Universidade de Coimbra

Faculdade de Economia

Modelos Envolvendo Saltos e Difusão Modulados por Cadeia de Markov

Rui Pascoal

Julho 2006

Dissertação apresentada à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra para obtenção do Grau de Doutor em Economia na especialidade de Economia Matemática e Modelos Econométricos sob a orientação do Professor Doutor Rui Manuel de Almeida

Em memória de meu pai

À minha mãe

Agradeço

a Deus

à minha família

aos meus amigos

a todos os que me apoiaram

o empenho e a disponibilidade do meu orientador

Índice

Capítulo 1

Introdução

São apresentados modelos baseados em processos estocásticos com componentes de salto e difusão, dependentes de uma cadeia de Markov em tempo contínuo. A forma destes é inspirada pela do modelo apresentado originalmente por M. Jacobsen num contexto de análise de risco. Importar-nos-á também a aplicação à avaliação de activos com risco e a análise da possibilidade de ocorrência de acontecimentos extremos em economia da saúde.

Numa primeira parte (capítulo 2), começamos por apresentar uma resenha de um conjunto de conceitos e resultados sobre processos e cálculo estocásticos que nos importarão para o estudo subsequente. Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro representando o tempo e traduz a evolução de uma grandeza aleatória.

Começamos por abordar os conceitos de tempos de paragem e filtrações, essenciais para a compreensão da dinâmica de actualização da informação no contexto em que se definirão os processos estocásticos. Define-se previsibilidade e acessibilidade dos tempos de paragem e dos processos estocásticos, conceitos essenciais na caracterização dos integrandos de integrais estocásticos.

Definimos martingala, que é, no essencial, um processo cujo valor em cada momento coincide com o valor esperado do processo num momento posterior dada a informação naquele primeiro momento. Corresponde à noção de jogo justo. No caso de haver desigualdade, teremos a noção de submartingala e de supermartingala.

Tendo presente a definição de esperança condicional, consideramos projecções de um processo estocástico que se caracterizam por ter a mesma esperança que o processo quando tomados num qualquer tempo de paragem que esteja dentro de uma dada classe (por exemplo, a dos previsíveis). Ou seja, coincide com a esperança condicional do processo no tempo de paragem dada a informação obtida até esse tempo de paragem.

Introduzimos de seguida as noções de processo de variação finita, processo crescente e uma medida definida a partir deste, dada, para um processo estocástico limitado, pela esperança do integral do processo relativamente a um processo crescente. A medida permite caracterizar uma martingala de variação integrável como um processo cuja projecção previsível é indistinguível do valor inicial.

Começamos a apresentação de resultados referentes a martingalas pelo caso de tempo discreto. Apresentamos o teorema de paragem opcional que alarga a relação caracterizadora das submartingalas e supermartingalas ao caso em que o indice é um tempo de paragem. Apresentamos resultados acerca de convergência neste tipo de processo. Obtemos a decomposição de Riesz de uma supermartingala numa martingala e numa supermartingala positiva convergindo para 0 (potencial). Com base nestes resultados, podemos fazer a extensão do teorema de paragem opcional a tempos de paragem eventualmente infinitos. As desigualdades de Doob permitem-nos controlar a probabilidade de o supremo de um processo desse tipo tomar valores elevados.

Os resultados correspondentes em tempo contínuo são normalmente obtidos a partir dos resultados em tempo discreto.

A decomposição de Riesz permite obter uma nova decomposição, denominada de Doob-Meyer, resultante da decomposição do respectivo potencial, desta feita numa martingala e num processo crescente.

É apontada uma condição necessária e suficiente para a sua existência, condição esta baseada na integrabilidade uniforme do conjunto de variáveis aleatórias obtidas a partir da supermartingala considerada em tempos de paragem arbitrários. A supermartingala dir-se-á, nesse caso, de classe D. Se em lugar de tempos de paragem, consideramos momentos não aleatórios a supermartingala diz-se uniformemente integrável.

As martingalas de quadrado integrável são apresentadas. Servem como preliminares para a consideração de classes mais gerais de integradores estocásticos. Trata-se de martingalas cujo supremo de entre as variáveis que as constituem tem norma L^2-finita. Importa cara-cterizar este tipo de martingala através da soma de uma parte com trajectórias contínuas com outra de trajectórias descontínuas.

Estes dois tipos de martingalas constituem dois subespaços do espaço das martingalas de quadrado integrável, ortogonais. Procede-se à caracterização das martingalas de trajectórias descontínuas (ou seja, com saltos), em que surge como caso particularmente interessante o de martingala de variação integrável.

De realçar nesta caracterização é o facto de representarmos estas martingalas como soma de saltos compensados, correspondendo o compensador à projecção dual previsível do salto.

Cada salto pode ser identificado através do tempo de paragem que representa o momento aleatório da sua ocorrência e portanto identificado como acessível ou inacessível no mesmo sentido em que o correspondente tempo de paragem o é.

São caracterizados os quadrados e produtos de martingalas deste tipo, paradas no tempo de paragem do salto, como martingalas uniformemente integráveis. Apontamos também desigualdades que limitam a soma dos quadrados e produtos de martingalas de quadrado integrável.

Note-se que uma martingala de quadrado integrável com variação finita é puramente descontínua.

Os conceitos de variação quadrática permitem analisar o comportamento previsível para os quadrados dos valores de uma martingala de quadrado integrável, M. A variação quadrática previsível, $\langle M, M\rangle$, é o processo crescente da decomposição de Doob-Meyer do potencial $E\left(M_\infty^2 \,|F_t\right) - M_t^2$. A variação quadrática opcional, $[M, M]$, é dada por $\langle M^c, M^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \triangle M_s^2$ onde M^c é a parte de trajectória contínua de M e $\triangle M_s$ é o salto de M no momento s. $\langle M, M\rangle$ é a projecção previsível dual de $[M, M]$. Podemos considerar as variações "cruzadas" correspondentes, $\langle M, N\rangle$ e $[M, N]$, definidas em termos de produtos, em vez de quadrados. M e N são ortogonais se e só se $\langle M, N\rangle$ for nulo.

Enunciamos algumas propriedades destas variações envolvendo tempos de paragem. As desigualdades de Kunita-Watanabe permitem estabelecer um limite ao integral relativamente à variação "cruzada" a partir do limite estabelecido sobre o integral relativamente à variação quadrática.

O integral estocástico $\int HdM$, onde M é uma martingala de quadrado integrável, é definido em três etapas. Consideramos, em primeiro lugar, um integrando H previsível simples limitado. Assim, $H_t = H_i$ para $t \in]t_i, t_{i+1}]$ sendo H_i uma variável aleatória. O integral virá dado por $H_0 M_0 + \sum_i H_i \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}\right)$. Numa segunda etapa, a definição de integral estocástico pode ser alargada aos processos previsíveis limites de processos simples. Note-se que os processos previsíveis simples constituem um conjunto denso dentro do conjunto dos processos previsíveis. Numa última fase, alargamos o conceito a processos opcionais. Em todas estas etapas, podemos caracterizar o integral estocástico em função das variações quadráticas. Este virá dado pelo processo I tal que $E\left[I_\infty N_\infty\right] = E\left[\int_0^\infty H_s d\left\langle M, N\right\rangle_s\right] = E\left[\int_0^\infty H_s d\left[M, N\right]_s\right]$ para toda a martingala de quadrado integrável N. A norma adequada para o integrando H é $E\left[\left\{\int HdM\right\}^2\right] = E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\left\langle M, M\right\rangle_s\right] = E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\left[M, M\right]_s\right]$. Sob dadas condições de integrabilidade da variação de M, o integral estocástico coincide com o de Stieltjes.

Pode-se alargar a análise feita para martingalas de quadrado integrável a uma classe mais geral: a das martingalas locais. Uma martingala local é um processo tal que existe uma sucessão crescente de tempos de paragem convergindo para ∞ para o qual o processo parado em cada um dos tempos de paragem é uma martingala. Diz-se que um tempo de paragem reduz um processo adaptado se o processo parado no tempo de paragem é uma martingala uniformemente integrável. Se além disso se impuser um limite de integrabilidade sobre a esperança condicional do processo no tempo de paragem, diz-se que este reduz fortemente o processo. Obviamente, no caso da martingala local, cada tempo de paragem da sucessão considerada na definição reduz o processo. Pode-se concluir que a soma de martingalas locais é uma martingala local. No caso de uma martingala local contínua, esta é localmente de quadrado integrável. No caso descontínuo, tal pode não suceder pois no tempo de paragem em que se atinge um dado valor n pela primeira vez, o salto pode ser ilimitado. Os conceitos de redução forte permitem situar a análise de martingalas locais ao nível da de martingalas de quadrado ou variação integráveis. Com base nesta caracterização, podemos encontrar a decomposição numa parte contínua e numa puramente descontínua. É feita a generalização dos conceitos de variação quadrática ao caso das martingalas locais, no caso opcional, tendo em conta a prova de que a soma dos quadrados dos saltos é quase certamente finita. Com estes elementos é possível caracterizar o integral estocástico relativamente a martingalas locais, a partir de uma relação análoga à considerada acima para caracterizar o integral em relação a martingalas de quadrado integrável. A classe de integrandos relevante no caso é a dos processos localmente limitados em que se incluem os processos previsíveis. Quando a martingala local tem variação localmente integrável, o integral é-o no sentido de Stieltjes, para cada trajectória.

Uma outra classe de integradores estocásticos é a dos processos de variação finita. O integral estocástico virá dado, para cada trajectória, pelo integral de Stieltjes, tomando para integrando um processo mensurável. Como generalização, podemos considerar a integração até um dado tempo de paragem. Se dois integrandos tiverem a mesma esperança, o mesmo sucederá com os respectivos integrais estocásticos relativamente a um processo crescente. Consideramos a decomposição de um processo crescente numa parte contínua e numa descontínua, e a estrutura desta última.

A classe mais geral de integrador é a das semimartingalas, sendo uma semimartingala definida como a soma de uma martingala local e de um processo de variação finita. Não sendo a decomposição única, é-o relativamente à parte contínua da martingala local. Pode-se definir a variação quadrática opcional e a previsível se aquela tiver variação localmente integrável. A partir delas pode-se caracterizar o integral estocástico sobre a semimartingala, o qual terá uma decomposição semelhante à desta. É possível também nesse caso chegar à desigualdade de Kunita-Watanabe.

Enunciamos de seguida regras de diferenciação para uma função de uma semimartingala, constituindo aquelas versões gerais da chamada fórmula de Itô. Estas são encontradas para um caso de hipóteses restritas no que respeita à limitação da semimartingala e à existência de derivadas contínuas e limitadas da função em causa, sendo estas hipóteses progressivamente atenuadas. No caso mais geral, consideramos apenas a hipótese de derivadas até à segunda ordem contínuas para a função.

Consideramos então uma equação diferencial estocástica cuja solução se caracteriza por ser um integral de uma função dos seus valores passados relativamente a uma semimartingala. Enunciam-se condições para a existência de uma solução única.

No caso particular desta equação diferencial estocástica em que a função integranda é o próprio valor da solução, esta é uma exponencial estocástica da semimartingala considerada. Esta solução é dada pela denominada fórmula exponencial de Doléans-Dade. Esta fórmula é consequência das regras de diferenciação atrás referidas. Verifica-se a existência e unicidade da solução.

Pode-se definir a relação entre duas medidas de probabilidade equivalentes, condicionalmente a uma dada filtração, através de um processo aleatório, designado por derivada de Radon-Nikodym de uma medida relativamente à outra. Neste contexto, o teorema de Girsanov permite fazer a caracterização, enquanto semimartingala relativamente a uma medida de probabilidade, de um processo estocástico que é martingala local relativamente à outra. Esta resulta do seguinte: X é martingala local relativamente à medida Q se e só se MX é martingala local relativamente à medida P, onde M é a derivada de Radon-Nikodym de Q em relação a P.

É estabelecida a relação entre a exponencial de Doléans-Dade e o teorema de Girsanov, considerando o processo do qual a derivada de Radon-Nikodym presente no integral é exponencial estocástica. Sendo Y tal processo e N uma martingala local sob P, então $N - \langle N, Y \rangle$ é uma martingala local sob Q.

No terceiro capítulo, apresentamos o modelo introduzido por Jacobsen o qual servirá de enquadramento geral à análise neste e nos capítulos seguintes. Temos um processo constituído por uma parte de salto e por uma de difusão, cujos parâmetros são modulados por uma cadeia de Markov em tempo contínuo. O comportamento desta é influenciada pela ocorrência de salto no outro processo. Considera-se a descrição da evolução conjunta do processo em causa e da dita cadeia de Markov, notando que formam um processo de Markov conjunto.

Um processo de Markov é um processo estocástico em que a distribuição de probabilidade de um valor futuro depende do passado apenas através do valor presente do processo. Alternativamente, podemos considerar, nesta caracterização, no lugar das probabilidades, esperanças de funções mensuráveis do processo. São apresentados conceitos que permitem caracterizar os processos de Markov que nos interessarão. No caso de um processo de Markov homogéneo (ou seja, cuja distribuição temporal apenas depende da diferença entre datas), definimos uma função de transição, $P(t, x, A)$, a qual permite descrever a probabilidade de, partindo de um valor inicial x, o valor final do processo, ao fim de um lapso de tempo t, pertencer a um conjunto A. Esta função permite descrever o processo de Markov homogéneo. A propriedade de Chapman-Kolmogorov caracteriza esse tipo de processo: $P(t+s, X(u), A) = \int P(s,y,A) P(t, X(u), dy)$. Apresenta-se o conceito de de uma família de probabilidades compactada de tal forma que se pode descrever as distribuições de dimensão finita de um processo de Markov a partir da função de transição. A propriedade de Markov forte de um processo é análoga à anterior mas podendo a data de condicionamento ser um tempo de paragem.

Um instrumento particularmente útil nas análises envolvendo um processo de Markov, e que permite descrever a sua evolução é o correspondente gerador infinitesimal daquele. A partir de um processo de Markov X, pode-se definir o semigrupo a ele associado, $T(t)$, a partir de $E\left[f(X(t+s)) \middle| F_t^X\right] = T(s) f(X(t))$. O gerador infinitesimal de X é o gerador infinitesimal do semigrupo T, dado por $Af = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[T(t) f - f]$ e dá-nos portanto a variação infinitesimal do valor esperado do processo, dado o valor do processo no momento presente. Podemos aplicar a fórmula de Itô para encontrar o gerador infinitesimal no caso de um processo de difusão (processo dependente de browniano com drift). Encontra-se o gerador infinitesimal para um processo de salto, efectuando a respectiva construção. Surge ainda como relevante o caso em que temos uma cadeia de Markov em tempo contínuo. Importa-nos igualmente considerar processos constituídos pela soma de componentes do tipo das que acabamos de referir bem como o caso multidimensional. São apresentados os conceitos e resultados relevantes na análise da parte de salto, nomeadamente a noção de processo pontual marcado.

Retomando o processo de Jacobsen, apresenta-se o gerador infinitesimal do processo de Markov conjunto constituído pelo processo em estudo e pela cadeia de Markov em tempo contínuo que o modula. Este é obtido como solução do chamado problema de martingala: a função do processo de Markov conjunto é representada pela soma do integral do respectivo gerador infinitesimal relativamente ao tempo e de uma parte de martingala. Esta representação é obtida a partir da fórmula de diferenciação estocástica.

Jacobsen usa o processo para descrever o fluxo financeiro de uma seguradora. O objectivo por ele prosseguido é encontrar a distribuição conjunta do tempo até à ruína e do valor do processo nesse momento através da respectiva transformada conjunta de Laplace. Esta é obtida a partir de um sistema de equações, o qual resulta de uma consideração a que será feito apelo recorrentemente nos capítulos seguintes. Trata-se da descrição da evolução do valor esperado de uma função de um processo de Markov, a partir de uma equação envolvendo o respectivo gerador infinitesimal, tendo em conta a caracterização deste em termos do problema de martingala. No decurso da dedução deste resultado, surge uma versão da equação de Cramèr-Lundberg, da qual se consideram as soluções com parte real negativa. Recorrendo à Análise Complexa, encontra-se o número destas soluções.

A análise de Jacobsen foi generalizada neste estudo ao caso em que os saltos podem ser positivos (e não apenas negativos). Este tipo de processos é utilizado para representar os preços de activos financeiros como exponencial de um processo deste tipo. Os coeficientes de salto e de difusão em cada estado são determinados de forma a que o preço descontado do activo seja uma martingala. Para tal, este é construído como uma exponencial de Doléans-Dade de um processo de martingala do tipo considerado.

No quarto capítulo, consideramos um caso particular do modelo do capítulo anterior, com uma cadeia de Markov em tempo contínuo de apenas dois estados. Por outro lado, as funções do processo consideradas dependem agora explicitamente do tempo. Considera-se um sistema de equações, obtido a partir da fórmula de diferenciação estocástica, que permite determinar o valor esperado de uma função do processo em causa. Trata-se das equações regressivas de Kolmogorov. São equações integro-diferenciais em que a introdução de uma derivada relativamente ao tempo resulta de considerarmos variáveis explicitamente dependentes deste. Tal questão surge por exemplo quando consideramos um activo financeiro com uma data de maturidade em que é relavente o lapso de tempo que medeia entre o momento presente e essa data. Passando às transformadas de Fourier, obtém-se equações diferenciais que se pode resolver em ordem a essas transformadas, procedendo-se de seguida à determinação da respectiva transformada inversa.

Pode-se determinar a distribuição de probabilidade do processo modulado, dados o valor inicial deste e o estado inicial da cadeia moduladora. Isto é feito a partir das chamadas equações progressivas de Kolmogorov, as quais são obtidas a partir das regressivas. De facto, dada a generalidade da classe de funções a que se aplicam as equações regressivas de Kolmogorov para determinar os respectivos valores esperados, é possível a partir desta informação determinar a distribuição de probabilidades que serve de base à definição dos valores esperados.

Analisamos de seguida uma classe de processos estocásticos que nos importará particularmente como situação de referência para obter um último resultado deste quarto capítulo. Trata-se da classe dos processos de Lévy que se caracterizam por ter acréscimos independentes e estacionários. No caso de não estacionaridade, designamos o processo por aditivo. Como exemplos de processos de Lévy temos os processos de Poisson compostos e o movimento browniano. Definimos uma classe de medidas de probabilidade ditas infinitamente divisíveis. Estas estão naturalmente ligadas aos processos de Lévy por haver uma relação unívoca entre cada processo de Lévy e uma dada medida de probabilidade infinitamente divisível.

Consideramos a seguir uma representação para uma tal medida dada pela fórmula de Lévy-Khintchine para a respectiva função característica, o que nos permite encontrar uma representação correspondente para o processo de Lévy associado àquela medida. O processo de Lévy pode então ser caracterizado, a partir de um conjunto de parâmetros: o drift e a matriz de covariâncias para a parte de difusão, e uma medida, dita de Lévy, para a parte de saltos. A medida de Lévy dá-nos a intensidade de ocorrência associada a saltos de dada amplitude. Num processo de Lévy geral, pode haver saltos infinitesimais com intensidade infinita.

Pode-se provar que um processo de Lévy ou aditivo que não seja cadlag terá uma versão que o é. Pode também provar-se a existência de um processo aditivo com trajectórias contínuas. Construímos então um processo aditivo constituído exclusivamente por saltos. A partir destes elementos, encontramos a decomposição de Lévy-Itô que se verifica para um processo aditivo. O ponto relevante que nos importará depois é que a parte de trajectória contínua e a parte de saltos em que se decompõe o processo aditivo são independentes. Se encontrarmos então um processo com uma decomposição em parte contínua e parte descontínua tal que estes não sejam independentes, poderemos concluir que não se trata de um processo aditivo, ou seja, não tem acréscimos independentes.

Justamente, no processo em análise neste quarto capítulo, verificamos que a parte de salto e a de difusão são dependentes. Esta verificação é feita considerando o processo conjunto de Markov constituído por estas duas partes e pela cadeia de Markov em tempo contínuo. Considerando o sistema de equações progressivas de Kolmogorov e passando às transformadas de Fourier, é possível determinar a função característica conjunta das duas partes. Esta permite-nos obter uma medida do afastamento da hipótese de independência, dado que sob aquela hipótese, a função característica conjunta é o produto das funções características das partes. Uma outra medida de dependência, a covariância nas caudas, é determinada a partir das equações regressivas de Kolmogorov. É referida, no âmbito da análise cópulas, uma medida de concordância para distribuições não elipticas a qual é obtida a partir da esperança da função de distribuição.

No quinto capítulo, analisamos a cobertura, pelo menos parcial, do valor acumulado resultante de um processo de salto por um activo representado por uma difusão sendo ambos modulados por uma mesma cadeia de Markov em tempo contínuo. Tal é sugerido pelo resultado de dependência entre os dois processos, referido atrás.

Considera-se o conceito de hedging do quantil introduzido por Föllmer e Leukert associado ao objectivo de maximizar a probabilidade de o resultado de uma estratégia financiada por uma quantidade limitada exceder o valor aleatório de que se pretende fazer a cobertura. A estratégia óptima é obtida a partir do hedging de uma opção sobre o valor aleatório a cobrir. Esta opção é definida a partir de um acontecimento adequadamente construido a partir dos dados do problema.

No caso de o mercado ser incompleto, a variável a cobrir pode não ser atingível a partir dos activos transacionados e levanta-se a questão de haver, relativamente à sua avaliação, uma classe de medidas de probabilidade equivalentes neutras ao risco e não apenas uma.

Considerando a referida opção utilizada na definição da estratégia óptima, caso esta não seja atingível no mercado, efectua-se o que se designa por superhedging da opção. Ou seja, determina-se o valor necessário para a financiar, o qual coincide com o supremo das esperanças, determinadas sobre a classe de medidas equivalentes, do payoff final, dada a informação num momento presente. Esta esperança condicional constitui um processo estocástico, o qual é uma supermartingala, com uma representação dita opcional devida a Kramkov (por oposição à previsível, de Doob-Meyer). Assim, para obter a dita supermartingala, a um valor correspondente ao custo inicial acresce uma martingala e subtrai-se um processo crescente, que é opcional mas em geral não previsível. Isto deve-se ao facto de a caracterização como supermartingala se verificar para uma classe de distribuições equivalentes, não uma única distribuição.

Consideramos, no caso que nos importa, que a variável a cobrir é o valor final resultante de um processo de salto, usando-se uma difusão para efectuar a cobertura, sendo ambos os processos modulados por uma cadeia de Markov em tempo contínuo de dois estados.

A classe de medidas equivalentes de probabilidade é definida considerando que o prémio de risco para a parte de salto pode tomar valores dentro de um intervalo, enquanto para a parte de difusão é único. Quer a probabilidade a maximizar quer o valor da estratégia considerado na restrição orçamental podem ser definidos como esperanças de funções de um processo modulado dependente da derivada da medida equivalente de probabilidade em relação à efectiva e da variável a cobrir. Podem portanto ser calculadas a partir de um sistema de equações regressivas de Kolmogorov.

No sexto capítulo, são caracterizadas mais em pormenor as distribuições tipo fase, que surgem como distribuições naturais para descrever o tempo até se atingir um estado de uma cadeia de Markov em tempo contínuo que não dá acesso aos outros estados e é designado por estado de absorção. Tal questão surge no enquadramento do modelo geral que temos vindo a considerar e que é apresentado no terceiro capítulo, onde se poderia entender a ocorrência de salto no processo que nos interessa como um estado de absorção relativamente à cadeia de Markov em tempo contínuo que modula esse processo. Temos então, ao nível da evolução da cadeia de Markov, um processo de renovamento em que os renovamentos se dão com os saltos e onde o tempo entre renovamentos segue uma distribuição tipo fase.

São apresentados a distribuição na cauda, a transformada de Laplace e os momentos para este tipo de distribuição. É ainda, num caso particular, encontrado o valor esperado para o número de renovamentos que ocorre num dado lapso de tempo. Na sequência, é abordada a possibilidade de considerar a optimização do valor esperado de uma função do processo que nos importa quando se impõe uma restrição sobre o valor esperado do número de renovamentos.

Numa segunda parte deste capítulo, considera-se um problema do mesmo género, colocado na perspectiva de uma unidade de saúde. Trata-se da análise do efeito de uma restrição imposta sobre o número esperado de exames complementares de diagnóstico que permitem completar um processo de detecção de uma doença, a dois níveis. Por um lado, o efeito sobre a situação financeira da unidade de saúde, resultante de haver uma penalização caso a ausência de diagnóstico tenha um efeito negativo decorrente da não detecção de doença num paciente. Por outro lado, o efeito sobre o número esperado de casos de doença não detectada, por motivo de ausência de diagnóstico. Esta análise é feita recorrendo aos resultados referidos em capítulos anteriores, respeitantes ao gerador infinitesimal e às equações de Kolmogorov de processos de Markov conjuntos. Ao considerar um processo de Markov constituído por vários processos de contagem e por uma cadeia de Markov em tempo contínuo, pode-se encarar este processo como "gerando" uma cadeia de Markov em tempo contínuo, em que cada estado corresponde a cada concretização possível para o processo de Markov conjunto. Esta consideração permite-nos utilizar o conceito de exponencial matricial, introduzido na caracterização destas cadeias de Markov aquando da apresentação dos resultados respeitantes às distribuições tipo fase.

Capítulo 2

Noções sobre Processos e Cálculo Estocásticos

Neste capítulo, apresentamos o conceito de processo estocástico. Apresentamos também uma série de resultados e noções que nos permitirão caracterizar uma classe geral de processos estocásticos que podem ser integradores em integrais estocásticos.

Enunciaremos então um conjunto de resultados conhecidos de cálculo estocástico que serão utilizados nos capítulos seguintes. Destacam-se as regras de diferenciação, aspectos ligados a equações diferenciais estocásticas, a exponencial de Doléans-Dade e o teorema de Girsanov.

A bibliografia em que se baseia este capítulo é apresentada no final do mesmo.

2.1 Filtrações e Tempos de Paragem

2.1.1 Introdução

Nesta secção, iremos introduzir alguns conceitos que constituirão o ponto de referência para a representação da evolução, ao longo do tempo, da informação respeitante a um fenómeno aleatório. São estes conceitos os de filtração e tempo de paragem.

2.1.2 Conceitos e propriedades básicas

Consideremos um espaço probabilizado (Ω, F, P). Sendo F uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω, o acréscimo de informação decorrente da observação de dado fenómeno ao longo do tempo é expresso através do conceito de filtração. O espaço dos tempos T é $[0,\infty]$ ou $[0,\infty[$ (caso contínuo) ou $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ (caso discreto).

Definição 2.1.1 *Uma filtração $\{F_t\}$ de (Ω, F) é uma família de sub-$\sigma-$álgebras F_t $(t \in T)$ de F tais que $F_s \subset F_t$ para $s \leq t$.*

F_t é a σ-álgebra dos acontecimentos não posteriores a t. Definimos F_∞ como $\vee_t F_t$.

Definição 2.1.2 $F_{t+} = \cap_{s>t} F_s$; $F_{t-} = \vee_{s<t} F_s$.

Definição 2.1.3 *$\{F_t\}$ é contínua á direita se $F_t = F_{t+}$.*

No caso de tempo discreto, vem $F_{n+} = F_{n+1}$, pelo que uma filtração contínua é constante.

Passemos a considerar o conceito de tempo de paragem. Corresponde a um tempo aleatório determinado apenas pela história até ao momento em causa, não por informação futura. Consideramos definida uma dada filtração reflectindo a evolução da informação.

Definição 2.1.4 *Um tempo de paragem é uma variável aleatória $\tau : \Omega \longrightarrow T$ tal que*

$$\forall t \in T \ \ \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in F_t.$$

O seguinte resultado dá-nos vários exemplos.

Teorema 2.1.5 *a) Uma constante $u \in T$ é um tempo de paragem;*

b) Se τ é um tempo de paragem, então $\tau + s$ é um tempo de paragem para $s \in T$;

c) Se σ e τ são tempos de paragem, então $\sigma \wedge \tau$ e $\sigma \vee \tau$ são tempos de paragem;

d) Se $\{\tau_n\}$ $(n \in N)$ é uma sucessão de tempos de paragem, então $\vee_n \tau_n$ é tempo de paragem; e $\wedge_n \tau_n$ é-o igualmente se a filtração $\{F_t\}$ for contínua à direita.

Definimos agora a σ-álgebra de acontecimentos até ao tempo de paragem τ.

Definição 2.1.6 *F_τ é a σ-álgebra de acontecimentos $A \in F$ tais que*

$$\forall t \in T \quad A \cap \{\tau \leq t\} \in F_t.$$

Lema 2.1.7 *τ é F_τ-mensurável.*

Definição 2.1.8 *Designando por F^P o completamento de F (caracterizado por incluir todos os subconjuntos P-nulos de Ω) e F_t^P a σ-álgebra gerada por F_t e pelos conjuntos P-nulos em F^p. $\left\{F_t^P\right\}$ é uma filtração em $\left(\Omega, F^P, P\right)$ e diz-se completamento de $\{F_t\}$.*

Definição 2.1.9 *$\{F_t\}$ diz-se completa se F for completa e F_0 contiver todos os conjuntos P-nulos em F.*

Suporemos de seguida que $\{F_t\}$ é completa.

Pode-se explicitar a ligação entre os tempos de paragem e as filtrações definidas a partir deles.

Lema 2.1.10 *Se σ e τ são tempos de paragem tais que $\sigma \leq \tau$ q.c., então $F_\sigma \subset F_\tau$.*

Lema 2.1.11 *Se σ e τ são tempos de paragem tais que $A \in F_\sigma$, então $A \cap \{\sigma \leq \tau\} \in F_\tau$.*

Lema 2.1.12 *Se σ e τ são tempos de paragem, então $F_{\sigma \wedge \tau} = F_\sigma \cap F_\tau$.*

Teorema 2.1.13 *Se σ e τ são tempos de paragem, então $\{\sigma < \tau\}, \{\sigma = \tau\}$ e $\{\sigma > \tau\}$ pertencem a F_σ e a F_τ.*

Prova. Do lema 2.1.11 concluímos que $\{\sigma \leq \tau\} = \Omega \cap \{\sigma \leq \tau\} \in F_\tau$ e portanto $\{\sigma > \tau\} = [\{\sigma \leq \tau\}]^c \in F_\tau$. Seja $\rho = \sigma \wedge \tau$. ρ é um tempo de paragem $F_\rho-$mensurável. Resulta do lema 2.1.10 que $F_\rho \subset F_\tau$ e, portanto, $\{\rho = \tau\} = \{\sigma \geq \tau\} \in F_\tau$ e $\{\rho < \tau\} = \{\sigma < \tau\} \in F_\tau$. Trocando σ por τ, verificamos que estes acontecimentos pertencem também a F_σ. $\blacksquare$

Apresentamos alguns conceitos ligados aos tempos de paragem.

Definição 2.1.14 *Se σ e τ são tempos de paragem tais que $\sigma \leq \tau$ q.c., o intervalo estocástico $[\sigma, \tau[$ é o conjunto*

$$\{(t, \omega) \in [0, \infty[\times \Omega : \sigma(\omega) \leq t < \tau(\omega)\}.$$

$[\sigma, \tau]\,,]\sigma, \tau[$ e $]\sigma, \tau]$ definem-se de forma semelhante.

Definição 2.1.15 *O gráfico de um tempo de paragem τ, $[\tau]\,,$ é dado por*

$$[\tau] = [\tau, \tau] = \{(t, \omega) \in [0, \infty[\, \times \Omega : \tau(\omega) = t\}\,.$$

Note-se que, para que o tempo aleatório τ seja um tempo de paragem, em cada momento t o acontecimento $\{\tau \leq t\}$ deverá pertencer a F_t.

Definição 2.1.16 *Se τ é um tempo de paragem e $A \in F$, a restrição de τ a A é a variável aleatória τ_A dada por*

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega)\,, & se\ \omega \in A \\ \infty, & se\ \omega \notin A \end{cases}.$$

Lema 2.1.17 *τ_A é um tempo de paragem se e só se $A \in F_\tau$.*

2.1.3 Previsibilidade e Acessibilidade

Consideramos de seguida vários tipos de tempo de paragem, cuja distinção assenta na possibilidade de antecipar a sua ocorrência que, recorde-se, é aleatória.

Definição 2.1.18 *Um tempo de paragem τ é previsível se existe uma sucessão $\{\tau_n\}$ $(n \in \aleph)$ de tempos de paragem tais que:*

a) $\{\tau_n(\omega)\}$ é uma sucessão q.c. crescente sobre $[0, \infty[$ e $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$ q.c.;

b) Para $n \in \aleph$, sobre $\{\tau > 0\}$ $\tau_n(\omega) < \tau(\omega)$ q.c.

Diz-se que $\{\tau_n\}$ anuncia τ.

Definição 2.1.19 *Um tempo de paragem τ é acessível se existe uma sucessão $\{\tau_n\}$ $(n \in \aleph)$ de tempos de paragem previsíveis tais que $[\tau] \subset \cup_n [\tau_n]$ salvo sobre um conjunto com projecção sobre Ω de medida nula.*

Verifica-se então $P[\cup_n \{\omega : \tau_n(\omega) = \tau(\omega)\}] = 1$.

Definição 2.1.20 *Um tempo de paragem τ é totalmente inacessível se, para todo o tempo de paragem previsível σ, $[\tau] \cap [\sigma] = \emptyset$ salvo sobre um conjunto com projecção sobre Ω de medida nula, isto é, se para todo o tempo de paragem previsível σ, $P[\{\omega : \tau(\omega) = \sigma(\omega) < \infty\}] = 0$.*

Um tempo de paragem também é designado tempo de paragem opcional. Designaremos por Υ_o (resp. Υ_a , Υ_p) o conjunto de todos os tempos de paragem opcionais (resp. acessíveis, previsíveis).

Lema 2.1.21 *Se um tempo de paragem τ é simultaneamente acessível e totalmente inacessível, então $\tau = \infty$ q.c.*

Veremos, em seguida, uma série de resultados relacionados com os conceitos de previsibilidade e acessibilidade. As seguintes definições são úteis na obtenção destes resultados, dado que os conceitos vistos atrás se baseiam em limites de sucessões de tempos de paragem.

Definição 2.1.22 *A σ-álgebra $F_{\tau-}$ é a σ-álgebra gerada por F_0 e pelos conjuntos do tipo $A \cap \{t < \tau\}$ com $t \in [0, \infty[$ e $A \in F_t$.*

Ela corresponde a acontecimentos anteriores ao tempo de paragem τ.

Podemos apontar as seguintes propriedades de $F_{\tau-}$.

Teorema 2.1.23 *Para dois tempos de paragem σ e τ, temos:*

a) $F_{\tau-} \subset F_\tau$;

b) τ é $F_{\tau-}-$mensurável;

c) se $\tau \leq \sigma$, então $F_{\tau-} \subset F_{\sigma-}$;

d) $\forall A \in F_\sigma \; A \cap \{\sigma < \tau\} \in F_{\tau-}$;

e) se $A \in F_\infty$, então $A \cap \{\tau = \infty\} \in F_{\tau-}$;

f) se σ e τ são tempos de paragem com $\sigma \leq \tau$ e se $\sigma < \tau$ sobre $\{0 < \tau < \infty\}$, então $F_\sigma \subset F_{\tau-}$;

g) se $\{\tau_n\}$ é uma sucessão crescente de tempos de paragem e $\tau = \lim_{n \longrightarrow \infty} \tau_n$, então $F_{\tau-} = \vee_n F_{\tau_n-}$;

h) se $\{\tau_n\}$ é uma sucessão crescente de tempos de paragem e $\tau = \lim_{n \longrightarrow \infty} \tau_n$ com $\tau_n < \tau$ sobre $\{0 < \tau < \infty\}$, então $F_{\tau-} = \vee_n F_{\tau_n}$.

Definição 2.1.24 *Para um tempo de paragem τ, $M(\tau)$ é a família de todas as sucessões crescentes $\{\tau_n\}$ de tempos de paragem tais que $\tau_n \leq \tau \; \forall n$. Para $\{\tau_n\} \in M(\tau)$, definimos*

$$L[\{\tau_n\}] = \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \longrightarrow \infty} \tau_n(\omega) = \tau(\omega) < \infty \text{ e } \tau_n(\omega) < \tau(\omega) \;\; \forall n\right\}.$$

Na prova dos resultados seguintes, tem-se em conta o comportamento dos tempos de paragem e das sucessões que os aproximam, ω a ω, utilizando-se nomeadamente o conceito de gráfico de tempo de paragem, apresentado atrás .

Teorema 2.1.25 *Seja τ um tempo de paragem. Então, existe uma partição única de Ω em dois elementos A e B pertencentes a $F_{\tau-}$, tais que τ_A é acessível e τ_B é totalmente inacessível.*

A prova deste teorema baseia-se na construção de A a partir dos conjuntos $L[\{\tau_n\}]$, associados às sequências $\{\tau_n\} \in M(\tau)$ onde se utiliza o teorema 2.1.23 d) e e) ao relacionar o limite desta sucessão com τ.

Lema 2.1.26 *a) Seja τ um tempo de paragem e $A \in F_\tau$. Se τ é acessível (resp. totalmente inacessível) então τ_A é acessível (resp. totalmente inacessível).*

b) Sejam σ e τ dois tempos de paragem. Se σ e τ são previsíveis (resp. acessíveis, totalmente inacessíveis), então $\sigma \vee \tau$ e $\sigma \wedge \tau$ são previsíveis (resp. acessíveis, totalmente inacessíveis).

Na prova de a) releva o facto de ser $[\tau_A] \subset [\tau]$ e na de b) o facto de ser $[\sigma \wedge \tau] \subset [\sigma] \cup [\tau]$ ..

Teorema 2.1.27 *a) Seja $\{\tau_n\}$ uma sucessão crescente de tempos de paragem previsíveis (resp. acessíveis). Então, $\tau = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \tau_n$ é previsível (resp. acessível).*

b) Seja $\{\tau_n\}$ uma sucessão decrescente de tempos de paragem previsíveis (resp. acessíveis) e $\tau = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \tau_n$ q.c. Se para quase todo o ω, existe um n tal que $\tau(\omega) = \tau_n(\omega)$, então τ é previsível (resp. acessível).

a) é provado considerando a construção da sucessão que anuncia τ a partir das que anunciam os τ_n. Obtém-se b) fazendo: no caso acessível, $[\tau] \subset \cup_n [\tau_n]$; no caso previsível, contruindo τ a partir do limite de uma sucessão obtida com base no infimo, em relação a um parâmetro p, das sucessões de tempos de paragem que anunciam os diversos τ_n, $\{\tau_{n,p}\}$, sucessões estas a verificar o seguinte:

$$P\left(\omega : d\left(\tau_{n,p}(\omega), \tau_n(\omega)\right) > 2^{-p}\right) \leq 2^{-(n+p)}$$

onde $d(s,t) = \frac{|s-t|}{1+|s-t|}$.

Corolário 2.1.28 *Seja τ um tempo de paragem. A família SP dos subconjuntos $A \in F_\tau$ tais que τ_A é previsível é fechada em relação a uniões e intersecções numeráveis.*

Na sua prova, usa-se o teorema anterior, considerando as sucessões $\left\{\tau_{\cup_i^n A_i}\right\}$ e $\left\{\tau_{\cap_i^n A_i}\right\}$ com $A_i \in SP$. A alínea a) aplica-se ao primeiro caso e a b) ao segundo.

Nos resultados seguintes, relaciona-se o conceito de previsibilidade com as σ-álgebras referidas, nomeadamente $F_{\tau-}$.

Lema 2.1.29 *Seja τ um tempo de paragem e $A \in F_\tau$.*

a) Se τ_A é previsível, então $A \in F_{\tau-}$;

b) Se τ é previsível e $A \in F_{\tau-}$, então τ_A é previsível.

a) é provado atendendo a que A pode ser definido a partir de $\{\tau_A \leq \tau\}$ (com τ e τ_A finitos) e portanto a partir de $\{\tau_{A,n} \leq \tau\}$ onde $\{\tau_{A,n}\}$ é a sucessão que anuncia τ_A. Consideramos então o teorema 2.1.23d). Na prova de b), considera-se a sucessão, obtida restringindo τ a A, para anunciar τ_A.

Lema 2.1.30 *Seja σ um tempo de paragem previsível e τ um tempo de paragem qualquer. Então,*

$$\forall A \in F_{\sigma-} \; A \cap \{\sigma \leq \tau\} \in F_{\tau-}.$$

A prova é efectuada a partir da sucessão $\{\sigma_n\}$ que anuncia σ, considerando que $A \cap \{\sigma_n < \tau\} \in F_{\tau-}$ para $A \in F_{\sigma_n}$.

Corolário 2.1.31 $\{\sigma \leq \tau\} \in F_{\tau-}$.

Corolário 2.1.32 *Sejam σ e τ tempos de paragem previsíveis. Então, $\tau_{\{\tau<\sigma\}}$ é previsível.*

A prova resulta de imediato dado que $\{\sigma < \tau\} \in F_{\tau-}$ e pelo lema 2.1.29b).

Retomamos enfim a questão da previsibilidade e da acessibilidade para as caracterizar em função das definições apresentadas de $M(\tau)$, $L[\{\tau_n\}]$ e $F_{\tau-}$. A primeira das proposições seguintes é um resultado decorrente das definições e distingue tempos de paragem acessíveis e totalmente inacessíveis em termos probabilisticos.

Lema 2.1.33 *Um tempo de paragem τ é acessível (resp. totalmente inacessível) se e só se para todo o tempo de paragem totalmente inacessível (resp. acessível) σ :*

$$P(\omega : \sigma(\omega) = \tau(\omega) < \infty) = 0.$$

Lema 2.1.34 *Se $\{\tau_n\} \in M(\tau)$, então a restrição de τ a $L[\{\tau_n\}]$ é acessível.*

Teorema 2.1.35 *a) Um tempo de paragem τ é acessível se e só se $\{0 < \tau < \infty\}$ é a união de uma sucessão de conjuntos $L[\{\sigma_n\}]$ para $\{\sigma_n\} \in M(\tau)$; b) Um tempo de paragem τ é totalmente inacessível se e só se $P(\tau = 0) = 0$ e $P(L[\{\sigma_n\}]) = 0 \; \forall \{\sigma_n\} \in M(\tau)$; c) Se σ é um tempo de paragem acessível, então será previsível se e só se $\{\sigma = \tau\} \in F_{\tau-}$ qualquer que seja o tempo de paragem previsível τ.*

Este resultado é obtido a partir da ideia de que, sendo um tempo de paragem acessível obtido a partir de uma sucessão de tempos de paragem previsíveis e cada um destes anunciado por uma sucessão de tempos de paragem, estas sucessões servem de base à construção de uma sucessão do tipo da referida $\{\sigma_n\}$. A alínea c) resulta dos lemas 2.1.29 e 2.1.30.

Apresenta-se para terminar o conceito de filtração quase contínua à esquerda.

Definição 2.1.36 *Uma filtração $\{F_t\}$ é quase contínua à esquerda se, para todo o tempo de paragem previsível τ, $F_{\tau-} = F_\tau$.*

O seguinte resultado dá-nos duas caracterizações alternativas deste conceito.

Teorema 2.1.37 *Uma filtração $\{F_t\}$ é quase contínua à esquerda se e só se se verificarem as seguintes condições equivalentes:*

(i) se $\{\tau_n\}$ é uma sucessão crescente de tempos de paragem, então $F_{\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \tau_n} = \vee_n F_{\tau_n}$;

(ii) os tempos de paragem acessíveis são previsíveis.

2.2 Previsibilidade e Acessibilidade de Processos Estocásticos

2.2.1 Introdução

Nesta secção, introduzimos o conceito de processo estocástico e redefinimos os conceitos de previsibilidade e acessibilidade, introduzidos na secção anterior, no contexto da filtração natural associada a um processo estocástico. O conceito de previsibilidade de um processo estocástico é um elemento essencial na definição dos possíveis integrandos de integrais estocásticos. Salienta-se a caracterização da previsibilidade de processos estocásticos em função de intervalos estocásticos.

2.2.2 Processo estocástico

Consideramos o conjunto de índice temporal T igual a $[0,\infty[$ (ou $[0,\infty]$) no caso contínuo e a $\aleph$ (ou $\aleph \cup \{\infty\}$) no caso discreto e o espaço probabilizado (Ω, F, P). Consideramos ainda um segundo espaço mensurável (Λ, G).

Definição 2.2.1 *Um processo estocástico X definido sobre* (Ω, F) *com valores em* (Λ, G) *é uma família* $\{X_t\}$ *de variáveis aleatórias com valores em* Λ *indexado por* $t \in T$*.* (Ω, F) *designa-se por espaço de partida e* (Λ, G) *por espaço dos estados.*

Definição 2.2.2 $\forall \omega \in \Omega$ *A função* $t \longmapsto X_t(\omega)$ $(t \in T)$ *é a trajectória associada a* ω*.*

Interessar-nos-ão as classes de processos càdlàg, contínuos à direita e com limite à esquerda, e càglàd, contínuos à esquerda e com limites à direita. As siglas resultam das iniciais das expressões em francês. A este propósito, nota-se que se diz que um processo estocástico tem uma dada propriedade como ser càdlàg por exemplo se toda a trajectória tem aquela propriedade q.c.

Definição 2.2.3 *Se* $\{X_t\}$ *e* $\{Y_t\}$ *são dois processos definidos sobre o mesmo espaço probabilizado* (Ω, F, P) *com valores em* (Λ, G)*, diz-se que* $\{Y_t\}$ *é uma modificação de* $\{X_t\}$ *se* $\forall t \in T \quad X_t = Y_t$ *q.c.*

Definição 2.2.4 *Se $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ são dois processos definidos sobre o mesmo espaço probabilizado (Ω, F, P) com valores em (Λ, G), dir-se-ão indistinguíveis se*

$$P\left(\forall t \in T \quad X_t = Y_t\right) = 1.$$

Lema 2.2.5 *Se, para $t \in [0, \infty[$, $\{X_t\}$ é uma modificação de $\{Y_t\}$, sendo ambos contínuos à direita, então $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ são indistinguíveis.*

A definição seguinte corresponde, como se verá, ao conceito considerado na secção anterior de conjunto com projecção de medida nula sobre Ω.

Definição 2.2.6 *Seja A um subconjunto de $T \times \Omega$. Então, A diz-se evanescente se I_A for indistinguível do processo nulo, em que I_A é a função indicatriz de A.*

Teorema 2.2.7 *Um conjunto, A, é evanescente se e só se a sua projecção sobre Ω tiver medida nula.*

Prova. $P\left(\omega : \forall t \ \left(I_A\right)_t(\omega) = 0\right) = 1 \Longleftrightarrow P\left(\omega : \exists t \ \left(I_A\right)_t(\omega) = 1\right) = 0$

$\Longleftrightarrow P\left(\omega : \exists t \ t \times \omega \in A\right) = 0.$ ■

Os próximos conceitos estão associados à mensurabilidade, em ω e em t, de um processo estocástico.

Definição 2.2.8 *Seja $\{F_t\}\,(t \in T)$ uma filtração de (Ω, F) e $\{X_t\}$ um processo sobre (Ω, F) com valores em (Λ, G). X diz-se $\{F_t\}-$adaptado se X_t for F_t-mensurável para todo o $t \in T$.*

Se, para todo o t, F_t contiver os conjuntos nulos de F, então uma modificação de um processo adaptado será também adaptado. Daí a relevância do conceito de $\sigma-$álgebra completa, apresentado atrás.

Considerando $F_t = \sigma\left(X_s : s \leq t\right)$, a σ-álgebra de subconjuntos de Ω gerada pelas variáveis aleatórias X_s, X é adaptado à filtração $\{F_t\}$. Esta filtração pode ser completada, se não o for à partida.

Nas definições seguintes, a mensurabilidade respeita a ω e a t simultaneamente. Designaremos as σ-álgebras borelianas por $\mathcal{B} = \mathcal{B}\left([0, \infty[\right)$, $\mathcal{B}\left([0, t]\right)$ $(t \in T = [0, \infty[)$.

Definição 2.2.9 *X é um processo mensurável se $(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ é uma aplicação mensurável quando $T \times \Omega$ é dotada da σ-álgebra produto $\mathcal{B} \otimes F$.*

Um conceito mais forte, por relacionar a mensurabilidade com a filtração $\{F_t\}$, é o seguinte.

Definição 2.2.10 *Seja $\{F_t\}$ uma filtração com espaço de tempos contínuo sobre (Ω, F). X diz-se progressivo ou progressivamente mensurável se para todo o $t \in T$ a aplicação $(s,\omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ de $[0,t] \times \Omega$ sobre (Λ, G) é mensurável quando $[0,t] \times \Omega$ é dotado da σ-álgebra produto $\mathcal{B}([0,t]) \otimes F_t$.*

Todo o processo progressivo é adaptado, mas o inverso não é automaticamente válido. Exemplo disso é um processo diagonal em $\Omega = [0,\infty[$:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } t = \omega \\ 0, & \text{se } t \neq \omega \end{cases}$$

sendo a medida de probabilidade dada por e^{-x} vezes a medida de Lebesgue e F_t a $\sigma-$álgebra gerada pelos pontos de $[0,\infty[$.

No resultado seguinte ver-se-á que a implicação em causa será válida em certas condições.

Teorema 2.2.11 *Um processo X adaptado e contínuo à direita (ou à esquerda) é progressivo.*

Teorema 2.2.12 *Seja X um processo progressivo. Se σ for um $\{F_t\}-$tempo de paragem, então:*

a) o processo parado em σ, $X_t^\sigma = X_{t\wedge\sigma}$ é progressivo;

b) a variável aleatória $X_\sigma = X_{\sigma(\omega)}(\omega)$ é $F_\sigma-$mensurável.

2.2.3 Previsibilidade e Acessibilidade

Nesta subsecção, definimos, para os processos estocásticos, os conceitos de previsibilidade e acessibilidade, a partir dos conceitos análogos definidos atrás para tempos de paragem. Para tal, estes conceitos são considerados para σ-álgebras.

Definição 2.2.13 *A σ-álgebra opcional (resp. acessível, previsível) Σ_o (resp. Σ_a, Σ_p) em $[0,\infty[\times\Omega$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos evanescentes e por todos os intervalos estocásticos do tipo $[\tau,\infty[$ para um tempo de paragem qualquer (resp. acessível, previsível), τ.*

Em vez de $[\tau,\infty[$, podemos considerar $[\tau,\sigma[$ sendo σ um tempo de paragem do mesmo tipo de τ.

Dada a relação entre as classes de tempos de paragem consideradas, temos $\Sigma_p \subset \Sigma_a \subset \Sigma_o$.

Definição 2.2.14 *Um conjunto $A \subset [0,\infty[\times\Omega$ diz-se progressivo ou progressivamente mensurável se a sua indicatriz I_A é um processo progressivo.*

Definição 2.2.15 *A família de todos os conjuntos progressivos constitui uma σ-álgebra designada por Σ_π.*

Note-se que, sendo A e A_i $(i \in \mathcal{N})$ acontecimentos tais que as suas indicatrizes são mensuráveis sobre $\mathcal{B}([0,t]) \otimes F_t$, o mesmo sucederá com as indicatrizes de $\cup_i A_i$ e de A^c bem como com a de $[0,\infty[\times\Omega$.

Um processo X é progressivo se e só se a aplicação $(t,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ for $\Sigma_\pi-$mensurável.

Note-se que $\Sigma_o \subset \Sigma_\pi$ dado que $I_{[\tau,\sigma[}$ é adaptado e contínuo à direita, portanto verificando as condições do teorema 2.2.11.

Lema 2.2.16 *Σ_x é gerado pelos intervalos $[\tau,\sigma]$ com $\tau \in \Upsilon_x$ e $\sigma \in \Upsilon_o$ $(x \in \{o,a,p\})$.*

Definição 2.2.17 *Um processo estocástico X diz-se opcional (resp. acessível, previsível) se a aplicação $X : [0,\infty[\times\Omega \longrightarrow \Lambda$ é mensurável quando $[0,\infty[\times\Omega$ é dotado da σ-álgebra opcional (resp. acessível, previsível).*

Definição 2.2.18 *0_A é o tempo de paragem igual a 0 em $A \in F_0$ e ∞ em A^c. Ou seja, $[0_A] = \{0\}\times A$.*

Teorema 2.2.19 *Σ_p é gerado pelos intervalos estocásticos do tipo $[0_A]$ e $]\sigma,\tau]$ com σ e τ tempos de paragem quaisquer.*

Podemos caracterizar a previsibilidade e a acessibilidade dos processos estocásticos directamente a partir de tempos de paragem e de intervalos estocásticos. Os seguintes resultados exemplificam esta ligação.

Lema 2.2.20 *Seja* $X_t(\omega) = Z(\omega) I_{[\sigma,\tau[}(t,\omega)$.

a) Se $[\sigma,\tau[$ *é um intervalo estocástico e* Z *é uma variável aleatória* F_σ*-mensurável, então* X *é opcional.*

b) Se σ *e* τ *são acessíveis, então* X *é acessível.*

c) Se σ *e* τ *são previsíveis e* Z *é* $F_{\sigma-}$*-mensurável, então* X *é previsível.*

d) As alíneas anteriores são válidas se substituirmos $[\sigma,\tau[$ *por* $[\sigma,\tau]$ *com* τ *opcional.*

e) Se σ *e* τ *são opcionais e* Z *é* $F_{\sigma-}$*-mensurável, então* $Z \cdot I_{]\sigma,\tau]}$ *é previsível.*

Apresentamos de seguida outros conceitos que nos permitirão continuar a explorar a ligação entre tempos de paragem e processos estocásticos.

Definição 2.2.21 *Seja* $A \subset [0,\infty[\times \Omega$. *Chama-se début de* A *à função*

$$C_A(\omega) = \inf\{t \in [0,\infty[: (t,\omega) \in A\}.$$

Por convenção, $\inf(\emptyset) = \infty$.

Definição 2.2.22 *Seja* $\{X_t\}$ $(t \in [0,\infty[)$ *um processo progressivo com valores em* (Λ, G) *e* $B \in G$. *O tempo do primeiro alcançe de* B, P_B, *é a variável aleatória dada por*

$$P_B(\omega) = \inf\{t \in [0,\infty[: X_t(\omega) \in B\}.$$

Obtemos os seguintes resultados que relacionam conjuntos mensuráveis em $[0,t[\times \Omega$ com tempos de paragem.

Teorema 2.2.23 *a) O début* C_A *de um conjunto progressivamente mensurável* A *é um tempo de paragem.*

b) Seja $\{X_t\}$, $t \in [0,\infty[$ *um processo progressivo com valores no espaço mensurável* (Λ, G) *e* $B \in G$. *O tempo do primeiro alcançe de* B, P_B, *é um tempo de paragem.*

Por exemplo, no que se refere a a), verifica-se que $\{C_A < t\} = \pi(A \cap [0,t[)$, sendo $A \cap [0,t[$ mensurável em relação a $\mathcal{B}([0,t[) \otimes F_t$.

Teorema 2.2.24 *a) Seja* (Ω, F, P) *um espaço probabilizado com filtração* $\{F_t\}$ $t \in [0, \infty[$ *e* $A \in \Sigma_x$. *Então, para todo o* $\varepsilon > 0$, *existe um tempo de paragem* $\sigma \in \Upsilon_x$ *tal que, sendo* π *a projecção de* $[0, \infty[\, \times \Omega$ *sobre* Ω *e portanto* $\pi(A) = \{P_A < \infty\}$, *se verifica*

$$(i)\, [\sigma] \subset A \;\; e \;\; (ii)\, P(\{\sigma < \infty\}) \geq P(\pi(A)) - \varepsilon;$$

b) Dois processos X *e* Y, Σ_x-*mensuráveis são indistinguíveis se e só se* $X_\tau = Y_\tau$ *q.c. para todo o* $\tau \in \Upsilon_x$ $(x \in \{o, a, p\})$;

c) Seja τ *uma variável aleatória com valores em* $[0, \infty]$. *Então,* $\tau \in \Upsilon_x$ $(x \in \{o, a, p\})$ *se e só se* $[\tau] \in \Sigma_x$.

Na prova das alíneas b) e c), é usada a a). Em b), considera-se $A = \{(t, \omega) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$. Em c), utiliza-se a) nos casos acessível e previsível para construir a sucessão que anuncia τ.

No resultado seguinte, diz-se que um conjunto opcional (resp. previsível, acessível) contido na união de gráficos de tempos de paragem se pode escrever como a união de gráficos disjuntos de tempos de paragem opcionais (resp. previsíveis, acessíveis). Na sua prova, joga-se com a possibilidade de representar a união de gráficos como uma união de gráficos disjuntos e faz-se uso do teorema 2.2.24a) para concluir que os gráficos terão de ser acessíveis/previsíveis se o conjunto inicial também o for, e ao teorema 2.2.24c) para concluir que os tempos de paragem são do mesmo tipo que os respectivos gráficos. A união das partes inacessíveis de um processo previsível deve ser acessível e portanto contém uma união de gráficos previsíveis de probabilidade superior à daquela, a menos de uma quantidade infinitesimal. Como a intercecção entre as duas uniões é o vazio, a primeira terá de ter probabilidade nula.

Teorema 2.2.25 *Se* $A \in \Sigma_o$ *(resp.* Σ_a, Σ_p*) e* $A \subset \cup_n [\sigma_n]$, *sendo* $\{\sigma_n\}\,(n \in \aleph)$ *uma sucessão de tempos de paragem, então* $A = \cup_n [\tau_n]$ *sendo* $\{\tau_n\}\,(n \in \aleph)$ *uma sucessão de tempos de paragem com* $\tau_n \in \Upsilon_o$ *(resp.* Υ_a, Υ_p*)* $\forall n$ *e* $[\tau_n] \cap [\tau_m] = \emptyset$ *se* $n \neq m$.

Os resultados que a seguir se apresentam relacionam-se com a indicatriz de intervalos estocásticos que se distinguem apenas por incluírem ou não a fronteira, que é um tempo de paragem. Ora, decorre dos lema 2.2.16 e teorema 2.2.19 que intervalos deste tipo permitem gerar as σ-álgebras opcional/previsível/acessível. Tal permite concluir o seguinte.

Teorema 2.2.26 *a) Seja X um processo opcional. Então, existe um processo previsível Y tal que $\{X \neq Y\}$ está contido na união de gráficos de uma sucessão de tempos de paragem.*

b) Um processo acessível, X, é previsível se e só se, para todo o $\tau \in \Upsilon_p$, a variável aleatória $X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ é $F_{\tau-}$-mensurável. Se X é previsível, basta que $\tau \in \Upsilon_o$ para que $X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ seja $F_{\tau-}$-mensurável.

Na alínea a), verifica-se que um conjunto opcional difere de um previsível apenas numa união de gráficos. Na alínea b), os processos previsíveis são caracterizados através da previsibilidade da variável aleatória construída a partir do processo parado num tempo de paragem previsível.

No resultado seguinte, indicamos a classe de processos que geram uma σ-álgebra do tipo opcional/previsível/acessível. Para o efeito, apela-se de novo aos resultados que nos indicam como as σ-álgebras de dado tipo são geradas a partir de intervalos estocásticos e, portanto, a partir dos processos estocásticos constituídos pelas respectivas indicatrizes. Por outro lado, estes processos podem ser usados para representar qualquer processo pertencente à classe geradora considerada.

Teorema 2.2.27 *a) Σ_o é gerada pela família de todos os processos adaptados càdlàg (contínuos à direita com limite à esquerda).*

b) Σ_p é gerada pela família de todos os processos adaptados contínuos.

No que se refere à alínea a), há realçar que se utiliza o facto de todo o processo adaptado cádlág ser opcional. De facto, tal processo pode ser aproximado por uma sucessão de processos opcionais elementares. Estes, por sua vez, adquirem a caracterização de opcionais por resultarem de intervalos estocásticos obtidos a partir de uma sucessão de tempos de paragem convergindo para infinito. A construção desta sucessão de tempos de paragem de forma a obter as referidas convergências resulta de o processo ser cádlág.

Em seguida, abordamos uma caracterização geral dos saltos de um processo estocástico. A previsibilidade/acessibilidade do processo estocástico é relacionada com a dos tempos de paragem que permitem identificar os saltos.

Definição 2.2.28 *Seja X um processo adaptado càdlàg. Diz-se que X carrega um tempo* *de paragem $\tau \in \Upsilon_o$ se*

$$P\left[(X_\tau \neq X_{\tau-}) \cap \{\tau < \infty\}\right] > 0.$$

Definição 2.2.29 *Seja X um processo adaptado càdlàg. X tem um salto em $\tau \in \Upsilon_o$ se $X_\tau \neq X_{\tau-}$ q.c sobre $\{\tau < \infty\}$.*

Definição 2.2.30 *Seja X um processo adaptado càdlàg. A sucessão $\{\tau_n\}$ é exaustiva para os saltos de X se X tem um salto em τ_n para todo o n, os gráficos de τ_n são disjuntos e X não carrega qualquer outro tempo de paragem.*

Na obtenção do resultado seguinte, destaque-se o facto de um processo càdlàg não ter descontínuidades oscilatórias, ou seja, não haver, em cada trajectória, pontos na vizinhança dos quais se verifique um número infinito de oscilações. Por exemplo, a função $sen\left(\frac{1}{x}\right)$ tem uma descontínuidade oscilatória em $x = 0$.

Teorema 2.2.31 *Seja X um processo adaptado càdlàg. Então, existe uma sucessão $\{\tau_n\}$ de tempos de paragem que é exaustiva para os saltos de X.*

Na obtenção do seguinte resultado respeitante à previsibilidade/acessibilidade é relevante o teorema 2.2.25, que relaciona a caracterização de um acontecimento constítuido por uma união de gráficos de tempos de paragem, enquanto previsível/acessível, com a desses gráficos.

Teorema 2.2.32 *Seja X um processo adaptado càdlàg.*

a) Se X é acessível (resp. previsível), os tempos de paragem τ_n que são exaustivos para os saltos de X são acessíveis (resp. previsíveis).

b) X é acessível se e só se não carrega nenhum tempo de paragem totalmente inacessível.

No caso da alínea b), se X não carrega nenhum tempo de paragem totalmente inacessível, pode-se representar o processo como a soma da parte contínua e da parte de saltos acessíveis para provar que X é acessível.

2.3 Esperanças condicionais

A esperança de uma variável aleatória X definida sobre (Ω, F, P) e tomando valores em (Λ, G) pode ser entendida como média ponderada dos vários valores que a variável aleatória pode tomar, sendo as ponderações concomitantes à distribuição de probabilidades. Esta média é um valor de referência para o caso em que não há informação adicional que permita restringir o conjunto dos estados que se pode verificar.

Se a informação de que se dispõe permitir distrinçar se o verdadeiro estado, desconhecido, pertence a um dado grupo de estados ou a um outro, fará sentido tomar como indicador mais aproximado a média dos valores da variável aleatória para esse grupo restrito em vez da média para todos os estados. Daí a introdução do conceito de esperança condicional.

Teorema 2.3.1 *Consideremos uma função mensurável f sobre (Ω, F, P) e tomando valores em (Λ, G). Definimos a medida de probabilidade, Q, induzida em (Λ, G) por f como $Q(A) = P\left(f^{-1}(A)\right)$ $(A \in G)$. Se X é uma variável aleatória integrável sobre (Ω, F, P), então, existe uma variável aleatória Q-integrável Y sobre (Λ, G) tal que*

$$\forall A \in G \quad \int_A Y(x)\, dQ(x) = \int_{f^{-1}(A)} X(\omega)\, dP(\omega),$$

e esta variável aleatória é única.

Definição 2.3.2 *Y diz-se a esperança condicional de X dada f.*

Note-se que a esperança condicional é única $\left(Pf^{-1}\right)$-q.c.

A função f estabelece uma relação entre os espaços probabilizados (Ω, F) e (Λ, G). Se particularizarmos para o caso em que $\Omega = \Lambda$, G é uma sub-σ-álgebra de F e f é a função identidade em Ω, Q será a restrição de P a G. Podemos nesse caso definir

Definição 2.3.3 *A esperança condicional de X dada G é a variável aleatória integrável e G-mensurável Y tal que*

$$\forall A \in G \quad \int_A X(\omega)\, dP(\omega) = \int_A Y(\omega)\, dP(\omega),$$

usando-se a notação $Y = E(X|G)$.

Y obtém-se a partir de X por um processo de cálculo de média para uma σ-álgebra G, menos fina do que F. Ou seja, não se conhece o valor exacto de X para todos os estados ω mas conhece-se o valor médio que X toma no conjunto de estados em que ω se integra, segundo G.

Se a variável aleatória X for $X = I_A$, Y diz-se probabilidade condicional de A dada G e escreve-se $P(A\,|G)$ em vez de $E\left(I_A\,|G\right)$.

Vamos considerar algumas das propriedades da esperança condicional.

Lema 2.3.4 *(Linearidade) Se X e Y são variáveis aleatórias integráveis e $a_0, a_1, a_2 \in \Re$, então*

$$E\left(a_0 + a_1 X + a_2 Y\,|G\right) = a_0 + a_1 E\left(X\,|G\right) + a_2 E\left(Y\,|G\right) \quad q.c.$$

Lema 2.3.5 *Se X e Y são variáveis aleatórias integráveis e $X \leq Y$ q.c., então*

$$E\left(X\,|G\right) \leq E\left(Y\,|G\right) \quad q.c.$$

Lema 2.3.6 *Se X_n $(n \in \aleph)$ é uma sucessão crescente de variáveis aleatórias integráveis convergindo para uma variável aleatória integrável X, então*

$$E\left(X\,|G\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E\left(X_n\,|G\right) \quad q.c.$$

Lema 2.3.7 *Se ϕ é uma função convexa de $\Re$ em $\Re$ e X uma variável aleatória integrável tal que $\phi \circ X$ também é integrável, então*

$$\phi \circ E\left(X\,|G\right) \leq E\left(\phi \circ X\,|G\right) \; q.c.$$

Lema 2.3.8 *Se X é uma variável aleatória integrável e G uma sub-σ-álgebra de F, então $X = E\left(X\,|G\right)$ se e só se X é G-mensurável.*

Lema 2.3.9 *Se G e H são sub-σ-álgebras de F tais que $H \subset G \subset F$, então, para qualquer variável aleatória integrável X,*

$$E\left[E\left(X\,|G\right)|H\right] = E\left(X\,|H\right) \quad q.c.$$

Esta propriedade diz-nos que condicionar sucessivamente por σ-álgebras mais restritas é o mesmo que condicionar apenas pela menor das σ-álgebras.

Tal decorre de se ter

$$\forall A \in H \quad \int_A E\left[E\left(X\left|G\right.\right)\left|H\right.\right] dP = \int_A E\left(X\left|G\right.\right) dP = \int_A X dP = \int_A E\left(X\left|H\right.\right) dP.$$

Como os integrandos do primeiro e do último integrais são ambos $H-$mensuráveis, deverão ser iguais. Note-se que a segunda igualdade se verifica dado que $A \in H \subset G$.

Lema 2.3.10 *Seja X é uma variável aleatória integrável e Y uma variável aleatória G-mensurável, tal que XY seja integrável. Então*

$$E\left(XY\left|G\right.\right) = Y E\left(X\left|G\right.\right) \quad q.c.$$

2.4 Martingalas

2.4.1 Introdução

Apresentamos, nesta secção, o conceito de martingala, o qual é um processo estocástico que corresponde à noção de jogo justo: em cada momento, o valor presente do montante aplicado iguala o valor esperado dos ganhos futuros resultantes do jogo. Quando, no lugar da igualdade referida, se verifica sistematicamente uma desigualdade surgem os conceitos de supermartingala e submartingala.

Também são apresentados diversos resultados respeitantes a tais processos estocásticos, nomeadamente o teorema de paragem opcional, certas desigualdades, convergência q.c. e em L^1 e a decomposição de Riesz.

2.4.2 Martingalas em tempo discreto

Consideramos um espaço probabilizado (Ω, F, P) com filtração $\{F_t\}$ $(t \in D)$ em que D é um conjunto discreto (consideraremos o conjunto dos números naturais $\aleph$). Neste caso, um processo estocástico é uma sucessão de variáveis aleatórias.

Definição 2.4.1 *Um processo estocástico real $X = \{X_n\}\,(n \in \aleph)$ definido sobre (Ω, F, P), que seja $\{F_n\}-$adaptado e verifique $E\left(|X_n|\right) < \infty$ $(n \in \aleph)$, é uma $\{F_n\}-$supermartingala (resp. submartingala) se, para todo o n, se verificar q.c. quando $s \leq t$:*

$$E\left(X_t\left|F_s\right.\right) \leq X_s \text{ (resp. } \geq X_s).$$

Se X for simultaneamente uma supermartingala e uma submartingala, então é uma martingala, registando-se:

$$E\left(X_t \left| F_s \right.\right) = X_s \quad q.c.$$

Quando não haja susceptibilidade de confusão, dispensar-se-á a referência à filtração $\{F_n\}$.

O seguinte resultado, designado por teorema de paragem opcional, indica-nos que se verifica a igualdade (resp. desigualdade) caracterizadora da martingala (resp. sub/supermartingala) quando se substituem os índices determinístas por tempos de paragem.

Consideramos o caso de tempos de paragem limitados. O caso mais geral será considerado adiante.

Teorema 2.4.2 *Seja X uma supermartingala em $\{F_n\}$. Sejam σ e τ tempos de paragem em relação a $\{F_n\}$ limitados com $\sigma \leq \tau$ q.c. Então,*

$$E\left(X_\tau \left| F_\sigma \right.\right) \leq X_\sigma \quad q.c.$$

Prova. Pretende-se demonstrar que

$$\int_A X_\sigma dP \geq \int_A X_\tau dP$$

com $A \in F_\sigma$ arbitrário. Seja $\sigma \vee \tau \leq k$ q.c.

(i) Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que $\sigma \leq \tau \leq \sigma + 1$ q.c. Seja

$$B_n = A \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau \geq \sigma\} = A \cap \{\sigma = n\} \cap \{\tau \geq n\}.$$

Temos $A \cap \{\sigma = n\} \in F_n$. $\{\tau \geq n\} \in F_n$ pois $\{\tau \geq n\}$ é o complementar de $\{\tau < n\} \in F_n$. Logo, $B_n \in F_n$.

Dado que $A = \cup_{n=0}^{k} B_n$, tem-se

$$\int_A (X_\sigma - X_\tau)\, dP = \sum_{n=0}^{k} \int_{B_n} (X_\sigma - X_\tau)\, dP = \sum_{n=0}^{k} \int_{B_n \cap \{\tau > \sigma\}} (X_n - X_{n+1})\, dP \geq 0.$$

A segunda igualdade resulta de, sobre $B_n \cap \{\tau > \sigma\}$, se ter $\sigma + 1 = n + 1 \geq \tau > n$ (ou seja, $\tau = n + 1$) e a desigualdade final resulta de ser

$$E\left(X_{n+1} \left| F_n \right.\right) \leq X_n \text{ q.c.}$$

(ii) No caso geral, consideramos $\rho_n = \tau \wedge (\sigma + n)$ $(n = 0, 1, ..., k)$. Trata-se de um tempo de paragem. Como $\sigma \leq \rho_n$ para todo n, temos $F_\sigma \subset F_{\rho_n}$. Logo, $A \in F_{\rho_n}$. $\rho_{n+1} - \rho_n$ é quando muito 1, o que significa que se aplica a estes tempos de paragem o resultado obtido em (i). Temos $\rho_0 = \tau \wedge \sigma = \sigma$ e $\rho_k = \tau \wedge [\sigma + k] = \tau$. Resulta que

$$\int_A X_\sigma dP = \int_A X_{\rho_0} dP \geq \int_A X_{\rho_1} dP \geq ... \geq \int_A X_{\rho_k} dP = \int_A X_\tau dP.$$

■

Corolário 2.4.3 *Seja X uma $\{F_n\}$ −supermartingala e σ um tempo de paragem limitado. Então, X^σ é uma $\{F_n\}$ −supermartingala.*

De seguida apresentamos algumas desigualdades de Doob que majoram o número esperado de vezes em que um intervalo de valores reais é atravessado no sentido ascendente ou no sentido descendente por uma submartingala até um dado momento aleatório. Seja $Z = \{Z_n\} (n \in \aleph)$ uma submartingala. Seja σ um tempo de paragem limitado e $\{X_n\} = \{Z_n^\sigma\}$, sendo portanto uma submartingala parada em σ. Sejam a e b números reais com $a < b$. Então, designamos por $M_{[a,b]}^X(\omega)$ e $D_{[a,b]}^X(\omega)$ o número de travessias no sentido ascendente e descendente, respectivamente, do intervalo $[a, b]$ pela função que a n faz corresponder $X_n(\omega)$.

Lema 2.4.4 *Se X é uma $\{F_n\}$ −martingala (resp. submartingala) e ϕ é uma função convexa (resp. convexa crescente) sobre $\Re$ sendo $\phi(X_n)$ integrável, então $\phi(X_n)$ é uma $\{F_n\}$ −submartingala.*

Atendendo a este lema, podemos concluir que $Y = \{Y_n\} = \left\{(X_n - a)^+\right\}$ é uma $\{F_n\}$ −submartingala. Vem então

$$M_{[a,b]}^X(\omega) = M_{[0,b-a]}^Y(\omega) \equiv M \text{ e } D_{[a,b]}^X(\omega) = D_{[0,b-a]}^Y(\omega) \equiv D.$$

As referidas desigualdades de Doob são as seguintes.

Teorema 2.4.5 *1)* $E(M|F_0) \leq \frac{E(Y_\sigma|F_0) - Y_0}{b-a}$;
2) $E(D|F_0) \leq \frac{E\left((X_\sigma - b)^+|F_0\right)}{b-a}$.

Corolário 2.4.6 *Seja X uma supermartingala parada em σ.*

1) $E\left[D^X_{[a,b]}\right] \leq \frac{E(X_0 \wedge b - X_\sigma \wedge b)}{b-a}$;

2) $E\left[M^X_{[a,b]}\right] \leq \frac{E(|X_\sigma|)+|a|}{b-a}$.

Definição 2.4.7 *Um conjunto $K \subset L^1(\Omega, F, P)$ de variáveis aleatórias é uniformemente integrável se, para $X \in K$,*

$$\sup_{c\to\infty} \int_{|X|\geq c} |X(\omega)|\, dP(\omega) \to 0.$$

Nos resultados seguintes, analisamos a questão da convergência de uma martingala ou supermartingala à medida que o índice temporal tende para infinito. As desigualdades anteriores permitem garantir a coincidência dos limites superior e inferior deste processo ao colocar limites ao número de travessias de qualquer intervalo.

Teorema 2.4.8 *Seja $\{X_n\}\,(n \in \aleph)$ uma $\{F_n\}-$supermartingala tal que $\sup_n \|X_n\|_1 < \infty$. Então, a sucessão $\{X_n\}$ converge q.c. para uma variável aleatória integrável X_∞.*

Corolário 2.4.9 *1) Seja $\{X_n\}$ uma supermartingala não negativa ($X_n \geq 0$ q.c.). Então, $\{X_n\}$ converge q.c. para uma variável aleatória integrável X_∞.*

2) Seja $\{X_n\}$ uma supermartingala uniformemente integrável (ou seja, o conjunto das variáveis aleatórias X_n é uniformemente integrável). Então, $\sup \|X_n\|_1 < \infty$ e, com $F_\infty = \vee_n F_n$, $\{X_n\}$ $(n \in \mathcal{N} \cup \{\infty\})$ é uma supermartingala e $\lim_n \|X_n - X_\infty\|_1 = 0$.

Em 1), note-se que $\sup_n E(X_n^-) = 0 < \infty$.

Teorema 2.4.10 *Seja $F_\infty = \vee_n F_n$. Existe uma variável $Y \in L^1(\Omega, F_\infty, P)$ tal que $X_n = E(Y\,|F_n)$ q.c. para todo o $n \in \aleph$ se e só se $\{X_n\}$ é uma martingala uniformemente integrável.*

Consideremos agora a situação em que há uma sucessão de sub-$\sigma-$álgebras $\{F_n\}$ as quais vão decrescendo à medida que n aumenta, ou seja $F_n \subset F_m$ para n e m tais que $n \geq m$.

Definição 2.4.11 *Seja* (Ω, F, P) *um espaço probabilizado e* $\{F_n\}\,(n \in \aleph)$ *uma sucessão decrescente de sub-*$\sigma-$*álgebras de* F. *Uma supermartingala revertida é uma sucessão* $\{X_n\}$ *de variáveis aleatórias tal que, para todos os* m *e* n *com* $n \geq m$,

a) X_n *é* F_n*-mensurável;*

b) $E(|X_n|) < \infty$;

c) $E(X_m \,|F_n) \leq X_n$ *q.c.*

Para definir martingala e submartingala revertidas, basta substituir em c) a desigualdade por "=" e "≥" respectivamente.

Lema 2.4.12 *Seja* $X = \{X_n\}$ *uma supermartingala revertida em relação à sucessão decrescente de* σ*-álgebras* $\{F_n\}$. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$ *é finito, então* $\{X_n\}$ *é uniformemente integrável.*

Teorema 2.4.13 *Seja* X *uma supermartingala revertida tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) < \infty$. *Então,* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ *existe q.c. e a convergência também se regista em* $L^1(\Omega, F, P)$.

Prova. Relativamente à convergência q.c., é obtida a partir de um resultado análogo ao do teorema 2.4.5, que nos diz que o número de travessias de qualquer intervalo por $\{X_n(\omega)\}$ é q.c. finito. A convergência em L^1 resulta do lema 2.4.12. ∎

Apresentamos um tipo particular de supermartingala.

Definição 2.4.14 *Um potencial* $\{X_n\}$ *é uma supermartingala positiva tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n) = 0$.

Lema 2.4.15 *Se* X *é um potencial, então converge q.c. e em* L^1 *para 0.*

Teorema 2.4.16 *(Decomposição de Riesz) Seja* $\{X_n\}\,(n \in \aleph)$ *uma supermartingala. As duas seguintes condições são equivalentes:*

1) Existe um submartingala $\{W_n\}$ *tal que* $W_n \leq X_n$ *q.c. para todo o* $n \in \aleph$.

2) Existe uma martingala $\{Y_n\}$ *e um potencial* $\{Z_n\}$ *tais que para todo o* $n \in \aleph$: $X_n = Y_n + Z_n$.

$\{Y_n\}$ *e* $\{Z_n\}$ *são únicos e* $W_n \leq Y_n$ *q.c. para toda a submartingala* $\{W_n\}$ *que verifica a condição 1).*

Esta decomposição pode ser entendida da seguinte forma. Uma supermartingala com uma restrição de um limiar inferior imposta em 1) pode ser descrita como a soma de um processo de valor esperado constante (martingala) e de um processo de valor esperado decrescente convergindo para 0.

Os resultados compilados até aqui permitem alargar o âmbito de aplicação do teorema de paragem opcional a tempos de paragem eventualmente infinitos. Para o provar, recorre-se a sucessões decrescentes de tempos de paragem

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma, \text{ sobre } \{\sigma \leq n\} \\ \infty, \text{ sobre } \{\sigma > n\} \end{cases}$$

para aproximar o tempo de paragem σ. Nesta forma, pode-se utilizar o teorema de paragem opcional para tempos de paragem finitos.

Teorema 2.4.17 *Seja $\{X_n\}$ uma supermartingala em relação a $\{F_n\}$ com $n \in \aleph \cup \{\infty\}$ e $F_\infty = \vee_n F_n$. Sejam σ e τ tempos de paragem tais que $\sigma \leq \tau$ q.c. Então, X_σ e X_τ são variáveis aleatórias integráveis e*

$$E\left(X_\tau \left| F_\sigma\right.\right) \leq X_\sigma \quad q.c.$$

Se $\{X_n\}$ é uma martingala, então

$$E\left(X_\tau \left| F_\sigma\right.\right) = E\left(X_\infty \left| F_\sigma\right.\right) = X_\sigma \quad q.c.$$

Corolário 2.4.18 *Seja $\{F_n\}$ uma filtração, $F_\infty = F$ e σ e τ dois tempos de paragem. Então, os operadores $E\left(. \left| F_\sigma\right.\right)$ e $E\left(. \left| F_\tau\right.\right)$ comutam e a sua composição vem dada por $E\left(. \left| F_{\sigma\wedge\tau}\right.\right)$.*

Apresentamos de seguida mais algumas desigualdades de Doob importantes.

Lema 2.4.19 *Seja $\{X_n\}$ $(n \in \aleph)$ uma supermartingala. Então, para todo o $\alpha > 0$,*

(i) $\alpha P\left(\sup\limits_n X_n \geq \alpha\right) \leq E(X_0) + \sup\limits_n E\left(X_n^-\right) \leq 2 \sup\limits_n \|X_n\|_1$;

(ii) $\alpha P\left(\inf\limits_n X_n \leq -\alpha\right) \leq \sup\limits_n E\left(X_n^-\right)$;

(iii) $\alpha P\left(\sup\limits_n |X_n| \geq \alpha\right) \leq 3 \sup\limits_n \|X_n\|_1$;

(iv) (Teorema do máximo de Doob) Se X é uma martingala, então

$$\alpha P\left(\sup_n |X_n| \geq \alpha\right) \leq \sup_n \|X_n\|_1 .$$

Apresentamos, por fim, a desigualdade de Doob em L^p.

Teorema 2.4.20 *Seja* $\{X_n\}$ *uma submartingala positiva e* $X^*(\omega) = \sup_n X_n(\omega)$. *Sejam* $1 < p \leq \infty$ *e* $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Então,*

1) $X^* \in L^p$ *se e só se* $\sup_n \|X_n\|_p < \infty$;

2) $\|X^*\|_p \leq q \sup_n \|X_n\|_p$.

2.4.3 Martingalas em tempo contínuo

Consideramos agora o conjunto de índice temporal T dado por $[0, \infty[$ ou $[0, \infty]$.

As martingalas, supermartingalas e submartingalas definem-se de forma semelhante à efectuada em tempo discreto. Consideramos, de forma sumária, a obtenção dos resultados análogos aos da subsecção anterior para este caso, a qual se faz em muitos casos justamente a partir dessa subsecção.

Relativamente às desigualdades de Doob, suporemos que a supermartingala ou submartingala considerada é contínua à direita. A secção anterior permite concluir que são válidas para um subconjunto numerável denso K (por exemplo constítuido por números racionais) do conjunto não numerável em causa, J (o qual pode ser T por exemplo). Isto faz-se considerando uma família de subconjuntos de K cuja união seja K. Atendendo à continuidade à direita, verifica-se que a desigualdade válida para K sê-lo-à também para J.

Analisamos de seguida a trajectória de uma supermartingala em tempo contínuo e da sua restrição a um subconjunto Q numerável denso de T.

Teorema 2.4.21 *Seja* $\{X_t\}\,(t \in T)$ *uma supermartingala contínua à direita. Então,*

1) quase toda a trajectória de X *é limitada em todo o intervalo compacto;*

2) X *tem q.c. limites à esquerda, sendo portanto càdlàg.*

Prova. 1) Resulta, de imediato, das desigualdades de Doob respeitantes ao supremo e infimo de X.

2) Consideremos o intervalo $[0, n]$ e a e b números racionais com $a < b$. $M_{[a,b]}^{X,[0,n]}(\omega)$ designa o número de travessias ascendentes de $[a, b]$ por $X_t(\omega)$ com $t \in [0, n]$. Da desigualdade de Doob respeitante a esta função, sabemos que $M_{[a,b]}^{X,[0,n]} < \infty$ q.c. Então, o conjunto

$H^n_{a,b} = \left\{\omega : M^{X,[0,n]}_{[a,b]} = \infty\right\}$ tem medida nula. Seja H^n a união de todos os conjuntos $H^n_{a,b}$ onde a e b são números racionais com $a < b$. H^n terá medida nula. Ora, H^n corresponde às trajectórias $X_t(\omega)$ que verificam o seguinte:

$$\exists t \in [0,n] : \lim_{s \to t-} \inf X_s(\omega) < \lim_{s \to t-} \sup X_s(\omega).$$

Logo, se $\omega \notin H^n$ (o que sucede q.c.), então

$$\lim_{s \to t-} \inf X_s(\omega) = \lim_{s \to t-} X_s(\omega) = X_{t-}(\omega).$$

■

Teorema 2.4.22 *Seja X uma supermartingala e Q um subconjunto numerável denso de T. Então, a restrição da aplicação $s \to X_s(\omega)$ a Q tem limite à direita e à esquerda em todo o $t \in Q$ e quase todo o $\omega \in \Omega$.*

Prova. Se $H^n_{a,b} = \left\{\omega : M^{X,Q\cap[0,n]}_{[a,b]} = \infty\right\}$ e $H^n = \cup_{a,b} H^n_{a,b}$, estes conjuntos terão medida nula. Então, com $\omega \notin H^n$ e $t \in [0,n]$, vem

$$\lim_{s \to t-, s\in Q} \inf X_s(\omega) = \lim_{s \to t-, s\in Q} \sup X_s(\omega) = X_{t-}(\omega)$$

e

$$\lim_{s \to t+, s\in Q} \inf X_s(\omega) = \lim_{s \to t+, s\in Q} \sup X_s(\omega) = X_{t+}(\omega).$$

■

Seja $H = \cup_n H^n$. Consideremos $\omega \in H$.

Por convenção, $X_{t+}(\omega) = X_{t-}(\omega) = 0$.

Se a filtração $\{F_t\}$ é completa, contando portanto F_t com H que é $P-$nulo, então X_{t+} é F_{t+}-mensurável.

No resultado seguinte, apresentamos algumas especificidades da caracterização das supermartingalas em tempo contínuo. Em especial, é definida uma condição necessária e suficiente de continuidade à direita de uma supermartingala.

Teorema 2.4.23 *Seja $\{X_t\}$ $(t \in T)$ uma supermartingala e Q um subconjunto numerável denso de T. Então,*

(i) $X_t \geq E(X_{t+} | F_t)$ *q.c.;*

(ii) $X_{t-} \geq E(X_t | F_{t-})$ *q.c.*;

(iii) $\{X_{t+}\}$ *é uma supermartingala em relação à filtração* $\{F_{t+}\}$;

(iv) Se $\{F_t\}$ *é contínua à direita, então* $\{X_t\}$ *tem uma modificação contínua à direita se e só se* $E(X_t)$ *é uma função de* t *contínua à direita.*

No que respeita aos resultados referentes à convergência das supermartingalas, a sua dedução é semelhante à do caso discreto.

Consideramos, de seguida, a generalização ao caso contínuo do teorema de paragem opcional.

Teorema 2.4.24 *Seja* $\{X_t\}$ *uma supermartingala contínua à direita em relação à filtração* $F_t\,(t \in T)$. *Se* σ *e* τ *são tempos de paragem tais que* $\sigma \leq \tau$ *q.c., então* X_σ *e* X_τ *são integráveis e*

$$X_\sigma \geq E(X_\tau | F_\sigma) \quad q.c.$$

Se tivermos uma martingala, a desigualdade é substítuida por igualdade.

No que respeita à definição de potencial, é anàloga à feita no caso discreto. Há também no caso contínuo uma decomposição de Riesz, cujos enunciado e demonstração serão apresentados adiante (ver o teorema 2.6.1).

2.5 Algumas projecções e medidas definidas sobre processos estocásticos

2.5.1 Projecções

Analisamos a seguir projecções incidindo sobre processos estocásticos cuja importância advém de resultarem em processos acessíveis ou previsíveis. Consideremos preliminarmente um resultado respeitante à monotonia da esperança de variáveis aleatórias constituídas a partir de processos estocásticos parados num tempo de paragem.

Lema 2.5.1 *Sejam* X *e* Y *dois processos opcionais (resp. acessíveis, previsíveis). Então, as duas seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $X_t(\omega) \geq Y_t(\omega)$ *excepto num conjunto evanescente.*

b) Se para todo o $\tau \in \Upsilon_o$ (resp. Υ_a, Υ_p) as variáveis aleatórias $X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ e $Y_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ são integráveis, então

$$E\left(X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}\right) \geq E\left(Y_\tau I_{\{\tau<\infty\}}\right).$$

A parte não evidente deste resultado é a implicação b)$\Longrightarrow$a) e é provada por absurdo. De facto, se $\{X<Y\}$ não for evanescente, é possível garantir que existe um tempo de paragem τ de probabilidade positiva tal que $X_\tau I_{\{\tau<\infty\}} < Y_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$. Verifica-se a mesma igualdade para a sua esperança, restringindo o tempo de paragem a um conjunto de medida não nula sobre o qual X_τ e Y_τ sejam limitados.

Definição 2.5.2 *Seja X um processo estocástico $\mathcal{B}\otimes F-$mensurável. X^* é dado por*

$$X_t^*(\omega) = \sup_{s\leq t} |X_s(\omega)|.$$

$X_\infty^*(\omega) = \sup_t |X_t(\omega)|$ *existe e X diz-se limitado se $X_\infty^* \in L^\infty(\Omega, F, P)$.*

Definição 2.5.3 *Se $\{F_t\}$ é uma filtração sobre (Ω, F, P), X é localmente limitado se existir uma sucessão crescente $\{\tau_n\}$ de tempos de paragem tais que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \tau_n = \infty$ q.c. e $X_{\tau_n}^*(\omega) \leq n$ q.c. $\forall n$.*

Designamos por $\mathcal{B}(\mathcal{B}\otimes F)$ o espaço de processos mensuráveis limitados e $\mathcal{B}(\Sigma_x)$ $(x\in\{o,a,p\})$ o espaço de processos Σ_x-mensuráveis e limitados.

Teorema 2.5.4 *(teorema de projecção) Existe uma projecção linear, Π_x $(x\in\{o,a,p\})$, de $\mathcal{B}(\mathcal{B}\otimes F)$ sobre $\mathcal{B}(\Sigma_x)$ que preserva a ordem e tal que, com $X\in\mathcal{B}(\mathcal{B}\otimes F)$ e $\tau\in\Upsilon_x$*

$$E\left(X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}\right) = E\left((\Pi_x X)_\tau I_{\{\tau<\infty\}}\right).$$

Para a demonstração começa-se por provar que para dois processos X, Y com projecções ΠX e ΠY e $X\leq Y$ excepto num conjunto evanescente, então $\Pi X \leq \Pi Y$. Recorrendo ao lema 2.5.1, verifica-se a unicidade de tal projecção. De seguida, verifica-se que basta demonstrar a existência de projecção para uma família de processos uniformemente limitados, fechados em relação à multiplicação e geradora de Σ_x. Usa-se um teorema de paragem monótona porque o conjunto dos processos que verificam as condições da projecção é um espaço vectorial, incluindo as constantes e fechado em relação à convergência uniforme. O elemento genérico da família escolhida é uma variável aleatória $F-$mensurável multiplicada pela indicatriz de um intervalo estocástico.

Definição 2.5.5 $\Pi_x X$ *($x \in \{o, a, p\}$) é a projecção (opcional, acessível, previsível) de X.*

Corolário 2.5.6 *Se $X \in \mathcal{B}(\Sigma_x)$, então $\Pi_x X = X$ (x=o,a,p).*

O resultado pode ser generalizado a processos mensuráveis positivos considerando a sucessão crescente de processos $X \wedge n$ $(n \in \aleph)$ e considerando as respectivas projecções $\Pi_x (X \wedge n)$.

Corolário 2.5.7 *Seja X um processo $\mathcal{B} \otimes F-$mensurável, limitado ou positivo, com projecção $\Pi_x X$. Então*

a) se $\tau \in \Upsilon_x : (\Pi_x X)_\tau I_{\{\tau<\infty\}} = E\left[X_\tau I_{\{\tau<\infty\}} |F_\tau\right]$ (x=o,a),

b) se $\tau \in \Upsilon_p : (\Pi_p X)_\tau I_{\{\tau<\infty\}} = E\left[X_\tau I_{\{\tau<\infty\}} |F_{\tau-}\right]$.

Corolário 2.5.8 *Sejam X e Y dois processos mensuráveis limitados. Se $Y \in B(\Sigma_x)$, então $\Pi_x (XY) = Y \Pi_x (X)$.*

Retoma-se a família geradora de Σ_x referida a seguir ao teorema 2.5.4, a qual como se viu é definida a partir de intervalos estocásticos. Verifica-se que o conjunto $\{\Pi_o X \neq \Pi_p X\}$, para um processo X pertencente aquela família, está contido numa união de gráficos de uma sucessão de tempos de paragem que são exaustivos para os saltos de uma martingala, sendo esta dada pela esperança condicional da variável aleatória pela qual se multiplica o intervalo estocástico, na definição da referida família. Este resultado pode ser usado para analisar o conjunto sobre o qual as projecções diferem.

Teorema 2.5.9 *Seja X um processo mensurável limitado. Então, o conjunto $\{\Pi_x X \neq \Pi_y X\}$ $(x \neq y)$ é uma união numerável de gráficos de tempos de paragem. Se se tiver x=o e y=a, os tempos de paragem em causa são totalmente inacessíveis.*

2.5.2 Medidas

Definição 2.5.10 *Processo crescente é um processo $\{C_t\}$ $(t \in [0, \infty[)$ $\mathcal{B} \otimes F-$mensurável que se caracteriza pelo facto de quase toda a trajectória $C(\omega)$ ser contínua à direita e crescente. Por convenção, $C_{0-}(\omega) = 0$ q.c.*

Definição 2.5.11 *Processos de variação finita $\{V_t\}$ são aqueles para os quais quase toda a trajectória tem variação finita sobre cada subconjunto compacto de $[0, \infty[$.*

Um processo de variação finita pode ser escrito como a diferença entre dois processos crescentes.

Definição 2.5.12 *Seja V um processo de variação finita e X um processo definido sobre $[0,\infty[\times\Omega$ e $\mathcal{B}\otimes F-$mensurável. Se o integral de Stieltjes estiver definido, para quase todo o ω e todo o $t\in[0,\infty[$, o processo q.c. dado por:*

$$\int_0^t X_s(\omega)\,dV_s(\omega) \quad \forall t\in[0,\infty[\,.$$

chama-se integral estocástico de X em relação a V e é designado por $\int_0^t X_s dV_s$.

Definição 2.5.13 *Para um processo crescente $\{C_t\}$, definimos o processo de mudança temporal a ele associado, $\{\eta_t\}$, através de $\eta_t(\omega)=\inf\{s: C_s(\omega)>t\}$ $\;t\in[0,\infty[\,.$*

Lema 2.5.14 *η_t é um tempo de paragem.*

Lema 2.5.15 *Seja c: $[0,\infty[\longrightarrow[0,\infty[$ uma função crescente e contínua à direita e*

$$m(t)=inf\{s: c(s)>t\}$$

para t$\in$ $[0,\infty[\,$. Se c é finito, então para toda a função boreliana positiva h sobre $[0,\infty[$ vem

$$\int_0^\infty h(t)dc(t)=\int_{c(0)}^\infty h(m(t))\,I_{\{m<\infty\}}dt.$$

Teorema 2.5.16 *Sejam $\{H_{1t}\}$ e $\{H_{2t}\}$ dois processos $\mathcal{B}\otimes F-$mensuráveis, a verificar, para todo o tempo de paragem τ,*

$$E\left[H_{1\tau}I_{\{\tau<\infty\}}\right]=E\left[H_{2\tau}I_{\{\tau<\infty\}}\right].$$

Então, para todo o processo crescente $\{F_t\}-$adaptado, $\{C_t\}$,

$$E\left[\int_0^\tau H_{1s}dC_s\right]=E\left[\int_0^\tau H_{2s}dC_s\right],$$

sempre que existam as expressões em ambos os membros.

Prova. (i) Seja $\tau = \infty$ q.c.

Então,

$$E\left[\int_0^\infty H_{1s} dC_s\right] = E\left[\int_0^\infty H_{1,\eta_s} I_{\{\eta_s<\infty\}} ds\right] = \int_0^\infty E\left[H_{1,\eta_s} I_{\{\eta_s<\infty\}}\right] ds,$$

resultando a primeira igualdade do lema 2.5.15 e a segunda do teorema de Fubini.

De forma idêntica,

$$E\left[\int_0^\infty H_{2s} dC_s\right] = \int_0^\infty E\left[H_{2,\eta_s} I_{\{\eta_s<\infty\}}\right] ds.$$

Como η_s é um tempo de paragem para todo o s de acordo com o lema 2.5.14, as esperanças nos segundos membros são iguais, daí resultando a igualdade dos seus integrais.

(ii) Seja τ um tempo de paragem geral.

Nesse caso, aplica-se o resultado de (i) ao processo crescente adaptado a $\{F_t\}, \{C_t^*\}$ dado por $C_t^* = C_{t\wedge\tau}$. ■

Corolário 2.5.17 *Seja $\{C_t\}$ um processo adaptado crescente e $\{M_t\}$ uma martingala positiva contínua à direita e uniformemente integrável. Então, para todo o tempo de paragem τ,*

$$E\left(\int_0^\tau M_s dC_s\right) = E\left[M_\tau C_\tau\right].$$

Considerando os conceitos atrás referidos, vamos introduzir agora uma medida definida sobre um processo crescente.

Definição 2.5.18 *Se C for um processo crescente, pode-se definir uma medida positiva μ_C sobre $([0,\infty[\times\Omega, \mathcal{B}\otimes F)$ fazendo*

$$\mu_C(X) = E\left[\int_0^\infty X_s dC_s\right]$$

para todo o processo $\mathcal{B}\otimes F-$mensurável e limitado.

μ_C é positiva no sentido de que $X \geq 0 \Longrightarrow \mu_C(X) \geq 0$.

Esta medida pode ser caracterizada através do seguinte resultado, obtido atendendo a que $\mathcal{B}\otimes F$ é gerada por conjuntos do tipo $[0,t]\times H$ com $H \in F$.

Teorema 2.5.19 *Seja μ uma medida positiva sobre $([0,\infty[\times\Omega,\mathcal{B}\otimes F)$. Para que seja do tipo μ_C, sendo C um processo crescente, é necessário e suficiente que*

a) μ tenha massa finita;

b) os conjuntos evanescentes sejam $\mu-$nulos;

c) $\forall t\in[0,\infty[\quad \mu([0,t]\times H)=\mu\left(E[I_H\,|F_t].I_{[0,t]}\right)$.

A igualdade em c) é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mu_C([0,t]\times H) &= E\left[\int_0^\infty I_{[0,t]}(s)\,I_H(\omega)\,dC_s\right]=E\left[\int_0^t I_H(\omega)\,dC_s\right]\\
&= E\left[I_H\int_0^t dC_s\right]=E[I_HC_t]=E\left(E[I_HC_t\,|F_t]\right)\\
&= E\left(E[I_H\,|F_t]\,C_t\right)=E\left(E[I_H\,|F_t]\int_0^t dC_s\right)\\
&= E\left(\int_0^\infty E[I_H\,|F_t]\,I_{[0,t]}(s)\,dC_s\right)\\
&= \mu_C\left(E[I_H\,|F_t].I_{[0,t]}\right).
\end{aligned}$$

Uma versão diferente deste teorema é a seguinte.

Corolário 2.5.20 *Seja μ uma medida positiva sobre $([0,\infty[\times\Omega,\mathcal{B}\otimes F)$. Para que seja do tipo μ_C, sendo C um processo crescente integrável, é necessário e suficiente que*

a) exista uma sucessão de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\tau_n=\infty$ e $\mu([0,\tau_n])<\infty$ $\forall n$;

b) os conjuntos evanescentes sejam nulos em μ;

c) $\mu([0,t]\times H)=\mu\left(E[I_H\,|F_t]\,I_{[0,t]}\right)\quad\forall t\in[0,\infty[$.

O próximo resultado diz-nos que se o processo C for Σ_x-mensurável, a medida μ_C depende apenas da sua restrição a Σ_x.

Teorema 2.5.21 *Seja C um processo crescente mensurável em Σ_x $(x\in\{o,a,p\})$. Se X e Y são dois processos $\mathcal{B}\otimes F-$mensuráveis e limitados, de projecções Π_xX e Π_xY indistinguíveis, então*

$$\mu_C(X)=\mu_C(Y).$$

Prova. (esboço) Para x=o, considera-se a unicidade da projecção para verificar que

$$E\left(X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}\right)=E\left(Y_\tau I_{\{\tau<\infty\}}\right)$$

para $\tau\in\Upsilon_o$ e a partir daí recorre-se ao teorema 2.5.16.

Para $x\in\{a,p\}$, considera-se o teorema 2.5.9 para constatar que o conjunto $\{X\neq Y\}$ é uma união numerável de gráficos de tempos de paragem totalmente inacessíveis não relevantes na determinação dos integrais, pois pode-se escrever

$$C_t=C_t^c+\sum_n x_n I_{[\tau_n,\infty[}(t)$$

sendo C^c a parte contínua de C e $\{\tau_n\}$ uma sucessão de tempos de paragem pertencentes a Υ_x $(x\in\{a,p\})$. ■

Considerando em vez de X, o processo $I_{]\sigma,\tau]}X$, e atendendo a que $]\sigma,\tau]$ é previsível, com $\sigma,\tau\in\Upsilon_o$, obtemos a seguinte versão alterada do teorema anterior.

Corolário 2.5.22 *Seja C um processo crescente e Σ_x-mensurável $(x\in\{o,a,p\})$. Se X e Y são dois processos $\mathcal{B}\otimes F$-mensuráveis e limitados tais que $\Pi_xX=\Pi_xY$, então para todos os tempos de paragem opcionais σ,τ vem*

$$E\left[\int_{]\sigma,\tau]}X_t dC_t\,|F_\sigma\right]=E\left[\int_{]\sigma,\tau]}Y_t dC_t\,|F_\sigma\right].$$

O resultado seguinte fornece uma condição necessária e suficiente para caracterizar um processo como Σ_x-mensurável a partir da medida obtida com base neste.

Corolário 2.5.23 *Seja μ_C a medida gerada por um processo crescente C. Então, C é Σ_x-mensurável se e só se μ_C verificar a condição seguinte: se X eY são dois processos $\mathcal{B}\otimes F$-mensuráveis e limitados a verificar $\Pi_xX=\Pi_xY$ $(x\in\{o,a,p\})$, então*

$$\mu_C(X)=\mu_C(Y).$$

Note-se que a necessidade da condição se encontra presente no teorema 2.5.21. A prova da suficiência passa pela prova de que C é adaptado/acessível/previsível consoante o caso e baseia-se numa representação do tipo da do teorema 2.5.19c). Assim, por exemplo no caso opcional, $E(I_H.C_t)=E[E(I_H\,|F_t).C_t]$ para todo o $t\in[0,\infty[$ e todo o $H\in F$.

Definição 2.5.24 *Seja X um processo $\mathcal{B} \otimes F-$mensurável e limitado, e C um processo $\mathcal{B} \otimes F$-mensurável e de variação integrável. O seu produto interno é*

$$\langle X, C \rangle = E \left[\int_0^\infty X_s(\omega)\, dC_s(\omega) \right].$$

A partir deste conceito, podemos definir a aplicação adjunta da projecção Π_x, com base no seguinte resultado.

Teorema 2.5.25 *Seja C um processo crescente $\mathcal{B} \otimes F-$mensurável tal que $E(C_\infty) < \infty$. Então, existe um único processo crescente, Σ_x-mensurável e integrável ($x \in \{o, a, p\}$), $\{\Pi_x^* C_t\}$, tal que, para todo o processo X $\mathcal{B} \otimes F-$mensurável e limitado,*

$$\langle \Pi_x X, C \rangle = \langle X, \Pi_x^* C \rangle = \langle \Pi_x X, \Pi_x^* C \rangle .$$

Prova. Pode-se definir a medida $\mu_x(X) = \langle \Pi_x X, C \rangle$. Considerando a classe de processos da forma $X_t = I_H . I_{[0,r]}$ com $r \geq 0$, verifica-se que tem a mesma projecção Π_x que $E[I_H | F_r] . I_{[0,r]}$ onde o intervalo $[0, r]$ é estocástico. Logo μ_x satisfaz as condições do teorema 2.5.19, nomeadamente c), o que implica que existe um processo crescente que gera essa medida. Consideremos o processo único $\Pi_x^* C$ que gera μ_x. Pelo corolário 2.5.23, este é Σ_x-mensurável. ■

Definição 2.5.26 $\Pi_x^* C$ *(x=o, resp. a,p) diz-se a projecção dual (opcional, resp. acessível, previsível) de C.*

No caso de processos de variação integrável, V, os quais se escrevem como a diferença de processos crescentes, $\Pi_x^* V$ é a diferença das projecções duais correspondentes ao aditivo e ao subtractivo.

Corolário 2.5.27 *Se C é Σ_x-mensurável, então $\Pi_x^* C = C$.*

Teorema 2.5.28 *Seja C contínuo e de variação integrável. Então, $\Pi_x^* C$ é contínuo e $\Pi_o^* C = \Pi_a^* C = \Pi_p^* C$.*

Teorema 2.5.29 *Seja C um processo de variação integrável, nulo em zero. Então, as seguintes proposições são equivalentes:*

a) C é uma martingala.

b) $\Pi_p^* C$ é indistinguível do processo nulo.

c) A restrição de μ_C a Σ_p é nula.

Prova. Atende-se a que Σ_p é gerada por intervalos estocásticos do tipo $]\sigma, \tau]$ e $[0_F]$ com $F \in F_0$. Note-se que $\Pi_p^* C$ é o integrador de μ_C na restrição a Σ_p, para verificar a equivalência entre b) e c). Para a equivalência entre a) e c), consideram-se intervalos estocásticos da forma $]s, t] \times B$, com $B \in F_s$, para concluir que

$$\mu_C\left(]s, t] \times B\right) = E\left[I_B\left(C_t - C_s\right)\right]$$

e, portanto, $E\left(C_t \left| F_s\right.\right) = C_s$ se e só se a medida μ_C é nula para $]s, t] \times B$ e consequentemente para Σ_p. ■

Corolário 2.5.30 *Se C é integrável, então $C - \Pi_p^* C$ é uma martingala.*

Corolário 2.5.31 *Se um processo C de variação integrável e previsível é uma martingala, então $C_t = C_0$ q.c. $\forall t$.*

De seguida, relacionamos o conceito de projecção dual previsível com a evolução da esperança condicional do processo.

Definição 2.5.32 *Dois processos de variação integrável dizem-se associados se têm a mesma projecção dual previsível.*

Lema 2.5.33 *Seja C um processo crescente $\mathcal{B} \otimes F$-mensurável e $\Pi_x^* C$ (x=o,a,p) a sua projecção dual sobre Σ_x. Se X é limitado e $\mathcal{B} \otimes F$-mensurável e σ e τ são tempos de paragem, com $\sigma \leq \tau$, então*

$$E\left[\int_\sigma^\tau \left(\Pi_x X_t\right) dC_t \left| F_\sigma\right.\right] = E\left[\int_\sigma^\tau X_t d\Pi_x^* C_t \left| F_\sigma\right.\right] = E\left[\int_\sigma^\tau \left(\Pi_x X_t\right) d\Pi_x^* C_t \left| F_\sigma\right.\right].$$

Teorema 2.5.34 *Dois processos de variação integrável, C_1 e C_2, são associados se e só se $M = C_1 - C_2$ é uma martingala.*

Prova. Fazendo $X_t = 1$ q.c. $\forall t$ e $\sigma = s \leq t = \tau$, no lema anterior, vem

$$E\left[\int_s^t 1.d\Pi_x^* C_1 \left| F_s\right.\right] = E\left[\int_s^t 1.dC_1 \left| F_s\right.\right]$$

e

$$E\left[\int_s^t 1.d\Pi_x^* C_2 \,|F_s\right] = E\left[\int_s^t 1.dC_2 \,|F_s\right].$$

Se C_1 e C_2 são associados, as duas expressões são iguais, resultando que

$$E\left[C_{1t} - C_{2t} \,|F_s\right] = C_{1s} - C_{2s}.$$

Se $C_1 - C_2$ é uma martingala, pela implicação a)$\Longrightarrow$b) no teorema 2.5.29, $\Pi_p^*(C_1 - C_2) = 0$ e, portanto, $\Pi_p^* C_1 = \Pi_p^* C_2$. ■

2.6 Decomposição de Doob-Meyer

2.6.1 Introdução

Apresentamos o conceito de decomposição de Doob-Meyer que permite representar um processo de média condicional decrescente (supermartingala) como a diferença entre um processo de média condicional constante (martingala) e um processo crescente. Situar-nos-emos num contexto de tempo contínuo ($T = [0, \infty[$).

2.6.2 Resultados preliminares e definição

O conceito de supermartingala (resp. martingala) tem como aspecto essencial a característica de possuir esperança condicional decrescente (resp. constante) no tempo. O conceito de potencial é o de um processo decrescente em média condicional em que o limite desta coincide com o valor mínimo que o processo pode tomar. O resultado seguinte permite representar o comportamento de uma supermartingala em termos da soma de um processo de média condicional constante e um processo positivo de média condicional decrescente para zero.

Teorema 2.6.1 *(Decomposição de Riesz) Seja X uma supermartingala uniformemente integrável e contínua à direita. Então, existe uma martingala uniformemente integrável e contínua à direita Y e um potencial Z tais que $X_t = Y_t + Z_t$ q.c. $\forall t \in [0, \infty[$. Esta decomposição é única a menos de processos indistinguíveis.*

Prova. Y será definido por $Y_t = E(X_\infty |F_t)$ e Z por $Z_t = X_t - Y_t$. Nesse caso, Z é uma supermartingala uniformemente integrável e contínua à direita, resultando a primeira característica de ser a diferença entre uma supermartingala e uma martingala, e as outras de X e Y terem características análogas. Além disso,

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} Z_t = \lim_{t\longrightarrow\infty} [X_t - E(X_\infty |F_t)] = 0 \text{ q.c.}$$

Concluimos assim que Z é um potencial.

Consideremos outra decomposição: $X = Y^* + Z^*$. Então, $Y^*_\infty = X_\infty = Y_\infty$ e portanto

$$Y^*_t = E(Y^*_\infty |F_t) = E(X_\infty |F_t) = Y_t \text{ q.c. } \forall t \in [0,t].$$

Sendo Y e Y^* contínuos à direita, tal basta para que sejam indistinguíveis. ■

Definição 2.6.2 *A decomposição referida no teorema anterior designa-se por decomposição de Riesz.*

Consideramos de seguida um outro tipo de decomposição de uma supermartingala.

Definição 2.6.3 *(Decomposição de Doob-Meyer) Seja X uma supermartingala uniformemente integrável e contínua à direita. X tem uma decomposição de Doob-Meyer se existe uma martingala contínua à direita, M, e um processo crescente adaptado, C, tais que $X_t = M_t - C_t$ q.c.$\forall t \in [0,t]$.*

Lema 2.6.4 *Uma supermartingala uniformemente integrável e contínua à direita X tem uma decomposição de Doob-Meyer se o potencial correspondente na decomposição de Riesz, Z, tiver uma decomposição de Doob-Meyer.*

Lema 2.6.5 *Se um potencial Z tem uma decomposição de Doob-Meyer $Z_t = M_t - C_t$ q.c.$\forall t \in [0,t]$, então pode-se escrever*

$$Z_t = E(C_\infty |F_t) - C_t \quad q.c.$$

Definição 2.6.6 *O processo C diz-se processo gerador do potencial Z.*

Lema 2.6.7 *O processo C, gerador do potencial Z, pode ser escolhido previsível.*

2.6.3 Uma condição necessária e suficiente à existência da decomposição de Doob-Meyer

Se X for uma martingala uniformemente integrável, o conjunto das variáveis aleatórias, $\{X_\tau\}$, sendo τ um qualquer tempo de paragem, é uniformemente integrável. Tal resulta do teorema de paragem opcional: $X_\tau = E\left(X_\infty \left| F_\tau \right.\right)$ q.c. No entanto, tal não se verifica, em geral, se X for uma supermartingala uniformemente integrável. Isso motiva a seguinte definição e a análise subsequente sobre a existência da decomposição de Doob-Meyer.

Definição 2.6.8 *Uma supermartingala uniformemente integrável e contínua à direita diz-se de classe D se o conjunto de variáveis aleatórias, $\{X_\tau\}$, sendo τ um qualquer tempo de paragem, é uniformemente integrável.*

Teorema 2.6.9 *Se o potencial Z tem uma decomposição de Doob-Meyer:*

$$Z_t = M_t - C_t = E\left(C_\infty \left| F_t \right.\right) - C_t \quad q.c.$$

sendo C um processo crescente integrável, nulo em zero, então Z é de classe D. C pode ser escolhido previsível e, para todo o tempo de paragem τ,

$$Z_\tau = E\left(C_\infty \left| F_\tau \right.\right) - C_\tau \quad q.c.$$

O resultado reciproco é apresentado de seguida.

Teorema 2.6.10 *Seja Z um potencial de classe D. Então, existe um único processo crescente integrável e previsível nulo em zero, C, tal que C é o processo gerador de Z:*

$$Z_t = E\left(C_\infty \left| F_t \right.\right) - C_t \quad q.c. \ \forall t \in [0, \infty[\,.$$

Este resultado é provado considerando uma medida do tipo $\mu_C = E\left[\int_0^\infty X_s dC_s\right]$ sendo C um processo crescente previsível. Sendo σ e τ tempos de paragem, esta medida, designada por μ,verifica

$$\mu\left(]\sigma, \tau]\right) = E\left[Z_\sigma - Z_\tau\right] = E\left[C_\tau - C_\sigma\right].$$

Considerando, para $t \in [0, \infty[\,$, $H \in F_t$, $\sigma = t_H$ e $\tau = \infty$, vem

$$E\left[I_H\left(C_\infty - C_t\right)\right] = E\left(I_H Z_t\right) - E\left(I_H Z_\infty\right) = E\left(I_H Z_t\right).$$

Então

$$Z_t = E\left[C_\infty - C_t \,|F_t\right] = E\left[C_\infty \,|F_t\right] - C_t \quad \text{q.c.}$$

Z é, portanto, o potencial gerado por C.

O resultado que acabamos de apresentar pode ser generalizado a supermartingalas da seguinte forma.

Teorema 2.6.11 *Se X é uma supermartingala contínua à direita de classe D, então existe um único processo crescente integrável, previsível e nulo em zero, C, tal que se verifica a decomposição de Doob-Meyer:*

$$X_t = M_t - C_t$$

em que M é uma martingala uniformemente integrável.

2.7 Martingalas de quadrado integrável

2.7.1 Introdução

Vamos considerar nesta secção as martingalas de quadrado integrável, as quais nos permitem estabelecer uma etapa introdutória ao Cálculo Estocástico. Após definirmos o sentido a atribuir a integrabilidade em tal contexto, consideraremos o tipo de estrutura que caracteriza as martingalas de quadrado integrável. Ela reporta-se à decomposição deste tipo de processos em dois processos do mesmo tipo mas sendo um deles contínuo e o outro puramente descontínuo.

Apresentaremos o conceito de processo de variação quadrática deste tipo de processos. Este consistirá na parte previsível do desvio entre o quadrado do valor da martingala em dado momento e o seu valor esperado no limite, nesse mesmo momento. Este processo serve de base à definição da norma que caracteriza determinada classe de integrandos no integral estocástico, tomando como integrador martingalas de quadrado integrável e, numa fase posterior, classes mais gerais de integradores. Finalmente, apresentaremos a noção de integral estocástico tomando como integradores martingalas de quadrado integrável.

2.7.2 Martingalas de quadrado integrável

Vamos definir nesta secção uma classe de martingalas caracterizada por uma limitação sobre os momentos de ordem p (no caso que nos interessa, de ordem 2) das variáveis que as constituem. Antes porém, iremos contemplar a relação entre martingalas e martingalas locais.

Definição 2.7.1 *Uma martingala local* $\{M_t\}$ *é um processo estocástico que é localmente uma martingala, i.e. existe uma sucessão crescente de tempos de paragem* $\{\tau_n\}$ *tais que* $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ *q.c. e todo o processo parado* $\{M_t^{\tau_n}\} = \{M_{t\wedge\tau_n}\}$ *é uma martingala:* $M_s^{\tau_n} = E\left[M_t^{\tau_n} | F_s\right].$

O conjunto de martingalas locais é designado por M_{loc}.

Importa recordar o seguinte.

Definição 2.7.2 *Uma martingala uniformemente integrável* $\{M_t\}$ *é uma martingala em que as variáveis aleatórias* M_t *com* $t \in [0, \infty[$ *constítuem um conjunto uniformemente integrável, ou seja, são variáveis aleatórias integráveis verificando a seguinte condição:* $\int_{|X|\geq c} |X(\omega)|\, dP(\omega)$ *converge para 0 uniformemente quando* $c \to \infty$, *sendo* X *uma qualquer variável aleatória pertencente ao referido conjunto. O conjunto das martingalas (resp. locais) uniformemente integráveis é designado por Mui (resp.* Mui_{loc}*).*

Podemos começar por concluir o seguinte.

Lema 2.7.3 *Toda a martingala* $\{M_t\}$ *é martingala local.*

Sabe-se que nem toda a martingala local é uma martingala. O que se pode afirmar a este respeito é o seguinte.

Lema 2.7.4 *Se* $\{M_t\} \in Mui_{loc}$, *então* $\{M_t\} \in Mui$ *se e só se for de classe D.*

Prova. Se $\{M_t\} \in Mui$, verificar-se-á pelo teorema de paragem opcional que, para todo o tempo de paragem τ, $M_\tau = E\left[M_\infty | F_\tau\right]$, sendo $M_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} M_t$ uma variável aleatória integrável. Assim sendo, o conjunto de variáveis aleatórias $\{M_\tau\}$ é uniformemente integrável e portanto $\{M_t\}$ é de classe D.

Reciprocamente, suponhamos que $\{M_t\} \in Mui_{loc}$ e é de classe D. O conjunto de variáveis aleatórias $\{M_t\}$ é càdlàg e uniformemente integrável. De facto, fazendo $\tau = t$, vem $M_\tau = M_t$ para qualquer t.

Verifiquemos a condição de martingala: $M_s = E\left[M_t | F_s\right]$ para todo o $s \leq t < \infty$. Existe uma sucessão crescente de tempos de paragem τ_n tais que $\{M_t^{\tau_n}\} \in Mui$ e portanto para todo o n vem $M_s^{\tau_n} = E\left[M_t^{\tau_n} | F_s\right]$. Como $\lim\limits_{t\to\infty} \tau_n = \infty$, $M_s^{\tau_n} = M_{s\wedge\tau_n}$ converge q.c. para M_s, convergindo de igual forma $M_t^{\tau_n}$ para M_t. Sendo $\{M_t\}$ de classe D e portanto $M_t^{\tau_n}$ e $M_s^{\tau_n}$ uniformemente integráveis a convergência q.c. implica a convergência em L_1.

Pode-se assim concluir o pretendido. ■

Consideremos a seguinte caracterização de uma martingala uniformemente integrável que será usada adiante.

Lema 2.7.5 *Seja $\{M_t\}$ $(t \in [0, \infty])$ um processo adaptado e contínuo à direita tal que, para todo o tempo de paragem τ, $E(|M_\tau|) < \infty$ e $E(M_\tau) = 0$. Então, $\{M_t\}$ é uma martingala uniformemente integrável.*

Sendo $\{M_t\}$ um dado processo, designemos por $\{M_t^*\}$ o processo dado por $M_t^* = \sup\limits_{s\leq t} |M_t|$.

O espaço de martingalas que nos importa é definido a partir da norma que passamos a introduzir. Sendo $M \in Mui$ e $p \in [1, \infty]$, $||M||_{H^p} = ||M_\infty^*||_p$, em que $||.||_p$ é a norma em $L^p(\Omega, F, P)$. Repare-se que M_∞^* é uma variável aleatória. H^p é o espaço de martingalas tais que $||M||_{H^p} < \infty$. Esta condição significa que o supremo de entre as variáveis que constituem a martingala tem norma finita em L^p. No caso particular em que $p = 2$, teremos então o espaço H^2 das martingalas de quadrado integrável i.e. $E\left(M_\infty^{*2}\right) < \infty$.

Verifica-se que $H^p \subset Mui$, dado que sendo M_∞^* integrável e $\{M_\tau\}$ limitada superiormente por M_∞^* para qualquer tempo de paragem τ, a martingala $\{M_t\}$ é de classe D e portanto, é uniformemente integrável.

O seguinte resultado permite inferir algo acerca dos limites das sucessões convergentes em H^p.

Teorema 2.7.6 *Sendo $1 < p \leq \infty$ e $\{M_t^n\}$ uma sucessão de martingalas que converge para $\{M_t\}$ na norma de H^p, então existe uma subsucessão $\{M_t^{n_k}\}$ tal que, para quase todo* *o* $\omega \in \Omega$, $M_t^{n_k}(\omega)$ *converge uniformemente para* $M_t(\omega)$ *em* $[0, \infty]$.

Prova. Temos $\underset{t\to\infty}{lim} \; ||M^n - M||_{H^p} = 0$ e portanto $\underset{t\to\infty}{lim} \; ||(M^n - M)^*||_p = 0$. A convergência em L^p implica a convergência em probabilidade e esta por sua vez implica a existência de uma subsucessão q.c. convergente: $\underset{t}{sup} \, |M_t^{n_k}(\omega) - M_t(\omega)| = 0$ q.c. ■

Este resultado permite-nos concluir que o limite em H^p de uma sucessão de martingalas contínuas é uma martingala contínua e que os saltos do limite são os limites dos saltos da sucessão convergente.

2.7.3 A Estrutura de Martingalas de Quadrado Integrável

Passamos a concentrar a atenção em processos em H^2 para analisar a sua estrutura, nomeadamente no que se refere à sua decomposição numa parte com trajectórias contínuas e noutra com trajectórias descontínuas, bem como à natureza dos saltos que compõem a parte descontínua.

A fim de introduzir esta decomposição, apresentamos os conceitos de ortogonalidade e de subespaço estável.

A um dado conjunto de processos acrescentaremos o subscrito 0 para indicar o subconjunto de processos de entre esses que verificam a condição de serem q.c. nulos no momento inicial.

Definição 2.7.7 *Se* M, $N \in Mui_{loc}$, *dir-se-ão ortogonais* ($M \perp N$) *se o seu produto* $MN = \{M_t N_t\} \in Mui_{loc}$.

Podemos considerar em particular um resultado envolvendo ortogonalidade respeitante a martingalas de quadrado integrável.

Lema 2.7.8 *Sejam* M, $N \in H^2$ *ortogonais. Então, qualquer que seja o tempo de paragem* $\tau \in \Upsilon_0$, *as variáveis aleatórias* M_τ, N_τ *são ortogonais em* L^2 *e* $MN \in H_0^1$. *Reciprocamente, se* $M_0 N_0 = 0$ *q.c. e as variáveis aleatórias* M_τ *e* N_τ *são ortogonais em* L^2 *para todo o* $\tau \in \Upsilon_0$, *então* M *e* N *são ortogonais.*

Prova. 1) Se M, $N \in H^2$, então M_∞^*, $N_\infty^* \in L^2$ e portanto M_∞^*, $N_\infty^* \in L^1$. Por outro lado, $(MN)_\infty^* = \underset{t}{\sup} |M_t N_t| \leq M_\infty^* N_\infty^*$ resultando a desigualdade do facto de, no caso geral, os máximos de M e N não coincidirem no mesmo momento. Portanto, $(MN)^*_\infty \in L^1$ e $MN \in H^1_0$ se M e N são ortogonais. Logo para todo o $\tau \in \Upsilon_o$,

$$E(M_\tau N_\tau) = E(M_0 N_0) = 0$$

Aplica-se o teorema de paragem opcional com os tempos de paragem 0 e τ, seguido do operador esperança.

2) Para todo o $\tau \in \Upsilon_0$, $M_\tau N_\tau \in L^1$ e, portanto, E($|M_\tau N_\tau|$) $< \infty$ e E($M_\tau N_\tau$) $= 0$. MN é um processo adaptado e contínuo à direita uma vez que M e N são martingalas. Logo, estão reunidas as condições para concluirmos que MN é martingala uniformemente integrável.

Também o é localmente. Como $M_0 N_0 = 0$ q.c., por hipótese, podemos concluir que MN$\in Mui_{loc0}$. ■

Definição 2.7.9 *Um subespaço $\mathcal{S} \subset H^2$ diz-se estável se:*

(i) é fechado na topologia de L^2;

(ii) é fechado em relação à paragem, i.e. se $\tau \in \Upsilon$ e $M \in \mathcal{S}$, então $M^\tau \in \mathcal{S}$, sendo M^τ o processo M parado em τ, $M_{t\wedge\tau}$;

(iii) se $M \in \mathcal{S}$ e $A \in F_0$, então $I_A M \in \mathcal{S}$.

Lema 2.7.10 *Seja $\mathcal{S}^\perp$ o conjunto constituído pelos elementos $N \in H^2$ tais que $\forall M \in \mathcal{S}$ $E(M_\infty N_\infty) = 0$. Então, $\mathcal{S}^\perp$ é um subespaço estável de H^2 e M e N são ortogonais.*

Lema 2.7.11 *Se $\mathcal{S} \subset H^2$ é um subespaço estável , então todo o elemento $M \in H^2$ tem decomposição única $M = M^A + M^B$, com $M^A \in \mathcal{S}$ e $M^B \in \mathcal{S}^\perp$.*

A decomposição dos elementos de H^2 que nos irá interessar será numa parte com trajectórias contínuas e noutra composta q.c. de saltos. Passamos a definir os subespaços estáveis que contêm cada uma dessas partes.

Designamos por H^{2c} o subespaço das martingalas de quadrado integrável contínuas, o qual, atendendo ao teorema 2.7.6, é fechado em L^2 e é fechado em relação à paragem. Trata-se portanto de facto de um subespaço estável. Considera-se uma convenção segundo a qual $M_{0-} = 0$ q.c. de que resulta $M_0 = 0$ q.c. e portanto $H^{2c} \subset H^2_0$.

Tomemos o subespaço estável ortogonal a H^{2c}, o qual designaremos por H^{2d}. As martingalas pertencentes a H^{2d} serão designadas por puramente descontínuas. A sua estrutura será analisada de seguida.

Para o efeito, começaremos por analisar o caso mais simples das martingalas de variação integrável. Uma martingala de variação integrável, M, é uma martingala que verifica $E\left[\int_0^\infty |dM_s|\right] < \infty$. Passamos a mostrar que tal martingala se pode escrever como um somatório de saltos compensados através da subtração de uma parte previsível.

Teorema 2.7.12 *Seja M uma martingala de variação integrável. Então,*

$$M_t = M_0 + A_t - \Pi_p^* A_t$$

com $A_0 = 0$ *e para* $t > 0$ $A_t = \sum\limits_{0<s\leq t} \triangle M_s$, *sendo* $\triangle M_s = M_s - M_{s-}$. *A é um processo de variação integrável de projecção dual previsível contínua* $\Pi_p^* A_t$.

$\sum\limits_{0<s\leq t} \triangle M_s$ *é o somatório dos saltos de M.*

Prova. Que A é um processo de variação integrável resulta naturalmente da sua definição e de M ser de variação integrável. Resta analisar a parte residual $B_t = M_t - M_0 - A_t$. B é de variação integrável dado ser uma das parcelas de M, é nulo em 0 dado que na sua definição subtraímos a M o seu valor inicial M_0 e é contínuo dado que subtraimos a M todos os seus saltos incluindo o do momento t em análise, isto é, o processo A.

Sendo contínuo, é Σ_p-mensurável, onde Σ_p é gerada pelos conjuntos evanescentes e por intervalos estocásticos do tipo $[\tau, \infty[$ com τ tempo de paragem previsível.

Podemos concluir que B coincide com a sua projecção dual previsível $\Pi_p^* B$. Vem então:

$$B = \Pi_p^* B = \Pi_p^* (M - M_0 - A) = \Pi_p^* (M - M_0) - \Pi_p^* (A).$$

Como $M - M_0$ é uma martingala, a sua projecção dual previsível é indistinguível do processo nulo e vem $B = -\Pi_p^* A$. Portanto, $M_t = M_0 + A_t - \Pi_p^* A_t$.

Como B é contínuo, $\Pi_p^* A = -B$ também o é. ■

Apresentaremos de seguida alguns resultados respeitantes a este tipo de martingala.

Lema 2.7.13 *Sendo M uma martingala de variação integrável e N uma martingala càdlàg limitada, temos*

$$E\left(M_\infty N_\infty\right)=E\left[\sum_{s\geq 0}\triangle M_s\triangle N_s\right].$$

Lema 2.7.14 *Considerando os processos M e N definidos no lema 2.7.13, vem*

$$L_t=M_tN_t-\sum_{s\leq t}\triangle M_s\triangle N_s\in Mui_0.$$

Lema 2.7.15 *Uma martingala de variação integrável, M, é ortogonal a toda a martingala contínua limitada, N.*

Prova. Como N é contínua, temos $\triangle N_s=0\ \forall s\geq 0$. Logo $L_t=M_tN_t-0=M_tN_t$. Então $MN\in Mui_0\subset Mui_{loc0}$ pelo lema 2.7.14, sendo esta a condição que define a ortogonalidade entre M e N. ■

Este último resultado indícia outro explicitado mais adiante: se uma martingala de quadrado integrável tiver variação integrável será uma martingala em H^{2d}.

Iremos agora analisar a representação dos elementos de H^{2d} em função dos saltos que os constituem. Em vez de considerar o conjunto dos saltos em bloco como se fez no caso das martingalas de variação integrável, vamos considerar cada salto individualmente, agregando-os posteriormente. Representaremos cada salto por um processo A dado por $A_t=\phi 1_{t\geq\tau}$ com $\phi\in L^2\left(\Omega,F_\tau,P\right)$. Assim, para cada estado ω, o processo tem trajectória nula até se concretizar o tempo aleatório, ou seja $\tau\left(\omega\right)$, e será igual a ϕ a partir desse momento. A condição imposta sobre ϕ permitirá obter a condição de integrabilidade do quadrado da martingala resultante da agregação dos vários saltos deste tipo.

Os saltos terão um tratamento diferenciado consoante os tempos de paragem em que ocorram sejam acessíveis ou totalmente inacessíveis. Dado que os tempos de paragem acessíveis se definem a partir da união de gráficos de tempos de paragem previsíveis, a análise daqueles é redutível à análise destes últimos, como se verá. Começamos pelo caso de um salto de tempo de paragem totalmente inacessível. Veremos depois o outro caso e, em corolário, o caso geral.

Definição 2.7.16 $M^d\left(\tau\right)$ *designa o conjunto das martingalas em* H^{2d}*, contínuas fora do gráfico de* τ*.*

$M^d(\tau)$ é portanto um subespaço estável de H^{2d}.

Teorema 2.7.17 *Suponhamos que τ é um tempo de paragem totalmente inacessível e $\phi \in L^2(\Omega, F_\tau, P)$. Seja $A_t = \phi I_{t \geq \tau}$ de variação integrável. Então $B_t = \Pi_p^*(A_t)$ é contínua e $M_t = A_t - B_t$ é uma martingala de quadrado integrável em $M^d(\tau)$.*

Teorema 2.7.18 *Suponhamos que $\tau > 0$ q.c. é um tempo de paragem previsível e $\phi \in L^2(\Omega, F_\tau, P)$ verifica $E(\phi | F_{\tau -}) = 0$ q.c. Então $M_t = A_t = \phi I_{t \geq \tau}$ é uma martingala de quadrado integrável em $M^d(\tau)$.*

Corolário 2.7.19 *Consideremos $\phi \in L^2(\Omega, F_\tau, P)$ e τ um tempo de paragem totalmente inacessível ou q.c. previsível com $E(\phi | F_{\tau -}) = 0$ q.c. Seja $A_t = \phi I_{t \geq \tau}$ e $M_t = A_t - \Pi_p^*(A_t)$. Então qualquer que seja a martingala $N \in H^2$ o processo $L_t = M_t N_t - \Delta M_\tau \Delta N_\tau I_{t \geq \tau}$ pertence a Mui_0.*

Se N for contínua em τ então será ortogonal a M, dado que $\Delta N_\tau = 0$.

Por outro lado, se fizermos $M = N$, vem $M_t^2 - (\Delta M_\tau)^2 I_{t \geq \tau} \in Mui_0$.

Fazendo $t = \infty$ vem $E\left[M_\infty^2 - (\Delta M_\tau)^2\right] = 0$, ou seja $E\left(\Delta M_\tau^2\right) = E\left(M_\infty^2\right)$.

No corolário seguinte, vamos considerar a projecção de uma qualquer martingala de quadrado integrável no conjunto das martingalas puramente descontínuas, contínuas fora do gráfico de um tempo de paragem τ.

Corolário 2.7.20 *Seja τ um tempo de paragem totalmente inacessível ou q.c. previsível com $E(\phi | F_{\tau -}) = 0$ q.c. e seja $N \in H^2$. Então, a projecção de N em $M^d(\tau)$ é a martingala $M_t = A_t - \Pi_p^*(A_t)$ com $A_t = \phi I_{t \geq \tau}$ e $\phi = \Delta N_\tau$.*

Prova. Da definição de M resulta $\Delta M_\tau = \phi$, ou seja $\Delta M_\tau = \Delta N_\tau$ e portanto $\Delta(N_\tau - M_\tau) = 0$. No corolário 2.7.19, vimos que toda a martingala em $M^d(\tau)$ é ortogonal a toda a martingala contínua em τ. Daqui concluimos que $N - M$, sendo contínua em τ, é ortogonal a $M^d(\tau)$. Logo, M_t é a projecção de N_t em $M^d(\tau)$. ■

Como se pode ver, a referida projecção é obtida subtraindo a A, processo representativo do salto ocorrido em τ, a respectiva projecção dual previsível que funciona como o compensador necessário para se obter uma martingala. Daí o processo M se designar por martingala de salto compensado.

No resultado seguinte, vamos apresentar a representação das martingalas de quadrado integrável descontínuas como soma das martingalas para cada um dos saltos compensados que podemos identificar.

Teorema 2.7.21 *Seja $M \in H^{2d}$. Então, M é a soma de uma série de martingalas de saltos compensados. M é ortogonal a toda a martingala que não carregue nenhum salto em comum com M, e em particular a toda a martingala pertencente a H^{2c}.*

Prova. M é adaptado e càdlàg, atendendo ao tipo de processo de que se trata. Então, verifica-se que existe uma sucessão de tempos de paragem τ_n que é axaustiva para os saltos de M, ou seja $\{(t,\omega) : \Delta M_t(\omega) \neq 0\}$ está contido numa união de gráficos da referida sucessão de tempos de paragem, $\underset{n}{\cup} [\tau_n]$.

Pode-se supor que os gráficos $[\tau_n]$ são disjuntos sem perda de generalidade: se o não forem podem ser substituídos por $[\tau_n] \setminus \underset{m<n}{\cup} [\tau_m]$. Cada $[\tau_n]$ pode ser escrito como $\left[\tau_n^i\right] \cup [\tau_n^a]$ com τ_n^i totalmente inacessível e τ_n^a acessível. $[\tau_n^a]$ está por sua vez contido na união numerável de gráficos de tempos de paragem previsíveis, os quais se podem supor disjuntos de forma semelhante ao que se fez atrás.

Podemos então considerar $\{(t,\omega) : \Delta M_t(\omega) \neq 0\}$ contido num conjunto $\underset{n}{\cup} [\sigma_n]$ sendo cada σ_n totalmente inacessível ou previsível, e tendo os σ_n gráficos disjuntos.

Para cada σ_n, podemos supor que representa o tempo aleatório em que se verifica um salto em M. Este salto é representado, como se viu nos últimos resultados, por um processo $A_t^n = \Delta M_{\sigma_n} I_{t \geq \sigma_n}$, sendo ΔM_{σ_n} a amplitude do salto. A A^n associa-se o processo M^n dado por $M_t^n = A_t^n - \Pi_p^*(A_t^n)$, que como se viu atrás é uma martingala em H^{2d}, contínua fora do gráfico de σ_n.

Consideremos a acumulação parcial dada pela sucessão: $B^k = M^1 + ... + M^k$. Resulta que $M - B^k$ é contínuo em $\sigma_1, ..., \sigma_k$ e é portanto ortogonal a $M^1, ..., M^k$ e à sua soma B^k. Vem

$$
\begin{aligned}
E\left(M_\infty^2\right) &= E\left[\left(B_\infty^k\right)^2\right] + E\left[\left(M - B^k\right)_\infty^2\right] = \\
&= \sum_{n=1}^{k} E\left[(M_\infty^n)^2\right] + E\left[\left(M - B^k\right)_\infty^2\right] = \\
&= \sum_{n=1}^{k} E\left[\Delta M_{\sigma_n}^2\right] + E\left[\left(M - B^k\right)_\infty^2\right].
\end{aligned}
$$

As primeiras duas igualdades resultam da ortogonalidade que permite anular a esperança dos produtos e a última resulta do corolário 2.7.19.

A primeira parcela é finita e portanto a sucessão B^k converge em H^2 para uma martingala B. Sendo $M - B^k$ ortogonal a B^k para qualquer k, no limite, $M - B$ é ortogonal a B.

Do teorema 2.7.6 resulta que existe uma subsucessão de B^k cujas trajectórias convergem uniformemente q.c. para B. Portanto, $M - B$ é contínuo dado que B contém todos os saltos de M.

Mas, sendo $M \in H^{2d}$, é ortogonal a toda a martingala contínua, o mesmo sucedendo a $M - B$. $M - B$ sendo ortogonal a si própria é nula, consequentemente. Concluimos que $M = B = \lim_k \sum_{n=1}^{k} M^n$. ■

Note-se que o resultado do teorema 2.7.21 também é válido para o caso em que M é diferente de 0 em $t = 0$, dada a convenção $M_{0-} = 0$ q.c. que implica $\Delta M_0 = M_0$. Nesse caso, podemos fazer $\sigma_0 = 0$ e $\Delta M_{\sigma_0} I_{t \geq \sigma_0} = M_t^0$. O processo B vem dado por $M - M_0$ e na representação de M acrescentamos uma parcela correspondente a σ_0: $M = \lim_k \sum_{n=0}^{k} M^n$.

Corolário 2.7.22 *Seja $M \in H^2$. Então M pode ser representado univocamente segundo uma decomposição dada por $M = M^c + M^d$ em que $M^c \in H^{2c}$ e $M^d \in H^{2d}$.*

Iremos de seguida considerar algumas desigualdades que limitam os saltos de martingalas de quadrado integrável.

Lema 2.7.23 *Seja $M \in H^2$. Então $E\left(\sum_s \Delta M_s^2\right) \leq E\left(M_\infty^2\right)$, verificando-se a igualdade se e só se $M \in H^{2d}$. Além disso, $\sum_{s \leq t} \Delta M_s^2 < \infty$ q.c. $\forall t$.*

Lema 2.7.24

$$\sum_s |\Delta M_s \Delta N_s| \leq \left(\sum_s \Delta M_s^2\right)^{1/2} \left(\sum_s \Delta N_s^2\right)^{1/2}$$

e

$$E\left(\sum_s |\Delta M_s \Delta N_s|\right) \leq \|M\|_{H^2} \|N\|_{H^2}.$$

Lema 2.7.25 *Sejam $M \in H^{2d}$ e $N \in H^2$. Então*

$$a)\ E\left(M_\infty N_\infty\right) = E\left(\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\right);$$

$$b)\ L_t = M_t N_t - \sum_{s \leq t} \Delta M_s \Delta N_s \in H_0^1.$$

Finalmente apresentamos um resultado já referido atrás.

Teorema 2.7.26 *Se uma martingala de quadrado integrável tem variação finita em qualquer compacto, então é puramente descontínua.*

Prova. Se M for de variação integrável, então, pelo lema 2.7.13, sendo N for uma martingala limitada $E(M_\infty N_\infty) = E\left(\sum_s \Delta M_s \Delta N_s\right)$. Ambos os membros são contínuos em N, porque produto interno. Logo a igualdade é válida para qualquer $N \in H^2$. Fazendo $N = M$, vem $E\left(M_\infty^2\right) = E\left(\sum_s \Delta M_s^2\right)$. Por continuidade, a conclusão é extensível ao caso em que M é de variação finita, não necessariamente integrável. Pelo lema 2.7.23, a igualdade verifica-se se e só se $M \in H^{2d}$. ■

2.7.4 Processos de Variação Quadrática

Vamos nesta subsecção introduzir o conceito de variação quadrática o qual nos permite analisar o comportamento previsível para os quadrados dos valores de uma martingala de quadrado integrável, M.

Assim, o processo dado por $\left\{M_t^2\right\}$ é uma submartingala o que resulta da desigualdade de Jensen dado termos uma função convexa aplicada a uma martingala, sendo por outro lado todos os valores de M_t^2 integráveis.

A versão contínua à direita de $X_t = E\left(M_\infty^2 | F_t\right) - M_t^2$ é uma supermartingala de classe D.

De facto, trata-se da subtração de uma submartingala a uma martingala, esta última dada pela esperança condicional de uma variável.

Por outro lado, ambos os termos são integráveis e portanto a submartingala é uniformemente integrável. Dado tratar-se o segundo termo de uma submartingala, é automaticamente de classe D: $M_\tau^2 \leq E\left(M_\infty^2 | F_\tau\right) < \infty$ q.c. porque $E\left(M_\infty^2\right) < \infty$.

Temos $X_t \geq 0$ q.c. porque sendo M^2 uma submartingala, verifica-se $M_t^2 \leq E\left(M_\infty^2 | F_t\right)$. Fazendo $t = \infty$, vem $M_\infty^2 = E\left(M_\infty^2 | F_\infty\right)$ e portanto $X_\infty = 0$. Logo, X é um potencial.

Definição 2.7.27 *A variação quadrática previsível de M, $\langle M, M \rangle$, é o processo crescente previsível obtido univocamente na decomposição de Doob-Meyer do potencial X dado por $X_t = E\left(M_\infty^2 | F_t\right) - M_t^2$.*

A variação quadrática previsível reflecte o comportamento esperado do potencial e consequentemente a tendência crescente de M^2. Ou seja, a outra parte da decomposição de Doob-Meyer,

$$X_t + \langle M, M \rangle_t = E\left(M_\infty^2 | F_t\right) - M_t^2 + \langle M, M \rangle_t$$

é uma martingala e dado $E\left(M_\infty^2 | F_t\right)$ ser uma martingala, $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ sê-lo-á também.

Definição 2.7.28 *A variação quadrática opcional de M, $[M, M]$, é o processo crescente dado por $\langle M^c, M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2$, em que M^c é a parte contínua da martingala M, tal como vem definida no corolário 2.7.22.*

$\langle M^c, M^c \rangle$ é um processo contínuo pois é o processo crescente que gera a supermartingala contínua de classe D correspondente a M^c.

A distinção entre a variação opcional e a variação previsível reside na parte descontínua, em que se consideram, na primeira, as variações instantâneas efectivas de M^2 em vez dos seus valores previsíveis.

De notar que, tendo em conta o lema 2.7.23, este processo é integrável dado que $\langle M, M \rangle$ é integrável. Consequentemente, $[M, M]_t$ é finito q.c.

A variação quadrática opcional reflecte também a tendência crescente de M^2: verifiquemos que $M^2 - [M, M]$ é uma martingala. Com $M_t = M_t^c + M_t^d$, vem

$$M_t^2 = M_t^{c2} + 2M_t^c M_t^d + M_t^{d2}.$$

Daqui resulta

$$M_t^2 - [M, M]_t = \left[M_t^{c2} - \langle M^c, M^c \rangle_t\right] + 2M_t^c M_t^d + \left[M_t^{d2} - \sum_{s \leq t} \Delta M_s^2\right].$$

Que a primeira parcela é uma martingala é imediato dada a caracterização feita acima para $\langle ., . \rangle$. A segunda parcela é uma martingala porque M^c e M^d são ortogonais. De lema 2.7.25b) resulta que a terceira parcela é uma martingala.

Lema 2.7.29 *Seja $M \in H^2$. $\langle M, M\rangle$ é a projecção dual previsível de $[M, M]$.*

Prova. Como $M^2 - \langle M, M\rangle$ e $M^2 - [M, M]$ são martingalas, a sua diferença $[M, M] - \langle M, M\rangle$ também o é. Podemos inferir daqui que $[M, M]$ e $\langle M, M\rangle$ são associados i.e. têm a mesma projecção dual previsível. Como $\langle M, M\rangle$ é previsível, coincide com a própria projecção dual previsível. ∎

A partir das variações definidas, vamos considerar processos com propriedades análogas para o caso de produtos de dois processos no lugar do quadrado.

Definição 2.7.30 *Sejam $M, N \in H^2$. O processo $\langle M, N\rangle$ vem dado por*

$$\langle M, N\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle M + N, M + N\rangle - \langle M, M\rangle - \langle N, N\rangle\right].$$

$\langle M, N\rangle$ é o único processo previsível de variação integrável tal que $MN - \langle M, N\rangle \in H_0^1$. De notar que MN se pode escrever como $MN = \frac{1}{2}\left[(M + N)^2 - M^2 - N^2\right]$, correspondendo a cada termo nesta expressão a respectiva variação quadrática previsível na expressão de $\langle M, N\rangle$.

Definição 2.7.31 *Sejam $M, N \in H^2$. O processo $[M, N]$ vem dado por*

$$[M, N] = \frac{1}{2}\left[[M + N, M + N] - [M, M] - [N, N]\right].$$

Este processo é integrável e $MN - [M, N] \in H_0^1$, dado ser obtido a partir de variações quadráticas opcionais que correspondem aos termos da expressão apresentada acima para o processo MN.

Conjugando as definições 2.7.30 e 2.7.31 verificamos que se pode escrever

$$[M, N]_t = \langle M^c, N^c\rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s,$$

expressão semelhante à da definição da variação quadrática opcional.

Lema 2.7.32 *M e N são ortogonais se e só se $\langle M, N\rangle$ for o processo nulo.*

Prova. Se M e N são ortogonais, então MN é martingala integrável nula em zero (lema 2.7.8) o que implica que $\langle M, N\rangle$ seja também martingala nula em zero. O facto de ser martingala e previsível simultaneamente obriga que $\langle M, N \rangle$ seja constante e portanto igual ao seu valor inicial, 0.

Se $\langle M, N \rangle$ for 0, então, $MN - \langle M, N \rangle = MN$ é uma martingala e martingala local portanto. Logo M e N são ortogonais. ■

Este resultado mostra ser $\langle M, N \rangle$ um indicador da variação conjunta dos dois processos, ou seja da existência ou não de ortogonalidade entre eles.

Consideremos algumas propriedades destas variações, relacionadas com tempos de paragem.

Lema 2.7.33

$$\forall \tau \in \Upsilon_o \quad E\left[\langle M, M \rangle_\infty - \langle M, M \rangle_\tau | F_\tau\right] = E\left(M_\infty^2 | F_\tau\right) - M_\tau^2.$$

Lema 2.7.34 *Sejam $M, N \in H^2$ e $\tau \in \Upsilon_o$. Então $\langle M, N \rangle^\tau = \langle M, N^\tau \rangle$.*

Corolário 2.7.35 *No contexto do lema 2.7.34, $[M, N]^\tau = [M, N^\tau]$.*

Apresentamos de seguida um conjunto de desigualdades que permitem estabelecer um limite para o integral, relativamente à variação cruzada, a partir da hipótese de o integral relativamente à variação quadrática ser limitado.

Teorema 2.7.36 *Sejam $M, N \in H^2$ e H, K processos mensuráveis limitados. Então verifica-se q.c.*

$$a) \quad \int_0^\infty |H_s| |K_s| |d \langle M, N \rangle_s| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d \langle M, M \rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d \langle N, N \rangle_s\right)^{1/2}.$$

$$b) \quad \int_0^\infty |H_s| |K_s| |d [M, N]_s| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d [M, M]_s\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d [N, N]_s\right)^{1/2},$$

onde os primeiros membros são integrais de Stieltjes.

Prova. a) Procede-se por quatro etapas para este caso.

(i) Para todos os $s, t \in [0, \infty]$, $s < t$, define-se $\Delta_s^t X = X_t - X_s$ para qualquer processo X. Em primeiro lugar, demostra-se que, excepto num conjunto de medida nula,

$$\left|\Delta_s^t \langle M, N \rangle (\omega)\right| \leq \left(\Delta_s^t \langle M, M \rangle (\omega)\right)^{1/2} \left(\Delta_s^t \langle N, N \rangle (\omega)\right)^{1/2}.$$

(ii) De seguida, vamos considerar dois processos H e K construidos da seguinte forma. Tomamos uma partição finita de $[0,\infty]$ do tipo $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} = \infty$. Para cada um destes valores t_i definimos duas variáveis aleatórias limitadas H_{t_i} e K_{t_i}. Os processos referidos definem-se por:

$$\begin{aligned} H_t &= H_0 1_{\{t=0\}}(t) + \sum_i H_{t_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t); \\ K_t &= K_0 1_{\{t=0\}}(t) + \sum_i K_{t_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t). \end{aligned}$$

Trata-se de processos em escada contínuos à esquerda.

Recorrendo à desigualdade demonstrada no ponto anterior, prova-se a seguinte desigualdade:

$$\left| \int_0^\infty H_s K_s d\langle M,N\rangle_s \right| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M,M\rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle N,N\rangle_s \right)^{1/2}.$$

(iii) A mesma desigualdade pode ser demonstrada q.c. para a classe mais geral dos processos limitados fazendo a extensão pelo teorema de classe monótona. Tal é válido dado que os processos referidos no ponto anterior formam uma álgebra que gera a σ-álgebra associada a $[0,\infty] \times \Omega$.

(iv) Para obter a desigualdade em a), bastaria considerar a desigualdade provada em (ii) e (iii) e passar o módulo para o interior do integral. Para tal aplica-se tal desigualdade a $|H|$ e $|K|\,J$ em que J é o processo dado por $|d\langle M,N\rangle_s| = J_s d\langle M,N\rangle_s$ e portanto um processo mensurável tomando os valores -1 e 1. Vem portanto:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,J_s d\langle M,N\rangle_s \right| &= \left| \int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M,N\rangle_s| \right| = \int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M,N\rangle_s| \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M,M\rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 J_s^2 d\langle N,N\rangle_s \right)^{1/2} = \\ &= \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M,M\rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle N,N\rangle_s \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

b) A prova de b) é semelhante à efectuada para a). ■

Corolário 2.7.37 *Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 < p < \infty$, então*

a) $E\left[\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d\langle M,N\rangle_s| \right] \leq \left\| \left(\int_0^\infty H_s^2 d\langle M,M\rangle_s \right)^{1/2} \right\|_p \left\| \left(\int_0^\infty K_s^2 d\langle N,N\rangle_s \right)^{1/2} \right\|_q;$

b) $E\left[\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d\,[M,N]_s|\right] \leq \left\| \left(\int_0^\infty H_s^2 d\,[M,M]_s\right)^{1/2} \right\|_p \left\| \left(\int_0^\infty K_s^2 d\,[N,N]_s\right)^{1/2} \right\|_q .$

Prova. Aplica-se a desigualdade de Hölder ao segundo membro da expressão do teorema anterior. ■

2.7.5 Integração estocástica

Vamos introduzir o conceito de integral estocástico no caso das martingalas de quadrado integrável, o qual constituirá uma etapa prévia para o estudo do integral estocástico para classes mais gerais de processos estocásticos como sejam as martingalas locais e as semi-martingalas.

No estudo presente, consideraremos três etapas consoante o tipo de integrando em causa. Começamos por tomar para integrandos processos previsíveis simples. A seguir, consideraremos processos previsíveis obedecendo a uma condição de existência de uma semi-norma. Finalmente, no caso mais geral a hipótese de previsibilidade é abandonada.

(A) Integrandos previsíveis simples

Um processo previsível simples é definido a partir do conceito de função simples. Uma função, f, simples contínua à esquerda em $[0,\infty]$ é uma função constante nos intervalos constituintes de uma partição de $[0,\infty]$. Ou seja, $f(t) = f_i$ para $t \in \left]t_i, t_{i+1}\right]$ com $0 < t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = \infty$. Se tivermos uma função g càdlàg, obtemos o integral de f relativamente a g da seguinte forma:

$$\int_0^t f dg = f(0)\, g(0) + \sum_{i=0}^n f_i \left(g\left(t_{i+1} \wedge t\right) - g\left(t_i \wedge t\right)\right).$$

$\int_0^t f dg$ é càdlàg e o seu salto em t vem dado por $f(t)\,\Delta g(t)$.

Definição 2.7.38 *Um processo previsível simples limitado é um processo para o qual existe uma partição $\{t_i\}$ como a dada acima e um conjunto de variáveis aleatórias $\{H_i\}$ tais que $H_0 = H_0$ e $H_t = H_i$ para $t \in \left]t_i, t_{i+1}\right]$, sendo H_i limitada e mensurável em F_{t_i}. O conjunto de processos deste tipo será designado por Ps.*

Portanto, o processo definido tem por trajectórias funções simples. Considerando

$M \in H^2$, M será càdlàg e o integral estocástico $\left[\int^S\right]_0^t HdM$ dado por

$$\int_0^t H_s dM_s = H_0 M_0 + \sum_{i=0}^{n} H_i \left(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t}\right)$$

para $H \in Ps$. Portanto, para cada trajectória, o integral estocástico tomará a forma do integral definido acima para as funções.

O seguinte resultado permite definir uma norma para os integrandos considerados.

Teorema 2.7.39 *a)* $\left[\int^S\right] HdM \in H^2$;
b) $E\left\{\left[\left[\int^S\right]_0^\infty HdM\right]^2\right\} = E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right] = E\left[\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s\right].$

A norma referida é dada por $\|H\|_{Ps} = \left\{E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$.

(B) Integrandos previsíveis

Alargamos o caso anterior ao dos processos previsíveis H que verificam a condição

$$\|H\|_{\langle M\rangle} = \left\{E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\right]\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Designamos o conjunto destes processos por $Pp^2_{\langle M\rangle}$.

Teorema 2.7.40 *A função* $H \to \left[\int^S\right] HdM$ *de* Ps *em* H^2 *admite um prolongamento único como isometria linear de* $Pp^2_{\langle M\rangle}$ *em* H^2.

Prova. Ps é denso em $Pp^2_{\langle M\rangle}$, dado que este é o espaço L^2 da $\sigma-$álgebra previsível. $H \to \left[\int^S\right] HdM$ é uma isometria de Ps sobre H^2 se Ps tiver norma, pelo teorema 2.7.39. Daí resulta a extensão única pretendida. ■

Continuamos a designar por $\left[\int^S\right] HdM$ a imagem de H pela função definida. O resultado seguinte identifica os saltos do integral estocástico a partir dos saltos do integrador.

Lema 2.7.41 *Seja* $H \in Pp^2_{\langle M\rangle}$. *Os processos* $\Delta\left[\int^S\right]_0^t HdM$ *e* $H_t \Delta M_t$ *são indistinguíveis.*

Vamos caracterizar o integral estocástico enquanto processo em H^2. Como resultado prévio temos:

Lema 2.7.42 $\forall N \in H^2$ $E\left[\int_0^\infty |H_s|\, |d\langle M, N\rangle|_s\right] < \infty$ *e* $E\left[\int_0^\infty |H_s|\, |d[M,N]|_s\right] < \infty$.

A caracterização referida, que consta da alínea a) do teorema seguinte, é obtida a partir de resultado análogo em Ps e atendendo a que Ps é denso em $Pp^2_{\langle M \rangle}$.

Os resultados seguintes nesta secção obtêm-se recorrendo a esta caracterização e tendo em conta as propriedades das variações quadráticas.

Teorema 2.7.43 *O integral estocástico* $I = \left[\int^S\right] HdM$ *é o único processo em* H^2 *tal que* $\forall N \in H^2$*:*

a) $E\left[I_\infty N_\infty\right] = E\left[\int_0^\infty H_s d\left\langle M, N\right\rangle_s\right] = E\left[\int_0^\infty H_s d\left[M, N\right]_s\right]$,

b) $\langle I, N\rangle = \int Hd\left\langle M, N\right\rangle$ *e* $[I, N] = \int Hd\left[M, N\right]$,

sendo os integrais $\int Hd\left\langle M, N\right\rangle$ *e* $\int Hd\left[M, N\right]$ *integrais de Stieltjes.*

Lema 2.7.44 *Se* $H \in Pp^2_{\langle M \rangle}$ *com decomposição na parte contínua* H^c *e na parte descontínua* H^d*, as partes contínua e descontínua de* $\left[\int^S\right] HdM$ *são respectivamente* $\left[\int^S\right] HdM^c$ *e* $\left[\int^S\right] HdM^d$*.*

A caracterização do integral estocástico resulta de a) pois aí ele surge como o elemento único do espaço de Hilbert H^2 identificado numa representação de Riesz dada por aquela igualdade.

A partir do resultado obtido, encontramos a seguinte propriedade.

Corolário 2.7.45 *Sejam* $H \in Pp^2_{\langle M \rangle}$ *e* K *um processo previsível limitado. Então*

$$\left[\int^S\right] KHdM = \left[\int^S\right] Kd\left\{\left[\int^S\right] HdM\right\}.$$

Verifiquemos enfim que o integral estocástico é indistinguível do de Stieltjes, em dadas condições.

Teorema 2.7.46 *Seja* $M \in H^2$*, de variação integrável,* $H \in Pp^2_{\langle M \rangle}$ *tal que* $E\left[\int_0^\infty |H_s|\,|dM_s|\right] < \infty$*. Então, o integral estocástico* $\left[\int^S\right] HdM$ *é indistinguível do de Stieltjes* $\int HdM$*.*

(C) Integrandos Opcionais

Fazemos uma nova generalização, deixando de lado a hipótese de previsibilidade do integrando. Assim, definimos a seguinte condição de integrabilidade para um processo opcional H:

$$\|H\|^2_{[M]} = E\left[\int_0^\infty H_s^2 d\left[M, M\right]_s\right] < \infty.$$

Designamos o conjunto de tais processos por $Po^2_{[M]}$.

$Pp^2_{\langle M\rangle}$ é o conjunto de processos previsíveis em $Po^2_{[M]}$. De facto, no teorema 2.7.43 podemos fazer $N = \left[\int^S\right] HdM$ para obter

$$\begin{aligned} E\left[\int H_s d\langle M,N\rangle_s\right] &= E\left[\int H_s d\left\{\left[\int^S\right] H_s d\langle M,M\rangle_s\right\}\right] = E\left[\int H_s H_s d\langle M,M\rangle_s\right] = \\ &= E\left[\int H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right], \end{aligned}$$

correspondendo esta expressão a

$$E\left[\int H_s d\left[M,N\right]_s\right] = E\left[\int H_s^2 d\langle M,M\rangle_s\right].$$

O seguinte resultado permite definir o integral estocástico $\left[\int^S\right] HdM$ para esta classe de integrandos de forma análoga àquela a que se recorreu no teorema 2.7.43 para o caso anterior.

Teorema 2.7.47 *Seja $H \in Po^2_{[M]}$. Então, $\left[\int^S\right] HdM$ é o único elemento $I \in H^2$ tal que*

$$\forall N \in H^2 \quad E\left[I_\infty N_\infty\right] = E\left[\int_0^\infty H_s d\left[M,N\right]_s\right].$$

Prova. Do teorema 2.7.36 conjugado com a hipótese envolvendo H, concluimos que $E\left[\int_0^\infty |H_s|\left|d\left[M,N\right]_s\right|\right] < \infty$ e portanto a aplicação $N \to E\left[\int_0^\infty H_s d\left[M,N\right]_s\right]$ é uma forma linear contínua no espaço de Hilbert H^2. O processo I será então o elemento de H^2 que lhe está associado pela representação de Riesz. ■

Se $H \in Pp^2_{\langle M\rangle}$, teremos o integral definido para integrandos previsíveis.

Se considerarmos N parado em qualquer tempo de paragem $\tau \in \Upsilon_o$ temos

$$E\left[I_\tau N_\tau - \int_0^\tau H_s d\left[M,N\right]_s\right] = 0$$

e portanto obtemos:

Lema 2.7.48 $\forall N \in H^2$ $I_t N_t - \int_0^t H_s d\left[M,N\right]_s$ *é uma martingala limitada por*

$$I^*_\infty N^*_\infty + \int_0^\infty |H_s|\left|d\left[M,N\right]_s\right|.$$

Consideremos a decomposição de $M \in H^2$: $M = M_0 + M^c + M^d$ sendo M^c a parte contínua e M^d a parte descontínua (corolário 2.7.22). A parte descontínua pode ser escrita como $M^d = \sum_n M^{(n)}$ sendo $\left\{M^{(n)}\right\}$ a sucessão de martingalas compensadas dos saltos do processo. Os momentos de ocorrência dos saltos são representados pela sucessão $\{\tau^n\}$ de tempos de paragem de gráficos disjuntos, previsíveis ou totalmente inacessíveis (teorema 2.7.21).

Com base nesta decomposição, encontramos a decomposição correspondente para o integral estocástico $\left[\int^S\right] HdM$.

Teorema 2.7.49 *Seja $M \in H^2$ e $H \in Po^2_{[M]}$. Então $\left[\int^S\right] HdM$ tem a seguinte decomposição ortogonal:*

$$\left[\int^S\right] HdM = H_0 M_0 + \left[\int^S\right] HdM^c + \sum_n \left[\int^S\right] HdM^n.$$

Teorema 2.7.50 *Sendo $I = \left[\int^S\right] HdM$, vem $E\left(I^2_\infty\right) \leq E\left[\int H^2_s d\left[M,M\right]_s\right]$.*

A igualdade verifica-se se e só se para qualquer tempo de paragem previsível τ, $E\left[H_\tau \Delta M_\tau | F_{\tau-}\right] = 0$.

Corolário 2.7.51 *Sendo $I = \left[\int^S\right] HdM$, a condição $E\left(H_\tau \Delta M_\tau | F_{\tau-}\right) = 0$ para todo o tempo de paragem previsível $\tau > 0$ é equivalente a $[I,N] = \int Hd\left[M,N\right]$ $\forall N \in H^2$.*

No caso das filtrações quase contínuas à esquerda, tem-se, para $M \in H^2$ e $\tau > 0$ tempo de paragem previsível,

$$M_{\tau-} = E\left(M_\tau | F_{\tau-}\right) = E\left(M_\tau | F_\tau\right) = M_\tau$$

e portanto $\Delta M_\tau = 0$, verificando-se a igualdade $E\left(H_\tau \Delta M_\tau | F_{\tau-}\right) = 0$ $\forall \tau$.

A primeira igualdade resulta de se poder escrever $F_{\tau-} = \bigvee_n F_{\tau_n}$ sendo $\{\tau_n\}$ uma sucessão crescente de tempos de paragem com $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ e $\tau_n < \tau$ em $\{0 < \tau < \infty\}$ e de para uma martingala uniformemente integrável, X, se registar $\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty$ q.c. e em L^1 e $X_n = E\left(X_\infty | F_n\right)$ q.c. para todo o n.

2.7.6 Conclusão

Considerámos o conceito de martingala de quadrado integrável, analisando a sua decomposição na parte contínua e na parte descontínua, as suas variações quadráticas e introduzindo o conceito de integral estocástico relativamente a este tipo de processo estocástico. A martingala de quadrado integrável serve de ponto de partida para outro tipo de processos mais geral, cujo comportamento local a tem como referência. É o que acontece com a martingala local. Esta generalização adquire particular significado quando consideramos os processos mais gerais que podemos tomar para integradores na definição dos integrais estocásticos: as semimartingalas.

2.8 Martingalas Locais, Semimartingalas e Integração Estocástica

2.8.1 Introdução

Nesta secção, abordaremos as classes mais gerais para as quais se definem os integrais estocásticos e a forma como isso é feito a partir do caso mais restrito das martingalas de quadrado integrável, abordadas na secção anterior. Começaremos pelas martingalas locais, em que consideraremos a sua relação com as martingalas estabelecida por um procedimento de redução por tempos de paragem. A partir daí, apresentamos os resultados a elas referentes, generalizando os obtidos para a classe mais restrita das martingalas de quadrado integrável. Esses resultados respeitam nomeadamente à sua estrutura e à integração estocástica relativamente a estes processos. Depois, obteremos os processos mais gerais em relação aos quais é possível integrar: as semimartingalas. Estas obtêm-se adicionando à componente de martingala local um processo de variação finita para o qual é fácil definir o correspondente integral estocástico.

2.8.2 Martingalas Locais

Vejamos como definir os processos de variação quadrática para o caso de uma martingala local que é localmente de quadrado integrável, $M \in H^2_{loc}$. Ou seja, existe uma sucessão de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ tais que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ e $M_t(n) = M_t^{\tau_n} \in H^2$. Verifica-se então a seguinte decomposição: $M(n) = M^c(n) + M^d(n)$ (corolário 2.7.22). É imediato verificar que:

Lema 2.8.1 *Se $\tau_n < \tau_m$ e $(t, \omega) \in [0, \tau_n]$:*

$$1) \ M^c(n) = M^c(m) \,; M^d(n) = M^d(m) \,;$$

$$2) \ \langle M(n), M(n) \rangle_t = \langle M(m), M(m) \rangle_t \,.$$

Podemos então apresentar as seguintes definições.

Definição 2.8.2 *A variação quadrática previsível de $M \in H^2_{loc}$ é o único processo $\langle M, M \rangle$ crescente e localmente integrável dado por*

$$\langle M, M \rangle_t^{\tau_n} = \langle M(n), M(n) \rangle_t \,.$$

Definição 2.8.3 *A variação quadrática opcional de $M \in H^2_{loc}$ é o único processo $[M, M]$ crescente e localmente integrável dado por*

$$[M, M]_t^{\tau_n} = [M(n), M(n)]_t = \langle M^c(n), M^c(n) \rangle_t + \sum_{s \leq t \wedge \tau_n} \Delta M(n)^2 \,.$$

Uma classe geral de martingalas de quadrado localmente integrável é a seguinte.

Teorema 2.8.4 *Se M for uma martingala local contínua, então $M \in H^2_{loc}$.*

Prova. Seja $\tau_n = \inf\{t : |M_t| \geq n\}$. Então, $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = \infty$ q.c. e $M^{\tau_n} \in H^2$ dado que $|M_t^{\tau_n}| = |M_{t \wedge \tau_n}| \leq n$. ■

Quando M não é contínua mas apenas càdlàg, M é limitado por n em $[0, \tau_n[$, mas o salto em τ_n pode ser ilimitado, logo não se pode aplicar aquele resultado a esta classe.

Passamos a considerar a forma como podemos definir o integral estocástico relativamente às martingalas locais.

Definição 2.8.5 *Sendo M um processo adaptado com $M_0 = 0$ q.c., diz-se que um tempo de paragem τ reduz M se M^τ for uma martingala uniformemente integrável.*

Pelo lema 2.7.4, pode-se concluir que M^τ é de classe D.

Lema 2.8.6 *$M \in M_{loc}$ se existir uma sucessão crescente $\{\tau_n\}$ de tempos de paragem tais que $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = \infty$ e todo o τ_n reduz M.*

Lema 2.8.7 *Se o tempo de paragem τ reduz M e σ é um tempo de paragem tal que $\sigma \leq \tau$, então σ reduz M.*

Prova. Seja $s \leq t$.

$E\left(M_t^\sigma \left| F_s\right.\right) = E\left(M_{t\wedge\sigma} \left| F_s\right.\right) = E\left(M_{t\wedge\sigma} \left| F_{s\wedge\sigma}\right.\right) = E\left(M_{t\wedge\sigma}^\tau \left| F_{s\wedge\sigma}\right.\right) = M_{s\wedge\sigma}^\tau = M_{s\wedge\sigma} = M_s^\sigma$,

em que a quarta igualdade resulta do teorema de paragem opcional aplicada à martingala M^τ. ■

Lema 2.8.8 *A soma de duas martingalas locais é uma martingala local.*

Lema 2.8.9 *Se $M \in M_{loc0}$ e σ e τ são tempos de paragem que reduzem M, então $\sigma \vee \tau$ também reduz M.*

Lema 2.8.10 *Seja M um processo estocástico para o qual existe uma sucessão crescente $\{\tau_n\}$ de tempos de paragem tais que M^{τ_n} é uma martingala local. Então M é uma martingala local.*

Prova. Consideremos para simplificar $M_0 = 0$. Para cada n, existe uma sucessão crescente $\rho_{n,m}$ de tempos de paragem que reduzem M^{τ_n} com $\rho_{n,m} \longrightarrow \infty$. Façamos $\sigma_{n,m} = \rho_{n,m} \wedge \tau_n$, vindo portanto $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} \sigma_{n,m} = \tau_n$. Seja $\{\sigma_k\}$ uma sucessão dada por $\sigma_1 = \sigma_{n_1,m_1}, ..., \sigma_k = \sigma_{n_k,m_k}$ e $\gamma_k = \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee ... \vee \sigma_k$, vindo $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \gamma_k = \infty$. Vamos provar que esta sucessão $\{\gamma_k\}$ reduz M. Seja $n^* = n_1 \vee ... \vee n_k$. Então σ_{n_i,m_i} reduz $M^{\tau_{n_i}}$. Ora, como $M^{\tau_{n_i}}$ e $M^{\tau_{n*}}$ são o mesmo processo até ao tempo de paragem σ_{n_i,m_i}, σ_{n_i,m_i} reduz $M^{\tau_{n*}}$. Atendendo ao lema 2.8.9, $\{\gamma_k\}$ reduz $M^{\tau_{n*}}$. Como M e $M^{\tau_{n*}}$ são o mesmo processo até ao tempo de paragem γ_k, γ_k reduz M. ■

Consideramos agora uma definição mais forte do que a de redução.

Definição 2.8.11 *Seja $M \in M_{loc0}$. Um tempo de paragem τ reduz fortemente M se τ reduz M e a martingala $E\left(|M_\tau| \left| F_t\right.\right)$ é limitada em $[0, \tau[$.*

Lema 2.8.12 *Sejam σ e τ tempos de paragem tais que $\sigma \leq \tau$ e τ reduz fortemente $M \in M_{loc0}$. Então, σ reduz fortemente M.*

Lema 2.8.13 *Se σ e τ reduzem fortemente $M \in M_{loc0}$, então $\sigma \vee \tau$ reduz fortemente M.*

Lema 2.8.14 *Seja $M \in M_{loc0}$. Então, existe uma sucessão crescente $\{\tau_n\}$ de tempos de paragem tais que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ e todo o τ_n reduz fortemente M.*

O conceito de redução forte permite simplificar a análise das martingalas locais para a situar ao nível da análise de martingalas de quadrado integrável ou de variação integrável, as quais foram já abordadas na secção anterior.

Teorema 2.8.15 *Seja $M \in M_{loc}$. Então, existe uma sucessão crescente de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ tais que $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ e a martingala $M^n = M^{\tau_n}$ se pode escrever, não univocamente, como $M^n = M_0 + U^n + V^n$, em que U^n e V^n são parados em τ_n, $U^n \in H_0^2$ e V^n é uma martingala de variação integrável nula em t=0.*

Para provar este resultado, basta considerar o caso em que o valor inicial é nulo, ou seja $M \in M_{loc0}$. Teria então que se provar que, para cada τ reduzindo fortemente M, se verifica a decomposição do tipo da considerada no enunciado do teorema, ou seja, $M^\tau = U + V$. Definindo $X_t = M_t I_{\{t<\tau\}}$ e $Y_t = M_\tau I_{\{t\geq\tau\}}$, obtemos $V = Y - \Pi_p^* Y$ e $U = X + \Pi_p^* Y$.

Consideramos de seguida uma decomposição para as martingalas locais à semelhança da efectuada para as martingalas de quadrado integrável.

Teorema 2.8.16 *Sendo M uma martingala local ($M \in M_{loc0}$), podemos escrevê-la de forma única como $M = M^c + M^d$ com $M^c, M^d \in M_{loc0}$, sendo M^c contínua e M^d puramente descontínua e sendo a decomposição ortogonal.*

- **Prova.** 1) Unicidade: Consideremos duas decomposições diferentes:

$$M = M^{c1} + M^{d1} = M^{c2} + M^{d2}.$$

Verifica-se que $M^{d1} - M^{d2} = M^{c2} - M^{c1}$. Ora, este processo é uma martingala local pois é a diferença entre duas martingalas locais; é contínuo pois M^{c1} e M^{c2} são contínuas e é ortogonal a todas as martingalas locais contínuas pois M^{d1} e M^{d2} também o são. Logo é ortogonal a si própria. Do próprio conceito de ortogonalidade resulta que

$$\left(M^{d1} - M^{d2}\right)\left(M^{d1} - M^{d2}\right) = \left(M^{d1} - M^{d2}\right)^2 \in M_{loc0}.$$

Sendo $\left(M^{d1} - M^{d2}\right)^2$ não negativo, resulta que é nulo e portanto $M^{d1} = M^{d2}$.

2) Existência: Dada a unicidade, pode-se fazer a colagem de martingalas locais definidas numa sucessão crescente de intervalos estocásticos. Basta assim considerar a existência da decomposição até um tempo de paragem τ que reduza fortemente M. Na sequência do teorema 2.8.15 pode considerar-se uma decomposição $M^\tau = U + V = U^c + U^d + V$ com $U \in H_0^2$, $U^c \in H_0^{2c}, U^d \in H_0^{2d}$ e V uma martingala de variação integrável. Podemos fazer $M^c = U^c$ e $M^d = U^d + V$, faltando demonstrar que esta última é ortogonal a toda a martingala local contínua, N. Como na prova do teorema 2.8.4, podemos supor N limitada, ou pelo menos N parada no tempo de paragem $\sigma_n = \inf\{t : |N_t| \geq n\}$. Nessa hipótese, $N \in H_0^{2c}$ e portanto é ortogonal a $U^d \in H_0^{2d}$. É também ortogonal a V, pelo lema 2.7.15. ■

Passamos agora à generalização da definição de variação quadrática às martingalas locais. Para o efeito consideramos o seguinte resultado prévio.

Lema 2.8.17 *Seja $M \in M_{loc0}$. Então, para todo o t finito, a soma $\sum_{s\leq t} \Delta M_s^2(\omega)$ é finita para quase todo o ω.*

Seja $M \in M_{loc0}$, com $M = M^c + M^d$.

Definição 2.8.18 *A variação quadrática opcional de M é o processo crescente dado por*

$$[M, M]_t = \langle M^c, M^c \rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s^2.$$

Pelo teorema 2.8.4, a primeira parcela é finita. Pelo lema 2.8.17, também a segunda o é.

Definição 2.8.19 *Sejam $M, N \in M_{loc0}$. Chama-se covariação quadrática opcional entre M e N a:*

$$[M, N]_t = \frac{1}{2}\left\{[M+N, M+N]_t - [M, M]_t - [N, N]_t\right\} = \langle M^c, N^c \rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta M_s \Delta N_s.$$

Avançamos de seguida com a caracterização do integral estocástico relativamente a martingalas locais. Para o efeito apresentamos a definição de processo localmente limitado, a qual constitui a classe relevante de integrandos neste caso.

Definição 2.8.20 *Um processo opcional $\{H_t\}$ é localmente limitado se H_0 é finito q.c. e existir uma sucessão crescente de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ e de constantes k_n tais que $\underset{n\to\infty}{lim} \tau_n = \infty$ e $|H_t| I_{\{0<t\leq\tau_n\}} \leq k_n$ q.c.*

Teorema 2.8.21 *Seja $M \in M_{loc}$ e H um processo localmente limitado e previsível. Então, existe uma única martingala local que identificamos com o integral estocástico $\left[\int^S\right] HdM$ tal que, qualquer que seja a martingala limitada N, vem*

$$\left[\left[\int^S\right] HdM, N\right] = \int Hd\left[M,N\right].$$

Prova. (i) Seja $M_0 = 0$. Podemos fazer $H_0 = 0$. Pelo lema 2.8.14 e pela definição 2.8.20, existe uma sucessão crescente de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ tais que τ_n reduz fortemente M e H^{τ_n} é um processo limitado. Pelo teorema 2.8.15, escrevemos $M^{\tau_n} = M^n = U^n + V^n$. Atendendo ao teorema 2.7.40, o integral estocástico $\left[\int^S\right] HdM^n$ pode decompor-se da seguinte forma:

$$\left[\int^S\right] HdM^n = \left[\int^S\right] HdU^n + \left[\int^S\right] HdV^n,$$

onde se atende ao conceito de integral de Stieltjes, válido trajectória a trajectória para os processos em causa.

Este integral é uma martingala uniformemente integrável.

Com $n < m$, temos $\tau_n \leq \tau_m$ q.c. e $M^n = (M^m)^{\tau_n}$. Portanto

$$\left[\int^S\right] HdM^n = \left\{\left[\int^S\right] HdM^m\right\}^{\tau_n}.$$

Define-se $\left[\int^S\right] HdM$ como o processo que verifica

$$\left\{\left[\int^S\right] HdM\right\}^{\tau_n} = \left[\int^S\right] HdM^n.$$

Este constitui uma martingala local atendendo à forma como se definiu M^n. No que respeita à parte descontínua, para $t < \tau_n$:

$$\Delta\left\{\left[\int^S\right] HdM\right\}_t^{\tau_n} = H\Delta M_t^n$$

e fazendo a colagem para os diversos intervalos estocásticos

$$\Delta\left\{\left[\int^S\right] HdM\right\}_t = H\Delta M_t.$$

No que respeita à parte contínua, utilizamos o lema 2.7.44 para constatar que

$$\left\{\left[\int^{S}\right] HdM\right\}^{c} = \left[\int^{S}\right] HdM^{c}.$$

Daqui concluímos que

$$\left[\left[\int^{S}\right] HdM, N\right]_t = \left[\left[\int^{S}\right] HdM^c, N^c\right]_t + \sum_{s\leq t} H_s \Delta M_s \Delta N_s = \int Hd\left[M,N\right],$$

resultando a última igualdade do teorema 2.7.43.b).

(ii) Seja $M_0 \neq 0$ e $H_0 \neq 0$. Nesse caso, fazemos a análise de (i) para $M - M_0$, havendo apenas que somar, na última igualdade, $H_0 M_0 N_0$ a ambos os membros.

No que respeita à unicidade, ela resulta de, para dois processos correspondentes a integrais estocásticos, $S_1 = \left[\int^{S1}\right] HdM$ e $S_2 = \left[\int^{S2}\right] HdM$ se ter $[S_1 - S_2, N] = 0$ porque $[S_1, N] = [S_2, N] = \int Hd\left[M,N\right]$ para toda a martingala limitada N. ■

No decurso da prova, encontrámos a decomposição do integral estocástico na parte contínua e na parte descontínua.

Também é válida a seguinte caracterização, no caso do integrador ter variação localmente integrável.

Teorema 2.8.22 *Se a martingala local M tiver localmente variação integrável,* $\left[\int^{S}\right] HdM$ *é um integral de Stieltjes trajectória a trajectória.*

O próximo resultado permite especificar o tipo de integrandos incluido na classe acima referida.

Lema 2.8.23 *Se* $\{H_t\}$ *é um processo càdlàg opcional, então* $\{H_{t-}\}$ *é localmente limitado. Se* $\{H_t\}$ *é um processo previsível, então é localmente limitado.*

Prova. (i) Caso opcional. Seja $\tau_n = \inf\{t : |H_t| \geq n\}$. Então $|H_{t-}|\, I_{\{0\leq t\leq \tau_n\}} \leq n$. Note-se que o salto em τ_n pode ser ilimitado.

(ii) Caso previsível. τ_n é um tempo de paragem previsível e, portanto, anunciado por uma sucessão $\{\sigma_{n,m}\}$. Se $\sigma_k = \sup_{n\leq k,\, m\leq k} \sigma_{n,m}$ vem $\lim_{k\longrightarrow\infty} \sigma_k = \infty$ q.c. e $|H_t|\, I_{\{0\leq t\leq \sigma_k\}} \leq k$.

■

2.8.3 Processos de variação finita

Outro tipo de processos que servem de integradores (duma forma mais evidente que as martingalas locais) é o dos processos de variação finita.

Pvf (resp. *Pc*) designa o conjunto de processos de variação finita (resp. crescentes). *Pvfa* (resp. *Pca*) designa o conjunto de processos de variação finita (resp. crescentes) adaptados a $\{F_t\}, V$, com $V_t < \infty \ \ \forall t \in [0, \infty[$.

Definição 2.8.24 *Se* $\{V_t\} \in Pvf$, *então a variação total de* $\{V_t\}$ *vem dada por* $VT_t(\omega) = \int_0^t |dV_s(\omega)|$ *o que permite definir o processo* $\{VT_t\} \in Pc$. $dVT_t(\omega)$ *é o valor absoluto de* $dV_t(\omega)$.

No resultado seguinte, estabelece-se a representação canónica de um processo de variação finita como diferença entre dois processos crescentes, cuja soma se verifica corresponder ao processo de variação total.

Lema 2.8.25 *Se* $\{V_t\} \in Pvf$, *então terá uma decomposição única* $V_t = B_{1t} - B_{2t}$, *com* $\{B_{1t}\}, \{B_{2t}\} \in Pc$ *e* $VT_t = B_{1t} + B_{2t}$. *Se* C *for opcional (previsível), então* B_1 *e* B_2 *sê-lo-ão também.*

B_1 e B_2 correspondem respectivamente às somas das variações positivas e negativas de V.

Passamos a definir o integral estocástico, neste caso dos processos de variação finita.

Definição 2.8.26 *Sejam* $\{V_t\}$ *um processo de variação finita e* $\{H_t\}$ *um processo real mensurável em* $\mathcal{B} \otimes F$. *Para* $t \in [0, \infty[$, *o integral de Stieltjes vem dado por* $\int_0^t H_s(\omega)\, dV_s(\omega)$ *se não for infinito. Se existir q.c. para todo o* $t \in [0, \infty[$, *permite definir o processo* $\left[\int^S\right] HdV$.

Sendo $\{V_t\}$ um processo com uma versão constituindo um processo adaptado e càdlàg, a verificação da opcionalidade (previsibilidade) do integral estocástico depende da verificação da mesma característica para o integrando (e integrador, no caso de previsibilidade).

De seguida, obtemos para os processos crescentes (e portanto para os de variação finita) uma decomposição numa parte contínua e noutra puramente descontínua.

Teorema 2.8.27 *Seja $\{C_t\}$ um processo crescente. Então, terá uma decomposição única*

$$C_t = C_t^c + C_t^d$$

sendo $\{C_t^c\}$ um processo crescente contínuo e $\left\{C_t^d\right\}$ um processo crescente puramente descontínuo.

No que se segue, detalharemos a estrutura da parte descontínua do processo crescente $\{C_t\}$.

Teorema 2.8.28 *Seja $\{C_t\}$ um processo crescente. Se for adaptado, será opcional. Em particular, $\left\{C_t^d\right\}$ sê-lo-á também.*

Se for acessível (resp. previsível), $\left\{C_t^d\right\}$ sê-lo-á também.

Se for adaptado, $\{C_t^c\}$ será previsível.

Prova. Consideremos a sucessão de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ que é exaustiva para os saltos de $\{C_t\}$. Podemos escrever $S_t^n = (C_{\tau_n} - C_{\tau_n -}) I_{[\tau_n, \infty[}(t)$ e $C_t^d = \sum_n S_t^n$. Para todo o n, $\{S_t^n\}$ é um processo crescente. Então, $\left\{C_t^d\right\}$ é um processo crescente contínuo à direita. $\{C_t^c\}$ dado por $C_t^c = C_t - C_t^d$ é um processo crescente contínuo. Sendo $\{C_t\}$ càdlàg, será opcional se for adaptado. $\{C_t^c\}$ sendo contínuo e adaptado, será previsível.

$\left\{C_t^d\right\}$ é mensurável em relação à tribo em que $\{C_t\}$ o for e portanto partilhará com este as características de acessibilidade ou de previsibilidade. ■

Teorema 2.8.29 *Consideremos o processo $\left\{C_t^d\right\}$ mensurável em Σ_o (resp. Σ_p, Σ_a). Então, existe uma sucessão de números positivos $\{x_n\}$ e uma sucessão de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ com $\tau_n \in \Upsilon_o$ (resp. Υ_p, Υ_a) tais que $C_t^d = \sum_n x_n I_{[\tau_n, \infty[}(t)$.*

No resultado seguinte, apresentamos condições suficientes para um processo de variação finita ser localmente de variação integrável.

Teorema 2.8.30 *Seja V um processo de variação finita. Se V tiver saltos limitados ou for previsível, então terá variação localmente integrável.*

2.8.4 Semimartingalas: uma classe geral de integradores

Definição 2.8.31 *Um processo adaptado $S = \{S_t\}$ $(t \geq 0)$ é uma semimartingala se tiver uma decomposição do tipo $S_t = S_0 + M_t + V_t$ em que M é uma martingala local e V um processo de variação finita, ambos nulos no momento inicial.*

Sendo M e V integradores, como se constata das secções anteriores, no sentido em que foram definidos em cada uma delas, S é também um integrador constituindo esta classe de processos um tipo muito geral. A este propósito, [Bi] prova que um integrador em L^0 é uma semimartingala (pg. 233), sendo este tipo de integrador dado pela condição de o integral ser em cada intervalo estocástico q.c. finito. Apresenta de seguida condições para que um integrador em L^0 seja integrador localmente em L^p, ou seja a norma em L^p seja localmente finita.

No que respeita à decomposição da semimartingala em martingala local e processo de variação finita, verifica-se de imediato que não é única dado que há processos que são ambas as coisas. Contudo, podem demonstrar-se os dois seguintes resultados.

Lema 2.8.32 *Se X é uma martingala local de variação finita, então tem variação localmente integrável.*

Este resulta da noção de redução forte que se verifica para uma sucessão de tempos de paragem relativamente a X.

Teorema 2.8.33 *Na decomposição de uma semimartingala, a parte contínua da martingala local é única.*

Este resultado advém de a diferença entre as partes de martingala local de duas decomposições ser de variação finita, logo localmente integrável. Tal implica que não tenha parte contínua.

Definição 2.8.34 *Fazendo $S^c = M^c$, esta será a parte de martingala contínua de S.*

Consideremos as definições de variações quadráticas para uma semimartingala S.

Definição 2.8.35 *A variação quadrática opcional de S é o processo dado no momento t por*

$$[S,S]_t = \langle S^c, S^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta S_s^2.$$

Lema 2.8.36 *$[S,S]$ é um processo de variação finita.*

Definição 2.8.37 *Se tivermos duas semimartingalas X e Y, definimos o processo*

$$[X,Y] = 1/2\left([X+Y, X+Y] - [X,X] - [Y,Y]\right).$$

Definição 2.8.38 *Se $[X,Y]$ for de variação localmente integrável, a variação quadrática previsível de X e Y é*

$$\langle X,Y \rangle = \pi_p^* [X,Y].$$

Consideremos a seguinte desigualdade, análoga à considerada para as martingalas de quadrado integrável.

Teorema 2.8.39 *Sejam X e Y duas semimartingalas e H e K dois processos mensuráveis. Então,*

$$\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,|d[X,Y]_s| \leq \left(\int_0^\infty H_s^2 d[X,X]_s\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty K_s^2 d[Y,Y]_s\right)^{1/2}.$$

Lema 2.8.40 *Seja $\{M_t\}$ uma martingala local e $\{V_t\}$ um processo de variação finita previsível. Então, $[M,V]$ é uma martingala local.*

Vejamos, agora, que o integral relativamente a uma semimartingala S, $\left[\int^S\right] HdS$, é uma semimartingala se o integrando, H, for localmente limitado.

Teorema 2.8.41 *Seja $S = S_0 + M + V$ uma semimartingala com $M \in M_{loc0}$ e $V \in Pvf_0$ e H um processo previsível localmente limitado. Então*

$$\left[\int^S\right] HdS = H_0 S_0 + \left[\int^S\right] HdM + \left[\int^S\right] HdV$$

é uma semimartingala, sendo este processo independente da decomposição.

De facto, o integral relativamente à parte contínua de martingala local é uma martingala local e a análise da parte de saltos faz-se um moldes idênticos ao que se fez para martingalas locais e para processos de variação finita.

Note-se que podemos considerar $dS^\tau = d\left(I_{[0,\tau]}S\right)$ para concluir que

$$\left[\overset{S}{\int}\right] H dS^\tau = \left(\left[\overset{S}{\int}\right] H dS\right)^\tau,$$

sendo τ um qualquer tempo de paragem.

2.9 Regras de diferenciação e equações diferenciais: o caso estocástico

2.9.1 Introdução

Consideramos as regras de diferenciação para uma função de um processo estocástico relativamente geral enquanto integrador: a semimartingala. Consideraremos ainda condições para a existência de solução para uma equação diferencial, identificando-se aquela como um processo estocástico definido a partir de um integral relativamente a uma semimartingala e cujo comportamento pretendemos apreender.

2.9.2 Regras de diferenciação estocástica

Nos resultados obtidos nos teoremas desta secção, as igualdades significam que os processos no primeiro e no segundo membros são indistinguíveis.

Para chegar ao resultado desta secção, começa-se com casos relativamente simples e restritivos ao nível das hipóteses acerca do tipo de função a diferenciar e do tipo de semimartingala argumento da função. Nomeadamente, considera-se uma semimartingala contínua e limitada e também restrições sobre as derivadas da função em causa.

Consideremos enfim o caso de uma semimartingala geral, abandonando aquelas hipóteses.

Teorema 2.9.1 *Seja S uma semimartingala e f uma função com derivadas até à segunda* *ordem contínuas. Então $f(S)$ é uma semimartingala que verifica o seguinte:*

$$\begin{aligned} f(S_t) &= f(S_0) + \int_0^t f'(S_{s-})\,dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(S_{s-})\,d\langle S^c, S^c\rangle_s + \\ &+ \sum_{0<s\leq t}\left[f(S_s) - f(S_{s-}) - f'(S_{s-})\,\Delta S_s\right]. \end{aligned}$$

O resultado é obtido recorrendo à fórmula de Taylor e a resultados sobre as componentes da semimartingala, nomedamente os que respeitam a convergência e às propriedades das variações quadráticas. A subtração do termo $f'(S_{s-})\,\Delta S_s$ resulta de este estar incluido simultâneamente em $f(S_s) - f(S_{s-})$ e em $\int_0^t f'(S_{s-})\,dS_s$.

Apresentamos de seguida o caso multidimensional cuja prova é semelhante à do caso anterior.

Teorema 2.9.2 *Seja S um vector de n semimartingalas S^i $(i = 1, ..., n)$. Seja f uma função de classe C^2 em relação a todos os argumentos, definida sobre $\Re^n$. Então $f(S)$ é uma semimartingala dada por*

$$\begin{aligned} f(S_t) &= f(S_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t f'_i(S_{s-})\,dS^i_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_0^t f''_{ij}(S_{s-})\,d\left\langle S^{ic}, S^{jc}\right\rangle_s + \\ &+ \sum_{0<s\leq t}\left[f(S_s) - f(S_{s-}) - \sum_{i=1}^n f'_i(S_{s-})\,\Delta S^i_s\right]. \end{aligned}$$

Corolário 2.9.3 *Sejam X e Y semimartingalas. Então, o seu produto, XY, é uma semimartingala dada por*

$$X_t Y_t = \int_{]0,t]} X_{s-}dY_s + \int_{]0,t]} Y_{s-}dX_s + [X,Y]_t$$

2.9.3 Equações diferenciais estocásticas

Seja S uma semimartingala real com $S_0 = 0$. Designamos por D o espaço das funções càdlàg definidas sobre $\Re^+$ com valores reais.

Definição 2.9.4 *O coeficiente de uma equação diferencial estocástica é uma aplicação*

$$f : \Re^+ \times \Omega \times D \longrightarrow \Re$$

tal que se X é um processo càdlàg adaptado, então a aplicação

$$f \circ X : \Re^+ \times \Omega \longrightarrow \Re$$

dada por

$$f \circ X(t,\omega) = f(t,\omega,X_{\cdot}(\omega))$$

é localmente limitada e previsível.

$\cdot$ representa uma função de t (por exemplo, um valor desfasado $t-s$ ou $t-$).

Definição 2.9.5 *Seja X um processo càdlàg adaptado tal que*

$$\forall t \geq 0 \; X_t = H_t + \int_0^t (f \circ X_{\cdot})_s \, dS_s \text{ q.c.} \tag{2.1}$$

sendo H um processo càdlàg adaptado. Então, X diz-se solução forte de (2.1).

De seguida, apresentamos condições para a existência de uma solução forte única para uma equação diferencial estocástica. A unicidade significa que duas soluções são indistinguíveis.

Teorema 2.9.6 *Seja S uma semimartingala tal que $S_0 = 0$. Seja H um processo càdlàg adaptado. Então, a equação diferencial estocástica*

$$X_t(\omega) = H_t(\omega) + \int_0^t f(s,\omega,X_{\cdot}(\omega))\, dS_s(\omega)$$

tem uma única solução forte X se f tiver as propriedades seguintes:

(i) f satisfaz as condições da definição 2.9.4;

(ii) se X_1 e X_2 são dois processos càdlàg adaptados, então

$$|f(t,\omega,X_{1\cdot}(\omega)) - f(t,\omega,X_{2\cdot}(\omega))| \leq K\left(|X_1(\omega) - X_2(\omega)|_s^*\right)$$

em que $|X(\omega)|_s^* = \sup\limits_{0 \leq u \leq s} |X_u(\omega)|$.

A prova é feita pelas seguintes etapas. Em primeiro lugar, prova-se que se existir solução única em dadas hipóteses, entre as quais $H = 0$, também existirá sem essas hipóteses. Em seguida, prova-se que a verificação daquelas hipóteses, em conjunto com as do enunciado do teorema, implica que, com $SX = \int_0^t f(s,.,X(.))\, dSM_s$ e $h = K\left(2\sqrt{b} + b\right) < 1$, seja $\|SX_1 - SX_2\| \leq h\|X_1 - X_2\|$. Ora, tal permite aplicar o teorema de ponto fixo para concluir que a equação $SX = X$ tem uma e uma só solução.

2.10 A exponencial de Doléans-Dade e o teorema de Girsanov

2.10.1 Introdução

É apresentada a fórmula de Doléans-Dade que nos dá a solução de uma equação estocástica em que um processo estocástico é definido a partir de outro de uma forma que corresponde, no caso determinista, ao conceito de exponencial. Ou seja, há uma actualização, contínua no tempo, do primeiro processo: a variação infinitesimal deste é obtida multiplicando o seu valor pela variação infinitesimal do outro processo.

Numa segunda parte, considera-se a representação da relação entre duas medidas de probabilidade equivalentes através do processo de razão de verosimilhanças, ou seja, a derivada de Radon-Nikodym de uma medida de probabilidade relativamente à outra.

O recurso a este processo permite fazer a caracterização enquanto semimartingala relativamente a uma medida de probabilidade de um processo estocástico que é martingala local sob a outra probabilidade. Este resultado é-nos dado pelo teorema de Girsanov.

Finalmente, a exponencial de Doléans-Dade é relacionada com o teorema de Girsanov considerando o processo do qual a derivada de Radon-Nikodym é exponencial.

2.10.2 A fórmula exponencial de Doléans-Dade

A fórmula exponencial é apresentada no seguinte resultado.

Teorema 2.10.1 *Seja X uma semimartingala com $X_{0-} = 0$ q.c. Então, existe uma única semimartingala Z tal que*

$$Z_t = Z_{0-} + \int_0^t Z_{s-} dX_s$$

sendo Z_{0-} um valor inicial. Z será dado por

$$Z_t = Z_{0-} \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t\right\} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s} \qquad (t \geq 0) \tag{2.2}$$

O produto infinito é absolutamente convergente q.c.

Z diz-se a exponencial de Doléans-Dade de X e escreve-se $Z_t = Z_{0-}\mathcal{E}(X)$.

É frequente fazer $X_0 = 0$ e $Z_{0-} = Z_0$, vindo

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_{s-} dX_s.$$

Este resultado é obtido a partir da regra da diferenciação apresentada na secção anterior, atendendo a que, no enunciado, definimos Z como $Z_t = Z_0 + F(W_t, V_t)$ com $F(x,y) = e^x y$,

$$W_t = X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle$$

e

$$V_t = \prod_{0\leq s\leq t} (1 + \Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s}.$$

2.10.3 O teorema de Girsanov

Sendo (Ω, F, P) um espaço probabilizado dotado de uma filtração $\{F_t\}$, satisfazendo as condições usuais (isto é, completa e contínua à direita), podemos considerar uma medida de probabilidade Q equivalente a P, de tal forma que a filtração também satisfaz as condições usuais sob Q.

Seja

$$M_\infty = \frac{dQ}{dP}$$

e M uma versão càdlàg da martingala P-uniformemente integrável

$$E[M_\infty | F_t] \quad (t \geq 0).$$

Esta é usualmente designada por processo de razão de verosimilhanças.

Para todo o tempo de paragem τ, M_τ é uma densidade para a restrição de Q a F_τ, relativamente a P. Como M_∞ é q.c. positivo e M é uma martingala positiva, então

$$\tau = \inf\{t : M_t = 0 \text{ ou } (t > 0 \text{ e } M_{t-} = 0)\}$$

deve ser ∞ q.c. pois se não fosse seria $M_\infty = 0$ igualmente. Logo, para quase todo o ω, $M_t(\omega)$ é limitado inferiormente por um número estritamente positivo.

Lema 2.10.2 *X é uma martingala local sob Q se e só se XM é uma martingala local sob P.*

Prova. Como Q e P são equivalentes, uma sucessão de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ que reduz X reduz também XM. Logo basta demonstrar o resultado para martingalas. Seja $s \leq t$ e $A \in F_s$. Vem

$$\int_A X_t dQ = \int_A X_t M_t dP = \int_A X_s M_s dP = \int_A X_s dQ.$$

■

Em particular, M^{-1} é uma martingala sob Q a que corresponde a martingala $M^{-1}M = 1$ sob P.

Teorema 2.10.3 *X é uma semimartingala sob Q se e só se é uma semimartingala sob P.*

Prova. Bastará provar o resultado numa das direcções e supondo o valor inicial nulo. Se X é semimartingala sob P, então, aplicando a regra do produto, sabemos que XM é também uma semimartingala sob P com decomposição

$$X_t M_t = A_t + B_t$$

em que A é uma martingala local e B é um processo de variação finita. Então,

$$X_t = \frac{A_t}{M_t} + \frac{B_t}{M_t},$$

em que o primeiro termo, pelo lema 2.10.2, é uma martingala local sob Q e o segundo termo é o produto da semimartingala de variação finita sob Q, B, pela martingala sob Q, M^{-1}. ■

Definição 2.10.4 *Uma semimartingala especial é uma semimartingala que possui uma decomposição, dita canónica, onde o processo de variação finita é de variação localmente integrável.*

Passamos a apresentar o teorema de Girsanov. Neste, M é identificado como o processo cuja variação quadrática relativamente a uma martingala local, X, sob P, normalizada dividindo por M, funciona como um compensador. Ou seja, subtraída a X, transforma este processo numa martingala local sob Q.

Teorema 2.10.5 *Seja X uma martingala local sob P, nula em $t = 0$.*

1) X é uma semimartingala especial sob Q se e só se $\langle X, M \rangle$ existir. Então, a decomposição canónica de X sob Q é

$$X_t = \left(X_t - \int_0^t M_{s-}^{-1} d\langle X, M \rangle_s \right) + \int_0^t M_{s-}^{-1} d\langle X, M \rangle_s ,$$

onde a primeira parcela é uma martingala local sob Q e a segunda parcela é um processo previsível de variação finita.

2) $X_t - \int_0^t M_s^{-1} d[X, M]_s$ é uma martingala local sob Q.

2.10.4 A mudança de medida de probabilidade definida a partir da exponencial de Doléans-Dade

Considerámos atrás a exponencial de Doléans-Dade que nos dá a solução da equação:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_{s-} dX_s.$$

Interessar-no-á o caso em que $Z_0 = 1$.

É óbvio que se X é uma martingala local, Z também o será.

Por outro lado, da solução obtida para a equação (ver (2.2)), observamos que Z_t é estritamente positiva se e só se $\Delta X_s > -1$ q.c. para todo o s.

Z é uma supermartingala. De facto, considerando uma sucessão crescente de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ reduzindo fortemente Z, vem para $s \leq t$:

$$E\left(Z_t^{\tau_n} \left| F_s \right.\right) = Z_s^{\tau_n} \qquad \text{q.c.}$$

E como $Z_s^{\tau_n} \geq 0$ e $\lim\limits_{n \to \infty} Z_s^{\tau_n} = Z_s$ q.c., vem

$$Z_s = \lim_{n \to \infty} Z_s^{\tau_n} = \lim_{n \to \infty} E\left(Z_t^{\tau_n} \left| F_s \right.\right) \geq E\left(\lim_{n \to \infty} Z_t^{\tau_n} \left| F_s \right.\right) = E\left(Z_t \left| F_s \right.\right) \qquad \text{q.c.}$$

Usa-se o lema de Fatou para obter a desigualdade.

Em particular, Z será uma martingala se e só se $E(Z_t) = 1$ para todo o $t \geq 0$, dado que

$$E(Z_s) \geq E\left[E\left(Z_t \left| F_s \right.\right)\right] = E(Z_t),$$

o que implica que seja $Z_s = E\left(Z_t \left| F_s \right.\right)$ quando $E(Z_s) = E(Z_t)$.

Interessar-nos-á justamente o caso em que Z é uma martingala positiva uniformemente integrável. Nesse caso, existirá $Z_\infty = \lim_{t\to\infty} Z_t$ e temos $Z_t = E\left(Z_\infty \left| F_t \right.\right)$ q.c. e portanto

$$E\left(Z_\infty\right) = E\left(Z_\infty \left| F_0 \right.\right) = E\left(Z_0\right) = 1.$$

Pode nesse caso definir-se uma mudança de medida de probabilidade sobre (Ω, F) fazendo

$$\frac{dQ}{dP} = Z_\infty.$$

Q é equivalente a P se e só se $Z_\infty > 0$ q.c.

Neste contexto, o processo X representará uma taxa instantânea de variação (aleatória) do processo Z dado por

$$Z_t = E\left(\frac{dQ}{dP} \left| F_t \right.\right).$$

O teorema de Girsanov é adaptado a este processo X da seguinte forma.

Teorema 2.10.6 *No contexto que acabamos de apresentar, consideremos uma martingala local sob P, N, e suponhamos que $\langle N, X\rangle$ existe sob P. Então, $N - \langle N, X\rangle$ é uma martingala local sob Q.*

Prova. Z desempenha o papel de M e N o de X no teorema 2.10.5 1). A partir de

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dX_s,$$

sabemos que

$$\langle N, Z\rangle_t = \int_0^t Z_{s-} d\left\langle N, X\right\rangle_s$$

e portanto

$$\int_0^t Z_{s-}^{-1} d\left\langle N, Z\right\rangle_s = \langle N, X\rangle_t .$$

Basta substituir este integral no teorema 2.10.5 1) para concluir que $N - \langle N, X\rangle$ é uma martingala local sob Q. ■

Bibliografia

[Bi] Bichteler, Klaus, *Stochastic Integration with Jumps*, Cambridge University Press, 2002

[CW] Chung, K.L.; R.J. Williams, *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhauser, 1990

[E] Elliott, Robert J., *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, 1982

[F] Feller, William, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Willey and Sons Inc., 1971

[O] Oksendal, Bernt, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 4ª edição, Springer-Verlag, 1998

[P] Protter, P., *Stochastic Integration and Differential Equations. A New Approach*, Springer-Verlag: Berlin, 1990

[R] Resnick, Sidney I., *A Probability Path*, Birkhauser Boston, 1999

Capítulo 3

Um modelo de risco e de avaliação de activo financeiro com modulação markoviana

3.1 Introdução

Neste capítulo, é analisado um processo aleatório que generaliza o processo introduzido por Jacobsen ([J3]) para modelar uma grandeza sujeita a risco de ruína (ver também [[J2]]). Aquele processo, sendo localmente de saltos negativos e positivos e difusão, comporta alteração de comportamento ao longo do tempo através de mudança de estados de uma cadeia de Markov, verificando-se uma evolução diferenciada em cada estado da cadeia ao nível da componente de difusão e da probabilidade de salto. Neste contexto, pode-se encontrar a transformada de Laplace conjunta para as distribuições do tempo aleatório em que o processo atinge o valor nulo (ruína) e para o valor do processo nesse momento.

Numa segunda parte, o processo é utilizado para modelar o preço de um activo financeiro como exponencial daquele. Tal permite considerar uma representação deste preço que descreva um comportamento temporal caracterizado por uma sucessão de fases aleatórias mais conturbadas ou mais tranquilas, com diferentes ritmos de crescimento e com diferentes frequências de ocorrência de grandes variações instantâneas. Existe flexibilidade no tipo de situações que se pode considerar, podendo-se, por exemplo, combinar de diferentes formas, em cada fase, o grau de dispersão na parte de difusão com uma maior ou menor intensidade de salto. A ocorrência de salto reinicia o processo, com uma distribuição de probabilidade para os diferentes estados da cadeia de Markov. Esta hipótese simplificadora poderia ser atenuada permitindo por exemplo uma diferente distribuição consoante o salto é positivo ou negativo. Note-se que, neste contexto, se justifica a consideração de variações instantâneas positivas e não apenas negativas, como seria natural suceder numa análise de risco na perspectiva de uma seguradora.

O conteúdo deste capítulo foi apresentado no XII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística em 2 de Outubro de 2004 e publicado nas respectivas Actas em Agosto de 2005 (ver [Pa]). Jaconsen apresenta resultados semelhantes aos da primeira parte num artigo publicado em Dezembro de 2005 (ver [J4]).

Antes de entrar na análise do modelo propriamente dito, vamos apresentar numa primeira secção o conceito de processo de Markov e de gerador infinitesimal que serão recorrentemente utilizados naquela análise (veja-se [[B]] e [[EK]]). De facto, o processo em causa em conjunto com a cadeia de Markov que modula o seu comportamento formam, como se verá, um processo de Markov bidimensional. Apresentam-se ainda alguns conceitos e resultados ligados a processos pontuais marcados utilizados no modelo do capítulo e provados em [[J1]].

3.2 Processos de Markov e processos pontuais marcados

3.2.1 Introdução

Um processo de Markov é um processo estocástico em que a distribuição de probabilidade de um valor futuro depende do passado apenas através do valor presente. Apresentam-se noções que permitem caracterizar certos tipos de processos de Markov.

3.2.2 Processo de Markov

Consideremos um processo estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ sobre um espaço probabilizado (Ω, F, P) tomando valores em (Λ, G). Designamos por $M(\Lambda)$ a colecção de todas as funções reais mensuráveis sobre Λ, por $B(\Lambda)$ $(\subset M(\Lambda))$ o espaço de Banach das funções limitadas, sendo

$\|f\| = \sup_{x\in\Lambda} |f(x)|$ e por $C(\Lambda)$ $(\subset B(\Lambda))$ o subespaço das funções contínuas limitadas.

Definição 3.2.1 *X é um processo de Markov se*

$$P\left[X(t+s)\in A\left|F_t^X\right.\right] = P\left[X(t+s)\in A\left|X(t)\right.\right] \text{ para todos os } s,t\geq 0,\ A\in G,$$

onde $F_t^X = \sigma(X(s) : s\leq t)$.

Definição 3.2.2 *X é um processo de Markov relativamente a $\{F\}\supset\left\{F_t^X\right\}$ se*

$$P\left[X(t+s)\in A\left|F\right.\right] = P\left[X(t+s)\in A\left|X(t)\right.\right].$$

Lema 3.2.3 *Se X é um processo de Markov, então*

$$E\left[f(X(t+s))\left|F_t^X\right.\right] = E\left[f(X(t+s))\left|X(t)\right.\right] \text{ para todos os } s,t\geq 0,\ f\in B(\Lambda).$$

Definição 3.2.4 *Um processo de Markov homogéneo, X, é um processo de Markov tal que*

$$P\left[X(t+s)\in A\left|X(t)\right.\right] = P\left[X(s)\in A\left|X(0)\right.\right].$$

O próximo conceito permite caracterizar um processo de Markov homogéneo.

Definição 3.2.5 *Uma função de transição é uma função $P(t,x,A)$ sobre $[0,\infty[\times\Lambda\times G$ tal que:*

(i) $P(t,x,.)$ é uma medida de probabilidade sobre G,

(ii) $P(0,x,.) = \delta_x$ $(x\in\Lambda)$,

(iii) $P(.,.,A)\in B([0,\infty[\times\Lambda)$ $(A\in G)$,

(iv) $P(t+s,x,A) = \int P(s,y,A)\,P(t,x,dy)$ $(A\in G)$.

Definição 3.2.6 *Uma função de transição $P(t,x,A)$ é uma função de transição de um processo de Markov homogéneo se*

$$P\left(X(t+s)\in A\left|F_t^X\right.\right) = P(s,X(t),A).$$

Lema 3.2.7 *Uma função de transição $P(t,x,A)$ de um processo de Markov homogéneo X verifica:*

$$E\left[f(X(t+s))\left|F_t^X\right.\right] = \int f(y)\,P(s,X(t),dy) \text{ para todos os } s,t\geq 0,\ f\in B(\Lambda).$$

Prova. Imediato a partir da definição anterior. ■

Teorema 3.2.8 *(Propriedade de Chapman-Kolmogorov)*

$$P\left(t+s, X\left(u\right), A\right) = \int P\left(s, y, A\right) P\left(t, X\left(u\right), dy\right) \quad \text{para todos os } s, t, u \in \mathcal{R}^{+},\ A \in G.$$

Prova.

$$\begin{aligned} P\left(t+s, X\left(u\right), A\right) &= P\left(X\left(u+t+s\right) \in A \left| F_{u}^{X}\right.\right) = \\ &= E\left[P\left(X\left(u+t+s\right) \in A \left| F_{u+t}^{X}\right.\right) \left| F_{u}^{X}\right.\right] = \\ &= E\left[P\left(s, X\left(u+t\right), A\right) \left| F_{u}^{X}\right.\right] = \\ &= \int P\left(s, y, A\right) P\left(t, X\left(u\right), dy\right), \end{aligned}$$

em que a segunda igualdade resulta do teorema das projecções iteradas e a quarta igualdade resulta do lema 3.2.7. ■

Definição 3.2.9 *A distribuição inicial de X é a medida de probabilidade v sobre Λ dada por $v\left(A\right) = P\left[X\left(0\right) \in A\right]$.*

Definição 3.2.10 *Uma medida de probabilidade sobre um espaço Λ diz-se compactada se, para todo o $\epsilon > 0$, existe um conjunto compacto $B \subset \Lambda$ tal que $P\left(B\right) \geq 1-\epsilon$. Uma família de probabilidades M diz-se compactada se, para todo o $\epsilon > 0$, existe um conjunto compacto $B \subset \Lambda$ tal que $\underset{P \in M}{inf}\ P\left(B\right) \geq 1-\epsilon$.*

O conceito de probabilidade compactada é útil na medida em que para verificar a convergência de uma sucessão $\{x_n\}$ num espaço métrico, se demonstra que aquela está contida num conjunto compacto e depois que toda a subsucessão daquela converge para o mesmo elemento. De facto, pode-se garantir que uma família de probabilidades é compactada se e só se for relativamente compacta (ou seja, se o seu fecho for compacto).

A definição e o lema abaixo são preliminares do teorema apresentado imediatamente a seguir.

Definição 3.2.11 *Seja (S, d) um espaço métrico. Uma sucessão $\{f_n\}$ de funções definidas sobre S converge ponto a ponto e limitadamente se $\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = f\left(x\right)$ para todo o $x \in S$ e $\sup_n \|f_n\| < \infty$.*

Lema 3.2.12 *(Teorema de Tulcea) Sejam* (Ω_k, F_k) $(k = 1, 2, ...)$ *espaços mensuráveis,* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ...$ *e* $F = F_1 \times F_2 \times ...$ *Seja* P_1 *uma medida de probabilidade sobre* F_1 *e para* $k = 2, 3, ...$ *sejam* $P_k : \Omega_1 \times ...\Omega_{k-1} \times F_k \to [0, 1]$ *tais que:*

a) para todo o $(\omega_1, ..., \omega_{k-1}) \in \Omega_1 \times ...\Omega_{k-1}$, $P_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, \cdot)$ *é uma medida de probabilidade sobre* F_k *e*

b) para todo o $A \in F_k$, $P_k(\cdot, A)$ *é* $F_1 \times ... \times F_{k-1}-$*mensurável.*

Então, existe uma medida de probabilidade P *tal que, para todo o* $A \in F_1 \times ... \times F_k$,

$$P(A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times ...) = \int_{\Omega_1} ... \int_{\Omega_K} 1_A(\omega_1, ..., \omega_k) P_k(\omega_1, ..., \omega_{k-1}, d\omega_k) ... P_1(d\omega_1).$$

Prova. (esboço) Constituindo os conjuntos deste tipo

$$\{A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times ... : A \in F_1 \times ... \times F_k \, (k = 1, 2, ...)\}$$

uma álgebra e sendo P aditiva, basta provar que P é $\sigma-$aditiva. Tal pode ser feito demonstrando que se $\{B_n\}$ é uma sucessão de conjuntos da forma acima, $B_1 \supset B_2 \supset ...$ e $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) > 0$, então $\cap_n B_n \neq \varnothing$. A demonstração faz-se definindo

$$f_{k,n}(\omega_1, ..., \omega_k) = \begin{cases} \int_{\Omega_{k+1}} ... \int_{\Omega_{k_n}} 1_{A_n}(\omega_1, ..., \omega_{k_n}) P_{k_n}(\omega_1, ..., \omega_{k_n-1}, d\omega_{k_n}) ... \\ \quad ...P_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, d\omega_{k+1}) & , \text{se } k < k_n \\ 1_{A_n}(\omega_1, ..., \omega_{k_n}) & , \text{se } k \geq k_n \end{cases}$$

onde $B_n = A_n \times \Omega_{k_n+1} \times \Omega_{k_n+2} \times ...$, $A_n \in F_1 \times ... \times F_{k_n}$, $k_n \to \infty$ e $g_k = \lim\limits_{n\to\infty} f_{k,n}$ em que a convergência é ponto a ponto e limitada. Basta verificar que existe uma sucessão $\omega_1^*, \omega_2^*, ...$ tal que $g_k(\omega_1^*, ..., \omega_k^*) > 0$ $(k = 1, 2, ...)$ quando $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) > 0$, dado que

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = \int g_1(\omega_1) P_1(d\omega_1)$$

e

$$g_k(\omega_1, ..., \omega_k) = \int g_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, \omega_{k+1}) P_{k+1}(\omega_1, ..., \omega_k, d\omega_{k+1}).$$

Por outro lado que

$$g_{k_n}\left(\omega_1^*, ..., \omega_{k_n}^*\right) \leq f_{k_n,n}\left(\omega_1^*, ..., \omega_{k_n}^*\right) = 1_{A_n}\left(\omega_1^*, ..., \omega_{k_n}^*\right),$$

logo, $(\omega_1^*, \omega_2^*, ...) \in B_n$ para todo o n. ■

Teorema 3.2.13 *Seja $P(t,x,A)$ uma função de transição e v uma medida de probabilidade sobre Λ. Se, para todo o $t \geq 0$, a medida de probabilidade $\int P(t,x,.)\,v(dx)$ é compactada, então existe um processo de Markov X sobre Λ cujas distribuições de dimensão finita são determinadas univocamente da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} P\left[X(0) \in A_0, X(t_1) \in A_1, ..., X(t_n) \in A_n\right] &= \int_{A_0} ... \int_{A_{n-1}} P\left(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, A_n\right). \\ &\quad .P\left(t_{n-1} - t_{n-2}, y_{n-2}, dy_{n-1}\right) ... \\ &\quad .P\left(t_1, y_0, dy_1\right).v\left(dy_0\right). \end{aligned}$$

Prova. (esboço) Consideremos o espaço produto $\Lambda^I = \Pi_{s\in I}\Lambda_s$ com $I \subset [0,\infty]$ e $\Lambda_s = \Lambda$ para todo o s, dotado da σ-álgebra $\Pi_{s\in I}F(\Lambda_s) = \sigma(X(s) : s \in I)$. Toma-se uma sucessão $\{s_i : i = 0,1,2,...\}$ em $[0,\infty[$ com $s_i \neq s_j$ para $i \neq j$ e $s_0 = 0$. Para $n > 1$, considera-se o rearranjo crescente $t_1 < t_2 < ... < t_n$ de $s_1,...,s_n$. A partir do teorema de Tulcea, obtém-se a igualdade do enunciado do teorema. Pode-se provar que a distribuição de probabilidade assim encontrada converge para a distribuição de probabilidade associada à sucessão $\{s_i\}$, $P^{\{s_i\}}$. Finalmente, pode-se provar que para todo o $C \in F(\Lambda)^{[0,\infty)}$, existe um subconjunto numerável $\{s_i\} \subset [0,\infty]$ tal que $C \in \sigma(X(s_i) : i = 1,2,...)$ e pode-se definir $P(C) = P^{\{s_i\}}\left(\widehat{C}\right)$ para um dado $\widehat{C} \in F(\Lambda)^{\{s_i\}}$. ■

Definição 3.2.14 *Seja X um processo de Markov definido sobre (Ω, F, P) com valores em Λ, com filtração $\{G_t\}$ tal que X é $\{G_t\}$-progressivo. Seja $P(t,x,A)$ a função de transição de X e τ um G_t-tempo de paragem com τ q.c. finito. Então, X é um processo de Markov forte relativamente a τ se*

$$P\left(X(\tau + t) \in A \,|G_t\right) = P\left(t, X(\tau), A\right), \text{ para todo o } t \geq 0 \text{ e } A \in F(\Lambda),$$

ou seja, se

$$E\left[f\left(X(\tau+t)\right)|G_t\right] = \int f(y)\,P\left(t, X(\tau), dy\right).$$

X é um processo de Markov forte relativamente a $\{G_t\}$ se X é forte em todos os $\{G_t\}$ −tempos de paragem, τ, com τ q.c. finitos

3.2.3 Geradores infinitesimais

Passamos a apresentar a noção de gerador infinitesimal de um processo de Markov, a qual é um instrumento útil para a caracterização do dito processo.

Definição 3.2.15 *Um semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *é uma família (dependente de um parâmetro t) de operadores lineares limitados sobre um espaço de Banach* L *tal que* $T(0) = I$ *e* $T(s+t) = T(s)\,T(t)$ *para todos os* $s, t \geq 0$. *Diz-se fortemente contínuo se*

$$\forall f \in L \quad \lim_{t \longrightarrow 0} T(t)\, f = f.$$

Diz-se de contracção se

$$\forall t \geq 0 \quad \|T(t)\| \leq 1,$$

onde $\|T(t)(X)\|$ *é a norma do espaço em causa.*

Definição 3.2.16 *O gerador infinitesimal de um semigrupo* $\{T(t)\}$ *sobre* L *é o operador linear* A *dado por*

$$Af = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \{T(t)\, f - f\}.$$

O dominio $D(A)$ *de* A *é o subespaço de todos os* $f \in L$ *para os quais este limite existe.*

Se $L \subset B(\Lambda)$, no contexto da secção anterior, diz-se que o processo de Markov, X, com valores em Λ, corresponde ao semigrupo $T(t)$ se

$$E\left[f(X(t+s)) \left| F_t^X \right.\right] = T(s)\, f(X(t)) \text{ para todos os } s, t \geq 0,\ f \in L.$$

Neste contexto é usual considerar $\|f\| = \sup_{x \in \Lambda} |f(x)|$.

Nesse caso, o correspondente gerador é o gerador infinitesimal do processo de Markov X e corresponde à variação média condicional instantânea de $f(X)$.

Consideremos a seguinte generalização do conceito de gerador infinitesimal.

Seja (Ω, F) um espaço mensurável e M uma colecção de medidas positivas sobre F. Seja L o espaço de classes de equivalência de funções F-mensuráveis f tais que

$$\|f\| \equiv \sup_{\mu \in M} \int |f|\, d\mu < \infty.$$

Definição 3.2.17 *O gerador completo de um semigrupo de contracção mensurável* T *sobre* L *é o operador linear* A *tal que*

$$T(t)\, f - f = \int_0^t T(s)\, Af ds \quad (t \geq 0).$$

Aqui, as funções f não têm que ser necessariamente limitadas.

No caso de um processo de difusão

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \beta(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dW_s \quad (t \geq 0),$$

sendo W um processo browniano, podemos aplicar a formula de Itô (regra de diferenciação) para constatar que, para

$$Af = \beta(t,x)\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{d^2 f}{dx^2},$$

se verifica, para $f \in C^2(\Re)$ e com suporte compacto,

$$f[X(t)] = f[X(0)] + \int_0^t Af(s, X(s))\, ds + \int_0^t \frac{df}{dX(s)}[X(s)]\,\sigma(s, X(s))\, dW_s \quad (t \geq 0, \ )$$

representando o integral de integrando Af portanto a esperança da evolução de $f(X)$. Logo, o operador linear A dado é o gerador infinitesimal do processo de difusão.

No caso de um processo de salto com gerador limitado, este será da forma:

$$Af(x) = \lambda(x) \int [f(y) - f(x)]\, \mu(x, dy)$$

em que $\mu(x, A)$ é a função de transição definida sobre $\Lambda \times G$ e $\lambda(x)$ é uma função pertencente a $B(\Lambda)$. Esta última função representa a intensidade de ocorrência de salto, dependente do valor do processo. Condicionalmente a este valor, o lapso de tempo até se verificar novo salto segue lei exponencial.

Este resultado pode ser verificado através da seguinte construção do processo em causa.

Seja $y = \{y(k) : k = 0, 1, ...\}$ um processo de espaço de tempos discreto definido sobre (Ω, F, P) e $F_n^y = \sigma(y(k) : k \leq n)$. Então, y é uma cadeia de Markov se

$$P(y(n+m) \in A \,|F_n^y) = P(y(n+m) \in A \,|y(n)) \qquad \forall m, n \geq 0 \text{ e } A \in G.$$

Uma função $\mu(x, A)$ definida sobre $\Lambda \times G$ é uma função de transição se $\mu(., A) \in B(\Lambda)$. Será a função de transição de uma cadeia de Markov homogénea se

$$P(y(n+1) \in A \,|F_n^y) = \mu(y(n), A).$$

Considere-se uma cadeia de Markov $y = \{y(k) : k = 0, 1, ...\}$ sobre Λ com distribuição inicial v e função de transição $\mu(x, A)$, ou seja, para $A \in G$ e $k = 0, 1, ...$

$$\begin{aligned} P[y(0) \in A] &= v(A), \\ P[y(k+1) \in A \,|y(0), ..., y(k)] &= \mu(y(k), A). \end{aligned}$$

Sejam $\Delta_0, \Delta_1, ...$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de lei exponencial de parâmetro 1 e independentes de y.

Então, o processo X definido por

$$X(t) = \begin{cases} y(0), & \text{se } 0 \leq t < \frac{\Delta_0}{\lambda(y(0))} \\ y(k), & \text{se } \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Delta_j}{\lambda(y(j))} \leq t < \sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta_j}{\lambda(y(j))} \end{cases}$$

é um processo de salto do tipo pretendido. Note-se que o lapso de tempo entre ocorrência é da forma $\frac{\Delta_j}{\lambda(y(j))}$ e segue portanto lei exponencial de parâmetro $\lambda(y(j))$.

X tem um gerador da forma acima referida. Passamos a verificar esta afirmação em duas etapas.

Em primeiro lugar, consideramos uma representação mais simples do processo, equivalente à feita atrás. Ela vem dada da seguinte forma.

Seja $\{y'_k : k = 0, 1, ...\}$ uma cadeia de Markov sobre Λ com distribuição inicial v e função de transição $\mu'(x, A)$ dada por

$$\mu'(x, A) = \left(1 - \frac{\lambda(x)}{\lambda}\right) \delta_x(A) + \frac{\lambda(x)}{\lambda} \mu(x, A)$$

com $\lambda = \sup_{x \in \Lambda} \lambda(x)$, sendo λ positivo. Esta é definida de forma a ter integral 1.

Seja V um processo de Poisson de parâmetro λ.

Seja $X' = y'(V(t))$.

Por um lado, tem-se:

$$\begin{aligned} Af(x) &= \int \lambda(x) [f(y) - f(x)] \mu(x, dy) \\ &= \int \lambda [f(y) - f(x)] \frac{\lambda(x)}{\lambda} \mu(x, dy) + \lambda [f(x) - f(x)] \left(1 - \frac{\lambda(x)}{\lambda}\right) \delta_x(A) \\ &= \int \lambda [f(y) - f(x)] \mu'(x, dy). \end{aligned}$$

Ora, prova-se abaixo que o gerador infinitesimal de X' é

$$\int \lambda [f(y) - f(x)] \mu'(x, dy).$$

Por outro lado, as distribuições de dimensão finita dos dois processos coincidem.

O segundo passo consiste em verificar que a representação equivalente, X', tem de facto o gerador infinitesimal referido. Para tal basta provar que, com $F_t = F_t^V \vee F_t^{y'}$ e

$Q\left(f\left(x\right)\right)=\int f\left(y\right)\mu'\left(x,dy\right),$

$$\begin{aligned}
T\left(s\right)f\left[X'\left(t\right)\right] &= E\left[f\left(X'\left(t+s\right)\right)|F_t\right] \\
&= E\left[f\left(y'\left\{V\left(t+s\right)-V\left(t\right)+V\left(t\right)\right\}\right)|F_t\right] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda s}\frac{\left(\lambda s\right)^k}{k!}E\left[f\left(y'\left\{k+V\left(t\right)\right\}\right)|F_t\right] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda s}\frac{\left(\lambda s\right)^k}{k!}Q^k f\left[X'\left(t\right)\right].
\end{aligned}$$

onde T é o semigrupo que caracteriza o processo de Markov em causa.

Passamos a provar este resultado, passagem a passagem.

a) A segunda igualdade resulta da definição de X', somando e subtraindo $V\left(t\right)$ no argumento de y'.

b) A terceira igualdade resulta de $V\left(t+s\right)-V\left(t\right)$ seguir uma lei de Poisson de parâmetro λs e ser independente de F_t.

c) A quarta igualdade resulta de ser

$$E\left[f\left(y'\left\{k+V\left(t\right)\right\}\right)|F_t\right]=Q^k f\left[X'\left(t\right)\right]$$

com $k=0,1,...,$ $t\geq 0$, o que advém do seguinte. Para $A\in F_t^V$ e $B\in F_t^{y'}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap B\cap\{V(t)=l\}} f\left(y'\left(k+V\left(t\right)\right)\right)dP &= \int_{A\cap B\cap\{V(t)=l\}} f\left(y'\left(k+l\right)\right)dP = \\
&= P\left[A\cap\left\{V\left(t\right)=l\right\}\right]\int_B f\left(y'\left(k+l\right)\right)dP = \\
&= P\left[A\cap\left\{V\left(t\right)=l\right\}\right]\int_B Q^k f\left[y'\left(l\right)\right]dP = \\
&= \int_{A\cap B\cap\{V(t)=l\}} Q^k f\left[X'\left(t\right)\right]dP,
\end{aligned}$$

em que a terceira passagem resulta de, pela propriedade de Markov para y', se verificar

$$E\left[f\left(y'\left\{k+l\right\}\right)\left|y'\left(0\right),...,y'\left(l\right)\right.\right]=Q^k f\left[y'\left(l\right)\right]\quad(k,l=0,1,...).$$

A definição e o lema apresentados a seguir serão utilizados na conclusão desta passagem.

Definição 3.2.18 *Uma colecção D de subconjuntos de Ω é uma classe de Dynkin se se verificar o seguinte:*

a) $\Omega \in D$,

b) se $A, B \in D$ *e* $A \subset B$, *então* $B - A \in D$ *e*

c) $\{A_n\} \subset D$ *e* $A_1 \subset A_2 \subset ...$,*então* $\cup_n A_n \in D$.

Lema 3.2.19 *(Teorema de classe de Dynkin) Seja* C_1 *uma colecção de subconjuntos de* Ω *tal que se* $A, B \in C_1$, *então* $A \cap B \in C_1$. *Seja* C_2 *uma classe de Dynkin tal que* $C_1 \subset C_2$. *Então,* $\sigma(C_1) \subset C_2$.

$\left\{A \cap B \cap \{V(t) = l\} : A \in F_t^V, B \in F_t^{y'}, l = 0, 1, ...\right\}$ é fechado em relação à intersecção finita e gera F_t, logo pelo teorema de classe de Dynkin, temos:

$$\int_C f\left(y'\{k + V(t)\}\right) dP = \int_C Q^k f\left[X'(t)\right] dP$$

para todo o $C \in F_t$.

Sendo

$$Af(x) = \lambda \int \left[f(y) - f(x)\right] \mu'(x, dy) = \lambda (Q - I) f(x)$$

e portanto

$$T(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} Q^k = e^{-\lambda t} e^{\lambda t Q} = e^{\lambda t (Q - I)} = e^{tA},$$

onde

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + ...$$

Daqui resulta a partir da conjugação de 2.4 e 2.7 no primeiro capítulo de [EK], que A é o gerador infinitesimal correspondente ao semigrupo T.

3.2.4 Processo pontual marcado

A parte de trajectórias correspondente às descontinuidades, no processo que nos importa é modelada através de um processo pontual marcado, da forma apresentada por Jacobsen em [J1], e cujos aspectos essenciais passamos a expor.

Definição 3.2.20 *Um processo pontual marcado é uma sucessão* $\{\tau_n, y_n\}$ *de variáveis aleatórias onde os* τ_n *tomam valores em* $\overline{\mathcal{R}}^+$ *e formam uma sucessão crescente para* ∞, *e os* y_n *no espaço das marcas* $\overline{E} = E \cup \{\nabla\}$ *sendo* ∇ *o estado que representa acontecimentos que nunca ocorrem, definido de modo a que* y_n *esteja definido para todo o* n.

Verifica-se

$$P\left(\{\tau_n < \infty\} \cap \{y_n \in E\}\right) = P\left(\tau_n < \infty\right) \text{ e } P\left(\{\tau_n = \infty\} \cap \{y_n = \nabla\}\right) = P\left(\tau_n = \infty\right).$$

$\{\tau_n\}$ é um processo pontual. Ξ é uma $\sigma-$álgebra associada a E.

Definição 3.2.21 *Uma medida aleatória de contagem associada ao processo pontual marcado* $\{\tau_n, y_n\}$ *é dada por*

$$\mu = \sum_{n\geq 1} 1_{(\tau_n, y_n)}.$$

Está definida sobre $\mathcal{R}\times E$ e, no estado ω, toma o valor 1 no ponto $(\tau_n(\omega), y_n(\omega))$ e 0 caso contrário.

É possível construir um processo deste tipo definindo sucessivamente a probabilidade de transição para τ_{n+1} dados $(\tau_1, ..., \tau_n, y_1, ..., y_n)$ e para y_{n+1} dados $(\tau_1, ..., \tau_n, \tau_{n+1}, y_1, ..., y_n)$. A primeira aplicação é designada por $P^{(n)}$ e a segunda por $\pi^{(n)}$.

Sendo a filtração $\{F_t\} = \sigma\left(\{\mu([0,s], A) : 0 \leq s \leq t,\ A \in \Xi\}\right)$, podemos definir os conceitos de mensurabilidade, adaptação e previsibilidade de forma similar ao que se fez atrás.

Definição 3.2.22 *A medida de falha v de uma medida de probabilidade P referente a uma variável aleatória X é uma medida positiva com $v << P$ e*

$$\frac{dv}{dP}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\overline{P}(t)} & , \text{ se } \overline{P}(t) > 0 \\ 0 & , \text{ se } \overline{P}(t) = 0 \end{cases},$$

onde $\overline{P}(t) = 1 - P(X \leq t)$.

Este conceito permitirá definir a medida de compensação correspondente à medida de contagem apresentada atrás. A noção de compensação está ligada à obtenção de uma martingala a partir da diferença entre estas duas medidas.

$v^{(n)}$ representa a função de falha de $P^{(n)}$, dado $\xi_n = (\tau_1, ..., \tau_n, y_1, ..., y_n)$.

Um processo pontual marcado pode ser visto como uma variável aleatória com valores em

$$K = \left\{(\{\tau_n\}, \{y_n\}) \in \mathcal{R}^{\mathcal{N}} \times E^{\mathcal{N}} : y_n \in E \text{ se e só se } \tau_n < \infty\right\}.$$

$\mathcal{K}$ é a $\sigma-$álgebra de subconjuntos de K gerada pelas coordenadas τ_n e y_n. Considere-se a probabilidade Q definida sobre $(K, \mathcal{K})$ e representativa do processo em causa. Q é gerada pela probabilidades de transição $\left(P^{(n)}, v^{(n)}\right)$ no sentido de que $P^{(0)}$ é a probabilidade de ocorrência de $\tau_1,\ P^{(n)}$ é a probabilidade condicional de ocorrência de τ_{n+1} dado ξ_n e $\pi^{(n)}$ é a probabilidade condicional de ocorrência de y_{n+1} dado $(\tau_1, ..., \tau_n, \tau_{n+1}, y_1, ..., y_n)$.

Definição 3.2.23 *O compensador total para Q é $\Lambda_t = \sum_{n=0}^{N_t} v_{\xi_n}^{(n)} (]\tau_n, \tau_{n+1} \wedge t])$ onde N é o processo de contagem correspondente ao processo pontual $\{\tau_n\}$. Seja $A \in \Xi$ e $N(A)$ o respectivo processo de contagem. O seu compensador em Q é dado por $\Lambda_t(A) = \int_{]0,t]} \pi_{\xi_{s-},s}^{(N_{s-})}(A)\Lambda(ds)$ onde ξ_{s-}, s designa o ponto $(\tau_1, ..., \tau_n, t, y_1, ..., y_n)$.*

Definição 3.2.24 *Seja $C \in B_0 \otimes \Xi$ onde B_0 é a $\sigma-$álgebra boreliana correspondente a $[0, \infty[$. A medida de compensação para Q é dada por $\Lambda_t(C) = \int_{\mathcal{R}^+} \int_E 1_C(s, y)\, \pi_{\xi_{s-},s}^{(N_{s-})}(dy)\Lambda(ds)$.*

Note-se que

$$\begin{aligned} d\Lambda(t) &= \sum_{n=0}^{N_t} 1_{t\in]\tau_n,\tau_{n+1}]} dv^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{N_t} 1_{t\in]\tau_n,\tau_{n+1}]} \frac{dP^{(n)}}{\overline{P}^{(n)}}(t) \\ &= -\sum_{n=0}^{N_t} 1_{t\in]\tau_n,\tau_{n+1}]} \frac{d\overline{P}^{(n)}}{\overline{P}^{(n)}}(t) = -\sum_{n=0}^{N_t} 1_{t\in]\tau_n,\tau_{n+1}]} d\ln \overline{P}^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Definição 3.2.25 *λ é um processo de intensidade para Q se $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$ Q-q.c.*

Podemos identificar λ_t com $\frac{\frac{dP^{(n)}}{dt}}{\overline{P}^{(n)}}(t)$ para $t \in]\tau_n, \tau_{n+1}]$.

Os compensadores que descrevemos são previsíveis. Por outro lado, a medida Q é univocamente determinada pelo seu compensador Λ.

Uma Q-martingala local é definida em função da filtração $\{F_t\}$. Os processos $N - \Lambda$ e $N(A) - \Lambda(A)$ são Q-martingalas locais, constituindo este facto uma forma de caracterizar os compensadores. Isto prova-se através da verificação do seguinte:

$$E[N_{\tau_1 \wedge t}(A)] = E[\Lambda_{\tau_1 \wedge t}(A)].$$

De facto,

$$E[N_{\tau_1 \wedge t}(A)] = Q(\tau_1 \le t, y_1 \in A) = \int_0^t \pi_s^{(0)}(A) P^{(0)}(ds)$$

e

$$E[\Lambda_{\tau_1 \wedge t}(A)] = E\left[\int_{]0,\tau_1 \wedge t]} \pi_s^{(0)}(A) v^{(0)}(ds)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{P}^{(0)}(t)\int_0^t \pi_s^{(0)}(A)\, v^{(0)}(ds) + \int_0^t \left(\int_0^u \pi_s^{(0)}(A)\, v^{(0)}(ds)\right) P^{(0)}(du) \\
&= \overline{P}^{(0)}(t)\int_0^t \pi_s^{(0)}(A)\, v^{(0)}(ds) - \int_0^t \left(\int_0^u \pi_s^{(0)}(A)\, v^{(0)}(ds)\right) \overline{P}^{(0)}(du) \\
&= \int_0^t \pi_s^{(0)}(A)\, \overline{P}^{(0)}(s)\, v^{(0)}(ds) = \int_0^t \pi_s^{(0)}(A)\, P^{(0)}(ds),
\end{aligned}
$$

onde a quarta igualdade é obtida através de integração por partes.

Consideremos uma classe de integrandos previsíveis $\{S_t^y\}$ representada por S. S_t^y é, para cada t e y, uma aplicação definida sobre o espaço das medidas aleatórias de contagem e toma valores em $\mathcal{R}$.

Definição 3.2.26 *O integral estocástico* $N_t(S) = \int_{]0,t]\times E} S_s^y \mu(ds, dy)$ *é dado por* $\sum_{n\geq 1} S_{\tau_n}^{y_n}$ $(\tau_n < \infty)$.

Definição 3.2.27 *O integral estocástico* $\Lambda_t(S)(\mu) = \int_{]0,t]\times E} S_s^y(\mu)\, \Lambda(\mu, ds, dy)$ *é bem definido se* $S \geq 0$ *e é* $Q-$*q.c. finito se* $\sup\limits_{s\leq t, y\in E} S_s^y$ *o for para todo o* t.

Pode-se provar que o integral estocástico $N_t(S) - \Lambda_t(S)$ é uma $Q-$martingala local.

Enunciamos de seguida a fórmula de Itô no caso de um processo contínuo por secções, X. Ou seja, um processo de trajectórias contínuas entre os tempos de paragem dos saltos identificados na medida aleatória de contagem considerada.

Teorema 3.2.28 *Seja* Λ *contínuo e* X *um processo adaptado e contínuo por secções. Então,* $X_t = X_0 + C_t + M_t(S)$ *onde* C *é um processo contínuo e* $M(S)$ *é uma martingala local da forma* $N(S) - \Lambda(S)$. *O integrando* S *é constituído, para cada* t *e* y, *pelo salto do processo* X, *para esses* t *e* y, *dada a informação anterior.* C *é dado por* $X^c + \Lambda(S)$ *onde* X^c *é a parte contínua de* X. *Ou seja, de facto temos*

$$X_t = X_0 + X_t^c + \Lambda_t(S) + [N_t(S) - \Lambda_t(S)].$$

3.3 O modelo de Jacobsen com saltos positivos

Apresentamos um modelo baseado no de Jacobsen ([J3]) em que um processo X modela a evolução de uma grandeza sujeita a risco e inclui uma cadeia de Markov homogénea, J, que altera em tempos aleatórios o comportamento de X:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \beta_{J_s} ds + \int_0^t \sigma_{J_{s-}} dB_s + \sum_{n=1}^{N_t} U_n.$$

B é um movimento browniano. A parte de difusão é composta pela soma dos integrais. O somatório é um processo de salto em que os saltos U são independentes e identicamente distribuídos. Neste caso, altera-se o modelo de Jacobsen de forma a incluir, para além dos saltos negativos, os saltos positivos os quais aliás são essenciais na consideração da possibilidade de se regressar ao ponto inicial de forma descontínua (i.e. através de salto). Para simplificar, supomos que as intensidades, λ_i, de saltos positivos e negativos coincidem em todo o estado i da cadeia, e que há uma distribuição única para as dimensões dos saltos (F_U) onde a massa em zero é nula. Designamos por F_U^+ e F_U^-, respectivamente, as partes da distribuição referentes aos saltos positivos e negativos (estes em valor absoluto no argumento). Ou seja,

$$F_U(x) = \begin{cases} F_U(0) - F_U^-(-x) & , \text{se } x \leq 0 \\ F_U(0) + F_U^+(x) & , \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Designamos por L_U^+ e L_U^- as respectivas transformadas de Laplace. x_0 é a reserva inicial. N é um processo de contagem.

Uma cadeia de Markov em tempo contínuo, X, é um processo estocástico sobre E tal que, $\forall k \in \mathcal{N}\ \forall t \geq 0\ \forall i, j, i_1, ..., i_k \in E\ \forall s_1, ..., s_k \in \mathcal{R}^+\ s_l \leq t\ (1 \leq l \leq k)$,

$$P\left(X(t+s) = j \,|X(t) = i, X(s_1) = i_1, ..., X(s_k) = i_k\right) = P\left(X(t+s) = j \,|X(t) = i\right).$$

É homogéneo se o segundo membro é independente de t.

Nesse caso, o processo é caracterizado através das intensidades de transição em cada estado da cadeia. A distribuição do lapso de tempo entre duas transições exponencial, dado o estado da cadeia que se verifica nesse lapso de tempo.

O conceito é desenvolvido em pormenor em [[J1]].

A cadeia J, de espaço de estados E, modela, além dos parâmetros da difusão β e σ, a intensidade λ do processo de saltos. Para $s, t \in \Re^+$ e $P(J(t) = i) \neq 0$,

$$p_{ij}(s) = P\left(J(t+s) = j \,|J(t) = i\right).$$

A matriz P de probabilidades de transição verifica: $P(0) = I$ e $\lim_{t \downarrow 0} P(t) = I$.

A intensidade de transição do estado i para o estado $j \neq i$ sem que haja salto, que consiste na variação infinitesimal na respectiva probabilidade de transição p_{ij}, é designada por q_{ij}. Esta vem assim dada por

$$q_{ij} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

A família de probabilidades de transição deste tipo é o semigrupo que permite caracterizar uma cadeia de Markov homogenea, sendo as respectivas intensidades de transição designadas por características locais do dito semigrupo. Note-se que, neste caso, é o par (J, N) que constitui uma cadeia de Markov homogénea. A matriz constituída pelos coeficientes q_{ij} é representada por Q, sendo $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_i$. Esta caracteristica decorre do facto de a soma das probabilidades de transição a partir de um estado i ser constante (igual a 1). De facto, vem

$$\sum_{j \neq i} p_{ij}(h) + p_{ii}(h) = 1$$

e $p_{ii}(0) = 1$ e portanto

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} + q_{ii} = \sum_{j \neq i} \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} + \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\sum_{j \neq i} p_{ij}(h) + p_{ii}(h) - 1}{h} = 0.$$

A intensidade de salto no estado i é designada por λ_i. Quando há um salto volta-se à situação inicial em que a probabilidade de ocorrência de um estado j, $P(J(0) = j)$, é designada por a_j. λ é o vector dos parâmetros λ_i e a^T é o vector linha das probabilidades a_j.

Consideramos a matriz $Q(z, \theta)$ cujo elemento genérico é dado por

$$q_{ij}(z, \theta) = \begin{cases} \phi_i(z) - q_i - \lambda_i - \theta \text{ , se } i = j \\ q_{ij} \qquad\qquad\qquad\quad \text{, se } i \neq j \end{cases},$$

sendo $\phi_i(z) = \beta_i z + \frac{1}{2}\sigma_i^2 z^2$ e $\theta > 0$.

Passamos a expor o conceito de distribuição tipo fase que utilizaremos de seguida. Consideramos o contexto de uma cadeia de Markov, J^*, de espaço de estados $E \cup \{\nabla\}$ com $E = \{1, ..., p\}$ e distribuição inicial $a = \{a_i\}_{i \in E}$. ∇ é um estado de absorção, ou seja, um estado que se caracteriza por, uma vez atingido, não se poder aceder a qualquer outro estado. Uma distribuição de probabilidade tipo fase é a lei do tempo até à absorção no estado ∇, τ_∇.

Admite-se a hipótese de que o estado de absorção é atingível a partir de qualquer outro estado eventualmente após passagens intermédias.

Que tipo de distribuição é esta? Consideremos a matriz das intensidades de transição de J^*:

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1\times p} \\ q & R \end{bmatrix}$$

em que $R_{(p\times p)}$ é a submatriz referente à intensidade de transição entre os estados de E e q o vector de intensidades de transição para ∇. R e q verificam as seguintes condições:

1) $q_{ii} \leq 0$;

2) $q_{ij} \geq 0$ $(i \neq j)$;

3) $\sum_{j\in E} q_{ij} \leq 0$ e $q = -R\mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é um vector coluna de 1's.

A distribuição tipo fase pode ser entendida como uma generalização da lei exponencial em que R desempenha um papel semelhante ao do parâmetro daquela distribuição. Vem

$$P\left(\tau_{\nabla} > t\right) = a^T e^{tR}\mathbf{1} \quad (t \geq 0)\,.$$

Os resultados referentes a este conceito serão detalhados num capítulo posterior. Para já, basta reter o seguinte.

Seja T_n o tempo de paragem representativo do momento em que ocorre o n-ésimo salto em X, ou seja

$$T_n = \inf\left\{t \geq 0 : N_t = n\right\}. \tag{3.1}$$

Verifica-se que $V_n = T_n - T_{n-1}$, o lapso aleatório de tempo entre o $(n-1)$-ésimo e o n-ésimo salto, segue uma distribuição tipo fase. Estes lapsos de tempo têm a mesma distribuição para todo o n. Consideremos uma variável aleatória V, seguindo essa distribuição. Sendo Q_V uma matriz de elemento genérico:

$$q_{V,ij} = \begin{cases} q_{ij} & \text{, se } i \neq j \\ -\left(q_i + \lambda_i\right) & \text{, se } i = j \end{cases},$$

aquela distribuição vem dada por

$$P\left(V_n > v\right) = \begin{cases} a^T e^{vQ_V}\mathbf{1} & \text{, se } v > 0 \\ 1 & \text{, caso contrário} \end{cases}.$$

A justificação para que tenhamos uma distribuição tipo fase neste caso é imediata se, tomando como ponto de partida o estado i da cadeia J, identificarmos como estado de absorção a ocorrência de salto e E como o conjunto de estados de J. Note-se que Q_V será correspondente à matriz Q (de intensidades de transição referente aos estados de J). A soma dos elementos da linha i é igual a $\sum_{j\neq i} q_{ij} - q_i - \lambda_i = -\lambda_i$, ou seja, q coincide com λ, vector das intensidades de salto, i.e. de transição para o que definimos como estado de absorção.

Pretende-se obter a distribuição conjunta do tempo de ruína T_r dado por

$$T_r = \inf\left\{t \geq 0 : X_t < 0\right\}$$

e do valor do processo nesse momento $Y_r = -X_{Tr}$. Consideram-se dados os valores iniciais para X e J, designados respectivamente por x_0 e i_0. O resultado pretendido pode ser especificado a partir da respectiva transformada de Laplace $\phi^{x_0,i_0}_{T_r,Y_r}(\theta,\zeta) = E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta Tr - \zeta Yr}\right]$ cujo cálculo se efectua como se segue. Considera-se para as transformadas de Laplace $L^{\pm}_U$ a forma

$$L^{\pm}_U(v) = \frac{P^{\pm}_U(v)}{R^{\pm}_U(v)}$$

sendo o denominador um polinómio de grau $m^{\pm}$ e o numerador um polinómio de grau inferior a $m^{\pm}$. Sejam γ_k as soluções com parte real negativa da equação de Cramèr-Lundberg,

$$R^{-}_U(\gamma_k)\, R^{+}_U(-\gamma_k) = -a^T Q^{-1}(\gamma_k,\theta)\,\lambda\left[P^{-}_U(\gamma_k)\, R^{+}_U(-\gamma_k) + P^{+}_U(-\gamma_k)\, R^{-}_U(\gamma_k)\right]. \quad (3.2)$$

Esta equação é definida de maneira tal que as suas soluções permitem obter o resultado do teorema 3.3.5 adiante, como decorre da prova do mesmo. A inclusão dos saltos positivos no modelo leva a que, na equação de Cramér-Lundberg, surjam as transformadas de ambas as partes (negativa e positiva) de forma diversa do que sucede em [J3] (equação 3.8).

O motivo de considerar soluções com parte real negativa prende-se com o facto de, na prova do teorema 3.3.5, se pretender garantir que integrais do tipo $\int_y^\infty e^{(\gamma_k - v)x}dx$ são finitos. Na prova do teorema 3.3.3, ter-se-á em conta que as raízes do polinómio $R^{\pm}_U(.)$ têm parte real negativa. Isto sucede porque $R^{\pm}_U(.)$ é o denominador da transformada de Laplace $L^{\pm}_U(.)$ e esta está sempre definida quando o argumento tem parte real positiva (que nesse caso não pode, portanto, ser raíz de $R^{\pm}_U(.)$). Ora, a partir do número de raízes de $R_U^{\pm}(.)$ pode-se, como se verá no lema, determinar o número de soluções da equação de Cramér-Lundberg no mesmo domínio (conjunto dos complexos com parte real negativa). Note-se que as raízes γ_k de $R_U^{+}(-\gamma_k)$ têm parte real positiva (são as simétricas das raízes de $R_U^{+}(.)$).

Considera-se a seguinte hipótese de irredutibilidade. Para todo o $i \in E$, ou $a_i > 0$ ou existem $i_0, ..., i_n \in E$ $(n \geq 1)$ com $i_n = i$ e $i_k \neq i_{k-1}$ tais que $a_{i_0} > 0$ e $q_{i_{k-1},i_k} > 0$ para todo o k (todo o estado i pode ser atingido). Para todo o $i \in E$, ou $\lambda_i > 0$ ou existem $i_0, ..., i_n \in E$ $(n \geq 1)$ com $i_0 = i$ e $i_k \neq i_{k-1}$ tais que $\lambda_{i_n} > 0$ e $q_{i_{k-1},i_k} > 0$ para todo o k (a ruína através de salto pode ser atingida a partir de qualquer estado i). Esta última parte da hipótese foi já referida acima na apresentação das distribuições tipo fase.

Apresentamos nos dois lemas seguintes um conjunto de resultados preliminares.

Lema 3.3.1 *(i) Se $\theta \geq 0$ e $y \in \Re$, então $Q(iy, \theta)$ é não singular.*

(ii) $\forall \theta \geq 0$, $y \in \Re$ e $j \in E$

$$\left|\left(Q^{-1}(iy,\theta)\lambda\right)_j\right| \leq \frac{q_j + \lambda_j}{q_j + \lambda_j + \theta}.$$

Em particular, se $\theta > 0$

$$\left|\left(Q^{-1}(iy,\theta)\lambda\right)_j\right| < 1.$$

Prova. Com $z_i \in \mathbb{C}$ para $i \in E$, defina-se $\widehat{Q} = [\widehat{q_{ij}}]$ através de

$$\widehat{q_{ij}} = \begin{cases} z_i - q_i - \lambda_i \text{ , se } i = j \\ q_{ij} \qquad\qquad \text{, se } i \neq j \end{cases}.$$

Se $\forall i\ z_i = \phi_i(z) - \theta$, então $\widehat{Q} = Q(z, \theta)$.

Como $Re(\phi_i(iy)) = -\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \leq 0$, basta provar que sempre que $Re(z_i) \leq 0\ \forall i$, então $\widehat{Q}$ é não singular e

$$\forall j\ \ |u_j| \leq \frac{q_j + \lambda_j}{q_j + \lambda_j + c}$$

com $u_j = \left(\widehat{Q}^{-1}\lambda\right)_j$ e $c = \min|\text{Re}(z_i)|$, o qual é superior a θ quando $z_i = \phi_i(iy) - \theta$.

(i) Provaremos por absurdo que $\widehat{Q}$ é não singular.

Seja $v = (v_j)$ um vector coluna não nulo tal que $\widehat{Q}v = 0$. Então,

$$\forall i\ \sum_{j \neq i} q_{ij} v_j + \widehat{q_{ii}} v_i = 0$$

e $\mathrm{Re}\left(\widehat{q_{ii}}\right) < 0$ porque $\mathrm{Re}\left(z_i\right) \leq 0$ e $q_i + \lambda_i > 0$ por hipótese. Logo,

$$v_i = -\frac{\sum_{j\neq i} q_{ij} v_j}{\widehat{q_{ii}}}$$

o que implica que

$$|v_i| \leq \frac{q_i \max |v_j|}{q_i + \lambda_i + c}.$$

Note-se que

$$\begin{aligned} |\widehat{q_{ii}}| &= |z_i - q_i - \lambda_i| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\left(z_i\right) - q_i - \lambda_i\right)^2 + \mathrm{Im}\left(z_i\right)^2} \\ &\geq |\mathrm{Re}\left(z_i\right) - q_i - \lambda_i| = |\mathrm{Re}\left(z_i\right)| + q_i + \lambda_i \geq c + q_i + \lambda_i. \end{aligned}$$

Seja i_0 tal que $|v_{i_0}| = \max |v_j|$, positivo por hipótese. Da última desigualdade concluimos que $\lambda_{i_0} = c = 0$. Sabemos que por hipótese $q_{i_0} > 0$.

Por outro lado, considerando um qualquer estado $j_0 \neq i_0$ tal que $q_{i_0 j_0} > 0$, vem $|v_{j_0}| = |v_{i_0}|$ dado que $|v_{i_0}|$ se pode escrever simultaneamente como máximo e combinação linear, com soma dos pesos inferior a 1, dos $|v_{j_0}|$ com os quais tem intensidade de transição não nula. De facto,

$$|v_i| = \left| -\frac{\sum_{j\neq i} q_{ij} v_j}{\widehat{q_{ii}}} \right| \leq \sum_{j\neq i} \left| \frac{q_{ij}}{\widehat{q_{ii}}} v_j \right|$$

e $|\widehat{q_{ii}}| = |z_i - q_i| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\left(z_i\right) - q_i\right)^2 + \mathrm{Im}\left(z_i\right)^2} \geq q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}$.

Nesse caso, $q_{j_0} > 0$ e $\lambda_{j_0} = 0$, e procedendo recursivamente verifica-se que $q_j > 0$ e $\lambda_j = 0$ para todo o estado j que se pode atingir a partir de i_0, através das intensidades de transição q_{ij}. Chegamos a uma contradição pois pela hipótese de irredutibilidade deve existir um estado j^* atingível a partir de i_0, por q_{ij}, para o qual $\lambda_{j^*} > 0$.

(ii) Da definição de u resulta que

$$\lambda_i = \left(\widehat{Q} u\right)_i = \sum_j \widehat{q_{ij}} u_j$$

e portanto

$$u_i = \frac{\lambda_i - \sum_{j\neq i} q_{ij} u_j}{\widehat{q_{ii}}}$$

o que implica que

$$\forall i \quad |u_i| \leq \frac{\lambda_i + q_i \max |u_j|}{\lambda_i + q_i + c}. \tag{3.3}$$

Seja i_0 tal que $|u_{i_0}| = \max |u_j|$, não nulo dado que $u = \widehat{Q}^{-1}\lambda$ com $\lambda \neq 0$. Verifica-se que $\lambda_{i_0} + c > 0$, pois se fosse $\lambda_{i_0} + c = 0$ viria

$$u_{i_0} = \frac{\sum_{j \neq i} q_{i_0 j} u_j}{q_{i_0}}$$

o que obrigaria a que $|u_{i_0}| = |u_j|$ para todos os estados j que se podem atingir a partir de i_0 por q_{ij}. Tal resulta numa contradição da hipótese de irredutibilidade, como vimos atrás.

Dado que, por (3.3),

$$|u_{i_0}| \leq \frac{\lambda_{i_0} + q_{i_0} |u_{i_0}|}{\lambda_{i_0} + q_{i_0} + c}$$

vem

$$|u_{i_0}| \leq \frac{\lambda_{i_0}}{\lambda_{i_0} + c} \leq 1.$$

Majorando em (3.3)

$$\forall i \quad |u_i| \leq \frac{\lambda_i + q_i \times 1}{\lambda_i + q_i + c} = \frac{\lambda_i + q_i}{\lambda_i + q_i + c}.$$

■

Lema 3.3.2 *(i) Para todo o $\theta > 0$, o polinómio $z \to \det Q(z, \theta)$ tem grau $d = 2\sum_{j \in E} 1_{\{\sigma_j^2 > 0\}} + \sum_{j \in E} 1_{\{\sigma_j^2 = 0, \beta_j \neq 0\}}$;*

(ii) Para todo o $\theta > 0$, o polinómio $z \to \det Q(z, \theta)$ tem p_c raízes z com $\operatorname{Re}(z) < 0$, sendo p_c o número de maneiras de atingir a ruína continuamente, ou seja, através da parte de difusão, em cada um dos estados da cadeia.

Prova. (i) Seja

$$E' = \left\{ i \in E : \sigma_i^2 > 0 \text{ ou } \beta_i \neq 0 \right\}.$$

Sabe-se que

$$\det Q(z, \theta) = \sum_{\pi} sgn(\pi) \prod_{i \in E} q_{i,\pi(i)}(z, \theta)$$

sendo π uma permutação genérica dos estados de E. z só aparece na diagonal principal e apenas se $i \in E'$. Logo qualquer termo do somatório é polinómio de grau não superior a d e igual a d se e só se $\pi(i) = i$ para $i \in E'$. O valor d resulta de cada parcela interveniente no determinante ser o produto de polinómios, um para cada estado i da cadeia, de grau 2 quando $\sigma_i^2 \neq 0$ e caso contrário de grau 1 se $\beta_i \neq 0$. Seja $Q_{E/E'}(\theta)$ a submatriz quadrada de Q obtida excluindo as linhas e colunas correspondentes a E' e portanto não dependente de z. O coeficiente correspondente a z^d no determinante de Q é, a menos do sinal,

$$\left(\det Q_{E/E'}\left(\theta\right)\right) \prod_{i\in E':\sigma_i^2>0} \left(\frac{1}{2}\sigma_i^2\right) \prod_{i\in E':\sigma_i^2=0} \beta_i.$$

Mas $Q_{E/E'}\left(\theta\right)$ é uma matriz de subintensidades logo é não singular e o seu determinante não nulo. De tudo isto concluimos que $\det Q\left(z,\theta\right)$ é um polinómio em z de grau d.

(ii) Demonstramos o pretendido em primeiro lugar para o caso particular da matriz $\widetilde{Q}$ obtida a partir de Q substituindo todos os elementos q_{ij} $\left(i\neq j, i\in E', j\in E\right)$ por 0. Então, a menos do sinal,

$$\det \widetilde{Q}\left(z,\theta\right) = \left(\det Q_{E/E'}\left(\theta\right)\right) \prod_{i\in E'} \left(\phi_i\left(z\right) - q_i - \lambda_i - \theta\right).$$

Quando $i\in E'$ e $\sigma_i^2>0$, $\phi_i\left(z\right)-q_i-\lambda_i-\theta$ é um polinómio de grau 2 e tem duas raízes reais. Para $z=0$, este toma o valor $-q_i-\lambda_i-\theta<0$ e quando z é real e tende para $\pm\infty$, tende para $+\infty$. Logo, tem duas raízes reais, uma positiva e uma negativa.

Que as raízes são reais resulta do seguinte. Seja uma raiz da forma $z=z_1+iz_2$. Então,

$$\beta_i z_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\left(z_1^2 - z_2^2\right) - q_i - \lambda_i - \theta = 0,$$

e

$$\beta_i z_2 + \sigma_1^2 z_1 z_2 = \left(\beta_i + \sigma_1^2 z_1\right) z_2 = 0.$$

Tal obriga a que seja $z_2=0$. Caso contrário, teriamos $\left(\beta_i+\sigma_1^2 z_1\right)=0$ e obteriamos

$$\beta_i z_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\left(z_1^2 - z_2^2\right) - q_i - \lambda_i - \theta = \frac{1}{2}\sigma_1^2\left(-z_1^2 - z_2^2\right) - q_i - \lambda_i - \theta < 0.$$

Quando $i\in E'$ e $\sigma_i^2=0$, $\phi_i\left(z\right)-q_i-\lambda_i-\theta$ é um polinómio de grau 1. A raíz do polinómio terá o sinal de β_i dado que para que o polinómio se anule terá que ser $\beta_i z>0$. Logo, todas as raízes são reais e p_c delas são negativas (quando $\sigma_i^2>0$ ou quando $\sigma_i^2=0$ e $\beta_i<0$; este último caso poderá ser excluido à partida por exemplo em modelos de avaliação que impliquem um drift positivo para garantir ausência de arbitragem).

Passamos a considerar o caso geral a partir do caso particular que vimos. Seja $Q_s\left(z,\theta\right)$ $\left(0\leq s\leq 1\right)$ a matriz de elementos

$$q_{s,ij}\left(z,\theta\right) = \begin{cases} q_{ij}\left(z,\theta\right) & \text{, se } i\in E/E', j\in E \\ \phi_i\left(z\right)-q_i-\lambda_i-\theta & \text{, se } i=j\in E' \\ sq_{ij} & \text{, se } i\in E', j\in E, i\neq j \end{cases}$$

de tal forma que $Q_1(z,\theta) = Q(z,\theta)$ e $\det Q_0(z,\theta) = \det \widetilde{Q}(z,\theta)$. Seja a aplicação $s \to \det Q_s(z,\theta)$. Quando s varia, não se altera o coeficiente de z^d em $\det Q_s(z,\theta)$. Logo, as raízes de $\det Q_s(z,\theta)$ são funções contínuas de s. No entanto, pelo lema 3.3.1, $\det Q_s(z,\theta)$ não tem raízes sobre $i\Re$, resultando que quando s varia entre 0 e 1 nenhuma raíz pode passar do semiplano $\mathrm{Re}(z) < 0$ para o semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$. Vimos no caso particular que $\det Q_0(z,\theta)$ tem p_c raízes com $\mathrm{Re}(z) < 0$ o que permite concluir de forma idêntica no que respeita a $\det Q_1(z,\theta) = \det Q(z,\theta)$. ■

Teorema 3.3.3 *A equação de Cramèr-Lundberg (3.2), com $\theta > 0$, tem $m^- + p_c$ soluções com parte real negativa.*

Prova. A equação pode ser escrita na forma alternativa:

$$R_U^-(\gamma_k)\, R_U^+(-\gamma_k) \det Q(\gamma_k,\theta) = -a^T Q^*(\gamma_k,\theta)\, \lambda \left[P_U^-(\gamma_k)\, R_U^+(-\gamma_k) + P_U^+(-\gamma_k)\, R_U^-(\gamma_k)\right]$$

onde Q^* designa a adjunta de Q.

Ambos os membros da equação são polinómios designados, respectivamente, por $P1$ (primeiro membro) e $P2$ (segundo membro). Pode-se provar, atendendo ao lema 3.3.2(i), que $P1$ tem grau $m^+ + m^- + d$. Dado que todo o menor de $Q(z,\theta)$ é um polinómio de grau menor ou igual a d, $P2$ tem grau menor ou igual a $(m^+ + m^- - 1) + d$, logo inferior a $m^+ + m^- + d$.

Para $\rho > 0$, define-se Γ_ρ como o interior do subconjunto de $\mathbb{C}$ determinado pela fronteira

$$\partial\Gamma_\rho = \{z : |z| = \rho, \mathrm{Re}(z) < 0\} \cup \{z : z = iy, -\rho \leq y \leq \rho\}$$

Para concluir o que pretendemos, recorreremos ao teorema de Rouché (ver [M]) que passamos a enunciar.

Teorema 3.3.4 *Sejam f e g funções analiticas numa região A excepto num número finito de zeros e pólos em A. Seja γ uma curva fechada em A homotópica a um ponto, não passando em nenhum pólo ou zero de f ou g, e tal que sobre γ se verifica*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Então, $Z_f - P_f = Z_g - P_g$, em que Z e P designam respectivamente o número de zeros e de polos da função em indice, contados com a respectiva multiplicidade.

■

Prova. (do teorema 3.3.3 - continuação) Apliquemos este teorema, fazendo $f = P1$ e $g = P1 - P2$ e atendendo a que estas funções têm apenas zeros e não polos. Terão o mesmo número de zeros em Γ_ρ desde que se verifique a condição do teorema:

$$\left|-a^T Q^* (z,\theta)\, \lambda \left[P_U^- (z)\, R_U^+ (-z) + P_U^+ (-z)\, R_U^- (z)\right]\right| = |P2\,(z)| <$$

$$< |P1\,(z)| = \left|R_U^- (z)\, R_U^+ (-z) \det Q\,(\gamma_k,\theta)\right| \qquad (z \in \partial\Gamma_\rho)\,.$$

Demonstremos que esta condição se verifica considerando os dois casos possíveis:

a) $z \in \partial\Gamma_\rho$ com parte real negativa. Neste caso, verifica-se a condição para ρ suficientemente elevado, dado que $P2$ tem grau inferior ao de $P1$.

b) $z \in \partial\Gamma_\rho$ com parte real nula, ou seja, z é da forma iy $(y \in \Re)$. A expressão a verificar é equivalente a

$$\left|-a^T Q^{-1} (iy,\theta)\, \lambda \left[P_U^- (iy)\, R_U^+ (-iy) + P_U^+ (-iy)\, R_U^- (iy)\right]\right| < \left|R_U^- (iy)\, R_U^+ (-iy)\right|.$$

dado que, pelo lema 3.3.1(i), $Q(iy,\theta)$ é não singular. Mas esta condição resulta do seguinte.

b$_1$) $\left|a^T Q^{-1} (iy,\theta)\, \lambda\right| \leq \sum_j a_j \left|\left(Q^{-1} (iy,\theta)\, \lambda\right)_j\right| < 1$

Isto verifica-se porque, pelo lema 3.3.1(ii), $\left|\left(Q^{-1} (iy,\theta)\, \lambda\right)_j\right| < 1$.

b$_2$)

$$\begin{aligned} & \frac{P_U^- (iy)\, R_U^+ (-iy) + P_U^+ (-iy)\, R_U^- (iy)}{R_U^- (iy)\, R_U^+ (-iy)} \\ = \;& L_U^- (iy) + L_U^+ (-iy) = \int_{-\infty}^{0} e^{iyu} F_U (du) + \int_{0}^{\infty} e^{iyu} F_U (du) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyu} F_U (du)\,, \end{aligned}$$

expressão esta que, sendo uma função característica, tem módulo não superior a um. Estamos a considerar a extensão de L a $\mathbb{C}$.

As equações $P1 - P2 = 0$ e $P1 = 0$ têm o mesmo número de soluções em Γ_ρ. Podemos concluir que se fizermos ρ tender para infinito, então as equações $P1 - P2 = 0$ e $P1 = 0$ têm o mesmo número de soluções com parte real negativa. Logo, o número de soluções com parte real negativa da equação $P1 = P2$ coíncide com o número de raízes com parte real negativa do polinómio $P1$, o qual por sua ver é igual a $m^- + p_c$ dado que, pelo lema 3.3.2(ii), o número de raízes com parte real negativa de $\det Q\,(\gamma_k,\theta)$ é p_c. ■

Teorema 3.3.5 *Seja $\theta > 0$. Considerando m^- das soluções, temos*

$$\begin{aligned} & \sum_{i\in E_c}\sum_{k=1}^{m^-} r_k \left(Q^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda\right)_i E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta T_r}; A_{c,i}\right] \\ & -\frac{\sum_{k=1}^{m^-} r_k\left(1+a^T Q^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)\right)}{L_U^-(\zeta)} E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta T_r-\zeta Y_r}; A_j\right] \\ = & \sum_{k=1}^{m^-} r_k\left(Q^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda\right)_{i_0} e^{\gamma_k x_0} \end{aligned}$$

onde E_j é o conjunto de estados a partir dos quais a ruína por salto é possível e E_c é o conjunto de estados a partir dos quais a ruína se pode atingir continuamente,

$$\begin{aligned} E(X;A) &= E(X\cdot I_A), \\ A_j &= \{X_{Tr}<0, T_r<\infty\}, \\ A_{c,i} &= \{X_{T_r}=0, J_{T_r}=i, T_r<\infty\} \;\; e \\ r_k &= \frac{-P_U^-(\gamma_K)}{\left[1+a^T Q^{-1}(\gamma_K,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_K)\right](\gamma_k-\zeta)\Pi_{|k}(\gamma_k)} \end{aligned}$$

com

$$\Pi_{|k}(v) = \Pi_{k':k'\neq k}(v-\gamma_{k'}). \tag{3.4}$$

Prova. Partimos do gerador infinitesimal para o processo de Markov homogeneo (X,J), que é

$$\begin{aligned} Af(x,i) &= \beta_i\partial_x f(x,i)+\frac{1}{2}\sigma_i^2\partial_{xx}^2 f(x,i)+\sum_{j\neq i} q_{ij}\left[f(x,j)-f(x,i)\right]+ \\ & +\lambda_i\sum_j a_j\int_{-\infty}^{\infty} F_U(dy)\left[f(x+y,j)-f(x,i)\right], \end{aligned}$$

em que f é, para todo o i, uma função limitada e de derivadas parciais em relação a x até à segunda ordem contínuas e limitadas para $x \geq 0$. Atendendo a que

$$F_U(dv)=\begin{cases} F_U^+(dv) & \text{, se } v>0 \\ -F_U^-(-dv) & \text{, se } v\leq 0 \end{cases},$$

obtemos

$$\begin{aligned} Af(x,i) &= \beta_i\partial_x f(x,i)+\frac{1}{2}\sigma_i^2\partial_{xx}^2 f(x,i)+\sum_{j\neq i} q_{ij}\left[f(x,j)-f(x,i)\right]+ \\ & +\lambda_i\sum_j a_j\int_0^{\infty} F_U^+(dy)\left[f(x+y,j)-f(x,i)\right]+ \\ & +\lambda_i\sum_j a_j\int_0^{\infty} F_U^-(dy)\left[f(x-y,j)-f(x,i)\right]. \end{aligned}$$

O gerador infinitesimal é obtido da seguinte forma.

Considera-se o processo $C_t = \sum_{n=1}^{N_t} U_n$ e a cadeia de Markov (J, C) com espaço de estados $G = E \times \Re$, a partir da qual se definem as seguintes medidas (ver [[J1]]).

μ é uma medida aleatória de contagem em $\Re \times G$ que conta as variações de (J, C), identifica as transições de J e o tamanho dos saltos em C. Vem dada por

$$\begin{aligned}
\mu\left([0,t] \times (\{j\} \times \{0\})\right) &= \sum_{0 \leq s \leq t} I_{\{J_{s-} \neq J_s = j\}}; \\
\mu\left([0,t] \times (\{j\} \times (h, \infty))\right) &= \sum_{n=1}^{N_t} I_{\{J_{T_n} = j, U_n > h\}},
\end{aligned}$$

onde T_n é definido em (3.1).

Nesta última linha consideramos as ocorrências de saltos de dimensão superior a h.

A medida de compensação de μ, que se representa por Λ, é dada por

$$\begin{aligned}
\Lambda\left([0,t] \times (\{j\} \times \{0\})\right) &= \int_0^t q_{J_{s-},j} I_{\{J_{s-} \neq j\}} ds; \\
\Lambda\left([0,t] \times (\{j\} \times (h, \infty))\right) &= \left(\int_0^t \lambda_{J_{s-}} ds\right) a_j \left(1 - F_U\right)(h).
\end{aligned}$$

Seja $\left\{S_t^{j,u}\right\}_{j \in E, u \geq 0}$ a família uniformemente limitada dos processos previsíveis na filtração gerada por (J, C, B), $\{F_t\}$, e mensuráveis em (t, j, u, ω). Os integrandos, em todas as datas e para todas as marcas, são q.c. finitos de forma a que o seu integral relativamente à medida de compensação seja q.c. finita.

Podemos definir a seguinte martingala em $\{F_t\}$:

$$M_0^0(S) = 0,$$

$$\begin{aligned}
M_t^0(S) &= \int_{(0,t]} \int_G S_s^{j,u} \left[\mu\left(ds, d(j,u)\right) - \Lambda\left(ds, d(j,u)\right)\right] \\
&= \sum_{0<s\leq t} \sum_{j \in E} S_s^{j,0} I_{\{J_{s-} \neq J_s = j\}} + \sum_{n=1}^{N_t} \sum_{j \in E} S_{T_n}^{j,U_n} I_{\{J_{T_n} = j\}} \\
&\quad - \int_0^t ds \sum_{j \in E} q_{J_{s-},j} I_{\{J_{s-} \neq j\}} S_s^{j,0} - \int_0^t ds \sum_{j \in E} \int_{-\infty}^{\infty} F_U(du)\, \lambda_{J_{s-}} a_j S_s^{j,u}.
\end{aligned}$$

O integral estocástico

$$M_t^0 = \int_0^t Z_s dB_s + M_t^0(S) \tag{3.5}$$

é uma $\{F_t\}$ −martingala se Z é limitado e $\{F_t\}$ −previsível. Façamos

$$\begin{aligned} S_t^{j,u} &= f\left(X_{t-}+u,j\right)-f\left(X_{t-},J_{t-}\right), \\ Z_t &= \begin{cases} \sigma_{J_{t-}}\partial_x f\left(X_{t-},J_{t-}\right) & \text{, se } t\leq T_r \\ 0 & \text{, se } t>T_r \end{cases}. \end{aligned}$$

Vamos provar que se regista a igualdade

$$f\left(X_{T_r\wedge t},J_{T_r\wedge t}\right)=f\left(X_0,J_0\right)+\int_0^{T_r\wedge t}Af\left(X_s,J_s\right)ds+M_t \tag{3.6}$$

sendo $M_t=M^0_{T_r\wedge t}$. A partir desta igualdade, considerando a respectiva esperança e apelando à definição de gerador infinitesimal, verifica-se que este vem dado por $Af\left(x,i\right)$. A prova da igualdade faz-se atendendo a que os saltos e transições são iguais para as expressões de ambos os membros e a que situando-nos num intervalo $]t_0,t_1[$ em que não haja saltosnem transições coincidem os diferenciais de ambos os membros. Estes são dados, a partir da fórmula de Itô, respectivamente por

$$\begin{aligned} df\left(X_t,J_t\right) &= df\left(X_{t_0}+\beta_{J_{t_0}}\left(t-t_0\right)+\sigma_{J_{t_0}}\left(B_t-B_{t_0}\right),J_{t_0}\right) \\ &= \left[\beta_{J_{t_0}}\partial_x f\left(X_t,J_{t_0}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2_{J_{t_0}}\partial^2_{xx}f\left(X_t,J_{t_0}\right)\right]dt+ \\ &\quad +\sigma_{J_{t_0}}\partial_x f\left(X_t,J_{t_0}\right)dB_t \end{aligned} \tag{3.7}$$

e

$$\begin{aligned} Af\left(X_t,J_t\right)dt+dM_t &= Af\left(X_t,J_{t_0}\right)dt+Z_t dB_t+dM_t^0\left(S\right) \\ &= Af\left(X_t,J_{t_0}\right)dt+\sigma_{J_{t_0}}\partial_x f\left(X_t,J_{t_0}\right)dB_t \\ &\quad -\sum_{j\in E}q_{J_{t_0-},j}I_{\left\{J_{t_0-}\neq j\right\}}\left[f\left(X_{t-},j\right)-f\left(X_{t-},J_{t_0-}\right)\right]dt \\ &\quad -\sum_{j\in E}\int_{-\infty}^{\infty}F_U\left(du\right)\lambda_{J_{t_0-}}a_j\left[f\left(X_{t-}+u,j\right)-f\left(X_{t-},J_{t_0-}\right)\right]dt. \end{aligned}$$

A demonstração prossegue em três fases.

1) Verifica-se em primeiro lugar que se $Af(x,i)=\theta f(x,i)$, para $x>0$, então vem

$$E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta T_r}f\left(X_{T_r},J_{T_r}\right);T_r<\infty\right]=E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta T_r}f\left(X_{T_r},J_{T_r}\right)\right]=f\left(x_0,i_0\right),$$

em que o indice x_0,i_0 representa o estado inicial de (X,J) suposto conhecido.

De facto, vem

$$\begin{aligned} e^{-\theta(T_r\wedge t)} f\left(X_{T_r\wedge t}, J_{T_r\wedge t}\right) &= e^0 f\left(X_0, J_0\right) + \int_0^{T_r\wedge t} e^{-\theta s} df\left(X_s, J_s\right) + \int_0^{T_r\wedge t} f\left(X_s, J_s\right) d\left(e^{-\theta s}\right) \\ &= f\left(X_0, J_0\right) + \int_0^{T_r\wedge t} e^{-\theta s} Af\left(X_s, J_s\right) ds + \int_0^{T_r\wedge t} e^{-\theta s} dM_s \\ &\quad - \int_0^{T_r\wedge t} \theta e^{-\theta s} f\left(X_s, J_s\right) ds \end{aligned}$$

Tomando a esperança desta expressão e atendendo a que M é uma martingala, temos

$$E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta(T_r\wedge t)} f\left(X_{T_r\wedge t}, J_{T_r\wedge t}\right)\right] = f\left(x_0, i_0\right) + E^{x_0,i_0}\left[\int_0^{T_r\wedge t} e^{-\theta s}\left\{Af\left(X_s, J_s\right) - \theta f\left(X_s, J_s\right)\right\} ds\right].$$

Se $Af\left(X_s, J_s\right) = \theta f\left(X_s, J_s\right)$, então

$$E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta T_r} f\left(X_{T_r}, J_{T_r}\right); T_r \leq t\right] + E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta t} f\left(X_t, J_t\right); T_r > t\right] = f\left(x_0, i_0\right).$$

Se $\theta > 0$, podemos determinar o limite quando t tende para ∞ e, aplicando o teorema de convergência dominada, obtemos o resultado que se pretendia.

2) Vamos encontrar a função f que verifica a condição $Af\left(X_s, J_s\right) = \theta f\left(X_s, J_s\right)$ de entre as da classe de funções da forma:

$$f(x,i) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m^-} c_{ik} e^{\gamma_k x}, & \text{se } x \geq 0 \\ K e^{\zeta x} & \text{, se } x < 0 \end{cases}$$

com $\zeta \geq 0$ e a parte real de γ_k não positiva. Para uma função deste tipo, o gerador infinitesimal é dado por

$$\begin{aligned} Af(x,i) &= \sum_{k=1}^{m^-} \left\{ c_{ik}\phi_i\left(\gamma_k\right) e^{\gamma_k x} + \sum_{j\neq i} q_{ij}\left[c_{jk} - c_{ik}\right] e^{\gamma_k x} + \right. \\ &\quad + \lambda_i \sum_j a_j \left[\int_0^x F_U^-(dy)\, c_{jk} e^{\gamma_k(x-y)} + \right. \\ &\quad + \int_x^\infty F_U^-(dy)\, K e^{\zeta(x-y)} + \\ &\quad \left.\left. + \int_0^\infty F_U^+(dy)\, c_{jk} e^{\gamma_k(x+y)} - c_{ik} e^{\gamma_k x}\right]\right\}, \end{aligned}$$

com $\phi_i(z) = \beta_i z + \frac{1}{2}\sigma_i^2 z^2$. A condição a verificar pode ser escrita sob a forma $0 = Af - \theta f$, ou seja

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{m^-} e^{\gamma_k x}\left[Q\left(\gamma_k, \theta\right) c_{|k}\right]_i + \lambda_i \sum_j a_j \left[\int_0^x F_U^-(dy) \sum_{k=1}^{m^-} c_{jk} e^{\gamma_k(x-y)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^\infty F_U^-(dy)\, K e^{\zeta(x-y)} + \int_0^\infty F_U^+(dy) \sum_{k=1}^{m^-} c_{jk} e^{\gamma_k(x+y)}\right] \end{aligned}$$

em que $c_{|k}$ é o k-ésimo vector coluna da matriz $[c_{ij}]$ e a matriz $Q(\gamma_k, \theta)$ tem por elemento genérico

$$q_{ij}(z,\theta) = \begin{cases} \phi_i(z) - q_i - \lambda_i - \theta \text{ , se } i = j \\ q_{ij} \qquad\qquad\qquad\quad \text{, se } i \neq j \end{cases}.$$

A fim de fazer desaparecer o indice i da expressão, define-se r_k de modo a que

$$c_{|k} = r_k Q^{-1}(\gamma_k, \theta)\lambda.$$

Substituindo acima, vem

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{m^-} r_k e^{\gamma_k x} + \sum_j a_j \left[\int_0^x F_U^-(dy) \sum_{k=1}^{m^-} c_{jk} e^{\gamma_k (x-y)} + \right. \\ &\left. + \int_x^\infty F_U^-(dy) K e^{\zeta(x-y)} + \int_0^\infty F_U^+(dy) \sum_{k=1}^{m^-} c_{jk} e^{\gamma_k(x+y)} \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Se $x = 0$, vem

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{m^-} r_k + K \cdot L_U^-(\zeta) + \sum_j a_j \sum_{k=1}^{m^-} c_{jk} L_U^+(-\gamma_k) = \\ &= K \cdot L_U^-(\zeta) + \sum_{k=1}^{m^-} r_k \left(1 + a^T Q^{-1}(\gamma_k, \theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)\right) \end{aligned}$$

e portanto

$$K = -\frac{\sum_{k=1}^{m^-} r_k \left(1 + a^T Q^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)\right)}{L_U^-(\zeta)}.$$

Sendo $x \neq 0$, podemos multiplicar os membros da equação (3.8) por e^{-vx} e integrar em ordem a x sobre $(0, \infty)$, obtendo-se

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_k r_k \left(\frac{1}{v - \gamma_k} - \frac{1 + a^T Q^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)}{v - \zeta} \left(1 - \frac{L_U^-(v)}{L_U^-(\zeta)}\right)\right) \\ &+ \sum_k s_k \frac{L_U^-(v)}{v - \gamma_k} + \sum_k s_k \frac{L_U^+(-\gamma_k)}{v - \gamma_k} \end{aligned}$$

com $s_k = \sum_j a_j c_{jk} = r_k a^T Q^{-1}(\gamma_k, \theta)\lambda$.

Como exemplificação do tipo de càlculo feito na última passagem, note-se que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^x e^{-\gamma_k y} F_U^-(dy)\, e^{(\gamma_k - v)x} dx &= \int_0^\infty \int_y^\infty e^{(\gamma_k - v)x} dx\; e^{-\gamma_k y} F_U^-(dy) \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{(\gamma_k - v)y}}{v - \gamma_k} e^{-\gamma_k y} F_U^-(dy) \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-vy}}{v - \gamma_k} F_U^-(dy) = \frac{L_U^-(v)}{v - \gamma_k} \end{aligned}$$

e

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{\gamma_k y} F_U^+ (dy)\, e^{(\gamma_k - v)x} dx = L_U^+ (-\gamma_K) \int_0^\infty e^{(\gamma_k - v)x} dx = \frac{L_U^+ (-\gamma_k)}{v - \gamma_k}.$$

Então

$$\begin{aligned} & \sum_k s_k \frac{L_U^- (v)}{v - \gamma_k} + \sum_k r_k \frac{1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)}{v - \zeta} \frac{L_U^- (v)}{L_U^- (\zeta)} \\ = & \sum_k r_k \frac{1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)}{v - \zeta} - \sum_k r_k \frac{1}{v - \gamma_k} - \sum_k s_k \frac{L_U^+ (-\gamma_k)}{v - \gamma_k} \end{aligned}$$

e obtém-se

$$\begin{aligned} L_U^- (v) &= \frac{\sum_k r_k \frac{1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)}{v - \zeta} - \frac{1}{v - \gamma_k} \left(\sum_k r_k + \sum_k s_k L_U^+ (-\gamma_k) \right)}{\sum_k \frac{s_k}{v - \gamma_k} + \sum_k \frac{r_k}{v - \zeta} \frac{1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)}{L_U^- (\zeta)}} = \\ &= \frac{\sum_k \left[r_k \left(1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)\right) (\zeta - \gamma_k) \right] \times \Pi_{|k} (v)}{\sum_k \left[r_k \frac{\left(1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)\right)(v - \gamma_k)}{L_U^- (\zeta)} + \sum_k s_k (v - \zeta) \right] \times \Pi_{|k} (v)}, \end{aligned}$$

onde $\Pi_{|k} (v)$ vem dado em (3.4).

Nos passos seguintes, utilizamos o lema 4 de [J2] que nos diz que se $P(.)$ for um polinómio de grau inferior a m e $\gamma_1, ..., \gamma_m$ m números complexos distintos, então

$$P (v) = \sum_{k=1}^m \frac{P (\gamma_k)}{\Pi_{|k} (\gamma_k)} \Pi_{|k} (v).$$

Consideremos o numerador

$$\sum_k \left[r_k \left(1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)\right) (\zeta - \gamma_k) \right] \times \Pi_{|k} (v)$$

para definir r_k de forma que aquele seja de facto igual a $P_U^- (v)$. Façamos

$$S (\gamma_k) = r_k \left(1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)\right) (\zeta - \gamma_k) \Pi_{|k} (\gamma_k)$$

e portanto

$$r_k = \frac{-S (\gamma_k)}{\left(1 + a^T Q^{-1} (\gamma_k, \theta) \lambda L_U^+ (-\gamma_k)\right) (\gamma_k - \zeta) \Pi_{|k} (\gamma_k)}.$$

Vem, substituindo na expressão do numerador,

$$\sum_k \frac{S (\gamma_k)}{\Pi_{|k} (\gamma_k)} \Pi_{|k} (v) = S (v) = P_U^- (v).$$

Utilizamos agora o denominador de $L_U^-(v)$ a que chegamos acima para encontrar a equação que permite determinar as constantes γ_k. Aquele vem dado por

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_k r_k \frac{\left(1+a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)\right)(v-\zeta)}{L_U^-(\zeta)}\Pi_{|k}(v)\right.\\
&\left.+\sum_k r_k \frac{\left(1+a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)\right)(\zeta-\gamma_k)}{L_U^-(\zeta)}\Pi_{|k}(v)+\sum_k r_k a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda(v-\zeta)\Pi_{|k}(v)\right]\\
= &-\sum_k \frac{S(\gamma_k)(v-\zeta)\Pi_{|k}(v)}{L_U^-(\zeta)(\gamma_k-\zeta)\Pi_{|k}(\gamma_k)}+\frac{S(v)}{L_U^-(\zeta)}\\
&-\sum_k \frac{S(\gamma_k)a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda}{\left(1+a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)\right)(\gamma_k-\zeta)\Pi_{|k}(\gamma_k)}(v-\zeta)\Pi_{|k}(v)\\
= &\frac{-S(v)}{L_U^-(\zeta)}+\frac{S(v)}{L_U^-(\zeta)}-\sum_k \frac{S(\gamma_k)(v-\zeta)}{\left(1+a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)\right)(\gamma_k-\zeta)}a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda\frac{\Pi_{|k}(v)}{\Pi_{|k}(\gamma_k)}\\
= &-\frac{S(v)a^TQ^{-1}(v,\theta)\lambda}{1+a^TQ^{-1}(v,\theta)\lambda L_U^+(-v)}=-\frac{P_U^-(v)a^TQ^{-1}(v,\theta)\lambda}{1+a^TQ^{-1}(v,\theta)\lambda L_U^+(-v)}=R_U^-(v).
\end{aligned}$$

Resulta da última igualdade que

$$L_U^-(v)=-\frac{1+a^TQ^{-1}(v,\theta)\lambda L_U^+(-v)}{a^TQ^{-1}(v,\theta)\lambda}$$

o que permite concluir que as constantes γ_k devem verificar

$$L_U^-(\gamma_k)=-\frac{1+a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda L_U^+(-\gamma_k)}{a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda},$$

ou seja

$$L_U^-(\gamma_k)+L_U^+(-\gamma_k)=\frac{-1}{a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda}.$$

Esta equação pode-se escrever como:

$$\begin{aligned}
-a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda &= \frac{1}{L_U^-(\gamma_k)+L_U^+(-\gamma_k)}=\frac{1}{\frac{P_U^-(\gamma_k)}{R_U^-(\gamma_k)}+\frac{P_U^+(-\gamma_k)}{R_U^+(-\gamma_k)}}\\
&= \frac{R_U^-(\gamma_k)R_U^+(-\gamma_k)}{P_U^-(\gamma_k)R_U^+(-\gamma_k)+P_U^+(-\gamma_k)R_U^-(\gamma_k)}.
\end{aligned}$$

obtendo-se

$$R_U^-(\gamma_k)R_U^+(-\gamma_k)=-a^TQ^{-1}(\gamma_k,\theta)\lambda\left[P_U^-(\gamma_k)R_U^+(-\gamma_k)+P_U^+(-\gamma_k)R_U^-(\gamma_k)\right]$$

Esta é a equação de Cramér-Lundberg a que chegamos neste caso, cuja análise do número de soluções foi efectuada no teorema 3.3.3.

3) Considera-se a equação demonstrada em 1) com f definida como em 2), obtendo-se:

$$E^{x_0,i_0}\left[\sum_{k=1}^{m^-} c_{J_{T_r},k}\cdot e^{-\theta T_r}; Y_r=0\right]+E^{x_0,i_0}\left[Ke^{-\theta T_r-\zeta Y_r}; Y_r>0\right]=\sum_{k=1}^{m^-} c_{i_0,k}e^{\gamma_k x_0}.$$

Substituindo os coeficientes $c_{\cdot,\cdot}$ e K de acordo com a sua definição em 2), obtemos a expressão no enunciado. De notar que a função f foi definida em termos de uma exponencial de forma a no resultado final se obter uma transformada de Laplace. ■

As esperanças presentes no enunciado do lema que acabamos de provar são obtidas considerando um sistema em que se fixa as primeiras $m^- - 1$ soluções γ_k e se faz a última tomar cada um dos valores das p_c+1 restantes soluções. A pretendida transformada é obtida da seguinte forma:

$$E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta T_r-\zeta Y_r}\right]=\sum_{i\in E_c} E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta T_r}; A_{c,i}\right]+E^{x_0,i_0}\left[e^{-\theta T_r-\zeta Y_r}; A_j\right].$$

3.4 Avaliação de activo

Pretendemos agora que X seja um processo do tipo do apresentado na secção anterior, garantindo por outro lado que o preço do activo actualizado pela taxa sem risco, ou seja $\widetilde{S}=\left\{\widetilde{S}_t\right\}=\left\{e^{-rt}S_t\right\}$, dependente de X, é uma martingala, relativamente à medida neutra ao risco. Para tal, modelaremos $\widetilde{S}$ da seguinte forma.

Teorema 3.4.1 *No processo que representa o preço do activo, S, dado por*

$$S_t=\exp\left(X_t\right),$$

onde

$$X_t=x_0+\int_0^t \beta_{J_s}ds+\int_0^t \sigma_{J_{s-}}dB_s+\sum_{n=1}^{N_t} U_n$$

é um processo do tipo do analisado na secção anterior, os coeficientes podem ser determinados de modo a assegurar que o preço descontado do activo, $\left\{\widetilde{S}_t\right\}=\left\{e^{-rt}S_t\right\}$, é uma martingala.

Prova. Refira-se em primeiro lugar que os processos $\widetilde{X}$ e X que se define abaixo são adaptados à filtração $\{F_t\}$ gerada por (B,J,C).

A prova é feita em duas etapas.

(i) Encontramos um processo $\widetilde{X}$, do tipo do da secção anterior, que seja uma martingala. Assim, se tivermos:

$$\widetilde{X}_t = \widetilde{x_0} + \int_0^t \widetilde{\beta_{J_s}} ds + \int_0^t \widetilde{\sigma_{J_{s-}}} dB_s + \sum_{n=1}^{N_t} \widetilde{U}_n, \tag{3.9}$$

é suficiente garantir, atendendo ao que se escreveu no passo 1) da prova do teorema 3.3.5, que o gerador de $f(x,i) = x$ é nulo para todo o estado i que se possa verificar em qualquer momento t e que poderá ser qualquer um dos estados da cadeia J. Aqui, A é entendido no sentido de gerador completo, sendo L o espeço de classes de equivalência de funções f tais que

$$\|f\| = \sup_{P_t} \int |f| \, dP_t$$

onde P_t é a distribuição de probabilidade de $\widetilde{X}_t$. No caso que nos importa, é suficiente garantir que existe $E\left(\widetilde{X}_t\right)$ para todo o $t \geq 0$, nomeadamente impondo a existência de esperança dos saltos.

Vem, então,

$$Ax = \widetilde{\beta}_i + \sum_{j \neq i} \widetilde{q_{ij}} (x - x) + \widetilde{\lambda}_i \sum_j \widetilde{a}_j \int_{-\infty}^{\infty} F_{\widetilde{U}} (dy) (x + y - x) = \widetilde{\beta}_i + \widetilde{\lambda}_i E\left(\widetilde{U}\right) = 0,$$

de que resulta

$$\widetilde{\beta}_i = -\widetilde{\lambda}_i E\left(\widetilde{U}\right).$$

Ou seja, basta garantir que a componente drift do processo é dada por $-\widetilde{\lambda}_i E\left(\widetilde{U}\right)$, quando a cadeia está no estado i. Note-se que $E\left(\widetilde{U}\right)$ pode ser negativa e sê-lo-á normalmente se atendermos à assimetria negativa normalmente observada nos saltos dos rendimentos de activos financeiros.

(ii) Construamos $\widetilde{S}$ como a exponencial de Doléans-Dade de $\widetilde{X}$, garantindo assim que $\widetilde{S}$ é também uma martingala, pois aquela exponencial é por definição um integral relativamente à martingala $\widetilde{X}$, a menos do valor inicial. Temos que impor a restrição de a distribuição de $\widetilde{U}$ ter por suporte um fechado de $[-1, \infty]$ sem incluir o valor -1, de forma a garantir que a expressão abaixo é não negativa. Virá então:

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_t &= \exp\left\{\widetilde{x_0} + \int_0^t \left(-\widetilde{\lambda_{J_s}} E\left(\widetilde{U}\right) - \frac{\widetilde{\sigma_{J_{s-}}}^2}{2}\right) ds + \int_0^t \widetilde{\sigma_{J_{s-}}} dB_s\right\} \prod_n \left(1 + \widetilde{U}_n\right) \qquad (3.10)\\
&= \exp\left\{\widetilde{x_0} + \int_0^t \left(-\widetilde{\lambda_{J_s}} E\left(\widetilde{U}\right) - \frac{\widetilde{\sigma_{J_{s-}}}^2}{2}\right) ds + \int_0^t \widetilde{\sigma_{J_{s-}}} dB_s + \sum_n \ln\left(1 + \widetilde{U}_n\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Sendo $S_t = e^{rt}\widetilde{S_t}$, vem

$$S_t = \exp\left\{\widetilde{x_0} + \int_0^t \left(r - \widetilde{\lambda_{J_s}} E\left(\widetilde{U}\right) - \frac{\widetilde{\sigma_{J_{s-}}}^2}{2}\right) ds + \int_0^t \widetilde{\sigma_{J_{s-}}} dB_s + \sum_n \ln\left(1 + \widetilde{U_n}\right)\right\}.$$

Obtém-se o resultado desejado no teorema, com

$$x_0 = \widetilde{x_0},\ \beta_{J_s} = r - \widetilde{\lambda_{J_s}} E\left(\widetilde{U}\right) - \frac{\widetilde{\sigma_{J_{s-}}}^2}{2},\ \sigma_{J_{s-}} = \widetilde{\sigma_{J_{s-}}} \text{ e } U_n = \ln\left(1 + \widetilde{U_n}\right).$$

Note-se que a distribuição de U tem por suporte $[-\infty, \infty]$ e $E\left(\widetilde{U}\right) = E\left(e^U - 1\right) = E\left(e^U\right) - 1$. Este processo é uma generalização do considerado em [Me] na expressão (9.3).

■

3.5 Notas finais

Fez-se uma generalização de um modelo de Jacobsen, de forma a incluir saltos positivos. As equações usadas para determinar a transformada conjunta de Laplace do tempo de ruína e do valor do processo nesse momento são do mesmo tipo das do modelo original. A equação de Cramèr-Lundberg a que chegamos neste caso depende das transformadas de Laplace das partes da distribuição dos saltos positivos e dos negativos.

Considerou-se o caso de avaliação de um activo baseado em tal modelo. Nomeadamente, definiu-se o preço do activo como uma exponencial de um processo indexado por uma cadeia de Markov e encontrou-se os seus coeficientes de forma a que aquele fosse uma martingala em relação à filtração conjuntamente determinada pelo processo expoente e pela cadeia de Markov.

Bibliografia

[B] Brémaud, P. An Initiation to Point Process Calculus, *Notes based on a series of Lectures at the University of Rome (La Sapienza)* (2003)

[D] Davis, M.H.A. *Markov Models and Optimization*, Chapman and Hall, London (1993)

[E] Elliott, Robert J. *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, Berlin (1982)

[EK] Ethier, Stewart N.; Thomas G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, John Wiley and Sons, 1986

[J1] Jacobsen, M. Marked Point Processes and Piecewise Deterministic Processes, *Centre for Mathematical Physics and Stochastics (MaPhySto), University of Aarhus, Lecture Notes*, no.3 (1999)

[J2] Jacobsen, M. Martingales and the Distribution of the Time to Ruin, *Stoch. Proc. Appl.* 107 (2003) pg.29-41

[J3] Jacobsen, M. The Time to Ruin for a Class of Additive Risk Processes, *Centre for Mathematical Physics and Stochastics (MaPhySto), University of Aarhus, Research Report no. 22* (2003)

[J4] Jacobsen, M. The Time to Ruin for a Class of Markov Additive Risk Processes with Two-sided Jumps, *Adv. Appl. Prob.* 37 (2005) pg. 963-992

[M] Marsden, Jerrold E. *Basic Complex Analysis*, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1973)

[Me] Merton, Robert C. Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous, Journal of Financial Economics, 3 (1976) pg. 125-144

[Pa] Pascoal, Rui. Um Modelo de Risco e de Avaliação de Activo Financeiro com Modulação Markoviana, Actas do XII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística (2005)

Capítulo 4

Distribuição, estrutura e esperança de funções do processo ”de Jacobsen”

4.1 Introdução

Neste capítulo consideramos um caso particular do processo apresentado no capítulo anterior. Apresentamos o cálculo da esperança do valor final para uma dada função do processo. Este é feito recorrendo à equação regressiva de Kolmogorov que permite caracterizar a evolução da função e fazendo a passagem à transformada de Fourier para encontrar uma solução. Este processo é utilizado para avaliar uma opção europeia.

É então determinada a distribuição de probabilidade para o valor do processo numa data posterior a partir do conhecimento do valor presente do processo e da cadeia. Para o efeito considera-se a equação progressiva de Kolmogorov obtida a partir da regressiva.

A utilização das equações de Kolmogorov em processos de difusão é referida por exemplo em [O]. Para processos de salto e difusão, veja-se por exemplo [Ko]. Em [DS], [DH], [G] e [GZ], encontramos exemplos de análises envolvendo equações de Kolmogorov aplicadas a processos dependentes de cadeias de Markov.

Apresentam-se os conceitos de processo aditivo e de Lévy em que a hipótese mais relevante é a de o processo em causa ter acréscimos independentes. A decomposição de

Lévy-Itô permite caracterizar estes processos como a soma de uma parte de trajectórias contínuas e outra de salto, independentes. Uma referência para o estudo de processos de Lévy é [S].

Numa última secção, utilizamos de novo uma equação progressiva de Kolmogorov, mas desta feita incidindo a análise sobre as partes contínuas e de salto do processo que nos importa para concluir que são dependentes. Resulta então que este processo não é aditivo, nomeadamente os seus acréscimos não são independentes.

4.2 Cálculo de esperança de funções do processo

Consideramos o caso particular do modelo analisado em que a cadeia J tem apenas dois estados. Temos então:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \beta_{J_s} ds + \int_0^t \sigma_{J_{s-}} dB_s + \sum_{n=1}^{N_t} U_n$$

com $J_s = 1, 2$ sendo $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^T$ o vector das intensidades de salto nos dois estados, $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T$ a distribuição inicial que se renova após cada salto e

$$Q = \begin{bmatrix} -q_{12} & q_{12} \\ q_{21} & -q_{21} \end{bmatrix}$$

a matriz de intensidades de transição sem salto entre os dois estados. Os saltos U têm distribuição F_U.

No que se segue, consideraremos que as funções f que definimos têm como argumento adicional o tempo, o que constitui uma generalização do caso analisado atrás. Tal deve-se ao facto de estarmos a considerar a caracterização de esperanças de uma função do valor do processo ou a distribuição deste num momento fixo no futuro, sendo por isso relevante o lapso de tempo variável que decorre até esse momento. De facto, este lapso de tempo vai-se alterando à medida que se altera o momento inicial.

Consideremos os operadores dados por

$$Af(x,1,t) = \beta_1 \partial_x f(x,1,t) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \partial_{xx}^2 f(x,1,t) + q_{12}\left[f(x,2,t) - f(x,1,t)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda_1 \left[a_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(x+y,1,t\right) - f\left(x,1,t\right)\right) F_U\left(dy\right) \right. \\
&\left. +a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(x+y,2,t\right) - f\left(x,1,t\right)\right) F_U\left(dy\right) \right];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Af\left(x,2\right) &= \beta_2 \partial_x f\left(x,2,t\right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \partial_{xx}^2 f\left(x,2,t\right) + q_{21}\left[f\left(x,1,t\right) - f\left(x,2,t\right)\right] \\
&+\lambda_2 \left[a_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(x+y,1,t\right) - f\left(x,2,t\right)\right) F_U\left(dy\right) \right. \\
&\left. +a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(x+y,2,t\right) - f\left(x,2,t\right)\right) F_U\left(dy\right) \right].
\end{aligned}
$$

Estamos aqui a considerar o conjunto das funções f para as quais estão definidos os diversos termos que surgem no operador, nomeadamente as derivadas e os integrais relativamente à distribuição de cada salto. Está também definida a derivada relativamente ao tempo. De forma análoga ao que fizemos no capítulo anterior, consideramos o espaço de classes de equivalência de funções f tais que $\|f\| = \sup_{P_t} \int |f|\, dP_t$ onde P_t é, neste caso, a distribuição de probabilidade conjunta de X_t e de J_t.

Atendendo à formula de Itô, constatamos que

$$
f\left(X_T, J_T, T\right) = f\left(X_0, J_0, 0\right) + \int_0^T f_s\left(X_s, J_s, s\right) ds + \int_0^T Af\left(X_s, J_s, s\right) ds + M_T
$$

em que M é uma martingala. De facto, podemos adaptar a análise efectuada no capítulo anterior para obter (3.6) ao caso em que a função f depende do argumento adicional t. Uma vez mais M é definida a partir de (3.5). Entre saltos, teremos agora

$$
\begin{aligned}
df\left(X_t, J_t, t\right) &= \left[f_t\left(X_t, J_t, t\right) + \beta_{J_{t_0}} \partial_x f\left(X_t, J_{t_0}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{J_{t_0}}^2 \partial_{xx}^2 f\left(X_t, J_{t_0}\right) \right] dt + \\
&+\sigma_{J_{t_0}} \partial_x f\left(X_t, J_{t_0}\right) dB_t
\end{aligned}
$$

(compare-se com (3.7)). Esta expressão virá igual a

$$
\left[f_t\left(X_t, J_t, t\right) + Af\left(X_t, J_t, t\right)\right] dt + dM_t.
$$

O gerador infinitesimal é identificado com $f_t + Af$.

Nesta dedução, há a realçar na formula de diferenciação estocástica a regra $dt\, dB_t = 0$ apresentada em pormenor por exemplo em [Mer].

Apresentamos de seguida uma equação designada usualmente por equação regressiva de Kolmogorov. Esta designação resulta de permitir caracterizar a esperança de uma função do valor do processo num momento futuro. Considerando a condição final para essa esperança no momento terminal a equação dá-nos a evolução da esperança regredindo no tempo.

Definamos em particular uma função $u(.,.,.)$ que verifique a equação regressiva de Kolmogorov:

$$u_t + Au = 0,$$

para $t < T$, sujeita à condição final $u(x,j,T) = w(x,j)$ em $t = T$, com $X_0 = x$ e $J_0 = j$. Então, a função u verifica, da mesma forma que a função genérica f, a condição:

$$u(X_T, J_T, T) = u(X_0, J_0, 0) + \int_0^T u_s(X_s, J_s, s)\, ds + \int_0^T Au(X_s, J_s, s)\, ds + M_T^u,$$

em que M^u é uma martingala.

Comparando com o caso do capítulo anterior, temos um termo com uma derivada relativamente ao tempo o que resulta de a função em causa depender explicitamente do tempo.

Tomando a esperança em ambos os membros:

$$E_{X_0=x,J_0=j}\left[u(X_T, J_T, T)\right] = u(x,j,0) + E\left[\int_0^T u_s(X_s, J_s, s)\, ds + \int_0^T Au(X_s, J_s, s)\, ds\right].$$

Ou seja, atendendo à equação regressiva de Kolmogorov,

$$E_{X_0=x,J_0=j}\left[u(X_T, J_T, T)\right] = u(x,j,0)$$

e tendo em conta a condição final,

$$E_{X_0=x,J_0=j}\left[w(X_T, J_T)\right] = u(x,j,0).$$

Reciprocamente, verificamos que se esta última condição se verificar para um momento inicial genérico anterior a T e não apenas para 0, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\frac{E_{X_0=x,J_0=j}\left[u(X_s, J_s, 0)\right] - u(x,j,0)}{s} \\
= \; &\frac{E_{X_0=x,J_0=j}\left\{E_{X_0=x,J_0=j}\left[w(X_{T+s}, J_{T+s})\,|F_s\right] - E_{X_0=x,J_0=j}\left[w(X_T, J_T)\,|F_s\right]\right\}}{s} \\
= \; &\frac{E_{X_0=x,J_0=j}\left[w(X_{T+s}, J_{T+s}) - w(X_T, J_T)\right]}{s} \\
= \; &\frac{u(x,j,-s) - u(x,j,0)}{s},
\end{aligned}$$

cujo limite quando s tende para 0, sendo o gerador infinitesimal de (X, J), vem dado por $-\frac{\partial u}{\partial t}$.

A função u permite assim determinar o preço de um activo contingente, como uma opção que conduz a um resultado $w\left(X_T, J_T\right)$ no momento de maturidade T.

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t\left(x,1,t\right)+Au\left(x,1,t\right)=0 \\ u_t\left(x,2,t\right)+Au\left(x,2,t\right)=0 \end{cases}.$$

Trata-se de equações diferenciais com uma derivada temporal e derivadas em ordem a x na parte de difusão e, por outro lado, com integrais envolvendo x na parte de salto.

Resolvem-se as equações, apelando a transformadas de Fourier.

A transformada de Fourier de uma função $f(x)$ é

$$\widehat{f}\left(\xi\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{i\xi x}dx.$$

Designamos por $\widehat{f}\left(\xi,j,t\right)$ a função $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,j,t\right)e^{i\xi x}dx$. Ou seja, a transformada de Fourier de $g(x)=f(x,j,t)$.

Consideraremos o caso de uma opção de compra que conduz ao resultado

$$w\left(X_T,J_T\right)=\left(e^{X_T}-K\right)^{+}$$

sendo K o valor de exercício. A condição final vem dada por

$$\widehat{u}\left(\xi,j,T\right)=\widehat{w}\left(\xi,j\right)=\int\limits_{\ln K}^{\infty}\left[e^{x(\xi i+1)}-Ke^{x\xi i}\right]dx=\left[\frac{e^{x(\xi i+1)}}{\xi i+1}-K\frac{e^{x\xi i}}{\xi i}\right]_{\ln K}^{\infty}.$$

Há a ressalvar que esta expressão só converge se ξ for tal que $\xi i+1$ tenha parte real negativa, ou seja, se $\xi=\xi_1+i\alpha$ com $\alpha>1$ e $\xi_1\in\mathcal{R}$. A transformada de Fourier vem nesse caso dada por

$$\frac{-K^{i\xi+1}}{\xi^2-i\xi}.$$

As seguintes considerações permitir-nos-ão obter o sistema para as transformadas de Fourier. Assim:

a) $\int e^{i\xi x}f\left(x\right)dx=\int e^{-\alpha x}e^{i\xi_1 x}f\left(x\right)dx=\widehat{h}\left(\xi_1\right)$ com $h\left(x\right)=e^{-\alpha x}f\left(x\right)$;

b) $\int e^{i\xi x} f'(x)\, dx = \left[f(x) e^{i\xi x}\right] - \int i\xi e^{i\xi x} f(x)\, dx$
$= -i\xi \int e^{-\alpha x} e^{i\xi_1 x} f(x)\, dx = (-i\xi_1 + \alpha)\, \widehat{h}(\xi_1)$;

c) $\int e^{i\xi x} f''(x)\, dx = -i\xi \int e^{i\xi x} f'(x)\, dx = -\xi^2 \int e^{i\xi x} f(x)\, dx$
$= \left(-\xi_1^2 - 2i\alpha\xi_1 + \alpha^2\right) \widehat{h}(\xi_1)$;

d) $\int \frac{\partial f(x)}{\partial t} e^{i\xi x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x)\, e^{i\xi x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int f(x)\, e^{i\xi_1 x} e^{-\alpha x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{h}(\xi_1)$;

e) $\iint f(x+y)\, F_U(dy)\, e^{i\xi x} dx = \iint f(x+y)\, e^{i\xi(x+y)} dx e^{-i\xi y} F_U(dy)$
$= \int f(x+y)\, e^{i\xi_1(x+y)} e^{-\alpha(x+y)} dx \int e^{-i\xi_1 y} e^{\alpha y} F_U(dy) = \widehat{h}(\xi_1)\, 2\pi TIF_{\xi_1}\left(e^{\alpha y} f_U(y)\right)$

em que TIF designa a transformada inversa de Fourier dada por

$$TIF_{\xi_1}\left(e^{\alpha y} f_U(y)\right) = \int e^{-i\xi_1 y} e^{\alpha y} f_U(y)\, dy$$

e f_U é a densidade de probabilidade correspondente a F_U;

f) Se $U \sim E(\gamma)$, vem

$$\int_0^\infty e^{i\xi_1 y} e^{-\alpha y} \gamma e^{-\gamma y} dy = \left[\gamma \frac{e^{(-(\alpha+\gamma)+i\xi_1)y}}{-(\alpha+\gamma)+i\xi_1}\right]_0^\infty = \frac{\gamma}{(\alpha+\gamma) - i\xi_1}.$$

O sistema para as transformadas de Fourier vem dado por:

$$\begin{array}{c} y' + \alpha_1 \times y + \alpha_2 \times z = 0 \\ z' + \gamma_1 \times y + \gamma_2 \times z = 0 \\ z(T) = f \\ y(T) = f \end{array}, \tag{4.1}$$

onde, com $h(x,j,t) = e^{-\alpha x} u(x,j,t)$, $y = \widehat{h}(\xi_1, 1, t)$, $z = \widehat{h}(\xi_1, 2, t)$ e y' (resp. z') designa a derivada parcial de y (resp. z) em ordem ao tempo,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (-i\xi_1 + \alpha)\, \beta_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \left(-\xi_1^2 - 2i\alpha\xi_1 + \alpha^2\right) - q_{12} + \lambda_1 \left(a_1 2\pi TIF_{\xi_1}\left(e^{\alpha y} f_U(y)\right) - 1\right), \\
\alpha_2 &= q_{12} + \lambda_1 a_2 2\pi TIF_{\xi_1}\left(e^{\alpha y} f_U(y)\right), \\
\gamma_1 &= q_{21} + \lambda_2 a_1 2\pi TIF_{\xi_1}\left(e^{\alpha y} f_U(y)\right) \\
\gamma_2 &= (-i\xi_1 + \alpha)\, \beta_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \left(-\xi_1^2 - 2i\alpha\xi_1 + \alpha^2\right) - q_{21} + \lambda_2 \left(a_2 2\pi TIF_{\xi_1}\left(e^{\alpha y} f_U(y)\right) - 1\right)
\end{aligned}$$

e $f = \frac{-K^{i\xi_1 - \alpha+1}}{\xi_1^2 + i\xi_1\alpha - \alpha^2 - i\xi_1 + \alpha}$.

A propósito desta última expressão, recorde-se que a condição final é

$$\widehat{u}(\xi, j, T) = \widehat{h}(\xi_1, j, T) = \frac{-K^{i\xi+1}}{\xi^2 - i\xi} = \frac{-K^{i\xi_1 - \alpha+1}}{\xi_1^2 + i\xi_1\alpha - \alpha^2 - i\xi_1 + \alpha}.$$

Note-se que o preço da opção é determinado como uma função de cada valor inicial de (X, J), (x, j). Para o estado j inicial, a condição final consiste em o payoff (ou seja o valor da opção em T) ser $(e^x - K)^+$ nesse estado. O payoff final é o mesmo para todo o estado da cadeia.

Suponhamos $j = 2$. A solução que importa neste caso é a respeitante a $z = \widehat{h}(\xi_1, 2, t)$. De seguida, obtém-se a transformada inversa de Fourier de z, $h(x, 2, t)$ e, a partir desta função, $u(x, 2, t) = e^{\alpha x} h(x, 2, t)$. Pode-se fazer a mesma análise para $j = 1$, claro.

Suponhamos que

$$f_U(y) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2} e^{-\gamma y}, y \geq 0 \\ \frac{\gamma}{2} e^{\gamma y}, y < 0 \end{cases}.$$

Então,

$$\begin{aligned} TIF_{\xi_1}\left(e^{\alpha y} f_U(y)\right) &= \frac{\gamma}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-i\xi_1 y} e^{(\alpha+\gamma)y} dy + \int_{0}^{\infty} e^{-i\xi_1 y} e^{(\alpha-\gamma)y} dy\right] \\ &= \frac{\gamma}{4\pi}\left(\frac{1}{\alpha+\gamma-i\xi_1} - \frac{1}{\alpha-\gamma-i\xi_1}\right), \end{aligned}$$

estando o integral definido se $-\gamma < \alpha < \gamma$. Como $\alpha > 1$, isto implicará $\gamma > 1$.

Consideremos o valor descontado da opção, dado por

$$E\left[w(X_T, J_T) e^{-\int_0^T r dt}\right] = E\left[u(X_T, J_T, T) e^{-\int_0^T r dt}\right].$$

Fazendo $z_1(t) = e^{-\int_0^t r ds}$ e $z_2 = u(X_t, J_t, t)$ e atendendo a que $d(z_1 z_2) = z_{1-} dz_2 + z_{2-} dz_1 + dz_1 dz_2$, vem

$$dz_1(t) = -re^{-\int_0^t r ds}$$

e

$$dz_2(t) = Az_2 dt + \frac{\partial z_2}{\partial t} dt + dM_t$$

e portanto

$$\begin{aligned} d\left(e^{-\int_0^t r ds} u(X_t, J_t, t)\right) &= e^{-\int_0^t r ds}\left(Au\ dt + \frac{\partial u}{\partial t} dt + dM_t\right) - re^{-\int_0^t r ds} u dt = \\ &= e^{-\int_0^t r ds}(Au + u_t - ru)\, dt + e^{-\int_0^t r ds} dM_t. \end{aligned}$$

Podemos constatar que, se se verificar $Au+u_t-ru=0$, com a condição final $w(x,j)=u(x,j,T)$, se obtém

$$E\left[w(X_T,J_T)\,e^{-\int_0^t r ds}\right]=E\left[z_1(T)\,z_2(T)\right]=z_1(0)\,z_2(0)=u(x,j,0).$$

Encontramos assim a equação regressiva de Kolmogorov para este caso.

4.3 Distribuição do processo

Pretende-se obter a distribuição de probabilidade de X_t onde X é o processo considerado na secção anterior. O ponto de partida é a equação que permite caracterizar a evolução da medida de probabilidade conjunta de (X_s,J_s) no momento s, $p(X_s,J_s,s)$: a equação progressiva de Kolmogorov. Esta designação advém de esta equação permitir caracterizar a distribuição de probabilidade para o valor do processo num momento futuro, partindo da condição inicial definida a partir do valor do processo no momento presente.

$p(.,.,.)$ satisfaz as mesmas condições de regularidade que as funções f na secção anterior.

Vejamos como é obtida esta equação.

Vimos atrás que, para uma função $u(X_s,J_s,s)$, que possua esperança no momento T, se verifica

$$E_{X_0=x,J_0=j}\left[u(X_T,J_T,T)-u(x,j,0)\right]=E\left[\int_0^T u_s(X_s,J_s,s)\,ds+\int_0^T Au(X_s,J_s,s)\,ds\right].$$

Designe Λ o espaço de estados $\omega=(x,j)$.

Seja A^* o operador adjunto de A em relação ao produto interno

$$\langle u,p\rangle=\int_{\Re}\left[u(x,1,s)\,v(x,1,s)+u(x,2,s)\,v(x,2,s)\right]dx$$

(s fixo) cujo espaço é o das funções reais de quadrado integrável definidas sobre o espaço de estados $\Re\times E$.

Note-se que a lei marginal de X_t, $p_X(x,t)=p(x,1,t)+p(x,2,t)$ é uma função de quadrado integrável e portanto o mesmo sucede com cada uma das parcelas que a constituem. De facto (suprime-se o índice t na notação para simplificar),

$$\int_{\mathcal{R}} p_X(x)^2\,dx \quad = \quad \int_{\mathcal{R}} p_X(x)\,p_X(x)\,dx=E\left[p_X(X)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= E\left[p_X(X).1_{\{p_X(X)\leq 1\}}\right] + E\left[p_X(X).1_{\{p_X(X)>1\}}\right] \\
&\leq E\left[1_{\{p_X(X)\leq 1\}}\right] + E\left[p_X(X).1_{\{p_X(X)>1\}}\right] \\
&= P\left(p_X(X)\leq 1\right) + E\left[p_X(X).1_{\{p_X(X)>1\}}\right]
\end{aligned}$$

expressão esta que é finita atendendo a que $p_X(x) \underset{x\longrightarrow\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$

A^* é obtido a partir da definição

$$\langle Au, p\rangle = \langle u, A^*p\rangle,$$

ou seja,

$$\int_{\Re} \left[Au(x,1,s)\,p(x,1,s) + Au(x,2,s)\,p(x,2,s)\right] dx =$$

$$\begin{aligned}
= \int_{\Re} \Bigg\{ & \beta_1 \partial_x u(x,1,s)\,p(x,1,s) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \partial_{xx}^2 u(x,1,s)\,p(x,1,s) + q_{12}\left[u(x,2,s) - u(x,1,s)\right] p(x,1,s) \\
& +\lambda_1 \left[a_1 p(x,1,s) \int_{-\infty}^{\infty} u(x+y,1,s)\,F_U(dy) + a_2 p(x,1,s) \int_{-\infty}^{\infty} u(x+y,2,s)\,F_U(dy)\right. \\
& \left. -u(x,1,s)\,p(x,1,s)\right] + \beta_2 \partial_x u(x,2,s)\,p(x,2,s) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \partial_{xx}^2 u(x,2,s)\,p(x,2,s) \\
& +q_{21}\left[u(x,1,s) - u(x,2,s)\right] p(x,2,s) + \lambda_2 \left[a_1 p(x,2,s) \int_{-\infty}^{\infty} u(x+y,1,s)\,F_U(dy)\right. \\
& \left. +a_2 p(x,2,s) \int_{-\infty}^{\infty} u(x+y,2,s)\,F_U(dy) - u(x,2,s)\,p(x,2,s)\right] \Bigg\} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \int_{\Re} \Bigg\{ & -\beta_1 u(x,1,s)\,\partial_x p(x,1,s) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 u(x,1,s)\,\partial_{xx}^2 p(x,1,s) + q_{12} u(x,2,s)\,p(x,1,s) \\
& -q_{12} u(x,1,s)\,p(x,1,s) + \lambda_1 \left[a_1 u(x,1,s) \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y,1,s)\,F_U(dy)\right. \\
& \left. +a_2 u(x,2,s) \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y,1,s)\,F_U(dy) - u(x,1,s)\,p(x,1,s)\right] - \beta_2 u(x,2,s)\,\partial_x p(x,2,s) \\
& +\frac{1}{2}\sigma_1^2 u(x,2,s)\,\partial_{xx}^2 p(x,2,s) + q_{21} u(x,1,s)\,p(x,2,s) - q_{21} u(x,2,s)\,p(x,2,s) \\
& +\lambda_2 \left[a_1 u(x,1,s) \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y,2,s)\,F_U(dy) + a_2 u(x,2,s) \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y,2,s)\,F_U(dy)\right. \\
& \left. -u(x,2,s)\,p(x,2,s)\right] \Bigg\} dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{\Re} u(x,1,s)\,A^*p(x,1,s) + u(x,2,s)\,A^*p(x,2,s)\,dx$$

com

$$\begin{aligned} A^* p(x,1,s) &= -\beta_1 \partial_x p(x,1,s) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \partial_{xx}^2 p(x,1,s) - q_{12} p(x,1,s) + q_{21} p(x,2,s) \\ &+ \lambda_1 \left[a_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y,1,s) F_U(dy) - p(x,1,s) \right] + \lambda_2 a_1 \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y,2,s) F_U(dy) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^* p(x,2,s) &= -\beta_2 \partial_x p(x,2,s) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \partial_{xx}^2 p(x,2,s) - q_{21} p(x,2,s) + q_{12} p(x,1,s) \\ &+ \lambda_2 \left[a_2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y,2,s) F_U(dy) - p(x,2,s) \right] + \lambda_1 a_2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y,1,s) F_U(dy) . \end{aligned}$$

De realçar nesta dedução o seguinte.

a) $\int \partial_x u \cdot p dx = [u \cdot p] - \int u \cdot \partial_x p dx = -\int u \cdot \partial_x p dx;$

b) $\int \partial_{xx}^2 u \cdot p dx = [\partial_x u \cdot p] - \int \partial_x u \cdot \partial_x p dx = -[u \cdot \partial_x p] + \int u \cdot \partial_{xx}^2 p dx = \int u \cdot \partial_{xx}^2 p dx;$

c) $\int \int u(x+\mu) p(x) f_U(\mu) d\mu dx = \int \left[\int u(x+\mu) p(x) dx \right] f_U(\mu) d\mu =$

$= \int \left[\int u(x) p(x-\mu) dx \right] f_U(\mu) d\mu = \int \int u(x) p(x-\mu) f_U(\mu) d\mu dx.$

O facto de se anularem os termos no desenvolvimento da primitiva por partes tem a ver com estarem em causa os valores nas caudas dos correspondentes integrais de u em relação a p (sendo p uma distribuição de probabilidade), isto é, à esperança de u sob p. O mesmo sucede em relação a $\partial_x u$. Note-se que estamos a supor que a esperança desta derivada existe.

Seja u de quadrado integrável no sentido anteriormente referido. Recorrendo à integração por partes, $E_{X_0=x, J_0=j}\left[u(X_T, J_T, T) - u(x,j,0)\right]$ vem igual a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Lambda \left[\frac{\partial u}{\partial s}(\omega,s) + Au(\omega,s) \right] p(\omega,s) d\omega \ ds \\ = & \int_0^T \int_\Re \int_E \left[\frac{\partial u}{\partial s}(x,j,s) + Au(x,j,s) \right] p(x,j,s) dj \ dx \ ds \\ = & \int_0^T \int_\Re \left[\frac{\partial u}{\partial s}(x,1,s) + Au(x,1,s) \right] p(x,1,s) dx \ ds \\ & + \int_0^T \int_\Re \left[\frac{\partial u}{\partial s}(x,2,s) + Au(x,2,s) \right] p(x,2,s) dx \ ds \end{aligned}$$

$$= \left[\int_\Re u(x,1,s) p(x,1,s) dx \right]_0^T - \int_0^T \int_\Re u(x,1,s) \frac{\partial p}{\partial s}(x,1,s) dx \ ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T \int_{\Re} u(x,1,s)\, A^* p(x,1,s)\, dx\, ds + \left[\int_{\Re} u(x,2,s)\, p(x,2,s)\, dx \right]_0^T \\
&-\int_0^T \int_{\Re} u(x,2,s) \frac{\partial p}{\partial s}(x,2,s)\, dx\, ds + \int_0^T \int_{\Re} u(x,2,s)\, A^* p(x,2,s)\, dx\, ds \\
&= E_{X_0=x, J_0=j}\left[u(X_T, J_T, T) - u(x,j,0) \right] \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Re} \left[-\frac{\partial p}{\partial s}(x,1,s) + A^* p(x,1,s) \right] u(x,1,s)\, dx\, ds \\
&\quad + \int_0^T \int_{\Re} \left[-\frac{\partial p}{\partial s}(x,2,s) + A^* p(x,2,s) \right] u(x,2,s)\, dx\, ds,
\end{aligned}
$$

de que resulta

$$
-\frac{\partial p}{\partial s}(x,j,s) + A^* p(x,j,s) = 0
$$

para todos os x, j e s (o resultado verifica-se para todo o s dado que estamos a considerar T arbitrário).

Note-se que as funções u podem incluir as indicatrizes $1_{A \times E \times [0,T]}$ onde A é um conjunto limitado e que a hipótese de a expressão ser nula sobre qualquer conjunto desse tipo e não sobre $\mathcal{R}$ é excluida pelas condições de continuidade usuais.

Supondo que, no momento inicial, o estado da cadeia é 2 e o valor do processo é 0, a condição inicial é

$$
p(x,1,0) = 0 \text{ e } p(x,2,0) = \delta_0(x).
$$

Consideremos a distribuição de probabilidade num momento futuro. O sistema respeitante às transformadas de Fourier $\widehat{p}(\xi,1,t)$ e $\widehat{p}(\xi,2,t)$ de $p(x,1,t)$ e $p(x,2,t)$, respectivamente, é dado por:

$$
\begin{array}{c}
-y' + \theta_1 \times y + \theta_2 \times z = 0 \\
-z' + \zeta_1 \times y + \zeta_2 \times z = 0 \\
z(0) = 1 \\
y(0) = 0
\end{array},
$$

com $y_t = \widehat{p}(\xi,1,t)$, $z_t = \widehat{p}(\xi,2,t)$,

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= i\xi\beta_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\xi^2 - q_{12} + \lambda_1 \left(a_1 \widehat{f}_U(y) - 1 \right), \\
\theta_2 &= q_{21} + \lambda_2 a_1 \widehat{f}_U(y), \\
\zeta_1 &= q_{12} + \lambda_1 a_2 \widehat{f}_U(y), \\
\zeta_2 &= i\xi\beta_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\xi^2 - q_{21} + \lambda_2 \left(a_2 \widehat{f}_U(y) - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $\widehat{p}(\xi,1,t)$ e $\widehat{p}(\xi,2,t)$, e a partir destas a função característica

$$\begin{aligned}\widehat{p}(\xi,t) &= \int e^{i\xi x}p_X(x,t)\,dx = \int e^{i\xi x}\left[p(x,1,t)+p(x,2,t)\right]dx \\ &= \int e^{i\xi x}p(x,1,t)\,dx + \int e^{i\xi x}p(x,2,t)\,dx = \widehat{p}(\xi,1,t)+\widehat{p}(\xi,2,t)\,.\end{aligned}$$

4.4 Processos de Lévy e aditivos. A decomposição de Lévy-Itô

4.4.1 Introdução

Nesta secção abordamos os processos de Lévy que se caracterizam no essencial pela estacionaridade e independência dos acréscimos. Um processo estocástico que verifique todas as condições de um processo de Lévy excepto a de estacionaridade designa-se por aditivo. Como exemplos de processos de Lévy apresentaremos o browniano e o de Poisson composto que podem servir como base para a construção de processos de Lévy mais gerais.

Importar-nos-á em especial a decomposição, dita de Lévy-Itô, de um processo aditivo, a qual representa cada trajectória deste como a soma de uma parte contínua com uma parte composta por uma soma de saltos compensados independentes. A convergência da soma dos saltos relativamente à parte que possa incluir saltos infinitesimais é garantida através da subtração do respectivo compensador. O ponto essencial que nos interessará nesta decomposição é que, no processo aditivo, aquelas duas componentes são independentes. Assim, se num dado processo com uma decomposição do mesmo tipo, as duas componentes forem em dado momento dependentes, poderemos concluir que o processo em questão não é aditivo. Um instrumento essencial na análise que faremos é a função característica, definida para cada componente do processo.

4.4.2 Processo de Lévy

Definição 4.4.1 *Um processo de Lévy* $\{X_t,\ t\geq 0\}$ *é um processo estocástico definido sobre um espaço probabilizado* (Ω,F,P) *que verifica o seguinte:*

i) Para todos os $n\geq 1$ *e* $0\leq t_0\leq ...\leq t_n$, *os acréscimos* X_{t_0}, $X_{t_1}-X_{t_0}$, ..., $X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ *são variáveis aleatórias independentes;*

ii) Para todos os $n \geq 1$ e $0 \leq t_0 \leq ... \leq t_n$, os acréscimos $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ são estacionários, ou seja, a distribuição de $X_{s+t} - X_s$ não depende de s;

iii) É contínuo em probabilidade:

$$\forall t \geq 0,\ \varepsilon > 0\ \lim_{s \to t} P\left(|X_t - X_s| > \varepsilon\right) = 0.$$

iv) Existe um conjunto $\Omega_0 \in F$ tal que $P(\Omega_0) = 1$ e para todo o $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ é contínua à direita para $t \geq 0$ e tem limites à esquerda para $t > 0$ (é quase certamente cadlag);

v) $X_0 = 0$ quase certamente.

De notar que a análise de processos que não verifiquem as três últimas condições pode ser superada de forma a considerar o correspondente caso em que elas se verificam (ver [S]). Se não se verificar iv), o processo diz-se de Lévy em lei. Se não se verificarem ii) e iv), o processo diz-se aditivo em lei.

Exemplo 4.4.2 *Processo de Poisson composto*

Definição 4.4.3 *Um processo de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$ é um processo estocástico X tal que X é um processo de Lévy e, para todo o $t > 0$, X_t tem distribuição de Poisson de média λt.*

Definição 4.4.4 *Seja $\{Y_n\}\,(n = 1, 2, ...)$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com valores em $\mathcal{R}^d$. Seja $\Sigma_0 = 0$ e $\Sigma_n = \sum_{j=1}^{n} Y_n$ $(n = 1, 2, ...)$. Então, $\{\Sigma_n\}\,(n = 1, 2, ...)$ é um marcha aleatória em $\mathcal{R}^d$.*

Um processo de Poisson pode ser construido como um processo de contagem associado a uma marcha aleatória da forma seguinte:

Teorema 4.4.5 *Seja $\{W_n,\ n \geq 0\}$ uma marcha aleatória sobre $\mathcal{R}$, tal que $\tau_n = W_n - W_{n-1}$ tem lei exponencial de parâmetro $\lambda > 0$. Seja $X_t(\omega) = n$ se $W_n \leq t < W_{n+1}$. Então, X é um processo de Poisson de parâmetro λ.*

Definição 4.4.6 *Uma distribuição de Poisson composta sobre $\mathcal{R}^d$ é uma distribuição μ tal que com $\lambda > 0$ e σ uma distribuição sobre $\mathcal{R}^d$ a verificar $\sigma(0) = 0$,*

$$\widehat{\mu}(\theta) = \exp\left\{\lambda\left(\widehat{\sigma}(\theta) - 1\right)\right\},$$

em que $\widehat{\mu}$ e $\widehat{\sigma}$ são respectivamente as funções características de μ e σ.

Definição 4.4.7 *Um processo de Poisson composto X de parâmetro $\lambda > 0$ e associado a σ é um processo estocástico de Lévy tal que X_t tem distribuição composta de Poisson:*

$$E\left(e^{i\langle\theta,X(t)\rangle}\right) = \exp\left\{t\lambda\left(\widehat{\sigma}\left(\theta\right)-1\right)\right\} \qquad \left(\theta \in \mathcal{R}^d\right).$$

Teorema 4.4.8 *Seja N um processo de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$ e $\{\Sigma_n,\ n \geq 0\}$ uma marcha aleatória sobre o mesmo espaço. Sejam N e Σ independentes e $P\left(\Sigma_1 = 0\right) = 0$. Então, sendo $X_t\left(\omega\right) = \Sigma_{N_t(\omega)}\left(\omega\right)$, X é um processo de Poisson composto de parâmetro λ e associado à distribuição de Σ_1, σ.*

A função característica apontada atrás é obtida a partir desta construção da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E\left(e^{i\langle\theta,X(t)\rangle}\right) &= \sum_{n\geq 0} P\left(N_t = n\right) E\left(e^{i\langle\theta,\Sigma_n\rangle}\right) = \sum_{n\geq 0} e^{-\lambda t}\left(n!\right)^{-1}\left(\lambda t\right)^n \widehat{\sigma}\left(\theta\right)^n \\ &= \exp\left\{t\lambda\left(\widehat{\sigma}\left(\theta\right)-1\right)\right\}. \end{aligned}$$

Teorema 4.4.9 *Um processo de Poisson composto de parâmetro λ e associado a uma distribuição σ sobre $]0,\infty[$ é quase certamente crescente.*

Exemplo 4.4.10 *Caracterizemos um movimento browniano como um processo de Lévy. Qualquer processo de Lévy que tenha uma versão com trajectórias contínuas pode ser definido como função de um movimento browniano.*

Definição 4.4.11 *Um movimento browniano é um processo de Lévy tal que, para todo o t, X_t tem distribuição gaussiana de média 0 e matriz de covariâncias tI e $X_t\left(\omega\right)$ é contínuo quase certamente em relação a t para todo o ω pertencente a um conjunto de probabilidade 1.*

Quando este processo é definido sobre $\mathcal{R}^d$, a função característica de $X\left(t\right)-X\left(s\right)$ é

$$E\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{d}\theta_i\left(X_j\left(t\right)-X_j\left(s\right)\right)\right\}\right] = \prod_{j=1}^{d}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(t-s\right)\theta_j^2\right\}.$$

De notar que cada componente do processo browniano sobre $\mathcal{R}^d$ é um processo browniano sobre $\mathcal{R}$.

4.4.3 Caracterização de um processo de Lévy geral

Por convenção, designaremos por P^t a convolução de ordem t de P.

Comecemos por apresentar a relação existente entre a classe de processos de Lévy e a classe de distribuições infinitamente divisíveis, que passamos a definir.

Definição 4.4.12 *Uma medida de probabilidade μ diz-se infinitamente divisível se, qualquer que seja o $n \in \mathcal{N}$, existe uma medida μ_n tal que $\mu = \mu_n^n$.*

Lema 4.4.13 *1) Se $\{X_t,\ t \geq 0\}$ é um processo de Lévy em lei sobre $\mathcal{R}^d$, para todo o $t \geq 0$, a distribuição de probabilidade de X_t, P_{X_t}, é infinitamente divisível e $P_{X_t} = P_{X_1}^t$.*

2) Reciprocamente, se P_{X_1} é uma distribuição infinitamente divisível, existe um processo de Lévy em lei, $X = \{X_t : t \geq 0\}$, tal que a lei de X_1 é P_{X_1}.

3) Se dois processos de Lévy em lei, X^1 e X^2, tiverem a mesma distribuição para o seu valor no momento 1, serão idênticos em lei.

Prova. (esboço) 1) A prova baseia-se no facto de estarmos a considerar, para um dado periodo, a soma de variáveis independentes (correspondentes aos acréscimos com igual periodicidade) com a mesma distribuição. Tal corresponde à noção de convolução da distribuição subjacente à definição de distribuição infinitamente divisível. Para um indice temporal racional, teremos $P_{X_{\frac{m}{n}}} = P_{X_{\frac{1}{n}}}^m = (P_{X_1})^{\frac{m}{n}}$. Para um indice irracional, consideramos uma sucessão de indices racionais convergindo para aquele.

2) Constroi-se um processo de Lévy em lei a partir de uma família de variáveis aleatórias com aquele tipo de distribuição, as quais representarão os acréscimos. A construção é feita a partir do teorema de extensão de Kolmogorov. Que se trata de um processo de Lévy em lei resulta das funções características obtidas. Assim, para acréscimos $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j = 1, ..., n)$, obtemos:

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\left\langle \theta_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\right\rangle\right\}\right] &= \int ... \int \exp\left(i\sum_j \langle\theta_j, x_j\rangle\right) P_{X_1}^{t_1-t_0}(dx_1) ... P_{X_1}^{t_j-t_{j-1}}(dx_j) \\ &= \prod_j \int \exp\left(i\langle\theta_j, x_j\rangle\right) P_{X_1}^{t_j-t_{j-1}}(dx_j). \end{aligned}$$

A independência resulta de imediato da forma desta função característica e a continuidade em probabilidade de $P_{X_1}^t \underset{t\to 0}{\to} \delta_0$.

3) Resulta de 1) a igualdade de distribuição dos acréscimos. Tem-se em conta a independência destes para obter a igualdade da sua distribuição conjunta. ∎

Consideremos de seguida uma representação para qualquer distribuição infinitamente divisível, f, dada pela fórmula de Lévy-Khintchine. Esta consiste na seguinte expressão para a função característica da distribuição f :

$$\widehat{f}(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle\theta, A\theta\rangle + i\langle\gamma,\theta\rangle + \int_{\mathcal{R}^d}\left(e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1 - i\langle\theta,x\rangle 1_{\{|x|\leq 1\}}(x)\right)v(dx)\right\} \quad \left(\theta\in\mathcal{R}^d\right) \tag{4.2}$$

onde A é uma matriz simétrica não negativa de ordem $(d\times d)$, v é uma medida sobre $\mathcal{R}^d$ com $v(\{0\}) = 0$ e $\int_{\mathcal{R}}\left(|x|^2\wedge 1\right)v(dx) < \infty$ e $\gamma\in\mathcal{R}^d$. (A, v, γ) designa-se por terno ordenado característico de f. Os primeiros dois termos da expressão referem-se à parte de trajectórias contínuas e o último à parte de salto. A parte contínua depende de um browniano. A será a matriz de covariâncias que permite definir uma parcela dependente do browniano. γ é o drift da distribuição. v é a medida que nos dá a intensidade associada a cada amplitude de salto. Dadas as hipóteses sobre a medida v, o termo $-i\langle\theta,x\rangle 1_{\{|x|\leq 1\}}(x)$ permite garantir que o integral onde está inserido é finito. Os problemas surgem ao nível dos saltos infinitesimais quando não se verifica a hipótese: $\int_{\mathcal{R}}(|x|\wedge 1)v(dx) < \infty$.

Pode-se provar o seguinte resultado.

Teorema 4.4.14 *1) Dados A, v e γ verificando as hipóteses apontadas, existe uma distribuição infinitamente divisível f tal que a função caraterística $\widehat{f}$ é dada por (4.2);*

2) Se f for uma distribuição infinitamente divisível, então a sua função característica é dada por (4.2);

3) A representação de f é única.

Prova. 1) Seja

$$\widehat{f_n}(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle\theta, A\theta\rangle + i\langle\gamma,\theta\rangle + \int_{|x|>\frac{1}{n}}\left(e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1 - i\langle\theta,x\rangle 1_{\{|x|\leq 1\}}(x)\right)v(dx)\right\}.$$

$\widehat{f_n}(\theta)$ corresponde à convolução de um processo gaussiano (função do browniano e do drift) e de um processo de Poisson composto e é portanto a função característica de uma distribuição infinitamente divisível. Note-se que a convolução de distribuições infinitamente previsíveis é infinitamente divisível e que os dois processos considerados são processos de Lévy. O drift do processo gaussiano é neste caso

$$\gamma - \int\limits_{|x|>\frac{1}{n}} x1_{\{|x|\leq 1\}}(x)\, v(dx).$$

A função característica correspondente ao processo de Poisson composto é

$$\exp\left\{\int\limits_{|x|>\frac{1}{n}} \left(e^{i\langle\theta,x\rangle}-1\right) v(dx)\right\} = \exp\left\{\int\limits_{\mathcal{R}^d} \left(e^{i\langle\theta,x\rangle}-1\right) v_n(dx)\right\},$$

onde $v_n = v \cdot 1_{x\in\left]\frac{1}{n},\infty\right[}$. Por outro lado,

$$\int \left|e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1 - i\langle\theta,x\rangle 1_{\{|x|\leq 1\}}(x)\right| v(dx) = \int O\left(|x|^2\right) v(dx) < \infty.$$

À medida que $n \to \infty$, $\widehat{f_n}(\theta)$ converge para $\widehat{f}(\theta)$. De facto, sendo $(v_n : n \in \mathcal{N})$ sucessão de medidas de probabilidade sobre dado espaço probabilizável, diz-se que converge fracamente para v se para toda a função f contínua e limitada,

$$\int f\ dv_n \longrightarrow \int f\ dv.$$

Ora, sendo $e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1$ contínua e limitada, vem

$$\int f\ (x)\, v_n(dx) \longrightarrow \int\limits_{\mathcal{R}^d-\{0\}} f\ v(dx).$$

Por outro lado, $\widehat{f}(\theta)$ é contínua. Prova-se que, nestas condições, $\widehat{f}(\theta)$ é a função característica de uma distribuição infinitamente divisível.

3) Atendendo a que

$$\left|e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1 - i\langle\theta,x\rangle 1_{\{|x|\leq 1\}}(x)\right| \leq \frac{1}{2}|\theta|^2|x|^2 1_{\{|x|\leq 1\}}(x) + 2\cdot 1_{\{|x|>1\}}(x),$$

pode concluir-se que $s^{-2}\ln\widehat{f}(s\theta) \underset{s\to\infty}{\rightarrow} -\frac{1}{2}\langle\theta,A\theta\rangle$ e portanto A é determinada univocamente por f.

Fazendo $\psi(\theta) = \ln\widehat{f}(\theta) + \frac{1}{2}\langle\theta,A\theta\rangle$, pode-se provar que existe uma medida $\rho(dx)$ dada por $2^d\left(1-\prod_{j=1}^d \frac{sen\ x_j}{x_j}\right) v(dx)$ tal que $\int_{[-1,1]^d}(\psi(\theta)-\psi(\theta+\omega))\,d\omega$ é a transformada de Fourier de ρ. Logo, ρ (e consequentemente v) é univocamente determinado por ψ e portanto por f. γ é determinado univocamente dados os outros parâmetros.

2) Seja μ_n uma sucessão de distribuições cuja função característica se pode definir na forma alternativa à de (4.2):

$$\widehat{\mu}_n(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle\theta, A_n\theta\rangle + i\langle\gamma_{nc},\theta\rangle + \int_{\mathcal{R}^d}\left(e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1 - i\langle\theta,x\rangle c(x)\right)v_n(dx)\right\}$$

onde $c(x)$ é uma função mensurável limitada de $\mathcal{R}^d$ em $\mathcal{R}$ que satisfaz $c(x) = 1 + \circ(|x|)$ para $|x| \to 0$ e $c(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ para $|x| \to \infty$ e $\gamma_{nc} = \gamma_n + \int_{\mathcal{R}^d} x\left(c(x) - 1_{\{|x|\geq 1\}}(x)\right)v_n(dx)$.

$\mu_n \to \mu$ se e só se μ é infinitamente divisível e tem por representação:

$$\widehat{\mu}(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle\theta, A\theta\rangle + i\langle\gamma_c,\theta\rangle + \int_{\mathcal{R}^d}\left(e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1 - i\langle\theta,x\rangle c(x)\right)v(dx)\right\}$$

onde (A, v, γ_c) obedece a condições análogas às de (A_n, v_n, γ_{nc}) e verifica ainda as seguintes:

a) sendo f uma função contínua e limitada de $\mathcal{R}^d$ em $\mathcal{R}$ e tendendo para 0 na vizinhança de 0,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{R}^d} f(x)\,v_n(dx) = \int_{\mathcal{R}^d} f(x)\,v(dx);$$

b)

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\to\infty}\sup|\langle\theta, A_{n,\varepsilon}\theta\rangle - \langle\theta, A\theta\rangle| = 0$$

com $\theta \in \mathcal{R}^d$ onde $A_{n,\varepsilon}$ é dado através de

$$\langle\theta, A_{n,\varepsilon}\theta\rangle = \langle\theta, A_n\theta\rangle + \int_{|x|\leq\varepsilon}\langle\theta,x\rangle^2 v_n(dx).$$

A prova deste resultado é feita verificando a convergência de v_n para v, de A_n para A, e de γ_{nc} para γ_c.

Considerando o resultado pretendido em 2, definimos uma sucessão f_n dada por

$$\hat{f}_n(\theta) = \exp\left\{t_n^{-1}\left(\hat{f}^{t_n}(\theta) - 1\right)\right\} = \exp\left\{t_n^{-1}\int_{\mathcal{R}^d\setminus\{0\}}\left(e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1\right)f^{t_n}(dx)\right\},$$

onde $t_n \to 0$.

A distribuição f_n é de Poisson composta e verifica $\hat{f}_n(\theta) \to \hat{f}(\theta)$. Por outro lado, tem uma representação do tipo da de μ_n e pode-se aplicar o resultado para concluir que $\hat{f}(\theta)$ tem uma representação do mesmo tipo da de $\hat{\mu}(\theta)$, a qual é equivalente à considerada em (4.2). ■

No caso aditivo não estacionário centramo-nos na hipótese da independência. Para este provam-se alguns resultados semelhantes aos acabados de referir para os processos de Lévy em lei.

Lema 4.4.15 *Seja* $\{f_{st}\}\,(s,t \geq 0)$ *um sistema de medidas de probabilidade infinitamente divisíveis sobre* $\mathcal{R}^d$ *verificando as seguintes condições:*

(i) $f_{st} * f_{tu} = f_{su} \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq u < \infty$;

(ii) $f_{ss} = \delta_0 \quad \forall 0 \leq s < \infty$;

(iii) $f_{st} \underset{s \uparrow t}{\rightarrow} \delta_0 \quad \forall 0 \leq s \leq t < \infty$;

(iv) $f_{st} \underset{t \downarrow s}{\rightarrow} \delta_0 \quad \forall 0 \leq s \leq t < \infty$.

Então existe um processo aditivo em lei, X*, tal que* $X_t - X_s$ *tem distribuição* f_{st} $(0 \leq s \leq t < \infty)$.

Prova. Semelhante à do lema 4.4.13.2., atendendo a que a distribuição considerada aqui é uma generalização da daquele lema. ■

Lema 4.4.16 *Seja* $\{f_t\}\,(t \geq 0)$ *um sistema de medidas de probabilidade infinitamente divisíveis sobre* $\mathcal{R}^d$ *com trios geradores* (A_t, v_t, γ_t) *verificando*

a) $A_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$;

b) $\langle z, A_s z\rangle \leq \langle z, A_t z\rangle$ *e* $v_s \leq v_t \quad (0 \leq s \leq t < \infty)$;

c) $\langle z, A_s z\rangle \underset{s \to t}{\rightarrow} \langle z, A_t z\rangle$, $v_s \underset{s \to t}{\rightarrow} v_t$ *e* $\gamma_s \underset{s \to t}{\rightarrow} \gamma_t \quad (0 \leq s \leq t < \infty)$.

Então, existe univocamente em lei (ou seja, no que respeita às distribuições de dimensão finita) um processo aditivo em lei, X*, sobre* $\mathcal{R}^d$ *tal que* $P_{X_t} = f_t \quad (t \geq 0)$.

Prova. Usa-se o lema anterior. A partir de b), define-se uma distribuição infinitamente divisível f_{st} com terno ordenado característico $(A_t - A_s, v_t - v_s, \gamma_t - \gamma_s)$. A partir de a), $f_{0,t} = f_t$. A partir das hipóteses consideradas, concluimos que se verificam as hipóteses do lema anterior e portanto podemos aplicá-lo. ■

Analisámos até aqui a caracterização de processos de Lévy ou aditivos em lei. Pode-se verificar o seguinte.

Lema 4.4.17 *Seja* X *um processo de Lévy ou aditivo em lei. Existe uma modificação que é um processo respectivamente de Lévy ou aditivo, ou seja, que é também contínuo à direita e com limites à esquerda.*

Prova. Consideremos o caso aditivo. Um processo aditivo pode ser caracterizado como um processo de Markov com função de transição $P_{s,t}(x,B) = P(X_t - X_s \in B - x)$ $(0 \leq s \leq t < \infty)$, a qual é espacialmente homogénea $(P_{s,t}(x,B) = P_{s,t}(0,B-x))$e começa em 0 e onde x é o valor de partida para X no momento s. Podemos concluir que

$$P_{s,t}(x, \{y : |y-x| \geq \varepsilon\}) = P_{s,t}(0, \{y : |y| \geq \varepsilon\}) = P(|X_t - X_s| \geq \varepsilon).$$

Pode-se verificar que esta probabilidade tende para 0 quando $s \longrightarrow t$, o que resulta de o processo ser contínuo em probabilidade. Tal permite chegar ao resultado pretendido ao excluir, com probabilidade 1, a possibilidade de haver grandes oscilações em qualquer pequeno intervalo de tempo. ■

Verifiquemos de seguida a existência de um processo aditivo com trajectórias contínuas, cujo terno ordenado característico será $(A_t, 0, \gamma_t)$.

Lema 4.4.18 *Seja X um processo aditivo sobre $\mathcal{R}^d$ com distribuição gaussiana para todo o t. Então, X tem quase certamente trajectórias contínuas.*

Prova. No caso $d = 1$, prova-se a existência do movimento browniano, X, verificando-se que

$$\frac{1}{u} \sup_{s \leq u \wedge T} P(|X_s| > \varepsilon) \leq \sup_{s \leq u \wedge T} \frac{1}{s} P(|X_s| > \varepsilon) \leq \frac{2}{\varepsilon\sqrt{s2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2s}} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

onde T é tal que $s \in [0,T]$.

Generaliza-se a análise para um processo $Y_t = X_{A_t} + \gamma_t$, o qual terá por terno ordenado característico $(A_t, 0, \gamma_t)$. A continuidade de Y resulta da de X e, a partir daquela, verifica-se a continuidade de qualquer outro processo aditivo com a mesma distribuição, ou seja, com terno ordenado característico $(A_t, 0, \gamma_t)$. O caso $d > 1$ é imediato atendendo a que a sua continuidade é equivalente à das suas componentes que são processos aditivos com $d = 1$. ■

Consideremos um dado processo aditivo de trajectórias contínuas, Y_1, o qual pode então ser construído de forma a ser independente de um processo aditivo com saltos, Y_2. Eventualmente, Y_1 está definido sobre um espaço alargado relativamente ao espaço sobre o qual está definido Y_2.

A fim de caracterizar Y_2, consideramos a seguinte definição.

Definição 4.4.19 *Seja (Λ, G, ρ) um espaço onde ρ é $\sigma-$finita. Uma medida aleatória de Poisson $\{N(B) : B \in G\}$ é uma família de variáveis aleatórias sobre $\overline{\mathcal{Z}}^{+}$ que verifica:*

a) $\forall B \quad N(B)$ tem distribuição de Poisson de média $\rho(B)$;

b) se $B_1, ..., B_n$ são disjuntos, então $N(B_1), ..., N(B_n)$ são independentes;

ρ diz-se medida de intensidade de N e desempenha o papel de compensador.

O processo Y_2 terá por terno ordenado característico $(0, v_t, 0)$, vindo dado por

$$Y_{2t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{]0,t] \times D]\varepsilon,1]} xN(d(s,x), \omega) - x\widetilde{v}(d(s,x)) + \int_{]0,t] \times D]1,\infty[} xN(d(s,x), \omega)$$

em que N é uma medida de Poisson, $\widetilde{v}$ a respectiva medida de compensação e $D\,]a,b] = \{x \in \mathcal{R}^d : a < |x| \leq b\}$. A medida $v_t(B)$ virá nesse caso dada por $\widetilde{v}(]a,b] \times B)$. Relativamente ao primeiro integral, pode-se provar a existência do limite atendendo a que o integral pode ser escrito como $S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(t)$ onde $Z_i(t)$ é definido de seguida. Sendo $\{\varepsilon_n\}$ uma sucessão decrescente para 0 com $\varepsilon_0 = 1$, o termo geral é dado por

$$Z_i(t) = \int_{]0,t] \times D]\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}]} xN(d(s,x)) - x\widetilde{v}(d(s,x)).$$

Por outro lado, pode-se verificar que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left[\sup_{s \in [0,t]} |S_m(s) - S_n(s)| > \varepsilon\right] \underset{m,n \to \infty}{\to} 0.$$

A função característica de Y_2 virá dada por

$$\exp\left\{\int_{D]0,\infty[} \left(e^{i\langle\theta,x\rangle} - 1 - i\langle\theta,x\rangle 1_{D]0,1]}(x)\right) v_t(dx)\right\}.$$

A independência entre Y_1 e Y_2 pode ser verificada através da condição $\varphi_{Y_{1t},Y_{2t}}(\theta_1,\theta_2) = \varphi_{Y_{1t},}(\theta_1)\varphi_{Y_{2t}}(\theta_2)$ em que φ é a função característica da variável em indice.

No resultado seguinte apresentamos a decomposição de Lévy-Itô.

Teorema 4.4.20 *Seja X um processo aditivo sobre $\mathcal{R}^d$ definido no espaço (Ω, F, P) com terno ordenado característico (A_t, v_t, γ_t) $(t \geq 0)$. Então, existe uma decomposição de X da forma $X_1 + X_2$ em que X_1 corresponde à parte de X com trajectórias contínuas e X_2 à parte de saltos, sendo esta representada por*

$$X_{2t}(\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{]0,t] \times D]\varepsilon,1]} xN(d(s,x), \omega) - x\widetilde{v}(d(s,x)) + \int_{]0,t] \times D]1,\infty[} xN(d(s,x), \omega).$$

$N(d(s,x),\omega)$ é a medida de contagem que identifica o número de saltos com dada amplitude de X num dado espaço de tempo e vem dada por:

$$N(B,\omega) = \begin{cases} \#\{s : (s, X_s(\omega) - X_{s-}(\omega)) \in B\} & se\ \omega \in \Omega_0 \\ 0\ se\ \omega \notin \Omega_0 \end{cases}$$

em que Ω_0 é o conjunto de probabilidade 1 sobre o qual X é cadlag. X_1 é dado por $X - X_2$. X_1 e X_2 são independentes.

Note-se que construímos atrás um processo Y com decomposição de Lévy-Itô dada por $Y_1 + Y_2$ e idêntico em lei a X (possui o mesmo terno ordenado característico). A prova consiste em verificar que X tem a mesma decomposição. É usada a identidade em lei entre X e Y para verificar a identidade em lei entre X_2 e Y_2. Pode-se verificar então a continuidade de X_1. Concluimos enfim que os pares (X_1, X_2) e (Y_1, Y_2) são idênticos em lei o que permite afirmar que X_1 e X_2 são independentes. Note-se que X pode estar definido sobre um espaço probabilizado diferente do de Y.

4.5 Dependência no processo

Pretende-se obter uma medida de dependência entre as partes contínua, X_1, e descontínua, X_2, no caso considerado nas secções anteriores. Para tal, considera-se as funções características conjunta e marginais de X_1 e X_2 num dado momento. Consideremos a equação progressiva de Kolmogorov que permite caracterizar a evolução da medida de probabilidade de (X_1, X_2, J) no momento s, $p(X_{1s}, X_{2s}, J_s, s)$. Vejamos como é obtida esta equação.

À semelhança do que vimos atrás, para uma função $u(X_{1s}, X_{2s}, J_s, s)$ que possua esperança no momento T verifica-se

$$\begin{aligned} & E_{X_{10}=x_1, X_{20}=x_2, J_0=j}\left[u(X_{1T}, X_{2T}, J_T, T) - u(x_1, x_2, j, 0)\right] \\ = \ & E\left[\int_0^T u_s(X_{1s}, X_{2s}, J_s, s)\, ds + \int_0^T Au(X_{1s}, X_{2s}, J_s, s)\, ds\right], \end{aligned}$$

agora com

$$Af(x_1, x_2, 1) = \beta_1 \partial_{x_1} f(x_1, x_2, 1) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 \partial^2_{x_1 x_1} f(x_1, x_2, 1) + q_{12}\left[f(x_1, x_2, 2) - f(x_1, x_2, 1)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda_1 \left[a_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(x_1, x_2 + y, 1\right) - f\left(x_1, x_2, 1\right)\right) F_U\left(dy\right) \right.\\
&\left. +a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(x_1, x_2 + y, 2\right) - f\left(x_1, x_2, 1\right)\right) F_U\left(dy\right) \right];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Af\left(x_1, x_2, 2\right) &= \beta_2 \partial_{x_1} f\left(x_1, x_2, 2\right) + \frac{1}{2}\sigma_2^2 \partial_{x_1 x_1}^2 f\left(x_1, x_2, 2\right) + q_{21}\left[f\left(x_1, x_2, 1\right) - f\left(x_1, x_2, 2\right)\right]\\
&+\lambda_2 \left[a_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(x_1, x_2 + y, 1\right) - f\left(x_1, x_2, 2\right)\right) F_U\left(dy\right) \right.\\
&\left. +a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(f\left(x_1, x_2 + y, 2\right) - f\left(x_1, x_2, 2\right)\right) F_U\left(dy\right) \right].
\end{aligned}
$$

Designe Λ o espaço de estados $\omega = \left(x_1, x_2, j\right)$.

Seja A^* o operador adjunto de A sobre o produto interno

$$
\langle u, v\rangle = \int_{\Re}\int_{\Re} \left[u\left(x_1, x_2, 1, s\right) v\left(x_1, x_2, 1, s\right) + u\left(x_1, x_2, 2, s\right) v\left(x_1, x_2, 2, s\right)\right] dx_2 dx_1
$$

(s fixo) cujo espaço é o das funções de quadrado integrável definidas sobre o espaço de estados $\Re \times \Re \times E$.

Recorrendo à integração por partes, $E_{X_{10}=x_1, X_{20}=x_2, J_0=j}\left[u\left(X_{1T}, X_{2T}, J_T, T\right) - u\left(x_1, x_2, j, 0\right)\right]$ vem igual a

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Lambda \left[\frac{\partial u}{\partial s}\left(\omega, s\right) + Au\left(\omega, s\right)\right] p\left(\omega, s\right) d\omega ds\\
=&\int_0^T \int_{\Re}\int_{\Re}\int_E \left[\frac{\partial u}{\partial s}\left(x_1, x_2, j, s\right) + Au\left(x_1, x_2, j, s\right)\right] p\left(x_1, x_2, j, s\right) dj dx_2 dx_1 ds\\
=&\int_0^T \int_{\Re}\int_{\Re} \left[\frac{\partial u}{\partial s}\left(x_1, x_2, 1, s\right) + Au\left(x_1, x_2, 1, s\right)\right] p\left(x_1, x_2, 1, s\right) dx_2 dx_1 ds\\
&+\int_0^T \int_{\Re}\int_{\Re} \left[\frac{\partial u}{\partial s}\left(x_1, x_2, 2, s\right) + Au\left(x_1, x_2, 2, s\right)\right] p\left(x_1, x_2, 2, s\right) dx_2 dx_1 ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\left[\int_{\Re}\int_{\Re} u\left(x_1, x_2, 1, s\right) p\left(x_1, x_2, 1, s\right) dx_2 dx_1\right]_0^T\\
&-\int_0^T \int_{\Re}\int_{\Re} u\left(x_1, x_2, 1, s\right) \frac{\partial p}{\partial s}\left(x_1, x_2, 1, s\right) dx_2 dx_1 ds\\
&+\int_0^T \int_{\Re}\int_{\Re} u\left(x_1, x_2, 1, s\right) A^* p\left(x_1, x_2, 1, s\right) dx_2 dx_1 ds
\end{aligned}
$$

$$+\left[\int_{\Re}\int_{\Re} u\left(x_1,x_2,2,s\right)p\left(x_1,x_2,2,s\right)dx_2dx_1\right]_0^T$$
$$-\int_0^T\int_{\Re}\int_{\Re} u\left(x_1,x_2,2,s\right)\frac{\partial p}{\partial s}\left(x_1,x_2,2,s\right)dx_2dx_1ds$$
$$+\int_0^T\int_{\Re}\int_{\Re} u\left(x_1,x_2,2,s\right)A^*p\left(x_1,x_2,2,s\right)dx_2dx_1ds.$$

A^* é obtido a partir da definição

$$\langle Au,p\rangle=\langle u,A^*p\rangle\,,$$

ou seja,

$$\int_{\Re}\int_{\Re}\left[Au\left(x_1,x_2,1,s\right)p\left(x_1,x_2,1,s\right)+Au\left(x_1,x_2,2,s\right)p\left(x_1,x_2,2,s\right)\right]dx_2dx_1=$$

$$\begin{aligned}
= \int_{\Re}\int_{\Re}&\Bigg\{\beta_1\partial_{x_1}u\left(x_1,x_2,1,s\right)p\left(x_1,x_2,1,s\right)+\frac{1}{2}\sigma_1^2\partial^2_{x_1x_1}u\left(x_1,x_2,1,s\right)p\left(x_1,x_2,1,s\right)\\
&+q_{12}\left[u\left(x_1,x_2,2,s\right)-u\left(x_1,x_2,1,s\right)\right]p\left(x_1,x_2,1,s\right)\\
&+\lambda_1\Bigg[a_1p\left(x_1,x_2,1,s\right)\int_{-\infty}^{\infty}u\left(x_1,x_2+y,1,s\right)F_U\left(dy\right)\\
&+a_2p\left(x_1,x_2,1,s\right)\int_{-\infty}^{\infty}u\left(x_1,x_2+y,2,s\right)F_U\left(dy\right)\\
&-u\left(x_1,x_2,1,s\right)p\left(x_1,x_2,1,s\right)\Bigg]+\beta_2\partial_xu\left(x_1,x_2,2,s\right)p\left(x_1,x_2,2,s\right)\\
&+\frac{1}{2}\sigma_1^2\partial^2_{xx}u\left(x_1,x_2,2,s\right)p\left(x_1,x_2,2,s\right)+q_{21}\left[u\left(x_1,x_2,1,s\right)-u\left(x_1,x_2,2,s\right)\right]p\left(x_1,x_2,2,s\right)\\
&+\lambda_2\Bigg[a_1p\left(x_1,x_2,2,s\right)\int_{-\infty}^{\infty}u\left(x_1,x_2+y,1,s\right)F_U\left(dy\right)\\
&+a_2p\left(x_1,x_2,2,s\right)\int_{-\infty}^{\infty}u\left(x_1,x_2+y,2,s\right)F_U\left(dy\right)-u\left(x_1,x_2,2,s\right)p\left(x_1,x_2,2,s\right)\Bigg]\Bigg\}dx_2dx_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \int_{\Re}\int_{\Re}&\Bigg\{-\beta_1u\left(x_1,x_2,1,s\right)\partial_{x_1}p\left(x_1,x_2,1,s\right)+\frac{1}{2}\sigma_1^2u\left(x_1,x_2,1,s\right)\partial^2_{x_1x_1}p\left(x_1,x_2,1,s\right)\\
&+q_{12}u\left(x_1,x_2,2,s\right)p\left(x_1,x_2,1,s\right)-q_{12}u\left(x_1,x_2,1,s\right)p\left(x_1,x_2,1,s\right)\\
&+\lambda_1\Bigg[a_1u\left(x_1,x_2,1,s\right)\int_{-\infty}^{\infty}p\left(x_1,x_2-y,1,s\right)F_U\left(dy\right)\\
&+a_2u\left(x_1,x_2,2,s\right)\int_{-\infty}^{\infty}p\left(x_1,x_2-y,1,s\right)F_U\left(dy\right)\\
&-u\left(x_1,x_2,1,s\right)p\left(x_1,x_2,1,s\right)\Bigg]-\beta_2u\left(x_1,x_2,2,s\right)\partial_{x_1}p\left(x_1,x_2,2,s\right)\\
&+\frac{1}{2}\sigma_1^2u\left(x_1,x_2,2,s\right)\partial^2_{x_1x_1}p\left(x_1,x_2,2,s\right)+q_{21}u\left(x_1,x_2,1,s\right)p\left(x_1,x_2,2,s\right)
\end{aligned}$$

$$-q_{21}u(x_1,x_2,2,s)\,p(x_1,x_2,2,s)+\lambda_2\left[a_1u(x_1,x_2,1,s)\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2-y,2,s)\,F_U(dy)\right.$$

$$\left.\left.+a_2u(x_1,x_2,2,s)\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2-y,2,s)\,F_U(dy)-u(x_1,x_2,2,s)\,p(x_1,x_2,2,s)\right]\right\}dx_2dx_1$$

$$=\int_{\Re}\int_{\Re}u(x_1,x_2,1,s)\,A^*p(x_1,x_2,1,s)+u(x_1,x_2,2,s)\,A^*p(x_1,x_2,2,s)\,dx_2dx_1$$

com

$$\begin{aligned}A^*p(x_1,x_2,1,s) &= -\beta_1\partial_{x_1}p(x_1,x_2,1,s)+\frac{1}{2}\sigma_1^2\partial^2_{x_1x_1}p(x_1,x_2,1,s)-q_{12}p(x_1,x_2,1,s)\\&\quad+q_{21}p(x_1,x_2,2,s)+\lambda_1\left[a_1\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2-y,1,s)\,F_U(dy)-p(x_1,x_2,1,s)\right]\\&\quad+\lambda_2a_1\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2-y,2,s)\,F_U(dy)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}A^*p(x_1,x_2,2,s) &= -\beta_2\partial_{x_1}p(x_1,x_2,2,s)+\frac{1}{2}\sigma_2^2\partial^2_{x_1x_1}p(x_1,x_2,2,s)-q_{21}p(x_1,x_2,2,s)\\&\quad+q_{12}p(x_1,x_2,1,s)+\lambda_2\left[a_2\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2-y,2,s)\,F_U(dy)-p(x_1,x_2,2,s)\right]\\&\quad+\lambda_1a_2\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1,x_2-y,1,s)\,F_U(dy)\,.\end{aligned}$$

Supondo que, no momento inicial, o estado da cadeia é 2 e o valor de X_1 e X_2 é 0, a condição inicial é

$$p(x_1,x_2,1,0)=0 \text{ e } p(x_1,x_2,2,0)=\delta_{(0,0)}(x_1,x_2)\,.$$

Consideremos a transformada de Fourier bidimensional

$$\widehat{p}(\xi_1,\xi_2)=\int_{\Re}\int_{\Re}e^{i\xi_1x_1+i\xi_2x_2}p(x_1,x_2)\,dx_2dx_1.$$

Consideremos a distribuição de probabilidade num momento futuro, cuja referência na notação é suprimida para a simplificar. O sistema para as transformadas de Fourier $\widehat{p}(\xi_1,\xi_2,1)$ e $\widehat{p}(\xi_1,\xi_2,2)$ de $p(x_1,x_2,1)$ e $p(x_1,x_2,2)$, respectivamente, vem dado por:

$$\begin{array}{c}-y'+\theta_1\times y+\theta_2\times z=0\\-z'+\zeta_1\times y+\zeta_2\times z=0\\z(0)=1\\y(0)=0\end{array},$$

com $y=\widehat{p}\left(\xi_1,\xi_2,1\right)$, $z=\widehat{p}\left(\xi_1,\xi_2,2\right)$,

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= i\xi_1\beta_1-\frac{1}{2}\sigma_1^2\xi_1^2-q_{12}+\lambda_1\left(a_1\widehat{f}_U\left(y,\xi_2\right)-1\right),\\
\theta_2 &= q_{21}+\lambda_2 a_1\widehat{f}_U\left(y,\xi_2\right),\\
\zeta_1 &= q_{12}+\lambda_1 a_2\widehat{f}_U\left(y,\xi_2\right),\\
\zeta_2 &= i\xi_1\beta_2-\frac{1}{2}\sigma_2^2\xi_1^2-q_{21}+\lambda_2\left(a_2\widehat{f}_U\left(y,\xi_2\right)-1\right),\\
\widehat{f}_U\left(y,\xi_2\right) &= \int e^{i\xi_2 y}F_U\left(dy\right).
\end{aligned}$$

Se, por exemplo, for

$$f_U\left(y\right)=\begin{cases}\frac{\gamma}{2}e^{-\gamma y}, y\geq 0\\ \frac{\gamma}{2}e^{\gamma y}, y<0\end{cases}$$

então,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_U\left(y,\xi_2\right) &= \frac{\gamma}{2}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}e^{i\xi_2 y}e^{\gamma y}dy+\int\limits_{0}^{\infty}e^{i\xi_2 y}e^{-\gamma y}dy\right]\\
&= \frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{\gamma+i\xi_2}+\frac{1}{\gamma-i\xi_2}\right).
\end{aligned}$$

Na obtenção do sistema apresentado faz-se cálculos como estes:

$$\begin{aligned}
\int\int e^{i\xi_1x_1+i\xi_2x_2}\partial_{x_1}f\left(x_1,x_2\right)dx_2dx_1 &= \int e^{i\xi_2x_2}\left[\int e^{i\xi_1x_1}\partial_{x_1}f\left(x_1,x_2\right)dx_1\right]dx_2\\
&= \int e^{i\xi_2x_2}\left[\left(-i\xi_1\right)\int e^{i\xi_1x_1}f\left(x_1,x_2\right)dx_1\right]dx_2\\
&= -i\xi_1\int\int e^{i\xi_1x_1+i\xi_2x_2}f\left(x_1,x_2\right)dx_2dx_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iiint f\left(x_1,x_2-y\right)F_U\left(dy\right)e^{i\xi_1x_1+i\xi_2x_2}dx_2dx_1\\
&= \int e^{i\xi_1x_1}\left[\int\left[\int f\left(x_1,x_2-y\right)e^{i\xi_2\left(x_2-y\right)}dx_2\right]e^{i\xi_2y}F_U\left(dy\right)\right]dx_1\\
&= \iint f\left(x_1,x_2\right)e^{i\xi_1x_1+i\xi_2x_2}dx_2dx_1\int e^{i\xi_2y}F_U\left(dy\right).
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $\widehat{p}\left(\xi_1,\xi_2,1\right)$ e $\widehat{p}\left(\xi_1,\xi_2,2\right)$, e a partir destas a função característica conjunta de X_1 e X_2

$$\begin{aligned}
\widehat{p}\left(\xi_1,\xi_2\right) &= \int\int e^{i\xi_1x_1+i\xi_2x_2}p\left(x_1,x_2\right)dx_1dx_2\\
&= \int\int e^{i\xi_1x_1+i\xi_2x_2}\left[p\left(x_1,x_2,1\right)+p\left(x_1,x_2,2\right)\right]dx_1dx_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\int e^{i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2} p\left(x_1, x_2, 1\right) dx_1 dx_2 + \int\int e^{i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2} p\left(x_1, x_2, 2\right) dx_1 dx_2 \\
&= \widehat{p}\left(\xi_1, \xi_2, 1\right) + \widehat{p}\left(\xi_1, \xi_2, 2\right).
\end{aligned}
$$

Na hipótese de haver independência entre X_1 e X_2, se $p\left(x_2\right) > 0$, verifica-se

$$
p\left(x_1 \left| x_2 \right.\right) = p\left(x_1\right),
$$

sendo o primeiro membro a medida de probabilidade condicional de X_1 dado X_2 e o segundo a medida de probabilidade marginal de X_1. Em consequência,

$$
\begin{aligned}
\widehat{p}\left(\xi_1, \xi_2\right) &= \int\int e^{i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2} p\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 = \int\int e^{i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2} p\left(x_1 \left| x_2 \right.\right) p\left(x_2\right) dx_1 dx_2 \\
&= \int e^{i\xi_1 x_1} p\left(x_1\right) dx_1 \int e^{i\xi_2 x_2} p\left(x_2\right) dx_2 = \widehat{p}_{X_1}\left(\xi_1\right) \widehat{p}_{X_2}\left(\xi_2\right),
\end{aligned}
$$

sendo os factores na última expressão respectivamente as funções características de X_1 e de X_2.

Por outro lado, estes podem ser obtidos como:

$$
\begin{aligned}
\widehat{p}_{X_1}\left(\xi_1\right) &= \int e^{i\xi_1 x_1} p\left(x_1\right) dx_1 = \int e^{i\xi_1 x_1} p\left(x_1\right) dx_1 \int p\left(x_2\right) dx_2 = \\
&= \int\int e^{i\xi_1 x_1} p\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 = \widehat{p}\left(\xi_1, 0\right)
\end{aligned}
$$

e

$$
\widehat{p}_{X_2}\left(\xi_2\right) = \widehat{p}\left(0, \xi_2\right).
$$

Este resultado pressupõe implicitamente que

$$
\lim_{\xi_2 \to 0} \widehat{p}\left(\xi_1, \xi_2\right) = \widehat{p}\left(\xi_1, 0\right) \quad \text{e} \quad \lim_{\xi_1 \to 0} \widehat{p}\left(\xi_1, \xi_2\right) = \widehat{p}\left(0, \xi_2\right),
$$

o que resulta de o sistema utilizado para determinar as funções características ser válido quando ξ_1 ou ξ_2 são nulos. Isto pode ser verificado inspeccionando as operações de passagem à transformação de Fourier sobre cada um dos termos da equação integrodiferencial original, para este caso. Assim, por exemplo

$$
\begin{aligned}
\iiint g\left(x_1\right) f_U\left(y\right) p\left(x_1, x_2 - y\right) dy dx_1 dx_2 &= \iiint g\left(x_1\right) f_U\left(y\right) p\left(x_1, x_2\right) dy dx_1 dx_2 \\
&= \int f_U\left(y\right) dy \int p\left(x_2 \left| x_1 \right.\right) dx_2 \int g\left(x_1\right) p\left(x_1\right) dx_1 \\
&= \int g\left(x_1\right) p\left(x_1\right) dx_1.
\end{aligned}
$$

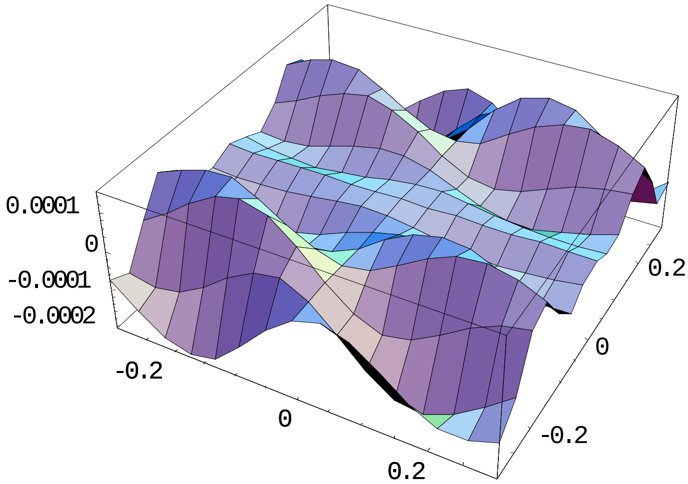


Figura 4.1:

Verificar-se-à então a independência entre X_1 e X_2 se

$$\widehat{p}(\xi_1,\xi_2)=\widehat{p}(\xi_1,0)\,.\widehat{p}(0,\xi_2)\,.$$

No modelo em causa, podemos verificar que, para a generalidade dos valores dos parâmetros da função característica, esta igualdade não se verifica, havendo portanto dependência entre a parte contínua e a parte de salto do processo. Este facto permite concluir que o processo em causa não é aditivo, ou seja, não tem acréscimos independentes. Concretizando os valores dos restantes parâmetros, podemos obter uma representação gráfica para

$$\widehat{p}(\xi_1,\xi_2)-\widehat{p}(\xi_1,0)\,.\widehat{p}(0,\xi_2)\,.$$

No seguinte caso, são apresentados gráficos que representam as partes real (primeira figura) e imaginária (segunda figura) desta função, para os valores de ξ_1 e de ξ_2 entre -0.2 e 0.2. Consideramos os valores para os parâmetros:

$$\sigma_1^2=\frac{1}{3},\ \sigma_1^2=\frac{1}{2},\ a_1=a_2=\frac{1}{2},\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=2.5,\ q_{12}=4,\ q_{21}=5,\ \beta_1=\frac{1}{10},\ \beta_2=\frac{1}{15}$$

e, tendo U uma distribuição exponencial de parâmetro $\gamma=8$.

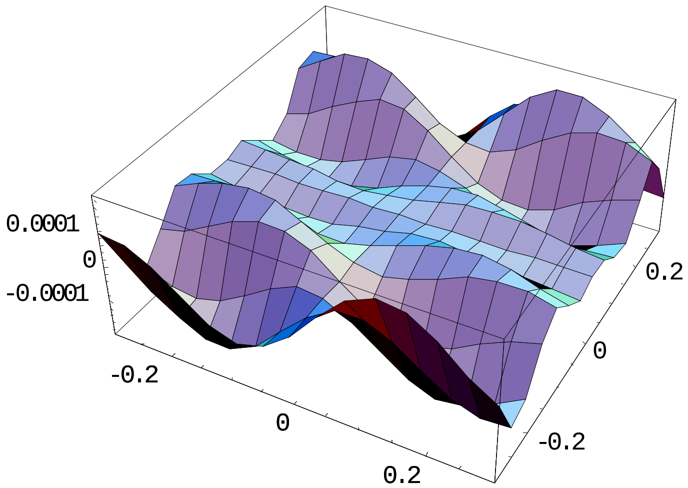


Figura 4.2:

4.6 Medida de Dependência

A fim de avaliar a existência de dependência entre duas variáveis aleatórias, podemos verificar o afastamento entre a distribuição conjunta das duas variáveis e o produto das respectivas distribuições marginais. Se houver dependência, as duas coincidem, o mesmo sucedendo com as respectivas funções características.

Comecemos por considerar um conjunto de distâncias habitualmente utilizadas para medir a divergência entre duas distribuições de probabilidade P e Q definidas sobre um espaço probabilizável (Ω, F) (ver [DA]). Consideremos uma medida μ, $\sigma-$finita sobre F, dominando P e Q. Sejam $p = \frac{dP}{d\mu}$ e $q = \frac{dQ}{d\mu}$. Definamos as seguintes distâncias:

1. distância de variação total:

$$d_V(P,Q) = \sup_{B \in F}(P(B) - Q(B)) = \frac{1}{2}\int |p-q|\, d\mu.$$

A segunda igualdade é obtida atendendo a que

$$B^s = \left\{B \in F : \sup_{B \in F}(P(B) - Q(B))\right\} = \{\{p > q\}, \{p \geq q\}\}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\int |p-q|\, d\mu &= \int_{B^s} (p-q)\, d\mu + \int_{(B^s)^c} (q-p)\, d\mu \\ &= P(B^s) - Q(B^s) + 1 - Q(B^s) - 1 + P(B^s) = 2\left[P(B^s) - Q(B^s)\right].\end{aligned}$$

2. distância de Hellinger:

$$d_H(P,Q) = \left[\frac{1}{2}\int (\sqrt{p}-\sqrt{q})^2\, d\mu\right]^{\frac{1}{2}} \equiv \left[1-\rho(P,Q)\right]^{\frac{1}{2}}$$

onde $\rho(P,Q)$, designada por afinidade de Hellinger, é dada por $\int \sqrt{pq}\,d\mu$.

3. distância baseada na função característica (designamos por φ_P a função característica de P):

$$d_\varphi(P,Q) = \frac{1}{2}\sup_t \left|\varphi_P(t) - \varphi_Q(t)\right|.$$

Podemos verificar as seguintes propriedades referentes a estas distâncias.

Lema 4.6.1 $0 \le d_V,\, d_H,\, d_\varphi \le 1$.

Prova. Imediata dado que as probabilidades e as funções características tomam valores entre 0 e 1. ■

Lema 4.6.2 $d_H^2(P,Q) \le d_V(P,Q) \le \left[1-\rho^2(P,Q)\right]^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\,d_H(P,Q)$.

Prova. (primeira desigualdade) Verifica-se a seguinte relação entre os integrandos de d_V e de d_H^2 :

$$|p-q| = |\sqrt{p}-\sqrt{q}|\,|\sqrt{p}+\sqrt{q}| \ge |\sqrt{p}-\sqrt{q}|^2.$$

(segunda desigualdade) $\int |p-q|\,d\mu = \int \left|\sqrt{p}-\sqrt{q}\right|\left|\sqrt{p}+\sqrt{q}\right| d\mu \le$

$$\begin{aligned}&\le \sqrt{\int \left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2 d\mu}\sqrt{\int \left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2 d\mu} \\ &= 2\sqrt{(1-\rho(P,Q))(1+\rho(P,Q))} = 2\sqrt{(1-\rho^2(P,Q))},\end{aligned}$$

atendendo à desigualdades de Holder.

(terceira desigualdade) $\left[1-\rho^2(P,Q)\right]^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\int \left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2 d\mu}$ equivale a ter

$$1 - \left(\int \sqrt{pq}\,d\mu\right)^2 \le \int p\,d\mu + \int q\,d\mu - 2\int \sqrt{pq}\,d\mu = 2\left(1 - \int \sqrt{pq}\,d\mu\right)$$

ou seja $1-\rho^2(P,Q) \le 2(1-\rho(P,Q))$ o que é verdadeiro dado que, pela desigualdade de Schwarz, $\rho(P,Q) \le 1$. ■

Lema 4.6.3 $d_H(P,Q) = 1 \Longleftrightarrow d_V(P,Q) = 1 \Longleftrightarrow P \perp Q.$

Prova.

$$P \perp Q \Longleftrightarrow \exists A \in F : P(A) - Q(A) = 1 \Longleftrightarrow d_V(P,Q) = 1.$$

Por outro lado,

$$d_V(P,Q) = 1 \Longrightarrow 1 \leq \sqrt{1 - \rho^2(P,Q)} \Longrightarrow d_H(P,Q) = 1 \Longrightarrow d_V(P,Q) = 1,$$

onde a primeira implicação resulta da segunda desigualdade do lema anterior, a segunda implicação de ser $\rho(P,Q) = 0$ (valor minimo possível) e a terceira implicação de ser $d_V(P,Q) \geq d_H^2(P,Q) = 1$ e não poder ser superior a 1. ■

Lema 4.6.4 $d_\varphi(P,Q) = 1 \Longrightarrow P \perp Q.$

Prova. $d_\varphi(P,Q) = \frac{1}{2}\sup\limits_t \left|\int e^{i\langle t,x\rangle}(p-q)(x)\,\mu(dx)\right| \leq \frac{1}{2}\sup\limits_t \left|\int (p-q)(x)\,\mu(dx)\right| \leq$
$\leq \frac{1}{2}\sup\limits_t \int |p-q|(x)\,\mu(dx) = d_V(P,Q) \leq 1.$ ■
Note-se que o reciproco não se verifica.

Considerando agora especificamente a análise de dependência entre duas variáveis aleatórias X e Y, designamos por f_1 a densidade conjunta de (X,Y) e por f_2 o produto das funções densidade de X e Y. A partir da distância de Hellinger, obtemos a medida normalizada de dependência de Bhathacharya-Matusida-Hellinger (ver [GMR]) dada por

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left(f_1^{\frac{1}{2}} - f_2^{\frac{1}{2}}\right)^2 dxdy.$$

A medida com base na função característica vem dada por

$$\frac{1}{2}\sup_t \left|\varphi_{F_1}(t_1,t_2) - \varphi_{F_2}(t_1,t_2)\right|,$$

onde F_1 e F_2 são as distribuições de probabilidade correspondentes a f_1 e f_2.

Esta medida pode ser obtida directamente a partir da expressão a que chegámos no final da secção anterior. Já no que se refere à medida anterior seria necessário encontrar a função densidade a partir da função característica, através de inversão de um integral duplo de Fourier, e depois calcular numericamente o integral a partir do qual se define a medida.

Consideramos de seguida uma medida de dependência respeitante às caudas das distribuições: a covariância nas caudas. Esta permite, pela definição dos respectivos coeficientes de correlação linear medir de facto o grau de dependência linear naquela parte da distribuição.

A covariância na caudas (à direita respectivamente de k_1 e de k_2) entre e^{X_1} e e^{X_2} é dada por:

$$E\left[e^{X_1}1_{\{e^{X_1}>k_1\}}e^{X_2}1_{\{e^{X_2}>k_2\}}\right]-E\left[e^{X_1}1_{\{e^{X_1}>k_1\}}\right]E\left[e^{X_2}1_{\{e^{X_2}>k_2\}}\right].$$

A primeira esperança é obtida como uma função $u\left(X_1,X_2,J\right)$ determinada, como na primeira secção, a partir da equação regressiva de Kolmogorov que permite obter um sistema análogo ao de (4.1) para a função característica conjunta de X_1 e de X_2. Os coeficientes do sistema vêm aqui dados, em função dos coeficientes ξ_{11} e ξ_{21} da função característica conjunta (o segundo destes é argumento da transformada inversa de Fourier definida nas expressões abaixo),

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \left(-i\xi_{11}+\alpha\right)\beta_1+\frac{1}{2}\sigma_1^2\left(-\xi_{11}^2-2i\alpha\xi_{11}+\alpha^2\right)-q_{12}+\lambda_1\left(a_1 2\pi TIF_{\xi_{11}}\left(e^{\alpha y}f_U\left(y\right)\right)-1\right),\\
\alpha_2 &= q_{12}+\lambda_1 a_2 2\pi TIF\left(e^{\alpha y}f_U\left(y\right)\right),\\
\gamma_1 &= q_{21}+\lambda_2 a_1 2\pi TIF\left(e^{\alpha y}f_U\left(y\right)\right)\\
\gamma_2 &= \left(-i\xi_{21}+\alpha\right)\beta_2+\frac{1}{2}\sigma_2^2\left(-\xi_{21}^2-2i\alpha\xi_{21}+\alpha^2\right)-q_{21}+\lambda_2\left(a_2 2\pi TIF_{\xi_{21}}\left(e^{\alpha y}f_U\left(y\right)\right)-1\right)
\end{aligned}$$

Note-se que os argumentos da função característica conjunta são dados por $\xi_1=\xi_{11}+i\alpha$ e $\xi_2=\xi_{21}+i\alpha$.

A condição final é dada por

$$\int_{\ln k_1}^{\infty}\int_{\ln k_2}^{\infty}e^{x_1(1+\xi_1 i)}e^{x_2(1+\xi_2 i)}dx_2dx_1=\frac{e^{-\ln k_1(1+\xi_1 i)-\ln k_2(1+\xi_2 i)}}{\left(1+\xi_1 i\right)\left(1+\xi_2 i\right)}.$$

A função $u\left(X_1,X_2,J\right)$ é obtida por inversão da transformada de Fourier obtida, efectuada relativamente ao valor inicial de $\left(X_1,X_2\right)$.

A função $u\left(X_1,J\right)=E\left[e^{X_1}1_{\{e^{X_1}>k_1\}}\right]$ é obtida de forma análoga (agora não depende de X_2). O sistema e a condição final a que chegamos tem uma forma semelhante à do caso anterior (para a obter basta suprimir onde aparece ξ_2). A outra esperança é obtida de forma semelhante, ou seja, suprimindo a parte referente a X_1.

No âmbito da análise de cópulas (veja-se por exemplo [ELM]), consideremos a medida de concordância das distribuições não elipticas de duas variáveis aleatórias $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$.

Seja u um vector de dimensão n, Σ uma matriz de dimensão n definida, não negativa e simétrica. Uma variável aleatória, X, de dimensão n segue lei eliptica de parâmetros u, Σ e ϕ $(X\tilde{~}E(u,\Sigma,\phi))$ se a sua função característica é da forma

$$\varphi_{X-u}(\theta) = \phi\left(\theta^T\Sigma\theta\right).$$

Nestas leis inclui-se a normal multivariada, mas a generalidade das leis não é eliptica. Na classe de distribuições não elipticas, o coeficiente de correlação linear pode não ser um instrumento de dependência adequado sendo nesse caso preferível recorrer a medidas baseadas na referida medida de concordância.

Sendo $(\mathbf{X}_1', \mathbf{X}_2')$ uma versão independente de $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$, esta medida é dada por:

$$\begin{aligned}
& P\left[\left(\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_1'\right)\left(\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2'\right)>0\right] \\
= & \iiiint 1_{\left\{\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_1'\right)\left(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_2'\right)>0\right\}} f\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) f\left(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\right) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2'. \\
= & \iint\left[\iint_{\left\{\mathbf{x}_1<\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2<\mathbf{x}_2'\right\}} f\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2\right] f\left(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\right) d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2' \\
& +\iint\left[\iint_{\left\{\mathbf{x}_1'<\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2'<\mathbf{x}_2\right\}} f\left(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\right) d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2'\right] f\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\
= & \iint F\left(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\right) f\left(\mathbf{x}_1',\mathbf{x}_2'\right) d\mathbf{x}_1' d\mathbf{x}_2' + \iint F\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) f\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \\
= & 2E\left[F\left(X_1,\mathbf{X}_2\right)\right].
\end{aligned}$$

Bibliografia

[DS] Dai, Qiang; Kenneth Singleton. Term Structure Dynamics in Theory and Reality, *The Review of Financial Studies* Vol. 16, No. 3 (2003)

[DH] Dalang, Robert C. The Right Time to Sell a Stock whose Price is Driven by Markovian Noise, *Preprint* (2000)

[DA] De Almeida, Rui Manuel. *Decantation dans les Chaines de Markov*, Tese de Doutoramento (1986)

[ELM] Embrechts, Paul; Filip Lindskog; Alexander McNeil. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, *preprint* (2001)

[GMR] Granger, C.W.; E. Maasoumi; J. Racine. A Dependence Metric for Possibly Nonlinear Processes, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 25, No. 5 (2004)

[G] Guo, Xin. An Explicit Solution to an Optimal Stopping Problem with Regime Switching, *Preprint* (2001)

[GZ] Guo, Xin; Q. Zhang. Close-Form Solutions for Perpetual American Put Options with Regime Switching, *Preprint*

[Ko] Kohn, Robert V. *PDE for Finance Notes* (2003)

[Mer] Merton, Robert C. Continuous-Time Finance, Blackwell, Cambridge SA & Oxford UK (1998)

[O] Oksendal, Bernt. *Stochastic Differential Equations. An Introdution with Applications*, Springer, Fifth Edition, Berlin-Heidelberg (1998)

[S] Sato, Ken-Iti, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press (1999)

Capítulo 5

Hedging de processo de salto por difusão quando modulados

5.1 Introdução

A dependência induzida por uma cadeia de Markov entre as partes de salto e de difusão num processo do tipo analisado no capítulo anterior sugere a possibilidade de fazer uma cobertura pelo menos parcial do valor final de um processo de salto por outro representado por um processo de difusão. Abordaremos esse problema tomando como referência o hedging de quantil introduzido em [FL] e o superhedging introduzido em [EQ], adequado ao caso dos mercados incompletos, e baseado numa decomposição opcional de uma supermartingala em relação aos elementos de uma classe de medidas de probabilidade. Note-se que a decomposição previsível de Doob e Meyer se verifica no caso em que se considera uma única medida de probabilidade. A decomposição opcional vem demonstrada por exemplo em [Kr].

Apresentemos alguns conceitos a que se fará referência ao longo do capítulo. A ideia central de avaliação de activos em tempo contínuo é a de que em ausência de arbitragem se pode obter uma distribuição de probabilidade distinta da efectiva, para qualquer activo contingente dando um payoff final aleatório. Aquela distribuição de probabilidade é caracterizada por três aspectos, resumidos na denominação por que é conhecida: medida equivalente de martingala. Em primeiro lugar, trata-se de uma medida de probabilidade que permite valorizar resultados futuros aleatórios. Em segundo lugar, trata-se de uma medida equivalente à efectiva no sentido usual de equivalência de medidas. Finalmente, trata-se de uma medida de martingala no sentido de que, sob esta medida, os preços descontados dos activos contingentes são martingalas. Ou seja, se ele fosse a medida efectiva, a valorização seria neutra ao risco.

Há a distinguir a situação em que o mercado é completo daquela em que o mercado é incompleto. Na primeira, é possível obter o payoff final de qualquer activo contingente a partir da transacção dos activos existentes no mercado, nunca tendo a carteira valor negativo. Na segunda, alguns activos contingentes não podem ser replicados a partir de nenhuma estratégia desse tipo, também dita admissível.

5.2 Hedging de quantil

No caso de mercado completo, a medida equivalente de martingala é única. Consideremos uma semimartingala X, representando o processo de preço descontado de um activo, definida sobre um espaço probabilizado completo (Ω, F, P) dotado de uma filtração $\{F_t\}$ onde $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Designemos por P^* a medida equivalente de martingala, sendo E^* a esperança sob esta medida. Consideremos uma estratégia autofinanciante (V_0, ξ), obtida a partir de X, em que $V_0 \geq 0$ é o capital inicial aplicado e ξ é um processo previsível representando a quantidade do activo em causa detida em cada momento. O valor dele resultante é dado quase certamente, para todo o $0 \leq t \leq T$, por

$$V_t = V_0 + \int_0^t \xi_s dX_s$$

Esta estratégia diz-se admissível se esse valor for não negativo. Seja H uma variável aleatória não negativa, F_T-mensurável. Se o mercado é completo, há hedging perfeito, ou seja, uma estratégia ξ^H tal que

$$E^*(H\,|F_t) = H_0 + \int_0^t \xi_s^H dX_s.$$

sendo H_0 o capital inicial dado por $E^*(H)$.

Mas, pode suceder o investidor estar disposto a investir apenas uma quantia $\widetilde{V}_0 < H_0$. Nesse caso, não é possível o hedging perfeito mas poder-se-á adoptar uma estratégia permitindo o que se designa por hedging de quantil e que consiste no seguinte.

Definição 5.2.1 *Hedging de quantil é o critério de cobertura de H que consiste em maximizar a probabilidade de se ultrapassar H como resultado da estratégia no momento T dado que se dispõe de um montante inicial $\widetilde{V}_0$, constituindo este uma proporção da quantia necessária para efectuar o hedging perfeito. Ou seja, corresponde-lhe uma estratégia ξ de valor inicial V_0 que resolva o problema de optimização:*

$$\max_{(V_0,\xi)} P\left(V_0 + \int_0^T \xi_s dX_s \geq H\right) \quad s.a. \quad V_0 \leq \widetilde{V}_0.$$

Esta é a probabilidade máxima de cobertura dado o montante disponível.

A designação "hedging de quantil" advém do problema dual deste. Ou seja, a determinação do montante mínimo a investir inicialmente que permita atingir uma probabilidade considerada aceitável de se exceder a variável H na data T.

Lema 5.2.2 *Seja $\widetilde{A} \in F_T$ uma solução do problema de optimização*

$$\max_{A \in F_T} P(A) \;\; s.a. \;\; E^*(HI_A) \leq \widetilde{V}_0.$$

Seja $\widetilde{\xi}$ o hedging perfeito da opção knockout $HI_{\widetilde{A}}$. Então, $\left(\widetilde{V}_0, \widetilde{\xi}\right)$ resolve o problema da definição 5.2.1 e

$$\left\{\widetilde{V}_0 + \int_0^T \widetilde{\xi}_s dX_s \geq H\right\} = \widetilde{A} \quad q.c.$$

Prova. Seja (V_0, ξ) uma estratégia admissível tal que $V_0 \leq \widetilde{V}_0$. Então, $\{V_t\}$ é uma martingala local não negativa sob P^* e portanto uma supermartingala sob P^*, atendendo ao lema de Fatou. De facto, se V é uma martingala local, existe uma sucessão de tempos de paragem $\{\tau_n\}$ tendendo para ∞ tal que $V(t \wedge \tau_n)$ uma martingala e portanto

$$\begin{aligned} V(s) &= \lim_{n\to\infty} V(s \wedge \tau_n) = \lim_{n\to\infty} E\left[V(t \wedge \tau_n) | F_s\right] \geq E\left[\lim_{n\to\infty} \inf V(t \wedge \tau_n) | F_s\right] \\ &= E\left[\lim_{n\to\infty} V(t \wedge \tau_n) | F_s\right] = E\left[V(t) | F_s\right]. \end{aligned}$$

Definindo $A = \{V_T \geq H\}$, resulta que $V_T \geq HI_A \; P^* - q.c.$ dado que $V_T \geq H$ sobre A e $V_T \geq 0$ sobre A^c.

Resulta que

$$\widetilde{V}_0 \geq V_0 \geq E^*(V_T) \geq E^*(HI_A)$$

e portanto verifica-se a restrição do problema relativamente a acontecimentos daquela forma.

O problema de optimização será então equivalente ao da definição 5.2.1, em especial quando $V_0 = \widetilde{V}_0$, como se verá de seguida. Para o efeito, demonstramos que toda a estratégia $\left(V_0, \widetilde{\xi}\right)$ tal que $E^*\left(HI_{\widetilde{A}}\right) \leq V_0 \leq \widetilde{V}_0$ é óptima.

Dado que

$$V_0 + \int_0^t \widetilde{\xi}_s dX_s \geq E^*\left(HI_{\widetilde{A}}\right) + \int_0^t \widetilde{\xi}_s dX_s = E^*\left(HI_{\widetilde{A}} | F_t\right) \geq 0 \quad P - q.c.,$$

a estratégia é admissível.

O acontecimento

$$\widehat{A} = \left\{ V_0 + \int_0^T \widetilde{\xi}_s dX_s \geq H \right\},$$

ou seja, que consiste em a estratégia $\left(V_0, \widetilde{\xi}\right)$ gerar um valor superior a H, coincide q.c. com o acontecimento $\widetilde{A}$ dado que:

a) $\widetilde{A} \subseteq \left\{HI_{\widetilde{A}} \geq H\right\} \subseteq \widehat{A}$.

A primeira inclusão resulta de ser, para $\omega \in \widetilde{A}$

$$I_{\widetilde{A}}(\omega) = 1 \Longrightarrow H(\omega) I_{\widetilde{A}}(\omega) = H(\omega)$$

e a segunda de sobre $\left\{HI_{\widetilde{A}} \geq H\right\}$ se ter

$$\begin{aligned} H &\leq HI_{\widetilde{A}} = E^*\left[E^*\left(HI_{\widetilde{A}} | F_0\right) + \int_0^T \widetilde{\xi}_s dX_s \,|F_T\right] \\ &= E^*\left(HI_{\widetilde{A}}\right) + \int_0^T \widetilde{\xi}_s dX_s \leq V_0 + \int_0^T \widetilde{\xi}_s dX_s. \end{aligned}$$

b) $P\left(\widehat{A}\right) \leq P\left(\widetilde{A}\right)$, dado que $\widehat{A}$ é da forma $\{V_T \geq H\}$ e portanto $V_0 \geq E^*\left(HI_{\widehat{A}}\right)$.

Em particular, $\left(\widetilde{V}_0, \widetilde{\xi}\right)$ verifica a condição $E^*\left(HI_{\widetilde{A}}\right) \leq \widetilde{V}_0$, logo é óptima. ■

Procedemos de seguida à construção de $\widetilde{A}$, com base no lema de Neyman-Pearson. Para o efeito, introduzamos a medida de probabilidade Q^* dada por $\frac{dQ^*}{dP^*} = \frac{H}{H_0}$. À restrição no lema 5.2.2 corresponde $\frac{E^*(HI_A)}{H_0} \leq \frac{\widetilde{V}_0}{H_0}$, ou seja

$$E^*\left(\frac{H}{H_0} I_A\right) = E_{Q^*}\left(I_A\right) = Q^*(A) \leq \frac{\widetilde{V}_0}{H_0} \equiv \alpha.$$

Seja

$$\widetilde{a} = \inf\left\{a : Q^*\left(\frac{dP}{dP^*} > aH\right) \leq \alpha\right\} \quad \text{e } \widetilde{A} = \left\{\frac{dP}{dP^*} > \widetilde{a}H\right\}.$$

Teorema 5.2.3 *Seja $\widetilde{A}$ tal que $Q^*\left(\widetilde{A}\right) = \alpha$. Então, a estratégia que optimiza o problema do lema anterior é dada por $\left(\widetilde{V}_0, \widetilde{\xi}\right)$ em que $\widetilde{\xi}$ permite obter o hedging perfeito de $HI_{\widetilde{A}}$.*

Prova. Como $\frac{dQ^*}{dP^*}$ é sempre positiva, P, P^* e Q^* são equivalentes.

$\widetilde{A} = \left\{\frac{dP}{dP^*} > c\frac{dQ^*}{dP^*}\right\} = \left\{\frac{dP}{dQ^*} > c\right\}$ com $c = \widetilde{a}H_0$.

Pelo lema de Neyman-Pearson, resulta que se $Q^*(A) \leq Q^*\left(\widetilde{A}\right)$, então $P(A) \leq P\left(\widetilde{A}\right)$. Este resultado pode ser verificado directamente da seguinte forma. Dado que

$$P\left(\widetilde{A}\right) = \int_{\widetilde{A}} dP = \int_{\widetilde{A}\cap A} dP + \int_{\widetilde{A}-A} dP$$

e

$$P(A) = \int_{A} dP = \int_{\widetilde{A}\cap A} dP + \int_{A-\widetilde{A}} dP,$$

vem

$$\begin{aligned} P\left(\widetilde{A}\right) - P(A) &= \int_{\widetilde{A}-A} dP - \int_{A-\widetilde{A}} dP \geq c\left[\int_{\widetilde{A}-A} dQ^* - \int_{A-\widetilde{A}} dQ^*\right] \\ &= c\left[\int_{\widetilde{A}} dQ^* - \int_{\widetilde{A}\cap A} dQ^* - \int_{A-\widetilde{A}} dQ^*\right] = c\left[Q^*\left(\widetilde{A}\right) - Q^*(A)\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, a restrição $E^*(HI_A) \leq V_0$ é equivalente a $Q^*(A) \leq \alpha$.

Logo, $\widetilde{A}$ maximiza $P(A)$ de entre os $A \in F_T$ tais que $E^*(HI_A) \leq V_0$. ∎

Deste teorema resulta que o problema referido no lema 5.2.2 tem de facto uma solução. Por outro lado, decorre da demonstração desse lema que a solução é q.c. única.

Note-se que se pode escrever:

$$Q^*\left(\frac{dP}{dP^*} > aH\right) = Q^*\left(H\frac{dP^*}{dP} < \frac{1}{a}\right) = E_{Q^*}\left(I_{\left\{H\frac{dP^*}{dP} < \frac{1}{a}\right\}}\right) = E_P\left(\frac{H}{H_0}\frac{dP^*}{dP} I_{\left\{H\frac{dP^*}{dP} < \frac{1}{a}\right\}}\right).$$

A situação considerada é aquela em que

$$P\left(\frac{dP}{dP^*} = cH\right) = 0$$

para uma dada constante c. Este é o caso que nos importa, permitindo garantir que $Q^*(A) = \alpha$ para algum $A \in F_T$. Föllmer e Leukert consideram o caso em que tal não sucede e apresentam, como generalização para I_A, um teste randomizado, ou seja, uma função F_T-mensurável com valores entre 0 e 1.

5.3 Superhedging

Quando o mercado é incompleto, coloca-se a questão de nem todos os activos contingentes serem atingíveis e pretender-se-á determinar o montante minimo, V_0, que permite a cobertura da variável H em questão, i.e. tal que

$$V_0 + \int_0^T \xi_s dX_s \geq H.$$

Fala-se então em superhedging daquele activo.

Neste caso, a medida de probabilidade equivalente não é única. Consideremos a classe, $\mathcal{P}$, de tais medidas. Os seguintes lemas são resultados preliminares que visam responder à questão anterior. O primeiro é uma generalização da decomposição de Doob-Meyer provada por Kramkov. Refere-se a uma supermartingala sobre uma classe de medidas de probabilidade (a qual podemos supor ser $\mathcal{P}$).

Lema 5.3.1 *Seja U um processo positivo. U será uma supermartingala em relação a toda a medida $P^* \in \mathcal{P}$ se e só se existir um processo, ξ, previsível e integrável relativamente a X e um processo crescente adaptado, C, tais que*

$$U_t = U_0 + \int_0^t \xi_s dX_s - C_t \qquad \forall t \geq 0.$$

A prova deste resultado é feita com base em convergências de sucessões de processos estocásticos, nomeadamente semimartingalas, e utiliza conceitos e resultados presentes em [DeSc], [Em], [Ke] e [Mem].

Note-se que o facto de se pretender que U seja uma supermartingala para toda a medida P^* não permite, em geral, que C seja previsível.

Definição 5.3.2 *Seja H uma família não vazia de variáveis aleatórias definidas sobre um espaço probabilizado (Ω, A, P). Uma variável aleatória η diz-se supremo essencial ($\operatorname{ess\,sup}$)de H se:*

i) $\xi \in H \Longrightarrow \xi \leq \eta$ q.c. e

ii) $(\forall \xi \in H \ \ \xi \leq \eta'$ q.c. para η' variável aleatória$) \Longrightarrow \eta \leq \eta'$ q.c.

Lema 5.3.3 *Seja H uma variável aleatória positiva integrável em relação a toda a medida P^*. Então, o processo*

$$U_t = ess \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}(H | F_t)$$

é uma supermartingala em relação a toda a medida $P^* \in \mathcal{P}$.

Prova. (esboço) Seja $P \in \mathcal{P}$.

Interessar-nos-á para $P^* \in \mathcal{P}$ a maximização de

$$E_{P^*}(H | F_t) = E_P\left(\left(\frac{dP^*}{dP}\right)_t H | F_t\right).$$

Seja Z_{t_0} a classe de processos da forma z^* igual a $E\left[\frac{dP^*}{dP} | F_t\right]$ para $t \geq t_0$ e 1 para $t < t_0$.

Pode-se provar que

$$E_P(U_t | F_s) = ess \sup_{z^* \in \mathcal{Z}_t} E_P(z^* H | F_s).$$

Por outro lado, $Z_t \subset Z_s$ quando $t > s$.

Daqui resulta

$$ess \sup_{z^* \in \mathcal{Z}_t} E_P(z^* H | F_s) \leq ess \sup_{z^* \in \mathcal{Z}_s} E_P(z^* H | F_s)$$

ou seja

$$E_P(U_t | F_s) \leq U_s.$$

■

Prova-se que existe uma versão de U cadlag.

O resultado seguinte indica a avaliação do activo resultante de uma estratégia de superhedging.

Definição 5.3.4 *Uma estratégia de hedging minimo da variável aleatória H é uma estratégia que permite obter H no momento T com um montante inicial minimo.*

O valor da estratégia é uma martingala local, logo uma supermartingala em relação a todas as medidas em $\mathcal{P}$.

Teorema 5.3.5 *A estratégia de hedging minimo ξ de montante inicial U_0 correspondente a uma variável aleatória positiva H existe, e o seu valor é*

$$U_t = U_0 + \int_0^t \xi_s dX_s - C_t = ess \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}\left(H \left| F_t \right.\right),$$

onde C é um processo crescente adaptado.

Prova. Uma estratégia de hedging de valor dado por uma supermartingala U^* deverá verificar

$$U_t^* \geq ess \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}\left(U_T^* \left| F_t \right.\right) \geq ess \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}\left(H \left| F_t \right.\right).$$

Verifica-se a primeira igualdade porque U^* é uma supermartingala e a segunda porque $U_T^* \geq H$.

O limite inferior é atingido quando consideramos o hedging minimo porque, pelo lema anterior, é o termo geral de uma supermartingala em relação a todo o elemento de $\mathcal{P}$.

Por fim, temos em conta a decomposição opcional desta supermartingala referida no lema 5.3.1. ■

O montante minimo requerido, U_0, corresponde ao preço máximo $ess \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E_{P^*}(H)$. O processo crescente adaptado, C, é o montante de capital acumulado requerido para financiar a estratégia à medida que se vai actualizando o conhecimento acerca do preço do superhedging.

O problema de optimização considerado na subsecção anterior é o dual deste: dado o montante U_0, maximizar a probabilidade de se efectuar o hedging de H. No caso de mercados incompletos, a solução para este problema é de novo dado pela estratégia de hedging da opção $HI_{\widetilde{A}}$. A diferença agora é que esta pode ou não ser atingível. Se o não for, teremos uma estratégia de superhedging da dita opção, implementada a partir da decomposição opcional de

$$\widetilde{V}_t = ess \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*\left(HI_{\widetilde{A}} \left| F_t \right.\right).$$

De facto, esta estratégia permite obter, em T,

$$\widetilde{V}_T = HI_{\widetilde{A}}.$$

Note-se que o conjunto $\mathcal{P}$ é convexo. Ou seja, se $P_1 \in \mathcal{P}$ e $P_2 \in \mathcal{P}$, então $P = \lambda P_1 + (1-\lambda) P_2 \in \mathcal{P}$. De facto, com $A \in F_s$ $s < t$ e $0 < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned}
\int_A X_t dP &= \int_A X_t \left(\lambda dP_1 + (1-\lambda) dP_2\right) \\
&= \lambda \int_A X_t dP_1 + (1-\lambda) \int_A X_t dP_2 \\
&= \lambda \int_A X_s dP_1 + (1-\lambda) \int_A X_s dP_2 \\
&= \int_A X_s \left(\lambda dP_1 + (1-\lambda) dP_2\right) \\
&= \int_A X_s dP.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $E^*(H)$ é função convexa de P^* como resulta de

$$\begin{aligned}
\lambda E_{P_1}(H) + (1-\lambda) E_{P_2}(H) &= \lambda \int H dP_1 + (1-\lambda) \int H dP_2 \\
&= \int H \left[\lambda dP_1 + (1-\lambda) dP_2\right] \\
&= E_{\lambda P_1 + (1-\lambda) P_2}(H).
\end{aligned}$$

Combinando estes dois factos, vê-se que $\{E^*(H) : P^* \in \mathcal{P}\}$ é um intervalo. Este é o conjunto dos preços de H se houver ausência de arbitragem.

Se a probabilidade de $\tilde{A}$ for suficientemente elevada para todo o $P^* \in \mathcal{P}$, registar-se-á

$$\inf \{E^*(H) : P^* \in \mathcal{P}\} < \sup \left\{E^*\left(H I_{\tilde{A}}\right) : P^* \in \mathcal{P}\right\} < \sup \{E^*(H) : P^* \in \mathcal{P}\}$$

e $\sup \left\{E^*\left(H I_{\tilde{A}}\right) : P^* \in \mathcal{P}\right\}$ corresponde a $E^*(H)$ para algum $P^* \in \mathcal{P}$.

5.4 O caso em apreço

Abordaremos a situação indicada na introdução desta secção da seguinte forma. H designará o valor acumulado, no momento T, de um processo de salto dado por:

$$\frac{dH_t}{H_{t-}} = \delta dN_t,$$

modulado por J em que J é uma cadeia de Markov com dois estados.

Supõe-se que a cadeia de Markov tem uma dinâmica semelhante à verificada em secções anteriores tanto para as transições com salto como para as transições sem salto.

Suporemos que no mercado é transacionado um activo modelado por um processo de difusão dependente dessa mesma cadeia e de um browniano W. Para uma difusão com volatilidade dada por $\{\sigma_{J_t}\}$, sendo σ_j constante ($j = 1, 2$) o prémio de risco é suposto dado por

$$\pi_{J_t} = \frac{\alpha_{J_t} - r}{\sigma_{J_t}},$$

em que α_{J_t} é o drift do processo de difusão no estado J_t.

Consideremos a classe, $\mathcal{P}$, de medidas de martingala equivalentes P^* tais que $\xi_t = \left(\frac{dP^*}{dP}\right)_t$ é dado por

$$\frac{d\xi_t}{\xi_{t-}} = -\pi_{J_t} dW_t - \pi_{J_t}^S \left(dN_t - \lambda_{J_t} dt\right)$$

onde $\pi_{J_t}^S$ é o prémio de risco dos saltos do processo $\{H_t\}$ que se supõe variar entre π^{S1} e π^{S2}. $\{\xi_t\}$ é uma martingala pois é obtido a partir de integrais em relação a um browniano e a um processo de salto compensado onde os integrandos são limitados.

O processo $\{(H\xi)_t\}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{d\,(H\xi)_t}{(H\xi)_{t-}} &= \frac{dH_t}{H_{t-}} + \frac{d\xi_t}{\xi_{t-}} + \frac{dH_t}{H_{t-}}\frac{d\xi_t}{\xi_{t-}} \\
&= \delta dN_t - \pi_{J_t} dW_t - \pi_{J_t}^S \left(dN_t - \lambda_{J_t} dt\right) - \delta \pi_{J_t}^S dN_t \\
&= \left(\delta - \pi_{J_t}^S - \delta \pi_{J_t}^S\right) dN_t - \pi_{J_t} dW_t + \lambda_{J_t} \pi_{J_t}^S dt,
\end{aligned}$$

ou seja, atendendo a que $H\xi$ é a exponencial de Doléans-Dade do processo cujo diferencial é

$$-\pi_{J_t} dW_t - \pi_{J_t}^S \left(dN_t - \lambda_{J_t} dt\right),$$

obtemos, de forma semelhante ao que sucede na passagem de (3.9) para (3.10),

$$X_t \equiv \ln (H\xi)_t = \sum_{n=1}^{N_t} \ln \left(1 + \delta - \pi_{J_{t_n}}^S - \delta \pi_{J_{t_n}}^S\right) - \int_0^t \pi_{J_s} dW_s + \int_0^t \left(-\frac{1}{2}\pi_{J_s}^2 + \lambda_{J_s} \pi_{J_t}^S\right) ds.$$

Adaptemos agora o referido nas secções anteriores ao caso presente. Pretender-se-á maximizar relativamente a $\pi_{J_t}^S$ a seguinte probabilidade que resulta de uma optimização tal como se viu no teorema 5.2.3:

$$P\left(e^{X_T} < \frac{1}{a}\right) = E\left(I_{\{X_T < -\ln a\}}\right),$$

sujeita à restrição

$$E_{Q^*}\left(I_{\{X_T < -\ln a\}}\right) = \frac{1}{H_0} E\left(e^{X_T} I_{\{X_T < -\ln a\}}\right) = \frac{U_0}{H_0}.$$

Consideremos a equação regressiva de Kolmogorov respeitante a (X,J), cujo gerador infinitesimal é

$$
\begin{aligned}
Af(x,1) &= \mu_1 \partial_x f(x,1) + \frac{1}{2}\eta_1^2 \partial_{xx}^2 f(x,1) + q_{12}\left[f(x,2) - f(x,1)\right] \\
&\quad + \lambda_1 \left[a_1 \left(f(x+\omega_1,1) - f(x,1)\right) + a_2 \left(f(x+\omega_1,2) - f(x,1)\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Af(x,2) &= \mu_2 \partial_x f(x,2) + \frac{1}{2}\eta_2^2 \partial_{xx}^2 f(x,2) + q_{21}\left[f(x,1) - f(x,2)\right] \\
&\quad + \lambda_2 \left[a_1 \left(f(x+\omega_2,1) - f(x,2)\right) + a_2 \left(f(x+\omega_2,2) - f(x,2)\right)\right],
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mu_i &= -\frac{1}{2}\pi_i^2 + \lambda_i \pi_i^S, \quad \eta_i = -\pi_i, \\
\omega_i &= \ln\left(1 + \delta - \pi_i^S - \delta \pi_i^S\right).
\end{aligned}
$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação, obtemos o seguinte sistema

$$
\begin{array}{c}
y' + \alpha_1 \times y + \alpha_2 \times z = 0 \\
z' + \gamma_1 \times y + \gamma_2 \times z = 0
\end{array},
$$

com $y = \widehat{h}(\xi,1)$, $z = \widehat{h}(\xi,2)$, $h(x,.) = e^{-\alpha x} f(x,.)$,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= (-i\xi_1 + \alpha)\mu_1 + \frac{1}{2}\eta_1^2\left(-\xi_1^2 - 2i\alpha\xi_1 + \alpha^2\right) - q_{12} + \lambda_1\left(a_1 e^{-i\xi\omega_1} - 1\right), \\
\alpha_2 &= q_{12} + \lambda_1 a_2 e^{-i\xi\omega_1}, \\
\gamma_1 &= q_{21} + \lambda_2 a_1 e^{-i\xi\omega_2}, \\
\gamma_2 &= (-i\xi_1 + \alpha)\mu_2 + \frac{1}{2}\eta_2^2\left(-\xi_1^2 - 2i\alpha\xi_1 + \alpha^2\right) - q_{21} + \lambda_2\left(a_2 e^{-i\xi\omega_2} - 1\right),
\end{aligned}
$$

e α uma constante definida a partir da condição final cf a que nos referimos de seguida. De facto, podemos obter as esperanças

$$
E\left(I_{\{X_T < -\ln a\}}\right) \text{ e } E\left(e^{X_T} I_{\{X_T < -\ln a\}}\right)
$$

tomando cada uma delas como a função f, inversa da respectiva transformada encontrada a partir da resolução do sistema anterior, com condição final cf dada respectivamente por

$$
\int_{-\infty}^{-\ln a} e^{x\xi i} dx = \left[\frac{e^{x\xi i}}{\xi i}\right]_{-\infty}^{-\ln a} = \frac{e^{-\ln a \xi i}}{\xi i}
$$

e

$$\int_{-\infty}^{-\ln a} e^{x(1+\xi i)}dx = \left[\frac{e^{x(1+\xi i)}}{1+\xi i}\right]_{-\infty}^{-\ln a} = \frac{e^{-\ln a(1+\xi i)}}{1+\xi i}.$$

α tem que ser inferior a 0 e 1, respectivamente.

A referida inversão é feita no ponto correspondente ao valor inicial de X. Assim, se o valor inicial de H for um dado valor H^*, vem $x = \ln H^*$.

Note-se que H_0 vem dado por

$$E_{P^*}(H) = E\left(\frac{dP^*}{dP}H\right) = E\left(e^X\right) = E\left(e^{i\xi X}\right)_{|\xi=-i},$$

ou seja, a função característica no ponto $-i$, função esta que pode ser determinada a partir da equação progressiva de Kolmogorov. De novo, a alteração no cálculo relativamente ao caso do capítulo anterior é, no caso do salto não aleatório, a que resulta de se ter

$$\int f(x-\omega_i)\, e^{i\xi x}dx = \int f(x)\, e^{i\xi(x+\omega_i)}dx = e^{i\xi\omega_i}\widehat{f}(\xi).$$

Um nota final. Seja $\{H_t\}$ um activo contingente de dinâmica dada por:

$$\frac{dH_t}{H_{t-}} = \alpha_{J_t}dt + \delta\left(dN_t - \lambda_{J_t}dt\right) + \gamma dW_t.$$

Nesse caso

$$\begin{aligned}\frac{d(H\xi)_t}{(H\xi)_{t-}} &= \left(\delta - \pi_{J_t}^S\right)\left(dN_t - \lambda_{J_t}dt\right) + \left(\gamma - \pi_{J_t}\right)dW_t + \left(\alpha_{J_t} - \gamma\pi_{J_t}\right)dt - \delta\pi_{J_t}^S dN_t \\ &= \left(\delta - \pi_{J_t}^S - \delta\pi_{J_t}^S\right)\left(dN_t - \lambda_{J_t}dt\right) + \left(\gamma - \pi_{J_t}\right)dW_t + \left(\alpha_{J_t} - \gamma\pi_{J_t} - \lambda_{J_t}\delta\pi_{J_t}^S\right)dt.\end{aligned}$$

O integral da soma das duas primeiras parcelas constituí uma martingala local e o da última parcela é um processo de variação finita. A condição de que o rendimento sob a medida neutra ao risco seja a taxa sem risco r faz com que se verifique

$$\alpha_{J_t} = r + \gamma\pi_{J_t} + \lambda_{J_t}\delta\pi_{J_t}^S.$$

Se considerarmos o activo descontado correspondente, esse último integral anula-se e temos então uma martingala. A representação deste sob a medida de probabilidade equivalente é dada por

$$\frac{dH_t}{H_{t-}} = rdt + \delta\left(dN_t - \lambda_{J_t}\left(1 - \pi_{J_t}^S\right)dt\right) + \gamma\left(dW_t + \pi_{J_t}dt\right),$$

onde $dN_t - \lambda_{J_t}\left(1 - \pi_{J_t}^S\right)dt$ é o diferencial de um processo de salto compensado sob P^* e $dW_t + \pi_{J_t}dt$ é o diferencial de um processo browniano sob P^*.

Temos assim uma ilustração do teorema de Girsanov. Ou seja, a uma martingala sob a medida equivalente de martingala corresponde a soma de uma martingala e de um processo de variação finita sob a medida efectiva. Este processo de variação finita é dado pelo integral de H_{t-} em relação à variação quadrática previsível $\langle H, \xi \rangle$. Note-se que

$$d\langle H, \xi \rangle = \left(\gamma\pi_{J_s} + \lambda_{J_t}\delta\pi_{J_t}^S\right)dt = \left(\alpha_{J_t} - r\right)dt.$$

A soma deste processo de variação finita àquele cujo diferencial é $\delta\left(dN_t - \lambda_{J_t}dt\right) + \gamma dW_t$ é uma martingala sob a medida equivalente.

Bibliografia

[DeSc] Delbaen, F; Schachermayer, W. A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing, *Math. Annalen* 300, 463-520 (1994)

[EQ] El Karoui, N.; M.C. Quenez. Dynamic Programming and Pricing of Contingent Claims in an Incomplete Market, SIAM *J. Control and Optimization*, 33, 29-66 (1995)

[Em] Émery, M. Une Topologie sur l'Espace des Semi-martingales, *Séminaire de Probabilités* XIII, 260-280 (1979)

[FL] Föllmer, Hans; Peter Leukert. Quantile Hedging, *Preprint* (1999)

[Ke] Kelley, J.L. *General Topology*, D. Van Nostrand Company (1955)

[Kr] Kramkov, D.O. Optional Decomposition of Semimartingales and Hedging Contingent Claims in Incomplete Security Markets, *Probability Theory and Related Fields*, 105, 459-479 (1996)

[Mem] Mémin, J. Espaces de Semi Martingales et Changement de Probabilité, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, 52, 9-39 (1980)

Capítulo 6

Valor acumulado versus contagem

6.1 Introdução

Neste capítulo, começaremos por retomar a análise das distribuições tipo fase. Considerando uma cadeia de Markov em tempo contínuo, uma distribuição tipo fase é definida como a distribuição de probabilidade do tempo de atingir um certo estado designado por estado de absorção, dadas a distribuição inicial e as intensidades de transição entre os estados. Determinaremos a função de distribuição de probabilidade, a transformada de Laplace e momentos desta distribuição.

Considera-se então um enquadramento semelhante ao do modelo de Jacobsen. Assim, o estado de absorção corresponde naquele modelo à ocorrência de salto, e nesse instante reinicia-se o processo com a distribuição inicial da cadeia de Markov. Está-se perante um processo de renovamento com distribuição tipo fase para o lapso de tempo entre renovamentos, ou seja, ocorrências consecutivas de dados acontecimentos, neste caso os saltos. Este processo permite descrever em cada momento o número de saltos que ocorreram até aí. Obtém-se o valor esperado desta variável, num caso particular.

Este resultado inspira um modelo cujo propósito é minimizar o valor esperado dum processo que inclui o somatório dos saltos, sendo estes aleatórios, impondo a restrição de o número médio de saltos não ser inferior a dado limiar. O parâmetro de controlo é a intensidade de salto.

Numa segunda parte, considera-se um modelo aplicado a uma situação concreta baseada na actividade de uma unidade de saúde, com uma estrutura mais complexa. Os modelos têm em comum o facto de se pretender optimizar uma função de um fluxo financeiro influenciado por transições entre estados da cadeia e por ocorrência de saltos, impondo uma restrição sobre o número médio de determinadas ocorrências.

6.2 Distribuições tipo fase

6.2.1 Funções exponenciais

Considere-se uma cadeia de Markov em tempo contínuo definida sobre $E = \{1, ..., l\}$. É caracterizada pela distribuição inicial $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_l)$ que nos dá as probabilidades de cada estado no momento inicial e pela função de transição matricial $\{P(t)\} = \{p_{ij}(t)\}$ que nos dá as probabilidades de transição de cada estado i para cada estado j num lapso de tempo t.

Supõe-se que P verifica a equação de Chapman-Kolmogorov:

$$P(t_1 + t_2) = P(t_1) P(t_2)$$

e a continuidade em zero:

$$\lim_{t \downarrow 0} P(t) = P(0) = I.$$

Definimos a matriz de intensidade $Q = (q_{ij})_{i,j=1,...,l}$ em que

$$q_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} \text{ se } i \neq j \text{ e } q_{ii} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t}.$$

Podemos concluir que $q_{ij} \geq 0$ dado que $p_{ij} \geq 0$ e que $q_{ii} \leq 0$ dado que $p_{ii} \leq 1$. Por outro lado, $\sum_{j \in E} q_{ij} = 0$ ou seja $Q\mathbf{1} = 0$ dado que $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$. Como antes, $\mathbf{1}$ é um vector coluna constituído por 1.

Define-se a derivada de uma função matricial $A(t)$ como

$$A'(t) = \lim_{t' \to 0} \frac{A(t + t') - A(t)}{t'}$$

Lema 6.2.1 *(Equação regressiva de Kolmogorov)*

$$P'(t) = QP(t)$$

ou seja $p'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} q_{ik} p_{kj}(t)$ *para todos os* i, j, t.

(Equação progressiva de Kolmogorov)

$$P'(t) = P(t)\, Q.$$

Prova. Seja $t' > 0$. Das equações de Chapman-Kolmogorov, vem

$$\begin{aligned} p_{ij}\left(t+t'\right) - p_{ij}(t) &= \sum_{k\in E} p_{ik}\left(t'\right) p_{kj}(t) - p_{ij}(t) \\ &= \sum_{k\neq i} p_{ik}\left(t'\right) p_{kj}(t) + \left[p_{ii}\left(t'\right) - 1\right] p_{ij}(t). \end{aligned}$$

De forma semelhante,

$$\begin{aligned} p_{ij}\left(t+t'\right) - p_{ij}(t) &= \sum_{k\in E} p_{ik}(t)\, p_{kj}\left(t'\right) - p_{ij}(t) \\ &= \sum_{k\neq i} p_{ik}(t)\, p_{kj}\left(t'\right) + p_{ij}(t)\left[p_{jj}\left(t'\right) - 1\right]. \end{aligned}$$

Em ambos os casos, divida-se a expressão obtida por t' e faça-se $t' \to 0$. Dada a continuidade de $p_{ij}(t)$ e a definição de q_{ij}, obtém-se o pretendido. ■

Consideremos a determinação das soluções das equações de Kolmogorov. Neste contexto, consideramos o seguinte conceito. Seja A uma matriz quadrada.

Definição 6.2.2 *(Função exponencial matricial)*

$$\exp(tA) = I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + ... = \sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Lema 6.2.3 $\exp(tA)$ *é diferenciável sendo*

$$\frac{d\exp(tA)}{dt} = A\exp(tA) = \exp(tA)\, A.$$

Prova.

$$\begin{aligned} \frac{d\exp(tA)}{dt} &= \sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} n t^{n-1} \frac{A^n}{n!} = A \sum_{n\geq 1} \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= A \sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!} A. \end{aligned}$$

■

Lema 6.2.4 *Seja* Q *uma matriz de ordem* l *com* $q_{ij} \geq 0$ $(i \neq j)$ *e* $Q\mathbf{1} = 0$. *Então,* $\{\exp(tQ), t \geq 0\}$ *é uma função de transição matricial que é solução das equações de Kolmogorov.*

Prova. Para $Q = 0$, o resultado é óbvio.

Para $Q \neq 0$, podemos verificar o seguinte:

1) $Q\mathbf{1} = 0 \Longrightarrow Q^n\mathbf{1} = 0 \Longrightarrow \exp(tQ)\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

2) Seja $a = \max(-q_{ii} : i = 1, ..., l)$. Então, $Q^* = a^{-1}Q + I$ é não negativa e verifica-se

$$\exp(tQ) = \exp(at(Q^* - I)) = \sum_{n \geq 0} \frac{(at)^n Q^{*n}}{n!} e^{-at}$$

que é portanto não negativa. A última passagem resulta de ser, quando A e B comutam,

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

e de ser $\exp(-atI) = e^{-at}I$.

3) $\exp((t_1 + t_2)\,Q) = \exp(t_1Q)\exp(t_2Q)$ dado que $t_1Qt_2Q = t_2Qt_1Q$.

4) Se $P(t) = \exp(tQ)$ vem

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{d\exp(tQ)}{dt} = Q\exp(tQ) = QP(t) \\ &= \exp(tQ)\,Q = P(t)\,Q. \end{aligned}$$

■

Podemos concluir então que a função de transição matricial $\{P(t), t \geq 0\}$, que constitui, para cada t, a matriz das probabilidades de transição entre os estados da cadeia num lapso de tempo t, pode ser representada em função da matriz de intensidade Q como $\exp(tQ)$, o que resulta de a solução da equação de Kolmogorov verificada por $P(t)$ ser única e igual a $\exp(tQ)$ e por outro lado verificar $P(0) = \exp(0) = I$.

6.2.2 Distribuição tipo fase

O tipo de distribuição que nos importa surge naturalmente no contexto de uma cadeia de Markov em tempo contínuo, X, em que teremos um estado 0, designado por estado de absorção, que se caracteriza por, uma vez atingido X aí permanecer, ou seja, as probabilidades de transição deste para os outros estados são nulas. Teremos então um espaço de estados $E' = \{\nabla, 1, ..., l\} = E \cup \{\nabla\}$ sobre o qual se define uma cadeia de Markov em tempo contínuo de matriz de intensidade

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q^T & Q \end{bmatrix}$$

em que $Q = \{q_{ij}\}$ é a matriz de subintensidade em E e $q = (q_1, ..., q_l)$ é o vector das intensidades de transição para o estado 0. Numa matriz de subintensidade temos $\sum_{j \in E} q_{ij} \leq 0$ sendo que, para pelo menos um i, $\sum_{j \in E} q_{ij} < 0$. Verifica-se então

$$q^T = -Q\mathbf{1}, \; q_{ij} \geq 0 \; (i \neq j) \text{ e } q_{ii} \leq 0.$$

Supõe-se dada a distribuição inicial $\alpha = (\alpha_\nabla, ..., \alpha_l)$.

Seja η o tempo de absorção de X definido como o lapso de tempo que decorre até que se atinja o estado de absorção, ou seja

$$\eta = \inf \{t : X(t) = \nabla\}.$$

Definição 6.2.5 *A distribuição de probabilidade de η é designada por distribuição tipo fase de características (α, Q).*

Consideremos de seguida, a caracterização desta distribuição a partir da probabilidade da cauda.

Teorema 6.2.6 *A variável η definida atrás verifica:*

$$P(\eta > t) = \alpha \exp(tQ)\mathbf{1} \quad (t \geq 0).$$

Prova. Dado que, uma vez atingido o estado 0, este não mais é abandonado, temos

$$\{\eta > t\} = \{X(t) \neq \nabla\}$$

e portanto

$$P(\eta > t) = P(X(t) \neq \nabla) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} \alpha_i p_{ij}(t) = \alpha P(t)\mathbf{1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\exp\left(t\overline{Q}\right) &= I + t\overline{Q} + ... + \frac{\left(t\overline{Q}\right)^n}{n!} + ... = I + t\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q\mathbf{1} & Q \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Q^2\mathbf{1} & Q^2 \end{bmatrix} + ... \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -tQ\mathbf{1} - \frac{t^2}{2}Q^2\mathbf{1} - ... & I + tQ + \frac{t^2}{2}Q^2 + ... \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{1} - \exp(tQ)\mathbf{1} & \exp(tQ) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

logo, na última submatriz temos

$$P(t) = \exp(tQ)$$

obtendo-se de imediato o pretendido. ■

Obtemos de seguida a distribuição de probabilidade, a transformada de Laplace e os momentos simples desta distribuição. Para o efeito, consideramos o seguinte resultado prévio.

Lema 6.2.7 *Se Q é uma matriz de subintensidade, então todo o valor próprio de Q, $\theta_i(Q)$ $(i = 1, ..., l)$, é nulo ou tem parte real negativa. Em particular, Q é não singular se e só se todos os seus valores próprios tiverem parte real negativa.*

Prova. Seja $c > \max_{i \in E}(-q_{ii}) \geq \sum_j q_{ij}$. Então $Q' = Q + cI$ é uma matriz não negativa de valores próprios $\theta_i(Q') = \theta_i(Q) + c$. Ora, todo o valor próprio $\theta_i(Q')$ tem módulo limitado superiormente por

$$\min\left\{\max_{i\in E}\sum_j q'_{ij}, \max_{j\in E}\sum_i q'_{ij}\right\}$$

e portanto por c, o que significa que se situa dentro de um circulo centrado na origem de raio c. Então, todo o $\theta_i(Q)$ situar-se-á num circulo centrado em $-c$ com o mesmo raio. ■

Lema 6.2.8 *Seja A não singular. Então*

$$\int_s^t \exp(uA)\,du = A^{-1}\left[\exp(tA) - \exp(sA)\right].$$

Se todos os valores próprios de A têm parte real negativa então

$$\int_0^\infty \exp(uA)\,du = -A^{-1}.$$

Prova. 1) Se F é uma função matricial diferenciável, então

$$\int_s^t F'(u)\,du = F(t) - F(s).$$

Logo, fazendo $F(u) = A^{-1}\exp(uA)$ e dado que $\frac{dA^{-1}\exp(uA)}{du} = \exp(uA)$, o primeiro resultado é imediato.

2) O segundo resultado resulta do anterior se atendermos ao seguinte. Para $t > \max_{i \in E} \operatorname{Re}(\theta_i)$ $(i = 1, ..., l)$, sendo θ_i os valores próprios de A,

$$\lim_{u \to \infty} e^{-ut} \exp(uA) = 0.$$

Como $\max_{i \in E} \operatorname{Re}(\theta_i) < 0$, pode-se escolher $t = 0$. ■

Teorema 6.2.9 *Seja Q não singular. A distribuição tipo fase é mista (constituída por uma parte discreta e por outra absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue), sendo a probabilidade de tomar o valor zero α_∇ e para $t > 0$ a função de distribuição dada pela soma de α_∇ e do integral entre 0 e t da função*

$$f(t) = \alpha \exp(tQ) q^T.$$

A transformada de Laplace é dada por

$$L_\eta(v) = \alpha_\nabla + \alpha (vI - Q)^{-1} q^T \quad (v \geq 0).$$

O momento de ordem n é dado por

$$\mu_n = n! \alpha Q^{-n} \mathbf{1} \quad (n \geq 1).$$

Prova. 1) $P(\eta = 0) = P(X(0) = \nabla) = \alpha_\nabla$.

2) Do teorema 6.2.6, vem

$$f(t) = -\frac{\partial}{\partial t} P(\eta > t) = \alpha \exp(tQ)(-Q)\mathbf{1} = \alpha \exp(tQ) q^T.$$

3)

$$\begin{aligned} L_\eta(v) &= P(\eta = 0) e^{-v0} + \int_0^\infty e^{-vt} f(t)\, dt = \alpha_\nabla + \int_0^\infty e^{-vt} \alpha \exp(tQ) q^T dt \\ &= \alpha_\nabla + \alpha \int_0^\infty \exp(-vtI) \exp(tQ)\, dt q^T = \alpha_\nabla + \alpha \int_0^\infty \exp(t(-vI + Q))\, dt q^T = \\ &= \alpha_\nabla + \alpha (vI - Q)^{-1} q^T, \end{aligned}$$

em que, na última passagem, utilizamos o lema 6.2.8 e atendemos ao facto de os valores próprios de $-vI + Q$ terem parte real negativa.

4) Dado que podemos concluir por indução que, para $n \geq 0$,

$$L_\eta^{(n)}(v) = \frac{d^n}{dv^n} \alpha (vI - Q)^{-1} q^T = (-1)^n n!\ \alpha (vI - Q)^{-n-1} q^T,$$

vem

$$\mu_n = L_\eta^{(n)}(0) = n!\alpha Q^{-n}\mathbf{1}.$$

■

Apresentamos uma condição necessária e suficiente para que η seja quase certamente finito.

Teorema 6.2.10 $P(\eta < \infty) = 1$ *se e só se* Q *é não singular.*

Prova. 1) Se Q é não singular, os valores próprios de Q terão parte real negativa (pelo lema 6.2.7) o que implicará, que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-vt}\exp(tQ)_{|v=0} = \lim_{t\to\infty}\exp(tQ) = 0$$

e portanto

$$\lim_{t\to\infty} P(\eta > t) = \lim_{t\to\infty}\alpha\exp(tQ)\mathbf{1} = 0.$$

2) Reciprocamente, suponhamos que $\lim\limits_{t\to\infty} P(\eta > t) = 0$. Se Q for singular, existirá um vector x não nulo tal que $Qx^T = Q^n x^T = 0$ o que implicará que $\exp(tQ)x^T = x^T$ para todo o t positivo e portanto $\lim\limits_{t\to\infty}\exp(tQ) \neq 0$. Dado que $\exp(tQ)$ é não negativo, existirá um par (i,j) tal que

$$\lim_{t\to\infty}\sup(\exp(tQ))_{ij} > 0$$

e portanto não pode verificar-se a hipótese de partida:

$$\lim_{t\to\infty}\alpha\exp(tQ)\mathbf{1} = 0.$$

■

6.2.3 Processo de contagem

Um processo de renovação é um processo onde os lapsos de tempo entre a ocorrência de determinados acontecimentos consecutivos são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Consideremos um processo de renovação com espaço de estados E', em que a transição entre os estados se efectua através da matriz $\overline{Q}$ e sempre que se atinge o estado de absorção, ∇, se reinicia com a distribuição inicial α.

O gerador infinitesimal que regula a transição entre cada par de estados da cadeia E é dado por

$$G = Q + (1 - \alpha_\nabla)^{-1} q^T \alpha,$$

sendo portanto o seu elemento genérico,

$$g_{ij} = q_{ij} + q_i \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_\nabla},$$

a intensidade de transição do estado i para o estado j. Esta é a soma da intensidade de transição directa e da intensidade indirecta passando pelo estado de absorção.

Seja $P_{ij}(k,t)$ a probabilidade condicional de, dado que estamos no estado i no momento inicial, se atingir o estado j no momento t e de nesse lapso de tempo se atingir o estado de absorção, ∇, k vezes. Seja $P(k,t)$ a matriz $[P_{ij}(k,t)]$. A sua evolução é determinada, supondo $\alpha_\nabla = 0$, pelo seguinte sistema de equações diferenciais de Kolmogorov:

$$\begin{aligned} P'(0,t) &= QP(0,t), \\ P'(k,t) &= QP(k,t) + P(k-1,t)\, q^T \alpha \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

Pode-se verificar por derivação que

$$\begin{aligned} P(0,t) &= \exp(tQ), \\ P(k,t) &= \exp(tQ) \frac{\left(q^T \alpha t\right)^k}{k!} \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

Somando para os vários j, obtemos a probabilidade condicional de k passagens por ∇, dado que se partiu de i :

$$P_i(k,t) = \sum_j P_{ij}(k,t) = \left[\exp(tQ) \frac{\left(q^T \alpha t\right)^k}{k!} \mathbf{1}\right]_i.$$

Esta é a distribuição de probabilidade, no momento t, do processo de contagem, $\{N_t\}$, que nos dá o número de vezes que se atinge o estado de absorção ∇.

Podemos confirmar por outro lado que

$$\sum_{k \geq 0} P(k,t) = \exp\left(tQ + tq^T \alpha\right)$$

é a matriz de probabilidades de transição do estado i para o estado j.

De facto, tendo $(N(t), J(t))$ por gerador infinitesimal

$$R = \begin{bmatrix} Q & q^T\alpha & 0 & ... \\ 0 & Q & q^T\alpha & ... \\ 0 & 0 & Q & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix}$$

e matriz de função de transição

$$P(t) = \begin{bmatrix} P(0,t) & P(1,t) & P(2,t) & ... \\ 0 & P(0,t) & P(1,t) & ... \\ 0 & 0 & P(0,t) & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{bmatrix},$$

tem-se $P'(t) = R \cdot P(t)$, verifica-se o seguinte.

Designando por $P^*(t)$ a soma $\sum_{k\geq 0} P(k,t)$, vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P^*(t) &= \sum_{k\geq 0} \frac{\partial}{\partial t} P(k,t) = \\ &= Q.P(0,t) + \left[Q.P(1,t) + q^T\alpha.P(0,t)\right] + \left[Q.P(2,t) + q^T\alpha.P(1,t)\right] + ... = \\ &= \sum_{k\geq 0} \left(Q + q^T\alpha\right).P(k,t) = \left(Q + q^T\alpha\right).P^*(t). \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação diferencial, obtemos o pretendido.

Um cálculo semelhante permite obter a função geradora matricial das probabilidades de transição:

$$\sum_{k\geq 0} P(k,t) z^k = \exp\left(tQ + tzq^T\alpha\right).$$

Consideremos o caso em que Q é uma matriz escalar. Tal corresponde ao caso em que se pode transitar de cada um dos estados apenas para o de absorção e se reinicia então com distribuição α. Ou seja, temos um processo de renovamento. Na verdade, as intensidades de transição para o estado de absorção são iguais para todos os estados. O interesse da distinção entre os estados poderá residir na distinção de comportamento de um outro processo em cada um dos estados. Por exemplo, a parte de difusão num processo do tipo dos considerados nos capítulos anteriores. Nesse caso, $(tQ).\left(tzq^T\alpha\right) = \left(tzq^T\alpha\right).(tQ)$ e portanto:

$$\sum_{k\geq 0} P(k,t)\, k = \left[\frac{\partial}{\partial z} \sum_{k\geq 0} P(k,t) z^k\right]_{|z=1} = \frac{\partial}{\partial z} \exp\left(tQ + tzq^T\alpha\right)_{|z=1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial z} \exp\left(tzq^T\alpha\right) \exp\left(tQ\right)_{|z=1} = tq^T\alpha \exp\left(tQ + tzq^T\alpha\right)_{|z=1} \\
&= tq^T\alpha \exp\left(tQ + tq^T\alpha\right).
\end{aligned}
$$

Seja $E(N_t)_i$ a esperança condicional de N_t, dado o estado de partida i. Esta é dada pela soma dos elementos da linha i da matriz anterior. Podemos enfim obter o vector $[E(N_t)_i]$. Vem então:

$$[E(N_t)_i] = tq^T\alpha \exp\left(tQ + tq^T\alpha\right)\mathbf{1}.$$

6.2.4 Soma de saltos versus número de saltos

Consideramos um processo, X, similar ao de Jacobsen e portanto constituído em parte por saltos aleatórios. Temos $X_t = \int_0^t \sigma_{J_{s-}} dB_s + \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ em que os U_i têm distribuição F_U em $\mathbb{R}^+$. Pretende-se minimizar, num caso geral, o valor esperado de uma função V de (X, J) num momento T:

$$E_{X_0=x,J_0=j,\lambda}\left[V\left(X_T(\lambda), J_T(\lambda), \lambda, T\right)\right],$$

tomando como controlo as intensidades de salto nos diversos estados da cadeia J, dados pelo vector λ.

No que se segue bem como na secção seguinte, consideramos um espaço de funções do valor do processo com esperança e para as quais esteja definido o gerador infinitesimal, à semelhança do que se fez em capítulos anteriores.

Sabe-se que, para uma dada função u,

$$E_{X_0=x,J_0=j}\left[u\left(X_T, J_T, T\right)\right] = u(x,j,0) + E\left[\int_0^T u_s\left(X_s, J_s, s\right) ds + \int_0^T Au\left(X_s, J_s, s\right) ds\right].$$

Seja $u(x, j, \lambda^*, 0) = E\left[V\left(X_T(\lambda^*), J_T(\lambda^*), \lambda^*, T\right)\right]$ onde λ^* é o vector de intensidade de salto nos diversos estados da cadeia de Markov correspondente ao óptimo. Esta função verifica a condição

$$
\begin{aligned}
& u_s\left(X_s(\lambda^*), J_s(\lambda^*), \lambda^*, s\right) + Au\left(X_s(\lambda^*), J_s(\lambda^*), \lambda^*, s\right) \\
= \; & \inf_{\lambda} u_s\left(X_s(\lambda), J_s(\lambda), \lambda, s\right) + Au\left(X_s(\lambda), J_s(\lambda), \lambda, s\right) = 0
\end{aligned}
$$

de tal forma que

$$
\begin{aligned}
\inf_{\lambda} E\left[V\left(X_T(\lambda), J_T(\lambda), \lambda, T\right)\right] &= E\left[V\left(X_T(\lambda^*), J_T(\lambda^*), \lambda^*, T\right)\right] \\
&= u(x, j, \lambda^*, 0) \leq E\left[V\left(X_T(\lambda), J_T(\lambda), \lambda, T\right)\right]
\end{aligned}
$$

para a função u apresentada.

Impomos a restrição $E(N_T)_i \geq n_i$ $(i = 1, ..., N)$, sendo n_i um dado valor.

No processo de renovamento apresentado no final da secção anterior, o vector $[E(N_T)_i]$ é igual a $tq^T \alpha \exp\left(tQ + tq^T \alpha\right) \mathbf{1}$ onde $q^T = \lambda$. A restrição limita os valores que λ pode tomar.

O gerador infinitesimal, para um dado vector λ, é dado por

$$Au(x,i) = \frac{1}{2}\sigma_i^2 \partial_{xx}^2 u(x,i) + \lambda \left[\sum_j a_j \int_{\mathbb{R}^+} \left[u(x+y,j) - u(x,i) \right] F_U(dy) \right].$$

6.3 Instituição de saúde com limite máximo no número esperado de diagnósticos

6.3.1 Introdução

Procura-se analisar o efeito, numa unidade de saúde, da imposição de um limite na utilização de um exame complementar de diagnóstico sobre a evolução da sua situação financeira considerada como uma meta pela instituição. Este efeito traduz-se numa penalização , imposta sobre a unidade em causa, quando se constata que um utente do serviço a quem não se fez o diagnóstico complementar se encontra doente e poderá ter sido prejudicado pela falta desse diagnóstico e do subsequente tratamento. A penalização acima referida é incerta à partida e por simplificação será designada por indemnização. Esta questão pode ser colocada num ambiente aleatório em que haja um grupo de utentes para os quais a probabilidade de estar efectivamente doente seja pequena e se coloque a questão da utilização de recursos escassos para a realização do diagnóstico. O limite consistirá numa restrição sobre o número esperado de diagnósticos.

Este tipo de problema enquadra-se num ambiente de gestão em que há uma possível tensão entre a lógica profissional médica e a lógica puramente economicista que pode levar a uma contenção de custos. Se considerarmos um hospital organizado por unidades de decisão a que estão afectos os diversos sectores de actividade, poder-se-ia verificar uma restrição do tipo referido para uma unidade ligada ao atendimento de utentes, imposta pela direcção central.

Ao explicitar o efeito de uma variação na restrição sobre, por um lado, a situação financeira da unidade de saúde em causa e, por outro lado, sobre o número de ocorrências indesejáveis resultantes da restrição, pretende-se dar um passo no sentido da clarificação da relação entre estes aspectos do problema, ou seja, a relação entre a decisão médica e a sua implicação em termos económicos, quer financeiros quer definidos a partir do grau de satisfação dos utentes. Neste contexto, podemos identificar, na eficácia organizacional da prossecução da sua missão, três dimensões: uma medida da optimização dos resultados a partir da utilização dos recursos; uma medida da concretização das metas prédefinidas; uma medida do grau de satisfação dos utentes.

Esta última dimensão pode ser integrada na situação em análise, associando à unidade de saúde uma função de utilidade que integre como argumento, para além da situação financeira, o número de reclamações por parte de utentes resultantes da falta do diagnóstico. Este último aspecto é particularmente relevante face à posição de "autoridade" do médico na sua relação com o doente: este tem em geral conhecimentos médicos limitados; por outro lado, pela própria doença pode estar demasiado fragilizado para seleccionar um médico. Assim, a avaliação da qualidade do serviço por parte do doente é posterior à sua realização e tornam-se significativos os indicadores não financeiros de satisfação do utente do serviço de saúde.

De realçar que, no caso em análise, o tipo de penalização resultante da reclamação respeitante ao serviço influencia a relação entre a função de utilidade baseada na situação financeira da unidade de saúde e o número de ocorrências de reclamações. Aquela penalização pode servir de instrumento para que as tomadas de decisão baseadas em critérios financeiros sejam no sentido de reduzir tendencialmente aquelas ocorrências.

Muitos dos aspectos mais gerais são expostos em [Fi] e são na presente análise integrados num contexto de risco.

O instrumento usado nesta análise é a caracterização de processos markovianos, nomedamente recorrendo a equações de Kolmogorov. Dentro da classe destes processos, importa considerar processos de contagem e de saltos. Possíveis referências para estes conceitos são [B], [D], [EK], [J1], [Ko], [LB].

O modelo desenvolvido visa colocar ênfase no aspecto particular que é objecto do estudo, sendo simplificador noutros aspectos. Supõe-se que o doente submetido a tratamento é sempre curado ao fim de um tempo aleatório. Por simplificação, os utentes que se apresentam na unidade de saúde são classificados em dois grupos consoante a probabilidade de estar doente avaliada após um rastreio prévio, podendo não se realizar o diagnóstico complementar no caso em que aquela probabilidade é reduzida. É possível alterar, pelo menos parcialmente, algumas destas hipóteses, alterando concomitantemente a caracterização dos processos estocásticos que nos importam.

6.3.2 O modelo

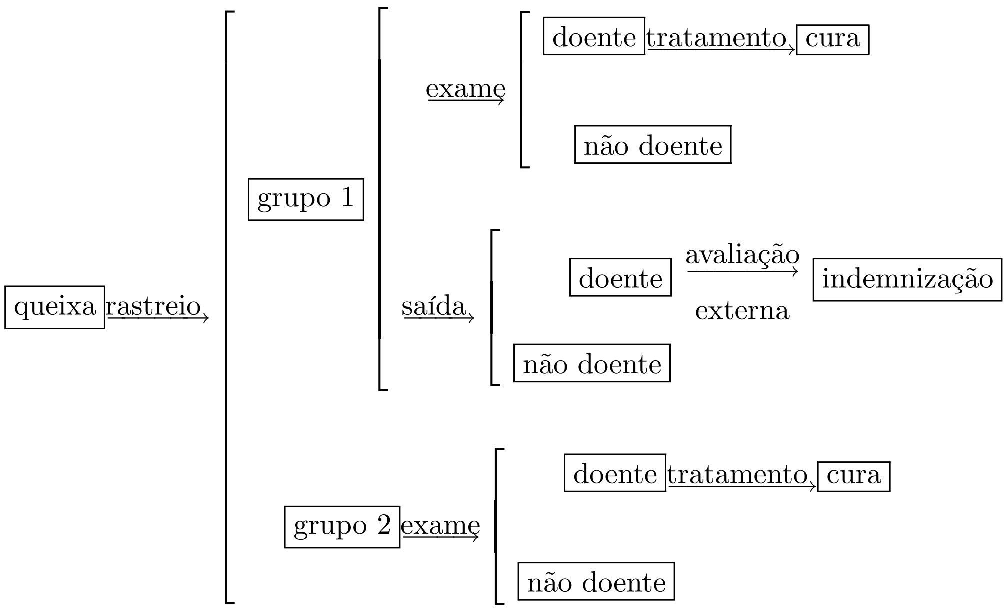
Consideramos uma instituição de saúde relativamente à qual se verifica o seguinte. Chega à instituição um conjunto de queixas por parte de potenciais pacientes. Estas queixas são classificadas em dois grupos consoante a probabilidade constatada de doença, num rastreio prévio. Supor-se-á que esta probabilidade baseada nos sintomas observados, não difere da probabilidade efectiva, entendida como a proporção observada num número elevado de casos similares.

Relativamente ao grupo de menor probabilidade de doença, apenas uma parte das queixas será atendida com diagnóstico mais elaborado. Há uma restrição sobre o número esperado de exames complementares de diagnóstico, que se repercute na parte de queixosos com pequena probabilidade de doença que serão submetidos a esse diagnóstico. No outro grupo todas as queixas são submetidas a diagnóstico. Estes são feitos mediante dado pagamento.

Há uma probabilidade que o diagnosticado padeça de facto de doença. Nesse caso, segue-se um período aleatório de tratamento durante o qual a instituição recebe uma dada de remuneração, de acordo com uma taxa contínua.

Quanto às queixas relativamente às quais não se faz exame complementar de diagnóstico, há uma probabilidade de estarem doentes (a probabilidade do grupo em causa). Quando tal sucede, há um periodo aleatório até que se descubra a doença e, nesse momento, a instituição é forçada a indemnizar o doente por negligência.

Esta descrição pode ser resumida no seguinte esquema:



Há uma dada cadeia de Markov J que modula a intensidade de ocorrência de novas queixas. Assim, em alguns dos estados da cadeia, há maior possibilidade de chegar uma nova queixa do que em outros. Supõe-se que o número de estados da cadeia é finito. O processo é reiniciado sempre que há um novo doente em tratamento ou uma nova indemnização. Como se referirá mais em pormenor adiante, isto permite considerar a possibilidade de os casos de doença constatados servirem de indicador de passagem a uma fase de acréscimo de novas queixas.

Seja N_1 um processo estocástico que nos dá, em cada momento, o número de doentes em tratamento na instituição. Este aumenta uma unidade sempre que surge uma queixa atendida e que se constata após diagnóstico ser efectivamente um doente. Diminui uma unidade sempre que termina um tratamento.

Seja N_2 o número de queixas não sujeitas a exame que ainda não deram origem a indemnização. Aumenta uma unidade quando há uma queixa que não origina exame complementar de diagnóstico. Diminui uma unidade quando há uma indemnização.

Seja X um processo estocástico representando o fluxo financeiro acumulado pela instituição de saúde em cada momento. Este vem dado por

$$X_t = x_0 + \int_0^t (Tr \cdot N_{1u})\, du + Dg \cdot N_{Dg,t} - \sum_{i=1}^{N_{2d,t}} I_i,$$

onde Tr é a taxa contínua de remuneração do tratamento de um doente, Dg o pagamento de um diagnóstico, I uma indemnização de valor aleatório, N_{Dg} o número de queixas submetidas a diagnóstico e N_{2d} o número de indemnizações (ou seja o número de decréscimos de N_2). As variáveis aleatórias I_i são independentes e identicamente distribuídas.

Sejam q_{ij} é a intensidade de transição do estado i para o estado j; a_{ij} a probabilidade de, partindo do estado i, se passar para o estado j quando é diagnosticado um novo doente ou quando há uma nova reclamação (indicio de novas queixas); $\partial_x f$ a derivada de f em ordem a x; λ_i^{q1} a intensidade de ocorrência de uma nova queixa do primeiro grupo no estado i; λ_i^{q2} a intensidade de ocorrência de uma nova queixa do segundo grupo no estado i; P^{Dg} a probabilidade de haver diagnóstico dada uma nova queixa do grupo 1 (representando esta a propensão média por parte do responsável médico para fazer o diagnóstico quando se depara com uma queixa do primeiro grupo); P^{do1} a probabilidade de doença no primeiro grupo; P^{do2} a probabilidade de doença no segundo grupo; λ^c a intensidade de ocorrência de cura depois de iniciado o tratamento; λ^d a intensidade de ocorrência da constatação de doença por um doente não diagnosticado que esteja doente; e F_I a distribuição da variável aleatória I que representa uma indemnização, com limite superior I^*, finito por hipótese.

O gerador infinitesimal do processo de Markov conjunto (X, N_1, N_2, J), cuja forma será explicada de seguida, é:

$Af(x, n_1, n_2, i) =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j \neq i} q_{ij} \left[f(x, n_1, n_2, j) - f(x, n_1, n_2, i) \right] \qquad (6.1)\\
&\quad + \lambda_i^{q1} P^{Dg} \left\{ \left(1 - P^{do1}\right) \left[f(x + Dg, n_1, n_2, i) - f(x, n_1, n_2, i) \right] \right.\\
&\quad \left. + P^{do1} \left[\sum_j a_{ij} \left[f(x + Dg, n_1 + 1, n_2, j) - f(x, n_1, n_2, i) \right] \right] \right\}\\
&\quad + n_1 \lambda^c \left[f(x, n_1 - 1, n_2, i) - f(x, n_1, n_2, i) \right]\\
&\quad + \lambda_i^{q1} \left(1 - P^{Dg}\right) \left[f(x, n_1, n_2 + 1, i) - f(x, n_1, n_2, i) \right]\\
&\quad + n_2 \lambda^d P^{do1} \left[\sum_j a_{ij} \int_{\mathbb{R}^+} \left[f(x - y, n_1, n_2 - 1, j) - f(x, n_1, n_2, i) \right] F_I(dy) \right]\\
&\quad + \lambda_i^{q2} \left\{ \left(1 - P^{do2}\right) \left[f(x + Dg, n_1, n_2, i) - f(x, n_1, n_2, i) \right] \right.\\
&\quad \left. + P^{do2} \left[\sum_j a_{ij} \left[f(x + Dg, n_1 + 1, n_2, j) - f(x, n_1, n_2, i) \right] \right] \right\}\\
&\quad + Tr.n_1 \partial_x f(x, n_1, n_2, i).
\end{aligned}$$

O gerador infinitesimal é obtido como em [J3]. A ideia básica é que, para uma função f

do processo de Markov conjunto, obedecendo às hipóteses que permitam definir os termos que surgem no gerador infinitesimal, Af, este é definido de tal forma que:

$$f\left(X_t, N_{1t}, N_{2t}, J_t\right) = f\left(X_0, N_{10}, N_{20}, J_0\right) + \int_0^t Af\left(X_s, N_{1s}, N_{2s}, J_s\right) ds + M_t$$

onde M é uma martingala.

Há a realçar o seguinte relativamente à expressão obtida para o gerador infinitesimal.

A parcela com derivada parcial em ordem a X (a última) reflecte uma evolução contínua ao longo do tempo, nomeadamente no nosso caso o recebimento de um fluxo continuo de receitas dos tratamentos.

Todas as outras parcelas são definidas a partir de compensadores de medidas de contagem respeitantes a acontecimentos que ocorrem de forma instantânea, acontecimentos estes que provocam alterações em algumas das componentes do processo de Markov conjunto.

Assim, a primeira parcela reflecte as transições de estado da cadeia de Markov J, quando não há alterações simultâneas em outras componentes do processo de Markov conjunto, as quais são modeladas da seguinte forma: partindo do estado i há uma intensidade de transição para o estado j de q_{ij}.

A segunda parcela respeita aos momentos em que é realizado um diagnóstico a um doente que se constatou antes ser do grupo 1 e se conclui não estar doente. A intensidade de ocorrência deste evento é $\lambda_i^{q1} P^{Dg} \left(1 - P^{do1}\right)$ e a única alteração no processo de Markov conjunto é um acréscimo de Dg (receita do diagnóstico) em X.

Na terceira parcela, consideramos os diagnósticos a utentes do grupo 1 em que se constata estarem doentes, acontecimento com intensidade $\lambda_i^{q1} P^{Dg} P^{do1}$. As alterações resultantes deste tipo de evento são um aumento de Dg em X, um aumento de uma unidade em N_1 e a transição do estado i para o estado j em J, com probabilidade a_{ij}. Supõe-se que, quando se constata a doença (e também quando um utente do grupo 2 constata estar doente na fase de diagnóstico ou posteriormente caso não tenha feito exame complementar de diagnóstico), há este tipo de transição em J tendencialmente para estados com maior intensidade de chegadas de novas queixas. A ideia é que a constatação de novos casos de doença será um indicio de aumento de queixas no futuro.

Para as restantes parcelas, o raciocínio é semelhante e temos como possíveis acontecimentos:

- na quarta parcela, a cura de um doente (N_1 diminui uma unidade) com intensidade $n_1\lambda^c$ (note-se que a intensidade de ocorrência da cura de um dos n_1 doentes é a soma das intensidades de ocorrência de cura para cada um dos doentes -ver [LB], pg. 125);

- na quinta parcela, a não realização de diagnóstico a um utente do grupo 1 (N_2 aumenta uma unidade) com intensidade $\lambda_i^{q1}\left(1-P^{Dg}\right)$;

- na sexta parcela, a apresentação de reclamação por um utente não diagnosticado (N_2 diminui uma unidade e X diminui no valor da indemnização) com intensidade $n_2\lambda^d P^{do1}$; por simplificação estamos a supor que a penalização é imediata;

- as situações correspondentes ao grupo 2, sendo a sua análise semelhante à das situações do grupo 1 com diagnóstico.

Algumas das parcelas presentes no gerador infinitesimal estão ausentes para alguns valores de N_1 e N_2, como se verá adiante quando considerarmos a distribuição de (N_{1t}, N_{2t}, J_t), nomeadamente quando consideramos o efeito de uma restrição sobre o número máximo de utentes atendido no período. As considerações aí feitas são extensivas ao gerador infinitesimal que apresentámos.

A função a optimizar

Pretende-se maximizar uma função de utilidade do fluxo financeiro da instituição de saúde, $E\left[U\left(X_t\right)\right]$. Este valor é determinado a partir das equações regressivas de Kolmogorov. De facto, pode-se determinar a esperança de uma função $w\left(X_t, N_{1t}, N_{2t}, J_t\right)$ que no nosso caso corresponde a $U\left(X_t\right)$, dado que o valor do processo no momento inicial é $\left(X_0, N_{10}, N_{20}, J_0\right)$. Trata-se de uma função destes valores iniciais determinada da seguinte forma. Será dada pelo valor em $\left(X_0, N_{10}, N_{20}, J_0\right)$ de uma função u caracterizada através da equação regressiva de Kolmogorov:

$$u_t + Au = 0,$$

onde u_t é a derivada de $u\left(X_t, N_{1t}, N_{2t}, J_t, t\right)$ em ordem ao tempo.

Note-se que, neste caso, estamos a admitir que u depende explicitamente de t.

Tem-se:

$$
\begin{aligned}
E\left[u\left(X_t, N_{1t}, N_{2t}, J_t, t\right)\right] &= u\left(X_0, N_{10}, N_{20}, J_0, 0\right) \\
&+E\left[\int_0^t u_s\left(X_s, N_{1s}, N_{2s}, J_s, s\right) ds\right. \\
&\left.+\int_0^t Au\left(X_s, N_{1s}, N_{2s}, J_s, s\right) ds\right],
\end{aligned}
$$

dado o valor inicial do processo de Markov conjunto, $(X_0, N_{10}, N_{20}, J_0)$. Verificando-se a equação regressiva de Kolmogorov, a última parcela anula-se. Se considerarmos a condição final

$$
u\left(x, n_1, n_2, j, t\right) = w\left(x, n_1, n_2, j\right), \tag{6.2}
$$

obtém-se:

$$
E\left[w\left(X_t, N_{1t}, N_{2t}, J_t\right)\right] = u\left(X_0, N_{10}, N_{20}, J_0, 0\right).
$$

Ou seja, o valor inicial da função que obedece à equação regressiva de Kolmogorov dá-nos o valor esperado pretendido se impusermos a referida condição final. O significado desta condição final é óbvio: a esperança do valor que um processo toma no próprio momento coincidirá com esse valor. Reciprocamente, é possível provar, atendendo à definição de gerador infinitesimal, que se se verificar a última igualdade então u verifica a equação regressiva de Kolmogorov, à semelhança do que é feito em [O] no caso de processos de difusão.

No nosso caso, $w\left(X_t, N_{1t}, N_{2t}, J_t\right) = U\left(X_t\right)$ e portanto $u\left(x, n_1, n_2, j, t\right) = U\left(x\right)$ para todo o $\left(n_1, n_2, j\right)$.

Considere-se um número máximo de queixas atendidas, n_t^*, no período $[0, t]$. De notar que, no momento t, o valor máximo que o processo X pode tomar é $b = x_0 + n_t^*\left[t \times Tr + Dg\right]$. Tal corresponde ao caso limite em que são atendidos n_t^* utentes, constatando-se que estão doentes, e começam o tratamento num lapso de tempo tendencialmente nulo a partir do momento inicial e o tratamento dura até t. O valor mínimo de X é $a = x_0 - n_t^* \times I^*$. Tal corresponde ao caso limite em que todos os pacientes são do grupo 1, não diagnosticados e isso dá sempre origem a indemnização de valor máximo. Note-se que se supõe que X é não negativo ao longo do periodo o que obriga a que o seu valor inicial, x_0, seja suficientemente elevado, isto é, superior a $n_t^* \times I^*$.

As equações de Kolmogorov constituem um sistema de equações integro-diferenciais (note-se que temos, para cada valor de X e para cada momento, uma equação para cada terno (N_1, N_2, J)), para o qual é dificil encontrar a solução.

Para resolver este problema, consideramos a transformada de Laplace relativamente a X da função f de forma a obter um sistema de equações diferenciais ordinárias em relação a estas transformadas. A transformada de Laplace de $f(x, n_1, n_2, j)$ é dada por

$$\widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, j) = \int_0^\infty e^{-\zeta x} f(x, n_1, n_2, j)\, dx$$

e recorrendo às propriedades desta, obtém-se, a partir das equações regressivas de Kolmogorov, as correspondentes equações para as transformadas:

$$\begin{aligned}
&\widehat{f}_t(\zeta, n_1, n_2, j) + \sum_{j \neq i} q_{ij} \left[\widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, j) - \widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i)\right] \\
&+\lambda_i^{q1} P^{Dg} \left\{\left(1 - P^{do1}\right)\left[e^{\zeta Dg}\widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i) - \widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i)\right]\right. \\
&\left.+P^{do1}\left[\sum_j a_{ij}\left[e^{\zeta Dg}\widehat{f}(\zeta, n_1 + 1, n_2, j) - \widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i)\right]\right]\right\} \\
&+Tr.n_1\zeta\widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i) + n_1\lambda^c\left[\widehat{f}(\zeta, n_1 - 1, n_2, i) - \widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i)\right] \\
&+\lambda_i^{q1}\left(1 - P^{Dg}\right)\left[\widehat{f}(\zeta, n_1, n_2 + 1, i) - \widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i)\right] \\
&+n_2\lambda^d P^{do1}\left[\sum_j a_{ij}\left[TL(I).\widehat{f}(\zeta, n_1, n_2 - 1, j) - \widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i)\right]\right] \\
&+\lambda_i^{q2}\left\{\left(1 - P^{do2}\right)\left[e^{\zeta Dg}\widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i) - \widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i)\right]\right. \\
&\left.+P^{do2}\left[\sum_j a_{ij}\left[e^{\zeta Dg}\widehat{f}(\zeta, n_1 + 1, n_2, j) - \widehat{f}(\zeta, n_1, n_2, i)\right]\right]\right\} = 0,
\end{aligned}$$

onde $TL(I)$ é a transformada de Laplace da distribuição de probabilidade da indemnização I. Em particular, note-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\zeta x} f(x + Dg, n_1, n_2, j)\, dx &= e^{\zeta Dg}\int_0^\infty e^{-\zeta(x+Dg)} f(x + Dg, n_1, n_2, j)\, dx \\
&= e^{\zeta Dg}\int_{Dg}^\infty e^{-\zeta z} f(z, n_1, n_2, j)\, dz \\
&= e^{\zeta Dg}\int_0^\infty e^{-\zeta z} f(z, n_1, n_2, j)\, dz
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida atendendo a que $x_0 \geq n_t^* \times I^*$ e portanto se há pelo menos um diagnóstico, haverá menos de n_t^* reclamações, logo X não desce abaixo de I^*

(nem de Dg supondo, como é razoável, que $I^* \geq Dg$). Além disso,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\zeta x} f(x-y, n_1, n_2-1, j) F_I(dy)\, dx \\
= & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\zeta y} e^{-\zeta(x-y)} f(x-y, n_1, n_2-1, j) F_I(dy)\, dx \\
= & \int_{-y}^\infty e^{-\zeta z} f(z, n_1, n_2-1, j)\, dz \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\zeta y} F_I(dy) \\
= & \int_0^\infty e^{-\zeta x} f(x, n_1, n_2-1, j)\, dx \times TL(I).
\end{aligned}$$

Em relação à condição final (6.2), a respectiva transformada de Laplace, que nos dá a condição final para o sistema das transformadas, vem dada por:

$$\int_{a^*}^{b^*} e^{-\zeta x} u(x, n_1, n_2, j, t)\, dx = \int_{a^*}^{b^*} e^{-\zeta x} w(x, n_1, n_2, j)\, dx$$

onde a^* e b^* são os limites mínimo e máximo de x_0, sendo o mínimo definido de forma a coíncidir com $n_t^* \times I^*$ e o máximo de forma a não ultrapassar um dado nível. Pode-se supor que terá havido antes uma reafectação de recursos de forma a retirar o excedente sobre esse nível. Esta condição é definida para todos os possíveis valores de (n_{10}, n_{20}, j_0). Se, por exemplo, considerarmos uma especificação HARA (aversão ao risco absoluta hiperbólica) de parâmetro γ para a função de utilidade que a cada valor x faz corresponder $\frac{x^\gamma}{\gamma}$, a transformada de Laplace para a condição final é:

$$\int_a^b e^{-\zeta x} \frac{x^\gamma}{\gamma} dx = \frac{\zeta^{-\gamma-1}}{\gamma} \left[Gama(1+\gamma, a\zeta) - Gama(1+\gamma, b\zeta) \right],$$

onde $Gama(c,d) = \int_d^\infty e^{-x} x^{c-1} dx$ é uma função gama incompleta.

Encontradas as transformadas de Laplace como solução do sistema, estas podem ser invertidas, no ponto correspondente ao valor inicial do processo X. Recordamos que a esperança da função de utilidade de X_t foi definida como função dos valores iniciais $(x_0, n_{10}, n_{20}, j_0)$. Escolhida a transformada correspondente a (n_{10}, n_{20}, j_0), procede-se à sua inversão em x_0.

A restrição

Consideremos agora a restrição de, por escassez de recursos, $E[N_{1t}]$ não ultrapassar um dado valor. Isto traduz-se numa restrição sobre o número de doentes em tratamento no momento final t. Embora este não seja exactamente o tipo de restrição que indicámos como interessante na introdução, fez-se, nesta fase, a escolha desta variável porque apareceu definida naturalmente no gerador infinitesimal apresentado atrás, o que torna o seu tratamento mais simples.

Na secção de notas finais, será abordada, como extensão do caso agora tratado, uma forma mais pertinente para a restrição, nomeadamente com base no número de diagnósticos realizados. A maneira de determinar a esperança desta última variável tornar-se-á clara após as considerações que faremos na presente secção.

Partimos do gerador infinitesimal de (N_1, N_2, J):

$$\begin{aligned} Af(n_1,n_2,i) &= \sum_{j\neq i} q_{ij}\left[f(n_1,n_2,j)-f(n_1,n_2,i)\right] \\ &+\lambda_i^{q1}P^{Dg}P^{do1}\left[\sum_j a_{ij}\left[f(n_1+1,n_2,j)-f(n_1,n_2,i)\right]\right] \\ &+n_1\lambda^c\left[f(n_1-1,n_2,i)-f(n_1,n_2,i)\right] \\ &+\lambda_i^{q1}\left(1-P^{Dg}\right)\left[f(n_1,n_2+1,i)-f(n_1,n_2,i)\right] \\ &+n_2\lambda^d P^{do1}\left[\sum_j a_{ij}\left[f(n_1,n_2-1,j)-f(n_1,n_2,i)\right]\right] \\ &+\lambda_i^{q2}P^{do2}\left[\sum_j a_{ij}\left[f(n_1+1,n_2,j)-f(n_1,n_2,i)\right]\right]. \end{aligned}$$

$E(N_{1t})$ é determinada da seguinte forma. Designamos por $P(n_1, n_2, t)$ a matriz das probabilidades conjuntas de, dados os valores iniciais (n_{10}, n_{20}) de (N_1, N_2) e um estado inicial de J, se atingir, num lapso de tempo t, um dado estado em J e os valores n_1 e n_2 para N_1 e N_2, respectivamente.

Trata-se de uma matriz por se estar a considerar os vários estados possíveis da cadeia J, quer para o momento inicial quer para o momento t.

A sua evolução é dada por equações diferenciais cuja forma mais geral é a seguinte:

$$\begin{aligned} P'(n_1,n_2,t) &= P(n_1,n_2,t)\,Q_* + P(n_1+1,n_2,t)\,q_{1-}^T + P(n_1,n_2+1,t)\,q_{2-}^T \\ &+P(n_1-1,n_2,t)\,q_{1+}^T + P(n_1,n_2-1,t)\,q_{2+}^T \end{aligned} \tag{6.3}$$

Nesta expressão:

- q_{1+}^T e q_{2-}^T são matrizes cujos elementos da linha i e da coluna j são $q_{1+,ij}^T = a_{ij}\left(\lambda_i^{q1}P^{Dg}P^{do1}+\lambda_i^{q2}P^{do2}\right)$ e $q_{2-,ij}^T = a_{ij}n_2\lambda^d P^{do1}$ respectivamente;

- q_{1-}^{T} e q_{2+}^{T} são matrizes diagonais cujo i-ésimo elemento da diagonal é $q_{1-,i}^{T} = n_1\lambda^c$ e $q_{2+,i}^{T} = \lambda_i^{q1}\left(1 - P^{Dg}\right)$ respectivamente;

- Q_* designa uma matriz genérica cujos elementos da diagonal principal variam consoante o par (n_1, n_2) e as hipóteses particulares do modelo que consideramos.

Assim, por exemplo no que respeita à matriz q_{1-}^{T}, esta tem por elemento genérico, $q_{1-}^{T}(i,j)$, a intensidade de transição de $n_1 + 1$ para n_1, de n_2 para n_2 e do estado i para o estado j da cadeia J. As restantes matrizes têm uma interpretação semelhante.

Esta forma geral das equações diferenciais é adaptada de forma que algumas das parcelas se anulam para alguns dos pares (n_1, n_2). Ilustramos este aspecto através de um exemplo apresentado de seguida.

Impõe-se uma restrição sobre o número máximo de queixas atendidas no rastreio inicial, ou seja, sobre as variações positivas de $N_1 + N_2$. Estamos aqui a supor para simplificar que todos os diagnosticados estão doentes. Isto permite truncar os valores possíveis de N_1 e de N_2, à semelhança do que é feito em [DDSV]. Caso contrário teria que se considerar o número de diagnosticados que não estão doentes, para além de N_1 e de N_2, na contagem do número de queixas atendidas.

Consideremos a título de exemplo um limite para o número de queixas de 3. É claro que em análises efectivas interessar-nos-ia um número muito superior. Considere-se uma cadeia de Markov em tempo contínuo onde cada estado é um elemento do terno (N_1, N_2, J). Excluindo a hipótese colocada no parágrafo anterior, teriamos uma componente adicional: o número de diagnosticados não doentes. Na seguinte tabela, temos uma representação das intensidades de transição entre os estados dessa cadeia, correspondendo cada linha a um estado de partida e cada coluna a um estado de chegada. Note-se que cada elemento da tabela é um bloco pois reporta-se aos vários estados possíveis de J.

N_1		0				1			2		3
	N_2	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
0	0	a_1	b			d					
	1	c	a_2	b			d				
	2		c	a_2	b			d			
	3			c	a_3						
1	0	e				a_4	b		d		
	1		e			c	a_5	b		d	
	2			e			c	a_6			
2	0					e			a_4	b	d
	1						e		c	a_6	
3	0								e		a_7

Os elementos desta tabela são:

- $b = q_{2+}^T, c = q_{2-}^T, d = q_{1+}^T$ e $e = q_{1-}^T$;

- $a_i = Q_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, concretizações da matriz Q_* referida anteriormente, definidas de forma a que a soma em linha seja 0. Esta característica permite garantir que a soma das probabilidades de transição a partir de um estado i é igual a 1.

Na tabela, os elementos do mesmo tipo estão dispostos ao longo de diagonais. As lacunas nessas diagonais resultam da restrição imposta sobre $N_1 + N_2$.

Designamos por $P(t)$ a matriz de transição de (N_1, N_2, J), constituída pelos blocos $P(n_1, n_2, t)$ em que a ordenação de n_1 e de n_2 é a que consta da tabela. Então, a dinâmica de P é dada por

$$P'(t) = P(t) Q_P$$

onde Q_P é a matriz de intensidade de transição correspondente a $P(t)$ e descrita na tabela.

Para o bloco da linha n_1 e da columa n_2 de $P'(t)$, obtemos as equações diferenciais em (6.3).

Está-se perante um sistema de equações diferenciais correspondente às equações progressivas de Kolmogorov. A solução do mesmo é dada por

$$P(t) = \exp(tQ_P),$$

onde $\exp(tA) = I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + ... = \sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!}$ é a exponencial matricial de A. Veja-se [LR], [N] e [RSST].

Determinada a matriz $P(t)$, obtemos:

$$[E(N_{1t})] = P(t)\,\eta$$

onde η é um vector coluna cujo elemento i corresponde ao valor de n_1 que indexa a i-ésima coluna de $P(t)$ (recorde-se que cada coluna desta matriz é indexada por um terno (n_1, n_2, j)).

Obtido desta forma,$[E(N_{1t})]$ é um vector onde cada componente nos dá $E(N_{1t})$ quando no momento inicial se verifica o terno (n_1, n_2, j) que indexa essa componente.

Escolhemos a componente correspondente ao valor inicial desse terno, (n_{10}, n_{20}, j_0).

O procedimento de resolução

O parâmetro de controlo no problema de optimização com restrição que expusemos é P^{Dg}. Ou seja, podemos escolher a proporção de diagnósticos realizada de entre as queixas do grupo 1 ao longo do período em causa. O processo de optimização sujeito a restrição determina o comportamento do responsável médico no que respeita a propensão para realizar diagnósticos a utentes do grupo 1 (queixosos com menor probabilidade de doença).

Uma complicação que surge é que todas as equações diferenciais do sistema respeitante a $P(t)$ têm de ser determinadas conjuntamente. No entanto, podemos atender a que a função a optimizar é, no caso em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, uma função crescente de P^{Dg} dado que, como constatamos a partir do gerador infinitesimal de (X_1, N_1, N_2, J) (ver (6.1)), um valor maior de P^{Dg} leva a que por um lado aumente o número de diagnósticos e portanto os recebimentos provenientes de diagnóstico e de tratamento e por outro lado diminua o número de queixas não aceites e portanto a eventualidade de indemnização.

Assim, um possível procedimento para encontrar o óptimo é o seguinte. Em primeiro lugar, determina-se numericamente o intervalo de valores do parâmetro P^{Dg} que verifica a restrição para $E(N_{1t})$. Tal pode ser feito considerando uma grelha de valores para P^{Dg} e determinando o valor de $E(N_{1t})$ correspondente a cada um desses valores. Em segundo lugar, escolhe-se o maior dos valores dentro desse intervalo, dado que esse é o que permite obter o óptimo. Finalmente, pode-se obter o valor da função a optimizar a partir do sistema de tranformadas de Laplace resultante das equações regressivas de Kolmogorov. Estas transformadas podem ser invertidas, no ponto correspondente ao valor inicial do processo X, sendo que se escolhe a transformada correspondente a (n_{10}, n_{20}, j_0).

Como resultado deste procedimento, podemos analisar o efeito sobre a utilidade atribuída ao fluxo financeiro da instituição de saúde de uma alteração na restrição imposta sobre o valor esperado de N_{1t}. Da mesma forma, pode analisar-se o efeito desta alteração sobre o valor esperado do número de indemnizações ao longo do periodo, ou seja, de decréscimos em N_2, $N_{2d,t}$. Tal é obtido da seguinte forma. Sendo N_{2a} é o número de acréscimos em N_2 e portanto $N_2 = N_{2a} - N_{2d}$, obtém-se a matriz de transição para o processo (N_1, N_{2a}, N_{2d}, J), $P^*(t)$, cuja dinâmica é dada por

$$P^{*\prime}(t) = P^*(t)\, Q_{P^*}$$

onde Q_{P^*} é a matriz de intensidade de transição correspondente a $P^*(t)$, apresentada na seguinte tabela:

N_1			0									
	N_{2a}		0	1		2			3			
		N_{2d}	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
0	0	0	a_1	b								
	1	0		a_2	c	b						
		1			a_1		b					
	2	0				a_2	c		b			
		1					a_2	c		b		
		2						a_1			b	
	3	0							a_3	c		
		1								a_3	c	
		2									a_3	c
		3										a_4
1	0	0	e									
	1	0		e								
		1			e							
	2	0				e						
		1					e					
		2						e				
2	0	0										
	1	0										
		1										
3	0	0										

1						2			3
0	1		2			0	1		0
0	0	1	0	1	2	0	0	1	0
d									
	d								
		d							
			d						
				d					
					d				
a_5	b					d			
	a_6	c	b				d		
		a_5		b				d	
			a_7	c					
				a_7	c				
					a_8				
e						a_5	b		d
	e						a_7	c	
		e						a_8	
						e			a_8

Nesta tabela, $a_i = Q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ são matrizes cujo elemento da diagonal principal é definido de tal forma que a soma em linha sobre Q_{P^*} é 0. Na construção desta tabela, além dos aspectos considerados na anterior, há a ter em conta que N_{2a} e N_{2d} são crescentes e N_{2d} não pode ser superior a N_{2a}.

Obtemos um vector que nos dá $E\left(N_{2d,t}\right)$ para cada possível valor inicial de (N_1, N_{2a}, N_{2d}, J) :

$$[E\left(N_{2d,t}\right)] = P^*\left(t\right)\varphi$$

onde φ é um vector coluna cujo i-ésimo elemento é o valor de n_{2d} que indexa a i-ésima coluna de $P^*(t)$. Escolhemos a componente de $[E(N_{2d,t})]$ correspondente ao valor inicial que nos interessa do processo (N_1, N_{2a}, N_{2d}, J).

6.3.3 Notas finais

Pode-se considerar algumas generalizações e alterações à formulação do problema apresentada na secção anterior.

Como se referiu na introdução, uma função de utilidade geral pode incluir como argumento, além da situação financeira, dada no modelo por X, o número de reclamações por parte de utentes, no nosso caso dado por N_{2d}. Se tivermos para aquela função uma combinação linear daquelas variáveis, o valor esperado a optimizar obtém-se de imediato:

$$E[\alpha_1 X_t + \alpha_2 N_{2d,t}] = \alpha_1 E[X_t] + \alpha_2 E[N_{2d,t}].$$

No caso mais geral em que se pretende considerar uma função de utilidade não linear, $\psi(X_t, N_{2d,t})$ (sendo a função a optimizar a respectiva esperança), pode-se considerar um sistema de equações regressivas de Kolmogorov, à semelhança do que se fez antes, alterando a condição final na qual, neste caso, surge a função ψ, com argumentos x_0 e n_{2d0}.

A solução passa por, no sistema das equações de Kolmogorov, chegar a transformadas de Laplace da forma:

$$\widehat{\psi}(\xi_1, n_1, n_{2a}, n_{2d}, j) = \int_a^b e^{-\xi x} \psi(x, n_1, n_{2a}, n_{2d}, j)\, dx$$

Resolvido o sistema das transformadas de Laplace, considera-se a inversa da transformada correspondente a $(n_{10}, n_{2a0}, n_{2d0}, j_0)$ no ponto x_0.

No que respeita à restrição sobre N_{1t}, em vez de ser imposta sobre o seu valor esperado, poderia incidir sobre a probabilidade de ultrapassar um dado limiar,

$$P(N_{1t} \geq n_1) \leq \beta.$$

Retomando a matriz de transição de (N_1, N_2, J), $P(t)$, a restrição vem agora dada por

$$P(t)\varphi \leq \beta \begin{bmatrix} 1 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\varphi = [0 \,...\, 0 \; 1 \,...\, 1]^T$, sendo as componentes não nulas as que são indexadas por valores de N_1 superiores a n_1. Ou seja, obtemos uma restrição para cada valor inicial possível do processo de Markov conjunto em causa.

Por outro lado, poderia parecer mais pertinente impor a restrição sobre o número de doentes em tratamento ao longo de todo o periodo, ou seja, o número de acréscimos em N_1, $N_{1a,t}$, e não apenas sobre os que permanecem na unidade de saúde no momento final, N_{1t}. Sendo N_{1d} é o número de decréscimos em N_1 e portanto $N_1 = N_{1a} - N_{1d}$, tal pode ser posto em prática pela análise do processo (N_{1a}, N_{1d}, N_2, J) a partir da construção da tabela para a respectiva matriz de transição. Esta tabela é construída da mesma forma que a apresentada na secção anterior para (N_1, N_{2a}, N_{2d}, J).

A restrição que propusemos como interessante na introdução deve ser, não sobre o número de doentes, mas sobre o número de diagnósticos realizados, N_{Dg}. Nesse caso, para obter o valor esperado desta variável, consideramos o processo de Markov conjunto (N_{Dg}, N_1, N_2, J), cujo gerador infinitesimal é:

$Af\left(n_{Dg}, n_1, n_2, i\right) =$

$$\begin{aligned}
= \quad & \sum_{j \neq i} q_{ij} \left[f\left(n_{Dg}, n_1, n_2, j\right) - f\left(n_{Dg}, n_1, n_2, i\right)\right] \\
& + \lambda_i^{q1} P^{Dg} \left\{ \left(1 - P^{do1}\right) \left[f\left(n_{Dg}+1, n_1, n_2, i\right) - f\left(x, n_1, n_2, i\right)\right] \right. \\
& \left. + P^{do1} \left[\sum_j a_{ij} \left[f\left(n_{Dg}+1, n_1+1, n_2, j\right) - f\left(n_{Dg}, n_1, n_2, i\right)\right] \right] \right\} \\
& + n_1 \lambda^c \left[f\left(n_{Dg}, n_1 - 1, n_2, i\right) - f\left(n_{Dg}, n_1, n_2, i\right)\right] \\
& + \lambda_i^{q1} \left(1 - P^{Dg}\right) \left[f\left(n_{Dg}, n_1, n_2 + 1, i\right) - f\left(n_{Dg}, n_1, n_2, i\right)\right] \\
& + n_2 \lambda^d P^{do1} \left[\sum_j a_{ij} \left[f\left(n_{Dg}, n_1, n_2 - 1, j\right) - f\left(n_{Dg}, n_1, n_2, i\right)\right] \right] \\
& + \lambda_i^{q2} \left\{ \left(1 - P^{do2}\right) \left[f\left(n_{Dg}+1, n_1, n_2, i\right) - f\left(n_{Dg}, n_1, n_2, i\right)\right] \right. \\
& \left. + P^{do2} \left[\sum_j a_{ij} \left[f\left(n_{Dg}+1, n_1+1, n_2, j\right) - f\left(n_{Dg}, n_1, n_2, i\right)\right] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Note-se que a dinâmica de N_{Dg} depende de J e a desta de N_1 e de N_2. Daí que para estudar N_{Dg} necessitemos de considerar um processo conjunto que inclua as outras componentes. Se considerarmos um limite, n_t^*, sobre o número de queixas iniciais, ou seja variações positivas de $N_{Dg} + N_2$, podemos então definir quais os elementos da tabela representativa da matriz de transição que se anulam neste caso. Há ainda a ter em conta, na construção da tabela, que N_1 não pode ser superior a N_{Dg}.

Em suma, na determinação do valor esperado da variável a optimizar e da variável presente na restrição, recorremos às equações regressivas de Kolmogorov definidas para um processo de Markov conjunto que permita descrever a evolução da variável que nos interessa, sendo necessário para o efeito incluir naquele processo todas as variáveis que influenciam directa ou indirectamente essa evolução.

A análise que considerámos para uma unidade de saúde pode ser adaptada à de qualquer outra situação em que esteja em causa o efeito de uma contenção de custos, traduzida numa restrição sobre o número de operações de prevenção, sobre uma maior possibilidade de ocorrência de situações extremas indesejáveis.

Bibliografia

[B] Brémaud, P. An Initiation to Point Process Calculus, *Notes based on a series of Lectures at the University of Rome (La Sapienza)* (2003)

[D] Davis, M.H.A. *Markov Models and Optimization*, Chapman and Hall, London (1993)

[DDSV] Davis, M.H.A.; M.A.H. Dempster, S.P. Sethi, D. Vermes, Optimal Capacity Expansion under Uncertainty, *Advanced Applied Probability*, 19, 156-176 (1987)

[EK] Ethier, Stewart N.; Thomas G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, John Wiley and Sons, 1986

[Fi] Filho, J.F. Ribeiro, *Controladoria Hospitalar*, Editora Atlas S.A., São Paulo (2005)

[J1] Jacobsen, M. Marked Point Processes and Piecewise Deterministic Processes, *Centre for Mathematical Physics and Stochastics (MaPhySto), University of Aarhus, Lecture Notes*, no.3 (1999)

[J3] Jacobsen, M. The Time to Ruin for a Class of Additive Risk Processes, *Centre for Mathematical Physics and Stochastics (MaPhySto), University of Aarhus, Research Report no. 22* (2003)

[Ko] Kohn, Robert V. *PDE for Finance Notes* (2003)

[LB] Last, Günter; Andreas Brandt, *Marked Point Processes on the Real Line, The Dynamic Approach,* Springer-Verlag, New York (1995)

[LR] Latouche, G.; V. Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1999)

[N] Neuts, M.F., *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models. An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD (1981)

[O] Oksendal, Bernt. *Stochastic Differential Equations. An Introdution with Applications*, Springer, Fifth Edition, Berlin-Heidelberg (1998)

[RSST] Rolski, Tomasz; Hanspeter Schmidli; Volker Schmidt; Jozef Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, Chichester (1998)

Capítulo 7

Conclusão

O propósito fulcral deste estudo foi explorar o conceito de gerador infinitesimal para responder a uma série de questões acerca de processos cuja dinâmica depende da evolução de uma cadeia de Markov em tempo contínuo. De facto, o conceito de gerador infinitesimal, ao permitir descrever um processo de Markov a partir da evolução instantânea da sua esperança em cada momento de partida, permite-nos estudar essas questões a partir de equações integro-diferenciais. Ora, o tipo de processos que é objecto do presente estudo forma com a cadeia de Markov de que depende um processo de Markov conjunto e portanto presta-se a ser estudado através daquele tipo de equações.

A forma do gerador infinitesimal é obtida a partir das regras de diferenciação conhecidas para processos estocásticos, as quais constituem uma generalização da fórmula de Itô (ver capítulo 2). No tipo de processo que consideramos, pode haver uma parte de difusão e uma parte de salto, e a cadeia de Markov influencia os parâmetros de que aquele depende. No gerador infinitesimal, as derivadas estão relacionadas com a parte de difusão e o integral com a parte de salto, sendo o integrador a distribuição de probabilidade do tamanho de cada salto.

A técnica apontada para a resolução das equações integro-diferenciais foi a passagem às transformadas de Laplace ou de Fourier no que respeita à variável relacionada com o valor do processo, de forma a obter equações simples ou equações diferenciais ordinárias, para as quais a resolução é mais simples. Dado que se define uma equação para cada possível estado da cadeia de Markov, temos de facto um sistema de equações.

Considerámos o problema colocado por Jacobsen respeitante à caracterização do tempo até à ruína e da grandeza do processo nesse momento, recorrendo para o efeito à transformada de Laplace. Foi feita a generalização desta análise de modo a considerar a possibilidade de ocorrência de saltos positivos, para além dos negativos. Como resultado, surge um termo adicional no sistema de equações que obtemos e que permite determinar a pretendida transformada. Altera-se também a equação de Cramér-Lundberg correspondente.

É obtida uma representação do preço de um activo em equilibrio como uma função de um processo do tipo que analisamos. Garante-se que o processo representativo do preço é uma martingala representando-o como uma exponencial de Doléans-Dade de um processo que é também uma martingala.

Prosseguimos com um caso particular deste modelo com apenas dois estados para a cadeia de Markov. Neste contexto, procurou-se caracterizar o valor do processo num momento fixo no futuro. Neste tipo de análise, têm relevo as equações de Kolmogorov, nas quais surge uma derivada temporal para além do gerador infinitesimal. Esta derivada temporal surge devido à relevância do lapso de tempo que decorre até ao momento futuro de interesse.

A base desta análise são de novo as regras de diferenciação estocástica. É utilizada a equação regressiva para obter a esperança de uma função do valor do processo naquele momento futuro. Por outro lado, o cálculo da esperança de uma função genérica desse valor permite obter a sua distribuição de probabilidade, através das equações progressivas de Kolmogorov. Obtemos em cada um destes casos um sistema de equações integro-diferenciais cuja resolução pode ser efectuada recorrendo às transformadas de Fourier. Desta transformação resulta um sistema de equações diferenciais ordinárias. No caso da determinação da distribuição de probabilidade, a passagem à transformada de Fourier leva-nos a uma caracterização em termos da função característica.

Considerando um processo multidimensional em que se distingue a parte de difusão e a de saltos, é possível estudar a dependência entre o valor acumulado destas partes num momento futuro, por um método análogo ao referido atrás, o qual nos dá neste caso a função característica conjunta.

Pode-se, a partir desta, obter medidas de dependência, com base directamente na função característica ou indirectamente através da densidade conjunta. Exemplo de uma medida de dependência é a medida de concordância baseada na análise das cópulas. Pode ainda obter-se a covariância nas caudas recorrendo às equações regressivas de Kolmogorov.

A dependência constatada serviu de mote ao estudo da cobertura do valor final de um processo de salto através de um activo representado por um processo de difusão. Para tal, recorreu-se ao critério de hedging de quantil introduzido por Föllmer e Leukert (1997). A estratégia óptima que satisfaz esse critério é a correspondente a uma opção knockout definida a partir de um dado acontecimento. O valor dessa estratégia é obtida a partir da probabilidade do acontecimento sob uma medida de probabilidade equivalente à efectiva.

Se o valor aleatório para o qual se pretende a cobertura for resultante de um activo potencialmente transacionado, teremos uma versão do teorema de Girsanov: a uma martingala sob a medida equivalente corresponde sob a medida efectiva a soma de uma martingala e de uma parte que não é martingala. Esta corresponde ao integral do prémio de risco relativamente ao tempo, no período considerado.

No caso em que não há transação de activos representados por processos com saltos, o prémio de risco correspondente à parte de salto não é única. Considera-se o valor deste que maximiza a probabilidade do acontecimento referido sujeito à restrição de a probabilidade sob a medida equivalente não ultrapassar dado limite.

Estas probabilidades são escritas como funções de uma exponencial de um processo dependente de uma cadeia de Markov, de modo análogo ao que se referiu antes. Serão portanto determinadas com base em equações regressivas de Kolmogorov. A distinção entre as probabilidades calculadas em relação às duas medidas reflecte-se na condição final considerada em cada caso.

São apresentados resultados respeitantes à distribuição tipo fase, que nos dá a distribuição do lapso de tempo até se atingir um estado da cadeia designado por estado de absorção. Considerando um processo de renovamento, que se reinicia com a distribuição inicial de cada vez que se atinge o estado de absorção, determina-se, num contexto particular, o número esperado de renovamentos. Tal sugere a possibilidade de calcular o óptimo de uma função de um processo com parte de saltos, impondo uma restrição sobre o número de saltos. Identificamos aqui a ocorrência de salto com o estado de absorção.

Considera-se então um problema do mesmo tipo no contexto de uma unidade de saúde. Analisa-se em que medida uma restrição sobre o número esperado de diagnósticos realizados influencia por um lado o número esperado de casos de doença não detectados (sendo esta uma situação que se deseja evitar) e por outro lado a situação financeira da insti-tuição. Esta depende dos casos não detectados através das indemnizações deles decorrentes. Tal permite colocar em relevo o esforço a realizar para prevenir situações que embora raras é desejável ter em conta. Ao definir um objectivo relativamente a estas, poder-se-á definir os custos associados à sua prossecução. A análise do número de casos pode ser adaptada para incidir, não sobre o valor esperado, mas sobre a probabilidade de exceder determinado nível.

Nesta análise, há a realçar os seguintes aspectos.

Em primeiro lugar, ao analisar um dado processo, considera-se como processo de Markov relevante o processo multidimensional que inclui como componentes, para além do processo que estamos a considerar, os processos que influenciam a evolução deste.

Quando as componentes do processo de Markov são processos de contagem ou cadeias de Markov em tempo contínuo, pode-se entender aquele processo conjunto como uma cadeia de Markov em tempo contínuo em que cada estado corresponde a uma concretização possível desse processo conjunto. Isto permite-nos utilizar o conceito de exponencial matricial apresentado no contexto das distribuições tipo fase.

Por outro lado, impõe-se uma restrição que permite truncar o número de valores possíveis dos processos de contagem relevantes. No caso da instituição de saúde, foi imposta uma restrição sobre o número de utentes atendidos na instituição.

Num contexto geral, este tipo de análise pode contribuir para clarificar o efeito de uma restrição de custos que conduza a uma restrição no número de operações de prevenção sobre o risco de ocorrência de situações extremas indesejáveis.