado no pressuposto do reinvestimento à taxa de actualização utilizada para o calcular ..." (Park e Sharp-Bette referem-se genericamente aos critérios baseados no VAL como "critério do VAL"). Esse pressuposto de reinvestimento consiste na existência da possibilidade, e não da obrigação, de reinvestir os *cash flows* intermédios a uma taxa igual ao custo do capital e com um risco idêntico ao do projecto. Para além da opinião expressa por Park e Sharp-Bette, há autores que argumentam que não existe um pressuposto de reinvestimento na base do VAL; este é o caso, por exemplo, de Dudley [55] e Reinhart [145]. É discutível que o pressuposto do reinvestimento ao custo do capital seja inerente ao cálculo do VAL; na expressão que permite calcular este não são consideradas explicitamente quaisquer taxas de reinvestimento dos *cash flows* intermédios. No entanto, este pressuposto pode ser considerado uma consequência da forma como é definido o custo do capital e do pressuposto dos mercados perfeitos. A taxa de actualização utilizada para calcular o VAL deve ser a taxa de rentabilidade exigida para investimentos com risco semelhante ao do projecto e, se os mercados de capitais forem perfeitos, será a taxa oferecida por investimentos com risco semelhante existentes no mercado de capitais; o pressuposto de reinvestimento é, assim, cumprido se se recorrer aos mercados de capitais.

Considere-se agora que se abandona o pressuposto de mercados perfeitos, e que se considera que o pressuposto de reinvestimento pode também não se verificar. Os critérios baseados no VAL ficam, assim, comprometidos. Considerem-se, por exemplo, dois projectos A e B mutuamente exclusivos, em que o projecto A tem *cash flows* $F_0 = -1000$, $F_1 = 0$ e $F_2 = 1331$, e o projecto B tem *cash flows* $F_0 = -1000$, $F_1 = 880$ e $F_2 = 363$. O risco dos dois projectos é idêntico, e o custo do capital é de 10% para ambos. O VAL de ambos os projectos será 100, e a empresa deve ser indiferente à escolha de um ou de outro. Analise-se se faz sentido que a empresa seja indiferente relativamente aos dois projectos, considerando-se para isso a forma como o fluxo de tesouraria do período 1 do projecto B ($F_1 = 880$) pode ser reinvestido. Se puder ser reinvestido, com o mesmo risco dos projectos, a uma taxa igual ao custo do capital, então no período 2 valerá 968, o que, adicionado

¹²A questão da aceitação/rejeição de um projecto independente apenas faz sentido quando não for possível adiar o projecto ou quando for claro que não é vantajoso adiá-lo. Geralmente é necessário considerar o adiamento do projecto para uma data futura como uma alternativa a iniciar o projecto imediatamente (ver, por exemplo, [7]).

ao *cash flow* do período 2 (363), permite replicar o *cash flow* do período 2 do projecto A; assim, o reinvestimento do *cash flow* intermédio do projecto B conduz a uma sequência de *cash flows* idêntica à do projecto A, pelo que faz sentido que a empresa seja indiferente relativamente aos dois projectos.

Se o reinvestimento puder ser feito a uma taxa superior ao custo do capital, então o reinvestimento do *cash flow* do período 1 do projecto B conduzirá, no final do período 2, a um montante superior a 968, o que, adicionado ao *cash flow* do período 2, conduzirá a um valor total superior a 1331. Assim, utilizando os *cash flows* do projecto B e as oportunidades de reinvestimento, é possível construir uma sequência de *cash flows* em que, relativamente aos do projecto A, dois são iguais e um é maior. Assim, o projecto B deve ser preferido ao projecto A, sendo este resultado diferente do que é obtido por comparação directa dos VAL.

Se o reinvestimento apenas puder ser feito a uma taxa inferior ao custo do capital então, utilizando os *cash flows* do projecto B e as oportunidades de reinvestimento, a sequência de *cash flows* obtida apresenta dois *cash flows* iguais aos do projecto A, e um menor. Assim, para um padrão de consumo dos accionistas que pretenda que o *cash flow* não seja consumido antes do final do período 2, o projecto A deve ser preferido ao projecto B¹³. Assim, ou as decisões de investimento e consumo deixam de poder ser separadas, o que obriga a considerar os padrões de consumo pretendidos e retira utilidade ao VAL, ou, alternativamente, se conclui que o projecto A é preferível ao B, e os resultados do critério baseado no VAL são inválidos.

Como conclusão, diga-se que nada indica que a fórmula de cálculo da medida do VAL apenas possa considerar-se válida se existir a possibilidade de reinvestimento dos *cash flows* intermédios, com risco semelhante ao do projecto, a uma taxa igual ao custo do capital. No entanto, se as taxas a que é possível fazer esse reinvestimento forem diferentes do custo do capital, a validade dos critérios baseados no VAL será seriamente afectada.

2.4 O custo do capital

Um parâmetro muito importante na definição do VAL, e de outras medidas e critérios, é o custo do capital. Para o cálculo deste parâmetro a literatura propõe duas abordagens diferentes: a utilização do custo médio ponderado do capital e a utilização de modelos de equilíbrio do mercado.

¹³O motivo por que aqui se entra em consideração com o padrão de consumo dos accionistas tem a ver com a possibilidade que aqui existe, e que não faz sentido nos casos anteriores, de argumentar que os accionistas podem ser indiferentes às oportunidades de reinvestimento se escolherem consumir imediatamente o *cash flow* do período 1.

2.4.1 O custo médio ponderado do capital (WACC)

O custo médio ponderado do capital (WACC¹⁴) é uma abordagem clássica à determinação do custo do capital¹⁵. Consiste em calcular o custo depois de impostos do financiamento através das diferentes fontes utilizadas pela empresa, e fazer a média destes custos ponderada pelo peso de cada fonte no capital total da empresa.

Assumindo m fontes de capital, e sendo w_i a proporção do capital proveniente da fonte i e r'_i o custo depois de impostos do capital proveniente da fonte i , a fórmula mais geral para o WACC pode ser definida como ([157], capítulo 16)

$$WACC = \sum_{i=1}^m w_i r'_i \quad (2.8)$$

Considere-se apenas a existência de um tipo de dívida e de um tipo de capitais próprios, e sejam D e E os valores de mercado da dívida e dos capitais próprios, respectivamente, com $V = D + E$ representando o valor de mercado total da empresa. Sejam ainda r_D a taxa de juro da dívida¹⁶, r_E a taxa de rentabilidade esperada exigida aos capitais próprios, e t_m a taxa marginal de imposto sobre os lucros aplicada à empresa. A partir deste conjunto de pressupostos é possível apresentar o WACC na sua forma mais usual ([35], capítulo 19; [49], capítulo 13; [139], capítulo 5)

$$WACC = \frac{D}{V} (1 - t_m) r_D + \frac{E}{V} r_E \quad (2.9)$$

Note-se que (2.9) é, na realidade, o resultado da aplicação de (2.8) à situação que se está a considerar. Os quocientes $\frac{D}{V}$ e $\frac{E}{V}$ representam as proporções de dívida e de capitais próprios, r_E o custo dos capitais próprios, e, uma vez que os juros são considerados um custo fiscal, o custo depois de impostos da dívida será $(1 - t_m) r_D$.

Outros autores (por exemplo [38], capítulo 15, e [184], capítulo 15) consideram ainda uma parcela adicional correspondente ao financiamento através de acções preferenciais. Esta e outras fontes adicionais de capital podem ser consideradas através da formulação geral (2.8).

A determinação do custo dos capitais próprios, r_E , merece alguma reflexão. Este custo representa o financiamento não só por emissão de acções ordinárias como também por utilização de lucros retidos ([38], [184]).

Uma forma de estimar r_E é calcular, a partir do preço de mercado das acções e dos valores esperados para o próximo dividendo e para o crescimento dos dividendos, a taxa

¹⁴Do inglês *Weighted Average Cost of Capital*, normalmente utilizado na literatura.

¹⁵Myers [133] refere-se-lhe como a "fórmula dos manuais". Brealey e Myers [35] utilizam a mesma designação, justificando que "muitos outros livros enfatizam bastante [esta fórmula]".

¹⁶Contrariamente ao que acontecia com os r'_i da equação (2.8), r_D é o custo antes de impostos.

de rentabilidade implícita no preço das acções. Esta abordagem à determinação do custo dos capitais próprios é designada por abordagem do rendimento do dividendo mais taxa de crescimento ([38]), ou abordagem dos *cash flows* actualizados ([184]).

Se r_E for a taxa de rentabilidade exigida aos capitais próprios, DIV_1 o valor esperado do próximo dividendo, e g a taxa de crescimento esperada para os dividendos, então a utilização do valor actualizado dos dividendos para calcular o valor da acção¹⁷, P_0 , permite obter

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{DIV_1 (1+g)^{t-1}}{(1+r_E)^t} = \frac{DIV_1}{r_E - g} \quad (2.10)$$

Escrevendo a expressão (2.10) relativamente ao custo dos capitais próprios, obtém-se

$$r_E = \frac{DIV_1}{P_0} + g \quad (2.11)$$

No caso de ser necessária a emissão de novas acções, e de essa emissão envolver custos, há que fazer um ajustamento ao custo do capital devido a esses custos de emissão. Se c_E for o custo de emissão de novas acções como percentagem do valor emitido, então a expressão (2.11) pode ser ajustada para ([38], [184])

$$r_E = \frac{DIV_1}{P_0 (1 - c_E)} + g \quad (2.12)$$

Outra abordagem à estimação de r_E consiste em utilizar modelos de equilíbrio do mercado, como o modelo de equilíbrio dos activos financeiros (CAPM) ou o modelo de equilíbrio por arbitragem (APT). A utilização destes modelos será considerada em mais detalhe na subsecção 2.4.2.

Finalmente, existe um procedimento subjectivo para a determinação do custo dos capitais próprios, designado por abordagem do rendimento das obrigações mais prémio de risco ([38], [184]). Esta abordagem consiste em adicionar um prémio de risco à taxa de rentabilidade das obrigações de maturidade longa da empresa. Nas duas obras acabadas de citar é referida a utilização de valores próximos dos 4%. Claramente este é um procedimento *ad hoc* sem sustentação teórica.

Uma questão importante que se coloca no cálculo do WACC está relacionada com as proporções dos diferentes tipos de fundos (w_i ; ou $\frac{E}{V}$ e $\frac{D}{V}$) utilizadas. Estas proporções devem ser as proporções alvo para a estrutura de capital óptima da empresa ([181], [184]), e não as proporções históricas da empresa. Com efeito, a empresa pode, por vezes, ter

¹⁷ Como se estão a considerar mercados perfeitos, o valor de mercado da acção é igual ao seu valor intrínseco.

interesse em se desviar das proporções óptimas da estrutura de capital, por não lhe ser economicamente rentável obter fundos de diferentes fontes em montantes baixos apenas para manter a estrutura de capital inalterada (porque podem existir custos fixos na obtenção de fundos de cada tipo). Por forma a que tais desvios não afectem de forma artificial o custo do capital dos projectos, utilizam-se as proporções alvo dos diferentes tipos de fundos para a estrutura de capital da empresa.

Colocam-se vários problemas importantes relativamente à utilização do WACC como custo do capital de um projecto. Um deles refere-se ao facto de o WACC apenas se poder aplicar a projectos que sejam "réplicas da empresa", no sentido de terem um risco idêntico ao risco da empresa ([22], capítulo 18; [35], capítulo 19; [181]). Se assim não for, o WACC não reflectirá correctamente o risco do projecto. Brigham ([38], capítulo 12) apresenta um procedimento de algumas empresas para utilizar o WACC como custo do capital de projectos cujo risco é diferente do risco da empresa, ou da divisão da empresa, em que está inserido. Este procedimento consiste em classificar os projectos em categorias de risco (por exemplo, baixo risco, médio risco, alto risco) e usar como custo do capital de cada projecto o custo do capital da empresa, ou divisão da empresa, adicionado de um prémio de risco que depende da sua categoria de risco (podendo ser negativo). Claro que este é um procedimento *ad hoc*, sem sustentação teórica.

Quando se utiliza o WACC como custo do capital de um projecto, o valor a considerar deve ser o valor marginal do WACC. Com efeito, não faz sentido considerar o valor médio do custo do capital já utilizado pela empresa, mas apenas o custo do capital necessário para os novos projectos. Mas a determinação deste custo marginal pode colocar alguns problemas quando o custo do capital a obter não é constante para diferentes montantes de capital; por exemplo, quando a taxa de juro da dívida depende do montante pedido, ou quando existem lucros retidos que se utilizam e, a partir daí, é necessário emitir acções (com custos de emissão) para aumentar os capitais próprios. Assim, geralmente o valor marginal do WACC aumenta quando o capital necessário aumenta. Quando isso acontece, o custo do capital depende do capital necessário, este depende dos projectos a empreender, e a escolha destes depende do custo do capital.

Alguns autores (por exemplo [38], capítulo 15; [157], capítulo 16; [184], capítulo 15) sugerem a determinação do custo do capital através de um procedimento gráfico: num sistema de dois eixos coordenados é representado graficamente o valor marginal do WACC como função do montante de capital a investir, e ainda a taxa de rentabilidade marginal das oportunidades de investimento como função do mesmo montante; o valor marginal do WACC é crescente com o montante de capital, e a função que representa as oportunidades de investimento (normalmente projectos em que a empresa pode investir) considera que estas serão seleccionadas por ordem decrescente da sua taxa de rentabilidade, sendo, assim,

decrecente; o custo do capital a utilizar pela empresa será o valor marginal do WACC para o montante de capital em que as duas funções se cruzam¹⁸. Além do problema de serem necessários ajustamentos às taxas de rentabilidade (diversos autores referem a Taxa Interna de Rentabilidade, TIR) das oportunidades de investimento no caso de projectos com risco diferente do da empresa, o próprio facto de esta forma de determinar o custo do capital obrigar ao cálculo de uma taxa de rentabilidade para a avaliação dos projectos é uma desvantagem (o VAL é considerado, de forma quase unânime, a melhor medida para avaliação financeira de projectos de investimento). Uma tal abordagem tem também a grande desvantagem de não permitir a separação das decisões de investimento e de financiamento, sendo necessário um conhecimento perfeito das oportunidades futuras de investimento para tomar as melhores decisões – um projecto que hoje parece ser rentável amanhã pode não o ser se, entretanto, um outro com maior taxa de rentabilidade aparecer e deslocar uma porção do gráfico que representa a rentabilidade das oportunidades de investimento, aumentando o custo do capital.

Além dos problemas, já considerados, da utilização do WACC para determinar o custo do capital de projectos com risco diferente do da empresa, e da determinação do custo marginal correcto, existem outras dificuldades na utilização desta taxa como custo do capital dos projectos. Bierman e Smidt [22] argumentam que, para que seja correcta a utilização desta taxa como custo do capital de um projecto, é necessário não só que o projecto tenha um risco semelhante ao da empresa mas também que exista uma correlação perfeita no tempo entre os *cash flows* do projecto e os da empresa. Se assim não for, apenas será correcto utilizar o WACC como custo do capital do projecto se a estrutura de prazo das taxas de juro for horizontal. Note-se que, quando a estrutura de prazo das taxas de juro não é horizontal, o WACC representa, na prática, uma média ponderada, não só dos custos de diferentes fontes de financiamento, mas também de custos de capital que será recuperado em diferentes momentos. Se o padrão de *cash flows* do projecto for muito diferente do padrão de *cash flows* da actividade normal da empresa, os factores de ponderação relativos ao prazo em que o capital permanece investido serão forçosamente diferentes, e o custo "médio" do capital para o projecto deverá ser diferente do WACC.

Luehrman [122] [123] argumenta ainda que o cálculo do WACC é propenso a erros, particularmente quando as situações fiscais ou de financiamento são complexas. Relativamente à situação fiscal, o WACC tem, na realidade, dificuldade em lidar com situações em que a taxa marginal de imposto se altera ao longo do tempo (por exemplo quando a empresa alterna entre lucros e prejuízos). Quanto à situação de financiamento, o WACC apenas consegue tratar de forma convincente estruturas de capital simples e estáticas. Luehrman considera que é altamente questionável que os gestores devam considerar que existe uma estrutura de

¹⁸ Ambas as funções podem ter (e quase sempre terão) pontos de descontinuidade, pelo que podem não se intersectar. Optou-se, assim, por referir o ponto em que se cruzam.

capital óptima a ter como objectivo, e acrescenta que é inquestionável que a maioria dos gestores não se comportam como se existisse essa estrutura de capital óptima. A ausência de tal estrutura de capital alvo coloca muitas dificuldades à utilização do WACC. Luehrman aponta dificuldades adicionais decorrentes da utilização, por parte das empresas, de activos mais complexos para se financiarem (por exemplo obrigações convertíveis ou obrigações de taxa variável), ou da sua utilização para avaliar investimentos fora do país de origem da empresa. Finalmente, Luehrman reconhece que, em várias destas situações, é possível fazer adaptações do WACC por forma a que este possa ser utilizado de um modo teoricamente coerente. No entanto, estas adaptações tornam o seu cálculo e utilização muito complexos e propensos a erros.

Nas situações em que é aplicável, o WACC permite calcular o VAL correcto do projecto, tomando em consideração não só o valor temporal do dinheiro e o risco, mas também os efeitos do financiamento. No entanto, existem numerosas situações em que o WACC necessita de ajustamentos muito complexos, tornando-se o seu cálculo propenso a erros, e outras há em que não é mesmo aplicável.

2.4.2 A utilização de modelos de equilíbrio do mercado

O desenvolvimento de modelos de equilíbrio do mercado, inicialmente definidos para determinar os preços de equilíbrio dos activos financeiros (particularmente acções), teve também repercussões na avaliação de projectos. Com efeito, estes modelos permitem, não só o cálculo da taxa de rentabilidade esperada pelo mercado para os capitais próprios da empresa (e que pode ser utilizada no cálculo do WACC), mas também o desenvolvimento de outras formas de calcular o custo do capital para um projecto. Vão aqui ser apresentados os dois principais modelos de equilíbrio considerados na literatura: o modelo de equilíbrio dos activos financeiros (CAPM¹⁹) e o modelo de equilíbrio por arbitragem (APT²⁰).

2.4.2.1 O modelo de equilíbrio dos activos financeiros (CAPM)

O CAPM foi desenvolvido por Lintner [116], Sharpe [159] e Treynor (*fide* [35], capítulo 7; o artigo de Treynor data de 1961, é intitulado "*Toward a Theory of Market Value of Risky Assets*", e não foi publicado). Este modelo considera que os investidores tomam as suas decisões com o horizonte de 1 período, apresentam aversão ao risco e pretendem maximizar a utilidade esperada da sua riqueza no final do período. Assim, vão seleccionar carteiras de investimentos com uma rentabilidade esperada tão grande quanto possível e com um risco (medido pela variância da rentabilidade da carteira) tão pequeno quanto possível.

¹⁹Do inglês *Capital Asset Pricing Model*.

²⁰Do inglês *Arbitrage Pricing Theory*.

De acordo com o CAPM, a taxa de rentabilidade esperada em equilíbrio de um activo financeiro pode ser determinada adicionando, à taxa de juro sem risco, um prémio de risco que representa o excesso de rentabilidade exigido pelos investidores para assumirem o risco inerente à rentabilidade do activo. O risco do investimento pode ser dividido em duas parcelas: o *risco específico* ou *não sistemático* e o *risco sistemático* ou *risco de mercado*. O risco específico representa a parcela do risco que pode ser eliminada através da diversificação, e o risco sistemático representa a parcela do risco que não pode ser eliminada através da diversificação. Apresentando os investidores aversão ao risco, e podendo eles eliminar o risco específico através da constituição de carteiras diversificadas, irão deter carteiras diversificadas. Como consequência, o risco específico não terá relevância para os investidores, e o prémio de risco exigido aos activos não dependerá desta parcela do risco. Assim, a única parcela do risco que será relevante para a determinação do prémio de risco será o risco sistemático, que representa o risco que não pode ser eliminado.

Na definição do prémio de risco intervém ainda o conceito de *carteira de mercado*. A carteira de mercado é uma carteira eficiente (no sentido de não existir nenhuma outra com a mesma ou maior rentabilidade esperada e com um risco menor), composta apenas por activos com risco, que representa a totalidade do mercado. O risco sistemático de um activo será medido pelo seu beta (β), que é a covariância entre a rentabilidade do activo e a da carteira de do mercado, dividida pela variância da rentabilidade desta última. Representando por r a taxa de rentabilidade de um activo, e por r_m a taxa de rentabilidade da carteira de mercado, o beta desse activo pode ser calculado através da expressão

$$\beta = \frac{\text{cov}(r, r_m)}{\text{var}(r_m)} \quad (2.13)$$

O CAPM estabelece que o prémio de risco do activo é determinado pelo produto do seu beta pelo excesso de rentabilidade esperada da carteira de mercado relativamente à taxa de juro sem risco. Sendo r_F a taxa de juro sem risco, e $E(\cdot)$ o operador de valor esperado, $E(r)$ é dado por

$$E(r) = r_F + \beta(E(r_m) - r_F) \quad (2.14)$$

Além dos pressupostos já mencionados, o CAPM assume um conjunto de outros pressupostos, onde se incluem mercados perfeitos, a existência de uma taxa de juro sem risco a que os investidores podem recorrer para livremente investir ou endividar-se, a inexistência de restrições às vendas a descoberto e a existência de expectativas homogêneas dos investidores acerca da distribuição das rentabilidades dos activos, a qual deve seguir uma lei normal multivariada²¹. Não é objectivo do presente trabalho fazer uma análise exaustiva

²¹O pressuposto de as rentabilidades dos activos seguirem uma lei normal multivariada deixa de ser necessário se se assumir que os investidores têm funções utilidade quadráticas.

destes pressupostos, mas torna-se claro que o realismo de alguns deles pode ser colocado em causa (ver, por exemplo, [73], capítulo 8). Note-se ainda que é possível fazer ajustamentos ao CAPM por forma a considerar pressupostos mais realistas ([49], na secção G do capítulo 8, apresenta alguns desses possíveis ajustamentos).

Vários estudos empíricos foram efectuados para verificar se o CAPM fornece ou não uma boa descrição do que acontece na realidade. A maioria desses estudos, como por exemplo [25], conclui que existe uma relação aproximadamente linear entre o beta e a rentabilidade, mas que existem dois desvios significativos relativamente às previsões do CAPM. De acordo com esses estudos, a representação gráfica da relação entre o beta e a rentabilidade será uma recta que intersecta o eixo dos YY acima de r_F e cujo declive é positivo mas inferior ao previsto pelo CAPM. Assim, os estudos parecem concluir que os activos com beta baixo têm rentabilidade superior à prevista pelo CAPM, e que os activos com beta elevado têm rentabilidade inferior à prevista pelo modelo. Um estudo de 1992 de Fama e French [62] conclui mesmo que não existe qualquer relação entre o beta e a rentabilidade.

Outros estudos colocam em causa o CAPM, mostrando que existem outros factores que explicam a parcela da rentabilidade que não é capturada pelo beta; Banz [14] conclui que a dimensão das empresas é um desses factores, tendo as empresas com menor dimensão uma rentabilidade maior que as de maior dimensão. Black [24] coloca em causa os estudos que apresentam factores alternativos por existir a possibilidade de *data mining*: "Quando um investigador tenta várias formas de fazer um estudo, incluindo várias combinações de factores explicativos, vários períodos e vários modelos, dizemos muitas vezes que ele está a fazer *data mining* ... preocupamo-nos com o facto de que ele possa ter seleccionado, dos vários modelos testados, apenas aqueles que parecem apoiar as suas conclusões. Com suficiente *data mining*, todos os resultados que parecem significativos podem ser apenas acidentais." Para apoiar esta hipótese, e para justificar que se pode aplicar ao estudo de Banz, Black menciona que os estudos feitos aos períodos posteriores ao considerado por Banz mostram que, depois deste estudo, as pequenas empresas têm tido um comportamento "mediocre e inconsistente".

Chan e Lakonishok [41] apontam as dificuldades em estabelecer conclusões definitivas relativamente à validade do CAPM a partir dos estudos empíricos. Roll [149] apresenta uma crítica à validade dos testes ao CAPM; de acordo com este autor, se o índice utilizado como carteira de mercado for eficiente *ex post*, então matematicamente a relação prevista pelo CAPM tem que se verificar. Assim, os testes que concluem que a rentabilidade dos activos financeiros não segue o CAPM, deveriam, na realidade, concluir que o índice que utilizam como carteira de mercado não é eficiente *ex post*. De acordo com Roll, o único teste legítimo ao CAPM é um teste à eficiência, em termos de média e variância, da carteira de mercado; no entanto, uma vez que a verdadeira carteira de mercado contém todos os

activos transaccionados e não transaccionados, esta carteira é impossível de observar.

Assim, a conclusão final que parece poder extrair-se dos testes empíricos ao CAPM é que os resultados não são conclusivos. Existem dificuldades na validação empírica do CAPM, e este apresenta alguns problemas ao nível dos seus pressupostos. A este respeito, Jagannathan e McGrattan [101] lembram que "... uma vez que o CAPM é apenas uma abstracção da realidade, esperar que fosse exactamente correcto não seria razoável ...", e acrescentam que "... apesar de os dados mostrarem alguns desvios sistemáticos do CAPM, estes não são, do ponto de vista económico, suficientemente importantes para o rejeitar ...". Gregory [81] acrescenta que o CAPM é um método que "... apesar de não ser perfeito, ... oferece uma abordagem de aplicação útil, simples e prática à avaliação de investimentos em ambientes com risco, e tem suporte teórico". Tudo indica que a taxa de rentabilidade esperada obtida quando se usa o CAPM pode ser considerada uma boa referência para a taxa de rentabilidade esperada que o mercado exige ao correspondente investimento.

A aplicação do CAPM na avaliação de projectos não se restringe à determinação da taxa de rentabilidade exigida pelo mercado aos capitais próprios de uma empresa (e eventualmente à sua dívida), e posterior utilização desta taxa no cálculo do WACC. O CAPM pode ser usado directamente no cálculo da taxa de actualização a utilizar na avaliação de um projecto. Desta forma, evitam-se problemas e limitações inerentes à utilização do WACC, que foram apresentados na subsecção 2.4.1. Se se aceitar como válido o CAPM, o beta²² dos *cash flows* de um projecto de investimento representa a medida do risco desse investimento que é relevante para os investidores, e será o único factor relevante para calcular a rentabilidade exigida a esse investimento, ou o custo do capital do investimento. Black [24] argumenta mesmo que "... uma empresa racional avaliará um investimento utilizando os betas relativos aos *cash flows* desse investimento".

Uma tal abordagem à estimação directa do custo do capital de um projecto utilizando o CAPM apresenta uma dificuldade importante: a estimação do beta do projecto. Uma abordagem clássica a esta estimação do beta consiste em estimar os betas de empresas cotadas em bolsa que tenham unicamente (ou principalmente) actividades semelhantes ao projecto ([35], capítulo 9; [81]). Note-se que não se pode utilizar directamente o betas das acções das empresas, uma vez que ele reflecte, não só o risco económico, mas também o risco financeiro resultante das dívidas das empresas. Assim, para cada empresa é necessário estimar os betas das acções e da dívida e, a partir da sua estrutura financeira, determinar qual o beta dos seus activos (o beta que a empresa deveria ter se fosse unicamente financiada por capitais próprios). É este beta dos activos, ou melhor, a média dos betas dos activos das empresas com actividades semelhantes ao projecto, que deve ser utilizado para

²² Ou os betas, se se considerar mais correcto o cálculo de um beta para cada *cash flow*, ou mesmo para cada componente de cada *cash flow*.

a determinação do custo do capital do projecto. Note-se ainda que, no caso de o projecto corresponder à actividade actualmente empreendida pela empresa e de esta estar cotada, se pode utilizar o beta da própria empresa como estimativa do beta do projecto.

Myers e Turnbull [135] apresentam três problemas sérios desta abordagem à estimação dos betas. O primeiro é o erro de medida, presente em qualquer medição estatística do beta. O segundo é que, para que o beta estimado desta forma esteja correcto, será necessário, não só que as empresas consideradas tenham o mesmo tipo de actividade do projecto que se está a considerar, mas também que sejam idênticas ao projecto em tempo de vida dos activos, padrão temporal dos *cash flows* esperados, crescimento esperado dos *cash flows*, características de cada componente dos *cash flows* e contribuição relativa de cada um destes componentes para o valor da empresa. Quanto ao primeiro problema note-se que, se o número de empresas consideradas na determinação da média for elevado, o erro tenderá a diluir-se, e quanto ao segundo note-se que, se as empresas utilizadas tiverem uma actividade semelhante à do projecto considerado, então provavelmente não serão muito diferentes do projecto relativamente a estes factores. Assim, os dois problemas já apresentados não parecem ser muito graves. No entanto, existe ainda um terceiro problema, que parece ser mais grave. Os autores notam que o valor de mercado das empresas inclui, não só o valor dos seus activos actuais, mas também o valor das suas oportunidades de crescimento. Assim, o beta estimado para as empresas inclui, não só o risco sistemático das suas actividades actuais, mas também o risco sistemático das suas oportunidades de crescimento. As oportunidades de crescimento têm características de opções, apresentando geralmente um risco sistemático superior ao das actividades actuais da empresa. Desta forma, o beta das empresas é geralmente superior ao beta das suas actividades actuais, e esta forma de estimar o beta de um projecto fornece, assim, uma estimativa por excesso do verdadeiro valor desse beta, podendo conduzir a uma subavaliação do projecto²³.

Seitz e Ellison [157] referem uma outra abordagem à estimação do beta de um projecto, que designam por "modelos de estados da natureza para estimação dos betas". Esta abordagem consiste em definir um conjunto de estados da natureza, e para cada estado da natureza estimar a sua probabilidade, a rentabilidade esperada da carteira de mercado, e a rentabilidade esperada de uma empresa financiada apenas por capitais próprios e que somente detenha o projecto considerado. A partir destes valores, é possível estimar a variância da rentabilidade da carteira de mercado e a covariância entre a rentabilidade da empresa que apenas detém o projecto e a rentabilidade da carteira de mercado, e a partir daí utilizar (2.13) para estimar o beta do projecto. A principal dificuldade de aplicação desta abordagem está relacionada com o facto de geralmente a variação do valor do projecto

²³A não inclusão, na avaliação do projecto, das oportunidades de crescimento que esse projecto proporciona contribui também para uma subavaliação deste.

num determinado momento depender do que ocorreu em momentos anteriores²⁴. Assim, no caso geral é necessário considerar cada estado da natureza como uma sequência de valores das variáveis para o período relevante. Esta definição de estado da natureza como uma sequência de valores das variáveis é muitas vezes utilizada em economia financeira (ver, por exemplo, [98], capítulo 7). É ainda de notar que esta abordagem apresenta outros problemas importantes, nomeadamente a forma de definir os estados da natureza e respectivas probabilidades, bem como a estimação da rentabilidade da carteira de mercado em cada estado da natureza.

Khan e Fiorino [111] utilizam uma abordagem semelhante para a estimação dos betas de quatro projectos de redução do consumo de energia. Os autores consideram três estados, que designam por "estados do mundo", para a vida do projecto (preço do petróleo baixo, médio e alto), e estimam uma probabilidade para cada um destes estados. Para cada estado do mundo, os autores estimam ainda os cash flows do projecto e calculam a Taxa Interna de Rentabilidade (TIR) de cada projecto²⁵ (a TIR de cada projecto tem para estes autores a função que Seitz e Ellison atribuem à rentabilidade da empresa que apenas detém o projecto). Os autores utilizam o comportamento histórico dos mercados para estimar a rentabilidade esperada da carteira de mercado em cada estado do mundo. Estes valores permitem aos autores estimar a variância da rentabilidade da carteira de mercado e a covariância entre a TIR de cada projecto e a rentabilidade da carteira de mercado, para a partir daí calcularem o beta de cada projecto. A abordagem de Khan e Fiorino apresenta todos os problemas da abordagem descrita por Seitz e Ellison, e apresenta ainda outro problema mais sério, relacionado com a utilização da TIR. Os estados do mundo considerados por Khan e Fiorino descrevem, cada um, uma condição momentânea, um preço momentâneo do petróleo, e não a sequência de preços que se verificam ao longo da vida do projecto. A utilização da TIR do projecto em cada estado da mundo implica que se assumam que o preço do petróleo permanece o mesmo durante toda a vida do projecto; a evolução do mercado petrolífero mostra que tal pressuposto é muito questionável. A utilização de estados da natureza, definidos como a sequência de preços do petróleo ao longo da vida do projecto, evitaria um tal problema, embora aumentasse muito o número de estados a considerar.

A utilização do CAPM apresenta o problema adicional de este ser um modelo de equilíbrio de preços a um período, enquanto em avaliação de projectos se consideram muitas vezes *cash flows* em múltiplos períodos. É, portanto, importante saber se a abordagem que consiste em calcular um beta para o projecto, e utilizar a taxa correspondente na ac-

²⁴Seitz e Ellison evitam este problema através da forma como definem a abordagem e o exemplo de aplicação, mas num caso mais geral é necessário considerá-lo.

²⁵A TIR será apresentada na secção 2.7. Neste ponto é suficiente saber que é uma medida da taxa de rentabilidade que o projecto permite obter.

tualização de *cash flows* de diferentes períodos, é correcta. Vários autores fizeram estudos teóricos sobre este problema. Bogue e Roll [29] concluem que, mesmo quando se consideram apenas dois períodos, o VAL do projecto não deve ser simplesmente calculado descontando os *cash flows* à taxa que se obtém utilizando o CAPM, sendo necessário ainda subtrair duas parcelas, correspondentes, uma ao risco de covariância dos valores intermédios do projecto, e a outra ao risco de variação da taxa de juro sem risco.

Fama [61] contesta estes resultados mostrando que, num mundo em que o CAPM se verifique em cada período, alguns tipos de incerteza permitidos por Bogue e Roll não são admissíveis. Fama nota que, se se assumir que o CAPM se verifica em cada período, então o único tipo de incerteza admissível está relacionado com a evolução do valor esperado dos *cash flows*, sendo de excluir incerteza acerca da taxa de actualização e de alguns parâmetros relativos ao mercado, como por exemplo a taxa de juro sem risco e o preço de mercado do risco²⁶. Fama define um processo estocástico para a formação dos *cash flows* e das expectativas dos *cash flows*, e mostra que, se apenas for admissível o tipo de incerteza que considera coerente com o CAPM, então a forma habitual de actualização dos *cash flows* está correcta, desde que as taxas de actualização a utilizar estejam correctas. Acerca destas taxas de actualização, Fama acrescenta que, mesmo sem variar a taxa de juro sem risco, estas taxas podem variar para *cash flows* ocorrendo em diferentes momentos, mas que, se se considerar um projecto inserido dentro de um dado tipo de actividade, pode ser razoável assumir uma taxa de actualização idêntica para todos os *cash flows*; assim a estimação de apenas um beta para o projecto pode ser razoável.

Myers e Turnbull [135] utilizam um processo estocástico para a formação dos *cash flows* e das expectativas dos *cash flows* diferente do de Fama, e utilizam uma taxa de actualização que não varia ao longo do tempo. Estes autores concluem que a forma habitual de actualização dos *cash flows* apenas é totalmente correcta nalguns casos particulares, mas que os resultados fornecidos por esta parecem ser boas aproximações dos valores que se obtém através de uma análise rigorosa dos valores de equilíbrio do mercado.

Constantinides [47] procura determinar o menor conjunto de pressupostos necessário para que o CAPM seja válido em situações que compreendem múltiplos períodos. Constantinides conclui que o CAPM é válido sob um conjunto de pressupostos menos restritivo que o considerado por Fama (*op. cit.*). Nomeadamente, é admissível não estacionaridade na distribuição da rentabilidade da carteira de mercado, da taxa de juro sem risco, do preço de mercado do risco e dos betas. No entanto, Constantinides também conclui que, na presença destas não estacionaridades, a aplicação do CAPM na determinação do VAL de projectos com *cash flows* estocásticos em múltiplos períodos se torna "... computacionalmente complexa e de pouca utilidade prática". Assim, o CAPM apenas é útil para determinar

²⁶O preço de mercado do risco é definido como o aumento da rentabilidade esperada por unidade de aumento do risco.

o custo do capital se este tipo de não estacionaridades não for importante, ou seja, se os pressupostos considerados por Fama se verificarem.

Assim, para que a utilização normal do CAPM para determinação do custo do capital seja teoricamente correcta, é necessário que se verifique um conjunto de pressupostos relativos aos parâmetros que estão sujeitos a incerteza. No entanto, mesmo que alguns desses pressupostos não se verifiquem, não é geralmente de supor que os valores obtidos desta forma sejam totalmente desprovidos de razoabilidade.

O CAPM conseguiu uma posição de relevo na literatura científica sobre investimentos financeiros e nas publicações não académicas da área económica, (é comum existirem publicações que estimam e apresentam os betas de empresas cotadas), e conseguiu ainda aceitação juntos dos gestores de carteiras. Na literatura sobre finanças empresariais, o CAPM é muitas vezes considerado o método de referência para o cálculo do custo do capital (ver, por exemplo, [35]), tendo conseguido também alguma aceitação junto das empresas como método de incorporação do risco na taxa de actualização (ver, por exemplo, [63]). A principal dificuldade na utilização do CAPM na avaliação de projectos consiste na estimação do beta do projecto. Quando é possível obter uma estimação credível desse beta, pode utilizar-se um índice de mercado como aproximação à carteira de mercado, e a taxa de juro de obrigações de risco reduzido como aproximação à taxa de juro sem risco. Utilizando dados históricos sobre o índice e sobre as obrigações, é fácil estimar valores para os restantes parâmetros necessários, e torna-se simples obter uma estimativa do custo do capital.

2.4.2.2 O modelo de equilíbrio por arbitragem (APT)

O modelo APT foi desenvolvido por Ross [152], e pode ser visto como uma alternativa ao CAPM ou uma extensão do CAPM. O pressuposto base deste modelo é a inexistência de oportunidades de arbitragem num mercado perfeito em equilíbrio. Adaptando a definição de Huang e Litzenberger [98] à terminologia que vem sendo utilizada, pode dizer-se que uma *oportunidade de arbitragem* é uma estratégia de investimento²⁷ cujo valor final é sempre não negativo e é estritamente positivo com probabilidade não nula, e que tem um custo inicial não positivo. Outro pressuposto essencial do APT é a existência de um conjunto de factores, que se vai assumir serem em número k , dos quais a rentabilidade de qualquer activo é função linear. Mais concretamente, num determinado período a rentabilidade r de um activo é determinada pela seguinte expressão:

²⁷Apesar do termo "estratégia de investimento", esta pode incluir endividamento ou vendas a descoberto.

$$r = E(r) + \sum_{i=1}^k b_i I_i + \varepsilon \quad (2.15)$$

em que $E(r)$ é a rentabilidade esperada do activo, b_i é a sensibilidade da rentabilidade do activo ao i -ésimo factor, I_i é o valor do i -ésimo factor (definido de forma a que o seu valor esperado seja 0), e ε é um termo de erro com valor esperado nulo e com correlação nula com os valores dos factores. O modelo assume um número pequeno de pressupostos adicionais, que incluem expectativas homogéneas, aversão ao risco, objectivo de maximização da riqueza pelos investidores, e valores de ε não correlacionados para diferentes activos; é de notar que os pressupostos necessários são menos fortes que os do CAPM.

Defina-se ainda, para $i = 1, \dots, k$, r_{I_i} como a taxa de rentabilidade de uma carteira que tenha sensibilidade 1 ao i -ésimo factor ($b_i = 1$), e sensibilidade 0 aos restantes factores ($b_j = 0, j = 1, \dots, k, j \neq i$); estas carteiras são, por vezes, designadas por carteiras de sensibilidade unitária. Então, de acordo com o modelo APT, a rentabilidade esperada de qualquer activo será dada pela seguinte expressão:

$$E(r) = r_F + \sum_{i=1}^k b_i (E(r_{I_i}) - r_F) \quad (2.16)$$

É interessante notar que o CAPM pode ser visto como um caso particular do modelo APT, em que as rentabilidades dos activos seguem uma distribuição normal multivariada e em que o único factor relevante é a rentabilidade da carteira de mercado.

O APT é considerado um modelo mais robusto que o CAPM, por necessitar de pressupostos menos fortes que o CAPM. Nomeadamente, o APT não necessita de pressupostos sobre a distribuição de probabilidade das rentabilidades e, acerca das funções utilidade dos investidores, apenas precisa de assumir que estes pretendem maximizar a riqueza e apresentam aversão ao risco; o APT também não precisa da carteira de mercado que contém todos os activos e é impossível de observar, e pode ser aplicado apenas a um subconjunto de todos os activos. O APT apresenta também a vantagem de ser facilmente estendido a situações que considerem múltiplos períodos.

Os resultados dos testes ao modelo APT parecem ser mais animadores que os resultados obtidos nos testes ao CAPM. Roll e Ross [150] e Chen [44] apresentam vários testes cujos resultados são favoráveis ao modelo. Chen faz mesmo uma comparação directa entre o APT e o CAPM, concluindo que o APT consegue explicar uma parcela estatisticamente significativa da variância residual do CAPM, mas o CAPM não consegue explicar os resíduos do APT. Este parece ser um forte indício de que o APT é um modelo mais razoável para explicar as rentabilidades dos activos financeiros que o CAPM. Chen conclui também que a dimensão

das empresas é um factor cujo poder explicativo não é estatisticamente significativo, sendo este um resultado que contraria o obtido num estudo anterior de Reinganum [144]. Note-se que um possível problema dos estudos empíricos do APT é o facto de este não explicitar os factores, sendo, assim, necessário determiná-los. Para tal é geralmente utilizada análise factorial. Grande parte dos estudos utiliza a mesma amostra para determinar os factores e para determinar a relação entre a rentabilidade e a sensibilidade aos factores, o que pode colocar algumas dúvidas à validade dos resultados obtidos.

Sendo os factores estimados por utilização de análise factorial, eles não se identificam directamente com variáveis económicas conhecidas, embora se assuma geralmente que representarão variáveis económicas reais. A não identificação dos factores com variáveis económicas coloca óbvias dificuldades à interpretação do significado das sensibilidades estimadas e das carteiras de sensibilidade unitária, e à estimação de sensibilidades para activos não transaccionados. Coloca ainda dificuldades à aceitação do APT por parte dos agentes de decisão (particularmente gestores), uma vez que a rentabilidade esperada é determinada por um conjunto de factores indefinidos. Foi, assim, desenvolvida alguma investigação empírica para tentar determinar quais as variáveis económicas reais que estão relacionadas com a rentabilidade dos activos financeiros (particularmente das acções). Chen, Roll e Ross [45] encontraram quatro variáveis macroeconómicas que afectam significativamente a rentabilidade dos activos, e que constituem por isso factores económicos relevantes; são elas:

- a inflação;
- a produção industrial;
- os prémios de risco (medidos como a diferença entre as taxas de rentabilidade de obrigações de *rating* elevado e obrigações de *rating* baixo);
- o declive da estrutura de prazo das taxas de juro (medido como a diferença entre as taxas de juro de longo prazo e as taxas de juro de curto prazo).

Podem pensar-se noutras variáveis como determinantes para o preço dos activos, mas geralmente estas apenas influenciarão esse preço através do seu impacto nestes quatro factores. Chen, Roll e Ross notam que a rentabilidade da carteira de mercado, o consumo agregado e o preço do petróleo não afectam significativamente a rentabilidade se forem considerados em simultâneo com estes factores. Roll e Ross [151] notam que estas quatro variáveis "... aparecem na fórmula tradicional de avaliação por actualização dos *cash flows*", isto é, no cálculo do valor actual das empresas. Estes autores argumentam que as duas primeiras variáveis influenciam o numerador dessa fórmula, isto é, os *cash flows*, e as duas últimas influenciam o denominador, isto é, a taxa de actualização. Roll e Ross notam ainda que, para o cálculo das sensibilidades dos activos a estes factores, apenas os movimentos não antecipados das variáveis são relevantes, pois as mudanças antecipadas já estão incorporadas na rentabilidade esperada. No entanto, é normalmente difícil separar os movimentos

antecipados dos não antecipados, o que pode colocar problemas à utilização do modelo APT com estes factores.

O modelo APT parece exibir maior solidez teórica e maior generalidade que o CAPM, mas a utilização deste é em geral mais difícil e exige um esforço maior que a do CAPM. Seitz e Ellison ([157], capítulo 15) dizem mesmo, a este respeito, que "mais uma vez descobrimos que não há almoços grátis". Com efeito, em vez de estimar um beta é necessário identificar os factores relevantes e estimar a sensibilidade do activo a cada um destes, e em vez de estimar o prémio de risco para a carteira de mercado é necessário construir um conjunto de carteiras de sensibilidade unitária e estimar o prémio de risco para cada uma destas carteiras.

O primeiro passo para a utilização do APT é a determinação dos factores. Para tal pode ser utilizada análise factorial sobre os valores históricos da rentabilidade de um conjunto de activos financeiros, ou podem ser utilizadas variáveis económicas que se considerem fortemente correlacionadas com os factores, como por exemplo as variáveis apresentadas anteriormente. É então necessário estimar a sensibilidade de cada activo a cada factor e construir as carteiras de sensibilidade unitária. Uma vez formadas estas carteiras, podem ser calculados os seus prémios de risco esperados ($E(r_{I_i}) - r_F$), utilizando os prémios de risco históricos dos activos da carteira ou estimativas da rentabilidade futura destes activos. Neste ponto, para aplicar o APT é apenas necessário estimar a sensibilidade do activo que se pretende considerar aos factores encontrados. No caso de se estar a considerar um projecto de investimento, as abordagens usadas para estimar o beta quando se utiliza o CAPM podem ser usadas para estimar a sensibilidade aos factores. No caso de os factores serem representados por variáveis económicas, pode ainda tentar analisar-se a resposta do projecto a variações nestes factores, e assim estimar directamente a sensibilidade.

Gehr [70], utilizando uma ideia inicialmente apresentada por Ross [153], mostra como a lógica subjacente ao APT pode ser utilizada para calcular directamente o VAL de um projecto, evitando a utilização de uma taxa de actualização ajustada ao risco. Esta ideia apresenta algumas semelhanças com os modelos de estados da natureza que foram referidos para estimação dos betas (e que também podem ser utilizados para estimar as sensibilidades necessárias para utilização do APT). A ideia em que a abordagem se baseia é encontrar uma carteira de activos transaccionados que permita replicar exactamente os *cash flows* do projecto que ocorrem depois do momento inicial. O valor actual (VA) do projecto deverá, assim, ser o custo inicial dessa carteira que replica os *cash flows*, e o seu VAL será a diferença entre o custo da carteira e o investimento inicial no projecto.

Considere-se que o último *cash flow* do projecto ocorre no momento T . A abordagem de Gehr inicia-se com a definição de um conjunto discreto de estados da natureza. Cada estado $e_t, t = 0, \dots, T$, representa a sequência, entre o momento 0 e o momento t , dos *cash*

flows do projecto e dos valores de um conjunto de activos financeiros. Para cada estado da natureza $e_t, t < T$, é possível definir um sistema de equações cuja resolução indique qual a carteira de activos que permite, em todos os estados e_{t+1} descendentes de e_t , replicar os possíveis valores do projecto em $t + 1$. A soma do custo dessa carteira no momento t com o *cash flow* correspondente a e_t será o valor do projecto correspondente ao estado e_t . O procedimento de avaliação do projecto consiste em começar por utilizar os *cash flows* do projecto e os valores dos activos correspondentes a estados e_T para calcular os valores do projecto nos estados e_{T-1} . Os valores do projecto e dos activos nos estados e_{T-1} são então utilizados para calcular os valores do projecto nos estados e_{T-2} . Prossegue-se desta forma até se calcular o valor do projecto em e_0 . Este valor será o VAL do projecto.

A abordagem de Gehr apresenta a importante dificuldade de ser necessário definir um conjunto de estados da natureza e estimar o *cash flow* do projecto e o valor de um conjunto de activos em cada estado da natureza. A estimação do valor de cada activo em cada estado da natureza é particularmente difícil. Note-se, finalmente, que a lógica desta abordagem é também usada em modelos de tempo discreto para avaliação de opções, os quais serão apresentados em 3.4.

Apesar da sua solidez teórica, o APT tem um destaque menor que o CAPM na literatura sobre investimentos financeiros e finanças empresariais. O APT continua muitas vezes a ser considerado "o outro método", sendo o CAPM o método de referência para o cálculo do custo do capital (ver, por exemplo, [35]). Vários inquéritos recentes não o incluem sequer nas alternativas para incorporação do risco no custo do capital (por exemplo, [63] e [110]). Esta pouca aceitação pode talvez ser explicada pelas dificuldades de aplicação do APT e, em particular, pelo facto de não ser o próprio modelo a definir quais os factores a utilizar. No entanto, as qualidades do APT fazem acreditar que poderá vir a aumentar a sua importância e utilização, e justificam que este método seja encarado como de referência para o cálculo do custo do capital, ou mesmo para o cálculo directo do VAL de um projecto.

2.5 A utilização de *cash flows* equivalentes certos

O ajustamento do custo do capital é a forma mais comum de incorporação do risco no valor dos projectos. No entanto, esta forma de incorporação do risco coloca dificuldades à utilização de algumas medidas para comparar projectos mutuamente exclusivos com risco diferente. Por forma a evitar essas dificuldades, é possível incorporar o risco de uma forma diferente, procedendo a um ajustamento dos *cash flows*. Para isso é necessário, para cada *cash flow* com risco do projecto, determinar qual o valor de um *cash flow* sem risco que seja igualmente atractivo. Para estes *cash flows* sem risco, denominados *cash flows* equivalentes certos, pode utilizar-se como custo do capital a taxa de juro sem risco.

A forma de determinar estes *cash flows* equivalentes certos consiste, normalmente, em determinar qual o valor sem risco que, se for actualizado à taxa de juro sem risco, apresenta um valor actual idêntico ao do *cash flow* com risco considerado (tal é o procedimento utilizado, por exemplo, em [35], capítulo 9). Esta forma de proceder requer que se determine primeiro o custo do capital ajustado ao risco, e só depois o *cash flow* equivalente certo. Assuma-se que r (custo do capital do projecto, ver 2.3) é idêntico para todos os horizontes, e que r_F também não varia com o horizonte considerado. Seja ainda ECF_t o equivalente certo de F_t (valor esperado do *cash flow* do momento t , ver 2.3). Então deve verificar-se a seguinte relação:

$$\frac{F_t}{(1+r)^t} = \frac{ECF_t}{(1+r_F)^t} \quad (2.17)$$

A partir desta relação, é fácil ver que o equivalente certo se pode determinar através da expressão

$$ECF_t = F_t \left(\frac{1+r_F}{1+r} \right)^t \quad (2.18)$$

É fácil considerar, em (2.18), o caso em que o custo do capital e/ou a taxa de juro sem risco são diferentes para momentos diferentes; basta utilizar nesta expressão os valores das taxas correspondentes ao momento t . As fórmulas para utilização de um modelo específico para o custo do capital também podem ser incorporadas através da substituição de r por uma expressão que permita o seu cálculo.

Existem outras formas de determinar equivalentes certos. Seitz e Ellison ([157], capítulo 15) baseiam-se na abordagem de Gehr (descrita em 2.4.2.2), e utilizam uma análise de arbitragem na determinação de equivalentes certos. Os autores consideram um conjunto de m estados do mundo, sendo que em cada período ocorre um desses estados do mundo. Consideram ainda um conjunto de m activos financeiros, ou carteiras de activos, não redundantes; isto é, não é possível replicar a rentabilidade de nenhum destes activos em todos os estados do mundo através do investimento nos restantes activos. O estado do mundo que ocorre num determinado período determina o valor do *cash flow* esperado e a rentabilidade de cada um dos activos financeiros não redundantes nesse período. Desta forma, o valor dos *cash flows* e a rentabilidade dos activos num determinado período não dependem dos seus valores em períodos anteriores. Não é, assim, necessário utilizar estados da natureza que descrevem toda a evolução dos valores das variáveis. Note-se ainda que os autores consideram que a rentabilidade de cada activo em cada estado do mundo é idêntica para todos os períodos, e que os *cash flows* esperados em cada estado do mundo podem variar de período para período.

Considere-se o *cash flow* do período t . Tendo em conta o *cash flow* esperado e a rentabilidade de cada um dos activos financeiros em cada estado do mundo, é possível definir um sistema de equações cuja solução indique qual a carteira de activos que, se for adquirida no final do período $t - 1$, permite replicar em todos estados do mundo o *cash flow* do período t . Seja V_t^{t-1} o custo dessa carteira no final do período $t - 1$, e considere-se r_F constante. O custo no momento 0 de obter V_t^{t-1} no final do período $t - 1$ é $\frac{V_t^{t-1}}{(1+r_F)^{t-1}}$, e esse será também o custo a pagar no momento 0 para replicar o *cash flow*, no final do momento t , através de uma estratégia de investimento no mercado de capitais. Investindo $\frac{V_t^{t-1}}{(1+r_F)^{t-1}}$, à taxa de juro sem risco, do momento 0 até ao final do período t , é possível obter um valor final certo de $V_t^{t-1}(1+r_F)$. Assim, $V_t^{t-1}(1+r_F)$ será o equivalente certo do *cash flow* do período t .

Fischer Black [23] propõe uma "regra simples de actualização" que pode ser utilizada para calcular equivalentes certos de alguns tipos particulares de *cash flows*. Embora Black argumente que a regra pode ser utilizada com outro tipo de equivalentes, ela é baseada em equivalentes certos, tanto na forma proposta por Black como na exposta por Bierman e Smidt ([22], capítulo 22), e é de crer que a utilização de equivalentes certos constitua geralmente a forma mais simples de utilização dessa regra.

A referida regra pode ser utilizada apenas para *cash flows* cujos valores esperados sejam uma função linear da rentabilidade de um activo transaccionado no mercado. Este activo pode ser a carteira de mercado, uma acção, uma outra carteira ou uma mercadoria como o petróleo ou cobre; pode mesmo ser uma carteira cuja composição mude continuamente. Para exposição da regra e da forma de cálculo dos equivalentes certos vai considerar-se, sem perda de generalidade, que o activo é a carteira de mercado, tal como é feito pelos autores atrás citados.

Vai começar por considerar-se o caso em que o *cash flow* ocorre no período 1. Assuma-se que o *cash flow* é F_1 e que r_m é a taxa de rentabilidade da carteira de mercado no período 1. Então o valor do *cash flow* pode escrever-se na forma:

$$F_1 = a + b(1 + r_m) + \varepsilon \quad (2.19)$$

Em (2.19), ε é o termo de erro, que tem média 0 e é independente da rentabilidade da carteira de mercado, e a e b são números reais que definem a relação linear entre o *cash flow* e a rentabilidade da carteira de mercado. Sendo r_F a taxa de juro sem risco para um período, pode reescrever-se (2.19) da seguinte forma equivalente:

$$F_1 = [a + b(1 + r_F)] + b(r_m - r_F) + \varepsilon \quad (2.20)$$

O valor actual do *cash flow* deve ser igual à soma dos valores actuais das três parcelas, sendo, assim, necessário analisar a contribuição destas para o valor actual. Para duas das

parcelas a análise é simples: o valor actual do termo de erro será 0 e, sendo a parcela $[a + b(1 + r_F)]$ uma parcela não sujeita a risco, o seu valor actual será $\frac{a+b(1+r_F)}{(1+r_F)}$. Relativamente a $b(r_m - r_F)$, note-se que é possível replicar a rentabilidade desta parcela utilizando o mercado de capitais: basta pedir emprestado b por um período e investir b na carteira de mercado durante esse período. Uma vez que é possível replicar a rentabilidade da parcela com uma estratégia de investimento no mercado de capitais que não requer qualquer montante inicial, o valor actual da parcela será nulo. O valor actual de F_1 será, assim, $\frac{a+b(1+r_F)}{(1+r_F)}$. Como este valor corresponde à actualização da parcela sem risco $[a + b(1 + r_F)]$ à taxa de juro sem risco, o equivalente certo de F_1 será $a + b(1 + r_F)$. Como regra geral, *o equivalente certo do cash flow será o valor esperado do cash flow condicionado ao facto de a taxa de rentabilidade do mercado (ou do activo considerado) ser igual à taxa de juro sem risco.*

Black considera ainda a extensão da regra para vários períodos. Para tal, pressupõe que as revisões das expectativas dos *cash flows* são feitas através de um processo multiplicativo, e que as revisões correspondentes a diferentes períodos são independentes. A regra continua a ser aplicável: o equivalente certo do *cash flow* é o valor esperado deste no pressuposto de a rentabilidade da carteira de mercado (ou do activo considerado) ser, em todos os períodos, igual à taxa de juro sem risco.

Esta forma de estimar equivalentes certos apresenta a desvantagem de apenas poder ser aplicada quando a relação entre os *cash flows* esperados e a rentabilidade do activo considerado é linear, não podendo sê-lo, por exemplo, quando os *cash flows* são uma função não linear da rentabilidade do activo num dado período (este é o caso, por exemplo, das opções). Uma importante vantagem desta forma de estimar equivalentes certos é o facto de não depender de nenhum modelo específico de equilíbrio do mercado.

2.6 O financiamento e a avaliação do projecto

As abordagens ao cálculo do custo do capital que foram apresentadas na secção 2.4 têm características diferentes relativamente à forma como consideram o financiamento do projecto. O WACC, por exemplo, incorpora no custo do capital o benefício fiscal proveniente dos juros, enquanto a utilização de modelos de equilíbrio nem sequer entra em consideração com a estrutura de financiamento utilizada. Assim, a correcta utilização do custo do capital dependerá obrigatoriamente da abordagem seguida para o seu cálculo.

A análise normalmente feita à incorporação dos efeitos do financiamento na avaliação de projectos apenas considera os efeitos dos impostos sobre as empresas e, nalguns casos, os custos de emissão de capitais próprios e dívida. A análise feita nesta secção considerará apenas os efeitos destes factores. Se as taxas efectivas de imposto sobre as pessoas físicas

diferirem para diferentes tipos de títulos (por exemplo, se as taxas efectivas de imposto forem diferentes para juros e rendimento dos capitais próprios²⁸), então será também útil tomar em consideração os impostos sobre as pessoas físicas. Uma análise do impacto dos impostos sobre pessoas físicas em três das abordagens que vão ser consideradas (o WACC, o VAL ajustado e o método dos *flows to equity*), é apresentada em [173].

2.6.1 O WACC

O WACC (apresentado na subsecção 2.4.1) é a abordagem clássica ao cálculo do custo do capital. A sua utilização permite incorporar neste todos os factores relevantes: valor temporal do dinheiro, risco e efeitos do financiamento. O WACC pode, assim, ser directamente utilizado como taxa de actualização dos *cash flows* para obter um VAL do projecto que incorpora todos esses factores. O VAL calculado através da expressão (2.5), utilizando como custo do capital o WACC, não necessita de nenhum tipo de ajustamento para entrar em consideração com os efeitos do financiamento.

No entanto, e como foi discutido em 2.4.1, a utilização do WACC como custo do capital para um projecto levanta vários problemas sérios; existem numerosas situações em que o WACC necessita de ajustamentos muitos complexos, tornando-se o seu cálculo propenso a erros, e outras há em que não é mesmo aplicável. Estes problemas levam alguns autores (por exemplo [35], [122]) a preferir o WACC relativamente a uma outra forma de incorporar os efeitos do financiamento no VAL: o VAL ajustado. Luherman [122] considera mesmo que "hoje em dia o ... WACC está obsoleto".

2.6.2 O VAL ajustado (VAA)

O VAL Ajustado (VAA) foi proposto por Myers [133]. O VAA separa o VAL de um projecto em duas partes independentes. A primeira parte corresponde ao "caso base" do projecto, e consiste no VAL do projecto considerado como uma mini-empresa independente e totalmente financiada por capitais próprios (que não têm custos de emissão). A forma de financiamento do projecto é apenas tomada em consideração na segunda parte, que vai consistir no VAL dos efeitos colaterais decorrentes da aceitação do projecto. Assim

$$\text{VAA} = \text{VAL do caso base} + \left(\begin{array}{c} \text{VAL dos efeitos colaterais} \\ \text{decorrentes da aceitação do projecto} \end{array} \right) \quad (2.21)$$

²⁸O facto de se considerarem taxas efectivas de imposto tem especial relevância no caso dos capitais próprios. A taxa efectiva de imposto sobre os capitais próprios deve ter em consideração as diferentes taxas de imposto sobre mais-valias e dividendos, e o diferimento na realização das mais-valias, ou seja, a diferença entre o momento da ocorrência das mais-valias (subida de preço da acção) e a sua realização (venda da acção).

O VAA do projecto é, na realidade, o VAL do projecto tomando em consideração o impacto do financiamento. Assim, os critérios de aceitação/rejeição e comparação de projectos são idênticos aos baseados no VAL: aceitar um projecto se $VAA > 0$ e, entre um conjunto de alternativas mutuamente exclusivas, aceitar a que apresentar maior VAA.

O VAL do caso base é calculado utilizando os *cash flows* directamente imputáveis ao projecto, sem considerar o seu financiamento, e pode ser calculado utilizando a expressão (2.5). O custo do capital do VAL do caso base deve ter em consideração o risco do projecto, sendo, assim, adequada a utilização de modelos de equilíbrio como o CAPM ou o APT para o estimar. Este custo do capital é geralmente diferente do custo dos capitais próprios considerado no WACC (r_E), pois enquanto o caso base do VAA considera uma mini-empresa independente totalmente financiada por capitais próprios, o r_E usado no WACC considera a estrutura de capital da empresa; no caso de esta ter dívida, o correspondente risco financeiro vai reflectir-se no valor de r_E .

O VAL do conjunto dos efeitos colaterais decorrentes da aceitação do projecto é, muitas vezes, definido como a soma dos VAL de cada um dos efeitos colaterais, o que permite uma separação completa do valor do projecto em todos os seus componentes. A literatura que aborda a análise de projectos normalmente inclui apenas os efeitos relativos à forma de financiamento neste conjunto de parcelas, considerando que os restantes impactos do projecto são incluídos nos *cash flows* do caso base (é esta, aliás, a filosofia do artigo original de Myers). No entanto, se se pretender uma análise mais detalhada da origem do valor do projecto, pode também incluir-se nesta segunda parte uma ou mais parcelas correspondentes ao impacto do projecto nas restantes actividades da empresa, desde que este seja removido dos *cash flows* utilizados no caso base. Neste trabalho vai ser dada especial atenção aos efeitos do financiamento.

Vai começar por considerar-se a emissão de capitais próprios. Em mercados perfeitos, a emissão de novas acções feita ao preço de mercado não deve alterar o preço das acções da empresa. Assim, o único efeito colateral que normalmente se considera relativamente à emissão de capitais próprios corresponde a uma imperfeição do mercado – os custos de emissão. Os custos de emissão são normalmente custos pagos no momento da emissão das acções, que é geralmente o momento inicial do projecto. Neste caso, o VAL dos custos de emissão é igual ao valor destes custos (com sinal negativo).

Considere-se agora a emissão de dívida. Um empréstimo obtido através de mercados de capitais perfeitos é um empréstimo em que a taxa de juro é a adequada ao risco de mercado da possibilidade de incumprimento, e terá sempre um VAL nulo. A inclusão de uma parcela relativa ao montante emprestado e pagamento de juros e amortizações é, desta forma, inútil, uma vez que tal parcela terá valor nulo se for correctamente calculada. Os efeitos colaterais que se consideram relativamente à emissão de dívida referem-se a outros

custos e benefícios: os custos de emissão e os benefícios fiscais decorrentes do pagamento dos juros. Os custos de emissão ocorrem especialmente quando a dívida tem a forma de um empréstimo obrigacionista e, tal como acontece com a emissão de novas acções, ocorrem geralmente no momento inicial do projecto. O VAL destes custos é, neste caso, igual ao seu montante (com sinal negativo).

O VAL do benefício fiscal decorrente do pagamento dos juros é normalmente considerado o mais importante efeito colateral do financiamento do projecto. Existem mesmo autores que limitam a segunda parte do cálculo do VAA a uma expressão para cálculo do VAL desse benefício fiscal (por exemplo [157], capítulo 20). O benefício fiscal correspondente a cada período pode ser calculado como o produto da taxa de imposto pelo montante de juros. Este montante de juros a imputar ao projecto nem sempre se deve limitar à parcela não amortizada da dívida originalmente utilizada para financiar o projecto, mas deve ter em consideração a contribuição do projecto para a capacidade de endividamento da empresa.

Além do valor do benefício fiscal decorrente dos juros em cada período, é também necessário definir qual a taxa de actualização a utilizar para calcular o seu VAL. A filosofia do VAA é que cada efeito colateral deve ser avaliado utilizando uma taxa de actualização ajustada ao seu risco. Usualmente considera-se que o benefício fiscal tem um risco idêntico ao do pagamento dos juros que estão na sua origem, utilizando-se, assim, a taxa de juro da dívida da empresa como taxa de actualização (ver, por exemplo, [35], capítulo 19). Luherman [122] nota que pode haver uma altura em que ainda existam condições para pagar os juros, mas em que não se possam utilizar os benefícios fiscais (por a empresa não apresentar lucros), sendo, portanto, o risco do benefício fiscal superior ao do pagamento dos juros. No seguimento deste raciocínio, Luherman sugere a utilização de uma taxa de actualização superior à taxa de juro da dívida, resultado da adição a esta de um prémio de risco *ad hoc*. Um tal ajustamento é arbitrário, sendo, assim, de evitar.

Ruback [154] propõe um modo diferente de considerar os benefícios fiscais da dívida, que apresenta como uma abordagem independente do VAA; no entanto, esta abordagem pode ser considerada como um caso particular do VAA. Ruback argumenta que, se a empresa seguir a política de manter a dívida como uma fracção constante do seu valor de mercado (ou se mantiver a dívida relativa ao projecto como uma fracção do valor deste), então o risco dos benefícios fiscais será exactamente igual ao risco dos capitais próprios, ou seja, igual ao risco do caso base do projecto. Numa tal situação, a taxa de actualização usada para os benefícios fiscais deve ser idêntica ao custo do capital considerado para o caso base do projecto. Pode, assim, adicionar-se o benefício fiscal de cada período aos *cash flows* do projecto, obtendo o que é designado por *capital cash flows*, e actualizar os *capital cash flows* ao custo do capital do caso base do projecto. Tal é exactamente equivalente a calcular o VAL do caso base e adicionar a este o VAL dos benefícios fiscais calculado usando o mesmo

custo do capital do caso base; portanto a abordagem de Ruback também permite obter um VAA.

Ruback generaliza ainda a sua abordagem, por forma a considerar a situação em que uma parte da dívida é constante e outra é proporcional ao valor de mercado da empresa ou do projecto. Neste caso, o benefício fiscal da parte fixa da dívida deve ser actualizado à taxa de juro desta, enquanto o benefício fiscal da parte proporcional ao valor do projecto deve ser actualizado ao custo do capital do caso base. A abordagem de Ruback integra-se na filosofia do VAA, permitindo a separação do valor do projecto em componentes considerados individualmente.

O VAA permite considerar separadamente as decisões de investimento e financiamento, integrando os dois tipos de decisões como parcelas do valor do projecto. Desta forma, o VAA evita vários problemas do WACC, podendo ser aplicado a projectos com características diferentes das actividades existentes da empresa e a fontes de financiamento mais complexas, e facilitando a análise quando existem estruturas de capital ou situações fiscais instáveis. O VAA permite ainda a separação do projecto em partes que faz sentido considerar individualmente, permitindo dessa forma obter informação sobre a proveniência do valor do projecto e uma análise mais detalhada do impacto de cada tipo de decisão. Estes pontos fortes da aplicação do VAA levam vários autores a considerá-lo, hoje em dia, como a abordagem preferencial à avaliação de projectos, tomando em consideração os efeitos do financiamento ([35], [122], [123]).

O VAA é uma abordagem orientada para o cálculo de um valor para o projecto. Assim, a lógica subjacente a esta abordagem é por vezes difícil de aplicar a algumas medidas de avaliação de projectos não baseadas no cálculo do valor (por exemplo, em medidas baseadas em taxas de rentabilidade). A excepção a esta dificuldade são os casos em que todos os componentes dos *cash flows* são actualizados ao mesmo custo do capital; tal acontece, por exemplo, na abordagem de Ruback, quando a dívida é considerada uma percentagem constante do valor de mercado do projecto.

2.6.3 Outras abordagens

Existem na literatura outras abordagens para a integração dos efeitos do financiamento no valor do projecto. A abordagem de Ruback [154] pode ser considerada uma abordagem diferente (é essa a forma como o autor a considera), embora possa também ser tomada como um caso particular da aplicação do VAA, como foi feito no presente trabalho (ver 2.6.2).

Arditti e Levy [6] propõem uma abordagem muito semelhante à de Ruback. Consiste em calcular um custo médio ponderado do capital antes de impostos, que não entra em

conta com os benefícios fiscais da dívida:

$$WACC_{antes\ de\ impostos} = \frac{D}{V}r_D + \frac{E}{V}r_E \quad (2.22)$$

Este custo do capital é então utilizado para actualizar os *capital cash flows*, definidos de forma idêntica à de Ruback. Há autores que consideram que o custo do capital utilizado por Arditti e Levy é diferente do custo do capital utilizado no caso base do VAA (por exemplo [157], capítulo 20). Se se considerar que se verificam os pressupostos necessários à aplicação de um custo médio ponderado do capital, isto é, se a situação fiscal e estrutura de capital forem estáveis, se o projecto for uma "réplica" da empresa, e se, simultaneamente, se assumir que os mercados são perfeitos (salvo distorções provocadas por impostos sobre as empresas), não parece fazer sentido que assim possa ser. No seu artigo, Ruback considera que estes dois custos do capital devem ser iguais, podendo assim considerar-se que a abordagem de Arditti e Levy é idêntica ao caso em que Ruback considera a dívida como uma percentagem constante do valor do projecto. Ruback nota também que esta abordagem é equivalente à utilização tradicional do WACC, quando ambas são correctamente utilizadas, pois assumem os mesmos pressupostos acerca dos *cash flows*, estrutura do capital e impostos.

Alguns autores (por exemplo [139], capítulo 5; [157], capítulo 20; [173]) apresentam um outro método, para o qual são utilizadas diferentes designações, como método dos *net equity flows* ([139]), *equity residual net present value* ([157]) ou *flows to equity* ([173])²⁹. Este método foca-se nos *cash flows* dos detentores dos capitais próprios, os *net equity flows*. Os *net equity flows* reflectem os juros pagos, amortização da dívida e recebimento de montantes relativos a empréstimos contraídos. Podem, assim, ser calculados subtraindo ao *cash flow* que se tem vindo a considerar os montantes pagos como juros (depois de impostos) e os montantes de amortização da dívida, e adicionando os recebimentos de montantes emprestados (quando os empréstimos são contraídos). O custo e benefícios fiscais da dívida são, assim, incorporados nos *cash flows*, não sendo, por isso, considerados na taxa de actualização. A taxa de actualização a utilizar é a taxa de rentabilidade esperada dos capitais próprios, ou seja, o r_E da definição do WACC, que reflecte já o risco financeiro resultante da existência de dívida (no caso em que esta existe). Os custos de emissão de dívida ou capitais próprios podem ser facilmente incorporados no VAL determinado por este método através da subtracção destes custos ao *net equity flow* do momento em que ocorrem.

Este método permite, tal como o VAA, considerar alterações na estrutura de capital, desde que se considerem as correspondentes variações do custo dos capitais próprios. No

²⁹ Taggart [173] nota ainda que outros autores utilizam designações diferentes, como *equity residual income* ou *equity residual value*.

entanto, este método apresenta as mesmas dificuldades do WACC na avaliação de projectos com risco diferente do da empresa. Seitz e Ellison [157] notam que, se se assumir que o risco do projecto é igual ao da empresa, e que a estrutura de capital é constante, este método deve conduzir aos mesmos resultados que o WACC.

Outros autores ([140], por exemplo) propõem que, por forma a ter em consideração os efeitos do financiamento, o custo do capital de um projecto deve ser o custo das fontes efectivamente utilizadas para o seu financiamento. Uma tal abordagem é semelhante ao WACC, mas procede à actualização dos *cash flows* usando um custo do capital que depende das próximas fontes a serem realmente utilizadas, e não da média ponderada das fontes de financiamento na estrutura de capital pretendida pela empresa. Esta abordagem ao cálculo do custo do capital apresenta problemas óbvios, como o facto de a aceitação ou rejeição de projectos depender da ordem por que são apresentados, e não ter em conta o efeito da alavancagem financeira no risco e custo dos capitais próprios ([181]). Assim, uma tal abordagem ao custo do capital não tem base teórica sólida.

2.7 A Taxa Interna de Rentabilidade (TIR)

A Taxa Interna de Rentabilidade (TIR) é uma medida de avaliação financeira de projectos recomendada em muitos textos financeiros e muito utilizada pelas empresas. Apesar de ser reconhecido nos meios académicos que o VAL é teoricamente superior à TIR, a generalidade dos inquéritos feitos a empresas mostra que a TIR continua a ser preferida por estas (ver [28], [46], [63], [110], [141], [156], por exemplo) – a maior popularidade da TIR é normalmente justificada pela preferência dos gestores pela utilização de uma taxa de rentabilidade como medida de avaliação do projecto.

A TIR é geralmente definida na literatura como a taxa de actualização que iguala o VAL a 0, ou como a taxa de actualização que iguala o somatório dos *cash flows* actualizados a 0 ([35], capítulo 5; [38], capítulo 11; [139], capítulo 6; [146]; [171], glossário; [184], capítulo 13). Esta definição é orientada para a forma de cálculo da TIR, e não para o seu significado. Relativamente ao seu significado, a TIR pode ser definida como a taxa de rentabilidade do capital que permanece investido no projecto ([52], [118]). Nesta definição, considera-se um entendimento lato do que é o capital investido, permitindo-se que o valor deste capital seja negativo (tal pode ocorrer, por exemplo, quando o projecto tem os *cash flows* positivos antes dos *cash flows* negativos). Note-se também que, para um projecto que tenha *cash flows* intermédios, a TIR será, de certa forma, uma média de taxas de rentabilidade para fundos investidos por períodos de tempo diferentes, dentro do tempo de vida do projecto ([18]).

Mantendo a notação que tem vindo a ser utilizada, isto é, sendo N o tempo de vida do projecto, em número de períodos (normalmente anos), e $F_t, t = 0, \dots, N$, o valor esperado do *cash flow* do período t , a TIR pode ser calculada através da seguinte equação:

$$\sum_{t=0}^N \frac{F_t}{(1 + TIR)^t} = 0 \quad (2.23)$$

Para definir de forma mais rigorosa os critérios de aceitação/rejeição de investimentos baseados na TIR, vai considerar-se uma classificação dos projectos de investimento de acordo com os seus *cash flows* baseada em Bierman e Smidt ([22], capítulo 3). De acordo com estes autores, um projecto é um investimento convencional se todos os *cash flows* negativos ocorrem antes dos positivos, e é do tipo de um empréstimo se todos os *cash flows* positivos ocorrem antes dos negativos. Vão, neste trabalho, definir-se estas categorias de forma mais abrangente. Para isso, vai considerar-se que o custo do capital r pertence ao intervalo em que tem significado económico, isto é, $r \in]-1, +\infty[$. Considera-se que um projecto é um investimento convencional se o VAL for uma função decrescente do custo do capital e existir algum custo do capital que anule o VAL, e considera-se que é do tipo de um empréstimo se o VAL for uma função crescente do custo do capital e existir algum custo do capital que anule o VAL. Nos restantes casos considerar-se-á que o projecto é um investimento não convencional. Note-se que existem outras classificações possíveis, algumas mais complexas mas também mais informativas. No entanto, esta será suficiente para a discussão que se segue.

Utilizando esta classificação, pode interpretar-se a TIR de um investimento convencional como sendo a maior taxa de juro que um investidor poderia pagar, sem perder dinheiro, se todo o investimento no projecto utilizasse dívida, e esse empréstimo (capital e juros) fosse pago utilizando os *cash flows* positivos resultantes do projecto na altura em que estes ocorrem (interpretações semelhantes são dadas em [22], capítulo 4, e [85]). Esta interpretação torna óbvio o critério de aceitação/rejeição de investimentos convencionais baseado na TIR: sendo r o custo do capital do projecto, aceitar o projecto se $TIR > r$, rejeitá-lo se $TIR < r$. Numa abordagem inicial, o critério para selecção de um projecto entre um conjunto de propostas de investimentos convencionais mutuamente exclusivas pode ser definido como: aceitar o projecto com maior TIR. Como se verá, esta abordagem inicial à selecção de um projecto entre um conjunto de investimentos pode não ser a melhor.

A medida da TIR apresenta várias dificuldades de aplicação na selecção de projectos, que serão agora discutidas. A primeira está relacionada com o facto de, para além da TIR, ser necessária informação adicional sobre as características do investimento para se definir se se deve aceitar ou rejeitar um projecto. Com efeito, o critério de aceitação/rejeição definido anteriormente apenas se refere a investimentos convencionais. Se o projecto tiver

as características de um empréstimo, o critério deve ser invertido. Se for um investimento não convencional, as dificuldades são maiores.

No caso de o projecto ser um investimento não convencional, pode existir mais que uma TIR, nenhuma TIR, ou uma TIR. Existem critérios que permitem determinar se existe apenas uma TIR (ver, por exemplo, [20]), e, para esse caso, é possível definir critérios de aceitação/rejeição dos projectos. Infelizmente, a análise dos restantes casos é bastante mais complexa.

Considere-se um investimento não convencional que tem *cash flows* com valores -10 , 47 , -72 e 36 nos períodos 0 , 1 , 2 e 3 , respectivamente, sendo estes os seus únicos *cash flows* (este exemplo é baseado em [139], capítulo 6). Resolvendo a equação (2.23), obtêm-se as raízes 20% , 50% e 100% . O projecto tem, por isso 3 TIR, e não existe nenhum critério simples baseado na TIR para, dado um custo do capital, decidir se o projecto deve ser aceite ou rejeitado.

Considere-se um projecto com os *cash flows* de 10 , -30 e 25 nos períodos 0 , 1 e 2 , respectivamente, sendo estes os seus únicos *cash flows* (este exemplo é baseado em [35], capítulo 5). Para este projecto, a equação (2.23) não tem nenhuma raiz real, e por isso o projecto não tem nenhuma TIR. Embora se possam definir critérios que têm por base o sinal do primeiro *cash flow* ou a soma dos *cash flows* para aceitação/rejeição de projectos que não têm TIR, a possibilidade de inexistência do valor da TIR torna a utilização desta medida deselegante.

Assim, quando um projecto é um investimento não convencional, não é possível definir um critério de aceitação/rejeição baseado apenas na TIR, pois esta pode não existir ou apresentar vários valores. A análise tem que ser feita utilizando informação adicional sobre o projecto e, particularmente no caso de existirem várias TIR, essa análise pode tornar-se muito complexa. Além disso, mesmo nos casos em que é possível definir critérios baseados na TIR, a necessidade de vários elementos adicionais para definir a forma de utilização dos critérios torna a sua utilização deselegante e não permite aos agentes de decisão uma interpretação intuitiva simples para o significado dos resultados obtidos.

Pode colocar-se a questão de saber se é ou não comum que projectos analisados por empresas sejam investimentos não convencionais. Lorie e Savage [121] explicam que este tipo de projectos ocorre, por exemplo, em indústrias extractivas. Considere-se o projecto de substituição de uma bomba de extracção de petróleo por outra mais eficiente. A aquisição da bomba representa um *cash flow* inicial negativo; a maior eficiência da nova bomba irá permitir a extracção de mais petróleo nos primeiros períodos, representando *cash flows* incrementais positivos; a extracção mais rápida também irá levar ao esgotamento mais rápido do petróleo, levando a que a produção termine num número menor de períodos e conduzindo, por isso, a *cash flows* incrementais negativos nos períodos finais. Numa tal

situação, o projecto será geralmente um investimento não convencional, colocando-se as dificuldades atrás apontadas à utilização da TIR.

Um outro problema da aplicação da TIR é a sua utilização com projectos mutuamente exclusivos. Considerem-se dois projectos A e B, mutuamente exclusivos, em que o projecto A tem *cash flows* $F_0 = -10$ e $F_1 = 33$, e o projecto B tem *cash flows* $F_0 = -100$ e $F_1 = 220$. O risco sistemático dos dois projectos é idêntico, e o custo do capital é de 10% para ambos. A TIR de A é 230%, enquanto a TIR de B é 120%, pelo que a comparação directa das TIR indica que A é preferível a B. No entanto, o VAL de A é de apenas 20, enquanto o VAL de B é 100, pelo que o critério do VAL indica que o projecto B é preferível ao A. Tendo em conta esta contradição entre o VAL e a TIR, que projecto deve ser escolhido? Nas condições que têm vindo a ser assumidas, e que incluem mercados perfeitos e estimativas não distorcidas dos *cash flows*, o VAL representa a contribuição do projecto para o valor da empresa e o objectivo das decisões deve ser a maximização deste valor. Assim, o critério que deve ser seguido é o do VAL. O problema com a comparação das TIR nesta situação é que a TIR, representando a taxa de rentabilidade do capital que permanece investido, assume com facilidade valores maiores para projectos que apenas requerem um investimento pequeno.

Considerem-se agora os projectos C e D, mutuamente exclusivos, e que exigem o mesmo investimento inicial. O projecto C tem *cash flows* $F_0 = -100$ e $F_1 = 121$, o projecto D tem *cash flows* $F_0 = -100$, $F_1 = 0$ e $F_2 = 144$, e o custo do capital para ambos os projectos é 10%. Mais uma vez ocorre uma contradição entre as indicações fornecidas pelo VAL e as dadas pela comparação das TIR: o VAL de A (10) é menor que o VAL de B (aproximadamente 19), mas a TIR de A (21%) é superior à de B (20%). Mais uma vez a comparação directa das TIR fornece uma indicação errada sobre qual o projecto a empreender. O problema agora é que a TIR favorece os projectos com um tempo de vida menor, ou em que os *cash flows* ocorram mais cedo.

Como se mostrou, a comparação directa das TIR de projectos mutuamente exclusivos pode provocar problemas quando a escala dos investimentos ou o padrão temporal de ocorrência dos *cash flows* são diferentes. Apesar disso, a TIR pode ser utilizada para a escolha entre projectos mutuamente exclusivos de uma forma coerente com o VAL. Para ver como tal é possível, considerem-se os projectos A e B, definidos atrás. Em lugar de se compararem directamente as TIR, deve definir-se um investimento diferença, isto é, um investimento cujos *cash flows* sejam a diferença entre os *cash flows* dos dois projectos. Definindo este investimento como B-A (se se definisse como A-B os resultados seriam equivalentes), os *cash flows* do investimento diferença são $F_0 = -90$ e $F_1 = 187$. Desta forma a TIR é de cerca de 108%, pelo que, tendo o investimento diferença características de um investimento convencional, este deve ser aceite. Como o investimento diferença deve ser aceite, então o projecto B é preferível ao projecto A, sendo esta indicação coincidente

com a fornecida pela comparação dos VAL. A TIR do investimento diferença é muitas vezes designada por taxa de Fisher, ou intersecção de Fisher.

A utilização do investimento diferença permite a utilização da TIR como base para uma comparação coerente de dois projectos mutuamente exclusivos. Quando os projectos mutuamente exclusivos são mais do que dois, é possível utilizar procedimentos para selecção do melhor baseados na comparação dos projectos dois a dois (ver, por exemplo, [121]). A utilização da TIR do investimento diferença apresenta, no entanto, um grave inconveniente: os investimentos diferença são frequentemente não convencionais ([121]), o que muitas vezes impossibilita que se tire qualquer conclusão sobre estes utilizando a TIR.

Outra situação em que a TIR não pode ser aplicada para comparar projectos é quando estes apresentam risco diferente. Numa tal situação nem sequer a utilização do investimento diferença produz resultados correctos. Também quando os *cash flows* de um projecto podem ser separados em duas parcelas de risco diferente (por exemplo, quando se separa os *cash flows* do caso base dos *cash flows* dos efeitos do financiamento, como no VAA) a forma de aplicação correcta da TIR levanta algumas dúvidas. Ambos os casos podem, no entanto, ser considerados se, em vez dos *cash flows*, se utilizarem equivalentes certos dos *cash flows* (a determinação de equivalentes certos dos *cash flows* foi abordada na secção 2.5). Se for seguida uma tal abordagem, o custo do capital utilizado como limiar de comparação da TIR deve ser a taxa de juro sem risco.

Existe ainda uma outra situação em que a utilização da TIR levanta sérias dificuldades: quando o custo de capital para diferentes prazos é diferente. Tal pode acontecer quando o risco do projecto varia ao longo do tempo, e quando a taxa de juro sem risco é diferente para prazos diferentes. Estas situações levantam sérias dificuldades à utilização de critérios baseados na TIR, pois não existe uma forma simples de definir qual o custo de capital que deve servir de termo de comparação.

Assim, pode concluir-se que, apesar da grande aceitação que tem por parte das empresas, a utilização da TIR levanta problemas teóricos muito sérios, que não se colocam com a utilização do VAL.

Uma última questão relativa à TIR está relacionada com os pressupostos de reinvestimento assumidos. Com efeito, muitos autores afirmam que a TIR é baseada no pressuposto de que os *cash flows* gerados pelo projecto podem ser reinvestidos a uma taxa igual à própria TIR até ao final do projecto³⁰. A forma como este pressuposto é apresentado nem sempre

³⁰ Alguns autores (por exemplo Remer e Nieto [146]) vão mais longe, afirmando que a TIR pressupõe que os *cash flows* são reinvestidos (e não apenas que podem ser reinvestidos), e não indicando até quando devem ser reinvestidos (o que aparentemente implica que devem ser reinvestidos indefinidamente).

permite identificar com certeza se os autores consideram que o pressuposto é inerente ao cálculo da própria medida, aos critérios baseados na medida, ou apenas à comparação directa de projectos utilizando a TIR destes. Alguns autores parecem considerar que o pressuposto é inerente ao cálculo da medida ou a todos os critérios baseados nesta (por exemplo [38], capítulo 11; [49], capítulo 2; [146]; [157], capítulo 6; [163], capítulo 1; [184], capítulo 13), enquanto noutros casos os autores apenas se referem à comparação directa de projectos utilizando as suas TIR (por exemplo [17], [18], [170]). Um argumento normalmente utilizado a favor da existência deste pressuposto é o facto de a TIR ser baseada na actualização dos *cash flows*, e a actualização dos *cash flows* ter implícito o pressuposto de reinvestimento à taxa de actualização ([38], [146], [184]). Shull [162] argumenta que uma taxa baseada na capitalização dos *cash flows* intermédios a uma taxa de reinvestimento explícita fornecerá uma taxa igual à TIR se a taxa de reinvestimento considerada for igual à TIR, pelo que "... a TIR pode ser caracterizada como tendo um pressuposto de taxa de reinvestimento implícito".

Alguns autores contestam a existência de um pressuposto de reinvestimento (por exemplo [22], capítulo 5; [52]; [55]; [106]; [118]). Crean [52] nota que, sendo a TIR definida como a taxa de rentabilidade do capital que permanece investido, o cálculo da medida não assume qualquer pressuposto quanto ao capital libertado. Lohmann [118] avança a hipótese de o pressuposto de taxa de reinvestimento não passar de uma confusão criada pela definição da TIR como a taxa de actualização que anula o VAL³¹, defendendo que esta é apenas a definição de uma possível forma de cálculo da TIR, e que uma definição da TIR que tenha em conta o seu significado não tem implícito qualquer pressuposto de reinvestimento. Lohmann mostra ainda que o critério da TIR para aceitação/rejeição de projectos é válido se o reinvestimento dos *cash flows* puder ser feito a uma taxa igual ao custo do capital.

A forma de cálculo adoptada não parece constituir motivo para considerar que o significado da TIR requeira qualquer pressuposto sobre o reinvestimento dos *cash flows* intermédios. Com efeito, a utilização de *cash flows* actualizados não considera directamente quaisquer taxas de reinvestimento, e o facto de a TIR poder ser calculada por métodos que consideram explicitamente taxas de reinvestimento não implica que ela exija essas taxas de reinvestimento (é possível, para qualquer medida financeira, encontrar formas de cálculo cuja lógica de definição inclua pressupostos absurdos e que forneçam um valor igual ao da medida, sem que a medida tenha que assumir esses pressupostos). Também o critério de aceitação/rejeição de projectos baseado na TIR não necessita de assumir uma taxa de reinvestimento igual à TIR. Basta ter em consideração que, quando aplicável, este critério dá resultados idênticos aos do VAL (ver, por exemplo, [35], capítulo 5; ou [171], capítulo

³¹Para corroborar a opinião de Lohmann, diga-se que Remer e Nieto [146] argumentam que "... uma vez que os cálculos (da TIR) são baseados no VAL, os pressupostos de reinvestimento imediato de todos os *cash flows* à taxa de actualização devem verificar-se".

10), para constatar que este tem que ser coerente com uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital (que é geralmente diferente da TIR). Se se tiver em consideração que a forma correcta de comparar dois investimentos utilizando a TIR consiste em definir um novo investimento como a diferença desses dois investimentos e verificar se ele deve ser aceite ou rejeitado, conclui-se que também este critério é coerente com uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital.

Pode, assim, questionar-se se existe alguma situação em que o pressuposto de reinvestimento a uma taxa igual à TIR tenha que ser levado em conta, ou em que este seja útil. Considere-se uma situação em que o capital existente para investimento é limitado, ou seja, em que existe racionamento de capital. Tal racionamento de capital pode dever-se a imperfeições dos mercados de capitais ou, se se estiverem a considerar os projectos de uma divisão de uma empresa, pode dever-se à política da empresa. Em tais situações, os pressupostos que têm vindo a ser assumidos (mercados perfeitos, estimativas não enviesadas dos *cash flows*, defesa dos interesses dos accionistas) deixam de se poder considerar como simultaneamente válidos e, na selecção dos projectos, deixa de ser razoável entrar apenas em consideração com a contribuição do investimento para o valor da empresa, havendo que levar também em conta o montante investido. Assim, em tais situações, uma comparação directa baseada no VAL não fornece indicações úteis³², sendo mais razoável que se baseie numa medida que forneça uma indicação da rentabilidade por unidade de capital investido (por exemplo, uma taxa de rentabilidade). A taxa de rentabilidade do investimento diferença também não é útil nas situações consideradas, pois não indica qual o investimento com maior rentabilidade por unidade de capital investido. Nestas situações, pode ser mais pertinente a comparação directa das taxa de rentabilidade dos projectos.

Assim, podem existir situações em que seja razoável comparar directamente projectos pela sua taxa de rentabilidade. Resta saber se faz sentido que esta taxa de rentabilidade seja a TIR. A comparação directa de taxas de rentabilidade de diferentes investimentos apenas é legítima se for feita relativamente ao mesmo período de tempo ([52]). Considerem-se dois projectos que requerem o mesmo investimento, o primeiro dos quais apresenta uma TIR mais elevada e um tempo de vida mais curto, e o segundo uma TIR ligeiramente inferior (mas superior ao custo do capital) e um tempo de vida muito superior. Se as oportunidades de reinvestimento dos montantes recebidos do projecto apresentarem uma taxa de rentabilidade igual ao custo do capital, então o segundo projecto será, com probabilidade elevada, mais atractivo que o primeiro. A TIR é uma taxa de rentabilidade que depende dos tempos de vida e padrões dos *cash flows* dos projectos; assim, em geral, a comparação das TIR não é uma comparação de taxas de rentabilidade referentes ao mesmo período de tempo. Por forma a que se possa assumir que as TIR de diferentes projectos são taxas de rentabilidade

³²Note-se que, embora a comparação directa baseada no VAL não forneça indicações úteis, podem existir métodos baseados no VAL cuja utilização seja apropriada, como será discutido em 2.9.1.2.

relativas ao mesmo período de tempo, é necessário o pressuposto de os *cash flows* intermédios de cada projecto poderem ser reinvestidos a uma taxa igual à TIR do projecto, até à data terminal do projecto que tiver vida mais longa.

O pressuposto de uma taxa de reinvestimento igual à TIR pode, assim, ser útil para algumas aplicações. Mas pode ainda colocar-se a questão de saber se ele faz, economicamente, sentido. Quanto a esta questão a resposta é: não. Como argumenta Lohmann [118], todas as consequências monetárias relevantes de uma decisão relativa a um projecto devem ser reflectidas nos seus *cash flows*. Se a aceitação de um projecto permite que o reinvestimento posterior dos montantes por ele libertados seja feito a uma taxa diferente daquela que estaria disponível se o projecto não fosse aceite, então esta consequência da sua aceitação deve ser reflectida nos seus *cash flows*. Ou seja, o pressuposto de o reinvestimento ser feito a uma taxa igual à própria TIR só fará sentido se os *cash flows* dos projectos estiverem definidos de uma forma errónea e, nesse caso, a solução que deve ser adoptada deve passar por uma reestimação dos *cash flows*.

Para finalizar, refira-se um resultado interessante de Dudley [55], relativo ao reinvestimento dos *cash flows* intermédios e à sua relação com a taxa de Fisher (referida atrás). Considere-se a comparação de dois projectos mutuamente exclusivos que são investimentos convencionais, e que o objectivo é a maximização do valor final, obtido através do investimento num deles e reinvestimento dos *cash flows* intermédios até à data terminal do que tiver vida mais longa. Considere-se ainda que a taxa de reinvestimento não é forçosamente igual ao custo do capital, e que os dois projectos são atractivos, isto é, que o seu VAL é positivo e, conseqüentemente, a sua TIR é superior ao custo do capital. Então, se a comparação dos VAL dos projectos e a comparação das TIR produzirem resultados contraditórios, a selecção do que tem VAL superior conduzirá ao maior valor terminal se a taxa de reinvestimento for inferior à taxa de Fisher, enquanto a selecção do projecto que tem TIR superior conduzirá ao maior valor terminal se a taxa de reinvestimento for superior à taxa de Fisher.

2.8 Outras medidas de avaliação financeira de projectos

O VAL e a TIR são as medidas de avaliação financeira de projectos às quais é geralmente dado maior relevo nos textos financeiros. Existem outras medidas que têm vindo a ser propostas por diferentes autores; nas subsecções 2.8.1 a 2.8.5 apresentar-se-ão várias dessas medidas, para o efeito classificando-as em cinco classes (esta classificação tem por base [146] e [147]).

Não se pretende que esta apresentação de medidas de avaliação financeira de projectos seja exaustiva. Pretende-se apenas transmitir uma ideia sobre a diversidade das medidas que têm vindo a ser propostas na literatura. Para simplificar a exposição, considerar-se-á

um custo do capital constante para horizontes de investimento diferentes, ou seja, uma estrutura temporal horizontal para o custo do capital. É geralmente simples considerar uma estrutura temporal diferente para o custo do capital, embora por vezes a definição dos métodos possa vir a requerer a utilização das taxas futuras implícitas nessa estrutura.

2.8.1 Medidas de valor equivalente

As medidas de valor equivalente são aquelas que, através da actualização ou capitalização dos *cash flows*, os sintetizam num *cash flow* equivalente ou numa sequência equivalente de *cash flows*. A medida de valor equivalente mais comum é o VAL, que sintetiza a sequência de *cash flows* do projecto num só *cash flow* equivalente, relativo ao momento inicial. O Valor Futuro Líquido (VFL), Valor Anual Equivalente (VAE) e Valor Capitalizado Equivalente (VCE) são outras medidas de valor equivalente que, por vezes, se encontram na literatura.

O VFL é o valor monetário da sequência de *cash flows* do projecto num momento futuro, momento esse que geralmente corresponde à data em que o projecto termina. O VFL pode ser considerado como o valor esperado que um *cash flow* com risco idêntico ao do projecto deveria ter nesse momento futuro, de forma a que a empresa fosse indiferente entre o projecto e esse *cash flow*. O VFL é obtido através da capitalização, para esse momento futuro, de todos os *cash flows* do projecto, sendo normalmente indicado na literatura que a taxa a utilizar deve ser igual ao custo do capital ([139], capítulo 6; [146]). Utilizando a notação que tem vindo a ser seguida, isto é, sendo r o custo do capital, N o tempo de vida do projecto e $F_t, t = 0, \dots, N$, o *cash flow* do período t , e sendo ainda $N_0 \geq N$ o momento relativamente ao qual se pretende calcular o VFL, pode definir-se

$$VFL = \sum_{t=0}^N F_t (1+r)^{N_0-t} = VAL (1+r)^{N_0} \quad (2.24)$$

O critério de aceitação/rejeição baseado no VFL consiste em aceitar o projecto se o VFL for positivo. A selecção entre projectos mutuamente exclusivos apenas pode utilizar o VFL se os VFL dos diferentes projectos forem calculados relativamente ao mesmo momento (normalmente o momento final do projecto com maior tempo de vida), e se todos os projectos tiverem o mesmo risco, ou seja, se para todos puder ser utilizado o mesmo custo do capital. Se tais condições forem verificadas, o projecto a seleccionar deverá ser o que apresentar maior VFL. Se os projectos tiverem risco diferente, poderão ser utilizados *cash flows* equivalentes certos para uma comparação correcta dos VFL (ver secção 2.5).

O VAE baseia-se na transformação da sequência de *cash flows* do projecto numa anuidade, isto é, numa sequência com um número limitado de *cash flows* que têm valor esperado idêntico. O VAE será o valor de cada um dos *cash flows* de uma anuidade com o mesmo

risco do projecto que seja equivalente ao projecto (no sentido de ter um VAL idêntico ao do projecto), sendo geralmente considerada uma anuidade com o mesmo tempo de vida do projecto. Sendo N_0 o número de períodos da anuidade, o VAE é dado por

$$VAE = \frac{\sum_{t=0}^N \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{N_0} \frac{1}{(1+r)^t}} = VAL \frac{r(1+r)^{N_0}}{(1+r)^{N_0} - 1} \quad (2.25)$$

O VCE é muito semelhante ao VAE, diferindo apenas no tempo de vida da sequência de *cash flows* equivalente que considera: o VCE considera uma perpetuidade, isto é, uma sequência de *cash flows* com tempo de vida infinito. Assim,

$$VCE = \frac{\sum_{t=0}^N \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t}} = VAL \cdot r \quad (2.26)$$

Os critérios baseados no VAE e VCE são idênticos aos critérios baseados no VFL. As condições de aplicação destas medidas para comparação de projectos são também semelhantes às do VFL: estes devem ter o mesmo risco e, portanto, o mesmo custo do capital e, no caso do VAE, as anuidades consideradas devem ter o mesmo tempo de vida.

É ainda de referir uma aplicação comum para a qual o VAE é particularmente útil: o caso de projectos sucessivamente repetidos. Este é o caso que ocorre, por exemplo, quando se coloca a questão da escolha de um equipamento de que uma fábrica necessite, se no final do tempo de vida desse equipamento ele tiver que ser substituído por outro com características semelhantes. A forma de avaliação de tais projectos através do VAL consiste em considerar explicitamente a repetição dos *cash flows* correspondentes a cada alternativa, até se atingir um horizonte de análise comum para todas as alternativas. Se for utilizado o VAE, pode considerar-se, para cada equipamento, uma anuidade com o mesmo tempo de vida do equipamento, comparando-se depois os VAE assim obtidos para as diferentes alternativas.

Na literatura têm também vindo a ser propostas medidas que são semelhantes ao VAL, mas consideram explicitamente a taxa de reinvestimento dos *cash flows* intermédios. Uma dessas medidas é o Valor Actual Líquido do Valor Terminal (VALVT), proposto por Wong [187]. Wong considera que todos os *cash flows* posteriores ao investimento inicial podem ser reinvestidos à taxa de reinvestimento r' até ao final do projecto. Este mesmo autor transforma toda a sequência de *cash flows*, a partir do período 1 (inclusivé), num *cash flow* equivalente, de montante igual ao valor terminal que resulta desse reinvestimento. Esse *cash flow* equivalente é actualizado, ao custo do capital do projecto, do momento N para o momento 0, e adicionado ao *cash flow* correspondente ao investimento inicial. Assim,

$$VALVT = F_0 + \frac{\sum_{t=1}^N F_t (1+r')^{N-t}}{(1+r)^N} \quad (2.27)$$

Outra medida de valor equivalente baseada no reinvestimento dos *cash flows* intermédios é o VAL*, proposto por Beaves [17] [18]. Na definição desta medida, Beaves distingue duas sequências de *cash flows*: uma *sequência de investimento* e uma *sequência de retorno*. O momento final da sequência de investimento é designado por *ponto de transição*. A determinação desse ponto depende do tipo de projecto que se está a considerar. Para a definição do tipo de projecto e do ponto de transição, Beaves considera uma sequência de valores actuais líquidos cumulativos. A cada período $t = 0, \dots, N$ do projecto corresponde um valor actual líquido cumulativo (p_t), que não é mais que a soma de todos os *cash flows* que ocorrem até esse período, actualizados à taxa de reinvestimento dos *cash flows* intermédios r' ; p_t será dado por

$$p_t = \sum_{t'=0}^t \frac{F_{t'}}{(1+r')^{t'}} \quad (2.28)$$

O tipo de projecto depende dos valores de p_t e, conseqüentemente, da taxa de reinvestimento. Um projecto para o qual todos os $p_t, t = 0, \dots, N-1$, são negativos é considerado um projecto de investimento, enquanto que um outro em que todos os $p_t, t = 0, \dots, N-1$, são positivos é considerado um projecto de financiamento. Um projecto que tenha pelo menos um valor negativo e um valor positivo de p_t para $t = 0, \dots, N-1$, pode ser considerado um projecto de investimento ou um projecto de financiamento, dependendo dessa classificação da forma como o analista encara o projecto³³; em [18] escreve-se: "A ... caracterização de um tal projecto depende do propósito para o qual ele esteja a ser considerado. Quando considerado como um potencial investimento, o projecto é sujeito às regras de decisão pelas quais os projectos de investimento são avaliados. Quando considerado como uma fonte de financiamento, o projecto é sujeito às regras aplicáveis aos projectos de financiamento."

A determinação do ponto de transição depende do tipo de projecto. Para um projecto de investimento o ponto de transição é o momento t^* para o qual p_{t^*} é mínimo, enquanto que para um projecto de financiamento o ponto de transição é o momento t^* para o qual p_{t^*} é máximo. Esta definição permite uma interpretação económica do significado do ponto de transição. Para um projecto de investimento, o ponto de transição é o momento a partir do qual o projecto passa a ser auto-suficiente, isto é, a partir do qual os *cash flows* negativos, que eventualmente ocorram, podem ser financiados pelos restantes *cash flows* que ocorrem

³³Uma vez que a forma como o VAL* vai ser calculado depende do tipo de projecto, o facto de existirem projectos que podem ser classificados de acordo com a impressão subjectiva do analista introduz alguma arbitrariedade nos resultados obtidos.

depois do ponto de transição. Para um projecto de financiamento, é o momento em que o projecto deixa de ser um fornecedor de fundos e passa a ser um consumidor de fundos.

Como foi indicado, o ponto de transição separa a sequência de investimento da de retorno. Cada uma destas sequências é transformada num *cash flow* equivalente, através da capitalização ou actualização à taxa de reinvestimento. A sequência de investimento é transformada num *cash flow* do momento 0, definido como *riqueza inicial comprometida no projecto* ou *investimento base* (W_0), através da actualização dos *cash flows* dessa sequência para o momento 0. A sequência de retorno é transformada num *cash flow* do momento final do projecto, definido como *riqueza final atribuível ao projecto* ou *valor resultante* (W_N), através da capitalização dos *cash flows* dessa sequência para o momento N . W_0 e W_N são calculados da seguinte forma:

$$W_0 = - \sum_{t=0}^{t^*} \frac{F_t}{(1+r')^t} \quad (2.29)$$

$$W_N = \sum_{t=t^*+1}^N F_t (1+r')^{N-t} \quad (2.30)$$

O VAL^* é simplesmente o VAL destes dois *cash flows*, calculado utilizando o custo do capital do projecto, ou seja,

$$VAL^* = \frac{W_N}{(1+r)^N} - W_0 = \frac{\sum_{t=t^*+1}^N F_t (1+r')^{N-t}}{(1+r)^N} + \sum_{t=0}^{t^*} \frac{F_t}{(1+r')^t} \quad (2.31)$$

Beaves [18] considera ainda a possibilidade de as taxas de reinvestimento serem diferentes para diferentes períodos. A extensão de (2.31), por forma ter em conta tal possibilidade, não apresenta dificuldades relevantes.

Pode considerar-se que o VALVT e o VAL^* apenas diferem no que consideram investimento e no que consideram retorno. O VALVT assume que o investimento consiste apenas no primeiro *cash flow* e que todos os restantes *cash flows* constituem retorno, enquanto o VAL^* assume que todos os *cash flows* que ocorrem até ao ponto de transição (inclusive) são investimento, e que os restantes são retorno. Assim, estas duas medidas podem ser consideradas como pertencentes a uma família de medidas que vão ser designadas de Valor Actual Líquido com Reinvestimento (VALR). As medidas desta família apenas irão diferir no conceito de investimento e retorno, e todas elas considerarão uma taxa de reinvestimento explícita.

Os autores que propuseram o VALVT e o VAL^* assumiram que o momento futuro para o qual os *cash flows* correspondentes ao retorno do projecto são capitalizados é a data

em que o projecto termina (o momento N). No entanto, a comparação dos valores de medidas de VALR para diferentes projectos apenas faz sentido se a capitalização for feita, em todos eles, para o mesmo momento (Bernhard [21] argumenta que assim é para algumas medidas de taxa de rentabilidade, mas o mesmo tipo de argumento pode ser utilizado para mostrar que também tem que ser assim com medidas de VALR). Quando for feita a comparação de medidas de VALR para projectos com diferentes tempos de vida, os *cash flows* que constituem retorno devem ser capitalizados para um momento N_0 comum a todos os projectos, e não inferior ao momento em que termina o que tiver maior tempo de vida.

Considerando a possibilidade de capitalização dos *cash flows* que constituem retorno para um momento $N_0 \geq N$, e definindo F_t^I como a parcela do *cash flow* do período t que é considerada investimento, e F_t^R como a parcela do *cash flow* do período t que é considerada retorno, as medidas de VALR podem ser definidas como

$$VALR = \frac{\sum_{t=0}^N F_t^R (1+r')^{N_0-t}}{(1+r)^{N_0}} + \sum_{t=0}^N \frac{F_t^I}{(1+r')^t} \quad (2.32)$$

É ainda interessante notar que, se se assumir uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital ($r' = r$), qualquer medida da família de VALR se torna idêntica ao VAL.

2.8.2 Medidas de taxa de rentabilidade

As medidas de taxa de rentabilidade representam a taxa média de crescimento do capital por unidade de tempo. A mais importante destas medidas é a TIR, que foi já discutida na secção 2.7. Note-se, aliás, que grande parte das restantes medidas de taxa de rentabilidade foi proposta com o objectivo de evitar os problemas da TIR. A maioria destas medidas medem o crescimento do valor investido durante o tempo de vida do projecto, existindo taxas que medem o crescimento do valor actual durante a vida do projecto ou o crescimento perpétuo do valor investido.

Começar-se-á por considerar as medidas do crescimento do valor investido por unidade de tempo, de que a TIR é um exemplo. Com excepção da TIR, este tipo de taxas de rentabilidade consideram explicitamente uma taxa de reinvestimento (nalguns casos os autores sugerem que esta deve ser idêntica ao custo do capital). Estas taxas, que utilizam uma taxa de reinvestimento explícita, são muitas vezes denominadas na literatura por Taxas de Rentabilidade Globais (ORR³⁴; ver, por exemplo, [82], [161] e [162]).

A taxa de reinvestimento é utilizada para actualizar todos os *cash flows* que são considerados investimento para o momento 0 e para capitalizar todos os *cash flows* que são

³⁴Do inglês *Overall Rates of Return*.

considerados retorno para um momento futuro. Assim, a sequência de *cash flows* do projecto é resumida a dois *cash flows*: um investimento no período 0 e um retorno num período futuro. A medida de taxa de rentabilidade é a taxa de crescimento por período que permite transformar o investimento do período 0 no retorno do período futuro.

A literatura sobre avaliação de projectos assume normalmente que o momento futuro para o qual os *cash flows* correspondentes ao retorno do projecto são capitalizados é a data em que o projecto termina (o momento N). No entanto, a comparação de taxas de rentabilidade definidas desta forma apenas é legítima se estas medidas forem calculadas para o mesmo período, para todos os projectos (ver, por exemplo, [21]). Assim, na definição das medidas vai considerar-se, tal como se fez com o VFL e com o VAE, que o período de referência para o qual se capitalizam os *cash flows* de retorno é um período $N_0 \geq N$. Se, ao fazer a comparação de projectos, se utilizar o mesmo valor de N_0 para todos os que se pretende comparar, então diferentes tempos de vida dos projectos não causarão dificuldades à aplicação de critérios baseados neste tipo de medidas.

Da descrição das características das ORR, constata-se que todas estas medidas diferem apenas numa característica: a definição dos *cash flows* que são considerados investimento e dos que são considerados retorno³⁵. Se for *ORR* a taxa de rentabilidade a calcular, e utilizando a notação anterior, então todas estas medidas podem ser definidas pela expressão:

$$ORR = \sqrt[N_0]{\frac{\sum_{t=0}^N F_t^R (1+r')^{N_0-t}}{-\sum_{t=0}^N \frac{F_t^I}{(1+r')^t}} - 1} \quad (2.33)$$

Hajdasinski [82] propõe uma extensão da definição dada por (2.33) para os casos particulares em que esta expressão possa não estar bem definida.

Entre as taxas de rentabilidade que podem ser definidas pela expressão (2.33) encontram-se: a Taxa Média de Rentabilidade de Solomon (TMRS, proposta por Solomon [170]); a Taxa Interna de Rentabilidade Modificada (TIRM, proposta por Lin [115], e definida de forma matematicamente mais rigorosa por Hajdasinski [84]); a Taxa de Rentabilidade de Lin-Beaves (TRLB, proposta por Lin [115] e Beaves [17], e generalizada por Beaves [18]; Bernhard [21] mostra que as taxas propostas por Lin e Beaves são idênticas); a Rentabilidade Marginal do Capital Investido (RMCI, proposta por McDaniel, McCarty e Jessell [128]); e, se se permitir $N_0 < N$, a Taxa de Crescimento da Rentabilidade (TCR, apresentada em [146]).

³⁵Pode argumentar-se que a forma como é definida a taxa de reinvestimento é outra característica distintiva, uma vez que alguns autores consideram que esta deve ser igual ao custo do capital e outros consideram que não tem que ser assim. Parece, no entanto, mais razoável considerar que esta taxa é uma característica da aplicação da medida a uma situação concreta do que considerar que é característica da definição da medida.

A TMRS considera que o único *cash flow* de investimento é o *cash flow* do momento 0, e a TIRM considera que todos os *cash flows* com sinal negativo são *cash flows* de investimento. A TRLB utiliza o conceito de ponto de transição, apresentado em 2.8.1 na descrição do VAL*, considerando que todos os *cash flows* que ocorrem até ao ponto de transição (inclusive) correspondem a investimento. A RMCI, tal como é proposta em [128], não define de forma rigorosa quais os *cash flows* que devem ser considerados investimento, indicando que devem corresponder ao novo capital adicional que é necessário investir em cada período para financiar o projecto. Finalmente, a TCR considera que, contrariamente ao que tem sido assumido, o período de referência (N_0) para calcular o retorno pode ser anterior ao final do projecto, e que geralmente o será. Para esta medida, são *cash flows* de investimento todos os *cash flows* negativos que ocorrerem antes do período de referência.

Wong [187] propõe um tipo diferente de taxa de rentabilidade, que é também baseado numa separação dos *cash flows* entre investimento e retorno. O mesmo autor considera que apenas o *cash flow* do momento 0 corresponde a investimento, e que todos os restantes *cash flows* correspondem a retorno, utilizando uma taxa de reinvestimento (r') para capitalizar os *cash flows* de retorno para a data em que o projecto termina, e calculando a correspondente taxa de crescimento do valor investido por unidade de tempo (R). Assim, R será uma ORR, que pode ser calculada como

$$R = \sqrt[N]{\frac{\sum_{t=1}^N F_t (1+r')^{N-t}}{-F_0}} - 1 \quad (2.34)$$

A taxa de rentabilidade proposta por Wong não é esta taxa R , mas sim uma taxa designada por Taxa de Excesso de Rentabilidade Actualizada (TERA), cujo cálculo utiliza R :

$$TERA = \frac{R - r}{1 + r} \quad (2.35)$$

Este mesmo autor argumenta que esta taxa de rentabilidade representa o "... excesso de rentabilidade de R em relação ao custo do capital, actualizado por $1 + r$... [e] fará sentido para os gestores financeiros como uma taxa de rentabilidade e é teoricamente válida". O significado económico da TERA, de acordo com esta definição, não parece, todavia, ser evidente. No entanto, pode definir-se esta taxa, de forma equivalente, como

$$TERA = \sqrt[N]{\frac{\sum_{t=1}^N F_t (1+r')^{N-t}}{(1+r)^N}} - 1 \quad (2.36)$$

Note-se que, na expressão (2.36), o quociente no interior do radical representa o rácio entre o valor actual do projecto (considerando as oportunidades de reinvestimento até ao

final do tempo de vida deste) e o investimento inicial. Assim, a TERA pode representar o crescimento médio do valor actual por unidade de tempo, tendo por base o investimento inicial no projecto.

Apesar de ser definida a partir de um conceito de investimento e retorno, a TERA pode ser facilmente generalizada para outros conceitos de investimento e retorno, nomeadamente para os que foram considerados para as ORR. É ainda de notar que, tal como acontecia com as ORR, a comparação da TERA para diferentes projectos apenas faz sentido se para todos for considerado o mesmo horizonte temporal. Apesar de a TERA estar definida por forma a considerar um horizonte temporal igual ao tempo de vida do projecto, é fácil alterá-la para que considere um horizonte temporal diferente.

Tendo em conta estas possibilidades de generalização, pode encarar-se a TERA como uma taxa de rentabilidade particular pertencente a uma família que será designada por família de Taxas de Rentabilidade Actualizadas (TRA). Utilizando a notação que tem vindo a ser considerada, uma taxa pertencente a esta família pode ser genericamente definida como

$$TRA = N_0 \sqrt{\frac{\sum_{t=0}^N \frac{F_t^R (1+r')^{N_0-t}}{(1+r)^{N_0}}}{-\sum_{t=0}^N \frac{F_t^I}{(1+r')^t}}} - 1 \quad (2.37)$$

Howe [97] apresenta um outro tipo de taxa de rentabilidade, com características diferentes dos anteriores, que aqui vai ser designada por Taxa de Rentabilidade em Perpetuidade de Howe (TRPH). Utilizando os conceitos de investimento inicial (I_0) e de valor actual (VA) apresentados na secção 2.3, a TRPH pode ser definida por

$$TRPH = r \frac{VA}{I_0} = r \frac{\sum_{t=1}^N \frac{F_t}{(1+r)^t}}{-F_0} \quad (2.38)$$

A TRPH pode ser interpretada como "... a taxa de rentabilidade [perpétua] baseada no mercado por cada [unidade de capital] investida, i.e., a taxa de rentabilidade equivalente à taxa de um investimento perpétuo, de igual valor e com a mesma escala" ([97]).

A TRPH tem implícitos conceitos de investimento e retorno idênticos à TERA e à TMRS, mas a sua alteração para considerar conceitos diferentes de investimento e retorno é muito simples, sendo feita de forma semelhante à indicada para a TERA. A TRPH não considera uma taxa de reinvestimento independente, mas a introdução de uma taxa de reinvestimento pode ser feita facilmente. Note-se ainda que, apesar de não considerar explicitamente um taxa de reinvestimento independente, a comparação de TRPH para diferentes projectos apenas é legítima se se considerar que a taxa de reinvestimento é igual ao custo do capital, por razões semelhantes às apresentadas para o VAL.

Tal como foi feito com a TERA, pode encarar-se a TRPH como uma taxa de rentabilidade particular pertencente a uma família que será designada por família de Taxas de Rentabilidade em Perpetuidade (TRP). Utilizando a notação anterior, uma taxa pertencente a esta família pode ser genericamente definida como

$$TRP = r \frac{\sum_{t=0}^N \frac{F_t^R (1+r')^{N_0-t}}{(1+r)^{N_0}}}{-\sum_{t=0}^N \frac{F_t^I}{(1+r')^t}} \quad (2.39)$$

Vão agora ser considerados os critérios associados às medidas apresentadas. Para as ORR e para as TRP, o critério de aceitação/rejeição de um projecto isolado é o de aceitar o projecto se a taxa de rentabilidade considerada for superior ao custo do capital, e rejeitá-lo se for inferior a este custo. Se for utilizada uma TRA, o projecto deve ser aceite se a TRA for positiva e rejeitado se for negativa.

No caso de selecção entre projectos mutuamente exclusivos, as ORR e as TRP apenas podem ser aplicadas se os projectos tiverem risco idêntico; no caso de não o terem pode, no entanto, recorrer-se à substituição dos *cash flows* por equivalentes certos (ver secção 2.5), considerando-se um custo do capital igual à taxa de juro sem risco (se for considerada uma taxa de reinvestimento independente, esta deve ser definida para investimentos sem risco). Quando os projectos apresentam risco idêntico, a sua comparação pode ser feita, para todas as taxas de rentabilidade, por utilização do projecto diferença, tal como foi proposto para a TIR. Howe (*op. cit.*) nota que, para o caso da TRPH, pode ainda ser utilizada uma medida baseada no excesso de rentabilidade para ordenação de projectos de forma coerente com o VAL; esta medida é definida como $I_0 (TRPH - r)$. Athanapoulos [9] e Shull [161] definem um método para utilizar directamente os valores da taxa de rentabilidade de uma ORR para ordenar projectos com escalas diferentes de forma idêntica ao VAL (ver ainda alguns comentários a esse método em [83]). Esse método baseia-se na definição de um montante de investimento igual para todos os projectos, considerando-se que o excesso desse montante relativamente ao investimento realmente necessário para um dado projecto é investido no mercado de capitais. As taxas de rentabilidade assim obtidas podem ser directamente comparadas para ordenar projectos de forma idêntica ao VAL.

Note-se que os critérios que aqui foram considerados para selecção entre projectos mutuamente exclusivos assumem mercados perfeitos e, assim, foram definidos por forma a fornecerem indicações coerentes com o VAL. Noutros contextos pode fazer sentido comparar os projectos com base na rentabilidade por unidade de capital investida, podendo ser directamente comparadas as taxas de rentabilidade obtidas, sem efectuar ajustamentos. Para as ORR e as TRP, esta comparação directa só faz sentido se os projectos tiverem

risco idêntico, mas não existem motivos para pensar que a comparação directa de TRA não possa ser feita mesmo que os projectos tenham risco diferente.

As taxas de rentabilidade apresentadas baseiam-se em quatro filosofias diferentes: TIR, ORR, TRA e TRP. A TIR pode ser considerada próxima das ORR, pois a expressão que define as ORR permite obter a TIR se se considerar uma taxa de reinvestimento igual a esta última ([17]). A TIR e as ORR são as taxas de rentabilidade que permitem uma interpretação económica mais intuitiva, sendo de acreditar que possam ser normalmente as preferidas. Já as TRA permitem uma interpretação económica pouco intuitiva.

2.8.3 Índices de rentabilidade

Os índices de rentabilidade fornecem uma medida da contribuição do projecto para o valor da empresa por unidade de capital investido. Os que vão ser aqui considerados serão baseados em *cash flows* actualizados³⁶.

Os índices de rentabilidade podem, assim, ser genericamente definidos como o quociente entre o VAL do retorno e o VAL do investimento, diferenciando naquilo que consideram retorno e investimento, e ainda na consideração explícita ou não de uma taxa de reinvestimento. Comece por se definir uma forma geral para os índices que não consideram explicitamente uma taxa de reinvestimento. Designando por IR o índice a calcular, ele é definido pela expressão

$$IR = \frac{\sum_{t=0}^N \frac{F_t^R}{(1+r)^t}}{-\sum_{t=0}^N \frac{F_t^I}{(1+r)^t}} \quad (2.40)$$

Os índices que podem ser definidos pela expressão (2.40) incluem o Índice de Rentabilidade tradicional (IR) e o rácio Benefício/Custo Agregado (B/CA). O IR é definido de forma diferente por autores diferentes. Enquanto alguns autores (por exemplo Brealey e Myers [35], capítulo 5), consideram que apenas o primeiro *cash flow* constitui investimento e que todos os restantes constituem retorno, outros autores (por exemplo Park e Sharp-Bette [139], capítulo 6, ou Seitz e Ellison [157], capítulo 6) consideram que o investimento

³⁶ Remer e Nieto [147] consideram também como pertencentes a esta classe outros rácios, calculados através do quociente entre o somatório dos *cash flows* e o investimento inicial ou o investimento médio. Os autores designam estes rácios por *Return On Investment* (ROI; outros autores utilizam a mesma designação para as medidas de rentabilidade contabilística, que serão consideradas em 2.8.5). Como estes rácios são baseados em *cash flows* não actualizados, não se integram na classe de índices de rentabilidade do presente trabalho (aliás, não se integram em nenhuma das classes aqui consideradas). Neste trabalho, optou-se por não dar relevo a estes rácios, uma vez que são pouco mencionados na literatura e apresentam sérios problemas teóricos. Remer e Nieto notam que estes rácios são também conhecidos por "método do engenheiro", o que, na opinião do autor deste trabalho, não constitui um elogio aos engenheiros.

se pode prolongar por um número de anos no início do projecto, sendo os *cash flows* desses primeiros anos considerados investimento e os *cash flows* dos anos seguintes considerados retorno. O B/CA foi, segundo Park e Sharp-Bette [139], proposto por Eckstein, e considera o investimento como integrando todos os custos do projecto, e o retorno como integrando todas as receitas do projecto. Existem ainda outros índices, que muitas vezes partilham a designação comum de Índice de Rentabilidade Modificado, e que são propostos por diferentes autores, podendo ser descritos pela expressão (2.40) (ver, por exemplo, [74], ou [157], capítulo 6).

Wong [187] propõe um índice de rentabilidade baseado na utilização explícita de uma taxa de reinvestimento independente – o Índice de Rentabilidade do Valor Terminal (IRVT). Este índice assume que apenas o *cash flow* inicial constitui investimento, e que todos os restantes *cash flows* constituem retorno. Sendo r' a taxa de reinvestimento, este índice pode ser calculado da seguinte forma:

$$IRVT = \frac{\sum_{t=1}^N F_t(1+r')^{N-t}}{(1+r)^N - F_0} \quad (2.41)$$

Note-se que é muito fácil alterar a expressão (2.41) por forma a considerar conceitos diferentes de investimento e retorno. Note-se ainda que a comparação do IRVT para diferentes projectos apenas faz sentido se para todos for considerado o mesmo horizonte temporal, sendo fácil alterar o IRVT para que considere um horizonte temporal diferente. Tendo em conta estas possibilidades de generalização, o IRVT pode ser encarado como um índice de rentabilidade particular pertencente a uma família que será designada por família de Índices de Rentabilidade com Reinvestimento (IRR). Um índice pertencente a esta família pode ser genericamente definido através da expressão

$$IRR = \frac{\sum_{t=0}^N \frac{F_t^R(1+r')^{N_0-t}}{(1+r)^{N_0}}}{-\sum_{t=0}^N \frac{F_t^I}{(1+r')^t}} \quad (2.42)$$

Existe ainda um outro índice de rentabilidade por vezes mencionado na literatura, que não se enquadra nos tipos de índices descritos: o rácio de Lorie-Savage (ver, por exemplo, [139] ou [147]). Este rácio representa um tipo de índice que mede o quociente entre o retorno líquido (isto é, descontado do investimento) e o investimento. É fácil ver que um rácio deste tipo pode ser obtido subtraindo 1 a um índice do tipo anteriormente descrito – no caso específico do rácio de Lorie-Savage, este pode ser obtido subtraindo 1 ao IR tradicional. Assim, índices do tipo do rácio de Lorie-Savage não apresentam nada de novo relativamente aos restantes índices.

O critério de aceitação/rejeição de um projecto isolado, utilizando um índice de rentabilidade, é o de aceitar o projecto se o índice for superior a 1, e rejeitá-lo se for inferior (note-se que, no caso de um rácio do tipo do de Lorie-Savage, o valor com o qual deve ser feita a comparação é 0). No caso de selecção entre projectos mutuamente exclusivos, a comparação pode ser feita utilizando o projecto diferença. Tal como foi referido para as taxas de rentabilidade, podem existir casos em que não se verifique o pressuposto de os mercados serem perfeitos e em que faça sentido comparar directamente o retorno por unidade de investimento (nesse caso, os índices de rentabilidade podem ser comparados directamente). Quando se procede a uma comparação directa de índices de rentabilidade para diferentes projectos então, se os índices não considerarem uma taxa de reinvestimento independente, a comparação só é legítima se se assumir uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital, sendo os motivos para tal semelhantes aos que foram apresentados para o VAL. Aliás, é fácil notar que a expressão geral (2.40), que descreve os índices de rentabilidade que não consideram uma taxa de reinvestimento independente, é um caso particular de (2.42) para uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital (para $r' = r$).

2.8.4 Medidas de período de recuperação

As medidas de período de recuperação calculam o tempo que demora a recuperação do capital investido. Estas medidas incluem o Período de Recuperação Convencional (PRC) e o Período de Recuperação a Valores Actualizados (PRVA)³⁷.

O PRC pode ser definido como o número de anos necessário para que os *cash flows* acumulados igualem (ou ultrapassem) o investimento inicial, e o PRVA como o número de anos necessário para que os *cash flows*, actualizados para o momento 0 ao custo do capital e acumulados, igualem (ou ultrapassem) o investimento inicial. Assim, as duas medidas são muito semelhantes, diferindo apenas no facto de o PRVA considerar o valor temporal do dinheiro e o PRC não o considerar. Note-se que os valores destas medidas apenas serão bons indicadores do tempo que demora a recuperação do capital investido se a maior parte do investimento ocorrer no momento inicial.

O PRVA utiliza os *cash flows* actualizados sem considerar explicitamente uma taxa de reinvestimento. Desta forma, a comparação de PRVA para diferentes projectos apenas é

³⁷ Existe uma outra medida do comportamento dos projectos de investimento que apresenta algumas semelhanças com as medidas de período de recuperação: a duração. Esta medida é baseada na duração de Macaulay (uma medida do tempo médio de vida de um empréstimo obrigacionista; para mais detalhes ver [68], capítulo 4), e a sua utilização na análise de projectos é proposta por vários autores ([27], [66], [86], por exemplo). A duração calcula o tempo médio de vida do projecto (ponderado pelos seus *cash flows*), não tendo em consideração o investimento inicial no projecto. Desta forma, esta não pode ser considerada uma medida de período de recuperação, nem sequer uma medida da rentabilidade do projecto; é, simplesmente, uma medida da liquidez do projecto.

legítima se se assumir uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital (por razões semelhantes às apresentadas para o VAL).

O critério de aceitação/rejeição de um projecto isolado, utilizando uma medida de período de recuperação, baseia-se na definição de um limite de tempo. O projecto será aceite se o valor da medida for inferior ou igual a esse limite de tempo, será rejeitado se for superior. Para a selecção entre projectos mutuamente exclusivos a literatura aponta, normalmente, a comparação directa das medidas de período de recuperação dos diferentes projectos (por exemplo [22], capítulo 4; [35], capítulo 5; [49], capítulo 2).

As medidas de período de recuperação são muito criticadas na literatura que trata a avaliação de projectos, por ignorarem todos os *cash flows* que se seguem ao período de recuperação (por exemplo, [22], [35], [49]). O facto de ignorarem alguns *cash flows* dos projectos impede que elas possam ser consideradas boas medidas da rentabilidade dos projectos (há autores, como por exemplo Lefley [112], que as consideram essencialmente medidas da liquidez dos projectos). Note-se que, uma vez que têm em consideração o investimento feito no projecto e os retornos obtidos, é legítimo considerar que as medidas de período de recuperação são também medidas da rentabilidade do projecto.

A essa crítica geral às medidas de período de recuperação junta-se uma crítica que afecta especificamente o PRC – o facto de não considerar o valor temporal do dinheiro. Por este motivo, quando for considerado conveniente utilizar uma medida de período de recuperação, é preferível optar pelo PRVA.

2.8.5 Medidas de rentabilidade contabilística

As medidas de rentabilidade contabilística são taxas que calculam a rentabilidade do projecto com base no resultado contabilístico. As medidas desta classe normalmente utilizadas são a Taxa de Rentabilidade Contabilística (TRC) e a Taxa Média de Rentabilidade Contabilística (TMRC).

A TRC pode ser definida como o quociente entre o valor médio do resultado contabilístico, durante o tempo de vida do projecto, e o investimento inicial no projecto. A TMRC apenas difere da TRC por considerar, no divisor, o valor contabilístico médio do investimento (depois das amortizações) durante o tempo de vida do projecto, em vez do investimento inicial.

O critério de aceitação/rejeição de um projecto isolado utilizando uma medida de rentabilidade contabilística baseia-se na definição de uma taxa de referência. O projecto será aceite se a taxa de rentabilidade contabilística for superior a essa taxa de referência, será rejeitado se for inferior. Para a selecção entre projectos mutuamente exclusivos, a literatura

aponta normalmente a comparação directa das medidas de rentabilidade contabilística dos diferentes projectos (por exemplo [22], capítulo 4; [35], capítulo 5; [49], capítulo 2).

As medidas de rentabilidade contabilística são quase unanimemente consideradas na literatura como muito más medidas da rentabilidade dos projectos. Brealey e Myers [35], por exemplo, consideram que os critérios baseados no período de recuperação são maus, mas que os critérios baseados na rentabilidade contabilística são, provavelmente, piores. O principais problemas associados a estas medidas estão relacionados com a utilização dos resultados contabilísticos (que, como foi exposto na secção 2.2, são uma medida incorrecta dos reais fluxos financeiros associados ao projecto) e com a não consideração do valor temporal do dinheiro ([35]; [49]; [157], capítulo 6). A principais vantagens normalmente apontadas a estas medidas são a simplicidade de aplicação e o facto de se adaptarem bem aos procedimentos contabilísticos das empresas ([157]). Estas vantagens parecem ser pouco relevantes para um agente de decisão que pretenda uma medida da rentabilidade do projecto. As medidas de rentabilidade contabilística são, assim, medidas pouco fiáveis da rentabilidade do projecto e, quando o objectivo é a maximização do valor da empresa, devem, em geral, ser evitadas.

2.9 A utilização das medidas financeiras de avaliação de projectos

A secção anterior apresentou um conjunto de medidas financeiras para avaliação de projectos de investimento. Vai, nesta secção, começar por discutir-se, para cada uma das diferentes classes de medidas consideradas, se poderá haver situações em que seja apropriada a utilização de medidas dessa classe, depois do que se discutirá que medidas faz e que medidas não faz sentido utilizar simultaneamente numa avaliação multicritério de projectos de investimento.

2.9.1 A utilização de medidas das diferentes classes

A maioria dos autores da área financeira considera que o VAL deve ser a medida preferencialmente utilizada (por exemplo Bierman e Smidt [22], Brealey e Myers [35], Brigham [38] e Copeland e Weston [49]). O VAL representa a contribuição líquida do projecto para o valor da empresa, medindo, assim, directamente a forma como este contribui para aquele que deve ser o principal objectivo dos gestores: a maximização do valor. No entanto, a generalidade dos inquéritos a empresas mostram que a TIR continua a ser geralmente preferida ao VAL, que o PRC é muitas vezes preferido ao VAL, e que medidas de rentabilidade contabilística continuam a ter utilização significativa ([28], [46], [63], [110], [112], [141], [156],

por exemplo). Assim, interessa discutir porque é que medidas diferentes do VAL são muito utilizadas, e em que situações é apropriado fazer uso das medidas das diferentes classes.

2.9.1.1 Motivos para a utilização de medidas diferentes do VAL

Comece por analisar-se a primeira das questões enunciadas. Vários autores têm abordado este problema, considerando normalmente os motivos pelos quais a TIR e as medidas de período de recuperação são preferidas ao VAL. Existem três tipos principais de motivos que justificam a utilização destas medidas, podendo ser estendidos à utilização de outras.

Um motivo geralmente apresentado é o que Evans e Forbes [58] designam por maior "eficiência cognitiva" das medidas alternativas ao VAL. Estes autores referem-se à TIR, e notam que os gestores têm uma maior apetência pela utilização de taxas de rentabilidade, particularmente para procedimentos que se baseiam na definição de posições relativas ou ordenação. Assim "... existe um maior grau de compatibilidade entre a TIR como um método de visualização e as expectativas dos agentes de decisão" ([58], pag. 88). Cheng, Kite e Radtke [46] também notam a apetência pela utilização de taxas de rentabilidade para comparação de projectos, e salientam ainda a maior conveniência das medidas que não exigem a definição de um custo do capital, particularmente para agentes de decisão pouco "sofisticados". Lefley [112] salienta que as medidas de período de recuperação são facilmente entendidas pelos gestores, tendo um papel importante na comunicação de informação relativa a um projecto, e Howe [97] nota que o mesmo sucede com as medidas de taxa de rentabilidade.

Outro motivo que muitos autores referem para explicar a utilização de medidas diferentes do VAL é a existência de conflitos entre os interesses dos accionistas e os dos gestores. Cheng, Kite e Radtke [46] notam que os métodos de avaliação do desempenho dos gestores são baseados na taxa de rentabilidade obtida sobre o capital investido, sendo a TIR uma medida mais próxima desses métodos que o VAL. Estes autores, e também Lefley [112], salientam ainda a existência de estudos que mostram haver uma relação negativa entre a utilização de medidas de período de recuperação e a importância atribuída pelos gestores à maximização da riqueza dos accionistas. Este último autor dá várias justificações para o interesse dos gestores na utilização de medidas de período de recuperação, as quais incluem o facto de estas medidas indicarem quão rapidamente os gestores podem esperar obter a confirmação de que tomaram uma boa decisão, e obter também os respectivos benefícios pessoais. Lefley cita estudos que ligam a utilização das medidas de período de recuperação aos esquemas de incentivos aos gestores, os quais, ao seleccionarem projectos com períodos de recuperação menores, conseguem maximizar os incentivos financeiros recebidos. Numa perspectiva diferente, Chaney [43] analisa, através de um modelo teórico, a utilização de medidas de período de recuperação quando existe risco moral de os gestores do projecto

não se esforçarem para que os projectos sejam bem sucedidos. O mesmo autor conclui que a selecção de projectos com períodos de recuperação pequenos minimiza os custos necessários para garantir um correcto empenho dos gestores, podendo, por isso, beneficiar os accionistas.

O último motivo está geralmente relacionado com a utilização de outras medidas conjuntamente com o VAL. Alguns autores defendem que diferentes medidas endereçam diferentes dimensões, ou perspectivas, da rentabilidade (Afonso, Godinho e Costa [1] [74]; Cheng, Kite e Radtke [46]; Lefley [112]), podendo mesmo algumas medidas ser utilizadas para fornecer ao agente de decisão uma ideia do risco do projecto.

2.9.1.2 Situações em que é apropriado utilizar medidas das diferentes classes

Analise-se agora a segunda questão mencionada acima, ou seja, em que situações é apropriado utilizar medidas das diferentes classes. Vai considerar-se, nesta discussão, que o objectivo da utilização das medidas é a maximização da riqueza dos accionistas.

Comece-se pelas medidas de valor equivalente. O VAL é uma destas medidas, e é considerada a medida teoricamente mais sustentada e a que mais directamente contribui para o objectivo da maximização da riqueza dos accionistas, sendo a medida de referência para a avaliação de projectos. O critério de selecção dos projectos com VAL positivo é, no entanto, baseado no pressuposto de que a empresa, e as suas divisões, podem conseguir montantes ilimitados de capital para os seus investimentos. Na realidade, isso nem sempre ocorre, podendo acontecer que a empresa ou as suas divisões tenham disponível um montante limitado de capital.

Lorie e Savage [121] consideraram essa situação, definindo um problema de maximização do VAL agregado que pode ser formulado através de programação matemática, e que foi posteriormente tornado mais geral por outros autores (ver, por exemplo, Park e Sharp-Bette [139], capítulo 8, para a apresentação de algumas das principais formulações de problemas de avaliação de projectos na presença de racionamento de capital). No entanto, uma tal abordagem levanta algumas questões. A primeira é que o racionamento de capital em múltiplos períodos apenas pode ser considerado se os *cash flows* forem determinísticos; na presença de risco, não existe a certeza de as restrições de capital posteriores ao período inicial serem satisfeitas, pois os *cash flows* que venham a ocorrer podem ser diferentes dos esperados.

A segunda questão está relacionada com a própria validade do VAL na presença de racionamento de capital (particularmente com a validade da utilização do custo do capital, tal como é normalmente definido). Seguindo o argumento de Brealey e Myers ([35], capítulo 6), é necessário distinguir duas situações – racionamento débil e racionamento forte.

A primeira situação corresponde à existência de racionamento definido internamente pela própria empresa, o que normalmente se designa por racionamento débil. Este tipo de racionamento é normalmente justificado como uma medida para enfrentar previsões distorcidas (normalmente demasiado optimistas) dos *cash flows*³⁸, ou para evitar pressões excessivas decorrentes de um crescimento demasiado rápido. Numa tal situação, o racionamento não se deve a imperfeições dos mercados, pelo que a validade teórica do VAL não é posta em causa. Apenas pode ser posta em causa a utilização do VAL com previsões dos *cash flows* que se acredita serem distorcidas. Por um lado, quando se acredita que as previsões dos *cash flows* são distorcidas deve ser feito um esforço para as corrigir, por outro lado, vários autores (por exemplo Asquith e Bethel [8] e Miller [130] [131]) defendem que outras medidas podem ser mais eficazes quando é necessário utilizar previsões distorcidas dos *cash flows*. A segunda situação é aquela em que o racionamento é devido a dificuldades no acesso ao mercado de capitais para obter financiamento, o que normalmente se designa por racionamento forte. Brealey e Myers defendem que as dificuldades das empresas no acesso ao mercado de capitais não limitam a validade do VAL, e que este só é enfraquecido se existirem também limitações no acesso dos particulares ao mercado de capitais.

As restantes medidas de valor equivalente também conduzem à maximização do valor da empresa, podendo ser utilizadas alternativamente ao VAL. Na generalidade das situações, é importante utilizar uma medida de valor equivalente num processo de avaliação de projectos.

Considerem-se agora as medidas de taxa de rentabilidade. A sua utilização pode ser pertinente, em substituição do VAL, quando os agentes de decisão preferirem usar taxas de rentabilidade, desde que sejam utilizadas de um modo que garanta que as indicações obtidas são idênticas às que seriam fornecidas pelo VAL. Mas a comparação directa de taxas de rentabilidade pode ser mais apropriada do que a utilização do VAL em algumas situações em que os dois tipos de medidas conduzem a resultados contraditórios.

Considere-se que existe racionamento de capital, e ainda que existe incerteza quanto ao limite de capital disponível. Isto pode acontecer, por exemplo, se uma divisão de uma empresa tiver que apresentar uma ordenação dos projectos propostos para ser apreciada pela direcção da empresa, não sabendo qual o orçamento que lhe será destinado. Numa tal situação, uma ordenação de projectos utilizando o VAL poderá colocar no topo da lista projectos com um VAL mais elevado, mas que exijam também um investimento elevado, sendo possível que existam outros projectos que, embora tenham um VAL menor, apresentem uma maior rentabilidade por unidade de capital investido. Existindo racionamento de capital, os projectos com maior rentabilidade por unidade de capital investido são mais

³⁸Existem, na literatura, vários modelos que indicam que, na presença de risco moral (isto é, de risco de os gestores não se comportarem sempre de acordo com os interesses dos accionistas), o racionamento de capital pode constituir a política óptima (por exemplo, [136] e [188]).

favoráveis, pois neste caso o mais importante deixa de ser o valor absoluto do projecto para passar a ser a relação entre o retorno e o investimento. Assim, numa tal situação faz mais sentido comparar medidas de taxa de rentabilidade do que medidas de valor equivalente.

Uma situação semelhante à anterior ocorre quando o limite de capital é definido mas não se conhecem todas as propostas de investimento para as quais esse limite será utilizado. Tal pode acontecer se uma empresa tiver capital disponível mas considerar que terá dificuldades em conseguir financiamento no futuro próximo, e, portanto, pretender utilizar esse capital, não só para financiar os projectos que forem seleccionados no momento presente, mas também os projectos interessantes que possam surgir no futuro próximo. Numa tal situação é, mais uma vez, importante a relação entre o retorno e o investimento, podendo ser utilizada uma taxa de rentabilidade e um limiar de comparação superior ao custo do capital (ou a 0, no caso de uma TRA) como base de um critério para definir quais os projectos que devem ser empreendidos³⁹.

Asquith e Bethel [8] argumentam que, numa situação em que nem todos os projectos são empreendidos, e em que os proponentes dos projectos tenham incentivos para distorcer as previsões de *cash flows*, uma heurística baseada na ordenação pela TIR pode ser superior a métodos baseados no VAL. Estes autores notam que, se os proponentes pretenderem que os projectos sejam aceites e que as distorções dos *cash flows* tenham um impacto mínimo sobre a sua reputação, então tenderão a optar por distorcer os valores dos *cash flows* mais distantes no tempo. Uma vez que a TIR penaliza mais, em termos relativos, os projectos em que o peso dos *cash flows* mais distantes seja maior, a utilização desta poderá atenuar as distorções dos *cash flows*. Note-se que, se for usada a TIR, poderá acontecer que sejam também penalizados projectos que sejam realmente mais rentáveis, mas cujo peso dos *cash flows* mais distantes seja maior.

Miller [130] [131] apresenta um argumento para a utilização do IR que também pode ser utilizado para as taxas de rentabilidade. Nota que, numa economia em equilíbrio concorrencial, geralmente as empresas terão apenas lucros "normais" (isto é, terão rentabilidades iguais ao custo do capital). Numa tal economia existirão poucas oportunidades de investimento com rentabilidade acima do custo do capital, isto é, com VAL positivo. Isto é assim porque aquilo que é considerado um bom projecto por uma empresa será também um bom projecto para os seus competidores, levando a que o conjunto de bons projectos que estão disponíveis seja rapidamente esgotado. Além disso, a competição faz elevar o preço dos recursos necessários para os bons projectos, reduzindo a rentabilidade destes. Contrariamente ao que acontece com os bons projectos, os maus projectos não são rapidamente empreendidos, ficando continuamente disponíveis. Assim, os projectos com VAL positivo serão raros, enquanto que os projectos com VAL negativo serão abundantes. Miller analisa

³⁹ Esta taxa de referência utilizada para comparação pode ser definida tendo em conta o tipo de projectos que são usualmente considerados pela empresa.

então o que acontecerá se as estimativas utilizadas para calcular o VAL do projecto não forem enviesadas mas estiverem sujeitas a erros aleatórios. Nesta situação, é possível que a maioria dos projectos com VAL estimado positivo mas baixo sejam, na realidade, projectos com VAL negativo (tendo em conta os erros aleatórios). Miller (*op. cit.*) nota que a magnitude dos erros nas estimativas estará geralmente fortemente relacionada com a dimensão dos montantes a serem estimados. Assim, será aconselhável a utilização de um critério de selecção de projectos baseado numa medida que permita estabelecer uma margem de segurança proporcional à dimensão do projecto. O mesmo autor aconselha a utilização do IR, com um limiar de comparação superior a 1 (em [131] é proposta uma expressão para determinar o limiar de comparação óptimo, para um caso particular). No entanto, o mesmo argumento pode ser utilizado para recomendar a utilização de taxas de rentabilidade, com limiares de comparação superiores ao custo do capital (ou superiores a 0 no caso das TRA).

Finalmente, note-se que as medidas de taxa de rentabilidade também podem ser úteis como complementares do VAL, num processo de avaliação que utilize múltiplas medidas. As medidas de taxa de rentabilidade dão uma perspectiva diferente sobre a rentabilidade do projecto, que tem em consideração a relação entre o retorno e o investimento. As taxas de rentabilidade podem também ser utilizadas para dar alguma indicação sobre o risco do projecto (a diferença entre a taxa de rentabilidade e o limiar de comparação pode ser vista como uma "margem de segurança").

A utilização de índices de rentabilidade faz sentido em praticamente todas as situações em que é apropriado usar taxas de rentabilidade. A excepção será a utilização destas medidas para diminuir o peso dos *cash flows* mais distantes do projecto. A determinação de um limiar de comparação óptimo para ter em consideração erros aleatórios nas estimativas pode ser mais simples com um índice de rentabilidade do que com uma taxa de rentabilidade (Miller [130] [131] utiliza sempre índices de rentabilidade).

Considerem-se agora as situações em que as medidas de período de recuperação podem ser úteis. Godinho, Afonso e Costa [74] apresentam várias situações em que parece ser este o caso.

Considere-se uma situação em que há riscos catastróficos ou políticos que possam causar, em qualquer momento, uma perda dos activos que constituem o projecto. Nesta situação, é aceitável que a empresa pretenda recuperar o capital investido tão rapidamente quanto possível, podendo argumentar-se que as medidas de período de recuperação são para tal apropriadas. Este argumento para a utilização de medidas de período de recuperação numa tal situação nem sempre será válido, pois esses riscos podem também ser considerados através de um ajustamento do custo do capital, bem como na estimação dos *cash flows*

esperados, e dessa forma podem ser correctamente incorporados em medidas de valor equivalente, taxas de rentabilidade ou índices de rentabilidade – Feils e Sabac [64], por exemplo, incorporam o risco político (incluindo risco de expropriação e outras causas políticas de variações nos *cash flows*) na avaliação de projectos utilizando o VAL. No entanto, quando estes riscos são difíceis de quantificar, pode ser apropriada a utilização de medidas de período de recuperação, particularmente como complemento de outras medidas de avaliação.

Considere-se agora que existe a necessidade de obter liquidez rapidamente, por exemplo devido a dificuldades da empresa na obtenção de capital para novos projectos ou devido a compromissos financeiros. Neste caso, a utilização de modelos de programação matemática para maximização do VAL agregado, de acordo com restrições que representem as necessidades de liquidez, pode produzir bons resultados, embora a utilização destes modelos possa ser condicionada pela informação disponível⁴⁰. No entanto, também neste caso pode ser útil o recurso a medidas de período de recuperação como complemento da utilização do VAL.

As dificuldades de acesso dos proprietários da empresa aos mercados de capitais podem levar a uma outra situação em que a utilização de medidas de período de recuperação pode parecer acertada. Se os proprietários da empresa não conseguirem obter financiamento, nem vender a sua parte da empresa nos mercados de capitais, podem pretender que a empresa tenha liquidez tão frequentemente quanto possível, para financiar o seu padrão de consumo pretendido. Pode argumentar-se que, num tal caso, as medidas de período de recuperação serão uma boa opção. No entanto, pode também utilizar-se um modelo de programação matemática para maximizar o VAL agregado, de acordo com um conjunto de restrições que incorporem as preferências dos proprietários da empresa. Pode argumentar-se que uma tal situação afecta seriamente a validade dos resultados obtidos utilizando o VAL, e pode ainda colocar-se a questão de a eventual incerteza dos *cash flows* poder dificultar a utilização de um tal modelo. No entanto, apesar disso, o resultado assim obtido parece teoricamente mais sustentado que o obtido utilizando medidas de período de recuperação. Seja como for, pode ser apropriado utilizar, nesta situação, medidas de período de recuperação, pelo menos como complemento da utilização do VAL.

A utilização das medidas de período de recuperação parece, assim, fazer mais sentido como complemento da utilização de outras medidas do que como medidas únicas a utilizar. Tal como as medidas de taxa de rentabilidade, as de período de recuperação dão uma perspectiva diferente sobre a rentabilidade do projecto, que tem em consideração a recuperação da liquidez. Lefley [112] defende que, para além de medidas da liquidez do projecto, as

⁴⁰ Numa situação de incerteza, a definição de tais modelos será particularmente difícil. No entanto, estes modelos podem ser definidos tomando em consideração margens de segurança para os montantes necessários no futuro. Por outro lado, numa situação de incerteza a utilização de medidas de período de recuperação também não garante que os montantes necessários no futuro estejam disponíveis.

medidas de período de recuperação dão indicações quanto ao risco do projecto e são úteis na comunicação de informação.

As medidas de rentabilidade contabilística não conduzem à maximização do valor da empresa, e, portanto, apenas devem ser utilizadas quando o objectivo não for esse. Pode argumentar-se que a forma como a informação financeira da empresa é disponibilizada aos interessados⁴¹ (accionistas, clientes, entidades financiadoras, ...) pode favorecer a utilização destas medidas. Tal argumento baseia-se em duas premissas: a de que melhores resultados contabilísticos são interpretados como maior valor da empresa, permitindo, assim, a obtenção de vantagens para a empresa (por exemplo uma maior facilidade na obtenção de capital para investimento), e a de que a utilização de medidas de rentabilidade contabilística conduz à maximização dos resultados contabilísticos. Nenhuma destas premissas parece correcta. Por um lado, os interessados farão geralmente uma análise da situação da empresa que vai para além dos resultados contabilísticos, e a situação com que se depararão será mais favorável se a empresa procurar maximizar o seu valor do que se procurar maximizar os resultados contabilísticos. Por outro lado, não existe nenhuma indicação de que a utilização de medidas contabilísticas conduza à maximização dos resultados contabilísticos; pelo menos a médio e longo prazo, as decisões baseadas na maximização do valor da empresa poderão conduzir a melhores resultados contabilísticos do que as baseadas em medidas de rentabilidade contabilística.

2.9.2 A utilização simultânea de diferentes medidas

Depois da análise das situações em que é apropriado utilizar medidas das diferentes classes, é importante averiguar quais as que faz sentido utilizar simultaneamente num processo de avaliação multicritério de projectos de investimento. Algumas análises a esta questão, mais limitadas do que a que aqui é apresentada, foram feitas por Godinho, Afonso e Costa [1] [74]. Costa, Melo, Godinho e Dias [50] abordam ainda esta questão no âmbito de um Sistema de Apoio à Decisão.

O enquadramento geral considerado é baseado em duas premissas básicas:

- cada avaliação multicritério é baseada num conjunto de pressupostos e conceitos não contraditórios, nomeadamente no que diz respeito aos conceitos de investimento e retorno e aos pressupostos sobre o reinvestimento;
- cada avaliação multicritério não utiliza medidas redundantes (duas medidas são definidas como redundantes se conduzem sempre ao mesmo resultado na comparação de

⁴¹Ver nota 9.

projectos distintos⁴²).

Relativamente à primeira premissa, pode argumentar-se que, por vezes, é legítimo considerar o comportamento dos projectos de acordo com diferentes pressupostos. No presente enquadramento os diferentes pressupostos podem ser definidos através de diferentes cenários, sendo cada avaliação multicritério executada sobre um cenário de pressupostos não contraditórios. Os resultados obtidos para diferentes cenários podem então ser utilizados para atingir uma conclusão final. Relativamente à segunda premissa, considera-se que a utilização de medidas redundantes não permite obter informação adicional relevante.

Vai assumir-se que o processo de avaliação multicritério pode ter como objectivo a comparação, ordenação ou selecção de projectos pertencentes a um conjunto de propostas de investimento. Este processo pode utilizar medidas financeiras e também outros atributos não financeiros, mas o presente trabalho apenas se irá debruçar sobre a utilização de medidas financeiras. Irá ainda considerar-se que cada avaliação multicritério será baseada no desempenho de cada projecto nas diferentes medidas (na comparação de diferentes projectos não se considera, por exemplo, a aplicação destas medidas ao projecto diferença⁴³).

A averiguação de quais as medidas que é ou não legítimo utilizar simultaneamente quando se consideram estas premissas, vai ser dividida em duas partes. Primeiro será considerada a utilização simultânea de medidas da mesma classe, e será depois considerada a utilização de medidas de diferentes classes. A análise que vai ser feita baseia-se, em parte, na determinação de quais as medidas que, quando correctamente utilizadas, são redundantes. Uma vez que as demonstrações da redundância de medidas financeiras são triviais, não serão aqui apresentadas. Algumas destas demonstrações podem ser consultadas, por exemplo, em [139], capítulo 7.

2.9.2.1 A utilização simultânea de medidas da mesma classe

Comecem por considerar-se as medidas de valor equivalente. À parte um factor de escala, os resultados da aplicação do VAL, VAE, VFL e VCE a um projecto são idênticos. Isto significa que estas medidas conduzem sempre ao mesmo resultado na comparação de projectos, pelo que são redundantes. As medidas da família VALR generalizam a aplicação do VAL para as situações em que se não pode assumir que a taxa de reinvestimento é igual ao custo do capital (como se indicou atrás, a comparação do VAL de diferentes projectos apenas é legítima se se assumir que a taxa de reinvestimento é igual ao custo do capital). As

⁴² Isto é, duas medidas são redundantes se, sempre que um projecto é melhor do que outro de acordo com uma das medidas, também o for de acordo com a outra medida.

⁴³ Uma vez que a utilização do projecto diferença tem geralmente como objectivo a obtenção de indicações coerentes com as obtidas pela utilização do VAL, a não utilização do projecto diferença não irá limitar a avaliação a efectuar.

medidas desta família apenas diferem entre si no que consideram investimento e no que consideram retorno. O VALVT, por exemplo, assume que o investimento consiste apenas no primeiro *cash flow*, e que todos os restantes *cash flows* constituem retorno, enquanto o VAL* assume que todos os *cash flows* que ocorrem até ao ponto de transição (inclusivé) são investimento, e que os restantes são retorno. Note-se que, se se assumir uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital, qualquer medida de VALR se torna idêntica ao VAL. Assim, quando se utiliza em todas as medidas de valor equivalente o pressuposto de a taxa de reinvestimento ser igual ao custo do capital, todas conduzem aos mesmos resultados na comparação de projectos. Se a taxa de reinvestimento for diferente do custo do capital, apenas medidas de VALR podem ser utilizadas, e diferentes medidas desta família baseiam-se em diferentes conceitos de investimento e retorno. Pode, assim, concluir-se que, de acordo com o enquadramento definido, não mais do que uma medida de valor equivalente deve ser utilizada numa avaliação multicritério, e que esta deve ser escolhida tendo em consideração os conceitos de investimento e retorno, bem como a existência ou não da necessidade de considerar uma taxa de reinvestimento diferente do custo do capital.

Pode considerar-se que as taxas de rentabilidade se baseiam em quatro filosofias diferentes: TIR, ORR, TRA e TRP. A TIR difere das restantes taxas de rentabilidade por ser a única que não pode ser adaptada para acomodar uma taxa de reinvestimento independente, apenas fazendo sentido comparar a TIR de diferentes projectos se se assumir uma taxa de reinvestimento igual à própria TIR. Esta assume, assim, um pressuposto de reinvestimento diferente de todas as restantes taxas de rentabilidade, não sendo possível utilizá-la juntamente com nenhuma outra taxa de rentabilidade sem assumir simultaneamente pressupostos contraditórios. Para as restantes taxas, é muito fácil provar que uma ORR que assuma um determinado conceito de investimento e retorno compara sempre dois projectos da mesma forma que a TRA e a TRP, que consideram os mesmos conceitos de investimento e retorno, desde que em todos os cálculos se utilize a mesma taxa de reinvestimento. Assim, uma ORR, uma TRA e uma TRP que considerem os mesmos conceitos de investimento e retorno serão redundantes. Isto significa que apenas taxas de rentabilidade que se baseiem em conceitos contraditórios ou em diferentes pressupostos quanto ao reinvestimento podem conduzir a uma diferente comparação de projectos. Portanto, de acordo com o enquadramento definido, não mais do que uma medida de taxa de rentabilidade deve ser utilizada numa avaliação multicritério. Esta medida deve ser escolhida de acordo com os conceitos de investimento e retorno, e com o pressuposto de reinvestimento considerado.

Todos os índices de rentabilidade apresentados podem ser considerados como pertencentes à família de IRR (ver 2.8.3). Nomeadamente, os índices que não consideram uma taxa de reinvestimento explícita podem ser tidos por casos particulares dos índices IRR, em que a taxa de reinvestimento é igual ao custo do capital. Cada IRR é identificado pelo que se considera investimento e retorno e, assim, diferentes IRR serão baseados em conceitos

contraditórios de investimento e retorno. Portanto, de acordo com o enquadramento anteriormente definido, não mais do que um índice de rentabilidade deve ser utilizado numa avaliação multicritério, o qual será escolhido tendo em conta os conceitos de investimento e retorno.

As duas medidas de período de recuperação podem comparar de forma diferente dois projectos de investimento. O motivo que pode levar a estes diferentes resultados é o facto de o PRVA considerar o valor temporal do dinheiro e o PRC não o considerar. Assim, estas duas medidas não são redundantes, e não se podem considerar contraditórias no contexto do enquadramento que antes se definiu. No entanto, acredita-se que não existam vantagens na utilização simultânea das duas medidas, devendo geralmente ser escolhida uma de acordo com a importância atribuída ao valor temporal do dinheiro. Como este é importante, quando se pretender utilizar uma medida de período de recuperação numa avaliação multicritério a escolha deverá geralmente recair sobre o PRVA.

As medidas de rentabilidade contabilística diferem no que se considera relevante acerca do investimento. A TRC tem em conta o investimento inicial no projecto enquanto a TMRC usa o valor contabilístico médio do investimento (depois das amortizações). Assim, pode considerar-se que se baseiam em pressupostos contraditórios acerca do investimento, pelo que só uma delas, no máximo, deverá ser utilizada num processo de avaliação multicritério.

2.9.2.2 A utilização simultânea de medidas de classes diferentes

Considere-se a utilização simultânea de medidas de classes diferentes. Para começar, analise-se a perspectiva, ou dimensão, da rentabilidade que cada classe considera. As medidas de valor equivalente tomam em conta o valor absoluto do projecto, ao passo que as de período de recuperação consideram o tempo que demora a recuperação do investimento, ou seja, a velocidade de recuperação da liquidez, e as de rentabilidade contabilística assentam na perspectiva contabilística da rentabilidade.

Quanto às classes de medidas de taxa de rentabilidade e de índices de rentabilidade, ambas consideram a relação entre o retorno e o investimento, ou a magnitude do retorno relativamente ao investimento efectuado. Assim, as classes de taxas de rentabilidade e índices de rentabilidade parecem endereçar a mesma perspectiva da rentabilidade, estando, desta forma, estreitamente ligadas. Esta ligação estreita entre as taxas de rentabilidade e os índices de rentabilidade pode ser confirmada por uma análise destas medidas. Pode confirmar-se que, para cada índice de rentabilidade, a ORR, a TRP e a TRA que assentam nos mesmos conceitos de investimento e retorno que esse índice conduzem sempre ao mesmo resultado que o índice na comparação de projectos, sendo o recíproco também verdadeiro. Assim, seguindo o enquadramento que se vem a considerar, não deve ser utilizado um índice de rentabilidade em conjunto com uma ORR, TRP ou TRA, pois, se ambas as

medidas se basearem em conceitos idênticos de investimento e retorno, são redundantes. Também não devem ser utilizados índices de rentabilidade em conjunto com a TIR, pois assumem pressupostos contraditórios relativamente à taxa de reinvestimento. Conclui-se, portanto, que apenas é legítimo utilizar uma medida das classes de taxas de rentabilidade e índices de rentabilidade, e pode considerar-se, assim, uma "super-classe" de taxas/índices de rentabilidade.

Deste modo, existem quatro classes (ou três classes e uma "super-classe") independentes, que consideram perspectivas diferentes da rentabilidade de um projecto. Pode verificar-se que duas medidas pertencentes a duas classes diferentes comparam de forma distinta alguns projectos, pelo que medidas de classes distintas não são redundantes.

É, no entanto, necessário algum cuidado na utilização de medidas de classes diferentes, por forma a não utilizar simultaneamente medidas baseadas em pressupostos distintos sobre o reinvestimento, ou diferentes conceitos de investimento ou retorno. Se forem usadas simultaneamente medidas de valor equivalente e taxas/índices de rentabilidade, é necessário um particular cuidado na selecção destas, por forma a não introduzir pressupostos contraditórios na avaliação. Se for utilizada uma medida de valor equivalente que não considere explicitamente uma taxa de reinvestimento, então a taxa/índice de rentabilidade deve utilizar uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital, ou não deve considerar uma taxa de reinvestimento. Se a medida de valor equivalente utilizar uma taxa de reinvestimento independente, então deve utilizar-se uma taxa/índice de rentabilidade baseada nos mesmos conceitos de investimento e retorno, devendo também utilizar-se a mesma taxa de reinvestimento nas duas medidas. Se se optar por utilizar a TIR, então nenhuma das medidas de valor equivalente aqui apresentadas pode ser utilizada, pois a utilização da TIR na comparação de projectos apenas é legítima se se considerar um pressuposto sobre o reinvestimento que é incompatível com os pressupostos da medida de valor equivalente.

As duas medidas de período de recuperação consideradas no presente trabalho impõem limitações de tipo distinto à utilização simultânea de outras medidas. A comparação do PRC de diferentes projectos não requer nenhum pressuposto de reinvestimento, pelo que este pode ser usado sem ter em conta as medidas de outras classes que estão a ser utilizadas. A comparação do PRVA de diferentes projectos apenas é legítima se se assumir uma taxa de reinvestimento igual ao custo do capital, pelo que, se esta medida for usada em conjunto com medidas de valor equivalente ou taxas/índices de rentabilidade que considerem explicitamente uma taxa de reinvestimento, esta taxa deve ser igual ao custo do capital; pela mesma razão, o PRVA não deve ser usado em conjunto com a TIR.

No caso das medidas de rentabilidade contabilística, o conceito de retorno é sempre diferente do assumido pelas de valor equivalente e pelas taxas/índices de rentabilidade, podendo a este respeito serem seguidas duas posturas diferentes: considerar que as medidas

de rentabilidade contabilística são independentes das restantes, porque são calculadas utilizando um tipo de informação e de acordo com princípios diferentes; ou considerar que existe uma contradição entre os pressupostos das medidas de rentabilidade contabilística e os das medidas de valor equivalente e das taxas/índices de rentabilidade, e que, por isso, quando se utilizam algumas destas medidas, não se podem utilizar as de rentabilidade contabilística. Na realidade, como foi anteriormente exposto, as medidas de rentabilidade contabilística têm uma utilidade muito limitada, e é de prever que, geralmente, não sejam utilizadas.

Resumindo a análise efectuada nesta subsecção, pode dizer-se que se considerou um enquadramento para avaliação multicritério de projectos de investimento, e se procurou determinar que medidas podem ser utilizadas simultaneamente de forma a que não se introduzam no processo de avaliação medidas redundantes ou baseadas em pressupostos contraditórios. Concluiu-se que, em geral, não deve ser utilizada mais do que uma medida de cada classe. Concluiu-se também que podem ser utilizadas medidas de classes diferentes, mas não se deve utilizar mais do que uma da "super-classe" formada pelas classes de taxas de rentabilidade e índices de rentabilidade.

2.10 Avaliação multicritério de projectos de investimento

Na secção anterior argumentou-se que, por vezes, pode fazer sentido a utilização de mais do que uma medida financeira num processo de avaliação e selecção de projectos de investimento. Da mesma forma, pode ser pertinente utilizar atributos não financeiros, alguns dos quais mesmo qualitativos, num tal processo. O argumento mais utilizado na literatura para justificar a utilização de atributos não financeiros prende-se com a dificuldade de tomar em consideração os aspectos estratégicos do investimento utilizando unicamente medidas financeiras ([31], [59], [74], [113], [142], [180], [189], por exemplo). A dificuldade de quantificar alguns factores importantes ([59]), ou de incorporar esses factores nos *cash flows* ([75], [80]), as imperfeições dos mercados de capitais ([189]), e a necessidade de tomar em consideração as preferências de outros interessados que não os accionistas ([180]), são outros argumentos importantes em favor da utilização de atributos não financeiros na avaliação de projectos de investimento. A utilização de diferentes atributos nesta avaliação requer modelos multicritério. Destes, os mais referidos na literatura financeira são o modelo aditivo da Teoria da Utilidade Multi-Atributo (MAUT⁴⁴) e o *Analytic Hierarchy Process* (AHP).

Os modelos de MAUT são descritos em numerosos livros (por exemplo [107], [179]), e consistem na determinação, para cada alternativa, de um valor ou utilidade⁴⁵ que reflecta

⁴⁴Do inglês *Multi-Attribute Utility Theory*.

⁴⁵Em Teoria da Utilidade, considera-se que a atractividade de uma alternativa é medida por um valor quando não está envolvido risco, e que é medida por uma utilidade quando está envolvido risco.

a sua atractividade. Os modelos MAUT mais comuns são o aditivo, o multiplicativo e o multilinear, sendo o aditivo o mais usado na literatura financeira. Para utilizar o modelo aditivo é necessário obter, do agente de decisão, as funções utilidade ou valor referentes a cada atributo, e o coeficiente de ponderação de cada atributo. Existem várias técnicas descritas na literatura para obter estas funções e coeficientes (ver, por exemplo, [179], capítulos 7 e 8). Em seguida, basta utilizar a soma ponderada para determinar a utilidade ou valor global de cada alternativa.

Existem vários exemplos de aplicação de MAUT à avaliação e selecção de projectos de investimento. Liggett e Sullivan [114] utilizam MAUT para selecção de uma topologia de rede de área local, considerando medidas financeiras e atributos não financeiros, e incorporando as preferências de um grupo de agentes de decisão. Walls [180] utiliza MAUT para seleccionar uma carteira de projectos de exploração de petróleo e gás. Este autor utiliza simulação para gerar cerca de 2500 carteiras potenciais, carteiras essas para as quais calcula duas medidas financeiras (o VAL e o IR) e dois atributos não financeiros; estes são então usados no cálculo de uma utilidade global para cada carteira. Zinkhan e Zinkhan [189] usam MAUT para comparar várias alternativas de exploração agroflorestal de terrenos, incluindo duas medidas financeiras (o VAL e uma taxa de rentabilidade) e quatro atributos não financeiros. Alguns autores analisam questões metodológicas relativas à utilização de MAUT na avaliação de projectos. Falkner e Benhajla [59] apresentam uma abordagem à análise da introdução de tecnologia de *Computer Integrated Manufacturing* utilizando MAUT. Estes autores enfatizam a selecção dos atributos relevantes, analisando as condições a que o conjunto de atributos deve obedecer e as perspectivas que devem ser contempladas por este. Falkner e Verter [60] discutem o problema da normalização das escalas em que os atributos são medidos, quando se utiliza uma medida financeira e vários atributos não financeiros.

O AHP foi proposto em Saaty [155], e é frequentemente referido na literatura financeira. É uma abordagem hierárquica à modelação de problemas de decisão, sendo, por vezes, considerado um método de MAUT ([137]). Uma das grandes vantagens do AHP é o facto de permitir uma monitorização da coerência interna dos julgamentos do agente de decisão.

A utilização do AHP inicia-se com a estruturação do problema numa hierarquia de elementos de decisão. No topo da hierarquia é colocado o objectivo global do problema de decisão, ou critério de síntese, o segundo nível contém os critérios mais gerais, e os níveis seguintes vão consistindo na desagregação sucessiva dos critérios de nível superior. No último nível desta hierarquia são colocadas as alternativas. Depois de definida a hierarquia, são efectuadas comparações, par a par, da importância, ou prioridade, dos elementos da hierarquia relativamente ao seu superior hierárquico directo. A partir destas comparações é possível determinar uma prioridade global para cada alternativa, que vai reflectir a sua atractividade.

Por vezes as alternativas são avaliadas relativamente a critérios quantitativos. Se, numa tal situação, for razoável assumir que a prioridade, ou atractividade, da alternativa relativamente ao critério é proporcional ao desempenho da alternativa nesse critério, as correspondentes comparações podem ser evitadas, utilizando-se, em vez destas, os rácios entre os valores dos desempenhos das alternativas nestes critérios. Um critério relativamente ao qual é comum proceder desta forma é o VAL.

Chan e Lynn [42] analisam os benefícios decorrentes da utilização do AHP na avaliação de projectos. Liberatore, Monahan e Stout [113] propõem uma abordagem à utilização do AHP em avaliação de projectos, baseada no desenvolvimento de uma hierarquia de decisão que tem em conta a missão, objetivos e estratégia da empresa. Os mesmos autores ([172]) apresentam um exemplo hipotético de aplicação do AHP à avaliação de propostas de investimento em novas tecnologias por parte de uma empresa produtora de equipamentos de telecomunicações, em que são considerados critérios financeiros (TIR e PRC), critérios quantitativos não financeiros, e ainda critérios qualitativos. Barbarosoglu e Pinhas [15] apresentam um exemplo real de aplicação do AHP na selecção de uma carteira de projectos de abastecimento de água e tratamento de águas residuais por parte da *Istanbul Water and Sewerage Administration*, em que é utilizado o VAL juntamente com critérios sociais e critérios políticos. Ghotb e Warren [72] aplicam o AHP à tomada de decisão de substituição de um sistema de armazenamento de imagens radiológicas de um hospital, utilizando o custo anual equivalente (ou seja, o custo calculado na forma de um VAE) e critérios relativos ao risco e à produtividade.

Existem diversos problemas relacionados com a utilização do AHP. Estes problemas incluem a imprecisão do significado das perguntas relativas à comparação da importância dos critérios (analisado em [19], [31], [182] e [183], por exemplo); a possibilidade de existir inversão da ordem de duas alternativas quando se introduz uma nova alternativa no processo de avaliação ([19], [57] e [182]); a obrigatoriedade de os pesos dos diferentes critérios serem idênticos para todas as alternativas, não possibilitando considerar que um critério relevante para uma alternativa possa ser irrelevante para outra ([30]); a necessidade de existirem pelo menos duas alternativas para se aplicar o método, não se podendo aplicar este se apenas se pretender saber se os benefícios de uma alternativa são superiores aos seus custos ([30]). Este último problema é particularmente importante na avaliação de projectos, sendo que, mesmo quando se considera a comparação de vários projectos, se coloca muitas vezes a questão de saber se, para o melhor de todos, os benefícios superam os custos ([30]).

Boucher e MacStravic [31] propõem um método multicritério semelhante ao AHP, que é designado por *Non-traditional Capital Investment Criteria*⁴⁶ (NCIC), e que permite ul-

⁴⁶Esta designação não é utilizada no artigo inicial de Boucher e MacStravic, sendo adoptada em trabalhos posteriores (por exemplo [30]).

trapassar alguns problemas do AHP. O NCIC considera uma hierarquia de decisão em que as alternativas aparecem imediatamente depois do objectivo global, no segundo nível da hierarquia. Esta definição da hierarquia assegura que as comparações pedidas ao agente de decisão se referem aos valores dos critérios para uma determinada alternativa, definindo ainda o NCIC que a importância dos critérios é medida como a contribuição relativa destes para o VAL do projecto, o que torna preciso o significado das comparações. Além disso, evita-se, assim, o problema da inversão da ordem por introdução de uma nova alternativa, e permite-se que o mesmo critério tenha ponderações diferentes para diferentes alternativas. O NCIC permite ainda o cálculo, para cada alternativa, de um VAL que tem em conta o impacto de todos os critérios, bem como a desagregação desse VAL em parcelas que representam o impacto de cada critério. Através deste método pode, assim, obter-se, não só uma comparação de projectos, mas também a indicação de um determinado projecto ser ou não rentável para a empresa. Boucher e MacStravic (*op. cit.*) sugerem ainda formas de verificação da coerência dos julgamentos do agente de decisão quando o NCIC e o AHP são utilizados sobre o mesmo problema. Boucher, Gogus e Wicks [30] fazem uma comparação detalhada do NCIC com o AHP.

O MACBETH (*Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique*, [11], [13]) é um método multicritério que, tal como o AHP, permite obter um valor final para cada alternativa a partir de um conjunto de comparações efectuadas pelo agente de decisão. O tipo de comparações que são feitas quando se utiliza o MACBETH é diferente do tipo das que são requeridas pelo AHP. Enquanto o AHP requer comparações referentes à relação entre a importância/prioridade dos elementos de decisão, o MACBETH requer comparações entre a diferença de importância/prioridade destes. Bana e Costa, Ferreira e Corrêa [12] utilizam o MACBETH num problema que tem algumas semelhanças com a avaliação de projectos: a avaliação de propostas em concursos públicos.

Existem ainda vários métodos multicritério, baseados em análise de desagregação, que são também muito utilizados em problemas da área financeira, incluindo avaliação de projectos. Este tipo de análise tenta determinar qual o modelo de agregação de critérios que está subjacente à informação de preferência relativa a um conjunto de alternativas, informação essa que é comumente expressa sob a forma de uma classificação ou ordenação das alternativas. O conjunto de alternativas relativamente ao qual se define essa informação de preferência inicial pode corresponder a decisões anteriormente tomadas, a um subconjunto das alternativas em consideração, a um conjunto de alternativas de referência, etc. Os métodos de análise de desagregação mais utilizados na área financeira assumem que, subjacente à informação de preferência fornecida, está uma função utilidade aditiva. Entre estes métodos encontram-se o UTA (*UTilitéé Additive*; [100], [164]), que utiliza informação de preferência inicial com a forma de uma ordem fraca das alternativas; e os UTADIS

(*UTilités Additives DIScriminantes*, variantes dos métodos UTA; [99], [191]) e o MHDIS (*Multigroup Hierarchical DIScrimination*; [192]), que utilizam informação de preferência inicial com a forma de uma classificação das alternativas. Um conjunto de aplicações do método UTA a problemas da área financeira é apresentado por Siskos, Spiridakos e Yannacopoulos [166]; Zopounidis [190] utiliza este método para selecção e gestão de uma carteira de acções, e Siskos e Zopounidis [165] usam-no para analisar os investimentos de uma empresa de capital de risco. Várias aplicações do MHDIS à área financeira são apresentadas por Zopounidis e Doumpos [193], e este método é comparado com os métodos UTADIS na classificação do risco de investimento em diversos países por Doumpos, Zanakis e Zopounidis [54]. Os mesmos autores usam métodos UTADIS para análise do investimento em acções ([194]). Jacquet-Lagrèze [99] utiliza um método UTADIS para selecção de projectos de Investigação e Desenvolvimento (I&D) por uma empresa, tomando em consideração a análise de 3 comités técnicos e o ponto de vista do responsável pelo plano de I&D da empresa. Estes são apenas alguns exemplos das muitas aplicações de métodos baseados em análise de desagregação à área financeira que são apresentadas na literatura.

2.11 Resumo

No capítulo que agora termina foram apresentados os métodos clássicos de avaliação de investimentos, e foi ainda discutida a sua utilização em modelos multicritério. Começaram por analisar-se os objectivos da empresa e dos seus accionistas. A este respeito definiu-se o conceito de mercados perfeitos, e argumentou-se que, na presença deste tipo de mercados, o objectivo da empresa deve ser a maximização do seu valor de mercado.

A avaliação de projectos de investimento, e o cálculo da sua contribuição para o valor de mercado da empresa, são baseados na utilização de medidas financeiras. Na base da maioria destas medidas está o conceito de *cash flow*. Assim, antes de passar à apresentação destas medidas definiu-se o *cash flow* e discutiram-se alguns tópicos relacionados com este conceito, como a utilização de valores nominais ou valores reais e a utilização de *cash flows* em tempo contínuo ou em tempo discreto.

A medida que é considerada teoricamente melhor fundamentada é o Valor Actual Líquido (VAL), que mede directamente a contribuição líquida do projecto para o valor da empresa. Esta medida foi analisada e foi posteriormente discutido o cálculo de um parâmetro fundamental para a determinação do VAL e do valor de outras medidas financeiras – o custo do capital. Referiram-se duas abordagens diferentes para a determinação do custo do capital: o custo médio ponderado do capital (WACC) e a utilização de modelos de equilíbrio do mercado.

O custo do capital permite a incorporação do risco no valor do projecto, mas existe uma

forma alternativa de efectuar esta incorporação, que consiste na utilização de *cash flows* equivalentes certos. O cálculo deste tipo de *cash flows* foi também analisado.

A forma como o projecto é financiado contribui também para o valor que este acrescenta à empresa. Foram, assim, analisadas diferentes formas de incorporar os efeitos do financiamento no valor do projecto, tendo sido realçadas as vantagens da utilização do Valor Actual Líquido Ajustado (VAA).

Introduziram-se então outras medidas de avaliação de projectos de investimento. Foi dado um relevo especial à Taxa Interna de Rentabilidade (TIR), que é muito utilizada pelas empresas, tendo sido discutidos os principais problemas que esta medida apresenta. As medidas consideradas foram classificadas em medidas de valor equivalente, medidas de taxa de rentabilidade, índices de rentabilidade, medidas de período de recuperação e medidas de rentabilidade contabilística. Discutiram-se os casos em que pode ser apropriada a utilização das diferentes medidas.

Considerou-se então a utilização simultânea de diferentes medidas financeiras. Partiu-se de um enquadramento para avaliação multicritério de projectos de investimento e procurou determinar-se que medidas podem ser utilizadas simultaneamente de forma a que não se introduzam no processo de avaliação algumas que sejam redundantes ou baseadas em pressupostos contraditórios. Concluiu-se que, em geral, não deve ser utilizada mais do que uma medida de cada classe, e que podem ser utilizadas medidas de classes diferentes mas não se deve utilizar mais do que uma da "super-classe" formada pelas classes de taxas de rentabilidade e índices de rentabilidade. Alertou-se, ainda, para os cuidados a ter na selecção de medidas quando as utilizadas forem de diferentes classes.

Por fim, discutiu-se a aplicação de métodos multicritério na avaliação de projectos de investimento, com ênfase nos mais referidos na literatura financeira.

Capítulo 3

Incorporação do risco e decisões sequenciais na avaliação de projectos

A utilização tradicional das medidas financeiras apresenta dificuldades importantes nas situações em que existe risco e, simultaneamente, existe a possibilidade de tomar decisões ao longo do projecto. Neste tipo de situações, a utilização de medidas financeiras pode ser facilitada pelo recurso a instrumentos auxiliares, como árvores de decisão e simulação de Monte Carlo. Para além destes instrumentos surgiram, nas últimas décadas, modelos de avaliação de projectos baseados na teoria das opções, designados por modelos de opções reais.

O presente capítulo vai debruçar-se sobre os instrumentos e modelos para incorporação do risco e das decisões sequenciais no valor dos projectos. Vão começar por discutir-se algumas críticas que têm sido apresentadas à utilização de medidas financeiras baseadas na actualização dos *cash flows* para avaliar projectos com risco, quando existe a possibilidade de tomar decisões ao longo do projecto. Serão depois examinadas algumas técnicas e modelos que podem ser utilizados para analisar estas situações: simulação de Monte Carlo, árvores de decisão e modelos de opções reais.

3.1 Críticas à utilização tradicional das medidas financeiras

Muitos autores defendem que a utilização tradicional das medidas financeiras baseadas na actualização de *cash flows*, tal como foi descrita no capítulo anterior, é inadequada para situações em que exista a possibilidade de os gestores agirem de acordo com os desenvolvimentos que ocorram no projecto ou no ambiente em que este se encontra inserido,

adoptando medidas correctivas ou aproveitando as oportunidades decorrentes do projecto. Alleman [3] argumenta que estas medidas "...assumem explicitamente que o projecto atingirá os *cash flows* esperados sem intervenção dos gestores...". Park e Herath [138] afirmam que o VAL resume todas as possibilidades a um único cenário, e desta forma "... não toma em consideração a capacidade de os gestores reagirem a novas circunstâncias ...". Copeland e Antikarov ([48], capítulo 3) defendem que o VAL assume a inexistência de flexibilidade nos projectos avaliados. Trigeorgis e Mason [178] consideram que existem dois aspectos de criação de valor que são inadequadamente capturados pela utilização tradicional do VAL; são eles:

- a flexibilidade operacional existente em cada projecto, que permite aos gestores tomar ou rever decisões num momento futuro (como adiar, expandir ou abandonar o projecto);
- o valor da opção estratégica que resulta da interdependência do projecto com investimentos futuros.

Myers [134] defende uma posição semelhante, apresentando um caso em que o VAL captura inadequadamente o valor do projecto por não ter em conta a opção estratégica resultante deste. É o caso em que uma empresa investe num projecto com VAL negativo para estabelecer uma posição num mercado atractivo. A empresa fica, assim, com a possibilidade de, numa segunda fase, empreender um novo investimento, que já será lucrativo se o mercado permanecer atractivo e a primeira fase tiver corrido bem. O VAL do primeiro projecto não será uma medida correcta do valor do investimento, uma vez que o objectivo deste é permitir à empresa ficar com a opção de empreender a segunda fase do investimento. Mas, como nota Myers, uma avaliação que inclua os *cash flows* das duas fases do investimento também não será correcta, uma vez que, se a primeira fase não correr bem, ou se o mercado regredir, a empresa pode desistir da segunda fase do investimento.

Todos estes autores, cuja posição é a mais comum na actual literatura financeira, recomendam que, quando existe flexibilidade operacional ou opções estratégicas, se recorra a modelos baseados na teoria das opções. Vai agora analisar-se o argumento, apresentado por estes autores, de as medidas não permitirem levar em conta as decisões que podem ser tomadas ao longo do projecto, nem a sua interdependência com investimentos futuros. À semelhança do que é feito pela generalidade dos autores que criticam a utilização tradicional das medidas financeiras, vai analisar-se a utilização tradicional do VAL (que é a medida considerada teoricamente mais fundamentada).

O cálculo do VAL baseia-se nos *cash flows* esperados do projecto, que devem incluir todos os efeitos derivados deste. Apenas faz sentido calcular esses *cash flows* esperados se se assumir que é seguida uma determinada estratégia de implementação do projecto. Quando é calculado o VAL para um projecto em que os gestores tenham a possibilidade

de agir de acordo com o desenvolvimento do projecto ou do ambiente em que se encontra inserido, o VAL calculado não é "o VAL" do projecto mas sim o VAL de uma estratégia de implementação do projecto. Tal significa que, no exemplo apresentado por Myers, o VAL da primeira fase não é "o VAL" do projecto, mas sim o VAL da estratégia de implementação que consiste em nunca prosseguir a segunda fase do projecto. Da mesma forma, o VAL calculado utilizando os *cash flows* das duas fases do projecto é o VAL da estratégia que consiste em prosseguir sempre a segunda fase do projecto, independentemente dos resultados da primeira fase. O VAL de uma estratégia em que o prosseguimento da segunda fase do projecto está condicionado aos resultados da primeira fase pode ser calculado, tomando em consideração os *cash flows* das duas fases, do seguinte modo:

- para a primeira fase são calculados os *cash flows* esperados da forma usual;
- o cálculo dos *cash flows* esperados da segunda fase deve assumir que os resultados da primeira fase conduzem, de acordo com a estratégia seguida, à prossecução desta segunda fase (por exemplo, se se considerar uma estratégia que consiste em prosseguir a segunda fase apenas se se tiver obtido um quota de mercado mínima na primeira fase, o cálculo dos *cash flows* da segunda fase deve assumir que na primeira fase foi obtida essa quota de mercado);
- por forma a obter o valor esperado dos *cash flows*, os que dizem respeito à segunda fase devem ser posteriormente multiplicados pela probabilidade de a segunda fase ser prosseguida, isto é, de o resultado da primeira fase ter conduzido, de acordo com a estratégia definida, à execução da segunda fase (no exemplo que envolve a quota de mercado mínima, os *cash flows* da segunda fase devem ser multiplicados pela probabilidade de a primeira fase conduzir à quota de mercado mínima).

Se os *cash flows* forem calculados desta forma, e se fizer sentido utilizar um custo do capital ajustado ao risco, ou, alternativamente, se for possível encontrar equivalentes certos para estes *cash flows* e se eles forem actualizados à taxa de juro sem risco, então o VAL tradicional pode ser aplicado à estratégia considerada⁴⁷ (uma conclusão semelhante é obtida em [22], capítulo 21). Se essa estratégia for óptima, então o seu VAL será o maior VAL possível para o projecto. Assim, ao contrário do que muitos autores defendem, o problema da utilização tradicional do VAL não é o facto de este prescrever a utilização de *cash flows* que não têm em conta as melhores estratégias de implementação do projecto e as opções presentes neste, pois o cálculo correcto dos *cash flows* tem que assumir que é seguida uma determinada estratégia. Os problemas relativos ao cálculo dos *cash flows*

⁴⁷É interessante que Myers refira que uma das justificações para a insatisfação com os resultados da avaliação financeira de projectos seja uma utilização errada das medidas baseadas em *cash flows* actualizados (referindo-se a problemas como a ordenação dos projectos pela TIR ou a utilização de valores exagerados para o custo do capital). Na verdade, Myers está ele próprio a assumir uma utilização errada do VAL quando argumenta que este não é aplicável à situação considerada.

para a utilização tradicional do VAL são a dificuldade do cálculo dos *cash flows* esperados para estratégias complexas, bem como a dificuldade de determinar a estratégia óptima (entendendo-se como estratégia óptima a que maximiza o VAL). Com efeito, quando a estratégia considerada envolve muitas acções condicionadas a acontecimentos incertos, pode ser muito difícil estimar esses *cash flows* sem recorrer a instrumentos auxiliares, e também não existe uma forma simples de determinar a estratégia óptima de implementação do projecto em ambientes incertos e em que o número de possíveis acções a desenvolver pelos gestores seja elevado.

A determinação dos *cash flows* esperados e da estratégia óptima pode ser simplificada pela utilização de instrumentos auxiliares, como a simulação de Monte Carlo e as árvores de decisão. A simulação de Monte Carlo pode ser utilizada para determinar os *cash flows* esperados para utilização de medidas financeiras de avaliação de projectos, e pode também ser utilizada para determinar as distribuições e valores dessa medidas. As árvores de decisão são um instrumento importante para estruturar a sequência de decisões e acontecimentos incertos do projecto, por forma a tornar mais simples a identificação da estratégia óptima e do VAL correspondente, e, desta forma, incorporar no VAL a flexibilidade operacional e a opção estratégica existentes no projecto. A simulação de Monte Carlo, particularmente se utilizada em conjunto com árvores de decisão (ver subsecção 3.3.2), pode também ser utilizada na determinação da estratégia óptima de execução do projecto.

Uma outra crítica frequentemente apresentada à utilização tradicional das medidas financeiras é a de que estas encaram as decisões de investimento como decisões do tipo "agora ou nunca", e não como decisões que podem ser adiadas. Miller e Park [132] consideram que: "A abordagem do VAL, por exemplo, conduz à aceitação imediata do projecto se o VAL é positivo". Esta crítica parece também dever-se a um conceito errado da aplicação do VAL. Na presença da possibilidade de adiamento de um projecto de investimento, uma aplicação correcta do VAL deve basear-se na comparação do VAL do projecto, se este for imediatamente empreendido, com o VAL resultante do seu adiamento. Se o VAL resultante do adiamento do projecto for superior, o projecto deve ser adiado. Ou seja, na presença da possibilidade de adiamento, o critério de avaliação a utilizar não pode ser o relativo a um só projecto pois, na realidade, existem dois projectos mutuamente exclusivos – o empreendido hoje e o adiado.

Uma questão diferente se coloca relativamente à incorporação do risco no custo do capital ou nos *cash flows* do projecto. A existência de cursos de acção que alterem a relação entre o risco do projecto e o risco dos activos transaccionados no mercado de capitais pode tornar impossível a determinação de um custo do capital ajustado ao risco ([35], capítulo 20) ou a utilização de métodos para determinação dos equivalentes certos dos *cash flows* ([23]). O problema da existência de um custo do capital correcto na presença de flexibilidade

ou opções estratégicas constitui, assim, um sério entrave à utilização do VAL tradicional nestas situações, mesmo com recurso a instrumentos auxiliares como árvores de decisão ou simulação de Monte Carlo. Para resolver este problema começou a recorrer-se, a partir da segunda metade da década de 80, a modelos baseados na teoria das opções. Estes modelos foram inicialmente desenvolvidos para opções financeiras, sendo posteriormente adaptados a investimentos em activos reais em que exista flexibilidade ou opções estratégicas. As acções que os gestores podem desenvolver no sentido de aproveitar as oportunidades apresentadas pela flexibilidade e opções estratégicas são, no contexto da utilização da teoria das opções, designadas por Opções Reais.

3.2 Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é uma técnica cuja utilização em análise de investimentos está muito associada ao trabalho de Hertz [92]. Esta técnica é muitas vezes utilizada para análise de risco de projectos de investimento, mas pode também servir para a determinação da estratégia óptima e do VAL correspondente. Parte de um modelo matemático do projecto que descreve as características deste e a sua dependência do tempo e dos acontecimentos aleatórios que vai encontrando. A partir de uma amostragem repetida das variáveis aleatórias relevantes, a técnica permite obter uma função de distribuição dos resultados do projecto, medidos por uma medida financeira (muitas vezes o VAL) ou pela sequência de *cash flows*.

A simulação de Monte Carlo segue normalmente as etapas que a seguir se descrevem.

1. Modelação do projecto através de um conjunto de equações matemáticas que definem a forma como o valor das variáveis relevantes é determinado, e que têm em consideração as interdependências entre diferentes variáveis e entre diferentes momentos;
2. Especificação de funções de distribuição de probabilidade para as variáveis base (as variáveis que não são definidas em função de outras variáveis⁴⁸) e para os acontecimentos aleatórios;
3. Geração de amostragens aleatórias para os valores das variáveis base e para o desfecho dos acontecimentos aleatórios; para cada amostragem aleatória é possível obter um valor para a variável (ou conjunto de variáveis) que mede(m) o resultado do projecto, e a geração de um número grande destas amostragens permite obter uma função de distribuição de probabilidade dos resultados do projecto.

Hertz e Thomas [94] e Park e Sharp-Bette ([139], capítulo 12) discutem mais aprofundadamente a utilização de simulação de Monte Carlo em análise de risco. Vários autores

⁴⁸Brealey e Myers ([35], capítulo 10) definem as diversas variáveis sujeitas a incerteza em termos de valor esperado e erro de previsão, caracterizando assim como variáveis base os erros de previsão.

abordam a utilização do Microsoft Excel para simulação de Monte Carlo (por exemplo Amirkhalili [4] e Smith [167]) ou apresentam casos de aplicação de simulação de Monte Carlo (por exemplo Hertz e Thomas [94] e Meimbam, Morris e Govett [129]), normalmente centrando-se na obtenção da distribuição de probabilidade do VAL.

Brealey e Myers ([35], capítulo 10) e Trigeorgis ([177], capítulo 2) apontam alguns problemas da simulação de Monte Carlo para obter uma distribuição de probabilidade do VAL. Estes autores argumentam que não faz sentido utilizar um custo do capital ajustado ao risco quando se faz simulação de Monte Carlo, pois o risco já se reflecte na dispersão obtida para o VAL. Portanto, a actualização dos *cash flows* deve ser efectuada usando a taxa de juro sem risco. Mas, se for utilizada a taxa de juro sem risco, a distribuição obtida para o VAL será a distribuição dos valores que o projecto teria amanhã se toda a incerteza dos *cash flows* fosse resolvida entre hoje e amanhã. Uma vez que a incerteza não se resolve desta forma, a interpretação da distribuição obtida não é clara. Além disso, se um projecto pode ter vários valores actuais, estes não podem ser interpretados como o valor por que o projecto poderia ser vendido num mercado de capitais competitivo, o que aumenta as dificuldades de interpretação da distribuição obtida. Estas dificuldades aumentam ainda mais quando se toma em consideração que a dispersão da distribuição obtida inclui o risco específico e o risco sistemático, e que o risco específico não deve ser importante na decisão de investimento. Se a dispersão assim obtida for tomada em consideração, pode ainda acontecer que um conjunto de projectos não relacionados, todos isoladamente inaceitáveis, passem a ser aceitáveis como conjunto, o que não faz sentido. Portanto, a distribuição de probabilidade do VAL não permite a definição de uma regra de decisão clara. A recomendação destes autores é que a simulação de Monte Carlo seja feita para a obtenção da distribuição dos *cash flows*, cujo valor esperado pode então ser usado na determinação do VAL do projecto.

Até agora, considerou-se a utilização de simulação de Monte Carlo para análise de risco ou determinação do VAL de uma estratégia de implementação do projecto. No entanto, a simulação pode também servir como auxiliar para a determinação da estratégia óptima de implementação de um projecto. Quando o número de decisões a considerar não é elevado, pode considerar-se a utilização de cada amostragem aleatória para determinar os resultados de cada estratégia de implementação do projecto, comparando depois os resultados obtidos para as várias estratégias para determinar qual delas é melhor. Se a simulação for utilizada para determinar a distribuição dos *cash flows*, são assim calculados os *cash flows* esperados para as diferentes estratégias, e calculados os correspondentes VAL, sendo a estratégia óptima a que conduzir a um maior VAL. A utilização de simulação para determinar a estratégia óptima e o seu correspondente VAL pode ser facilitada pela utilização de árvores de decisão estocásticas, que serão apresentadas em 3.3.2.

A simulação de Monte Carlo é também usada para avaliar opções ([32], [119]), podendo,

assim, sê-lo também na determinação da estratégia óptima e do seu correspondente valor a partir de modelos de opções reais ([69], [185] e [186]). Outros autores usam simulação de Monte Carlo para estimar um parâmetro necessário à utilização de modelos de opções reais – a volatilidade ([48], capítulo 9; [91]). A utilização de simulação de Monte Carlo com modelos de opções reais será discutida em 3.4.

3.3 Árvores de decisão

As árvores de decisão são um instrumento da teoria da decisão cujas aplicações se estendem a diversas áreas da ciência, incluindo a análise de projectos. As árvores de decisão permitem representar, numa estrutura em árvore, as sequências de decisões e acontecimentos incertos que podem ocorrer num problema de decisão, e determinar, a partir daí, uma estratégia óptima para esse problema. Raiffa [143] fornece uma excelente introdução à utilização de árvores de decisão.

Nas árvores de decisão utilizam-se geralmente dois tipos de nodos: nodos de incerteza, que representam os acontecimentos incertos e são geralmente identificados por um círculo, e nodos de decisão, que representam as decisões a tomar pelo agente de decisão e são geralmente identificados por um quadrado. Estes dois tipos de nodos estão representados na figura 3.1.

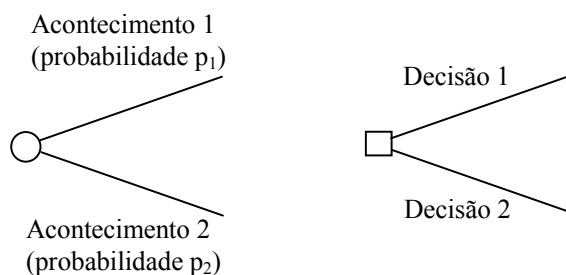


Figura 3.1: Nodo de incerteza com dois arcos (à esquerda) e nodo de decisão com dois arcos (à direita).

As árvores de decisão são geralmente avaliadas em função de uma determinada medida associada ao resultado das decisões. Essa medida é, em geral, o valor monetário ou uma utilidade (em análise de projectos utiliza-se geralmente o VAL). Assume-se usualmente que o objectivo é a maximização do valor esperado dessa medida. Para atingir esse objectivo, utilizam-se as seguintes regras na avaliação dos nodos da árvore:

- num nodo de incerteza, calcular o valor esperado da medida, tendo em conta as probabilidades dos diferentes ramos;

- num nodo de decisão, tomar a decisão correspondente ao ramo com um maior valor da medida (o resultado da avaliação do nodo será o valor correspondente a esse ramo).

O primeiro passo na utilização de uma árvore de decisão para um determinado problema é a construção da própria árvore. A seguir é necessário calcular, para todas as folhas (isto é, para todos os arcos a que não se segue nenhum nodo), o valor da medida que se pretende maximizar. Utiliza-se, então, um processo, denominado *folding back* ou *rolling back*, que consiste em aplicar as regras acima descritas para avaliar os sucessivos nodos, começando pelos mais próximos das folhas e recuando na direcção da raiz. Dessa forma, define-se a estratégia óptima através das sucessivas escolhas efectuadas nos nodos de decisão, e calcula-se o valor da medida relevante para a estratégia óptima.

Considere-se agora um exemplo muito simples para ilustrar a utilização de árvores de decisão. O exemplo consiste simplesmente em escolher entre um valor certo de $W = 50$ euros e uma lotaria a que corresponde uma probabilidade de 60% de receber $W = 100$ euros e uma probabilidade de 40% de não receber nada. A árvore de decisão, e os valores monetários das correspondentes folhas, estão representados na figura 3.2.

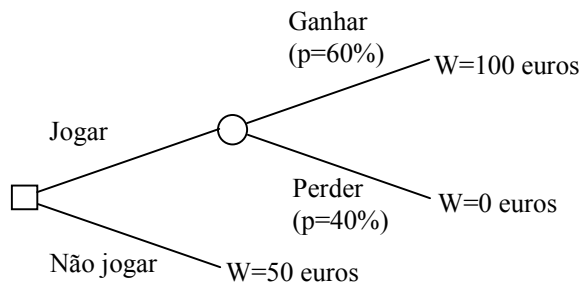


Figura 3.2: Árvore de decisão correspondente à escolha entre uma lotaria e um valor certo.

O primeiro nodo a considerar é o nodo de incerteza. Se se pretender a maximização do valor monetário esperado, então a avaliação desse nodo irá corresponder ao cálculo $W = 60\% \cdot 100 + 40\% \cdot 0 = 60$ euros. Considera-se de seguida o nodo de decisão, que corresponde a uma escolha entre jogar, com um valor monetário esperado de $W = 60$ euros, e não jogar, com $W = 50$ euros. Escolhe-se a primeira opção, por esta corresponder ao maior valor monetário esperado. Assim, a estratégia óptima é jogar, com um valor monetário esperado de 60 euros.

Considere-se agora que se pretende a maximização de uma função utilidade do valor a receber, e que essa função é definida como

$$U(W) = \frac{1 - e^{-0.01W}}{1 - e^{-1}} \quad (3.1)$$

Então $U(0) = 0$, $U(50) \simeq 0.622$ e $U(100) = 1$. O resultado da avaliação do nodo de incerteza será $U = 60\% \cdot 1 + 40\% \cdot 0 = 0.6$. Este valor é agora inferior à utilidade de não jogar, pelo que, no nodo de decisão, se selecciona agora a opção de não jogar. A estratégia óptima é agora não jogar, com uma utilidade esperada de aproximadamente 0.622.

3.3.1 A utilização de árvores de decisão na avaliação de projectos

Magee [125] [126] é considerado o pioneiro na utilização das árvores de decisão na avaliação de projectos. Hertz e Thomas [93] [94] apresentam vários projectos que são analisados recorrendo a árvores de decisão, e muitas obras recentes que abordam a avaliação de projectos apresentam as árvores de decisão como um instrumento importante para a análise de situações que envolvam acontecimentos incertos e decisões sequenciais (por exemplo [35], capítulo 10; [139], capítulo 13; [157], capítulo 12).

O uso de árvores de decisão na avaliação de projectos é geralmente baseado no VAL. Para ilustrar o cálculo do VAL através de árvores de decisão, considere-se o seguinte exemplo. Uma empresa tem um contrato que lhe concede o direito de exploração, por um ano, de uma mina onde existe um determinado mineral. O contrato de exploração concede o direito de retirar dessa mina um máximo de 500 toneladas do mineral, e pode ser prolongado por um ano mediante um pagamento adicional de 12 000 euros, sendo que o prolongamento do prazo não é acompanhado por um aumento da quantidade de mineral que é permitido extrair. A decisão sobre o prolongamento ou não do prazo deve ser tomada imediatamente e, em caso de prolongamento, o montante de 12 000 euros deve ser pago imediatamente. A empresa não tem capacidade de extrair o mineral, devendo contratar a extracção e entrega deste a uma outra empresa, que fará a extracção de 500 toneladas no prazo de um ano com um custo de 450 000 euros no primeiro ano, ou 486 000 euros no segundo (valores a pagar no início do ano em que é feita a extracção). O mineral é actualmente transaccionado por 1 000 euros/tonelada, e em cada um dos próximos dois anos existe uma probabilidade de 50% de o seu preço aumentar 20%, e uma probabilidade de 50% de diminuir 10%. Vai assumir-se que o mineral apenas pode ser vendido no final do ano em que é extraído, que o custo dos contratos de extracção não está sujeito a incerteza, que a taxa de juro sem risco é de 8%, e que não existem impostos.

Quando se considera o preço de mercadorias, como é o caso deste mineral, existem por vezes vantagens ou custos decorrentes da detenção física da mercadoria. O fluxo de vantagens ou custos que provêm da detenção física da mercadoria, mas não da detenção de um contrato para entrega futura dessa mercadoria, é normalmente denominado *convenience yield* ([36]). Vai assumir-se que, no caso do mineral em questão, este é nulo.

No exemplo em apreço, a empresa tem a possibilidade de desistir da extracção, de proceder imediatamente à extracção do mineral, ou de prolongar o prazo do contrato e ficar

com a possibilidade de extrair agora ou tomar uma decisão sobre a extracção dentro de um ano. Considerando que a unidade de tempo para as decisões é um ano, o prolongamento do contrato, acompanhado de extracção imediata do mineral, não faz sentido, dado que gera as mesmas receitas e tem custos superiores à extracção imediata sem prolongamento do contrato. Assim, o prolongamento do contrato só faz sentido se for acompanhado por um adiamento da decisão de extracção. A árvore de decisão correspondente a este exemplo, e os *cash flows* correspondentes às diferentes situações, são apresentados na figura 3.3.

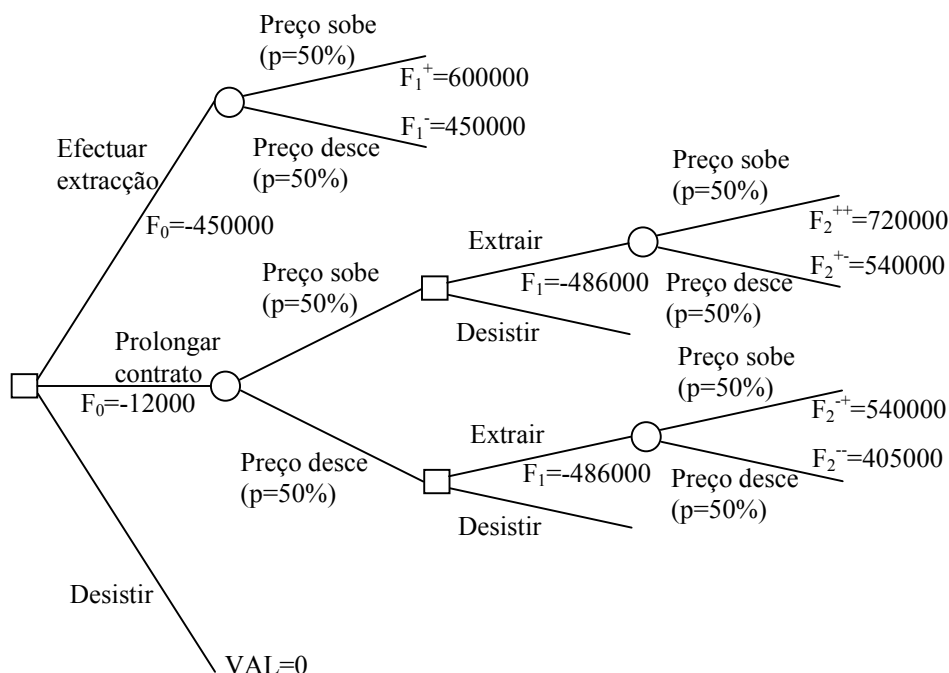


Figura 3.3: Árvore de decisão para cálculo do VAL no exemplo da mina descrito no texto. Os valores monetários encontram-se em euros.

A alternativa de desistir não gera nenhum *cash flow*, logo o VAL correspondente é nulo. Para avaliar as restantes alternativas, é necessário definir qual o custo do capital a utilizar. Uma vez que os *cash flows* incertos do projecto dependem de uma mercadoria cuja taxa de rentabilidade esperada no mercado é de $r = 50\% \cdot 20\% + 50\% \cdot (-10\%) = 5\%$, este parece ser o custo do capital correcto para as alternativas de extrair imediatamente e prolongar o contrato. No caso de extracção imediata, o risco dos *cash flows* é claramente idêntico ao risco de investimento no mineral, logo este custo do capital parece razoável. No caso do prolongamento do contrato, a situação é menos clara. Uma vez que existe a opção de desistir no caso de a evolução dos preços tornar a extracção não rentável, o risco parece ser diferente do risco de mercado do mineral, mas não é claro qual o custo do capital a utilizar. Na ausência de melhor indicação, utiliza-se também um custo do capital igual à taxa de

rentabilidade esperada do mineral⁴⁹.

Considere-se a alternativa de iniciar imediatamente a extracção. O *cash flow* esperado no ano 1 é $F_1 = 50\% \cdot F_1^+ + 50\% \cdot F_1^- = 525\,000$ euros. O VAL é $VAL^{iniciar} = F_0 + \frac{F_1}{1.05} = 50\,000$ euros e, assim, a alternativa de iniciar imediatamente a extracção é preferível à alternativa de desistir.

Considere-se agora a alternativa de prolongar o contrato. Em caso de subida do preço no primeiro ano, o *cash flow* esperado no ano 2 é $F_2^+ = 50\% \cdot F_2^{++} + 50\% \cdot F_2^{+-} = 630\,000$ euros. Assim, se se optar por iniciar a extracção no ano 1, o valor actual do projecto nesse ano é $VA_1^{+,extrair} = -486\,000 + \frac{630\,000}{1.05} = 114\,000$ euros. Uma vez que, no ano 1, o valor actual da desistência do projecto é $VA_1^{+,desistir} = 0$ euros, a decisão a tomar se o preço subir é a de iniciar a extracção. Em caso de descida do preço no primeiro ano, o *cash flow* esperado no ano 2 é $F_2^- = 50\% \cdot F_2^{-+} + 50\% \cdot F_2^{--} = 472\,500$ euros. Assim, se se optar por iniciar a extracção no ano 1, o valor actual do projecto nesse ano é $VA_1^{-,extrair} = -486\,000 + \frac{472\,500}{1.05} = -36\,000$ euros. Uma vez que o valor actual, no ano 1, da desistência do projecto é $VA_1^{-,desistir} = 0$ euros, a decisão a tomar se o preço descer é a de desistir. O valor actual esperado do projecto no ano 1 é, assim, $VA_1 = 50\% \cdot VA_1^{+,extrair} + 50\% \cdot VA_1^{-,desistir} = 57\,000$ euros. O valor actual líquido do projecto no caso de prolongamento do prazo é, pois, $VAL^{prolongar} = F_0 + \frac{VA_1}{1.05} = 42\,286$ euros. Este VAL é inferior ao obtido para a opção de iniciar imediatamente a extracção, pelo que a melhor decisão parece ser a de iniciar imediatamente a extracção. No entanto, não existem certezas a esse respeito, uma vez que não existe a certeza de a alternativa de prolongar o contrato ter sido avaliada utilizando o custo do capital correcto (aliás, nem sequer é certo que exista um "custo do capital correcto" para esta alternativa). Na subsecção 3.4.3 mostrar-se-á que esta utilização das árvores de decisão forneceu um resultado incorrecto, e que a melhor opção é a de prolongar o contrato.

Note-se que, na avaliação deste exemplo, se optou por ir recuando e actualizando através da árvore os *cash flows* e valores actuais esperados em anos futuros. Uma outra alternativa para a avaliação, que é equivalente mas de utilização possivelmente mais simples, consiste em calcular um VAL para cada folha e recuar os VAL através da árvore, sem efectuar mais actualizações.

Não é difícil imaginar que as árvores de decisão podem atingir dimensões muito grandes,

⁴⁹É particularmente duvidoso que a taxa de rentabilidade esperada do mineral seja a melhor opção para actualizar o *cash flow* do ano 1, uma vez que este *cash flow* depende unicamente da decisão a tomar. Assim, poderia argumentar-se que este *cash flow* deve ser actualizado à taxa de juro sem risco. No entanto, também é legítimo argumentar que a decisão a tomar depende da evolução do preço do mineral, e que, por isso, se deve considerar que o risco do *cash flow* é mais próximo do risco do preço do mineral. Em [178] é apresentado um exemplo em que se coloca uma questão semelhante e, quando é utilizada a avaliação clássica de árvores de decisão, o risco do *cash flow* é considerado idêntico ao risco dos restantes, pelo que se optou aqui pelo mesmo pressuposto.

quando o número de decisões e acontecimentos incertos é grande – o exemplo apresentado em [93], capítulo 3, em que um problema de reorganização estratégica de complexidade limitada conduz a uma árvore de decisão com mais que 200 folhas, é um bom exemplo do rápido crescimento da dimensão destas. Para permitir uma representação mais compacta de situações que conduzem a árvores de decisão muito grandes, alguns autores propuseram a utilização de diagramas de influência (por exemplo [158]; em [108] é discutida de forma breve a aplicação destes na avaliação de projectos), que são matematicamente equivalentes a árvores de decisão. No entanto, a avaliação de diagramas de influência é mais complexa que a de árvores de decisão ([160]), e este instrumento ainda é muito pouco utilizado em avaliação de projectos, pelo que não vai ser considerado no presente trabalho.

3.3.2 Árvores de decisão estocásticas

Hespos e Strassman [95] propõem a utilização de árvores de decisão estocásticas, nas quais todas as quantidades e factores, incluindo os acontecimentos aleatórios, podem ser representados por distribuições de probabilidade contínuas. Assim, aos nodos de incerteza deixa de corresponder um número discreto de alternativas para passar a corresponder um contínuo de alternativas. Aos nodos de incerteza passa a seguir-se apenas um ramo, que representa, não um determinado resultado, como nas árvores de decisão tradicionais, mas sim toda a distribuição de probabilidade. Note-se que, desta forma, a representação das árvores torna-se mais compacta, sendo o ritmo de crescimento da complexidade destas inferior ao das árvores de decisão tradicionais.

A avaliação das árvores de decisão estocásticas não pode ser feita de forma idêntica à das árvores de decisão tradicionais. Por um lado, cada folha corresponde a uma distribuição de valores, e não só a um valor; por outro, em cada nodo de decisão a escolha é feita entre distribuições de probabilidade. Hespos e Strassman recomendam que se analisem todas as possíveis combinações de decisões, obtendo, para cada uma, o VAL do projecto na forma de uma distribuição de probabilidade. Posteriormente "... a distribuição de probabilidade dos resultados de cada combinação particular de decisões pode ser analisado utilizando os conceitos de utilidade e risco" ([95]).

No entanto, se a consideração de todas as possíveis combinações de decisões resolve o problema conceptual da avaliação dos nodos de decisão, não resolve o problema da obtenção das diferentes distribuições de probabilidade do VAL. Para a obtenção destas distribuições, Hespos e Strassman prescrevem a utilização de simulação de Monte Carlo. Mais concretamente, propõem que, para cada amostragem efectuada, se considerem todas as combinações de decisões – "... em cada iteração ou caminho através da árvore de decisão, quando o computador encontra um ponto de decisão binário é instruído para se 'dividir em dois' e efectuar

os cálculos apropriados para ambos os ramos da árvore que emanam do nodo de decisão (a mesma lógica se aplica a um nodo do qual emanem três ou mais ramos)”.

Esta forma de aplicação da simulação de Monte Carlo coloca um problema adicional, que é o da necessidade de guardar muitas distribuições de probabilidade quando o número de combinações de decisões é muito grande. Como reconhecem Hespos e Strassman, num problema de grande dimensão, ”... a enumeração completa de todos os caminhos pode não ser computacionalmente prática ...” e ”... a comparação das distribuições de probabilidade associadas a todos os caminhos possíveis pode ser demasiado laboriosa e ter um custo demasiado elevado”. Para minorar este problema, os autores apresentam duas simplificações possíveis. A primeira consiste em utilizar uma versão modificada do procedimento de avaliação, na qual um ramo seja eliminado com base no conceito de dominância (isto é, um ramo seria eliminado se apresentasse um valor esperado menor e uma variância maior que um outro ramo alternativo). Uma vez que a variância do valor actual representa o risco total, e o único risco que deve interessar os investidores é o risco de mercado, esta simplificação levanta algumas reservas. A segunda simplificação consiste em definir regras de decisão antes do início da simulação, por forma a que ”... se, numa qualquer iteração, o valor de um nodo de incerteza exceder um determinado critério, a decisão resultante não seja considerada” ([95]). Esta simplificação considera, assim, que, quando são atingidos alguns valores, algumas decisões não são com certeza tomadas. Tais regras são *ad hoc*, e a sua utilização também levanta reservas.

As árvores de decisão estocásticas apresentam, assim, os problemas da simulação de Monte Carlo, e mais alguns resultantes do aumento de complexidade criado pelo facto de ser necessário considerar as diferentes combinações de decisões. No entanto, podem constituir instrumentos importantes para a análise de alguns tipos de projectos.

3.3.3 A utilização de múltiplos atributos em árvores de decisão

Quando existem vários atributos de interesse para a decisão final, é necessário adaptar o processo de avaliação das árvores de decisão. As abordagens encontradas na literatura para a utilização de múltiplos atributos em árvores de decisão para avaliação de projectos são geralmente baseadas na teoria da utilidade.

Hertz e Thomas ([94], capítulo 3) propõem uma abordagem que se baseia numa ideia apresentada por Raiffa ([143], capítulo 9). Essa abordagem requer que as alternativas correspondentes às diferentes folhas sejam reduzidas a alternativas equivalentes que diferem apenas nos níveis de um atributo. Os autores exemplificam com uma situação em que os atributos relevantes são o VAL, o tempo e o desempenho do projecto. Através de um conjunto de questões colocadas ao agente de decisão, são obtidas para as diferentes folhas tuplos de valores dos atributos que apenas diferem no valor do VAL e que são, para o agente de

decisão, equivalentes aos valores dos atributos inicialmente determinados para as folhas. As técnicas usuais de eliciação de utilidades são então usadas para o atributo cujo valor varia para as diferentes folhas, considerando os níveis que foram fixados para os restantes atributos. Assim, faz-se corresponder a cada folha uma utilidade, e procede-se à avaliação normal da árvore usando estas utilidades. Hertz e Thomas apontam alguns problemas que podem ocorrer com esta abordagem, referindo que a combinação dos procedimentos de obtenção de alternativas equivalentes com a presença de incerteza pode fazer aumentar rapidamente a complexidade da análise, e que se colocam dúvidas relativamente à capacidade de os agentes de decisão determinarem estas alternativas equivalentes.

Hertz e Thomas apresentam como abordagem alternativa o uso de modelos clássicos de MAUT para determinar a utilidade correspondente a cada folha. Hax e Wiig ([87], *vide* [179]) descrevem uma aplicação deste tipo. Estes autores aplicam árvores de decisão a um problema de licitação de terrenos com depósitos valiosos de minerais. Os atributos considerados pelos autores são o VAL e a quantidade extraída. Contrariamente ao que é usual, são definidas *a priori* as estratégias que interessa analisar, não sendo, assim, necessário definir a estratégia óptima através do percurso da árvore. As estratégias consideradas relevantes são 26, apenas um pequeno subconjunto de todas as estratégias que podiam ser definidas através da árvore de decisão. Estas 26 estratégias são avaliadas individualmente, sendo utilizado um modelo MAUT multiplicativo para determinar a utilidade de cada estratégia e escolher, assim, a estratégia óptima.

Lootsma [120], sem considerar directamente a problemática da avaliação de projectos, propõe a utilização de um modelo AHP multiplicativo ou de um modelo MAUT aditivo em árvores de decisão multicritério. Lootsma discute a avaliação dos nodos de incerteza, concluindo que o valor esperado calculado através da média aritmética ponderada pode ser utilizado no caso do modelo MAUT aditivo, mas que a média geométrica ponderada deve ser usada com o modelo AHP multiplicativo. O autor refere ainda a dificuldade de os agentes de decisão estimarem probabilidades subjectivas, e sugere a utilização de um questionário baseado numa escala semântica semelhante à do AHP para determinar a percepção do agente de decisão sobre as probabilidades dos acontecimentos alternativos. A partir das avaliações obtidas nessa escala semântica, é possível obter coeficientes de verosimilhança de uma forma idêntica à utilizada para obter os coeficientes de ponderação ou as prioridades locais das alternativas no AHP. Esses coeficientes de verosimilhança podem ser usados como probabilidades. Este procedimento permite unificar a eliciação da atractividade das diferentes alternativas com a eliciação das probabilidades subjectivas.

3.4 Opções reais

Na secção 3.1 foram apresentados três problemas muitas vezes apontados à utilização tradicional das medidas financeiras: a não consideração da possibilidade de os gestores desenvolverem acções correctivas ou aproveitarem as oportunidades que possam surgir na decorrência do projecto, o pressuposto de que a decisão de empreender o projecto do tipo "agora ou nunca", e a inexistência de indicações sobre qual o custo do capital a utilizar quando existem cursos de acção que alteram o risco do projecto. Argumentou-se então que os dois primeiros problemas resultam mais de uma aplicação incorrecta do que de deficiências estruturais destas medidas, e que essa aplicação incorrecta pode ser corrigida se forem usados instrumentos auxiliares, como simulação de Monte Carlo e, especialmente, árvores de decisão. No entanto, o problema relativo ao custo do capital não é passível de correcção tão simples.

Podem argumentar-se que o problema de saber qual o custo do capital correcto na presença de opções que alteram o risco é um problema menor (especialmente se comparado com os outros dois problemas indicados), e que, na maioria das situações, o uso de um custo do capital igual ao utilizado sem considerar as opções, ou mesmo uma correcção *ad hoc* ao custo do capital, conduzem a resultados aceitáveis. Mas, talvez mais importante do que a consistência teórica dos resultados, é a percepção generalizada de que existem alguns problemas relativos à aplicação tradicional das medidas financeiras.

Com efeito, a partir da década de 80 existe uma opinião generalizada nos meios académicos, e mesmo em meios empresariais, de que a aplicação tradicional das medidas financeiras não consegue tomar correctamente em consideração a flexibilidade operacional e as questões estratégicas ligadas aos projectos de investimento. Tal percepção reflecte, eventualmente, uma utilização incorrecta das medidas financeiras, ou uma dificuldade de implantação de instrumentos auxiliares como as árvores de decisão. No entanto, essa percepção contribuiu para que se estabelecesse um fosso entre a avaliação de projectos e o planeamento estratégico, com alguns autores a recomendarem o abandono das medidas financeiras. Hayes e Garvin [88], por exemplo, culpavam a utilização de medidas baseadas na actualização dos *cash flows* pelo desinvestimento verificado nos Estados Unidos da América no início da década de 80: "A moderna teoria financeira argumenta que ... o desinvestimento pode ser um curso de acção lógico e apropriado. Hoje, as consequências futuras de uma estratégia de desinvestimento, tal como são vistas pelo telescópio invertido da actualização, podem parecer de pouca importância; mas quando o amanhã chegar, aqueles que tiverem que lidar com ele vão de certeza ter um sentimento diferente". De acordo com os mesmos autores: "Para além de tudo, o investimento representa um acto de fé, uma crença de que o futuro será tão promissor como o presente, juntamente com o empenhamento em fazer com que o futuro aconteça".

Para outros autores a tomada de decisões de investimento baseada na "fé" dos gestores, no crescimento ou na quota de mercado em vez de medidas quantitativas do valor financeiro continuou a parecer inaceitável. Alberts e McTaggart [2], por exemplo, argumentam que as decisões baseadas em critérios de crescimento ou de quota de mercado conduzem, por vezes, à destruição de valor da empresa, e recomendam que as decisões de investimento sejam guiadas pelo valor financeiro. Myers [134] sugeriu que, para eliminar o fosso entre a avaliação de projectos, baseada na teoria financeira, e o planeamento estratégico, baseado em critérios não directamente ligados a esta, fossem utilizados modelos baseados na teoria das opções. Myers sugeriu que esses modelos fossem aplicados às "opções reais" detidas pelas firmas.

A utilização, na avaliação de projectos, de modelos baseados na teoria das opções, é muitas vezes designada, de forma genérica, por Análise de Opções Reais⁵⁰ (ROA⁵¹). A ROA conseguiu uma grande aceitação no meio académico, sendo já uma referência fundamental para as decisões de investimento de empresas de grandes dimensões. Assim, pode considerar-se que, independentemente de os problemas que veio resolver serem ou não importantes, a ROA é importante porque conseguiu colocar de novo modelos baseados na teoria financeira como base da avaliação dos projectos de investimento, particularmente na avaliação dos projectos considerados "estratégicos", para os quais existia a percepção de que a teoria financeira era inadequada. A ROA foca-se explicitamente nas opções inerentes a cada projecto, opções que, para a avaliação tradicional, constituíam dificuldades acrescidas e que, dessa forma, podiam ser esquecidas mais facilmente. Assim, a ROA conseguiu também focar a atenção dos gestores nas medidas correctivas que podem tomar, ou nas oportunidades que podem aproveitar.

É comum fazer uma taxonomia das opções reais tendo em conta os diferentes tipos de flexibilidade e possibilidades estratégicas que os projectos podem apresentar (por exemplo adiamento, abandono, alteração da escala, etc.). Uma vez que uma tal taxonomia não é relevante para o presente trabalho, remetem-se os leitores interessados para [48], capítulo 1, ou [177], capítulo 1. Uma grande quantidade de aplicações de ROA é descrita na literatura: Kemna [109] descreve as conclusões obtidas através de várias aplicações de ROA por uma grande empresa petrolífera; Trigeorgis ([177], capítulo 11) descreve várias aplicações, e fornece ainda as referências para muitas outras aplicações; Miller e Park [132] também fornecem uma lista de referências para aplicações.

⁵⁰Esta definição de Análise de Opções Reais é baseada numa definição de Amram e Kulatilaka ([5], prefácio), segundo a qual: "A Abordagem de Opções Reais é a extensão da teoria da avaliação das opções para a gestão de activos reais.". Muitos autores utilizam Análise de Opções Reais em vez de Abordagem de Opções Reais (por exemplo Copeland e Antikarov [48] e Miller e Park [132]). Neste trabalho irá utilizar-se Análise de Opções Reais como designação genérica para a utilização de modelos da teoria das opções na avaliação de projectos, usando-se a expressão *abordagem* para referir os princípios subjacentes à avaliação de modelos específicos.

⁵¹Do inglês *Real Options Analysis*.

3.4.1 Conceitos básicos sobre opções

Uma *opção* pode ser definida como o direito, sem a correspondente obrigação, de empreender uma determinada acção no futuro ([5], capítulo 1). Uma *opção financeira* é um instrumento financeiro que permite comprar ou vender um activo transaccionado em mercado, designado por *activo subjacente*, em condições pré-definidas. Essas condições incluem geralmente um preço pré-especificado e uma data, ou período de tempo, pré-determinados para exercício desse direito. Se a opção permite comprar o activo subjacente, então é designada *opção de compra* ou *call*; se permite vender o activo subjacente é designada por *opção de venda* ou *put*. O preço pré-especificado de compra ou venda do activo subjacente é designado por *preço de exercício*, e a data ou o final do período de tempo em que a opção pode ser exercida é a *data de vencimento*. Se a opção pode ser exercida antes da data de vencimento (isto é, se pode ser exercida durante um período de tempo), então é designada por opção *Americana*; se apenas puder ser exercida na data de vencimento é designada por opção *Europeia*. Existem ainda outros tipos mais complexos de opções, como opções que dependem do valor máximo ou mínimo atingido por um activo num período de tempo, ou opções que dependem de o valor do activo subjacente se manter ou não dentro de uma gama pré-definida; no entanto, as opções reais que ocorrem em projectos de investimento têm, em geral, características mais semelhantes às das opções Europeias ou, especialmente, Americanas. Se o preço actual do activo subjacente for tal que o exercício da opção seria compensador se esta vencesse imediatamente, a opção diz-se *in-the-money*; se tal não ocorrer a opção diz-se *out-of-the-money*.

Geralmente os projectos de investimento têm associada a possibilidade de os gestores promoverem acções que permitam, nomeadamente, aproveitar as oportunidades oferecidas por desenvolvimentos favoráveis e minorar ou corrigir os problemas em caso de desenvolvimentos desfavoráveis. Essas possibilidades de empreender acções que optimizem o desempenho do projecto durante o período de vida deste apresentam semelhanças com os direitos oferecidos pelas opções financeiras, e são consideradas *opções reais*. Copeland e Antikarov ([48], capítulo 1) definem uma opção real como "... o direito de empreender uma determinada acção ... a um custo pré-determinado por um período de tempo pré-determinado...". No entanto, esta definição pode ser algo redutora. Como é notado por Miller e Park [132], o preço de exercício e a data de vencimento podem não ser conhecidos antecipadamente; nestes casos deixa de se poder considerar que o custo e o período de tempo para exercício da opção são pré-determinados. Utilizando como base a definição de opção apresentada no início da presente subsecção, pode considerar-se que uma opção real é o direito, sem a correspondente obrigação, de empreender, no futuro, uma determinada acção relativa a um ou mais activos reais.

3.4.2 VAL "estático" e VAL "estratégico" ou "expandido"

A utilização de opções reais consiste geralmente no cálculo de um VAL, que é o valor financeiro do projecto tendo em conta o exercício óptimo das opções que lhe estão subjacentes. Este VAL é, por vezes, designado por VAL "estratégico" (por exemplo [90], [138]) ou VAL "expandido" (por exemplo [178]), definindo-o como a soma do VAL "estático" (o VAL na ausência de opções) com o valor das opções da gestão activa.

Este conceito de VAL "estratégico" ou "expandido" pode considerar-se mais uma medida de *marketing* para a ROA do que um conceito novo; é o Valor que o projecto tem hoje (Actual) depois de considerados os custos necessários para o empreender (Líquido), calculado para a estratégia óptima de implementação do projecto com utilização de uma abordagem que permite que a sua determinação seja feita de forma teoricamente correcta em situações em que outras abordagens falham (ou seja, é o VAL da estratégia óptima, mas é simplesmente um VAL, não sendo claro o que o torna "estratégico" ou "expandido").

Este VAL "estratégico" ou "expandido" aparece como contraponto a um VAL "estático", que é geralmente apresentado como o VAL de referência se não fosse utilizada a ROA. O VAL "estático" é o VAL de uma possível estratégia de implementação do projecto, a estratégia segundo a qual os gestores aceitam o projecto e o deixam prosseguir sem ter mais intervenção nele. Esta estratégia pode ser importante se constituir uma referência para o activo subjacente (como se verá em 3.4.5.1). No entanto, não existe um motivo claro para que esta seja a referência para o cálculo do VAL sem utilizar ROA, ou para que se considere que, sem a ROA, esta seria a única estratégia considerada pelos gestores. E também não é claro como é que se define esta estratégia para as situações em que tem que haver forçosamente uma acção/decisão dos gestores. Uma tal situação é a exploração de um empreendimento concessionado por um período limitado de tempo, findo o qual se pode pagar um determinado montante para renovar a concessão ou abandonar o empreendimento vendendo o equipamento existente por um valor residual. Numa tal situação, não é claro se o VAL "estático" é o VAL de renovar a concessão ou o VAL de a abandonar. Estas estratégias são apenas duas estratégias possíveis para a implementação do projecto, às quais não faz sentido dar um relevo especial relativamente às restantes.

Assim, apesar de se poder fazer uma distinção entre VAL correcto e VAL errado, e entre estratégia óptima de implementação e estratégias não óptimas, não se percebe porque motivo o VAL correcto da estratégia óptima deva ser considerado como um VAL "expandido" ou "estratégico". Por esse motivo, e também porque esta distinção entre VAL "estratégico" ou "expandido" e VAL "estático" não será importante no presente trabalho, considerar-se-á apenas que o VAL será o valor financeiro correcto do projecto para a estratégia considerada (que, quando nada mais se disser em contrário, será a estratégia óptima).

3.4.3 A utilização da Análise de Opções Reais em árvores de decisão

Brealey e Myers ([35], capítulo 20), consideram que não se deve calcular um custo de oportunidade do capital ajustado ao risco para uma opção, uma vez que o risco da opção se altera sempre que o preço do activo subjacente se altera, e varia ao longo do tempo mesmo que o preço do activo subjacente se mantenha constante (o risco depende da relação entre este preço e o preço de exercício, e ainda do tempo até à data de vencimento). A inexistência de um custo do capital ajustado ao risco é particularmente importante para as opções reais.

Como foi referido, o principal problema da utilização tradicional das medidas financeiras na presença de opções é a determinação do custo do capital correcto e, de acordo com Brealey e Myers, esse custo do capital correcto não existe. Assim, para avaliar opções ou activos que contenham opções, são necessárias abordagens que não dependam de um custo do capital ajustado ao risco. Duas abordagens utilizadas em teoria das opções são a *abordagem da carteira de réplica* e a *abordagem das probabilidades neutrais face ao risco* (ver por exemplo [35], capítulo 20 ou [48], capítulo 4).

3.4.3.1 A abordagem da carteira de réplica

A abordagem da carteira de réplica baseia-se na construção de uma carteira, estática ou alterada dinamicamente, que replique, em todas as situações, o valor futuro da opção ou do activo que contém opções. Pela *lei do preço único*, o preço da opção ou do activo com opções deve ser igual ao preço dessa carteira (se assim não fosse, existiriam possibilidades de arbitragem). Se a opção ou o activo com opções não forem transaccionados em mercado, o preço da carteira será o preço que o activo ou a opção teriam se fossem transaccionados. Assim, no caso de projectos de investimento, o valor calculado é interpretado como o valor de mercado do projecto, ou a contribuição do projecto para o valor de mercado da empresa. Este valor corresponderá, assim, ao valor actual do projecto, o que significa que o valor obtido depois de subtrair o investimento inicial é, na verdade, o VAL do projecto.

Como exemplo, vai aplicar-se a abordagem à determinação do VAL do projecto de exploração de uma mina da subsecção 3.3.1, inicialmente avaliado através da utilização clássica de árvores de decisão. Considerou-se que o preço do mineral a extrair podia, em cada ano, apresentar dois valores possíveis. Numa tal situação é apropriado utilizar o modelo binomial, proposto por Cox, Ross e Rubinstein [51], cuja lógica de avaliação, através da abordagem da carteira de réplica, se passa a utilizar.

Comece por analisar-se a alternativa de iniciar imediatamente a exploração. Se essa alternativa for seguida então é necessário um investimento de 450 000 euros no momento 0. Se o preço do mineral subir, este investimento proporcionará um *cash flow* de 600 000

euros no ano 1 e, se o preço descer, proporcionará um *cash flow* de 450 000 euros nesse ano. Vai tentar replicar-se estes *cash flows* utilizando uma combinação do investimento de um montante B à taxa de juro sem risco (8%) com a compra de uma quantidade Q de mineral, adquirida no mercado no momento 0. Relembre-se que o preço do mineral é de 1 000 euros/tonelada, passará para 1 200 euros/tonelada em caso de subida, e para 900 euros/tonelada em caso de descida. Assim, para determinar os valores de Q e B deve ser resolvido o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 1.08 \cdot B + 1\,200 \cdot Q = 600\,000 \text{ (no caso de subida)} \\ 1.08 \cdot B + 900 \cdot Q = 450\,000 \text{ (no caso de descida)} \end{cases} \quad (3.2)$$

A solução é $B = 0$ e $Q = 500$. Esta solução era, à partida, evidente, uma vez que a alternativa de iniciar imediatamente a exploração corresponde a deter, no ano 1, 500 toneladas do mineral. Logo, para replicar esta alternativa devem ser adquiridas, no momento 0, 500 toneladas do mineral. O investimento de 0 euros à taxa de juro sem risco, e a compra, no momento 0, de 500 toneladas do mineral, têm um custo de $0 + 500 \cdot 1\,000 = 500\,000$ euros, pelo que $VA^{iniciar} = 500\,000$. Logo, $VAL^{iniciar} = -450\,000 + 500\,000 = 50\,000$ euros. O VAL assim obtido é idêntico ao obtido em 3.3.1, o que, à partida, era de esperar, pois esta alternativa não engloba opções de gestão do projecto. Assim, não existem problemas na determinação do custo do capital na utilização tradicional do VAL e, quando duas abordagens correctas são utilizadas para avaliar o mesmo projecto, ambas devem fornecer os mesmos resultados.

Analise-se agora a alternativa de prolongar o contrato. Esta alternativa exige um investimento inicial de 12 000 euros e proporciona, no ano 1, a opção entre prosseguir a exploração e desistir dela. A exploração requer um investimento de 486 000 euros, e proporciona *cash flows* de 720 000 ou 540 000 euros se tiver ocorrido uma subida do preço do mineral no primeiro ano, ou *cash flows* de 540 000 ou 405 000 euros se tiver ocorrido uma descida do preço no primeiro ano. Comece por analisar-se os *cash flows* decorrentes de uma subida do preço no primeiro ano; se o preço tiver subido no primeiro ano então será de 1 200 euros/tonelada no final deste, podendo, no segundo ano, subir para 1 440 euros/tonelada, ou descer para 1 080 euros/tonelada. A carteira que é necessário adquirir no ano 1 para replicar os *cash flows* do ano 2 é determinada pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1.08 \cdot B + 1\,440 \cdot Q = 720\,000 \text{ (no caso de subida no ano 2)} \\ 1.08 \cdot B + 1\,080 \cdot Q = 540\,000 \text{ (no caso de descida no ano 2)} \end{cases} \quad (3.3)$$

A solução é novamente $B = 0$ e $Q = 500$. O preço desta carteira é de $0 + 500 \cdot 1\,200 = 600\,000$ euros, pelo que, se o preço do mineral tiver subido no primeiro ano, o valor actual no ano 1 da opção de extracção é $VA_1^{+,extrair} = -486\,000 + 600\,000 = 114\,000$ euros. A

desistência do projecto no ano 1 não proporciona quaisquer *cash flows*, logo $VA_1^{+,desistir} = 0$ euros. Portanto, a decisão a tomar se o preço subir no primeiro ano é a de iniciar a extracção.

Em caso de descida do preço no primeiro ano, então ele será de 900 euros/tonelada no final desse ano, podendo, no segundo ano, subir para 1 080 euros/tonelada, ou descer para 810 euros/tonelada. O sistema a resolver é

$$\begin{cases} 1.08 \cdot B + 1080 \cdot Q = 540\,000 & (\text{no caso de subida no ano 2}) \\ 1.08 \cdot B + 810 \cdot Q = 405\,000 & (\text{no caso de descida no ano 2}) \end{cases} \quad (3.4)$$

Este sistema conduz novamente à solução $B = 0$ e $Q = 500$. O preço da carteira correspondente é de $0 + 500 \cdot 900 = 450\,000$ euros, pelo que, se o preço do mineral tiver descido no primeiro ano, o valor actual da opção de extracção no ano 1 é $VA_1^{-,extrair} = -486\,000 + 450\,000 = -36\,000$ euros. A desistência do projecto no ano 1 não proporciona quaisquer *cash flows*, logo $VA_1^{-,desistir} = 0$ euros. Portanto, a decisão a tomar se o preço descer no primeiro ano é a de desistir do projecto.

A análise efectuada para o segundo ano indica que, se o preço do mineral subir no primeiro ano, os *cash flows* subsequentes se podem replicar a partir de um investimento de 600 000 euros no ano 1. Desses 600 000 euros, uma parcela de 486 000 corresponde a uma entrada de dinheiro a efectuar no ano 1, pelo que se pretende que o investimento no momento 0 forneça os restantes $600\,000 - 486\,000 = 114\,000$ euros ($= VA_1^{+,extrair}$). No caso de descida do preço no primeiro ano, os *cash flows* dos anos 1 e 2 são nulos (assumindo, é claro, que se segue a estratégia óptima de desistir da exploração), pelo que estes *cash flows* podem ser replicados se o investimento no ano 0 proporcionar 0 euros no ano 1. Resumindo, a réplica dos *cash flows* dos anos 1 e 2 exige que o investimento a efectuar no ano 0 proporcione 114 000 euros no caso de subida do preço do mineral, e 0 euros no caso de descida desse preço. A carteira a adquirir no ano 0 é, assim, calculada através da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1.08 \cdot B + 1\,200 \cdot Q = 114\,000 & (\text{no caso de subida}) \\ 1.08 \cdot B + 900 \cdot Q = 0 & (\text{no caso de descida}) \end{cases} \quad (3.5)$$

A solução deste sistema é $B = -316\,667$ e $Q = 380$, o que significa que, para replicar os *cash flows* dos anos 1 e 2, se deve adquirir, no momento 0, 380 toneladas do mineral, ao mesmo tempo que se contrai uma dívida de 316 667 euros. Como o preço actual do mineral é de 1 000 euros/tonelada, esta carteira apresenta um custo inicial de $-316\,667 + 380 \cdot 1\,000 = 63\,333$ euros. Isto significa que o valor actual da alternativa de prolongar o contrato é $VA = 63\,333$ euros e, como o custo deste prolongamento é de 12 000 euros, $VAL^{prolongar} = -12\,000 + 63\,333 = 51\,333$ euros. Este valor é superior ao valor de 42 286 euros obtido em 3.3.1. O VAL então calculado era baseado no pressuposto

de que o risco sistemático da alternativa de prolongar o contrato, com a opção de desistir no final do primeiro ano, era idêntico ao mesmo risco sem essa opção. Como foi indicado, esse pressuposto não é realista, pelo que era de prever que o VAL então obtido estivesse incorrecto. O VAL agora obtido é o valor que seria necessário investir para replicar os *cash flows* dessa alternativa e, na ausência de oportunidades de arbitragem, é o valor que seria pago pelo projecto com prolongamento do contrato se este fosse transaccionado em mercado. Note-se que, como o VAL obtido para a alternativa de prolongar o contrato é superior ao VAL de iniciar imediatamente a exploração, a decisão inicial óptima é agora a de prolongar o contrato, enquanto a análise apresentada em 3.3.1 tinha indicado uma decisão óptima de iniciar imediatamente a exploração.

É interessante notar que as probabilidades originais de subida e descida do preço do mineral não foram utilizadas em nenhum momento para este cálculo. Essas probabilidades têm implícita a atitude dos investidores face ao risco de investimento no mineral, e essa atitude não foi, em nenhum momento, incorporada no valor do projecto. Isto é assim porque a construção de uma carteira que replica os valores futuros do projecto permite que a avaliação deste seja feita sem recurso a considerações relativas às atitudes dos investidores face ao risco, ou relativas ao modelo de equilíbrio do mercado de capitais. Este facto está na base da abordagem das probabilidades neutrais face ao risco.

3.4.3.2 A abordagem das probabilidades neutrais face ao risco

A abordagem das probabilidades neutrais face ao risco baseia-se no princípio de que, sendo possível cobrir o risco de um activo utilizando o mercado de capitais, então o preço desse activo (como função dos preços dos activos que permitem eliminar o seu risco) será o mesmo num mundo em que os investidores sejam neutrais face ao risco, ou num mundo em que as atitudes dos investidores face ao risco sejam diferentes. Esta abordagem foi introduzida por Cox, Ross e Rubinstein [51] para o cálculo de opções definidas através do modelo binomial.

Considere-se um activo subjacente que actualmente tem um preço V , e cujo preço dentro de um período pode assumir os valores $V \cdot u$ ou $V \cdot d$ ($u > d$). Considere-se uma opção sobre esse activo que terá um valor C^+ se o activo assumir o valor $V \cdot u$, e terá um valor C^- se o activo assumir o valor $V \cdot d$. Utilizando a opção e o activo subjacente, é possível construir uma carteira sem risco. Assuma-se que se detém uma unidade do activo subjacente e se vendem m unidades da opção. Esta carteira estará isenta de risco se proporcionar os mesmos resultados independentemente do valor do activo dentro de um período, ou seja, se

$$V \cdot u - m \cdot C^+ = V \cdot d - m \cdot C^- \quad (3.6)$$

O número de unidades da opção que é necessário vender por forma a que a carteira seja isenta de risco é de

$$m = \frac{V \cdot (u - d)}{C^+ - C^-} \quad (3.7)$$

Uma vez que a carteira é isenta de risco, o preço do activo subjacente e da opção no mercado de capitais devem ser tais que a carteira proporcione uma rentabilidade igual à taxa de juro sem risco (se assim não fosse existiriam oportunidades de arbitragem). Sendo C_0 o preço actual da opção e r_F a taxa de juro sem risco tem-se

$$V \cdot u - m \cdot C^+ = (V - m \cdot C_0) \cdot (1 + r_F) \quad (3.8)$$

Substituindo m pela expressão determinada em (3.7), e resolvendo em ordem a C_0 , obtém-se

$$C_0 = \frac{C^- \cdot \frac{u - (1 + r_F)}{u - d} + C^+ \cdot \frac{(1 + r_F) - d}{u - d}}{1 + r_F} \quad (3.9)$$

Defina-se

$$p_V^- = \frac{u - (1 + r_F)}{u - d} \quad (3.10)$$

$$p_V^+ = \frac{(1 + r_F) - d}{u - d}$$

Assim (3.9) pode reescrever-se como

$$C_0 = \frac{p_V^- \cdot C^- + p_V^+ \cdot C^+}{1 + r_F} \quad (3.11)$$

Os valores de p_V^- e p_V^+ pertencem ao intervalo $]0, 1[$ (se assim não fosse o activo subjacente proporcionaria rendimentos que eram, ou sempre maiores ou iguais, ou sempre menores ou iguais à taxa de juro sem risco, proporcionando oportunidades de arbitragem) e $p_V^- + p_V^+ = 1$, pelo que estes coeficientes podem ser interpretados como probabilidades. Adicionalmente, uma análise a (3.11) leva à conclusão de que estas são as probabilidades que, se forem utilizadas para ponderar os valores futuros da opção, permitem que o valor esperado resultante seja actualizado à taxa de juro sem risco para cálculo do preço actual dessa opção. São, assim, as probabilidades que ocorreriam num mundo com investidores neutrais face ao risco – serão designadas por *probabilidades neutrais face ao risco*. Mais tarde, num contexto de avaliação multicritério, estas probabilidades serão também designadas por *probabilidades ajustadas ao valor*.

Assim, conclui-se que, independentemente das atitudes dos investidores face ao risco, o preço da opção pode ser calculado através da actualização, à taxa de juro sem risco, do seu

valor futuro esperado num mundo com investidores neutrais face ao risco. Este resultado é coerente com o argumento, apresentado acima, de que o valor de uma opção será o mesmo num mundo em que os investidores sejam neutrais face ao risco, ou num mundo em que as atitudes dos investidores face ao risco sejam diferentes. Este resultado é válido para a determinação do preço de mercado de qualquer activo de valor dependente do de um activo subjacente. É também interessante notar que, uma vez que as probabilidades p_V^- e p_V^+ apenas dependem da taxa de juro sem risco e dos coeficientes de alteração do preço do activo subjacente, elas serão as mesmas para todos os activos de valor dependente de um mesmo activo subjacente.

Utilize-se agora esta abordagem para o cálculo do VAL do projecto de exploração de uma mina que tem vindo a ser considerado. Uma vez que o preço do mineral pode subir 20% ou descer 10% em cada ano, e que a taxa de juro sem risco é de 8%, podem ser utilizadas as expressões de (3.10) para calcular as probabilidades neutrais face ao risco:

$$\begin{aligned} p_V^- &= \frac{u - (1 + r_F)}{u - d} = \frac{1.2 - 1.08}{1.2 - 0.9} = 40\% \\ p_V^+ &= \frac{(1 + r_F) - d}{u - d} = \frac{1.08 - 0.9}{1.2 - 0.9} = 60\% \end{aligned} \quad (3.12)$$

O cálculo do VAL do projecto pode ser feito através da substituição, na árvore da figura 3.3, das probabilidades originais pelas probabilidades neutrais face ao risco, e pela actualização dos valores à taxa de juro sem risco. A árvore que se obtém através da substituição das probabilidades é apresentada na figura 3.4.

Considere-se a alternativa de iniciar imediatamente a extracção. O *cash flow* esperado utilizando as probabilidades neutrais face ao risco é, no ano 1, $F_1 = 60\% \cdot F_1^+ + 40\% \cdot F_1^- = 540\,000$ euros. A taxa de actualização a considerar é a taxa de juro sem risco, conduzindo a $VAL^{iniciar} = F_0 + \frac{F_1}{1.08} = 50\,000$ euros. Este valor é, como seria de esperar, igual ao obtido em 3.3.1 e ao obtido utilizando a abordagem da carteira de réplica.

Considere-se a alternativa de prolongar o contrato. Os *cash flows* esperados no ano 2 passam a ser $F_2^+ = 60\% \cdot F_2^{++} + 40\% \cdot F_2^{+-} = 648\,000$ euros, em caso de subida do preço do mineral no ano 1, e $F_2^- = 60\% \cdot F_2^{-+} + 40\% \cdot F_2^{--} = 486\,000$ euros, em caso de descida do preço. Assim, se se optar por iniciar a extracção no ano 1, o valor actual do projecto nesse ano é $VA_1^{+,extrair} = -486\,000 + \frac{648\,000}{1.08} = 114\,000$ euros, se tiver ocorrido uma subida do preço do mineral no primeiro ano, e $VA_1^{-,extrair} = -486\,000 + \frac{486\,000}{1.08} = -36\,000$ euros, se nesse ano tiver ocorrido uma descida do preço. Tal significa que, no primeiro caso, se deve avançar com a extracção, e no segundo se deve optar por desistir do projecto (decisão com $VA_1^{-,desistir} = 0$ euros). O valor actual esperado do projecto no ano 1 é, assim, $VA_1 = 60\% \cdot VA_1^{+,extrair} + 40\% \cdot VA_1^{-,desistir} = 68\,400$ euros. O valor actual líquido do projecto

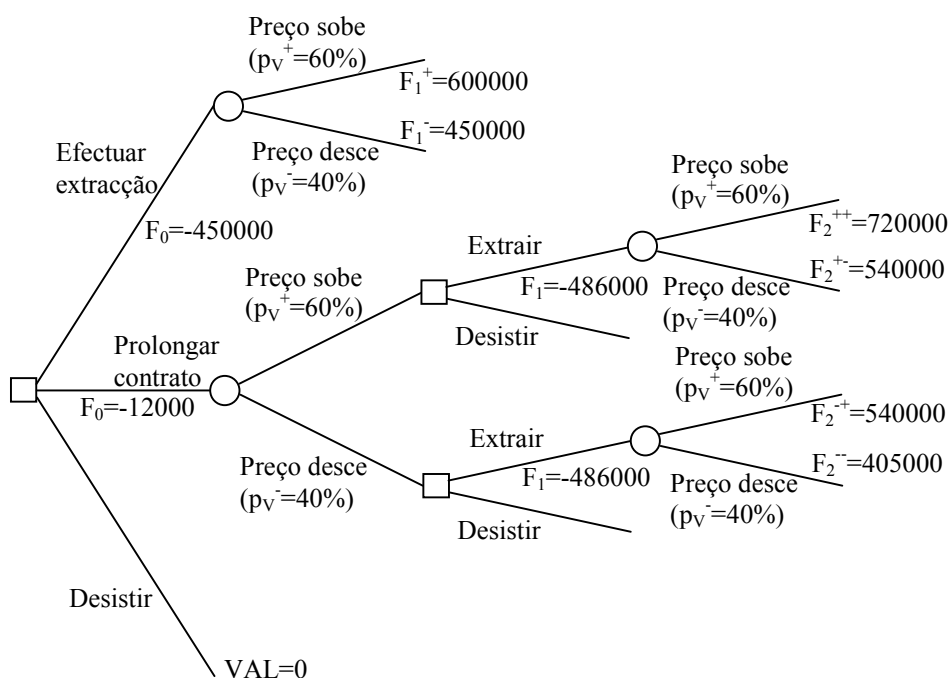


Figura 3.4: Árvore de decisão com probabilidades neutrais face ao risco, utilizada para cálculo do VAL no exemplo da mina descrito no texto. Os valores monetários encontram-se em euros.

no caso de prolongamento do prazo passa a ser $VAL^{prolongar} = -12\,000 + \frac{VA_1}{1.08} = 51\,333$ euros, sendo esta a opção que conduz a um maior VAL.

A forma de cálculo subjacente à abordagem das probabilidades neutrais face ao risco torna evidente que dois investimentos que dependam do valor do mesmo activo subjacente, e com a mesma função de distribuição de probabilidade incondicional do valor terminal, podem ter um preço inicial diferente. Considerem-se dois activos, A e B, em que A paga 1 euro dentro de 1 ano em caso de subida do preço do mineral e 0 em caso de descida, e B paga 1 euro dentro de 1 ano em caso de descida desse preço e 0 em caso de subida. Apesar de cada um destes activos ter a probabilidade de 50% de pagar 1 euro dentro de 1 ano, e a probabilidade de 50% de nada pagar, A deve ter um preço de $60\% \cdot 1 = 0.6$, e B deve ter um preço de $40\% \cdot 1 = 0.4$. Definindo como estado do mundo cada possível "caminho" do valor do activo subjacente, desde o preço inicial até um valor terminal, então podem existir dois estados do mundo com a mesma probabilidade, e ser mais "caro" conseguir o mesmo valor terminal num do que no outro (no sentido de um valor terminal no primeiro estado ter um preço inicial superior). Como nota Dybvig [56], se o que interessa aos investidores é apenas a função de distribuição de probabilidade incondicional do valor final, então estes devem procurar, de entre todas as carteiras que conduzam a uma mesma distribuição terminal, a

que apresentar um preço inicial menor.

A abordagem da carteira de réplica e a abordagem das probabilidades neutrais face ao risco podem ser utilizadas em modelos de tempo discreto de avaliação de opções, conduzindo aos mesmos resultados. Quando aplicadas na avaliação de projectos, qualquer destas abordagens permite evitar o problema da determinação do custo do capital na presença de opções. A abordagem das probabilidades neutrais face ao risco é geralmente mais simples de utilizar, permitindo que a avaliação seja feita de forma semelhante à avaliação tradicional de uma árvore de decisão (basta usar as probabilidades neutrais face ao risco em vez das probabilidades originais, e utilizar a taxa de juro sem risco para fazer a actualização).

3.4.4 A modelação e a avaliação de opções

O modelo de Black-Scholes [26] é o modelo mais conhecido de avaliação de opções, e em parte o responsável pelo interesse que a avaliação de opções tem gerado. É um modelo de tempo contínuo, que fornece uma equação de forma fechada⁵² para avaliação de uma opção Europeia de compra ou venda de um activo subjacente cujo preço segue uma distribuição lognormal. Outros autores apresentam equações de forma fechada para modelos de tempo contínuo que descrevem o comportamento de outro tipo de opções. Margrabe [127] e Fischer [67] determinam equações para avaliar uma opção de troca de um activo por outro ou, o que é equivalente, para avaliar uma opção que tem um preço de exercício estocástico; Geske [71] determina uma equação para avaliar opções compostas (opções sobre opções) com preços de exercício determinísticos, e Carr [39] obtém uma equação para avaliar opções de troca sequenciais (semelhantes às consideradas por Geske, mas com preços de exercício estocásticos).

A obtenção de equações para modelos de tempo contínuo baseia-se na resolução de uma equação diferencial, ou de um sistema de equações diferenciais, com condições de fronteira. Os principais problemas que ocorrem na utilização destes modelos são a dificuldade, nalguns casos impossibilidade, de construir as equações diferenciais e a dificuldade, ou impossibilidade, de obter expressões de forma fechada como solução destas equações. Isto é particularmente verdade para as opções reais existentes num projecto de investimento, que são geralmente opções do tipo Americano inter-relacionadas. A utilização de técnicas numéricas, aproximações analíticas ou de simulação de Monte Carlo para resolução das equações diferenciais leva a soluções possíveis para a aplicação destes modelos. No entanto, estas técnicas são geralmente de implementação complexa, e não resolvem o problema inicial da escrita das próprias equações. Assim, quando existem situações complexas de avaliação de

⁵²Do inglês *Closed-Form Equation*.

opções em tempo contínuo, é muitas vezes preferível utilizar aproximações para os processos estocásticos subjacentes. Estas aproximações podem ser obtidas através de modelos de tempo discreto, ou através de simulação de Monte Carlo.

A utilização de modelos de tempo discreto é, assim, apropriada, não só quando a situação a modelar está definida para intervalos de tempo discretos, mas também para aproximação de modelos de tempo contínuo. Estes modelos de tempo discreto podem ser representados por árvores, com nodos de incerteza que descrevem os possíveis comportamentos do activo subjacente (ou dos activos subjacentes, quando existe mais que um). Assumindo que existe recombinação dos valores do activo subjacente (isto é, que num nível da árvore existem diferentes nodos que conduzem ao mesmo valor no nível seguinte), essas árvores podem ser representadas de forma simplificada como redes, que são denominadas por *lattices*⁵³. Cada nível de uma *lattice* corresponde a um intervalo de tempo em que pode existir variação do(s) valor(es) do(s) activo(s) subjacente(s). Assim, o aumento do número de níveis de uma *lattice* utilizada para aproximar o comportamento de um activo com variação de preço contínua corresponde a um aumento do número de intervalos de tempo em que se permite a variação desse valor, levando, assim, a uma aproximação mais realista a esse comportamento. Cada folha de uma *lattice* corresponde a um possível valor terminal do activo subjacente (ou a um possível conjunto de valores dos activos subjacentes), sendo a determinação da estratégia óptima de exercício da opção (ou das opções, se estiverem a ser avaliadas várias opções inter-relacionadas) feita através da avaliação da *lattice* das folhas para a raiz (de forma idêntica à avaliação das árvores de decisão clássicas). Nas *lattices* não são geralmente representados explicitamente os nodos de decisão, por forma a não as tornar mais complexas. A figura 3.5 apresenta um exemplo de uma *lattice* binomial e de uma *lattice* trinomial.

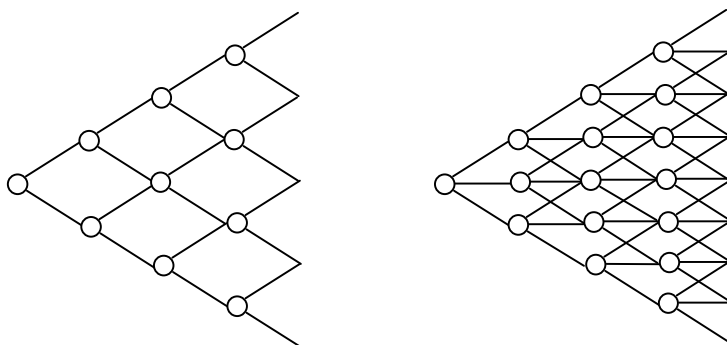


Figura 3.5: Exemplo de uma *lattice* binomial (à esquerda) e de uma *lattice* trinomial (à direita). Ambas têm quatro níveis, cada um correspondente a um intervalo de tempo.

A utilização de *lattices* é muito flexível, podendo ser facilmente adaptadas quando se

⁵³Baidya e Castro ([10]) traduzem *lattice* para árvore. Na verdade, as *lattices* são redes que constituem uma representação simplificada de árvores. No presente trabalho vai utilizar-se o termo inglês para as referir.

altera a situação considerada. Esta flexibilidade torna a sua utilização particularmente atractiva para aplicações em que se pretenda um modelo genérico para avaliação de opções, ou de projectos que incluam opções. A utilização de *lattices* na avaliação de opções é também particularmente simples de implementar, e os modelos envolvidos são normalmente intuitivos e fáceis de entender. Estas características tornam a utilização de *lattices* muito atractiva para modelar opções reais. Como principal desvantagem desta modelação surge o facto de as *lattices* poderem, com facilidade, atingir grandes dimensões, o que pode colocar problemas à sua construção e avaliação.

O artigo de 1979 de Cox, Ross e Rubinstein [51] é o precursor da utilização de *lattices* na avaliação de opções. Os autores propõem um modelo em que o valor do activo subjacente tem duas variações possíveis em cada intervalo de tempo – ou seja, um modelo binomial. É então definida a forma como uma opção sobre esse activo pode ser avaliada, quer utilizando a abordagem da carteira de réplica quer utilizando a das probabilidades neutras face ao risco – ou seja, as abordagens que foram utilizadas em 3.4.3 para avaliação do exemplo. Os autores mostram ainda como se podem definir os parâmetros do modelo binomial por forma a aproximar o comportamento de activos cujo preço segue uma distribuição lognormal, e demonstram que os valores das opções Europeias obtidos com esta aproximação convergem para o valor da fórmula de Black-Scholes quando o número de intervalos de tempo utilizados tende para infinito. Outros autores, como Rendleman e Bartter [148] ou Jarrow e Rudd [103], propõem a utilização de parâmetros diferentes no modelo binomial para aproximação do comportamento de activos cujo valor se altera em tempo contínuo. Trigeorgis [174] propõe a utilização de um "modelo binomial logtransformado", com um algoritmo próprio para a avaliação das correspondentes *lattices*, cuja aplicação na avaliação de projectos com múltiplas opções reais é ilustrada em [175].

Uma *lattice* binomial tem inerente o pressuposto de que a cada estado da natureza (representado por um nodo) se seguem dois estados da natureza (representados por nodos) relevantes. Vários autores propõem a utilização de *lattices* em que mais do que dois estados da natureza se seguem a cada estado da natureza relevante. A utilização destas *lattices* pode ser justificada, quer pela obtenção de uma melhor aproximação ao comportamento do activo subjacente, quer pela existência de mais do que um activo subjacente (ou de outras variáveis relevantes). Boyle [33] propõe a utilização de um modelo trinomial para avaliação de opções com um activo subjacente, e de um modelo pentanomial para avaliação de opções com dois activos subjacentes. A utilização de *lattices* multinomiais que permitem considerar qualquer número de activos subjacentes é proposta por Boyle, Evnine e Gibbs [34], He [89], Kamrad e Ritchken [104], e Madan, Milne e Shefrin [124].

Figlewski e Rao [65] propõem a utilização de *malhas adaptáveis*⁵⁴ para a aproximação

⁵⁴Do original inglês *adaptive mesh*.

de modelos de tempo contínuo. As malhas adaptáveis são *lattices* em que a "densidade" de nodos de incerteza varia. As redes que representam estas *lattices* incorporam secções em que se tornam mais densas (isto é, em que os intervalos de tempo considerados são menores) numa estrutura geral mais esparsa (isto é, em que os intervalos de tempo considerados são maiores). As malhas adaptáveis permitem, assim, uma avaliação mais detalhada das secções mais críticas para o valor da opção, mantendo uma avaliação menos detalhada das menos críticas.

Além da utilização de modelos baseados em *lattices*, a simulação de Monte Carlo pode também ser utilizada para avaliação de opções através de uma aproximação dos processos estocásticos subjacentes. Boyle [32] é um dos pioneiros na utilização da simulação de Monte Carlo para avaliação de opções. A utilização de simulação de Monte Carlo para avaliar uma ou mais opções que apenas possam ser exercidas num momento determinado (como opções Europeias) não apresenta dificuldades relevantes. No entanto, quando uma opção pode ser exercida em momentos diferentes (como uma opção Americana), ou quando existem opções inter-relacionadas com datas de vencimento diferentes (o que acontece frequentemente em projectos de investimento), a utilização da simulação de Monte Carlo torna-se problemática. As dificuldades derivam do facto de, em cada momento, não ser possível saber quais as opções que devem ser exercidas, e quais as que não devem ser, uma vez que o momento óptimo de exercício da opção depende do comportamento futuro do activo subjacente. As árvores de decisão estocásticas (ver 3.3.2), utilizadas para projectos de investimento, deparam-se com o mesmo problema, que Hespos e Strassman [95] resolvem através do armazenamento dos possíveis valores do projecto para todas as possíveis combinações de decisões. Esta forma de resolução do problema pode tornar-se impraticável quando existem opções do tipo Americano, que podem ser exercidas durante intervalos de tempo longos, e particularmente quando várias opções de tipo Americano se encontram inter-relacionadas. Longstaff e Schwartz propõem uma técnica para a avaliação de uma opção Americana utilizando simulação, e Gamba [69] propõe uma extensão desta técnica para problemas com múltiplas opções (particularmente para avaliação de projectos de investimento com múltiplas opções).

Há ainda autores que utilizam simulação de Monte Carlo para cálculo da volatilidade do activo subjacente da opção, e que utilizam depois essa volatilidade para estimar os parâmetros de modelos baseados em *lattices*. Copeland e Antikarov ([48], capítulo 9) e Herath e Park [91] seguem este procedimento na avaliação de projectos de investimento.

3.4.5 Problemas específicos das opções reais

Os modelos utilizados para avaliar opções reais baseiam-se nos modelos desenvolvidos para opções financeiras. No entanto, as opções reais apresentam diferenças importantes rela-

tivamente às financeiras. Algumas dessas diferenças têm, para a avaliação das opções, consequências que importa analisar.

3.4.5.1 O activo subjacente para projectos de investimento

Uma opção financeira é baseada no preço de um activo subjacente, transaccionado em mercado. Para uma opção real, geralmente não existe um tal activo. Em situações pouco frequentes é possível encontrar um activo com o preço perfeitamente correlacionado com o projecto. Foi isto que aconteceu no exemplo apresentado em 3.4.3, e que permitiu o cálculo do VAL usando ROA. Nesse caso, o projecto podia ser visto como uma opção de compra de 500 toneladas do mineral, e o preço do mineral era a única fonte de incerteza. No entanto, era suficiente a existência de incerteza relativamente aos custos para que não se pudesse encarar o projecto como uma opção de compra sobre o mineral com um preço de exercício pré-determinado.

A primeira questão que se coloca relativamente à inexistência de um activo subjacente transaccionado em mercado é a aplicabilidade dos próprios modelos da teoria das opções. Quando se consideram opções reais, estão a considerar-se opções ou projectos cujos resultados dependem de um projecto sem opções, o qual poderia ser considerado o activo subjacente se fosse transaccionado. O pressuposto de os mercados serem completos é suficiente para existir a certeza de ser possível replicar a rentabilidade do projecto através de uma carteira de activos transaccionados (eventualmente uma carteira alterada dinamicamente). Essa carteira é usualmente denominada por "activo gémeo" (por exemplo [178]; [48], capítulo 4). Trigeorgis e Mason [178] argumentam que a necessidade de um activo gémeo não é exclusiva dos modelos de opções reais, pois "... a existência de um tal activo gémeo é implicitamente assumida na análise tradicional do VAL para efeitos da estimação da taxa de rentabilidade requerida...".

Uma abordagem possível à determinação do activo subjacente para um projecto consiste em determinar uma carteira que constitua o activo gémeo ou, alternativamente, aproximá-la através de um activo ou carteira cuja rentabilidade se saiba estar fortemente correlacionada com a rentabilidade do projecto. Herath e Park [90], por exemplo, assumem que o valor do projecto de lançamento de uma nova lâmina de barbear está perfeitamente correlacionado com o valor das acções da Gillette, e utilizam estas como activo gémeo.

Existe, no entanto, uma abordagem alternativa, muitas vezes de aplicação mais simples. O que é importante determinar para a avaliação de uma opção real, ou de um projecto com opções, não é qual o activo ou qual a constituição da carteira cujas rentabilidades estão perfeita ou fortemente correlacionadas com as do projecto, mas sim o valor desse activo ou carteira (e a respectiva variação). Esse valor terá forçosamente que ser igual ao valor do projecto sem opções, e, assim, o valor do projecto sem opções pode ser utilizado como valor

do activo gémeo – é esta abordagem que é seguida por Copeland e Antikarov ([48], capítulo 4).

3.4.5.2 O risco de mercado e o risco privado

Uma vez que as opções financeiras dependem do valor de um activo transaccionado em mercado, é possível replicar os seus resultados através de transacções no mercado – ou seja, todo o seu risco é *risco de mercado*. Os projectos de investimento apresentam, por vezes, riscos que não é possível replicar por transacções no mercado. Considerem-se, por exemplo, os riscos associados à quantidade de petróleo existente num poço, à quantidade de mineral existente numa mina, ao sucesso ou falhanço do desenvolvimento de um novo produto, à qualidade do produto desenvolvido, ou ao atraso na construção de uma fábrica. Nenhum destes riscos pode ser replicado através de transacções no mercado de capitais, porque todos eles são exclusivos do projecto. Este tipo de riscos é usualmente designado por *risco privado*⁵⁵ (por exemplo [5], capítulo 4; [91]; [117]).

Importa, assim, determinar como devem ser analisados estes riscos no contexto da teoria das opções. A este respeito, existem várias abordagens diferentes, embora apenas uma pareça ser coerente com a teoria financeira – ou, mais concretamente, com a teoria da carteira.

Cassimon e Engelen [40] e Jagle [102] consideram a utilização de árvores para avaliação de projectos de Investigação & Desenvolvimento. Estes autores tomam em conta um custo do capital para os projectos superior à taxa de juro sem risco e, nos nodos correspondentes a risco privado, convertem as probabilidades dos nodos em probabilidades neutrais face ao risco de forma idêntica à utilizada em nodos que correspondam a risco de mercado. Ao proceder desta forma, os autores assumem que o risco privado, considerado individualmente, justifica um custo do capital idêntico ao risco de mercado do projecto. A teoria financeira considera que o risco privado é um risco diversificável, por ser exclusivo do projecto, e, assim, que os investidores não devem exigir nenhum prémio de risco para o assumir. Por isso, a forma de proceder destes autores não é coerente com a teoria financeira.

Smith e Nau [169] propõem uma abordagem diferente para a incorporação do risco privado no valor do projecto. Utilizam um modelo baseado numa árvore de decisão, e a incorporação do risco privado é feita através de equivalentes certos calculados a partir de uma função utilidade representativa da empresa. Mais concretamente, a função utilidade é introduzida no processo de *folding back* para calcular o equivalente certo em cada nodo

⁵⁵O risco privado pode ser considerado uma forma de risco não sistemático (que foi introduzido em 2.4.2.1), por ser um risco que pode ser eliminado por diversificação. Note-se, no entanto, que geralmente o risco não sistemático se refere a uma parte do risco de um activo transaccionado em mercado, enquanto o risco privado se refere à de um activo não transaccionado.

correspondente a risco privado. Esta forma de proceder segue o princípio da maximização da utilidade esperada, tendo em conta a possibilidade de cobertura do risco de mercado. No entanto, está em contradição com a teoria financeira, pois esta considera que a avaliação não deve ser baseada nas preferências individuais ou da empresa, mas unicamente no valor de mercado. Uma vez que o risco privado é independente dos acontecimentos do mercado, este é diversificável, e os investidores não devem exigir um prémio para o assumir. O uso de uma função utilidade que considere aversão ao risco tem implícito um prémio de risco no cálculo do equivalente certo, o que está em contradição com a teoria financeira.

Vários outros autores, como Copeland e Antikarov ([48], capítulo 10) e Godinho e Costa [75] tratam o risco privado de uma forma coerente com a teoria financeira. Já foi indicado que o risco privado é diversificável, não devendo ser exigido um prémio de risco para o assumir, e devendo a actualização de valores sujeitos a risco privado ser efectuada à taxa de juro sem risco. Assim, nos nodos de árvores de decisão que correspondem a risco privado pode ser calculado o valor esperado utilizando as probabilidades originais, e fazer a actualização dos valores usando a taxa de juro sem risco. Um processo de avaliação de árvores com nodos de incerteza que reflectem o risco de mercado, e outros que reflectem o risco privado, pode passar por um ajustamento das probabilidades (para probabilidades neutrais face ao risco) nos nodos correspondentes a risco de mercado, e pela utilização das probabilidades originais em nodos correspondentes a risco privado. Com estas probabilidades, todos os valores obtidos podem ser actualizados à taxa de juro sem risco.

3.4.5.3 Outras diferenças entre opções financeiras e opções reais

A inexistência de um activo subjacente e a possibilidade de existir risco privado são as duas diferenças mais relevantes entre opções reais e opções financeiras. Existem, no entanto, outras diferenças que é interessante referir.

As opções reais não apresentam geralmente um preço de exercício e data de vencimento pré-definidos, como acontece com as opções financeiras. Esta diferença tem consequências para a avaliação das opções, havendo que incorporar nos modelos a incerteza relativa a estes parâmetros. A incorporação em modelos de tempo discreto não apresenta geralmente dificuldades. A sua incorporação em modelos de tempo contínuo é por vezes possível (por exemplo, as expressões de forma fechada apresentadas em [39], [67] e [127] consideram preços de exercício estocásticos), mas frequentemente levanta algumas dificuldades importantes.

Outra diferença relevante está relacionada com a interdependência que é comum entre as várias opções reais relativas ao mesmo projecto, e, por vezes, a projectos diferentes, e que não é comum nas opções financeiras. Esta interdependência pode mesmo conduzir a que o exercício de uma opção real altere o risco de um projecto, alterando, assim, também o risco

inerente a outras opções reais. Ela deve ser incorporada nos modelos de opções reais, o que é geralmente simples de fazer nos modelos baseados em *lattices*.

3.4.6 Análise da decisão e opções reais

Vários autores tentam conciliar a teoria das opções com a análise da decisão para o desenvolvimento de abordagens integradas de avaliação. Kasanen e Trigeorgis [105] procuram definir uma abordagem integrada à avaliação de qualquer investimento, baseando-se em análise da decisão e pressupondo que as preferências relevantes não são as dos decisores individuais, mas sim as do mercado. Assim, o mercado é considerado um agente de decisão composto, sendo a avaliação dos investimentos baseada na função utilidade do mercado. Esta função utilidade é estimada empiricamente a partir do comportamento do mercado, e é posteriormente usada para a avaliação de todos os tipos de activos, como acções, activos derivados ou projectos de investimento. Os autores notam que esta forma de avaliação não se baseia na possibilidade de transaccionar, replicar, ou, de qualquer outra forma, justificar uma avaliação baseada na neutralidade face ao risco, e que é válida, quer em economias em que o CAPM se verifique, quer em economias em que este se não verifique. Os resultados numéricos obtidos pelos autores mostram que vários tipos de função utilidade usados nesta abordagem fornecem resultados próximos dos modelos teóricos considerados pelos autores (o CAPM e modelos de tempo discreto de avaliação de opções).

Smith e Nau [169] tentam conciliar a análise da decisão com os modelos de avaliação de opções na avaliação de projectos. Os autores fazem uso de árvores de decisão para representar os possíveis resultados dos projectos, e de modelos de tempo discreto de avaliação de opções e teoria da utilidade para a avaliação dessas árvores. Inicialmente os autores consideram apenas a existência de risco de mercado, e demonstram que, se as oportunidades de cobertura de risco no mercado forem explicitamente consideradas quando se utiliza teoria da utilidade para avaliação das árvores, os resultados obtidos através das duas abordagens são idênticos.

Posteriormente, estes autores utilizam o conceito de "mercados parcialmente completos" para identificar mercados que são completos relativamente ao risco de mercado, mas em que existem riscos independentes dos acontecimentos do mercado que não podem ser cobertos recorrendo a este. Estes riscos independentes dos acontecimentos do mercado são os riscos privados, e os autores consideram que eles não podem ser incorporados no valor do projecto recorrendo a informação do mercado. Assim, para incorporar estes riscos no valor do projecto, os autores sugerem o uso da função utilidade da empresa.

Tendo em consideração a necessidade de recorrer a equivalentes certos para incorporação do risco privado, e a maior facilidade de utilização dos modelos de opções reais para incorporação do risco de mercado, Smith e Nau sugerem um procedimento integrado de avaliação

que concilia as duas abordagens. De acordo com este procedimento, no processo de *folding back* os nodos de incerteza correspondentes a risco de mercado são avaliados através de um modelo de teoria das opções, e os nodos de incerteza correspondentes a risco privado são avaliados através da utilização de equivalentes certos calculados de acordo com a função utilidade da empresa. Smith e McCardle [168] apresentam um exemplo de aplicação deste procedimento, na avaliação de projectos de exploração de reservas petrolíferas.

3.5 Resumo

No capítulo que agora termina, foi considerada a incorporação do risco e do impacto de decisões sequenciais na avaliação de projectos. Foram tomadas em conta as críticas geralmente apresentadas à utilização de medidas baseadas na actualização de *cash flows*, tendo-se concluído que algumas destas críticas têm por fundamentação o pressuposto de um uso errado das medidas. No entanto, concluiu-se também que o uso destas medidas sem instrumentos auxiliares se pode tornar complexo em situações que envolvam risco, e que a sua utilização tradicional apresenta algumas dificuldades teóricas relativas à incorporação do risco quando existe a possibilidade de decisões sequenciais.

A simulação de Monte Carlo é um instrumento que pode auxiliar na incorporação do risco no valor do projecto. Esta técnica é muitas vezes usada para análise de risco de projectos de investimento, mas pode também sê-lo na determinação da estratégia óptima e do VAL correspondente.

As árvores de decisão são outro instrumento que pode ser utilizado na incorporação do risco e do impacto das decisões sequenciais na avaliação de projectos. Foi apresentado um exemplo de aplicação de árvores de decisão, e discutidas algumas dificuldades teóricas envolvidas na sua aplicação. Foram consideradas as árvores de decisão estocásticas, que conjugam uma estrutura em árvore com a aplicação de simulação de Monte Carlo, por forma a ser possível representar os resultados do projecto, e os acontecimentos aleatórios, por distribuições de probabilidade contínuas. Consideraram-se ainda abordagens à utilização de múltiplos atributos em árvores de decisão relativas a projectos de investimento.

Finalmente, apresentaram-se os modelos de opções reais. Foram apresentados os conceitos básicos sobre opções, e foi discutida a utilização das designações "VAL estratégico" e "VAL expandido" para referir o cálculo do VAL através destes modelos. Foram apresentadas as abordagens da carteira de réplica e das probabilidades neutrais face ao risco para avaliação de projectos representados por árvores de decisão, e tratou-se um exemplo de aplicação destas abordagens; argumentou-se que estas permitem ultrapassar as dificuldades da utilização clássica das árvores de decisão e calcular um valor teoricamente consistente para o projecto. Introduziram-se alguns modelos da teoria das opções e algumas técnicas de ava-

liação de opções, com particular destaque para os modelos de tempo discreto, que são mais flexíveis e simples que os de tempo contínuo, e podem ser utilizados, não só em situações em que seja mais apropriado considerar intervalos de tempo discretos, mas também para aproximação de modelos de tempo contínuo. Discutiram-se ainda alguns problemas inerentes à utilização de modelos de teoria das opções na avaliação de projectos; nomeadamente, discutiu-se a determinação do activo subjacente, bem como a incorporação do risco privado na avaliação de projectos de investimento. Por fim, mencionaram-se alguns modelos que procuram conciliar a teoria das opções com a análise da decisão para o desenvolvimento de abordagens integradas de avaliação.

Capítulo 4

Uma abordagem multicritério à análise de projectos em situação de incerteza

A utilização exclusiva do valor financeiro pode ser insuficiente para a análise de alguns projectos. No presente capítulo descreve-se uma abordagem multicritério que utiliza árvores de decisão na análise e selecção de estratégias em projectos de investimento. Esta abordagem baseia-se na identificação de estratégias não dominadas⁵⁶, e permite escolher posteriormente um método multicritério para seleccionar a preferida pelo agente de decisão. Detalha-se apenas a utilização de dois critérios: o tempo e o valor financeiro (ou o custo, que pode ser usado de forma análoga); no entanto, a abordagem pode ser estendida a outros critérios. Os traços gerais da abordagem podem encontrar-se em [75] e [80].

4.1 A importância do critério tempo na análise de projectos

Em muitas situações, existem benefícios decorrentes de uma conclusão rápida de um determinado projecto, ou prejuízos decorrentes de uma demora na sua conclusão. Estes benefícios e prejuízos são, muitas vezes, difíceis de quantificar, e mesmo de prever. Pode, no entanto, acontecer que os agentes de decisão responsáveis por um projecto tenham uma percepção, mesmo que vaga, da importância, e eventualmente da probabilidade, destes benefícios e prejuízos, e da forma como estes dependem do tempo decorrido até à conclusão do projecto. Assim, estes benefícios e prejuízos, que não podem ser directamente incorporados no valor financeiro do projecto, podem ser representados por um outro critério: o critério tempo. O tempo pode, portanto, ser um critério particularmente importante na análise de projectos.

⁵⁶Ver nota 2. Ir-se-á discutir mais detalhadamente este conceito em 4.2.1.

Considere-se, por exemplo, um projecto de construção. Num tal projecto existe normalmente uma data limite para a conclusão que tem que ser cumprida. Se esta data não for cumprida, a empresa pode vir a enfrentar pedidos de indemnização e, mais importante do que isso, a sua imagem pode ser afectada. As indemnizações monetárias podem ser facilmente contabilizadas nos *cash flows* e, conseqüentemente, no valor financeiro, mas os prejuízos para a imagem da empresa são mais difíceis de quantificar. Podem também existir alguns benefícios advindos da conclusão mais rápida de um projecto, tais como a possibilidade de empreender outros projectos ou aproveitar outras oportunidades. Tais prejuízos e benefícios são muito difíceis de quantificar, e até mesmo de prever, o que torna muito difícil a sua incorporação no valor financeiro do projecto. Por isso, nestas situações poderá ser útil usar o tempo até à conclusão do projecto como um critério independente na análise deste.

A interacção com concorrentes fornece também outros motivos para a utilização do tempo como critério. As empresas têm, por vezes, a opção de adiar um projecto por forma a obter mais informação sobre ele. Isto acontece, por exemplo, em projectos que envolvam a introdução de novos produtos no mercado. Esse adiamento constitui, muitas vezes, a melhor estratégia na ausência de competição, mas, se outras empresas podem empreender projectos semelhantes, o momento e a estratégia escolhidos podem depender de questões relacionadas com a concorrência. Se uma empresa sabe que os seus concorrentes já possuem a tecnologia necessária para empreender projectos semelhantes, ou se puder prever quando a vão possuir, então pode usar a teoria dos jogos e, assumindo que os concorrentes vão seguir a estratégia que lhes é mais favorável, definir a que conduz ao maior valor do investimento e à melhor altura para o empreender. Infelizmente, é normalmente impossível às empresas saber qual a tecnologia que os seus concorrentes possuem, ou prever quando é que estes vão conseguir desenvolver uma determinada tecnologia para empreender um determinado tipo de projecto. Assim, por forma a deter a entrada de concorrentes no mercado, para evitar prejuízos decorrentes desta entrada, ou para ganhar uma vantagem competitiva, a empresa pode pretender que o projecto (ou uma determinada fase deste⁵⁷) seja concluído tão cedo quanto possível e, ao mesmo tempo, maximizar o seu valor. Nestas situações, será muito útil considerar simultaneamente o tempo e o valor financeiro na definição da estratégia.

Outros motivos importantes para utilizar o tempo como um critério independente estão relacionados com as preferências pessoais dos agentes de decisão. Por vezes, a conclusão rápida de um projecto pode aumentar o poder ou o prestígio do gestor responsável, ou proporcionar-lhe benefícios financeiros. Assim, o gestor terá um incentivo para acelerar a

⁵⁷Neste tipo de situações é comum que o tempo relevante não seja o da conclusão do projecto, mas sim o da conclusão de uma determinada fase deste. Por exemplo, num projecto de introdução de um novo produto no mercado, pode ser relevante o tempo até ao desenvolvimento do produto, ou o tempo até o produto se conseguir implantar.

execução do projecto. Tais factores podem também motivar a utilização do tempo como um critério independente na análise de projectos de investimento.

4.2 A abordagem

Tal como foi indicado no capítulo 3, as árvores de decisão proporcionam uma forma conveniente para a representação, avaliação e determinação de estratégias de implementação de projectos de investimento. No entanto, a utilização clássica de árvores de decisão para avaliação financeira destes, baseada no uso do valor esperado para cálculo do valor financeiro nos nodos de incerteza, conduz a uma incorporação inconsistente do risco no valor do projecto. A utilização de modelos de opções reais permite que o risco seja incorporado de uma forma adequada no valor do projecto, pelo que é hoje recomendada para avaliação de projectos de investimento em substituição da análise clássica das árvores de decisão.

O uso tradicional de árvores de decisão em avaliação de projectos é baseado no VAL. Como foi já indicado, existem alguns factores que não podem ser incorporados no valor financeiro de um projecto e que são fundamentais para determinar se este deve ser empreendido, e a estratégia mais favorável para a sua implementação. O tempo é um critério particularmente importante para esta decisão.

A relação estreita entre o valor financeiro e o tempo torna a utilização simultânea destes dois critérios particularmente difícil. Algumas dificuldades advêm do facto de a incerteza nas receitas e nos custos crescer com a passagem do tempo. Considere-se, por exemplo, um projecto de construção de uma fábrica: se houver incerteza quanto ao tempo necessário ser de 3 ou 4 anos, os *cash flows* irão depender do tempo que a construção demorar. Se demorar 4 anos, o primeiro *cash flow* operacional não só ocorrerá um ano mais tarde, mas também estará sujeito a mais um ano de incerteza. O tempo tem, portanto, várias implicações sobre o valor financeiro, sendo necessária uma análise cuidada para estabelecer correctamente o impacto destas implicações.

A fim de lidar com estes problemas desenvolveu-se uma abordagem multicritério à análise de projectos de investimento, a qual se baseia na utilização de árvores de decisão. Serão focados dois critérios: o tempo e o valor financeiro. No entanto, a utilização desta abordagem pode ser estendida a outros critérios. Assumir-se-á que o tempo pode ser usado directamente, ou que pode ser representado por uma sua função, como o atraso relativo a uma determinada data ou uma “função utilidade”, e que o valor financeiro é medido através do VAL. Assumir-se-á ainda que se pretende minimizar o tempo e maximizar o valor financeiro.

4.2.1 Linhas gerais da abordagem

Vai designar-se por *estratégia* o conjunto de decisões que, considerando todas as sequências possíveis de acontecimentos incertos, define completamente a execução de um projecto. A ideia principal da abordagem que se apresenta é determinar todas as estratégias potencialmente interessantes, permitindo ao utilizador escolher entre elas, ordená-las ou classificá-las através de um método multicritério que considere adequado. Esta ideia apresenta o benefício de permitir ao agente de decisão analisar o conjunto de todas as alternativas interessantes antes de escolher um método multicritério, e até mesmo antes de decidir o que pretende fazer: se uma escolha, uma ordenação, ou uma classificação das alternativas interessantes. Desta forma, a própria escolha do método multicritério pode incorporar informação adicional sobre as alternativas.

Uma estratégia é *dominada* se existir outra estratégia melhor ou igual em todos os critérios e estritamente melhor em pelo menos um critério. Uma estratégia é *não dominada* se não existe nenhuma outra estratégia melhor ou igual em todos os critérios e estritamente melhor em, pelo menos, um critério. Supondo que se estão a utilizar como critérios o tempo e o valor financeiro, então uma estratégia será não dominada se nenhuma outra tiver um tempo menor ou igual e um valor financeiro maior ou igual, sendo a desigualdade estrita para um dos critérios. Foi considerado que as estratégias dominadas não são interessantes pois, para cada uma destas, deve existir uma outra estratégia que a domine, e, se os critérios utilizados tiverem sido escolhidos por forma a reflectir tudo o que o agente de decisão considera relevante, esta última deverá ser preferida. Assim, apenas as estratégias não dominadas irão ser geradas; estas são as estratégias potencialmente interessantes.

Será necessário definir como são agregados os valores dos critérios através dos nodos de incerteza da árvore. Note-se que, neste contexto, o verbo "agregar" se refere à obtenção de um valor certo para um critério que seja equivalente a uma determinada distribuição de probabilidade de valores do mesmo critério, sendo este significado assumido ao longo do presente trabalho. Propor-se-á que a agregação dos critérios siga os princípios da abordagem das probabilidades neutrais face ao risco, para modelos de tempo discreto de avaliação de opções, isto é, que seja feita através do uso de um valor esperado que é calculado utilizando probabilidades ajustadas aos critérios. Para o valor financeiro será usado um modelo de tempo discreto de avaliação de opções (a presente descrição foca-se no modelo binomial, mas outros modelos podem também ser utilizados). Para o tempo será definido um método baseado em equivalentes certos. Será também definido um conjunto de regras a utilizar nos nodos de decisão que permitem que, no final, sejam geradas todas as estratégias não dominadas.

Esta abordagem foi definida pressupondo apoio computacional. Assim, assume-se que os cálculos envolvidos são automatizados, e que a definição das árvores de decisão é uma

tarefa para o analista. Por forma a simplificar a definição das árvores, será definido um novo tipo de nodo: o nodo de passagem do tempo. Este nodo poderá ser utilizado para a representação de uma sequência de nodos de incerteza correspondentes à passagem do tempo, por forma a tornar a representação das árvores mais simples e compacta.

4.2.2 O nodo de passagem do tempo

O *nodo de passagem do tempo* representa a passagem do tempo e as correspondentes alterações no valor financeiro.



Figura 4.1: Nodo de passagem do tempo.

O nodo da figura 4.1 traduz a passagem de n unidades de tempo. Os seus ramos representam todos os estados da natureza possíveis após a passagem desse tempo. Se os critérios a utilizar forem o tempo e o valor financeiro, e se o valor financeiro seguir um processo binomial (como é frequentemente assumido), então o número de ramos a sair do nodo é igual a $n + 1$. Noutras situações, como, por exemplo, se o número de critérios for superior, ou se se fizer uso de modelos mais complexos para descrever a evolução do valor do projecto, o número de ramos a saírem do nodo é superior. Numa situação em que se utilizem dois critérios e um processo binomial multiplicativo, se se fizer $n = 2$, se T representar o tempo e V representar o valor financeiro, então o nodo de passagem do tempo que se obtém é equivalente à sequência de nodos de incerteza representados na figura 4.2. Esta equivalência permite que, à parte do significado próprio dos nodos de passagem do tempo, cada um destes possa ser tratado exactamente como uma sequência de nodos de incerteza.

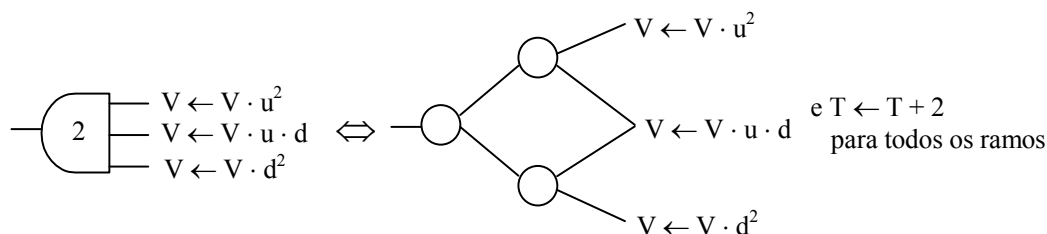


Figura 4.2: Equivalência entre um nodo de passagem do tempo e uma sequência de nodos de incerteza.

Na figura 4.2 assume-se que o valor financeiro V se pode tornar $V \cdot u$ ou $V \cdot d$ com a passagem de uma unidade de tempo. Por forma a não complicar a figura, optou-se por não incluir nesta as probabilidades dos ramos. Se as probabilidades originais para os valores $V \cdot u$ e $V \cdot d$ forem, respectivamente, p_u e p_d , com $p_u + p_d = 1$, então as probabilidades dos ramos do nodo de passagem de tempo serão (do ramo de cima da figura para o de baixo) p_u^2 , $2 \cdot p_u \cdot p_d$ e p_d^2 .

A análise da figura 4.2 torna claro que a utilização do nodo de passagem do tempo pode tornar substancialmente mais simples e compacta a representação das árvores de decisão multicritério. No entanto, o esforço computacional para avaliação das árvores não é reduzido de forma muito significativa pela utilização deste novo tipo de nodo. Tomando em consideração que esta abordagem foi pensada para ser usada em sistemas computacionais, e que os cálculos a efectuar em cada nodo não serão muito complexos, constata-se que a principal dificuldade na utilização deste tipo de árvores reside na sua definição. Assim sendo, o nodo de passagem de tempo torna-se um elemento muito importante de simplificação.

4.2.3 Linhas gerais da avaliação das árvores de decisão

A avaliação de árvores de decisão vai consistir num processo em duas fases: numa primeira fase são determinados os valores dos critérios correspondentes a cada folha, e numa segunda são agregados esses valores através da árvore por forma a obter o conjunto de estratégias não dominadas.

A primeira fase corresponde ao percurso da árvore da raiz para cada folha. Neste percurso, os incrementos ou decrementos dos valores dos critérios vão ser propagados, por forma a serem obtidos os valores dos critérios correspondentes a cada folha. Se o nodo de passagem do tempo for utilizado de forma sistemática, todos os incrementos do critério tempo corresponderão a passagens por um nodo deste tipo, e a determinação do tempo correspondente a cada folha será particularmente simples. Os incrementos/decrementos do valor financeiro podem ocorrer de várias formas possíveis. A mais simples destas consiste em definir directamente na árvore incrementos/decrementos ao valor financeiro final; se esta forma for utilizada, basta adicionar todos estes incrementos/decrementos para obter o valor financeiro correspondente a cada folha. Outra forma consiste em definir *cash flows* ou variações dos *cash flows*. Quando esta forma for utilizada, será necessário calcular o valor actual de cada *cash flow*, sendo, para tal, necessário o tempo correspondente ao ponto da árvore em que este ocorre⁵⁸. Uma vez que se utilizam probabilidades neutrais face ao risco,

⁵⁸Poderá ser ainda necessária informação adicional. Por exemplo, se a taxa de actualização depender dos acontecimentos incertos é necessário saber o valor desta taxa que corresponde a cada *cash flow*.

este é incorporado através das probabilidades e, conseqüentemente, os *cash flows* devem ser actualizados à taxa de juro sem risco.

Por vezes, não é o tempo absoluto que interessa ao agente de decisão, mas sim uma determinada função deste. Pode, por exemplo, interessar apenas o atraso relativamente a uma determinada data, ou o atraso ser indiferente se for superior a um dado período, ou pode mesmo julgar-se conveniente converter o tempo numa “utilidade”. No caso de se pretender efectuar esta conversão, ela deve ser feita no final da primeira fase, e consiste em aplicar ao tempo absoluto uma função que o transforme no tipo de valor (atraso, adiantamento, “utilidade”, etc.) que se pretende utilizar. Note-se que esta conversão do tempo pode implicar uma abordagem que necessite de interacção com o agente de decisão. Para maior facilidade de exposição vai, durante a maior parte do presente capítulo, referir-se o critério tempo como se este consistisse no tempo absoluto. No entanto, a exposição é também válida para a utilização de uma função do valor do critério tempo.

A segunda fase da avaliação das árvores consiste em percorrer a árvore das folhas para a raiz, agregando sucessivamente os valores dos critérios por forma a obter, ao chegar à raiz, o conjunto de estratégias não dominadas. Para tal vai ser necessário agregar os valores dos critérios através dos sucessivos nodos de incerteza e de decisão⁵⁹.

A agregação através dos nodos de incerteza é feita por ajustamento das probabilidades e com utilização do valor esperado. Cada critério é tratado independentemente, sendo, para cada ramo do nodo de incerteza, calculada uma probabilidade ajustada ao critério, e posteriormente determinado o valor esperado deste. No caso do critério tempo, esse ajustamento far-se-á de acordo com um método que se baseia no pedido de alguns equivalentes certos e, no caso do critério valor financeiro, o ajustamento das probabilidades é feito de acordo com um modelo de avaliação de opções em tempo discreto. Note-se que esta abordagem pode também utilizar, para o critério valor financeiro, a agregação clássica em árvores de decisão, bastando recorrer às probabilidades originais e ao custo do capital ajustado ao risco do projecto. No entanto, como foi indicado no capítulo 3, esta forma de agregação não fornece resultados coerentes com a teoria financeira.

A agregação através dos nodos de decisão deve permitir a obtenção, na raiz da árvore, de todas as estratégias não dominadas. Para que tal seja possível, é definido um conjunto de regras que adiam a escolha entre alternativas que possam conduzir a estratégias não dominadas, ao mesmo tempo que vão eliminando as alternativas que conduzem forçosamente a estratégias dominadas.

⁵⁹ Como foi indicado em 4.2.2, os nodos de passagem do tempo podem ser tratados como sequências de nodos de incerteza.

4.2.4 A agregação dos valores dos critérios em nodos de incerteza

4.2.4.1 Agregação do critério valor financeiro

Para o critério valor financeiro, o valor correspondente a um nodo de incerteza será o valor financeiro esperado dos ramos, calculado utilizando as probabilidades ajustadas ao valor. Este ajustamento é feito através de um modelo de tempo discreto de avaliação de opções (as probabilidades ajustadas serão as probabilidades neutrais face ao risco, descritas na secção 3.4). Neste trabalho apenas se utiliza o modelo binomial; no entanto, outros modelos de tempo discreto de avaliação de opções podem também ser usados.

Os modelos de avaliação de opções baseiam-se na variação dos valores de mercado de um activo subjacente. Quando se consideram opções reais, podem existir alguns riscos que não sejam reflectidos pelo comportamento de nenhum activo transaccionado em mercado – ou seja, podem existir riscos privados. Na abordagem que se apresenta, estes riscos correspondem a nodos de incerteza relativos a acontecimentos que apenas afectam o valor do projecto. Neste tipo de nodos, seguir-se-á a abordagem, apresentada em 3.4.5.2, que consiste em não ajustar as probabilidades originais (utilizar probabilidades ajustadas ao valor iguais às probabilidades originais dos ramos). Uma vez que só os nodos de incerteza que implicam a passagem do tempo influenciam o valor dos activos transaccionados em mercado, só para estes nodos será necessário calcular as probabilidades ajustadas ao valor.

4.2.4.2 Agregação do critério tempo

Contrariamente ao que se passa com a agregação do valor financeiro, não está universalmente aceite uma forma única para agregar o tempo. Assim, esta agregação pode ser feita de várias formas diferentes, dependendo da situação que estiver a ser considerada. Muitas vezes o tempo médio necessário para terminar o projecto, ou o atraso médio relativo a uma determinada data, constituem a melhor forma de agregar o tempo. Numa tal situação as probabilidades ajustadas ao tempo são iguais às originais. Noutras situações só o pior caso – o tempo máximo – interessa. Isto pode acontecer quando o agente de decisão só está interessado em alternativas que garantam que o projecto seja concluído dentro de um determinado prazo. Neste caso, as probabilidades ajustadas ao tempo são de 100% para o ramo com maior tempo (ou para um dos ramos com maior tempo, em caso de empate) e de 0% para os restantes. Pode ainda o agente de decisão pretender tomar em consideração tanto o tempo médio como o tempo máximo. Na utilização da abordagem que se apresenta, o tempo pode ser representado por mais do que um critério, pelo que o tempo médio e o tempo máximo podem ser utilizados simultaneamente e tratados como critérios diferentes⁶⁰.

⁶⁰Neste caso, somente quando for efectuada a análise das estratégias não dominadas será necessário definir como é que cada um dos critérios que medem o tempo deve ser tomado em consideração. Durante a fase de construção do modelo (árvore) e obtenção das estratégias não dominadas, apenas é necessário definir que critério ou critérios vão medir o tempo.

Parece provável que, por vezes, o agente de decisão não pretenda utilizar nenhum destes métodos, pretendendo que um tempo incerto seja considerado equivalente a um determinado tempo certo entre o tempo médio e o tempo máximo, e agregado como tal. Por exemplo, se existir uma probabilidade de 50% de completar um projecto em 12 meses, e uma probabilidade idêntica de o completar em 24 meses, o agente de decisão pode muitas vezes considerar esta situação equivalente a um tempo certo entre 18 meses (tempo médio) e 24 meses (tempo máximo).

Assim, foi definido um novo método, mais geral, para a agregação do tempo nos nodos de incerteza. Este método é inspirado na abordagem das probabilidades neutrais face ao risco para modelos de tempo discreto de avaliação de opções, e utiliza equivalentes certos: confrontado com uma situação em que o decorrer do projecto irá conduzir a um valor incerto para esse critério, o agente de decisão considera essa situação equivalente a um determinado valor para o critério tempo. Assumindo linearidade, esse valor pode ser obtido por ajustamento das probabilidades originais e utilização do valor esperado. O método assume que o agente de decisão efectuará sempre o mesmo ajustamento implícito para as mesmas probabilidades originais, e, assim, estas probabilidades implícitas, ou probabilidades ajustadas ao tempo, são utilizadas sempre que as mesmas probabilidades originais ocorram (estando os valores do tempo na mesma ordem).

Para concretizar, considere-se a situação correspondente à figura 4.3. Se o agente de decisão considerar que esta situação é equivalente a um tempo certo de 2.5 (isto é, se fornecer um equivalente certo de 2.5), então está a ajustar implicitamente ambas as probabilidades para (50%, 50%)⁶¹. Então, sempre que na árvore de decisão ocorrer um nodo com probabilidades originais (60%, 40%) e com o maior tempo correspondente à probabilidade de 40%, as probabilidades ajustadas ao tempo dos ramos serão de (50%, 50%). Para simplificar a representação das probabilidades dos ramos, vai passar a assumir-se que os tuplos que as representam estão ordenados por ordem crescente dos tempos dos respectivos ramos. Como a utilização de nodos de incerteza com dois ramos será de particular interesse, vai atribuir-se a estes nodos a designação particular de nodos binomiais.

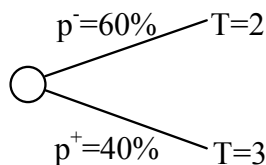


Figura 4.3: Exemplo de nodo binomial com um tempo incerto.

⁶¹ Designando por p_T^- e p_T^+ as probabilidades ajustadas, estas devem obedecer a $p_T^- \cdot 2 + p_T^+ \cdot 3 = 2.5$. Como, além disso, $p_T^- + p_T^+ = 1$, tem-se que $p_T^- = p_T^+ = 50\%$.

Considere-se agora o nodo binomial genérico da figura 4.4. Seja m o menor tempo, M o maior tempo⁶², p^- e p^+ as correspondentes probabilidades, e EC o tempo equivalente certo fornecido pelo agente de decisão. Assumindo linearidade, constata-se que o tempo correspondente à agregação da distribuição de tempos do nodo será EC se as probabilidades ajustadas ao tempo forem⁶³

$$p_T^- = \frac{M - EC}{M - m} \quad (4.1)$$

$$p_T^+ = \frac{EC - m}{M - m} \quad (4.2)$$

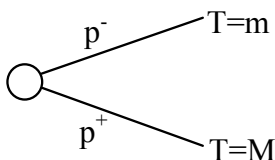


Figura 4.4: Nodo binomial genérico com tempo incerto.

Assim, as probabilidades ajustadas ao tempo (p_T^-, p_T^+) podem ser utilizadas cada vez que o par de probabilidades original (p^-, p^+) ocorra na árvore. Note-se que a escolha do maior tempo (M) como equivalente certo leva à utilização do tempo máximo, e a escolha da média dos tempos como equivalente certo leva à utilização do tempo médio. Assim, o tempo máximo e o médio são dois casos particulares deste método para agregação do tempo.

Se o processo utilizado para descrever a evolução dos valores do activo gémeo for mais complexo do que o binomial, então podem seguir-se mais do que dois ramos a um nodo de incerteza. Nestas situações, é necessário mais do que um equivalente certo para determinar as probabilidades ajustadas ao tempo correspondentes a um nodo. Por exemplo, se estiver a ser usado um processo trinomial, cada nodo correspondente à passagem de uma unidade de tempo é seguido por três ramos, e são necessários dois tempos equivalentes certos para calcular as suas probabilidades ajustadas ao tempo. Mesmo com um processo binomial, a mesma situação pode ocorrer nos nodos que não estejam relacionados com a passagem do tempo.

É possível determinar as probabilidades ajustadas de nodos de incerteza com mais que dois ramos através dum procedimento que se baseia em equivalentes certos de nodos binomiais. Considere-se um nodo de incerteza com $n > 2$ ramos que têm probabilidades

⁶²Tal como foi dito na subsecção 4.2.3, podemos aqui ter, em vez do tempo, uma função deste, como um atraso ou adiantamento relativamente a uma determinada data, ou uma “utilidade”.

⁶³Tem-se que $p_T^- \cdot m + p_T^+ \cdot M = CE$ e $p_T^- + p_T^+ = 1$. Resolvendo o sistema obtêm-se as expressões indicadas.

(p_1, p_2, \dots, p_n) (considera-se que estas probabilidades estão ordenadas por ordem crescente dos tempos correspondentes). As probabilidades ajustadas ao tempo podem ser calculadas da seguinte forma:

1. definir $q_k = \sum_{i=1}^k p_i, k = 1, \dots, n - 1$;
2. determinar as probabilidades ajustadas ao tempo para os pares de probabilidades $(q_k, 1 - q_k), k = 1, \dots, n - 1$; denominar por $(q_{T,k}, 1 - q_{T,k}), q_{T,k} \in]0, 1[$, o par de probabilidades ajustadas correspondente ao par original $(q_k, 1 - q_k)$;
3. definir uma nova sequência r_k , em que $r_0 = 0, r_n = 1$ e $r_k = q_{T,k}, k = 1, \dots, n - 1$;
4. calcular a probabilidade ajustada ao tempo do i -ésimo ramo do nodo inicial (isto é, a probabilidade ajustada ao tempo correspondente a p_i) como $p_{T,i} = r_i - r_{i-1}$.

Considere-se, por exemplo, um nodo de incerteza que tenha três ramos, com tempos T_1, T_2 e T_3 ($T_1 \leq T_2 \leq T_3$), e probabilidades p_1, p_2 e p_3 . Neste caso, são pedidos equivalentes certos para nodos binomiais com probabilidades $(p_1, p_2 + p_3)$ e $(p_1 + p_2, p_3)$. Se as correspondentes probabilidades ajustadas ao tempo forem $(p_{T,A}, 1 - p_{T,A})$ e $(p_{T,B}, 1 - p_{T,B})$, então as probabilidades ajustadas para os três ramos do nodo original serão $p_{T,A}, p_{T,B} - p_{T,A}$ e $1 - p_{T,B}$.

O facto de ser previsível que o agente de decisão tenha mais facilidade em fornecer um equivalente certo para uma distribuição com dois tempos possíveis do que para uma distribuição mais complexa, constitui um benefício da utilização exclusiva de equivalentes certos de nodos binomiais. Pode, no entanto, ser levantado o problema de saber em que condições é que os valores de $p_{T,i}$ obtidos são probabilidades (por construção, a sua soma é 1, mas nada garante que não possam existir valores negativos ou maiores do que 1). Este problema está relacionado com uma questão importante do cálculo das probabilidades ajustadas ao tempo: a coerência destas probabilidades.

A coerência tem a ver com a consistência interna dos equivalentes certos fornecidos pelo agente de decisão. Se os equivalentes certos revelarem contradições, estas serão reflectidas nas probabilidades ajustadas. Neste caso, não só pode acontecer que o procedimento apresentado para calcular probabilidades ajustadas para nodos com mais do que 2 ramos apresente probabilidades ajustadas negativas ou superiores a 1, como pode também acontecer que a própria validade dos princípios da abordagem que está a ser apresentada seja colocada em causa.

Antes de mais, defina-se o que se entende por coerência na agregação do tempo. Considere-se que a agregação do tempo é coerente se, e só se, obedecer às seguintes condições (uma definição formal de coerência é dada em 4.3.1):

- se se aumentar o tempo correspondente a um ramo, enquanto se mantêm fixos os tempos correspondentes aos restantes ramos e as probabilidades originais, então o tempo agregado que se obtém deve ser superior;

- se se mantiverem fixos os tempos correspondentes a todos os ramos e se se aumentar a probabilidade de um ramo com um tempo maior, enquanto se diminui a probabilidade de um ramo com um tempo menor, então o tempo agregado que se obtém deve ser superior.

Para a abordagem que se apresenta, é importante que os equivalentes certos fornecidos pelo agente de decisão, e as correspondentes probabilidades ajustadas ao tempo, conduzam a uma agregação coerente do tempo. A coerência pode ser conseguida através da imposição de limites aos valores dos equivalentes certos pedidos ao agente de decisão. Estes limites devem ser definidos pelos valores dos equivalentes certos anteriormente fornecidos, sendo particularmente simples a sua determinação no caso de apenas se pedirem equivalentes certos para nodos binomiais. Suponha-se que é pedido, ao agente de decisão, um equivalente certo para uma probabilidade p_1 de $T = m$, e uma probabilidade $1 - p_1$ de $T = M$ ($m < M$), e que o agente de decisão fornece um equivalente certo EC_1 , que conduz a probabilidades ajustadas ao tempo de $(p_{T,1}, 1 - p_{T,1})$. Como será mostrado em 4.3.2, para que estas probabilidades conduzam a uma agregação coerente do tempo é necessário e suficiente que:

- para cada nodo com probabilidades $(p_2, 1 - p_2)$, $p_2 < p_1$, para o qual já tenha sido fornecido um equivalente certo EC_2 , seja $EC_1 < EC_2$;
- para cada nodo com probabilidades $(p_3, 1 - p_3)$, $p_3 > p_1$, para o qual já tenha sido fornecido um equivalente certo EC_3 , seja $EC_1 > EC_3$.

Assim, é possível definir um intervalo a que o equivalente certo que vai ser pedido deve pertencer, por forma a garantir a coerência na agregação do tempo⁶⁴. Na secção 4.3 será mostrado que a coerência na agregação do tempo para nodos binomiais garante que o procedimento apresentado para nodos com mais do que dois ramos conduza a valores das probabilidades ajustadas pertencentes a $]0, 1[$, e garante ainda a coerência da agregação do tempo nestes nodos com mais do que 2 ramos.

Este método de agregação do tempo prevê que o agente de decisão forneça um ou mais equivalentes certos por cada combinação de probabilidades que ocorra nos nodos de incerteza. Assim, se o número de combinações de probabilidades for elevado, o agente de decisão terá que fornecer muitos equivalentes certos. Este pode parecer, à primeira vista, um inconveniente sério deste método, mas na realidade não é bem assim. Em primeiro lugar, porque na maior parte das árvores existe apenas um pequeno número de combinações de probabilidades (se o valor do activo gémeo seguir um processo binomial constante, então todos os nodos correspondentes à passagem do tempo terão as mesmas probabilidades). Por

⁶⁴Se forem impostos estes limites aos equivalentes certos pedidos ao agente de decisão, é importante que lhe seja permitido modificar os equivalentes certos anteriormente fornecidos, se estiver insatisfeito com os limites impostos.

outro lado, se existir um grande número de diferentes combinações de probabilidades na árvore, então métodos numéricos, como a interpolação, podem ser utilizados para aproximar alguns tempos equivalentes certos a partir de outros fornecidos anteriormente. A utilização de aproximações numéricas será particularmente interessante quando for pequena a diferença entre os limites superior e inferior do intervalo que é necessário respeitar para impôr coerência.

4.2.5 A avaliação dos nodos de decisão

Pretende-se que a avaliação da árvore forneça todas as estratégias não dominadas. Para o conseguir, vão ser utilizadas três regras para a avaliação dos nodos de decisão. Por forma a facilitar a exposição destas regras, elas irão ser apresentadas na forma de alterações da árvore de decisão. No entanto, estas alterações não têm que ser explicitamente efectuadas (a aplicação destas alterações pode ser conseguida através da associação dos nodos da árvore a conjuntos de alternativas, durante o processo de avaliação). Vai também, a partir de agora, utilizar-se a denominação de *subestratégia*, para indicar a sequência de decisões que define a execução do projecto a partir de um determinado momento.

A primeira regra prescreve que nodos de decisão consecutivos devem ser fundidos. Isto significa que, quando existirem nodos de decisão consecutivos, deve considerar-se a escolha entre todas as subestratégias relativas a estes nodos, e não escolhas sucessivas entre as subestratégias correspondentemente a nodos sucessivos. A figura 4.5 ilustra a utilização desta regra. Na situação representada na figura, a regra permite escolher directamente entre as subestratégias A, B e C, não sendo necessário escolher entre A e B antes de considerar C.

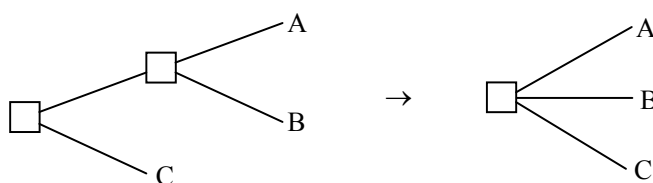


Figura 4.5: Aplicação da primeira regra para avaliação dos nodos de decisão. A, B e C são subestratégias.

A segunda regra prescreve que, se existir um nodo de incerteza antes de um nodo de decisão, a decisão deve ser adiada⁶⁵ através da consideração de todas as possíveis combinações de decisões. A figura 4.6 ilustra a aplicação desta regra. Note-se que, se o ramo de baixo desta figura contivesse um nodo de decisão com duas subestratégias, então o número total

⁶⁵Note-se que se está a fazer a avaliação da árvore das folhas para a raiz.

de subestratégias resultante no nodo de decisão seria quatro. Esta regra pode, assim, causar um grande crescimento do número de subestratégias. A próxima regra procura limitar esse crescimento, nos casos em que tal for possível.

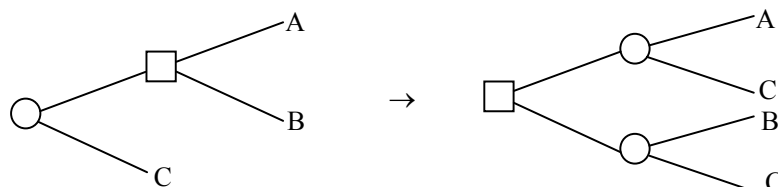


Figura 4.6: Aplicação da segunda regra para avaliação dos nodos de decisão. A, B e C são subestratégias.

A terceira regra prescreve a eliminação de todas as subestratégias dominadas num nodo de decisão. Isto significa que uma subestratégia pode ser eliminada num nodo de decisão se existir uma outra que seja melhor ou igual em todos os critérios e estritamente melhor em pelo menos um critério. Esta regra baseia-se na seguinte propriedade: se as probabilidades ajustadas forem estritamente positivas, e a agregação dos valores dos critérios for coerente⁶⁶, então uma subestratégia dominada num nodo de decisão conduz sempre a uma estratégia dominada (as definições matemáticas e demonstrações são apresentadas na secção 4.3). Refira-se que, se se utilizar como critério o tempo máximo (ou o tempo mínimo), então vão existir probabilidades ajustadas nulas, contrariando o pressuposto de as probabilidades ajustadas serem estritamente positivas. A única consequência de as probabilidades ajustadas poderem ser nulas é a possibilidade de não gerar algumas estratégias não dominadas que correspondem aos mesmos valores dos critérios de estratégias que são geradas (e isto apenas nalgumas situações). Assim, mesmo nesta situação, todas as estratégias não dominadas com valores dos critérios diferentes são geradas. Considerando que os critérios utilizados são os únicos critérios relevantes para o agente de decisão, então estas estratégias não dominadas alternativas que podem deixar de ser geradas não aumentam o leque de escolhas interessantes para o agente de decisão.

Este conjunto de três regras permite adiar as decisões envolvendo estratégias não dominadas até que todos os nodos de incerteza estejam avaliados. No final, resultará um conjunto de alternativas não dominadas, para cada uma das quais se terá o valor agregado de cada um dos critérios. Cada uma destas alternativas será, assim, uma estratégia completa. O agente de decisão pode, então, usar um método multicritério para decidir entre essas estratégias.

⁶⁶Na realidade, e como se mostrará na secção 4.3, basta que os critérios obedeçam a uma das condições que definem a coerência.

4.3 Definições e bases matemáticas da abordagem

4.3.1 Coerência na agregação de valores de critérios

Considere-se um critério K que pode tomar valores no conjunto convexo D_K . Considere-se uma situação em que K pode tomar um de n valores possíveis, cada um com uma dada probabilidade. Nessa situação, a agregação de uma distribuição de probabilidade discreta de valores do critério K num único valor pode ser definida como uma função $A(V_P, V_K)$, onde $V_K = (k_1, \dots, k_n) \in D_{V_K} = (D_K)^n$ é o tuplo com os diferentes valores que K pode assumir e $V_P = (p_1, \dots, p_n) \in D_{V_P} = \{(p_1, \dots, p_n) \in (\mathfrak{R}^+)^n : \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ é o tuplo com as probabilidades correspondentes. O domínio de $A(\cdot)$ será $D = D_{V_P} \times D_{V_K}$. Define-se que $A(\cdot)$ é uma função de agregação coerente em valor sse:

$$\begin{aligned} \forall V_P \in D_{V_P}, \forall (k_1, \dots, k_n) \in D_{V_K}, \forall i = 1, \dots, n, \forall \Delta > 0, \\ k_i + \Delta \in D_K \Rightarrow A(V_P, (k_1, \dots, k_i + \Delta, \dots, k_n)) > A(V_P, (k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Define-se que $A(\cdot)$ é uma função de agregação coerente em probabilidade sse

$$\begin{aligned} \forall (p_1, \dots, p_n) \in D_{V_P}, \forall (k_1, \dots, k_n) \in D_{V_K}, \forall i, j = 1, \dots, n, \forall \delta > 0, \\ [(\delta < p_i \wedge k_j > k_i)] \Rightarrow A((p_1, \dots, p_i - \delta, \dots, p_j + \delta, \dots, p_n), (k_1, \dots, k_i, \dots, k_j, \dots, k_n)) > \\ A((p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_n), (k_1, \dots, k_i, \dots, k_j, \dots, k_n)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Define-se que $A(\cdot)$ é uma função de agregação coerente sse $A(\cdot)$ for simultaneamente uma função de agregação coerente em valor e uma função de agregação coerente em probabilidade, ou seja, se obedecer simultaneamente às condições (4.3) e (4.4).

Se existir uma função $A^*(\cdot)$ definida em $D^* \subset D$ ⁶⁷, diz-se que $A^*(\cdot)$ é coerente / coerente em valor / coerente em probabilidade sse existir uma função $A(\cdot)$ tal que:

- o domínio de $A(\cdot)$ é D ,
- $A(\cdot)$ é uma função de agregação coerente / coerente em valor / coerente em probabilidade, e
- $\forall d \in D^*, A(d) = A^*(d)$.

⁶⁷Note-se que será este o caso do método para agregação do tempo proposto em 4.2.4.2, uma vez que apenas são definidas probabilidades ajustadas ao tempo para um conjunto limitado de combinações de probabilidades originais, e não para todo o conjunto D_{P_V} (não são calculadas probabilidades ajustadas ao tempo para combinações de probabilidades que não ocorram na árvore).

As definições de coerência, coerência em valor e coerência em probabilidade a considerar podem ser mais amplas se também se permitir a igualdade nos lados direitos das implicações nas expressões (4.3) e (4.4). Só estas definições mais amplas de coerência abrangem o caso de as probabilidades ajustadas serem nulas.

4.3.2 Coerência na agregação do valor financeiro e do tempo

Na subsecção 4.3.3 será mostrado que a coerência em valor é suficiente para assegurar a validade da regra que estabelece a eliminação das subestratégias dominadas. Assim, é importante verificar que condições garantem a coerência em valor para a agregação dos critérios que estão a considerar-se.

Considere-se o valor financeiro, e assuma-se a utilização de um modelo de tempo discreto de avaliação de opções com a abordagem das probabilidades neutrais face ao risco. Nos nodos de incerteza que não correspondem à passagem do tempo não existe ajustamento de probabilidades para cálculo do valor financeiro, sendo, portanto, imediato verificar que a agregação do valor financeiro é coerente em valor e coerente em probabilidade. Nos nodos correspondentes à passagem do tempo, se se adicionar Δ ao i -ésimo valor financeiro, e se $p_{V,i} > 0$ for a probabilidade ajustada deste valor, o valor financeiro agregado aumentará em $p_{V,i} \cdot \Delta > 0$, pelo que (4.3) se verifica. Assim, a abordagem das probabilidades neutrais face ao risco conduz a uma agregação do valor financeiro que é coerente em valor, desde que as probabilidades ajustadas sejam estritamente positivas. A análise da coerência em probabilidade nos nodos de passagem do tempo é mais complexa. Dado que a coerência em probabilidade da agregação do valor financeiro não será relevante para a abordagem que se apresenta, não se analisará este tipo de coerência. Note-se que a forma clássica de agregação do valor financeiro em árvores de decisão é coerente em valor e coerente em probabilidade, uma vez que não requer o ajustamento de probabilidades.

A coerência na agregação do tempo depende das probabilidades ajustadas ao tempo. Assim, no método proposto para agregação do tempo, a coerência na agregação deste critério depende dos equivalentes certos fornecidos pelo agente de decisão. Na análise que se segue, vai utilizar-se $T(V_P, V_T)$ para representar o valor agregado do tempo num nodo, sendo V_P o tuplo com as probabilidades dos diferentes ramos, que se assumem ser todas estritamente positivas, e V_T o tuplo com os correspondentes tempos. Vai manter-se a convenção de assumir que os tuplos estão ordenados por ordem crescente dos tempos correspondentes.

Vai mostrar-se que, se for utilizado o método proposto para agregação do tempo, então esta agregação em nodos binomiais é sempre coerente em valor, e vai apresentar-se uma

condição necessária e suficiente para que agregação do tempo em nodos binomiais seja coerente em probabilidade. Vai ainda mostrar-se que, se os equivalentes certos pedidos para os nodos binomiais conduzirem a uma agregação do tempo coerente em probabilidade, então o procedimento descrito em 4.2.4.2 para determinar as probabilidades ajustadas ao tempo em nodos com mais de 2 ramos, e que utiliza equivalentes certos de nodos binomiais, conduz a probabilidades ajustadas estritamente positivas e a uma agregação coerente do tempo.

Propriedade 4A *Assuma-se que a agregação do tempo é feita através do valor esperado, com probabilidades ajustadas estritamente positivas. Então a agregação do tempo em nodos de incerteza binomiais é sempre coerente em valor.*

Demonstração: Considere-se um nodo de incerteza binomial com probabilidades dos ramos $(p_1, 1 - p_1)$ e tempos (T_1, T_2) (como se está a seguir a convenção de os pares se encontrarem ordenados por ordem crescente dos tempos, então $T_1 \leq T_2$). Sejam $(p_{T,1}, 1 - p_{T,1})$, $p_{T,1} \in]0, 1[$, as probabilidades ajustadas ao tempo correspondentes às probabilidades originais do nodo. Considere-se agora um segundo nodo com as mesmas probabilidades originais e o mesmo tempo do primeiro ramo, mas em que o tempo do segundo ramo (T_2) é aumentado em $\Delta > 0$. A ordenação dos tempos é mantida, pois se $T_1 \leq T_2$ então $T_1 \leq T_2 + \Delta$. Neste caso

$$\begin{aligned} T((p_1, 1 - p_1), (T_1, T_2 + \Delta)) - T((p_1, 1 - p_1), (T_1, T_2)) &= \\ &= p_{T,1} \cdot T_1 + (1 - p_{T,1}) \cdot (T_2 + \Delta) - p_{T,1} \cdot T_1 - (1 - p_{T,1}) \cdot T_2 \\ &= (1 - p_{T,1}) \cdot \Delta > 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim, o aumento de T_2 não viola a coerência em valor.

Considere-se agora que, no segundo nodo, se aumenta T_1 em $\Delta > 0$. A relação de ordem entre T_1 e T_2 depende agora do valor de Δ . Comece por considerar-se que $T_1 + \Delta \leq T_2$. Neste caso

$$\begin{aligned} T((p_1, 1 - p_1), (T_1 + \Delta, T_2)) - T((p_1, 1 - p_1), (T_1, T_2)) &= \\ &= p_{T,1} \cdot (T_1 + \Delta) + (1 - p_{T,1}) \cdot T_2 - p_{T,1} \cdot T_1 - (1 - p_{T,1}) \cdot T_2 \\ &= p_{T,1} \cdot \Delta > 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Também neste caso a coerência em valor não é violada.

Analise-se então o caso em que $T_1 + \Delta > T_2$; a relação de ordem entre os dois tempos é invertida (assim, é necessário mudar a ordem dos elementos dos pares por forma a respeitar a convenção de ordenação por ordem crescente dos tempos). Seja $p_2 = 1 - p_1$, e sejam $(p_{T,2}, 1 - p_{T,2}), p_{T,2} \in]0, 1[$, as probabilidades ajustadas ao tempo correspondentes às probabilidades originais $(p_2, 1 - p_2)$ ⁶⁸. Neste caso

$$\begin{aligned} T((p_2, 1 - p_2), (T_1 + \Delta, T_2)) - T((p_1, 1 - p_1), (T_1, T_2)) &= \\ &= p_{T,2} \cdot (T_1 + \Delta) + (1 - p_{T,2}) \cdot T_2 - p_{T,1} \cdot T_1 - (1 - p_{T,1}) \cdot T_2 \\ &= p_{T,1} \cdot (T_2 - T_1) + p_{T,2} \cdot (T_1 - T_2 + \Delta) \\ &> 0 \quad (\text{pois } T_2 \geq T_1 \text{ e } T_1 + \Delta > T_2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Também neste caso a coerência em valor não é violada. Conclui-se, assim, que a coerência em valor se verifica sempre na agregação do tempo em nodos binomiais, se for utilizado o método baseado no ajustamento de probabilidades. ■

Propriedade 4B *Assuma-se que a agregação do tempo é feita através do valor esperado, com probabilidades ajustadas estritamente positivas. Então a agregação do tempo em nodos de incerteza binomiais é coerente em probabilidade sse as probabilidades originais $(p_1, 1 - p_1)$, $(p_2, 1 - p_2)$ e as correspondentes probabilidades ajustadas ao tempo $(p_{T,1}, 1 - p_{T,1})$, $(p_{T,2}, 1 - p_{T,2})$ obedecerem a $p_1 > p_2 \iff p_{T,1} > p_{T,2}$ para todos os pares de nodos considerados.*

Demonstração: Considere-se um nodo de incerteza binomial com probabilidades originais dos ramos $(p_1, 1 - p_1)$ e tempos $(T_1, T_2), T_1 < T_2$. Sejam $(p_{T,1}, 1 - p_{T,1}), p_{T,1} \in]0, 1[$, as probabilidades ajustadas ao tempo correspondentes às probabilidades originais do nodo. Considere-se agora um segundo nodo com os mesmos valores do tempo, mas com uma probabilidade $p_2 < p_1$ de ocorrência do tempo T_1 (neste segundo nodo existe uma probabilidade mais pequena de ocorrência do menor tempo do que no nodo inicial, e uma probabilidade maior de ocorrência do maior tempo). Mais concretamente, defina-se $p_2 = p_1 - \delta$, com $0 < \delta < p_1$, e sejam $(p_{T,2}, 1 - p_{T,2}), p_{T,2} \in]0, 1[$, as probabilidades ajustadas ao tempo correspondentes às probabilidades originais $(p_2, 1 - p_2)$. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} T((p_1 - \delta, (1 - p_1) + \delta), (T_1, T_2)) - T((p_1, 1 - p_1), (T_1, T_2)) &= \\ &= T((p_2, 1 - p_2), (T_1, T_2)) - T((p_1, 1 - p_1), (T_1, T_2)) \\ &= p_{T,2} \cdot T_1 + (1 - p_{T,2}) \cdot T_2 - p_{T,1} \cdot T_1 - (1 - p_{T,1}) \cdot T_2 \\ &= (p_{T,1} - p_{T,2}) \cdot (T_2 - T_1) \end{aligned} \quad (4.8)$$

⁶⁸Note-se que, apesar de $p_2 = 1 - p_1$, é possível (e provável) que, se for utilizado o método apresentado no presente capítulo para determinar as probabilidades ajustadas ao tempo, seja $p_{T,2} \neq 1 - p_{T,1}$.

Como $T_2 > T_1$, o tempo agregado no segundo nodo será superior ao do nodo inicial sse $p_{T,1} > p_{T,2}$. Se $p_1 > p_2 \iff p_{T,1} > p_{T,2}$ para um conjunto finito de nodos considerados, então é possível encontrar uma função estritamente crescente, com domínio $]0, 1[$, que transforme as probabilidades originais destes nodos nas suas probabilidades ajustadas. Assim, a agregação do tempo será coerente em probabilidade sse $\forall (p_1, 1 - p_1), (p_2, 1 - p_2), p_1 > p_2 \iff p_{T,1} > p_{T,2}$. ■

Nota 4B.1 *Esta propriedade mostra que a agregação do tempo em nodos binomiais é coerente em probabilidade sse a relação de ordem entre as probabilidades ajustadas ao tempo for idêntica à relação de ordem entre as probabilidades originais. Isto significa que a coerência em probabilidade nos nodos binomiais pode ser conseguida através da imposição de limites aos valores dos tempos equivalentes certos pedidos ao agente de decisão. Assuma-se que vai ser pedido ao agente de decisão um equivalente certo para um nodo com probabilidade p_1 de $T = m$ e probabilidade $1 - p_1$ de $T = M$ ($m < M$). Para cada nodo com probabilidades $(p_2, 1 - p_2)$, $p_2 < p_1$, para o qual já tenha sido pedido um equivalente certo, se a probabilidade ajustada ao tempo de p_2 for $p_{T,2}$, então a coerência em probabilidade exige que $p_{T,1} > p_{T,2}$. Desta forma, pode definir-se um limite superior para o equivalente certo do novo nodo que se está a considerar. Sendo $EC((p, 1 - p), (m, M))$ o equivalente certo correspondente ao par de probabilidades $(p, 1 - p)$ e ao par de tempos (m, M) , vem*

$$\begin{aligned}
 EC((p_1, 1 - p_1), (m, M)) &= p_{T,1} \cdot m + (1 - p_{T,1}) \cdot M = \\
 &= M - p_{T,1} \cdot (M - m) < \\
 &< M - p_{T,2} \cdot (M - m) = \\
 &= p_{T,2} \cdot m + (1 - p_{T,2}) \cdot M = \\
 &= EC((p_2, 1 - p_2), (m, M))
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ou seja, o equivalente certo fornecido para o novo nodo deve ser inferior aos equivalentes certos fornecidos para todos os nodos com probabilidades $(p_2, 1 - p_2)$, $p_2 < p_1$. Do mesmo modo se pode mostrar que o equivalente certo fornecido para o novo nodo deve ser superior aos equivalentes certos fornecidos para todos os nodos com probabilidades $(p_3, 1 - p_3)$, $p_3 > p_1$. Desta forma, é possível impor coerência em probabilidade na agregação do tempo, definindo limites para os equivalentes certos fornecidos.

Propriedade 4C *Considere-se o seguinte procedimento para determinar as probabilidades ajustadas ao tempo num nodo de incerteza com $n > 2$ ramos, o qual utiliza probabilidades ajustadas ao tempo de nodos binomiais:*

1. sendo (p_1, p_2, \dots, p_n) o tuplo de probabilidades do nodo, com as probabilidades ordenadas por ordem crescente dos tempos correspondentes, então definir $q_k = \sum_{i=1}^k p_i$, $k = 1, \dots, n - 1$;
2. determinar as probabilidades ajustadas ao tempo para os pares de probabilidades $(q_k, 1 - q_k)$, $k = 1, \dots, n - 1$; denominar por $(q_{T,k}, 1 - q_{T,k})$, $q_{T,k} \in]0, 1[$, o par de probabilidades ajustadas correspondente a $(q_k, 1 - q_k)$;
3. definir uma nova sequência r_k , em que $r_0 = 0$, $r_n = 1$ e $r_k = q_{T,k}$, $k = 1, \dots, n - 1$;
4. calcular a probabilidade ajustada ao tempo do i -ésimo ramo do nodo inicial (isto é, a probabilidade ajustada ao tempo correspondente a p_i) como $p_{T,i} = r_i - r_{i-1}$.

Se as probabilidades ajustadas ao tempo dos nodos binomiais conduzirem, nestes nodos, a uma agregação do tempo coerente em probabilidade, então:

- (a) as probabilidades ajustadas ao tempo do nodo inicial (com n ramos) são estritamente positivas;
- (b) a agregação do tempo no nodo inicial é coerente em valor;
- (c) a agregação do tempo no nodo inicial é coerente em probabilidade.

Demonstração: Sejam (p_1, p_2, \dots, p_n) e (T_1, T_2, \dots, T_n) os tuplos de probabilidades e valores do tempo do nodo inicial (os tempos estão ordenados por ordem crescente, como convencionado).

(a) Tal como está definida, a sequência q_k deve ser estritamente crescente (lembre-se que estão a assumir-se probabilidades originais estritamente positivas). Assim sendo, para que a agregação do tempo nos nodos binomiais seja coerente em probabilidade, a propriedade 4B exige que a sequência $q_{T,k}$ seja também estritamente crescente. Como se assume que as probabilidades ajustadas pertencem a $]0, 1[$, também a sequência r_k é estritamente crescente. Assim, $p_{T,i} = r_i - r_{i-1} > 0$, $i = 1, \dots, n$.

(b) Assuma-se que o tempo do i -ésimo ramo é aumentado em $\Delta > 0$. Se $T_i + \Delta \leq T_{i+1}$, então a relação de ordem entre os tempos mantém-se, como se mantêm as probabilidades ajustadas ao tempo. Dado que as probabilidades ajustadas ao tempo são estritamente positivas, o tempo agregado aumenta em $p_{T,i} \cdot \Delta > 0$.

Considere-se, então, o caso em que $T_i + \Delta > T_{i+1}$. Seja $j = \max \{k : T_k < T_i + \Delta\}$. Então $\Delta > T_j - T_i$, podendo escrever-se Δ do seguinte modo

$$\Delta = T_j - T_i + \Delta', \text{ com } \Delta' > 0 \quad (4.10)$$

A ordem relativa dos tempos é alterada. Por forma a manter os tempos ordenados por ordem crescente, é necessário recuar em uma posição os elementos entre as posições $i + 1$ (inclusivé) e j (inclusivé) dos tuplos de tempos e probabilidades, e avançar o elemento na posição i para a posição j . O tuplo de tempos passará assim a ser $(T_1, \dots, T_{i-1}, T_{i+1}, \dots, T_j, T_i, T_{j+1}, \dots, T_n)$. O novo tuplo de probabilidades pode ser escrito como (p'_1, \dots, p'_n) , em que p'_k é definido da seguinte forma: $p'_k = p_k, k = 1, \dots, i - 1, j + 1, \dots, n, p'_j = p_i$ e $p'_k = p_{k+1}, k = i, \dots, j - 1$. As sequências q_k, r_k e $p_{T,k}$ correspondentes a esta nova situação serão designadas por q'_k, r'_k e $p'_{T,k}$, respectivamente.

Note-se que $q'_{k-1} = q_k - p_i, k = i + 1, \dots, j$, o que implica que $q'_{k-1} < q_k, k = i + 1, \dots, j$. Assim, por forma a que a agregação do tempo nos nodos binomiais seja coerente em valor é necessário que (de acordo com a propriedade 4B)

$$r'_{k-1} < r_k, k = i + 1, \dots, j \quad (4.11)$$

Saliente-se também que $q'_k = q_k, k = 1, \dots, i - 1, j, \dots, n - 1$. Pela definição de r_k e r'_k, j , e pela definição de $p_{T,k}$ e $p'_{T,k}$, será

$$r'_k = r_k, k = 0, \dots, i - 1, j, \dots, n \quad (4.12)$$

$$p'_{T,k} = p_{T,k}, k = 1, \dots, i - 1, j + 1, \dots, n \quad (4.13)$$

A variação do tempo agregado resultante da adição de Δ ao tempo do i -ésimo ramo pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
& T((p'_1, \dots, p'_n), (T_1, \dots, T_{i-1}, T_{i+1}, \dots, T_j, T_i, T_{j+1}, \dots, T_n)) - T((p_1, \dots, p_n), (T_1, \dots, T_n)) = \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} p'_{T,k} \cdot T_k + \sum_{k=i}^{j-1} p'_{T,k} \cdot T_{k+1} + p'_{T,j} \cdot (T_i + \Delta) + \sum_{k=j+1}^n p'_{T,k} \cdot T_k - \sum_{k=1}^n p_{T,k} \cdot T_k \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} p'_{T,k} \cdot T_{k+1} + p'_{T,j} \cdot (T_i + \Delta) - \sum_{k=i}^j p_{T,k} \cdot T_k \quad (\text{por (4.13)}) \\
&= \sum_{k=i+1}^j p'_{T,k-1} \cdot T_k + p'_{T,j} \cdot T_i + p'_{T,j} \cdot \Delta - \sum_{k=i}^j p_{T,k} \cdot T_k \\
&= \sum_{k=i+1}^j (p'_{T,k-1} - p_{T,k}) \cdot T_k + p'_{T,j} \cdot T_i + p'_{T,j} \cdot (T_j - T_i + \Delta') - p_{T,i} \cdot T_i \quad (\text{usando (4.10)}) \\
&= \sum_{k=i+1}^j [(r'_{k-1} - r'_{k-2}) - (r_k - r_{k-1})] \cdot T_k + (r'_j - r'_{j-1}) \cdot T_j - (r_i - r_{i-1}) \cdot T_i + p'_{T,j} \cdot \Delta' \\
&= \sum_{k=i+1}^j (r'_{k-1} - r_k) \cdot T_k - \sum_{k=i+1}^j (r'_{k-2} - r_{k-1}) \cdot T_k + (r'_{i-1} - r_i) \cdot T_i + (r'_j - r'_{j-1}) \cdot T_j + p'_{T,j} \cdot \Delta' \\
& \hspace{15em} (\text{usando (4.12)}) \\
&= \sum_{k=i}^j (r'_{k-1} - r_k) \cdot T_k - \sum_{k=i}^{j-1} (r'_{k-1} - r_k) \cdot T_{k+1} + (r'_j - r'_{j-1}) \cdot T_j + p'_{T,j} \cdot \Delta' \\
&= \sum_{k=i}^{j-1} (r'_{k-1} - r_k) \cdot (T_k - T_{k+1}) + (r'_{j-1} - r_j) \cdot T_j + (r'_j - r'_{j-1}) \cdot T_j + p'_{T,j} \cdot \Delta' \\
&= \sum_{k=i+1}^{j-1} (r_k - r'_{k-1}) \cdot (T_{k+1} - T_k) + (r_i - r'_{i-1}) \cdot (T_{i+1} - T_i) + (r'_j - r_j) \cdot T_j + p'_{T,j} \cdot \Delta' \\
&= \sum_{k=i+1}^{j-1} (r_k - r'_{k-1}) \cdot (T_{k+1} - T_k) + (r_i - r_{i-1}) \cdot (T_{i+1} - T_i) + p'_{T,j} \cdot \Delta' \quad (\text{por (4.12)}) \\
&> 0 \quad (\text{por (4.11), porque } T_{k+1} \geq T_k, k = 1, \dots, n-1 \text{ e } r_i > r_{i-1} \text{ e } p'_{T,j}, \Delta' > 0) \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Assim, fica provado que o aumento de um qualquer dos possíveis valores do tempo conduz a um tempo agregado maior. Por isso, a agregação é coerente em valor.

(c) Assuma-se agora que os valores do tempo do nodo inicial se mantêm, mas que a probabilidade de ocorrência do tempo T_i é diminuída em δ , com um correspondente aumento da probabilidade de ocorrência do tempo T_j , $T_j > T_i$ (e, devido à convenção de ordenação dos tempos por ordem crescente, $i < j$). O tuplo de tempos mantém-se, e o novo tuplo de probabilidades pode ser escrito como (p'_1, \dots, p'_n) , em que p'_k é definido do seguinte modo: $p'_k = p_k, k = 1, \dots, n, k \neq i, j$; $p'_i = p_i - \delta$; e $p'_j = p_j + \delta$, com $0 < \delta < p_i$. As

sequências q_k , r_k e $p_{T,k}$ correspondentes a esta nova situação serão designadas por q'_k , r'_k e $p'_{T,k}$, respectivamente.

Dado que $p'_i = p_i - \delta$, então $q'_k = q_k - \delta$, $k = i, \dots, j - 1$, o que implica que $q'_k < q_k$, $k = i, \dots, j - 1$. Assim, por forma a que a agregação nos nodos binomiais seja coerente em valor é necessário que (de acordo com a propriedade 4B)

$$r'_k < r_k, k = i, \dots, j - 1 \quad (4.15)$$

Saliente-se também que $q'_k = q_k$, $k = 1, \dots, i - 1, j, \dots, n - 1$. Pela definição de r_k e r'_k , e pela definição de $p_{T,k}$ e $p'_{T,k}$ vem

$$r'_k = r_k, k = 0, \dots, i - 1, j, \dots, n \quad (4.16)$$

$$p'_{T,k} = p_{T,k}, k = 1, \dots, i - 1, j + 1, \dots, n \quad (4.17)$$

A variação do tempo agregado resultante da alteração das probabilidades pode ser calculada como

$$\begin{aligned} & T((p'_1, \dots, p'_n), (T_1, \dots, T_n)) - T((p_1, \dots, p_n), (T_1, \dots, T_n)) = \\ &= \sum_{k=1}^n p'_{T,k} \cdot T_k - \sum_{k=1}^n p_{T,k} \cdot T_k \\ &= \sum_{k=i}^j (p'_{T,k} - p_{T,k}) \cdot T_k \quad (\text{por (4.17)}) \\ &= \sum_{k=i}^j [(r'_k - r'_{k-1}) - (r_k - r_{k-1})] \cdot T_k \\ &= \sum_{k=i}^j (r_{k-1} - r'_{k-1}) \cdot T_k - \sum_{k=i}^j (r_k - r'_k) \cdot T_k \\ &= \sum_{k=i-1}^{j-1} (r_k - r'_k) \cdot T_{k+1} - \sum_{k=i}^j (r_k - r'_k) \cdot T_k \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} (r_k - r'_k) \cdot (T_{k+1} - T_k) + (r_{i-1} - r'_{i-1}) \cdot T_i - (r_j - r'_j) \cdot T_j \\ &= \sum_{k=i}^{j-1} (r_k - r'_k) \cdot (T_{k+1} - T_k) \quad (\text{por (4.16)}) \\ &> 0 \quad (\text{por (4.15) e porque } T_{k+1} \geq T_k, k = i, \dots, j - 1 \text{ e } T_j > T_i) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Assim, fica provado que a agregação do tempo é coerente em probabilidade. ■

4.3.3 Fundamentos para a eliminação de subestratégias dominadas

Vão agora apresentar-se propriedades matemáticas que estabelecem a validade da eliminação das subestratégias dominadas num nodo de decisão. Vai demonstrar-se que, se a agregação dos critérios for coerente em valor, então todas as subestratégias dominadas num nodo de decisão conduzem a estratégias dominadas. Vai ainda demonstrar-se que, se os nodos de incerteza forem binomiais, e se os critérios forem o tempo e o valor financeiro, então basta assumir que a agregação dos critérios utiliza os métodos baseados no ajustamento das probabilidades que foram propostos no presente capítulo, para concluir que as subestratégias dominadas conduzem a estratégias dominadas.

Propriedade 4D *Se a agregação de todos os critérios for coerente em valor, então todas as estratégias que contenham uma subestratégia dominada serão dominadas.*

Demonstração: Considere-se um nodo de decisão que contém uma subestratégia s'_1 , dominada pela subestratégia s'_2 . Se o nodo pai desse nodo de decisão for também um nodo de decisão, então as subestratégias s'_1 e s'_2 também serão alternativas possíveis nesse nodo (sem alteração de valores), e s'_1 continuará a ser dominada por s'_2 .

Se o nodo pai for um nodo de incerteza, então (4.3) garante que qualquer subestratégia s_1 gerada nesse nodo e que inclua s'_1 será dominada por uma subestratégia s_2 , em que s'_2 ocorre em vez de s'_1 , e que é no restante idêntica a s_1 . Isto prova que uma subestratégia dominada apenas gera, no nodo pai, subestratégias dominadas. Por indução conclui-se que uma subestratégia dominada conduz, em todos os nodos antecedentes, a subestratégias dominadas e, conseqüentemente, conduz, na raiz, a uma estratégia dominada. ■

Nota 4D.1 *Se se utilizar um conceito mais amplo de coerência, por forma a que as probabilidades ajustadas possam ser nulas (o que se passa, por exemplo, se se utilizar como critério o tempo máximo ou o tempo mínimo), então poderá ocorrer uma igualdade no lado direito da implicação em (4.3). Isto significa que, em vez de s_1 ser sempre dominada por s_2 , poderá acontecer que os valores dos critérios venham a ser iguais para as duas subestratégias. Poderá, assim, ocorrer que a eliminação das subestratégias dominadas conduza a que não sejam geradas algumas estratégias não dominadas que correspondem aos mesmos valores dos critérios de estratégias que são geradas.*

Propriedade 4E *Se se verificarem simultaneamente as seguintes condições:*

- os critérios utilizados serem o tempo e o valor financeiro;
- a agregação do valor financeiro ser baseada na abordagem das probabilidades neutrais face ao risco com probabilidades ajustadas estritamente positivas, ou ser feita de acordo com a agregação clássica em árvores de decisão;

- a agregação do tempo ser baseada na utilização do valor esperado com probabilidades ajustadas estritamente positivas; e
 - os nodos de incerteza serem binomiais;
- então todas as estratégias que contenham uma subestratégia dominada serão dominadas.

Demonstração: Em 4.3.2 argumentou-se que a agregação do valor financeiro, através da abordagem das probabilidades neutrais face ao risco com probabilidades ajustadas estritamente positivas, ou através da agregação clássica em árvores de decisão, é coerente em valor. Na mesma subsecção, na propriedade 4A, mostrou-se que a agregação do tempo em nodos binomiais com probabilidades ajustadas estritamente positivas é sempre coerente em valor. Assim, pode ser aplicada a esta situação a propriedade 4D para concluir que todas as estratégias que contenham uma subestratégia dominada serão dominadas. ■

Nota 4E.1 *Se as probabilidades ajustadas puderem ser nulas, pode ocorrer a situação descrita na nota 4D.1.*

4.4 Exemplo de aplicação

Vai agora apresentar-se um exemplo de aplicação da abordagem exposta neste capítulo. Este exemplo irá ilustrar a forma como podem ser determinadas as estratégias não dominadas quando o tempo e o valor financeiro são os critérios relevantes. Note-se que muitos dos pressupostos de que se parte neste exemplo poderiam ser integrados, como alternativas ou factores de incerteza, no modelo, com o efeito de o tornar mais complexo.

Vai ser considerado o caso de uma empresa que pretende construir uma nova fábrica para produzir um produto novo, que ainda não é produzido nem comercializado. Os gestores esperam que outras empresas tentem, no futuro, colocar no mercado produtos semelhantes. Se a concorrência aparecer depois de a empresa ter introduzido o produto no mercado, os gestores pensam que os concorrentes terão dificuldade em ter sucesso e poderão acabar por desistir. No entanto, se um produto semelhante for introduzido no mercado antes de a empresa iniciar a produção, então será a empresa a ter mais dificuldades em comercializar o seu produto com sucesso. Uma vez que não existem indicações acerca de quando os potenciais concorrentes terão tecnologia e capacidade para produzir produtos semelhantes, os gestores pretendem construir a fábrica o mais rapidamente possível, e pretendem também maximizar o valor do projecto. Assim, os critérios relevantes serão o tempo até ao início da produção e o valor financeiro (VAL) do projecto.

A decisão de iniciar imediatamente a construção já foi tomada, e dois processos diferentes, A e B, podem ser usados para construir a fábrica. Se for utilizado o processo B, a

construção irá demorar um ano. Se for utilizado o processo A, então existe uma probabilidade de 50% de a construção demorar um ano, e uma probabilidade de 50% de demorar dois anos. O processo A requer o investimento de 7 000 000 euros, e o processo B o de 8 000 000 euros. Os gestores esperam que o projecto venha a gerar uma corrente perpétua de *cash flows*. De acordo com alguns estudos preliminares, se a fábrica já estivesse construída iria gerar um *cash flow* de 1 000 000 euros no ano presente. Assume-se que em cada ano as condições de mercado levem à existência de uma probabilidade de 50% de haver um aumento de 20% no valor dos *cash flows*, e uma probabilidade idêntica de haver uma diminuição de 20% no valor destes. O custo do capital para projectos com risco semelhante é $r = 10\%$, e a taxa de juro sem risco é $r_F = 6\%$. Depois de a fábrica estar concluída, e antes de a produção se iniciar, existe a hipótese de executar modificações na fábrica. Essas modificações demorarão um ano a ser executadas, requerem um investimento de 2 500 000 euros, e permitirão à fábrica gerar um *cash flow* anual fixo de 750 000 euros.

A árvore de decisão correspondente a este projecto, e os respectivos resultados, são mostrados na figura 4.7. Nesta figura, cada alternativa é identificada pelo conjunto de folhas que lhe deu origem. Depois de se construir a árvore, começa por calcular-se os valores dos critérios correspondentes às folhas. Para exemplificar, veja-se como tais cálculos são feitos para as folhas F1 e F14:

- Em F1 é utilizado o processo A, e não são efectuadas modificações na fábrica. A construção demora dois anos, pelo que o tempo correspondente a esta folha será $T = 2$. Uma vez que o valor dos *cash flows* tem duas subidas antes do início da construção, o *cash flow* esperado para o primeiro ano de operação será $CF = 1\,000 \cdot 1.2^2 = 1\,440$, mantendo-se o *cash flow* esperado idêntico para todos os anos futuros⁶⁹. Assim, o valor actual no ano 2 será $VA_2 = \frac{1\,440}{10\%} = 14\,400$, e $VAL = -7\,000 + \frac{14\,400}{1.06^2} = 5\,816$.
- Em F14 é utilizado o processo B e são efectuadas modificações na fábrica. A construção demora um ano, e as modificações demoram outro ano, pelo que o tempo correspondente a esta folha será $T = 1 + 1 = 2$. Uma vez que são feitas as alterações, o valor dos *cash flows* será sempre $CF = 750$. Como deixa de existir risco (os *cash flows* passam a ser fixos), vai utilizar-se a taxa de juro sem risco para calcular o valor actual no ano 2, que será, assim, $VA_2 = \frac{750}{6\%} = 12\,500$, e $VAL = -8\,000 - \frac{2\,500}{1.06} + \frac{12\,500}{1.06^2} = 766$.

Depois de serem calculados os valores dos critérios para todas as folhas, inicia-se o processo de agregação dos valores dos critérios através dos nodos da árvore. Os mais próximos das folhas são sempre nodos de decisão, pelo que as folhas correspondentes a

⁶⁹Se num ano o valor do *cash flow* é CF , então no ano seguinte terá o valor esperado de $50\% \cdot (1.2 \cdot CF) + 50\% \cdot (0.8 \cdot CF) = CF$. Uma vez que o processo de variação do *cash flow* se mantém constante, é fácil constatar que o valor esperado do *cash flow*, em todos os anos futuros, será CF .

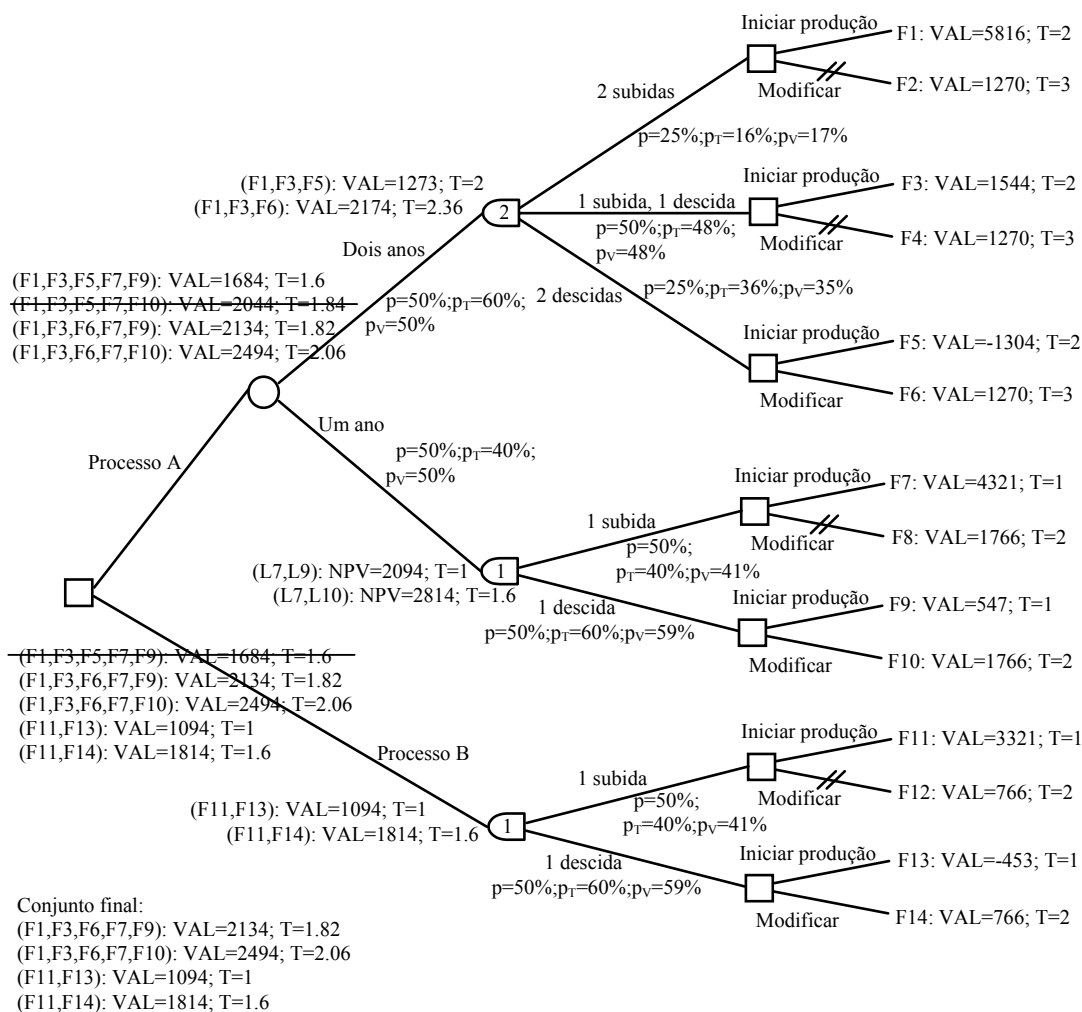


Figura 4.7: Árvore de decisão correspondente ao exemplo descrito no texto. Os valores financeiros encontram-se em milhares de euros e os tempos em anos.

subestratégias dominadas irão ser eliminadas. Tal conduz à eliminação de F2, F4, F8 e F12.

Para agregar as subestratégias através dos nodos de incerteza, é necessário calcular as probabilidades ajustadas ao tempo e as probabilidades ajustadas ao valor. Estas probabilidades ajustadas são representadas, na figura 4.7, por p_T e p_V , respectivamente. Considerem-se primeiro as probabilidades ajustadas ao valor. Se o *cash flow* do projecto num determinado ano for CF , então o valor do activo gémeo (o projecto sem opções) nesse ano será $VA = \frac{CF}{0.1}$ ⁷⁰. Se, no ano seguinte, o *cash flow* aumentar para $1.2 \cdot CF$, então, incluindo o *cash flow* recebido nesse ano, o activo gémeo terá um valor $VA_1^+ = 1.2 \cdot CF + \frac{1.2 \cdot CF}{0.1} = 1.32 \cdot VA$.

⁷⁰Relembre-se que o *cash flow* esperado se mantém idêntico para todos os anos futuros.

Se, no ano seguinte, o *cash flow* diminuir para $0.8 \cdot CF$, então o activo gémeo terá um valor $VA_1^- = 0.8 \cdot CF + \frac{0.8 \cdot CF}{0.1} = 0.88 \cdot VA$. De acordo com o modelo binomial para avaliação de opções, a probabilidade ajustada para uma subida será $p_V^+ = \frac{VA \cdot (1+r_F) - VA_1^-}{VA_1^+ - VA_1^-} = \frac{1.06 - 0.88}{1.32 - 0.88} = 41\%$, e a probabilidade ajustada para uma descida será $p_V^- = 1 - p_V^+ = 59\%$. Considerando um período de dois anos, a probabilidade ajustada de duas subidas será $p_V^{++} = (p_V^+)^2 = 17\%$, a probabilidade ajustada de duas descidas será $p_V^{--} = (p_V^-)^2 = 35\%$, e a probabilidade ajustada de uma subida e uma descida será $p_V^{+-} = p_V^+ \cdot p_V^- + p_V^- \cdot p_V^+ = 48\%$ ⁷¹.

Por forma a calcular as probabilidades ajustadas ao tempo, será necessário obter do agente de decisão os respectivos tempos equivalentes certos. Na presente situação, e atendendo a que todos os nodos de incerteza apresentam probabilidades (50%, 50%)⁷², apenas será necessário pedir um equivalente certo. Vai assumir-se que, confrontado com uma probabilidade de 50% de $T = 1$ e uma probabilidade de 50% de $T = 0$, o agente de decisão fornece um equivalente certo $EC = 0.6$. Assim, usando as expressões (4.1) e (4.2), as probabilidades ajustadas serão $p_T^- = \frac{1-EC}{1-0} = 40\%$, para o menor tempo, e $p_T^+ = \frac{EC-0}{1-0} = 60\%$, para o maior tempo. Relativamente ao nodo de passagem do tempo correspondente à passagem de dois anos, as probabilidades ajustadas serão de $p_T^{++} = (p_T^+)^2 = 36\%$, para o maior tempo, $p_T^{--} = (p_T^-)^2 = 16\%$, para o menor tempo, e $p_T^{+-} = p_T^+ \cdot p_T^- + p_T^- \cdot p_T^+ = 48\%$ para o tempo intermédio. Note-se que só é possível fazer *a priori* o cálculo das probabilidades ajustadas ao tempo para a passagem de dois anos porque a eliminação de alternativas nas folhas garante que:

- para todas as possíveis subestratégias, o ramo correspondente a duas subidas de valor contém sempre um tempo não superior ao tempo dos restantes, podendo ser considerado o ramo de menor tempo;
- para todas as possíveis subestratégias, o ramo correspondente a duas descidas de valor contém sempre um tempo não inferior ao tempo dos restantes, podendo ser considerado o ramo de maior tempo.

No caso geral, diferentes subestratégias poderão implicar diferentes ordenações dos tempos, o que poderá obrigar a que, para realizar os cálculos, seja considerada a desagregação do nodo de passagem de múltiplas unidades de tempo numa sequência de nodos correspondentes à passagem de uma unidade de tempo, seguindo a lógica subjacente à figura 4.2. Uma tal desagregação irá provocar um aumento da complexidade dos cálculos, mas não da complexidade do modelo. Uma vez que esta abordagem está pensada para sistemas computacionais, o aumento da complexidade dos cálculos não coloca qualquer problema ao analista ou ao agente de decisão.

⁷¹A soma das duas parcelas deve-se ao facto de a subida poder ocorrer antes ou depois da descida.

⁷²O nodo de passagem do tempo correspondente à passagem de 2 unidades de tempo pode ser visto como uma combinação de nodos cujos ramos apresentam probabilidades (50%, 50%), tal como mostra a figura 4.2.

Depois do cálculo das probabilidades ajustadas, podem ser calculados os conjuntos de subestratégias correspondentes a cada nodo de passagem do tempo. Se alguma das subestratégias de um destes conjuntos fosse dominada por outra subestratégia pertencente ao mesmo conjunto, então poderia ser eliminada. Como tal não ocorre, ir-se-á prosseguir com os três conjuntos de duas subestratégias. No ramo correspondente ao processo A, ocorre ainda um nodo de incerteza antes da raiz. Ao efectuar a agregação nesse nodo, obtém-se um conjunto de quatro subestratégias, uma das quais é dominada por outra subestratégia deste conjunto, sendo, assim, eliminada. O nodo de decisão que constitui a raiz permite agrupar os dois conjuntos de subestratégias correspondentes aos ramos. Obtém-se um conjunto de cinco estratégias, uma das quais é dominada. O conjunto final contém, assim, as quatro estratégias não dominadas mostradas na figura 4.8, podendo agora ser utilizado um método multicritério para decidir entre estas.

4.5 Análise de algumas questões referentes à abordagem

Existe um conjunto de questões que se podem levantar relativamente à abordagem apresentada neste capítulo. Algumas destas, como a necessidade de coerência na agregação dos critérios, foram já examinadas. Outras irão agora ser analisadas.

A primeira questão a considerar é a possibilidade de as árvores se tornarem muito grandes. Essa possibilidade tem duas consequências indesejáveis: a dificuldade de construção e a dificuldade de avaliação das árvores. Quando as árvores são muito grandes, o tempo necessário para a sua construção é elevado, podendo a sua definição tornar-se impraticável. Se a abordagem for utilizada em sistemas computacionais, o problema da avaliação pode não ser importante. No entanto, e dado o número de tuplos com os valores dos critérios que pode ser necessário considerar em alguns nodos, o tempo e memória necessários para a avaliação das árvores podem também constituir um problema para a utilização da abordagem.

Comece por se considerar o problema da construção da árvore. A facilidade de construção da árvore em sistemas computacionais estará directamente ligado ao *interface* da aplicação que for desenvolvida. É previsível que, na maioria das situações, existam ramos que se repetem em muitos nodos de um dado nível, ramos grandes que se repetem, e ainda conjuntos de arcos com determinadas características comuns que conduzem todos a ramos idênticos⁷³. Nestas situações, as ferramentas habituais de copiar/colar das aplicações informáticas podem simplificar muito a construção da árvore, mas existem outros tipos de ferramentas que podem também auxiliar essa construção. Um destes tipos de ferramentas

⁷³Um exemplo da literatura, em que pode ser confirmada a existência destas situações, é a árvore para analisar a decisão de construção de instalações de uma empresa apresentado em [93], capítulo 3, pp. 48 – 55.

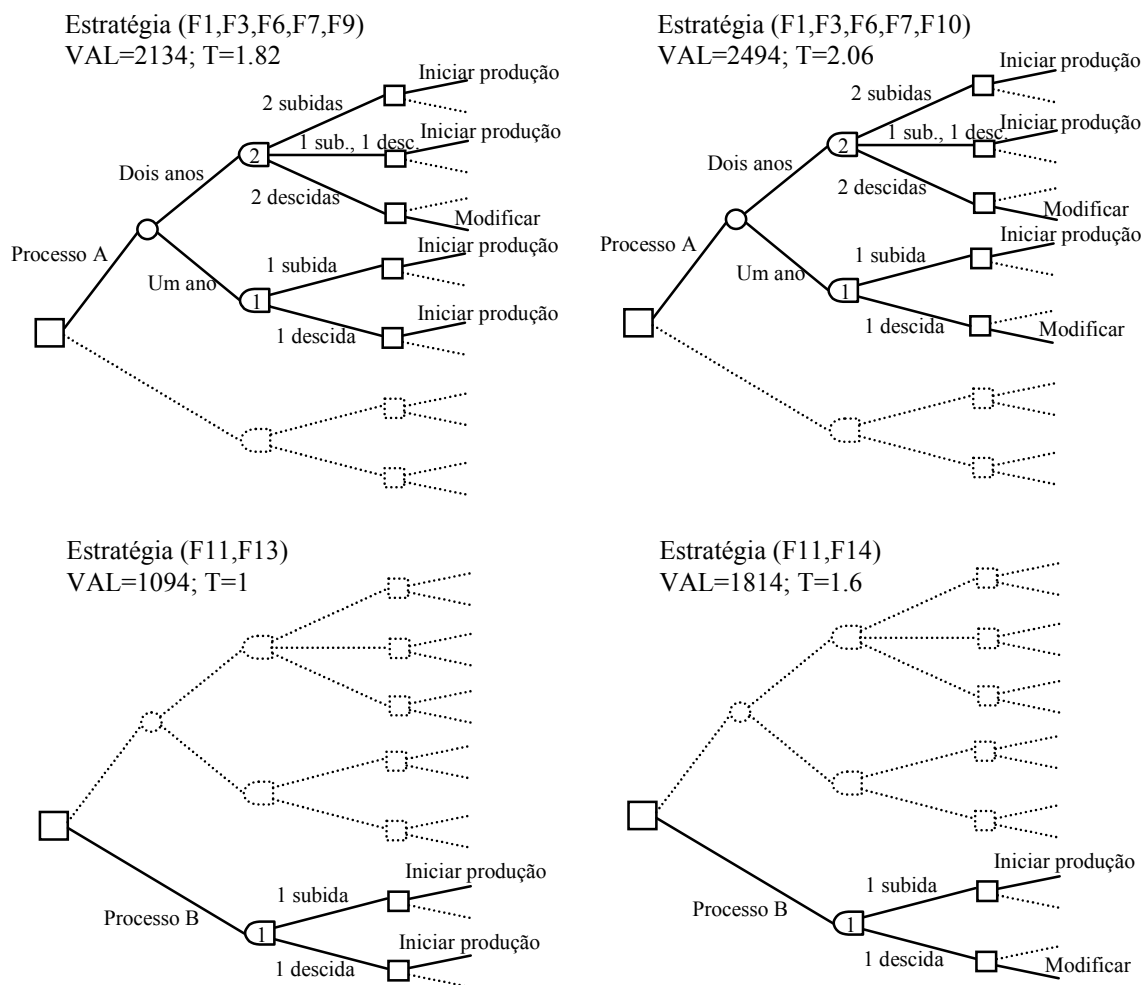


Figura 4.8: Representação das estratégias não dominadas para o exemplo de utilização da abordagem descrito no texto.

é a definição de regras de construção. Estas regras podem ser do tipo: "Todos os ramos que se seguem a arcos que estejam no 5º nível da árvore e correspondam a procura elevada são iguais ao ramo r " (estando o ramo r já definido). Assim, poderá permitir-se que, depois da definição de um ramo, este seja copiado para todos os arcos que obedeçam a uma determinada condição.

Para facilitar a construção da árvore podem ainda desenvolver-se modelos, para tipos particulares de situações, que automatizem totalmente a construção da árvore a partir de um conjunto de parâmetros definidos pelo agente de decisão ou analista. Depois de fornecidos esses parâmetros, os modelos permitiriam a construção automática da árvore, e o cálculo das estratégias não dominadas, sem mais intervenção humana. No capítulo 5 será apresentado um modelo com estas características.

A utilização de modelos que automatizem a construção da árvore torna ainda mais importante o problema do tempo e da memória necessários para a avaliação destas. Com efeito, se é provável que um computador consiga avaliar em tempo útil uma árvore que seja construída num tempo razoável por um utilizador humano, já uma árvore definida automaticamente por parâmetros ou regras pode ser tão grande que a sua avaliação, ou até mesmo a sua construção, sejam impraticáveis. No entanto, quando este tipo de modelos for usado pode ser possível explorar as suas regularidades ou propriedades matemáticas para desenvolver algoritmos que permitam uma identificação eficiente das estratégias não dominadas (no capítulo 7 detalha-se um algoritmo para a identificação das estratégias não dominadas do modelo descrito no capítulo 5). Para a escolha de uma estratégia pode ainda ser usada uma abordagem interactiva. Esta é particularmente útil quando o número de estratégias não dominadas for elevado porque, nesta situação, o tempo necessário para as identificar pode ser muito elevado (mesmo com algoritmos específicos), e porque o agente de decisão pode, por vezes, ter dificuldade em apreciar tão grande número de alternativas. A abordagem interactiva irá apenas confrontar o agente de decisão com um pequeno número de estratégias em cada interacção. Desta forma, a tarefa do agente de decisão ficará simplificada, uma vez que já não lhe será pedido que analise simultaneamente um número elevado de alternativas, sendo as suas decisões limitadas a pequenos conjuntos de estratégias. Simultaneamente, em cada interacção apenas será necessário identificar um número limitado de estratégias, o que, com métodos específicos, poderá requerer apenas um esforço computacional reduzido. No capítulo 8 será apresentada uma abordagem interactiva à utilização do modelo do capítulo 5.

Uma outra questão subjacente à abordagem que foi apresentada neste capítulo está relacionada com o realismo do pressuposto de independência na agregação dos critérios. É de crer que, na maioria das situações, tal pressuposto seja realista, desde que exista algum cuidado na selecção dos critérios. Nomeadamente, quando se utilizam o tempo e o valor financeiro é difícil conceber situações em que o valor agregado de um critério dependa do outro. Note-se que a exigência de independência apenas ocorre na avaliação da árvore (depois de obtido o conjunto de estratégias não dominadas, não há qualquer restrição à abordagem a usar para o analisar).

A agregação do tempo pode também levantar algumas questões. Ao contrário do que se passa com o valor financeiro, não está universalmente aceite uma forma única para agregar o tempo, pelo que se tentou definir um novo método que, simultaneamente, se enquadrasse bem na lógica da abordagem proposta, fosse simples de utilizar e entender, e se adaptasse tanto quanto possível ao modo de raciocinar dos agentes de decisão. A preocupação principal foi desenvolver um método que tivesse como casos particulares as formas de agregação “básicas” – isto é, o tempo médio, o tempo máximo, o tempo mínimo e mesmo o valor esperado de uma função utilidade – uma vez que é previsível que algumas destas formas

sejam muitas vezes as preferidas pelos agentes de decisão. Ao desenvolver um método que tem estas formas de agregação como casos particulares, os resultados matemáticos válidos para o método em geral serão, por maioria de razão, válidos para os casos particulares. Para além disso, procurou-se que esse método pudesse também abranger outras situações – particularmente situações em que existe aversão ao "risco de tempo", mas onde não se pretende utilizar o tempo máximo nem uma utilidade. O método permite obter, para estas situações, um tempo equivalente que constituirá, certamente, uma referência importante e útil na análise do problema e na definição das estratégias interessantes. No entanto, quando não são utilizadas as formas de agregação "básicas", este método apresenta algumas particularidades que é importante ter em consideração, e que irão ser apresentadas. Estas resultam dos pressupostos subjacentes ao método, que são:

- O agente de decisão consegue fornecer um equivalente certo para um tempo incerto;
- Linearidade: se, à distribuição de tempos com valores (T_1, T_2, \dots, T_n) e com probabilidades (p_1, p_2, \dots, p_n) corresponde o equivalente certo EC , então à distribuição de tempos com valores $(\alpha \cdot T_1 + \beta, \alpha \cdot T_2 + \beta, \dots, \alpha \cdot T_n + \beta)$, com $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, $\alpha \cdot T_i + \beta \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, e com as mesmas probabilidades, corresponderá o equivalente certo $\alpha \cdot EC + \beta$;
- A agregação de tempos incertos é sempre efectuada no momento correspondente ao respectivo nodo (ou nodos) de incerteza, e é independente desse momento (isto significa que a mesma distribuição de tempos, ocorrendo em dois momentos diferentes do projecto, será agregada do mesmo modo nos dois).

Os dois últimos pressupostos são necessários para simplificar a agregação do tempo, não exigir uma grande quantidade de informação por parte do agente de decisão, e manter a lógica de ajustamento de probabilidades subjacente à abordagem das probabilidades neutrais face ao risco para avaliação de opções. No entanto, podem levantar-se alguns problemas. Primeiro, não existe evidência empírica para confirmar que são boas aproximações ao comportamento dos agentes de decisão. Com efeito, seria útil fazer estudos empíricos para verificar até que ponto os pressupostos são ou não boas aproximações à forma de pensar dos agentes de decisão, mas tais estudos situam-se fora do âmbito deste trabalho. Não parece existirem motivos para pensar que esses pressupostos sejam irrealistas, pelo menos para um critério com as características do tempo.

Outra questão que pode ser levantada pela utilização deste método de agregação do tempo, e pelos seus pressupostos, tem a ver com a possível existência de situações que levem à não conclusão do projecto. Normalmente, o tempo para a conclusão deve ser considerado infinito nestas situações. No entanto, se a probabilidade de o tempo ser infinito não for nula, a agregação de valores do tempo que incluam um valor infinito levará a um valor agregado infinito, e tal pode conduzir a resultados irrealistas. Suponha-se, por exemplo, que existem duas alternativas, correspondendo uma delas a uma probabilidade de 95% de

completar o projecto em um ano e uma probabilidade de 5% de não o concluir, e a outra a uma probabilidade de 80% de completar o projecto em dois anos e uma probabilidade de 20% de não o concluir. Se o tempo for agregado como infinito, então as duas alternativas serão apresentadas como equivalentes no critério tempo, apesar de a primeira ser claramente melhor do que a segunda.

Existem várias formas de evitar este tipo de problemas. Uma forma possível consiste em usar dois critérios diferentes⁷⁴ para representar o tempo: a probabilidade de não concluir o projecto, e o tempo necessário para o completar quando ele é concluído. Outra forma consiste em utilizar um critério que considere simultaneamente a probabilidade de completar o projecto e o tempo necessário para o concluir – tal pode ser facilmente conseguido se se utilizar um valor finito para representar um tempo infinito. Para exemplificar, considere-se que podem ocorrer tempos entre 1 e 3 anos, que se vai utilizar 100 anos para representar um tempo infinito, e que se está a utilizar o tempo médio (isto é, as probabilidades ajustadas ao tempo são iguais às probabilidades originais). A situação em que existe uma probabilidade de 5% de não concluir o projecto e uma probabilidade de 95% de o completar em 1 ano, será agregada como um tempo de $0.05 \cdot 100 + 0.95 \cdot 1 = 5.95$ anos; a situação em que há uma probabilidade de 20% de não concluir o projecto e uma probabilidade de 80% de o concluir em 2 anos será agregada como um tempo de $0.2 \cdot 100 + 0.8 \cdot 2 = 21.6$ anos. Assim, a primeira situação será considerada melhor do que a segunda, e pior do que um tempo certo de 3 anos (com garantia de concluir o projecto). Note-se que o valor usado para representar um tempo infinito deve ser cuidadosamente determinado, por forma a representar com alguma aproximação a importância que o agente de decisão atribui à possibilidade de não concluir o projecto.

Existem outros efeitos da utilização do método de agregação do tempo que podem ser considerados indesejáveis. De entre estes saliente-se o seguinte: a duas estratégias com a mesma distribuição de probabilidade do tempo final podem corresponder dois tempos agregados diferentes. Como exemplo considere-se a figura 4.9, que representa duas estratégias diferentes com a mesma distribuição de probabilidade do tempo final: esta distribuição corresponde, para ambas, a uma probabilidade de 25% para cada um dos 4 tempos possíveis. Se, para um nodo com probabilidades iniciais (50%, 50%), as probabilidades ajustadas ao tempo forem (40%, 60%), então, embora as probabilidades ajustadas satisfaçam a definição de coerência, os tempos agregados são diferentes para as duas estratégias. Com efeito, tem-se $T(s_1) = 60\% \cdot (60\% \cdot 4 + 40\% \cdot 3) + 40\% \cdot (60\% \cdot 2 + 40\% \cdot 1) = 2.8$ e $T(s_2) = 60\% \cdot (60\% \cdot 4 + 40\% \cdot 1) + 40\% \cdot (60\% \cdot 3 + 40\% \cdot 2) = 2.72$. Isto é assim porque o tempo agregado depende dos caminhos que conduzem à distribuição final, e não apenas desta.

⁷⁴Ou, eventualmente, mais, se já inicialmente se estivesse a utilizar mais do que um critério para representar o tempo.

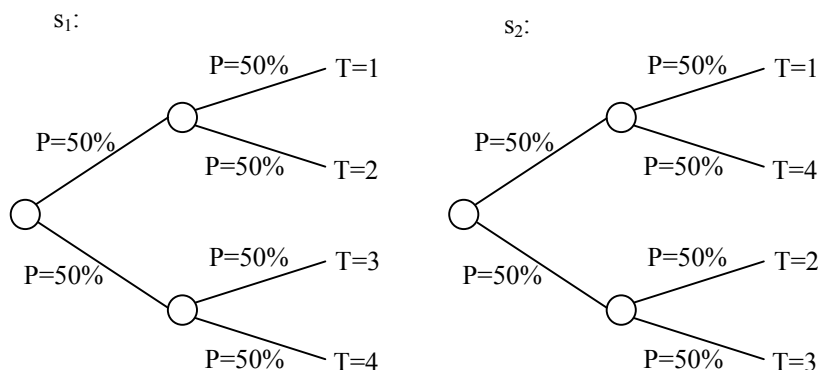


Figura 4.9: Representação de duas estratégias, referidas no texto, com a mesma distribuição de probabilidade do tempo final.

Se a abordagem for utilizada com as formas "básicas" de agregação – tempo médio, máximo e mínimo – este efeito nunca ocorrerá. Isto será assim ainda que seja aplicada uma função aos tempos terminais, como, por exemplo, uma função "utilidade". Portanto, o método permite utilizar, da maneira usual, um conjunto de modos de considerar o tempo, sem haver o risco de as mesmas distribuições terminais conduzirem a tempos agregados diferentes.

Resta analisar a importância deste efeito quando não se pretendem utilizar as formas "básicas" de agregação. Ou seja, saber se o conceito subjacente ao modo de ajustamento das probabilidades é interessante, ou se está seriamente prejudicado por um efeito indesejável que leva à obtenção de tempos agregados diferentes para estratégias com a mesma distribuição de probabilidade do tempo final. Quanto a isto, comece por dizer-se que este efeito não ocorre apenas no tratamento do tempo, mas também pode ocorrer no tratamento do valor financeiro quando se utilizam modelos de avaliação de opções. Considerando mercados perfeitos e o modelo binomial, dois investimentos com a mesma função de distribuição de probabilidade incondicional do valor terminal podem ter um valor inicial diferente, como foi referido em 3.4.3⁷⁵. Podem existir dois "estados da natureza" com a mesma probabilidade, e ser mais "caro" conseguir o mesmo valor terminal num do que no outro (no sentido de um valor terminal no primeiro estado ter um preço inicial superior). Isso é uma consequência de a taxa de rentabilidade esperada do activo subjacente (ou do activo gémeo) ser diferente da taxa de juro sem risco, e reflecte o comportamento dos activos em mercados eficientes. Este efeito ocorre, assim, em critérios cuja agregação depende dos "estados da natureza" específicos a que cada valor terminal corresponde, não sendo forçosamente indesejável. Note-se, no entanto que, para o valor financeiro este efeito pode ser justificado pela possibilidade de arbitragem, utilizando activos transaccionados no mercado; esta justificação não é aplicável

⁷⁵ Este efeito pode, assim, ocorrer com o valor financeiro, na abordagem proposta neste capítulo.

ao critério tempo.

No entanto, também para o tempo este efeito pode não ser considerado grave, desde que se garanta que o tempo agregado depende dos sucessivos acontecimentos que ocorrem, em momentos diferentes, ao longo do projecto. A percepção do agente de decisão relativamente à forma como o tempo deve ser agregado pode depender do modo como sucessivos acontecimentos afectam o tempo, e não apenas da distribuição de probabilidade final do tempo. Assim, não se pode assumir, *a priori* e sem efectuar estudos comportamentais aos agentes de decisão, que o efeito que estamos a considerar seja indesejado, podendo este reflectir as percepções do agente de decisão. No entanto, também não existem indícios que permitam concluir que o efeito reflecte o comportamento do agente de decisão.

Mesmo que se considere que o tempo agregado obtido através do método proposto não reflecte a forma de pensar do agente de decisão, este tempo será sempre uma indicação sobre aquele que deveria ser o verdadeiro tempo agregado. Não existindo uma abordagem universalmente aceite para agregar um tempo incerto, tudo o que se obtém com outras abordagens será também apenas isso – uma indicação. É de acreditar que a flexibilidade e simplicidade do método proposto poderão fazer com que, muitas vezes, este forneça um tempo agregado aceitável, e melhor de que o obtido através de outros métodos. E, como já foi indicado, quando tal não acontecer, o método permite sempre recorrer a um conjunto de formas "básicas" de agregação. Além disso, a possibilidade de utilizar uma função do tempo como critério, e de usar múltiplos critérios, também contribui para representar algumas características da distribuição do tempo que possam não ser convenientemente consideradas pela utilização do valor agregado do tempo ou por um só critério.

Coloca-se uma outra questão, relacionada com o efeito anterior que é também importante referir: a possível dependência do tempo final agregado em relação a opções de modelação. Considere-se, mais uma vez, o exemplo da figura 4.9, com os valores atrás apresentados que conduzem a tempos agregados diferentes para as duas estratégias. Se os nodos de incerteza corresponderem à passagem do tempo, ou a diferentes momentos, poderá ser legítimo que o tempo agregado seja diferente para as duas estratégias. No entanto, pode ocorrer que os acontecimentos incertos correspondam ao mesmo momento. Se assim for, pode acontecer que as duas árvores representem a mesma estratégia para duas interpretações diferentes da ordem de ocorrência dos acontecimentos, ou mesmo para dois desdobramentos possíveis de um acontecimento incerto em vários nodos de incerteza. Pode, portanto, acontecer que o valor final que se obtém para o tempo agregado dependa directamente das opções ou da interpretação do analista, e não apenas da situação e das preferências do agente de decisão, mesmo que os papéis de analista e de agente de decisão sejam desempenhados pela mesma pessoa. Isso introduz um factor de arbitrariedade nos resultados obtidos, o que é indesejável.

É, no entanto possível evitar esta arbitrariedade, desde que não se efectue mais do que uma agregação do tempo em cada momento, independentemente dos acontecimentos incertos que possam ocorrer⁷⁶. Isto significa que, no caso de existirem acontecimentos sucessivos correspondentes ao mesmo momento, a agregação do tempo deve ser efectuada apenas no primeiro nodo correspondente a esse momento. Isto vai, por vezes, implicar que, em vez de se transferirem valores do tempo agregado entre nodos sucessivos, se trabalhe com conjuntos de pares (probabilidade, tempo) até se alcançar o nodo que corresponde ao início do momento considerado.

Esta forma de evitar que a agregação do tempo dependa das opções de modelação sugere ainda uma abordagem alternativa para essa agregação; essa abordagem baseia-se nos mesmos princípios do método proposto neste capítulo, mas evita totalmente o efeito de obter tempos diferentes como agregação de distribuições iguais. Uma tal abordagem consiste em manter a distribuição de probabilidade dos tempos até à raiz da árvore, efectuando apenas aí a agregação destes. Uma vez que a agregação do tempo é efectuada apenas na raiz, deixa de ser necessário pressupor que a agregação do tempo é independente do momento do projecto em que é efectuada a agregação. Para a agregação dos tempos na raiz pode ser utilizado o procedimento apresentado em 4.2.4.2, o qual permite que uma distribuição discreta com mais de 2 tempos possíveis seja agregada fazendo uso de equivalentes certos de nodos binomiais. A principal dificuldade na utilização de uma tal abordagem está relacionada com o facto de deixar de ser possível eliminar as estratégias com base no conceito de dominância usado na abordagem do presente capítulo. Seria necessário analisar as propriedades matemáticas desta nova abordagem, por forma a identificar as condições que permitem a eliminação de estratégias. O desenvolvimento de uma tal abordagem pode constituir uma interessante via de investigação futura.

4.6 Resumo

Neste capítulo descreveu-se uma abordagem multicritério que utiliza árvores de decisão na análise e selecção de estratégias em projectos de investimento.

Começou por se analisar a importância do tempo na análise de projectos, tendo-se argumentado que o tempo permite tomar em consideração alguns impactos do projecto cuja incorporação no valor financeiro é problemática. A importância do tempo e do valor financeiro levou a que se detalhasse apenas a utilização da abordagem com estes dois critérios; no entanto, ela pode ser estendida a outros critérios.

A abordagem aqui proposta foi definida pressupondo apoio computacional. Assim, assumiu-se que os cálculos envolvidos são automatizados, e que a definição das árvores de

⁷⁶ Para o critério valor financeiro, será indiferente fazer apenas uma agregação ou fazer agregações sucessivas, pois serão obtidos os mesmos resultados.

decisão é uma tarefa para o analista. Por forma a simplificar a definição das árvores, foi proposto um novo tipo de nodo, o nodo de passagem do tempo, que pode ser utilizado para a representação de uma sequência de nodos de incerteza correspondentes à passagem do tempo

A forma como os valores dos critérios são representados e agregados são questões centrais na utilização da abordagem. O valor financeiro é medido pelo VAL, tendo sido proposto que a sua agregação siga a abordagem das probabilidades neutrais face ao risco para modelos de tempo discreto de avaliação de opções. Foi também notado que a agregação do tempo pode ser feita de acordo com a avaliação clássica de árvores de decisão, embora tal forma de agregação possa não ser teoricamente correcta quando estão envolvidas decisões durante a vida do projecto. O tempo pode ser utilizado directamente, ou pode ser representado por uma sua função, como o atraso relativo a uma determinada data ou uma “função utilidade”. Para a agregação do tempo foi proposto um método baseado na utilização de probabilidades ajustadas, calculadas de acordo com equivalentes certos fornecidos pelo agente de decisão. Argumentou-se que a determinação dos equivalentes certos pode ser mais simples se apenas forem considerados nodos binomiais, e foi proposto um procedimento que permite utilizar equivalentes certos de nodos binomiais para determinar as probabilidades ajustadas para nodos mais complexos.

A abordagem aqui proposta baseia-se na identificação de estratégias não dominadas, permitindo escolher posteriormente um método multicritério para seleccionar a preferida pelo agente de decisão. Assim, foram definidas regras para avaliação dos nodos de decisão que permitem a determinação das estratégias não dominadas. Uma dessas regras estabelece a eliminação das alternativas dominadas em nodos de decisão mas, como foi discutido, esta regra apenas será válida se se verificarem algumas condições na agregação dos critérios; essas condições estão relacionadas com o conceito de coerência na agregação. Este conceito foi definido de modo informal e também de modo matematicamente rigoroso, tendo-se analisado a forma como se pode impor que as preferências do agente de decisão conduzam a uma agregação coerente do tempo.

Apresentou-se um exemplo de aplicação da abordagem e, finalmente, analisou-se um conjunto de problemas relativos à utilização da abordagem.

Capítulo 5

Um modelo bicritério para análise de tarefas homogéneas

No capítulo anterior descreveu-se uma abordagem multicritério à análise de projectos em situação de incerteza, baseada em árvores de decisão. Uma desvantagem importante da abordagem é, como foi referido, a possibilidade de as árvores se tornarem muito grandes, levando muito tempo a serem construídas e avaliadas, e podendo mesmo a sua definição e avaliação tornarem-se impraticáveis. No entanto, existem vários tipos de situações que podem ser modeladas utilizando um número limitado de parâmetros, sendo as correspondentes árvores definidas a partir de um conjunto de regras. Estes modelos podem, assim, resolver o problema da definição das árvores, mas não resolvem directamente o problema da sua avaliação (este pode, no entanto, ser resolvido nos casos em que as propriedades dos modelos permitam definir algoritmos ou abordagens para identificar as estratégias não dominadas, ou para escolher uma estratégia).

Tendo isto em atenção, foi desenvolvido um modelo, baseado na abordagem descrita no capítulo anterior, que permite a definição da árvore a partir de um conjunto limitado de parâmetros. Este modelo pressupõe que o tempo e o custo são os critérios de decisão relevantes, e permite a análise de uma tarefa homogénea que pode ser empreendida através da utilização de vários processos diferentes. Os traços gerais deste modelo foram inicialmente apresentados em [76] e [78], e alguns casos particulares são analisados em [77] e [79]. Em capítulos posteriores será apresentado um algoritmo para geração de todas as estratégias não dominadas do modelo, e ainda uma abordagem interactiva à selecção de uma estratégia quando se utiliza o tempo médio.

5.1 Apresentação do modelo

Uma forma de evitar o problema da definição de árvores de grandes dimensões consiste em desenvolver modelos que, para tipos particulares de situações, permitam a construção das árvores a partir de um conjunto de regras, utilizando um número limitado de parâmetros. Nesta linha de pensamento, desenvolveu-se um modelo bicritério baseado na abordagem do capítulo anterior. O modelo apenas utiliza o tempo e o custo como critérios (o custo é utilizado em substituição do valor financeiro), considerando os restantes atributos do projecto irrelevantes, e assume que só as estratégias não dominadas são relevantes para o agente de decisão.

O modelo foi definido para representar projectos que consistam em empreender uma tarefa homogénea, isto é, uma tarefa que possa ser dividida em várias subtarefas, todas elas com características idênticas. Quanto mais as subtarefas em que se puder dividir a tarefa que está a ser considerada, maior será o detalhe com que se pode representar o projecto através do modelo que vai ser proposto. Tarefas como a construção de uma estrada numa extensão de terreno com características geográficas homogéneas, ou a produção de vários itens idênticos, podem ser consideradas exemplos de tarefas homogéneas.

Considera-se que podem ser utilizados diferentes processos para empreender a tarefa a executar. Os processos podem diferir pelo uso de diferente número de máquinas, diferentes tecnologias, recursos humanos em número ou com qualificação diferentes, etc. Cada processo tem um custo por utilização constante, e demora um tempo idêntico por cada utilização. Há ainda tempos e custos de mudança para alterar o processo em utilização, e tempos de preparação inicial e custos iniciais para usar o processo no início do projecto. Por cada utilização de um processo, a tarefa pode avançar por uma de duas possíveis fracções do total, tendo cada um destes possíveis avanços uma determinada probabilidade de ocorrer (a soma das probabilidades dos dois possíveis avanços é 1).

Depois de os processos estarem definidos, é possível construir automaticamente a árvore de decisão e identificar as estratégias não dominadas. Assim, o modelo é fácil de utilizar, sendo apenas necessário definir um número limitado de parâmetros de entrada: os parâmetros dos processos. Pode ser utilizado como uma aproximação a alguns problemas em que o avanço da tarefa é definido por uma distribuição contínua, podendo tal ser feito através da definição de processos cujo tempo de cada utilização seja pequeno⁷⁷. Desta forma, o modelo pode ser aplicado a muitas situações reais em que os objectivos são a minimização do tempo e do custo, e em que a tarefa considerada é homogénea, ou pode ser tratada como tal. Possíveis aplicações incluem alguns tipos de projectos de construção, projectos

⁷⁷Uma tal aproximação é semelhante à utilização de *lattices* para representar modelos de tempo contínuo de opções reais.

de desenvolvimento de software, e planeamento de produção. Alguns exemplos ilustrativos são apresentados na secção 5.3.

O modelo pode implicar árvores muito grandes, particularmente quando for usado como aproximação à análise de problemas definidos em tempo contínuo, o que pode constituir um problema sério. Embora estas árvores possam ser construídas automaticamente, a dimensão das árvores pode levar a que a identificação das estratégias não dominadas demore muito tempo, ou se torne mesmo impraticável. Para tratar este problema será conveniente desenvolver algoritmos rápidos que se baseiem nas propriedades matemáticas do modelo (o que será feito no capítulo 7), ou abordagens interactivas para escolher uma estratégia (o que será feito no capítulo 8).

5.2 O modelo

5.2.1 Definição do modelo

Defina-se que uma tarefa é homogénea quando pode ser dividida em várias subtarefas, todas elas com características idênticas, e considere-se que o projecto que se pretende executar consiste em empreender uma tarefa homogénea. Cada uma destas subtarefas idênticas em que a tarefa se divide irá corresponder a uma parcela da tarefa, que se designará por “unidade de trabalho”.

Defina-se x^0 como a “quantidade de trabalho”, ou o número de “unidades de trabalho” necessárias para completar a tarefa, e consequentemente o projecto. Assumir-se-á, sem perda de generalidade, que $x^0 = 1$, e x será utilizado para representar uma fracção do projecto ($x \leq 1$). Assim, cada “unidade de trabalho” corresponderá a um valor de x igual ao inverso do número total de “unidades de trabalho”.

Assuma-se que existem n processos diferentes, $P_i, i = 1, \dots, n$, que podem ser utilizados para empreender a tarefa. Cada processo P_i é caracterizado por:

- um determinado tempo, $t_i \geq 0$, que representa a duração de cada utilização do processo;
- um determinado custo por cada utilização do processo, $c_i \geq 0$;
- um conjunto de tempos de mudança, representando o tempo necessário para mudar para cada um dos outros processos, $t_{i,j} \geq 0, j = 1, \dots, n, (t_{i,i} = 0)$;
- um conjunto de custos de mudança, representando o custo de mudar para cada um dos outros processos, $c_{i,j} \geq 0, j = 1, \dots, n, (c_{i,i} = 0)$;
- um tempo de preparação inicial, $t_{0,i} \geq 0$, e um custo inicial, $c_{0,i} \geq 0$, representando o tempo e o custo associados à utilização do processo no início do projecto;

- um processo binomial aditivo para descrever o avanço do projecto mediante a utilização do processo, que assume que, por cada utilização de P_i , o projecto pode avançar os montantes $x_{1,i}$ ou $x_{2,i}$ ($x_{1,i} > 0$, $x_{2,i} > 0$), com probabilidades $P_{1,i}$ e $P_{2,i}$ ($P_{1,i} + P_{2,i} = 1$, $P_{1,i} > 0$, $P_{2,i} > 0$), respectivamente; o avanço do projecto por cada utilização de P_i é representado pelo nodo da figura 5.1.

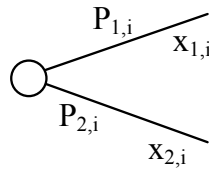


Figura 5.1: Nodo de incerteza binomial representando o avanço do projecto por cada utilização do processo P_i .

Este modelo assume a independência dos avanços do projecto: a distribuição de probabilidade dos montantes do avanço no caso de utilização de um dado processo é constante, e é, assim, independente dos avanços anteriores. Assume-se também, sem perda de generalidade, que $x_{1,i} \leq x_{2,i}$. O arco correspondente a $x_{1,i}$ será, de agora em diante, identificado como arco 1 do nodo, e o arco correspondente a $x_{2,i}$ será identificado como arco 2. Os ramos que começam imediatamente depois destes arcos serão identificados como ramos 1 e 2 do nodo, respectivamente.

O modelo assume também que a utilização dos processos não é preemptiva. Tal significa que apenas se pode mudar o processo utilizado no final de uma utilização completa deste⁷⁸. Assume ainda que, mesmo se, no final da tarefa, a fracção do projecto que faltar executar (x) for inferior ao avanço na próxima utilização do processo (i.e., $x < x_{b,i}$ para o processo i a ser utilizado e para o arco b considerado, $b = 1$ ou $b = 2$), o tempo e o custo de uma utilização completa do processo serão, de qualquer forma, contabilizados.

5.2.2 A agregação dos critérios

Um projecto parametrizável de acordo com este modelo pode ser representado por uma árvore de decisão, e analisado através da abordagem apresentada no capítulo anterior. De acordo com esta abordagem, as agregações do valor financeiro (que, neste caso, é substituído pelo custo) e do tempo são realizadas através do cálculo de um valor esperado, utilizando probabilidades ajustadas. Comece por considerar-se o cálculo das probabilidades ajustadas ao valor, representadas por $P_{b,i}^V$, $b = 1, 2$; $i = 1, \dots, n$. Decorre da abordagem apresentada

⁷⁸Esta é uma consequência de se utilizarem nodos de incerteza para representar o avanço do projecto.

que estas probabilidades devem ser calculadas de acordo com um modelo de tempo discreto de avaliação de opções. No modelo para análise de tarefas homogêneas que está a ser proposto, o custo por utilização de cada processo é constante, significando isto que o risco relativo ao custo está apenas relacionado com a escolha que se fizer dos processos e com o risco inerente à utilização destes. Estes factores são independentes do comportamento de quaisquer activos financeiros, não estando correlacionados com este. Assim, o risco relativo ao custo é risco privado, e, de acordo com o tratamento que tem sido considerado para este tipo de risco, as probabilidades ajustadas ao valor devem ser iguais às probabilidades originais, $P_{b,i}^V = P_{b,i}$, $b = 1, 2$; $i = 1, \dots, n$.

Também as probabilidades ajustadas ao tempo são tratadas de acordo com a abordagem apresentada no capítulo anterior. Para cada par de probabilidades diferente, que ocorra na definição dos processos, são pedidos ao agente de decisão dois equivalentes certos, um relativo ao caso em que o tempo no ramo 1 é superior ao tempo no ramo 2, e outro ao caso oposto. Pode, por exemplo, apresentar-se, para efeito de obtenção do equivalente certo, um tempo 0 para o ramo que corresponde a um menor tempo, e um tempo T' ($T' > 0$) para o ramo que corresponde a um maior tempo, conforme ilustrado na figura 5.2. A partir destes equivalentes certos são calculados dois pares de probabilidades ajustadas ao tempo, $(P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,1})$ e $(P_{1,i}^{T,2}, P_{2,i}^{T,2})$, o primeiro dos quais será utilizado quando o tempo correspondente ao ramo 1 for maior que o correspondente ao ramo 2, e o segundo no caso contrário. Note-se que a determinação dos dois pares de probabilidades ajustadas é necessária devido à lógica do método de agregação do tempo que está a ser seguido, uma vez que o tipo de ajustamento feito pelo agente de decisão depende da relação de ordem entre os tempos dos dois ramos.

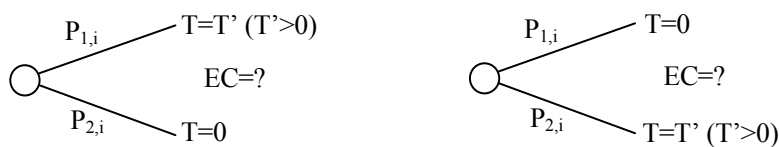


Figura 5.2: Equivalentes certos pedidos ao agente de decisão para cada processo, por forma a calcular as probabilidades ajustadas ao tempo.

Note-se ainda que é importante que, tal como se fazia para a abordagem em que o modelo se baseia, se limitem os valores dos equivalentes certos fornecidos pelo agente de decisão, por forma a impor coerência na agregação do tempo. A importância de se exigir coerência nesta agregação não está, no caso deste modelo, relacionada com a aplicabilidade do processo de avaliação das árvores de decisão, uma vez que a propriedade 4E garante que este processo é sempre aplicável em árvores com nodos de incerteza binomiais. Está, isso sim, relacionada com o facto de a não coerência na agregação do tempo ser normalmente

involuntária, e indesejada pelo agente de decisão.

O conceito de coerência que se sugere seja seguido corresponde à definição mais ampla, em que se permite a igualdade nos lados direitos das implicações nas expressões (4.3) e (4.4). Como foi indicado, só esta definição mais ampla de coerência abrangerá o caso de as probabilidades ajustadas serem nulas, permitindo, assim, a utilização do tempo máximo. Como foi exposto nas notas 4D.1 e 4E.1, ao seguir o processo de avaliação das árvores sugerido no capítulo 4 a utilização de probabilidades ajustadas nulas pode conduzir à não identificação de todas as estratégias não dominadas, pois podem, nalguns casos, ser eliminadas estratégias com os mesmos valores dos critérios de estratégias geradas. Nessas notas foi indicado que tal não parece grave, pois as estratégias não proporcionarão novas escolhas se apenas os critérios tempo e valor (ou, neste caso, custo) forem relevantes. Tal é também verdade para este modelo, que é baseado no pressuposto de que apenas o tempo e o custo são relevantes, e, assim, o agente de decisão será indiferente entre estratégias alternativas com o mesmo tempo e custo. Pode, portanto, utilizar-se o processo de avaliação das árvores apresentado no capítulo 4, ou algoritmos baseados nos mesmos princípios (como o algoritmo a apresentar no capítulo 7). Mais do que isso, é legítimo que, para uma mais rápida identificação das estratégias não dominadas, os algoritmos usados sejam conduzidos de forma a apenas identificar as estratégias com diferentes valores dos critérios, ignorando, à partida, estratégias diferentes com os mesmos valores dos critérios.

5.2.3 Alguns conceitos referentes ao modelo

Importa agora introduzir alguns conceitos relativos ao modelo. Para auxiliar esta tarefa, vai recorrer-se a um exemplo. Considerem-se dois processos, P_1 e P_2 , com $x_{1,1} = 0.35$, $x_{2,1} = 0.55$, $x_{1,2} = 0.30$ e $x_{2,2} = 0.60$. A correspondente árvore de decisão terá a estrutura apresentada na figura 5.3.

Uma estratégia completa consiste no conjunto de decisões que definem completamente a execução do projecto. Isto significa que uma estratégia corresponde a uma árvore em que todas as decisões estão definidas, e que, por isso, já não necessita de incluir nodos de decisão. Portanto, uma estratégia pode ser representada por uma árvore em que todos os nodos são nodos de incerteza, e uma tal árvore será designada por árvore de estratégia. Uma estratégia possível para a árvore da figura 5.3 está representada na árvore de estratégia da figura 5.4.

Numa árvore de estratégia, cada nodo corresponde à utilização de um processo, e cada arco à execução de uma fracção do projecto. Cada nodo pode ser visto como o início de um ramo, sendo o nodo a raiz desse ramo. Um ramo da árvore (r) consiste, assim, na

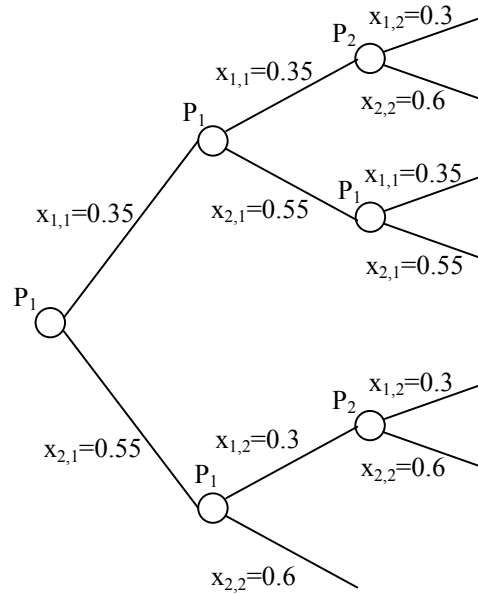


Figura 5.4: Exemplo de árvore de estratégia, para dois processos, com $x_{1,1} = 0.35$, $x_{2,1} = 0.55$, $x_{1,2} = 0.30$ e $x_{2,2} = 0.60$.

fracção esperada do projecto executada pelo (correspondente ao) ramo, $f(r)$, é a fracção média do projecto executada pelo ramo quando a estratégia é empreendida, sendo, assim, definida como a contribuição isolada do ramo multiplicada pela probabilidade de este ser atingido⁸⁰. Será então

$$f(r) = p(r)x(r) \quad (5.1)$$

Para concretizar estes conceitos, considere-se a árvore de estratégia da figura 5.4, e, dentro desta, o ramo r que começa imediatamente a seguir à primeira utilização do processo P_1 , quando o avanço inicial é $x_{2,1} = 0.55$ (ou seja, o ramo de baixo, que começa logo a seguir ao primeiro arco a partir da raiz). A contribuição isolada do ramo é a fracção do projecto executada pelo ramo quando este é atingido, e pode ser calculada como a fracção do projecto que não é executada nas utilizações de processos anteriores ao ramo. Neste caso, $x(r) = 1 - 0.55 = 0.45$. A altura do ramo é a maior fracção isolada do projecto que pode ser executada pelo ramo, e pode ser calculada como a menor soma de montantes de avanço do projecto, para os diferentes caminhos entre a raiz do ramo e as suas folhas. Neste caso, $h(r) = \min(0.3+0.3; 0.3+0.6; 0.6) = 0.6$. Para calcular a contribuição esperada

⁸⁰Note-se que enquanto probabilidade e contribuição esperada de um ramo são conceitos que apenas farão sentido para uma árvore de estratégia, a contribuição isolada de um ramo é um conceito que também fará sentido para a árvore de decisão geral. A altura de um ramo é um conceito que fará mais sentido para uma árvore de estratégia, mas que também pode ser utilizado numa árvore de decisão geral.

do ramo e a probabilidade de este ser atingido é necessário definir as probabilidades dos diferentes avanços dos processos. Sejam, para ambos os processos, as probabilidades de 60% para o arco 1 e de 40% para o arco 2. A probabilidade de o ramo ser atingido é a probabilidade do arco que o liga à raiz da árvore, ou seja, 40%. A contribuição esperada do ramo é $f(r) = p(r)x(r) = 40\% \cdot 0.45 = 0.18$.

Outros conceitos de interesse são os de valor de um critério (tempo ou custo) correspondente a um ramo, de valor ajustado de um critério (tempo ou custo) correspondente a um ramo, e de contribuição de um ramo para o valor de um critério. Para simplificar a exposição, estes conceitos serão apresentados apenas para o critério tempo, uma vez que são definidos de forma idêntica para o critério custo. O tempo correspondente a um ramo r , ou tempo desse ramo, $T(r)$, é o tempo que se obtém se esse ramo for executado isoladamente (como uma árvore independente), sem incluir o tempo de mudança ou de preparação inicial correspondente à entrada no ramo. O tempo ajustado correspondente a um ramo r , ou tempo ajustado desse ramo, $TA(r)$, é o tempo que se obtém se se incluir, no tempo correspondente ao ramo, o tempo de mudança ou de preparação inicial relativo à entrada no ramo. O tempo ajustado pode, assim, ser calculado como a soma do tempo correspondente ao ramo com o tempo de mudança ou de preparação inicial necessário para nele entrar. A contribuição de um ramo para o tempo, $CT(r)$, apenas está definida para ramos integrados numa árvore de estratégia, consistindo na parcela do tempo da estratégia completa que é da responsabilidade do ramo. Este último conceito pode ser calculado como a diferença entre o tempo da estratégia completa e o tempo para a estratégia sem o ramo. Alternativamente, pode também ser calculado como o produto do tempo correspondente a esse ramo pela probabilidade de o ramo ser atingido, $p(r)$. Para o critério custo utiliza-se $C(r)$ para denotar o custo correspondente ao ramo r (ou custo do ramo r), $CA(r)$ para o custo ajustado correspondente ao ramo r (ou custo ajustado do ramo r), e $CT(r)$ para a contribuição do ramo r para o custo.

Usando o exemplo da árvore de estratégia da figura 5.4, e considerando o ramo r acima definido, vão calcular-se o custo e o custo ajustado correspondentes ao ramo r , e a contribuição do ramo r para o custo. Para tal é necessário definir o custo de utilização de cada processo e os custos de mudança. Assuma-se $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $c_{1,2} = c_{2,1} = 1$. O custo correspondente ao ramo r , ou custo do ramo r , será o custo que se obtém executando isoladamente esse ramo, ou seja, $C(r) = c_1 + P_{1,2} \cdot (c_{1,2} + c_2) = 1 + 0.6 \cdot (1 + 2) = 2.8$. Adicionando, ao custo do ramo r , o custo de mudança para entrada nesse ramo ($c_{1,1}$), obtém-se o custo ajustado correspondente ao ramo, ou custo ajustado do ramo, $CA(r) = C(r) + c_{1,1} = 2.8 + 0 = 2.8$. A contribuição do ramo para o custo pode ser calculada como o produto de $CA(r)$ pela probabilidade de o ramo ser atingido, $p(r)$, ou seja, $CT(r) = p(r)CA(r) = 40\% \cdot 2.8 = 1.12$.

5.2.4 Questões relativas à utilização do modelo

Alguns pressupostos deste modelo, particularmente aqueles que se referem à utilização de nodos de incerteza binomiais e à utilização indivisível dos processos, podem, numa primeira impressão, parecer demasiado restritivos para que o modelo possa ser útil. No entanto, tal não é assim. É certo que, num problema real pode ser possível definir exactamente quanto tempo é que um dado processo vai ser utilizado, e pode existir uma distribuição contínua para o avanço do projecto. Mas um modelo como este pode, pelo menos para alguns tipos de distribuição, ser utilizado como uma aproximação para esses problemas definidos de forma contínua, através da definição de processos cujo tempo de cada utilização seja pequeno. Uma tal aproximação é, aliás, semelhante à utilização de *lattices* para problemas de opções reais em tempo contínuo, como foi descrito em 3.4.4. Os casos de utilização apresentados na próxima secção são problemas de tempo contínuo aproximados através do modelo.

Um problema sério relativo a este modelo é a dimensão das árvores de decisão, que são geralmente muito grandes. De facto, em cada ramo de um nodo de incerteza relativo à utilização de um processo existirá um nodo de decisão com n ramos⁸¹, representando a próxima escolha de processo. Cada um destes ramos terá, por sua vez, um nodo de incerteza binomial que representa a utilização do processo seleccionado. Assim, mesmo numa situação em que existam apenas 3 processos, cada ramo em que não se tenha ainda atingido uma folha será dividido em 6 possibilidades por cada utilização de um processo. Se cada avanço do projecto for próximo de 0.1, o número de folhas será próximo de $6^{10} \approx 6 \cdot 10^7$, e se cada avanço do projecto for próximo de 0.05 o número de folhas será próximo de $6^{20} \approx 3.7 \cdot 10^{15}$. Isto significa que o modelo pode facilmente conduzir a árvores muito grandes, particularmente quando for usado como aproximação à análise de problemas definidos em tempo contínuo. Se é certo que não é o analista a definir estas árvores, uma vez que podem ser construídas automaticamente pelo sistema computacional a partir de um conjunto de parâmetros limitado, também é certo que a dimensão das árvores levará a que a identificação das estratégias não dominadas demore muito tempo e necessite de muito espaço de memória. Com facilidade se atingirão árvores de tamanho tal que a identificação das respectivas estratégias não dominadas se torne impraticável, porque o tempo ou a memória requeridos são demasiado grandes. Assim, para que o modelo possa ser aplicado de forma mais ampla, é conveniente utilizar a estrutura e características deste para desenvolver algoritmos que permitam identificar mais facilmente as estratégias não dominadas, ou abordagens interactivas baseadas na identificação de um número limitado de estratégias não dominadas em cada interacção.

⁸¹Seguindo o uso anterior, n é o número de processos.

5.3 Exemplos de aplicação

Apresentam-se agora aplicações do modelo a algumas situações. A primeira refere-se a um problema de planeamento de produção, e vai ser descrita com algum detalhe; as restantes serão descritas de forma muito resumida.

A primeira aplicação refere-se ao caso de uma empresa têxtil que acabou de receber uma encomenda de 5 000 camisolas para um clube desportivo. Os gestores da empresa acreditam que, quanto mais depressa a encomenda for satisfeita, maior será a probabilidade de os dirigentes do clube ficarem satisfeitos e fazerem outras encomendas à empresa. Pretendem produzir as camisolas tão rapidamente quanto possível, mas também pretendem que a produção fique tão barata quanto possível. Assim, o tempo e o custo são os critérios relevantes na escolha de uma estratégia de produção.

A empresa tem duas máquinas diferentes, designadas por A e B, que pode utilizar na produção das camisolas. O número e as qualificações dos operários disponíveis, bem como outros compromissos da empresa, não permitem que as duas máquinas sejam simultaneamente utilizadas na produção das camisolas. A decisão sobre qual das máquinas, A ou B, deve ser utilizada num determinado dia pode ser tomada no final do dia anterior. No entanto, cada vez que se altera o equipamento que está a ser utilizado na produção é perdido um dia na preparação do novo equipamento. Há razões, relacionadas com acordos laborais, que impedem a empresa de utilizar turnos nocturnos, trabalhar nos fins-de-semana e contratar trabalhadores temporários.

A máquina A permite a produção de uma média de $\mu = 2\,500$ camisolas numa semana de 5 dias úteis, com um desvio padrão de $\sigma = 200$ camisolas. A sua utilização tem custos de 250 euros por dia, e o tempo e custo de preparação inicial são de 1 dia e 500 euros, respectivamente. A máquina B permite a produção de uma média de $\mu = 3\,500$ camisolas numa semana de 5 dias úteis, com um desvio padrão de $\sigma = 260$ camisolas. A sua utilização tem custos de 450 euros por dia, e os seus tempo e custo de preparação inicial são de 1 dia e 1 000 euros, respectivamente. O tempo necessário para mudar a máquina a ser utilizada é de 1 dia, e o custo é de 1 500 euros. Note-se que os custos indicados são custos de oportunidade: são as receitas que se obteriam se se mantivesse a produção habitual, e que não se vão obter. Uma vez que a receita proveniente da encomenda e o custo da matéria prima são independentes da estratégia utilizada, estes factores não são considerados na escolha de uma estratégia.

Se puder ser assumido que o número de camisolas produzido num determinado dia é independente do número produzido no dia anterior, e que um processo binomial aditivo fornece uma aproximação aceitável para o avanço do projecto, então o modelo pode ser usado. Uma vez que a decisão sobre o equipamento a utilizar é tomada diariamente, toma-

-se o dia como unidade de tempo. Definem-se dois processos, P_1 e P_2 , o primeiro dos quais corresponde à utilização do equipamento A durante um dia, e o segundo à utilização do equipamento B também durante um dia. Assim, para cada um destes processos, t_i é 1 dia, c_i é o custo de utilizar o respectivo equipamento durante um dia, e $t_{0,i}$ e $c_{0,i}$ são, respectivamente, o tempo e o custo de preparação para utilizar o equipamento no início do projecto. Ou seja, $t_1 = t_2 = 1$ dia; $c_1 = 250$ euros e $c_2 = 450$ euros; $t_{0,1} = t_{0,2} = 1$ dia, $c_{0,1} = 500$ euros e $c_{0,2} = 1\ 000$ euros. Os tempos e custos de mudança de processo são $t_{1,2} = t_{2,1} = 1$ dia e $c_{1,2} = c_{2,1} = 1500$ euros.

É necessário definir, para cada processo, uma distribuição do avanço do projecto que seja coerente com os valores da média e do desvio padrão da produção de camisolas. Uma vez que a média e o desvio padrão são dados para um período de 5 dias, utilizam-se as seguintes expressões:

$$\frac{\mu}{5} = P_{1,i} \cdot x_{1,i} + P_{2,i} \cdot x_{2,i} \quad (5.2)$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{5}} = (x_{2,i} - x_{1,i}) \cdot \sqrt{P_{1,i} \cdot P_{2,i}} \quad (5.3)$$

Dado que $P_{2,i} = 1 - P_{1,i}$, têm-se duas equações e três variáveis. Assim, é possível atribuir um valor a uma das variáveis, resolver o sistema e verificar a validade dos valores dos parâmetros (isto é, verificar se as probabilidades pertencem a $]0, 1[$ e se os avanços do projecto são positivos para os dois ramos da distribuição binomial). Se se obtiverem parâmetros inválidos, será necessário tentar valores diferentes da variável a que inicialmente se atribuiu um valor.

Para o processo P_1 , faça-se $P_{1,1} = 0.5$ (e, conseqüentemente, $P_{2,1} = 0.5$). A solução do sistema é $x_{1,1} = 410.6$ camisolas e $x_{2,1} = 589.4$ camisolas. Para o processo P_2 , faça-se $P_{1,2} = 0.5$ (e, conseqüentemente, $P_{2,2} = 0.5$). A solução do sistema é $x_{1,2} = 583.7$ camisolas e $x_{2,2} = 816.3$ camisolas. Por forma a obter $x^0 = 1$, os avanços do projecto devem ser normalizados, dividindo os valores obtidos pelo número total de camisolas a serem produzidas (5 000). O resultado é $x_{1,1} = 0.0821$, $x_{2,1} = 0.1179$, $x_{1,2} = 0.1167$ e $x_{2,2} = 0.1633$.

Agora, apenas falta definir as probabilidades ajustadas ao tempo. Uma vez que, para ambos os processos, se estão a utilizar probabilidades 50%/50%, o agente de decisão apenas tem que fornecer um equivalente certo para a situação em que existe a possibilidade de ocorrerem dois tempos diferentes, cada um com probabilidade de 50%. Assumindo que, confrontado com uma probabilidade de 50% de o tempo ser 0 dias, e uma probabilidade de 50% de ser 10 dias, o agente de decisão fornece um equivalente certo de 7 dias, então as probabilidades ajustadas ao tempo são de 70% para o maior tempo e de 30% para o menor. Isto significa que $P_{1,1}^{T,1} = P_{2,1}^{T,2} = P_{1,2}^{T,1} = P_{2,2}^{T,2} = 0.7$ e $P_{2,1}^{T,1} = P_{1,1}^{T,2} = P_{2,2}^{T,1} = P_{1,2}^{T,2} = 0.3$.

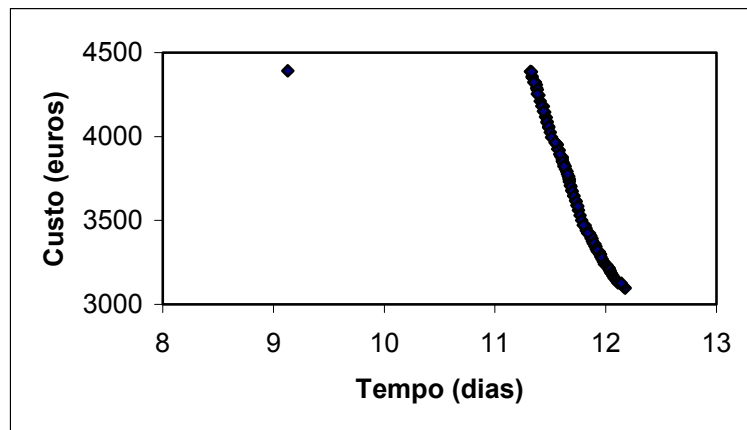


Figura 5.5: Combinações tempo/custo para as estratégias não dominadas da aplicação relativa ao exemplo da produção de camisolas descrito no texto. Só um ponto se não situa na mancha alongada à direita do gráfico.

Com os parâmetros do modelo completamente definidos, é possível utilizá-lo para determinar as combinações tempo/custo não dominadas. Cada uma destas combinações corresponde a uma ou mais estratégias, tendo-se optado por não gerar estratégias diferentes que correspondam aos mesmos valores dos critérios. Obtêm-se, assim 104 combinações, que estão representadas no gráfico da figura 5.5. Pode agora ser utilizado um método multicritério para escolher a combinação tempo/custo preferida do agente de decisão.

Outra possível aplicação refere-se ao caso de uma empresa encarregada de escavar um túnel de 10 km sob uma montanha, túnel esse a ser utilizado para a posterior construção de uma estrada que atravessará a montanha. Os prazos contratualmente exigidos são dilatados, mas a empresa sabe que, quanto mais depressa o túnel for construído, maior a probabilidade de conseguir outros contratos do mesmo cliente. Assim, o tempo e o custo são os factores relevantes para a escolha da estratégia a ser utilizada na implementação do projecto.

A empresa trabalha 6 dias por semana, com um ou dois turnos por dia. Se forem utilizados dois turnos, então o segundo (o turno nocturno) apresenta tipicamente maiores custos e menor produtividade que o primeiro (o turno diurno). Existem duas máquinas que podem ser utilizadas para escavar o túnel, máquinas essas que serão designadas por máquina A e máquina B. As decisões sobre que máquina e quantos turnos utilizar num determinado dia podem ser tomadas no final do dia anterior.

Se for utilizado um turno, a máquina A consegue escavar uma média de $\mu = 1$ km numa semana de 6 dias úteis, com um desvio-padrão de $\sigma = 0.25$ km e um custo de 50 000 euros, enquanto a máquina B consegue escavar uma média de $\mu = 1.25$ km numa semana de 6 dias

úteis, com um desvio-padrão de $\sigma = 0.4$ km e um custo de 60 000 euros. Se forem utilizados dois turnos, a máquina A consegue escavar uma média de $\mu = 1.75$ km numa semana de 6 dias úteis, com um desvio-padrão de $\sigma = 0.35$ km e um custo de 120 000 euros, enquanto a máquina B consegue escavar uma média de $\mu = 2.2$ km numa semana de 6 dias úteis, com um desvio-padrão de $\sigma = 0.55$ km e um custo de 144 000 euros. Os tempos e custos de preparação inicial são de 3 dias e 25 000 euros para a máquina A, e de 4 dias e 30 000 euros para a máquina B. A mudança de máquina de A para B requer 5 dias e custa 35 000 euros, enquanto a mudança de máquina de B para A requer 4 dias e custa 30 000 euros. A mudança do número de turnos a utilizar é imediata, e não apresenta custos adicionais.

Por forma a poder usar o modelo descrito no presente capítulo, vai tomar-se o dia como unidade de tempo, e vão ser definidos quatro processos, P_1 , P_2 , P_3 e P_4 . P_1 consiste em usar a máquina A com um turno, P_2 em usar a máquina A com dois turnos, P_3 em usar a máquina B com um turno e P_4 em usar a máquina B com dois turnos. Para cada um destes processos, t_i é 1 dia, c_i é o custo de utilização do equipamento com o correspondente número de turnos durante 1 dia, $t_{0,i}$ e $c_{0,i}$ são os tempos e os custos de preparação inicial da máquina, e $t_{i,j}$ e $c_{i,j}$ são os tempos e os custos de mudança da máquina utilizada no processo P_i para a utilizada no processo P_j (se ambos os processos P_i e P_j usarem a mesma máquina, estes serão iguais a zero). Os avanços do projecto para os diferentes processos, as suas respectivas probabilidades e as probabilidades ajustadas ao tempo, seriam calculados da mesma forma que o foram no exemplo anterior.

Como último exemplo, considere-se uma empresa da *Internet* que lançou um novo *site*. A empresa tem o objectivo de atingir 100 000 acessos de utilizadores diferentes o mais rapidamente possível, e com o menor custo possível. Por forma a atingir esse objectivo, a empresa pretende colocar publicidade noutros *sites*. A análise da empresa mostra que o número de acessos por novos utilizadores é independente do número actual de utilizadores (ou seja, o efeito “ouvir dizer” é negligenciável). Uma análise das alternativas existentes mostra que existem 3 *sites* cujo rácio visibilidade proporcionada/custo é claramente superior ao das restantes alternativas; estes *sites* vão ser designados por *site 1*, *site 2* e *site 3*. Sem publicidade, a empresa irá obter um número negligenciável de novos utilizadores, e os contratos com estes *sites* são feitos por períodos de uma semana, sendo as decisões quanto a estes contratos tomadas no final da semana anterior. A análise efectuada pela empresa leva a pensar que os resultados obtidos pela colocação de publicidade nestes *sites* serão os seguintes:

- o *site 1* permite obter uma média semanal $\mu = 5\,000$ acessos, com um desvio-padrão de $\sigma = 1\,500$ acessos e um custo semanal de 750 euros;
- o *site 2* permite obter uma média semanal $\mu = 10\,000$ acessos, com um desvio-padrão de $\sigma = 2\,000$ acessos e um custo semanal de 1 600 euros;

- o *site* 3 permite obter uma média semanal $\mu = 7\,000$ acessos, com um desvio-padrão de $\sigma = 2\,000$ acessos e um custo semanal de 1 000 euros.

Este exemplo pode também ser analisado através do modelo apresentado neste capítulo. A unidade de tempo seria uma semana, e existiriam 7 processos diferentes: fazer publicidade no *site* 1, no *site* 2, no *site* 3, nos *sites* 1 e 2, nos *sites* 1 e 3, nos *sites* 2 e 3, e simultaneamente nos três *sites*. Note-se que não é necessário considerar um processo correspondente à não utilização de publicidade, uma vez que um tal processo não será usado numa estratégia não dominada, pois isso aumentaria o tempo mantendo o custo. Uma vez que o *site* 1 permite obter, em média, menos acessos com um custo por acesso maior do que o *site* 3, pode, à partida, considerar-se a eliminação dos processos que incluam o *site* 1 e não incluam o *site* 3. Isto reduzirá o número de processos a 5. Neste exemplo, os tempos e custos de preparação inicial, bem como os tempos e custos de mudança de processo, serão nulos. Os avanços do projecto para os diferentes processos, as suas respectivas probabilidades e as probabilidades ajustadas ao tempo, seriam calculados da mesma forma que o foram no exemplo inicial.

5.4 Limitações e possíveis extensões do modelo

Vão agora considerar-se algumas possíveis limitações do modelo, relacionadas com a forma como os parâmetros deste são definidos. Algumas destas limitações podem constatar-se através de uma análise dos exemplos da secção anterior, ou de possíveis alterações destes exemplos. Para algumas destas limitações, vão expor-se os motivos que levam a acreditar que estas não são muito relevantes. Para todas as limitações, vai analisar-se o modo como estas podem ser ultrapassadas, dentro da abordagem que está a ser seguida, introduzindo pequenas alterações na estrutura do modelo.

A primeira limitação a ser considerada está relacionada com o facto de apenas se ter considerado a utilização do tempo absoluto, não se tendo previsto a utilização de uma função deste, como acontecia na abordagem em que o modelo se baseia. Considerem-se os exemplos da produção de camisolas e da escavação do túnel. Em ambos pode acontecer que não existam benefícios decorrentes de completar o projecto antes do prazo contratualizado, interessando, assim, apenas a análise do atraso relativamente a esse prazo. Em tais situações, o modelo pode ser utilizado com uma função do tempo, bastando, para tal, levar em conta que, nas folhas da árvore de decisão, se aplica essa função ao tempo obtido.

Os pressupostos relativos aos custos de utilização de cada processo, e aos custos de mudança de processo, podem parecer irrealistas, quer por esses custos serem considerados constantes, quer por não ser considerada a sua actualização. No entanto, o tipo de projectos a que o modelo se aplica terá normalmente um tempo de execução curto (possivelmente de alguns dias a alguns meses), sendo, assim, negligenciável o impacto da não variação e

da não actualização desses custos. Por outro lado, mesmo quando estes factores não sejam negligenciáveis, eles tendem a anular-se mutuamente. De facto, na maior parte das situações é razoável assumir que os custos sobem a uma taxa que não é muito diferente da taxa de juro sem risco. Quando tal acontece, o valor actual dos custos mantém-se constante ao longo do tempo, podendo utilizar-se custos constantes para representar o valor actual dos custos nominais. No entanto, se for considerado inaceitável o pressuposto de custos constantes, pode sempre expandir-se o modelo por forma a calcular o valor actual dos custos como uma função do momento em que ocorrem.

Outra limitação está relacionada com o pressuposto de as alterações de processo ocorrerem imediatamente após a correspondente tomada de decisão. Ou seja, se no final de uma utilização de um processo é tomada a decisão de mudar de processo, essa utilização é imediatamente suspensa e é iniciado o tempo de preparação da mudança. Analisando possíveis alterações aos exemplos anteriores, torna-se claro que podem existir muitos casos em que, depois da decisão de mudança do processo, faça sentido existir uma ou mais unidades de tempo em que seja necessário manter em utilização o processo actual, antes de iniciar a preparação do novo processo. Isto aconteceria, no exemplo do lançamento do *site*, se fosse necessário efectuar os contratos de publicidade com uma determinada antecedência, relativamente à entrada em vigor destes. Ocorreria também no exemplo da escavação do túnel, se fosse necessário um determinado tempo, anterior ao início da mudança de máquina, para deslocação da nova máquina a ser utilizada, durante o qual a anterior se manteria em utilização. Neste tipo de situações, depois da decisão de mudança de processo existirá um período de tempo, anterior ao período de preparação da mudança, durante o qual se mantém em utilização o processo que se pretende deixar de utilizar. Note-se que estas situações podem ainda ser vistas de outra forma equivalente: a existência de uma parte do tempo de mudança do processo durante a qual o que estava inicialmente em utilização se mantém em utilização. Em termos conceptuais, é muito simples alterar o modelo por forma a contemplar esta possibilidade. Basta, para isso, adicionar um novo conjunto de parâmetros que indique, para cada possível mudança de processo (ou seja, para cada par de processos), quantas vezes é que o inicialmente em utilização voltará a ser utilizado antes de se iniciar o período necessário para a mudança⁸².

A utilização de uma distribuição binomial para descrever a evolução do projecto quando é usado um dado processo pode constituir outra limitação importante. Com efeito, podem existir situações que apenas possam ser descritas por distribuições que permitam mais do que dois comportamentos possíveis por cada utilização de um processo. Uma situação destas poderia ocorrer em qualquer dos exemplos apresentados. Por forma a que o modelo

⁸²Muitas vezes, este tempo de “atraso” no início da mudança dependerá apenas do processo que se vai passar a utilizar, ou do processo inicialmente em utilização. Nestes casos, apenas será necessário definir um parâmetro por processo.

possa considerar este tipo de situações, basta permitir que o avanço do projecto, por cada utilização de um processo, seja definido por uma distribuição de probabilidade que considere um número de acontecimentos superior a dois. Conceptualmente, nada existe no modelo que impeça essa forma de definição dos avanços do projecto. Na prática, uma tal flexibilização na definição do modelo irá tornar as correspondentes árvores de decisão ainda maiores, donde resulta significativamente mais lenta a identificação das estratégias não dominadas.

Existem também situações em que faz sentido que, em vez de se poder mudar o processo em utilização no final de cada utilização, a periodicidade dessa mudança deva ser inferior. Ou seja, situações em que apenas faz sentido permitir a alteração do processo após um determinado número de utilizações deste. No exemplo da escavação do túnel, poderia acontecer que só fosse possível mudar a máquina em utilização no início de cada semana, e no exemplo do lançamento do *site* poderia acontecer que se pretendesse definir o dia como unidade de tempo para o avanço dos processos, apesar de o processo em utilização apenas poder ser alterado semanalmente. As alterações a fazer ao modelo para contemplar este tipo de situações são muito simples. Basta acrescentar, a cada processo P_i , um novo parâmetro, designemo-lo por O_i , que indique o número de utilizações consecutivas que são obrigatórias quando é usado o processo. Também é necessário fazer alterações na forma de definir a árvore de decisão: os nodos de decisão correspondentes a uma escolha de processo só vão ocorrer uma vez por cada O_i utilizações do processo P_i , e não imediatamente a seguir a cada utilização.

Adicionalmente, pode ainda considerar-se que, quando se atinge o final do projecto depois de $k < O_i$ utilizações consecutivas do processo P_i , é, de qualquer forma, necessário incorrer no custo e gastar o tempo correspondente à utilização de P_i o número de vezes que faltam para perfazer O_i . Esta obrigação de usar cada processo P_i um número de vezes igual a O_i , mesmo que o projecto se conclua antes, faz sentido nalguns tipos de situações, como no exemplo do lançamento do *site*. A existência desta obrigação pode modelar-se através de um novo parâmetro, normalmente associado a todo o projecto, que será do tipo *verdadeiro* ou *falso*. Note-se que é também possível contemplar este tipo de situações através de distribuições do avanço do projecto que permitam mais do que dois avanços possíveis por cada utilização de um processo. Para isso, pode considerar-se que, sempre que o processo P_i é utilizado, o é durante O_i vezes consecutivas. Assim, pode calcular-se a distribuição correspondente a O_i utilizações consecutivas de P_i e usar, em substituição de P_i , um pseudo-processo P'_i , correspondente a O_i utilizações consecutivas de P_i . A desvantagem deste tipo de modelação é que ela conduz inevitavelmente à obrigação de usar cada processo P_i um número de vezes igual a O_i , mesmo que o projecto se conclua antes, não permitindo que a existência ou não desta obrigação seja definida por um parâmetro adicional do projecto, como proposto anteriormente.

Uma outra limitação do modelo, que pode ser importante, e que aliás já foi referida, tem a ver com a independência dos avanços do projecto. Podem existir situações em que, se o projecto estiver a “correr bem”, se torne mais provável que continue a “correr bem”, e se estiver a “correr mal”, se torne mais provável que continue a “correr mal”. A modelação deste tipo de situações é mais complexa do que a das situações anteriores. É necessária a utilização de uma ou mais variáveis de estado adicionais, e os avanços do projecto por utilização de um processo e/ou as suas probabilidades deixam de ser constantes, passando a depender dessas variáveis de estado. Para esta extensão do modelo é, portanto, necessário definir a forma como a distribuição dos avanços do projecto depende das variáveis de estado, e como os valores das variáveis de estado são determinados pelos avanços do projecto. Para modelar estas dependências podem propor-se classes de funções pré-definidas, e determinar a função que o agente de decisão considera ser mais adequada à evolução do projecto. Para além desta modelação ser bastante mais complexa, e de tornar mais complexa a avaliação das árvores de decisão, tem ainda consequências importantes no desenvolvimento de métodos eficientes para identificar as estratégias não dominadas. Com efeito, o desenvolvimento de tais métodos torna-se muito mais complexo; por exemplo, a lógica subjacente ao algoritmo proposto no capítulo 7 torna-se inutilizável.

Todo o trabalho que foi feito no sentido de desenvolver algoritmos e abordagens eficientes para a utilização do modelo, e que é descrito em capítulos posteriores, foi baseado no modelo base, sem as extensões propostas na presente secção; estas extensões tornam o modelo mais complexo. No entanto, não existe nada que leve a concluir que seja impossível, ou muito difícil, adaptar os algoritmos e procedimentos dos capítulos seguintes a estas extensões. Os casos mais complexos parecem ser os das extensões propostas para relaxar os pressupostos da independência dos avanços do projecto e dos custos constantes, casos em que parece provável que o modelo se torne muito mais difícil de analisar. A utilização de funções do tempo em vez do tempo absoluto pode requerer o desenvolvimento de algoritmos específicos para cada tipo de função utilizada, sendo, assim, difícil de tratar de forma generalizada.

5.5 Resumo

No presente capítulo foi apresentado um modelo bicritério, baseado na abordagem proposta no capítulo 4. Este modelo pode ser aplicado nalguns tipos particulares de situações, permitindo que a correspondente árvore de decisão seja definida a partir de um conjunto limitado de parâmetros. O modelo utiliza o tempo e o custo, e permite determinar as estratégias não dominadas para execução de uma tarefa homogênea que pode ser empreendida através da utilização de vários processos diferentes.

Depois de definido o modelo, foi discutida a agregação dos critérios nas árvores de de-

cisão, e foram apresentados alguns conceitos importantes referentes ao modelo. Discutiram-se algumas questões relativas à utilização do modelo, nomeadamente a aproximação a situações de tempo contínuo e as grandes dimensões que as árvores de decisão correspondentes ao modelo podem atingir. Por forma a ultrapassar os problemas levantados pelas grandes dimensões das árvores, sugeriu-se o desenvolvimento de algoritmos e abordagens que tornem mais eficiente o uso do modelo. Os capítulos 7 e 8 apresentam, respectivamente, um algoritmo e uma abordagem desenvolvidos com esse objectivo.

Foram também apresentados exemplos de aplicação do modelo, e, finalmente, foram discutidas algumas limitações deste, e propuseram-se extensões do modelo que permitem ultrapassar essas limitações.

Capítulo 6

Propriedades matemáticas do modelo bicritério

No capítulo anterior foi apresentado um modelo bicritério para a análise de alguns tipos de tarefas homogêneas. O modelo permite a definição automática de uma árvore a partir de um conjunto limitado de parâmetros. No entanto, as árvores podem ser muito grandes, o que coloca problemas à sua construção e avaliação em sistemas computacionais. As propriedades matemáticas do modelo têm um papel importante no desenvolvimento de algoritmos e abordagens que permitam uma utilização mais eficiente do modelo. Assim, neste capítulo irão ser apresentadas algumas propriedades matemáticas do modelo. Inicialmente serão consideradas as propriedades que podem ser aplicadas à definição mais geral do modelo, apresentada no capítulo 5. Depois serão analisadas as propriedades de dois casos particulares que se acredita poderem vir a ser de interesse (e que serão também considerados nos próximos capítulos): o caso em que se utiliza o tempo médio como forma de agregação do tempo e aquele em que se usa o tempo máximo. Algumas destas propriedades são apresentadas em [77], [78] e [79] (nalguns casos com algumas diferenças no enunciado).

Na definição e demonstração das propriedades matemáticas será mantida a notação utilizada no capítulo 5. Continuarão, assim, a ser utilizados os mesmos símbolos para representar os parâmetros do modelo: x para representar uma fracção do projecto e $x(r)$, $h(r)$, $f(r)$, $p(r)$ para a contribuição isolada, altura, contribuição esperada e probabilidade do ramo r ser atingido, respectivamente. O tempo e custo correspondentes ao ramo r serão representados por $T(r)$ e $C(r)$, respectivamente, o tempo e custo ajustados correspondentes ao ramo r por $TA(r)$ e $CA(r)$, respectivamente, e as contribuições do ramo r para o tempo e custo por $CT(r)$ e $CC(r)$, respectivamente.

6.1 Objectivos do estudo das propriedades matemáticas

O estudo das propriedades matemáticas tem em vista dois objectivos:

- permitir uma melhor compreensão das características e comportamento do modelo;
- contribuir para o desenvolvimento de abordagens que permitam uma utilização eficiente do modelo.

O primeiro objectivo é de carácter mais genérico. As propriedades matemáticas podem fornecer indicações sobre o comportamento que se deve esperar do modelo, e podem também captar facetas inesperadas deste comportamento que forneçam uma nova perspectiva sobre o modelo. Podem ainda fornecer indicações sobre a melhor forma de aplicar o modelo, e sobre o tipo de resultados que se podem esperar da sua aplicação a situações particulares. Ao fornecer indicações sobre o que se pode esperar do modelo, as propriedades matemáticas podem ainda ajudar na determinação de outras propriedades, ou, pelo menos, auxiliar na determinação das vias mais promissoras para a pesquisa destas. Assim, mesmo uma propriedade que pareça de utilidade imediata muito limitada, para além de contribuir para uma melhor compreensão do modelo pode auxiliar na determinação de novas propriedades cuja utilidade seja mais óbvia.

O segundo objectivo está ligado à própria exequibilidade da utilização do modelo. Como foi indicado, a dimensão das árvores de decisão correspondentes ao modelo pode ser muito grande, e a sua construção e avaliação podem consumir muito tempo e requerer muito espaço de memória, tornando-se, por vezes, impraticáveis. Uma utilização efectiva do modelo passa pelo desenvolvimento de abordagens à sua utilização que não requeiram a construção e avaliação das árvores de decisão completas. Vão ser considerados dois tipos de abordagens que se inserem neste âmbito:

- algoritmos que permitam uma identificação mais eficiente das estratégias não dominadas correspondentes ao modelo (isto é, uma identificação mais rápida e que requeira menos memória);
- abordagens interactivas baseadas na identificação de um pequeno número de estratégias em cada interacção (eventualmente apenas uma).

O primeiro tipo de abordagem consiste em estudar formas alternativas, mas mais eficientes, para conseguir o mesmo que se obtém através da construção e avaliação da árvore de decisão. É isto que será feito no próximo capítulo, com a apresentação de um algoritmo para uma mais eficiente identificação das estratégias não dominadas. O desenvolvimento, e também o posterior aperfeiçoamento, de tais algoritmos passa forçosamente pela identificação de propriedades matemáticas relevantes, nomeadamente daquelas que permitam

conduzir à eliminação de alternativas sem requerer a sua definição prévia. Para tal, poderão ser particularmente importantes propriedades que estabeleçam limites para os valores dos critérios de estratégias incompletas, ou de estratégias que contenham determinadas subestratégias. A maior parte das propriedades que irão ser apresentadas neste capítulo pertencem a esta categoria, e, embora algumas não sejam utilizadas nos capítulos seguintes, espera-se que possam vir a contribuir para o desenvolvimento de abordagens mais eficientes à utilização do modelo. Outras propriedades que podem ser úteis para o desenvolvimento de algoritmos são aquelas que permitem encontrar diferentes alternativas, particularmente diferentes ramos, às quais tenha forçosamente que corresponder o mesmo conjunto de estratégias ou subestratégias não dominadas. Será este o caso das propriedades 6D e 6E, que serão usadas no desenvolvimento do algoritmo apresentado no capítulo 7.

O segundo tipo de abordagem baseia-se na identificação de um pequeno número de estratégias em cada interacção. As estratégias assim identificadas são apresentadas ao agente de decisão, que emite uma opinião sobre estas. Se nenhuma delas for considerada aceitável, é novamente identificado um pequeno conjunto de estratégias (eventualmente apenas uma), e é novamente pedida uma opinião ao agente de decisão. O processo repete-se até ser identificada uma estratégia aceitável, ou até se concluir que nenhuma estratégia o é. Uma abordagem interactiva é particularmente útil quando o número de estratégias não dominadas for elevado, porque o agente de decisão pode ter dificuldade em apreciar um tão grande número de alternativas. Com um abordagem interactiva, o agente de decisão é conduzido na exploração do conjunto de estratégias não dominadas, sendo as suas decisões limitadas a pequenos conjuntos de estratégias. No capítulo 8 será apresentada uma abordagem interactiva à utilização do modelo.

Um ponto essencial para o desenvolvimento de abordagens interactivas é a capacidade de identificar de forma eficiente um pequeno número de estratégias (eventualmente apenas uma), definidas, por exemplo, através de restrições ao modelo. As propriedades matemáticas serão fundamentais para o desenvolvimento de procedimentos que permitam fazer a identificação deste pequeno número de estratégias. De particular importância poderão ser as propriedades que permitam identificar, o mais cedo possível, as alternativas que forçosamente não conduzam à(s) estratégia(s) que deve(m) ser identificada(s) na interacção considerada. Para tal poderão ser, mais uma vez, particularmente importantes as propriedades que estabeleçam limites para os valores dos critérios de estratégias incompletas, ou de estratégias que contenham determinadas subestratégias. As propriedades apresentadas na secção 6.3 pertencem a esta categoria, e serão utilizadas para desenvolver a abordagem interactiva do capítulo 8. Note-se ainda que os algoritmos para identificação das estratégias não dominadas podem constituir uma ferramenta útil para o desenvolvimento de abordagens interactivas, desde que se consigam incorporar nestes, de forma eficiente, as restrições que definem a(s) estratégia(s) a identificar em cada interacção.

6.2 Propriedades matemáticas para o caso geral

Esta secção irá apresentar um conjunto de propriedades referentes à forma mais geral do modelo descrito no capítulo 5.

Algumas das propriedades aqui apresentadas aplicam-se à determinação de limites para os valores isolados dos critérios correspondentes a um ramo. Neste caso, considera-se que a fracção do projecto executada pelo ramo é $x(x \in [0, 1])$, e calculam-se limites para os valores dos critérios correspondentes ao ramo. Neste tipo de propriedades, os ramos que se iniciam imediatamente a seguir à primeira utilização de um processo num determinado ramo são designados por sub-ramos desse ramo. Considera-se que o sub-ramo b ($b = 1$ ou $b = 2$) é o sub-ramo iniciado após o arco b relativo à primeira utilização de um processo no ramo⁸³.

Algumas propriedades serão utilizadas para a definição do algoritmo do próximo capítulo. Nestas propriedades é, por vezes, referido o conjunto de subestratégias não dominadas que permitem executar uma fracção $x \in [0, 1]$ do projecto (ou seja, que permitem empreender um ramo que execute uma fracção x do projecto), começando por utilizar um determinado processo $P_i, i = 1, \dots, n$. Esse conjunto é designado por $S(i, x)$.

Definem-se, para cada processo $P_i, i = 1, \dots, n$, os seguintes coeficientes e valores:

$$\tau_{b,i}^- = \frac{t_i}{P_{1,i}^{T,b} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b} x_{2,i}}, b = 1, 2 \quad (6.1)$$

$$b_i^- = \begin{cases} 1, & \text{se } \tau_{1,i}^- \leq \tau_{2,i}^- \\ 2, & \text{se } \tau_{1,i}^- > \tau_{2,i}^- \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\tau_i^- = \tau_{b_i^-,i}^- = \frac{t_i}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \quad (6.3)$$

$$\chi_i^- = \frac{c_i}{P_{1,i} x_{1,i} + P_{2,i} x_{2,i}} \quad (6.4)$$

$$\tau_{b,i}^+ = t_i \left(\frac{P_{1,i}^{T,b}}{x_{1,i}} + \frac{P_{2,i}^{T,b}}{x_{2,i}} \right), b = 1, 2 \quad (6.5)$$

$$b_i^+ = \begin{cases} 1, & \text{se } \tau_{1,i}^+ \geq \tau_{2,i}^+ \\ 2, & \text{se } \tau_{1,i}^+ < \tau_{2,i}^+ \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\tau_i^+ = \tau_{b_i^+,i}^+ = t_i \left(\frac{P_{1,i}^{T,b_i^+}}{x_{1,i}} + \frac{P_{2,i}^{T,b_i^+}}{x_{2,i}} \right) \quad (6.7)$$

$$\chi_i^+ = c_i \left(\frac{P_{1,i}}{x_{1,i}} + \frac{P_{2,i}}{x_{2,i}} \right) \quad (6.8)$$

⁸³ Este conceito de sub-ramo b apenas está correctamente definido quando se conhecer o primeiro processo a ser utilizado no ramo. Tal acontece, por exemplo, se se conhecer a árvore de estratégia correspondente ao ramo.

Dos coeficientes e valores aqui definidos, os mais importantes são τ_i^- , χ_i^- , τ_i^+ e χ_i^+ . Os coeficientes com designação τ serão utilizados para definir limites para o tempo do projecto ou de uma fracção deste, enquanto os coeficientes com designação χ serão utilizados para definir limites para o custo. τ_i^- e χ_i^- podem facilmente ser interpretados como um “tempo por avanço médio” (τ_i^-) e um “custo por avanço médio” (χ_i^-), sendo, portanto, indicadores da rapidez com que o tempo e o custo aumentam quando se utiliza o processo P_i . Não é fácil encontrar uma interpretação directa tão simples para τ_i^+ e χ_i^+ , mas estes coeficientes são também indicadores da rapidez com que o tempo e o custo aumentam quando se utiliza o processo P_i . O valor de τ_i^+ é sempre maior ou igual ao de τ_i^- , e o valor de χ_i^+ é sempre maior ou igual ao de χ_i^- . τ_i^- e χ_i^- são utilizados para definir limites inferiores para os critérios, e τ_i^+ e χ_i^+ são utilizados para definir limites superiores.

Destas definições podem obter-se algumas relações prévias importantes. De (6.2) e (6.3) tem-se que

$$\forall b = 1, 2, i = 1, \dots, n, \tau_i^- \leq \tau_{b,i}^- \quad (6.9)$$

A partir daqui, e utilizando (6.1), pode deduzir-se que, para qualquer $b = 1, 2$ e, para qualquer $i = 1, \dots, n$, vem

$$\begin{aligned} \tau_i^- \leq \tau_{b,i}^- &\implies \frac{t_i}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \leq \frac{t_i}{P_{1,i}^{T,b} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b} x_{2,i}} \\ &\implies P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i} \geq P_{1,i}^{T,b} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b} x_{2,i} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Utilizando (6.6) e (6.7), tem-se que

$$\forall b = 1, 2, i = 1, \dots, n, \tau_i^+ \geq \tau_{b,i}^+ \quad (6.11)$$

Analisa-se de seguida as propriedades em causa.

Propriedade 6A *Seja r um ramo que corresponde à execução de uma fracção isolada x do projecto. O tempo ($T(r)$) e o custo ($C(r)$) correspondentes ao ramo r têm os seguintes limites inferiores:*

$$T(r) \geq \min_{i=1, \dots, n} \{\tau_i^-\} x \quad (6.12)$$

$$C(r) \geq \min_{i=1, \dots, n} \{\chi_i^-\} x \quad (6.13)$$

Demonstração:

Para demonstrar (6.12) (para demonstração de (6.13) ver adiante) começa por definir-se

$$\tau^- = \min_{i=1, \dots, n} \{\tau_i^-\} \quad (6.14)$$

Com esta definição de τ^- , a expressão a demonstrar pode escrever-se na forma

$$T(r) \geq \tau^- x \quad (6.15)$$

Da definição de τ^- fica também claro que

$$\forall i = 1, \dots, n, \tau^- \leq \tau_i^- \quad (6.16)$$

Vai demonstrar-se (6.15), provando-se que a expressão se verifica independentemente dos processos utilizados, e mesmo sem se considerarem os tempos de mudança. Demonstrando desta forma (6.15) fica também demonstrada a expressão (6.12). Para isso, vai provar-se que (6.15) se verifica nos seguintes casos:

- Caso A: se ambos os arcos do nodo inicial do ramo forem terminais, o que significa que é $x \leq x_{1,i}$ para o processo P_i a utilizar no início do ramo;
- Caso B: se apenas o arco 1 do nodo inicial for terminal, o que significa que é $x_{1,i} < x \leq x_{2,i}$ para o processo P_i a utilizar no início do ramo, e se (6.15) se verificar no sub-ramo;
- Caso C: se nenhum dos arcos for terminal, o que significa que é $x > x_{2,i}$ para processo P_i a utilizar no início do ramo, e se (6.15) se verificar em ambos os sub-ramos.

Na demonstração dos 3 casos assume-se, sem perda de generalidade, que P_i é o processo utilizado no início do ramo considerado. A demonstração destes 3 casos prova (6.15) por indução.

Caso A: Neste caso, o processo P_i é o único a ser utilizado, e é utilizado apenas uma vez, pelo que $T(r) = t_i$. Logo

$$\begin{aligned}
T(r) - \tau^- x &\geq t_i - \tau_i^- x = \quad (\text{utilizando (6.16)}) \\
&= t_i - \frac{t_i}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} x = \\
&= t_i \left(\frac{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i} - x}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \right) = \\
&= t_i \left(\frac{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i} - P_{1,i}^{T,b_i^-} x - P_{2,i}^{T,b_i^-} x}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \right) = \quad (\text{pois } P_{1,i}^{T,b_i^-} + P_{2,i}^{T,b_i^-} = 1) \\
&= t_i \left[\frac{P_{1,i}^{T,b_i^-} (x_{1,i} - x) + P_{2,i}^{T,b_i^-} (x_{2,i} - x)}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \right] \geq \\
&\geq 0 \quad (\text{dado que } x \leq x_{1,i} \leq x_{2,i}) \tag{6.17}
\end{aligned}$$

Fica, assim, provado que (6.15) se verifica no caso A.

Caso B: Sendo $T(r_1)$ o tempo correspondente ao sub-ramo, então $T(r_1)$ deve obedecer a (6.15), logo

$$T(r_1) \geq \tau^- (x - x_{1,i}) \tag{6.18}$$

Neste caso, o tempo correspondente ao ramo 1 é maior que o tempo correspondente ao ramo 2. Então

$$\begin{aligned}
T(r) - \tau^- x &= P_{1,i}^{T,1} (t_i + T(r_1)) + P_{2,i}^{T,1} t_i - \tau^- x \geq \\
&\geq t_i + P_{1,i}^{T,1} \tau^- (x - x_{1,i}) - \tau^- x = \quad (\text{utilizando (6.18)}) \\
&= t_i - P_{1,i}^{T,1} \tau^- x_{1,i} - P_{2,i}^{T,1} \tau^- x \geq \\
&\geq t_i - P_{1,i}^{T,1} \tau_i^- x_{1,i} - P_{2,i}^{T,1} \tau_i^- x = \quad (\text{utilizando (6.16)}) \\
&= t_i \left[\frac{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i} - P_{1,i}^{T,1} x_{1,i} - P_{2,i}^{T,1} x}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \right] = \\
&= t_i \left[\frac{P_{1,i}^{T,1} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,1} x_{2,i} - P_{1,i}^{T,1} x_{1,i} - P_{2,i}^{T,1} x}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \right] = \quad (\text{utilizando (6.10)}) \\
&= t_i \left[\frac{P_{2,i}^{T,1} (x_{2,i} - x)}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \right] \geq \\
&\geq 0 \quad (\text{dado que } x \leq x_{2,i}) \tag{6.19}
\end{aligned}$$

Fica, assim, provado que (6.15) se verifica no caso B.

Caso C: Sejam $T(r_1)$ e $T(r_2)$ os tempos correspondentes aos sub-ramos 1 e 2. Estes tempos devem obedecer a (6.15), logo

$$T(r_1) \geq \tau^-(x - x_{1,i}) \quad (6.20)$$

$$T(r_2) \geq \tau^-(x - x_{2,i}) \quad (6.21)$$

Considerar-se-á que o sub-ramo b é aquele a que corresponde um maior tempo. Então

$$\begin{aligned} T(r) - \tau^- x &= P_{1,i}^{T,b} (t_i + T(r_1)) + P_{2,i}^{T,b} (t_i + T(r_2)) - \tau^- x \geq \\ &\geq t_i + \tau^- x - P_{1,i}^{T,b} \tau^- x_{1,i} - P_{2,i}^{T,b} \tau^- x_{2,i} - \tau^- x = \quad (\text{usando (6.20) e (6.21)}) \\ &= t_i - P_{1,i}^{T,b} \tau^- x_{1,i} - P_{2,i}^{T,b} \tau^- x_{2,i} \geq \\ &\geq t_i - P_{1,i}^{T,b} \tau_i^- x_{1,i} - P_{2,i}^{T,b} \tau_i^- x_{2,i} = \quad (\text{utilizando (6.16)}) \\ &= t_i \left[\frac{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i} - P_{1,i}^{T,b} x_{1,i} - P_{2,i}^{T,b} x_{2,i}}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \right] \geq \\ &\geq t_i \left[\frac{P_{1,i}^{T,b} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b} x_{2,i} - P_{1,i}^{T,b} x_{1,i} - P_{2,i}^{T,b} x_{2,i}}{P_{1,i}^{T,b_i^-} x_{1,i} + P_{2,i}^{T,b_i^-} x_{2,i}} \right] = \quad (\text{utilizando (6.10)}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Assim fica provado que (6.15) se verifica também no caso C. Desta forma fica demonstrado que (6.12) é sempre válida.

(6.13) pode ser demonstrada de forma semelhante – basta substituir, na demonstração de (6.12), os parâmetros relativos ao tempo pelos correspondentes parâmetros relativos ao custo. Uma vez que apenas existe um par de probabilidades ajustadas ao custo (que, aliás, são idênticas às probabilidades originais), os dois pares de probabilidades ajustadas utilizados na demonstração de (6.12) são iguais. O facto de os dois pares de probabilidades ajustadas utilizados serem idênticos não obriga a alterar a demonstração (embora pudesse permitir uma demonstração mais simples de (6.13)). ■

Comentário: Esta propriedade permite que sejam definidos limites inferiores para o tempo e custo correspondentes a um ramo de uma árvore de estratégia. Para isso define-se um “tempo por avanço médio” (τ_i^-) e um “custo por avanço médio” (χ_i^-) para cada processo P_i , e demonstra-se que o tempo (custo) correspondente ao ramo não pode ser inferior ao produto do menor τ_i^- (menor χ_i^-) pela fracção do projecto correspondente ao ramo. Note-se que, apesar de, nesta propriedade, não se considerarem os tempos e custos de mudança necessários para entrar no ramo, é muito fácil incluí-los no limite inferior obtido

(ou seja, obter o tempo e custo ajustados do ramo), bastando adicionar os tempos e custos de mudança aos limites inferiores definidos pela propriedade. Esta, apesar de muito simples, dá um contributo para uma melhor compreensão do comportamento do modelo. Como corolário desta propriedade vai considerar-se a situação em que apenas se pretende utilizar um determinado processo P_i .

Corolário 6A.1 *Seja r um ramo que corresponde à execução de uma fracção isolada x do projecto. Se o processo P_i for utilizado para executar todo o ramo, então o tempo ($T(r)$) e o custo ($C(r)$) correspondentes ao ramo têm os seguintes limites inferiores:*

$$T(r) \geq \tau_i^- x \quad (6.23)$$

$$C(r) \geq \chi_i^- x \quad (6.24)$$

Comentário: Este resultado pode ser obtido da seguinte forma: uma vez que apenas se pretende utilizar P_i , é como se este fosse o único processo existente, e, assim, pode considerar-se que $\min_{j=1, \dots, n} \{\tau_j^-\} = \tau_i^-$ e $\min_{j=1, \dots, n} \{\chi_j^-\} = \chi_i^-$. Fazendo a substituição em (6.12) e (6.13), obtém-se este resultado. Este corolário permite uma melhor compreensão do comportamento do modelo quando é utilizado um processo específico.

Propriedade 6B *Seja r um ramo que corresponde à execução de uma fracção isolada x do projecto. Se, quando o ramo é atingido, o processo P_i for utilizado para executar todo o ramo, então o tempo ($T(r)$) e o custo ($C(r)$) correspondentes ao ramo têm os seguintes limites superiores:*

$$T(r) < \tau_i^+ x + t_i \quad (6.25)$$

$$C(r) < \chi_i^+ x + c_i \quad (6.26)$$

Demonstração:

Vai demonstrar-se apenas (6.25). À semelhança do que aconteceu com a propriedade 6A, a demonstração da expressão (6.26) poderia ser obtida através da substituição, na demonstração que vai ser apresentada, dos parâmetros relativos ao tempo por parâmetros relativos ao custo.

Para demonstrar (6.25), vai provar-se que esta expressão se verifica nos seguintes casos:

- Caso A: se ambos os arcos do nodo inicial do ramo forem terminais, o que significa que $x \leq x_{1,i}$;

- Caso B: se apenas o arco 2 do nodo inicial for terminal, o que significa que $x_{1,i} < x \leq x_{2,i}$, e se (6.25) se verificar no sub-ramo;
- Caso C: se nenhum dos arcos for terminal, o que significa que $x > x_{2,i}$, e se (6.25) se verificar em ambos os sub-ramos.

A demonstração destes 3 casos prova (6.25) por indução.

Caso A: Neste caso, o processo P_i é utilizado apenas uma vez, pelo que $T(r) = t_i$. Logo

$$\begin{aligned} T(r) - (\tau_i^+ x + t_i) &= t_i - \tau_i^+ x - t_i \\ &= -\tau_i^+ x \\ &< 0 \quad (\text{dado que } \tau_i^+ > 0 \text{ e } x > 0) \end{aligned} \quad (6.27)$$

Fica, assim, provado que a expressão (6.25) se verifica no caso A.

Caso B: Sendo $T(r_1)$ o tempo correspondente ao sub-ramo, então $T(r_1)$ deve obedecer a (6.25). Assim

$$T(r_1) < \tau_i^+ (x - x_{1,i}) + t_i \quad (6.28)$$

Neste caso, o tempo correspondente ao ramo 1 é maior que o correspondente ao ramo 2. Logo

$$\begin{aligned} T(r) - (\tau_i^+ x + t_i) &= P_{1,i}^{T,1} (t_i + T(r_1)) + P_{2,i}^{T,1} t_i - \tau_i^+ x - t_i < \\ &< (P_{1,i}^{T,1} + P_{2,i}^{T,1}) t_i + P_{1,i}^{T,1} \tau_i^+ (x - x_{1,i}) + P_{1,i}^{T,1} t_i - \tau_i^+ x - t_i = \quad (\text{usando (6.28)}) \\ &= P_{1,i}^{T,1} \tau_i^+ (x - x_{1,i}) + P_{1,i}^{T,1} t_i - (P_{1,i}^{T,1} + P_{2,i}^{T,1}) \tau_i^+ x = \quad (\text{pois } P_{1,i}^{T,1} + P_{2,i}^{T,1} = 1) \\ &= -P_{1,i}^{T,1} \tau_i^+ x_{1,i} + P_{1,i}^{T,1} t_i - P_{2,i}^{T,1} \tau_i^+ x \leq \\ &\leq -P_{1,i}^{T,1} \tau_{1,i}^+ x_{1,i} + P_{1,i}^{T,1} t_i - P_{2,i}^{T,1} \tau_{1,i}^+ x = \quad (\text{utilizando (6.11)}) \\ &= -\frac{t_i}{x_{1,i} x_{2,i}} \left[\begin{aligned} &P_{1,i}^{T,1} x_{1,i} (P_{1,i}^{T,1} x_{2,i} + P_{2,i}^{T,1} x_{1,i}) - P_{1,i}^{T,1} x_{1,i} x_{2,i} \\ &+ P_{2,i}^{T,1} x (P_{1,i}^{T,1} x_{2,i} + P_{2,i}^{T,1} x_{1,i}) \end{aligned} \right] = \\ &= -\frac{t_i}{x_{1,i} x_{2,i}} \left[\begin{aligned} &P_{1,i}^{T,1} (P_{1,i}^{T,1} - 1) x_{1,i} x_{2,i} + P_{1,i}^{T,1} P_{2,i}^{T,1} x_{1,i}^2 \\ &+ P_{1,i}^{T,1} P_{2,i}^{T,1} x x_{2,i} + (P_{2,i}^{T,1})^2 x x_{1,i} \end{aligned} \right] = \\ &= -\frac{P_{2,i}^{T,1} t_i}{x_{1,i} x_{2,i}} \left(-P_{1,i}^{T,1} x_{1,i} x_{2,i} + P_{1,i}^{T,1} x_{1,i}^2 + P_{1,i}^{T,1} x x_{2,i} + P_{2,i}^{T,1} x x_{1,i} \right) = \\ &= -\frac{P_{2,i}^{T,1} t_i}{x_{1,i} x_{2,i}} \left[P_{1,i}^{T,1} x_{2,i} (x - x_{1,i}) + P_{1,i}^{T,1} x_{1,i}^2 + P_{2,i}^{T,1} x x_{1,i} \right] < \\ &< 0 \quad (\text{dado que } x_{1,i} < x) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Fica, assim, provado que (6.25) se verifica no caso B.

Caso C: Sejam $T(r_1)$ e $T(r_2)$ os tempos correspondentes aos sub-ramos 1 e 2. Estes tempos devem obedecer a (6.25), logo

$$T(r_1) < \tau_i^+ (x - x_{1,i}) + t_i \quad (6.30)$$

$$T(r_2) < \tau_i^+ (x - x_{2,i}) + t_i \quad (6.31)$$

Considere-se que o sub-ramo b é aquele a que corresponde um maior tempo. Então

$$\begin{aligned} T(r) - (\tau_i^+ x + t_i) &= P_{1,i}^{T,b} (t_i + T(r_1)) + P_{2,i}^{T,b} (t_i + T(r_2)) - \tau_i^+ x - t_i < \\ &< t_i + P_{1,i}^{T,b} \tau_i^+ (x - x_{1,i}) + P_{2,i}^{T,b} \tau_i^+ (x - x_{2,i}) - \tau_i^+ x = \quad (\text{usando (6.30) e (6.31)}) \\ &= t_i - P_{1,i}^{T,b} \tau_i^+ x_{1,i} - P_{2,i}^{T,b} \tau_i^+ x_{2,i} \leq \\ &\leq t_i - P_{1,i}^{T,b} \tau_{b,i}^+ x_{1,i} - P_{2,i}^{T,b} \tau_{b,i}^+ x_{2,i} = \quad (\text{utilizando (6.11)}) \\ &= -\frac{t_i}{x_{1,i}x_{2,i}} \left[-x_{1,i}x_{2,i} + P_{1,i}^{T,b} x_{1,i}(P_{1,i}^{T,b} x_{2,i} + P_{2,i}^{T,b} x_{1,i}) + P_{2,i}^{T,b} x_{2,i}(P_{1,i}^{T,b} x_{2,i} + P_{2,i}^{T,b} x_{1,i}) \right] = \\ &= -\frac{t_i}{x_{1,i}x_{2,i}} \left[x_{1,i}x_{2,i} \left(-1 + (P_{1,i}^{T,b})^2 + (P_{2,i}^{T,b})^2 \right) + P_{1,i}^{T,b} P_{2,i}^{T,b} (x_{1,i})^2 + P_{1,i}^{T,b} P_{2,i}^{T,b} (x_{2,i})^2 \right] = \\ &= -\frac{t_i}{x_{1,i}x_{2,i}} \left[x_{1,i}x_{2,i} \left(-P_{2,i}^{T,b} (P_{1,i}^{T,b} + 1) + (P_{2,i}^{T,b})^2 \right) + P_{1,i}^{T,b} P_{2,i}^{T,b} (x_{1,i})^2 + P_{1,i}^{T,b} P_{2,i}^{T,b} (x_{2,i})^2 \right] = \\ &= -\frac{P_{1,i}^{T,b} P_{2,i}^{T,b} t_i}{x_{1,i}x_{2,i}} (x_{1,i} - x_{2,i})^2 \leq \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (6.32)$$

Assim, fica provado que (6.25) se verifica também no caso C. Tendo-se demonstrado que (6.25) se verifica nos 3 casos, fica demonstrado que a expressão é sempre válida. ■

Comentário: Esta propriedade permite que sejam definidos limites superiores para o tempo e custo correspondentes a um ramo de uma árvore de estratégia, quando se utiliza apenas um processo P_i . Demonstrou-se que tempo (custo) correspondente ao ramo não pode ser superior à soma do tempo (custo) de uma utilização do processo com o produto de τ_i^+ (χ_i^+) pela fracção do projecto correspondente ao ramo. Nesta propriedade não se consideram os tempos e custos de mudança necessários para entrar no ramo, mas é muito fácil incluí-los no limite inferior obtido (ou seja, obter o tempo e custo ajustados do ramo), bastando para tal adicionar os tempos e custos de mudança aos limites inferiores definidos pela propriedade. Esta, não só oferece um contributo para uma melhor compreensão do comportamento do modelo, como também pode ser utilizada para a definição de limites superiores mais interessantes, que tenham em consideração a utilização de um conjunto de processos. A propriedade 6C, que vai seguir-se, utiliza esta propriedade para definir limites superiores para os valores dos critérios quando se utiliza uma combinação de 2 processos.

Propriedade 6C *Seja r um ramo que corresponde à execução de uma fracção isolada x do projecto. Assuma-se que apenas se pretendem utilizar os processos P_i e P_j no ramo r , e assumam-se ainda que se verifica a seguinte relação⁸⁴:*

$$\left(\tau_i^+ - \tau_j^+\right) \left(\chi_i^+ - \chi_j^+\right) < 0 \quad (6.33)$$

Se se definir um custo limite $C_0(r)$ tal que

$$\min \left\{ c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x \right\} \leq C_0(r) \leq c_i + c_j + c_{i,j} + \max \left\{ \chi_i^+ x; \chi_j^+ x \right\} \quad (6.34)$$

então é possível obter uma subestratégia para a qual o tempo ($T(r)$) e o custo ($C(r)$) correspondentes ao ramo r terão os seguintes limites superiores:

$$T(r) < t_{i,j} + t_i + t_j + \tau_j^+ x + \frac{\tau_i^+ - \tau_j^+}{\chi_i^+ - \chi_j^+} \left(C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x \right) \quad (6.35)$$

$$C(r) < C_0(r) \quad (6.36)$$

Da mesma forma, se se definir um tempo limite $T_0(r)$ tal que

$$\min \left\{ t_i + \tau_i^+ x; t_j + \tau_j^+ x \right\} \leq T_0(r) \leq t_i + t_j + t_{i,j} + \max \left\{ \tau_i^+ x; \tau_j^+ x \right\} \quad (6.37)$$

então é possível obter uma subestratégia para a qual o tempo ($T(r)$) e o custo ($C(r)$) correspondentes ao ramo r terão os seguintes limites superiores:

$$T(r) < T_0(r) \quad (6.38)$$

$$C(r) < c_{i,j} + c_i + c_j + \chi_j^+ x + \frac{\chi_i^+ - \chi_j^+}{\tau_i^+ - \tau_j^+} \left(T_0(r) - t_{i,j} - t_i - t_j - \tau_j^+ x \right) \quad (6.39)$$

Demonstração:

Vai demonstrar-se apenas (6.35) e (6.36), uma vez que a demonstração de (6.38) e (6.39) é idêntica.

Para efectuar a demonstração, consideram-se dois casos, que em conjunto englobam todos os valores possíveis de τ_i^+ , τ_j^+ , χ_i^+ e χ_j^+ que obedecem a (6.33):

- Caso A: $\tau_i^+ > \tau_j^+$ e $\chi_i^+ < \chi_j^+$;
- Caso B: $\tau_i^+ < \tau_j^+$ e $\chi_i^+ > \chi_j^+$.

⁸⁴Note-se que, quando esta relação não se verifica, então a utilização de um dos processos é normalmente mais vantajosa do que a utilização do outro, quer em termos do critério tempo quer em termos do critério custo, podendo tal facto ser explorado para a determinação das subestratégias não dominadas.

Em ambos os casos A e B, considera-se um valor $\alpha \in [0, 1]$ e define-se da seguinte forma uma subestratégia para execução de uma fracção isolada x do projecto: começa-se por utilizar P_i e, logo que se tiver executado uma fracção do projecto maior ou igual a αx , muda-se para P_j . Uma tal subestratégia implica que se passe a utilizar P_j logo que se tenha executado uma fracção do projecto maior ou igual a αx dentro dos sub-ramos de r , e ocorra uma escolha de processo. O valor α é definido como

$$\alpha = \frac{C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x}{(\chi_i^+ - \chi_j^+) x} \quad (6.40)$$

Caso A: Neste caso, como $\chi_i^+ < \chi_j^+$, tem-se

$$(\chi_i^+ - \chi_j^+) x < 0 \quad (6.41)$$

$$\max \{ \chi_i^+ x; \chi_j^+ x \} = \chi_j^+ x \quad (6.42)$$

Da segunda parte da desigualdade da expressão (6.34) e de (6.42) constata-se que

$$\begin{aligned} C_0(r) \leq c_i + c_j + c_{i,j} + \max \{ \chi_i^+ x; \chi_j^+ x \} &\Leftrightarrow C_0(r) \leq c_i + c_j + c_{i,j} + \chi_j^+ x \\ &\Leftrightarrow C_0(r) - c_i - c_j - c_{i,j} - \chi_j^+ x \leq 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

De (6.40), (6.41) e (6.43) tem-se que

$$\alpha \geq 0 \quad (6.44)$$

Assim, está garantido que $\alpha \geq 0$, o que é necessário para que a subestratégia atrás definida para execução do ramo r exista. Para que essa subestratégia exista, é ainda necessário que $\alpha \leq 1$. Para já, vai assumir-se que $\alpha \leq 1$, e vai provar-se que, se tal acontecer, então (6.35) e (6.36) verificam-se. Vai depois verificar-se o que acontece se $\alpha > 1$.

Utilizando a subestratégia atrás definida tem-se que, pela propriedade 6B,

$$T(r) < \tau_i^+ \alpha x + t_i + t_{i,j} + \tau_j^+ (1 - \alpha) x + t_j \quad (6.45)$$

$$C(r) < \chi_i^+ \alpha x + c_i + c_{i,j} + \chi_j^+ (1 - \alpha) x + c_j \quad (6.46)$$

Substituindo, em (6.45), α pela expressão que o define, (6.40), obtém-se

$$\begin{aligned} T(r) &< t_i + t_{i,j} + t_j + \tau_j^+ x + \left(\tau_i^+ - \tau_j^+ \right) x \frac{C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x}{(\chi_i^+ - \chi_j^+) x} \\ &= t_{i,j} + t_i + t_j + \tau_j^+ x + \frac{\tau_i^+ - \tau_j^+}{\chi_i^+ - \chi_j^+} \left(C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x \right) \end{aligned} \quad (6.47)$$

Assim, fica provado que, se $\alpha \leq 1$ no caso A, então (6.35) verifica-se.

Fazendo, em (6.46), a mesma substituição, obtém-se

$$\begin{aligned} C(r) &< c_i + c_{i,j} + c_j + \chi_j^+ x + \left(\chi_i^+ - \chi_j^+ \right) x \frac{C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x}{\left(\chi_i^+ - \chi_j^+ \right) x} \\ &= C_0(r) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Assim fica provado que, se $\alpha \leq 1$ no caso A, então (6.36) também se verifica.

Para completar a prova para o caso A é ainda necessário provar que as expressões (6.35) e (6.36) se verificam também quando a subestratégia atrás definida não existe, isto é, quando $\alpha > 1$. Nessa situação tem-se

$$\begin{aligned} \alpha > 1 &\Leftrightarrow \frac{C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x}{\left(\chi_i^+ - \chi_j^+ \right) x} > 1 \\ &\Leftrightarrow C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x < \left(\chi_i^+ - \chi_j^+ \right) x \quad (\text{pois } \chi_i^+ < \chi_j^+) \\ &\Leftrightarrow C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j < \chi_i^+ x \end{aligned} \quad (6.49)$$

Para simplificar a análise do caso A quando $\alpha > 1$, divide-se este caso em dois subcasos, definidos da seguinte forma:

- Subcaso A1: $c_i + \chi_i^+ x \leq c_j + \chi_j^+ x$;
- Subcaso A2: $c_i + \chi_i^+ x > c_j + \chi_j^+ x$.

Subcaso A1: Neste subcaso, considera-se a subestratégia que consiste em apenas utilizar o processo P_i . De acordo com a propriedade 6B tem-se

$$C(r) < c_i + \chi_i^+ x \quad (6.50)$$

$$T(r) < t_i + \tau_i^+ x \quad (6.51)$$

De acordo com a condição que define este subcaso, tem-se também que

$$\min \left\{ c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x \right\} = c_i + \chi_i^+ x \quad (6.52)$$

Da primeira parte da desigualdade (6.34), de (6.50) e de (6.52), constata-se que

$$C(r) < c_i + \chi_i^+ x = \min \left\{ c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x \right\} \leq C_0(r) \quad (6.53)$$

Assim, fica provada (6.36) para este subcaso.

De (6.51) vem

$$\begin{aligned}
T(r) &< t_i + \tau_i^+ x < \\
&< t_i + t_j + t_{i,j} + \tau_j^+ x + (\tau_i^+ - \tau_j^+) x = \\
&= t_i + t_j + t_{i,j} + \tau_j^+ x + \frac{\tau_i^+ - \tau_j^+}{\chi_i^+ - \chi_j^+} (\chi_i^+ x - \chi_j^+ x) < \\
&< t_i + t_j + t_{i,j} + \tau_j^+ x + \frac{\tau_i^+ - \tau_j^+}{\chi_i^+ - \chi_j^+} (C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x) \quad (\text{usando (6.33) e (6.49)})
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Assim se prova (6.35) para este subcaso.

Subcaso A2: Neste subcaso considera-se a subestratégia que consiste em apenas utilizar o processo P_j . De acordo com a propriedade 6B vem

$$C(r) < c_j + \chi_j^+ x \tag{6.55}$$

$$T(r) < t_j + \tau_j^+ x \tag{6.56}$$

De acordo com a condição que define este subcaso tem-se também que

$$\min \{c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x\} = c_j + \chi_j^+ x \tag{6.57}$$

Da primeira parte da desigualdade (6.34), de (6.55) e de (6.57), tem-se que

$$C(r) < c_j + \chi_j^+ x = \min \{c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x\} \leq C_0(r) \tag{6.58}$$

Assim se prova (6.36) para este subcaso.

De (6.56) vem

$$\begin{aligned}
T(r) &< t_j + \tau_j^+ x < \\
&< t_j + t_i + t_{i,j} + \tau_j^+ x
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Uma vez que $\alpha > 1 > 0$ e que, pela definição do caso A, $\tau_i^+ > \tau_j^+$, sabe-se que $\alpha x (\tau_i^+ - \tau_j^+) > 0$, pelo que se pode adicionar $\alpha x (\tau_i^+ - \tau_j^+)$ ao membro mais à direita da desigualdade em (6.59), ficando

$$\begin{aligned}
T(r) &< t_j + t_i + t_{i,j} + \tau_j^+ x < \\
&< t_{i,j} + t_i + t_j + \tau_j^+ x + \alpha x (\tau_i^+ - \tau_j^+) < \\
&< t_{i,j} + t_i + t_j + \tau_j^+ x + \frac{\tau_i^+ - \tau_j^+}{\chi_i^+ - \chi_j^+} (C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x)
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Assim fica provada a expressão (6.35) para este subcaso. Fica também completa a demonstração para o caso A.

Caso B: Neste caso, como $\chi_i^+ > \chi_j^+$, tem-se

$$\left(\chi_i^+ - \chi_j^+\right) x > 0 \quad (6.61)$$

$$\max \left\{ \chi_i^+ x; \chi_j^+ x \right\} = \chi_i^+ x \quad (6.62)$$

Da segunda desigualdade da expressão (6.34) tem-se

$$\begin{aligned} C_0(r) \leq c_i + c_j + c_{i,j} + \max \left\{ \chi_i^+ x; \chi_j^+ x \right\} &\Leftrightarrow C_0(r) \leq c_i + c_j + c_{i,j} + \chi_i^+ x \quad (\text{por (6.62)}) \\ &\Leftrightarrow C_0(r) - c_i - c_j - c_{i,j} - \chi_j^+ x \leq \left(\chi_i^+ - \chi_j^+\right) x \\ &\Leftrightarrow \frac{C_0(r) - c_i - c_j - c_{i,j} - \chi_j^+ x}{\left(\chi_i^+ - \chi_j^+\right) x} \leq 1 \quad (\text{usando (6.61)}) \\ &\Leftrightarrow \alpha \leq 1 \quad (\text{pela definição de } \alpha, (6.40)) \end{aligned} \quad (6.63)$$

Assim, está garantido que $\alpha \leq 1$, o que é necessário para que a subestratégia atrás definida para execução do ramo r exista. Se for também $\alpha \geq 0$, então a subestratégia para execução do ramo r que está a ser considerada existe e, utilizando essa subestratégia, tem-se, pela propriedade 6B,

$$T(r) < \tau_i^+ \alpha x + t_i + t_{i,j} + \tau_j^+ (1 - \alpha) x + t_j \quad (6.64)$$

$$C(r) < \chi_i^+ \alpha x + c_i + c_{i,j} + \chi_j^+ (1 - \alpha) x + c_j \quad (6.65)$$

Tal como foi provado para o caso A, as expressões (6.64) e (6.65) garantem que (6.35) e (6.36) se verificam, o que prova estas expressões para $\alpha \geq 0$. Para completar a prova para o caso B é ainda necessário provar que as expressões (6.35) e (6.36) se verificam também quando a subestratégia atrás definida não existe, isto é, quando $\alpha < 0$. Nessa situação tem-se

$$\begin{aligned} \alpha < 0 &\Leftrightarrow \frac{C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x}{\left(\chi_i^+ - \chi_j^+\right) x} < 0 \\ &\Leftrightarrow C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j < \chi_j^+ x \quad (\text{pois } \chi_i^+ > \chi_j^+) \end{aligned} \quad (6.66)$$

Para simplificar a análise do caso B quando $\alpha > 1$, divide-se este caso em dois subcasos:

- Subcaso B1: $c_i + \chi_i^+ x \leq c_j + \chi_j^+ x$;
- Subcaso B2: $c_i + \chi_i^+ x > c_j + \chi_j^+ x$.

Subcaso B1: Neste subcaso considera-se a subestratégia que consiste em apenas utilizar o processo P_i . De acordo com a propriedade 6B, tem-se

$$C(r) < c_i + \chi_i^+ x \quad (6.67)$$

$$T(r) < t_i + \tau_i^+ x \quad (6.68)$$

De acordo com a condição que define este subcaso tem-se também que

$$\min \{c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x\} = c_i + \chi_i^+ x \quad (6.69)$$

Da primeira desigualdade em (6.34), de (6.67) e de (6.69), constata-se que

$$C(r) < c_i + \chi_i^+ x = \min \{c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x\} \leq C_0(r) \quad (6.70)$$

Assim, fica provada (6.36) para este subcaso.

De (6.68) vem

$$\begin{aligned} T(r) &< t_i + \tau_i^+ x < \\ &< t_i + t_j + t_{i,j} + \tau_j^+ x < \text{(pois } \tau_i^+ < \tau_j^+ \text{ no caso B)} \\ &< t_i + t_j + t_{i,j} + \tau_j^+ x + \frac{\tau_i^+ - \tau_j^+}{\chi_i^+ - \chi_j^+} (C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x) \text{ (usando (6.66) e (6.33))} \end{aligned} \quad (6.71)$$

Assim se prova (6.35) para este subcaso.

Subcaso B2: Neste subcaso, considera-se a subestratégia que consiste em apenas utilizar o processo P_j . De acordo com a propriedade 6B, será

$$C(r) < c_j + \chi_j^+ x \quad (6.72)$$

$$T(r) < t_j + \tau_j^+ x \quad (6.73)$$

De acordo com a condição que define este subcaso tem-se também que

$$\min \{c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x\} = c_j + \chi_j^+ x \quad (6.74)$$

Da primeira parte da desigualdade (6.34), de (6.72) e de (6.74), constata-se que

$$C(r) < c_j + \chi_j^+ x = \min \{c_i + \chi_i^+ x; c_j + \chi_j^+ x\} \leq C_0(r) \quad (6.75)$$

Assim se prova (6.36) para este subcaso.

De (6.73) vem

$$\begin{aligned} T(r) &< t_j + \tau_j^+ x < \\ &< t_i + t_j + t_{i,j} + \tau_j^+ x + \frac{\tau_i^+ - \tau_j^+}{\chi_i^+ - \chi_j^+} \left(C_0(r) - c_{i,j} - c_i - c_j - \chi_j^+ x \right) \quad (\text{usando (6.66) e (6.33)}) \end{aligned} \quad (6.76)$$

Assim fica provada a expressão (6.35) para este subcaso. Completa-se também a demonstração da propriedade. ■

Comentário: Esta propriedade considera a utilização de dois processos para executar um ramo da árvore, e estabelece um limite superior para o melhor valor que pode ser obtido num dos critérios quando se impõe um limite superior ao valor do outro critério. Embora apenas seja considerada a combinação de dois processos, quando existem mais que dois podem testar-se diferentes combinações para averiguar qual delas permite obter um limite superior mais interessante. Propriedades deste tipo, que permitem a definição de limites para os valores dos critérios para ramos das árvores ainda não construídos, podem permitir a comparação de várias árvores de estratégia incompletas e a eliminação de algumas que, de certeza, não podem conduzir a estratégias interessantes. Desta forma, tais propriedades podem ser muito importantes na definição de algoritmos mais eficientes para a obtenção das estratégias não dominadas, e também para a definição de abordagens interactivas que se baseiem na identificação de um pequeno número de estratégias em cada interacção.

Propriedade 6D *Seja $S(i, x)$, $i = 1, \dots, n$, o conjunto de todas as subestratégias que permitem executar uma fracção x do projecto começando por utilizar o processo P_i , e que não são dominadas por nenhuma outra subestratégia que pertença a este conjunto. Então será*

- (a) *se $x' > x$, $s \in S(i, x)$ e s permite executar uma fracção x' do projecto, então $s \in S(i, x')$.*
- (b) *se $x' > x$ e $\forall s \in S(i, x)$, s permite executar uma fracção x' do projecto, então $S(i, x') = S(i, x)$.*

Demonstração:

(a) Uma vez que $s \in S(i, x)$, então s começa por utilizar o processo P_i e, como é válida para executar uma fracção x' do projecto, então s só não pertencerá a $S(i, x')$ se existir neste conjunto uma outra subestratégia que domine s . Vai demonstrar-se por redução ao

absurdo que tal não pode acontecer. Assuma-se, assim, que $s' \in S(i, x')$ e s' domina s . Como $s' \in S(i, x')$, então s' começa por utilizar o processo P_i , e como $x' > x$, então s' permite também executar uma fracção x do projecto. Isto quer dizer que, ou $s' \in S(i, x)$, ou $\exists s'' \in S(i, x) : s''$ domina s' . Mas qualquer destas situações é absurda. Na primeira, como $s' \in S(i, x)$ e s' domina s , então s não pode pertencer a $S(i, x')$, o que é contrário ao que se está a assumir. Na segunda, como s'' domina s' e s' domina s , então s'' domina s e, como $s'' \in S(i, x)$, mais uma vez s não pode pertencer a $S(i, x')$, o que é contrário ao que se está a assumir. Portanto, é absurdo assumir que existe uma subestratégia s' que pertence a $S(i, x')$ e domina s , o que prova que $s \in S(i, x')$.

(b) Da parte (a) da propriedade pode concluir-se que todas as subestratégias de $S(i, x)$ pertencem também a $S(i, x')$. Assim, $S(i, x')$ só pode ser diferente de $S(i, x)$ se contiver subestratégias que não pertençam a este último conjunto. Seja então s' uma subestratégia que pertence a $S(i, x')$ e não pertence a $S(i, x)$. Como $x' > x$ e s' permite executar uma fracção x' do projecto, então s' também permite executar uma fracção x do projecto. Como $s' \in S(i, x')$, então s' também começa por utilizar P_i , e a única justificação que resta para s' não pertencer a $S(i, x)$ é existir neste conjunto outra estratégia que domine s' . Mas, tendo em conta que todas as subestratégias de $S(i, x)$ pertencem a $S(i, x')$, e que em $S(i, x')$ nenhuma outra subestratégia domina s' , tal não pode acontecer. É, portanto, absurdo assumir que possa existir uma subestratégia que pertença a $S(i, x')$ e não pertença a $S(i, x)$, o que completa a prova de que $S(i, x') = S(i, x)$. ■

Comentário: Esta propriedade estabelece algumas relações entre conjuntos $S(i, x)$ de subestratégias não dominadas que permitem a execução de uma fracção x do projecto, para diferentes valores de x . A propriedade define condições que permitem garantir que uma estratégia de $S(i, x)$ também pertença a um conjunto $S(i, x')$, em que $x' > x$, e estabelece também condições que permitem garantir que este último conjunto ($S(i, x')$) seja idêntico ao primeiro ($S(i, x)$). Assim, esta propriedade será importante para a identificação de estratégias não dominadas quando se seguir uma abordagem baseada na obtenção dos conjuntos de subestratégias não dominadas para fracções cada vez maiores do projecto, até se atingir o projecto completo. Tal será o caso do algoritmo que será apresentado no capítulo 7, onde esta propriedade vai ser utilizada.

Propriedade 6E *Seja $S(i, x), i = 1, \dots, n$, o conjunto de todas as subestratégias que permitem executar uma fracção x do projecto começando por utilizar o processo P_i , e que não são dominadas por nenhuma outra subestratégia que pertença a este conjunto. Considere-se um processo P_i e*

$$x \in]x_{1,i}, 1[\quad (6.77)$$

Considere-se ainda uma fracção x' do projecto, com $x' > x$, e seja $E_j, j = 1, \dots, n$, o conjunto de valores de x menores que $x' - x_{1,i}$ que provocam uma alteração nos conjuntos $S(j, x)$, com

$$E_j = \{e \in]0, x' - x_{1,i}[: \forall \delta > 0, S(j, e) \neq S(j, e + \delta)\} \quad (6.78)$$

Seja ainda

$$A = \begin{cases} \bigcup_{j=1}^n \{a > 0 : a = e + x_{b,i}, e \in E_j, b \in \{1; 2\}\}, & \text{se } x > x_{2,i} \\ \{x_{2,i}\} \cup \bigcup_{j=1}^n \{a > 0 : a = e + x_{1,i}, e \in E_j\}, & \text{se } x \leq x_{2,i} \end{cases} \quad (6.79)$$

Se $x \notin A$ e não existirem elementos de A com valores entre x e x' , então $S(i, x) = S(i, x')$, ou seja,

$$A \cap [x, x'[= \emptyset \implies S(i, x) = S(i, x') \quad (6.80)$$

Demonstração:

Vai demonstrar-se esta propriedade por redução ao absurdo. Para tal, vai assumir-se que as condições da propriedade se verificam e que $S(i, x) \neq S(i, x')$. Então, pela parte (b) da propriedade 6D, tem que existir uma subestratégia $s \in S(i, x)$ que não é válida para executar uma fracção x' do projecto. Vai agora analisar-se como é que tal pode ocorrer, considerando para isso dois casos, A e B, definidos da seguinte forma:

- Caso A: $x > x_{2,i}$;
- Caso B: $x \leq x_{2,i}$.

Caso A: Neste caso, a subestratégia s tem 2 ramos, cada um deles consistindo também numa subestratégia. Seja, assim, s_1 a subestratégia que constitui o ramo 1 de s , e s_2 a subestratégia que constitui o ramo 2 de s . Pela propriedade 4E (que é válida para a abordagem em que o modelo se baseia e, conseqüentemente, também para o modelo), s_1 e s_2 têm que ser não dominadas. Como s permite executar uma fracção x do projecto, então

- (a) s_1 permite executar uma fracção $x - x_{1,i}$, e
- (b) s_2 permite executar uma fracção $x - x_{2,i}$.

Por outro lado, como s não permite executar uma fracção x' do projecto, então pelo menos uma das seguintes alternativas tem que ser verdadeira:

- (c) s_1 não permite executar uma fracção $x' - x_{1,i}$ do projecto, ou

(d) s_2 não permite executar uma fracção $x' - x_{2,i}$ do projecto.

Juntando (c) e (d), e tendo em conta (a) e (b), vem

$\exists b \in \{1, 2\} : s_b$ não permite executar uma fracção $x' - x_{b,i}$ do projecto e
 s_b permite executar uma fracção $x - x_{b,i}$ do projecto

Considere-se então o valor de b para o qual esta expressão é verdadeira. Como s_b é uma subestratégia não dominada, então

$$\exists k \in \{1, \dots, n\} : s_b \in S(k, x - x_{b,i}) \wedge s_b \notin S(k, x' - x_{b,i}) \quad (6.81)$$

Considere-se o valor de k para o qual (6.81) é verdadeira e seja

$$e = \max \{x \in [0, 1] : s_b \in S(k, x)\} \quad (6.82)$$

Relativamente a (6.82), pode colocar-se o problema de se saber se o máximo do conjunto $\{x \in [0, 1] : s_b \in S(k, x)\}$ existe sempre. O supremo deste conjunto será a soma dos valores $x_{b,i}$ correspondentes aos arcos de um caminho entre a raiz e uma folha da árvore de estratégia correspondente a s_b (mais concretamente, o caminho para o qual esta soma tiver um menor valor). Assim, o supremo pertencerá sempre ao conjunto, o que quer dizer que o máximo tem forçosamente que existir.

A expressão (6.81) garante que

$$e \in [x - x_{b,i}, x' - x_{b,i}[\quad (6.83)$$

Logo

$$\exists e \in [x - x_{b,i}, x' - x_{b,i}[: s_b \in S(k, e) \wedge \forall \delta > 0, s_b \notin S(k, e + \delta) \quad (6.84)$$

Daí se constata que

$$\exists e \in [x - x_{b,i}, x' - x_{b,i}[: \forall \delta > 0, S(k, e) \neq S(k, e + \delta) \quad (6.85)$$

Analisando a expressão (6.78) (que define E_j) e (6.85), e tendo em conta que $x - x_{b,i} > 0$ e $x' - x_{b,i} \leq x' - x_{1,i}$ (pois $x_{1,i} \leq x_{2,i}$), pode constatar-se que $e \in E_k$. Assim sendo, vem

$$\exists e \in [x - x_{b,i}, x' - x_{b,i}[: e \in E_k \quad (6.86)$$

Defina-se agora $a = e + x_{b,i}$. Pela expressão (6.79), que define A , se $e \in E_k$ então $a \in A$. Por outro lado, se $e \in [x - x_{b,i}, x' - x_{b,i}[$, então $a = e + x_{b,i} \in [x, x'[$. Daqui se conclui que

$$\exists a \in [x, x'[: a \in A \quad (6.87)$$

Uma vez que se assumiu que as condições da propriedade se verificam, deveria ser $A \cap [x, x'[= \emptyset$. A expressão (6.87) contradiz directamente este pressuposto, pelo que se chegou a uma contradição. Assim a propriedade fica demonstrada para o caso A.

Caso B: Neste caso a subestratégia s tem apenas 1 ramo, não existindo descendentes do arco 2. Seja s_1 a subestratégia que constitui o ramo 1. Pela propriedade 4E (que é válida para a abordagem em que o modelo se baseia e, conseqüentemente, também para o modelo), s_1 tem que ser não dominada. Como s permite executar uma fracção x do projecto, então s_1 permite executar uma fracção $x - x_{1,i}$. Por outro lado, como s não permite executar uma fracção x' do projecto, então pelo menos uma das seguintes alternativas tem que ser verdadeira:

- (e) s_1 não permite executar uma fracção $x' - x_{1,i}$ do projecto, ou
- (f) $x' > x_{2,i}$.

Seguindo exactamente o mesmo raciocínio seguido para o caso A, conclui-se que, se (e) for verdadeira, então $\exists a \in [x, x'[: a \in A$, pelo se chega a uma contradição. Logo, (e) não pode ser verdadeiro e (f) tem que ser verdadeiro. Mas, neste caso, $x_{2,i} \in [x, x'[$. Como $x_{2,i} \in A$ (ver a expressão (6.79), que define A), então também aqui se conclui que

$$\exists a \in [x, x'[: a \in A \quad (6.88)$$

Logo, também para a alternativa (f) se chega a uma contradição, o que demonstra a propriedade para o caso B. Tendo-se demonstrado a propriedade para os casos A e B, esta fica assim completamente demonstrada. ■

Comentário: Esta propriedade estabelece condições para que, quando se conhece o conjunto de subestratégias não dominadas $S(i, x)$ que permitem a execução de uma dada fracção x do projecto, se possa garantir, para alguns valores $x' > x$, que $S(i, x') = S(i, x)$. Num abordagem baseada na obtenção dos conjuntos de subestratégias não dominadas para fracções cada vez maiores do projecto, esta propriedade permite a determinação de intervalos de valores de x nos quais o conjunto de subestratégias não dominadas se mantém inalterado. A propriedade será utilizada desta forma no algoritmo apresentado no capítulo 7.

6.3 Propriedades matemáticas para a utilização do tempo médio

Para além do caso geral de agregação do tempo, que foi analisado na secção anterior, há dois casos particulares que se pensa poderem vir a ter algum interesse: a utilização do tempo médio e a utilização do tempo máximo. Nesta secção apresentam-se algumas propriedades relativas ao primeiro destes casos. Estas propriedades aplicam-se à determinação de limites inferiores para os valores dos critérios num conjunto de ramos, considerando-se que existe já uma subestratégia para a execução de uma fracção inicial do projecto⁸⁵, ou seja, que já existe uma árvore de estratégia incompleta.

Utiliza-se f para designar a fracção esperada do projecto correspondente ao ramo, ou conjunto de ramos, para os quais se pretende calcular os limites inferiores dos critérios (ou, considerando a existência de uma árvore de estratégia incompleta, a fracção do projecto que não é executada pela porção da árvore já existente). Lembre-se que esta fracção esperada do projecto foi definida, em 5.2.3, como o produto da probabilidade de o ramo ser atingido pela fracção do projecto executada pelo ramo, no caso de este ser atingido (ou a soma destes valores para os diferentes ramos, no caso de se considerar um conjunto de ramos). O valor de f pode ser calculado como o somatório, para todas as utilizações de processos no ramo (ou ramos) considerado(s), do produto da probabilidade de essa utilização ocorrer pelo avanço médio que se verifica neste caso. Por vezes f aparecerá na forma de uma função $f(\cdot)$, com um argumento que indica o ramo ou ramos cuja subestratégia de execução ainda não está definida. Utiliza-se ainda $f_i, i = 1, \dots, n$ para representar a parcela de f que é executada pelo processo P_i . Note-se que o valor de f_i pode ser calculado como o somatório, para todas as utilizações de P_i no ramo (ou ramos) considerado(s), do produto da probabilidade de essa utilização ocorrer pelo avanço médio que se verifica nesta eventualidade.

Definem-se, para cada par de processos $(P_i, P_j), i \neq j$, tempos e custos de mudança mínimos, que serão designados por $t_{i,j}^-$ e $c_{i,j}^-$, respectivamente. Estes tempos e custos de mudança mínimos representam os menores tempos e custos de mudança possíveis para mudar de P_i para P_j , considerando a transição directa e a utilização de processos intermédios⁸⁶. Ou seja:

⁸⁵ Este conceito de subestratégia é um pouco diferente do utilizado noutros capítulos, onde as subestratégias correspondem à execução de uma fracção do projecto no final deste. Aqui irá corresponder à execução de uma fracção do projecto no seu início.

⁸⁶ A situação mais comum é $c_{i,j}^- = c_{i,j}$ e $t_{i,j}^- = t_{i,j}$, pois geralmente $c_{i,k} + c_{k,j} \geq c_{i,j}, \forall i, j = 1, \dots, n, k \neq i, j$ e $t_{i,k} + t_{k,j} \geq t_{i,j}, \forall i, j = 1, \dots, n, k \neq i, j$.

$$t_{i,j}^- = \min \left\{ t_{i,j}; \min_{(k_1, \dots, k_p) \in \{1, \dots, n\}^p, p \in \{1, \dots, n-2\}} \left\{ t_{i,k_1} + \sum_{l=1}^{p-1} t_{k_l, k_{l+1}} + t_{k_p, j} \right\} \right\} \quad (6.89)$$

$$c_{i,j}^- = \min \left\{ c_{i,j}; \min_{(k_1, \dots, k_p) \in \{1, \dots, n\}^p, p \in \{1, \dots, n-2\}} \left\{ c_{i,k_1} + \sum_{l=1}^{p-1} c_{k_l, k_{l+1}} + c_{k_p, j} \right\} \right\} \quad (6.90)$$

Com estas definições, verifica-se que

$$\forall i, j, k = 1, \dots, n, k \neq i, j, t_{i,j}^- \leq t_{i,k}^- + t_{k,j}^- \quad (6.91)$$

$$\forall i, j, k = 1, \dots, n, k \neq i, j, c_{i,j}^- \leq c_{i,k}^- + c_{k,j}^- \quad (6.92)$$

É fácil constatar que (6.91) e (6.92) têm que verificar-se. Considere-se, por exemplo, (6.91). Se (6.91) não se verificasse, então existiriam i, j, k tais que $t_{i,j}^- > t_{i,k}^- + t_{k,j}^-$, ou seja, existiria uma forma de mudar de P_i para P_j com um tempo de mudança total inferior a $t_{i,j}^-$. Essa forma seria ir de P_i para P_k com o menor tempo de mudança total possível, e depois ir de P_k para P_j com o menor tempo de mudança total possível. Mas, por definição de $t_{i,j}^-$, não pode existir uma forma de ir de P_i para P_j com um tempo de mudança total inferior a $t_{i,j}^-$, o que conduziria a uma contradição. Logo, por redução ao absurdo, (6.91) tem que verificar-se, e um argumento idêntico poderia ser utilizado em relação a (6.92).

Vão também ser utilizados o “tempo por avanço médio” τ_i^- , e o “custo por avanço médio” χ_i^- , dos diferentes processos $P_i, i = 1, \dots, n$, que foram definidos em (6.3) e (6.4). Atendendo a que se está a utilizar o tempo médio, as probabilidades ajustadas ao tempo são iguais às probabilidades originais, podendo definir-se τ_i^- de uma forma mais simples:

$$\tau_i^- = \frac{t_i}{P_{1,i}x_{1,i} + P_{2,i}x_{2,i}} \quad (6.93)$$

A definição de χ_i^- mantém-se inalterada, ou seja,

$$\chi_i^- = \frac{c_i}{P_{1,i}x_{1,i} + P_{2,i}x_{2,i}} \quad (6.94)$$

Propriedade 6F *Considere-se um conjunto de ramos R a que corresponde uma fracção esperada $f(R)$ do projecto, e assumase que cada processo $P_i, i = 1, \dots, n$, será utilizado para empreender uma parcela $f_i(R)$ dessa fracção $f(R)$, ou seja, $f(R) = \sum_{i=1}^n f_i(R)$. Se a agregação do tempo for efectuada utilizando o tempo médio, e se os tempos e custos de mudança forem nulos, então as contribuições do conjunto de ramos R para o tempo do projecto ($CT(R)$) e para o custo do projecto ($CC(R)$) terão os seguintes limites inferiores:*

$$CT(R) \geq \sum_{i=1}^n \tau_i^- f_i(R) \quad (6.95)$$

$$CC(R) \geq \sum_{i=1}^n \chi_i^- f_i(R) \quad (6.96)$$

Demonstração:

Apenas se vai demonstrar (6.95), uma vez que a demonstração de (6.96) será idêntica. Tal como é estabelecido pelas condições da propriedade, consideram-se tempos e custos de mudança nulos.

Considere-se um ramo individual r pertencente ao conjunto R e defina-se $T(r)$ como tempo correspondente a esse ramo, ou seja, o tempo necessário para executar a fracção do projecto correspondente ao ramo se este for atingido. Atendendo a que se estão a ignorar os tempos de mudança, o tempo ajustado⁸⁷ correspondente ao ramo r será igual ao tempo correspondente a este ramo ($TA(r) = T(r)$). Sendo $p(r)$ a probabilidade de r ser atingido, tem-se

$$CT(r) = p(r)T(r) \quad (6.97)$$

A contribuição do conjunto de ramos R para o tempo do projecto pode definir-se como o somatório das contribuições dos ramos individuais, ou seja,

$$CT(R) = \sum_{r \in R} CT(r) = \sum_{r \in R} p(r)T(r) \quad (6.98)$$

Seja $x_i(r)$, $i = 1, \dots, n$, a fracção do ramo r executada utilizando o processo P_i , quando o ramo r é atingido. Assim

$$\forall i = 1, \dots, n, f_i(R) = \sum_{r \in R} p(r)x_i(r) \quad (6.99)$$

Vai demonstrar-se que, para todos os ramos $r \in R$ se tem

$$T(r) \geq \sum_{i=1}^n \tau_i^- x_i(r) \quad (6.100)$$

⁸⁷Lembre-se que, tal como foi definido em 5.2.3, o valor ajustado de um critério correspondente a um ramo é o valor do critério que se obteria se esse ramo fosse executado como uma árvore independente, tendo em consideração o impacto da entrada no ramo.

Demonstrando (6.100), a expressão (6.95) fica também demonstrada, dado que

$$\begin{aligned}
T(r) \geq \sum_{i=1}^n \tau_i^- x_i(r), \forall r \in R &\implies \sum_{r \in R} p(r) T(r) \geq \sum_{r \in R} p(r) \sum_{i=1}^n \tau_i^- x_i(r) \\
&\implies \sum_{r \in R} CT(r) \geq \sum_{r \in R} \sum_{i=1}^n p(r) \tau_i^- x_i(r) \\
&\implies CT(R) \geq \sum_{i=1}^n \tau_i^- \sum_{r \in R} p(r) x_i(r) \\
&\implies CT(R) \geq \sum_{i=1}^n \tau_i^- f_i(R) \tag{6.101}
\end{aligned}$$

Vai então demonstrar-se (6.100), e para isso considera-se um ramo genérico $r \in R$. Esse ramo divide-se, no nível imediatamente seguinte, em outros dois ramos, que são aqui designados por sub-ramos. O ramo que descende do arco 1 do ramo inicial é identificado como sub-ramo 1, e o que descende do arco 2 do ramo inicial é identificado como sub-ramo 2. As fracções $x_i(r)$, $i = 1, \dots, n$, empreendidas por cada processo têm um componente em cada sub-ramo. Assim, para cada processo P_i , $i = 1, \dots, n$, define-se $y_{b,i}(r)$, $b = 1, 2$, como a fracção do projecto executada pelo processo P_i no sub-ramo b do ramo r , se este sub-ramo for atingido. Define-se j como o índice do primeiro processo a utilizar no ramo (isto é, o primeiro processo a ser utilizado no ramo será P_j) e define-se $T(b, r)$ como o tempo correspondente ao sub-ramo b do ramo r . Define-se ainda $x(r)$ como a fracção isolada do projecto executada pelo ramo r . Tem-se, assim

$$x(r) = \sum_{i=1}^n x_i(r) \tag{6.102}$$

Considere-se agora que todas as funções definidas para o ramo r (isto é, T , x_i , x e $y_{b,i}$) estão também definidas, de igual modo, para os sub-ramos de r . Por forma a simplificar a notação, e porque se acredita que daí não advirá uma diminuição da clareza da exposição, vai abandonar-se a inclusão explícita do argumento relativo ao ramo nestas funções.

Vai demonstrar-se que (6.100) se verifica nos seguintes casos:

- Caso A: se ambos os arcos do nodo inicial do ramo forem terminais, o que significa que $x \leq x_{1,j}$;
- Caso B: se apenas o arco 2 do nodo inicial for terminal, o que significa que $x_{1,j} < x \leq x_{2,j}$, e se (6.100) se verificar no sub-ramo;
- Caso C: se nenhum dos arcos for terminal, o que significa que $x > x_{2,j}$, e se (6.100) se verificar em ambos os sub-ramos.

A demonstração destes 3 casos prova (6.100) por indução.

Caso A: Neste caso, o processo P_j é utilizado uma vez, e mais nenhum processo é utilizado. Isto significa que $x_j = x$ e $x_i = 0, i \neq j$ (portanto $\tau_i^- x_i = 0, i \neq j$). Então

$$\begin{aligned}
T - \sum_{i=1}^n \tau_i^- x_i &= t_j - \tau_j^- x \quad (\text{pois } \tau_i^- x_i = 0 \text{ para } i \neq j, \text{ e } x_j = x) \\
&= \frac{P_{1,j}x_{1,j} + P_{2,j}x_{2,j}}{P_{1,j}x_{1,j} + P_{2,j}x_{2,j}} t_j - \frac{(P_{1,j} + P_{2,j})}{P_{1,j}x_{1,j} + P_{2,j}x_{2,j}} t_j x \quad (\text{pois } P_{1,j} + P_{2,j} = 1) \\
&= \frac{t_j}{P_{1,j}x_{1,j} + P_{2,j}x_{2,j}} [P_{1,j}(x_{1,j} - x) + P_{2,j}(x_{2,j} - x)] \\
&\geq 0 \quad (\text{dado que } x \leq x_{1,j} \leq x_{2,j})
\end{aligned} \tag{6.103}$$

Assim, fica provado que (6.100) se verifica no caso A.

Caso B: Neste caso pretende provar-se que, se (6.100) se verifica para o sub-ramo, então também se verifica para o ramo. Neste caso

$$x_j = P_{1,j}(x_{1,j} + y_{1,j}) + P_{2,j}x \tag{6.104}$$

$$x_i = P_{1,j}y_{1,i}, i = 1, \dots, n, i \neq j \tag{6.105}$$

Logo

$$\begin{aligned}
T &= P_{1,j}T(1) + t_j \geq \\
&\geq P_{1,j} \sum_{i=1}^n \tau_i^- y_{1,i} + t_j = \quad (\text{porque (6.100) se verifica no sub-ramo}) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \tau_i^- x_i + \tau_j^- P_{1,j}y_{1,j} + t_j = \quad (\text{utilizando (6.105)}) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \tau_i^- x_i + \tau_j^- P_{1,j}y_{1,j} + \tau_j^- (P_{1,j}x_{1,j} + P_{2,j}x_{2,j}) \geq \quad (\text{por (6.93)}) \\
&\geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \tau_i^- x_i + \tau_j^- (P_{1,j}y_{1,j} + P_{1,j}x_{1,j} + P_{2,j}x) = \quad (\text{pois } x \leq x_{2,j}) \\
&= \sum_{i=1}^n \tau_i^- x_i \quad (\text{por (6.104)})
\end{aligned} \tag{6.106}$$

Assim, fica provado que (6.100) se verifica no caso B.

Caso C: Neste caso, pretende provar-se que, se (6.100) se verifica para ambos os sub-ramos, então também se verifica para o ramo. Tem-se, neste caso

$$x_j = P_{1,j}(x_{1,j} + y_{1,j}) + P_{2,j}(x_{2,j} + y_{2,j}) \quad (6.107)$$

$$x_i = P_{1,j}y_{1,i} + P_{2,j}y_{2,i}, i = 1, \dots, n, i \neq j \quad (6.108)$$

Logo

$$\begin{aligned} T &= P_{1,j}T(1) + P_{2,j}T(2) + t_j \geq \\ &\geq P_{1,j} \sum_{i=1}^n \tau_i^- y_{1,i} + P_{2,j} \sum_{i=1}^n \tau_i^- y_{2,i} + t_j = \text{(porque (6.100) se verifica nos sub-ramos)} \\ &= \sum_{i=1}^n \tau_i^- (P_{1,j}y_{1,i} + P_{2,j}y_{2,i}) + \tau_j^- (P_{1,j}x_{1,j} + P_{2,j}x_{2,j}) = \text{(por (6.93))} \\ &= \sum_{i=1}^n \tau_i^- x_i \text{ (por (6.107) e (6.108))} \end{aligned} \quad (6.109)$$

Fica, pois, provado que (6.100) se verifica também no caso C. Tendo-se demonstrado que (6.100) se verifica nos 3 casos, fica também demonstrada (6.95), e assim se completa a demonstração da propriedade. ■

Comentário: Esta propriedade permite que sejam definidos limites inferiores para a contribuição de um conjunto de ramos para o tempo e custo médios de uma estratégia de execução do projecto, como funções das fracções esperadas do projecto empreendidas por cada processo ($f_i(R)$) nesse conjunto de ramos. Para isso define-se, para cada processo, um “tempo por avanço médio” (τ_i^-) e um “custo por avanço médio” (χ_i^-), e demonstra-se que a contribuição dos ramos para o tempo (custo) médio não pode ser inferior à soma, para todos os processos, do produto de τ_i^- (χ_i^-) pela fracção esperada do projecto a ser empreendida pelo processo no conjunto de ramos. Uma vez que os tempos e custos de mudança não são tomados em consideração no cálculo dos limites inferiores, estes limites são geralmente más aproximações aos menores valores dos critérios que se podem obter. Na propriedade 6G os custos e tempos de mudança vão ser incluídos no cálculo dos limites inferiores, o que permitirá a obtenção de melhores valores para estes limites inferiores⁸⁸.

Propriedade 6G *Seja R o conjunto de ramos⁸⁹ ainda não definidos na árvore de estratégia, e sejam $R_i = \{r_{i,1}, \dots, r_{i,q(i)}\}, i = 1, \dots, n$, os subconjuntos de R que contêm os ramos*

⁸⁸Os valores dos limites inferiores serão melhores no sentido de estarem mais próximos dos menores valores dos critérios que se podem, na realidade, obter nas condições da propriedade.

⁸⁹Nesta propriedade, designam-se por ramos os maiores ramos que ainda não estão definidos, sendo usada a designação de sub-ramos para referir os ramos que estão contidos nesses.

imediatamente precedidos pela utilização do processo P_i , com $q(i)$ igual ao número de elementos de R_i . Seja $x_{i,+} = \max_{t=1,\dots,q(i)} x(r_{i,t})$, seja ainda $z_{i,j}$ a parcela da contribuição esperada dos ramos de R_i que é executada utilizando o processo P_j , $j = 1, \dots, n$, e assumamos a utilização do tempo médio para a agregação do tempo. Então, as contribuições do conjunto de ramos R_i para o tempo ($CT(R_i)$) e para o custo ($CC(R_i)$) da estratégia terão os seguintes limites inferiores:

$$CT(R_i) \geq \sum_{j=1}^n \left(\tau_j^- z_{i,j} + \frac{z_{i,j}}{x_{i,+}} t_{i,j}^- \right) \quad (6.110)$$

$$CC(R_i) \geq \sum_{j=1}^n \left(\chi_j^- z_{i,j} + \frac{z_{i,j}}{x_{i,+}} c_{i,j}^- \right) \quad (6.111)$$

Demonstração:

Apenas se vai demonstrar (6.110), uma vez que a demonstração de (6.111) é idêntica. De acordo com a propriedade 6F, considerando tempos de mudança nulos tem-se

$$CT(R_i) \geq \sum_{j=1}^n \tau_j^- z_{i,j} \quad (6.112)$$

Seja $R'_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$, o conjunto de ramos pertencentes a R_i que começam com uma utilização do processo P_j , e seja $R'_{i,j,k}$, $i, j, k = 1, \dots, n$, o conjunto de sub-ramos dos ramos pertencentes a R_i que se iniciam imediatamente a seguir a uma utilização de P_j e começam por utilizar P_k (excluem-se de $R'_{i,j,k}$ os próprios ramos de R_i). Seja ainda $p'_{i,j} = \sum_{r \in R'_{i,j}} p(r)$, $i, j = 1, \dots, n$ ($p(r)$ é, lembre-se, a probabilidade de o ramo r ser atingido).

O impacto dos tempos de mudança na contribuição do conjunto de ramos R_i para o tempo da estratégia ($CTM(R_i)$) é igual à soma do impacto dos tempos de mudança correspondentes à mudança da árvore incompleta para as raízes dos novos ramos com o impacto dos tempos de mudança correspondentes às mudanças de processo que ocorrem dentro dos novos ramos. Assim

$$CTM(R_i) = \sum_{j=1}^n p'_{i,j} t_{i,j} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r) t_{j,k} \quad (6.113)$$

Incluindo os tempos de mudança em (6.112) obtém-se

$$\begin{aligned}
CT(R_i) &\geq \sum_{j=1}^n \tau_j^- z_{i,j} + CTM(R_i) \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\tau_j^- z_{i,j} + p'_{i,j} t_{i,j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r) t_{j,k} \right] \\
&\geq \sum_{j=1}^n \left[\tau_j^- z_{i,j} + p'_{i,j} t_{i,j}^- + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r) t_{j,k}^- \right] \quad (\text{por (6.89)}) \quad (6.114)
\end{aligned}$$

Uma vez que $x_{i,+}$ é a maior fracção do projecto a ser executada por um ramo de R_i , tem-se

$$\forall j, k = 1, \dots, n, \forall r \in R'_{i,j} \cup R'_{i,j,k}, x(r) \leq x_{i,+} \quad (6.115)$$

Dado que P_j é utilizado para empreender uma fracção esperada $z_{i,j}$ do projecto nos ramos de R_i , então, para $j = 1, \dots, n$, vem

$$z_{i,j} = \sum_{r \in R'_{i,j}} f(r) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{r \in R'_{i,k,j}} f(r) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{r \in R'_{i,j,k}} f(r) \quad (6.116)$$

A primeira parcela de (6.116) representa a fracção esperada do projecto que corresponde a ramos que começam por utilizar P_j ; a segunda representa a fracção esperada que corresponde a sub-ramos que, tendo imediatamente antes do seu início um processo diferente de P_j , começam por utilizar P_j ; e a terceira representa a fracção esperada que corresponde a sub-ramos que, tendo imediatamente antes do seu início o processo P_j , começam por utilizar um processo diferente. Partindo de (6.116), tendo em consideração que $f(r) = p(r)x(r)$, e utilizando (6.115) e a definição de $p'_{i,j}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
z_{i,j} &= \sum_{r \in R'_{i,j}} p(r)x(r) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left[\sum_{r \in R'_{i,k,j}} p(r)x(r) - \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r)x(r) \right] \\
&\leq p'_{i,j} x_{i,+} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left[\sum_{r \in R'_{i,k,j}} p(r)x(r) - \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r)x(r) \right] \quad (6.117)
\end{aligned}$$

De (6.117) vem

$$p'_{i,j} \geq \frac{z_{i,j}}{x_{i,+}} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left[\sum_{r \in R'_{i,k,j}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} - \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} \right] \quad (6.118)$$

Utilizando, em (6.114), este resultado, tem-se

$$CT(R_i) \geq \sum_{j=1}^n \left[\tau_j^- z_{i,j} + \frac{z_{i,j}}{x_{i,+}} t_{i,j}^- + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \left[- \sum_{r \in R'_{i,k,j}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} t_{i,j}^- + \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r) \left[\frac{x(r)}{x_{i,+}} t_{i,j}^- + t_{j,k}^- \right] \right] \right] \quad (6.119)$$

Atendendo a (6.115), pode multiplicar-se $t_{j,k}^-$ por $\frac{x(r)}{x_{i,+}}$ no último somatório de (6.119). Assim

$$\begin{aligned} CT(R_i) &\geq \sum_{j=1}^n \left(\tau_j^- z_{i,j} + \frac{z_{i,j}}{x_{i,+}} t_{i,j}^- \right) - \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{r \in R'_{i,k,j}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} t_{i,j}^- \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} \left(t_{i,j}^- + t_{j,k}^- \right) \end{aligned} \quad (6.120)$$

De acordo com (6.91), $t_{i,j}^- + t_{j,k}^- \geq t_{i,k}^-$. Tendo isso em conta, e trocando o somatório em j com o somatório em k no primeiro somatório triplo, pode escrever-se

$$CT(R_i) \geq \sum_{j=1}^n \left(\tau_j^- z_{i,j} + \frac{z_{i,j}}{x_{i,+}} t_{i,j}^- \right) - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \sum_{r \in R'_{i,k,j}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} t_{i,j}^- + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{r \in R'_{i,j,k}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} t_{i,k}^- \quad (6.121)$$

Trocando agora os índices j e k no último somatório triplo, obtém-se

$$\begin{aligned} CT(R_i) &\geq \sum_{j=1}^n \left(\tau_j^- z_{i,j} + \frac{z_{i,j}}{x_{i,+}} t_{i,j}^- \right) - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \sum_{r \in R'_{i,k,j}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} t_{i,j}^- + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \sum_{r \in R'_{i,k,j}} p(r) \frac{x(r)}{x_{i,+}} t_{i,j}^- \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\tau_j^- z_{i,j} + \frac{z_{i,j}}{x_{i,+}} t_{i,j}^- \right) \end{aligned} \quad (6.122)$$

Assim fica demonstrada (6.110). ■

Comentário: Esta propriedade inclui os tempos e custos de mudança no cálculo dos limites inferiores para o tempo e custo médio. Estes limites inferiores dizem respeito ao tempo e

custo em ramos precedidos pela utilização de P_i , mas os limites inferiores globais podem ser facilmente obtidos adicionando, para todos os processos $P_i, i = 1, \dots, n$, os limites inferiores relativos aos ramos precedidos pela utilização de P_i . Os limites inferiores assim obtidos são sempre melhores do que (ou iguais a) os limites inferiores obtidos através da propriedade 6F (no sentido de estarem tão ou mais próximos dos valores mínimos que podem ser realmente obtidos), uma vez que agora se estão a tomar em consideração os custos e tempos de mudança.

Corolário 6G.1 *Suponha-se que uma árvore de estratégia incompleta tem um custo C^0 e um tempo T^0 (valores que excluem os ramos ainda indefinidos), e que se pretende completar a árvore de forma a que a estratégia tenha o menor tempo possível (T^*) e que o custo (C) respeite a restrição $C \leq C^M$. Defina-se $f'_i, i = 1, \dots, n$, como a fracção esperada do projecto a ser executada em ramos ainda não incluídos na árvore, e que são imediatamente precedidos pelo uso do processo P_i , e defina-se $x_{i,+}$ como a maior fracção isolada do projecto para estes ramos (se $f'_i = 0$, então não existem ramos precedidos pela utilização de P_i , podendo atribuir-se a $x_{i,+}$ qualquer valor não nulo, por exemplo $x_{i,+} = 1$). Utilizando $z_{i,j}$ como variáveis de decisão, pode definir-se o problema 6a. Se o problema não tiver soluções admissíveis, então não existe nenhuma estratégia que respeite a restrição de custo. Se o problema tiver soluções admissíveis, então não existe nenhuma estratégia que simultaneamente respeite a restrição de custo e apresente um tempo inferior ao valor da função objectivo para a solução óptima do problema.*

Problema 6a

$$\begin{aligned} \min T &= T^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{i,j} \left(\tau_j^- + \frac{t_{i,j}^-}{x_{i,+}} \right) \\ \text{s.a} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_{i,j} \left(\chi_j^- + \frac{c_{i,j}^-}{x_{i,+}} \right) &\leq C^M - C^0 \\ \sum_{j=1}^n z_{i,j} &= f'_i, \quad i = 1, \dots, n \\ z_{i,j} &\geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Comentário: Este é um corolário directo da propriedade 6G. Esta propriedade apresenta limites inferiores para o tempo e custo de completar uma estratégia, como função dos parâmetros do modelo, de algumas características da árvore de estratégia incompleta e dos processos utilizados nos diferentes ramos para completar a estratégia. Perante uma estratégia incompleta, os parâmetros do modelo e as características da árvore de estratégia incompleta devem ser considerados fixos, apenas se fazendo variar a utilização dos processos para alterar as combinações tempo/custo a obter. Assim, definiu-se um problema de

programação linear que minimiza o limite inferior do tempo (função objectivo), obrigando o limite inferior do custo a ser menor ou igual ao custo limite (1ª restrição). O problema contém ainda um conjunto de restrições que obrigam as fracções esperadas do projecto empreendidas pelos diferentes processos nos ramos precedidos pela utilização de P_i a serem iguais às fracções esperadas do projecto correspondentes a esses ramos. Além disso, um conjunto de condições de não negatividade impedem que se considere que um processo é utilizado para empreender uma fracção esperada do projecto que seja negativa. Uma vez que estão a ser utilizados limites inferiores para os valores dos critérios, o valor óptimo dado pela resolução do problema 6a é ele próprio um limite inferior para o tempo que se pode obter tendo em conta o custo limite.

De um modo semelhante, a propriedade 6G pode ser utilizada para obter um limite inferior para o custo de uma estratégia que respeite um tempo máximo ($T \leq T^M$). É apenas necessário substituir, no problema 6a, as funções e coeficientes relativos ao tempo (i.e, T , T^0 , τ_j^- e $t_{i,j}^-$) pelas correspondentes funções e coeficientes relativos ao custo (i.e, C , C^0 , χ_j^- e $c_{i,j}^-$), e, de forma idêntica, substituir as funções e coeficientes relativos ao custo (i.e, C^0 , C^M , χ_j^- e $c_{i,j}^-$) pelas correspondentes funções e coeficientes relativos ao tempo (i.e, T^0 , T^M , τ_j^- e $t_{i,j}^-$).

Este corolário baseia-se em limites inferiores para o tempo e para o custo. A restrição definida no problema 6a para representar o custo máximo utiliza, assim, o limite inferior do custo, e não o verdadeiro custo. Tal significa que é possível que, apesar de o limite inferior calculado para o custo respeitar o custo máximo, o mesmo não aconteça com o custo mínimo que é possível atingir. Desta forma, mesmo se existirem soluções admissíveis para o problema, pode não existir nenhuma estratégia que obedeça à restrição do custo.

Note-se também que, apesar de existirem n^2 variáveis de decisão no problema 6a, existem apenas $n + 1$ restrições, o que significa que, no máximo, $n + 1$ variáveis terão valores não nulos na solução óptima. Este facto, e toda a estrutura do problema, levam a acreditar que poderão existir formas mais eficientes para o resolver do que a utilização do método simplex.

Este corolário irá ser utilizado para definir uma técnica para a identificação da estratégia que minimiza o tempo, com sujeição a um custo limite. Essa técnica será utilizada por um procedimento interactivo para a escolha de uma estratégia. Procedimento interactivo e técnica são descritos no capítulo 8.

6.4 Propriedades matemáticas para a utilização do tempo máximo

Vai apenas apresentar-se uma propriedade matemática relativa à utilização do tempo máximo. Esta propriedade considera um ramo r e determina um limite inferior para o tempo de qualquer árvore que contenha esse ramo. Nesta propriedade utilizam-se tempos de mudança mínimos, $t_{i,j}^-$, $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, definidos da mesma forma que o foram para a utilização do tempo médio, ou seja, definidos de acordo com (6.89). Essa definição de tempo de mudança mínimo estende-se aos tempos de preparação inicial dos processos. Então, para $i = 0, \dots, n, j = 1, \dots, n, j \neq i$, vem

$$t_{i,j}^- = \min \left\{ t_{i,j}; \min_{(k_1, \dots, k_p) \in \{1, \dots, n\}^p, p \in \{1, \dots, n-2\}} \left\{ t_{i,k_1} + \sum_{l=1}^{p-1} t_{k_l, k_{l+1}} + t_{k_p, j} \right\} \right\} \quad (6.123)$$

Assim, a expressão (6.91) terá aqui a seguinte forma:

$$\forall i = 0, \dots, n, \forall j, k = 1, \dots, n, k \neq i, j, t_{i,j}^- \leq t_{i,k}^- + t_{k,j}^- \quad (6.124)$$

Propriedade 6H *Assuma-se a utilização do tempo máximo para agregar o tempo, e considere-se um ramo r que permite a execução de uma fracção isolada x ($x < 1$) do projecto. Suponha-se que o tempo correspondente a este ramo é $T(r)$, e que o primeiro processo a ser usado no ramo é P_i . Defina-se, para este processo, a função*

$$f_i(x) = \min_{j=1, \dots, n} \left\{ t_{0,j}^- + t_j \frac{x}{x_{2,j}} + t_{j,i}^- \right\} \quad (6.125)$$

Então, qualquer árvore a que permita executar todo o projecto e contenha o ramo r deve apresentar um tempo $T(a)$ com o seguinte limite inferior:

$$T(a) \geq T(r) + f_i(1-x) \quad (6.126)$$

Demonstração:

Uma vez que se está a utilizar o modelo com o tempo máximo, o tempo de qualquer árvore a que contenha r deve ser maior ou igual à soma de $T(r)$ com o tempo correspondente à travessia da raiz da árvore para a raiz do ramo. Uma vez que, $\forall j = 1, \dots, n, x_{2,j} \geq x_{1,j}$, então o tempo correspondente à ida da raiz da árvore a para a raiz do ramo r é minimizado se o caminho for apenas constituído por arcos 2 dos sucessivos nodos⁹⁰. Se, num tal caminho,

⁹⁰Lembre-se que o arco 2 de um nodo referente à utilização de um processo P_j é aquele que corresponde a um avanço $x_{2,j}$ do projecto.

cada processo $P_j, j = 1, \dots, n$ for utilizado para empreender uma fracção isolada x_j do projecto⁹¹, então, não entrando em consideração com os tempos de preparação inicial nem com os tempos de mudança, é

$$T(a) \geq T(r) + \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{x_{2,j}} t_j \quad (6.127)$$

Seja P_k o processo que minimiza $t_{0,j}^- + t_j \frac{1-x}{x_{2,j}} + t_{j,i}^-$. Então

$$P_k : t_{0,k}^- + t_k \frac{1-x}{x_{2,k}} + t_{k,i}^- = \min_{j=1, \dots, n} \left\{ t_{0,j}^- + t_j \frac{1-x}{x_{2,j}} + t_{j,i}^- \right\} = f_i(1-x) \quad (6.128)$$

Definindo P_k desta forma, tem-se

$$\forall j = 1, \dots, n, t_{0,j}^- + t_j \frac{1-x}{x_{2,j}} + t_{j,i}^- \geq t_{0,k}^- + t_k \frac{1-x}{x_{2,k}} + t_{k,i}^- \quad (6.129)$$

Seja Q o conjunto de todos os processos que são utilizados no caminho entre a raiz da árvore a e a raiz do ramo r , e seja P_m o processo pertencente a este conjunto Q para o qual o quociente entre t_j e $x_{2,j}$ é mínimo, isto é,

$$P_m : P_m \in Q \wedge \frac{t_m}{x_{2,m}} = \min_{P_j \in Q} \frac{t_j}{x_{2,j}} \quad (6.130)$$

De (6.127) e (6.130) pode concluir-se que

$$\begin{aligned} T(a) &\geq T(r) + \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{x_{2,j}} t_j \\ &\geq T(r) + \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{x_{2,m}} t_m \\ &= T(r) + \frac{1-x}{x_{2,m}} t_m \end{aligned} \quad (6.131)$$

Incluam-se agora o tempo de preparação inicial e os tempos de mudança. Uma vez que $P_m \in Q$, então P_m é utilizado no início do projecto, com um tempo de preparação inicial $P_{0,m}$, ou é utilizado mais tarde, existindo um conjunto de transições que conduzem a P_m . Atendendo a (6.124), constata-se que, em qualquer das duas situações, a soma do tempo de preparação inicial com os tempos de mudança que levam a P_m é maior ou igual a $t_{0,m}^-$. Da mesma forma, depois de P_m ser utilizado, a raiz do ramo r será atingida, podendo acontecer que o seja imediatamente depois da utilização de P_m , ou que outros processos

⁹¹ Forçosamente, será $\sum_{j=1}^n x_j = 1-x$.

sejam utilizados depois de P_m e antes de a raiz do ramo r ser atingida. Em qualquer dos casos, (6.124) garante que o somatório dos tempos de mudança que levam de P_m à raiz do ramo r seja maior ou igual a $t_{m,i}^-$. Assim, incluindo o tempo de preparação inicial e os tempos de mudança em (6.131), obtém-se

$$T(a) \geq T(r) + \frac{1-x}{x_{2,m}} t_m + t_{0,m}^- + t_{m,i}^- \quad (6.132)$$

Atendendo a (6.129), vem

$$t_{0,m}^- + t_m \frac{1-x}{x_{2,m}} + t_{m,i}^- \geq t_{0,k}^- + t_k \frac{1-x}{x_{2,k}} + t_{k,i}^- = f_i(1-x) \quad (6.133)$$

De (6.132) e (6.133) obtém-se

$$\begin{aligned} T(a) &\geq T(r) + t_{0,m}^- + \frac{1-x}{x_{2,m}} t_m + t_{m,i}^- \\ &\geq T(r) + t_{0,k}^- + t_k \frac{1-x}{x_{2,k}} + t_{k,i}^- \\ &= T(r) + f_i(1-x) \end{aligned} \quad (6.134)$$

E assim se completa a demonstração da propriedade. ■

Comentário: Esta propriedade permite que seja definido um limite inferior para o tempo de uma árvore que contenha um determinado ramo. Esta propriedade, e outras que permitam a definição de limites para os valores dos critérios de árvores que contenham determinados ramos, podem ser importantes na definição de abordagens interactivas que utilizem o tempo máximo. Numa tal abordagem, será gerado um pequeno número de estratégias (eventualmente apenas uma) em cada interacção, de acordo com determinadas regras. Este tipo de propriedades pode auxiliar na identificação de ramos que, de acordo com as regras utilizadas, não sejam candidatos interessantes a fazer parte das estratégias a gerar numa dada interacção, podendo, portanto, ser eliminados. Desta forma, este tipo de propriedades pode ser útil para a definição de abordagens interactivas que utilizem o tempo máximo.

6.5 Resumo

No presente capítulo foram apresentadas algumas propriedades matemáticas do modelo bicritério, com o objectivo de permitir uma melhor compreensão do comportamento do modelo e auxiliar no desenvolvimento de algoritmos e abordagens que permitam uma utilização mais eficiente do modelo. Inicialmente considerou-se a forma mais geral do modelo,

tal como foi apresentada no capítulo 5. Foram apresentadas algumas propriedades que permitem determinar limites para os valores dos critérios correspondentes a um ramo, e ainda outras propriedades que definem relações entre os conjuntos de estratégias não dominadas que permitem executar diferentes fracções do projecto. Estas últimas propriedades serão utilizadas, no capítulo 7, para auxiliar o desenvolvimento de um algoritmo para a identificação das estratégias não dominadas.

Foram ainda analisados dois casos particulares que serão também considerados nos próximos capítulos: os casos em que se utiliza o tempo médio e o tempo máximo como forma de agregação do tempo. Para o tempo médio apresentaram-se propriedades que podem aplicar-se à determinação de limites inferiores para os valores dos critérios: estas propriedades terão um papel fundamental na abordagem interactiva que consta do capítulo 8. Para o tempo máximo formulou-se uma propriedade matemática que permite determinar um limite inferior para o tempo de qualquer árvore que contenha um determinado ramo. Acredita-se que esta propriedade (ou outras deste tipo) possa auxiliar na definição de abordagens interactivas que utilizem o tempo máximo.

Capítulo 7

A geração de estratégias no modelo bicritério – um algoritmo

O capítulo 5 descreveu um modelo que permite a utilização do tempo e do custo como critérios na análise de alguns tipos de projectos. Esse modelo é baseado na abordagem proposta no capítulo 4, e permite a definição da árvore a partir de um conjunto limitado de parâmetros, sem obrigar o analista a efectuar a sua construção. No entanto, as árvores correspondentes a este modelo são geralmente muito grandes e, como foi indicado, é frequentemente impraticável a sua construção e avaliação em sistemas computacionais, devido ao tempo e memória requeridos. Assim, é conveniente desenvolver algoritmos ou abordagens que permitam a aplicação do modelo sem requerer a construção e avaliação explícita das árvores de decisão. Neste capítulo será apresentado um algoritmo para a identificação das estratégias não dominadas que não requer a construção das árvores de decisão, e serão apresentados os resultados de alguns testes ao seu desempenho. O algoritmo utiliza ideias da programação dinâmica probabilística (ver, por exemplo, [96], capítulo 10), e as propriedades 6D e 6E do modelo, demonstradas na secção 6.2. Os seus traços gerais foram inicialmente descritos em [76] e [79].

7.1 Apresentação do algoritmo

As características do modelo que se está a considerar podem ser utilizadas para o desenvolvimento de algoritmos que permitam uma identificação das estratégias não dominadas mais rápida e menos exigente em espaço de memória. Assim, foi feita uma análise do modelo e foi desenvolvido um algoritmo que tem como objectivo identificar, de uma forma mais rápida, todas as estratégias não dominadas.

O algoritmo segue os princípios do processo de avaliação das árvores apresentado com a abordagem do capítulo 4. Note-se que a propriedade 4E garante a validade destes princípios para o modelo, independentemente da coerência na agregação do tempo⁹². Pode colocar-se a questão de não se garantir a geração de todas as estratégias não dominadas quando as probabilidades ajustadas forem nulas. No entanto, apenas podem deixar de ser identificadas estratégias que tenham os mesmos valores dos critérios de outras que são geradas. Uma vez que o modelo é baseado no pressuposto de que apenas o tempo e o custo são relevantes, o agente de decisão deverá ser indiferente entre estratégias alternativas com o mesmo tempo e custo. Desta forma, as estratégias não dominadas que podem deixar de ser geradas não aumentam o leque de escolhas interessantes. Assim, não só a não geração dessas estratégias não coloca problemas à utilização do modelo, como também é legítimo que, para uma mais rápida identificação das estratégias não dominadas, apenas sejam identificadas as estratégias com diferentes valores dos critérios. É, aliás, isso que é feito nos testes ao desempenho do algoritmo apresentados na secção 7.5.

O algoritmo será apresentado numa forma genérica que permite a identificação das mesmas estratégias não dominadas que seriam geradas por aplicação do processo de avaliação das árvores apresentado com a abordagem. Se não se pretender gerar estratégias alternativas com os mesmos valores dos critérios bastará fazer uma pequena alteração: utilizar-se um conceito mais amplo de dominância, em que se considera que existe dominância quando os valores dos critérios forem iguais. Desta forma, evita-se a identificação de diferentes estratégias não dominadas com os mesmos valores dos critérios. Note-se que, quando se utiliza esta forma de gerar apenas as estratégias com diferentes valores dos critérios, as propriedades matemáticas em que o algoritmo se baseia (propriedade 6D e propriedade 6E) continuam a ser válidas; para mostrar que assim é, basta considerar, nas demonstrações dessas propriedades, que apenas existe uma subestratégia para cada possível conjunto de valores dos critérios, e constatar-se-á que as demonstrações permanecem válidas.

O algoritmo tira partido do facto de, pelo menos quando o número de subestratégias não dominadas é pequeno, existirem vários ramos a que corresponde o mesmo conjunto de subestratégias não dominadas. Para mostrar que isto se passa, e a forma como pode ser utilizado, considere-se o seguinte. Cada ramo de uma árvore define a execução de uma fracção do projecto, aquela fracção que não foi executada nos arcos anteriores da árvore (que é a fracção do projecto correspondente a esse ramo). Assim, é possível que diferentes ramos da árvore, em diferentes pontos desta, definam a execução da mesma fracção do projecto. Para além disso, todos os ramos da árvore que definem a execução de porções x do projecto, pertencentes a um dado intervalo I , terão o mesmo conjunto de subestratégias não dominadas (propriedade 6E). $S(i, I)$ vai ser utilizado para representar o conjunto

⁹² Apesar disso, sugere-se que seja imposta coerência na agregação do tempo, tal como se indicou na secção 5.2.

comum de subestratégias não dominadas que permitem a execução de fracções $x \in I$ do projecto iniciadas com a utilização do processo P_i . O algoritmo identifica as estratégias não dominadas através do cálculo dos conjuntos de subestratégias não dominadas $S(i, I)$ para intervalos I de valores consecutivamente maiores de x , até que, para todos os processos, estes conjuntos $S(i, I)$ estejam calculados para intervalos contendo $x = 1$.

Referiu-se que conjuntos de subestratégias não dominadas que permitem executar uma fracção x do projecto, começando por utilizar um dado processo, são idênticos para todos os valores de x pertencentes a um determinado intervalo. Para ilustrar este facto, admita-se que existem dois processos, P_1 e P_2 , com $x_{1,1} = 0.11$ e $x_{2,1} = 0.16$ para P_1 , e $x_{1,2} = 0.12$ e $x_{2,2} = 0.15$ para P_2 . Se uma fracção do projecto $x \geq 0.89$ já tiver sido executada, e se o processo P_1 for utilizado depois disso, então, depois dessa utilização de P_1 , o projecto é terminado. Uma vez que isto ocorre se a fracção do projecto não executada for $x \leq 0.11$, então $S(1,]0, 0.11])$ é um conjunto que apenas contém a subestratégia que consiste em utilizar P_1 uma vez. Da mesma forma, para $i = 2$, $S(2,]0, 0.12])$ é um conjunto que apenas contém a subestratégia que consiste em utilizar P_2 uma vez. Note-se que, se faltar executar uma fracção $x \in]0, 0.11]$ do projecto, e ainda não se tiver decidido qual o processo a utilizar em seguida, as únicas subestratégias não dominadas que podem ser utilizadas são aquelas que pertencem aos conjuntos $S(1,]0, 0.11])$ e $S(2,]0, 0.12])$. Para valores superiores de x também existem conjuntos de subestratégias não dominadas que permitem executar fracções x do projecto pertencentes a determinados intervalos de valores. Assim, é possível evitar a geração de diferentes ramos que conduzam ao mesmo conjunto de subestratégias não dominadas. Note-se, no entanto, que a amplitude dos intervalos I irá normalmente diminuir com o aumento dos valores x pertencentes a esses intervalos.

O algoritmo inicia-se com a identificação das estratégias não dominadas para fracções pequenas do projecto. No exemplo anterior, iniciar-se-ia com o cálculo de $S(1,]0, 0.11])$ e $S(2,]0, 0.12])$. Então, estes conjuntos de subestratégias não dominadas são utilizados para proceder ao cálculo dos conjuntos de subestratégias não dominadas para fracções do projecto cada vez maiores. No exemplo que está a ser seguido, o próximo conjunto $S(1, I)$ a ser considerado representaria a situação em que se utiliza inicialmente o processo P_1 , e depois se utiliza uma subestratégia não dominada no ramo 1. Uma vez que a subestratégia não dominada a utilizar no ramo 1 pode pertencer a $S(1,]0, 0.11])$ ou a $S(2,]0, 0.12])$, são geradas duas subestratégias diferentes. Uma subestratégia gerada desta forma é válida para empreender uma fracção do projecto menor ou igual a 0.16, pois não se está a considerar a utilização de outra subestratégia no ramo 2. Assim, $S(1,]0.11, 0.16])$ é igual ao conjunto das duas subestratégias geradas, se ambas forem não dominadas, ou é igual a um conjunto com uma subestratégia, se a outra subestratégia for dominada por esta. Estes conjuntos iniciais estão representados na figura 7.1. O algoritmo continuará a utilizar uma lógica semelhante até o projecto completo ter sido considerado (ou seja, até se atingir, para todos

os processos, $x = 1$).

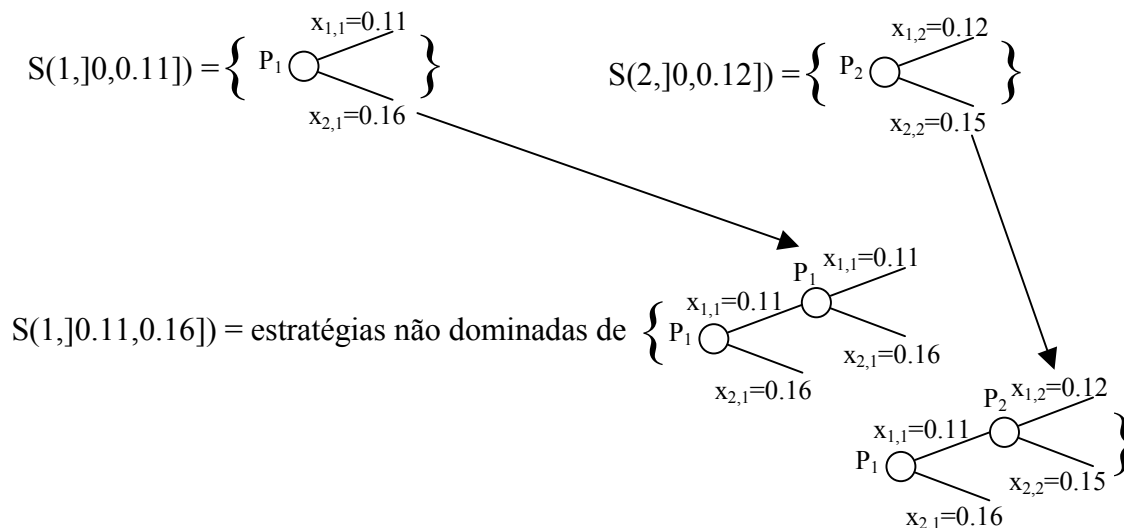


Figura 7.1: Conjuntos iniciais calculados pelo algoritmo, para o exemplo descrito no texto.

Assim, a identificação de subestratégias não dominadas para fracções maiores do projecto tem em conta as subestratégias não dominadas identificadas para fracções mais pequenas, permitindo ao algoritmo identificar e desprezar as subestratégias dominadas logo que estas sejam geradas. Esta lógica também permite evitar que seja necessário repetir cálculos semelhantes para ramos da árvore com características semelhantes que ocorram em pontos diferentes da árvore, repetição que, de outra forma, aconteceria frequentemente. Resumindo, pode dizer-se que o algoritmo começa por considerar ramos que correspondem a pequenas fracções do projecto (inicialmente aquelas fracções que são executadas nas folhas da árvore), e posteriormente considera fracções cada vez maiores até que estejam identificadas as estratégias não dominadas para a árvore completa.

7.2 O algoritmo

Para definir o algoritmo, seja $S(i)$ o conjunto de estratégias não dominadas que permitem concluir o projecto começando por utilizar o processo P_i . Cada estratégia pertencente a $S(i)$ é não dominada no sentido em que não existe nenhuma outra estratégia, quer em $S(i)$ quer em $S(j)$, $j = 1, \dots, n, j \neq i$, que a domine. Seja $S(i, x)$ o conjunto de subestratégias que permitem executar uma fracção x do projecto começando por utilizar o processo P_i , e que não são dominadas por nenhuma outra subestratégia que pertença a este conjunto. Isto significa que, de forma diversa da considerada para os conjuntos $S(i)$, uma subestratégia

de $S(i, x)$ pode ser dominada por uma de $S(j, x)$, desde que $j \neq i$. Considere-se ainda que $S(i, x)$ é também definido para intervalos de valores de x , definindo-se que $S(i, I) = S(i, x)$ sse $\forall x' \in I, S(i, x') = S(i, x)$. Seja ainda l_i o limite superior do último intervalo I para o qual $S(i, I)$ foi calculado, e E_i o conjunto de valores l_i que provocaram alterações em $S(i, I)$.

O algoritmo calcula sucessivamente conjuntos $S(i, I)$, para diferentes processos P_i e diferentes intervalos I , aos quais corresponda o mesmo conjunto de subestratégias não dominadas. Inicia-se com o cálculo de $S(i,]0, x_{1,i}])$ para todos os processos P_i ⁹³. Depois, assumindo que u é o próximo valor de x que pode causar uma alteração no conjunto de subestratégias não dominadas, o conjunto $S(i, I)$ é calculado para $I =]l_i, u]$. Estas alterações no conjunto $S(i, I)$ são causadas pelo facto de, quando u sobe acima de um determinado limiar, algumas subestratégias deixarem de ser válidas para a execução de uma fracção u do projecto. O cálculo de u baseia-se na propriedade 6E.

O conjunto $S(i, I)$ a ser calculado em seguida refere-se sempre ao processo P_i para o qual os cálculos estão “mais atrasados”, isto é, para o processo P_i para o qual o último conjunto $S(i,]x, l_i])$ calculado corresponde a um menor l_i . Depois de $S(i, 1)$ ter sido calculado para todos os processos, $t_{0,i}$ será adicionado ao tempo e $c_{0,i}$ ao custo de cada subestratégia pertencente a $S(i, 1)$. $S(i)$ será então definido como o conjunto de estratégias de $S(i, 1)$ que não são dominadas por nenhuma estratégia pertencente a um conjunto $S(j, 1), j = 1, \dots, n, j \neq i$. O fluxograma da figura 7.2 apresenta uma representação simplificada do algoritmo.

Alguns dos passos deste algoritmo necessitam de ser detalhados. Mas, antes disso, vai discutir-se um possível problema com a lógica subjacente ao algoritmo, e propor-se uma solução. Este problema deriva do facto de o número de intervalos $I =]x', x'']$, que correspondem a diferentes conjuntos de subestratégias não dominadas $S(i, I)$, poder aumentar exponencialmente quando os valores de x' e x'' aumentam. Tal é particularmente verdade quando o número de subestratégias não dominadas é elevado. Por outro lado, quando os valores de x são grandes (próximos de 1), o número de diferentes valores de x para os quais o cálculo de $S(i, x)$ é necessário para obter $S(i, 1)$ não é muito grande. Considere-se, por exemplo, que existem dois processos, P_1 e P_2 , com $x_{1,1} = 0.045$ e $x_{2,1} = 0.06$, para P_1 , e $x_{1,2} = 0.055$ e $x_{2,2} = 0.07$, para P_2 . Por forma a obter o conjunto de estratégias não dominadas é necessário calcular $S(i, 1)$ para ambos os processos. O cálculo de $S(i, 1)$, para qualquer dos processos $P_i, i = 1, 2$, requer a utilização dos conjuntos $S(j, 1 - x_{b,i})$ correspondentes a ambos os processos ($j = 1, 2$) e aos avanços $x_{b,i}$ relativos aos dois arcos ($b = 1, 2$). Isto significa que, neste caso, o cálculo de $S(i, 1)$ para qualquer processo requer os conjuntos $S(j, 0.955), S(j, 0.945), S(j, 0.94)$ e $S(j, 0.93)$ relativos a ambos os processos ($j = 1, 2$)⁹⁴.

⁹³Note-se que $S(i,]0, x_{1,i}])$ é um conjunto com a subestratégia que consiste em utilizar P_i uma vez.

⁹⁴Por sua vez, o cálculo destes conjuntos requer outros conjunto $S(j, x)$ correspondentes a valores mais pequenos de x .

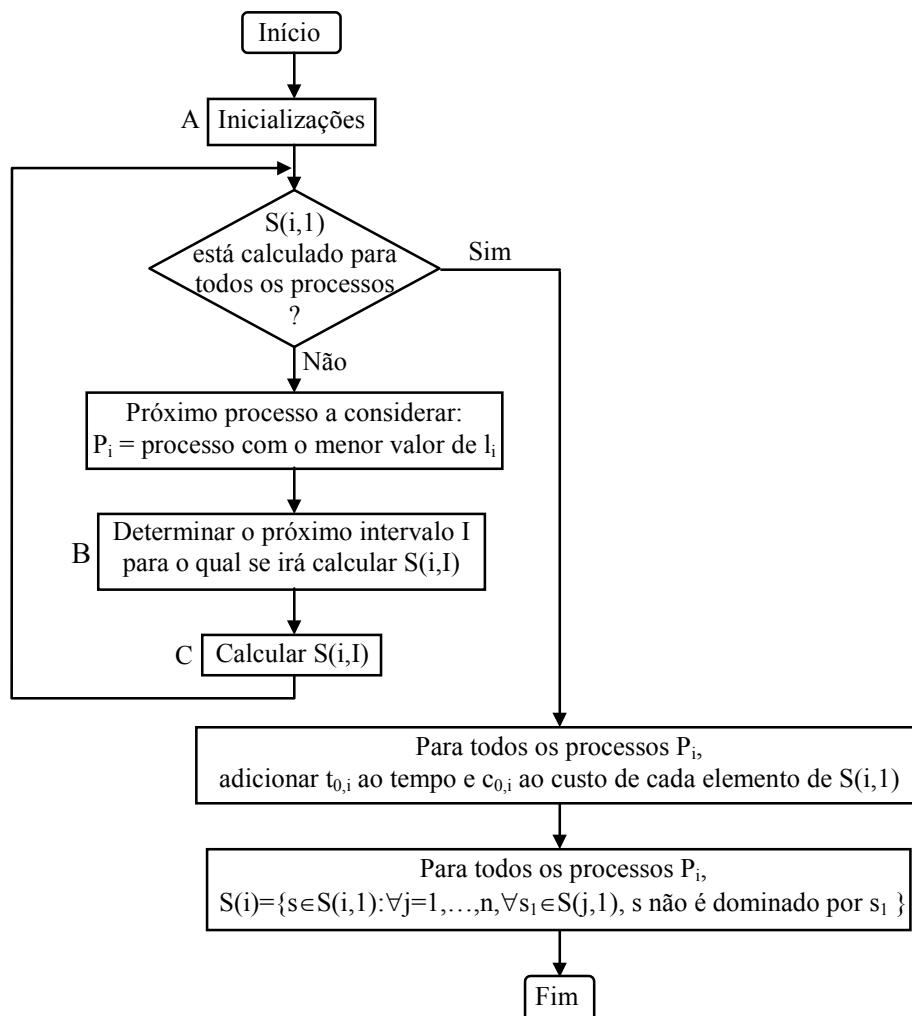


Figura 7.2: Fluxograma com representação simplificada do algoritmo descrito no texto.

Por outro lado, o número de intervalos com valores de x entre 0.95 e 1 a que correspondem diferentes conjuntos de estratégias não dominadas pode atingir os 10 para cada processo, o que significa que, se for seguida de forma cega a lógica do algoritmo apresentado, podem vir a ser calculados até 10 conjuntos $S(i, I)$ para valores de $x \in I$ entre 0.95 e 1. Na realidade, só dois destes conjuntos são necessários: os correspondentes a $x = 1$ e a $x = 0.955$.

Para evitar um crescimento rápido do número de diferentes intervalos I para os quais $S(i, I)$ é calculado, define-se um limiar τ , calculam-se todos os valores $x \geq \tau$ para os quais os conjuntos $S(i, x)$ podem ser necessários, e colocam-se estes valores num conjunto V . A figura 7.3 apresenta o procedimento seguido para a determinação deste conjunto.

A determinação do conjunto V pertence às inicializações, que estão representadas na figura 7.2 pela letra A. As inicializações incluem também a definição, para cada processo P_i , do primeiro conjunto $S(i, I)$ e dos valores iniciais de l_i e E_i . Essas inicializações consistem

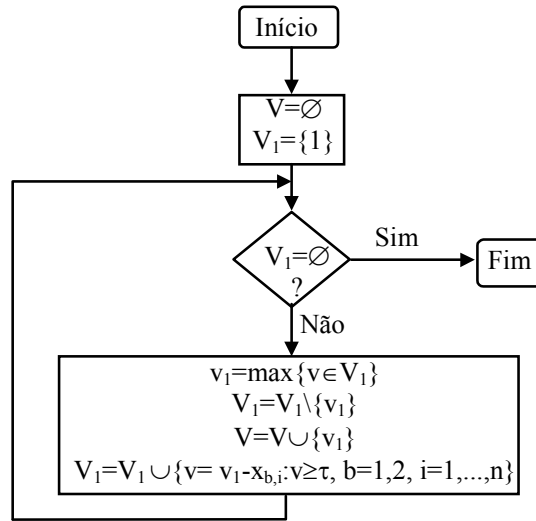


Figura 7.3: Fluxograma para determinação do conjunto V .

em:

- determinar o conjunto V , de acordo com o procedimento da figura 7.3;
- para cada processo P_i , $i = 1, \dots, n$, fazer:
 - $S(]0, x_{1,i}]) = \{\text{subestratégia que consiste em utilizar } P_i \text{ uma vez}\}$;
 - $l_i = x_{1,i}$;
 - $E_i = \{x_{1,i}\}$.

O conjunto V é utilizado para determinar os conjuntos de subestratégias não dominadas $S(i, I)$. Considere-se que o próximo conjunto $S(i, I)$ deve ser calculado para $I =]l_i, proxmudanca]$, sendo l_i o limite superior do último intervalo considerado (para o processo P_i) e *proxmudanca* o valor de x que pode provocar a próxima alteração no conjunto de estratégias não dominadas. Se l_i for superior a τ , então *proxmudanca* é comparado com o menor elemento do conjunto V que seja superior a l_i , elemento este que se passa a designar por v . Se $v > proxmudanca$, então sabe-se que, para todos os valores $x \in I$, $S(i, x)$ não é necessário para o cálculo de nenhum conjunto $S(j, 1)$. Assim, pode prosseguir-se com o cálculo de $S(i, v)$, uma vez que $x = v$ é o menor valor de x superior a l_i para o qual o conjunto de subestratégias não dominadas $S(i, x)$ é necessário. Numa tal situação arbitra-se $S(i,]l_i, v]) = S(i, v)$, por forma a manter a notação intervalar. No entanto, tal constitui um abuso de linguagem, pois este conjunto pode não ser o conjunto de subestratégias não dominadas para alguns valores de x pertencentes a $]l_i, v]$.

Se $proxmudanca \geq v$, então calcula-se o conjunto $S(i,]l_i, proxmudanca])$ como normalmente. Se, para algum intervalo anterior, ocorreu $v > proxmudanca$, então pode acontecer que este conjunto não contenha as subestratégias não dominadas para todos os valores de $x \in]l_i, proxmudanca]$. No entanto, é seguro que este seja o conjunto de subestratégias

não dominadas para todos os valores de x que pertençam simultaneamente ao intervalo $]l_i, proxmudanca]$ e ao conjunto V . Este procedimento, representado na figura 7.2 pela letra B, está representado no fluxograma da figura 7.4.

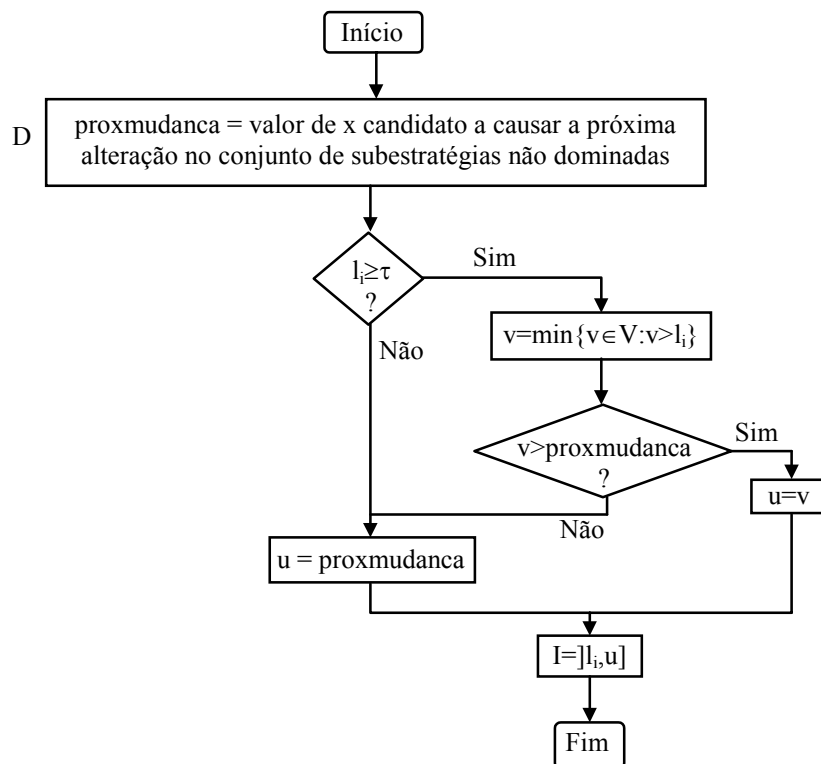


Figura 7.4: B. Fluxograma para determinação do intervalo I para o qual se vai calcular $S(i, I)$.

O valor *proxmudanca* representa, como foi indicado, o próximo valor de x que pode causar uma alteração no conjunto $S(i, I)$. O cálculo deste valor é baseado na propriedade 6E, sendo utilizados os conjuntos E_j , que contêm os valores de x responsáveis pelas alterações até aí verificadas nos conjuntos de subestratégias não dominadas. Mais concretamente, se e causou uma mudança num conjunto de subestratégias não dominadas, então $e + x_{1,i}$ e $e + x_{2,i}$ podem causar alterações no próximo conjunto $S(i, I)$, desde que sejam superiores a l_i . A propriedade 6E garante que nenhum outro valor pode causar alterações no conjunto de subestratégias não dominadas. O valor *proxmudanca* é, assim, o valor do menor dos candidatos a causar alterações em $S(i, I)$ ⁹⁵. O procedimento para o cálculo do valor de

⁹⁵Relativamente à aplicação da propriedade 6E, pode colocar-se a questão de existir a certeza de já se possuírem, para todos os processos $P_j, j = 1, \dots, n$, todos os valores $e \in E_j$ que estão dentro do intervalo $]0, proxmudanca - x_{1,i}[$, conforme é necessário para aplicar a propriedade. Sendo P_i o processo com menor valor de l_i , existe a certeza de já estarem calculados todos os valores de E_j menores ou iguais a l_i para todos os processos P_j . Como $l_i \in E_i$, então $x_{1,i} + l_i \in A$, e $proxmudanca \leq x_{1,i} + l_i$, ou $proxmudanca - x_{1,i} \leq l_i$. Por isso, os valores de E_j que já estão calculados para todos os processos garantem a aplicabilidade da propriedade.

proxmudanca (representado, na figura 7.4 pela letra D) é apresentado no fluxograma da figura 7.5.

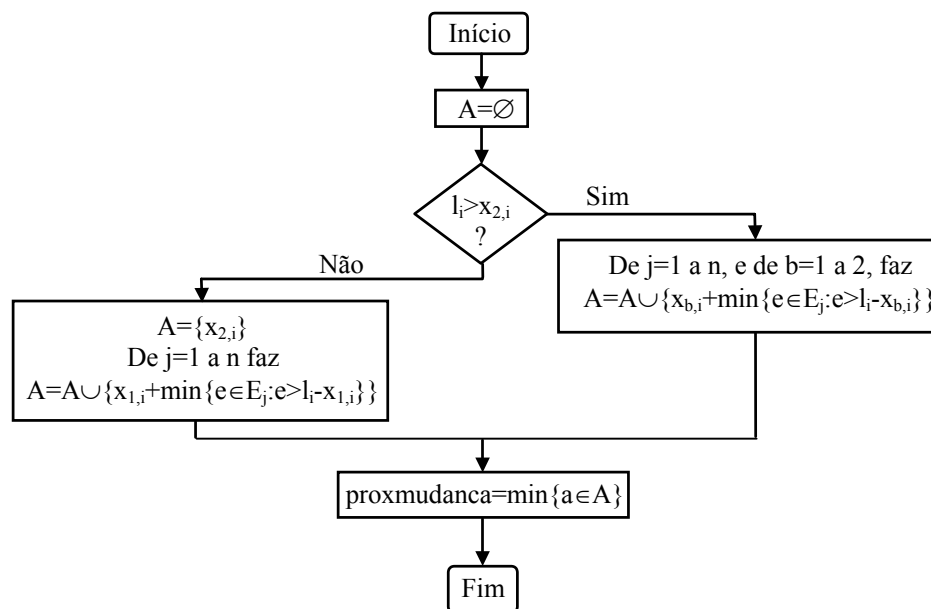


Figura 7.5: D. Fluxograma para determinação do valor de *proxmudanca*.

Para terminar esta breve descrição do algoritmo, vai agora considerar-se a determinação do conjunto $S(i, I)$, representada, na figura 7.2, pela letra C. De acordo com a parte (b) da propriedade 6D, o próximo conjunto $S(i, I)$ a ser calculado será igual ao calculado para o intervalo anterior sempre que as subestratégias pertencentes a este último se mantenham válidas para empreender as fracções do projecto pertencentes ao novo intervalo I . Sendo u o limite superior do novo intervalo I a ser considerado⁹⁶, começa por se verificar se todas as subestratégias de $S(i, l_i)$ continuam a ser válidas para executar uma fracção u do projecto e, se assim for, o novo conjunto $S(i, I)$ é igual a $S(i, l_i)$ ⁹⁷. Se algumas subestratégias de $S(i, l_i)$ deixaram de ser válidas, então é necessário construir um novo conjunto. Como este novo conjunto se refere ao processo P_i , todas as subestratégias começam por utilizar este processo, e utilizam outras subestratégias não dominadas (calculadas anteriormente) como ramos do nodo raiz. As subestratégias candidatas a serem utilizadas em cada ramo b , $b = 1, 2$, são colocadas nos conjuntos B_b . A partir destes conjuntos constrói-se o conjunto *TODAS*, com todas as subestratégias que começam por utilizar o processo P_i e posteriormente utilizam uma subestratégia de B_1 no ramo 1 e uma subestratégia de B_2 no ramo 2. O novo conjunto $S(i, I)$ é igual ao conjunto de subestratégias pertencentes a *TODAS* que não

⁹⁶ E, portanto, $I =]l_i, u]$.

⁹⁷ Para verificar se uma subestratégia permanece válida, é conveniente guardar o maior valor de x para o qual esta é válida.

são dominadas por nenhuma outra subestratégia do mesmo conjunto. Este procedimento para a determinação de $S(i, I)$, representado na figura 7.2 pela letra C, é apresentado no fluxograma da figura 7.6.

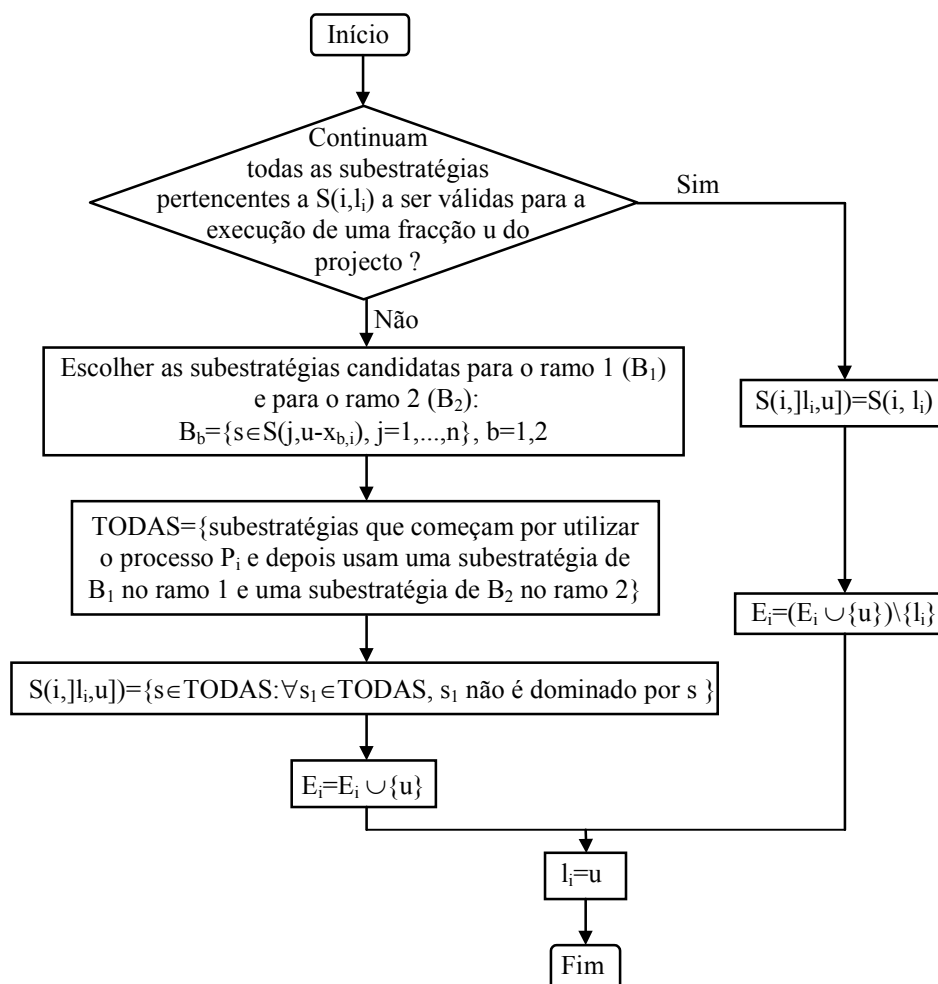


Figura 7.6: C. Fluxograma para o cálculo de $S(i, I)$.

Agora que os traços gerais do algoritmo foram apresentados, vai discutir-se uma outra questão importante, e que é a de saber que valor se deve atribuir ao limiar τ . Por um lado, se τ tiver um valor grande (próximo de 1), o algoritmo pode ser obrigado a calcular muitos conjuntos de subestratégias não dominadas $S(i, I)$ que não serão necessários. Por outro lado, se τ tiver um valor pequeno, o cálculo do conjunto V pode demorar um tempo desnecessariamente longo, uma vez que a diminuição do número de conjuntos de subestratégias não dominadas apenas ocorre para valores grandes de x . Não foi encontrado qualquer motivo para pensar que possa haver uma diminuição no número de conjuntos $S(i, I)$ que é necessário calcular para valores de $x \in I$ inferiores a 0.5, uma vez que, para $x < 0.5$, o

número de intervalos I a considerar não cresce mais rapidamente do que o número de elementos do conjunto V ⁹⁸. Assim, não se recomenda a utilização de valores de τ menores que 0.5. Quando o número de subestratégias $S(i, I)$ cresce rapidamente para valores pequenos de $x \in I$ (o que acontecerá, por exemplo, se os valores de $c_{i,j}$ e $t_{i,j}$ estiverem próximos de 0), o número de intervalos I a considerar também cresce rapidamente. Assim, nesta situação, será útil usar $\tau = 0.5$. Por outro lado, quando o número de subestratégias $S(i, I)$ cresce lentamente, o número de intervalos I a considerar também vai, em geral, crescer lentamente, e pode ser útil utilizar valores superiores para τ . Por fim, no caso mais geral em que não se tem ideia de quão rapidamente cresce o número de intervalos I a considerar, deve ter-se em conta o facto de o tempo necessário para calcular os elementos de V ser geralmente pequeno, quando comparado com o tempo necessário para calcular os conjuntos de subestratégias não dominadas. Assim, nesta situação, sugere-se a utilização de $\tau = 0.5$.

É ainda possível tornar o algoritmo mais eficiente, através de algumas optimizações adicionais. Pode tirar-se partido da parte (a) da propriedade 6D. De acordo com esta, para qualquer processo $P_i, i = 1, \dots, n$, o conjunto $S(i, I)$ inclui sempre as subestratégias do conjunto $S(i, I')$ calculado para o intervalo anterior I' , que continuam a ser válidas para empreender uma fracção do projecto pertencente ao novo intervalo I . Utilizando este resultado, é possível fazer o cálculo de $S(i, I)$ de forma mais eficiente.

Mais eficiência pode ser conseguida guardando alguns valores e conjuntos importantes, incluindo:

- o maior valor de x para o qual uma subestratégia é válida, por forma a identificar quando é que uma subestratégia deixa de ser válida;
- as subestratégias dominadas calculadas para o intervalo anterior (I'), por forma a não ser necessário gerá-las novamente;
- os conjuntos de subestratégias, quer dominadas quer não dominadas, que foram candidatas a serem utilizadas como ramos das subestratégias geradas para o intervalo anterior (I'), por forma a evitar ter de identificar de novo as candidatas que ainda sejam válidas;
- o limite inferior do primeiro intervalo I para o qual cada subestratégia foi incluída em $S(i, I)$, por forma a identificar as novas candidatas a serem utilizadas como ramos das subestratégias, evitando assim ter que identificar de novo as candidatas consideradas anteriormente.

⁹⁸Se não existisse eliminação das subestratégias dominadas, os limites dos intervalos para os quais seria necessário calcular os conjuntos de subestratégias poderiam ser calculados de forma idêntica à utilizada para o cálculo dos elementos de V (com a diferença de estes limites serem calculados a partir de $x = 0$, enquanto os elementos de V são calculados a partir de $x = 1$). A eliminação de estratégias dominadas diminui o ritmo de crescimento dos intervalos, pelo que é possível afirmar que, para $x < 0.5$, o número de intervalos I a considerar nunca cresce mais rapidamente do que o número de elementos do conjunto V .

Estas optimizações serão incluídas na definição detalhada do algoritmo, que se apresenta na secção seguinte.

7.3 Definição detalhada do algoritmo

Seja $S(i)$ o conjunto de estratégias não dominadas que permitem concluir o projecto começando por utilizar o processo P_i , e seja $S(i, x)$ o conjunto de subestratégias que permitem executar uma fracção x do projecto, começando por utilizar o processo P_i e que não são dominadas por nenhuma outra subestratégia que pertença a este conjunto. Considere-se ainda que $S(i, x)$ é também definido para intervalos de valores de x , sendo, assim, $S(i, I)$ o conjunto comum de subestratégias não dominadas que permitem executar uma fracção $x \in I$ do projecto, começando por utilizar o processo P_i .

Considere-se que os conjuntos $S(i, x)$ e $S(i, I)$ são conjuntos ordenados. A n -ésima subestratégia de $S(i, x)$ é identificada como $s_n(i, x)$. Cada subestratégia $s_n(i, x)$ é definida como $s_n(i, x) = ((j_1, y_1), (j_2, y_2), t, c, x_{max})$, em que:

- (j_b, y_b) identifica a subestratégia seguida no ramo b ; esta subestratégia é $s_{y_b}(j_b, x - x_{b,i})$ (se $x - x_{b,i} < 0$ então o ramo b está vazio, e $(j_b, y_b) = (0, 0)$);
- t é o tempo da subestratégia;
- c é o custo da subestratégia;
- x_{max} é o maior valor de x para o qual a subestratégia é válida.

Tal como acontece com os ramos, os tempos e custos das subestratégias são definidos como os valores dos critérios que se obtêm quando estas são executadas isoladamente. Assim, nem os tempos e custos de preparação inicial ($t_{0,i}$ e $c_{0,i}$), nem os tempos e custos de mudança ($t_{j,i}$ e $c_{j,i}$), eventualmente necessários para entrar nas subestratégias, são tomados em consideração nos tempos e custos destas. Os tempos e custos de preparação inicial são, no entanto, tomados em consideração nos valores dos critérios para as estratégias completas.

Relativamente ao conjunto $S(i)$, não é necessário que este seja considerado um conjunto ordenado. A representação de cada estratégia $s \in S(i)$ também não requer que se guarde o correspondente valor de x_{max} , uma vez que, por pertencer a $S(i)$, se sabe que permite executar o projecto completo. Assim, $s = ((j_1, y_1), (j_2, y_2), t, c)$, tendo os componentes significado idêntico ao definido para as subestratégias.

É ainda utilizada a seguinte notação:

- V : conjunto de valores $v \geq \tau$ para os quais $S(j, v)$, $j = 1, \dots, n$ podem ser necessários para calcular $S(i, 1)$, $i = 1, \dots, n$;
- l_i , $i = 1, \dots, n$: limite superior do último intervalo I para o qual $S(i, I)$ foi calculado;

- $E_i, i = 1, \dots, n$: conjunto (ordenado) de valores l_i que provocaram alterações em $S(i, I)$;
- $lc_i, i = 1, \dots, n$: limite superior do último intervalo I para o qual o conjunto $S(i, I)$ foi diferente do conjunto correspondente ao intervalo anterior (note-se que lc_i pode ser diferente de l_i , uma vez que $S(i, I)$ pode ser idêntico ao conjunto de subestratégias não dominadas correspondente ao intervalo anterior, se todas estas subestratégias permanecerem válidas);
- u : limite superior do intervalo I para o qual $S(i, I)$ está a ser calculado;
- $M_i, i = 1, \dots, n$: conjunto de pares ordenados (j, b) que representam subestratégias candidatas a serem utilizadas como ramos de subestratégias do conjunto $S(i, I)$ que está a ser calculado, e que não o foram no anterior conjunto $S(i, I')$; cada par (j, b) significa que as subestratégias que começam por utilizar o processo P_j são candidatas a serem utilizadas no ramo b ; $j = 0$ significa que o ramo b permanece vazio;
- $NDB_{b,i}, b = 1, 2, i = 1, \dots, n$: conjunto de subestratégias não dominadas⁹⁹, candidatas a constituírem o ramo b das subestratégias para o último conjunto $S(i, I)$ considerado, e que são ramos não dominados para este conjunto¹⁰⁰; cada uma destas subestratégias, que, neste contexto, será por vezes designada por ramo, é representada na forma $((j, y), t, c)$, o que identifica a subestratégia $s_y(j, x - x_{b,i})$, utilizada assim no ramo b , com um tempo ajustado t e um custo ajustado c para esse ramo (valores que incluem os custos e tempos de mudança); $j = 0$ significa que o ramo b permanece vazio;
- $DB_{b,i}, b = 1, 2, i = 1, \dots, n$: conjunto de subestratégias não dominadas¹⁰¹, candidatas a constituírem o ramo b das subestratégias para o último conjunto $S(i, I)$ considerado, e que são ramos dominados para este conjunto¹⁰²; cada uma destas subestratégias, que, neste contexto, será por vezes designada por ramo, é representada na forma $((j, y), t, c)$; estas subestratégias são guardadas pois, embora fossem candidatas dominadas a ramos para o último conjunto $S(i, I)$, podem vir a ser candidatas não dominadas para os próximos conjuntos;
- $B_b, b = 1, 2$: conjunto de subestratégias não dominadas¹⁰³, representadas como $((j, y), t, c)$, que ainda não estão incluídas em $NDB_{b,i}$ e são candidatas a serem utilizadas no

⁹⁹ Considera-se que estas subestratégias são não dominadas porque pertencem a algum conjunto $S(i, I)$ anteriormente gerado.

¹⁰⁰ Note-se que uma subestratégia não dominada pode vir a tornar-se num ramo dominado. Para constatar que pode ser assim, considere-se que se está a definir que uma subestratégia é não dominada num conjunto $S(i, x)$ se não for dominada por nenhuma outra do mesmo conjunto. Quando essa subestratégia é considerada candidata a ser usada num ramo, será comparada com outras subestratégias pertencentes a $S(j, x)$, para $j \neq i$, podendo alguma destas dominá-la.

¹⁰¹ Ver nota 99.

¹⁰² Ver nota 100

¹⁰³ Ver nota 99.

- ramo b das subestratégias para o conjunto $S(i, I)$ que está a ser calculado;
- $D_i, i = 1, \dots, n$: conjunto de subestratégias dominadas que foram candidatas a serem incluídas no último conjunto $S(i, I)$ considerado, e que foram obtidas utilizando, para cada um dos ramos $b, b = 1, 2$, subestratégias pertencentes ao correspondente conjunto $NDB_{b,i}$ (assim, apesar de nenhum dos ramos ser dominado, a subestratégia obtida é dominada);
 - $a[i, j, b], i = 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n, b = 1, 2$: próximo valor de x para o qual uma mudança em $S(i, I)$ pode ser motivada pela utilização, no ramo b , de uma subestratégia não dominada que comece por utilizar P_j . Se, para $j = 0$, é $a[i, 0, b] < +\infty$, então a próxima mudança em $S(i, I)$ irá ocorrer sem que se tenha ainda efectuado a primeira escolha de processo no ramo considerado, ou seja, o ramo b ainda está vazio, não fazendo sentido considerar alterações em $S(i, I)$ causadas por subestratégias utilizadas nesse ramo; neste caso, $a[i, j, b] = +\infty, j = 1, \dots, n$;
 - $x_{min}(s)$, para uma subestratégia s pertencente a algum $S(i, x), i = 1, \dots, n, x \in]0, 1]$: limite inferior do primeiro intervalo I para o qual a subestratégia foi pela primeira vez incluída num conjunto $S(i, I)$ ¹⁰⁴;
 - RE : conjunto de subestratégias presentes no último conjunto $S(i, I')$ calculado, e que não pertencerão ao conjunto $S(i, I)$, actualmente a ser calculado e referente ao mesmo processo P_i ;
 - $TODAS$: conjunto de todas as novas subestratégias, quer dominadas quer não dominadas, que foram geradas para o cálculo do conjunto $S(i, I)$, actualmente a ser considerado (não se incluem as que possam transitar do conjunto $S(i, I')$ calculado para o intervalo I' anterior).

Utilizando esta notação, o algoritmo pode ser definido, mais detalhadamente, da forma que se segue.

1. Para cada processo $P_i, i = 1, \dots, n$, faça-se $S(i,]0, x_{1,i}]) = \{((0, 0), (0, 0), t_i, c_i, x_{1,i})\}$, $x_{min}(s_1(i,]0, x_{1,i})) = 0$, $lc_i = x_{1,i}$, $l_i = x_{1,i}$, e inicialize-se $E_i = \{x_{1,i}\}$, $D_i = \emptyset$, $M_i = \emptyset$, $NDB_{b,i} = \{((0, 0), t_i, c_i)\}$, $DB_{b,i} = \emptyset$, $a[i, 0, b] = x_{b,i}, b = 1, 2$, e $a[i, j, b] = +\infty, j = 1, \dots, n, b = 1, 2$.
2. Calcule-se V , usando o conjunto auxiliar V_1 ; comece-se com $V = \emptyset$ e $V_1 = \{1\}$ e, enquanto $V_1 \neq \emptyset$, remova-se de V_1 o maior elemento $v_1 \in V_1$, adicione-se v_1 a V , e adicionem-se a V_1 os valores $v = v_1 - x_{b,i} \geq \tau, b = 1, 2, i = 1, \dots, n$.

¹⁰⁴Pode questionar-se o motivo pelo qual x_{max} é um parâmetro da subestratégia e x_{min} é uma função. O motivo é que, enquanto x_{max} é intrínseco à subestratégia, e independente das outras subestratégias, x_{min} depende do momento em que deixam de existir outras subestratégias que dominem s , não sendo, por isso, um parâmetro da subestratégia.

3. Se $S(i, 1)$ já estiver calculado $\forall i = 1, \dots, n$ (isto é, para todos os processos), então prossiga-se para o passo 18.
4. Seja P_i o processo com o menor valor de l_i .
5. $\forall j = 0, \dots, n, b = 1, 2$, se $a[i, j, b] \leq l_i$ então adicione-se (j, b) a M_i e actualize-se $a[i, j, b]$: se $j \neq 0$, então faça-se $a[i, j, b] = x_{b,i} + \min\{e \in E_j : e > l_i - x_{b,i}\}$; senão faça-se $a[i, 0, b] = +\infty$ e $\forall k = 1, \dots, n, a[i, k, b] = x_{b,i} + x_{b,k}$.
6. Seja $u = \min\{a[i, j, b], j = 1, \dots, n, b = 1, 2\}$, e seja $I =]l_i, u]$.
7. Se $l_i \geq \tau$ e $\min\{v \in V : v > l_i\} > u$, então faça-se $I =]l_i, v]$, $u = v$ e actualize-se M_i e $a[i, j, b]$: $\forall j = 0, \dots, n, \forall b = 1, 2$, se $a[i, j, b] < v$, então adicionar (j, b) a M_i e, se $j \neq 0$, fazer $a[i, j, b] = x_{b,i} + \min\{e \in E_j : e \geq u - x_{b,i}\}$; senão (se $j = 0$), fazer $a[i, 0, b] = +\infty$ e $\forall k = 1, \dots, n, a[i, k, b] = x_{b,i} + \min\{e \in E_j : e \geq u - x_{b,i}\}$.
8. Defina-se $RE = \{s \in S(i, l_i) : s \text{ não é válida para executar uma fracção } u \text{ do projecto}\}$; note-se que este será o conjunto de subestratégias com $x_{max} < u$, para as quais pelo menos um ramo b corresponde a um elemento de M_i (isto é, para pelo menos um ramo b deve ocorrer o seguinte: ou o ramo começa por utilizar P_j e $(j, b) \in M_i$ ou o ramo não usa qualquer processo depois do processo inicial P_i e $(0, b) \in M_i$).
9. Se $RE = \emptyset$ então faça-se $S(i, I) = S(i, l_i)$, remova-se l_i de E_i e prossiga-se para o passo 16.
10. Calculem-se os conjuntos $B_b, b = 1, 2$, que serão os conjuntos de subestratégias não dominadas que não estão incluídas nem em $NDB_{b,i}$ nem em $DB_{b,i}$, e são candidatas a serem utilizadas como ramo b das subestratégias, para o conjunto $S(i, I)$ que está a ser calculado; o cálculo de B_b faz uso do conjunto M_i e dos valores $x_{min}(s)$ para as subestratégias s candidatas a serem ramos das novas subestratégias – os elementos B_b são as subestratégias s pertencentes a $S(j, u - x_{b,i})$, tais que $(j, b) \in M_i$ e $x_{min}(s) \geq lc_i$ ¹⁰⁵.
11. Actualizem-se os conjuntos $DB_{b,i}$ e $NDB_{b,i}$, utilizando B_b , e retirem-se de B_b as subestratégias colocadas em $DB_{b,i}$. Ou seja, removam-se de $DB_{b,i}$ e de $NDB_{b,i}$ os ramos que já não podem ser utilizados para construir subestratégias correspondentes à execução de uma fracção u do projecto¹⁰⁶; movam-se de $DB_{b,i}$ para $NDB_{b,i}$ os ramos que deixam de ser dominados (isso acontece no caso de aqueles que os dominavam terem sido removidos de $NDB_{b,i}$); movam-se de B_b para $DB_{b,i}$ os ramos de B_b que são dominados por outros ramos de B_b ou de $NDB_{b,i}$; e copiem-se para $NDB_{b,i}$ os restantes ramos de B_b .
12. Defina-se $TODAS = \{s \in D_i : s \text{ continua a ser válida para executar uma fracção } u \text{ do projecto (isto é, } s \text{ tem } x_{max} \geq u)\}$

¹⁰⁵Note-se que as subestratégias com $x_{min}(s) < lc_i$ já pertencem ou a $NDB_{b,i}$ ou a $DB_{b,i}$.

¹⁰⁶Ou seja, aqueles ramos que correspondem a subestratégias com $x_{max} < u - x_{b,i}$.

13. Utilizem-se os ramos pertencentes aos conjuntos B_b e $NDB_{b,i}$, $b = 1, 2$, para gerar novas subestratégias que possam ser candidatas a serem incluídas em $S(i, I)$, e adicionem-se estas subestratégias ao conjunto $TODAS$; as subestratégias assim geradas serão aquelas que começam por utilizar o processo P_i e têm ramos b , $b = 1, 2$, pertencentes a B_b ou a $NDB_{b,i} \setminus B_b$ ¹⁰⁷.
14. Faça-se $S(i, I) = S(i, l_i) \setminus RE$, adicionem-se a $S(i, I)$ as subestratégias do conjunto $TODAS$ que não são dominadas nem por outras subestratégias do mesmo conjunto nem por nenhuma subestratégia já incluída em $S(i, I)$, e faça-se D_i o conjunto de todas as subestratégias dominadas de $TODAS$; para todas as subestratégias s incluídas em $S(i, I)$, e que não pertenciam a $S(i, l_i)$, faça-se $x_{min}(s) = l_i$.
15. Faça-se $lc_i = u$ e $M_i = \emptyset$.
16. Faça-se $l_i = u$ e adicione-se u a E_i .
17. Retorne-se ao passo 3.
18. Para cada processo P_i , adicione-se $t_{0,i}$ ao tempo e $c_{0,i}$ ao custo de cada elemento de $S(i, 1)$.
19. Para cada processo P_i , faça-se $S(i) = \{s \in S(i, 1) : \forall j = 1, \dots, n, \forall s_1 \in S(j, 1), s \text{ não é dominado por } s_1\}$ (isto é, $S(i)$ será o conjunto de todas as estratégias de $S(i, 1)$ que não são dominadas por nenhuma estratégia pertencente a outro $S(j, 1)$, $j \neq i$).
20. Fim.

Apesar de algumas diferenças devidas à otimização do desempenho do algoritmo, é possível estabelecer ligações entre o algoritmo aqui apresentado e os fluxogramas das figuras 7.2 a 7.6. Os pontos 1 e 2 correspondem às inicializações (identificadas pela letra A na figura 7.2). O ponto 2 refere-se à parte das inicializações em que se procede à determinação do conjunto V (figura 7.3). Os pontos 5 a 7 correspondem à determinação do próximo intervalo I a considerar (letra B na figura 7.2, correspondente ao fluxograma da figura 7.4). Na figura 7.4 é determinado um candidato inicial para o limite superior do intervalo (letra D da figura, correspondente ao fluxograma da figura 7.5). A determinação desse candidato inicial para o limite superior do intervalo é feita nos pontos 5 e 6 da definição detalhada do algoritmo. Os pontos 8 a 16 correspondem ao cálculo do conjunto $S(i, I)$ (letra C da figura 7.2, correspondente ao fluxograma da figura 7.6).

¹⁰⁷Note-se que, para efeitos de otimização do desempenho do algoritmo, podem ignorar-se as combinações de ramos 1 e 2 pertencentes a $NDB_{1,i} \setminus B_1$ e a $NDB_{2,i} \setminus B_2$. Com efeito, as subestratégias assim obtidas já terão sido geradas em iterações anteriores e, se forem não dominadas, transitarão para $S(i, I)$ a partir de D_i ou do conjunto $S(i, I')$ calculado para o intervalo I' anterior.

7.4 Exemplo de funcionamento do algoritmo

Vai agora apresentar-se um exemplo muito simples do funcionamento do algoritmo. Para isso, vai assumir-se uma aplicação do modelo com dois processos, P_1 e P_2 , com as seguintes características: para P_1 , tem-se $P_{1,1} = 70\%$, $P_{2,1} = 30\%$, $x_{1,1} = 0.35$, $x_{2,1} = 0.55$, $t_1 = 1$, $c_1 = 2$, $t_{0,1} = 1$, $c_{0,1} = 2$; para P_2 , tem-se $P_{1,2} = 50\%$, $P_{2,2} = 50\%$, $x_{1,2} = 0.3$, $x_{2,2} = 0.6$, $t_2 = 1$, $c_2 = 3$, $t_{0,2} = 0$, $c_{0,2} = 0$; os custos e tempos de mudança são $c_{1,2} = c_{2,1} = 2$ e $t_{1,2} = t_{2,1} = 0$.

Para calcular as probabilidades ajustadas ao tempo, é necessário pedir ao agente de decisão alguns equivalentes certos. Assuma-se que, confrontado com os tempos incertos representados na figura 7.7, o agente de decisão fornece os equivalentes certos apresentados na mesma figura. De acordo com (4.1) e (4.2), obtêm-se as seguintes probabilidades ajustadas ao tempo: $P_{1,1}^{T,1} = 81\%$, $P_{2,1}^{T,1} = 19\%$, $P_{1,1}^{T,2} = 65\%$, $P_{2,1}^{T,2} = 35\%$, $P_{1,2}^{T,1} = P_{2,2}^{T,2} = 63\%$, $P_{2,2}^{T,1} = P_{1,2}^{T,2} = 37\%$.

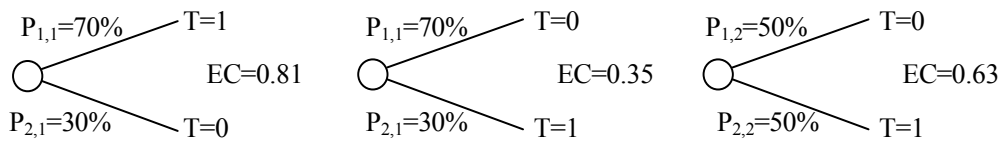


Figura 7.7: Representação dos nodos de incerteza, e dos correspondentes equivalentes certos, assumidos para o exemplo descrito no texto.

Vai agora utilizar-se o algoritmo para identificar as estratégias não dominadas sem construir a árvore. Usa-se a notação definida nas secções anteriores (nomeadamente em 7.3) para representar as estratégias, subestratégias e ramos, e supõe-se ainda $\tau = 0.5$.

Para começar, efectua-se as inicializações, definidas no passo 1 do algoritmo da secção 7.3. Os conjuntos iniciais de subestratégias não dominadas $S(i, I)$ correspondem aos valores das fracções de projecto $x \in I$ que são executadas com uma única utilização do processo P_i , ou seja, correspondem ao intervalo $]0, x_{1,i}]$. Os valores obtidos quando se fazem as inicializações são apresentados na tabela 7.1.

Para completar a inicialização falta ainda definir os valores iniciais de $a[i, j, b]$, $i = 1, \dots, n$; $j = 0, \dots, n$; $b = 1, 2$. Para representar os valores de $a[i, j, b]$ utiliza-se uma matriz para cada valor de i , matriz essa que é designada por $A(i)$. Nessa matriz, cada linha corresponde a um valor de j (a primeira linha corresponde a $j = 0$) e cada coluna corresponde a um valor de b (a primeira coluna corresponde a $b = 1$). As matrizes iniciais são

Tabela 7.1: Valores obtidos quando se fazem as inicializações no caso do exemplo descrito no texto.

	$i = 1$	$i = 2$
$S(1,]0, 0.35])$	$((0, 0), (0, 0), 1, 2, 0.35)$	
$S(2,]0, 0.3])$		$((0, 0), (0, 0), 1, 3, 0.3)$
lc_i	0.35	0.3
l_i	0.35	0.3
M_i	\emptyset	\emptyset
E_i	0.35	0.3
D_i	\emptyset	\emptyset
$NDB_{1,i}$	$((0, 0), 1, 2)$	$((0, 0), 1, 3)$
$NDB_{2,i}$	$((0, 0), 1, 2)$	$((0, 0), 1, 3)$
$DB_{1,i}$	\emptyset	\emptyset
$DB_{2,i}$	\emptyset	\emptyset

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.55 \\ +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$A(2) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Nas matrizes (7.1) e (7.2), $a[i, 0, b] = x_{b,i}$, $i, b = 1, 2$, o que significa que a primeira alteração a ocorrer no conjunto de subestratégias não dominadas $S(i, I)$ é devida à primeira escolha de processo, no ramo 1 ou no ramo 2. Assim, a próxima mudança em $S(i, I)$ vai ocorrer sem que se tenha ainda efectuado a primeira escolha de processo em qualquer dos ramos (ou devido a essa primeira escolha de processo, no caso do ramo 1). Portanto, os ramos estão ainda vazios, pelo que não faz ainda sentido considerar alterações em $S(i, I)$ causadas por subestratégias utilizadas nesses ramos (isto significa que os restantes elementos de $A(i)$ devem ser $+\infty$, para $i = 1$ e para $i = 2$).

Depois de efectuadas as inicializações, passa-se à determinação do conjunto V , para o que se utiliza um conjunto auxiliar V_1 . Começa por fazer-se $V = \emptyset$ e $V_1 = \{1\}$. Depois muda-se o maior elemento de V_1 (neste caso $v_1 = 1$) para V , e adicionam-se a V_1 os elementos $v = v_1 - x_{b,i} \geq \tau (= 0.5)$, $i, b = 1, 2$. Os valores de $v_1 - x_{b,i}$ são 0.7, 0.65, 0.45 e 0.4. Uma vez que, quer 0.4 quer 0.45, são menores que τ , resulta $V_1 = \{0.7, 0.65\}$ e $V = \{1\}$. A seguir muda-se, primeiro o elemento $v_1 = 0.7$, e depois o elemento $v_1 = 0.65$, de V_1 para V . Em ambos os casos, todos os valores de $v_1 - x_{b,i}$ são menores que τ , pelo que não são adicionados novos elementos a V_1 . Depois de se mudar o valor $v_1 = 0.65$ de V_1 para V , V_1 fica vazio, pelo que o conjunto V é, no final, $V = \{1, 0.7, 0.65\}$.

No passo 4, escolhe-se o processo P_2 para próximo processo a considerar, uma vez que a P_2 corresponde o menor valor de l_i ($l_2 = \min\{l_1, l_2\}$). Dado que o único elemento de $A(2)$ que é menor ou igual a $l_2 = 0.3$ é $a[2, 0, 1] = 0.3$, faz-se $M_2 = \{(0, 1)\}$, o que significa que a primeira alteração a ocorrer no conjunto $S(2, I)$ é devida à primeira escolha de processo no ramo 1. Actualiza-se, também, a matriz $A(2)$ para

$$A(2) = \begin{bmatrix} +\infty & 0.6 \\ 0.65 & +\infty \\ 0.6 & +\infty \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Analise-se agora o significado de $A(2)$. O elemento $a[2, 0, 1] = +\infty$ indica que a próxima alteração no conjunto $S(2, I)$ (depois da que se está a considerar na presente iteração) não vai ocorrer antes da primeira escolha de processo no ramo 1, nem devido a esta. Com efeito, a primeira escolha de processo no ramo 1 é feita para $x = 0.3$, e corresponde à presente iteração. Por outro lado, $a[2, 0, 2] = 0.6$ indica que a próxima alteração no conjunto $S(2, I)$ pode ser devida à primeira escolha de processo no ramo 2, escolha essa que vai ocorrer para $x = 0.6$ (com efeito, $x_{2,2} = 0.6$, pelo que o avanço do projecto pelo ramo 2 deve corresponder a uma fracção $x = 0.6$, e a escolha de processo ocorre, assim, para $x = 0.6$). Uma vez que a próxima alteração em $S(2, I)$ ocorre ou antes da primeira escolha de processo no ramo 2 ou devido a essa escolha de processo, esse ramo está vazio, e não faz ainda sentido considerar mudanças do conjunto $S(2, I)$ devidas à utilização de subestratégias nesse ramo. Por isso, $a[2, 1, 2] = a[2, 2, 2] = +\infty$. O elemento $a[2, 1, 1] = 0.65$ representa a próxima alteração possível em $S(2, I)$ devida à utilização do processo P_1 no ramo 1 (e, claro, a seguir à utilização inicial de P_2). Para melhor indicar o significado deste valor, tenha-se em consideração que, quando P_2 é o primeiro processo a ser utilizado, a primeira alteração no conjunto de subestratégias não dominadas ($S(2, I)$) ocorre devido à primeira escolha de processo no ramo 1, para $x = 0.3$. Uma vez que a primeira alteração em $S(1, I)$ ocorre para $x = 0.35$, a alteração devida à utilização de P_1 no ramo 1 (depois da utilização inicial de P_2) vai ocorrer para $x = 0.3 + 0.35 = 0.65$, logo $a[2, 1, 1] = 0.65$. Um raciocínio análogo leva a definir que $a[2, 2, 1] = 0.3 + 0.3 = 0.6$.

A análise de $A(2)$ permite concluir que a próxima alteração no conjunto $S(2, I)$ pode ocorrer para $x = 0.6$, uma vez que este é o menor valor pertencente a $A(2)$. Isto significa que $u = 0.6$ e $I =]0.3, 0.6]$. A única subestratégia pertencente a $S(2, 0.3)$, que é $((0, 0), (0, 0), 1, 3, 0.3)$, não é válida para empreender fracções do projecto pertencentes a $I =]0.3, 0.6]$, uma vez que o valor $x_{max} = 0.3$ para esta subestratégia é menor que os valores do intervalo I . Assim, e de acordo com o passo 8 do algoritmo, é $RE = \{((0, 0), (0, 0), 1, 3, 0.3)\}$.

As novas subestratégias candidatas a constituírem o ramo 1 são $((1, 1), 2, 7)$ e $((2, 1), 2, 6)$, logo $B_1 = \{((2, 1), 2, 7), ((1, 1), 2, 6)\}$. Uma vez que a primeira destas é dominada, tem-

-se $DB_{1,2} = \{((1, 1), 2, 7)\}$ e $NDB_{1,2} = \{((1, 1), 2, 6)\}$, e remove-se de B_b a subestratégia colocada em $DB_{1,2}$, ficando $B_1 = \{((1, 1), 2, 6)\}$. Não se faz nenhuma alteração no ramo 2, uma vez que para $x \in]0.3, 0.6]$ não é feita nenhuma escolha de processo neste ramo. Assim, $B_2 = \emptyset$, e não são feitas alterações em $NDB_{2,2}$ nem em $DB_{2,2}$.

Uma vez que D_2 está inicialmente vazio, o conjunto $TODAS$ apenas vai conter as novas subestratégias geradas utilizando ramos de B_b e $NDB_{b,2}$, $b = 1, 2$. $B_2 = \emptyset$, pelo que as novas subestratégias são geradas através da combinação de um ramo 1 proveniente de B_1 com um ramo 2 proveniente de $NDB_{2,2}$. O único ramo pertencente a B_1 corresponde à utilização do processo 1 uma vez (depois da utilização inicial do processo 2), e o único elemento de $NDB_{2,2}$ é um ramo vazio, correspondendo a não utilizar mais nenhum processo depois da utilização inicial de P_2 . A subestratégia que se obtém através da combinação destes ramos é a que consiste em utilizar inicialmente P_2 e, se o avanço do projecto se der pelo ramo 1 (i.e, se for de 0.3), então utilizar mais uma vez o processo P_2 , senão (se o avanço do processo se der pelo ramo 2) não fazer mais nada. Uma tal subestratégia permite empreender uma fracção $x = 0.6$ do projecto (esta fracção do projecto pode ser vista como a menor soma dos avanços do projecto através do caminho da raiz para uma folha). O tempo correspondente ao ramo 1 da subestratégia é $t_2 + t_{2,2} + t_2 = 1 + 0 + 1 = 2$, e o custo desse ramo é $c_2 + c_{2,2} + c_2 = 3 + 0 + 3 = 6$. O tempo correspondente ao ramo 2 da subestratégia é $t_2 = 1$, e o custo desse ramo é $c_2 = 3$. Como o tempo do ramo 1 é superior ao do ramo 2, as probabilidades ajustadas ao tempo a utilizar serão $(P_{1,2}^{T,1}, P_{2,2}^{T,1})$. O tempo da subestratégia é, por isso, $T = P_{1,2}^{T,1} \cdot 2 + P_{2,2}^{T,1} \cdot 1 = 63\% \cdot 2 + 37\% \cdot 1 = 1.63$. O custo da subestratégia é $C = P_{1,2} \cdot 6 + P_{2,2} \cdot 3 = 50\% \cdot 6 + 50\% \cdot 3 = 4.5$. Usando a representação considerada em 7.3, a subestratégia é definida como $((2, 1), (0, 0), 1.63, 4.5, 0.6)$.

Assim, é $TODAS = \{((2, 1), (0, 0), 1.63, 4.5, 0.6)\}$. A única subestratégia pertencente a $S(2, 0.3)$ não é válida para a execução de uma fracção do projecto pertencente ao intervalo $]0.3, 0.6]$, e por isso não é incluída em $S(2,]0.3, 0.6])$. Assim, as subestratégias não dominadas do conjunto $TODAS$ constituem $S(2,]0.3, 0.6])$, e as dominadas constituem D_2 . Fica $D_2 = \emptyset$ e

$$S(2,]0.3, 0.6]) = \{((2, 1), (0, 0), 1.63, 4.5, 0.6)\} \quad (7.4)$$

Uma vez que a subestratégia $((2, 1), (0, 0), 1.63, 4.5, 0.6)$ é pela primeira vez incluída num conjunto $S(i, I)$, faz-se $x_{min}(((2, 1), (0, 0), 1.63, 4.5, 0.6)) = 0.3$. Chega-se, assim, ao passo 15, e faz-se $l_2 = lc_2 = 0.6$, $M_2 = \emptyset$ e $E_2 = \{0.3, 0.6\}$. Retorna-se depois ao passo 3, terminando a iteração.

As iterações seguintes são semelhantes, obtendo-se os seguintes conjuntos de subestratégias não dominadas:

$$\begin{aligned}
S([1,]0.35, 0.55]) &= \{((1, 1), (0, 0), 1.81, 3.4, 0.55)\} \\
S([1,]0.55, 0.65]) &= \{((1, 1), (1, 1), 2, 4, 0.7)\} \\
S([2,]0.6, 0.65]) &= \{((1, 1), (2, 1), 2, 6.5, 0.65)\}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Neste ponto, tem-se $l_1 = l_2 = 0.65$. Uma vez que $l_1 = l_2$, pode optar-se entre considerar P_1 ou considerar P_2 na próxima iteração. Vai escolher-se P_1 , obtendo-se $M_1 = \{(2, 1)\}$ e

$$A(1) = \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ 0.7 & 0.9 \\ 0.95 & 0.85 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

De acordo com o passo 6 do algoritmo, u assume o valor do menor dos elementos de $A(1)$, sendo, assim, $u = 0.7$ e, conseqüentemente, $I =]0.65, 0.7]$. Tem-se agora $l_1 = 0.65 \geq \tau = 0.5$, o que significa que se deve comparar u com o menor elemento $v \in V$ que seja superior a $l_1 = 0.65$. Esse elemento é $v = 0.7$, sendo idêntico ao actual valor de u , pelo que se prosseguirá sem alterar u , M_1 ou $A(1)$. Uma vez que a única subestratégia de $S(1, 0.65)$ continua a ser válida para a execução de uma fracção do projecto $x \in]0.65, 0.7]$ (porque tem $x_{max} = 0.7$), é $RE = \emptyset$, $l_1 = 0.7$ e

$$S(1,]0.65, 0.7]) = S(1, 0.65) = \{((1, 1), (1, 1), 2, 4, 0.7)\} \tag{7.7}$$

Não tendo havido alteração no conjunto de subestratégias não dominadas, deve remover-se de E_1 (que é, neste momento, igual a $\{0.35, 0.55, 0.65\}$) o valor de $l_1 = 0.65$, e acrescentar o valor de $u = 0.7$. Fica, assim, $E_1 = \{0.35, 0.55, 0.7\}$. O valor $x_{min}(((1, 1), (1, 1), 2, 4, 0.7)) = 0.55$ não é alterado, permanecendo o mesmo desde o momento em que a subestratégia é incluída num conjunto $S(2, I)$ pela primeira vez.

Na iteração seguinte obtém-se

$$S(2,]0.65, 0.85]) = \{((2, 1), (2, 1), 2.4, 6.25, 0.9)\} \tag{7.8}$$

Neste ponto tem-se $l_1 = 0.7$ e $l_2 = 0.85$. O menor valor de l_i é $l_1 = 0.7$, portanto escolhe-se o processo P_1 . Neste momento, a matriz $A(1)$ é a apresentada em (7.6), e, assim, o único elemento $a[1, j, b] \leq l_1 (= 0.7)$ é $a[1, 1, 1]$. Seguindo o passo 5 do algoritmo, adiciona-se $(1, 1)$ a M_1 e faz-se $a[1, 1, 1] = x_{1,1} + \min\{e \in E_1 : e > l_1 - x_{1,1}\} = 0.35 + \min\{e \in \{0.35, 0.55, 0.7\} : e > 0.7 - 0.35\} = 0.9$. Fica $M_1 = \{(1, 1); (2, 1)\}$ e

$$A(1) = \begin{bmatrix} +\infty & +\infty \\ 0.9 & 0.9 \\ 0.95 & 0.85 \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

O valor do menor elemento de $A(1)$ é agora 0.85, pelo que $u = 0.85$ e $I =]0.7, 0.85]$. Como $l_1 \geq \tau$, compara-se, mais uma vez, u com o menor $v \in V$ que seja maior que $l_1 = 0.7$. Esse valor é $v = 1 \geq u (= 0.85)$, pelo que se altera u para $u = 1$ e I para $I =]0.7, 1]$. Segundo o passo 7 do algoritmo, é ainda necessário alterar M_1 para $M_1 = \{(1, 1); (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ e alterar $A(1)$ (as alterações a $A(1)$ são agora irrelevantes, pois a matriz não será mais necessária). Prosseguindo o algoritmo, esta iteração conduz a

$$S(1,]0.7, 1]) = \{((1, 1), (1, 1), 2.96, 5.82, 1.05); ((1, 1), (2, 1), 2.93, 6.75, 1.05)\} \quad (7.10)$$

Na iteração seguinte obtém-se

$$S(2,]0.85, 1]) = \{((1, 1), (2, 1), 2.86, 8.25, 1)\} \quad (7.11)$$

Neste momento, $S(i, 1)$ já está calculado para $i = 1$ e $i = 2$, o que permite atingir o passo 18. Adiciona-se então $t_{0,i}$ ao tempo e $c_{0,i}$ ao custo de cada elemento de cada um dos $S(i, 1)$. Como $t_{0,1} = 1$ e $c_{0,1} = 2$, ficam tempos e custos totais $T = 3.96$ e $C = 7.82$ para a primeira estratégia de $S(1, 1)$, e $T = 3.93$ e $C = 8.75$ para a segunda. Para a única estratégia de $S(2, 1)$, mantêm-se $T = 2.86$ e $C = 8.25$, pois $t_{0,2} = c_{0,2} = 0$. A segunda estratégia de $S(1, 1)$ é, assim, dominada pela única estratégia de $S(2, 1)$. Tal significa que os conjuntos $S(i)$ de estratégias não dominadas são

$$\begin{aligned} S(1) &= \{((1, 1), (1, 1), 3.96, 7.82)\} \\ S(2) &= \{((1, 1), (2, 1), 2.86, 8.25)\} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Existem, assim, duas estratégias não dominadas neste exemplo. As respectivas árvores de estratégia estão representadas na figura 7.8.

Para obter as árvores da figura 7.8 utilizam-se não só os conjuntos de estratégias não dominadas $S(i)$, mas também os conjuntos de subestratégias não dominadas $S(i, I)$. Considere-se a única estratégia de $S(2)$, $((1, 1), (2, 1), 2.86, 8.25)$, representada no lado direito da figura 7.8. Por pertencer a $S(2)$, esta estratégia começa por utilizar o processo P_2 . O primeiro par ordenado, $(1, 1)$, indica que, no ramo 1, se começa por utilizar o processo 1 (primeiro elemento do par), sendo esse ramo a subestratégia 1 do correspondente conjunto $S(1, x)$ (segundo elemento do par). O segundo par ordenado, $(2, 1)$, indica que, no ramo 2, se começa por utilizar o processo 2, sendo esse ramo a subestratégia 1 do correspondente conjunto $S(2, x)$. Para determinar qual a composição exacta dos ramos, é necessário analisar os correspondentes conjuntos $S(i, x)$.

Considere-se então o ramo 2. Uma vez que o avanço do projecto no arco 2 é de 0.6, resta empreender uma fracção $x = 0.4$ do mesmo. Assim, e porque esse ramo começa por utilizar

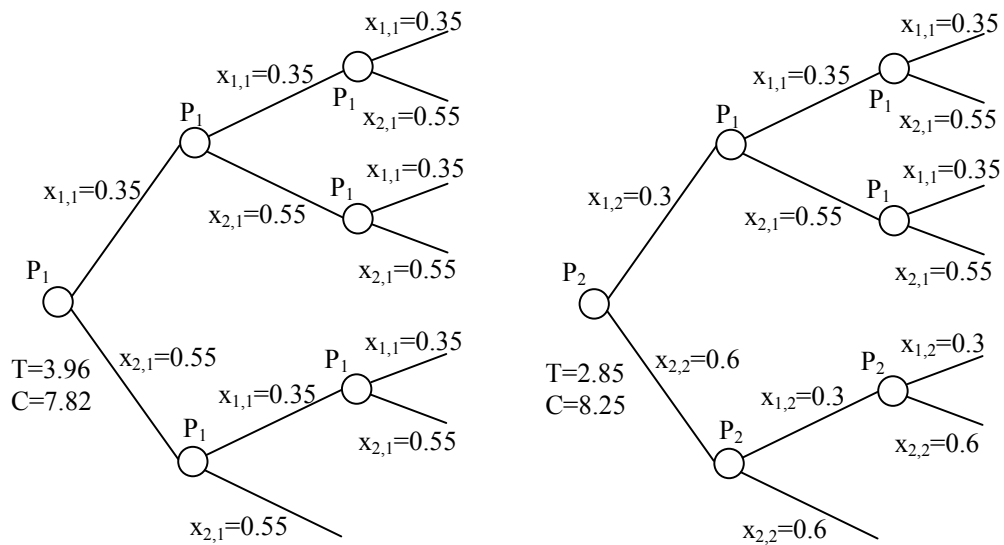


Figura 7.8: Árvores de estratégia representando as estratégias não dominadas do exemplo descrito no texto.

P_2 , a subestratégia que constitui o ramo é a primeira subestratégia do conjunto $S(2, 0.4)$: $((2, 1), (0, 0), 1.63, 4.5, 0.6)$. O sub-ramo 1 desse ramo começa por utilizar P_2 , sendo idêntico à primeira subestratégia do correspondente conjunto $S(2, x)$, e o sub-ramo 2 está vazio, pois o projecto já terá sido concluído quando se segue pelo arco respectivo (nesse caso, terá sido empreendida uma fracção $x = x_{2,2} + x_{2,2} = 0.6 + 0.6 = 1.2 \geq 1$ do projecto). No sub-ramo 1 falta empreender uma fracção $x = 1 - (x_{2,2} + x_{1,2}) = 0.1$ do projecto, pelo que este sub-ramo é idêntico à subestratégia 1 do conjunto $S(2, 0.1)$. Assim, o sub-ramo corresponde à subestratégia que consiste apenas em utilizar P_2 uma vez. O ramo 1 da estratégia foi determinado da mesma forma, tendo-se obtido a árvore de estratégia apresentada no lado direito da figura 7.8.

7.5 Testes ao desempenho do algoritmo

7.5.1 Características dos testes

É útil apresentar alguns testes ao desempenho do algoritmo. Por forma a avaliar o desempenho deste, foi feita, em Borland Delphi 4, uma sua implementação. Para se poder utilizar um termo de comparação, foi também implementado em Borland Delphi 4 um método alternativo, que vai ser designado de método básico.

Este método básico consiste em percorrer a árvore, gerando durante este percurso as estratégias não dominadas, de acordo com as regras estabelecidas para a abordagem em que

o modelo se baseia (ver capítulo 4). Tal como se fez com o algoritmo, optimizou-se, tanto quanto possível, a implementação do método básico. Assim, optou-se por utilizar um procedimento recursivo que percorre a árvore toda mas não a mantém em memória, mantendo apenas árvores de estratégia (ver secção 5.2) que representam as estratégias e subestratégias não dominadas já geradas. Se várias estratégias/subestratégias não dominadas partilham ramos comuns, estes ramos não são repetidos, sendo utilizados ponteiros para os ramos (desta forma evita-se também a necessidade de copiar ramos para as diferentes árvores de estratégia). Na gestão desta estrutura de ponteiros, o espaço de memória ocupado por subestratégias não dominadas que não são utilizadas a um nível superior não é libertado, uma vez que a verificação de estas estarem ou não a ser utilizadas penalizaria fortemente o tempo de execução do método básico. Note-se, relativamente a este ponto, que em termos conceptuais a manutenção de subestratégias não dominadas que não são utilizadas a nível superior pode ser considerada parte integrante da abordagem em que o modelo se baseia, pelo que esta não eliminação de subestratégias não dominadas não pode ser considerada uma penalização do método básico mas, no máximo, uma não optimização da ocupação de memória. Note-se também que, na implementação do algoritmo, o espaço de memória ocupado por todas as subestratégias não dominadas geradas e não utilizadas a um nível superior não é libertado (sendo o motivo para tal o mesmo que se considerou para o método básico), tendo, assim, o algoritmo e o método básico um tratamento idêntico a este nível. Também se optou por não considerar explicitamente os nodos de decisão, considerando-se, em cada nodo de incerteza, as escolhas entre os conjuntos de subestratégias não dominadas correspondentes aos nodos filhos.

Mesmo com as optimizações efectuadas na implementação do método básico, é de prever que o algoritmo seja mais eficiente do que este em termos de utilização de memória, uma vez que o método básico tem que representar as estratégias e subestratégias através da utilização de árvores de estratégia, que podem consumir muito espaço em memória. Por sua vez, o algoritmo utiliza uma forma de representação mais eficiente, que não requer a repetição de ramos idênticos que ocorram em pontos diferentes das árvores.

Para os testes foram geradas sequências de ficheiros. Em cada sequência, o primeiro elemento foi gerado definindo alguns parâmetros do modelo como constantes, e os restantes como amostras de determinadas distribuições uniformes. Os restantes elementos de cada sequência foram gerados a partir de modificações sequenciais em parâmetros determinados. Para cada tipo de sequência, foram gerados conjuntos de 20 sequências, e são os resultados obtidos para estes conjuntos que se analisam. Nesta análise, considera-se separadamente cada posição dentro das sequências, também referida como elemento das sequências. Para cada elemento das sequências foram calculados 20 conjuntos de estratégias não dominadas (um para cada sequência). Foram, assim, obtidos 20 tempos de execução para o algoritmo e para o método básico. Destes 20 tempos de execução foram, para cada método, ignorados

os dois piores e os dois melhores, sendo calculada e apresentada a média aritmética dos 16 tempos intermédios. Para cada elemento das sequências, calcularam-se ainda os valores médios do número de estratégias não dominadas e da dimensão das árvores (sendo a dimensão das árvores representada pelo número de nodos de incerteza). Para o cálculo destes valores, foram também ignoradas as árvores com os dois maiores e os dois menores tempos¹⁰⁸.

A execução de cada método foi terminada sempre que, para um determinado elemento das sequências, existiram três ou mais sequências para as quais

- a execução do método foi impossível, por falta de memória ou limitações de implementação¹⁰⁹, ou
- a execução do método demorou mais de 30 minutos.

Nalguns casos, esta forma de proceder permitiu que um dos métodos fosse executado para mais elementos das sequências do que o outro. Quando foi possível considerar, para um dos métodos, mais um elemento do que para o outro, optou-se por não apresentar os resultados relativos a este elemento. Tal deveu-se ao facto de se ter constatado que estes resultados nunca alteravam as conclusões, nem lhes acrescentavam nada. Quando a diferença entre o número de elementos que os dois métodos permitem considerar foi maior do que 1, optou-se por apresentar os resultados obtidos para estes elementos, por tal ser normalmente relevante para as conclusões.

No caso do conjunto 8 de sequências, a limitação do tempo de execução a 30 minutos apenas permitiria obter resultados para dois elementos, pelo que se aumentou o limite do tempo de execução para 60 minutos.

Em todos os testes foi utilizado $\tau = 0.5$, pois não se assumiu a existência de indicações prévias sobre as características dos conjuntos de estratégias não dominadas e por 0.5 ser, na ausência destas indicações prévias, o valor que se recomenda utilizar (ver secção 7.1). Apenas foram geradas as estratégias não dominadas que têm custos e tempos diferentes, não tendo sido geradas estratégias alternativas com os mesmos valores dos critérios (tal como foi indicado no início da secção 7.1).

¹⁰⁸ Apenas se apresenta um valor médio da dimensão das árvores e do número de estratégias não dominadas para cada elemento das sequências, podendo, assim, colocar-se o problema de as árvores a ignorar não serem as mesmas para o algoritmo e para o método básico. Optou-se por excluir, da média de estratégias não dominadas, as árvores com os dois maiores e os dois menores tempos de execução do algoritmo. O cálculo da dimensão é feito a partir das árvores geradas pelo método básico e, por isso, a dimensão média ignora os dois maiores e os dois menores tempos de execução do método básico.

¹⁰⁹ Estas limitações de implementação não afectaram o método básico, mas apenas o algoritmo. No primeiro conjunto de testes, foi afectado apenas o conjunto 7 de sequências. Mais tarde, quando se fizeram testes ao algoritmo com a utilização do tempo máximo, estas limitações estenderam-se ao conjunto 8. Elas estão relacionadas com a utilização de *arrays* para organizar os conjuntos $S(i, I)$, e com as limitações às dimensões desses *arrays*.

Estas limitações não foram consideradas importantes porque, nos conjuntos de sequências em que se verificaram, os resultados obtidos foram suficientemente conclusivos.

Os testes foram efectuados num computador com processador Pentium III de 600 MHz, 128 MB de memória RAM e 13000 MB de espaço em disco a ser utilizado como memória virtual. Vão apresentar-se os resultados relativos a catorze conjuntos de sequências, que se consideram suficientemente representativos da globalidade de resultados obtidos. Estes conjuntos de sequências vão ser numerados de 1 a 14. A maior parte dos testes efectuados correspondeu a sequências com apenas 2 processos, sendo que apenas o conjunto 4 utilizou 3 processos.

Por forma a evitar que um processo pudesse dominar outro (no sentido de ser sempre, ou quase sempre, mais vantajoso utilizar um processo do que o outro), foi sempre definido que, para cada dois processos, aquele que permite um avanço mais rápido do projecto é também aquele que apresenta custos superiores. Quando foram utilizados dois processos com montantes de avanço do projecto ($x_{b,i}$) semelhantes, foi definido que $t_1 = 1$ e $c_1 = 2$ para o primeiro processo, e que $t_2 = 2$ e $c_2 = 1$ para o segundo. Os montantes de avanço do projecto foram utilizados para aumentar ou diminuir a dimensão da árvore de decisão (montantes de avanço maiores correspondem a árvores mais pequenas), e os custos e tempos de mudança foram usados para aumentar ou diminuir o número de estratégias não dominadas (maiores custos ou tempos de mudança conduzem, normalmente, a um menor número de estratégias não dominadas).

Nos 12 primeiros conjuntos de sequências, as distribuições utilizadas para as probabilidades foram as seguintes: as probabilidades básicas dos dois ramos ($P_{b,i}$) pertencem ao intervalo $[0.49, 0.51]$, a probabilidade ajustada ao tempo do ramo com maior tempo ($P_{b,i}^{T,b}$) pertence ao intervalo $[0.55, 0.6]$, e a do ramo com menor tempo ($P_{3-b,i}^{T,b}$) pertence ao intervalo $[0.4, 0.45]$. Note-se que as probabilidades não influenciam a dimensão das árvores, embora possam afectar o número de estratégias não dominadas. Nos conjuntos 13 e 14 variaram-se as probabilidades, para analisar a influência destas nos tempos de execução e no número de estratégias não dominadas. Foram feitos alguns testes que utilizam o tempo máximo (isto é, probabilidades ajustadas ao tempo de 0% ou 100%) (estes testes serão apresentados em 7.6.2).

Os custos iniciais ($c_{0,i}$) e tempos de preparação inicial ($t_{0,i}$) foram sempre considerados nulos, para todos os processos. Como estes parâmetros apenas se adicionam aos valores dos critérios quando se atingem estratégias completas, eles têm um efeito negligenciável sobre os tempos de execução. Os restantes parâmetros dos processos são apresentados nas tabelas, sendo os parâmetros cuja variação se está a considerar indicados também nos gráficos. Os gráficos com os resultados são apresentados na presente secção, sendo as tabelas apresentadas no apêndice C. Para cada conjunto de sequências, apenas se mostram os resultados mais importantes.

Para alguns conjuntos de sequências, e também para elementos específicos de outros

conjuntos, não foi possível executar o método básico por insuficiência de espaço de memória, tendo, no entanto, sido possível executar o algoritmo. Nestes casos não foi possível determinar a dimensão das árvores de decisão (isto é, o número de nodos de incerteza), pois esse cálculo baseia-se no percurso das árvores ao executar o método básico. Optou-se, assim, por fazer uma estimativa para o número de nodos de incerteza dessas árvores que não excedesse esse número. Para essa estimativa seguiu-se o raciocínio que passa a expor-se. Todos estes casos ocorreram em conjuntos nos quais foram utilizados montantes de avanço do projecto semelhantes para os dois arcos de cada processo, e para todos os processos. Se, para todos os processos $P_i, i = 1, \dots, n$, e para ambos os arcos de cada processo $b = 1, 2$, $x_{b,i} \in [l_i, l_s]$, então o valor médio de $x_{b,i}$ é $\frac{l_i + l_s}{2}$. Depois de calculado o valor médio de $x_{b,i}$, utiliza-se o inverso deste como um indicador de um "número médio de níveis com nodos de incerteza" da árvore, obtendo-se

$$niv = \frac{2}{l_i + l_s} \quad (7.13)$$

Utiliza-se como estimativa para o número de nodos de incerteza da árvore o número de nodos de incerteza de uma árvore com exactamente niv níveis completos¹¹⁰, valor que se designará por $nnod$. O primeiro nível de uma tal árvore corresponde à primeira escolha e utilização de um processo. Uma vez que só estamos a contar os nodos de incerteza, o número destes nodos neste primeiro nível da árvore é igual ao número de processos (n). A partir do primeiro nível, cada novo nível vai ter um número de nodos de incerteza igual ao número de nodos de incerteza do nível anterior, multiplicado por $2n$ (de cada nodo do nível anterior saem 2 arcos, e cada um destes corresponde a uma escolha entre os n processos). Assim, obtém-se um número de nodos $nnod$ igual à soma dos termos de uma progressão geométrica com primeiro elemento igual a n e razão igual a $2n$, ou seja,

$$nnod = n \frac{(2n)^{niv} - 1}{2n - 1} = n \frac{(2n)^{\frac{2}{l_i + l_s}} - 1}{2n - 1} \quad (7.14)$$

Este valor é geralmente um minorante para o número de nodos, uma vez que a árvore tem normalmente ramos com mais e com menos do que niv níveis, e os ramos com mais do que niv níveis influenciam o número de nodos mais do que os ramos com menos do que niv níveis. É ainda necessário considerar o caso, aliás frequente, em que o valor niv não é inteiro. Neste caso, por forma a que se obtenha uma estimativa que não exceda o número de nodos, pode optar-se por truncar o valor niv , ou seja, definir niv como o maior inteiro menor ou igual a $\frac{2}{l_i + l_s}$.

¹¹⁰ Apesar de o valor de niv poder não ser inteiro, uma árvore só pode ter um número inteiro de níveis. Como apenas se pretende definir uma forma de calcular um valor indicativo, vai assumir-se que niv é inteiro na derivação da forma de cálculo da estimativa, e depois se analisará o que fazer no caso de o não ser.

Por forma a analisar o comportamento dos valores fornecidos pela expressão (7.14), compararam-se estes com os valores obtidos por contagem directa (ao correr o método básico), em vários elementos de sequências em que foi possível efectuar essa contagem. Em todos os casos, a estimativa foi inferior ao valor obtido por contagem directa, mesmo quando não se truncou o valor *niv* (a truncagem deste valor diminui ainda mais a estimativa). Assim, optou-se por utilizar sempre o valor de *niv* tal como foi definido em (7.13) (isto é, não truncado) para fazer as estimativas apresentadas no presente trabalho.

7.5.2 Resultados dos testes

Nos primeiros testes foram utilizados montantes de avanço do projecto semelhantes para os dois arcos de cada processo e para todos os processos. Inicialmente foram usados 2 processos, com valores de $x_{b,i}$, $i, b = 1, 2$, pertencentes a $[0.095, 0.1]$ (para o conjunto 1 de sequências), a $[0.085, 0.09]$ (para o conjunto 2 de sequências) e a $[0.07, 0.075]$ (para o conjunto 3 de sequências). No conjunto 4 de sequências usaram-se 3 processos, com $x_{b,i} \in [0, 15, 0.16]$, $i = 1, 2, 3$, $b = 1, 2$. Os custos e tempos de mudança para o primeiro elemento de cada sequência foram escolhidos de modo a conduzirem a um número pequeno de estratégias não dominadas, sendo depois diminuídos os valores destes parâmetros por forma a ser obtido um número crescente de estratégias não dominadas em cada sequência.

No conjunto 1 de sequências (gráfico 7.9), as árvores obtidas foram sempre compostas por cerca de 2.8 milhões de nodos de incerteza. Para os valores mais elevados dos tempos e custos de mudança, o número de estratégias não dominadas foi baixo, e a execução do algoritmo demorou um tempo negligenciável (no sentido de ser indistinguível de 0 para o nível de precisão que se está a usar, ou seja, inferior a 0.005 segundos), enquanto a execução do método básico demorou sempre um tempo mínimo de 2.25 segundos. Assim, enquanto o número de estratégias não dominadas foi baixo, o algoritmo teve um desempenho melhor que o método básico, o que pode ser explicado pelo facto de o método básico necessitar sempre de percorrer a árvore completa, independentemente do número de estratégias não dominadas. Quando os tempos e custos de mudança diminuíram, o número de estratégias não dominadas aumentou e os tempos de execução aumentaram para os dois métodos, sendo esse aumento mais significativo para o algoritmo. Quando o número de estratégias não dominadas atingiu algumas centenas, os tempos de execução do método básico passaram a ser inferiores aos do algoritmo.

O comportamento observado para o conjunto 2 de sequências (gráfico 7.10) apresentou algumas semelhanças relativamente ao observado para o conjunto 1. É, no entanto, de salientar que os tempos de execução do algoritmo foram sempre inferiores aos do método básico. As árvores obtidas foram sempre compostas por cerca de 11 milhões de nodos

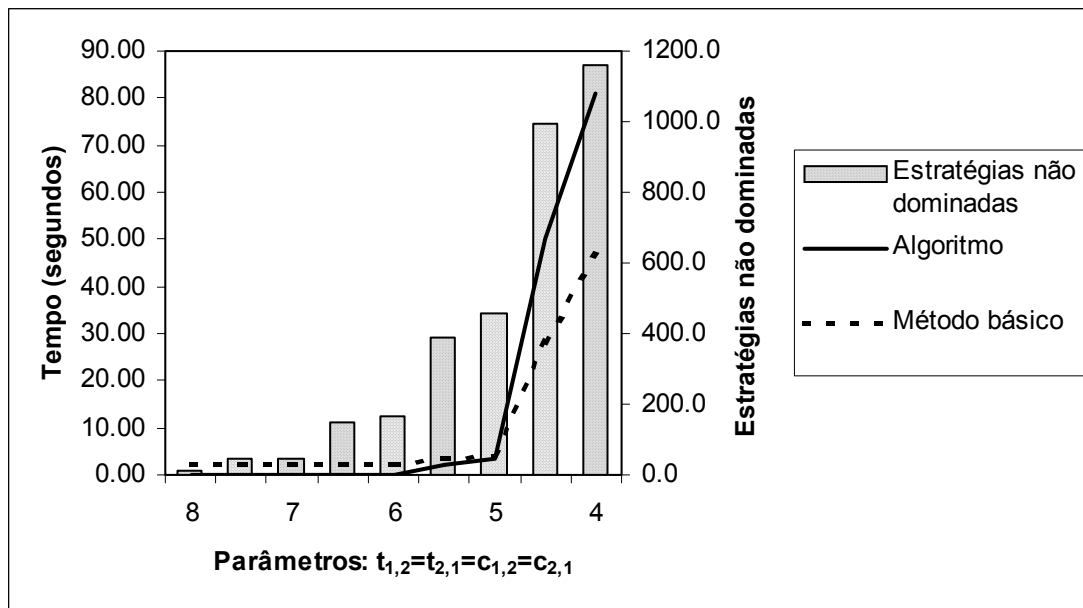


Figura 7.9: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 1 de sequências e utilizando a forma geral do modelo.

de incerteza e, mesmo para um número pequeno de estratégias não dominadas, a média dos tempos do método básico nunca foi inferior a 18.47 segundos. Por outro lado, para um número pequeno de estratégias não dominadas, a execução do algoritmo demorou um tempo negligenciável. Quando se diminuíram os tempos e custos de mudança, o número de estratégias não dominadas aumentou e os tempos de execução aumentaram para os dois métodos.

Para o conjunto 3 de sequências (gráfico 7.11), foi impossível executar o método básico no equipamento utilizado, devido a insuficiência de espaço de memória¹¹¹. Apesar disso, foi possível executar o algoritmo, tendo sido obtidos tempos de execução negligenciáveis quando o número de estratégias não dominadas foi pequeno. Estes resultados apontam no sentido, aliás já esperado, de o algoritmo ser muito mais eficiente que o método básico em termos de utilização de memória, uma vez que a estrutura do algoritmo permite uma representação mais eficiente das estratégias e subestratégias. Uma vez que nunca foi possível executar o método básico para os parâmetros correspondentes a este conjunto 3 de sequências, não foi também possível calcular o tamanho médio das árvores de decisão que lhe correspondem. Assim, foi utilizada a expressão (7.14) para obter uma estimativa de cerca de 134 milhões de nodos de incerteza.

¹¹¹Relembre-se que foi utilizado um computador com 128 MB de RAM e 13000 MB de disco usados como memória virtual.

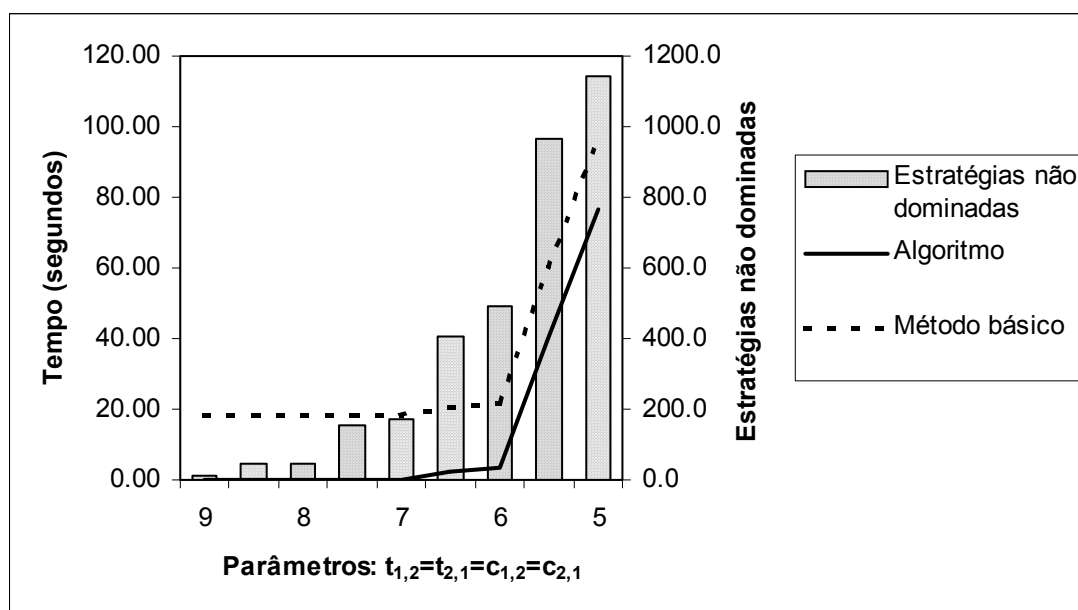


Figura 7.10: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 2 de seqüências e utilizando a forma geral do modelo.

No conjunto 4 de seqüências (gráfico 7.12) foram utilizados 3 processos, com montantes de avanço do projecto $x_{b,i} \in [0, 15, 0.16]$ para os três processos ($i = 1, 2, 3$), e para os dois arcos de cada processo ($b = 1, 2$). Todas as árvores de decisão obtidas para este conjunto de seqüências foram compostas por cerca de 168 000 nodos de incerteza, e o desempenho relativo dos dois métodos apresentou algumas semelhanças com o verificado no conjunto 1. Para os valores mais baixos do número de estratégias não dominadas (correspondentes a valores mais elevados dos tempos e custos de mudança), a execução do algoritmo demorou um tempo negligenciável, enquanto a média dos tempos do método básico nunca foi inferior a 0.16 segundos. Quando o número de estratégias não dominadas aumentou (quando os tempos e custos de mudança diminuíram), os tempos de execução do algoritmo aumentaram mais do que os do método básico, ultrapassando mesmo os tempos deste quando o número de estratégias não dominadas atingiu algumas centenas. Note-se ainda que os tempos de execução do algoritmo nunca foram significativamente superiores aos do método básico (pelo menos não tão superiores como chegaram a ser para o conjunto 1).

No conjunto 5 de seqüências (gráfico 7.13) foram utilizados 2 processos, com montantes de avanço do projecto semelhantes para os dois processos, mas diferentes para os dois arcos de cada processo. Foram utilizados $x_{1,i} \in [0.13, 0.14]$ e $x_{2,i} \in [0.18, 0.19]$, $i = 1, 2$. Mais uma vez, começaram por utilizar-se tempos e custos de mudança que conduzissem a um número baixo de estratégias não dominadas, e depois diminuíram-se os valores destes parâmetros,

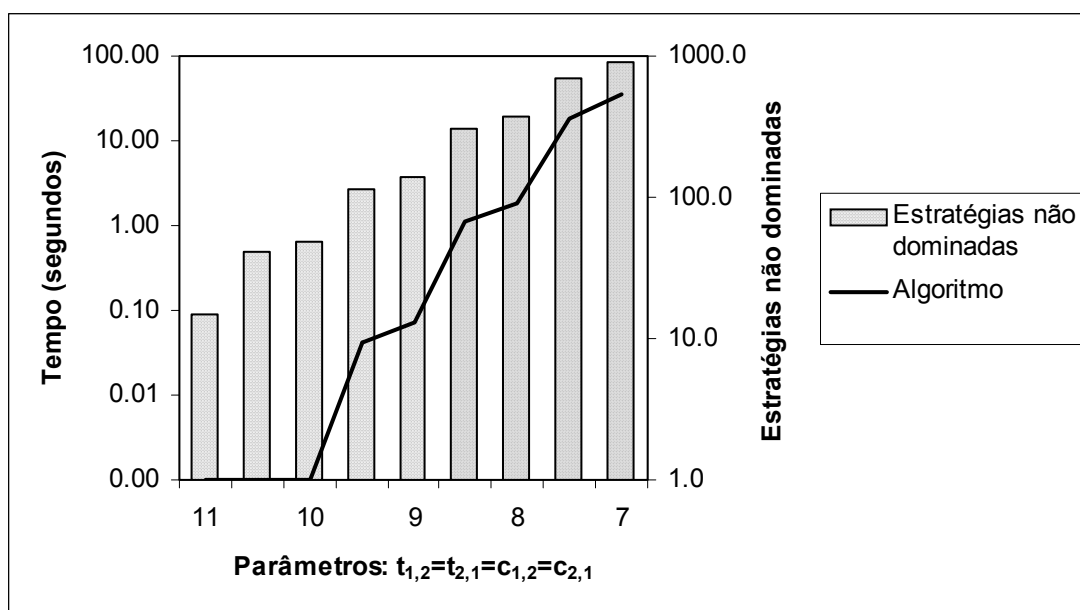


Figura 7.11: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 3 de seqüências e utilizando a forma geral do modelo. Para este conjunto de seqüências não foi possível obter os resultados relativos ao método básico, pois a memória do sistema utilizado foi insuficiente para executar esses testes. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.

por forma a aumentar o número de estratégias não dominadas. As árvores de decisão obtidas não foram muito grandes (menos de 10000 nodos de incerteza, em média) e, embora nunca se possa considerar que a diferença entre os tempos de execução dos dois métodos seja muito significativa, é também claro que o desempenho do algoritmo foi sempre superior ou idêntico ao do método básico.

No conjunto 6 de seqüências (gráfico 7.14) foram utilizados 2 processos, com montantes de avanço do projecto diferentes: $x_{1,1} \in [0.07, 0.08]$ e $x_{2,1} \in [0.09, 0.10]$, para o processo P_1 , e $x_{1,2} \in [0.105, 0.12]$ e $x_{2,2} \in [0.135, 0.15]$, para P_2 . Uma vez que os montantes de avanço do projecto são diferentes para os dois processos (a utilização de P_2 permite um avanço maior do que a utilização de P_1), ajustou-se o tempo e custo de cada utilização de P_2 , por forma a evitar que este processo viesse a ser muito preferível a P_1 . Assim, definiram-se $t_2 = 3$ e $c_2 = 1.5$ (em vez de utilizar $t_2 = 2$ e $c_2 = 1$, como habitualmente). Para P_1 mantiveram-se o tempo e custo de utilização dos conjuntos anteriores: $t_2 = 1$ e $c_2 = 2$. Mais uma vez foram utilizados os tempos e custos de mudança para fazer variar o número de estratégias não dominadas. O número médio de nodos de incerteza das árvores de decisão situou-se perto dos 2.7 milhões. Este valor variou para diferentes valores dos parâmetros,

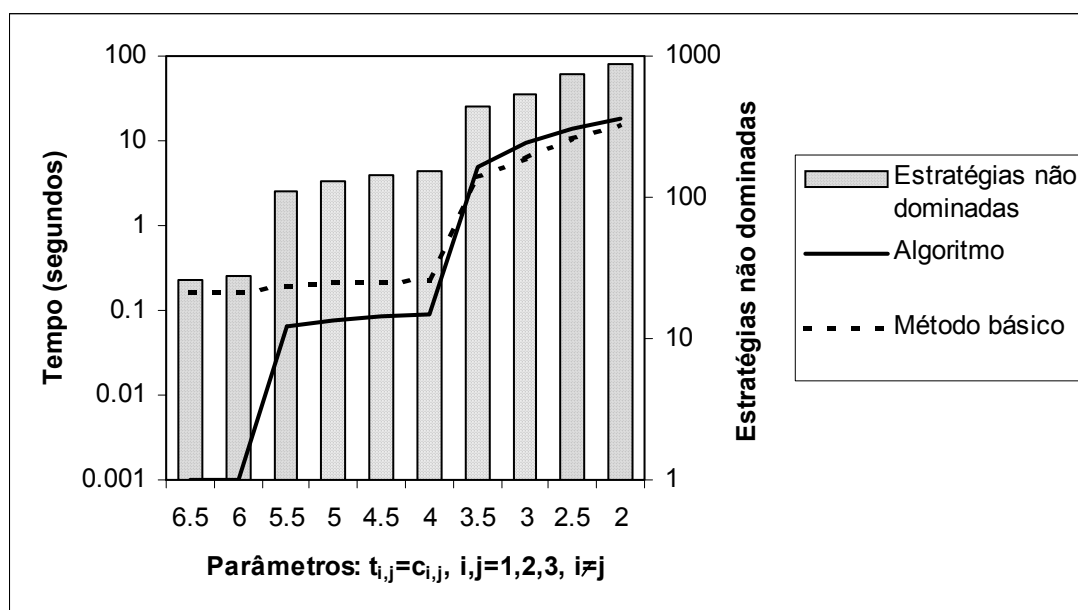


Figura 7.12: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 4 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.

pois também se alteraram as árvores com maiores e menores tempos excluídas dessa média. O tipo de comportamento dos desempenhos encontrado para este conjunto de sequências foi semelhante ao encontrado para os conjuntos 1 e 4: o algoritmo apresentou um melhor desempenho para um número baixo de estratégias não dominadas (por vezes mesmo um tempo de execução negligenciável), e o método básico apresentou um tempo de execução mínimo de 2.16 segundos, mas teve um desempenho melhor quando o número de estratégias não dominadas atingiu algumas centenas.

Nos conjuntos 7 e 8 de sequências procurou determinar-se como varia o desempenho do algoritmo e do método básico quando se varia a dimensão das árvores. Para isso, utilizaram-se 2 processos com montantes de avanço do projecto semelhantes para os dois arcos de cada processo e para ambos os processos, e esses montantes de avanço do projecto foram diminuídos ao longo das sequências, por forma a obter árvores cada vez maiores. No conjunto 7 de sequências procurou-se que, enquanto a dimensão das árvores aumentava, o número de estratégias não dominadas se mantivesse constante e baixo. Para isso utilizaram-se tempos e custos de mudança muito elevados, $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 10000$, tendo o número de estratégias não dominadas sido sempre igual a 2. No conjunto 8 de sequências procurou-se que o número de estratégias não dominadas fosse elevado, tendo, para isso, sido utilizados tempos e custos de mudança nulos: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 0$.

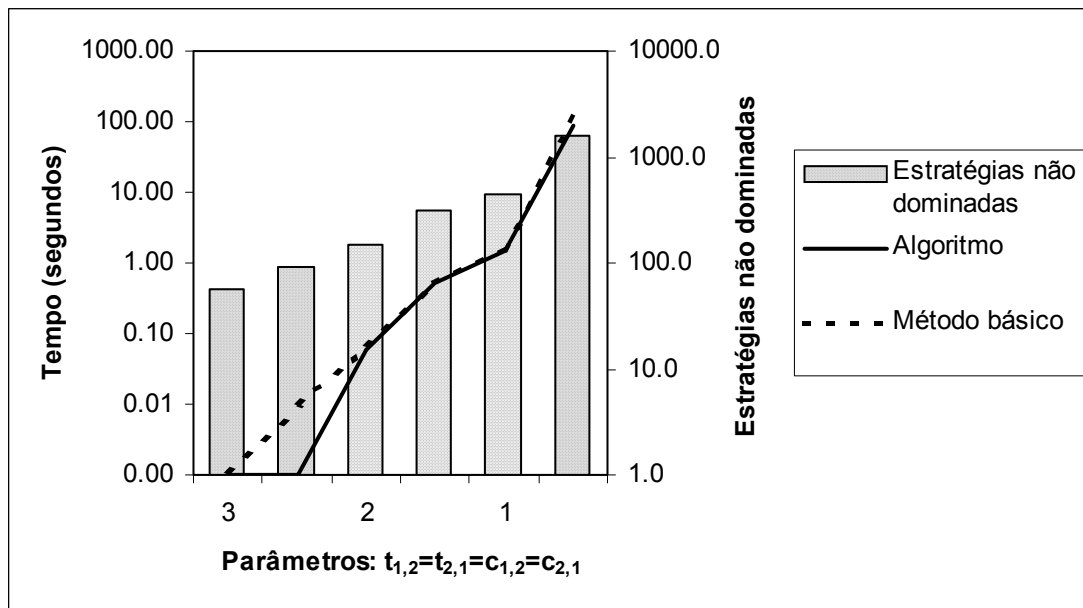


Figura 7.13: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 5 de seqüências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.

No conjunto 7 de seqüências (gráfico 7.15), o desempenho do algoritmo foi claramente melhor que o do método básico. Para as árvores mais pequenas, ambos os métodos apresentaram tempos de execução negligenciáveis mas, quando o tamanho das árvores começou a aumentar, os tempos do método básico aumentaram rapidamente, enquanto os do algoritmo apenas deixaram de ser negligenciáveis para árvores muito maiores. Com efeito, quando se atingiram árvores de decisão com um número de nodos de incerteza da ordem da centena do milhão (isto é, para valores de $x_{b,i}$, $i, b = 1, 2$ pertencentes ao intervalo $[0.0716, 0.0744]$), a execução do método básico deixou de ser possível por falta de memória no sistema utilizado; no entanto, para essa mesma situação, a execução do algoritmo continuou a demorar um tempo negligenciável. Mesmo para as maiores árvores de decisão consideradas (dimensão estimada da ordem dos 10^{213} nodos de incerteza, correspondendo a $x_{b,i} \in [0.0028, 0.0029]$, $i, b = 1, 2$), foi possível executar o algoritmo com um tempo de execução próximo de 1 segundo¹¹². Estes resultados reforçam a indicação, já obtida no conjunto 3 de seqüências, de o algoritmo ser muito mais eficiente do que o método básico em termos de utilização de memória. Mais do que isso, estes resultados parecem reforçar fortemente a indicação, dada também pelos resultados obtidos para vários dos conjunto anteriores, de que o algoritmo tem um desempenho bastante melhor do que o método básico

¹¹²O motivo pelo qual não se continuaram os testes com árvores maiores prendeu-se com a existência de limitações de implementação que não o permitiram, conforme explicado na nota de rodapé 109.

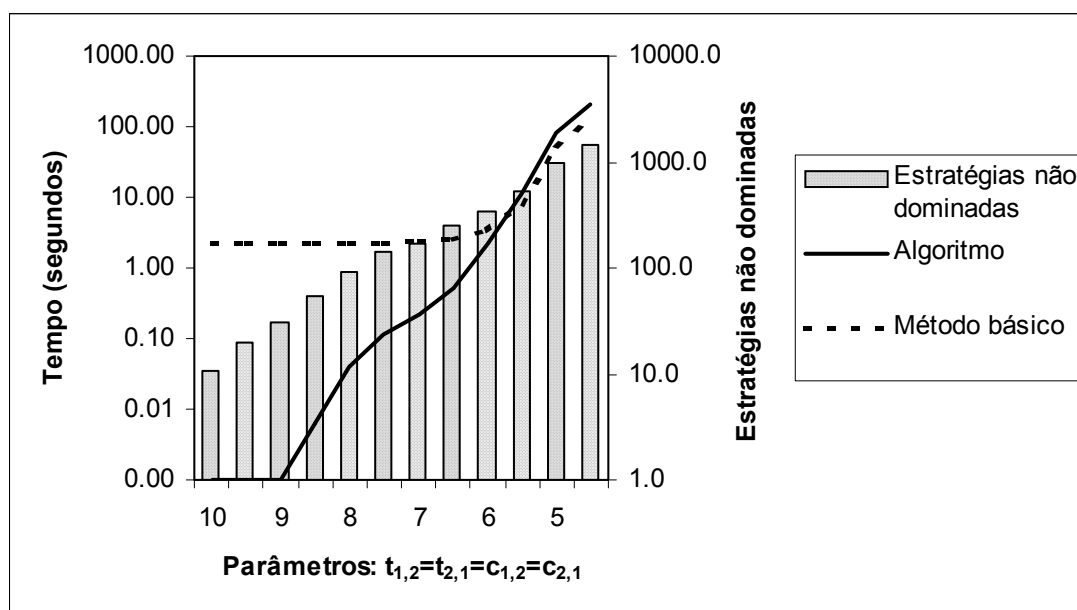


Figura 7.14: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 6 de sequências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.

quando o número de estratégias não dominadas é baixo.

No conjunto 8 de sequências (gráfico 7.16), o número de estratégias não dominadas foi sempre muito elevado (como seria de esperar). Os tempos de execução foram semelhantes para os dois métodos, tendo os tempos de execução do método básico sido geralmente um pouco inferiores aos do algoritmo. Os resultados obtidos para este conjunto de sequências reforçam a indicação, já dada por vários conjuntos anteriores, de que o algoritmo não parece ter um desempenho superior ao do método básico quando o número de estratégias não dominadas é elevado.

Nos primeiros 8 conjuntos de sequências utilizaram-se sempre valores iguais para os tempos de mudança e para os custos de mudança, e tempos e custos de mudança iguais para todos os processos. Nos conjuntos 9, 10, 11 e 12 de sequências procurou determinar-se como varia o desempenho do algoritmo e do método básico quando os tempos de mudança são diferentes dos custos de mudança, ou quando os tempos ou os custos de mudança são diferentes para diferentes processos. Para isso utilizaram-se, nestes conjuntos de sequências, 2 processos, com montantes de avanço do projecto $x_{b,i} \in [0,095, 0.10]$ para os dois processos ($i = 1, 2$) e para os dois arcos de cada processo ($b = 1, 2$). Estes montantes de avanço do projecto permitiram obter árvores com uma dimensão média próxima dos 2.8 milhões de

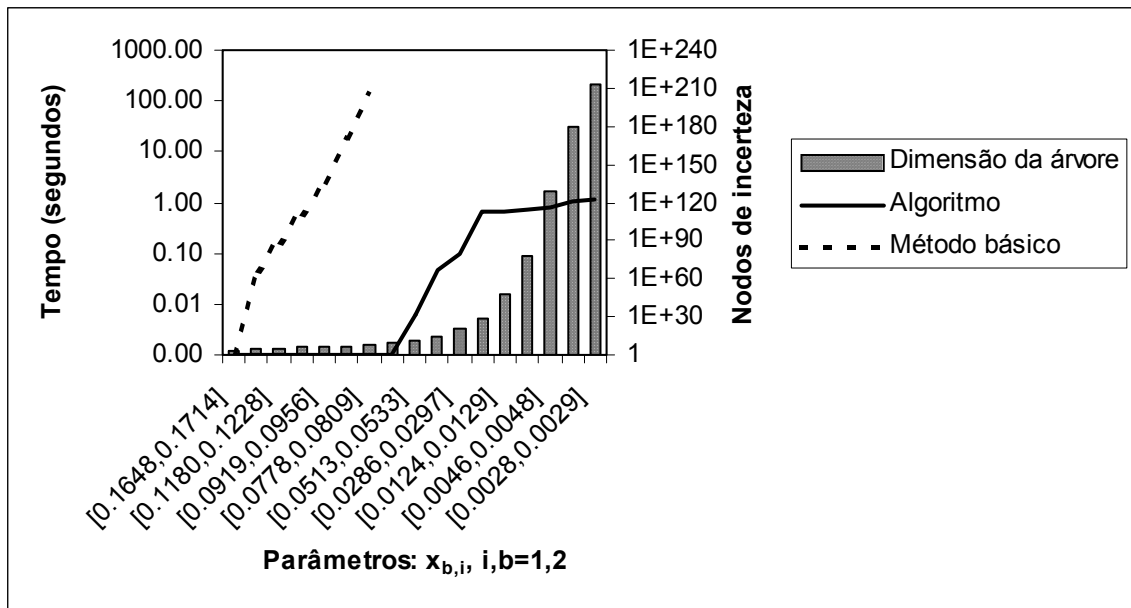


Figura 7.15: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e da dimensão das árvores (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 7 de seqüências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.

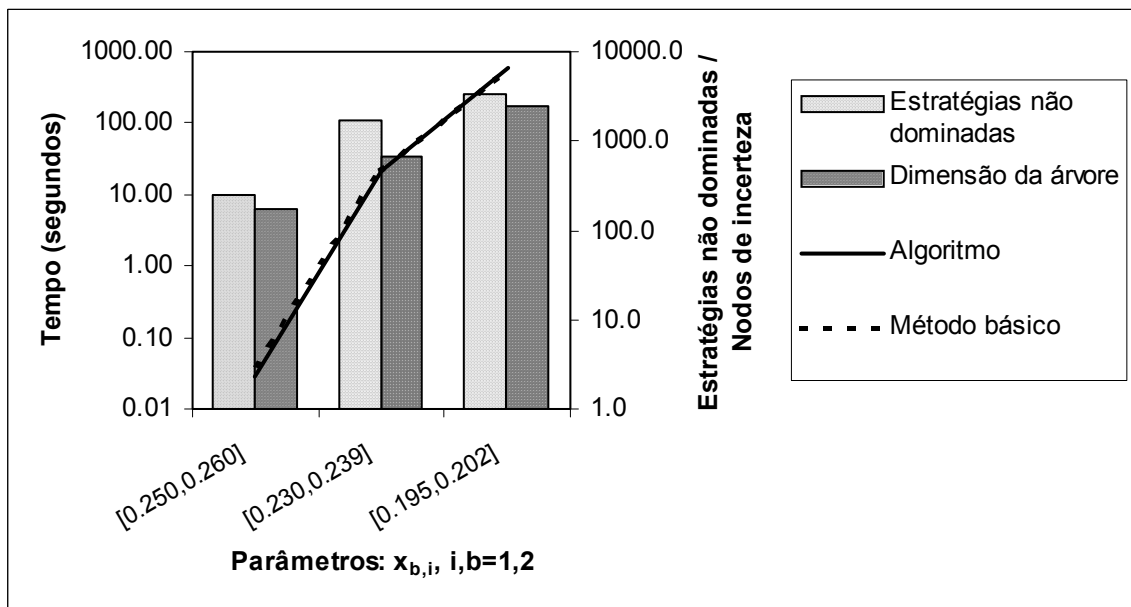


Figura 7.16: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda), do número de estratégias não dominadas e da dimensão das árvores (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 8 de seqüências e utilizando a forma geral do modelo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.

nodos de incerteza para os quatro conjuntos de sequências.

No conjunto 9 de sequências fizeram-se variar os custos de mudança dos dois processos, mantendo-se os tempos de mudança constantes, e mantendo-se sempre iguais os valores dos tempos e dos custos de mudança para os dois processos; no conjunto 10 de sequências procedeu-se de forma semelhante, mas desta vez fazendo variar apenas os tempos de mudança. Nos conjuntos 11 e 12 de sequências mantiveram-se fixos o tempo e custo de mudança do processo 1, mantendo-se ainda constante um destes parâmetros para o processo 2, e fazendo variar o outro. No caso do conjunto 11 de sequências, o parâmetro que se fez variar foi o custo de mudança do processo 2 e, no conjunto 12 de sequências, o parâmetro que se fez variar foi o tempo de mudança do processo 2. Em todas estas sequências foi atribuído o valor 6 aos custos ou tempos de mudança, que se mantiveram constantes.

Os desempenhos verificados nos conjuntos 9 (gráfico 7.17) e 10 (gráfico 7.18) de sequências apresentaram características semelhantes às dos desempenhos obtidos para os conjuntos 1 e 2, respectivamente. Com efeito, no caso do conjunto 9, e tal como aconteceu no conjunto 1, os tempos de execução do algoritmo foram inferiores aos do método básico quando o número de estratégias não dominadas era pequeno, e começaram a ser superiores aos do método básico quando o número de estratégias não dominadas atingiu algumas centenas. No caso do conjunto 10, e tal como aconteceu no conjunto 2, os tempos de execução do algoritmo foram sempre inferiores aos do método básico.

Os desempenhos verificados nos conjuntos 11 (gráfico 7.19) e 12 (gráfico 7.20) de sequências apresentaram também características semelhantes às de outros desempenhos obtidos anteriormente. Em ambos os conjuntos de sequências, o algoritmo apresentou sempre um tempo de execução inferior ao do método básico, o que já se tinha verificado em vários conjuntos anteriores. A nota mais significativa relativamente a estes dois conjuntos de sequências foi o facto de, no conjunto 11, os tempos de execução dos dois métodos permanecerem quase constantes quando se alterou o valor do parâmetro $c_{2,1}$. Este facto deveu-se claramente à pequena variação no número de estratégias não dominadas, o que indica também que, neste conjunto, o parâmetro $c_{2,1}$ não teve uma influência muito grande no número dessas estratégias (no conjunto 12, $t_{1,2}$ teve uma influência maior).

Note-se ainda que os gráficos 7.18 e 7.20, correspondentes aos conjuntos 10 e 12, respectivamente, podem criar a ilusão de que os tempos de execução do algoritmo aumentaram mais devagar que os do método básico quando o número de estratégias não dominadas aumentou. A acontecer, tal seria um comportamento muito diferente do verificado nos conjuntos anteriores. Na realidade, se se definir, para cada elemento das sequências, o quociente entre o tempo médio de execução do método básico e o do algoritmo, verifica-se que,

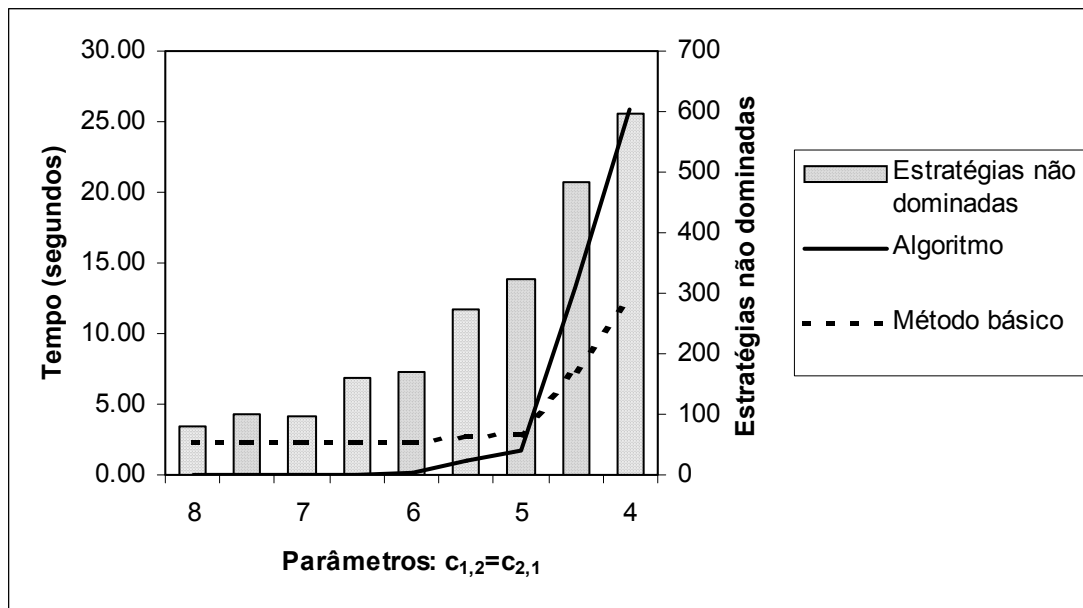


Figura 7.17: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 9 de sequências e utilizando a forma geral do modelo.

nestes dois conjuntos, este quociente quase sempre diminui quando o número de estratégias não dominadas aumenta (aliás, no conjunto 12 este quociente diminui sempre). Além disso, nos poucos casos em que este quociente aumenta, esse aumento é muito pequeno. Isto quer dizer que, pelo menos para estes dois conjuntos de sequências, não é correcto dizer que os tempos de execução do algoritmo aumentaram mais devagar do que os do método básico quando o número de estratégias não dominadas aumentou.

Nos primeiros 12 conjuntos de sequências, as probabilidades utilizadas foram sempre definidas como amostras das mesmas distribuições uniformes (isto é, $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.56]$, $i = 1, \dots, n$). Nos conjuntos 13 e 14 de sequências procurou determinar-se como varia o número de estratégias não dominadas, e o desempenho do algoritmo e do método básico, quando se alteram as probabilidades. Para que existisse a certeza de que se consideravam sequências em que as probabilidades tinham importância, utilizaram-se 2 processos com montantes de avanço do projecto diferentes para os dois arcos de cada processo, e iguais para ambos os processos. Assim, definiu-se $x_{1,i} \in [0.13, 0.14]$, $x_{2,i} \in [0.18, 0.19]$, $i = 1, 2$, o que conduziu sempre a árvores com um número de nodos de incerteza da ordem dos 10000. No conjunto 13 mantiveram-se constantes, e iguais a 0.5, as probabilidades de cada arco de cada processo, tendo-se apenas feito variar as probabilidades ajustadas ao tempo. As probabilidades ajustadas ao tempo do arco correspondente ao ramo com maior tempo de cada processo (isto é, $P_{b,i}^{T,b}$, $i, b = 1, 2$) foram feitas variar de 0.0 a 1.0.

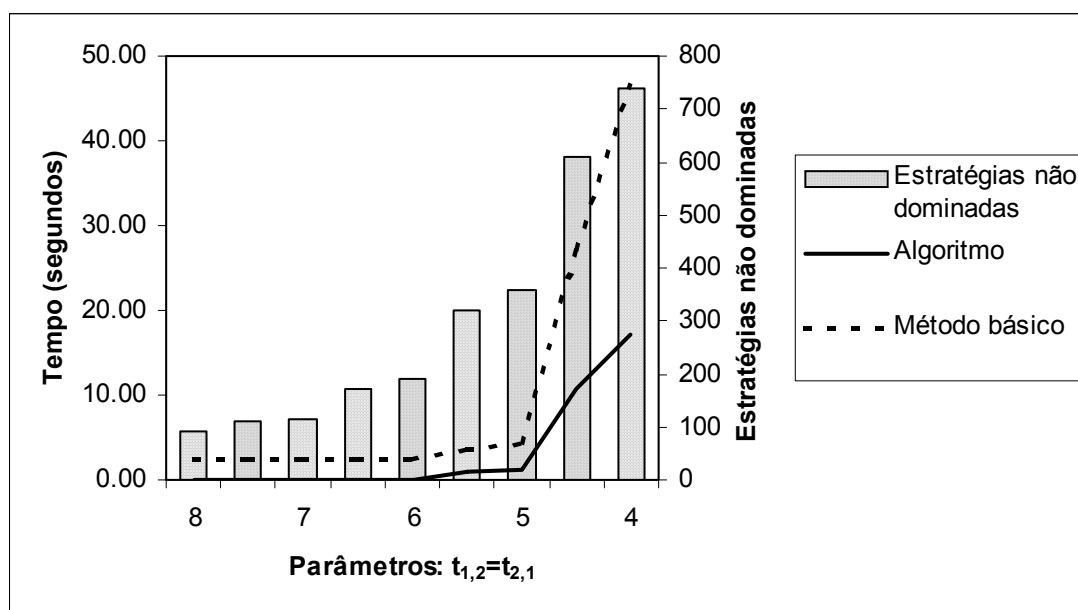


Figura 7.18: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 10 de seqüências e utilizando a forma geral do modelo.

Ainda neste conjunto 13, utilizaram-se sempre tempos e custos de mudança iguais a 1. No conjunto 14 fizeram-se variar simultaneamente todas as probabilidades associadas ao arco 1 (isto é, a probabilidade inicial e as probabilidades ajustadas ao tempo). Neste conjunto, utilizaram-se sempre tempos e custos de mudança iguais a 2.

Para o conjunto 13 de seqüências (gráfico 7.21), o resultado mais interessante é o muito baixo número de estratégias não dominadas para os valores extremos dos parâmetros, acompanhado por tempos de execução negligenciáveis para os dois métodos. Note-se que este resultado não era de todo imprevisível. Com efeito, os valores extremos das probabilidades ajustadas ao tempo, 0.0 e 1.0, correspondem aos casos particulares em que a agregação do tempo é feita usando o tempo mínimo e o tempo máximo, e é previsível que o número de estratégias não dominadas seja mais pequeno quando se utilizam estas formas de agregação. O tempo mínimo e o tempo máximo conduzem à obtenção de um menor número de diferentes tempos agregados, pois o tempo resultante destas formas de agregação depende apenas de um dos possíveis caminhos da raiz até uma folha da árvore de estratégia, e não da árvore de estratégia completa (o que acontece quando se usam probabilidades ajustadas intermédias); assim, o número de possíveis combinações é menor. Além disso, torna-se provável que caminhos diferentes que usem o mesmo número de vezes os mesmos processos conduzam ao mesmo tempo agregado. Deve também ter-se em conta que, se um dado caminho da árvore de estratégia define o tempo mínimo (máximo) para uma estratégia, esse mesmo caminho

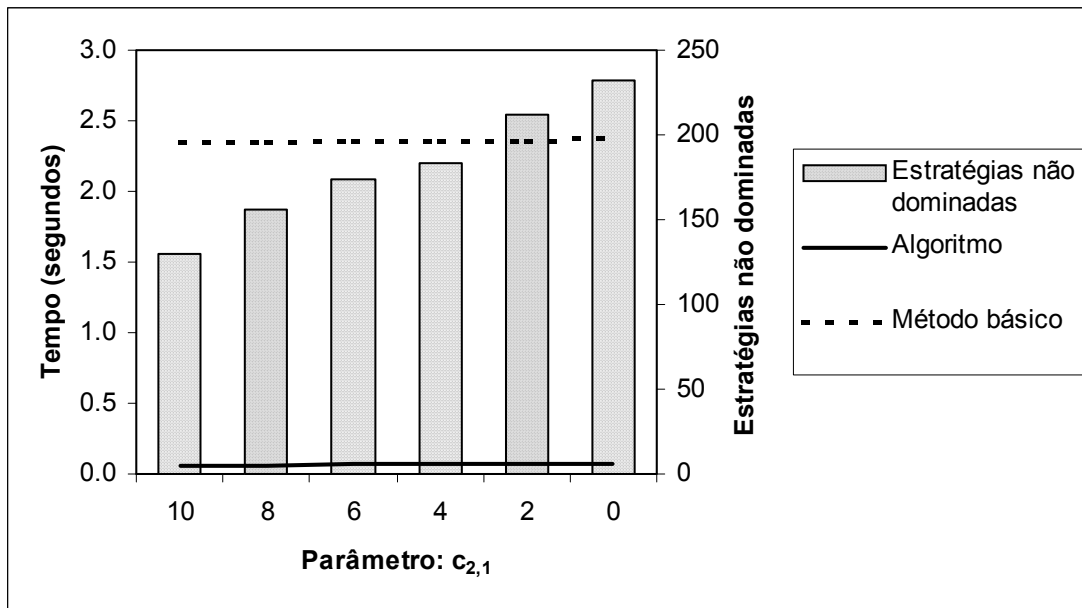


Figura 7.19: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 11 de sequências e utilizando a forma geral do modelo.

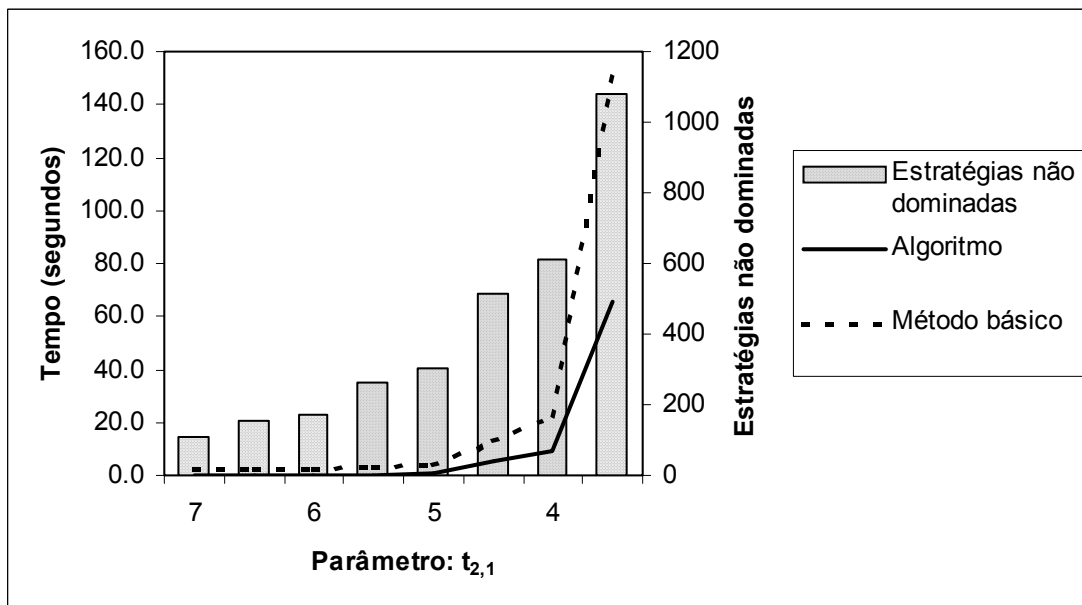


Figura 7.20: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 12 de sequências e utilizando a forma geral do modelo.

irá geralmente ocorrer em muitas outras árvores de estratégia, sendo provável que defina também o tempo mínimo (máximo) em muitas delas.

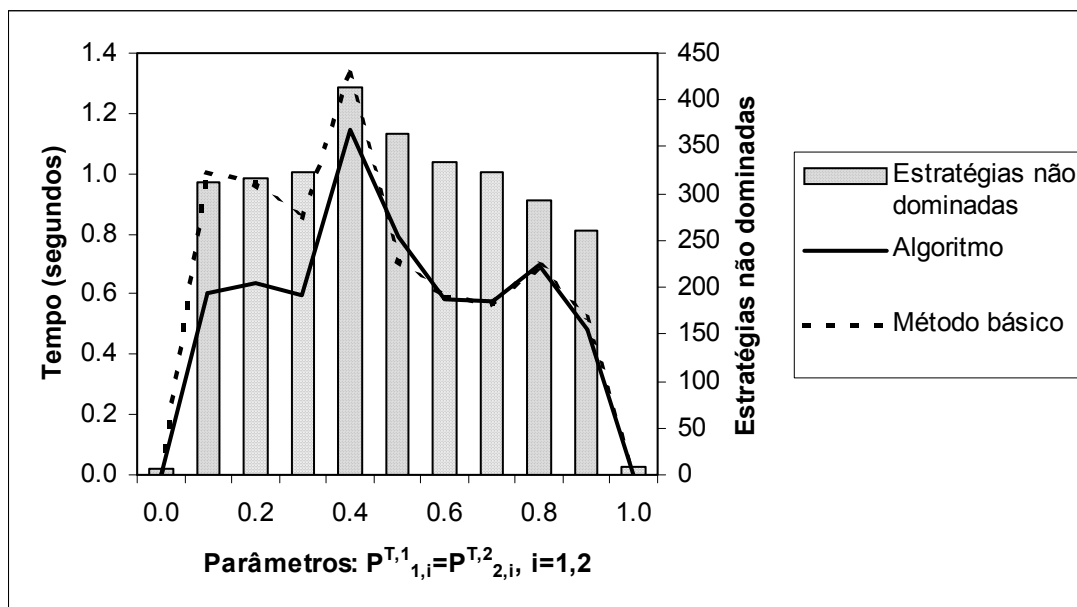


Figura 7.21: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 13 de seqüências e utilizando a forma geral do modelo.

Assim, existem motivos para acreditar que o tempo mínimo e o tempo máximo conduzem à obtenção de um menor número de diferentes tempos agregados. Como é impossível que duas estratégias não dominadas que não repitam os valores dos dois critérios tenham o mesmo tempo agregado, o número destas estratégias é, pois, mais pequeno. Portanto, existem motivos para acreditar que probabilidades ajustadas ao tempo de 0.0 e 1.0 conduzem geralmente a um número baixo de estratégias não dominadas com diferentes valores dos critérios. Em consequência, os tempos de execução dos métodos (particularmente do algoritmo) serão também mais reduzidos. Os resultados obtidos para o conjunto 13 de seqüências corroboraram totalmente esta conjectura.

O tempo mínimo é uma forma de agregação do tempo com utilidade muito limitada, uma vez que, se existir aversão ou indiferença face ao risco, ela nunca é utilizada. Já o tempo máximo pode ser uma forma de agregação muito útil nalgumas situações, como vai ser exposto na secção 7.6. Assim sendo, foi julgado conveniente analisar de forma mais detalhada o desempenho do algoritmo e do método básico quando se utiliza o tempo máximo, análise essa que também será feita nessa secção.

Para além deste resultado, os desempenhos dos métodos e os números de estratégias

não dominadas obtidos para o conjunto 13 de sequências não permitem outras conclusões significativas. O algoritmo teve geralmente um desempenho melhor que o do método básico, e o número de estratégias não dominadas parece crescer a partir de ambos os valores extremos dos parâmetros, até atingir um máximo para um valor dos parâmetros de 0.4 (embora as diferenças no número de estratégias não dominadas para valores intermédios dos parâmetros se possam considerar pequenas para a magnitude dos valores em questão). A variação dos tempos de execução acompanhou normalmente a variação do número de estratégias não dominadas, embora tenham existido alguns casos em que tal não aconteceu.

No conjunto 14 de sequências (gráfico 7.22), fizeram-se todas as probabilidades associadas ao arco 1 dos processos tomar um valor que variou de 0.05 até 0.95, para ambos os processos¹¹³. Os tempos de execução dos dois métodos foram muito baixos para os valores intermédios dos parâmetros; para valores entre 0.3 e 0.8 os tempos de execução foram inferiores a 1 segundo, para ambos os métodos. Os tempos de execução mais baixos corresponderam também aos números mais pequenos de estratégias não dominadas. Para valores extremos das probabilidades, os tempos de execução dos métodos foram elevados, e o número de estratégias não dominadas foi também grande. Constatou-se também que os tempos de execução do algoritmo foram geralmente um pouco mais baixos do que os do método básico, mas a diferença de tempos nunca foi grande.

7.5.3 Síntese dos resultados

Os testes efectuados permitiram tirar conclusões importantes sobre o desempenho do algoritmo e do método básico, e também sobre o comportamento do modelo. Essas conclusões vão agora ser apresentadas de forma resumida. Mas, ainda antes de passar a essa apresentação das conclusões, segue-se uma advertência quanto à forma como os resultados têm sido interpretados, e como as conclusões virão a ser apresentadas. Analisando o funcionamento dos dois métodos, torna-se claro que o desempenho destes depende do número de subestratégias não dominadas que estão associadas aos diferentes nodos da árvore, ou aos diferentes conjuntos de subestratégias usados no algoritmo. Existem motivos para acreditar que essa dependência é mais importante para o algoritmo do que para o método básico. O número de estratégias não dominadas é normalmente um bom indicador desse número de subestratégias que têm que ser consideradas, e a prova de que é assim é a forte relação entre os desempenhos dos métodos e o número de estratégias não dominadas que se verificou nos testes. No entanto, é possível conceber situações "atípicas", em que o número de subestratégias não dominadas é muito elevado para os níveis inferiores da árvore, e em

¹¹³Relembre-se que, por definição, a probabilidade inicial associada a um arco de um processo não pode ser nula (ver secção 5.2). Assim sendo, não se fizeram variar conjuntamente todas as probabilidades entre 0.0 e 1.0.

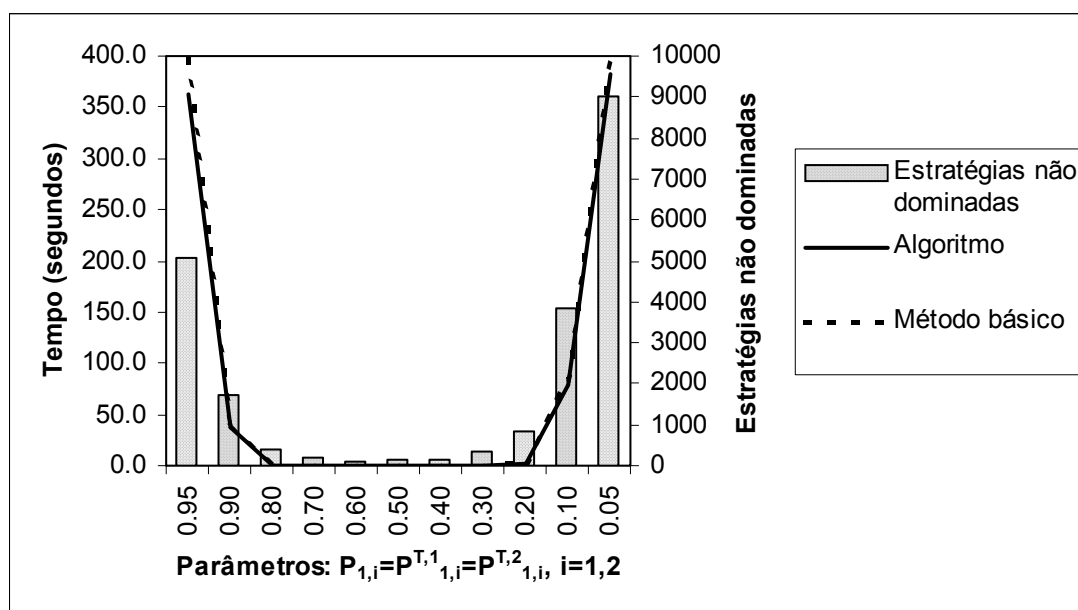


Figura 7.22: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 14 de seqüências e utilizando a forma geral do modelo.

que a esmagadora maioria dessas subestratégias só é eliminada nos níveis superiores (ou mesmo na raiz) da árvore. Numa tal situação, o número de estratégias não dominadas pode ser muito baixo (pode mesmo existir apenas uma), e os tempos de execução serem muito elevados (ou mesmo a execução ser impossível por falta de memória), particularmente para o algoritmo. Estas são, no entanto, situações pouco comuns, e normalmente o número de estratégias não dominadas é um bom indicador da grandeza do número de subestratégias que foi necessário considerar ao longo da execução dos métodos, estando, assim, relacionado com o desempenho destes (particularmente do algoritmo). A forma como vão ser apresentadas as conclusões assume que assim é.

Feita esta advertência, passa-se à apresentação das conclusões mais importantes:

- o desempenho dos dois métodos piora quando o número de estratégias não dominadas aumenta, e quando a dimensão das árvores aumenta;
- o desempenho do algoritmo é menos sensível ao aumento da dimensão das árvores, e é mais sensível ao aumento do número de estratégias não dominadas, que o do método básico;
- o algoritmo não é claramente melhor do que o método básico quando o número de estratégias não dominadas é muito elevado e, por vezes, o seu desempenho parece ser nesta situação mesmo ligeiramente pior que o do método básico;

- o desempenho do algoritmo é bastante melhor que o do método básico, quer em termos de tempo de execução quer em termos de utilização de memória, quando o número de estratégias não dominadas é baixo;
- a utilização de probabilidades ajustadas ao tempo de 0% ou de 100% conduz a um número mais baixo de estratégias não dominadas do que a utilização de outras probabilidades, o que se reflecte no desempenho dos métodos (que é melhor quando se utilizam probabilidades extremas);
- a utilização conjunta de probabilidades originais e probabilidades ajustadas ao tempo próximas de 0% ou próximas de 100% (sem atingir estes valores) conduz a um número mais elevado de estratégias não dominadas do que a utilização de probabilidades próximas de 50%, o que se reflecte no desempenho dos métodos (que é pior quando se utilizam probabilidades próximas de 0% e 100%).

Assim pode dizer-se que, apesar de não permitir a geração de um número elevado de estratégias não dominadas em pouco tempo, o algoritmo parece bem adaptado a situações em que o número de estratégias não dominadas é pequeno. Por outro lado, quando o número de estratégias não dominadas é grande, é geralmente difícil para o agente de decisão analisar o conjunto de alternativas e escolher uma delas. Nestes casos, pode ser preferível a utilização de uma abordagem interactiva que apoie o agente de decisão nesta escolha. O capítulo 8 vai apresentar uma abordagem interactiva à utilização do modelo quando a agregação do tempo é feita através do tempo médio. Note-se que o facto de o algoritmo ter um bom desempenho quando o número de estratégias não dominadas é baixo pode ser uma indicação de que este possa ser adaptado para utilização em métodos interactivos, baseados na geração de um pequeno número de estratégias não dominadas em cada interacção.

A conclusão de que a utilização de probabilidades ajustadas ao tempo de 0% ou de 100% conduz a um número baixo de estratégias não dominadas, e, conseqüentemente, a um bom desempenho dos métodos (particularmente do algoritmo), é também muito importante. Com efeito, o tempo máximo é uma forma de agregação do tempo que utiliza probabilidades extremas e que pode ser muito útil. Na secção seguinte vão ser analisados os motivos que podem conduzir à utilização do tempo máximo, e vai ser analisado o desempenho dos métodos quando o tempo máximo é utilizado para agregar o tempo.

7.6 A utilização do algoritmo com o tempo máximo

Nesta secção vai analisar-se o desempenho do algoritmo quando se utiliza o tempo máximo. Começa por apresentar-se os motivos que levam a acreditar que a utilização do tempo máximo é, muitas vezes, interessante, ao que se seguirão os resultados de alguns testes efectuados ao desempenho do algoritmo quando se utiliza o tempo máximo. Um estudo

inicial, e mais limitado, do desempenho do algoritmo, quando usado com o tempo máximo, foi apresentado em [79].

7.6.1 Porquê utilizar o tempo máximo

Como foi indicado no capítulo 4, um dos casos que se procurou que fossem abrangidos pela abordagem apresentada nesse capítulo foi a utilização do tempo máximo na agregação do tempo. Também no modelo que se está a considerar será muitas vezes de interesse para os agentes de decisão a utilização do tempo máximo.

Com efeito, não se pode considerar que exista uma forma universalmente aceite para agregar uma distribuição de tempos incertos num tempo equivalente certo. Para o valor financeiro, a teoria das opções fornece uma base teórica sólida para agregar os valores financeiros, assumindo que se verificam alguns pressupostos; mas a ausência de “valores de mercado” para o tempo dificulta o desenvolvimento de uma abordagem que não se baseie em pressupostos arbitrários ou unicamente nas preferências do agente de decisão em causa. O método proposto em 4.2.4, e que tem vindo a ser seguido, é unicamente baseado nas preferências do agente de decisão. A utilização de um método com esta base pode levantar algumas dificuldades quando o agente de decisão tiver que explicar ou justificar as suas decisões, devido à subjectividade que lhe está inerente.

O tempo máximo é uma forma de agregação que não é baseada em parâmetros que dependam das preferências do agente de decisão, e que é simples de explicar e de entender (o tempo máximo corresponde simplesmente ao cenário mais pessimista relativamente ao tempo para completar o projecto). Assim, a utilização do tempo máximo é facilmente justificável quando se pretender um valor pessimista para o tempo. Além disso, se existir uma data limite para a conclusão do projecto que se pretende que não seja ultrapassada, a utilização do tempo máximo é normalmente a forma de agregação que melhor permite garantir que essa data seja cumprida. Assim, é de crer que o tempo máximo possa ser muitas vezes a melhor escolha para a agregação do tempo.

7.6.2 Resultados dos testes

O procedimento utilizado para os testes relativos ao tempo máximo foi exactamente o mesmo que foi seguido nos testes efectuados na secção anterior. O equipamento também foi o mesmo, e os conjuntos de sequências foram os 8 primeiros conjuntos utilizados nos testes da secção anterior. Nos testes que, na mesma secção, fizeram uso do conjunto 8 de sequências, o limite do tempo de execução foi alargado de 30 para 60 minutos por elemento da sequência, uma vez que a utilização do limite de 30 minutos apenas permitiria obter resultados para dois elementos das sequências. Os testes ao conjunto 8 que utilizaram o

tempo máximo não apresentaram esse problema, pelo que se manteve o limite do tempo de execução em 30 minutos, tal como foi definido para os restantes conjuntos de sequências.

Os resultados obtidos para o conjunto 1 de sequências (gráfico 7.23) confirmaram totalmente as hipóteses de o número de estratégias não dominadas diminuir, e de o desempenho dos métodos melhorar relativamente aos resultados obtidos na secção anterior (em que se utilizaram probabilidades ajustadas ao tempo intermédias). A descida do número médio de estratégias não dominadas foi particularmente significativa – por exemplo, para custos e tempos de mudança iguais a 4, este número desceu de 1162 para 4. Esta descida reflectiu-se no desempenho dos dois métodos, mas particularmente no do algoritmo. Recorde-se que, na secção anterior, os limites de tempo de execução impostos levaram a que os dois métodos apenas fossem executados até os tempos e custos de mudança atingirem um valor mínimo de 4. Quando se usou o tempo máximo, foi possível executar os dois métodos para todos os tempos e custos de mudança considerados (isto é, até atingirem o valor mínimo de 0), e o algoritmo teve sempre um tempo de execução negligenciável (no sentido de, como já foi indicado, ser indistinguível de 0 para o nível de precisão que se está a usar, ou seja, inferior a 0.005 segundos). O método básico apresentou um tempo de execução mínimo próximo dos 2.3 segundos, ou seja, semelhante ao obtido na secção anterior. Isto indicia que o principal factor determinante deste tempo de execução mínimo do método básico é a dimensão das árvores. O maior tempo de execução do método básico foi de 5.25 segundos, e ocorreu para o número mais elevado de estratégias não dominadas (12). Existe, portanto, uma outra diferença importante entre o desempenho relativo dos dois métodos obtido na secção anterior e o obtido agora; enquanto na secção anterior o desempenho do algoritmo foi pior que o do método básico para os valores dos parâmetros que conduziam a um maior número de estratégias não dominadas, agora o algoritmo teve sempre um desempenho melhor do que o método básico.

Os resultados obtidos para o conjunto 2 de sequências (gráfico 7.24) apresentam características semelhantes às dos obtidos para o conjunto 1. O número de estratégias não dominadas registou uma diminuição muito significativa relativamente ao que se obteve quando se utilizaram probabilidades ajustadas ao tempo intermédias, e isso permitiu que os dois métodos tivessem um melhor desempenho e pudessem ser executados para todos os tempos e custos de mudança considerados (isto é, até se atingir o valor mínimo de 0). Lembre-se que, na secção anterior, apenas tinha sido possível executar os métodos até os tempos e custos de mudança atingirem um valor mínimo de 5. O algoritmo teve sempre um tempo de execução negligenciável, enquanto o método básico apresentou um tempo de execução mínimo próximo dos 18 segundos (portanto, pouco inferior ao obtido na secção anterior). Assim, o algoritmo teve sempre um desempenho melhor do que o método básico.

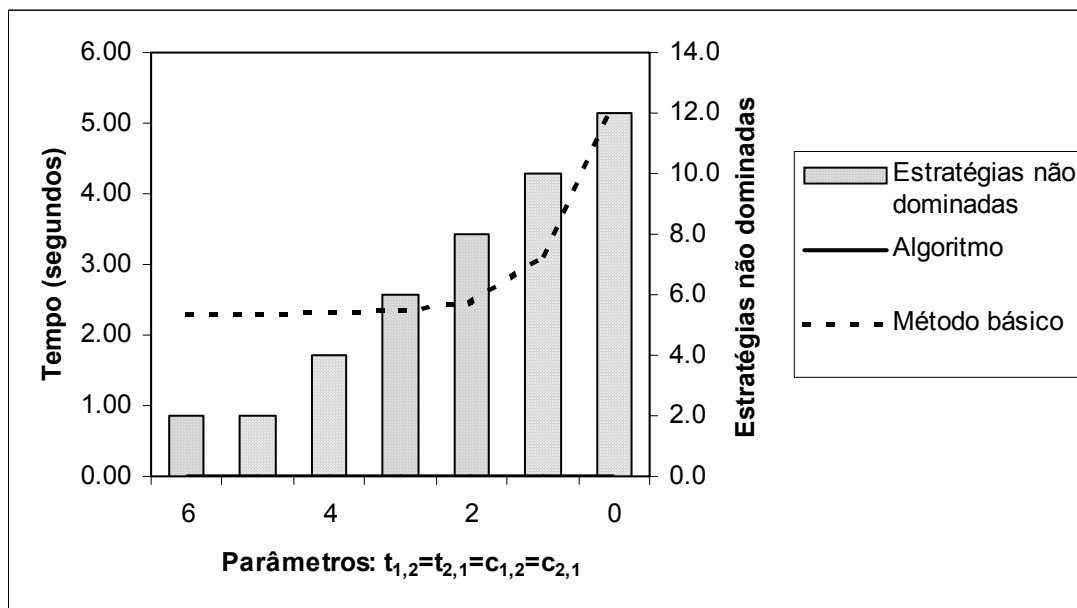


Figura 7.23: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 1 de seqüências e utilizando o tempo máximo (a curva referente ao algoritmo confunde-se com o eixo das abcissas).

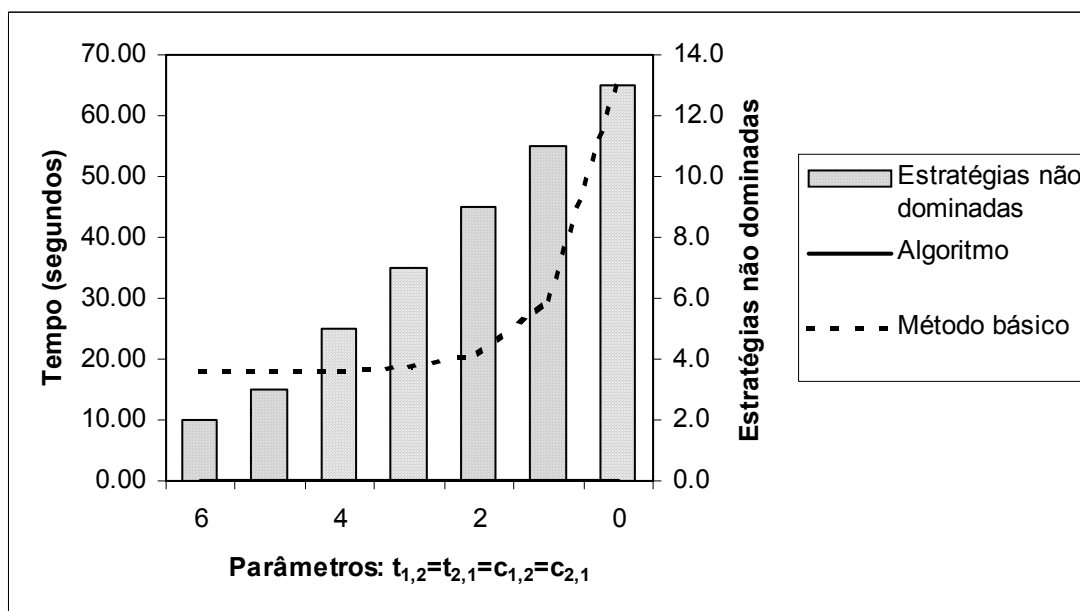


Figura 7.24: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 2 de seqüências e utilizando o tempo máximo (a curva referente ao algoritmo confunde-se com o eixo das abcissas).

Para o conjunto 3 de sequências (gráfico 7.25), foi mais uma vez impossível executar o método básico no equipamento utilizado, devido a insuficiência de espaço de memória (à semelhança do que se passara na secção anterior). Tal parece indicar que o factor determinante para isso ocorrer é, pelo menos neste caso, a dimensão das árvores, e não o número de estratégias não dominadas. O número de estratégias não dominadas registou uma muito significativa diminuição relativamente ao que se obteve quando se utilizaram probabilidades ajustadas ao tempo intermédias, e isso permitiu que o algoritmo tivesse um desempenho muito melhor. Foi possível executar o algoritmo para todos os tempos e custos de mudança considerados, com um tempo de execução máximo próximo de 0.01 segundos.

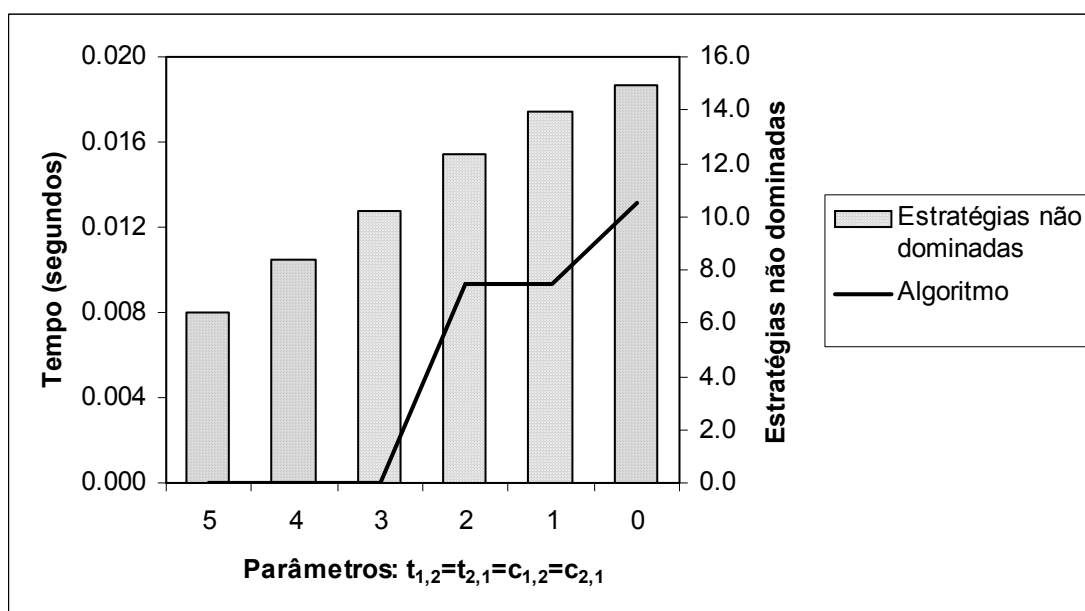


Figura 7.25: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 3 de sequências e utilizando o tempo máximo. Para este conjunto de sequências não foi possível obter os resultados relativos ao método básico, pois a memória do sistema utilizado foi insuficiente para executar esses testes.

Os resultados obtidos para os conjuntos 4 (gráfico 7.26) e 6 (gráfico 7.27) de sequências têm características semelhantes às dos obtidos para os conjuntos 1 e 2. Há uma diminuição muito significativa do número de estratégias não dominadas relativamente ao obtido na secção anterior, e uma conseqüente melhoria do desempenho dos dois métodos. Mais uma vez, o algoritmo teve um tempo de execução negligenciável para todos os elementos dos conjuntos de sequências, sendo o seu desempenho sempre melhor que o do método básico (o que não se passou na secção anterior, quando se utilizaram probabilidades ajustadas ao tempo intermédias). Para o conjunto 5 de sequências (gráfico 7.28), a diminuição do

número de estratégias não dominadas levou a que os dois métodos apresentassem sempre tempos de execução negligenciáveis.

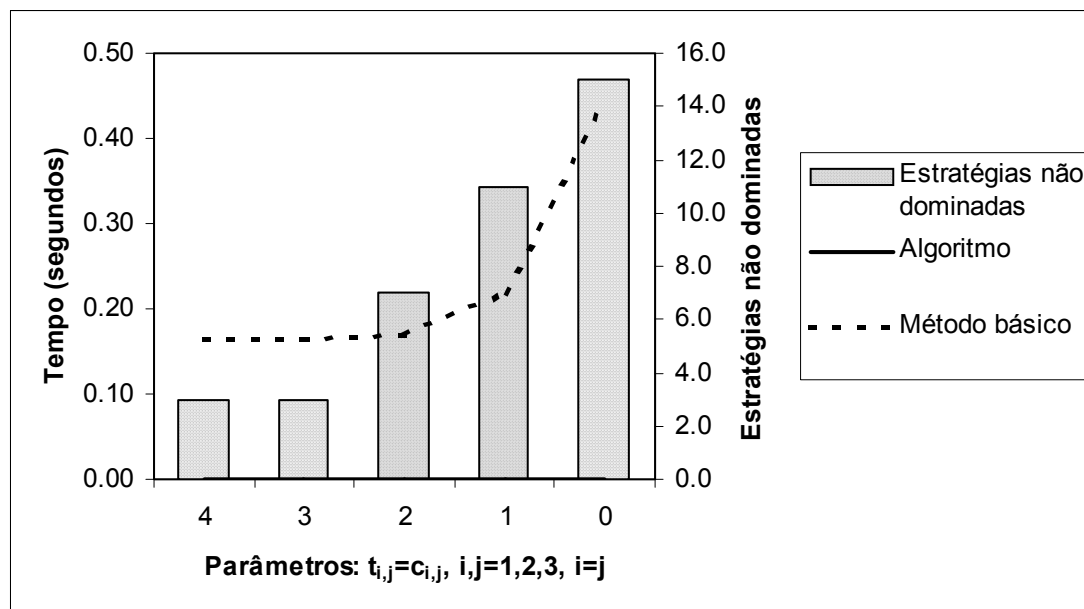


Figura 7.26: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 4 de seqüências e utilizando o tempo máximo (a curva referente ao algoritmo confunde-se com o eixo das abcissas).

Para o conjunto 7 de seqüências (gráfico 7.29), todos os resultados obtidos (tempos de execução, número de estratégias não dominadas e dimensão das árvores) foram praticamente idênticos aos obtidos na secção anterior. À partida era de prever que assim acontecesse, uma vez que a utilização de tempos e custos de mudança muito elevados garantia que uma mudança de processo nunca fosse compensadora. Assim, não só o número de estratégias não dominadas foi muito baixo (igual a 2), mas também os sucessivos conjuntos de subestratégias não dominadas apenas contiveram uma subestratégia. Portanto, a mudança das probabilidades ajustadas ao tempo não teve qualquer impacto relativamente a estes números de estratégias e subestratégias.

Os resultados agora obtidos para o conjunto 8 de seqüências (gráfico 7.30) apresentam características semelhantes às dos obtidos para o conjunto 7 de seqüências, tendo, também aqui, o desempenho do algoritmo sido claramente melhor que o do método básico. Para as árvores mais pequenas, ambos os métodos apresentaram tempos de execução negligenciáveis mas, quando o tamanho das árvores começou a aumentar, os tempos do método

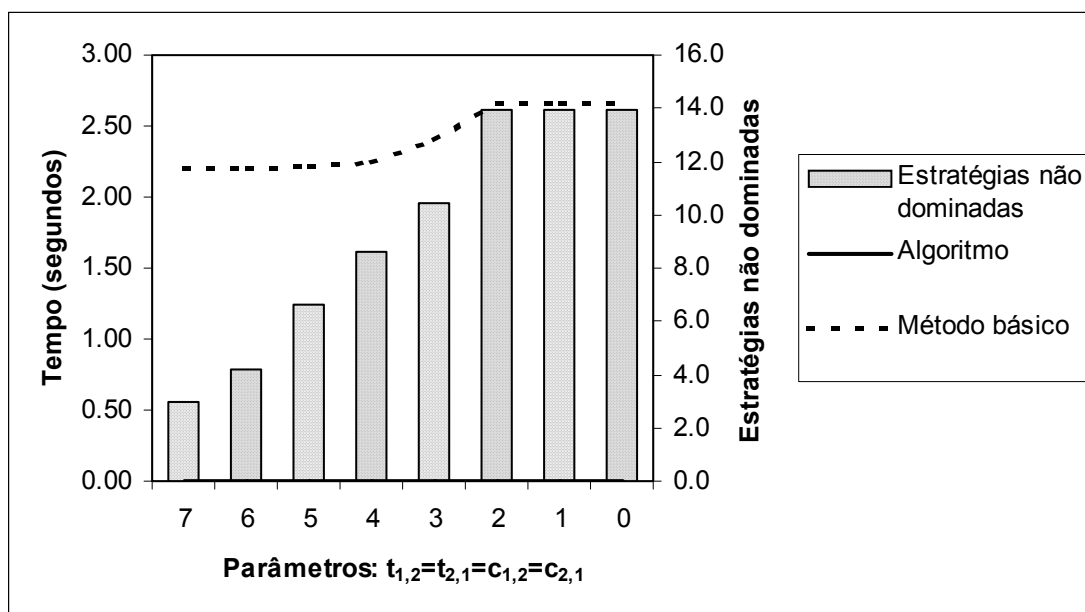


Figura 7.27: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 6 de seqüências e utilizando o tempo máximo (a curva referente ao algoritmo confunde-se com o eixo das abcissas).

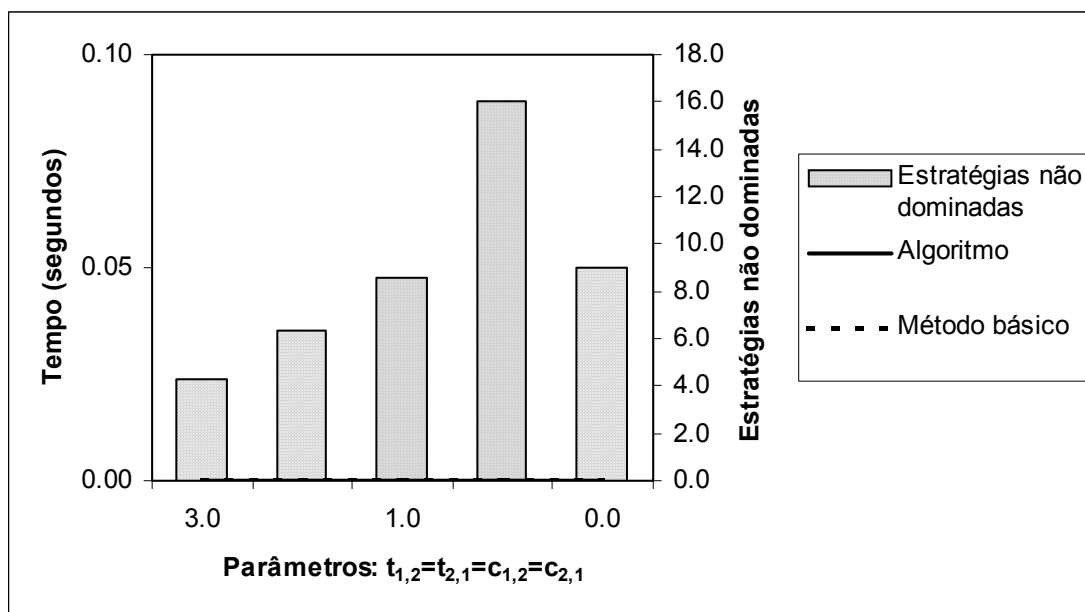


Figura 7.28: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e do número de estratégias não dominadas (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 5 de seqüências e utilizando o tempo máximo (os tempos do método básico e do algoritmo são sempre iguais entre si, e iguais a 0, confundindo-se as respectivas curvas com o eixo das abcissas).

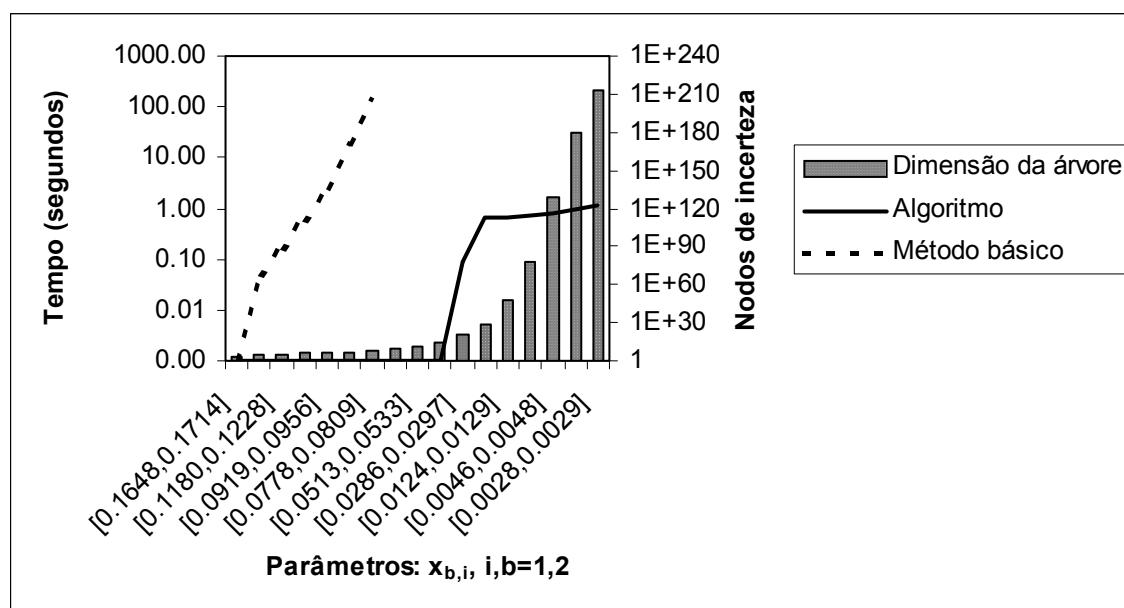


Figura 7.29: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda) e da dimensão das árvores (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 7 de seqüências e utilizando o tempo máximo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.

básico aumentaram rapidamente, enquanto os do algoritmo apenas deixaram se ser negligenciáveis para árvores muito maiores. Com efeito, quando se atingiram árvores de decisão com um número de nodos de incerteza da ordem da centena de milhão (isto é, para valores de $x_{b,i}$, $i, b = 1, 2$ pertencentes ao intervalo $[0.0716, 0.0744]$), a execução do método básico deixou de ser possível por falta de memória no sistema utilizado, mas a execução do algoritmo continuou a demorar um tempo negligenciável. Para as maiores árvores de decisão consideradas (dimensão estimada da ordem dos 10^{31} nodos de incerteza, correspondendo a $x_{b,i} \in [0.0189, 0.0196]$, $i, b = 1, 2$) continuou a ser possível executar o algoritmo, embora já com um tempo de execução próximo dos 139 segundos¹¹⁴. Relativamente aos resultados obtidos na secção anterior para este conjunto de seqüências, nota-se uma muito significativa diminuição do número de estratégias não dominadas, e uma muito significativa melhoria no desempenho dos dois métodos. Na secção anterior, os limites de tempo de execução impostos (e já especialmente aumentados para este conjunto de seqüências) levaram a que os dois métodos apenas fossem executados até as árvores de decisão atingirem cerca de 2500 nodos de incerteza. Agora foi possível executar, mesmo o método com pior desempenho (o método básico), até as árvores de decisão atingirem uma dimensão próxima de 45 milhões de nodos de incerteza. Outra diferença muito importante é o facto (aliás já mencionado)

¹¹⁴Mais uma vez não se continuaram os testes com árvores maiores devido à existência de limitações de implementação já anteriormente indicadas (ver nota de rodapé 109).

de o algoritmo ter tido um desempenho claramente melhor que o do método básico, quer em termos de rapidez de execução, quer em termos de utilização de memória, enquanto na secção anterior o método básico tinha sido geralmente um pouco mais rápido do que o algoritmo neste conjunto de sequências.

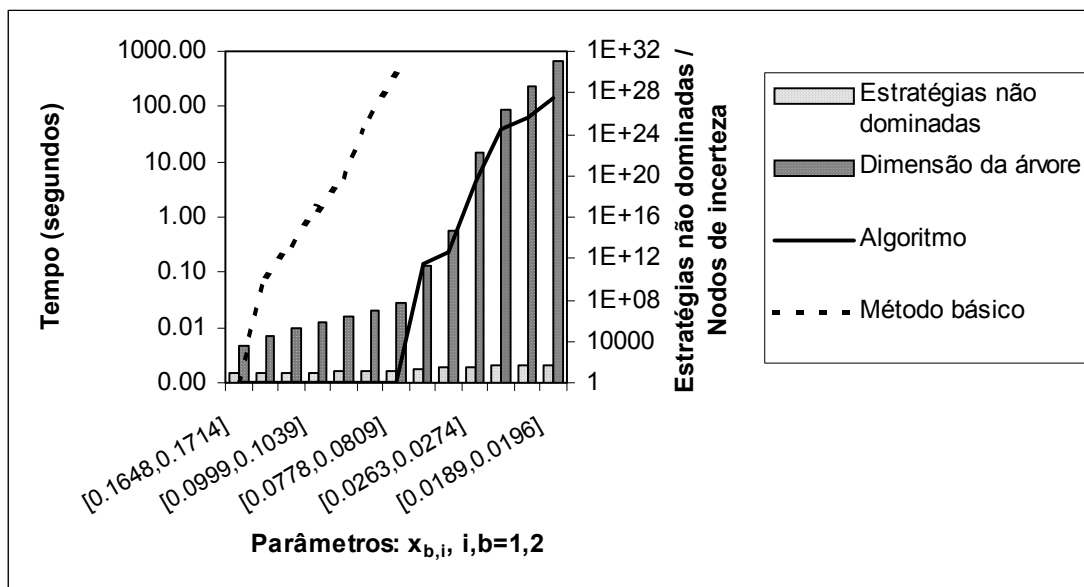


Figura 7.30: Variação do tempo de cálculo (escala à esquerda), do número de estratégias não dominadas e da dimensão das árvores (escala à direita) com o valor dos parâmetros, nos testes feitos para o conjunto 8 de sequências e utilizando o tempo máximo. As medidas em ordenadas encontram-se em escala logarítmica.

7.6.3 Síntese dos resultados

Os testes efectuados à utilização do tempo máximo permitiram confirmar as indicações que já tinham sido dadas pelos testes anteriores, podendo tirar-se três conclusões importantes.

A primeira é que o número de estratégias não dominadas obtido quando se utiliza o tempo máximo é geralmente muito inferior ao obtido quando se utilizam probabilidades ajustadas ao tempo intermédias (como foi feito na secção anterior). Com efeito, nunca o número de estratégias não dominadas aumentou relativamente ao obtido na secção anterior, e apenas se manteve inalterado quando era já muito baixo. Na maior parte dos casos, este número desceu de forma muito significativa relativamente ao obtido na secção anterior. Este resultado era já esperado, tendo sido apresentada na secção anterior a razão de assim ser.

A segunda conclusão, que decorre da primeira, é que o desempenho dos dois métodos melhora, muitas vezes de forma muito significativa, quando se utiliza o tempo máximo. Esta melhoria é particularmente significativa para o algoritmo.

A terceira conclusão é que o desempenho do algoritmo melhora relativamente ao do método básico quando se utiliza o tempo máximo. Essa melhoria é tão significativa que nunca foi possível encontrar um caso em que, utilizando o tempo máximo, o desempenho do algoritmo fosse pior que o do método básico. Além disso, os desempenhos só foram idênticos quando conduziram a tempos de execução negligenciáveis.

O desempenho do algoritmo é, portanto, particularmente bom quando se utiliza o tempo máximo, o que se deve ao facto de esta utilização conduzir normalmente a um número baixo de estratégias não dominadas. É de prever que o mesmo se passe quando se utiliza o tempo mínimo, mas tal não foi investigado por se acreditar que o uso deste tempo terá uma utilidade reduzida.

7.7 Outras aplicações do algoritmo

O algoritmo apresentado no presente capítulo foi desenvolvido com vista à identificação de todas as estratégias não dominadas do modelo. No entanto, se forem feitas pequenas modificações no algoritmo, é possível aplicá-lo com fins diferentes. Apreciem-se, então, duas outras aplicações possíveis, que serão úteis para a abordagem interactiva descrita no capítulo 8.

A primeira aplicação refere-se à identificação da(s) estratégia(s) não dominada(s) que minimiza(m) um dos critérios. Assuma-se, desta forma, que se pretende(m) encontrar a(s) estratégia(s) não dominada(s) que minimiza(m) o critério K . A obtenção destas estratégias a partir do algoritmo pode ser baseada na coerência em valor da agregação dos critérios, quando os nodos de incerteza são binomiais (ver subsecção 4.3.2). Considere-se que existem, como alternativas num nodo de decisão, duas subestratégias s'_1 e s'_2 , e que s'_1 tem um valor menor do que s'_2 no critério K . Estando garantido que a agregação dos critérios é coerente em valor, então a expressão (4.3) assegura que uma estratégia que contenha s'_1 terá um valor menor no critério K do que a estratégia idêntica que contém s'_2 no lugar de s'_1 . Assim, se o objectivo for apenas identificar a(s) estratégia(s) que minimizam o critério K , podem ir-se eliminando, não apenas as subestratégias dominadas, mas também todas aquelas para as quais exista uma outra subestratégia que permita executar a mesma fracção do projecto com um valor menor nesse critério. Portanto, uma alteração a fazer será considerar que as subestratégias a colocar em $S(i, I)$ não são todas as não dominadas, mas sim aquelas que são não dominadas, e para as quais não exista nenhuma outra subestratégia com um valor inferior no critério K (esta alteração corresponde ao passo 14 do algoritmo, de acordo com a forma como este está definido na secção 7.1). Uma outra alteração que é necessária consiste em colocar, nos conjuntos $S(i)$ finais, apenas a(s) estratégia(s) não dominada(s) para as quais não exista nenhuma outra com um valor menor no critério K , em vez de se

colocarem todas as estratégias não dominadas (tal corresponde ao passo 19 do algoritmo). Finalmente, uma última alteração que pode ser feita ao algoritmo consiste em colocar, no conjunto $DB_{b,i}$, não só os ramos dominados, mas também os ramos não dominados para os quais existe um outro ramo com um menor valor no critério K (tal corresponde ao passo 11 do algoritmo). Assim, estes ramos não dominados não são colocados em $NDB_{b,i}$.

Todas estas alterações podem resumir-se ao seguinte: alterar o conceito de dominância, passando a considerar que as estratégias, subestratégias ou ramos que não minimizam o critério K também são dominados. Deste modo, se a implementação do algoritmo tiver a verificação de dominância centralizada, as alterações a fazer são muito simples.

Note-se que existiria uma outra forma de identificar a(s) estratégia(s) não dominada(s) que minimiza(m) o critério K , que seria começar por utilizar o algoritmo para calcular todas as estratégias não dominadas, e depois eliminar as que não minimizam K . No entanto, as alterações indicadas permitem identificar estas estratégias de um modo quase sempre muitíssimo mais rápido. Com efeito, os testes efectuados ao algoritmo indicam que este tem um desempenho particularmente bom quando o número de estratégias não dominadas é baixo. Neste caso, não só esse número é baixo, como também o é o número de subestratégias em cada conjunto $S(i, I)$. Isto permite que estes conjuntos sejam válidos para intervalos I de maior amplitude e, conseqüentemente, implica o cálculo de um número reduzido destes conjuntos. Além disso, quando se pretende aplicar desta forma o algoritmo, visa-se geralmente calcular apenas uma das estratégias não dominadas que minimiza o critério K ; tal é o caso da abordagem interactiva do capítulo 8¹¹⁵. Isto permite que o conjunto final de estratégias não dominadas tenha apenas uma estratégia, e que cada conjunto $S(i, I)$ tenha apenas uma subestratégia. Assim, a utilização do algoritmo será particularmente rápida.

A segunda aplicação do algoritmo será na definição de funções que também serão necessárias para a utilização da abordagem a ser apresentada no capítulo 8: as funções $tmin_i(x)$ e $cmin_i(x)$, $x \in]0, 1], i = 1, \dots, n$. O primeiro conjunto de funções ($tmin_i(x)$) representa o menor tempo possível de uma subestratégia que permita a execução de uma fracção x do projecto, se se começar por utilizar o processo P_i . O segundo conjunto de funções ($cmin_i(x)$) tem o mesmo significado, mas para o critério custo.

É fácil constatar que estas funções podem ser obtidas como um "subproduto" do cálculo das estratégias que minimizam o critério correspondente. Com efeito, quando se calculam as estratégias que minimizam um critério de acordo com as indicações apresentadas previamente nesta secção, os conjuntos $S(i, I)$ contêm as subestratégias que minimizam o valor

¹¹⁵ É interessante notar que, apesar de, no caso geral, não se poder garantir a geração de todas as estratégias não dominadas devido ao facto de as probabilidades ajustadas poderem ser nulas, na abordagem do capítulo 8 considera-se que as probabilidades ajustadas ao tempo são iguais às probabilidades iniciais e, portanto, não podem ser nulas. Assim, se tal fosse pretendido, poder-se-iam gerar todas as estratégias não dominadas que minimizam o critério K . No entanto, tal não é necessário, e para a utilização da abordagem desse capítulo basta identificar uma destas estratégias.

desse critério para a execução das fracções do projecto pertencentes ao intervalo I (se só contiverem uma subestratégia, ela será a que minimiza o valor do critério para fracções do projecto pertencentes a I , e, se contiverem mais, todas minimizam o valor do critério nesse intervalo, tendo, portanto, todas o mesmo valor nesse critério). Quando assim é, existe a certeza de o valor do critério minimizado para as subestratégias dos conjuntos $S(i, I)$ ser o valor da função correspondente ($tmin_i(x)$ para o caso do tempo, e $cmin_i(x)$ para o caso do custo), para todos os valores $x \in I$. No entanto, nem sempre existe a garantia de esta ser a interpretação correcta para o conteúdo de $S(i, I)$; com efeito, e como foi indicado na secção 7.1, a partir do momento em que o limite inferior do intervalo I é superior a τ deixa de existir a garantia de que $S(i, I)$ contenha as subestratégias não dominadas que permitem executar todas as fracções $x \in I$ do projecto. Assim, podem existir fracções do projecto pertencentes a $x \in I$ para as quais o valor do critério não seja minimizado pelas subestratégias de $S(i, I)$. A forma de contornar este problema é muito simples; basta utilizar $\tau = 1$, pois, deste modo, todos os limites inferiores de I serão inferiores a τ . Pode argumentar-se que a utilização de $\tau = 1$ pode conduzir a maiores tempos de execução. No entanto, nesta aplicação do algoritmo não existe qualquer motivo para pensar que a utilização de $\tau < 1$ conduza a uma redução dos tempos de execução, pois o número de intervalos para os quais é necessário calcular os conjuntos de subestratégias não dominadas é já tipicamente baixo.

Aplicando desta forma o algoritmo, apenas são necessárias duas execuções deste para calcular as estratégias que minimizam os critérios e os dois conjuntos de funções. Uma execução permite calcular a estratégia que minimiza o tempo (ou as estratégias, no caso improvável de se pretenderem todas) e as funções $tmin_i(x), x \in]0, 1], i = 1, \dots, n$, e a outra permite calcular a estratégia que minimiza o custo e as funções $cmin_i(x), x \in]0, 1], i = 1, \dots, n$. Tipicamente estas execuções do algoritmo serão muito rápidas.

7.8 Resumo

Foi apresentado um algoritmo para a identificação das estratégias não dominadas correspondentes ao modelo bicritério, sem requerer a construção das árvores de decisão. Para isso, o algoritmo utiliza algumas ideias da programação dinâmica probabilística e algumas propriedades do modelo (apresentadas na secção 6.2).

Começaram por apresentar-se as ideias subjacentes ao algoritmo, tendo depois sido feita uma descrição mais rigorosa deste. Foi ainda apresentada uma descrição detalhada desse algoritmo, que incluiu algumas optimizações do seu desempenho. Foi também mostrado um exemplo do funcionamento do algoritmo para a identificação das estratégias não dominadas.

Fizeram-se alguns testes ao desempenho do algoritmo. Para o efeito considerou-se a forma mais geral do modelo, tal como foi apresentada no capítulo 5, e ainda a utilização

do tempo máximo. Como termo de comparação para o algoritmo, usou-se um método que consiste em construir e avaliar as árvores de acordo com as regras estabelecidas para a abordagem do capítulo 4, que foi designado por método básico. O algoritmo não parece ter um desempenho claramente melhor que o do método básico quando o número de estratégias não dominadas é elevado, mas o seu desempenho é bastante melhor que o do método básico quando esse número é pequeno. Assim, o algoritmo proposto é particularmente recomendado para situações em que o número de estratégias não dominadas é pequeno, como acontece quando se utiliza o tempo máximo.

Finalmente, descreveram-se pequenas modificações que podem ser feitas ao algoritmo, por forma a que este possa servir de apoio a outras abordagens à utilização do modelo. As modificações propostas serão úteis para a abordagem interactiva que se apresenta no próximo capítulo.

Capítulo 8

A utilização do tempo médio no modelo bicritério – uma abordagem interactiva

O algoritmo proposto no capítulo 7 do presente trabalho tem como objectivo identificar rapidamente as estratégias não dominadas do modelo bicritério; a geração de todas estas estratégias é uma das abordagens possíveis à utilização deste modelo. No presente capítulo propõe-se uma abordagem diferente: uma abordagem interactiva à selecção de uma estratégia. Esta abordagem interactiva vai ser definida para a utilização do tempo médio no modelo bicritério do capítulo 5. Os seus componentes são um procedimento interactivo (que conduz o agente de decisão na pesquisa das estratégias) e uma técnica para identificar uma nova estratégia em cada interacção. Os traços gerais desta abordagem foram apresentados em [77].

8.1 A utilização do modelo com o tempo médio

Para além do tempo máximo, existe uma outra forma particular de agregação do tempo que pode, muitas vezes, ser interessante para o agente de decisão: o tempo médio. O tempo médio pode ser interpretado como o valor médio do tempo correspondente a uma dada estratégia de execução do projecto, sendo, tal como acontece com o tempo máximo, simples de entender e explicar. Além disso, e como também acontece com o tempo máximo, o tempo médio não é baseado em parâmetros que dependam das preferências do agente de decisão, o que pode facilitar a justificação do seu uso. Exibe também algumas propriedades matemáticas interessantes, que podem ser utilizadas para identificar mais rapidamente estratégias não dominadas (algumas destas propriedades foram apresentadas em 6.3).

A análise em tempo contínuo de projectos que tenham características semelhantes aos que podem ser representados pelo modelo (mas que faça sentido representar em tempo contínuo) pode ser particularmente simples quando se utiliza o tempo médio. Com efeito, uma das principais dificuldades da análise em tempo contínuo do modelo proposto no capítulo 5 é a forma como o tempo é tratado, isto é, o facto de as probabilidades utilizadas para agregar o tempo dependerem da relação de ordem entre os próprios tempos a agregar. Assim, na forma mais geral do modelo, não é indiferente efectuar uma mudança de processo quando o projecto está a "avançar depressa" ou quando está a "avançar devagar": se as probabilidades ajustadas ao tempo reflectirem aversão ao risco de tempo, então uma mudança para um processo que permita uma execução mais rápida do projecto conduzirá, em geral, a um menor tempo agregado se for efectuada num ramo em que o projecto está a "avançar devagar" em vez de ser efectuada num ramo em que o projecto está a "avançar depressa" (assumindo que os dois ramos correspondem à mesma fracção do projecto e têm a mesma probabilidade). Quando se utiliza o tempo médio, esta dependência do tempo agregado em relação à forma como o processo está a avançar deixa de existir; torna-se indiferente mudar de processo num ramo em que o projecto está a "avançar depressa" ou num ramo em que este está a "avançar devagar", pois, se as duas situações têm a mesma probabilidade, o efeito da mudança de processo no tempo agregado é igual para as duas. Este facto tem consequências particularmente importantes quando se trabalha em tempo contínuo, pois torna a obtenção das estratégias não dominadas mais simples. Muitas vezes, para obter as estratégias não dominadas, pouco mais será necessário do que analisar as combinações obtidas, variando apenas o processo a utilizar inicialmente e mais um parâmetro (como a probabilidade de se mudar para cada processo muito pouco tempo depois do início do projecto, ou o tempo durante o qual se pretende utilizar cada processo). Apesar de a análise em tempo contínuo ser particularmente simples quando se utiliza o tempo médio, a análise em tempo discreto continua a apresentar as dificuldades inerentes à grande dimensão das árvores de decisão. Seguindo a linha que vem conduzindo este trabalho, vai prosseguir-se com esta análise em tempo discreto, para projectos que só faça sentido representar em tempo discreto.

Os testes efectuados, no capítulo 7, ao algoritmo apresentado nesse mesmo capítulo, não permitem pensar que esse algoritmo tenha um desempenho particularmente bom quando utilizado com o tempo médio. Assim, foi considerado um novo tipo de abordagem à utilização do modelo com o tempo médio: uma abordagem interactiva. Uma tal abordagem vai apoiar o agente de decisão na escolha de uma estratégia que o satisfaça, sendo particularmente útil quando o número de estratégias não dominadas for elevado (o que ocorre muitas vezes quando se utiliza o tempo médio). Na presença de muitas estratégias não dominadas, o agente de decisão pode ter dificuldade em seleccionar uma alternativa. A abordagem interactiva vai apenas confrontar o agente de decisão com um pequeno número

de estratégias em cada interacção (não mais que três no caso do procedimento que vai ser apresentado). Desta forma, a sua tarefa é mais simples, uma vez que já não lhe é pedido que analise simultaneamente um número elevado de alternativas. Em vez disso, é conduzido na exploração do conjunto de estratégias não dominadas, sendo as suas decisões limitadas a pequenos conjuntos de alternativas.

Podem argumentar-se que seria também possível utilizar o algoritmo do capítulo 7, ou o método básico, para gerar todas as estratégias não dominadas e, depois, utilizar um procedimento interactivo para conduzir o agente de decisão na exploração deste conjunto de estratégias. No entanto, a utilização directa da abordagem interactiva apresenta uma outra vantagem relativamente a esta forma de proceder. A abordagem que aqui vai ser apresentada é baseada na geração de apenas uma estratégia por interacção, tendo sido desenvolvida uma técnica para a identificação dessa estratégia. Assim, utilizando esta abordagem, o agente de decisão não é obrigado a suportar longos tempos de espera para a identificação do conjunto de estratégias não dominadas – um esforço computacional mais pequeno, demorando um tempo mais curto, é suficiente para a identificação da estratégia requerida por cada interacção.

8.2 Descrição geral da abordagem interactiva

Já foi indicado que a abordagem aqui proposta inclui um procedimento interactivo (que conduz o agente de decisão na pesquisa do espaço das estratégias não dominadas) e uma técnica, utilizada pelo procedimento interactivo, para identificar novas estratégias. O procedimento interactivo começa por identificar duas estratégias: a estratégia não dominada que minimiza o tempo e a que minimiza o custo. Depois de identificadas estas estratégias, inicia-se o “diálogo” com o agente de decisão. É perguntado se alguma destas estratégias o satisfaz, e, no caso de a resposta ser afirmativa, essa é a estratégia escolhida. Se não for esse o caso, passa a ser identificada uma nova estratégia por cada interacção, e em cada uma são geralmente apresentadas ao agente de decisão três estratégias: uma que foi identificada, e duas que transitam da interacção anterior. Se o agente de decisão considerar que nenhuma das três estratégias é satisfatória, é-lhe pedido que escolha a zona em que a pesquisa deve prosseguir: esta zona será delimitada pelas duas estratégias que preferir, das três que lhe são apresentadas. Existem algumas situações em que a nova estratégia gerada pode não ser interessante, e, nesse caso, o agente de decisão apenas é confrontado com as duas estratégias provenientes das interacções anteriores.

A ideia base deste procedimento interactivo é, assim, começar com uma zona que abrange todas as estratégias não dominadas, e ir reduzindo essa zona até se encontrar uma estratégia que satisfaça o agente de decisão. Tal permite também dar-lhe uma ideia das combinações

(tempo, custo) que se podem obter. A zona de pesquisa é sempre delimitada por duas estratégias, e o procedimento não prevê a hipótese de sair para fora da zona de pesquisa para aí procurar outras estratégias. Uma vez que a zona de pesquisa é definida pelas escolhas do agente de decisão, a saída desta só poderia ocorrer se ele se arrependesse de uma ou várias das decisões anteriores. Se tal for o caso, e ele pretender alterar decisões anteriores, pode recomeçar-se o procedimento, para que a pesquisa reflecta convenientemente as novas convicções do agente de decisão. O procedimento prevê que, uma vez definida uma zona de pesquisa, e no caso de o agente de decisão considerar que dentro dessa zona não existem estratégias interessantes (até pode acontecer que a zona seja tão pequena que nem sequer contenha estratégias não dominadas), este possa reconsiderar as suas opiniões acerca das estratégias que delimitam essa zona, e considerar que afinal uma delas é satisfatória.

Numa tal abordagem é necessário utilizar uma regra para escolher a próxima estratégia a ser identificada. Nesta abordagem, escolheu-se identificar a estratégia que minimiza o tempo sujeita a um custo máximo. Para identificar uma tal estratégia de forma mais eficiente, foi desenvolvida uma técnica específica que utiliza algumas ideias da técnica *branch-and-bound* (ver, por exemplo, [96], capítulo 12), e que se apresenta na secção 8.4. Esta técnica é baseada em propriedades matemáticas que o modelo exhibe quando utilizado com o tempo médio, as quais foram apresentadas na secção 6.3.

Esta técnica foi concebida para ser aplicada por um computador, pretendendo-se que seja transparente para o agente de decisão; este nem sequer precisa de saber que a técnica existe, só tem que escolher entre as estratégias que lhe vão sendo apresentadas. Assim, a exploração do conjunto de estratégias não dominadas é conduzida como uma pesquisa através dos diferentes valores do custo máximo. Note-se também que a técnica para a identificação de uma estratégia, com pequenas modificações, pode ser utilizada para identificar a que minimiza o custo sujeita a um tempo máximo, e, assim, o procedimento interactivo pode ser usado para conduzir a exploração do conjunto de estratégias como uma pesquisa através dos diferentes valores do tempo máximo.

Quando as diferenças entre tempos são pequenas, é provável que o agente de decisão as considere negligenciáveis. Por exemplo, se os tempos médios para completar o projecto variam entre os 4 e os 6 meses, é possível que o agente de decisão seja indiferente a diferenças de menos do que um dia nesse tempo médio. Por forma a acelerar a identificação de cada estratégia, introduziu-se um parâmetro de erro máximo admissível $-\varepsilon$. Este parâmetro define o valor máximo da diferença entre dois tempos, por forma a que esta diferença seja considerada negligenciável pelo agente de decisão. Em cada interacção vai-se, então, procurar uma estratégia que obedeça à restrição de custo, e cujo tempo não exceda o da estratégia óptima¹¹⁶ em mais do que ε (se o agente de decisão definir $\varepsilon = 0$, então a técnica

¹¹⁶Por estratégia óptima entende-se a estratégia que minimiza o tempo, tendo em conta o custo máximo.

irá procurar esta estratégia óptima). Este parâmetro ε pode ser visto como um compromisso entre a precisão do resultado e a velocidade de obtenção de cada estratégia. Quanto maior for o valor de ε mais rápida será a identificação de cada estratégia, e mais longe poderá esta estar da estratégia óptima para o custo máximo considerado. O agente de decisão pode, assim, escolher valores maiores de ε para explorações amplas do conjunto de estratégias não dominadas, e valores mais pequenos para a escolha mais detalhada de uma estratégia.

8.3 Um procedimento interactivo para a escolha de uma estratégia

Vai agora detalhar-se um pouco mais o procedimento interactivo; todavia, reserva-se uma descrição algorítmica, e mais rigorosa, para a subsecção 8.5.1.

Utiliza-se $C(s)$ e $T(s)$ para identificar, respectivamente, o custo e o tempo de uma estratégia s . C^M é a forma genérica de referir o custo máximo, $]c_l, c_u[$ é o intervalo de valores que faz sentido explorar para esse custo máximo, tendo em conta as interacções anteriores, e c_r é o valor desse custo máximo utilizado para gerar uma nova estratégia na presente interacção; s_l e s_u são as estratégias que transitam de uma interacção para outra, e s_r é a nova estratégia gerada na presente interacção.

O primeiro passo do procedimento consiste em obter, do agente de decisão, o valor do parâmetro ε . Quanto maior for o valor de ε mais rápida será a identificação de cada estratégia, mas menos precisos serão os resultados obtidos. Assim, é necessário que o agente de decisão entenda que este parâmetro representa um compromisso entre a precisão do resultado e a rapidez de obtenção de cada estratégia. Podem ser utilizados valores maiores de ε para explorações amplas do conjunto de estratégias não dominadas, e valores mais pequenos para a escolha mais detalhada de uma estratégia. Recomenda-se que sejam efectuadas algumas aplicações exploratórias da técnica, por forma a ambientar o agente de decisão com a influência deste parâmetro na velocidade de obtenção dos resultados e na precisão destes, ajudando-o, assim, a ajustar o valor de ε ao nível de detalhe pretendido.

Depois de definido ε , procede-se à identificação das duas estratégias não dominadas iniciais: a que minimiza o tempo e a que minimiza o custo. A obtenção destas estratégias pode parecer difícil, mas na verdade não é assim. A secção 7.7 apresenta uma forma rápida de as obter, utilizando o algoritmo descrito no capítulo 7.

Seja s_l a estratégia que minimiza o custo, e seja s_u a que minimiza o tempo; defina-se $c_l = C(s_l)$ e $c_u = C(s_u)$. Se $c_l = c_u$, então o modelo só consegue gerar estratégias não dominadas com custo c_l e tempo $T(s_u)$, e o procedimento termina aqui. Senão, as estratégias s_l e s_u são apresentadas ao agente de decisão, e pergunta-se-lhe se alguma das estratégias

é satisfatória, ou se a pesquisa deve prosseguir. Se for escolhida a opção de prosseguir a pesquisa, pergunta-se ao agente de decisão se deseja analisar algum valor particular de C^M . Se for este o caso, c_r é definido como o valor de C^M que o agente de decisão pretende analisar (obriga-se a que c_r obedeça a $c_l < c_r < c_u$). Senão, faz-se $c_r = \frac{c_l + c_u}{2}$.

É, então, calculada uma nova estratégia s_r , que é a que minimiza o tempo sujeita a $C(s_r) \leq c_r$, ou uma estratégia que obedeça a esta condição e cujo tempo não exceda o tempo desta em mais do que ε . Para identificar uma tal estratégia, utiliza-se a técnica descrita na secção 8.4. Devido à existência do parâmetro de erro máximo admissível (ε), várias situações podem ocorrer, embora algumas ocorram muito raramente. Vão agora analisar-se estas situações. Para simplificar a exposição vai ser utilizado, na análise que se segue, um conceito mais amplo de dominância; vai considerar-se que uma estratégia domina outra se não lhe for pior em nenhum critério¹¹⁷.

Se s_r domina ambas as estratégias s_l e s_u , o agente de decisão é informado de que as suas decisões conduziram à estratégia s_r como resultado final. No entanto, ele pode tentar reduzir o valor do parâmetro de erro ε por forma a obter uma estratégia diferente, uma vez que este parâmetro está a influenciar os resultados obtidos. Tal é patente no facto de as duas estratégias, s_l e s_u , serem dominadas, o que só pode ser explicado pela influência do parâmetro de erro nos resultados¹¹⁸.

Se s_r domina apenas uma das estratégias s_l e s_u , o agente de decisão é confrontado com duas estratégias, s_r e a estratégia (s_l ou s_u) não dominada por s_r . Pergunta-se-lhe se alguma destas estratégias é satisfatória ou se a pesquisa deve prosseguir. Se o agente de decisão escolher prosseguir a pesquisa, deve fazer-se $c_l = c_r$ e $s_l = s_r$, no caso de s_r dominar s_l , ou fazer-se $c_u = C(s_r)$ e $s_u = s_r$, no caso de s_r dominar s_u . Pode parecer estranho que, no caso de alteração do limite inferior, se faça $c_l = c_r$, e, no caso de alteração do limite superior, se faça $c_u = C(s_r)$. Este último caso é o mais claro, uma vez que a estratégia s_r passa a constituir o limite superior da zona de pesquisa, e, assim, faz sentido que o custo desta estratégia passe a constituir o limite superior dos valores que é legítimo testar como custo máximo. Pode não ser tão claro porque é que, no primeiro caso, o limite inferior dos valores que faz sentido testar como custo máximo é c_r , e não $C(s_r)$. Para ver a razão para tal, considere-se a escolha, para custo máximo, de um valor no intervalo $[C(s_r), c_r]$. Uma vez que, quando se utilizou como custo máximo c_r , se obteve a estratégia s_r , então, a menos

¹¹⁷O que significa que se considera que uma estratégia domina outra quando as duas têm os mesmos valores em ambos os critérios.

¹¹⁸Atendendo ao conceito de dominância que está a ser utilizado, é possível que s_r domine uma das estratégias anteriores apenas pelo facto de ser igual a essa estratégia, e isso poderá ocorrer mesmo se $\varepsilon = 0$. No entanto, como este procedimento garante que as estratégias que transitam da interacção anterior são diferentes, s_r só pode dominar simultaneamente as duas se dominar pelo menos uma segundo o conceito geralmente usado para dominância. Tal só pode acontecer se essa estratégia não minimizar o tempo para nenhum limite de custo, o que apenas ocorrerá quando se utiliza a técnica para identificação de uma estratégia com $\varepsilon > 0$.

de falta de precisão causada pela utilização de $\varepsilon > 0$, será novamente obtida a estratégia s_r . Esse é o motivo pelo qual se utiliza, neste caso, c_r como limite inferior do intervalo.

Já foram, portanto, considerados os casos em que a nova estratégia, s_r , domina uma ou as duas estratégias provenientes de interacções anteriores. Vão agora considerar-se os casos em que tal não acontece.

Se $T(s_r) \geq T(s_l)$, então o novo tempo obtido não é melhor que o tempo da estratégia com pior tempo que transita das interacções anteriores. Tal significa que, ou a nova estratégia é dominada, ou está fora da zona actualmente a ser pesquisada. Neste caso, o agente de decisão é informado que o custo máximo considerado não permitiu uma melhoria do tempo relativamente ao da estratégia s_l . É-lhe pedido que reconsidere se s_l e s_u continuam a não ser consideradas satisfatórias, e, em caso de uma resposta negativa, deve fazer-se $c_l = c_r$ e prosseguir-se a pesquisa.

Se nenhuma das situações acima ocorrer (o que constitui o caso mais comum), então $T(s_l) > T(s_r) > T(s_u)$ e $C(s_l) < C(s_r) < C(s_u)$. Neste caso, a estratégia s_r é apresentada ao agente de decisão, e pergunta-se a este se a estratégia s_r é satisfatória, ou se reconsiderou e tem agora s_l ou s_u por satisfatórias. Se considerar que nenhuma das estratégias é satisfatória, então ser-lhe-á pedido que defina a nova zona em que deve ser feita a pesquisa de estratégias. Concretamente, deve ser-lhe perguntado se prefere prosseguir a pesquisa com valores de C^M pertencentes a $]c_l, C(s_r)[$, ou com valores de C^M pertencentes a $]c_r, c_u[$ (como se argumentou atrás, à parte falta de precisão causada pela utilização de $\varepsilon > 0$, todos os valores de $[C(s_r), c_r]$ devem conduzir à estratégia s_r , pelo que se pode excluir este intervalo). Se o agente de decisão escolher a primeira alternativa, então deve fazer-se $c_u = C(s_r)$ e $s_u = s_r$, e se escolher a segunda deve fazer-se $c_l = c_r$ e $s_l = s_r$.

Se o procedimento não tiver terminado até atingir este ponto, então deve iniciar-se uma nova interacção. Retorna-se ao ponto em que é perguntado ao agente de decisão se pretende escolher um valor particular de C^M , e prossegue-se a partir daí.

Na subsecção 8.5.1 apresenta-se um algoritmo que descreve mais estruturadamente este procedimento interactivo. Na secção seguinte vai descrever-se a técnica para identificar a estratégia que minimiza o tempo sujeita a um custo máximo.

8.4 Uma técnica para a identificação de uma estratégia

Um elemento muito importante do procedimento interactivo para a escolha de uma estratégia é a técnica para a identificação de uma nova estratégia. Utilizando as propriedades matemáticas da secção 6.3 (mais concretamente, o corolário 6G.1), foi desenvolvida uma técnica que utiliza algumas ideias da técnica *branch-and-bound* (ver, por exemplo, [96],

capítulo 12), e que permite a geração das estratégias a utilizar pelo procedimento interactivo. Esta técnica permite a identificação da estratégia que minimiza o tempo sujeita a um custo máximo C^M (T^* será o tempo desta estratégia). Esta técnica pode também ser utilizada para identificar a estratégia que minimiza o custo sujeita a um tempo máximo, bastando, para tal, efectuar as correspondentes alterações no problema 6a (lembre-se que estas alterações foram descritas no comentário ao corolário 6G.1).

Por forma a tornar mais rápida a identificação de cada estratégia, introduziu-se um parâmetro de erro máximo admissível ε . Este parâmetro permite que a técnica termine a identificação da estratégia logo que exista a certeza de que já se identificou uma que respeita o custo máximo e cujo tempo (T) não excede o tempo da estratégia óptima (isto é, da que minimiza o tempo sujeita ao custo máximo) em mais do que ε . Se se fizer $\varepsilon = 0$, então vai obter-se sempre a estratégia óptima para o custo máximo considerado.

8.4.1 A meta-árvore

Nesta técnica, vai ser utilizado o conceito de *meta-árvore*. Uma meta-árvore é uma árvore que contém todas as possíveis estratégias, mas estruturada de uma forma particular. Cada caminho que vai da raiz até uma folha da meta-árvore corresponde a uma estratégia, e todas as possíveis estratégias estão representadas desta forma na meta-árvore. Assim, a meta-árvore permite transformar uma estrutura em árvore num caminho linear. Para conseguir uma tal transformação, é necessário definir uma ordenação dos nodos de uma árvore de estratégia. Vão dispor-se estes nodos por ordem decrescente da contribuição isolada do ramo da árvore de estratégia que se inicia no nodo. No caso de existir empate na contribuição isolada de vários ramos, o critério a utilizar para o desempate é irrelevante.

Depois de efectuada a ordenação dos nodos das árvores de estratégia, a sua representação na meta-árvore faz corresponder a cada um desses nodos um arco da meta-árvore – assim, cada arco da meta-árvore corresponde à utilização de um processo. Pode constatar-se que, se existirem duas árvores de estratégia cujo “início” seja idêntico (i.e, a raiz e os nodos próximos sejam idênticos), então, ao efectuar a ordenação dos nodos, obtêm-se inicialmente duas sequências idênticas de processos até que, num dado ponto, se dá a primeira diferença entre as duas sequências. Em termos da meta-árvore isto significa que as duas estratégias são, inicialmente, representadas por um caminho comum, e que os seus caminhos se separam no nodo imediatamente anterior aos arcos correspondentes à primeira diferença de processos. Portanto, cada arco da meta-árvore pode, assim, corresponder a um nodo comum a várias árvores de estratégia, se os nodos anteriores (de acordo com a ordenação definida) dessas árvores também forem comuns. É ainda de notar que cada nodo da meta-árvore vai corresponder a uma escolha de processo, podendo, por isso, ser visto como um nodo de decisão.

Cada caminho que liga a raiz da meta-árvore a um arco que não seja folha vai corresponder a uma estratégia incompleta. A figura 8.1 mostra esta correspondência entre um caminho da meta-árvore e uma árvore de estratégia incompleta.

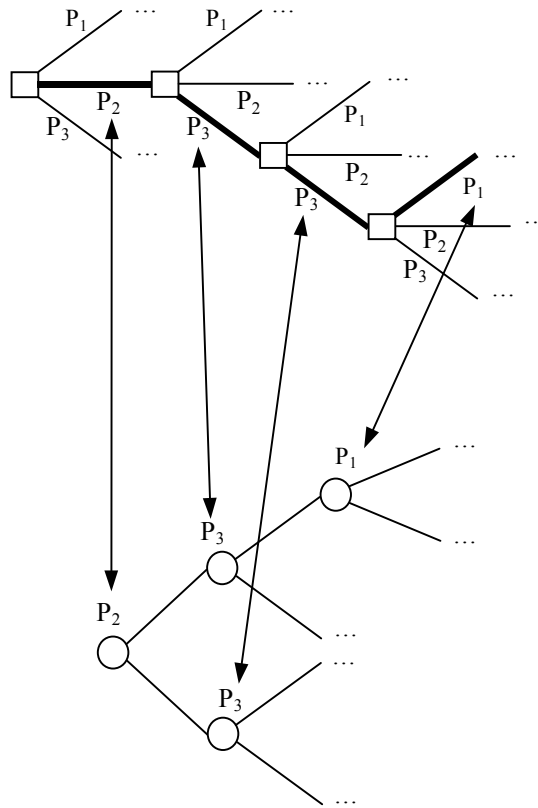


Figura 8.1: Correspondência entre um caminho da meta-árvore e uma árvore de estratégia incompleta.

Uma pesquisa na meta-árvore vai corresponder a uma pesquisa entre todas as possíveis árvores de estratégia. Quando se considera um caminho da raiz da meta-árvore até um arco que não seja folha, está a reduzir-se o universo de todas as árvores de estratégia àquelas que têm um determinado conjunto comum de nodos no seu início. Quando se atinge uma folha, então obtém-se uma estratégia completa, e é possível, a partir do caminho da raiz à folha, identificar essa estratégia. Note-se que, para cada arco da meta-árvore, existe apenas um caminho da raiz a esse arco; assim, vai também referir-se a árvore de estratégia correspondente a esse arco, que é a árvore de estratégia correspondente ao caminho da raiz até ao arco.

8.4.2 Inicializações e conceitos relevantes

A técnica para a identificação de cada estratégia vai consistir numa pesquisa em profundidade na meta-árvore, por forma a encontrar a estratégia pretendida. Para orientar essa pesquisa vão ser utilizados os limites inferiores do critério tempo, que são estabelecidos pelo corolário 6G.1. Estes limites inferiores vão servir para identificar os caminhos mais promissores da meta-árvore, e ainda para eliminar os caminhos que não possam conduzir a estratégias que melhorem em mais do que ε o melhor tempo já obtido. Os cálculos são terminados quando todas as alternativas ainda não exploradas tiverem sido eliminadas, por não poderem melhorar o melhor tempo já obtido em mais que ε .

Para expor o funcionamento da técnica, vão ser utilizados os conceitos de *alternativa explorada*, *alternativa potencial* e *alternativa eliminada*. Em cada nodo da meta-árvore vai existir uma escolha entre n arcos, ou alternativas. Uma alternativa que se escolha prosseguir, ou explorar, torna-se uma *alternativa explorada*. Uma alternativa que de certeza não possa respeitar o limite de custo, ou cujo limite inferior do tempo indique que esta não pode melhorar o melhor tempo até agora obtido em mais do que ε , torna-se uma *alternativa eliminada*. Uma *alternativa potencial* é uma que ainda não foi explorada e que pode melhorar o tempo daquela que é até agora a melhor estratégia em mais do que ε .

Começa-se por definir, para cada processo $P_i, i = 1, \dots, n$, e para todos os valores de x pertencentes ao intervalo $]0, 1]$, a função $cmin_i(x)$, que corresponde ao menor custo possível de uma subestratégia que execute uma fracção x do projecto, começando por utilizar o processo P_i . Embora o cálculo destas funções possa parecer uma tarefa complicada, não é assim; na secção 7.7 foi exposta a forma como se pode utilizar o algoritmo apresentado no capítulo 7 para determinar estas funções. Depois de se calcularem estas funções, é possível efectuar um teste para verificar se o limite de custo definido pode ser respeitado; se $\min_{i=1, \dots, n} \{cmin_i(1) + c_{0,i}\} > C^M$, então é impossível conseguir um custo igual ou inferior a C^M , podendo, assim, terminar-se a utilização da técnica.

Depois de estas funções estarem calculadas, vão definir-se os valores iniciais da melhor estratégia, s^* , e do melhor tempo (ou tempo da melhor estratégia), T^* . Se se estiver a utilizar pela primeira vez esta técnica, e se se estiver a utilizá-la fora do âmbito do procedimento interactivo da secção 8.3, então pode não existir nenhuma melhor estratégia inicial, devendo s^* ser uma estratégia vazia e devendo fazer-se $T^* = +\infty$. No entanto, se se estiver a utilizar a técnica no âmbito do procedimento interactivo, existem de certeza estratégias já obtidas que respeitam o custo máximo, devendo a melhor delas ser a estratégia s^* inicial, e o seu tempo ser o valor inicial de T^* . Mesmo que se esteja a fazer a primeira utilização da técnica dentro do procedimento interactivo, já existe uma estratégia que respeita o limite de custo; é a que minimiza o custo para o modelo, e que é calculada no início do procedimento interactivo (a estratégia s_l inicial). Nas utilizações seguintes da técnica, a aplicação do

procedimento interactivo garante que s_l seja, em cada momento, a melhor estratégia que respeita o custo máximo C^M . Assim, pode definir-se, sempre que se utilize esta técnica no âmbito do procedimento interactivo, que $s^* = s_l$ e $T^* = T(s_l)$.

8.4.3 Cálculo de limites inferiores para os critérios

Deve agora criar-se a raiz da meta-árvore, e os n arcos que saem desse nodo. Cada arco representa uma alternativa A , e para essa alternativa devem calcular-se os valores $C^{LB}(A)$ e $T^{LB}(A)$, cujo significado se apresenta a seguir.

$T^{LB}(A)$ representa o limite inferior para o tempo total de uma estratégia obtida prosseguindo a partir da alternativa A . Este valor é calculado tendo em conta a restrição de custo, $C(s) \leq C^M$. Assim, o seu cálculo deve ser feito através da resolução do problema 6a para a árvore de estratégia incompleta correspondente à alternativa.

$C^{LB}(A)$ é o menor valor possível para o custo de uma estratégia completa que contenha a estratégia incompleta correspondente à alternativa A ¹¹⁹. O cálculo de $C^{LB}(A)$ baseia-se na utilização das funções $cm\min_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, previamente calculadas. Depois de calculados os valores de $C^{LB}(A)$ para as diferentes alternativas A , podem eliminar-se as alternativas A_E com $C^{LB}(A_E) > C^M$, uma vez que as estratégias definidas a partir destas não podem obedecer ao limite de custo (independentemente da forma como for definido o resto da estratégia). Todas as restantes alternativas são alternativas potenciais.

O cálculo de $C^{LB}(A)$ merece uma exposição mais detalhada. A alternativa que se está a considerar corresponde à utilização de um dado processo P_j num nodo da árvore de estratégia. Seja P_i o processo utilizado no nodo pai desse nodo, ou seja, $i = 0$ se a alternativa corresponde à primeira escolha de processo. O novo nodo é a raiz de um ramo r cuja probabilidade de ser atingido se designa por $p(r)$, e cuja contribuição isolada se designa por $x(r)$. O menor custo possível para este ramo é, assim, $cm\min_j(x(r))$, e a contribuição deste ramo para o limite inferior do custo é de $p(r) \cdot [c_{i,j}^- + cm\min_j(x(r))]$. Mas existem ainda algumas folhas da árvore correspondente à estratégia incompleta que não serão folhas de uma árvore de estratégia completa, ou seja, onde é ainda necessário colocar ramos para completar a estratégia. Cada uma dessas folhas é um arco de um nodo correspondente à utilização de um processo, que se designa por $P_{i'}$, designando-se por $P_{j'}$ o processo correspondente ao pai desse nodo. A essa folha é necessário acrescentar um ramo r' , com probabilidade de ser atingido $p(r')$, e contribuição isolada $x(r')$. Esse ramo tem uma contribuição para o limite inferior do custo que é de $p(r') \cdot \min_{j'=1, \dots, n} [c_{i',j'}^- + cm\min_{j'}(x(r'))]$. Assim, pode calcular-se $C^{LB}(A)$ adicionando, ao custo da estratégia incompleta, a contribuição para o custo do ramo r que se inicia com o novo nodo ($p(r) \cdot [c_{i,j}^- + cm\min_j(x(r))]$) e as contribuições para o

¹¹⁹ Como foi indicado, a estratégia correspondente a uma alternativa será a estratégia correspondente ao caminho que vai da raiz da meta-árvore até ao arco que define essa alternativa.

custo dos ramos r' ainda não definidos ($p(r') \cdot \min_{j'=1, \dots, n} [c_{i', j'}^- + cmin_{j'}(x(r'))]$). Se existirem muitos ramos por concluir, este método pode ser muito demorado. No entanto, pode fazer-se o cálculo de uma forma mais simples; para tal utiliza-se o limite inferior de custo, $C^{LB}(P(A))$, calculado para a alternativa $P(A)$ correspondente ao arco da meta-árvore que antecede a alternativa A . A diferença entre $C^{LB}(P(A))$ e $C^{LB}(A)$ deve-se apenas ao facto de uma escolha de processo, que ainda não estava feita quando se calculou $C^{LB}(P(A))$, já estar feita quando se calcula $C^{LB}(A)$. Assim, basta adicionar a $C^{LB}(P(A))$ o impacto dessa escolha de processo. Esse impacto é igual à probabilidade do ramo multiplicada pela diferença entre o menor custo possível se o ramo começar por utilizar P_j , e o menor custo possível se puder começar por utilizar qualquer processo. Desta forma,

$$C^{LB}(A) = C^{LB}(P(A)) + p(r) \cdot \left[\left[c_{i, j}^- + cmin_j(x(r)) \right] - \min_{j'=1, \dots, n} \left[c_{i, j'}^- + cmin_{j'}(x(r)) \right] \right] \quad (8.1)$$

Se esta não for a primeira utilização que se faz da técnica para o modelo que se está a considerar, então já foram construídas partes da meta-árvore (que incluem de certeza a raiz desta), bem como as funções $cmin_i(x)$. As funções $cmin_i(x)$ podem ser utilizadas sem serem recalculadas, pois mantêm-se inalteradas. Da mesma forma, sempre que a técnica conduza a partes da meta-árvore construídas em utilizações anteriores, elas podem ser aproveitadas sem terem que ser reconstruídas. Das partes já construídas da meta-árvore podem utilizar-se os valores de $C^{LB}(A)$, que se mantêm inalterados, mas o mesmo não se passa com os valores de $T^{LB}(A)$. Com efeito, os valores de $T^{LB}(A)$ dependem do valor do limite de custo, C^M , considerado, sendo, portanto, alterados em cada utilização da técnica. No entanto, todos os restantes parâmetros utilizados para calcular $T^{LB}(A)$ através da resolução do problema 6a se mantêm inalterados em diferentes utilizações da técnica, não necessitando de ser recalculados; basta voltar a resolver este problema utilizando o novo custo máximo e os valores anteriores dos restantes parâmetros.

8.4.4 A pesquisa da meta-árvore

Neste ponto, iniciam-se as iterações com vista a obter uma estratégia. Começa por eliminar-se todas as alternativas potenciais A_E com $T^{LB}(A_E) \geq T^* - \varepsilon$, uma vez que estas não podem, de certeza, melhorar o tempo da estratégia s^* em mais que ε . Se não sobraem alternativas potenciais, isto significa que a estratégia s^* é uma solução aceitável para o limite de custo C^M que se está a considerar, podendo, assim, terminarem-se os cálculos.

Faz-se agora uma pesquisa em profundidade da meta-árvore. Escolhe-se a alternativa A_X com menor $T^{LB}(A_X)$, e procura-se definir um caminho desse arco para uma folha da meta-árvore. Para cada nodo nesse caminho, existem n alternativas (n arcos). Para

cada alternativa A , devem calcular-se $C^{LB}(A)$ e $T^{LB}(A)$. O cálculo de $C^{LB}(A)$ pode ser feito através da utilização das funções $emin_i(x)$, conforme o que se expôs atrás; o cálculo de $T^{LB}(A)$ pode consistir na resolução do problema 6a para a árvore de estratégia incompleta correspondente à alternativa. Eliminam-se depois todas as alternativas A_E com $C^{LB}(A_E) > C^M$, bem como todas as alternativas com $T^{LB}(A_E) \geq T^* - \varepsilon$, uma vez que estas não podem conduzir a estratégias s que melhorem em mais do que ε o tempo de s^* e simultaneamente obedeçam à restrição de custo, $C(s) \leq C^M$. De entre as alternativas não eliminadas, prossegue-se a alternativa A_X com menor valor de $T^{LB}(A_X)$, que passa, assim, a ser uma alternativa explorada, e mantêm-se as restantes como alternativas potenciais. Um exemplo da selecção de uma alternativa num nodo da meta-árvore é mostrado na figura 8.2.

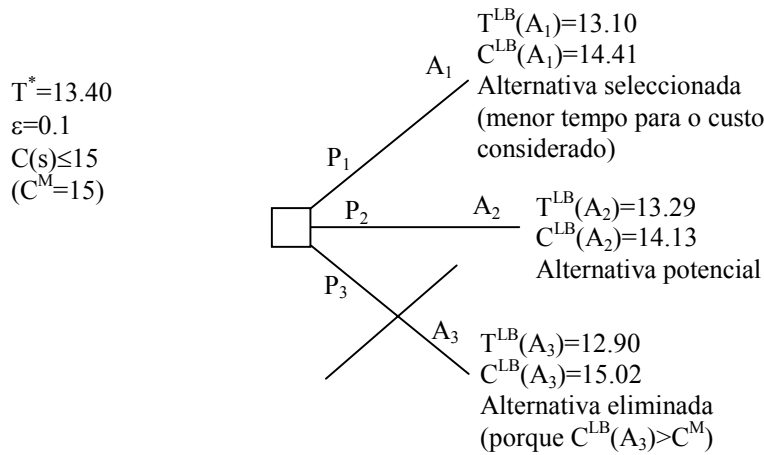


Figura 8.2: Exemplo de selecção de uma alternativa num nodo da meta-árvore. Assume-se uma restrição $C(s) \leq 15$.

Se, num nodo da meta-árvore, todas as alternativas forem eliminadas, então a iteração actual é terminada e começa-se uma nova iteração. Se tal não acontecer, apenas se termina a iteração actual quando se atingir uma folha da meta-árvore, isto é, quando se definir uma estratégia completa. Quando se tiver atingido uma folha A_F , esta apenas deve ser eliminada se $C^0(A_F) > C^M$ ¹²⁰, ou se $T^0(A_F) \geq T^*$ (e não se $T^{LB}(A_F) \geq T^* - \varepsilon$). A lógica desta diferença de procedimento entre as folhas e os restantes arcos é que, ao atingir uma folha, já se tem uma estratégia completa, sendo, assim, de aproveitar esta se ela melhorar o tempo de s^* , mesmo que essa melhoria seja inferior a ε . Se for seleccionada uma folha, então obtém-se uma estratégia completa s com $T(s) < T^*$, que é a melhor estratégia já obtida. Deve, neste caso, s^* passar a ser esta estratégia, e T^* passar a ser o seu tempo.

¹²⁰No caso de uma alternativa A_F correspondente a uma folha, tem-se que $C^{LB}(A_F) = C^0(A_F) = C(s)$ e $T^{LB}(A_F) = T^0(A_F) = T(s)$, em que s é a estratégia completa correspondente à alternativa.

Sempre que for atingida uma folha da meta-árvore, ou que todas as alternativas num nodo sejam eliminadas, deve passar-se a uma nova iteração. Começa por se verificar se ficaram pendentes, da última iteração, alternativas potenciais que sejam folhas. Se assim for, e se existir alguma ou algumas cujo tempo das respectivas estratégias s seja inferior a T^* , faz-se s^* igual à estratégia s com menor tempo e $T^* = T(s^*)$. Depois de feita esta verificação, e eventualmente a alteração de s^* e T^* , inicia-se a nova iteração, com a eliminação das alternativas potenciais que não podem melhorar T^* em mais que ε , e com a tentativa de construir um caminho da melhor alternativa potencial para uma folha que melhore o valor de T^* .

Um algoritmo correspondente a esta técnica é apresentado na subsecção 8.5.2, juntamente com algumas ideias para melhorar o desempenho da técnica.

8.5 Algoritmos

8.5.1 Algoritmo para o procedimento de escolha de uma estratégia

Esta subsecção apresenta um algoritmo que define, de forma estruturada, o procedimento interactivo apresentado na secção 8.3. Mantém-se, na definição deste algoritmo, a notação utilizada nessa secção. Vão, portanto, ser utilizados $C(s)$ e $T(s)$ para identificar, respectivamente, o custo e o tempo de uma estratégia s . C^M é a forma genérica de referir o custo máximo, c_l e c_u são os limites inferior e superior do intervalo aberto de valores que faz sentido explorar como custo máximo, tendo em conta as interacções anteriores, e c_r é o valor desse custo máximo utilizado para gerar uma nova estratégia na presente interacção; s_l e s_u são as estratégias que transitam de uma interacção para outra, e representam as estratégias limite, entre os tempos e custos das quais se devem situar o tempo e o custo da nova estratégia gerada na presente interacção; esta última é designada por s_r . ε é o parâmetro de erro máximo, que define qual o valor máximo da diferença entre dois tempos que é considerada negligenciável.

Mantém-se ainda o conceito mais amplo de dominância definido na secção 8.3, isto é, considera-se que uma estratégia domina outra se não lhe for pior em nenhum critério.

O algoritmo é então como se indica a seguir.

1. Atribuir um valor a ε .
2. Calcular a estratégia não dominada que minimiza o custo (s_l) e a estratégia não dominada que minimiza o tempo (s_u). Recomenda-se que o cálculo destas estratégias seja feito da forma sugerida na secção 7.7. Fazer $c_l = C(s_l)$ e $c_u = C(s_u)$. Se $c_u = c_l$ então parar, pois o modelo só consegue gerar estratégias não dominadas com custo c_l e tempo $T(s_l)$.

3. Perguntar ao agente de decisão se alguma das estratégias s_l ou s_u é satisfatória e, se a resposta for positiva, parar.
4. Mostrar ao agente de decisão que se estão a considerar valores de C^M no intervalo $]c_l, c_u[$. Perguntar-lhe se pretende considerar um valor específico de C^M neste intervalo. Se a resposta for positiva, fazer c_r tomar o valor pretendido pelo agente de decisão (obrigando a que $c_l < c_r < c_u$). Senão, fazer $c_r = \frac{c_l + c_u}{2}$.
5. Usar a técnica apresentada na secção 8.4, e cujo algoritmo vai ser apresentado em 8.5.2, para calcular uma estratégia s_r cujo custo obedeça a $C(s_r) \leq c_r$ e cujo tempo não ultrapasse em mais do que ε o tempo da estratégia s^- que minimiza o tempo sujeita a $C(s^-) \leq c_r$.
6. Se s_r dominar quer s_l quer s_u , informar o agente de decisão que as suas decisões conduziram à estratégia s_r , e parar.
7. Se s_r dominar apenas s_l , apresentar s_r e s_u ao agente de decisão, e inquirir se alguma destas estratégias é satisfatória, ou se a pesquisa deve prosseguir. Se o agente de decisão considerar que uma das estratégias é satisfatória, então parar; senão fazer $c_l = c_r$ e $s_l = s_r$, e ir para o passo 4.
8. Se s_r dominar apenas s_u , apresentar s_r e s_l ao agente de decisão, e perguntar se alguma destas estratégias é satisfatória ou se a pesquisa deve prosseguir. Se o agente de decisão considerar que uma das estratégias é satisfatória, então parar; senão fazer $c_u = C(s_r)$ e $s_u = s_r$, e ir para o passo 4.
9. Se $T(s_r) \geq T(s_l)$, informar o agente de decisão que o novo limite de custo não permitiu uma melhoria do tempo relativamente à estratégia s_l (que é, de entre as estratégias em consideração, s_l e s_u , a que tem pior tempo). Pedir-lhe para reconsiderar se s_l e s_u continuam a não ser consideradas satisfatórias. Se o agente de decisão considerar alguma das estratégias satisfatória, então parar; senão fazer $c_l = c_r$ e ir para o passo 4.
10. Apresentar s_r ao agente de decisão e perguntar-lhe se considera esta estratégia satisfatória, se considera agora s_l ou s_u satisfatórias, ou se deseja prosseguir a pesquisa. No caso de alguma estratégia ser considerada satisfatória, parar. Caso contrário, perguntar ao agente de decisão se prefere prosseguir com valores de C^M pertencentes a $]c_l, C(s_r)[$, ou com valores de C^M pertencentes a $]c_r, c_u[$. Se escolher a primeira alternativa, fazer $c_u = C(s_r)$ e $s_u = s_r$; senão fazer $c_l = c_r$ e $s_l = s_r$. Ir para o passo 4.

8.5.2 Algoritmo para a técnica de identificação de uma estratégia

Nesta subsecção apresenta-se um algoritmo que define, de forma estruturada, a técnica apresentada na secção 8.4. Esta técnica recorre às propriedades matemáticas apresentadas na secção 6.3, nomeadamente ao corolário 6G.1. Por esse motivo, mantém-se a notação aí utilizada, definindo-se ainda alguma notação nova, que é necessária para o algoritmo.

Seja s^- a estratégia que minimiza o tempo sujeita à restrição $C(s^-) \leq C^M$. Considere-se que se pretende encontrar uma estratégia s' cujo custo ($C(s')$) obedeça à restrição $C(s') \leq C^M$, e cujo tempo ($T(s')$) não exceda em mais do que ε o tempo $T(s^-)$ da estratégia s^- . Cada arco da meta-árvore representa uma alternativa A , e o caminho da raiz até esse arco representa uma estratégia incompleta. Tendo em conta o custo, tempo e configuração dessa estratégia incompleta, é possível calcular limites inferiores para os valores dos critérios de uma estratégia completa que a contenha; o limite inferior para o custo de uma tal estratégia é designado por $C^{LB}(A)$, e o limite inferior do tempo de uma estratégia que obedeça à restrição de custo é designado por $T^{LB}(A)$. O cálculo dos valores de $C^{LB}(A)$ vai recorrer às funções $cmin_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, $x \in]0, 1]$, que representam o menor custo possível de uma subestratégia que execute uma fracção x do projecto, se se começar por utilizar o processo P_i .

A melhor estratégia completa já obtida, isto é, a estratégia com menor tempo das que obedecem à restrição de custo, é designada por s^* , e o seu tempo é designado por T^* . Partindo desta notação, o algoritmo de aplicação da técnica pode ser definido da forma que vai seguir-se.

1. Para $i = 1, \dots, n$ e para $x \in]0, 1]$, calcular $cmin_i(x)$ (ver, para isso, a secção 7.7).
2. Se $\min_{i=1, \dots, n} \{cmin_i(1) + c_{0,i}\} > C^M$ então parar, pois é impossível encontrar uma estratégia s que obedeça à restrição $C(s) \leq C^M$.
3. Inicializar a actual melhor estratégia, s^* , e o seu tempo, T^* . Na ausência de qualquer informação sobre uma estratégia que obedeça a $C(s) \leq C^M$, fazer s^* igual a uma estratégia vazia e $T^* = +\infty$. É de prever que, ao usar esta técnica, já se conheçam algumas estratégias que obedeçam ao limite de custo, devendo s^* ser a estratégia com menor tempo de entre estas, e T^* ser o seu tempo. Se esta técnica estiver a ser utilizada no âmbito do procedimento interactivo, pode fazer-se $s^* = s_l$ e $T^* = T(s_l)$.
4. Criar a raiz da meta-árvore e as alternativas (arcos) correspondentes. Para cada alternativa A , utilizar as funções $cmin_i(x)$ para calcular $C^{LB}(A)$, e eliminar a alternativa se $C^{LB}(A) > C^M$. Para cada alternativa não eliminada, fazer $T^{LB}(A)$ tomar o valor da solução óptima do problema 6a.
5. Se uma ou mais alternativas potenciais corresponderem a folhas da meta-árvore, e se as correspondentes estratégias s tiverem $T(s) < T^*$, fazer s^* igual à estratégia que

tiver menor tempo (de entre as correspondentes às folhas da meta-árvore), e fazer T^* igual ao tempo desta estratégia.

6. Eliminar todas as alternativas potenciais A_E com $T^{LB}(A_E) \geq T^* - \varepsilon$.
7. Se não existirem mais alternativas potenciais, então terminar, apresentando como solução s^* .
8. Escolher a alternativa potencial A_X com menor valor de $T^{LB}(A_X)$, que passa a ser a alternativa a prosseguir.
9. Se a alternativa a prosseguir A_X for uma folha, então calcular o tempo da estratégia s correspondente; se $T(s) < T^*$, então fazer s^* igual a esta estratégia s e $T^* = T(s)$; ir para o passo 5.
10. Criar o nodo que se segue à alternativa a prosseguir, e as alternativas (arcos) correspondentes. Para cada alternativa A agora criada, utilizar as funções $cmi_n(x)$ para calcular $C^{LB}(A)$ (recomenda-se a utilização da expressão (8.1)), e eliminar a alternativa se $C^{LB}(A) > C^M$. Para cada alternativa não eliminada A_P que não seja folha, fazer $T^{LB}(A_P)$ tomar o valor da solução óptima do problema 6a para a alternativa, e eliminar esta se $T^{LB}(A_P) \geq T^* - \varepsilon$. Para cada alternativa não eliminada A_F que seja folha, fazer $T^{LB}(A_F)$ tomar o valor do tempo da estratégia correspondente, e eliminá-la se $T^{LB}(A_F) \geq T^*$.
11. Se todas as alternativas do nodo agora criado tiverem sido eliminadas, ir para o passo 5, senão ir para o passo 8.

É possível encontrar algumas formas de implementar este algoritmo que conduzam a um melhor desempenho da técnica. Por exemplo, em vez de se eliminarem as alternativas A_E com $T^{LB}(A_E) \geq T^* - \varepsilon$ sempre que estas não correspondam a folhas, podem eliminar-se apenas aquelas que têm $T^{LB}(A_E) \geq T^*$ não só nas folhas como também em arcos próximos destas. As pequenas melhorias do valor do critério tempo assim obtidas podem ser suficientes para permitir a eliminação de muitas alternativas potenciais, compensando, deste modo, o tempo adicional necessário para gerar as estratégias. Uma outra ideia que pode conduzir a uma melhoria ainda mais significativa da técnica é o desenvolvimento de uma forma realista e eficiente de estimar, para uma alternativa A , o valor esperado do melhor tempo que é possível obter a partir desta (designa-se este valor por $E(T(A))$). Se for possível estimar $E(T(A))$, então pode ser compensador eliminar a melhor alternativa A_X de um nodo de decisão apenas se esta não puder cumprir o limite de custo, ou se, simultaneamente, $T^{LB}(A_X) \geq T^* - \varepsilon$ e $E(T(A_X)) > T^*$.

Outro exemplo de optimização que pode melhorar o desempenho da técnica é o armazenamento de um conjunto ordenado com um determinado número das melhores alternativas potenciais, por forma a evitar a necessidade de pesquisas frequentes na meta-árvore. A

utilização de uma lista de apontadores para todas as alternativas potenciais A_P , ordenada pelo valor de $T^{LB}(A_P)$, pode conduzir a resultados ainda melhores.

8.6 Exemplo de aplicação da abordagem interactiva

Vai agora ser apresentado um exemplo para ilustrar a aplicação da abordagem interactiva à selecção de uma estratégia. Este exemplo pretende ilustrar, não apenas o funcionamento do procedimento interactivo, mas também o da técnica para identificação de uma estratégia. Para facilitar a exposição do funcionamento da técnica, e sem perda de generalidade, optou-se por utilizar um caso em que as árvores envolvidas são de pequena dimensão.

8.6.1 Definição do exemplo e interacção inicial do procedimento

Vai assumir-se a existência de dois processos, P_1 e P_2 , com as seguintes características: para P_1 , tem-se $P_{1,1} = P_{2,1} = 50\%$, $x_{1,1} = 0.3$, $x_{2,1} = 0.4$, $t_1 = 2$, $c_1 = 1$, $t_{0,1} = c_{0,1} = 0$; para P_2 , tem-se $P_{1,2} = 60\%$, $P_{2,2} = 40\%$, $x_{1,2} = 0.35$, $x_{2,2} = 0.4$, $t_2 = 1$, $c_2 = 2$, $t_{0,2} = c_{0,2} = 0$; os custos e tempos de mudança são $c_{1,2} = c_{2,1} = t_{1,2} = t_{2,1} = 1$. Vai ainda assumir-se que $\varepsilon = 0.25$. Neste caso, e tal como se passa sempre que se utilizam apenas 2 processos, $c_{i,j}^- = c_{i,j}$ e $t_{i,j}^- = t_{i,j}$, $i, j = 1, 2, i \neq j$.

Calculam-se as estratégias não dominadas que minimizam o tempo (s_u) e o custo (s_l). Para tal pode ser utilizado o algoritmo do capítulo 7, com as adaptações apresentadas na secção 7.7. Obtêm-se, assim, as estratégias representadas na figura 8.3. A partir destas, podem calcular-se os valores $c_u = C(s_u) = 6$ e $c_l = C(s_l) = 3.125$.

O cálculo das estratégias s_u e s_l permite obter simultaneamente as funções $cmin_i(x)$, $i = 1, \dots, n, x \in]0, 1]$, tal como exposto na secção 7.7. Estas funções, que são necessárias para a identificação de cada estratégia através da técnica, podem ser definidas do modo seguinte:

$$cmin_1(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0.3 \\ 1.5, & 0.3 < x \leq 0.4 \\ 2, & 0.4 < x \leq 0.6 \\ 2.25, & 0.6 < x \leq 0.7 \\ 2.75, & 0.7 < x \leq 0.8 \\ 3, & 0.8 < x \leq 0.9 \\ 3.125, & 0.9 < x \leq 1 \end{cases} \quad cmin_2(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0.35 \\ 3.2, & 0.35 < x \leq 0.4 \\ 4, & 0.4 < x \leq 0.7 \\ 4.3, & 0.7 < x \leq 0.75 \\ 4.8, & 0.75 < x \leq 0.8 \\ 5, & 0.8 < x \leq 0.95 \\ 5.15, & 0.95 < x \leq 1 \end{cases} \quad (8.2)$$

Neste ponto, indica o procedimento interactivo que se deve perguntar ao agente de decisão se alguma das estratégias já obtidas é satisfatória, e, em caso de resposta negativa,

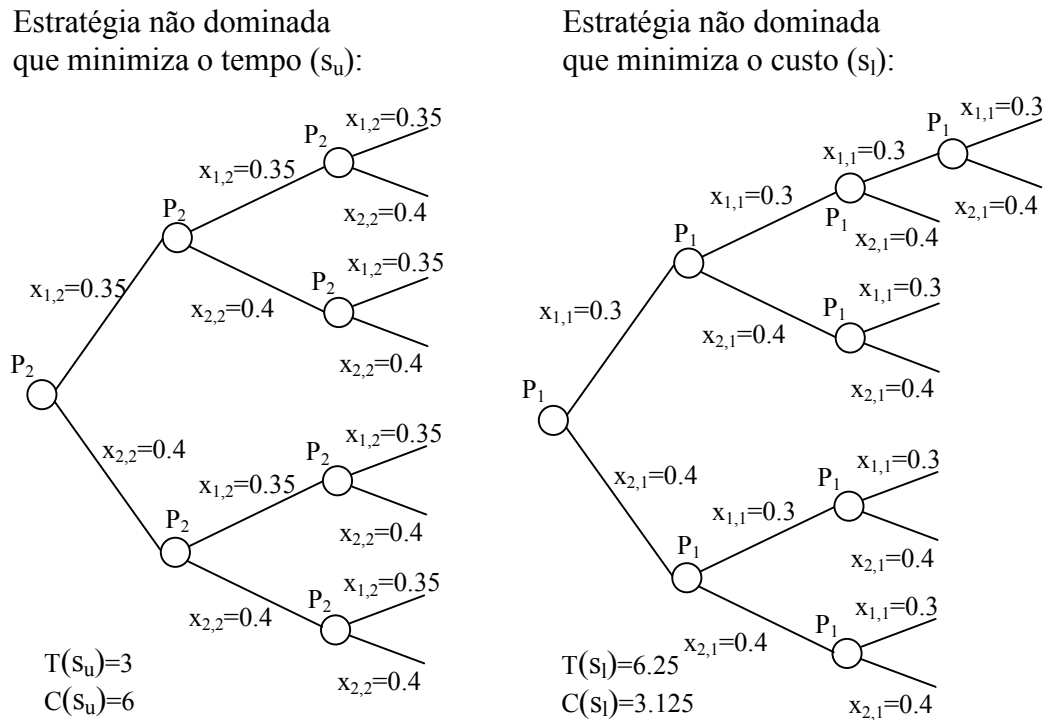


Figura 8.3: Árvores representando as estratégias que minimizam o tempo (à esquerda) e o custo (à direita), para o exemplo descrito no texto.

se pretende escolher um valor para C^M no intervalo $]c_l, c_u[=]3.125, 6[$ para gerar a próxima estratégia. Vai assumir-se que o agente de decisão não considera nenhuma destas estratégias satisfatória, e que não pretende escolher nenhum valor particular para C^M . Assim, o próximo valor de C^M é $c_r = \frac{c_l + c_u}{2} = 4.563$. Utiliza-se a técnica para a identificação de uma nova estratégia considerando, nessa aplicação, $C^M = 4.563$. No que vai seguir-se descreve-se o modo como a nova estratégia é obtida.

8.6.2 Primeira utilização da técnica para gerar uma estratégia

As funções $cm_{in}_i(x), i = 1, \dots, n, x \in]0, 1]$ já foram obtidas. No entanto, além destas funções é também útil obter outras, que vão agora ser designadas por $cm_{in}'_i(x)$ e definidas como

$$cm_{in}'_i(x) = \min_{j=1, \dots, n} [c_{i,j} + cm_{in}_j(x)], i = 1, \dots, n, x \in]0, 1] \quad (8.3)$$

Estas funções $cm_{in}'_i(x)$ são utilizadas na expressão (8.1) para calcular os valores de $C^{LB}(A)$ (embora nessa expressão não se dê qualquer designação a estas funções). $cm_{in}'_i(x)$ representa o menor custo ajustado possível de uma subestratégia a que corresponda uma

fracção x do projecto, se se tiver acabado de utilizar o processo P_i e se se puder, a seguir, utilizar qualquer processo. Utilizando a expressão (8.3), podem facilmente obter-se as funções $cmin'_i(x)$ a partir de $cmin_i(x)$:

$$cmin'_1(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0.3 \\ 1.5, & 0.3 < x \leq 0.4 \\ 2, & 0.4 < x \leq 0.6 \\ 2.25, & 0.6 < x \leq 0.7 \\ 2.75, & 0.7 < x \leq 0.8 \\ 3, & 0.8 < x \leq 0.9 \\ 3.125, & 0.9 < x \leq 1 \end{cases} \quad cmin'_2(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0.35 \\ 2.5, & 0.35 < x \leq 0.4 \\ 3, & 0.4 < x \leq 0.6 \\ 3.25, & 0.6 < x \leq 0.7 \\ 3.75, & 0.7 < x \leq 0.8 \\ 4, & 0.8 < x \leq 0.9 \\ 4.125, & 0.9 < x \leq 1 \end{cases} \quad (8.4)$$

Para o cálculo do limite inferior para o custo de uma estratégia, é necessário utilizar os coeficientes τ_i^- e χ_i^- , $i = 1, 2$, que podem ser calculados através de (6.93) e (6.94). Estes são, para os processos que estão a considerar-se,

$$\tau_1^- = \frac{t_1}{P_{1,1}x_{1,1} + P_{2,1}x_{2,1}} = \frac{2}{50\% \cdot 0.3 + 50\% \cdot 0.4} = 5.714 \quad (8.5)$$

$$\chi_1^- = \frac{c_1}{P_{1,1}x_{1,1} + P_{2,1}x_{2,1}} = \frac{1}{50\% \cdot 0.3 + 50\% \cdot 0.4} = 2.857 \quad (8.6)$$

$$\tau_2^- = \frac{t_2}{P_{1,2}x_{1,2} + P_{2,2}x_{2,2}} = \frac{1}{60\% \cdot 0.35 + 40\% \cdot 0.4} = 2.703 \quad (8.7)$$

$$\chi_2^- = \frac{c_2}{P_{1,2}x_{1,2} + P_{2,2}x_{2,2}} = \frac{2}{60\% \cdot 0.35 + 40\% \cdot 0.4} = 5.405 \quad (8.8)$$

Quer as funções $cmin_i(x)$, quer as funções $cmin'_i(x)$, quer ainda os coeficientes τ_i^- e χ_i^- , são válidos para todas as utilizações da técnica, não precisando, por isso, de ser recalculados. Vão agora utilizar-se as funções $cmin_i(x)$ para verificar se é possível cumprir o limite de custo $C \leq 4.563$. Tem-se que $\min_{i=1, \dots, n} \{cmin_i(1) + c_{0,i}\} = 3.125 \leq 4.563$, pelo que é possível cumprir a restrição de custo, podendo prosseguir-se para o passo 3 da representação algorítmica da técnica. A melhor estratégia já determinada que obedece à restrição $C \leq 4.563$ é a estratégia s_l , que minimiza o custo. Faz-se então $s^* = s_l$ e $T^* = T(s_l) = 6.25$.

Inicia-se agora a construção da meta-árvore. Começa por se criar o nodo raiz. Deste nodo partem dois arcos, um correspondente a cada processo. Cada arco representa uma alternativa e corresponde a uma árvore de estratégia incompleta que apenas contém a sua raiz. A raiz da meta-árvore, bem como estas árvores de estratégia incompletas, estão ilustradas na figura 8.4.

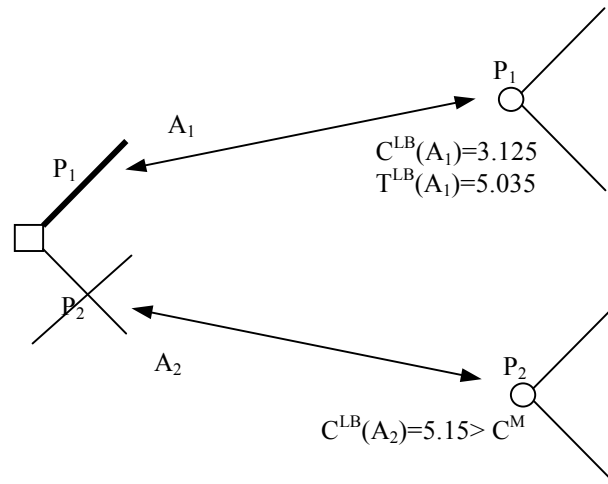


Figura 8.4: Nodo inicial da meta-árvore, e respectivas árvores de estratégia incompletas, para o exemplo descrito no texto. A_1 e A_2 representam as duas alternativas a considerar.

Para cada alternativa A , vai calcular-se $C^{LB}(A)$ e $T^{LB}(A)$. Se $C^{LB}(A) > C^M$, então a alternativa pode ser imediatamente eliminada, pois não pode conduzir a estratégias que obedecem ao limite de custo. Na alternativa assinalada como A_1 na figura 8.4, começa por se utilizar o processo P_1 . Assim, o limite inferior para o custo é igual à soma do custo inicial de utilizar P_1 , com o menor custo possível de uma subestratégia a que corresponda uma fracção $x = 1$ do projecto e que comece por utilizar P_1 . É, então, $C^{LB}(A_1) = c_{0,1} + cmin_1(1) = 3.125$. Como este valor é inferior a C^M , o custo da alternativa não conduz à sua eliminação. Para A_2 , é $C^{LB}(A_2) = c_{0,2} + cmin_2(1) = 5.15 > C^M$, pelo que a alternativa não pode conduzir a estratégias que respeitem o limite de custo, sendo, assim, eliminada.

Apenas a alternativa A_1 permanece, pois, viável. O cálculo de $T^{LB}(A_1)$ é efectuado através da resolução do problema 6a, sendo para isso necessários os valores de $T^0(A_1)$, $C^0(A_1)$, $f'_1(A_1)$, $f'_2(A_1)$, $x_{1,+}(A_1)$ e $x_{2,+}(A_1)$. Como a estratégia incompleta correspondente a A_1 consiste apenas em utilizar uma vez o processo P_1 (no início do projecto), os valores do tempo e do custo são calculados como $T^0(A_1) = t_{0,1} + t_1 = 2$ e $C^0(A_1) = c_{0,1} + c_1 = 1$. Uma vez que só é utilizado P_1 , não existem ramos ainda não incluídos na árvore que sejam antecidos pela utilização de P_2 , pelo que $f'_2(A_1) = 0$ e pode atribuir-se a $x_{2,+}(A_1)$ qualquer valor não nulo. Vai fazer-se $x_{2,+}(A_1) = 1$. A fracção esperada do projecto a executar em ramos ainda não incluídos na árvore, e antecidos pela utilização de P_1 é, assim, toda a fracção esperada cuja execução ainda não está definida, ou seja, $f'_1(A_1) = 1 - (50\% \cdot 0.3 + 50\% \cdot 0.4) = 0.65$. A maior contribuição isolada de ramos ainda não incluídos na árvore, e antecidos pela utilização de P_1 , é $x_{1,+}(A_1) = \max(1 - 0.3, 1 - 0.4) = 0.7$. O problema a resolver é, assim, para este caso, o problema 8a.

Problema 8a

$$\min T = 2 + 5.714z_{1,1} + 4.131z_{1,2} + 6.714z_{2,1} + 2.703z_{2,2}$$

s. a

$$2.857z_{1,1} + 6.834z_{1,2} + 3.857z_{2,1} + 5.405z_{2,2} \leq 3.563$$

$$z_{1,1} + z_{1,2} = 0.65$$

$$z_{2,1} + z_{2,2} = 0$$

$$z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2} \geq 0$$

A solução óptima do problema 8a corresponde a um valor da função objectivo de $T = 5.035$; logo, faz-se $T^{LB}(A_1) = 5.035$. Note-se que, em próximas aplicações da técnica para as quais seja necessário considerar a alternativa A_1 com um diferente valor de C^M , o valor de $C^{LB}(A_1)$ vai manter-se, e o problema a resolver para obter $T^{LB}(A_1)$ apenas vai diferir do problema 8a no lado direito da primeira restrição (que corresponde à diferença entre C^M e $C^0(A_1) = 1$).

Uma vez que a única alternativa potencial não corresponde a uma folha da meta-árvore, pode prosseguir-se para o passo 6, que prescreve a eliminação das alternativas potenciais que não possam melhorar o melhor tempo já obtido em mais do que ε . Para a alternativa A_1 , tem-se que $T^{LB}(A_1) < T^* - \varepsilon = 6.25 - 0.25 = 6$, logo ela não é eliminada e passa a ser, no passo 8, a alternativa a prosseguir. Atinge-se então o passo 10, em que se cria um novo nodo da meta-árvore. A meta-árvore com este novo nodo, e as correspondentes árvores de estratégia incompletas, estão ilustradas na figura 8.5.

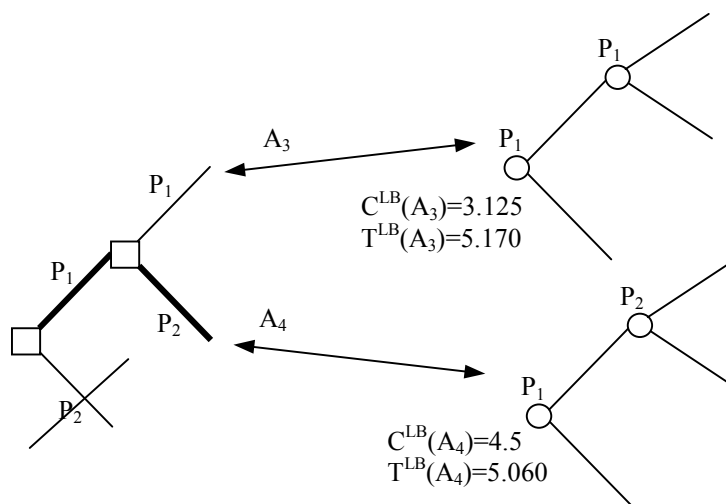


Figura 8.5: Inclusão do segundo nodo na meta-árvore, e respectivas árvores de estratégia incompletas, para o exemplo descrito no texto. A_3 e A_4 representam as duas alternativas a considerar.

Pode colocar-se a questão de saber em qual dos ramos da árvore de estratégia é colocado o nodo correspondente ao segundo arco da meta-árvore. Como foi indicado, considera-se que os arcos de um caminho da meta-árvore estão dispostos por ordem decrescente da contribuição isolada do ramo da árvore de estratégia que se inicia com o nodo correspondente. Uma vez que P_1 é utilizado na raiz da árvore de estratégia, a contribuição isolada do ramo 1 desta árvore é $x = 1 - x_{1,1} = 1 - 0.3 = 0.7$, e a contribuição isolada do ramo 2 é $x = 1 - x_{2,1} = 1 - 0.4 = 0.6$. Assim, o ramo da árvore de estratégia onde vai ser colocado o segundo nodo é o ramo 1 (o ramo de cima na figura 8.5).

Os valores de $C^{LB}(A_n)$ para as duas alternativas $A_n, n = 3, 4$, podem ser calculados utilizando a expressão (8.1). Tendo em consideração que $C^{LB}(A_1) = 3.125$, e que a probabilidade de o novo ramo ser atingido é de 50%, tem-se

$$C^{LB}(A_3) = C^{LB}(A_1) + 50\% \cdot [c_{1,1} + cmin_1(0.7)] - cmin'_1(0.7) = 3.125 < C^M \quad (8.9)$$

$$C^{LB}(A_4) = C^{LB}(A_1) + 50\% \cdot [c_{1,2} + cmin_2(0.7)] - cmin'_1(0.7) = 4.5 < C^M \quad (8.10)$$

Sendo os limites inferiores para o custo menores que o custo máximo, nenhuma das alternativas é eliminada devido ao custo. Assim, vai calcular-se o limite inferior do tempo para as alternativas, resolvendo-se, para isso, o problema 6a para cada uma destas. Os valores de $T^0(A_n)$ e $C^0(A_n), n = 3, 4$, podem ser calculados partindo de $T^0(A_1)$ e $C^0(A_1)$, e adicionando a estes o impacto do novo nodo incluído na árvore de estratégia incompleta. Obtém-se

$$T^0(A_3) = T^0(A_1) + 50\% \cdot (t_{1,1} + t_1) = 3 \quad (8.11)$$

$$T^0(A_4) = T^0(A_1) + 50\% \cdot (t_{1,2} + t_2) = 3 \quad (8.12)$$

$$C^0(A_3) = C^0(A_1) + 50\% \cdot (c_{1,1} + c_1) = 1.5 \quad (8.13)$$

$$C^0(A_4) = C^0(A_1) + 50\% \cdot (c_{1,2} + c_2) = 2.5 \quad (8.14)$$

Os valores de $f'_1(A_n), f'_2(A_n), x_{1,+}(A_n)$ e $x_{2,+}(A_n), n = 3, 4$, podem ser calculados a partir de uma análise das árvores de estratégia incompletas, correspondentes às alternativas (ou melhor, de uma análise dos ramos ainda não definidos nessas árvores). Obtém-se, assim, $f'_1(A_3) = 25\% \cdot 0.4 + 25\% \cdot 0.3 + 50\% \cdot 0.6 = 0.475, f'_2(A_3) = 0, f'_1(A_4) = 50\% \cdot 0.6 = 0.3, f'_2(A_4) = 30\% \cdot 0.35 + 20\% \cdot 0.3 = 0.165, x_{1,+}(A_3) = 0.6, x_{2,+}(A_3) = 1$ (pois $f'_2(A_3) = 0$), $x_{1,+}(A_4) = 0.6$ e $x_{2,+}(A_4) = 0.35$. Depois de determinados estes valores, pode utilizar-se o problema 6a para calcular $T^{LB}(A_3)$ e $T^{LB}(A_4)$. Obtém-se $T^{LB}(A_3) = 5.170$ e $T^{LB}(A_4) = 5.060$. Para $n = 3$ e $n = 4, T^{LB}(A_n) < T^* - \varepsilon$, pelo que nenhuma destas alternativas é eliminada. Como $T^{LB}(A_4) < T^{LB}(A_3)$, é prosseguida a alternativa A_4 .

É, então, criado um novo nodo da meta-árvore, descendente de A_4 . Para este nodo define-se que A_5 é a alternativa correspondente ao processo P_1 , e que A_6 é a correspondente

ao processo P_2 . Calculando $C^{LB}(A_n)$, $n = 5, 6$ da mesma forma que para os nodos anteriores, obtém-se $C^{LB}(A_5) = 4.5 < C^M$ e $C^{LB}(A_6) = 6 > C^M$, pelo que se pode eliminar A_6 . O cálculo de $T^{LB}(A_5)$ fornece $T^{LB}(A_5) = 5.160 < T^* - \varepsilon$, pelo que se prossegue com A_5 .

Definindo o novo nodo da meta-árvore, esta fica com a configuração mostrada na figura 8.6. As árvores de estratégia incompletas correspondentes a estas novas alternativas são também mostradas na mesma figura. Para estas alternativas são $C^{LB}(A_7) = 4.65 > C^M$ e $C^{LB}(A_8) = 4.5 < C^M$, pelo que se pode eliminar A_7 . Para A_8 obtém-se $T^{LB}(A_8) = 5.176 < T^* - \varepsilon$, pelo que se prossegue com A_8 .

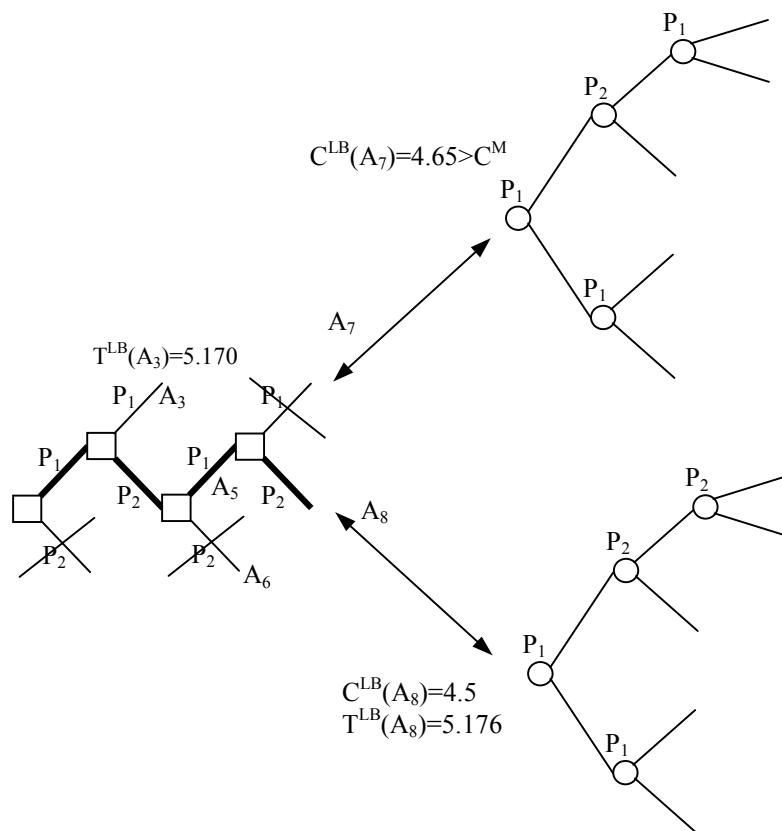


Figura 8.6: Inclusão do quarto nodo na meta-árvore, e respectivas árvores de estratégia incompletas, para o exemplo descrito no texto. A_7 e A_8 representam as duas alternativas a considerar, A_5 e A_6 são as alternativas do nodo anterior e A_3 a única alternativa potencial.

O novo nodo, descendente de A_8 , que vai agora ser adicionado, conduz às alternativas A_9 (correspondente a P_1) e A_{10} (correspondente a P_2). Para estas alternativas, são $C^{LB}(A_9) = 4.5 < C^M$ e $C^{LB}(A_{10}) = 4.5 < C^M$. Assim, nenhuma alternativa é eliminada por não poder respeitar o limite inferior do custo. Quanto ao limite inferior do tempo, são $T^{LB}(A_9) = 5.614 < T^* - \varepsilon$ e $T^{LB}(A_{10}) = 5.214 < T^* - \varepsilon$, o que significa que nenhuma alternativa é eliminada e que se prossegue A_{10} . Cria-se um novo nodo da meta-árvore, com as alternativas

A_{11} (correspondente a P_1) e A_{12} (correspondente a P_2), e obtém-se para estas $C^{LB}(A_{11}) = 4.5 < C^M$ e $C^{LB}(A_{12}) = 5 > C^M$. Portanto, A_{12} é eliminada. Para A_{11} , é $T^{LB}(A_{11}) = 5.286 < T^* - \varepsilon$, pelo que esta alternativa é prosseguida.

Cria-se então um novo nodo da meta-árvore, com as alternativas A_{13} (correspondente a P_1) e A_{14} (correspondente a P_2). Este novo nodo conduz à configuração da meta-árvore e às árvores de estratégia mostradas na figura 8.7.

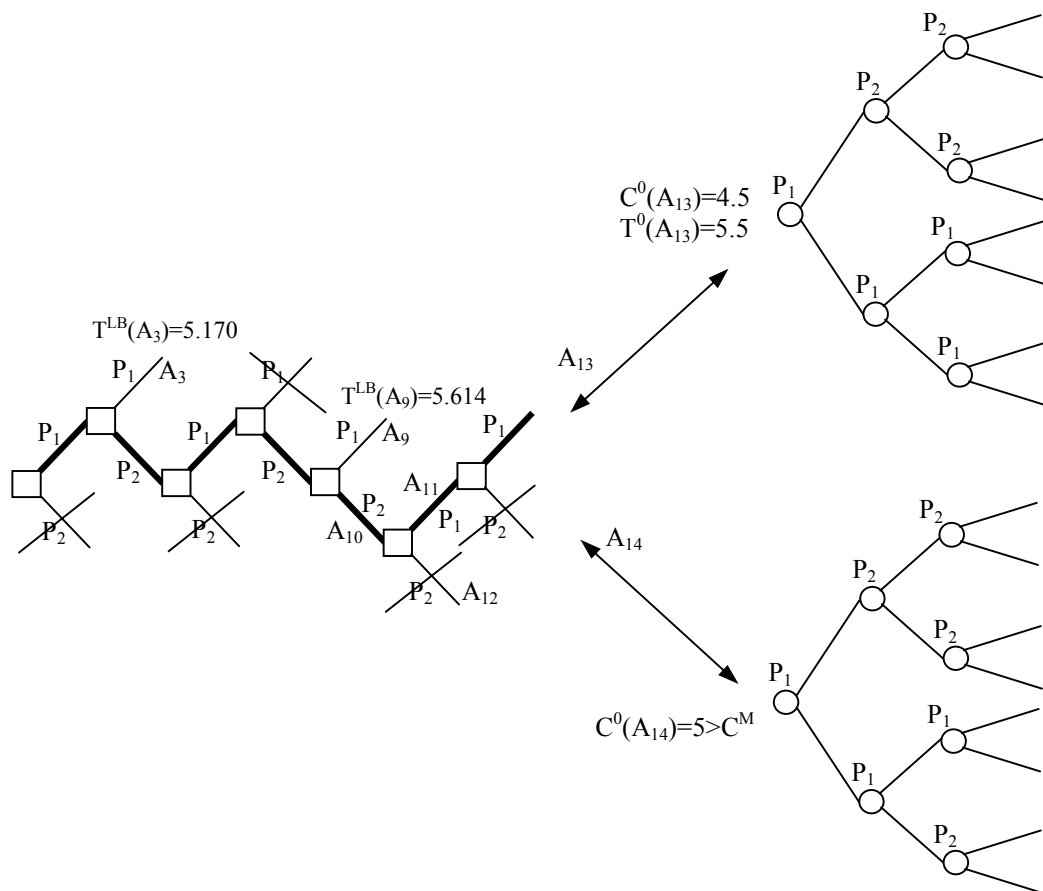


Figura 8.7: Inclusão do sétimo nodo na meta-árvore, e respectivas árvores de estratégia, para o exemplo descrito no texto. A_{13} e A_{14} representam as duas alternativas a considerar, A_9 , A_{10} , A_{11} e A_{12} são as alternativas correspondentes aos dois nodos anteriores e A_3 e A_9 são as alternativas potenciais.

As estratégias correspondentes a A_{13} e A_{14} são estratégias completas, o que significa que ambas as alternativas são folhas da meta-árvore. Assim, vai terminar-se agora a primeira iteração. Sendo A_{13} e A_{14} folhas, os seus valores de $T^0(A_n)$ e $C^0(A_n)$ são os tempos e custos das correspondentes estratégias completas. Quanto ao custo, tem-se $C^0(A_{13}) = 4.5 < C^M$ e $C^0(A_{14}) = 5 > C^M$, pelo que A_{14} é eliminada. $C^0(A_{13}) = 5.5 < T^*$, pelo que a alternativa

A_{13} não é eliminada. Sendo a única não eliminada, A_{13} é a alternativa a prosseguir e, sendo uma folha, faz-se s^* passar a ser a estratégia correspondente a A_{13} , e $T^* = T(s^*) = 5.5$.

Inicia-se agora uma nova iteração, para tentar encontrar uma estratégia que melhore em mais do que ε o tempo T^* . Para isso, segue-se para o passo 5 do algoritmo da técnica. Uma estratégia que melhore suficientemente o tempo T^* deverá ser obtida a partir de uma das alternativas potenciais pendentes, que são A_3 e A_9 . Não sendo nenhuma das alternativas potenciais uma folha, procede-se à eliminação das que não possam melhorar em mais do que ε o tempo T^* . A alternativa A_9 está nestas condições, uma vez que $T^{LB}(A_9) = 5.614 > T^* - \varepsilon$, pelo que é eliminada. Para A_3 , $T^{LB}(A_3) = 5.170 < T^* - \varepsilon$, pelo que A_3 não é eliminada. A_3 é, assim, a alternativa a prosseguir.

Cria-se então o nodo da meta-árvore que se segue a A_3 . Este conduz a duas novas alternativas, que se designam por A_{15} (a alternativa correspondente a P_1) e A_{16} (a alternativa correspondente a P_2). Para estas alternativas obtém-se $C^{LB}(A_{15}) = 3.125 < C^M$ e $C^{LB}(A_{16}) = 4.125 < C^M$, pelo que o limite inferior do custo não conduz à eliminação de nenhuma delas. Já para o limite inferior do tempo se tem $T^{LB}(A_{15}) = 5.561 > T^* - \varepsilon$ e $T^{LB}(A_{16}) = 5.267 > T^* - \varepsilon$, o que leva à eliminação das duas. Isto termina a iteração e, uma vez que, depois desta, não existem mais alternativas potenciais, é impossível melhorar em mais do que ε o tempo da actual estratégia s^* sem violar a restrição de custo. Assim, a estratégia s^* (representada pela árvore do canto superior direito da figura 8.7), com $C(s^*) = 4.5$ e $T(s^*) = 5.5$, é a solução que resulta da aplicação da técnica.

A configuração final da meta-árvore, bem como as árvores de estratégia correspondentes às duas últimas alternativas, são mostradas na figura 8.8.

8.6.3 Utilização do procedimento para obter uma estratégia satisfatória

A estratégia identificada pela técnica passa agora a ser designada por s_r , e tem $T(s_r) = 5.5$ e $C(s_r) = 4.5$. Lembre-se que as estratégias anteriormente geradas, s_l e s_u , tinham $T(s_l) = 6.25$, $C(s_l) = 3.125$, $T(s_u) = 3$ e $C(s_u) = 6$. Portanto, s_r não domina s_l nem s_u , e tem um tempo menor que s_l . Isto significa que se está no caso considerado pelo passo 10 do algoritmo do procedimento.

Pergunta-se ao agente de decisão se s_r é satisfatória, ou se agora considera s_l ou s_u satisfatórias. Assuma-se que ele não considera nenhuma das estratégias satisfatória. Pergunta-se, então, se prefere prosseguir com valores de C^M pertencentes a $]c_l, C(s_r)[$ ou com valores pertencentes a $]c_r, c_u[$, ou seja, se prefere prosseguir com valores de C^M do intervalo $]3.125, 4.5[$ ou do intervalo $]4.563, 6[$. Note-se que o primeiro intervalo deve ser escolhido se o agente de decisão pretender um custo mais baixo que o de s_r (piorando o tempo), e o

considerar que as estratégias não são satisfatórias. Nesse caso, faz-se $c_l = c_r$ (como $s_r = s_l$, não é necessário fazer $s_l = s_r$), e define-se um novo limite de custo. Para isso, pergunta-se ao agente de decisão se pretende escolher um valor particular para C^M no intervalo $]c_l, c_u[=]5.282, 6[$. Assumindo que não pretende considerar nenhum valor particular para C^M , faz-se $c_r = \frac{c_l + c_u}{2} = \frac{5.282 + 6}{2} = 5.641$.

Aplica-se mais uma vez a técnica para a identificação de uma nova estratégia, considerando agora $C^M = 5.641$. Esta técnica conduz à estratégia mostrada na figura 8.9. Esta estratégia passa a ser designada por s_r , tendo-se $T(s_r) = 4.2$ e $C(s_r) = 5.6$.

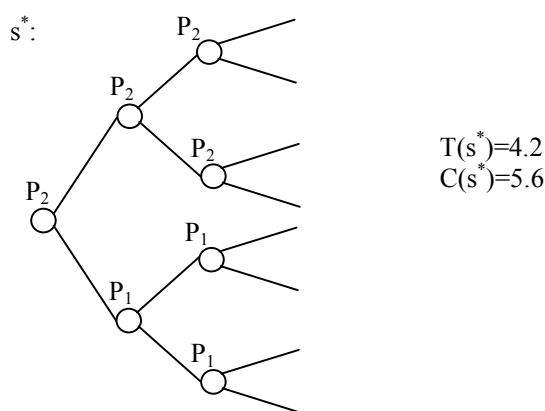


Figura 8.9: Estratégia obtida quando se aplica a técnica para identificação de uma estratégia, com $C^M = 5.641$, ao exemplo descrito no texto.

Esta estratégia s_r não domina s_l nem s_u , e tem um tempo menor que s_l (lembre-se que $T(s_l) = 5.5$, $C(s_l) = 4.5$, $T(s_u) = 3$, $C(s_l) = 6$). Isto significa que, mais uma vez, se está no caso considerado pelo passo 10 do algoritmo do procedimento. Pergunta-se ao agente de decisão se s_r é satisfatória, ou se agora considera s_l ou s_u satisfatórias. Assumindo que não considera nenhuma das estratégias satisfatória, pergunta-se então se prefere prosseguir com valores de C^M do intervalo $]5.282, 5.6[$ ou do intervalo $]5.641, 6[$. Assuma-se que o agente de decisão prefere melhorar o custo relativamente ao de s_r , escolhendo, por isso, o intervalo $]5.282, 5.6[$. Faz-se $s_u = s_r$ e $c_u = C(s_r) = 5.6$, e pergunta-se-lhe se pretende ou não indicar um valor específico de C^M dentro do intervalo seleccionado. Assumindo que o agente de decisão não pretende escolher um valor específico para C^M , utiliza-se $c_r = \frac{c_l + c_u}{2} = \frac{5.282 + 5.6}{2} = 5.441$.

Aplica-se novamente a técnica para a identificação de uma nova estratégia, considerando $C^M = 5.441$. A estratégia obtida é novamente a estratégia s_l , pelo que se pede ao agente de decisão que reconsidere se as actuais estratégias s_l e s_u continuam a não ser satisfatórias. Ele sabe, nesta altura, que o próximo intervalo que pode ser considerado para o limite de custo é $]5.441, 5.6[$ (ou, pelo menos, pode ser informado disso). O agente de decisão gostaria

de melhorar o custo relativamente ao da estratégia s_u , mas, não se pretendendo um tempo maior ou igual a 5.5, a possível melhoria de custo é inferior a $C(s_u) - c_l = 5.6 - 5.441 = 0.159$ (a menos de uma possível influência da utilização do parâmetro $\varepsilon = 0.25$). Vai, assim, considerar-se que o agente de decisão revê a sua posição anterior, passando a considerar a estratégia s_u satisfatória. Desta forma, a estratégia escolhida é s_u , que é a que se mostra na figura 8.9.

8.7 Resumo

No presente capítulo apresentou-se uma abordagem interactiva à selecção de uma estratégia no modelo bicritério, quando se utiliza o tempo médio, a qual utiliza propriedades matemáticas apresentadas em 6.3.

Apresentaram-se os motivos que levam a supor que o tempo médio pode ser, nalgumas situações, uma forma interessante de agregação do tempo, e argumentou-se também que uma abordagem interactiva pode ser útil quando se utiliza o tempo médio. Apresentou-se uma descrição global da abordagem, e detalharam-se os seus componentes: um procedimento interactivo que conduz o agente de decisão na pesquisa do espaço das estratégias, e uma técnica, utilizada por este procedimento, para identificar as novas estratégias. Foram ainda apresentados os algoritmos que descrevem de forma estruturada o funcionamento do procedimento interactivo e da técnica para geração de estratégias. Descreveu-se ainda um exemplo que ilustra a aplicação da abordagem interactiva.

Capítulo 9

Considerações finais

Chegou ao fim o presente trabalho. Não que este fim seja uma definitiva descontinuidade na temática tratada, bem ao contrário, atingiu-se apenas o final de uma etapa; a partir daqui podem, mais claramente que no começo, descortinar-se vias de investigação que se afigura de interesse explorar. No início foram apresentados os objectivos. Este capítulo final faz um balanço crítico sumário do que foi feito no sentido de atingir esses objectivos; mas, sobretudo, partindo dos resultados obtidos, aponta linhas de continuidade para trabalho futuro.

1. Diferentes medidas financeiras podem ser de utilidade prática em situações diversas de avaliação de projectos, mas nem sempre será fácil determinar quais as medidas mais úteis para analisar uma dada situação. Neste sentido, discutiram-se os casos em que pode ser pertinente a utilização de umas ou de outras dessas medidas. Esta discussão não foi exaustiva, tendo-se apenas apresentado, para cada classe de medidas, algumas situações em que a utilização se afigura útil. Propôs-se ainda um enquadramento para avaliação multicritério de projectos de investimento, baseado na não utilização simultânea de medidas que sejam redundantes ou se baseiem em pressupostos contraditórios; este enquadramento tem em conta aspectos que são pertinentes na generalidade das situações, mas não permite encontrar as medidas mais promissoras para situações concretas.

A definição das situações em que as diferentes medidas financeiras são potencialmente úteis pode ser abordada de formas diferentes, passíveis de conduzir a resultados de maior utilidade prática do que os aqui apresentados. Uma abordagem que baseie a análise numa taxonomia de situações de decisão é uma via a explorar que poderá ser particularmente promissora. Essa taxonomia definirá um conjunto de situações de decisão, e, para cada uma delas, fará uma recomendação sobre as medidas a utilizar. Este tipo de abordagem é já utilizado, mas com objectivos mais limitados; por exemplo, Afonso, Godinho e Costa [1] definem uma taxonomia baseada no grau de quantificação de informação, grau de risco,

existência de limites ao investimento e existência de projectos em curso. A taxonomia utilizada conduz a recomendações muito gerais sobre o processo de avaliação, e não à definição de um conjunto de medidas para cada situação. Para além disso, essas recomendações referem-se essencialmente a cada um dos factores considerados, e não às situações definidas pelo conjunto de todos os factores. Uma taxonomia diferente poderá permitir a obtenção de resultados imediatamente aplicáveis.

Neste âmbito, outras análises podem ser de grande utilidade prática. A análise dos métodos multicritério mais indicados nas situações encontradas pelos agentes de decisão poderá constituir um complemento importante aos resultados obtidos, assim como a análise das medidas não financeiras que sejam relevantes para cada situação, e a das formas de combinar estas com as medidas financeiras.

2. Foi apresentada uma abordagem multicritério, baseada na identificação das estratégias não dominadas, que utiliza árvores de decisão na análise de projectos de investimento. Na apresentação feita, apenas se detalhou a utilização dos critérios tempo e valor financeiro (ou custo, que pode ser usado de forma análoga), e referiu-se que a abordagem pode ser facilmente estendida a outros critérios cuja agregação seja feita com base no cálculo do valor esperado, utilizando probabilidades ajustadas. Há alguns aspectos limitativos da aplicabilidade prática desta abordagem. O pressuposto de independência na agregação dos critérios pode impedir a sua aplicação em situações em que tal não se verifique, e o método utilizado para agregar o tempo é baseado num conjunto de pressupostos que, por vezes, conduzem a situações que podem ser indesejáveis, em particular a possibilidade de duas estratégias com a mesma distribuição de probabilidade do tempo final poderem conduzir a dois tempos agregados diferentes.

Na sequência do trabalho desenvolvido sobre esta abordagem, será importante fazer o estudo de um caso real. Para uma tal aplicação será conveniente o prévio desenvolvimento de uma implementação computacional, baseada num *interface* que auxilie na definição das árvores. Será ainda útil o estudo da utilização de outros critérios, nomeadamente a determinação dos que possam ser relevantes, e a averiguação da possibilidade de utilização do valor esperado com probabilidades ajustadas para agregar a distribuição de probabilidades desses critérios.

O pressuposto de independência na agregação de critérios é um dos aspectos mais limitativos. Será útil permitir a inclusão de parâmetros que definam a forma como a agregação de um critério depende dos valores dos restantes. No entanto, é necessário ter em atenção que, se se abandonar este pressuposto, será também necessário reexaminar a regra de eliminação de alternativas em nodos de decisão, pois os princípios que lhe estão subjacentes poderão deixar de ser aplicáveis. Será ainda útil adaptar o método de agregação do tempo, por forma a ultrapassar os problemas deste. Se for levada à prática a metodologia proposta

para a sua alteração, que consiste em manter a distribuição de probabilidade do tempo até à raiz, efectuando apenas aí a agregação deste, então a regra de eliminação de alternativas em nodos de decisão deixará de ser aplicável, pois esta está definida para tempos agregados e não para distribuições de tempos. Será, assim, necessário analisar as propriedades matemáticas da abordagem baseada neste novo método, por forma a identificar as condições que permitem a eliminação de alternativas. Será ainda interessante estudar as melhores formas de utilizar o conjunto de estratégias não dominadas geradas pela abordagem; nomeadamente, poderá ser de interesse averiguar quais os métodos multicritério mais bem adaptados ao tratamento do conjunto de estratégias, e desenvolver procedimentos que auxiliem o agente de decisão na exploração deste tratamento.

3. Foi apresentado um modelo bicritério baseado na abordagem multicritério, que permite a definição das árvores de decisão a partir de um número limitado de parâmetros. O modelo permite a análise de uma tarefa homogénea que pode ser empreendida através da utilização de vários processos diferentes, pressupondo que o tempo e o custo são os critérios de decisão relevantes. Existem alguns pressupostos relativos ao modelo que podem constituir limitações importantes à sua utilização. Nomeadamente, assume-se a utilização do tempo absoluto (não prevendo a utilização de uma função do tempo), custos constantes relativos a cada processo, a ocorrência das alterações de processo imediatamente após a correspondente tomada de decisão, a distribuição binomial dos avanços do projecto, e ainda a possibilidade de mudança de processo no final de cada utilização. Assume-se ainda que a distribuição de probabilidade dos montantes do avanço do projecto é constante (no caso de utilização de um dado processo), e é, assim, independente dos avanços anteriores.

Será importante fazer uma aplicação real deste modelo. O *software* de cálculo para a aplicação foi já desenvolvido (para efectuar os testes apresentados no capítulo 5). A alteração do modelo por forma a ultrapassar as limitações inerentes à sua definição não coloca problemas conceptuais relevantes, mas pode dificultar o desenvolvimento de algoritmos e abordagens eficientes para a sua utilização. Assim, será importante definir uma forma mais geral desse modelo, e desenvolver, simultaneamente, algoritmos e abordagens eficientes para a utilização desta. Será ainda útil estender o modelo a outros critérios; no entanto, para tal será necessário começar por integrar estes novos critérios na abordagem multicritério, efectuando depois as correspondentes adaptações no modelo. Será também útil desenvolver novos modelos, com aplicação a diferentes tipos de situações; convirá que tais modelos sejam o mais gerais possível, mas que sejam simultaneamente tratáveis (no sentido de existirem algoritmos ou abordagens para uma utilização eficiente destes).

4. Foi apresentado um algoritmo para identificação rápida das estratégias não dominadas do modelo referido, que não requer a construção das correspondente árvores de decisão. Os

testes efectuados a este algoritmo mostraram que ele tem um desempenho muito melhor que o do método básico (que consiste em construir e avaliar as árvores) quando o número de estratégias não dominadas é pequeno, mas, por outro lado, que esse desempenho não é claramente melhor que o do método básico quando este número é grande. O algoritmo apresentado apenas cumpre o objectivo que se lhe atribui em situações que conduzam tipicamente a um número pequeno de estratégias não dominadas, como é o caso da utilização do tempo máximo para agregação do tempo.

Assim, será desejável conseguir desenvolver novos algoritmos, ou alterações ao presente, que permitam melhorar o desempenho deste quando o número de estratégias não dominadas é elevado. Alternativamente, poderá ser útil desenvolver formas de impor limites às estratégias identificadas pelo algoritmo. A identificação de um número pequeno de estratégias (definidas por algumas restrições) em cada utilização do algoritmo pode ser usada como base de uma abordagem interactiva à utilização do modelo e, uma vez que o algoritmo tem um bom comportamento quando o número de estratégias não dominadas é pequeno, é possível que a sua alteração conduza a bons desempenhos.

Será também importante aprofundar os testes ao desempenho do algoritmo. Com efeito, o número baixo de sequências utilizado em cada conjunto pode levar a que os resultados obtidos para casos específicos não sejam significativos (embora as conclusões devam ser representativas, pois referem-se sempre a comportamentos comuns a vários conjuntos de sequências). Efectuar testes a um conjunto mais amplo de situações, que melhor reflectam os casos que podem surgir com a utilização do modelo, será tarefa que se afigura útil, no sentido de melhor determinar os casos em que é vantajosa a aplicação do algoritmo.

5. Foi proposta uma abordagem interactiva para utilização do modelo referido, no caso particular em que se usa o tempo médio. Esta abordagem é constituída por um procedimento interactivo, que conduz o agente de decisão na pesquisa das estratégias a seguir, e ainda por uma técnica para identificar uma nova estratégia em cada interacção. Embora o procedimento interactivo possa ser estendido a outras situações, a técnica para identificação das estratégias recorre a propriedades matemáticas que apenas se verificam para o tempo médio, não sendo facilmente adaptável a outras situações. Não foram efectuados testes ao desempenho da abordagem por não estar ainda desenvolvido *software* para o efeito. O desenvolvimento deste *software* afigura-se uma tarefa urgente, pois há que, por um lado confirmar se a identificação de cada estratégia é suficientemente rápida para a aplicação prática da abordagem e, por outro lado, utilizar esse *software* em aplicações a situações reais. Será ainda desejável estender essa abordagem à forma mais geral de agregação do tempo; para tal, será necessário encontrar propriedades matemáticas que permitam a definição de uma nova técnica para identificação das estratégias ou a generalização da técnica existente.

Finalmente, considerem-se duas outras vias de investigação que se afiguram como extensões particularmente promissoras da globalidade do trabalho aqui apresentado. Tal como foi indicado no seu início, este trabalho focou-se em instrumentos de tempo discreto. É, no entanto, previsível que haja situações cuja análise deva ser feita em tempo contínuo, pelo que a correspondente adaptação do trabalho aqui apresentado se poderá revelar particularmente útil.

O trabalho desenvolvido está muito próximo da área de planeamento de projectos, afigurando-se promissora a sua adaptação aos métodos desta área. O desenvolvimento de abordagens baseadas na utilização de processos alternativos para a realização de projectos definidos como redes de actividades homogéneas, em que exista a possibilidade de decisões intermédias para correcção de trajectórias no seu prosseguimento, poderá ser de grande utilidade prática. O tratamento apresentado parece ser de adaptação fácil a estas abordagens, nas quais não só é crítico o tempo de execução de um projecto, mas também se valorizam os custos e se considera a flexibilidade na sua execução.

Bibliografia

- [1] A.R. Afonso, P.C. Godinho e J.P. Costa. *Linhas de Orientação para Selecção de Métodos de Avaliação de Projectos de Investimento em Sistemas de Apoio à Decisão*. Estudos de Gestão - Portuguese Journal of Management Studies, vol. 4, no. 4, pp. 267–289, 1999.
- [2] W.W. Alberts e J.M. McTaggart. *Value Based Strategic Investment Planning*. Interfaces, vol. 14, no. 1, pp. 138–151, 1984.
- [3] J. Alleman. *The Poverty of Cost Models, the Wealth of Real Options*. In J. Alleman e E. Noam (Ed.), *The New Investment Theory of Real Options and its Implication for Telecommunications Economics*, pp. 159–179. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [4] R. Amirkhalili. *Risk and Capital Budgeting*. AACE International Transactions, pp. D&RM/A.04.1–D&RM/A.04.4, 1997.
- [5] M. Amram e N. Kulatilaka. *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*. Harvard Business School Press, Boston, U.S.A., 1999.
- [6] F.D. Arditti e H. Levy. *The Weighted Average Cost of Capital as a Cutoff Rate: A Critical Analysis of the Classical Textbook Weighted Average*. Financial Management, vol. 6, no. 3, pp. 24–34, 1977.
- [7] A. Arya, J.C. Fellingham e J.C. Glover. *Capital Budgeting: Some Exceptions to the Net Present Value Rule*. Issues in Accounting Education, vol. 13, no. 3, pp. 499–508, 1998.
- [8] D. Asquith e J.E. Bethel. *Using Heuristics to Evaluate Projects: The Case of Ranking Projects by IRR*. The Engineering Economist, vol. 40, no. 3, pp. 287–294, 1995.
- [9] P.J. Athanasopoulos. *A Note on the Modified Internal Rate of Return and Investment Criterion*. The Engineering Economist, vol. 23, no. 2, pp. 131–133, 1978.
- [10] T.K. Baidya e A.L. Castro. *Convergência dos Modelos de Árvores Binomiais para Avaliação de Opções*. Pesquisa Operacional, vol. 21, no. 1, pp. 17–30, 2001.

- [11] C.A. Bana e Costa. Structuration, Construction et Exploitation D'un Modèle Multicritère d'Aide à la Décision. Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, 1992.
- [12] C.A. Bana e Costa, J.A. Ferreira e E.C. Corrêa. *Metodologia Multicritério de Apoio à Avaliação de Propostas em Concursos Públicos*. In C.H. Antunes e L. Valadares Tavares (Ed.), *Casos de Aplicação da Investigação Operacional*, pp. 336–363. Mc Graw-Hill de Portugal, 2000.
- [13] C.A. Bana e Costa e J.-C. Vansnick. *General Overview of the MACBETH Approach*. In P.M. Pardalos, Y. Siskos e C. Zopounidis (Ed.), *Advances in Multicriteria Analysis*, pp. 93–100. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [14] R.W. Banz. *The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks*. *Journal of Financial Economics*, vol. 9, no. 1, pp. 3–18, 1981.
- [15] G. Barbarosoglu e D. Pinhas. *Capital Rationing in the Public Sector Using the Analytic Hierarchy Process*. *The Engineering Economist*, vol. 40, no. 4, pp. 315–341, 1995.
- [16] C.A. Barros. *Decisões de Investimento e Financiamento de Projectos*. Sílabo, Lisboa, 3ª edição, 1995.
- [17] R.G. Beaves. *Net Present Value and Rate of Return: Implicit and Explicit Reinvestment Assumptions*. *The Engineering Economist*, vol. 33, no. 4, pp. 275–302, 1988.
- [18] R.G. Beaves. *The Case for a Generalized Net Present Value Formula*. *The Engineering Economist*, vol. 38, no. 2, pp. 119–133, 1993.
- [19] V. Belton e T. Gear. *On a Short-Coming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies*. *Omega*, vol. 11, no. 3, pp. 228–230, 1983.
- [20] R.H. Bernhard. *Unrecovered Investment, Uniqueness of the Internal Rate of Return and the Question of Project Acceptability*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 12, no. 1, pp. 33–38, 1977.
- [21] R.H. Bernhard. *Base Selection for Modified Rates of Return and its Irrelevance for Optimal Project Choice*. *The Engineering Economist*, vol. 35, no. 1, pp. 55–65, 1989.
- [22] H. Bierman e S. Smidt. *The Capital Budgeting Decision: Economic Analysis of Investment Projects*. Macmillan Publishing Company, 8ª edição, 1993.

- [23] F. Black. *A Simple Discounting Rule*. Financial Management, vol. 17, no. 2, pp. 7–11, 1988.
- [24] F. Black. *Beta and Return*. The Journal of Portfolio Management, vol. 20, no. 1, pp. 8–18, 1993.
- [25] F. Black, M. Jensen e M. Scholes. *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests*. In M. Jensen (Ed.), Studies in the Theory of Capital Markets, pp. 79–121. Praeger, 1972.
- [26] F. Black e M. Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. The Journal of Political Economy, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973.
- [27] E. Blocher e C. Stickney. *Duration and Risk Assessments in Capital Budgeting*. Accounting Review, pp. 180–188, January 1979.
- [28] S. Block. *Capital Budgeting Techniques Used by Small Firms in the 1990s*. The Engineering Economist, vol. 42, no. 4, pp. 289–302, 1997.
- [29] M.C. Bogue e R. Roll. *Capital Budgeting for Risky Projects with 'Imperfect' Markets for Physical Capital*. Journal of Finance, vol. 29, pp. 601–613, May 1974.
- [30] T.O. Boucher, O. Gogus e E.M. Wicks. *A Comparison Between Two Multiattribute Decision Methodologies Used in Capital Investment Decision Analysis*. The Engineering Economist, vol. 42, no. 3, pp. 179–201, 1997.
- [31] T.O. Boucher e E.L. MacStravic. *Multiattribute Evaluation within a Present Value Framework and its Relation to the Analytic Hierarchy Process*. The Engineering Economist, vol. 37, no. 1, pp. 1–32, 1991.
- [32] P. Boyle. *Options: A Monte Carlo Approach*. Journal of Financial Economics, vol. 4, pp. 323–338, 1977.
- [33] P.P. Boyle. *A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 23, no. 1, pp. 1–12, 1988.
- [34] P.P. Boyle, J. Evnine e S. Gibbs. *Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims*. The Review of Financial Studies, vol. 2, no. 2, pp. 241–250, 1989.
- [35] R. Brealey e S. Myers. Principles of Corporate Finance. McGraw-Hill, 6^a edição, 2000.
- [36] M.J. Brennan e E.S. Schwartz. *Evaluating Natural Resource Investments*. Journal of Business, vol. 58, no. 2, pp. 135–157, 1985.

- [37] M.J. Brennan e L. Trigeorgis (Ed.). *Project Flexibility, Agency, and Competition*. Oxford University Press, 2000.
- [38] E.F. Brigham. *Financial Management: Theory and Practice*. The Dryden Press, 3^a edição, 1982.
- [39] P. Carr. *The Valuation of Sequential Exchange Opportunities*. *Journal of Finance*, vol. 43, no. 5, pp. 1235–1256, 1988.
- [40] D. Cassimon e P.-J. Engelen. *The Valuation and Financing of High-Risk Start-Up Ventures: An Option Perspective Matching Real and Financial Options*. In D. Kantarelis (Ed.), *Business and Economics for the 21st Century - Volume III*, pp. 345–355, Worcester, U.S.A., 1999. Business & Economics Society International.
- [41] L.K.C. Chan e J. Lakonishok. *Are the Reports of Beta's Death Premature?* *The Journal of Portfolio Management*, pp. 51–62, Summer 1993.
- [42] Y.L. Chan e B.E. Lynn. *Hierarchical Analysis as a Means of Evaluating Tangibles and Intangibles of Capital Investments*. *The Mid-Atlantic Journal of Business*, vol. 29, no. 1, pp. 59–74, 1993.
- [43] P.K. Chaney. *Moral Hazard and Capital Budgeting*. *The Journal of Financial Research*, vol. 12, no. 2, pp. 113–128, 1989.
- [44] N.F. Chen. *Some Empirical Tests of the Theory of Arbitrage Pricing*. *Journal of Finance*, vol. 38, pp. 1393–1414, December 1983.
- [45] N.F. Chen, R. Roll e S.A. Ross. *Economic Forces and the Stock Market*. *Journal of Business*, vol. 59, no. 3, pp. 383–403, 1986.
- [46] C.S. Cheng, D. Kite e R. Radtke. *The Applicability and Usage of NPV and IRR Capital Budgeting Techniques*. *Managerial Finance*, vol. 20, no. 7, pp. 10–36, 1994.
- [47] G.M. Constantinides. *Admissible Uncertainty in the Intertemporal Asset Pricing Model*. *Journal of Financial Economics*, vol. 8, pp. 71–86, March 1980.
- [48] T. Copeland e V. Antikarov. *Real Options: A Practitioner's Guide*. Texere, 2001.
- [49] T.E. Copeland e J.F. Weston. *Financial Theory and Corporate Policy*. Addison-Wesley, 3^a edição, 1992.
- [50] J.P. Costa, M.P. Melo, P.C. Godinho e L.C. Dias. *The AGAP System: A GDSS for Project Analysis and Evaluation*. *European Journal of Operations Research*, vol. 145, no. 2, pp. 287–303, 2003.

- [51] J.C. Cox, S.A. Ross e M. Rubinstein. *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, vol. 7, no. 3, pp. 229–263, 1979.
- [52] M.J. Crean. *Profiling the IRR and Defining the ERR*. The Real Estate Appraiser & Analyst, vol. 55, no. 4, pp. 55–61, 1989.
- [53] A.K. Dixit e R.S. Pindyck. *Investment under Uncertainty*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [54] M. Doumpos, S.H. Zanakis e C. Zopounidis. *Multicriteria Preference Disaggregation for Classification Problems with an Application to Global Investing Risk*. Decision Sciences, vol. 32, no. 2, pp. 333–385, 2001.
- [55] C.L. Dudley. *A Note on Reinvestment Assumptions in Choosing Between Net Present Value and Internal Rate of Return*. Journal of Finance, vol. 27, no. 4, pp. 907–915, September 1972.
- [56] P.H. Dybvig. *Inefficient Dynamic Portfolio Strategies or How to Throw Away a Million Dollars in the Stock Market*. The Review of Financial Studies, vol. 1, no. 1, pp. 67–88, 1988.
- [57] J.S. Dyer. *Remarks on the Analytic Hierarchy Process*. Management Science, vol. 36, no. 3, pp. 249–258, 1990.
- [58] D.A. Evans e S.M. Forbes. *Decision Making and Display Methods: The Case of Prescription and Practice in Capital Budgeting*. The Engineering Economist, vol. 39, no. 1, pp. 87–92, 1993.
- [59] C.H. Falkner e S. Benhajla. *Multi-Attribute Decision Models in the Justification of CIM Systems*. The Engineering Economist, vol. 35, no. 2, pp. 91–114, 1990.
- [60] C.H. Falkner e V. Verter. *Separation and Normalization in Multi-Attribute Decision Models for Investment Evaluation*. The Engineering Economist, vol. 37, no. 1, pp. 77–85, 1991.
- [61] E.F. Fama. *Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting under Uncertainty*. Journal of Financial Economics, vol. 5, pp. 3–24, August 1977.
- [62] E.F. Fama e K.R. French. *The Cross-Section of Expected Returns*. Journal of Financial Studies, vol. 47, pp. 427–465, June 1992.
- [63] E.J. Farragher, R.T. Kleiman e A.P. Sahu. *Current Capital Investment Practices*. The Engineering Economist, vol. 44, no. 2, pp. 137–150, 1999.

- [64] D.J. Feils e F.M. Sabac. *The Impact of Political Risk on the Foreign Direct Investment Decision: A Capital Budgeting Analysis*. The Engineering Economist, vol. 45, no. 2, pp. 129–143, 2000.
- [65] S. Figlewski e B. Gao. *The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing*. Journal of Financial Economics, vol. 53, pp. 313–351, 1999.
- [66] J.H. Finch e T.H. Payne. *Discount Rate Choice and the Application of Duration for Capital Budgeting Decisions*. The Engineering Economist, vol. 41, no. 4, pp. 369–375, 1996.
- [67] S. Fischer. *Call Option Pricing When the Exercise Price is Uncertain, and the Valuation of Index Bonds*. Journal of Finance, vol. 33, no. 1, pp. 169–176, 1978.
- [68] J.A.S. Fonseca. *Le Risque de Taux d'Interet et l'Équilibre du Marché Obligataire Portugais: Étude Théorique et Empirique sur Les Obligations d'État à Coupon Révisable*. Tese de Doutorado, Université d'Orléans, 1991.
- [69] A. Gamba. *An Extension of Least Squares Monte Carlo Simulation for Multi-options Problems*. Paphos, Cyprus, July 4-6 2002. Apresentado em 6th Annual Real Options Conference, consultado em <http://www.realoptions.org/Papers2002/Gamba.pdf> em 2002/12/13.
- [70] A.K. Gehr. *Risk-Adjusted Capital Budgeting Using Arbitrage*. Financial Management, vol. 10, pp. 14–19, Winter 1981.
- [71] R. Geske. *The Valuation of Compound Options*. Journal of Financial Economics, vol. 7, no. 1, pp. 63–81, 1979.
- [72] F. Ghotb e L. Warren. *A Case Study Comparison of the Analytic Hierarchy Process and a Fuzzy Decision Methodology*. The Engineering Economist, vol. 40, no. 3, pp. 233–246, 1995.
- [73] P.C. Godinho. *A Distribuição e a Dependência Temporal de Taxas de Rentabilidade*. Instituto Mercado de Capitais, Porto, 1999.
- [74] P.C. Godinho, A.R. Afonso e J.P. Costa. *On the Use of Multiple Financial Methods in the Evaluation and Selection of Investment Projects*. Investigação Operacional, Aceite para publicação.
- [75] P.C. Godinho e J.P. Costa. *Incorporating Risk in a Decision Support System for Project Analysis and Evaluation*. In D. Kantarelis (Ed.), *Business and Economics for the 21st Century - Volume III*, pp. 90–101, Worcester, U.S.A., 1999. Business & Economics Society International.

- [76] P.C. Godinho e J.P. Costa. *The Generation of Efficient Strategies in Bicriteria Project Decision Trees: A Model and a Fast Algorithm*. Relatório de Investigação #6/00, Série: Métodos Científicos de Gestão, Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra, Coimbra, Portugal, 2000.
- [77] P.C. Godinho e J.P. Costa. *An Interactive Procedure for the Identification of Non-Dominated Strategies in Bicriteria Project Decision Trees*. In D. Kantarelis (Ed.), *Global Business & Economics Review - Anthology 2001*, pp. 379–394, Worcester, U.S.A., 2001. Business & Economics Society International.
- [78] P.C. Godinho e J.P. Costa. *A Stochastic Bicriteria Model for Project Analysis and Production Planning*. In G. Govaert, J. Janssen e N. Limnios (Ed.), *Proceedings of the 10th International Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA-2001)*, pp. 463–468, France, 2001. Université de Technologie de Compiègne.
- [79] P.C. Godinho e J.P. Costa. *The Use of Cost and Maximum Time to Completion in Project Analysis under Uncertainty*. In D. Kantarelis (Ed.), *Global Business & Economics Review - Anthology 2001*, pp. 366–378, Worcester, U.S.A., 2001. Business & Economics Society International.
- [80] P.C. Godinho e J.P. Costa. *A Note on the Use of Bicriteria Decision Trees in Capital Budgeting*. *Global Business & Economics Review*, vol. 4, no. 1, pp. 147–158, 2002.
- [81] A. Gregory. *Why Beta is Better: The Usefulness of Beta in the Investment-Appraisal Process*. *Management Accounting*, vol. 68, no. 1, pp. 42–43, 1990.
- [82] M.M. Hajdasinski. *Remarks in the Context of "The Case for a Generalized Net Present Value Formula"*. *The Engineering Economist*, vol. 40, no. 2, pp. 201–210, 1995.
- [83] M.M. Hajdasinski. *Adjusting the Modified Internal Rates of Return*. *The Engineering Economist*, vol. 41, no. 2, pp. 173–186, 1996.
- [84] M.M. Hajdasinski. *NPV-Compatibility, Project Ranking, and Related Issues*. *The Engineering Economist*, vol. 42, no. 4, pp. 325–339, 1997.
- [85] R.V. Hartley. *Inflation, Maintenance of Capital and the IRR Model: An Appraisal and Alternative*. *Decision Sciences*, vol. 19, no. 1, pp. 93–103, Winter 1988.
- [86] D.D. Hawley e R.P. Malone. *The Relative Performance of Duration in the Capital Budgeting Selection Process*. *The Engineering Economist*, vol. 35, no. 1, pp. 67–74, 1989.

- [87] A.C. Hax e K.M. Wiig. *The Use of Decision Analysis in a Capital Investment Problem*. In D. Bell, R.L. Keeney e H. Raiffa (Ed.), *Conflicting Objectives in Decisions*, pp. 277–297. John Wiley and Sons, 1977.
- [88] R.H. Hayes e D.A. Garvin. *Managing as If Tomorrow Mattered*. *Harvard Business Review*, vol. 60, no. 3, pp. 70–79, May-June 1982.
- [89] H. He. *Convergence from Discrete- to Continuous-Time Contingent Claims Prices*. *The Review of Financial Studies*, vol. 3, no. 4, pp. 523–546, 1990.
- [90] H.S. Herath e C.S. Park. *Economic Analysis of R&D Projects: An Options Approach*. *The Engineering Economist*, vol. 44, no. 1, pp. 1–35, 1999.
- [91] H.S. Herath e C.S. Park. *Multi-Stage Capital Investment Opportunities as Compound Real Options*. *The Engineering Economist*, vol. 47, no. 1, pp. 1–27, 2002.
- [92] D.B. Hertz. *Risk Analysis in Capital Investment*. *Harvard Business Review*, vol. 42, pp. 95–106, January-February 1964.
- [93] D.B. Hertz e H. Thomas. *Practical Risk Analysis: An Approach Through Case Studies*. John Wiley and Sons, 1984.
- [94] D.B. Hertz e H. Thomas. *Risk Analysis and its Applications*. John Wiley and Sons, 1984.
- [95] R.F. Hespos e P.A. Strassmann. *Stochastic Decision Trees for the Analysis of Investment Decisions*. *Management Science*, vol. 11, no. 10, pp. 244–259, 1965.
- [96] F.S. Hillier e G.J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, 6ª edição, 1995.
- [97] K.M. Howe. *Perpetuity Rate of Return Analysis*. *The Engineering Economist*, vol. 36, no. 3, pp. 148–257, 1991.
- [98] C. Huang e R.H. Litzenberger. *Foundations for Financial Economics*. Prentice-Hall, 1988.
- [99] E. Jacquet-Lagrèze. *An Application of the UTA Discriminant Model for the Evaluation of R&D Projects*. In P.M. Pardalos, Y. Siskos e C. Zopounidis (Ed.), *Advances in Multicriteria Analysis*, pp. 203–211. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [100] E. Jacquet-Lagrèze e J. Siskos. *Assessing a Set of Additive Utility Functions for Multicriteria Decision Making*. *European Journal of Operational Research*, vol. 10, pp. 151–164, 1982.

- [101] R. Jagannathan e E.R. McGrattan. *The CAPM Debate*. Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, pp. 2–17, Fall 1995.
- [102] A.J. Jagle. *Shareholder Value, Real Options, and Innovation in Technology-Intensive Companies*. R&D Management, vol. 29, no. 3, pp. 271–287, 1999.
- [103] R. Jarrow e A. Rudd. *Option Pricing*. Irwin, 1983.
- [104] B. Kamrad e P. Ritchken. *Multinomial Approximating Models for Options with K State Variables*. Management Science, vol. 37, no. 12, pp. 1640–1652, 1991.
- [105] E. Kasanen e L. Trigeorgis. *A Market Utility Approach to Investment Valuation*. European Journal of Operations Research, vol. 74, pp. 294–309, 1994.
- [106] S. Keef e E. Olowo-Okere. *A Pitfall to Avoid at Any Cost!* Management Accounting, vol. 76, no. 1, pp. 50–51, 1998.
- [107] R.L. Keeney e H. Raiffa. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Cambridge University Press, 1993.
- [108] D. Kellogg, J.M. Charnes e R. Demirer. *Valuation of a Biotechnology Firm: An Application of Real-Options Methodologies*. Leiden, Netherlands, 1999. Apresentado em 3rd Annual Real Options Conference, consultado em <http://www.realoptions.org/Papers1999/Kellogg.pdf> em 2002/12/12.
- [109] A.G.Z. Kemna. *Case Studies on Real Options*. Financial Management, pp. 259–270, Autumn 1993.
- [110] G.W. Kester e T.K. Chong. *Capital Budgeting Practices of Listed Firms in Singapore*. Singapore Management Review, vol. 20, no. 1, pp. 9–23, January 1998.
- [111] A.M. Khan e D.P. Fiorino. *The Capital Asset Pricing Model in Project Selection: A Case Study*. The Engineering Economist, vol. 37, no. 2, pp. 145–160, 1992.
- [112] F. Lefley. *The Payback Method of Investment Appraisal: A Review and Synthesis*. International Journal of Production Economics, vol. 44, pp. 207–224, 1996.
- [113] M.J. Liberatore, T.F. Monahan e D.E. Stout. *A Framework for Integrating Capital Budgeting Analysis and Strategy*. The Engineering Economist, vol. 38, no. 1, pp. 31–43, 1992.
- [114] H.R. Liggett e W.G. Sullivan. *Multi-Attribute Evaluation of Local Area Network Topologies*. The Engineering Economist, vol. 37, no. 2, pp. 91–114, 1992.

- [115] S.A. Lin. *The Modified Internal Rate of Return and Investment Criterion*. The Engineering Economist, vol. 21, no. 4, pp. 237–247, 1976.
- [116] J. Lintner. *The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets*. Review of Economics and Statistics, vol. 47, pp. 13–37, February 1965.
- [117] C.H. Loch e K. Bode-Greuel. *Evaluating Growth Options as Sources of Value for Pharmaceutical Research Projects*. R&D Management, vol. 31, no. 2, pp. 231–248, 2001.
- [118] J.R. Lohmann. *The IRR, NPV and the Fallacy of the Reinvestment Rate Assumptions*. The Engineering Economist, vol. 33, no. 4, pp. 303–330, 1988.
- [119] F.A. Longstaff e E.S. Schwartz. *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*. The Review of Financial Studies, vol. 14, no. 1, pp. 113–147, 2001.
- [120] F.A. Lootsma. *Multicriteria Decision Analysis in a Decision Tree*. European Journal of Operational Research, vol. 101, pp. 442–451, 1997.
- [121] J.H. Lorie e L.J. Savage. *Three Problems in Rationing Capital*. Journal of Business, vol. 28, no. 4, pp. 229–239, October 1955.
- [122] T.A. Luehrman. *Using APV: A Better Tool for Valuing Operations*. Harvard Business Review, pp. 145–154, May-June 1997.
- [123] T.A. Luehrman. *What's It Worth? A General Manager's Guide to Valuation*. Harvard Business Review, pp. 132–142, May-June 1997.
- [124] D.B. Madan, F. Milne e H. Shefrin. *The Multinomial Option Pricing Model and Its Brownian and Poisson Limits*. The Review of Financial Studies, vol. 2, no. 2, pp. 251–265, 1989.
- [125] J.F. Magee. *Decision Trees for Decision Making*. Harvard Business Review, vol. 42, pp. 126–138, July-August 1964.
- [126] J.F. Magee. *How to Use Decision Trees in Capital Investment*. Harvard Business Review, vol. 42, pp. 79–96, September-October 1964.
- [127] W. Margrabe. *The Value of an Option to Exchange One Asset for Another*. Journal of Finance, vol. 33, no. 1, pp. 177–186, 1978.

- [128] W.R. McDaniel, D.E. McCarty e K.A. Jessell. *Discounted Cash Flows with Explicit Reinvestment Rates: Tutorial and Extension*. The Financial Review, vol. 23, no. 3, pp. 369–385, August 1988.
- [129] J.J. Meimban III, J.S. Morris e R.L. Govett. *The Evaluation of Wood-Fired Cogeneration Investments Using Monte-Carlo Simulation*. The Engineering Economist, vol. 37, no. 2, pp. 115–136, 1992.
- [130] E.M. Miller. *The Competitive Market Assumption and Capital Budgeting Criteria*. Financial Management, vol. 16, no. 4, pp. 22–28, Winter 1987.
- [131] E.M. Miller. *The Cutoff Benefit-Cost Ratio Should Exceed One*. The Engineering Economist, vol. 46, no. 4, pp. 312–319, 2001.
- [132] L.T. Miller e C.S. Park. *Decision Making under Uncertainty - Real Options to the Rescue*. The Engineering Economist, vol. 47, no. 2, pp. 105–150, 2002.
- [133] S.C. Myers. *Interactions of Corporate Financing and Investment Decisions - Implications for Capital Budgeting*. Journal of Finance, vol. 29, no. 1, pp. 1–25, 1974.
- [134] S.C. Myers. *Finance Theory and Financial Strategy*. Interfaces, vol. 14, no. 1, pp. 126–137, January-February 1984.
- [135] S.C. Myers e S.M. Turnbull. *Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News*. Journal of Finance, vol. 32, no. 2, pp. 321–333, May 1977.
- [136] T.-Y. Paik e P.K. Sen. *Project Evaluation and Control in Decentralized Firms: Is Capital Rationing Always Optimal?* Management Science, vol. 41, no. 8, pp. 1404–1414, 1995.
- [137] P.M. Pardalos, Y. Siskos e C. Zopounidis. *Editorial*. In P.M. Pardalos, Y. Siskos e C. Zopounidis (Ed.), *Advances in Multicriteria Analysis*, pp. ix–xxv. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [138] C.S. Park e H.S.B. Herath. *Exploiting Uncertainty - Investment Opportunities as Real Options: A New Way of Thinking in Engineering Economics*. The Engineering Economist, vol. 45, no. 1, pp. 1–36, 2000.
- [139] C.S. Park e G.P. Sharp-Bette. *Advance Engineering Economics*. John Wiley and Sons, 1990.
- [140] S. Paulo. *The Weighted Average Cost of Capital: A Caveat*. The Engineering Economist, vol. 37, no. 2, pp. 178–183, 1992.

- [141] R. Pike. *Do Sophisticated Capital Budgeting Approaches Improve Investment Decision-Making Effectiveness?* The Engineering Economist, vol. 34, no. 2, pp. 149–161, 1989.
- [142] M.D. Proctor e J.R. Canada. *Past and Present Methods of Manufacturing Investment Evaluation: A Review of the Empirical and Theoretical Literature.* The Engineering Economist, vol. 38, no. 1, pp. 45–58, 1992.
- [143] H. Raiffa. *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices under Uncertainty.* McGraw-Hill, 1968.
- [144] M.R. Reinganum. *The Arbitrage Pricing Theory: Some Empirical Results.* Journal of Finance, vol. 36, pp. 313–321, May 1981.
- [145] W.J. Reinhart. *Capital Budgeting and the Reinvestment Assumption.* Dundee, Escócia, July 23-25 2000. Apresentado em Alternative Perspectives on Finance - Fifth Biennial Conference, consultado em <http://www.departments.bucknell.edu/management/apfa/papers/37Reinhart.pdf> em 2002/11/04.
- [146] D.S. Remer e A.P. Nieto. *A Compendium and Comparison of 25 Project Evaluation Techniques. Part 1: Net Present Value and Rate of Return Methods.* International Journal of Production Economics, vol. 42, pp. 79–96, 1995.
- [147] D.S. Remer e A.P. Nieto. *A Compendium and Comparison of 25 Project Evaluation Techniques. Part 2: Ratio, Payback and Accounting Methods.* International Journal of Production Economics, vol. 42, pp. 101–129, 1995.
- [148] R. Rendleman e B. Bartter. *Two State Option Pricing.* Journal of Finance, vol. 34, no. 5, pp. 1093–1110, 1979.
- [149] R. Roll. *A Critique of Asset Pricing Theory's Tests.* Journal of Financial Economics, vol. 4, pp. 129–176, March 1977.
- [150] R. Roll e S. Ross. *An Empirical Investigation of the Arbitrage Pricing Theory.* Journal of Finance, vol. 35, pp. 1073–1103, December 1980.
- [151] R. Roll e S.A. Ross. *The Arbitrage Pricing Theory Approach to Strategic Portfolio Planning.* Financial Analysts Journal, pp. 14–26, May/June 1984.
- [152] S.A. Ross. *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing.* Journal of Economic Theory, vol. 13, no. 3, pp. 341–360, December 1976.

- [153] S.A. Ross. *A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams*. Journal of Business, vol. 51, no. 3, pp. 453–475, July 1978.
- [154] R.S. Ruback. *Capital Cash Flows: A Simple Approach to Valuing Risky Cash Flows*. Financial Management, pp. 85–103, Summer 2002.
- [155] T.L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process*. McGraw-Hill, 1980.
- [156] A. Sangster. *Capital Investment Appraisal Techniques: A Survey of Current Usage*. Journal of Business Finance & Accounting, vol. 20, no. 3, pp. 307–332, April 1993.
- [157] N. Seitz e M. Ellison. *Capital Budgeting and Long-Term Financing Decisions*. The Dryden Press, 2^a edição, 1995.
- [158] R.D. Shachter. *Evaluating Influence Diagrams*. Operations Research, vol. 34, no. 6, pp. 871–882, 1986.
- [159] W.F. Sharpe. *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. Journal of Finance, vol. 19, pp. 425–442, September 1964.
- [160] P.P. Shenoy. *Valuation-Based Systems for Bayesian Decision Analysis*. Operations Research, vol. 40, no. 3, pp. 463–484, 1992.
- [161] D.M. Shull. *Efficient Capital Project Selection Through a Yield-Based Capital Budgeting Technique*. The Engineering Economist, vol. 38, no. 1, pp. 1–18, 1992.
- [162] D.M. Shull. *Overall Rates of Return: Investment Bases, Reinvestment Rates and Time Horizons*. The Engineering Economist, vol. 39, no. 2, pp. 139–163, 1994.
- [163] P.P. Silva. *Técnicas de Análise de Investimentos*. Universidade de Coimbra, Coimbra, 1999.
- [164] J. Siskos e D. Yannacopoulos. *UTASTAR, an Ordinal Regression Method for Building Additive Value Functions*. Investigação Operacional, vol. 5, no. 1, pp. 39–53, 1985.
- [165] J. Siskos e C. Zopounidis. *The Evaluation Criteria of the Venture Capital Investment Activity: An Interactive Assessment*. European Journal of Operations Research, vol. 31, pp. 304–313, 1987.
- [166] Y. Siskos, A. Spiridakos e D. Yannacopoulos. *MINORA: A Multicriteria Decision Aiding System for Discrete Alternatives*. Working Paper 92-06, Decision Support Systems Laboratory, Department of Production Engineering and Management, Technical University of Crete, Chania, Greece, 1992.

- [167] D.J. Smith. *Incorporating Risk into Capital Budgeting Decisions Using Simulation*. Management Decision, vol. 32, no. 9, pp. 20–26, 1994.
- [168] J.E. Smith e K.F. McCardle. *Valuing Oil Properties: Integrating Option Pricing and Decision Analysis Approaches*. Operations Research, vol. 46, no. 2, pp. 198–217, 1998.
- [169] J.E. Smith e R.F. Nau. *Valuing Risky Projects: Option Pricing Theory and Decision Analysis*. Management Science, vol. 41, no. 5, pp. 795–816, 1995.
- [170] E. Solomon. *The Arithmetic of Capital Budgeting Decisions*. Journal of Business, vol. 29, no. 2, pp. 124–129, 1956.
- [171] E. Solomon e J.J. Pringle. *Introdução à Administração Financeira (Tradução para Português do Livro "An Introduction to Financial Management")*. Editora Atlas, São Paulo, Brasil, 1^a edição, 1981.
- [172] D.E. Stout, M.J. Liberatore e T.F. Monahan. *Decision Support Software for Capital Budgeting*. Management Accounting, pp. 50–53, July 1991.
- [173] R.A. Taggart. *Consistent Valuation and Cost of Capital Expressions with Corporate and Personal Taxes*. Financial Management, vol. 20, no. 3, pp. 8–20, 1991.
- [174] L. Trigeorgis. *A Log-Transformed Binomial Numerical Analysis Method for Valuing Complex Multi-Option Investments*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 26, no. 3, pp. 309–326, 1991.
- [175] L. Trigeorgis. *The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 28, no. 1, pp. 1–20, 1993.
- [176] L. Trigeorgis (Ed.). *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies, and Applications*. Praeger, 1995.
- [177] L. Trigeorgis. *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. The MIT Press, 1996.
- [178] L. Trigeorgis e S.P. Mason. *Valuing Managerial Flexibility*. Midland Corporate Finance Journal, pp. 14–21, Spring 1987.
- [179] D. von Winterfeldt e W. Edwards. *Decision Analysis and Behavioral Research*. Cambridge University Press, 1986.
- [180] M.R. Walls. *Integrating Business Strategy and Capital Allocation: An Application of Multi-Objective Decision Making*. The Engineering Economist, vol. 40, no. 3, pp. 247–266, 1995.

- [181] L.K. Wang. *The Weighted Average Cost of Capital and Sequential Marginal Costing: A Clarification*. The Engineering Economist, vol. 39, no. 2, pp. 187–192, 1994.
- [182] S.R. Watson e A.N.S. Freeling. *Assessing Attribute Weights*. Omega, vol. 10, no. 6, pp. 582–583, 1982.
- [183] S.R. Watson e A.N.S. Freeling. *Comment on: Assessing Attribute Weights by Ratios*. Omega, vol. 11, no. 1, pp. 13, 1983.
- [184] J.F. Weston, S. Besley e E.F. Brigham. *Essentials of Managerial Finance*. The Dryden Press, 11^a edição, 1996.
- [185] W.L. Winston. *Pricing of Options and Real Options for Arbitrary Distributions*. Leiden, Netherlands, 1999. Apresentado em 3rd Annual Real Options Conference, consultado em <http://www.realoptions.org/Papers1999/WINSTONOptions.pdf> em 2002/12/12.
- [186] W.L. Winston. *A Tutorial on using EXCEL and EXCEL Add-ins to Value Real Options*. Leiden, Netherlands, 1999. Apresentado em 3rd Annual Real Options Conference, consultado em <http://www.realoptions.org/Papers1999/WINSTONExcel.pdf> em 2002/12/12.
- [187] H.T. Wong. *Capital Rationing: The General Case and a Better Criterion for Ranking*. Journal of Economics and Finance, vol. 24, no. 1, pp. 90–96, 2000.
- [188] G. Zhang. *Moral Hazard in Corporate Investment and the Disciplinary Role of Voluntary Capital Budgeting*. Management Science, vol. 43, no. 6, pp. 737–750, 1997.
- [189] F.C. Zinkhan e G.M. Zinkhan. *An Application of Conjoint Analysis to Capital Budgeting: The Case of Innovative Land Management Systems*. Managerial Finance, vol. 20, no. 7, pp. 37–50, 1994.
- [190] C. Zopounidis. *On the Use of the MINORA Multicriteria Decision Aiding System to Portfolio Selection and Management*. Journal of Information Science and Technology, vol. 2, no. 2, pp. 150–156, 1993.
- [191] C. Zopounidis e M. Doumpos. *A Multicriteria Decision Aid Methodology for the Assessment of Country Risk*. European Research on Management and Business Economics, vol. 3, no. 3, pp. 13–33, 1997.
- [192] C. Zopounidis e M. Doumpos. *Building additive utilities for Multi-Group Hierarchical Discrimination: The MHDIS method*. Optimization Methods & Software, vol. 14, no. 3, pp. 219–240, 2000.

- [193] C. Zopounidis e M. Doumpos. *Multi-Group Discrimination Using Multi-Criteria Analysis: Illustrations from the Field of Finance*. European Journal of Operational Research, vol. 139, no. 2, pp. 317–389, 2002.
- [194] C. Zopounidis, M. Doumpos e S. Zanakis. *Stock Evaluation Using a Preference Disaggregation Methodology*. Decision Sciences, vol. 30, no. 2, pp. 313–336, 1999.

Apêndice A

Glossário

Neste apêndice são definidos alguns dos conceitos usados ao longo do trabalho. Incluem-se especialmente os conceitos que não são comuns na literatura sobre análise e avaliação de projectos, ou cuja forma como estão definidos neste trabalho apresente características particulares. Assim, foi excluída a definição de alguns que são comuns, como Valor Actual Líquido, opções reais, custo do capital, etc. Na grande maioria dos casos, estes conceitos foram já definidos no texto principal, sendo aqui repetidas as definições para maior facilidade de consulta.

Vários conceitos estão definidos para ramos de árvores. As subestratégias correspondem geralmente a ramos de árvores de estratégia, e aqueles conceitos podem ser identicamente definidos para as subestratégias representadas por esses ramos. Para não repetir conceitos semelhantes para ramos e subestratégias, optou-se por apenas definir para ramos os conceitos que também se aplicam a subestratégias. Assume-se uma definição semelhante desses conceitos quando aplicados a subestratégias.

Agregação dos valores de um critério: obtenção de um valor certo para um critério que seja equivalente a uma determinada distribuição de probabilidade de valores do mesmo critério.

Altura de um ramo: fracção máxima do projecto que pode ser executada pelo ramo, quando este é atingido, ou máximo valor possível para a contribuição isolada do ramo (ver *contribuição isolada de um ramo*).

Alternativa eliminada: expressão utilizada, na técnica para identificação de uma estratégia na abordagem interactiva, para referir um arco da meta-árvore que já se sabe que não pode conduzir a uma estratégia aceitável para a presente interacção. Uma alternativa pode ser eliminada por não poder conduzir a estratégias que respeitem

o limite de custo, ou por não poder melhorar suficientemente o tempo da melhor estratégia já obtida (ver *alternativa explorada*, *alternativa potencial* e *meta-árvore*).

Alternativa explorada: expressão utilizada, na técnica para identificação de uma estratégia na abordagem interactiva, para referir um arco da meta-árvore que já foi prosseguido, tendo, portanto, sido já criados o nodo e arcos que dele descendem (ver *alternativa eliminada*, *alternativa potencial* e *meta-árvore*).

Alternativa potencial: expressão utilizada, na técnica para identificação de uma estratégia na abordagem interactiva, para referir um arco da meta-árvore que foi criado mas ainda não foi prosseguido (ainda não foram criados o nodo e arco que dele descendem) nem eliminado. Uma alternativa potencial pode ainda conduzir a uma estratégia aceitável para a presente interacção (ver *alternativa eliminada*, *alternativa explorada* e *meta-árvore*).

Arco b ($b = 1, 2$): no modelo bicritério, é o arco que sai de um nodo de incerteza relativo à utilização de um processo P_i e que corresponde ao avanço de uma fracção $x_{b,i}$ do projecto.

Árvore de estratégia: árvore que apenas tem nodos de incerteza e que representa uma estratégia correspondente ao modelo bicritério (ver *estratégia*).

Contribuição de um ramo para o valor de um critério: conceito que apenas está definido para uma árvore de estratégia do modelo bicritério, e que corresponde à parcela do valor do critério para essa estratégia que é da responsabilidade do ramo. Pode ser calculado como a diferença entre o valor do critério para a estratégia completa e o valor do critério para a estratégia sem o ramo. Pode ainda ser calculado como o produto do valor ajustado do critério correspondente a esse ramo pela probabilidade de o ramo ser atingido (ver *valor ajustado de um critério correspondente a um ramo*).

Contribuição esperada de um ramo: conceito que apenas está definido para uma árvore de estratégia do modelo bicritério, e que corresponde à fracção média do projecto executada pelo ramo, quando essa estratégia é empreendida. Pode ser definida como a contribuição isolada do ramo multiplicada pela probabilidade de este ser atingido (ver *contribuição isolada de um ramo*).

Contribuição isolada de um ramo: no modelo bicritério, é a fracção do projecto executada pelo ramo, quando este é atingido.

Estratégia: conjunto de decisões que define completamente a execução do projecto, tendo em conta todas as possíveis seqüências de acontecimentos incertos.

Estratégia dominada: estratégia relativamente à qual existe outra melhor ou igual em todos os critérios, e estritamente melhor em pelo menos um critério.

Estratégia não dominada: estratégia relativamente à qual não existe nenhuma outra melhor ou igual em todos os critérios, e estritamente melhor em pelo menos um critério.

Fracção do projecto correspondente a/(executada por) um ramo: o mesmo que *contribuição isolada de um ramo*.

Fracção esperada do projecto correspondente a/(executada por) um ramo: o mesmo que *contribuição esperada de um ramo*.

Fracção isolada do projecto correspondente a/(executada por) um ramo: o mesmo que *contribuição isolada de um ramo*.

Meta-árvore: tipo de árvore com uma estrutura particular, que é utilizado na técnica para identificação de uma estratégia na abordagem interactiva. Cada nodo da meta-árvore representa uma escolha de processo, e cada arco representa a utilização de um processo num determinado ponto da estratégia. Cada caminho da raiz da meta-árvore até uma das suas folhas representa uma estratégia completa, e a correspondente sequência de arcos representa os vários processos utilizados. A ordem pela qual os arcos se encontram nesse caminho define a ordenação dos correspondentes nodos da árvore de estratégia (considera-se que os arcos de um caminho da meta-árvore se encontram por ordem decrescente da contribuição isolada dos ramos da árvore de estratégia que se iniciam com os correspondentes nodos).

Nodo binomial: nodo de incerteza com dois ramos.

Raiz de uma árvore: nodo do qual descendem todos os arcos e nodos dessa árvore.

Raiz de um ramo: nodo do qual descendem todos os arcos e nodos desse ramo.

Ramo b ($b = 1, 2$): no modelo bicritério, é o ramo que começa imediatamente após o arco b (ver *ramo de uma árvore*, *arco b*).

Ramo de uma árvore: conjunto de todos os nodos e arcos de uma árvore que descendem de um determinado nodo da árvore (a raiz do ramo), incluindo esse próprio nodo (ver *raiz de um ramo*).

Subestratégia: conjunto de decisões que define completamente a execução de uma parte do projecto, tendo em conta todas as sequências possíveis de acontecimentos incertos.

Sub-ramo de um ramo: ramo da árvore que se inicia imediatamente a seguir à primeira utilização de um processo no ramo.

Sub-ramo b de um ramo ($b = 1, 2$): no modelo bicritério, é o sub-ramo que começa imediatamente após a primeira utilização de um processo no ramo, quando se segue o arco b (ver *arco b*).

Tarefa homogénea: tarefa que pode ser dividida em várias subtarefas com características idênticas.

Valor ajustado de um critério correspondente a/(de) um ramo: valor do critério que se obteria se esse ramo fosse executado como uma árvore independente, considerando o impacto correspondente à entrada no ramo (isto é, o tempo ou custo de mudança necessário para entrar no ramo ou para utilizar o processo inicial deste no início do projecto). Para calcular este valor é necessário saber se o ramo é utilizado no início do projecto e, se assim não for, qual o processo que é utilizado antes do ramo. Pode ser calculado como a soma do valor do critério correspondente ao ramo com o tempo ou custo (conforme o critério que se esteja a considerar), de mudança ou preparação inicial, necessário para entrar no ramo (ver *valor de um critério correspondente a um ramo*).

Valor de um critério correspondente a/(de) um ramo: valor do critério que se obteria se esse ramo fosse executado como uma árvore independente, sem considerar o impacto correspondente à entrada no ramo (isto é, sem considerar o tempo ou custo de mudança ou de preparação inicial necessário para entrar no ramo).

Apêndice B

Notação

Este apêndice define a notação utilizada no trabalho, excluindo a notação que apenas se utiliza localmente, em definições, demonstrações ou exemplos específicos. Apresenta-se especialmente (mas não só) a notação que é utilizada noutros locais para além daqueles em que é definida. A notação aqui apresentada foi definida no texto, sendo aqui incluída para maior facilidade de consulta.

O apêndice está dividido em cinco secções, correspondentes às áreas do trabalho a que a notação se refere: métodos clássicos e opções reais, abordagem multicritério, modelo bicritério, algoritmo e abordagem interactiva. Não foi, assim, incluída uma secção relativa às propriedades matemáticas, pois considerou-se que a notação mais importante destas propriedades é também utilizada nas áreas do trabalho a que as respectivas propriedades se referem, sendo definida nas correspondentes secções. A notação que é utilizada com o mesmo significado em áreas do trabalho consecutivas é definida apenas na secção correspondente à primeira dessas áreas.

B.1 Notação dos métodos clássicos de avaliação de projectos e opções reais

Os seguintes símbolos são utilizados nas expressões para cálculo de medidas de avaliação de projectos:

D : valor de mercado da dívida da empresa.

E : valor de mercado dos capitais próprios da empresa.

F_t : valor esperado do *cash flow* do período t .

F_t^I : parcela do *cash flow* do período t que é considerada investimento.

F_t^R : parcela do *cash flow* do período t que é considerada retorno.

I_0 : investimento inicial.

N : tempo de vida do projecto, em número de períodos (normalmente anos).

N_0 : número de períodos de referência, utilizado no cálculo de algumas medidas financeiras.

r : custo do capital.

r' : taxa de reinvestimento dos *cash flows* intermédios.

r_D : taxa de juro da dívida.

r_E : taxa de rentabilidade esperada exigida aos capitais próprios.

r_F : taxa de juro sem risco.

r_m : taxa de rentabilidade esperada da carteira de mercado.

t : momento ou período de tempo.

V : valor de mercado da empresa.

$WACC$: custo médio ponderado do capital.

Os símbolos utilizados para referir as medidas financeiras são os seguintes:

B/CA : rácio Benefício/Custo Agregado.

IR : Índice de Rentabilidade tradicional.

IRR : Índices de Rentabilidade com Reinvestimento (designação de uma família de índices de rentabilidade).

$IRVT$: Índice de Rentabilidade do Valor Terminal.

ORR : Taxas de Rentabilidade Globais (designação de uma família de medidas de taxa de rentabilidade).

PRC : Período de Recuperação Convencional.

$PRVA$: Período de Recuperação a Valores Actualizados.

$RMCI$: Rentabilidade Marginal do Capital Investido.

TCR: Taxa de Crescimento da Rentabilidade.

TERA: Taxa de Excesso de Rentabilidade Actualizada.

TIR: Taxa Interna de Rentabilidade.

TIRM: Taxa Interna de Rentabilidade Modificada.

TMRC: Taxa Média de Rentabilidade Contabilística.

TMRS: Taxa Média de Rentabilidade de Solomon.

TRA: Taxas de Rentabilidade Actualizadas (designação de uma família de medidas de taxa de rentabilidade).

TRC: Taxa de Rentabilidade Contabilística.

TRLB: Taxa de Rentabilidade de Lin-Beaves.

TRP: Taxas de Rentabilidade em Perpetuidade (designação de uma família de medidas de taxa de rentabilidade).

TRPH: Taxa de Rentabilidade em Perpetuidade de Howe.

VA: Valor Actual.

VAA: Valor Actual Líquido Ajustado.

VAE: Valor Anual Equivalente.

VAL: Valor Actual Líquido.

*VAL**: variante do Valor Actual Líquido proposta por Beaves, que tem em consideração o reinvestimento dos *cash flows* intermédios.

VALR: Valor Actual Líquido com Reinvestimento.

VALVT: Valor Actual Líquido do Valor Terminal.

VCE: Valor Capitalizado Equivalente.

VFL: Valor Futuro Líquido.

No capítulo sobre incorporação de risco e decisões sequenciais na avaliação de projectos é utilizada alguma da notação anterior e também notação que apenas é necessária localmente. Para além disso, existe alguma notação que também é utilizada em capítulos posteriores:

d : factor de variação menos favorável do valor financeiro do activo subjacente, ou activo gémeo, no modelo binomial.

p_V^- : probabilidade neutral face ao risco (também designada por probabilidade ajustada ao valor financeiro) para o menor valor do activo subjacente, ou activo gémeo, no modelo binomial.

p_V^+ : probabilidade neutral face ao risco (também designada por probabilidade ajustada ao valor financeiro) para o maior valor do activo subjacente, ou activo gémeo, no modelo binomial.

u : factor de variação mais favorável do valor financeiro do activo subjacente, ou activo gémeo, no modelo binomial.

V : valor financeiro actual do activo subjacente, ou do activo gémeo.

B.2 Notação da abordagem multicritério

A abordagem utiliza a notação definida para as opções reais, e introduz nova notação:

EC : tempo equivalente certo correspondente a um nodo de incerteza.

m : menor dos tempos correspondentes aos ramos de um nodo de incerteza.

M : maior dos tempos correspondentes aos ramos de um nodo de incerteza.

p : probabilidade de um ramo.

p_T : probabilidade ajustada ao tempo.

p_T^- : probabilidade ajustada ao tempo para o menor tempo dos ramos de um nodo de incerteza.

p_T^+ : probabilidade ajustada ao tempo para o maior tempo dos ramos de um nodo de incerteza.

p_V : probabilidade ajustada ao valor financeiro.

q_k : sequência auxiliar de probabilidades.

r_k : sequência auxiliar de probabilidades.

s : estratégia ou subestratégia.

T : tempo.

$T(s)$: tempo da estratégia ou subestratégia s .

$V(s)$: valor financeiro da estratégia ou subestratégia s .

B.3 Notação do modelo bicritério

O modelo bicritério utiliza pontualmente a notação da abordagem, mas utiliza essencialmente notação própria:

$c_{0,i}, i = 1, \dots, n$: custo de utilizar o processo P_i no início do projecto.

$c_i, i = 1, \dots, n$: custo de cada utilização do processo P_i .

$c_{i,j}, i, j = 1, \dots, n$: custo de mudar do processo P_i para o processo P_j .

$c_{i,j}^-, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$: custo de mudança mínimo de P_i para P_j , que representa o menor custo de mudança possível de P_i para P_j , considerando a transição directa e a utilização de processos intermédios.

$C(r)$: custo correspondente ao ramo r .

$CA(r)$: custo ajustado correspondente ao ramo r .

$CC(r)$: contribuição do ramo r para o custo.

$CT(r)$: contribuição do ramo r para o tempo.

$f(r)$: contribuição esperada do ramo r , também designada de fracção esperada do projecto executada pelo ramo.

$h(r)$: altura do ramo r .

n : número de processos diferentes.

$p(r)$: probabilidade de o ramo r ser atingido; pode ser calculada através do produto das probabilidades de todos os arcos que ligam a raiz da árvore à raiz do ramo.

$P_i, i = 1, \dots, n$: i -ésimo processo.

$P_{b,i}, b = 1, 2; i = 1, \dots, n$: probabilidade de ser seguido o arco b num nodo de incerteza correspondente à utilização do processo P_i .

$P_{b,i}^{T,b_1}, b, b_1 = 1, 2; i = 1, \dots, n$: probabilidade ajustada ao tempo do ramo b de um nodo de incerteza, correspondente à utilização do processo P_i , em que o tempo do ramo b_1 ($b_1 = 1$ ou $b_1 = 2$) é superior ao do outro ramo.

$P_{b,i}^V, b = 1, 2; i = 1, \dots, n$: probabilidade ajustada ao valor do ramo b de um nodo de incerteza correspondente à utilização do processo P_i .

r : ramo de uma árvore de estratégia.

$t_{0,i}, i = 1, \dots, n$: tempo de preparação necessário para utilizar o processo P_i no início do projecto.

$t_i, i = 1, \dots, n$: duração de cada utilização do processo P_i .

$t_{i,j}, i, j = 1, \dots, n$: tempo necessário para mudar do processo P_i para o processo P_j .

$t_{i,j}^-, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$: tempo de mudança mínimo de P_i para P_j , que representa o menor tempo de mudança possível de P_i para P_j , considerando a transição directa e a utilização de processos intermédios.

$T(r)$: tempo correspondente ao ramo r .

$TA(r)$: tempo ajustado correspondente ao ramo r .

x : fracção do projecto.

$x(r)$: contribuição isolada do ramo r , também designada de fracção isolada (ou simplesmente fracção) do projecto executada pelo ramo.

x^0 : “quantidade de trabalho” necessária para completar o projecto; assume-se, sem perda de generalidade, que $x^0 = 1$.

$x_{b,i}, b = 1, 2; i = 1, \dots, n$: montante do avanço do projecto quando é seguido o arco b num nodo de incerteza correspondente à utilização do processo P_i .

$\tau_i^-, i = 1, \dots, n$: coeficiente calculado a partir dos parâmetros do processo P_i , que representa o “tempo por avanço médio” do processo.

$\tau_i^+, i = 1, \dots, n$: coeficiente calculado a partir dos parâmetros do processo P_i , que fornece uma indicação sobre a forma como o tempo aumenta relativamente ao avanço do projecto quando o processo P_i é utilizado.

$\chi_i^-, i = 1, \dots, n$: coeficiente calculado a partir dos parâmetros do processo P_i , que representa o “custo por avanço médio” do processo.

$\chi_i^+, i = 1, \dots, n$: coeficiente calculado a partir dos parâmetros do processo P_i , que fornece uma indicação sobre a forma como o custo aumenta relativamente ao avanço do projecto quando o processo P_i é utilizado.

B.4 Notação do algoritmo

Na apresentação inicial do algoritmo é utilizada a seguinte notação:

$B_b, b = 1, 2$: conjunto de subestratégias candidatas a serem utilizadas como ramo b das novas subestratégias geradas para o conjunto $S(i, I)$ actualmente a ser calculado.

$E_i, i = 1, \dots, n$: conjunto de valores l_i que provocaram alterações em $S(i, I)$.

I : intervalo de valores de x (fracções do projecto).

$l_i, i = 1, \dots, n$: limite superior do último intervalo I para o qual $S(i, I)$ foi calculado.

proxmudanca: valor de x que pode provocar a próxima alteração no conjunto de estratégias não dominadas.

$S(i), i = 1, \dots, n$: conjunto de estratégias não dominadas que permitem concluir o projecto começando por utilizar o processo P_i . Cada estratégia pertencente a $S(i)$ é não dominada no sentido em que não existe nenhuma outra estratégia, quer em $S(i)$ quer em $S(j), j = 1, \dots, n, j \neq i$, que a domine.

$S(i, I), i = 1, \dots, n$: conjunto comum de subestratégias que permitem executar as fracções do projecto $x \in I$; considera-se que $S(i, I) = S(i, x)$ sse $\forall x' \in I, S(i, x') = S(i, x)$.

$S(i, x), i = 1, \dots, n$: conjunto de subestratégias que permitem executar uma fracção x do projecto começando por utilizar o processo P_i , e que não são dominadas por nenhuma outra subestratégia que pertença a este conjunto; uma subestratégia de $S(i, x)$ pode ser dominada por uma de $S(j, x)$, desde que $j \neq i$.

TODAS: conjunto de todas as subestratégias (dominadas e não dominadas) candidatas a integrar o conjunto $S(i, I)$ actualmente a ser calculado.

u : limite superior do novo intervalo I para o qual se está a calcular $S(i, I)$.

V : conjunto de valores $v \geq \tau$ para os quais $S(j, v)$ pode ser necessário para calcular $S(i, 1)$.

τ : limiar a partir do qual se passa a verificar se é mais vantajoso calcular $S(j, I)$, para o próximo intervalo $I =]l_j, proxmudanca]$, ou calcular $S(j, v)$, para o próximo valor v cujo respectivo conjunto de subestratégias não dominadas possa ser necessário para calcular $S(i, 1)$.

Na definição detalhada do algoritmo, é introduzida nova notação, e são introduzidas algumas alterações à notação anterior. Assim, os conjuntos $S(i, x)$ e $S(i, I)$ passam a ser

conjuntos ordenados, sendo a n -ésima subestratégia de $S(i, x)$ identificada como $s_n(i, x)$. Cada subestratégia $s_n(i, x)$ é representada na forma $s_n(i, x) = ((j_1, y_1), (j_2, y_2), t, c, x_{max})$, com:

(j_b, y_b) : par ordenado que identifica a subestratégia seguida no ramo b ; esta subestratégia é $s_{y_b}(j_b, x - x_{b,i})$.

t : o tempo da subestratégia.

c : o custo da subestratégia.

x_{max} : maior valor de x para o qual a subestratégia é válida.

A representação de estratégias completas é semelhante, apenas se excluindo o valor de x_{max} .

As subestratégias candidatas a serem utilizadas como ramos para geração de novas subestratégias são representadas na forma $((j, y), t, c)$, com:

(j, y) : par ordenado que identifica a subestratégia (se esta for utilizada no ramo b de uma nova subestratégia que comece por utilizar P_i , então (j, y) identifica a subestratégia $s_y(j, x - x_{b,i})$).

t : tempo ajustado da subestratégia para o ramo em que se está a considerar a sua utilização.

c : custo ajustado da subestratégia para o ramo em que se está a considerar a sua utilização.

A definição dos conjuntos B_b e $TODAS$ altera-se ligeiramente, passando a ser:

$B_b, b = 1, 2$: conjunto de subestratégias não dominadas que ainda não estão incluídas em $NDB_{b,i}$, e são candidatas a serem utilizados no ramo b das subestratégias que estão a ser geradas.

$TODAS$: conjunto de todas as novas subestratégias, quer dominadas quer não dominadas, que foram geradas para o cálculo do conjunto $S(i, I)$ actualmente a ser considerado (não se incluem as que possam transitar do conjunto $S(i, I')$, calculado para o intervalo I' anterior).

É ainda utilizada a seguinte notação adicional:

$a[i, j, b], i = 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n, b = 1, 2$: próximo valor de x para o qual uma mudança em $S(i, I)$ pode ser motivada pela utilização, no ramo b , de uma subestratégia não dominada que comece por utilizar P_j ; se $a[i, 0, b] < +\infty$, então a próxima mudança em $S(i, I)$ irá ocorrer sem que se tenha ainda efectuado a primeira escolha de processo no ramo considerado, não fazendo ainda sentido considerar alterações em $S(i, I)$ causadas por subestratégias utilizadas nesse ramo.

$D_i, i = 1, \dots, n$: conjunto de subestratégias dominadas que foram candidatas a serem incluídas no último conjunto $S(i, I)$ considerado.

$DB_{b,i}, b = 1, 2, i = 1, \dots, n$: conjunto de subestratégias não dominadas, candidatas a constituírem o ramo b das subestratégias para o último conjunto $S(i, I)$ considerado, e que são ramos dominados para este conjunto.

$lc_i, i = 1, \dots, n$: limite superior do último intervalo I para o qual o conjunto $S(i, I)$ foi diferente do conjunto correspondente ao intervalo anterior.

$M_i, i = 1, \dots, n$: conjunto de pares ordenados (j, b) que representam subestratégias candidatas a serem utilizadas como ramos de subestratégias do conjunto $S(i, I)$ que está a ser calculado, e que não o foram no anterior conjunto $S(i, I')$; cada par (j, b) indica que as subestratégias que começam por utilizar o processo P_j são candidatas a serem utilizadas no ramo b .

$NDB_{b,i}, b = 1, 2, i = 1, \dots, n$: conjunto de subestratégias não dominadas, candidatas a constituírem o ramo b das subestratégias para o último conjunto $S(i, I)$ considerado, e que são ramos não dominados para este conjunto.

RE : conjunto de subestratégias presentes no último conjunto $S(i, I')$ calculado, e que não pertencerão ao conjunto $S(i, I)$ actualmente a ser calculado e referente ao mesmo processo P_i .

$x_{min}(s)$: limite inferior do primeiro intervalo I para o qual a subestratégia s foi pela primeira vez incluída num conjunto $S(i, I)$;

B.5 Notação da abordagem interactiva utilizada com o tempo médio

Para o procedimento interactivo é utilizada a seguinte notação:

c_l : limite inferior do intervalo aberto de valores que faz sentido explorar para o custo máximo, tendo em conta as interacções anteriores.

c_r : valor do custo máximo utilizado para gerar uma nova estratégia na presente interacção.

c_u : limite superior do intervalo aberto de valores que faz sentido explorar para o custo máximo, tendo em conta as interacções anteriores.

$C(s)$: custo da estratégia s .

C^M : forma genérica de referir o custo máximo.

s : estratégia completa.

s^- : estratégia que minimiza o tempo sujeita à restrição de custo considerada.

s_l : estratégia que transita da interacção anterior, utilizada como estratégia de referência para o menor custo.

s_u : estratégia que transita da interacção anterior, utilizada como estratégia de referência para o menor tempo.

$T(s)$: tempo da estratégia s .

ε : parâmetro de erro máximo, que define qual o valor máximo da diferença entre dois tempos que é considerada negligenciável.

Para a técnica de identificação de uma estratégia, mantém-se o significado de ε e s^- , e define-se ainda:

A, A_E, A_X, A_P, A_F : alternativas; A representa uma qualquer alternativa, A_E uma alternativa eliminada, A_X uma alternativa a explorar, ou a alternativa mais promissora num nodo da meta-árvore, A_P uma alternativa potencial, e A_F uma alternativa correspondente a uma folha da meta-árvore.

$cmin_i(x), i = 1, \dots, n, x \in]0, 1]$: funções que representam o menor custo possível de execução de uma fracção x do projecto, se se começar por utilizar o processo P_i .

$C^0(A)$: custo da estratégia incompleta correspondente à alternativa A .

$C^{LB}(A)$: limite inferior do custo de uma estratégia completa que contenha a estratégia incompleta correspondente à alternativa A .

C^M : custo máximo.

$P(A)$: alternativa correspondente ao arco da meta-árvore que antecede a alternativa A .

s' : estratégia que obedece à restrição de custo, e para a qual existe a certeza de que o tempo não excede em mais do que ε o tempo da estratégia s^-

s^* : melhor estratégia completa que já se tiver obtido, isto é, estratégia com menor tempo de entre as que obedecem à restrição de custo.

T^* : tempo da melhor estratégia completa que já se tiver obtido.

$T^0(A)$: tempo da estratégia incompleta correspondente à alternativa A .

$T^{LB}(A)$: limite inferior para o tempo de uma estratégia completa que contenha a estratégia incompleta correspondente à alternativa A e obedeça à restrição de custo.

No exemplo, é necessário utilizar a notação correspondente aos parâmetros do problema 6a:

A_n : n -ésima alternativa.

$\text{cmin}'_i(x), i = 1, \dots, n, x \in]0, 1]$: funções que representam o menor custo possível de execução de uma fracção x do projecto, se se tiver acabado de utilizar o processo P_i , tendo em consideração o custo de mudança inicial.

C^M : custo máximo.

$f'_i(A), i = 1, \dots, n$: fracção esperada do projecto a ser executada em ramos ainda não incluídos na árvore de estratégia correspondente à alternativa A , e que são imediatamente precedidos pelo uso do processo P_i .

$x_{i,+}(A)$: maior valor da contribuição isolada, para os ramos ainda não incluídos na árvore de estratégia correspondente à alternativa A que são imediatamente precedidos pelo uso do processo P_i (se $f'_i(A) = 0$, então não existem ramos precedidos pela utilização de P_i , devendo atribuir-se a $x_{i,+}$ um valor não nulo, por exemplo $x_{i,+} = 1$).

$z_{i,j}$: variáveis de decisão do problema 6a, que representam a fracção esperada do projecto que será empreendida utilizando o processo P_j em ramos imediatamente precedidos pela utilização do processo P_i (na parte da árvore de estratégia ainda indefinida).

É ainda utilizada a seguinte notação para o exemplo:

$\tau_i^-, i = 1, \dots, n$: coeficiente, calculado a partir dos parâmetros do processo P_i , que representa o “tempo por avanço médio” do processo.

$\chi_i^-, i = 1, \dots, n$: coeficiente, calculado a partir dos parâmetros do processo P_i , que representa o “custo por avanço médio” do processo.

Apêndice C

Tabelas com os resultados dos testes

Neste apêndice são apresentadas as tabelas com os principais resultados obtidos nos testes ao algoritmo do capítulo 7.

C.1 Testes relativos ao modelo geral

Tabela C.1: Resultados obtidos para o conjunto 1 de sequências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
8.0	0.00	2.25	12.3	2796202
7.5	0.00	2.25	43.4	2796202
7.0	0.00	2.25	43.9	2796202
6.5	0.05	2.31	146.5	2796202
6.0	0.05	2.31	164.2	2796202
5.5	2.28	3.40	391.1	2796202
5.0	3.41	4.01	459.3	2796202
4.5	50.13	28.25	992.0	2796202
4.0	80.93	46.77	1161.6	2796202

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.095, 0.10]$, $i, b = 1, 2$; $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1$;
 $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60]$, $i = 1, 2$.

Tabela C.2: Resultados obtidos para o conjunto 2 de sequências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
9.0	0.00	18.47	12.5	11184810
8.5	0.00	18.47	46.9	11184810
8.0	0.00	18.47	47.4	11184810
7.5	0.06	18.54	153.2	11184810
7.0	0.06	18.55	169.6	11184810
6.5	2.28	20.60	406.9	11184810
6.0	3.52	21.75	489.9	11184810
5.5	39.72	59.90	965.4	11184810
5.0	76.77	96.04	1143.6	11184810

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.085, 0.09]$, $i, b = 1, 2$; $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1$;
 $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60]$, $i = 1, 2$.

Tabela C.3: Resultados obtidos para o conjunto 3 de sequências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
11.0	0.00	-	15.0	134000000*
10.5	0.00	-	41.4	134000000*
10.0	0.00	-	48.5	134000000*
9.5	0.04	-	113.5	134000000*
9.0	0.07	-	139.4	134000000*
8.5	1.13	-	308.3	134000000*
8.0	1.84	-	375.2	134000000*
7.5	18.38	-	697.2	134000000*
7.0	35.32	-	893.8	134000000*

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.07, 0.075]$, $i, b = 1, 2$; $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1$;
 $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60]$, $i = 1, 2$;

-: não foi possível executar o método básico para estes parâmetros por a memória do sistema utilizado ser insuficiente;

*:o valor apresentado é uma estimativa da dimensão da árvore, uma vez que não foi possível construir a árvore completa para estes parâmetros.

Tabela C.4: Resultados obtidos para o conjunto 4 de seqüências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
6.5	0.00	0.17	26.1	167961
6.0	0.00	0.16	27.5	167961
5.5	0.07	0.20	110.9	167961
5.0	0.08	0.22	129.8	167961
4.5	0.09	0.22	145.2	167961
4.0	0.09	0.23	150.9	167961
3.5	4.85	3.77	434.8	167961
3.0	9.23	6.27	529.2	167961
2.5	13.87	10.33	748.8	167961
2.0	18.48	15.60	864.6	167961

Parâmetros base: $t_{i,j} = c_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.15, 0.16]$, $i = 1, 2, 3$, $b = 1, 2$; $t_1 = 1$, $c_1 = 3$, $t_2 = 2$, $c_2 = 2$, $t_3 = 3$, $c_3 = 1$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2, 3$; $P_{1,i}^{T,1}$, $P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60]$, $i = 1, 2, 3$.

Tabela C.5: Resultados obtidos para o conjunto 5 de seqüências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
3.0	0.00	0.00	56.1	9919
2.5	0.00	0.01	92.7	9678
2.0	0.06	0.06	148.3	9811
1.5	0.52	0.53	313.1	9818
1.0	1.51	1.62	447.3	9938
0.5	86.25	108.62	1575.6	9715

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{1,i} \in [0.13, 0.14]$, $x_{2,i} \in [0.18, 0.19]$, $i = 1, 2$; $t_1 = 1$, $c_1 = 2$, $t_2 = 2$, $c_2 = 1$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}$, $P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60]$, $i = 1, 2$.

Tabela C.6: Resultados obtidos para o conjunto 6 de sequências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
10.0	0.00	2.16	10.9	2625164
9.5	0.00	2.16	19.4	2625164
9.0	0.00	2.16	30.3	2625164
8.5	0.01	2.17	53.6	2625164
8.0	0.04	2.18	90.3	2613480
7.5	0.11	2.24	141.4	2629009
7.0	0.22	2.33	165.7	2629009
6.5	0.52	2.52	251.8	2690225
6.0	2.20	3.38	338.4	2697390
5.5	11.05	8.15	541.1	2839215
5.0	83.61	47.18	980.2	2797491
4.5	205.44	138.43	1446.8	2569013

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros:

$x_{1,1} \in [0.07, 0.08], x_{2,1} \in [0.08, 0.09], x_{1,2} \in [0.105, 0.12], x_{2,2} \in [0.12, 0.135], i = 1, 2$;
 $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 3, c_2 = 1.5$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60], i = 1, 2$.

Tabela C.7: Resultados obtidos para o conjunto 7 de seqüências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
[0.2500,0.2600]	0.00	0.00	2.0	170
[0.2300,0.2392]	0.00	0.00	2.0	682
[0.1947,0.2025]	0.00	0.00	2.0	2442
[0.1648,0.1714]	0.00	0.00	2.0	3531
[0.1395,0.1450]	0.00	0.05	2.0	35325
[0.1180,0.1228]	0.00	0.17	2.0	174762
[0.0999,0.1039]	0.00	0.60	2.0	699050
[0.0919,0.0956]	0.00	2.31	2.0	2796202
[0.0846,0.0879]	0.00	18.53	2.0	11184810
[0.0778,0.0809]	0.00	129.19	2.0	44739242
[0.0716,0.0744]	0.00	-	2.0	117664746*
[0.0658,0.0685]	0.00	-	2.0	613414424*
[0.0513,0.0533]	0.01	-	2.0	2.16E+11*
[0.0399,0.0415]	0.05	-	2.0	4.05E+14*
[0.0286,0.0297]	0.09	-	2.0	2.88E+20*
[0.0205,0.0213]	0.66	-	2.0	4.25E+28*
[0.0124,0.0129]	0.66	-	2.0	2.13E+47*
[0.0075,0.0078]	0.71	-	2.0	1.48E+78*
[0.0046,0.0048]	0.82	-	2.0	1.07E+129*
[0.0033,0.0034]	1.00	-	2.0	1.52E+180*
[0.0028,0.0029]	1.15	-	2.0	8.14E+212*

Parâmetros base: $I : x_{b,i} \in I, i, b = 1, 2.$

Outros parâmetros: $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1 ; t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 10000 ; P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2 ; P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60], i = 1, 2 ;$

-: não foi possível executar o método básico para estes parâmetros por a memória do sistema utilizado ser insuficiente;

*:o valor apresentado é uma estimativa da dimensão da árvore, uma vez que não foi possível construir a árvore completa para estes parâmetros.

Tabela C.8: Resultados obtidos para o conjunto 8 de seqüências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
[0.2500,0.2600]	0.03	0.04	253.3	170
[0.2300,0.2392]	22.16	20.92	1712.2	682
[0.1947,0.2025]	602.85	597.43	3386.8	2506

Parâmetros base: $I : x_{b,i} \in I, i, b = 1, 2.$

Outros parâmetros: $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1 ; t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 0 ; P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2 ; P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60], i = 1, 2.$

Tabela C.9: Resultados obtidos para o conjunto 9 de seqüências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
8.0	0.02	2.32	81.6	2803255
7.5	0.02	2.32	98.4	2803315
7.0	0.02	2.33	98.1	2796959
6.5	0.07	2.33	161.1	2796719
6.0	0.08	2.34	171.1	2796913
5.5	1.02	2.65	272.4	2796972
5.0	1.78	2.87	323.9	2796972
4.5	13.28	7.37	482.8	2803538
4.0	25.87	12.29	597.9	2803538

Parâmetros base: $c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.09, 0.095]$, $i, b = 1, 2$; $t_1 = 1$, $c_1 = 2$, $t_2 = 2$, $c_2 = 1$; $t_{1,2} = t_{2,1} = 6$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60]$, $i = 1, 2$.

Tabela C.10: Resultados obtidos para o conjunto 10 de seqüências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
8.0	0.03	2.34	92.6	2827605
7.5	0.04	2.33	109.9	2827605
7.0	0.04	2.34	112.9	2827605
6.5	0.07	2.36	173.0	2827594
6.0	0.07	2.37	191.9	2827604
5.5	0.84	3.61	321.8	2991497
5.0	1.19	4.20	359.6	2991497
4.5	10.71	27.16	608.8	2986289
4.0	17.21	46.35	737.4	2991497

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.09, 0.095]$, $i, b = 1, 2$; $t_1 = 1$, $c_1 = 2$, $t_2 = 2$, $c_2 = 1$; $c_{1,2} = c_{2,1} = 6$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60]$, $i = 1, 2$.

Tabela C.11: Resultados obtidos para o conjunto 11 de seqüências.

Parâmetro base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
10	0.06	2.34	129.9	2815665
8	0.06	2.35	156.0	2815665
6	0.07	2.35	174.3	2815665
4	0.07	2.36	183.8	2814348
2	0.07	2.36	211.9	2814349
0	0.07	2.37	231.6	2815665

Parâmetro base: $c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.09, 0.095]$, $i, b = 1, 2$; $t_1 = 1$, $c_1 = 2$, $t_2 = 2$, $c_2 = 1$; $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = 6$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60]$, $i = 1, 2$.

Tabela C.12: Resultados obtidos para o conjunto 12 de sequências.

Parâmetro base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
7.0	0.04	2.29	107.0	2799306
6.5	0.06	2.31	151.6	2799306
6.0	0.07	2.34	172.6	2799306
5.5	0.38	2.90	262.5	2822022
5.0	0.63	3.43	305.4	2822022
4.5	5.07	13.20	516.5	2822022
4.0	8.90	22.00	609.8	2822022
3.5	65.45	151.67	1082.1	2800931

Parâmetro base: $t_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.09, 0.095], i, b = 1, 2$; $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1$;
 $t_{1,2} = c_{1,2} = c_{2,1} = 6$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60], i = 1, 2$.

Tabela C.13: Resultados obtidos para o conjunto 13 de sequências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
0.0	0.00	0.00	6.3	9929
0.1	0.61	1.00	312.8	10073
0.2	0.64	0.97	315.4	10073
0.3	0.60	0.85	322.7	10073
0.4	1.14	1.33	412.7	10073
0.5	0.79	0.72	364.4	10032
0.6	0.58	0.59	333.8	9903
0.7	0.57	0.57	322.6	10141
0.8	0.69	0.69	292.0	10110
0.9	0.48	0.52	261.0	10117
1.0	0.00	0.00	8.6	9967

Parâmetros base: $P_{1,i}^{T,1} = P_{2,i}^{T,2}$.

Outros parâmetros: $x_{1,i} \in [0.13, 0.14], x_{2,i} \in [0.18, 0.19], i = 1, 2$; $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1$;
 $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 1$; $P_{1,1} = P_{1,2} = 0.5$.

Tabela C.14: Resultados obtidos para o conjunto 14 de sequências.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
0.95	362.47	398.29	5079.6	9957
0.90	37.44	39.04	1743.3	10083
0.80	0.72	0.69	386.8	9996
0.70	0.10	0.11	187.1	9922
0.60	0.05	0.06	119.6	10065
0.50	0.06	0.06	142.1	9756
0.40	0.05	0.05	165.3	10186
0.30	0.20	0.20	327.7	9911
0.20	2.23	2.15	859.5	10001
0.10	79.53	83.55	3845.9	9909
0.05	382.32	398.74	9019.5	9890

Parâmetros base: $P_{1,i} = P_{1,i}^{T,1} = P_{1,i}^{T,2}$.

Outros parâmetros: $x_{1,i} \in [0.13, 0.14]$, $x_{2,i} \in [0.18, 0.19]$, $i = 1, 2$; $t_1 = 1$, $c_1 = 2$, $t_2 = 2$, $c_2 = 1$; $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 2$.

C.2 Testes relativos ao tempo máximo

Tabela C.15: Resultados obtidos para o conjunto 1 de seqüências utilizando o tempo máximo.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
8.0	0.00	2.27	2.0	2796202
7.0	0.00	2.29	2.0	2796202
6.0	0.00	2.28	2.0	2796202
5.0	0.00	2.30	2.0	2796202
4.0	0.00	2.31	4.0	2796202
3.0	0.00	2.33	6.0	2796202
2.0	0.00	2.47	8.0	2796202
1.0	0.00	3.13	10.0	2796202
0.0	0.00	5.25	12.0	2796202

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.095, 0.10]$, $i, b = 1, 2$; $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1$;

$P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$.

Tabela C.16: Resultados obtidos para o conjunto 2 de seqüências utilizando o tempo máximo.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
9.0	0.00	17.83	2.0	11184810
8.0	0.00	17.84	2.0	11184810
7.0	0.00	17.85	2.0	11184810
6.0	0.00	17.86	2.0	11184810
5.0	0.00	17.92	3.0	11184810
4.0	0.00	18.05	5.0	11184810
3.0	0.00	18.62	7.0	11184810
2.0	0.00	21.01	9.0	11184810
1.0	0.00	29.71	11.0	11184810
0.0	0.00	65.92	13.0	11184810

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.085, 0.09]$, $i, b = 1, 2$; $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1$;

$P_{1,i} \in [0.49, 0.51]$, $i = 1, 2$.

Tabela C.17: Resultados obtidos para o conjunto 3 de seqüências utilizando o tempo máximo.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
11.0	0.000	-	2.4	134000000*
9.0	0.000	-	2.4	134000000*
7.0	0.000	-	2.8	134000000*
6.0	0.000	-	4.4	134000000*
5.0	0.000	-	6.4	134000000*
4.0	0.000	-	8.4	134000000*
3.0	0.000	-	10.2	134000000*
2.0	0.009	-	12.3	134000000*
1.0	0.009	-	13.9	134000000*
0.0	0.013	-	14.9	134000000*

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.07, 0.075], i, b = 1, 2; t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1;$

$P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2;$

-: não foi possível executar o método básico para estes parâmetros por a memória do sistema utilizado ser insuficiente;

*:o valor apresentado é uma estimativa da dimensão da árvore, uma vez que não foi possível construir a árvore completa para estes parâmetros.

Tabela C.18: Resultados obtidos para o conjunto 4 de seqüências utilizando o tempo máximo.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
6.0	0.00	0.17	3.0	167961
4.0	0.00	0.17	3.0	167961
3.0	0.00	0.17	3.0	167961
2.0	0.00	0.17	7.0	167961
1.0	0.00	0.22	11.0	167961
0.0	0.00	0.44	15.0	167961

Parâmetros base: $t_{i,j} = c_{i,j}, i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

Outros parâmetros: $x_{b,i} \in [0.15, 0.16], i = 1, 2, 3, b = 1, 2; t_1 = 1, c_1 = 3, t_2 = 2,$

$c_2 = 2, t_3 = 3, c_3 = 1; P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2, 3.$

Tabela C.19: Resultados obtidos para o conjunto 5 de sequências utilizando o tempo máximo.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
3.0	0.00	0.00	4.3	9919
2.0	0.00	0.00	6.4	9919
1.0	0.00	0.00	8.6	9919
0.5	0.00	0.00	16.1	9716
0.0	0.00	0.00	9.0	9919

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros: $x_{1,i} \in [0.13, 0.14], x_{2,i} \in [0.18, 0.19], i = 1, 2$; $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2$; $P_{1,i}^{T,1}, P_{2,i}^{T,2} \in [0.55, 0.60], i = 1, 2$.

Tabela C.20: Resultados obtidos para o conjunto 6 de sequências utilizando o tempo máximo.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
10.0	0.00	2.20	2.6	2625164
7.0	0.00	2.20	2.9	2625164
6.0	0.00	2.20	4.2	2625164
5.0	0.00	2.21	6.6	2625164
4.0	0.00	2.25	8.6	2625164
3.0	0.00	2.40	10.4	2625164
2.0	0.00	2.66	13.9	2625164
1.0	0.00	2.66	13.9	2625164
0.0	0.00	2.66	13.9	2625164

Parâmetros base: $t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1}$.

Outros parâmetros:

$x_{1,1} \in [0.07, 0.08], x_{2,1} \in [0.08, 0.09], x_{1,2} \in [0.105, 0.12], x_{2,2} \in [0.12, 0.135], i = 1, 2$;
 $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 3, c_2 = 1.5$; $P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2$.

Tabela C.21: Resultados obtidos para o conjunto 7 de seqüências utilizando o tempo máximo.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
[0.2500,0.2600]	0.00	0.00	2.0	170
[0.2300,0.2392]	0.00	0.00	2.0	682
[0.1947,0.2025]	0.00	0.00	2.0	2442
[0.1648,0.1714]	0.00	0.00	2.0	3531
[0.1395,0.1450]	0.00	0.05	2.0	35958
[0.1180,0.1228]	0.00	0.17	2.0	174762
[0.0999,0.1039]	0.00	0.60	2.0	699050
[0.0919,0.0956]	0.00	2.31	2.0	2796202
[0.0846,0.0879]	0.00	18.56	2.0	11184810
[0.0778,0.0809]	0.00	129.20	2.0	44739242
[0.0716,0.0744]	0.00	-	2.0	117664746*
[0.0658,0.0685]	0.00	-	2.0	613414424*
[0.0513,0.0533]	0.00	-	2.0	2.16E+11*
[0.0399,0.0415]	0.00	-	2.0	4.05E+14*
[0.0286,0.0297]	0.09	-	2.0	2.88E+20*
[0.0205,0.0213]	0.66	-	2.0	4.25E+28*
[0.0124,0.0129]	0.66	-	2.0	2.13E+47*
[0.0075,0.0078]	0.71	-	2.0	1.48E+78*
[0.0046,0.0048]	0.82	-	2.0	1.07E+129*
[0.0033,0.0034]	0.99	-	2.0	1.52E+180*
[0.0028,0.0029]	1.14	-	2.0	8.14E+212*

Parâmetro base: $I : x_{b,i} \in I, i, b = 1, 2$.

Outros parâmetros: $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1 ; t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 10000 ;$

$P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2 ;$

-: não foi possível executar o método básico para estes parâmetros por a memória do sistema utilizado ser insuficiente;

*:o valor apresentado é uma estimativa da dimensão da árvore, uma vez que não foi possível construir a árvore completa para estes parâmetros.

Tabela C.22: Resultados obtidos para o conjunto 8 de seqüências utilizando o tempo máximo.

Parâmetros base	Tempo do algoritmo (seg.)	Tempo do método básico (seg.)	Estratégias não dominadas	Dimensão da árvore (nodos de incerteza)
[0.2500,0.2600]	0.00	0.00	5.0	170
[0.2300,0.2392]	0.00	0.00	6.0	682
[0.1947,0.2025]	0.00	0.00	6.8	2504
[0.1648,0.1714]	0.00	0.00	7.6	3788
[0.1395,0.1450]	0.00	0.08	8.8	37845
[0.1180,0.1228]	0.00	0.33	10.0	174762
[0.0999,0.1039]	0.00	1.34	10.8	699299
[0.0919,0.0956]	0.00	5.25	12.0	2796202
[0.0846,0.0879]	0.00	66.99	13.0	11184810
[0.0778,0.0809]	0.00	334.23	14.0	44739242
[0.0716,0.0744]	0.00	-	15.0	1.18E+08*
[0.0658,0.0685]	0.03	-	16.6	6.13E+08*
[0.0513,0.0533]	0.14	-	20.6	2.16E+11*
[0.0399,0.0415]	0.22	-	25.8	4.05E+14*
[0.0286,0.0297]	2.41	-	35.6	2.88E+20*
[0.0263,0.0274]	4.18	-	38.6	1.79E+22*
[0.0223,0.0232]	40.35	-	45.8	2.11E+26*
[0.0205,0.0213]	65.31	-	49.6	4.25E+28*
[0.0189,0.0196]	138.95	-	53.7	1.36E+31*

Parâmetros base: $I : x_{b,i} \in I, i, b = 1, 2$.

Outros parâmetros: $t_1 = 1, c_1 = 2, t_2 = 2, c_2 = 1 ; t_{1,2} = t_{2,1} = c_{1,2} = c_{2,1} = 0 ;$

$P_{1,i} \in [0.49, 0.51], i = 1, 2 ;$

-: não foi possível executar o método básico para estes parâmetros por a memória do sistema utilizado ser insuficiente;

*:o valor apresentado é uma estimativa da dimensão da árvore, uma vez que não foi possível construir a árvore completa para estes parâmetros.