

# **Características de polítopos**

António Pedro Neves Goucha





# Características de polítopos

António Pedro Neves Goucha

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**  
Área de Especialização em **Estatística, Otimização e Matemática Financeira**

## Júri

**Presidente:** Dr. Paulo Eduardo Aragão Aleixo e Neves de Oliveira  
**Orientador:** Dr. João Eduardo da Silveira Gouveia  
**Vogais:** Dr. João Eduardo da Silveira Gouveia  
Dr. João Luís Cardoso Soares

**Data: Julho de 2016**



# Resumo

A complexidade de extensão de um polítopo é uma medida da sua complexidade na resolução de um programa linear. Por um teorema clássico de Yannakakis, esta corresponde à característica não negativa de uma matriz associada ao polítopo, a chamada matriz de folgas.

Na primeira parte deste trabalho, efectuamos o estudo assintótico de dois minorantes da complexidade de extensão para o caso de polígonos: um combinatório e um geométrico. O resultado obtido melhora significativamente o corrente estado da arte.

Na segunda parte, concentramos os nossos esforços na característica booleana da matriz de folgas de um polígono. Fazemos um levantamento breve dos minorantes disponíveis, verificando a sua eficácia para o caso dos polígonos, e exploramos uma técnica de majoração, dando-lhe uma nova interpretação gráfica e recuperando e estendendo os resultados disponíveis. Como consequência, obtemos novos valores exactos para a característica booleana de alguns polígonos para os quais não estava ainda determinada.

**Palavras Chave:** polígonos, complexidade de extensão, característica booleana, característica não negativa

# Abstract

The extension complexity of a polytope is a measure of its complexity when solving a linear program. By a classic result of Yannakakis, this corresponds to the nonnegative rank of a matrix associated to the polytope, its so-called slack matrix.

On the first part of this work, we will do the asymptotic study of two lower bounds for the extension complexity: one combinatorial and another one geometric. The obtained results significantly improve the current state of the art.

On the second part, we will focus our efforts in the boolean rank of the slack matrix of a polygon. We will do a short survey of the available lower bounds, verifying their effectiveness on the polygon case, and we explore an upper bound technique, offering a new graphical interpretation and recovering and extending the available results. As a consequence, we get new exact values for the boolean rank of some polygons for which it was not previously determined.

**Keywords:** polygons, extension complexity, boolean rank, nonnegative rank



# Agradecimentos

*"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.", Oliver Wendell Holmes*

*Não seria possível a realização desta dissertação de mestrado sem os importantes apoios e incentivos que recebi e pelos quais estou grato.*

*Ao Professor Doutor João Gouveia, pela sua orientação, total disponibilidade e apoio, pelos conhecimentos transmitidos, pelas opiniões e críticas construtivas e, particularmente, pelo incentivo constante e oportuno.*

*Depois, a todos os professores do Departamento de Matemática que me foram acompanhando ao longo deste percurso.*

*Aos meus amigos e colegas, que me apoiaram durante esta fase, pelo companheirismo e força que me foram dando em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis.*

*Finalmente, não posso deixar de dirigir uma palavra de carinho aos meus avós e um agradecimento especial à minha família, em particular, aos meus pais e à minha irmã, pelo apoio incondicional, incentivo, amizade e paciência demonstrados, ajuda na superação dos obstáculos e exemplos de persistência e de coragem.*





# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos básicos</b>	<b>5</b>
2.1	Polítopos . . . . .	5
2.2	Complexidade de extensão e teorema de Yannakakis . . . . .	10
2.3	Minorantes e majorantes da característica não negativa . . . . .	13
2.3.1	Minorante combinatório . . . . .	13
2.3.2	Minorante geométrico . . . . .	14
2.3.3	Majorantes para $n$ -gonos regulares . . . . .	15
2.3.4	Estado da arte para $n$ -gonos . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Estudo assintótico de minorantes da característica não negativa</b>	<b>19</b>
3.1	Minorante combinatório . . . . .	19
3.2	Minorante geométrico . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Característica booleana</b>	<b>27</b>
4.1	Algumas interpretações . . . . .	27
4.1.1	Cobertura de retângulos . . . . .	28
4.1.2	Cobertura de bicliques . . . . .	29
4.1.3	Imersão de reticulados . . . . .	29
4.2	Minorantes da característica booleana de polítopos . . . . .	30
4.2.1	<i>Fooling number</i> . . . . .	30
4.2.2	Número de cobertura de bicliques fraccionário . . . . .	32
4.2.3	Uma versão melhorada do minorante $S(n)$ . . . . .	33
4.3	Majorante computacional . . . . .	35
4.3.1	Interpretação gráfica . . . . .	36
4.3.2	Resultados Numéricos . . . . .	38
4.3.3	Documentação do algoritmo standard de cálculo da característica booleana homogénea . . . . .	38
4.3.4	Documentação do algoritmo de cálculo da característica booleana homogénea com redução de simetria . . . . .	40
<b>A</b>	<b>Código</b>	<b>47</b>
A.1	Algoritmo standard de cálculo da característica booleana homogénea	47
A.2	Algoritmo de cálculo da característica booleana homogénea com redução de simetria . . . . .	50
A.3	Algoritmo do cálculo do número de biclique fraccionário . . . . .	53



# Capítulo 1

## Introdução

O conceito de polítopo é a generalização natural dos conceitos de polígono (no plano) e de poliedro (no espaço) a  $n$ -dimensões. Neste trabalho, os polítopos são regiões convexas e compactas definidas pela intersecção de semi-espacos. Uma área onde os polítopos surgem naturalmente é a área da Optimização, nomeadamente a Programação Linear. De facto, podemos interpretar um programa linear limitado como um problema de optimização de uma função linear sobre um polítopo. Esta ligação à Optimização tem sido uma das motivações para o estudo destes objectos.

Um problema de geometria de polítopos motivado pela Programação Linear é o problema da complexidade de extensão de um polítopo. Os métodos de resolução de problemas de Programação Linear têm uma eficiência que depende do número de semi-espacos necessários para cortar o polítopo, ou seja, do seu número de “lados”. Acontece frequentemente um polítopo com muitos lados poder ser escrito como a projecção linear de outro com poucos lados. Ao primeiro chamamos projecção; ao segundo, extensão. Por exemplo, Ben-Tal e Nemirovski [3] demonstram que  $2^n$ -gonos regulares, isto é, polígonos regulares com  $2^n$  lados, se podem escrever como projecções de polítopos com  $2n$  facetas. Na Figura 1.1 podemos ver uma concretização deste teorema, com  $n = 3$ .

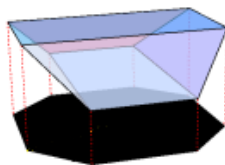


Figura 1.1: O octógono como projecção de um polítopo com 6 facetas.

O facto de um polítopo com muitos lados poder ser descrito como projecção de outro com poucos lados traz vantagens, sobretudo na optimização de funções lineares. Neste caso, se pretendermos optimizar uma função linear no primeiro, podemos antes optimizá-la no segundo e projectar a solução, o que resolve o problema original de

forma muito mais eficiente.

Um problema de grande importância é então, dado um polítopo, determinar o número mínimo de lados de um polítopo cuja projecção seja o polítopo original. Esse número é designado por complexidade de extensão e caracteriza a informação mínima necessária para representar o polítopo em questão. Ao longo da última década, o interesse em torno da complexidade de extensão tem vindo a crescer. Em particular, minorantes para esta quantidade fornecem provas das limitações da Programação Linear para resolver certos problemas concretos.

Curiosamente, a maioria dos minorantes da complexidade de extensão tem origem num conceito de Álgebra Linear bem conhecido: a característica não negativa. Isto deve-se ao facto de, na realidade, a complexidade de extensão de um polítopo e a característica não negativa da sua matriz de folgas serem iguais, resultado provado por Yannakakis, em 1988. A característica não negativa é um conceito idêntico ao da habitual característica de uma matriz real, mas com o acréscimo de restrições de não negatividade. Especificando, enquanto a característica de uma matriz real  $A_{m \times n}$  é o menor número  $k$  tal que existam  $B_{m \times k}$  e  $C_{k \times n}$  reais com  $A = BC$ , no caso da característica não negativa, impomos a condição adicional de  $B$  e  $C$  terem entradas não negativas ( [5] e [9] são dois artigos onde este conceito é explorado). Esta característica, embora difícil de calcular, tem muitas aplicações, que vão desde a Teoria de Grafos à Geometria Computacional.

Tanto a complexidade de extensão como a característica não negativa têm sido objecto de muita investigação recente. Exemplos disso são os artigos [3], [11], [8] e [22], em que são construídas extensões de polítopos (ou, equivalentemente, factorizações das suas matrizes de folgas) de tamanho reduzido. De referir, também, resultados como o do crescimento exponencial da complexidade de extensão dos polítopos associados ao problema do caixeiro viajante e ao problema do emparelhamento perfeito ( [7] e [14]). Quanto à característica não negativa, mostrou-se, muito recentemente, que depende do corpo considerado, pois em  $\mathbb{R}$  e em  $\mathbb{Q}$  é diferente ( [17] e [4]). Mesmo o estudo da complexidade de extensão de polígonos, à partida um dos primeiros casos de interesse, tem-se revelado bastante difícil e tem sido objecto de diversos artigos. A este propósito, uma nota para [8], [16], [15], onde se estuda a complexidade de extensão máxima de um  $n$ -gono, e para as experiências computacionais levadas a cabo para este caso no artigo [23].

Um dos minorantes da característica não negativa mais estudados é a caracterís-

tica booleana. Uma matriz booleana é uma matriz constituída apenas por zeros e uns. Logicamente, se  $B$  for uma matriz booleana, uma factorização booleana de  $B$  é um par de matrizes booleanas,  $A$  e  $C$ , cujo produto booleano é  $B$ . O tamanho desta factorização é o número de colunas de  $A$ , ou o número de linhas de  $C$ . A característica booleana de  $B$  é o tamanho mínimo de uma factorização booleana sua. Assim, se  $M$  for uma matriz não negativa e se representarmos por  $M^*$  a matriz que obtém de  $M$  substituindo as suas entradas não nulas por um e mantendo as nulas, qualquer factorização não negativa de  $M$  origina uma factorização booleana de  $M^*$ : basta substituir as entradas não nulas das matrizes da factorização não negativa de  $M$  por um e manter as entradas nulas. O produto booleano das matrizes resultantes é  $M^*$ . Logo, a característica booleana de  $M^*$  é menor ou igual à característica não negativa de  $M$ . A característica booleana aparece naturalmente em áreas como a Teoria de Grafos, a Teoria de Matrizes sobre Semi-Anéis e a Teoria da Complexidade de Comunicação.

Este trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos conceitos básicos da teoria de polítopos, definimos os conceitos de complexidade de extensão e de característica não negativa, provamos o teorema de Yannakakis, que os relaciona, debruçamo-nos sobre dois minorantes da complexidade de extensão ( $S(n)$ , um minorante combinatório, e  $T(n)$ , um minorante geométrico) e fazemos uma breve referência a alguns majorantes; seguidamente, no capítulo 3, efectuamos o estudo assintótico dos minorantes abordados no capítulo 2; finalmente, no capítulo 4, ocupamo-nos da característica booleana, um conhecido minorante da característica não negativa, nomeadamente de algumas interpretações que lhe podemos dar, de alguns minorantes desta característica e de um majorante, obtido computacionalmente, que será utilizado para deduzir, em alguns casos, o valor da característica booleana.



# Capítulo 2

## Conceitos básicos

### 2.1. Polítopos

Começamos por definir uma série de conceitos em que assenta toda a teoria de polítopos. Para uma consulta mais detalhada, ver, por exemplo, [2], [10] ou [20].

**Definição 1.** Um conjunto de  $\mathbb{R}^d$  é convexo se contiver, para quaisquer seus dois pontos,  $p$  e  $q$ , o segmento que os une,  $\{\lambda p + (1 - \lambda)q : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ .

**Definição 2.** Seja  $\{p_1, \dots, p_m\}$  um conjunto finito de pontos de  $\mathbb{R}^d$ . A um ponto da forma  $\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ , com  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  e  $\lambda_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ , dá-se o nome de combinação convexa de  $p_1, \dots, p_m$ . O invólucro convexo de  $S \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $\text{conv}(S)$ , é o conjunto de todas combinações convexas de pontos de  $S$ .

**Exemplo 3.**  $\text{conv}(\{(1, 0, 1), (0, 0, 0), (2, 0, 0), (1, 2, 1), (0, 2, 0), (2, 2, 0)\})$  é um prisma triangular, ilustrado na Figura 2.1.

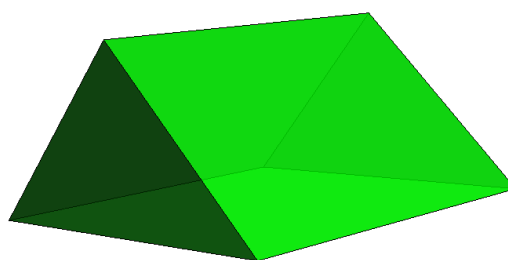


Figura 2.1:  $\text{Conv}(\{(1, 0, 1), (0, 0, 0), (2, 0, 0), (1, 2, 1), (0, 2, 0), (2, 2, 0)\})$

Eis alguns factos acerca de invólucros convexas:

- $\text{conv}(S)$  é um conjunto convexo;
- $\text{conv}(S)$  é o menor conjunto convexo que contém todos os pontos de  $S$ ;
- $\text{conv}(S)$  é a intersecção de todos os conjuntos convexas que contenham  $S$ .

**Definição 4.** Um polítopo é o invólucro convexo de um número finito de pontos de  $\mathbb{R}^d$ , ou seja, é um conjunto da forma  $P = \text{conv}(\{p_1, \dots, p_m\})$ , em que  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^d$ .

Um hiperplano é um conjunto do tipo  $H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle a, x \rangle = b\}$ , com  $a \in \mathbb{R}^d$  e  $b \in \mathbb{R}$ , que divide  $\mathbb{R}^d$  em dois semi-espacos:

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle a, x \rangle \geq b\}$$

e

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle a, x \rangle \leq b\}.$$

**Definição 5.** Chama-se poliedro a qualquer conjunto que se obtenha através da intersecção de um número finito de semi-espacos de  $\mathbb{R}^d$ , isto é, trata-se de um conjunto da forma  $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$ .

**Exemplo 6.** Algebricamente, o prisma anterior é determinado pelo conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, \quad y \leq 2, \quad z \geq 0, \quad x - z \geq 0, \quad x + z \leq 2\}$$

ou seja, é o conjunto dos pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Põe-se a seguinte questão: haverá alguma relação entre os conceitos de polítopo e poliedro? A resposta é dada pelo próximo teorema:

**Teorema 7. (Teorema Fundamental da Teoria de Polítopos) [26]** *Qualquer polítopo pode ser descrito por um número finito de desigualdades afins e qualquer poliedro limitado é o invólucro convexo de um conjunto finito de pontos. Resumidamente, um dado conjunto é um polítopo se e só se for um poliedro limitado.*

Assim, a qualquer polítopo estão associadas duas caracterizações: uma caracterização por pontos (caracterização  $\mathcal{V}$ ) e uma caracterização por desigualdades (caracterização  $\mathcal{H}$ ).

**Definição 8.** (1) O conjunto  $\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$  diz-se independente de forma afim se, sempre que  $\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i = 0$  e  $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 0$ , se tiver  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ .

(2) Seja  $X \subseteq \mathbb{R}^d$ . A dimensão de  $X$  é igual a  $\max\{|Y| - 1 : Y \subseteq X, Y \text{ é finito e independente de forma afim}\}$ .



Note-se que a dimensão de  $X$  não é mais do que a dimensão do menor espaço afim contendo  $X$ .

**Definição 9.** Sejam  $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $e \in \mathbb{R}^d$  e  $f \in \mathbb{R}$ . O hiperplano

$$H_{e,f} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle e, x \rangle = f\}$$

é um hiperplano de suporte de  $P$  se  $\max\{\langle e, x \rangle : x \in P\} = f$ .

De acordo com a definição, um hiperplano de suporte de um polítopo divide o espaço de tal modo, que o polítopo em questão está contido num dos semi-espacos correspondentes.

**Definição 10.** Seja  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $F$  é uma face de  $P$  se  $F = P$  ou  $F = P \cap H$ , em que  $H$  é um hiperplano de suporte de  $P$ . As faces de dimensão  $\dim(P) - 1$ , 1 e 0 designam-se por facetas, arestas e vértices, respectivamente.

**Exemplo 11.** Na Figura 2.2, são exibidas, como exemplo, três faces do prisma triangular: uma faceta, uma aresta e um vértice.

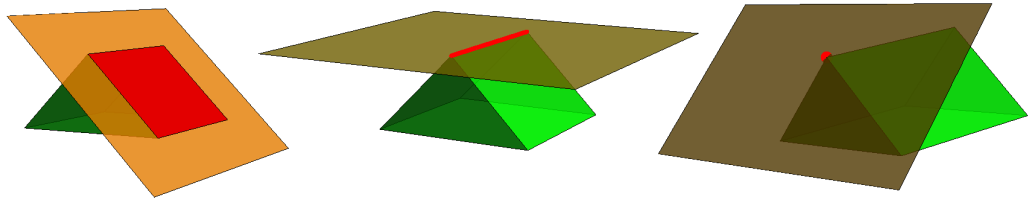


Figura 2.2: Três faces do prisma, com os respectivos hiperplanos de suporte.

Seja  $P$  um polítopo cuja dimensão é  $d$ . Denotaremos por  $f_i(P)$  o número de faces de dimensão  $i$  de  $P$ , com  $i = 0, \dots, d$ . Por exemplo, se  $P$  for um prisma triangular, temos  $f_0(P) = 6$ ,  $f_1(P) = 9$ ,  $f_2(P) = 5$  e  $f_3(P) = 1$ .

Já vimos que um polítopo pode ser descrito quer por um conjunto de pontos, quer por um conjunto de desigualdades. Mais, pode mostrar-se que basta considerar como pontos os vértices do polítopo e como desigualdades as que se obtêm através dos hiperplanos de suporte das facetas do polítopo. Temos, assim, duas descrições mínimas, que podem ser combinadas numa matriz, a chamada matriz de folgas:

**Definição 12.** Seja  $P$  um polítopo, com desigualdades dadas por  $h_1(x) \geq 0, \dots, h_f(x) \geq 0$ , e vértices  $p_1, \dots, p_v$ . A matriz de folgas de  $P$ ,  $S_P$ , é a matriz definida por

$$S_P(i, j) = h_i(p_j),$$

para  $i = 1, \dots, f$  e  $j = 1, \dots, v$ .

Por definição, a matriz de folgas de um polítopo é não negativa, já que os vértices, pertencendo ao polítopo, satisfazem necessariamente as desigualdades. Além disso, não é única, pois as desigualdades estão definidas a menos de multiplicação por escalares positivos. No entanto, cometemos o abuso de linguagem de falar na matriz de folgas de um polítopo, em vez de uma matriz de folgas desse polítopo.

**Exemplo 13.** A matriz de folgas do prisma considerado nos exemplos anteriores é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, a quarta linha resulta da desigualdade  $x - z \geq 0$  avaliada em cada um dos vértices:

$$\begin{aligned} (1, 0, 1) &\rightarrow 1 - 1 = 0, & (0, 0, 0) &\rightarrow 0 - 0 = 0, & (2, 0, 0) &\rightarrow 2 - 0 = 2, \\ (1, 2, 1) &\rightarrow 1 - 1 = 0, & (0, 2, 0) &\rightarrow 0 - 0 = 0, & (2, 2, 0) &\rightarrow 2 - 0 = 2. \end{aligned}$$

Dois polítopos,  $P$  e  $P'$ , dizem-se combinatorialmente equivalentes se existir uma bijecção,  $\varphi$ , entre os conjuntos das faces de  $P$  e  $P'$  tal que, se  $F_1$  e  $F_2$  forem faces de  $P$ ,  $F_1 \subseteq F_2$  se e só se  $\varphi(F_1) \subseteq \varphi(F_2)$ .

Esta relação é de equivalência.

Dois polítopos,  $P$  e  $P^*$ , dizem-se (combinatorialmente) duais se existir uma bijecção,  $\psi$ , entre os conjuntos das faces de  $P$  e  $P^*$  tal que, se  $F_1$  e  $F_2$  forem faces de  $P$ ,  $F_1 \subseteq F_2$  se e só se  $\psi(F_1) \supseteq \psi(F_2)$ .

Em geral, se  $F$  for uma face de  $P$ ,  $\dim(F) + \dim(\psi(F)) = d - 1$ .

Na Figura 2.3 encontra-se o dual do prisma triangular, o bisimplice.

**Teorema 14.** *Seja  $P$  um polítopo que contém a origem no seu interior. Então, o seu polar,  $P^\circ = \{y : y^T x \leq 1, \quad \forall x \in P\}$ , é um polítopo dual de  $P$ .*

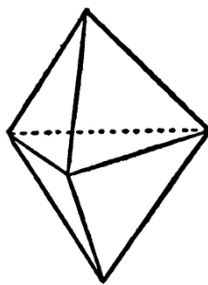


Figura 2.3: Bisimplice, dual do prisma triangular.

**Prova:** Como  $0 \in \text{int}(P)$ , qualquer desigualdade de  $P$  pode ser reduzida a uma do tipo  $a^T x \leq 1$ . De facto, para cada desigualdade de  $P$ ,  $a_P^T x \leq b$ , temos, em primeiro lugar,  $b \geq 0$ , pois  $0 \in P$ , e, em segundo,  $b > 0$ , porque a origem pertence ao interior. Portanto, dividindo cada desigualdade pelo termo independente,  $P$  pode

ser reescrito na forma  $\{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq 1\}$ , com  $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ .

Pelo Lema de Farkas, se  $y \in P^\circ$ ,  $y \in \text{conv}(\{a_1, \dots, a_m\})$ . Sejam  $F$  uma face de  $P$  e  $I(F) = \{i : a_i^T v = 1, v \text{ vértice de } F\}$ . O conjunto  $G_F = \text{conv}(\{a_i : i \in I(F)\})$  é uma face de  $P^\circ$ , pois  $G_F = P^\circ \cap \{v^T y = 1, v \text{ vértice de } F\}$ . Por fim, a função que a cada  $F$  faz corresponder  $G_F$  mostra a dualidade entre  $P$  e  $P^\circ$ .  $\square$

Uma vez que a translação de um polígono não altera a sua matriz de folgas, podemos admitir que este possui a origem no seu interior. Suponhamos que, dado um polígono,  $P$ , os termos independentes das desigualdades que o definem são iguais a um. A matriz de folgas obtida diz-se na sua forma reduzida. Considerando que a matriz de folgas de  $P$  é dada na sua forma reduzida, temos a seguinte proposição:

**Proposição 15.**  $S_P^T = S_{P^\circ}$ .

**Prova:** Apresentamos apenas um esboço da prova. Sabemos que  $P$  tem uma caracterização  $\mathcal{H}$  do tipo  $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Wx \leq 1\}$  e  $P^\circ = \text{conv}(\text{linhas}(W))$ . Analogamente, se  $V$  for a matriz cujas linhas são os vértices de  $P$ , temos  $P = \text{conv}(\text{linhas}(V))$  e  $P^\circ = \{x \in \mathbb{R}^d : Vx \leq 1\}$ . Logo, a matriz de folgas de  $P$  relativa à caracterização  $(V, W, 1)$  é a transposta da matriz de folgas de  $P^\circ$  associada à caracterização  $(W, V, 1)$ .

## 2.2. Complexidade de extensão e teorema de Yannakakis

Sejam  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $Q \subseteq \mathbb{R}^{d+p}$  polítopos. Diz-se que  $Q$  é uma extensão de  $P$ , ou que  $Q$  se projecta em  $P$ , se  $P = \{x \in \mathbb{R}^d : \exists y \in \mathbb{R}^p \text{ tal que } (x, y) \in Q\}$ .

Pode acontecer que o número de facetas de um dado polítopo seja considerável. Torna-se, assim, crucial saber se existe uma extensão sua cujo o número de facetas seja menor. Nesse caso, um problema de otimização de uma função linear no polítopo em questão pode ser simplificado: determina-se a solução óptima da função na extensão e, de seguida, projecta-se essa solução no polítopo original. Surge, desta forma, a necessidade de introduzir o conceito de complexidade de extensão:

**Definição 16.** Dado um polítopo,  $P$ , a sua complexidade de extensão,  $xc(P)$ , é o menor dos números de facetas dos polítopos que nele se projectem.

Um exemplo típico é o do hexágono regular, cuja complexidade de extensão é cinco. Na Figura 2.4, encontram-se representados o hexágono regular e uma extensão sua com o número mínimo de facetas.

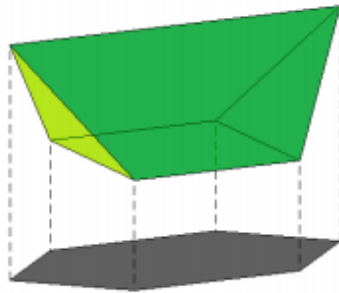


Figura 2.4: Hexágono regular e uma extensão sua com o número mínimo de facetas.

**Definição 17.** Seja  $M_{m \times n}$  uma matriz não negativa. Dadas duas matrizes não negativas,  $A_{m \times k}$  e  $B_{k \times n}$ , diz-se que estas constituem uma factorização não negativa de tamanho  $k$  de  $M$  se o seu produto for igual a  $M$ , isto é, se  $M_{m \times n} = A_{m \times k} \times B_{k \times n}$ . A característica não negativa de  $M$ ,  $car_+(M)$ , é o menor dos tamanhos de todas as possíveis factorizações não negativas de  $M$ .

O teorema de Yannakakis estabelece uma ligação fundamental entre a complexidade de extensão e a característica não negativa:

**Teorema 18. (Yannakakis) [25]** *Sejam  $P$  um polítopo e  $S_P$  a sua matriz de folgas. Então,*

$$xc(P) = car_+(S_P).$$

**Prova:** Começemos por mostrar que  $xc(P) \leq car_+(S_P)$ :

Sejam  $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$  um polítopo e  $TU$  uma factorização não negativa de tamanho mínimo de  $S_P$ , com  $car_+(S_P) = p$ . Queremos mostrar que o conjunto  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+p} : Ax + Ty = b, y \geq 0\}$  é uma extensão de  $P$ .

Por um lado, se  $(x, y) \in Q$ ,  $Ax = b - Ty \leq b$ , pois quer  $T$  quer  $y$  são não negativas, pelo que  $x \in P$ . Por outro, se  $v_i, i = 1, \dots, n$ , forem os vértices de  $P$  e  $U_i$  for a coluna de  $U$  associada a  $v_i$ , tem-se  $Av_i + TU_i = b$ , com  $U_i \geq 0$ . Assim, todos os vértices de  $P$  pertencem à projecção de  $Q$  e, usando a convexidade de  $Q$ , concluímos que  $P$  está contido na projecção de  $Q$ .

O número de facetas de  $Q$  é, quando muito, o tamanho do vector  $y$ , ou seja,  $p$ . Falta-nos apenas provar que  $Q$  é limitado. Antes de mais, notemos que  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+p} : x \in P, Ty = b - Ax, y \geq 0\}$ . Para cada  $(x, y) \in Q$ ,  $\forall i, T_i y_i = b - Ax - \sum_{j \neq i} T_j y_j \leq b - Ax$ , que é limitado, por  $P$  ser um polítopo. Portanto, se  $\|T_i\| \neq 0$ ,  $0 \leq y_i \leq \frac{\|b - Ax\|}{\|T_i\|}$ . Para que  $Q$  seja limitado, é suficiente que  $T$  não possua colunas nulas, condição que se verifica, atendendo a que  $TU$  é uma factorização de tamanho mínimo.

Provemos agora que  $car_+(S_P) \leq xc(P)$ . Seja  $Q$  uma extensão de  $P$ . Já vimos que podemos supor que a origem pertence ao interior de qualquer polítopo, o que nos permite reescrever as desigualdades (facetas) de  $P$  e as de  $Q$  na forma  $a^T x \leq 1 \Leftrightarrow 1 - a^T x \geq 0$ . Cada desigualdade de  $P$ ,  $a_P$ , é válida em  $Q$ , logo,  $a_P$  pertence ao polítopo polar de  $Q$ . Assim,  $a_P$  escreve-se como combinação convexa dos vértices de  $Q^\circ$ , ou seja,  $a_P = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ , com  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  e  $\lambda_i \geq 0$ , o que implica  $1 - a_P^T x = \sum_{i=1}^m \lambda_i (1 - a_i^T x)$ , em que  $1 - a_i^T x \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , representam as facetas de  $Q$ . Então, qualquer faceta de  $P$  se escreve como combinação convexa das facetas de  $Q$ , isto é,  $S_P = [\Lambda] S_Q^*$ , onde  $[\Lambda]$  é a matriz constituída pelos coeficientes de cada uma das combinações convexas e  $S_Q^*$  é a submatriz de  $S_Q$  formada apenas por colunas relativas a vértices de  $Q$  cujas projecções são os vértices de  $P$ . O tamanho desta factorização é precisamente o número de facetas de  $Q$ .  $\square$

**Exemplo 19.** Consideremos o caso do hexágono regular, que é dado pelo conjunto  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}} \leq 1, \frac{2x_2}{\sqrt{3}} \leq 1, -x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}} \leq 1, -x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}} \leq 1, \frac{-2x_2}{\sqrt{3}} \leq 1, x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}} \leq 1\}$ .

Não é difícil verificar que a sua matriz de folgas é

$$S_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

podendo ser factorizada em

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Segundo o teorema de Yannakakis, isto mostra que a complexidade de extensão do hexágono é no máximo 5, reflectindo a existência da extensão com cinco facetas já observada na Figura 2.4.

A extensão associada a esta factorização é, de acordo com a demonstração do teorema, o conjunto dos pontos  $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^7$  tais que  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$  e

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A resolução do sistema conduz-nos às igualdades  $y_2 = x_1 + \frac{3x_2}{\sqrt{3}} + y_1$ ,  $y_3 = 1 - x_1 - \frac{x_2}{\sqrt{3}} - y_1$ ,  $y_4 = x_1 + \frac{3x_2}{\sqrt{3}} + 2y_1 - 1$  e  $y_5 = 1 - \frac{2x_2}{\sqrt{3}} - y_1$ .

Portanto, substituindo, a extensão anterior reduz-se ao conjunto

$$\{(x_1, x_2, y_1) \in \mathbb{R}^3 : y_1 \geq 0, \quad x_1 + \frac{3x_2}{\sqrt{3}} + y_1 \geq 0, \quad x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + y_1 \leq 1, \\ x_1 + \frac{3x_2}{\sqrt{3}} + 2y_1 \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{2x_2}{\sqrt{3}} + y_1 \geq 1\}.$$

A não unicidade da matriz de folgas não afecta a característica não negativa, já que, dadas uma matriz de folgas e uma factorização não negativa sua, a multiplicação de uma linha dessa matriz por um escalar positivo não altera o tamanho da factorização.

## 2.3. Minorantes e majorantes da característica não negativa

Em geral, não é fácil determinar a característica não negativa. Assim, no sentido de tirar conclusões acerca do seu valor, recorre-se a minorantes e majorantes seus.

### 2.3.1. Minorante combinatório

Do mesmo modo que se definiu característica não negativa, pode definir-se a característica booleana de uma matriz:

**Definição 20.** Seja  $M_{m \times n}$  uma matriz booleana, isto é, uma matriz cujas entradas são zeros e uns. Dadas duas matrizes booleanas,  $A_{m \times k}$  e  $B_{k \times n}$ , diz-se que estas constituem uma factorização booleana de tamanho  $k$  de  $M$  se o seu produto for igual a  $M$ , isto é, se  $M_{m \times n} = A_{m \times k} \times B_{k \times n}$ , em que a multiplicação matricial usa a chamada álgebra de Boole, de operações  $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0$ ,  $1 \cdot 1 = 1$ ,  $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$  e  $0 + 0 = 0$ . A característica booleana de  $M$ ,  $car_{bool}(M)$ , é o menor dos tamanhos de todas as possíveis factorizações booleanas de  $M$ .

A característica booleana constitui um minorante da característica não negativa. De facto, se  $M$  for uma matriz não negativa e  $M^*$  a matriz que se obtém de  $M$  substituindo as suas entradas não nulas por um e mantendo as nulas, tem-se  $car_{bool}(M^*) \leq car_+(M)$ . Para minorar, por sua vez, a característica booleana, recorreremos ao lema de Sperner.

**Lema 21. (Sperner) [18]** *Seja  $S$  um conjunto com  $n$  elementos. O número máximo de subconjuntos de  $S$  com a propriedade de que não existe um que esteja contido noutra é  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ .*

Também se diz, em alternativa, que subconjuntos com esta propriedade formam uma anti-cadeia ou que são dois a dois incomparáveis.

Com base no teorema de Sperner, surge a definição que se segue.

**Definição 22.** Para  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $S(n) := \min\{k : n \leq \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}\}$ .

Pelo Teorema de Sperner,  $S(n)$  é a cardinalidade mínima de um conjunto com  $n$  subconjuntos incomparáveis dois a dois. Verifiquemos que  $S(n)$  pode servir de minorante da característica não negativa. Sejam  $B_{n \times m}$  uma matriz booleana e  $S = \{1, \dots, m\}$ , um conjunto de cardinalidade igual ao número de colunas de  $B$ . À linha  $i$  de  $B$ ,  $B_i$ , pode associar-se um subconjunto de  $S$ , designado por suporte de  $B_i$ , definido como o conjunto de todos os índices  $j$  tais que  $B_{i,j} = 1$ .

Dada uma factorização booleana  $C_{n \times k} \times D_{k \times m}$  de  $B$ , se  $C$  tiver duas linhas em que o suporte de uma estiver contido no da outra, é fácil ver que o mesmo acontecerá com  $B$ . Se  $B$  não possuir qualquer par de linhas com suportes comparáveis, isto implica que os suportes das linhas de  $C$  formam  $n$  subconjuntos de um conjunto de cardinalidade  $k$  com a propriedade de que não existe um que esteja contido noutro. Então,  $n \leq \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$ , necessariamente, pelo que  $S(n) \leq k$  e, em particular,  $S(n) \leq \text{car}_{\text{bool}}(B)$ .

Em geral, se  $S_P$  for a matriz de folgas de um polítopo  $P$ , o suporte de uma linha estar contido noutra equivale a todos os vértices de uma faceta fazerem parte da outra, o que é impossível. Assim, para um polítopo  $P$  de  $f$  facetas, temos

$$S(f) \leq \text{car}_{\text{bool}}(S_P^*) \leq \text{car}_+(S_P).$$

Por dualidade (analisando a matriz transposta), concluímos que se  $P$  tem  $v$  vértices

$$S(v) \leq \text{car}_{\text{bool}}(S_P^*) \leq \text{car}_+(S_P).$$

No caso de um  $n$ -gono (polígono de  $n$  vértices), estes minorantes correspondem ambos a  $S(n)$ .

### 2.3.2. Minorante geométrico

O minorante anterior é puramente combinatório. Para o melhorar, teremos de considerar a geometria dos polítopos. Começemos por introduzir a definição de polítopo cíclico:

**Definição 23.** Em  $\mathbb{R}^d$ , escolham-se  $v \geq d + 1$  pontos distintos da curva

$$\{(\tau, \tau^2, \dots, \tau^d) : -\infty < \tau < \infty\}.$$

Ao invólucro convexo por eles formado chama-se polítopo cíclico, que se representa por  $\mathcal{C}(v, d)$ .

O conceito de polítopo cíclico é particularmente importante, tal como indica o teorema que se segue:



**Teorema 24.** (*Teorema do Limite Superior (McMullen, 1970)*) [12] Fixados  $v$  e  $d$ , o número máximo de faces de dimensão  $i$  de um polítopo de dimensão  $d$  com  $v$  vértices é atingido por  $\mathcal{C}(v, d)$ , polítopo cíclico, para  $i = 0, 1, \dots, d - 1$ . Equivalentemente, dados  $n$  e  $d$ , o número máximo de faces de dimensão  $i$  de um polítopo de dimensão  $d$  com  $n$  facetas é atingido por  $\mathcal{C}^*(n, d)$ , polítopo dual de  $\mathcal{C}(n, d)$ , para  $i = 0, 1, \dots, d - 1$ .

Temos que, por um lado, se  $P$  for um polítopo de dimensão  $d$  com  $v$  vértices,

$$f_i(P) \leq f_i(\mathcal{C}(v, d)), \quad i = 0, \dots, d - 1.$$

Por outro, dado um polítopo de dimensão  $d$  e com  $n$  facetas,  $Q$ , tem-se

$$f_i(Q) \leq f_i(\mathcal{C}^*(n, d)) = f_{d-i-1}(\mathcal{C}(n, d)), \quad i = 0, \dots, d - 1.$$

À custa do Teorema do Limite Superior e relacionando o número de vértices de um polítopo com a sua complexidade de extensão, pode obter-se outro minorante da característica não negativa.

Sejam  $P$  um polítopo com  $v$  vértices e  $Q$  uma extensão sua com  $m$  facetas. A dimensão de  $Q$  é desconhecida, mas não pode exceder  $m - 1$ , caso contrário, as  $m$  desigualdades de  $Q$  não definiriam um poliedro limitado. Portanto, aplicando o Teorema do Limite Superior ao número de vértices de  $Q$ ,  $f_0(Q) \leq \max_{2 \leq d \leq m-1} f_{d-1}(\mathcal{C}(m, d))$ . Defina-se a seguinte quantidade:

**Definição 25.**  $T(v) := \min_k \{v \leq \max_{2 \leq d \leq k-1} f_{d-1}(\mathcal{C}(k, d))\}$

Temos, então,  $T(f_0(Q)) \leq m$ . Finalmente, como qualquer extensão de um polítopo tem pelo menos tantos vértices como ele,  $T(v) \leq T(f_0(Q)) \leq m$ . Em particular,  $T(v) \leq xc(P) = car_+(S_P)$ . Relativamente aos  $n$ -gonos, tem-se  $T(n) = T(f_0(P)) \leq car_+(S_P)$ .

No caso dos  $n$ -gonos, este minorante é equivalente ao introduzido em [22]. Para concluir, um exemplo de que este minorante pode ser estrito: para  $n = 9$ ,  $T(n) = 6$  e sabe-se que, se  $P$  for um  $n$ -gono,  $car_+(S_P) \geq 7$ , porque qualquer polítopo com pelo menos 9 vértices e 6 facetas é combinatorialmente equivalente ao produto de dois triângulos e em [13] prova-se que qualquer projecção deste polítopo tem no máximo 8 vértices.

### 2.3.3. Majorantes para $n$ -gonos regulares

No que diz respeito a majorantes para a complexidade de extensão dos  $n$ -gonos regulares, Ben-Tal e Nemirovski [3] apresentam uma extensão com  $2 \log_2(n) + 4$

facetas, quando  $n$  é uma potência de 2. Kaibel e Pashkovich [11] sugerem um método para a construção de factorizações de tamanho  $2\lceil\log_2(n)\rceil + 2$ , qualquer que seja  $n$ , melhorado para  $2\lceil\log_2(n)\rceil$ , por Fiorini, Rothvoss e Tiawary [8]. Por fim, Gillis, Glineur e Vandaele [22] refinam o resultado anterior, construindo explicitamente factorizações não negativas que nos dão o melhor majorante conhecido:

$$car_+(S_n) \leq \begin{cases} 2\lceil\log_2(n)\rceil - 1 = 2k - 1, & \text{se } 2^{k-1} < n \leq 2^{k-1} + 2^{k-2} \\ 2\lceil\log_2(n)\rceil = 2k, & \text{se } 2^{k-1} + 2^{k-2} < n \leq 2^k, \end{cases}$$

em que  $S_n$  representa a matriz de folgas de um  $n$ -gono regular.

Na Figura 2.5 é feita a comparação entre alguns valores dos dois minorantes, combinatório e geométrico, e do melhor majorante que se conhece.

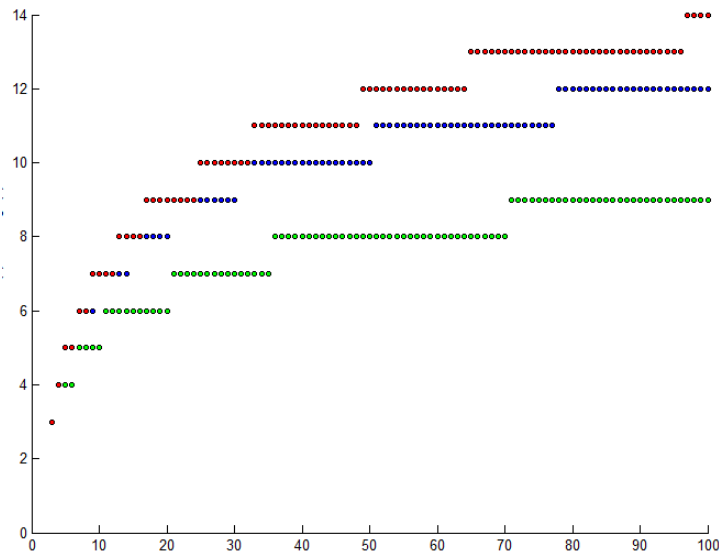


Figura 2.5: Comparação entre alguns valores de  $S(n)$ , a verde, de  $T(n)$ , a azul, e do melhor majorante conhecido, a vermelho.

### 2.3.4. Estado da arte para $n$ -gonos

Neste trabalho, focamo-nos nos  $n$ -gonos regulares, que, entre todos os  $n$ -gonos, são os que apresentam, aparentemente, a menor característica não negativa. Não obstante, tem havido muita investigação em torno de  $n$ -gonos gerais e, em particular, qual a maior complexidade de extensão possível para um  $n$ -gono. Nesta subsecção destacamos alguns resultados relevantes. O primeiro diz respeito a heptágonos e foi o primeiro a mostrar que nem sempre se podem encontrar  $n$ -gonos de complexidade  $n$ .

**Teorema 26.** [16] *A característica não negativa de qualquer heptágono é 6.*

A partir do resultado anterior facilmente se obtém um majorante geral:

**Corolário 27.** [16] *Seja  $P$  um  $n$ -gono. Então,*

$$car_+(P) \leq \lceil \frac{6}{7}n \rceil.$$

Posteriormente, este resultado foi assintoticamente melhorado pelo mesmo autor:

**Teorema 28.** [15] *Se  $m > \exp \exp \exp \exp \exp \exp 40$ , então a complexidade de extensão de um  $m$ -gono não excede  $25m(\ln \ln \ln \ln \ln \ln m)^{-0.5}$ .*

De notar que, apesar de este ser o primeiro, até ver único, majorante sublinear, na prática é muito pior que o introduzido no corolário 27, pois só o domina quando  $m$  é muito maior do que qualquer número que possa efectivamente ser guardado num computador.

Na direcção oposta, sabemos que existem  $n$ -gonos com complexidade exponencialmente pior do que os regulares:

**Teorema 29.** [8] *Se  $P$  for um  $n$ -gono genérico, então  $xc(P) \geq \sqrt{2n}$ .*



## Capítulo 3

# Estudo assintótico de minorantes da característica não negativa

Um exemplo trivial de um minorante da característica não negativa de um  $n$ -gono é  $\log_2(n)$ . Basta reparar que, se  $A_{n \times k} \times B_{k \times n}$  for uma factorização booleana da matriz booleana de um  $n$ -gono,  $A$  não possui linhas iguais (porque as linhas da matriz booleana de um  $n$ -gono são todas diferentes). Isto significa que os suportes das linhas de  $A$  são  $n$  subconjuntos de  $\{1, \dots, k\}$  distintos, o que implica  $n \leq 2^k$ , ou seja,  $\log_2(n) \leq k$ . Em particular, se  $P$  for um  $n$ -gono,  $\log_2(n) \leq \text{car}_{\text{bool}}(S_P^*) \leq \text{car}_+(S_P)$ .

Para valores pequenos de  $n$ ,  $S(n)$  e  $T(n)$  são claramente melhores do que  $\log_2(n)$ , mas o que se passará em termos assintóticos? É o que analisaremos de seguida.

Antes de mais, importa definir equivalência assintótica:

**Definição 30.** Dadas  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , diz-se que estas são assintoticamente equivalentes, e escreve-se  $f(n) \sim g(n)$ , se

$$\lim_n \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Tal como o próprio nome indica, trata-se de uma relação de equivalência.

Uma outra noção necessária é a seguinte:

**Definição 31.** Dadas  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , escreve-se  $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$  se  $\left| \frac{f(n)}{g(n)} \right|$  for limitada.

### 3.1. Minorante combinatório

Para o estudo de  $S(n)$  em termos assintóticos, precisamos de uma aproximação para  $\ln(n!)$ . Para isso, usaremos um resultado conhecido, designado por aproximação de Stirling:

**Lema 32. (Aproximação de Stirling)**

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \mathcal{O}(\ln n)$$

**Prova:**

Queremos provar que  $\ln(n!) - n \ln n + n = \mathcal{O}(\ln n)$ . Para isso, basta mostrar que a sucessão  $(\ln(n!) - n \ln n + n)/\ln(n)$  é limitada. Notemos que

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

Como o logaritmo é uma função crescente, interpretando o somatório como uma soma de Riemann, obtemos

$$\int_1^n \ln x \, dx \leq \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^{n+1} \ln x \, dx.$$

Além disso,  $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + \text{cte}$ . Portanto, usando o Teorema Fundamental de Cálculo, vem

$$n \ln n - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1) \ln(n+1) - (n+1) + 1.$$

Subtraindo  $n \ln n - n$  a todos os termos da inequação e dividindo por  $\ln n$ , temos, para todo o  $n$  maior ou igual a 2, as desigualdades

$$\frac{1}{\ln n} \leq \frac{\ln(n!) - (n \ln n - n)}{\ln n} \leq \frac{n \ln(\frac{n+1}{n}) + \ln(n+1)}{\ln n}.$$

Para mostrar que a expressão central é limitada, mostraremos que o minorante e o majorante o são, provando que são convergentes. Para o minorante, temos, claramente,  $\frac{1}{\ln n} \rightarrow 0$ . Para o majorante, verificamos que

$$\frac{n \ln(\frac{n+1}{n}) + \ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln((1 + \frac{1}{n})^n)}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \rightarrow \ln e \cdot 0 + 1 = 1.$$

Obtemos, então, o resultado pretendido.  $\square$

Seguem-se dois lemas, que darão por concluído o objectivo deste capítulo: uma equivalência assintótica entre  $S(n)$  e  $\log_2(n)$ .

**Lema 33.**  $S(n) \sim \log_2(n)$  se e só se  $n \sim \log_2(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor})$

**Prova:**( $\Rightarrow$ ) Note-se, antes de mais, que

$$S\left(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}\right) = n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se  $S(n) \sim \log_2(n)$ , então, evidentemente,  $n \sim \log_2(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor})$ , visto que  $(n/\log_2(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor})) = (S(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor})/\log_2(\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}))$  é uma subsucessão de  $(S(n)/\log_2(n))$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $n_k = \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$ . Então, para  $n_k < n \leq n_{k+1}$ ,

$$\frac{S(n)}{\log_2(n)} = \frac{k+1}{\log_2(n)} = \frac{S(n_{k+1})}{\log_2(n)} \geq \frac{S(n_{k+1})}{\log_2(n_{k+1})} \rightarrow 1$$

e

$$\frac{S(n)}{\log_2(n)} = \frac{S(n_k)}{\log_2(n)} + \frac{1}{\log_2(n)} \leq \frac{S(n_k)}{\log_2(n_k)} + \frac{1}{\log_2(n_k)} \rightarrow 1. \quad \square$$

**Lema 34.**

$$n \sim \log_2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

**Prova:** Usando o Lema 32, as propriedades dos logaritmos e a fórmula do binómio central em termos de fatoriais, temos

$$\begin{aligned} \log_2 \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} &= \frac{1}{\ln 2} (n \ln n - \lfloor n/2 \rfloor \ln \lfloor n/2 \rfloor - (n - \lfloor n/2 \rfloor) \ln(n - \lfloor n/2 \rfloor)) \\ &\quad + \mathcal{O}(\ln n) - \mathcal{O}(\ln \lfloor n/2 \rfloor) - \mathcal{O}(\ln(n - \lfloor n/2 \rfloor)). \end{aligned}$$

Como  $\frac{\mathcal{O}(\ln n)}{\ln n}$  é limitada e  $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ , temos

$$\frac{\mathcal{O}(\ln n)}{n} = \frac{\mathcal{O}(\ln n)}{\ln n} \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0,$$

e o mesmo vale para  $\frac{\mathcal{O}(\ln(\lfloor n/2 \rfloor))}{n}$  e  $\frac{\mathcal{O}(\ln(n - \lfloor n/2 \rfloor))}{n}$ . Assim, para provar o lema, basta mostrar que

$$n \sim \frac{1}{\ln 2} (n \ln n - \lfloor n/2 \rfloor \ln \lfloor n/2 \rfloor - (n - \lfloor n/2 \rfloor) \ln(n - \lfloor n/2 \rfloor)).$$

Para nos livrarmos das características, estudaremos separadamente as subsucessões dos pares e dos ímpares. Quando  $n$  é par,  $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$  e temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{n \ln n - n/2 \ln(n/2) - (n - n/2) \ln(n - n/2)}{n} = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{n(\ln n - \ln(n/2))}{n} = \frac{1}{\ln 2} \lim_n \ln n - \ln n + \ln 2 = 1. \end{aligned}$$

Quando  $n$  é ímpar,  $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$  e a expressão torna-se

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{n \ln n - (n-1)/2 \ln((n-1)/2) - (n - (n-1)/2) \ln(n - (n-1)/2)}{n} = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{n \ln 2 + n \ln n - \frac{n-1}{2} \ln(n-1) - \frac{n+1}{2} \ln(n+1)}{n}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \frac{n+1}{n} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0$  e o mesmo se aplica a  $\frac{\ln(n-1)}{n}$ , podemos reescrever o limite como

$$\frac{1}{\ln 2} \lim_n \ln 2 + \frac{n \ln n - n/2 \ln(n-1) - n/2 \ln(n+1)}{n}.$$

Somando e subtraindo  $(n/2) \ln n$  ao numerador, obtemos, finalmente,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{n \ln n - n/2 [\ln(n) + \ln(\frac{n-1}{n})] - n/2 [\ln(n) + \ln(\frac{n+1}{n})]}{n} = \\ & = 1 + \frac{1}{\ln 2} \lim_n -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0\right) = 1. \end{aligned}$$

Sendo o limite 1 em ambas as subsucessões, concluímos que a sucessão tem limite 1.

□

Finalmente, como corolário, o resultado desejado:

**Corolário 35.**

$$S(n) \sim \log_2(n)$$

Isto mostra que, apesar de claramente melhor do que  $\log_2(n)$ , o minorante  $S(n)$  não oferece melhorias em termos assintóticos.

### 3.2. Minorante geométrico

Concentremo-nos agora no minorante  $T(n)$ . Recordemos que  $T(n) = \min_k \{n \leq \max_{2 \leq d \leq k-1} f_{d-1}(\mathcal{C}(k, d))\}$ . Para efectuarmos o seu estudo assintótico, é necessário, em primeiro lugar, determinar uma fórmula fechada para a expressão que aparece na sua definição,  $\max_{2 \leq d \leq k-1} f_{d-1}(\mathcal{C}(k, d))$ .

Em [10], pode ser encontrada uma expressão para  $f_{d-1}(\mathcal{C}(k, d))$ :

$$f_{d-1}(\mathcal{C}(k, d)) = \begin{cases} \frac{k}{k-n} \binom{k-n}{n}, & \text{se } d = 2n \\ 2 \binom{k-n-1}{n}, & \text{se } d = 2n + 1 \end{cases}$$

Calculemos, então,  $\max_{2 \leq d \leq k-1} f_{d-1}(\mathcal{C}(k, d))$ . Para isso, analisaremos os casos par e ímpar, separadamente. Para o caso ímpar, recorreremos a uma proposição auxiliar retirada da literatura.

**Proposição 36.** [19] *Dado  $n$ , seja  $r_n$  o menor inteiro positivo para o qual  $\binom{n-r}{r}$  é máxima. Então,  $r_n = \lfloor \frac{1}{2}n(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) \rfloor$  ou  $r_n = \lfloor \frac{1}{2}n(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) + 1 \rfloor$ .*



Aplicando esta proposição ao termo geral da sequência dos ímpares,  $2\binom{k-1-n}{n}$ , concluímos que o seu maximizante é  $n = \lfloor \frac{1}{2}(k-1)(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) \rfloor$  ou  $n = \lfloor \frac{1}{2}(k-1)(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) + 1 \rfloor$ . Designaremos o maximizante por  $m_1(k)$ . Resta agora fazer o estudo da sequência dos pares.

**Lema 37.** *O máximo de  $\frac{k}{k-n}\binom{k-n}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq n \leq \frac{k-1}{2}$ , é atingido em  $m_2(k) = \lceil \frac{5k-4-\sqrt{5k^2-4}}{10} \rceil$ .*

**Prova:**

Seja  $t_n = \frac{k}{k-n}\binom{k-n}{n}$ . Para determinarmos o máximo desta sequência analisamos o quociente entre cada seus dois termos consecutivos,

$$q(n) = \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\frac{k}{k-(n+1)}\binom{k-(n+1)}{n+1}}{\frac{k}{k-n}\binom{k-n}{n}} = \frac{(k-2n)(k-2n-1)}{(n+1)(k-n-1)}.$$

Para estudar a monotonia da sequência, precisamos de saber quando é este quociente menor ou igual a 1. O conjunto de índices para os quais o quociente  $q(n)$  está definido é

$$\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq \frac{k-1}{2} \text{ e } 1 \leq n+1 \leq \frac{k-1}{2}\} = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq \frac{k-3}{2}\}.$$

Vamos estudar a extensão real canónica da função inteira  $q(n)$ , e podemos restringir-nos ao intervalo  $[1; \frac{k-3}{2}]$ , pois apenas nos interessam os inteiros tais que  $1 \leq n \leq \frac{k-3}{2}$ . No intervalo considerado o denominador de  $q(x)$  não se anula, pelo que

$$q(x) = \frac{(k-2x)(k-2x-1)}{(x+1)(k-x-1)} \leq 1$$

equivale a

$$5x^2 + (4-5k)x + (k-1)^2 \leq 0.$$

Assim, os intervalos de monotonia de  $t_n$  correspondem aos intervalos de sinal do polinómio  $P(x) = 5x^2 + (4-5k)x + (k-1)^2$ . Este tem raízes  $r_1 = \frac{5k-4-\sqrt{5k^2-4}}{10}$  e  $r_2 = \frac{5k-4+\sqrt{5k^2-4}}{10}$  e é não positivo em  $[r_1; r_2]$ . Como  $r_2 > \frac{k-3}{2}$ , temos que, para  $n$  inteiro no intervalo de interesse,  $P(n) > 0$  se e só se  $n < r_1$  pelo que  $t_{n+1} > t_n$  se e só se  $n < r_1$ . Assim, o maximizante de  $t_n$  corresponde ao menor inteiro que pertence a  $[r_1; r_2]$ , isto é,  $\lceil r_1 \rceil$ .  $\square$

Podemos agora comparar os resultados obtidos para ambas as sucessões e verificar que o máximo é obtido na sequência dos pares.

**Corolário 38.** *Se  $k \neq 5$ ,  $\max_{2 \leq d \leq k-1} f_{d-1}(\mathcal{C}(k, d)) = \frac{k}{k-m_2(k)}\binom{k-m_2(k)}{m_2(k)}$ .*

**Prova:**

Comecemos por relacionar as expressões de cada ramo:

$$\frac{k}{k-n} \binom{k-n}{n} = \frac{k(k-n-1)!}{n!(k-2n)!} = \frac{k}{k-2n} \binom{k-1-n}{n}.$$

Se  $n \geq \frac{k}{4}$ , temos

$$\frac{k}{k-n} \binom{k-n}{n} = \frac{k}{k-2n} \binom{k-1-n}{n} \geq 2 \binom{k-1-n}{n}.$$

Usando o facto de  $m_2(k)$  maximizar a expressão original, quando  $m_1(k) \geq \frac{k}{4}$  obtemos da inequação acima

$$\frac{k}{k-m_2(k)} \binom{k-m_2(k)}{m_2(k)} \geq \frac{k}{k-m_1(k)} \binom{k-m_1(k)}{m_1(k)} \geq 2 \binom{k-1-m_1(k)}{m_1(k)}.$$

Para garantir  $m_1(k) \geq \frac{k}{4}$ , basta garantir  $\frac{1}{2}(k-1)(1-\frac{\sqrt{5}}{5})-1 \geq \frac{k}{4}$ , o que acontece para  $k \geq 49$ . O cálculo de  $\max_{2 \leq d \leq k-1} f_{d-1}(\mathcal{C}(d, k))$  para  $k \leq 48$ , usando uma ferramenta de álgebra computacional, leva-nos a concluir que o maximizante é, em todos os casos,  $m_2(k)$ , excepto para  $k = 5$ , caso em que é  $m_1(k)$ .  $\square$

Para efeitos de limite, podemos considerar simplesmente

$$T(n) = \min_k \left\{ n \leq \frac{k}{k-m_2(k)} \binom{k-m_2(k)}{m_2(k)} \right\}.$$

Apesar de mais complicada, esta expressão, dada a sua natureza combinatória, apresenta grandes semelhanças com a expressão de  $S(n)$ . O próximo passo será assim usar técnicas análogas às usadas na secção 3.1, para levar a cabo o estudo assintótico deste minorante.

**Lema 39.** *Seja  $s_n = \frac{n}{n-m_2(n)} \binom{n-m_2(n)}{m_2(n)}$ . Então,  $\lim_n \frac{T(n)}{\log_2(n)}$  existe se e só se  $\lim_n \frac{T(s_n)}{\log_2(s_n)}$  existir, tomando nesse caso o mesmo valor.*

**Prova:** Para provar a implicação directa basta verificar que  $s_n$  é crescente pois, nesse caso,  $\frac{T(s_n)}{\log_2(s_n)}$  será uma subsucessão de  $\frac{T(n)}{\log_2(n)}$ , convergindo se esta o fizer.

Recordemos que  $s_n$  é, por definição, o número máximo de facetas de um polítopo cíclico com  $n$  vértices ou, equivalentemente, o número de facetas do polítopo cíclico  $\mathcal{C}(n, 2m_2(n))$ . Este tem estritamente menos facetas do que o polítopo cíclico com a mesma dimensão e mais um vértice,  $\mathcal{C}(n+1, 2m_2(n))$ . Este facto é intuitivo e pode facilmente ser verificado observando a fórmula para o número de facetas de um polítopo cíclico. Deste modo,

$$s_n < f_{2m_2(n)-1}(\mathcal{C}(n+1, 2m_2(n))) \leq \max_{2 \leq d \leq n} f_{d-1}(\mathcal{C}(n+1, d)) = s_{n+1},$$

o que conclui a implicação. Para provar a implicação recíproca, comecemos por notar que do facto de  $s_n$  ser crescente resulta que  $T(s_n) = n$ . Então, para  $s_k < n \leq s_{k+1}$ , temos

$$\frac{T(n)}{\log_2(n)} = \frac{k+1}{\log_2(n)} = \frac{T(s_{k+1})}{\log_2(n)} \geq \frac{T(s_{k+1})}{\log_2(s_{k+1})}$$

e

$$\frac{T(n)}{\log_2(n)} = \frac{T(s_k)}{\log_2(n)} + \frac{1}{\log_2(n)} \leq \frac{T(s_k)}{\log_2(s_k)} + \frac{1}{\log_2(s_k)}.$$

Se o limite de  $\frac{T(s_n)}{\log_2(s_n)}$  existir, tomando limites nas duas inequações, concluimos que o limite de  $\frac{T(n)}{\log_2(n)}$  existe e é o mesmo.  $\square$

Para efectuar o estudo assintótico precisamos agora apenas de uma versão da aproximação de Stirling dada no Lema 32, que nos forneça uma boa aproximação para  $\ln\binom{n}{m}$ , o último ingrediente em falta para esse estudo. Temos

$$\ln\binom{n}{m} = \ln(n!) - \ln(m!) - \ln((n-m)!).$$

Aplicando a aproximação de Stirling a cada um destes factoriais e simplificando os termos lineares, obtemos

$$\ln\binom{n}{m} = n \ln n + \mathcal{O}(\ln n) - m \ln m + \mathcal{O}(\ln m) - (n-m) \ln(n-m) - \mathcal{O}(\ln(n-m)).$$

Munidos desta ferramenta, podemos finalmente provar o resultado pretendido.

**Corolário 40.** *O minorante  $T(n)$  é assintoticamente equivalente a  $\log_\phi(n)$ , onde  $\phi$  é o número de ouro.*

**Prova:** Pelo Lema 39, para estudar  $\lim_n \frac{\log_2(n)}{T(n)}$ , basta estudar  $\lim_n \frac{\log_2(s_n)}{T(s_n)}$ , que já vimos ser o mesmo que  $\lim_n \frac{\log_2(s_n)}{n}$ . Por outro lado,  $\log_2(s_n)$  é, por definição,

$$\log_2\left(\frac{n}{n-m_2(n)} \binom{n-m_2(n)}{m_2(n)}\right) = \frac{1}{\ln 2} \left( \ln\left(\frac{n}{n-m_2(n)}\right) + \ln\left(\binom{n-m_2(n)}{m_2(n)}\right) \right).$$

Portanto,

$$\lim_n \frac{\log_2(s_n)}{n} = \frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{\ln\left(\frac{n}{n-m_2(n)}\right) + \ln\left(\binom{n-m_2(n)}{m_2(n)}\right)}{n} = \frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{\ln\left(\binom{n-m_2(n)}{m_2(n)}\right)}{n},$$

visto que  $\frac{\ln\left(\frac{n}{n-m_2(n)}\right)}{n} < \frac{\ln n}{n}$ , que converge para zero.

Podemos usar agora a aproximação para  $\ln\binom{n}{m}$  na expressão  $\ln\binom{n-m_2(n)}{m_2(n)}$ . Como

$$\frac{\mathcal{O}(\ln(n - m_2(n)))}{n} = \frac{\mathcal{O}(\ln(n - m_2(n))) \ln(n - m_2(n))}{\ln(n - m_2(n)) n} < \frac{\mathcal{O}(\ln(n - m_2(n))) \ln n}{\ln(n - m_2(n)) n},$$

que converge para zero, e como o mesmo se verifica com  $\frac{\mathcal{O}(\ln(m_2(n)))}{n}$  e  $\frac{\mathcal{O}(\ln(n-2m_2(n)))}{n}$ , estes termos da aproximação desaparecem do limite. Ficamos apenas com  $\lim_n \frac{\log_2(s_n)}{n}$  escrito como a soma de

$$\frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{(n - m_2(n)) \ln(n - m_2(n))}{n}$$

e de

$$\frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{-m_2(n) \ln(m_2(n)) - (n - 2m_2(n)) \ln(n - 2m_2(n))}{n}.$$

Para calcular estes limites, recordemos que  $m_2(n) = \lceil \frac{5n-4-\sqrt{5n^2-4}}{10} \rceil$ . Facilmente se verifica que  $m_2(n) \sim r(n)$ , onde  $r(n) = \frac{1}{2}n(1 - \frac{\sqrt{5}}{5})$ . Da mesma forma,  $n - m_2(n) \sim n - r(n)$  e  $n - 2m_2(n) \sim n - 2r(n)$ . Logo, o limite anterior é igual a

$$\frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{(n - r(n)) \ln(n - r(n)) - r(n) \ln(r(n)) - (n - 2r(n)) \ln(n - 2r(n))}{n}.$$

Substituindo  $r(n)$  pela sua expressão e uma vez que todos os termos em  $\ln n$  se anulam, vem

$$\frac{1}{\ln 2} \lim_n \frac{\frac{n}{2}(1 + \frac{\sqrt{5}}{5}) \ln(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}) - \frac{n}{2}(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}) \ln(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}) - n \frac{\sqrt{5}}{5} \ln(\frac{\sqrt{5}}{5})}{n}.$$

Simplificando, obtém-se

$$\frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{(5 + \sqrt{5})^2}{20} \right) = \frac{1}{2} \log_2 (\phi^2) = \log_2(\phi).$$

Concluimos assim que

$$\lim_n \frac{T(n)}{\log_2(n)} = \frac{1}{\log_2(\phi)} = \log_\phi(2),$$

ou seja,  $\lim_n \frac{T(n)}{\log_\phi(n)} = 1$ , tal como pretendido.  $\square$

Assintoticamente sabemos já que  $xc(P_n)$ , onde  $P_n$  é um  $n$ -gono regular, estava entre  $\log_2(n)$  e  $2 \log_2(n)$ . O que este resultado vem fazer é subir o minorante assintótico para  $\log_\phi(2) \log_2(n)$ , que é aproximadamente  $1.44 \log_2(n)$ . Esta representa uma melhoria muito significativa no estado da arte.

## Capítulo 4

# Característica booleana

Como vimos, a característica booleana de uma matriz booleana é o tamanho mínimo de todas as suas factorizações booleanas. Define-se a característica booleana de um polítopo como a característica booleana da matriz booleana associada à sua matriz de folgas. Representamos a matriz booleana dos  $n$ -gonos por  $S_n^*$ .

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades desta característica, com especial ênfase no caso dos  $n$ -gonos.

**Exemplo 41.** A matriz booleana do hexágono pode ser factorizada em

$$S_6^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que  $car_{bool}(S_6^*) \leq 5$ .

### 4.1. Algumas interpretações

A característica booleana tem inúmeras interpretações em termos combinatórios. Nesta secção apresentamos três exemplos.

### 4.1.1. Cobertura de rectângulos

Seja  $M$  uma matriz booleana. Um rectângulo de  $M$  é um conjunto do tipo  $I \times J$ , onde  $I$  e  $J$  são, respectivamente, conjuntos de índices de linhas e de colunas de  $M$  tais que, para todo o  $(i, j)$  pertencente a  $I \times J$ ,  $M_{ij} = 1$ . Uma cobertura de rectângulos é um conjunto de rectângulos cuja união é o suporte de  $M$  (conjunto dos índices correspondentes às entradas não nulas).

**Exemplo 42.**  $\{\{1, 2\} \times \{4, 5, 6\}, \{4, 5\} \times \{1, 2, 3\}, \{1, 5, 6\} \times \{3, 4\}, \{3, 6\} \times \{2, 5\}, \{2, 3, 4\} \times \{1, 6\}\}$  é um exemplo de uma cobertura de rectângulos de  $S_6^*$ . Abaixo encontram-se, com cores diferentes, os rectângulos da cobertura anterior.

0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0

Dada uma factorização booleana de  $M$ ,  $AB$ , de tamanho  $k$ , podemos escrever  $M = AB = \sum_{i=1}^k A_{*,i}B_{i,*}$ , em que  $A_{*,i}$  e  $B_{i,*}$  representam, por esta ordem, a coluna  $i$  de  $A$  e a linha  $i$  de  $B$ . Com base na parcela  $i$  da soma,  $A_{*,i}B_{i,*}$ , construíamos o rectângulo  $I_i \times J_i$ , onde  $I_i$  é o suporte de  $A_{*,i}$  e  $J_i$  é o suporte de  $B_{i,*}$ , com  $i = 1, \dots, k$ . O conjunto  $\{I_1 \times J_1, \dots, I_k \times J_k\}$  é uma cobertura de rectângulos de  $M$ , de cardinalidade  $k$  (se houver elementos iguais, isso significa que há parcelas da soma iguais, pelo que uma delas pode ser suprimida). A cobertura do Exemplo 42 foi obtida desta maneira, a partir da factorização apresentada no Exemplo 41.

Reciprocamente, a partir de toda a cobertura de rectângulos de  $M$ ,  $\{I'_1 \times J'_1, \dots, I'_l \times J'_l\}$ , pode construir-se uma factorização booleana de  $M$ ,  $A'B'$ , de tamanho  $l$ , em que  $A'_{*,i}$  é não nula apenas nos índices pertencentes a  $I'_i$  e  $B'_{i,*}$  é não nula apenas nos índices de  $J'_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Em suma, denotando por  $rc(M)$  a cardinalidade mínima de uma cobertura de rectângulos de  $M$ , temos  $rc(M) = car_{bool}(M)$ .

### 4.1.2. Cobertura de bicliques

Seja  $G = (V, A)$  um grafo bipartido. Chama-se biclique a todo o produto cartesiano de dois subconjuntos de  $V$  que esteja contido em  $A$ . Uma cobertura de bicliques é um conjunto de bicliques cuja união é  $A$ . O número de cobertura de bicliques, representado por  $bc(G)$ , é a cardinalidade mínima de uma cobertura de bicliques.

A qualquer matriz booleana está associado um grafo bipartido. De facto, se  $M$  for uma matriz booleana, o grafo  $G_M = (L_M \times C_M, A_M)$ , em que  $L_M$ ,  $C_M$  e  $A_M$  são, respectivamente, o conjunto dos índices das linhas de  $M$ , o conjunto dos índices das colunas de  $M$  e o conjunto  $\{(i, j) : M_{ij} = 1\}$ , é bipartido. Uma biclique de  $G_M$  corresponde a um rectângulo de  $M$  e vice-versa. Assim,  $bc(G_M) = rc(M) = car_{bool}(M)$ .

Na Figura 4.1 pode ser observada a cobertura de bicliques do grafo associado à matriz booleana do hexágono, obtida através da cobertura de rectângulos do Exemplo 42.

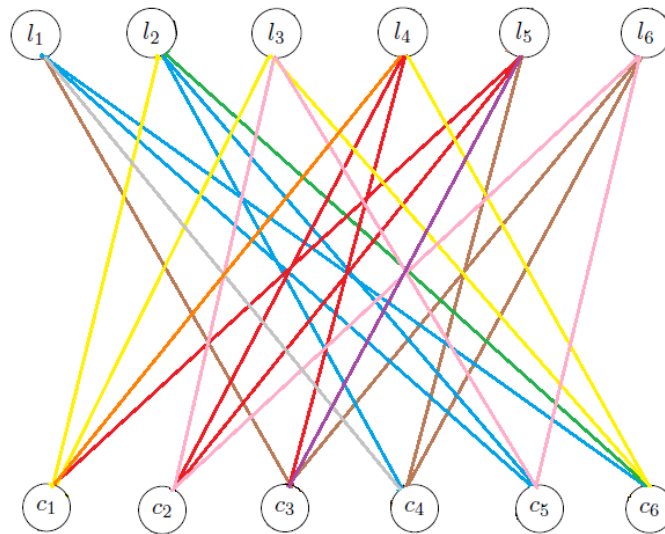


Figura 4.1: Cobertura de bicliques do grafo bipartido associado à matriz booleana do hexágono.

### 4.1.3. Imersão de reticulados

As interpretações que acabámos de ver são válidas para qualquer matriz booleana. A interpretação que veremos de seguida aplica-se apenas a matrizes booleanas de polítopos.

Dado um polítopo,  $P$ , o seu reticulado de faces,  $\mathcal{L}(P)$ , é o conjunto das suas

faces (incluindo a face  $\emptyset$  e o próprio polítopo) parcialmente ordenado por inclusão. Se  $(S, \leq)$  e  $(T, \sqsubseteq)$  forem conjuntos parcialmente ordenados, uma imersão entre eles é uma função,  $f : S \rightarrow T$ , tal que  $u \leq v$  se e só se  $f(u) \sqsubseteq f(v)$ .

**Teorema 43.** [6] *Seja  $P$  um polítopo com dimensão maior ou igual a um. A sua característica booleana,  $car_{bool}(P)$ , é o número mínimo de facetas de um polítopo para o qual exista uma imersão entre  $\mathcal{L}(P)$  e o respectivo reticulado de faces.*

Nas Figuras 4.2 e 4.3 estão ilustradas duas imersões, ambas entre o octógono, representado a azul, e um poliedro. No primeiro caso, trata-se de uma imersão que envia vértices para vértices e arestas para arestas; no segundo, a imersão liga vértices a arestas e arestas a facetas. Segundo o teorema anterior,  $car_{bool}(S_8^*) \leq \min\{f_2(\text{cubo}), f_2(\text{octaedro})\} = 6$ .

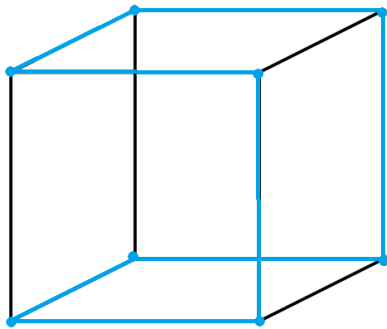


Figura 4.2: Imersão entre o octógono e o cubo.

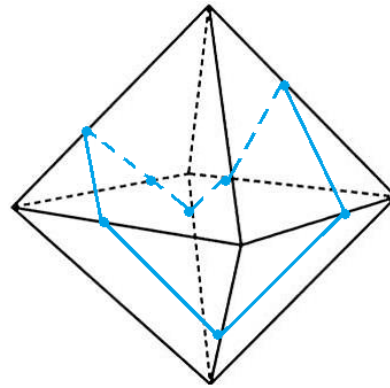


Figura 4.3: Imersão entre o octógono e o octaedro.

## 4.2. Minorantes da característica booleana de polítopos

Na subsecção 2.3.1 vimos que, se  $P$  for um polítopo com  $f$  facetas e  $v$  vértices,  $S(f) \leq car_{bool}(P) := car_{bool}(S_P^*)$  e  $S(v) \leq car_{bool}(P)$ . As mesmas desigualdades, quando aplicadas ao caso particular dos  $n$ -gonos, resultam em  $S(n) \leq car_{bool}(S_n^*)$ . Vejamos exemplos de outros minorantes.

### 4.2.1. Fooling number

O conceito de rectângulo permite-nos obter um minorante da característica booleana. Para isso, consideremos, dada uma matriz booleana não nula, um subconjunto de índices cujas entradas são iguais a um, com a particularidade de não haver, para



quaisquer dois índices, nenhum rectângulo que os contenha. Um conjunto assim definido designa-se por *fooling set* e as entradas que o integram têm de pertencer, necessariamente, a rectângulos distintos. Isto traduz-se numa correspondência injectiva entre qualquer *fooling set* e qualquer cobertura de rectângulos dessa matriz. Se  $M$  for uma matriz booleana, chama-se *fooling number* de  $M$ ,  $\text{fool}(M)$ , à cardinalidade máxima de um *fooling set* seu. Esta quantidade é o minorante da característica booleana mais utilizado.

**Exemplo 44.**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

*Fooling set* maximal de  $S_6^*$ , donde vem  $\text{car}_{\text{bool}}(S_6^*) \geq 4$ .

**Proposição 45.** *No caso das matrizes booleanas de  $n$ -gonos, o fooling number é no máximo cinco.*

**Prova:** Para começar, notemos que, dado um par de índices de um *fooling set*,  $(i, j)$  e  $(k, l)$ , não existir um rectângulo que os contenha equivale a dizer que a entrada na posição  $(i, l)$  é zero ou a entrada na posição  $(k, j)$  é zero.

Depois, os elementos de um *fooling set* de  $S_n^*$  estão todos em linhas e colunas diferentes, pois há sempre um rectângulo que contém todos os uns de qualquer linha e outro que contém todos os uns de qualquer coluna.

Por fim, como existem dois zeros por linha e por coluna, o *fooling number* não pode exceder cinco, porque, se um o *fooling set* contiver pelo menos um elemento, terá no máximo mais quatro elementos: dois localizados nas linhas em que surgem os zeros que estão na mesma coluna do elemento considerado inicialmente e outros dois nas colunas dos zeros que estão na mesma linha desse elemento.  $\square$

Na verdade, uma análise mais detalhada levar-nos-ia a concluir que, para  $n \geq 4$ , o *fooling number* de matrizes booleana de  $n$ -gonos é igual a quatro. Portanto, o minorante *fooling number* não é útil neste caso, dado que não nos dá praticamente nenhuma informação acerca do comportamento de  $\text{car}_{\text{bool}}(S_n^*)$ , ao contrário, por exemplo, de  $S(n)$ .

### 4.2.2. Número de cobertura de bicliques fraccionário

Dada uma matriz booleana,  $M$ , o problema de calcular a sua característica booleana, ou, equivalentemente, o número de cobertura de bicliques de  $G_M$ , pode ser transformado num programa linear ([24]):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \sum_{B \in \mathcal{B}(G_M)} w(B) \\ &\text{sujeito a } \sum_{\{B: a \in B\}} w(B) \geq 1, \text{ para a toda a aresta de } G_M, a \\ &w(B) \in \{0, 1\}, \text{ para toda a biclique de } G_M, B, \end{aligned} \quad (4.1)$$

em que  $\mathcal{B}(G_M)$  representa o conjunto das bicliques de  $G_M$ .

A remoção das restrições inteiras conduz-nos a um novo problema, cuja solução, o número de cobertura de biclique fraccionário,  $bc^*(G_M)$ , constitui, obviamente, um minorante da característica booleana:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \sum_{B \in \mathcal{B}(G_M)} w(B) \\ &\text{sujeito a } \sum_{\{B: a \in B\}} w(B) \geq 1, \text{ para a toda a aresta de } G_M, a \\ &w(B) \geq 0, \text{ para toda a biclique de } G_M, B. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note-se que o número de restrições cresce exponencialmente, o que torna o minorante difícil de calcular. Usando a simetria deste problema no caso dos  $n$ -gonos, construímos um programa em *Mathematica* que calcula o valor do minorante para valores moderados de  $n$ , cujo código se encontra no Apêndice A.

Os resultados obtidos, presentes na Tabela 4.1, sugerem que o minorante é dominado por  $S(n)$ .

$n$	6	7-10	11-20	21
$\lceil bc^*(G_{S_n^*}) \rceil$	5	5	6	6
$S(n)$	4	5	6	7

Tabela 4.1: Comparação de  $bc^*(G_{S_n^*})$  e de  $S(n)$  para valores moderados de  $n$ .

4.2.3. Uma versão melhorada do minorante  $S(n)$

Para provarmos que  $S(n) \leq \text{car}_{\text{bool}}(S_n^*)$ , na secção 2.3.1, usámos o facto de os suportes das linhas da primeira matriz de qualquer factorização booleana de  $S_n^*$  formarem uma anti-cadeia. Também os suportes das colunas da segunda matriz de qualquer factorização são dois a dois incomparáveis. Existem, contudo, outras propriedades das factorizações booleanas de  $S_n^*$  que podem ser aproveitadas, de modo a melhorar o minorante  $S(n)$ . Nesta secção apresentamos a versão proposta em [21], que faz uso da relação entre os suportes das matrizes da factorização não negativa.

Recordemos que  $S_n^*$  é a matriz cuja entrada na posição  $(i, j)$  é

$$s_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \text{ ou } i = (j + 1) \bmod n \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja  $TU$  uma factorização booleana de tamanho  $k$  de  $S_n^*$  e representemos por  $t_i$  o suporte da linha  $i$  de  $T$  e por  $u_j$  o suporte da coluna  $j$  de  $U$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ , todos eles subconjuntos de  $\{1, \dots, k\}$ . É claro que  $s_{ij}^* = 0$  se e só se  $i = j$  ou  $i = (j + 1) \bmod n$  e, nesse caso,  $t_i \cap u_j = \emptyset$ . Caracterizemos os conjuntos  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$  e  $\mathcal{U} = \{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_n}\}$ , em que  $\overline{u_j}$  denota o complementar de  $u_j$ . Podemos supor, para começar, que  $u_i = \overline{t_i \cup t_{i+1}}$ , já que isso não alterará nem o produto nem o tamanho da factorização. Nestas condições, temos que:

·  $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$  é uma anti-cadeia, assim como  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

·  $\mathcal{U} = \{\overline{u_1}, \dots, \overline{u_n}\} = \{t_1 \cup t_2, t_2 \cup t_3, \dots, t_{n-1} \cup t_n, t_n \cup t_1\}$  é uma anti-cadeia, dado que os complementares de conjuntos que formem uma anti-cadeia constituem, eles próprios, uma anti-cadeia, de igual cardinalidade.

· Todo o conjunto  $t_i \subseteq \{1, \dots, k\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , contém pelo menos um elemento que não pertence aos conjuntos  $t_j \cup t_{j+1}$ , para  $j, j + 1 \neq i$ , já que, para  $i \neq j, j + 1$ ,  $s_{ij}^* = 1$ .

**Teorema 46.** [21] *Caso se verifiquem as condições anteriores,*

$$n \leq \frac{k - \lfloor k/2 \rfloor}{k - 1} \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}.$$

**Prova:** Seja  $\{s_1, \dots, s_m\}$  uma anti-cadeia qualquer de  $\{1, \dots, k\}$ , ou seja, uma anti-cadeia em que  $s_i$  é um subconjunto  $\{1, \dots, k\}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Consideremos, para cada  $s_i$ , as permutações em que os seus elementos ocupam as primeiras posições e só

depois surgem os restantes elementos de  $\{1, \dots, k\}$ . O número de permutações associadas a  $s_i$  é  $|s_i|(k - |s_i|)!$ . Por  $\{s_1, \dots, s_m\}$  ser uma anti-cadeia, estas permutações são todas distintas. Basta notar que, dados  $s_i$  e  $s_j$ , com  $i \neq j$ , existe um elemento de  $s_i$  que não pertence a  $s_j$ ,  $e_i$ , e existe um elemento de  $s_j$  que não pertence a  $s_i$ ,  $e_j$ , e, portanto,  $e_i$  surge antes de  $e_j$  nas permutações associadas a  $s_i$ , ocorrendo o oposto nas permutações relativas a  $s_j$ .

Designemos por  $z_i$  o número de elementos de  $\overline{u_i}$  que não pertencem a  $t_i$  (isto é,  $|\overline{u_i}| = |t_i| + z_i$ ) e por  $z'_i$  o número de elementos  $\overline{u_{i-1}}$  que não pertencem a  $t_i$  (ou seja,  $|\overline{u_{i-1}}| = |t_i| + z'_i$ ). Assim, o número de permutações associadas a  $t_i$ , a  $\overline{u_i}$  e a  $\overline{u_{i-1}}$  é, por esta ordem,  $|t_i|(k - |t_i|)!$ ,  $(|t_i| + z_i)(k - |t_i| - z_i)!$  e  $(|t_i| + z'_i)(k - |t_i| - z'_i)!$ . Quanto a repetições, o número de permutações comuns a  $t_i$  e  $\overline{u_i}$  é  $|t_i|z_i!(k - |t_i| - z_i)!$ , ao passo que  $t_i$  e  $\overline{u_{i-1}}$  partilham  $|t_i|z'_i!(k - |t_i| - z'_i)!$  permutações. Estas são as únicas repetições, devido à terceira condição acima enunciada. Além disso,  $|\overline{u_i}| = |t_i| + z_i = |t_{i+1}| + z'_{i+1}$ , por isso, o número de permutações correspondentes a  $\overline{u_i}$  é também igual a  $\frac{1}{2}(|t_i| + z_i)(k - |t_i| - z_i)! + \frac{1}{2}(|t_{i+1}| + z'_{i+1})(k - |t_{i+1}| - z'_{i+1})!$ .

Portanto, se tivermos em conta as repetições e o que foi apresentado no parágrafo introdutório, temos que as permutações relativas a  $t_i$  e  $\overline{u_i}$ , para  $i = 1, \dots, n$ , são todas distintas. Ao todo, são  $\sum_{i=1}^n |t_i|(k - |t_i|)! + \frac{1}{2}(|t_i| + z_i)(k - |t_i| - z_i)! + \frac{1}{2}(|t_i| + z'_i)(k - |t_i| - z'_i)! - |t_i|z_i!(k - |t_i| - z_i)! - |t_i|z'_i!(k - |t_i| - z'_i)!$  permutações, pelo que

$$\sum_{i=1}^n |t_i|(k - |t_i|)! + \frac{1}{2}(|t_i| + z_i)(k - |t_i| - z_i)! + \frac{1}{2}(|t_i| + z'_i)(k - |t_i| - z'_i)! - |t_i|z_i!(k - |t_i| - z_i)! - |t_i|z'_i!(k - |t_i| - z'_i)! \leq k!$$

Para minimizarmos o membro esquerdo da inequação, minimizamos cada uma das parcelas, individualmente. Podemos supor, sem perda de generalidade, que no minimizante se verifica  $z_i = z'_i$ . Retirando os índices, minimizar cada parcela corresponde a

$$\min_{t \geq 1, z \geq 1, t+z \leq k-1} t!(k-t)! + (t+z)!(k-t-z)! - 2t!z!(k-t-z)!$$

Pode mostrar-se que a solução óptima é dada por  $t^* = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  e  $z^* = 1$ . Assim, dividindo a inequação anterior por  $k!$  e substituindo os  $|t_i|$  e os  $z_i$  por  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  e 1, respectivamente, vem

$$n \left( \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}^{-1} + \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}^{-1} \frac{\lfloor k/2 \rfloor + 1}{k - \lfloor k/2 \rfloor} \left( 1 - \frac{2}{\lfloor k/2 \rfloor + 1} \right) \right) \leq 1$$

Simplificando, obtemos

$$n \leq \frac{k - \lfloor k/2 \rfloor}{k - 1} \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}. \square$$

Logo, definindo  $S(n)^+ := \min\{k : n \leq \frac{k - \lfloor k/2 \rfloor}{k - 1} \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}\}$ , temos, em particular,  $S(n)^+ \leq \text{car}_{\text{bool}}(S_n^*)$ . Além disso,  $S(n) \leq S(n)^+$ . Na Tabela 4.2 podemos ver que para  $n = 6$ , por exemplo,  $S(n)^+$  é estritamente melhor do que  $S(n)$ , dando-nos uma prova algébrica de que  $\text{car}_{\text{bool}}(S_6^*) = 5$ .

$n$	3	4	5-6	7	8-10	11-12	13-20	21-23	24-35	36-40	41-43
$S(n)$	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
$S(n)^+$	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9

Tabela 4.2: Comparação de alguns valores de  $S(n)$  e de  $S(n)^+$ .

### 4.3. Majorante computacional

Nesta secção, vamos concentrar-nos em determinar um majorante da característica booleana de  $n$ -gonos, obtido computacionalmente, que, conjugado com o minorante visto anteriormente, nos permitirá deduzir o valor da característica booleana de vários  $n$ -gonos.

Para isso, vamos considerar factorizações de  $S_n^*$  do tipo  $C_{n \times k} \times D_{k \times n}^T$ , em que, tanto em  $C_{n \times k}$  como em  $D_{k \times n}$ , o número de uns por linha é constante. Na origem desta construção está o artigo [1], nomeadamente a conjectura que se segue:

**Conjectura 47.** Se  $\text{car}_{\text{bool}}(S_n^*)$  for igual a  $k$ , existe uma factorização booleana de  $S_n^*$  de tamanho  $k$  tal que o número de uns em cada linha de  $C$  é  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  e o número de uns em cada linha de  $D$  é  $k - (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)$ .

O objectivo é, assim, encontrar, para cada  $n$ , o tamanho mínimo de uma factorização como a descrita na conjectura, que é, independentemente de esta ser ou não verdadeira, um majorante para  $\text{car}_{\text{bool}}(S_n^*)$ . Chamar-lhe-emos característica booleana homogénea,  $\text{car}_{\text{bool}}^{\text{hom}}(S_n^*)$ , por todas as linhas terem, em cada matriz da factorização, igual número de uns.

### 4.3.1. Interpretação gráfica

Seja  $C_{n \times k} \times D_{k \times n}^T$  uma factorização booleana de  $S_n^*$  com a propriedade mencionada na Conjectura 47. Cada linha de  $C$  e de  $D$  pode ser identificada com o seu suporte, ou seja, com um subconjunto de  $\{1, \dots, k\}$  com  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  elementos. Uma maneira de pensar nestes conjuntos é como vértices de um grafo.

**Definição 48.** Dados  $n$  e  $k$ , o grafo de Johnson,  $J(n, k)$ , é o grafo cujos vértices são os subconjuntos de cardinalidade  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$ , sendo que dois vértices são adjacentes se e só se a sua diferença simétrica for de cardinalidade 2, isto é, se os dois conjuntos tiverem  $k - 1$  elementos em comum.

Na Figura 4.4 podemos observar um exemplo de um destes grafos.

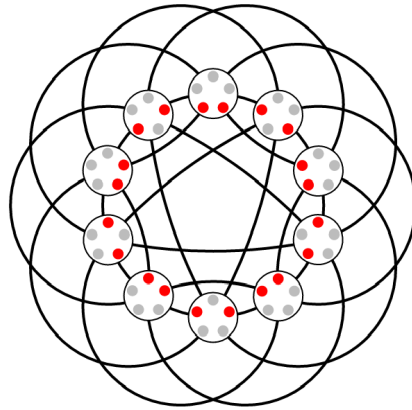


Figura 4.4:  $J(5, 2)$ : Cada círculo representa um subconjunto de cardinalidade 2, cujos elementos estão assinalados a vermelho.

Consideremos duas quaisquer linhas consecutivas de  $C$ ,  $C_l$  e  $C_{l+1}$ , identificando  $C_{k+1}$  com  $C_1$  se necessário. Como  $S_n^*$  tem zeros nas posições  $(l, l)$  e  $(l + 1, l)$ , o produto interno entre  $C_l$  e  $D_l$  deve ser zero, o que equivale a dizer que os seus suportes são disjuntos. O mesmo acontece com  $C_{l+1}$  e  $D_l$ . Como estamos a supor, pela Conjectura 47, que  $D_l$  tem  $k - (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)$  uns, então os suportes de  $C_l$  e  $C_{l+1}$  estão contidos no conjunto de  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$  índices correspondentes às entradas nulas de  $D_l$ . Como cada um deles tem suporte de cardinalidade  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  e não podem ser iguais, terão de partilhar exactamente  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$  entradas. Isto é, pensando nas linhas como vértices de  $J(k, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ , existe uma aresta entre  $C_l$  e  $C_{l+1}$ . Mostrámos assim que a cada factorização booleana nas condições da conjectura corresponde um ciclo neste grafo de Johnson.

Para obter factorizações a partir de ciclos, teremos de impor algumas condições

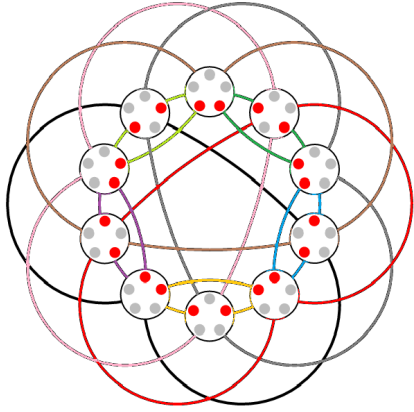


Figura 4.5:  $J(5,2)$ , com as arestas coloridas.

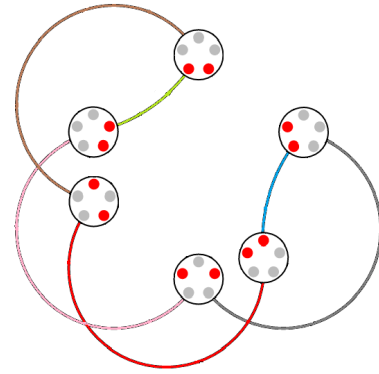


Figura 4.6: Ciclo factorizante associado ao Exemplo 41

extra. Começaremos por definir uma coloração para as arestas do grafo de Johnson. A cada aresta  $\{S, T\}$  do grafo de Johnson vamos atribuir como cor o conjunto complementar da sua reunião,  $\overline{S \cup T}$ . Existem então  $\binom{k}{k - (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)}$  cores distintas possíveis. No caso de um ciclo proveniente de uma fatorização, a cor de  $\{C_l, C_{l+1}\}$  é precisamente  $D_l$ . Como todas as linhas de  $D$  são distintas, segue de imediato que todas as cores do ciclo serão diferentes, ou seja, o ciclo correspondente a uma fatorização é um *ciclo arco-íris*.

Queremos saber quando é que um ciclo arco-íris pode ser interpretado como uma fatorização booleana de  $S_n^*$ . Tomando os vértices do ciclo como os suportes das linhas de  $C$  e as cores das arestas como os suportes das linhas de  $D$ , a condição de ser um ciclo arco-íris garante-nos que temos zeros nas posições pretendidas de  $CD^T$ . Para não termos zeros noutras posições, temos de assegurar que o produto interno de  $C_l$  e  $D_k$  é diferente de zero para  $k$  diferente de  $l$  ou  $l - 1$ . Isso corresponde no grafo a impor que nenhuma aresta do grafo de Johnson incidente num vértice do ciclo que não  $C_k$  ou  $C_{k+1}$  pode ter cor  $D_k$ . A um ciclo com esta propriedade chamamos *ciclo factorizante*.

Acabámos, então, de provar o seguinte:

**Proposição 49.** *A  $car_{bool}^{hom}(S_n^*)$  é o menor inteiro,  $k$ , para o qual  $J(k, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$  possui um ciclo factorizante de comprimento  $n$ .*

Nas Figuras 4.5 e 4.6 podemos observar a coloração definida acima para o caso  $k = 5$ , bem como o ciclo factorizante associado à fatorização da matriz  $S_6^*$  que foi introduzida no Exemplo 41.

### 4.3.2. Resultados Numéricos

Com base na interpretação gráfica introduzida na subsecção anterior, foram desenvolvidos dois algoritmos para o cálculo da característica booleana homogénea. Esses algoritmos serão documentados em pormenor nas subsecções seguintes e integralmente incluídos no Apêndice A, enquanto que nesta subsecção serão apresentados os principais resultados numéricos obtidos, que se encontram resumidos na Tabela 4.3.

Para  $3 \leq n \leq 31$ , os valores tabelados são os valores reais da característica booleana homogénea. Quanto aos restantes casos, o (\*) significa que conseguimos construir factorizações de tamanho nove, mas não sabemos se existem de tamanho oito, devido ao elevado tempo de execução dos algoritmos. Portanto, para os casos assinalados com um (\*) existe a dúvida de se a característica booleana homogénea é oito ou nove. Em [1] foram obtidos resultados até  $n = 33$ , sendo que para  $n = 32$  esse valor é oito. Na impossibilidade de verificar os resultados da referência [1], apresentamos os nossos. De futuro, pretendemos implementar mais eficientemente um algoritmo que resolva este caso.

$n$	3	4	5	6	7-9	10-21	22-31	32-43
$car_{bool}^{hom}(S_n^*)$	3	4	5	5	6	7	8	9(*)

Tabela 4.3: Valores obtidos para a característica booleana homogénea.

A análise da Figura 4.7 permite-nos deduzir o valor da característica booleana para vários inteiros, que são os inteiros para os quais a característica booleana homogénea e o minorante  $S(n)^+$  coincidem. Tais valores podem ser observados na Tabela 4.4. Os valores relativos aos inteiros 41 – 43 não são deduzíveis a partir de [1].

$n$	3	4	5-6	8-9	13-21	24-31	41-43
$car_{bool}(S_n^*)$	3	4	5	6	7	8	9

Tabela 4.4: Alguns valores da característica booleana.

### 4.3.3. Documentação do algoritmo standard de cálculo da característica booleana homogénea

Nesta subsecção descreve-se o algoritmo implementado no ficheiro `carboolhom.m`.

**Descrição:** Este algoritmo visa obter  $car_{bool}^{hom}(S_n^*)$  e na sua concepção está a interpretação gráfica da característica booleana homogénea dos  $n$ -gonos. Consiste



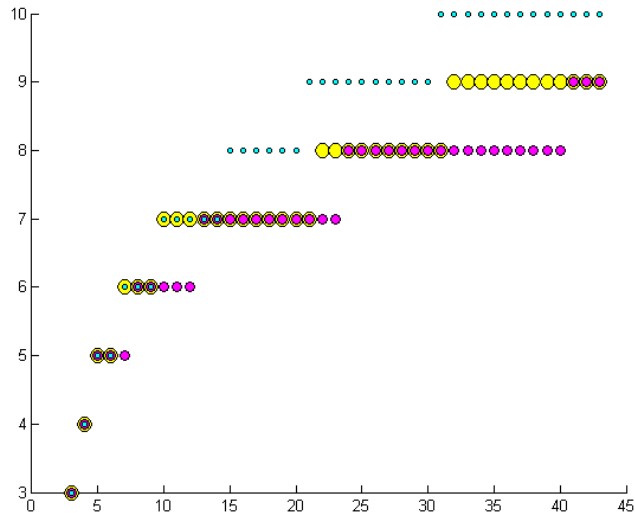


Figura 4.7: Comparação entre alguns valores de  $S(n)^+$ , a magenta, de  $T(n)$ , a azul, e de  $car_{bool}^{hom}(S_n^*)$ , a amarelo.

numa função, de argumentos  $n$  e  $k$ , que verifica se é possível construir um ciclo fatorizante de comprimento  $n$ , subgrafo de  $J(k, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ . Se sim, devolve a correspondente factorização booleana de  $S_n^*$ , cujo tamanho é  $k$ . Se não, devolve duas matrizes nulas. O menor  $k$  para o qual este ciclo exista é  $car_{bool}^{hom}(S_n^*)$ .

**Inicialização:** São criadas

- $V$ , uma matriz cujas linhas são os vértices de  $J(k, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ .
- $A$ , uma matriz cujas linhas listam os subconjuntos que representam as cores das arestas.
- $Viz$ , uma matriz de adjacências, cuja linha  $i$  contém os vértices vizinhos do vértice da linha  $i$  de  $V$ , ou seja, os vértices que lhe são adjacentes.
- $Aviz$ , uma matriz cuja entrada na posição  $(i, j)$  é a cor da aresta que une o vértice da linha  $i$  de  $V$  ao seu vizinho na coluna  $j$  de  $Viz$ .

**Busca:** No que diz respeito à construção do caminho, esta faz-se recursivamente e por busca *depth-first*, através de um ciclo. Por simetria, a escolha dos dois primeiros vértices é indiferente, pelo que podemos fixá-los.

Em cada iteração do ciclo, verifica-se se o comprimento do caminho é menor ou igual do que  $n$ . Caso o seu comprimento seja inferior a  $n$ , procura-se, no conjunto dos vizinhos do último vértice do caminho (obtidos a partir de  $Viz$ ), um que obedeça às seguintes restrições: a cor da aresta que liga o último vértice do caminho ao seu

vizinho tem de ser diferente das cores das arestas incidentes em qualquer vértice do caminho que não o último, e no vizinho em questão não pode incidir nenhuma aresta cuja cor seja igual à cor de alguma das arestas do caminho. Se tal vértice existir, é adicionado ao caminho; caso contrário, subtrai-se ao caminho o seu último vértice. Se o comprimento do caminho for  $n$ , testa-se se é possível fechá-lo, de modo a obter o desejado ciclo de tamanho  $n$ . Para isso, verifica-se se o primeiro vértice do caminho é vizinho do último e, caso o seja, se respeita as restrições anteriores. Tal como atrás, se as restrições não forem satisfeitas, o tamanho do caminho é reduzido.

No final, é analisado o comprimento do caminho, que ou é um, significando isso que não foi possível construir o ciclo, ou  $n + 1$ , caso em que o ciclo foi de facto construído.

### 4.3.4. Documentação do algoritmo de cálculo da característica booleana homogénea com redução de simetria

Nesta subsecção descreve-se o algoritmo implementado no ficheiro `carboolhom_sim.m`, uma versão modificada do algoritmo anterior. Tal como o anterior, dados  $n$  e  $k$  o programa verifica se é possível construir um ciclo factorizante de comprimento  $n$ , subgrafo de  $J(k, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ . Esta versão é especialmente indicada para os casos em que se pretende verificar a não existência de tal ciclo. Nesses casos, é necessário exaurir todas as possibilidades de ciclo, pelo que se tornam muito importantes as estratégias de redução do problema. Assim, foi implementada uma estratégia de redução por simetria que evita a redundância dos ciclos explorados. O peso computacional da verificação de simetrias torna esta versão mais lenta nos casos simples, mas compensa largamente nestas situações.

**Inicialização:** Além das variáveis inicializadas no algoritmo anterior, são criadas

- `Sim`, um grupo de células que representam as classes de simetria.
- `bool_sim`, uma variável que activa/desactiva a análise de simetria.

**Busca:** Funciona de maneira idêntica à do algoritmo anterior. A única diferença é que, sempre que for encontrado um vértice que satisfaça as restrições, se verifica se ele pertence a alguma das classes de simetria analisadas até esse momento. Se for esse o caso, a busca prossegue, até que se encontre um vértice que respeite as restrições e que não pertença a nenhuma das classes de simetria. Caso o vértice não pertença a nenhuma das classes de simetria, então é adicionado ao caminho, sendo a classe definida pelo caminho resultante guardada. Quanto à variável booleana,

mantém-se activada enquanto existirem classes de simetria. A partir do momento em que elas deixem de existir, esta variável é desligada.



# Bibliografia

- [1] Curtiss Barefoot, Kim AS Hefner, Kathryn F Jones, and J Richard Lundgren. Biclique covers of the complements of cycles and paths in a digraph. *Congressus Numerantium*, 53:133–146, 1986.
- [2] Alexander Barvinok. *A course in convexity*, volume 54. American Mathematical Society Providence, 2002.
- [3] Aharon Ben-Tal and Arkadi Nemirovski. On polyhedral approximations of the second-order cone. *Mathematics of Operations Research*, 26(2):193–205, 2001.
- [4] Dmitry Chistikov, Stefan Kiefer, Ines Marušić, Mahsa Shirmohammadi, and James Worrell. Nonnegative matrix factorization requires irrationality. Technical report, arxiv.org, 2016. Available at <http://arxiv.org/abs/1605.06848>.
- [5] Joel E Cohen and Uriel G Rothblum. Nonnegative ranks, decompositions, and factorizations of nonnegative matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 190:149–168, 1993.
- [6] Samuel Fiorini, Volker Kaibel, Kanstantsin Pashkovich, and Dirk Oliver Theis. Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations. *Discrete mathematics*, 313(1):67–83, 2013.
- [7] Samuel Fiorini, Serge Massar, Sebastian Pokutta, Hans Raj Tiwary, and Ronald De Wolf. Exponential lower bounds for polytopes in combinatorial optimization. *Journal of the ACM (JACM)*, 62(2):17, 2015.
- [8] Samuel Fiorini, Thomas Rothvoß, and Hans Raj Tiwary. Extended formulations for polygons. *Discrete & computational geometry*, 48(3):658–668, 2012.
- [9] David A Gregory and NJ Pullman. Semiring rank: Boolean rank and nonnegative rank factorizations. *J. Combin. Inform. System Sci*, 8(3):223–233, 1983.

- [10] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1967.
- [11] Volker Kaibel and Kanstantsin Pashkovich. Constructing extended formulations from reflection relations. In *Facets of Combinatorial Optimization*, pages 77–100. Springer, 2013.
- [12] P. McMullen. The maximum numbers of faces of a convex polytope. *Mathematika*, 17:179–184, 12 1970.
- [13] Thilo Rorig and Raman Sanyal. Non-projectability of polytope skeleta. *Advances in Mathematics*, 229(1):79 – 101, 2012.
- [14] Thomas Rothvoß. The matching polytope has exponential extension complexity. In *Proceedings of the 46th annual ACM symposium on theory of computing*, pages 263–272. ACM, 2014.
- [15] Yaroslav Shitov. Sublinear extensions of polygons. arXiv:1412.0728.
- [16] Yaroslav Shitov. An upper bound for nonnegative rank. *J. Comb. Theory Ser. A*, 122:126–132, February 2014.
- [17] Yaroslav Shitov. Nonnegative rank depends on the field ii. *arXiv preprint arXiv:1605.07173*, 2016.
- [18] Emanuel Sperner. Ein satz über untermengen einer endlichen menge. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1):544–548, 1928.
- [19] Stephen M Tanny and Michael Zuker. On a unimodal sequence of binomial coefficients. *Discrete Mathematics*, 9(1):79–89, 1974.
- [20] Rekha R Thomas. *Lectures in geometric combinatorics*, volume 33. American Mathematical Soc., 2006.
- [21] Arnaud Vandaele. *Heuristics, Exact Methods and Factorizations in Optimization*. PhD thesis, Université de Mons, March 2016.
- [22] Arnaud Vandaele, Nicolas Gillis, and François Glineur. On the linear extension complexity of regular n-gons. *arXiv preprint arXiv:1505.08031*, 2015.
- [23] Arnaud Vandaele, Nicolas Gillis, François Glineur, and Daniel Tuyttens. Heuristics for exact nonnegative matrix factorization. *Journal of Global Optimization*, pages 1–32, 2015.

- [24] Valerie L Watts. Fractional biclique covers and partitions of graphs. *JOURNAL OF COMBINATORICS*, 13(3):R74, 2006.
- [25] Mihalis Yannakakis. Expressing combinatorial optimization problems by linear programs. In *Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 223–228. ACM, 1988.
- [26] Günter M Ziegler. *Lectures on polytopes*, volume 152. Springer Science & Business Media, 1995.





# Apêndice A

## Código

### A.1. Algoritmo standard de cálculo da característica booleana homogénea

```
function [C,D] = carboolhom(n,k)

%Conjunto dos vértices
V=nchoosek(1:k,floor(k/2));

%Conjunto das cores das arestas
A=nchoosek(1:k,k-(floor(k/2)+1));

%Conjunto dos vizinhos de cada vértice
for i=1:length(V)
    cont=0;
    for j=1:length(V)
        if length(setxor(V(i,:),V(j,:)))==2
            cont=cont+1;
            Viz(i,cont)=j;
        end
    end
end

n_viz=cont;
contarestas=zeros(size(A,1));

%Cores das arestas entre cada vértice e os seus vizinhos
for i=1:length(V)
    for j=1:n_viz
        cont=1;
        while(not(isequal(setdiff(1:k,union(V(i,:),V(Viz(i,j),:))),A(cont,:))))
            cont=cont+1;
        end
        Aviz(i,j)=cont;
        contarestas(cont)=contarestas(cont)+1;
    end
end
```

## Apêndice A Código

---

```
Vinc(cont,contarestas(cont))=i;
end
end

for i=1:length(V)
    [Aviz(i,:),I]=sort(Aviz(i,:));
    Viz(i,:)=Viz(i,I);
end

%Construção do caminho (P(i) representa o i-ésimo vértice do caminho e AP(i) a i-ésima aresta)
P(1)=1;
P(2)=Viz(1,1);
AP(1)=Aviz(1,1);
ind=ones(1,length(V));
c=1;
while and(c,length(P)<=n)
    if (length(P)==n)
        [b,l]=ismember(P(1),Viz(P(n),:));
        i=2;
        while and(b,i<length(P))
            %Verificação de que as restrições sobre as arestas são cumpridas
            b=not(or(myMember(Aviz(P(i),:),Aviz(P(n),l)),myMember(Vinc(AP(i),:),P(1))));
            i=i+1;
        end
        if(b)
            P(n+1)=P(1);
            AP(n)=Aviz(P(n),l);
        else
            ind(P(length(P)))=1;
            P=P(1:length(P)-1);
            ind(P(length(P)))=ind(P(length(P)))+1;
        end
    else
        b=1;
        j=ind(P(length(P)));
        while and(b,j<=n_viz)
            i=1;
            while and(b,i<length(P))
                %Verificação de que as restrições sobre as arestas são cumpridas
                b=not(or(myMember(Aviz(P(i),:),Aviz(P(length(P)),j)),myMember(Vinc(AP(i),:),Viz(P(length(P)),j))));
                i=i+1;
            end
        end
    end
end
```

## A.1 Algoritmo standard de cálculo da característica booleana homogênea

---

```
if(b)
    ind(P(length(P)))=j;
    AP(length(P))=Aviz(P(length(P)),j);
    P(length(P)+1)=Viz(P(length(P)),j);
    b=0;
else
    j=j+1;
    b=1;
end
end
if(j>n_viz)
    ind(P(length(P)))=1;
    P=P(1:length(P)-1);
    c=(length(P)>=2);
    if c
        ind(P(length(P)))=ind(P(length(P)))+1;
    end
end
end
end

%Factorização booleana

%Verifica se foi possível construir o caminho e, nesse caso, é devolvida a
%factorização booleana
C=zeros(n,k);
D=zeros(n,k);

if(length(P)>2)

for i=1:n
    for j=1:floor(k/2)
        C(i,V(P(i),j))=1;
    end
end

for i=1:n
    D(i,A(AP(i),:))=1;
end

end
```

end

## A.2. Algoritmo de cálculo da característica booleana homogênea com redução de simetria

```
function [C,D] = carboolhom_sim(n,k)

%Conjunto dos vértices
V=nchoosek(1:k,floor(k/2));

%Conjunto das cores das arestas
A=nchoosek(1:k,k-(floor(k/2)+1));

%Conjunto dos vizinhos de cada vértice
for i=1:length(V)
    cont=0;
    for j=1:length(V)
        if length(setxor(V(i,:),V(j,:)))==2
            cont=cont+1;
            Viz(i,cont)=j;
        end
    end
end

n_viz=cont;
contarestas=zeros(size(A,1));

%Cores das arestas entre cada vértice e os seus vizinhos
for i=1:length(V)
    for j=1:n_viz
        cont=1;
        while(not(isequal(setdiff(1:k,union(V(i,:),V(Viz(i,j),:))),A(cont,:))))
            cont=cont+1;
        end
        Aviz(i,j)=cont;
        contarestas(cont)=contarestas(cont)+1;
        Vinc(cont,contarestas(cont))=i;
    end
end

for i=1:length(V)
    [Aviz(i,:),I]=sort(Aviz(i,:));
    Viz(i,:)=Viz(i,I);
end
```

## A.2 Algoritmo de cálculo da característica booleana homogênea com redução de simetria

---

```
end

%Classes de simetria
Sim{1}=zeros(1,k);
for i=1:floor(k/2)
    Sim{1}(V(1,i))=1;
end

for i=2:n
    Sim{i}=[];
end

%Variável booleana que regula a análise de simetria
bool_sim=1;
para=0;

%Construção do caminho (P(i) representa o i-ésimo vértice do caminho e AP(i) a i-ésima aresta)
P(1)=1;
ind=ones(1,length(V));
c=1;
while and(c,length(P)<=n)
    if (length(P)==n)
        [b,1]=ismember(P(1),Viz(P(n),:));
        i=2;
        while and(b,i<length(P))
            %Verificação de que as restrições sobre as arestas são cumpridas
            b=not(or(myMember(Aviz(P(i),:),Aviz(P(n),1)),myMember(Vinc(AP(i),:),P(1))));
            i=i+1;
        end
        if(b)
            P(n+1)=P(1);
            AP(n)=Aviz(P(n),1);
        else
            ind(P(length(P)))=1;
            P=P(1:length(P)-1);
            ind(P(length(P)))=ind(P(length(P)))+1;
        end
    else
        b=1;
        j=ind(P(length(P)));
        while and(b,j<=n_viz)
            i=1;
```

## Apêndice A Código

---

```
while and(b,i<length(P))
%Verificação de que as restrições sobre as arestas são cumpridas
    b=not(or(myMember(Aviz(P(i),:),Aviz(P(length(P)),j)),myMember(Vinc(AP(i),:),Viz(P(length(P)),j))));
    i=i+1;
end
if(b)
%Análise de Simetria
    if(bool_sim)
        [lin,col]=size(Sim{length(P)});
        aux=zeros(1,k);
        for i=1:floor(k/2)
            aux(V(Viz(P(length(P)),j),i))=1;
        end
        aux=Sim{length(P)}(lin,:)+2^(length(P))*aux;
        if(ismember(sort(aux),sort(Sim{length(P)+1},2),'rows'))
            j=j+1;
        else
            Sim{length(P)+2}=[];
            Sim{length(P)+1}=vertcat(Sim{length(P)+1},aux);
            ind(P(length(P)))=j;
            AP(length(P))=Aviz(P(length(P)),j);
            P(length(P)+1)=Viz(P(length(P)),j);
            b=0;
            if(numel(Sim{length(P)-1}(lin,:))==numel(unique(Sim{length(P)-1}(lin,:))))
                bool_sim=0;
                para=length(P)-2;
            end
        end
    else
        ind(P(length(P)))=j;
        AP(length(P))=Aviz(P(length(P)),j);
        P(length(P)+1)=Viz(P(length(P)),j);
        b=0;
    end
end
else
    j=j+1;
    b=1;
end
end
if(j>n_viz)
    ind(P(length(P)))=1;
    P=P(1:length(P)-1);
```

```
c=(length(P)>=1);
if (length(P)==para)
    bool_sim=1;
end
if c
    ind(P(length(P)))=ind(P(length(P)))+1;
end
end
end

end

end

end

%Factorização booleana

%Verifica se foi possível construir o caminho e, nesse caso, é devolvida a
%factorização booleana
C=zeros(n,k);
D=zeros(n,k);

if(length(P)>2)

for i=1:n
    for j=1:floor(k/2)
        C(i,V(P(i),j))=1;
    end
end

for i=1:n
    D(i,A(AP(i),:))=1;
end

end

end
```

### A.3. Algoritmo do cálculo do número de biclique fraccionário

```
n = 16;
BB = ToeplitzMatrix[{0, 0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a7, a6, a5, a4,
    a3, a2, a1}, {0, a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a7, a6, a5, a4, a3,
    a2, a1, 0}];

Bracelets = {};
For[i = 1, i < n, i++,
```

## Apêndice A Código

---

```
c = Join[ConstantArray[1, i], ConstantArray[0, n - i]];
L = ListNecklaces[n, c, Dihedral];
Bracelets = Union[L, Bracelets]

nb = Dimensions[Bracelets][[1]];
ListIneq = {};
For[i = 1, i <= nb, i++, b = Bracelets[[i, All]];
  b2 = b + b[[Prepend[Range[n - 1], n]]];
  c = Table[If[b2[[i]] == 0, 1, 0], {i, 1, n}];
  A = Transpose[{b}].{c}; t = Tr[A.BB];
  ListIneq = Union[ListIneq, {t}]

r1 = ListIneq /. {a1 -> 1, a2 -> 0, a3 -> 0, a4 -> 0, a5 -> 0,
  a6 -> 0, a7 -> 0};
r2 = ListIneq /. {a1 -> 0, a2 -> 1, a3 -> 0, a4 -> 0, a5 -> 0,
  a6 -> 0, a7 -> 0};
r3 = ListIneq /. {a1 -> 0, a2 -> 0, a3 -> 1, a4 -> 0, a5 -> 0,
  a6 -> 0, a7 -> 0};
r4 = ListIneq /. {a1 -> 0, a2 -> 0, a3 -> 0, a4 -> 1, a5 -> 0,
  a6 -> 0, a7 -> 0};
r5 = ListIneq /. {a1 -> 0, a2 -> 0, a3 -> 0, a4 -> 0, a5 -> 1,
  a6 -> 0, a7 -> 0};
r6 = ListIneq /. {a1 -> 0, a2 -> 0, a3 -> 0, a4 -> 0, a5 -> 0,
  a6 -> 1, a7 -> 0};
r7 = ListIneq /. {a1 -> 0, a2 -> 0, a3 -> 0, a4 -> 0, a5 -> 0,
  a6 -> 0, a7 -> 1};

A = Transpose[{r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7}];
b = ConstantArray[-1, Dimensions[ListIneq][[1]]];
c = ConstantArray[-2*n, 7];
LinearProgramming[c, -A, b]
Ceiling[N[LinearProgramming[c, -A, b].(-c)]]
```