



Solange Vieira da Silva

# Confinamento da luz num ressoador aberto

Fevereiro/2015



UNIVERSIDADE DE COIMBRA





Faculdade de Ciências e Tecnologia

Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de  
Computadores

# **Confinamento da luz num ressoador aberto**

Solange Vieira da Silva

**Júri:**

*Presidente:* Professora Doutora Maria do Carmo R. de Medeiros

*Orientador:* Professor Doutor Mário Gonçalo M. V. Silveirinha

*Vogal:* Professor Doutor Pedro Manuel Gens A. M. Faia

Fevereiro de 2015



*Somos filhos da madrugada  
Pela praia do mar nos vamos  
À procura de quem nos traga  
Verde oliva de flor no ramo  
Navegamos de vaga em vaga  
Não soubemos de dor nem mágoa  
Pela praia do mar nos vamos  
À procura da manhã clara*

*Lá do cimo de uma montanha  
Acendemos uma fogueira  
Para não se apagar a chama  
Que dá vida na noite inteira  
Mensageira pomba chamada  
Companheira da madrugada  
Quando a noite vier que venha  
Lá do cimo duma montanha*

*Onde o vento cortou amarras  
Largaremos pela noite fora  
Onde há sempre uma boa estrela  
Noite e dia ao romper da aurora  
Vira a proa minha galera  
Que a vitória já não espera  
Fresca brisa, moira encantada  
Vira a proa da minha barca*

**”Canto Moço”, Zeca Afonso**



## Agradecimentos

Os meus primeiros agradecimentos vão para todos os Professores que tive ao longo da vida, que duma maneira ou outra marcaram o meu caminho escolar e a minha construção como pessoa.

Agradeço toda a ajuda e tempo disponibilizado pelos meus colegas do Laboratório de Micro-ondas, nomeadamente ao Doutor Tiago Morgado, Doutor Sylvain Lannebère e Engenheiro David Fernandes por toda a ajuda que me deram durante todo o meu tempo de investigação no IT e pela amizade que sempre me ofereceram.

Aos meus amigos agradeço toda a paciência que sempre tiveram nos maus momentos, e também por me oferecerem os melhores momentos da minha vida académica. Acima de tudo, agradeço por serem as pessoas de sempre e os amigos para sempre.

Agradeço ao Rui pelas noites incansáveis que passou a ler a minha tese, mais de 50 vezes certamente, mesmo sem perceber nada do assunto para me ajudar a corrigir o mais pequeno erro que me escapava ao olho cansado.

Agradeço muito ao meu extraordinário orientador que foi o Doutor Mário Silveirinha que me ofereceu o privilégio de trabalhar com ele, permitindo-me crescer tanto cientificamente como pessoalmente e dando-me vontade de continuar na investigação. Alguém que não consigo parar de admirar mais a cada dia que passa e a quem vejo como um exemplo tanto de pessoa como de profissional.

Agradeço muito em especial à minha família, nomeadamente aos meus pais Rogério e Carla por me darem a oportunidade de estudar o curso com que sempre sonhei.





## Resumo

Esta dissertação estuda o confinamento da luz numa estrutura cilíndrica composta por materiais dielétricos convencionais e materiais com resposta plasmónica. De seguida, é proposta uma realização do ressoador em microondas baseada num guia metálico de pratos paralelos preenchido com dielétricos simples, que imita a resposta plasmónica pretendida. Por fim, estuda-se a dinâmica não linear do sistema e o efeito de uma não linearidade do tipo Kerr no núcleo do ressoador, provando-se que esta permite o aprisionamento de uma quantidade quantizada de luz.

**Palavras chave:** Aprisionamento da luz, Metamaterial, Dinâmica não-linear, Guia de ondas, Quantização da luz.



## **Abstract**

This thesis studies how to trap light in a cylindrical resonator formed by conventional dielectric materials and by plasmonic-type materials. Next, we propose a microwave resonator based on a parallel plate waveguide filled with conventional dielectric materials to imitate the desired plasmonic response. By last, the nonlinear dynamics of the system is studied, and it is shown that a Kerr-type nonlinearity in the resonator's core enables to trap a quantized amount of light.

**Keywords:** Light trapping, Metamaterial, Non-linear dynamic, Waveguides, Light quantization.



# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Estado da arte . . . . .	2
1.3	Objectivos . . . . .	3
1.4	Organização . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Ressonadores plasmónicos abertos</b>	<b>5</b>
2.1	Materiais Plasmónicos . . . . .	5
2.2	Descrição do ressonador . . . . .	9
2.3	Factor Qualidade . . . . .	11
2.4	Modos naturais de oscilação com tempo de vida infinito . . . . .	13
2.5	Excitação do ressonador aberto por uma onda plana . . . . .	17
2.6	Modos naturais de oscilação (caso geral) . . . . .	23
2.7	Efeito de um raio não sintonizado . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Realização do ressonador em microondas</b>	<b>29</b>
3.1	Meio ENZ metamaterial . . . . .	29
3.2	Fios metálicos verticais . . . . .	31
3.3	Excitação do guia por uma onda plana . . . . .	32
3.4	Ajuste do número de fios metálicos . . . . .	35
3.5	Plasmões de superfície . . . . .	36
3.6	Sumário . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Óptica não linear</b>	<b>41</b>
4.1	Não linearidade de terceira ordem . . . . .	41
4.2	Não linearidade no núcleo da estrutura . . . . .	42
	<b>Conclusão</b>	<b>46</b>



# Lista de Figuras

2.1	Variação com a frequência da permitividade relativa real descrita pelo modelo de dispersão de Drude, com $\omega_c = \omega_p 10^{-7}$ . . . . .	6
2.2	Variação com a frequência da permitividade relativa imaginária descrita pelo modelo de dispersão de Drude, com $\omega_c = \omega_p 10^{-7}$ . . . . .	6
2.3	Figura ilustrativa do canal descrito. . . . .	7
2.4	Lâmina de material ENZ de permitividade $\epsilon_s$ excitada por uma onda plana <i>TM</i> . . . . .	8
2.5	Variação do coeficiente de transmissão com o ângulo de incidência. . . . .	9
2.6	Nanoestrutura cilíndrica em estudo. . . . .	10
2.7	Variação da intensidade do campo no interior de uma cavidade que explora 'Whispering-gallery modes'. . . . .	10
2.8	Incidência da onda plana na fronteira da cavidade de 'Whispering-gallery modes'. . . . .	11
2.9	Rectas de decaimento para vários valores de factor de qualidade $Q$ , com $U_0 = 1$ e $\omega' = 1 \text{ rad/s}$ . . . . .	12
2.10	Primeiras funções de Bessel. . . . .	14
2.11	Primeiras funções de Neumann. . . . .	14
2.12	Função de Bessel cilíndrica. . . . .	16
2.13	Ilustração do teorema da reciprocidade numa estrutura assimétrica, onde no ponto $F$ está colocada uma fonte de corrente oscilante e no ponto $P$ mede-se o campo eléctrico. . . . .	17
2.14	Representação da onda electromagnética incidente e da estrutura no eixo de coordenadas considerado. . . . .	18
2.15	Variação do campo magnético com a frequência, em dois pontos diametralmente opostos dentro da camada interior, com $R_1 = R_{1,0}$ . . . . .	20
2.16	Subtração das duas componentes de campo da figura anterior (campo magnético na estrutura sem o modo $n = 0$ ). . . . .	21

2.17	Fotografia da composição da estrutura 2D e respectiva polarização da onda plana de excitação no ambiente CST. . . . .	21
2.18	Condições fronteira usadas na simulação do caso 2D. . . . .	22
2.19	Campo magnético calculado em $\rho = 0.5R_1$ teórico e por simulação, e diferença entre os dois (sem $n = 0$ ). . . . .	22
2.20	Campo eléctrico no centro da estrutura ao longo do tempo, com $R_1 = R_{1,0}$ e excitação inicial de $10V/m$ . . . . .	23
2.21	Frequência de oscilação complexa característica para o caso considerado. . . . .	24
2.22	Factor qualidade como função da frequência de colisão do material ENZ. . . . .	24
2.23	Factor Qualidade com função do raio interior para vários $\omega_c/\omega_p$ . . . . .	25
2.24	Campo magnético para $R_1 = 0.95R_{1,0}$ , no domínio da frequência. . . . .	26
2.25	Campo magnético para $R_1 = 1.05R_{1,0}$ , no domínio da frequência. . . . .	26
2.26	Oscilação do campo eléctrico no centro da estrutura ao longo do tempo, para $R_1 = 1.02R_{1,0}$ (representação logarítmica). . . . .	27
2.27	Oscilação do campo eléctrico no centro da estrutura ao longo do tempo, para $R_1 = 0.98R_{1,0}$ (representação logarítmica). . . . .	27
3.1	Guia metálico rectangular descrito. . . . .	29
3.2	Guia de ondas de pratos paralelos descrito. . . . .	30
3.3	Retrato da estrutura 2D (à esquerda) e correspondente implementação em guia de ondas (à direita). . . . .	31
3.4	Polarização do campo eléctrico para cada modo. . . . .	31
3.5	Fotografia da composição da estrutura 3D e respectiva polarização da onda plana de excitação no ambiente CST (campo eléctrico). . . . .	32
3.6	Fotografia da condições fronteira definidas para a estrutura 3D no ambiente CST. . . . .	33
3.7	Campo magnético em $\rho = 0.5R_1$ , para $R_1 = R_{1,0}$ . . . . .	33
3.8	Decaimento temporal do campo magnético no centro da estrutura. . . . .	34
3.9	Campo magnético em $\rho = 0.5R_{1,0}$ , para $R_1 = 0.98R_{1,0}$ . . . . .	35
3.10	Campo magnético em $\rho = 0.5R_{1,0}$ , para $R_1 = 1.02R_{1,0}$ . . . . .	35
3.11	Campo magnético em $\rho = 0.5R_1$ . . . . .	36
3.12	Composição da estrutura plasmónica 2D. . . . .	37
3.13	Condições fronteira definidas no ambiente CST para a simulação da estrutura plasmónica 2D. . . . .	37
3.14	Composição da estrutura plasmónica 3D. . . . .	38



3.15	Condições fronteira definidas no ambiente CST para a simulação da estrutura plasmónica 3D. . . . .	38
3.16	Fotografia dos resultados obtidos em ambiente CST da simulação da estrutura 2D e 3D, respectivamente. . . . .	39
4.1	Influência do valor de $\chi^{(3)}$ (em $m^2/V^2$ ) no decaimento do campo eléctrico no centro da estrutura, para um pulso incidente com duração temporal $\delta\tau = 2.38ns$ (representação logarítmica). . . . .	44
4.2	Influência do valor da amplitude do impulso inicial no decaimento do campo eléctrico no centro da estrutura, para um pulso incidente com duração temporal $\delta\tau = 2.38ns$ e $\chi^{(3)} = 1.33 * 10^{-6}$ (representação logarítmica). . . . .	44
4.3	Influência do valor de $\delta\tau$ ( <i>fwhm</i> em <i>ns</i> ) no decaimento do campo eléctrico no centro da estrutura, para um meio não linear com $\chi^{(3)} = 1.33 * 10^{-6}m^2/V^2$ (representação logarítmica). . . . .	45



# Lista de acrónimos e siglas

**ENZ** Epsilon Near Zero

**CST** Computer Simulation Technology [1]

**PEC** Perfect Electric Conductor

**PMC** Perfect Magnetic Conductor

**TE** Transversal Eléctrico

**TM** Transversal Magnético

**TEM** Transversal Eléctrico e Magnético



# Lista de símbolos

$c$  Velocidade da luz no vácuo

$\epsilon_0$  Permitividade eléctrica do vácuo

$\epsilon_r$  Permitividade eléctrica relativa

$\mu_0$  Permeabilidade magnética do vácuo

$\omega$  Frequência angular

$\omega_c$  Frequência angular de colisão

$\omega_p$  Frequência angular de plasma

$\omega'$  Frequência angular real

$\omega''$  Frequência angular imaginária

$f$  Frequência

$f_c$  Frequência de colisão

$f_p$  Frequência de plasma

$\lambda$  Comprimento de onda

$k$  Número de onda

$k_c$  Número de onda de colisão

$k_p$  Número de onda de plasma

$Q$  Factor qualidade

$\tau$  Tempo de vida

$T$  Período

$e$  Número de Neper

$t$  Instante temporal

$\beta$  Constante de propagação

$\eta$  Impedância de onda

$E$  Campo eléctrico

$H$  Campo magnético

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

No estudo da interacção da luz com a matéria, o confinamento da luz numa certa região do espaço assume um especial interesse tanto pelas questões teóricas e de cariz fundamental que suscita, como pelas suas aplicações e implicações práticas em nanotecnologias, onde os objectivos de miniaturização e de realização de dispositivos mais compactos estão omnipresentes. Este é um problema desafiante, já que uma onda de luz tem um tamanho espacial característico determinado pelo seu comprimento de onda, o qual limita o seu confinamento em espaços electricamente pequenos.

Este confinamento, no entanto, é de grande interesse tecnológico, porque cavidades ressoadoras são a base de filtros, de dispositivos emissores de luz (lasing), são usados em comutação óptica, e também em estudos de óptica não-linear devido à avultada amplitude do campo electromagnético dentro da cavidade. Estruturas ressonantes são também fundamentais em imagiologia de alta-resolução [2, 3].

Recentemente, novos avanços em nanotecnologia e nos processos de fabrico dos materiais permitiram usar materiais nano-estruturados na melhoria da eficiência de células solares [4].

Além disso, cavidades ressoadoras com elevados factores de qualidade são a base do estudo de interacções da luz com objectos quânticos (e.g. átomos de dois níveis), o que permite testar os limites da teoria quântica.

São conhecidas inúmeras configurações que permitem de alguma forma localizar espacialmente a luz. Convencionalmente, as técnicas de confinamento envolvem o recurso a barreiras físicas como espelhos ou a materiais especializados como cristais fotónicos, que servem para reduzir fortemente as perdas de radiação.

## 1.2 Estado da arte

Oscilações de luz em cavidades fechadas sem perdas podem, em teoria, ter tempos de vida infinitos pois os fótons não são capazes de fugir da cavidade. Em sistemas abertos a energia de uma excitação desaparece continuamente, e por isso o tempo de vida é finito. A procura de mecanismos que previnam as perdas de radiação é actualmente um tópico de grande interesse.

De entre várias técnicas estudadas de confinamento electromagnético começa-se por destacar a localização de Anderson [5]. Esta técnica defende a ausência de ondas difusas em meios desordenados, meios com um grau de aleatoriedade de impurezas e defeitos suficientemente grandes. Este fenómeno é explicado pela interferência destrutiva dos múltiplos caminhos que podem ser seguidos pela luz. No limite de uma forte dispersão, as interferências podem conduzir à localização da radiação no interior.

Cavidades formadas por espelhos perfeitamente reflectores [6] têm o objectivo de confinar a luz num espaço através de sucessivas reflexões. As cavidades de Fabry-Pérot permitem realizar o confinamento de um modo de tal forma que este decai exponencialmente em todas as direcções. Estudos demonstraram que é possível sintetizar cavidades electromagnéticas com um factor qualidade  $Q$  arbitrariamente grande e com volume pequeno em 2 ou 3 dimensões, através da escolha apropriada de dieléctricos [7].

Uma alternativa extensamente discutida baseia-se em "Whispering-gallery modes" [8, 9]. Estes ressoadores ópticos consistem em estruturas esféricas dieléctricas onde os raios ópticos sofrem sucessivas reflexões internas totais, percorrendo assim uma volta completa em torno do ressoador. Uma esfera dieléctrica sem absorção pode sustentar ondas electromagnéticas que circulam fortemente confinadas na estrutura. Devido a perdas mínimas por reflexão e baixa absorção do material, estes modos podem ter altos factores de qualidade  $Q$ . Estas propriedades peculiares tornam os ressoadores de "Whispering-gallery modes" muito atractivos em dispositivos como lasers e sensores extremamente sensíveis.

Independentemente do tipo de material usado e da construção das estruturas propostas, a luz possui sempre algum acoplamento com o exterior e, se não for absorvida pelas paredes do material, foge da cavidade. De facto, em qualquer ressoador aberto convencional existe sempre acoplamento com a região vizinha e, portanto, as perdas de radiação limitam os tempos de vida das oscilações de luz.



## 1.3 Objectivos

A presente dissertação pretende apresentar uma solução alternativa às encontradas até agora. A solução baseia-se numa estrutura cilíndrica composta por materiais dieléctricos simples e por materiais com uma resposta do tipo plasmónica cuja permitividade pode ser descrita pelo modelo de Drude [10]. Nesta tese, no seguimento da proposta descrita em [11], demonstramos do ponto de vista teórico que de forma surpreendente é possível confinar a luz num ressoador aberto de tal forma que, no limite em que as perdas materiais são desprezáveis, o tempo de vida das oscilações é infinito.

Os metais possuem uma resposta plasmónica no domínio do ultra-violeta (UV). No entanto, é interessante demonstrar os conceitos propostos no domínio das microondas onde é mais simples a experimentação laboratorial. Como tal, numa segunda fase é explorada a resposta do ressoador proposto com base em tecnologia de microondas e metamateriais.

Por último, é analisado o uso de materiais não-lineares de forma a melhorar a resposta da estrutura no sentido de permitir a entrada de mais luz no núcleo e, ao mesmo tempo, impedir a sua saída para o exterior.

## 1.4 Organização

A presente dissertação está organizada em cinco capítulos. O presente capítulo contém a descrição da motivação da dissertação e expõe os objectivos propostos. No segundo capítulo é feito o estudo teórico do problema, expondo-se os resultados numéricos obtidos com recurso ao *software* comercial Mathematica [12], assim como os resultados no simulador electromagnético CST Microwave Studio 2014 [1]. No terceiro capítulo é estudada a implementação em tecnologia de microondas da estrutura estudada fazendo-se a sua análise através do simulador CST, tal como no capítulo anterior. No quarto capítulo é explorado o uso de materiais não-lineares no núcleo da estrutura, analisando-se a sua resposta no confinamento da luz através do simulador CST. Por fim, no último capítulo são destacadas conclusões do trabalho realizado e enunciadas algumas sugestões para trabalho futuro.



# Capítulo 2

## Ressonadores plasmónicos abertos

### 2.1 Materiais Plasmónicos

Materiais plasmónicos são materiais que exploram plasmões de superfície, que consistem em excitações electromagnéticas que se propagam ao longo da interface entre um metal e um dieléctrico, resultante do acoplamento entre cargas eléctricas livres e a radiação [13]. Sob certas condições, a luz incidente é acoplada aos plasmões originando ondas electromagnéticas auto-sustentáveis que se propagam na interface. Estas interações fortes possuem duas importantes consequências: o campo electromagnético local pode ser intensificado por várias ordens de magnitude e a luz pode ser confinada numa área pequena, fenómeno que é do nosso interesse explorar [14].

Um tipo de material que possui este comportamento é um material cuja permitividade eléctrica é descrita pelo modelo de dispersão de Drude (equação (2.1)), onde parte imaginária é responsável pelas perdas no material. As figuras 2.1 e 2.2 representam a variação com a frequência da parte real e imaginária de um material com resposta dispersiva do tipo Drude, respectivamente.

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\omega_c)} \quad (2.1)$$

Observando a figura 2.1 podemos constatar que a sua permitividade real se aproxima de 0 na sua frequência de plasma  $\omega_p$ . Materiais com este tipo de comportamento são denominados por materiais *epsilon-near-zero* (ENZ).

Na propagação de ondas electromagnéticas num meio, as características espaciais ( $\lambda$ ) e temporais ( $f$ ) da onda são influenciadas pelo meio de propagação. De facto, a frequência  $f$  e o comprimento de onda  $\lambda$  de um sinal estão relacionados entre si pela velocidade de fase  $v$  do meio descrita por  $v = f\lambda$ . Esta velocidade de fase é caracterizada pela permitividade eléctrica  $\epsilon$  e pela

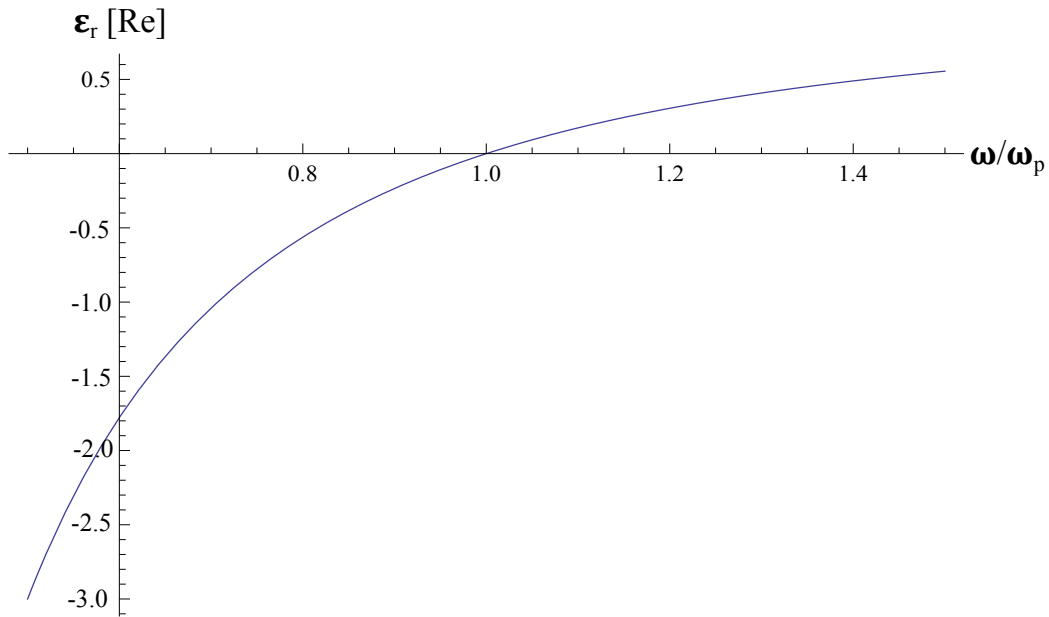


Figura 2.1: Variação com a frequência da permissividade relativa real descrita pelo modelo de dispersão de Drude, com  $\omega_c = \omega_p 10^{-7}$ .

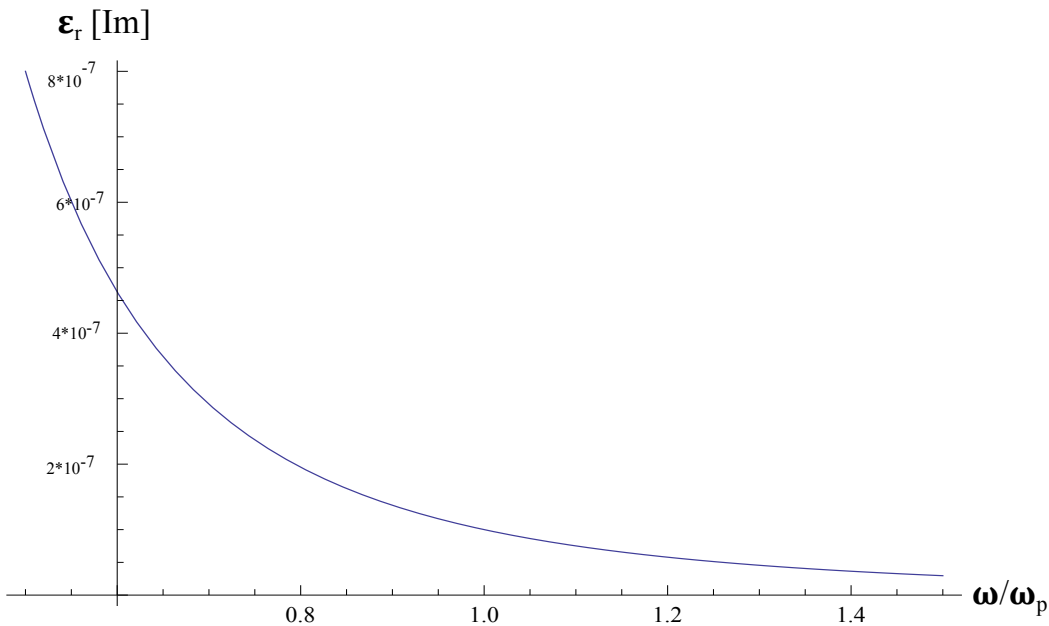


Figura 2.2: Variação com a frequência da permissividade relativa imaginária descrita pelo modelo de dispersão de Drude, com  $\omega_c = \omega_p 10^{-7}$ .

permeabilidade magnética  $\mu$ , dada por  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ . O comportamento ENZ que o material descrito possui na frequência de plasma implica que a velocidade de fase vai tender para infinito e que o comprimento de onda vai tornar-se muito grande. De referir que nesta tese se considera uma variação temporal do tipo  $e^{-i\omega t}$ .

A exploração destes resultados permitiram o estudo de vários efeitos muito interessantes, onde se destaca o fenómeno do superacoplamento [23], que permite o guiamento eficiente de radiação através de um canal com secção muito estreita preenchido com material ENZ, independentemente

do comprimento, formato ou outras características espaciais do canal (ver figura 2.3).

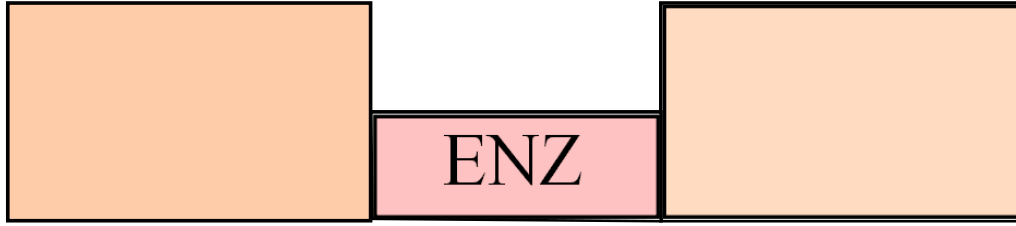


Figura 2.3: Figura ilustrativa do canal descrito.

Outra propriedade está relacionada com o facto do vector deslocamento eléctrico ser também perto de zero para um campo eléctrico finito:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} D = \epsilon E \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

Isto implica que um material com comportamento ENZ pode ser usado como blindagem para a corrente de deslocamento. Foi sugerido explorar este fenómeno na realização de circuitos ópticos baseados no fluxo de fotões, em alternativa aos circuitos de "baixa frequência" baseados no fluxo de electrões [15].

Estruturas com materiais ENZ combinados com materiais magneto-ópticos podem mudar o balanço entre a actividade magneto-óptica e os parâmetros dieléctricos, provocando efeitos não recíprocos pronunciados, que tem aplicações em isolamento óptico [16].

Existe uma grande atenção por parte da comunidade científica aos fenómenos físicos associados a este tipo de materiais, pois permitem aplicações extraordinárias não só em fenómenos electromagnéticos mas também em ondas acústicas e de matéria [17].

Nesta tese, pretendemos aproveitar este comportamento ENZ no aprisionamento de luz. Quando a frequência se aproxima de  $\omega = \omega_p$  e a permitividade do material tende para zero, a impedância de onda torna-se  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} = \infty$ , equivalente a um condutor magnético perfeito (PMC). Este material actua assim como barreira para o campo electromagnético. Ao fazermos uso dessa propriedade, podemos construir uma blindagem que permita que a energia não escape de uma cavidade.

A análise seguinte é retirada da referência [18]. Considere-se uma lâmina de material ENZ com permitividade  $\epsilon_s$  de espessura  $d_{slab}$  embebida em vácuo (figura 2.4), e que esta lâmina é excitada por uma onda plana transversal magnética (*TM*) cujo campo magnético é descrito por:

$$H^i = H_0 \hat{y} e^{i\sqrt{k_0^2 - \beta^2}z} e^{i\beta x} \quad (2.3)$$

onde  $H_0$  é uma amplitude genérica,  $\theta_i$  é o ângulo de incidência indicado na figura 2.4,  $\beta$  é dado por  $k_0 \sin \theta_i$  e o número de onda no vácuo é representado por  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

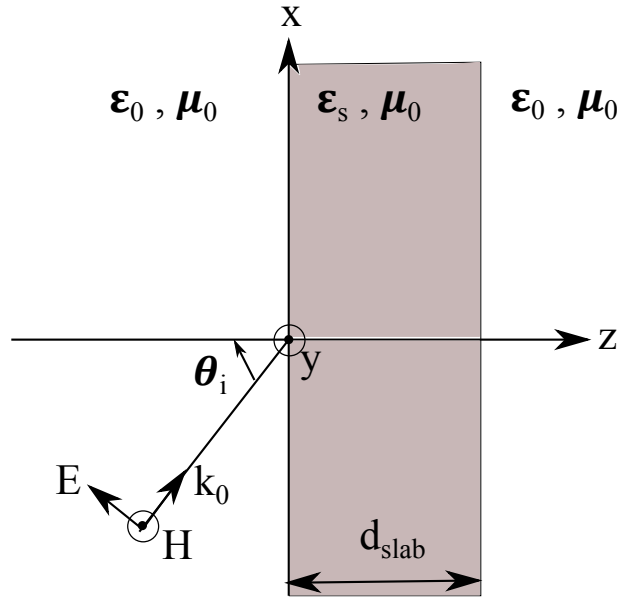


Figura 2.4: Lâmina de material ENZ de permitividade  $\epsilon_s$  excitada por uma onda plana  $TM$ .

Definindo  $\Gamma$  como o coeficiente de reflexão complexo para o campo magnético na entrada da lâmina ( $z = 0$ ) e  $T$  como o coeficiente de transmissão na face de saída ( $z = d_{slab}$ ), no limite em que a permitividade da lâmina tende para zero temos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma = \begin{cases} -\frac{k_0 d_{slab}}{2i + k_0 d_{slab}} & \theta_i = 0 \\ -1, & \theta_i \neq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T = \begin{cases} \frac{1}{1 - i \frac{k_0 d_{slab}}{2}} & \theta_i = 0 \\ 0, & \theta_i \neq 0 \end{cases}$$

Da equação ( 2.4) demonstra-se que para uma incidência oblíqua ( $\theta_i \neq 0$ ) a transmissão é nula (figura 2.5). A lâmina ENZ actua como um filtro angular no limite  $\epsilon_s \rightarrow 0$ . Assim, excepto para o caso da incidência normal onde é possível transmitir energia através da lâmina, a estrutura comporta-se como um condutor magnético perfeito (PMC) para incidência oblíqua. Em contraste, pode-se verificar que para polarização transversal eléctrica ( $TE$ ) é possível transmitir energia através da lâmina mesmo para incidência oblíqua.

Esta observação é reforçada pela análise da reflexão interna total sofrida pelo raio incidente. Quando o índice de refração do material ENZ tende para zero ( $\epsilon_s \rightarrow 0$  logo  $n_s \rightarrow 0$ ), pelas leis de Snell o ângulo crítico para a reflexão total  $\theta_c = \arcsin \frac{n_s}{n_0}$  tende para 0. Como a reflexão interna total ocorre para  $\theta_i > \theta_c$ , este fenómeno vai ocorrer para ângulos de incidência superiores a 0.

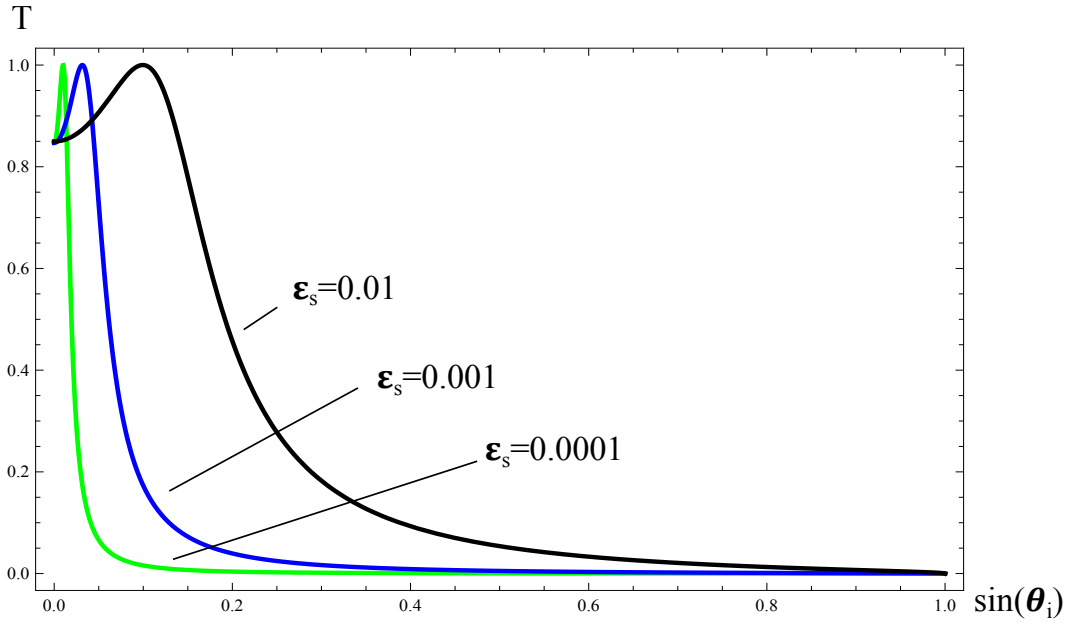


Figura 2.5: Variação do coeficiente de transmissão com o ângulo de incidência.

## 2.2 Descrição do ressoador

Considere-se uma nanoestrutura cilíndrica que, por simplicidade, se supõe invariante para translações na direcção  $z$ , com uma estrutura do tipo bi-camada em que a camada interior é composta por um material de permitividade  $\epsilon_1 = 1$  (vácuo) e a camada exterior consiste num material cuja permitividade eléctrica  $\epsilon_2$  é descrita pelo modelo de dispersão de Drude [10]. Este material, que possui um comportamento ENZ na sua frequência de plasma  $\omega_p$  (veja secção 2.1), tem como objectivo comportar-se como material opaco nesta frequência, para que não haja "fuga" de energia do núcleo. Todos os materiais são supostos não magnéticos ( $\mu = \mu_0$ ) e a estrutura está embebida em vácuo ( $\epsilon_0$ ). A figura 2.6 clarifica a composição da estrutura que estamos a considerar (vista de cima e lateral, respectivamente). O raio interior da estrutura é dado por  $R_1$  e o exterior é  $R_2$ .

O mecanismo de aprisionamento da luz na estrutura pode ser explicado de forma simples com base no fenómeno de reflexão interna total, que de acordo com o discutido antes, ocorre para todos os ângulos de incidência. Aqui este fenómeno vai ter características diferentes dos "Whispering-gallery modes", onde o confinamento da luz ocorre pois um raio de luz sofre sucessivas reflexões internas quando atinge a fronteira da estrutura. Veja a figura 2.7, que é um retrato da intensidade do campo numa cavidade que exploram estes modos.

No entanto, um raio de energia de espessura infinitesimal é uma abstracção, e na prática é mais realista encarar a onda como um conjunto de raios paralelos com amplitudes progressivamente menores. Alguns destes raios incidem na interface com ângulos inferiores ao ângulo crítico originando a fuga de radiação do ressoador. Este problema é ultrapassado no caso do ressoador

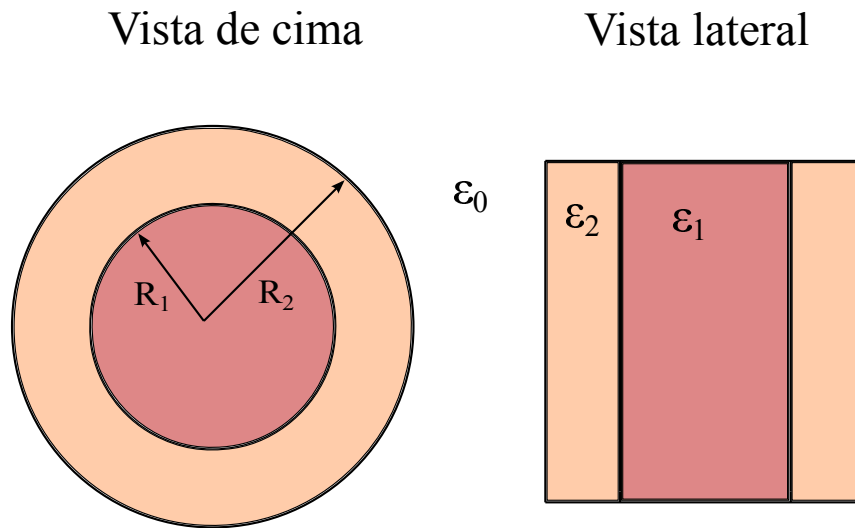


Figura 2.6: Nanoestrutura cilíndrica em estudo.

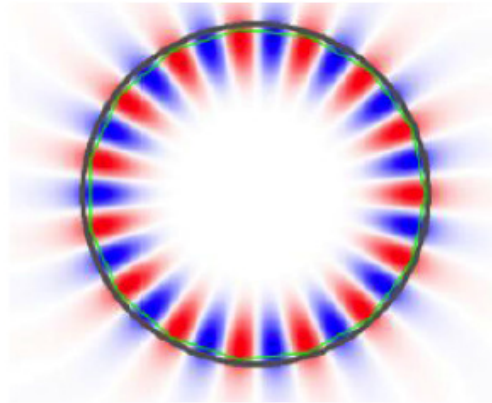


Figura 2.7: Variação da intensidade do campo no interior de uma cavidade que explora 'Whispering-gallery modes'.

baseado em meios ENZ, já que no último o ângulo crítico anula-se. Veja a figura 2.8 que ilustra este fenómeno. Os materiais ENZ oferecem a oportunidade de ultrapassar esta falha.



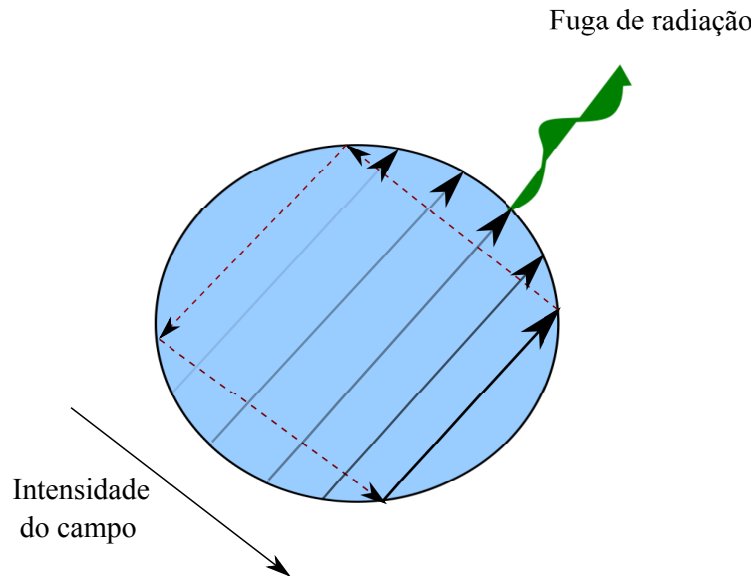


Figura 2.8: Incidência da onda plana na fronteira da cavidade de 'Whispering-gallery modes'.

## 2.3 Factor Qualidade

Um importante parâmetro de um ressonador é o seu factor qualidade  $Q$ , definido como [19]:

$$Q = \omega' \frac{\text{(Energia armazenada)}}{\text{(Potência dissipada)}} \quad (2.5)$$

Na equação anterior,  $\omega'$  é a frequência de oscilação real do ressonador. De facto, um material com perdas torna o tempo de decaimento da ressonância finito e a correspondente frequência de oscilação dada por  $\omega = \omega' + i\omega''$  com parte imaginária tal que  $\omega'' < 0$ . Este factor permite-nos caracterizar a qualidade do comportamento do ressonador como isolador, e fornece-nos um meio de comparação com outras construções com o mesmo objectivo.

Pela conservação da energia a potência dissipada por perdas no material é o negativo da taxa de variação temporal da energia armazenada  $U$ . Logo, de (2.5) podemos escrever a equação que descreve o comportamento de  $U$  como função do tempo:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega'}{Q}U \quad (2.6)$$

cuja solução é:

$$U(t) = U_0 e^{-\omega' t / Q} \quad (2.7)$$

Se uma quantidade de energia inicial  $U_0$  está armazenada na cavidade, esta decai exponencialmente com uma constante de decaimento inversamente proporcional a  $Q$ . Assim, quanto maior for o factor qualidade, menor é a rapidez com que o campo decai. Veja a figura 2.9, que representa

rectas de decaimento para vários valores de  $Q$ .

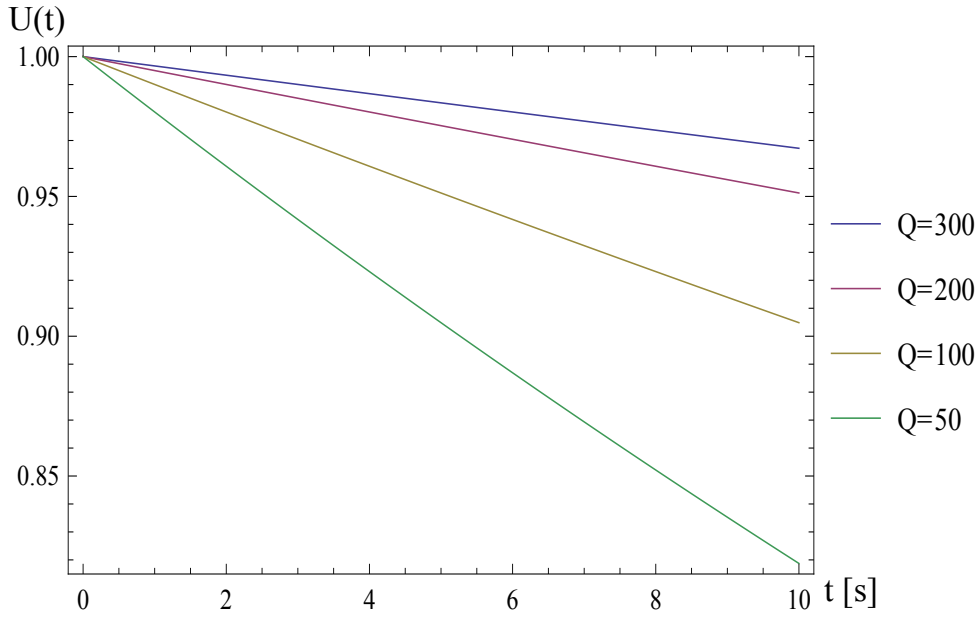


Figura 2.9: Rectas de decaimento para vários valores de factor de qualidade  $Q$ , com  $U_0 = 1$  e  $\omega' = 1 \text{ rad/s}$ .

A dependência temporal da equação ( 2.7) implica que as oscilações do campo na cavidade são amortecidas como se segue:

$$E(t) = \text{Re}\{E_0 e^{\frac{-\omega' t}{2Q}} e^{-i\omega' t}\} = \text{Re}\{E_0 e^{-i\omega t}\} = \text{Re}\{E_0 e^{\omega'' t} e^{-i\omega' t}\} \quad (2.8)$$

onde  $E_0$  representa o campo eléctrico inicial.

O factor qualidade de um ressoador pode então ser escrito como:

$$Q = \frac{\omega'}{-2\omega''} \quad (2.9)$$

A equação anterior demonstra que o factor de qualidade  $Q$  é proporcional ao rácio entre o tempo de vida  $\tau = \frac{1}{-2\omega''}$  e o período de oscilação  $T = 2\pi/\omega'$  tal que

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{\tau}{T} \quad (2.10)$$

A equação ( 2.10) ser-nos-á útil para estimar o factor qualidade do ressoador nas simulações do CST, para se poder comparar com o valor teórico calculado com a equação ( 2.9). Assim,  $T$  representa o período de oscilação da ressonância e  $\tau$  o intervalo de tempo que decorre entre a amplitude de um campo inicial na estrutura até atingir  $1/e$  dessa amplitude.

## 2.4 Modos naturais de oscilação com tempo de vida infinito

Um sistema em repouso pode sair desse estado e entrar em oscilação se for perturbado por energia com uma certa frequência, tal que coincida com a frequência de um dos seus modos naturais de oscilação. Na ausência de qualquer mecanismo de perdas, o sistema possui condições para oscilar com um tempo de vida infinito. Estes modos próprios são as soluções da equação característica do sistema, que descreve o seu comportamento.

Pretendemos identificar os modos naturais de oscilação quando a estrutura se comporta como isoladora retendo o campo no núcleo, i.e., fora do núcleo não deverá existir campo disperso. Primeiramente, para calcular o campo na estrutura partimos da equação de Helmholtz:

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0 \quad (2.11)$$

Escrevemos a equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0 \quad (2.12)$$

Como o nosso problema físico é invariante na translacção no eixo  $z$ , a derivada parcial segundo esta componente é nula. Separamos as variáveis fazendo a substituição:

$$\Phi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Q(\phi) \quad (2.13)$$

Obtemos assim as 2 equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi^2} + m^2 Q &= 0 \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left( k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

As soluções para a primeira equação é facilmente obtida:

$$Q(\phi) = e^{\pm im\phi} \quad (2.15)$$

Para  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ,  $m$  deve ser um inteiro. Reescrevemos assim a equação radial de 2.14 mudando a variável  $x = k\rho$ .

$$\frac{\partial R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (2.16)$$

Esta equação possui duas soluções independentes,  $J_m(x)$  (figura 2.10) e  $Y_m(x)$  (figura 2.11), chamadas de funções de Bessel de primeiro tipo e funções de Neumann (Bessel de segundo tipo), respectivamente [19].

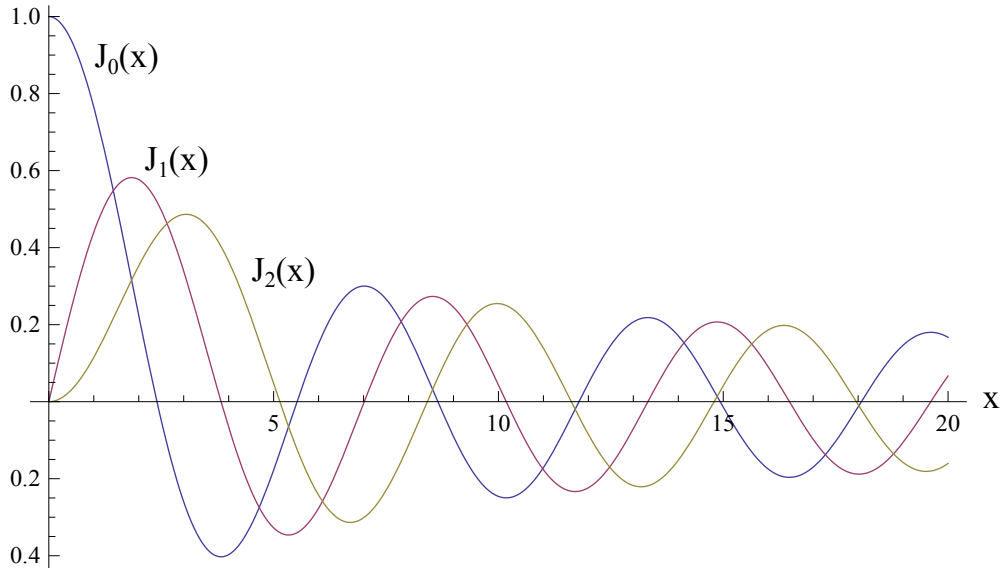


Figura 2.10: Primeiras funções de Bessel.

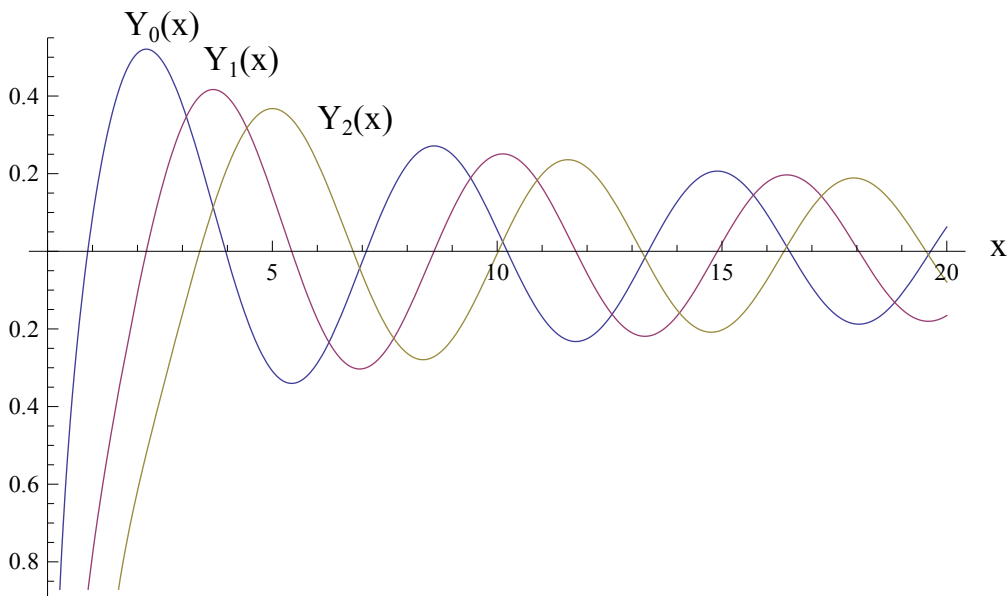


Figura 2.11: Primeiras funções de Neumann.

As funções de Bessel de terceiro tipo, chamadas de funções de Hankel, são definidas como combinações lineares de  $J_m(x)$  e  $Y_m(x)$ :

$$\begin{aligned}
H_m^{(1)}(x) &= J_m(x) + iY_m(x) \\
H_m^{(2)}(x) &= J_m(x) - iY_m(x)
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

Podemos adequadamente definir o campo electromagnético na estrutura para os modos naturais de oscilação pretendidos utilizando funções de Bessel cilíndricas. Como pretendemos que, nas condições descritas, o campo desvaneça em  $\rho = R_1$  e não possua singularidades em  $\rho = 0$ , a equação de Bessel de primeira ordem é adequada para descrever a componente do campo magnético segundo o eixo vertical da estrutura no núcleo, ou seja  $H_z$ . Em  $\rho > R_1$  escolhe-se o campo magnético nulo porque o ENZ se comporta como PMC e o campo  $H$  não consegue penetrar nesse material. O campo magnético é descrito pela equação seguinte [11], onde  $H_0$  representa a amplitude do campo magnético.

$$H_z = H_0 e^{in\phi} \begin{cases} J_n\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1}\rho\right) & , \quad \rho < R_1 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}
\tag{2.18}$$

Se fizermos o cálculo da impedância de cada modo, temos:

$$\begin{aligned}
E = \nabla \times H / (-i\omega\epsilon_m) \Rightarrow E_\phi &= \frac{1}{-i\omega\epsilon_m} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial \rho}\right) = -i\eta_m H_0 J'_n(k_m\rho) e^{in\phi} \\
Z_n = \frac{E_\phi}{H_z} = \frac{-i\eta_m J'_n(k_m\rho)}{J_n(k_m\rho)} &\sim \begin{cases} i\eta_m k_m\rho & , \quad n = 0 \\ i\eta_m \frac{1}{k_m\rho} & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.19}$$

Logo, para um material ENZ, todos os modos têm uma impedância infinita excepto o modo  $n = 0$ . Este modo tem uma incidência normal na fronteira, o que lhe permite penetrar o material (veja análise da incidência na lâmina ENZ da secção 2.1), enquanto que os modos  $n \neq 0$  têm uma incidência oblíqua. Assim, a camada exterior da estrutura em  $\omega = \omega_p$  comporta-se como um reflector perfeito para estes modos confinando a luz na região do núcleo, tal que no limite em que não se observam perdas ( $\omega_c \rightarrow 0$ ) o tempo de vida as oscilações se torna infinito.

A equação característica é obtida através das condições fronteira. O campo magnético tangencial na fronteira do cilindro deve ser zero, logo  $H_z$  em  $\rho = R_1$  é zero, o que resulta:

$$J_n\left(\frac{\omega_p}{c}\sqrt{\epsilon_1}R_1\right) = 0
\tag{2.20}$$

Esta condição exigente é satisfeita para valores muito específicos do raio interior da nanoes-

estrutura ( $R_1$ ). Por exemplo, para ondas associadas ao modo  $n = 1$  o primeiro zero de  $J_1$  ocorre para aproximadamente 3.83, tal como indicado pela figura 2.12. Logo, uma possibilidade de ter um modo natural em  $\omega = \omega_p$  é em  $R_1 = R_{1,0} = 3.83 \frac{c}{\omega_p}$ .

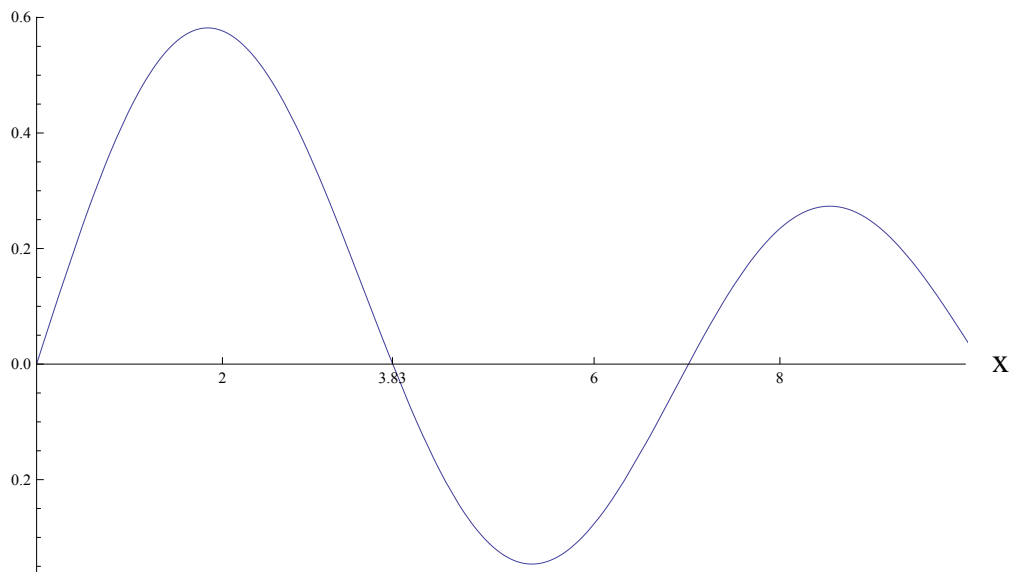


Figura 2.12: Função de Bessel cilíndrica.

O resultado anterior define o raio interior da estrutura para que existam oscilações naturais. Por sua vez, o raio exterior da estrutura  $R_2$  pode ser definido sem qualquer restrição, visto que a espessura da camada exterior para quando o material ENZ possui permitividade zero, não influencia o comportamento do ressonador. No que se segue, o raio exterior é então definido arbitrariamente por  $R_2 = 1.1R_{1,0}$ .

Em resumo e pelo anteriormente descrito, este efeito impõe então as seguintes condições em  $\omega = \omega_p$ :

$$\begin{aligned}
 J_n(k_1 R_1) &= 0 \\
 k_1 &= \omega_p \sqrt{\epsilon_1} / c \\
 n &\geq 1
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Estas condições são satisfeitas apenas para valores fixos do raio do núcleo, tal como descrito pela equação ( 2.20). Assim, qualquer perturbação do raio óptimo vai originar oscilações com tempo de vida finito.

Mesmo que a sintonização do raio do núcleo pudesse ser exactamente  $R_1 = R_{1,0}$ , seria impossível injectar as oscilações de luz externamente. Esta limitação é explicada pelo teorema da reciprocidade de Lorentz [20], que estabelece que a relação entre uma corrente oscilante e o campo

eléctrico resultante permanece inalterada se forem trocados os pontos onde a corrente está colocada e o campo é medido (ver figura 2.13).

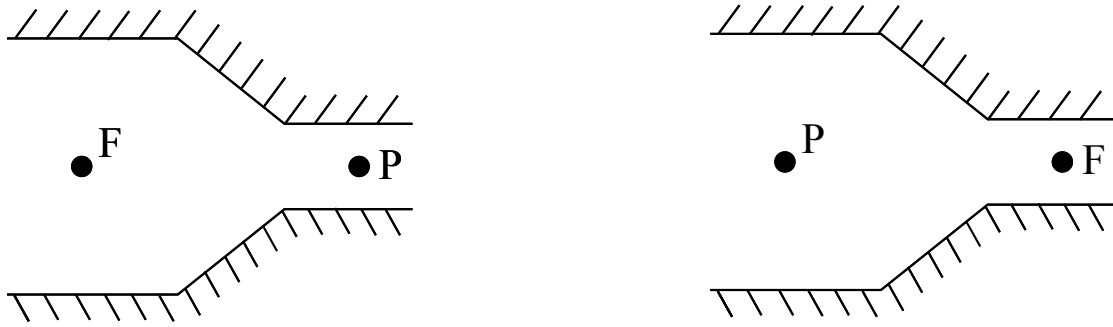


Figura 2.13: Ilustração do teorema da reciprocidade numa estrutura assimétrica, onde no ponto  $F$  está colocada uma fonte de corrente oscilante e no ponto  $P$  mede-se o campo eléctrico.

Assim, a luz no estado em que está "presa" não pode ser injectada por uma fonte externa. De facto, estruturas compostas por materiais recíprocos são intrínsecamente bi-direccionais e, portanto, se a luz "presa" não pode sair então é também impossível alimentar oscilações com uma excitação externa. Com este tipo de materiais, a estrutura é penetrável por radiação apenas quando o raio  $R_1$  é diferente de  $R_{1,0}$ , mas isto implica que a radiação no núcleo terá oscilações com tempo de vida finito [21].

## 2.5 Excitação do ressoador aberto por uma onda plana

Considere agora que a nanoestrutura é iluminada por uma onda plana linearmente polarizada, cujo campo eléctrico incide segundo  $x$  e o campo magnético segundo  $z$ , sendo a direcção de incidência segundo  $-y$ . (ver figura 2.14) A onda incidente é então descrita por:

$$\begin{aligned} E^i &= \hat{x}E_0e^{-ik\rho\cos\phi} \\ H^i &= \hat{z}H_0e^{-ik\rho\cos\phi}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $\rho$  é a distância radial ao centro do cilindro,  $\phi$  é o ângulo entre o eixo dos  $x$  e o ponto de observação, que neste caso é 0,  $H_0$  é a amplitude inicial do campo magnético que consideramos, por simplicidade, ser  $1A/m$ .

Tal como demonstrado na secção 2.4, as funções de Bessel são soluções cilíndricas do campo disperso, para uma estrutura cilíndrica, da equação de Helmholtz. Como tal, vamos fazer uso delas para descrever o campo disperso pela estrutura em todos os pontos do espaço.

No núcleo da estrutura, a função  $J_n$  é ideal para descrever o campo disperso no seu interior

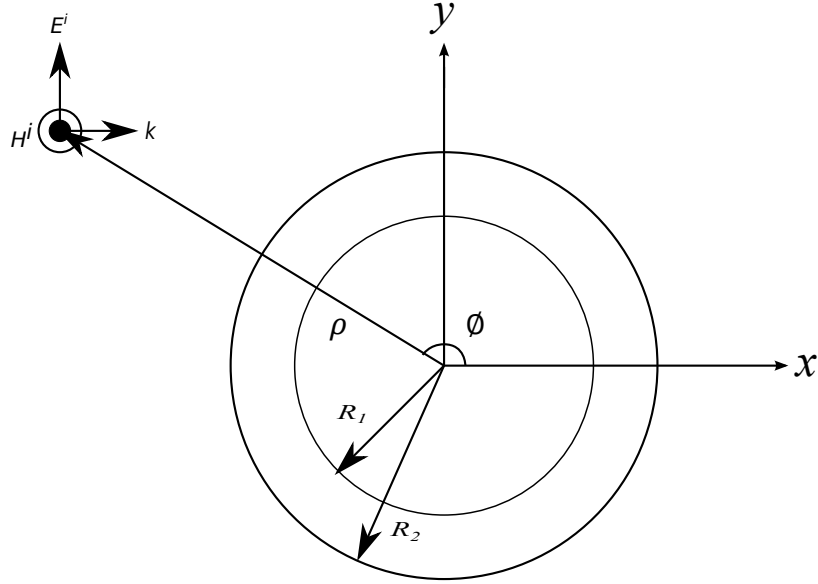


Figura 2.14: Representação da onda electromagnética incidente e da estrutura no eixo de coordenadas considerado.

porque não possui singularidades em  $\rho = 0$  e tende para zero quando  $\rho \rightarrow \infty$ . A função  $Y_n$  possui singularidade em  $\rho = 0$  e tende para zero quando  $\rho \rightarrow \infty$ , o que possibilita que o campo disperso na segunda camada seja descrito por uma combinação linear de  $J_n$  e  $Y_n$ . No exterior do cilindro temos o campo de excitação descrito pela função  $J_n$  e o campo disperso pela função  $H_n^{(1)}$ , pois este tende para zero quando  $\rho \rightarrow \infty$ , o que faz dela adequada ao problema físico em causa.

Para o primeiro modo natural de oscilação ( $n = 1$ ), os campos no ressonador são então descritos por:

$$H_z = \begin{cases} a_1 J_1(k_1 \rho) & , \quad \rho < R_1 \\ b_1 J_1(k_2 \rho) + c_1 Y_1(k_2 \rho) & , \quad R_1 < \rho < R_2 \\ J_1(k_0 \rho) + d_1 H_1^{(1)}(k_0 \rho) & , \quad \rho > R_2 \end{cases} \quad (2.23)$$

Fazendo uso da transformação de onda [22], podemos escrever a onda incidente como uma sobreposição de ondas cilíndricas que satisfazem a equação de onda, em coordenadas cilíndricas:

$$e^{-ik\rho \cos\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\rho) e^{in\phi - in\pi/2} \quad (2.24)$$

$$H^i = \hat{z} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k\rho) e^{in\phi - in\pi/2}$$

Temos assim o campo, para todos os modos, dado por:



$$H_z = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_n(k_1 \rho) e^{in\phi} & , \quad \rho < R_1 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J_n(k_2 \rho) e^{in\phi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n Y_n(k_2 \rho) e^{in\phi} & , \quad R_1 < \rho < R_2 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0 \rho) e^{in\phi - in\pi/2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n^{(1)}(k_0 \rho) e^{in\phi} & , \quad \rho > R_2 \end{cases} \quad (2.25)$$

Os coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  e  $d_n$  têm de ser tal que  $H_z$  e  $\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \frac{1}{\epsilon}$  são funções contínuas em  $\rho$ . Em  $\rho = R_1$  tem que se verificar:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n j_n(k_1 R_1) e^{in\phi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n j_n(k_2 R_1) e^{in\phi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n y_n(k_2 R_1) e^{in\phi} &= 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_1}{\epsilon_0} a_n j_n'(k_1 R_1) e^{in\phi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_2}{\epsilon_2} b_n j_n'(k_2 R_1) e^{in\phi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_2}{\epsilon_2} c_n y_n'(k_2 R_1) e^{in\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Em  $\rho = R_2$  temos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n j_n(k_2 R_2) e^{in\phi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n y_n(k_2 R_2) e^{in\phi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n h_n^{(1)}(k_0 R_2) e^{in\phi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} j_n(k_0 R_2) e^{-in\pi/2} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_2}{\epsilon_2} b_n j_n'(k_2 R_2) e^{in\phi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_2}{\epsilon_2} c_n y_n'(k_2 R_2) e^{in\phi} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_0}{\epsilon_0} d_n h_n'^{(1)}(k_0 R_2) e^{in\phi} &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_0}{\epsilon_0} j_n'(k_0 R_2) e^{-in\pi/2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Isto resulta no seguinte sistema linear, para cada modo  $n$  (figura 2.5):

$$\begin{bmatrix} J_n(k_1 R_1) & -J_n(k_2 R_1) & 0 & J_n(k_2 R_2) \\ -Y_n(k_2 R_1) & 0 & Y_n(k_2 R_2) & -H_n^{(1)}(k_0 R_2) \\ \frac{k_1}{\epsilon_0} J_n'(k_2 R_1) & -\frac{k_2}{\epsilon_2} J_n'(k_2 R_1) & 0 & \frac{k_2}{\epsilon_2} J_n'(k_2 R_2) \\ -\frac{k_2}{\epsilon_2} Y_n'(k_2 R_1) & 0 & \frac{k_2}{\epsilon_2} Y_n'(k_2 R_2) & -\frac{k_0}{\epsilon_0} H_n'^{(1)}(k_0 R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J_n(k_0 R_2) e^{-in\pi/2} \\ 0 \\ \frac{k_0}{\epsilon_0} J_n'(k_0 R_2) e^{-in\pi/2} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Na figura 2.15 é representado o campo  $H_z$  calculado em função da frequência nos pontos  $x = 0.5R_1$  e  $x = -0.5R_1$ , considerando adicionalmente que o material ENZ não possui perdas ( $k_c = 0$ ), e um raio interior fixo em  $R_1 = R_{1,0}$ .

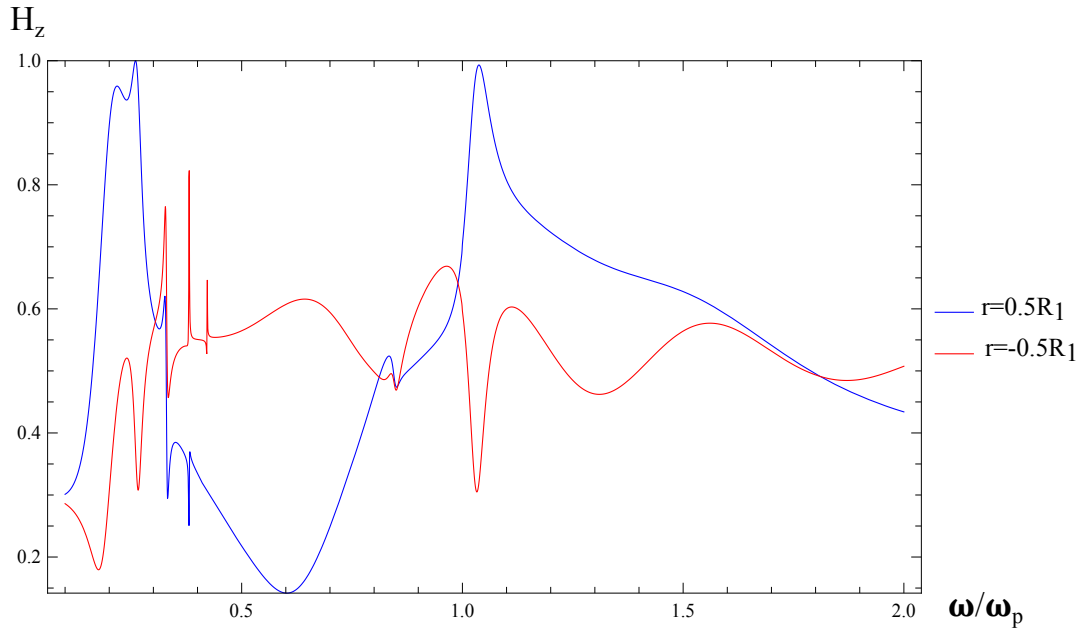


Figura 2.15: Variação do campo magnético com a frequência, em dois pontos diametralmente opostos dentro da camada interior, com  $R_1 = R_{1,0}$ .

A figura 2.15 não nos permite tirar conclusões em relação ao comportamento do campo magnético, pois possui o modo  $n = 0$  que não é bloqueado pelo material ENZ. Contudo, é possível eliminar a sua contribuição se nos recordarmos que o campo  $H_z$  possui uma variação com  $\phi$  do tipo  $e^{in\phi}$ , onde  $\phi$  é medido em relação ao eixo positivo dos  $x$ .

No eixo positivo dos  $x$  temos que  $\phi = 0$  e  $e^{in\phi} = 1$ , enquanto que no eixo negativo dos  $x$  temos  $\phi = \pi$  e  $e^{in\phi} = (-1)^n$ , o que mostra que os harmónicos pares (incluindo  $n = 0$ ) possuem  $H_z$  com valores iguais em pontos diametralmente opostos e os harmónicos ímpares têm  $H_z$  com valores simétricos. Assim, a subtracção do campo magnético em pontos diametralmente opostos elimina a contribuição de todos os harmónicos pares, incluindo o modo  $n = 0$  (figura 2.16). Daqui em diante, todos os gráficos mostrados não incluem a contribuição dos modos pares.

Usando um software comercial de simulação (CST MWS[1]), procedeu-se à avaliação dos resultados teóricos por construção da simulação correspondente. A figura 2.17 ilustra o projecto estudado no ambiente do CST.

Na prática é impossível construir uma estrutura invariante para translações na direcção  $z$  como o pretendido. No entanto, é possível "simular" este tipo de cenário bi-dimensional com a escolha cuidadosa das condições fronteira. A figura 2.18 é uma fotografia da configuração das condições fronteira usadas. Note-se que, para o eixo da altura do cilindro (eixo  $z$ ), foi definido que o campo magnético tangencial em  $Z_{min}$  e  $Z_{max}$  é 0, o que corresponde a dizer que se coloca um PMC nessas fronteiras.

Analizou-se a concordância dos resultados teóricos com os da simulação e observou-se que

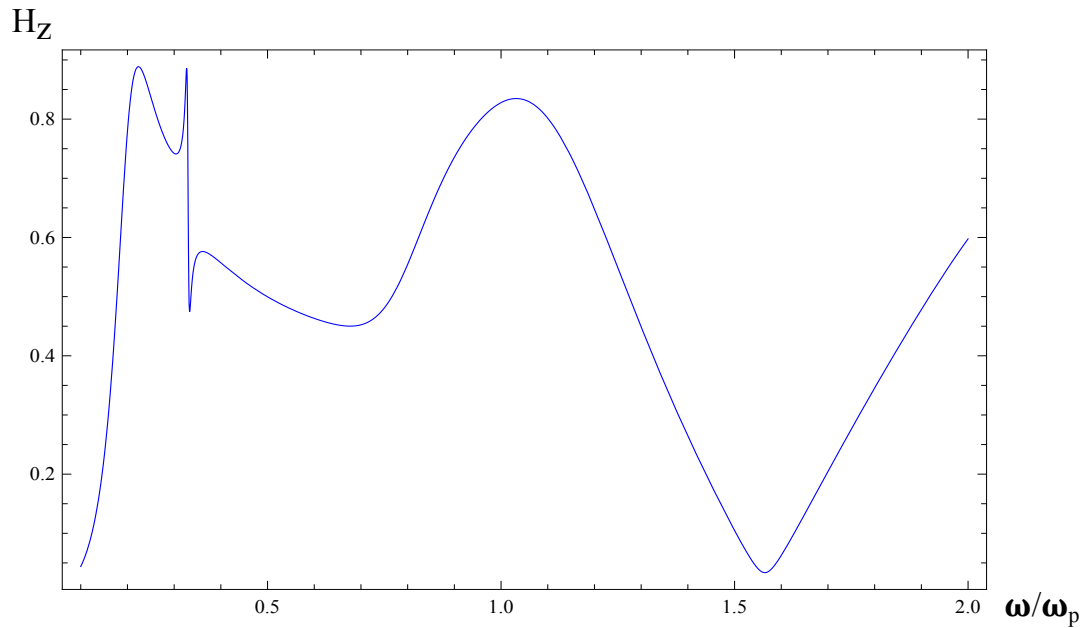


Figura 2.16: Subtração das duas componentes de campo da figura anterior (campo magnético na estrutura sem o modo  $n = 0$ ).

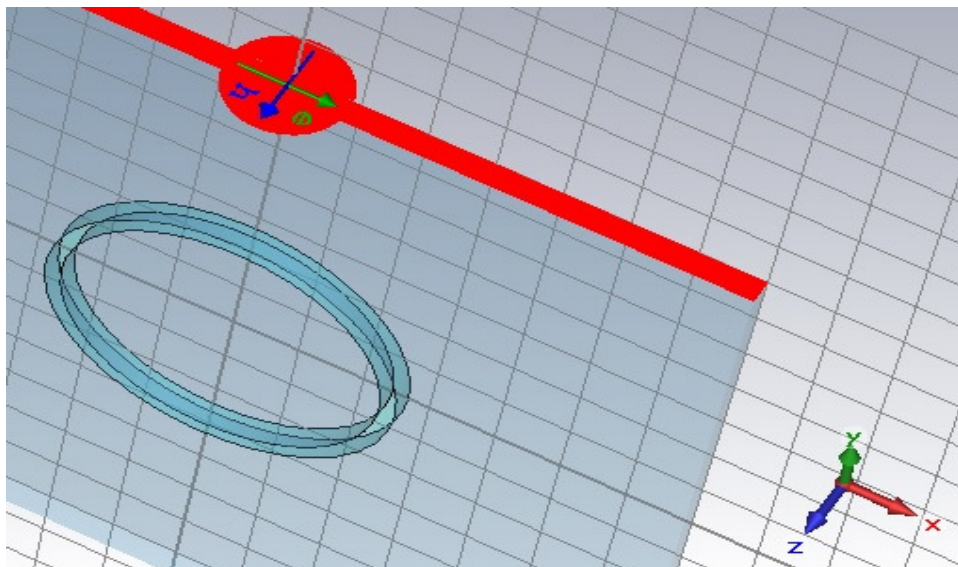


Figura 2.17: Fotografia da composição da estrutura 2D e respectiva polarização da onda plana de excitação no ambiente CST.

esta era muito satisfatória (veja figura 2.19).

Pela concordância observada entre os resultados teóricos e simulados, podemos concluir que o nosso modelo teórico descreve correctamente o comportamento do campo nesta estrutura.

Por forma a avaliar o comportamento do campo no interior da estrutura ao longo do tempo e concluir se as previsões teóricas estão de acordo com os resultados, foi feita uma simulação diferente da discutida acima que é no regime estacionário. Esta simulação consistiu numa avaliação da resposta temporal da estrutura para excitação com um pulso de duração finita e espectro concentrado em  $\omega = \omega_p$ .

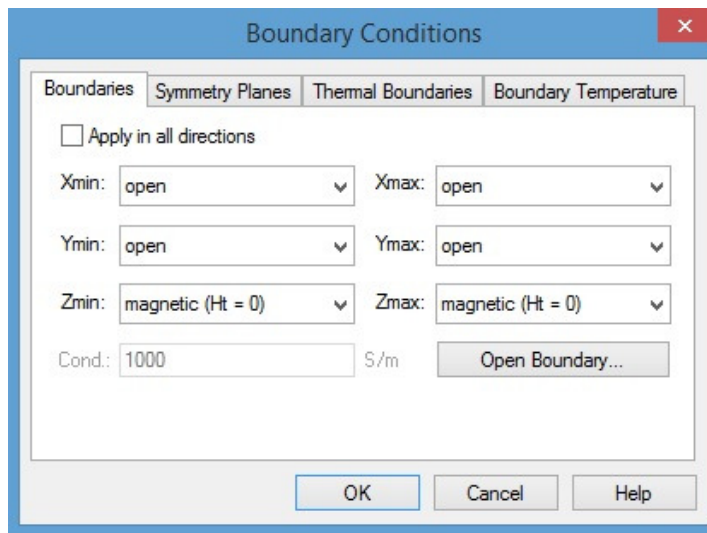


Figura 2.18: Condições fronteira usadas na simulação do caso 2D.

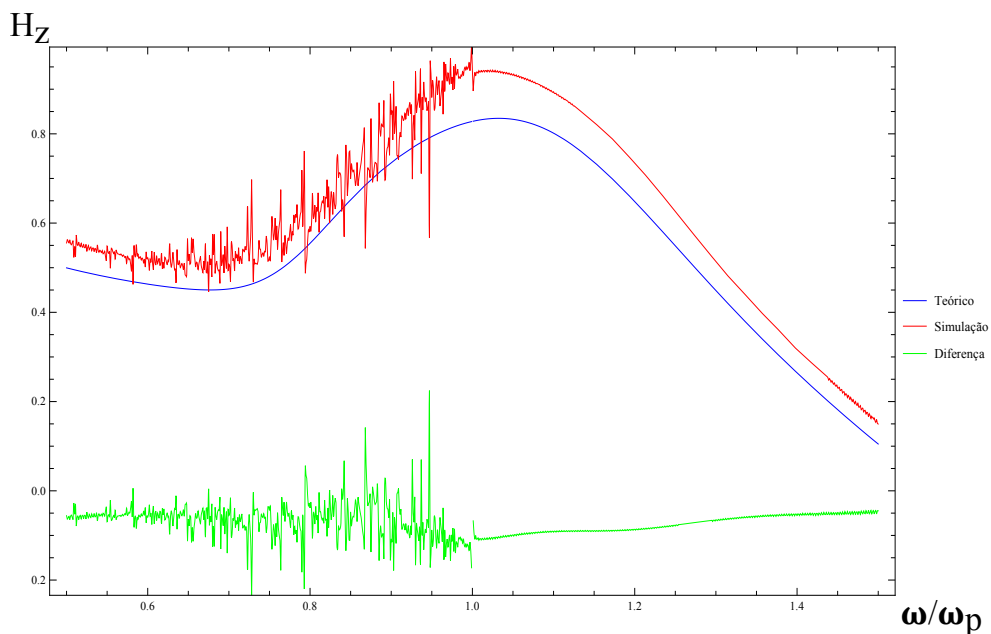


Figura 2.19: Campo magnético calculado em  $\rho = 0.5R_1$  teórico e por simulação, e diferença entre os dois (sem  $n = 0$ ).

A figura 2.20 é o resultado da simulação do campo eléctrico no centro da estrutura ao longo do tempo, para um raio interior sintonizado a  $R_1 = R_{1,0}$ . É de notar que, após a excitação inicial, não existe retenção de campo eléctrico no interior da estrutura tal como discutido anteriormente.

Nas seguintes secções vão ser analisados os efeitos de um raio não sintonizado e das perdas no material nos tempos de vida das oscilações.

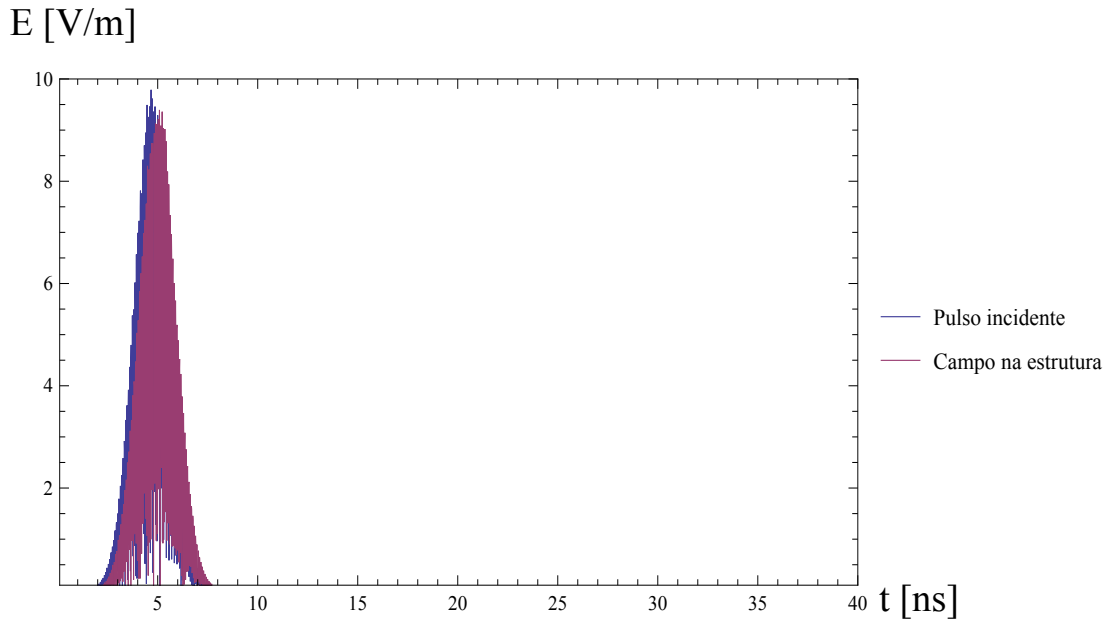


Figura 2.20: Campo eléctrico no centro da estrutura ao longo do tempo, com  $R_1 = R_{1,0}$  e excitação inicial de  $10V/m$ .

## 2.6 Modos naturais de oscilação (caso geral)

Os modos naturais para o caso geral em que se consideram os efeitos das perdas no material ENZ consistem em soluções das equações de Maxwell na ausência de excitação. Este modos são determinados pelas soluções do sistema ( 2.29) com o vector coluna nulo:

$$\begin{bmatrix} J_n(k_1 R_1) & -J_n(k_2 R_1) & 0 & J_n(k_2 R_2) \\ -Y_n(k_2 R_1) & 0 & Y_n(k_2 R_2) & -H_n^{(1)}(k_0 R_2) \\ \frac{k_1}{\epsilon_0} J_n'(k_2 R_1) & -\frac{k_2}{\epsilon_2} J_n'(k_2 R_1) & 0 & \frac{k_2}{\epsilon_2} J_n'(k_2 R_2) \\ -\frac{k_2}{\epsilon_2} Y_n'(k_2 R_1) & 0 & \frac{k_2}{\epsilon_2} Y_n'(k_2 R_2) & -\frac{k_0}{\epsilon_0} H_n'^{(1)}(k_0 R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Este sistema possui soluções não triviais apenas quando  $\omega = \omega' + i\omega''$  é tal que o determinante da matriz se anula. A figura 2.21 é a representação da frequência de oscilação característica calculada para o modo  $n = 1$  como função das perdas do material ENZ.

Pela figura, vemos que  $\omega'$  não é afectado praticamente pela frequência de colisão, pelo que  $\omega' \approx \omega_p$ , enquanto que  $\omega''$  é praticamente proporcional a  $\omega_c$  tal que quando  $\frac{\omega_c}{\omega_p} \rightarrow 0$  o tempo de vida é infinito ( $\omega'' \rightarrow 0$ ). Podemos então fazer a aproximação  $\omega'' \approx \frac{-\omega_c}{2}$  e, por fim, temos o factor qualidade do ressonador aberto derivado da equação ( 2.9) dado por

$$Q \approx \frac{\omega_p}{\omega_c} \quad (2.30)$$

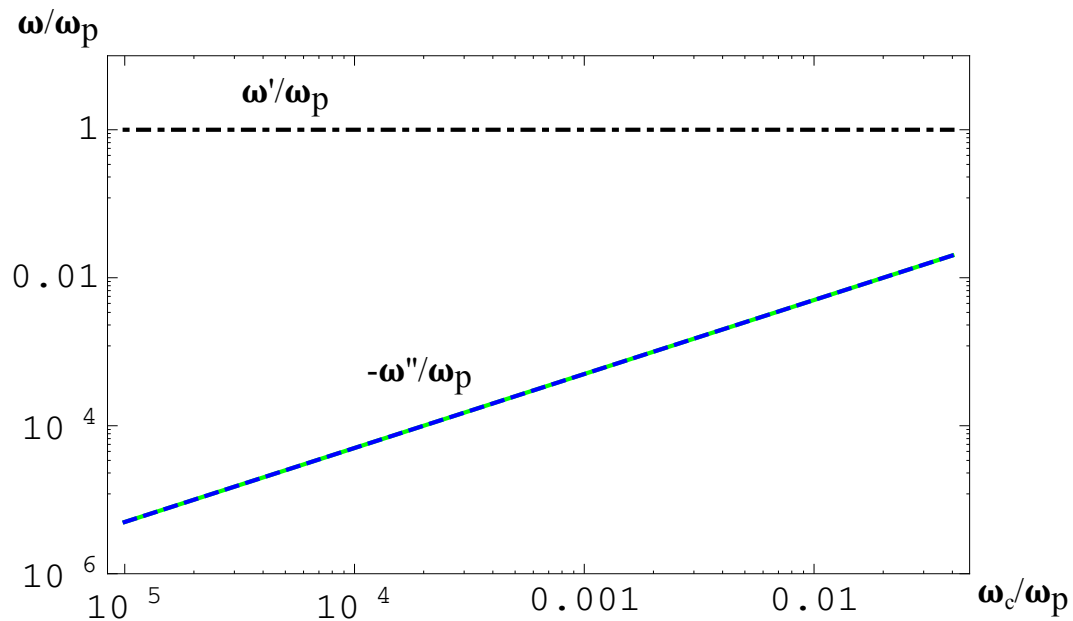


Figura 2.21: Frequência de oscilação complexa característica para o caso considerado.

Na figura 2.22 representa-se o factor qualidade como função da frequência de colisão. Como podemos observar pelo gráfico, com o aumento da frequência de colisão do material ENZ e conseqüente aumento das perdas no material, o valor do factor de qualidade do ressonador diminui. Como tal, interessa-nos manter as perdas no material ENZ tão baixas quanto possível para obter grandes factores de qualidade.

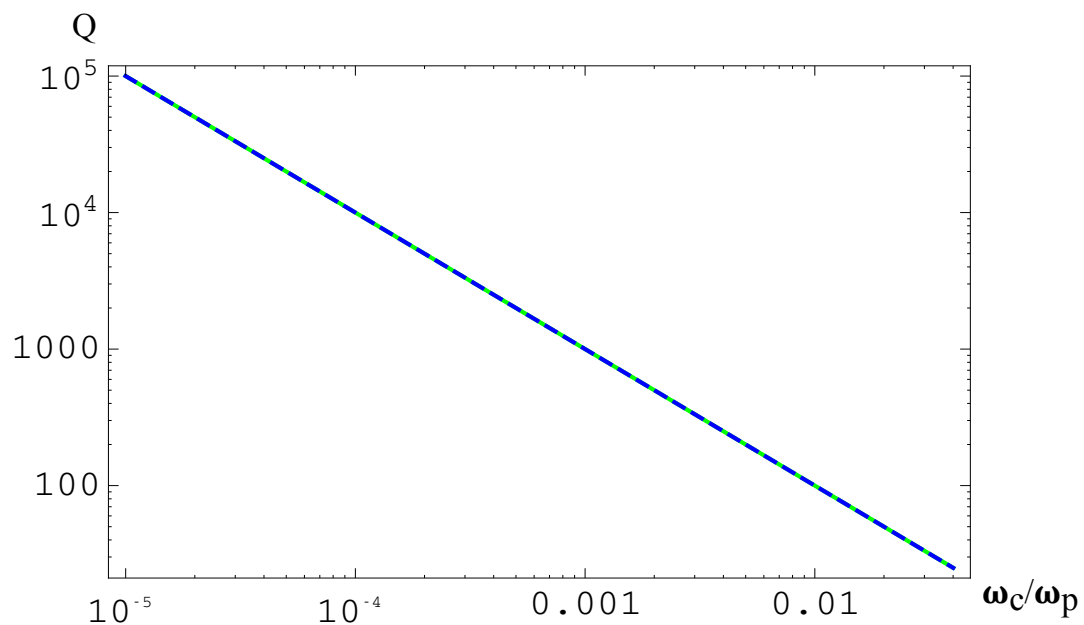


Figura 2.22: Factor qualidade como função da frequência de colisão do material ENZ.

## 2.7 Efeito de um raio não sintonizado

O factor qualidade do ressoador varia da forma representada na figura 2.23 em função de  $\frac{R_1}{R_{1,0}}$ , para vários valores de  $\frac{\omega_c}{\omega_p}$ . Como podemos ver, à medida que  $R_1$  é alterado para um valor diferente de  $R_{1,0}$  e  $\omega_p$  deixa de ser a frequência de ressonância, o factor qualidade decresce e o tempo de vida da excitação torna-se finito. A partir desta alteração podemos manipular a energia que é possível injectar no ressoador, visto que uma sintonização perfeita implica que não existe trânsito de energia de dentro para fora e de fora para dentro. O que é pretendido é um compromisso entre a quantidade de energia que é possível injectar e a que fica retida ao longo do tempo.

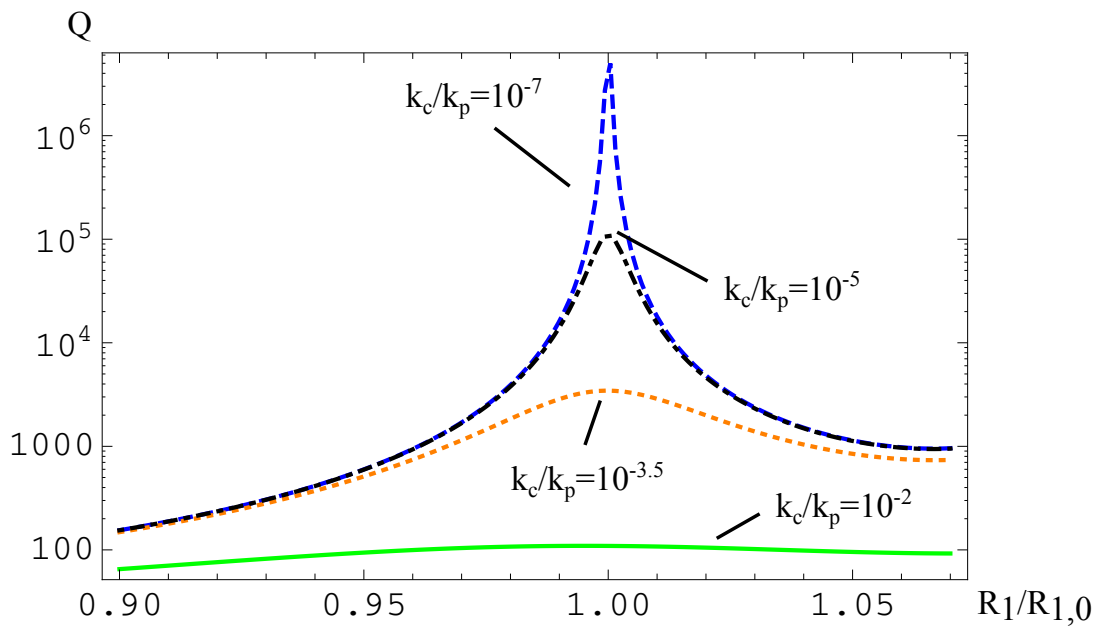


Figura 2.23: Factor Qualidade com função do raio interior para vários  $\omega_c/\omega_p$ .

Nas figuras 2.24 e 2.25 apresentam-se os resultados do campo no interior da estrutura para o caso em que o raio  $R_1$  é menor e maior que  $R_{1,0}$  respectivamente.

Pode-se confirmar pelos resultados que a ressonância aparece quando tiramos a sintonização do raio do núcleo. Na figura 2.24 onde a sintonização é  $R_1 = 0.95R_{1,0}$ , a ressonância fica à direita de  $\omega_p$ . Já na figura 2.25 a sintonização é  $R_1 = 1.05R_{1,0}$ , sendo que a ressonância passa a estar à esquerda de  $\omega_p$ . Esta ressonância mostra que é possível injectar energia para um raio  $R_1 \neq R_{1,0}$ .

Nas figuras 2.26 e 2.27 podem ver-se resultados de simulações de resposta transitória.

Como podemos ver pelas figuras 2.26 e 2.27 após a excitação inicial o campo permanece no núcleo mas a sua intensidade decai progressivamente com a evolução do tempo, não havendo aprisionamento perfeito.

Com um raio interior estabelecido como  $R_1 = 1.02R_{1,0}$ , o campo atinge  $1/e$  da sua amplitude inicial em  $\tau = 52ns$ , possuindo esta configuração um factor qualidade igual a  $Q = 2420$  (o período

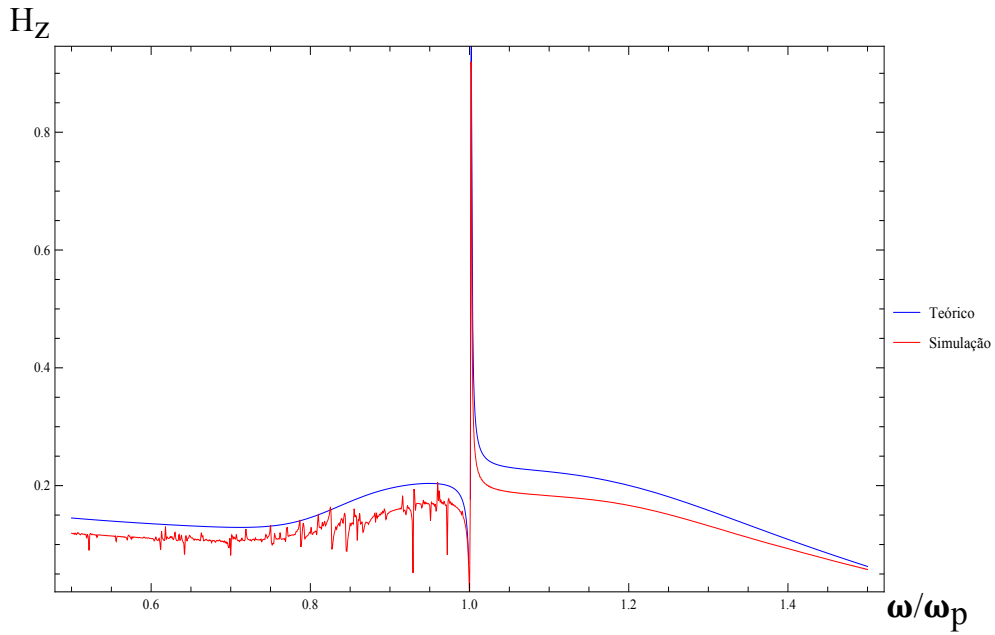


Figura 2.24: Campo magnético para  $R_1 = 0.95R_{1,0}$ , no domínio da frequência.

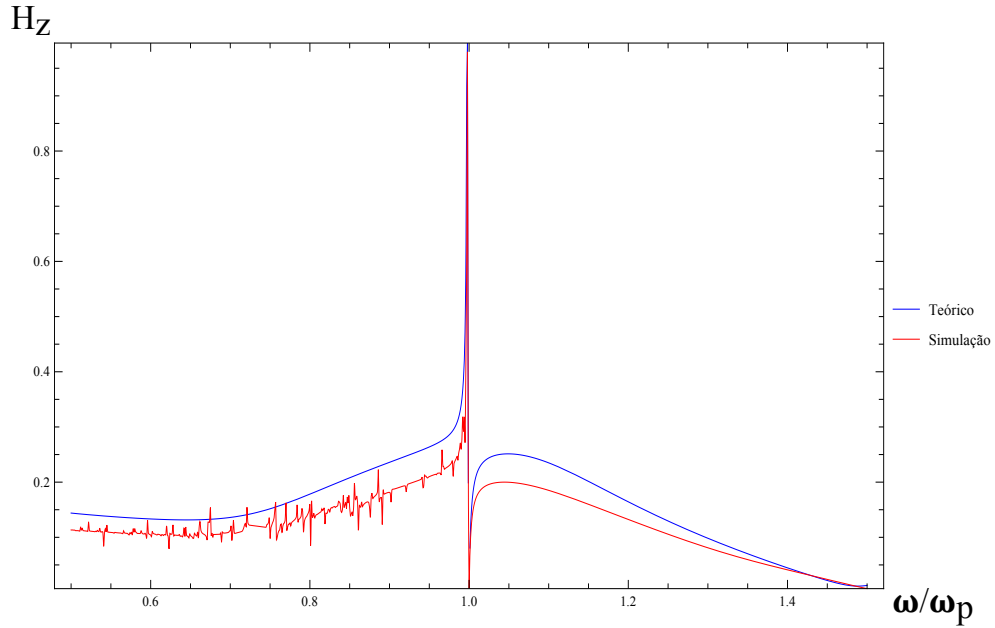


Figura 2.25: Campo magnético para  $R_1 = 1.05R_{1,0}$ , no domínio da frequência.

de oscilação é de  $T = 0.135ns$ ). Quando  $R_1 = 0.98R_{1,0}$ ,  $\tau = 62ns$  e  $Q = 2885$ . Estes resultados aproximam-se razoavelmente da previsão teórica de 3914, calculada por intermédio da equação 2.9.

Estes resultados indicam que, por forma a permitir a entrada de energia no núcleo, devemos definir o raio interior diferente do ideal  $R_{1,0}$ . Como isto impossibilita tempos de vida infinitos da ressonância, devemos procurar um mecanismo adicional para reter a energia sem decaimento. Será estudado no capítulo 4 como chegar a este objectivo com materiais não-lineares.



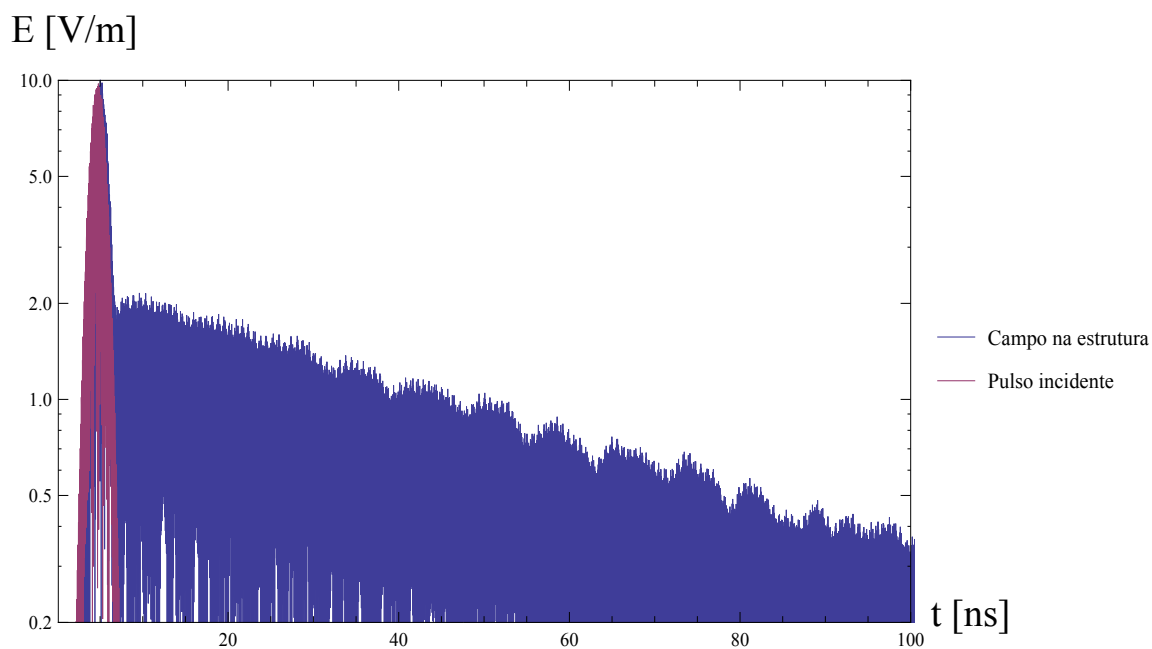


Figura 2.26: Oscilação do campo eléctrico no centro da estrutura ao longo do tempo, para  $R_1 = 1.02R_{1,0}$  (representação logarítmica).

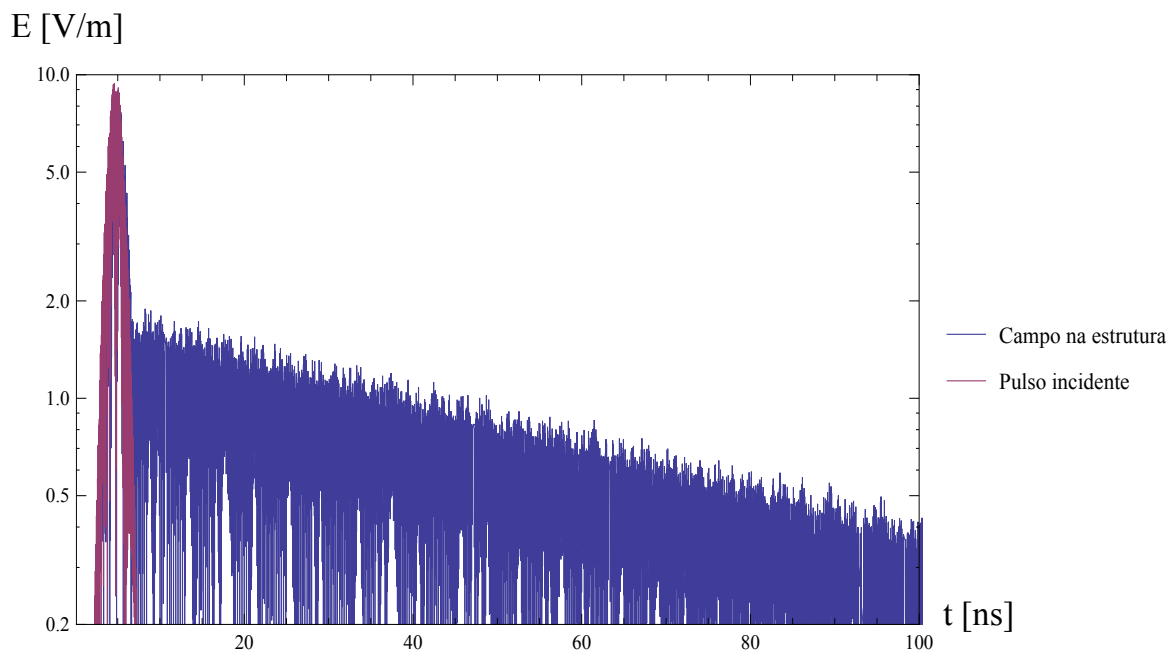


Figura 2.27: Oscilação do campo eléctrico no centro da estrutura ao longo do tempo, para  $R_1 = 0.98R_{1,0}$  (representação logarítmica).



## Capítulo 3

# Realização do ressoador em microondas

### 3.1 Meio ENZ metamaterial

Os guias de ondas possuem propriedades dispersivas que permitem realizar certas respostas electromagnéticas efectivas, análogas às dos metamateriais, de uma forma simples, robusta e pouco dispendiosa ([23]). Considere o modo fundamental transversal-eléctrico  $TE_1$  suportado por um guia metálico de pratos paralelos, representado na figura 3.1.



Figura 3.1: Guia metálico rectangular descrito.

A constante de propagação deste modo pode ser definida por:

$$\beta = \sqrt{(2\pi n f / c)^2 - (\pi / h)^2} \quad (3.1)$$

O tamanho do plano-H (distância vertical entre as placas PEC) do guia de ondas é dado por  $h$ ,  $n$  é o índice de refração do dieléctrico que preenche o guia,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $f$  a frequência de operação. Dado isto, é possível definir a permitividade relativa para o modo guiado  $TE_1$  por:

$$\frac{\epsilon_{eff}}{\epsilon_0} = \left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2 = n^2 - \frac{c^2}{4f^2h^2} \quad , \quad (3.2)$$

A permeabilidade efectiva  $\mu_{eff}$  para este modo permanece constante, igual a  $\mu_0$ , independentemente da frequência de operação. Assim, a dispersão da propagação dentro de um guia de ondas de pratos paralelos, quando limitada a este modo particular, é equivalente à propagação num metamaterial de permissividade  $\epsilon_{eff}$ . Este fenómeno vai permitir imitar o comportamento de materiais plasmónicos nesta estrutura baseada em dieléctricos simples e metais.

Propomos assim a realização de uma estrutura cilíndrica com duas camadas embutida num guia de ondas de pratos metálicos paralelos cuja permissividade do núcleo é  $\epsilon_1$  e da camada exterior é  $\epsilon_2$ , estando esta embebida num material com permissividade  $\epsilon_3$  (veja a figura 3.2, onde à direita está retratada a vista de cima e à esquerda a vista lateral). Fixamos a frequência de operação  $f_p$  de tal modo que  $\epsilon_{eff3}(f_p) = \epsilon_{eff1}(f_p) = 1$  e  $\epsilon_{eff2}(f_p) = 0$ . Isto implica que o guia deve ser preenchido com diferentes dieléctricos, com as seguintes características:

$$\begin{aligned} \epsilon_{eff3} = \epsilon_{eff1} = 1 &\Leftrightarrow n_1^2 - \frac{c^2}{4f_p^2h^2} = 1 \Leftrightarrow n_1^2 = 1 + \frac{c^2(2\pi f_p)^2}{4f_p^2(\pi c)^2} \Leftrightarrow n_1^2 = 1 + 1 = 2 \\ \epsilon_{eff2} = 0 &\Leftrightarrow n_2^2 - \frac{c^2}{4f_p^2h^2} = 0 \Leftrightarrow n_2^2 = 0 + \frac{c^2(2\pi f_p)^2}{4f_p^2(\pi c)^2} = 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim, no núcleo e no exterior o dieléctrico deve ter permissividade 2, enquanto que na segunda camada da estrutura o dieléctrico deve ter permissividade 1. A figura 3.3 retrata a estrutura 2D estudada no capítulo 1 e a correspondente implementação "metamaterial".

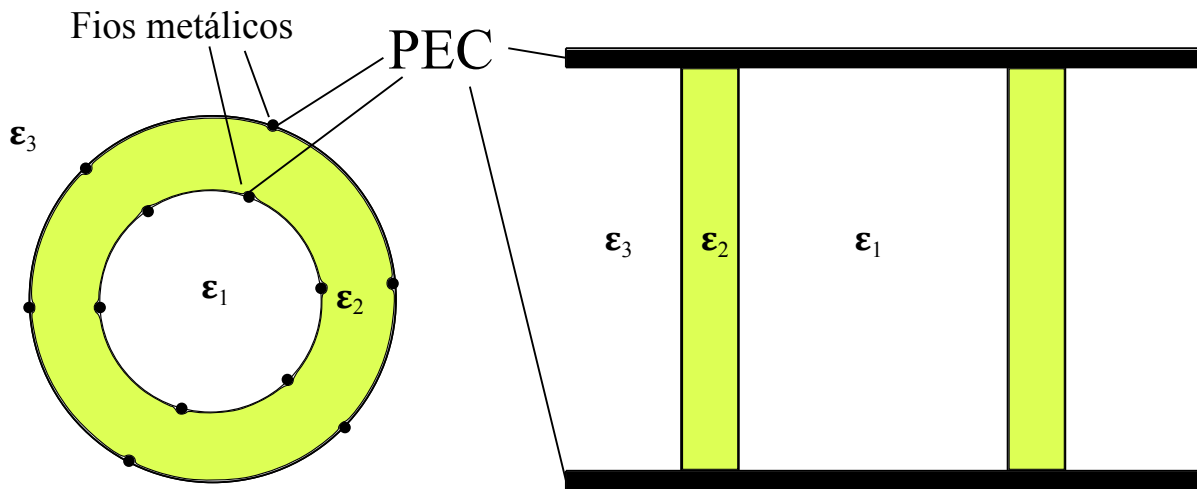


Figura 3.2: Guia de ondas de pratos paralelos descrito.

O valor dos raios interior e exterior mantêm-se iguais aos definidos no capítulo anterior ( $R_1 = R_{1,0}$  e  $R_2 = 1,1R_{1,0}$ ).

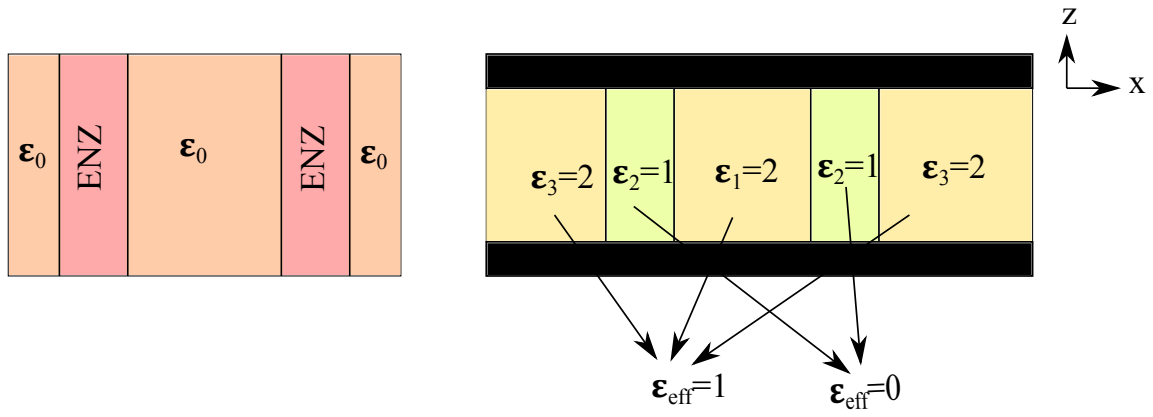


Figura 3.3: Retrato da estrutura 2D (à esquerda) e correspondente implementação em guia de ondas (à direita).

### 3.2 Fios metálicos verticais

Num guia de ondas de pratos metálicos paralelos, podemos assistir à propagação de três tipos de modos: transversal eléctrico ( $TE$ ), transversal magnético ( $TM$ ) e transversal electromagnético ( $TEM$ ). Nesta estrutura, pretendemos que exista a propagação apenas do modo  $TE_1$  para obter o efeito descrito na secção 3.1, pelo que é necessário evitar as condições de propagação dos outros modos.

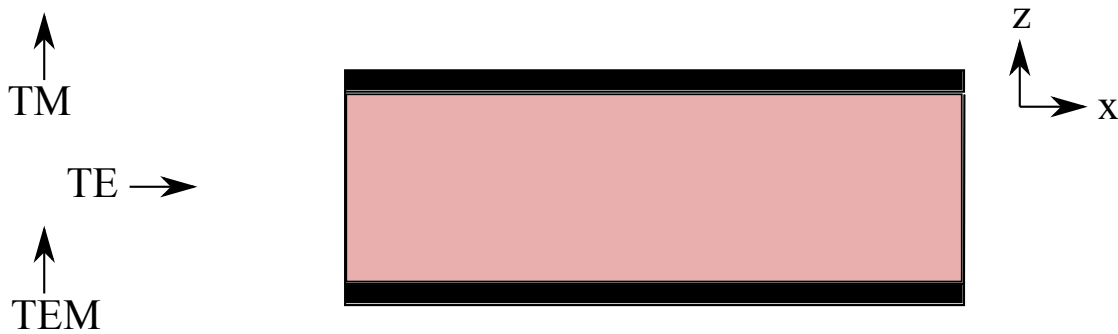


Figura 3.4: Polarização do campo eléctrico para cada modo.

No guia, as ondas guiadas passam por várias descontinuidades (ar e dieléctrico), pelo que em regra são excitados outros modos:  $TEM$ ,  $TE_1$  e  $TM_1$ . Os modos  $TEM$  e  $TM_1$  são ambos caracterizados por terem componente do campo eléctrico segundo  $z$ , mas o modo  $TE_1$  não possui esta característica. A frequência de corte de cada modo para um guia de ondas rectangular com altura  $h$  é determinada pelo número de onda de corte  $k_c$ :

$$k_c = k^2 - \beta^2 \tag{3.4}$$

Para cada modo, temos:

$$\begin{aligned}
TEM &\rightarrow k_c = 0 \\
TM_n &\rightarrow k_c = n\pi/h \\
TE_n &\rightarrow k_c = n\pi/h
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

Logo, vemos que o modo  $TEM$  é fundamental e não tem frequência de corte e o modo  $TM_1$  possui a mesma frequência de corte que o modo  $TE_1$ . Isto implica que ao operar o guia de ondas na frequência pretendida, na propagação do modo  $TE_1$ , os outros modos vão propagar-se e interferir nos resultados.

Colocando fios metálicos verticais segundo  $z$  vai provocar uma forte interacção com estes modos indesejados ( $TEM$  e  $TM$ ) e bloquear a sua propagação, não interferindo com a propagação do modo de interesse ( $TE_1$ ), pois esse não possui componente de campo eléctrico segundo  $z$  (veja figura 3.2).

### 3.3 Excitação do guia por uma onda plana

Considere-se a excitação do guia de ondas por uma onda plana polarizada cuja direcção de propagação é  $k = -y$ , sendo o campo eléctrico polarizado segundo  $x$ . Nas simulações feitas desta estrutura definiu-se a altura como  $h = \frac{\pi}{k_p} = \frac{c\pi}{\omega_p}$ . Na figura 3.5 pode-se observar uma fotografia da estrutura no ambiente de simulação do CST.



Figura 3.5: Fotografia da composição da estrutura 3D e respectiva polarização da onda plana de excitação no ambiente CST (campo eléctrico).

Neste caso, a estrutura já não é infinita segundo  $z$ , mas sim limitada por duas placas metálicas.

Ao invés de criar explicitamente as placas, basta manipular as condições fronteira para obter o mesmo efeito. Esta manipulação consiste em definir a componente tangencial do campo eléctrico em  $Z_{min}$  e  $Z_{max}$  nulas, o que corresponde a dizer que se coloca um condutor eléctrico perfeito (PEC) nestas fronteiras (ver figura 3.6).

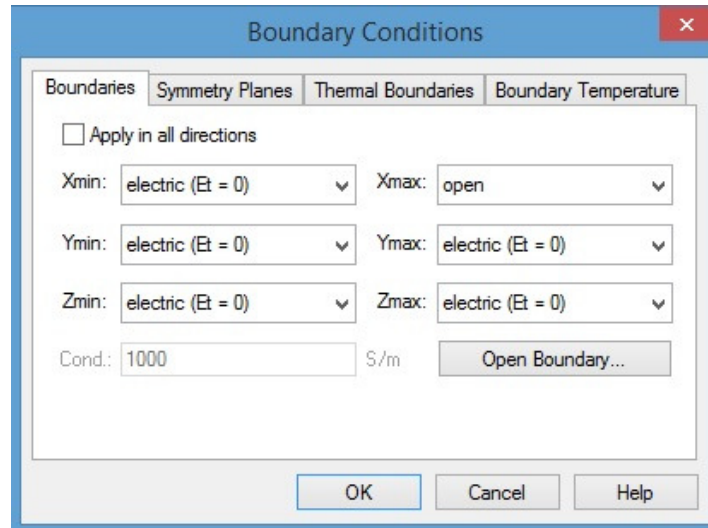


Figura 3.6: Fotografia da condições fronteira definidas para a estrutura 3D no ambiente CST.

Na figura 3.7 representam-se os resultados obtidos da simulação do campo electromagnético do interior da estrutura, em função da frequência. Foram usados 17 fios metálicos entre cada camada.

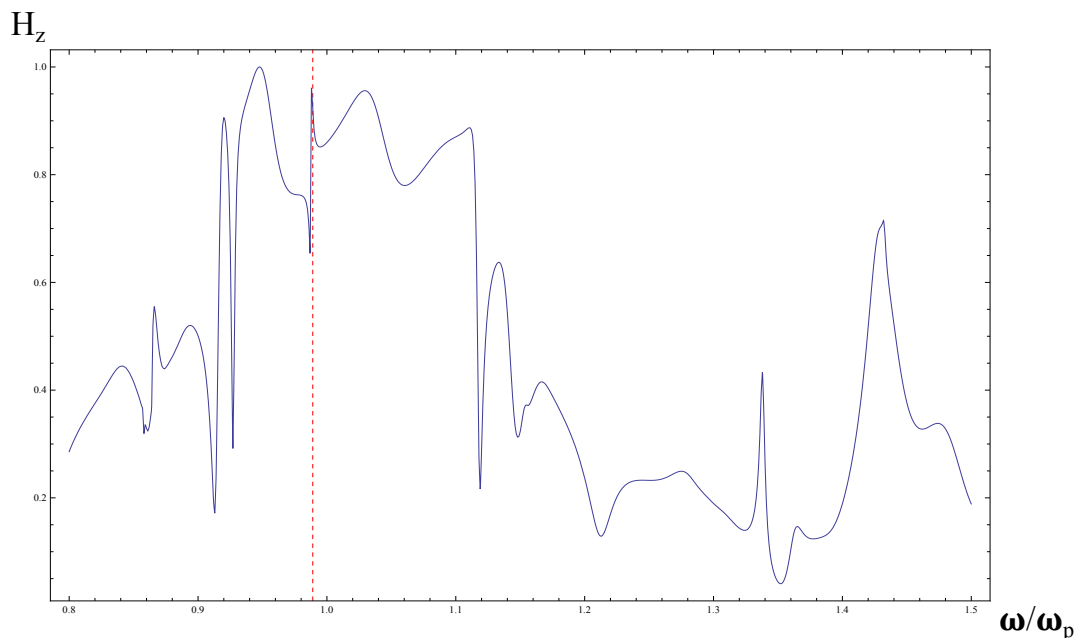


Figura 3.7: Campo magnético em  $\rho = 0.5R_1$ , para  $R_1 = R_{1,0}$ .

Na figura 3.7 podemos observar que existe ressonância para  $k = 0.989k_p$ , o que não é o resultado esperado para a estrutura sintonizada. Este resultado é consequência da resposta do me-

o material não ser exactamente coincidente com a de um material com  $\epsilon = 0$ . Repare-se na figura 3.8, que representa o decaimento do campo magnético no centro da estrutura quando sintonizada, resultado da simulação de transitórios. Após o pulso de excitação inicial a energia permanece no núcleo, o que não corresponde à previsão teórica. Contudo, os resultados seguintes mostram que a estrutura possui um comportamento semelhante ao modelo contínuo para variações do raio interior.

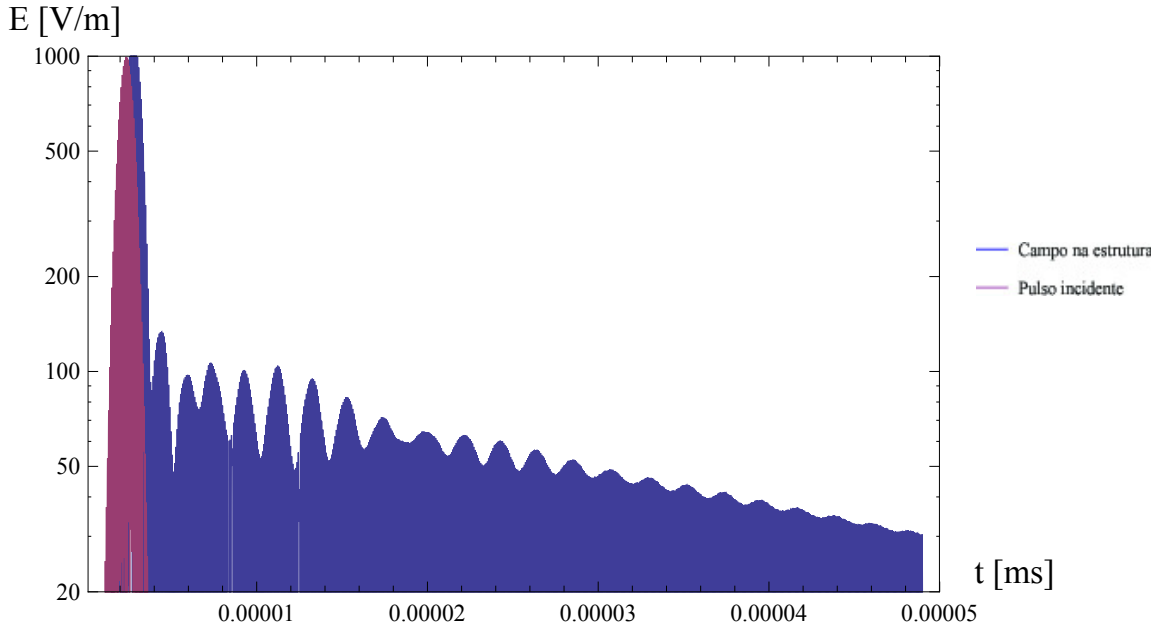


Figura 3.8: Decaimento temporal do campo magnético no centro da estrutura.

Foram de seguida estudados os efeitos da variação do raio interior  $R_1$  em relação ao raio de sintonização  $R_{1,0}$ . O objectivo foi encontrar um resultado comparável ao obtido na secção 2.7, onde os picos de ressonância aparecem deslocados de acordo com a sintonização superior ou inferior a  $R_{1,0}$ . Nas figuras 3.9 e 3.10 representam-se os resultados das simulações do campo electromagnético no interior da estrutura (em  $\rho = 0.5R_{1,0}$ ), com o raio  $R_1$  menor que  $R_{1,0}$  e maior, respectivamente.

Como podemos observar, o efeito é semelhante ao da estrutura 2D: quando a estrutura possui  $R_1$  superior a  $R_{1,0}$  o pico da ressonância aparece à esquerda; para  $R_1$  inferior a  $R_{1,0}$  o pico vem à direita (na frequência).



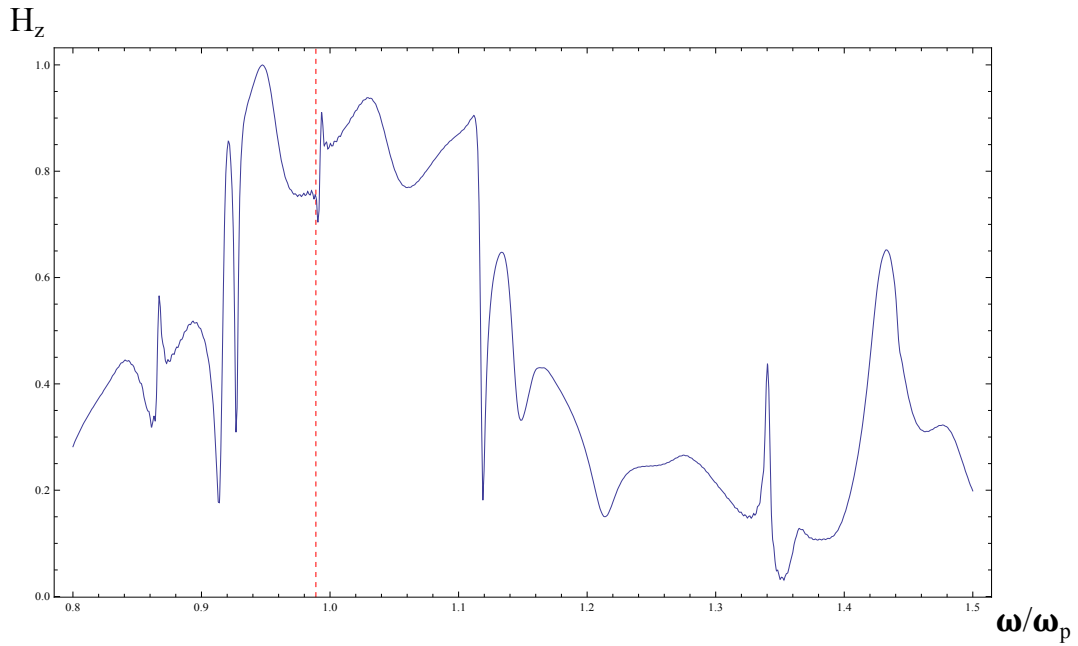


Figura 3.9: Campo magnético em  $\rho = 0.5R_{1,0}$ , para  $R_1 = 0.98R_{1,0}$ .

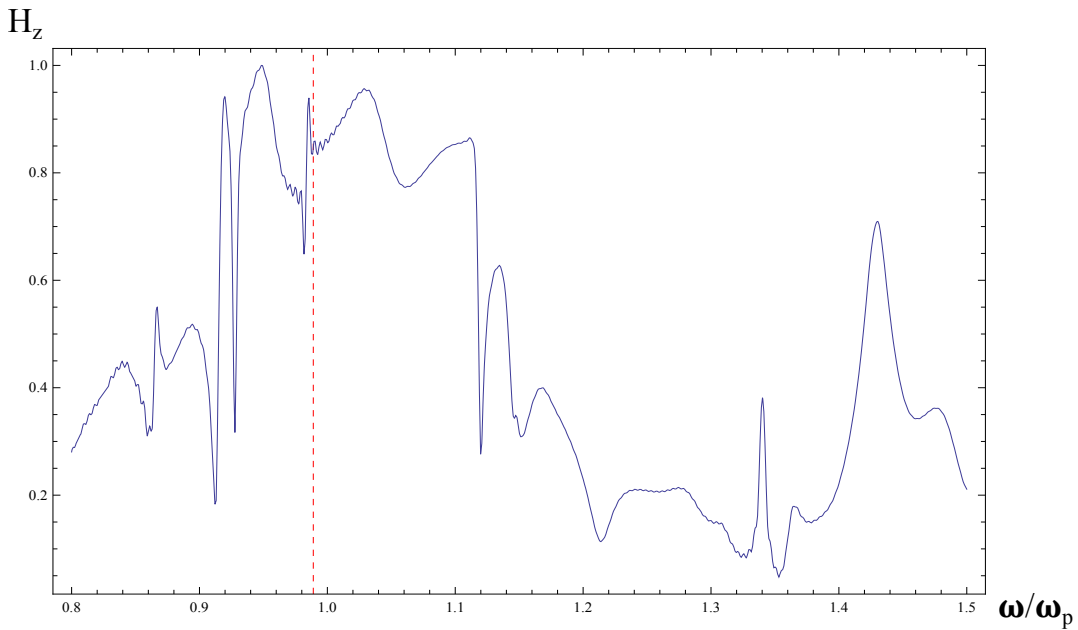


Figura 3.10: Campo magnético em  $\rho = 0.5R_{1,0}$ , para  $R_1 = 1.02R_{1,0}$ .

### 3.4 Ajuste do número de fios metálicos

Para obter resultados mais próximos do modelo teórico nas simulações feitas ao longo deste capítulo, foi levado a cabo um estudo do número de fios metálicos ideal que se deviam colocar no guia de ondas.

Iniciou-se o estudo com 6 fios metálicos, aumentando progressivamente o seu número até 29, tendo-se chegado à conclusão que continuar a incrementar o seu número não aproximaria os resultados do pretendido. O número de fios usado nas duas fronteiras (entre  $\epsilon_3$  e  $\epsilon_2$  e entre  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_1$ ) é

idêntico.

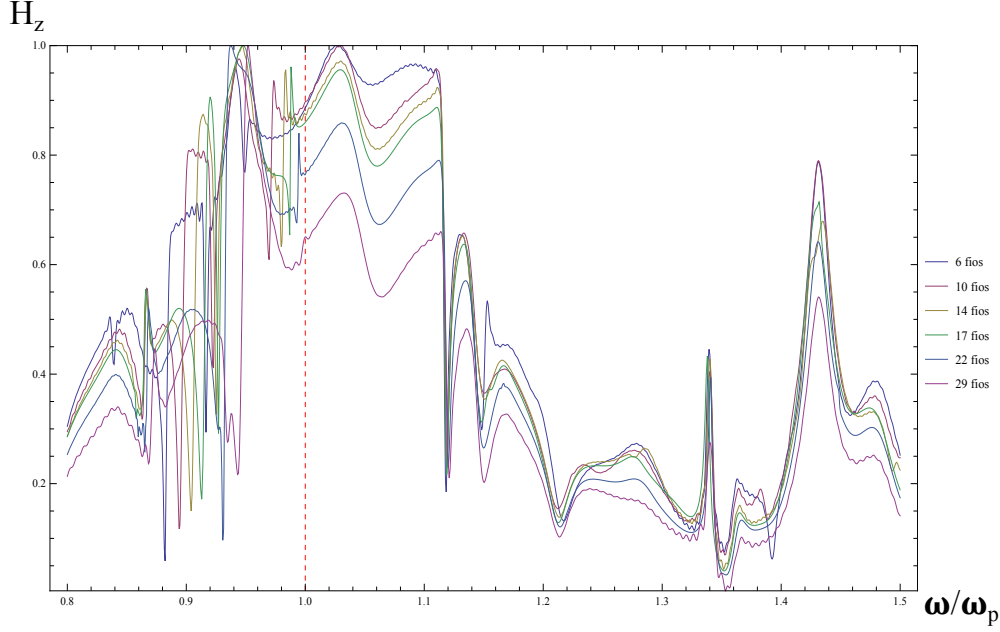


Figura 3.11: Campo magnético em  $\rho = 0.5R_1$ .

Pelos resultados representados na figura 3.11, é evidente o efeito do aumento progressivo do número de fios. Vemos que na estrutura sintonizada existe ressonância perto de  $k = k_p$ , que vai diminuindo de amplitude com a progressão do número de fios mas aproximando-se de  $k_p$ . Assim, conclui-se que prosseguir as simulações no ambiente CST com 17 fios seria o mais apropriado, pois não cria indutâncias/capacitâncias parasitas suficientemente fortes que influenciem os resultados de tal maneira que a amplitude da ressonância desapareça.

### 3.5 Plasmões de superfície

Por forma a explorar a potencialidade das ideias propostas noutros cenários foi feito um estudo dos plasmões de superfície em guias planares formados por materiais semelhantes aos usados na cavidade ressoadora estudada. A primeira estrutura é composta por um dielétrico convencional com permitividade relativa  $\epsilon_1 = 1$  e por um dielétrico cuja dispersão segue o modelo de Drude seguinte:

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\omega_c)} \quad (3.6)$$

onde  $\omega_c = \omega_p 10^{-7}$  e as permitividades relativas são  $\epsilon_2 = -1$  e  $\epsilon_1 = 1$  quando  $\omega = \omega_p$ . Observe a figura 3.12 que ilustra a composição da estrutura descrita. Esta estrutura é infinita em todas as direcções, pelo que as condições fronteira no ambiente CST foram escolhidas em conformidade

(veja figura 3.13).

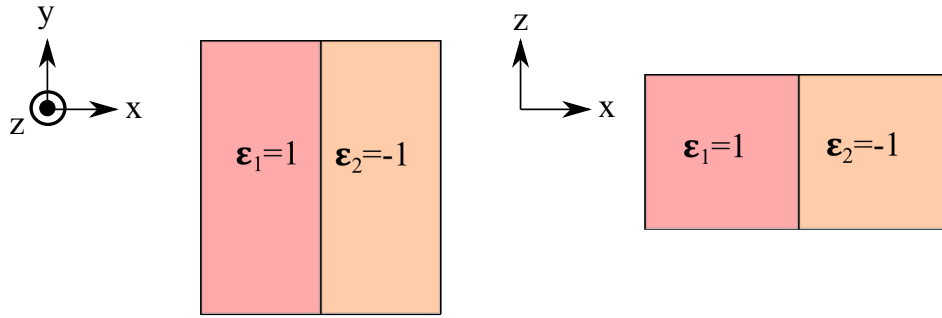


Figura 3.12: Composição da estrutura plasmônica 2D.

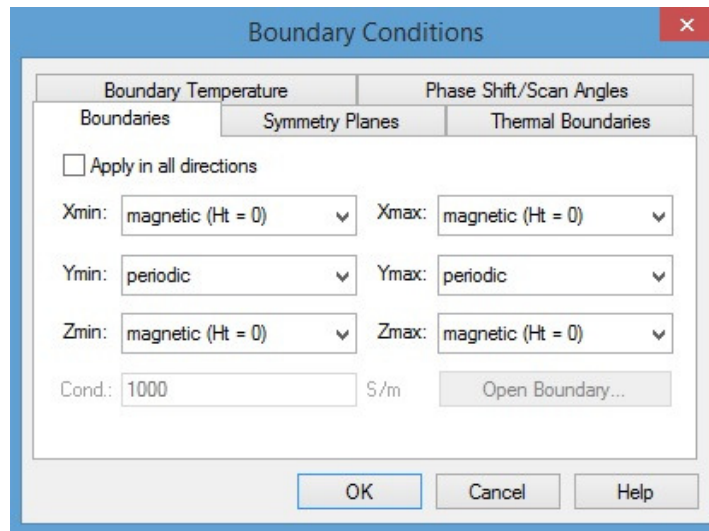


Figura 3.13: Condições fronteira definidas no ambiente CST para a simulação da estrutura plasmônica 2D.

A segunda estrutura estudada consiste num guia de ondas de pratos metálicos paralelos, constituída por dois materiais dieléctricos de permitividades relativas  $\epsilon_1 = 3$  e  $\epsilon_2 = 1$ . Na separação dos dieléctricos foram colocados fios metálicos verticais de forma a assegurar a propagação única do modo  $TE_1$ . Observe a figura 3.14 que ilustra a composição da estrutura descrita, e a figura 3.15 é uma fotografia das condições fronteira escolhidas. Definindo da altura como  $h = \frac{c}{\sqrt{8}f_p}$ , esta estrutura possui as seguintes permitividades efectivas em  $f = f_p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{eff1}}{\epsilon_0} &= 3 - \frac{c^2}{4f_p^2 h^2} = 1 \\ \frac{\epsilon_{eff2}}{\epsilon_0} &= 1 - \frac{c^2}{4f_p^2 h^2} = -1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

A figura 3.16 são fotografias dos resultados obtidos no CST na frequência  $f_p$ . A estrutura foi excitada com uma antena no início da estrutura (em  $y_{min}$ ) com frequência  $f = f_p$ . Como podemos

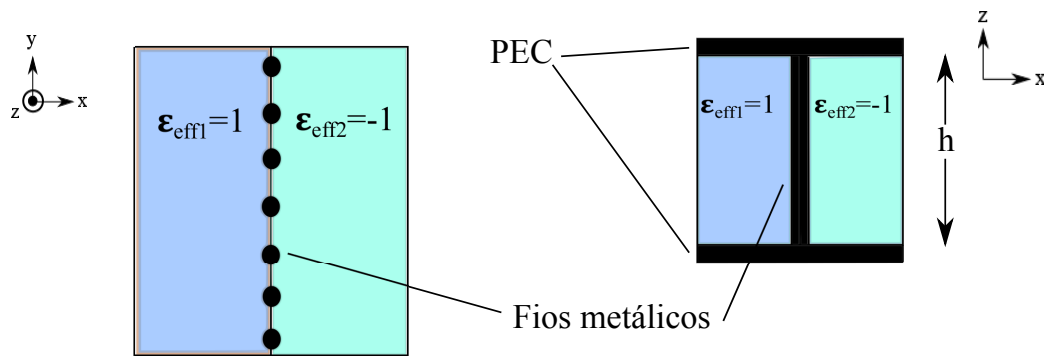


Figura 3.14: Composição da estrutura plasmónica 3D.

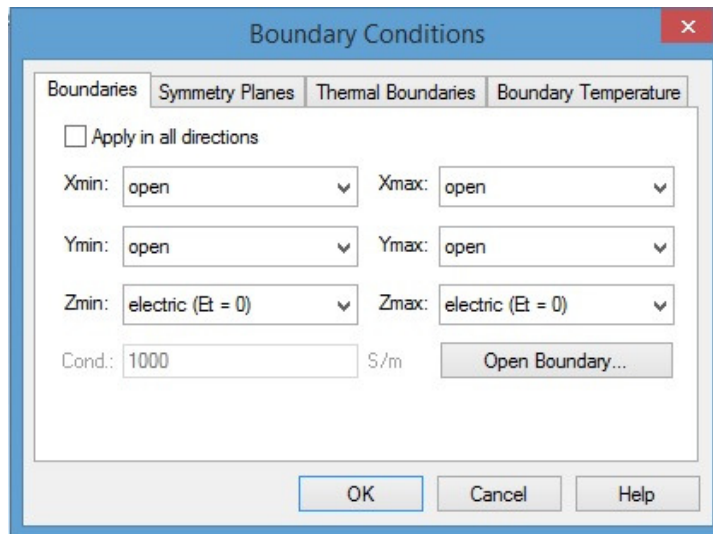


Figura 3.15: Condições fronteira definidas no ambiente CST para a simulação da estrutura plasmónica 3D.

observar, existe a propagação de uma onda de superfície na fronteira entre os dois dielétricos em ambas as estruturas. Isto indica que os plasmões de superfície são excitados de igual forma nos dois casos e as estruturas comportam-se de acordo com a previsão teórica, i.e. a estrutura 3D imita a resposta da estrutura 2D.

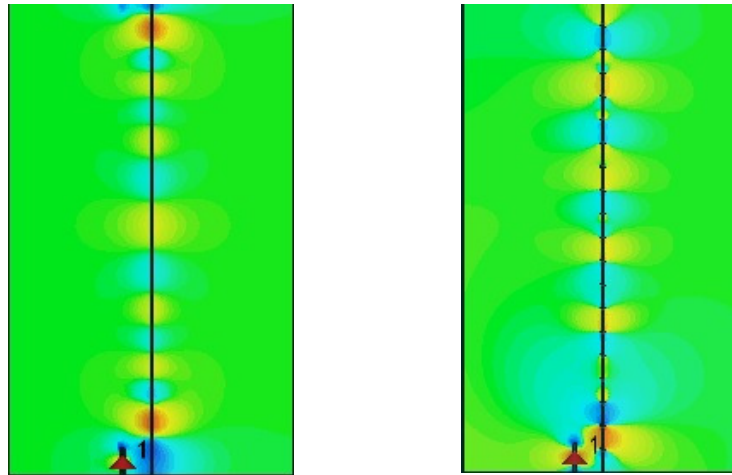


Figura 3.16: Fotografia dos resultados obtidos em ambiente CST da simulação da estrutura 2D e 3D, respectivamente.

### 3.6 Sumário

Em suma, o nosso estudo demonstrou que é possível imitar a funcionalidade da estrutura 2D ressoadora estudada no capítulo 2 com tecnologia de microondas. A grande vantagem da construção deste guia é ser relativamente simples, robusta e pouco dispendiosa.



# Capítulo 4

## Óptica não linear

### 4.1 Não linearidade de terceira ordem

Tal como referido na secção 2.4, o ressonador bi-dimensional proposto possui uma grande limitação imposta pelo teorema da reciprocidade de Lorentz: é impossível injectar energia no modo de oscilação com tempo de vida infinito, quando o raio do núcleo está perfeitamente sintonizado. Existe, contudo, uma alteração ao núcleo que nos pode possibilitar injectar energia no núcleo desde o exterior e, ao mesmo tempo, ficar retida nele.

Suponha-se que o material da região do núcleo é substituído por um material com uma não-linearidade óptica [24]. Fenómenos de não linearidade óptica ocorrem quando a resposta do material do sistema a um campo óptico aplicado depende de uma maneira não linear da intensidade desse campo.

No caso convencional, i.e. linear, a polarização induzida no material depende linearmente da intensidade do campo eléctrico tal que pode ser descrita por:

$$P(t) = \epsilon_0 \chi^{(1)} E(t), \quad (4.1)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\chi^{(1)}$  define a susceptibilidade linear e  $\epsilon_0$  a permitividade do vácuo. Para obtermos uma descrição matemática da óptica não linear podemos generalizar a equação (4.1), expressando a polarização  $P(t)$  como uma série de potências do campo eléctrico  $E(t)$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= \epsilon_0 [\chi^{(1)} E(t) + \chi^{(2)} E^2(t) + \chi^{(3)} E^3(t) + \dots] \\ &\equiv P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

As quantidades  $\chi^{(2)}$  e  $\chi^{(3)}$  definem as susceptibilidades ópticas não lineares de 2ª e 3ª ordens, respectivamente. As equações (4.1) e (4.2) são escritas assumindo que a polarização no instante  $t$  depende apenas do valor instantâneo da intensidade do campo eléctrico. Neste trabalho estamos apenas interessados em avaliar a utilização de uma não-linearidade de 3ª ordem, pelo que nos vamos fixar no estudo desta.

Considere-se a contribuição de 3ª ordem para a polarização não-linear:

$$P^{(3)}(t) = \epsilon_0 \chi^{(3)} E(t)^3 \quad (4.3)$$

Considere-se também que a excitação do campo eléctrico é monocromática, e dada por:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad (4.4)$$

Assim, usando a identidade  $\cos^3(\omega t) = \frac{1}{4}\cos(3\omega t) + \frac{3}{4}\cos(\omega t)$ , podemos expressar a polarização não linear por:

$$P^{(3)}(t) = \frac{1}{4}\epsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos(3\omega t) + \frac{3}{4}\epsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos(\omega t) \quad (4.5)$$

O primeiro termo na equação (4.5) descreve a resposta à frequência  $3\omega$  criada por um campo aplicado com frequência  $\omega$ . Este processo é denominado por geração de terceiro harmónico.

Podemos decompor o vector deslocamento eléctrico na sua componente linear e não linear:

$$D = \epsilon_0 \epsilon^{NL} E(t) = \epsilon_0 (\epsilon_1 + \chi^{(3)} |E|^2) E(t), \quad (4.6)$$

onde  $\epsilon_1$  é a permitividade dieléctrica relativa para campos eléctricos de baixa intensidade.

## 4.2 Não linearidade no núcleo da estrutura

O fenómeno descrito na secção 4.1 oferece-nos a oportunidade de, ao escolher um raio interior  $R_1$  ligeiramente diferente de  $R_{1,0}$  para a estrutura descrita no capítulo 1, que as oscilações de campo possam ser injectadas do exterior e tirar vantagem do comportamento não-linear, para auto-sintonizar o ressoador. Assim, é expectável obter uma forte supressão das perdas de radiação quando  $k_1^{NL} R_1 = k_1 R_{1,0}$ , onde  $k_1^{NL} = \sqrt{\epsilon^{NL}} \frac{\omega p}{c}$ . Esta condição é equivalente a [21]:

$$\chi^{(3)} \frac{3}{4} |E_{trapp}|^2 = \epsilon_1 \left[ \left( \frac{R_{1,0}}{R_1} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.7)$$



A equação anterior permite-nos estimar a magnitude do campo eléctrico  $E_{trapp}$  que vai ficar aprisionado dentro do núcleo da estrutura após a excitação da estrutura, fixando a intensidade da não-linearidade  $\chi^{(3)}$ , a relação entre o núcleo ideal e o núcleo interior usado  $\frac{R_{1,0}}{R_1}$  e a permitividade simples do material do núcleo  $\epsilon_1$ . Manipulando estes 3 factores podemos obter um campo bem definido  $E_{trapp}$  no interior da estrutura, no regime estacionário, e portanto quantizado.

Nas simulações em ambiente CST foi definido o raio interior como  $R_1 = 0.98R_{1,0}$  e o exterior como  $R_2 = 1.1R_1$ . A estrutura é excitada por uma onda plana com formato Gaussiano no domínio do tempo, com frequência centrada em  $\omega_p$ , *fwhm* (full width half maximum)  $\delta\tau$  e magnitude máxima de  $E_0 = 1000V/m$ .

Observando os resultados da figura 4.1 vemos que a manipulação da intensidade da resposta não linear  $\chi^{(3)}$  possibilita o controlo da magnitude do campo que fica retido no regime estacionário, verificando-se que se mantém uma relação entre o  $\chi^{(3)}$  e o campo confinado  $E_{trapp}$  do tipo  $\chi^{(3)}|E_{trapp}|^2 \approx 0.1$ . O valor mínimo encontrado para que haja confinamento foi  $\chi^{(3)} = 1.33 * 10^{-6} m^2/V^2$ , para um valor inferior a este não existe confinamento sem decaimento e a luz "foge" rapidamente do núcleo, enquanto que para um  $\chi^{(3)}$  superior existe confinamento mas a luz retida é menor mantendo-se constante a relação  $\chi^{(3)}|E_{trapp}|^2$ .

Na figura 4.2 podemos observar os resultados da variação da intensidade do pulso incidente na resposta da estrutura. Podemos concluir que é necessário um valor mínimo de intensidade de excitação para que o material não-linear tenha uma resposta que permita o confinamento da luz no interior da estrutura, pois para valores inferiores a  $E = 1000V/m$  não existe permanência de energia do núcleo após o pulso inicial. Para valores superiores a  $E = 1000V/m$  o campo confinado, no regime estacionário, tende para o mesmo valor de intensidade de campo eléctrico  $E_{trapp}$ , enquanto que para valores inferiores não existe sequer confinamento. Esta observação reforça que a relação  $\chi^{(3)}|E_{trapp}|^2$  mantém-se independentemente da intensidade do pulso de excitação.

A influência da alteração da duração do pulso incidente  $\delta\tau$  na resposta da estrutura também foi estudada. É evidente que, pelos resultados da figura 4.3, a duração do pulso também possibilita o controlo da quantidade de energia confinada no núcleo. O melhor valor encontrado (aquele que mais energia permite reter) foi com  $\delta\tau = 2.38ns$ . Valores superiores e inferiores provocam uma "pior" resposta do ressonador, pois a amplitude do campo confinado é menor.

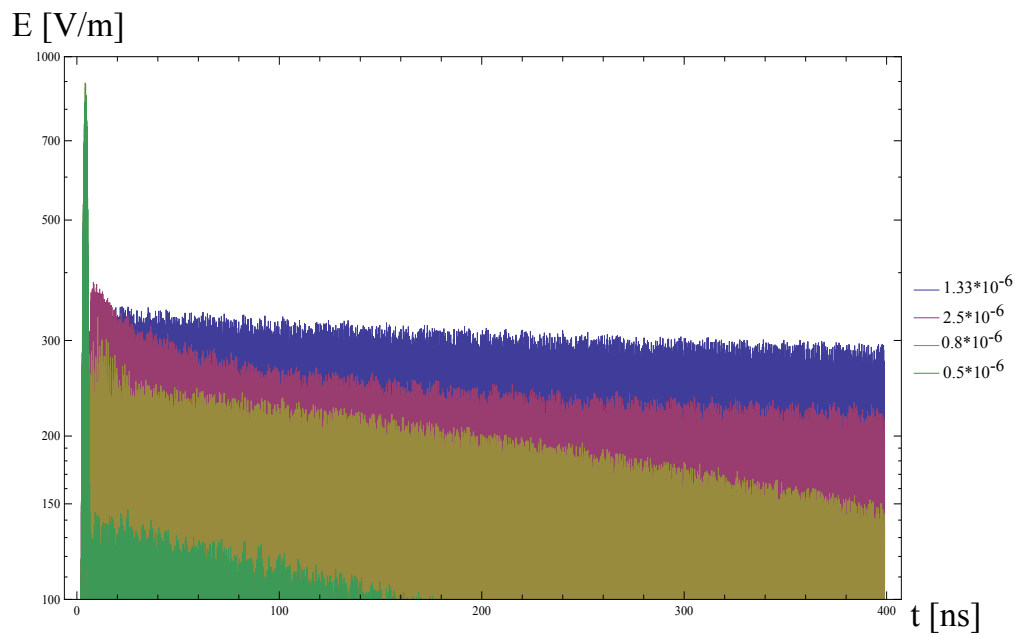


Figura 4.1: Influência do valor de  $\chi^{(3)}$  (em  $m^2/V^2$ ) no decaimento do campo elétrico no centro da estrutura, para um pulso incidente com duração temporal  $\delta\tau = 2.38ns$  (representação logarítmica).

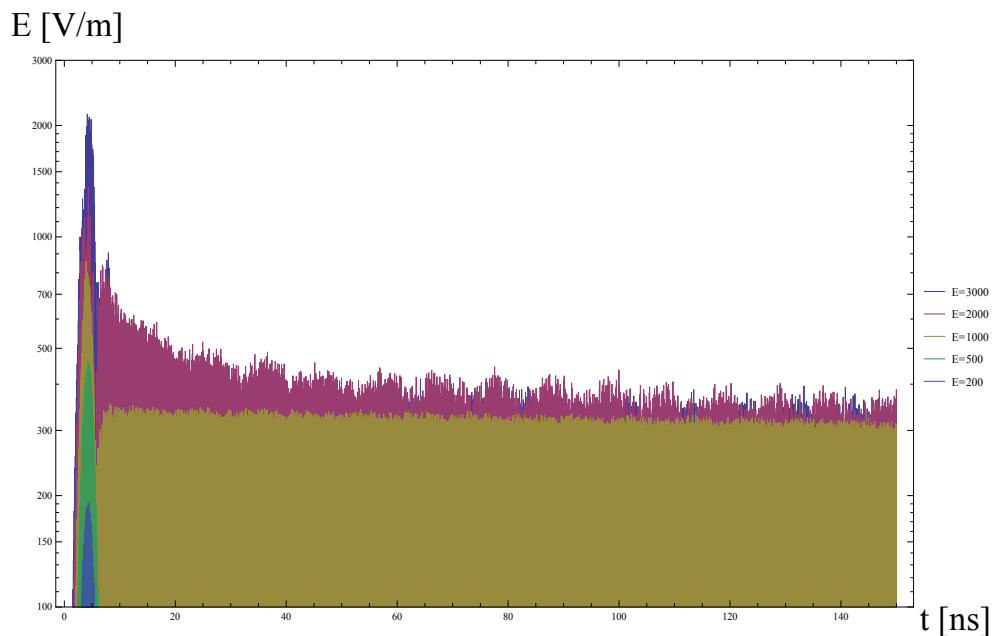


Figura 4.2: Influência do valor da amplitude do impulso inicial no decaimento do campo elétrico no centro da estrutura, para um pulso incidente com duração temporal  $\delta\tau = 2.38ns$  e  $\chi^{(3)} = 1.33 * 10^{-6}$  (representação logarítmica).

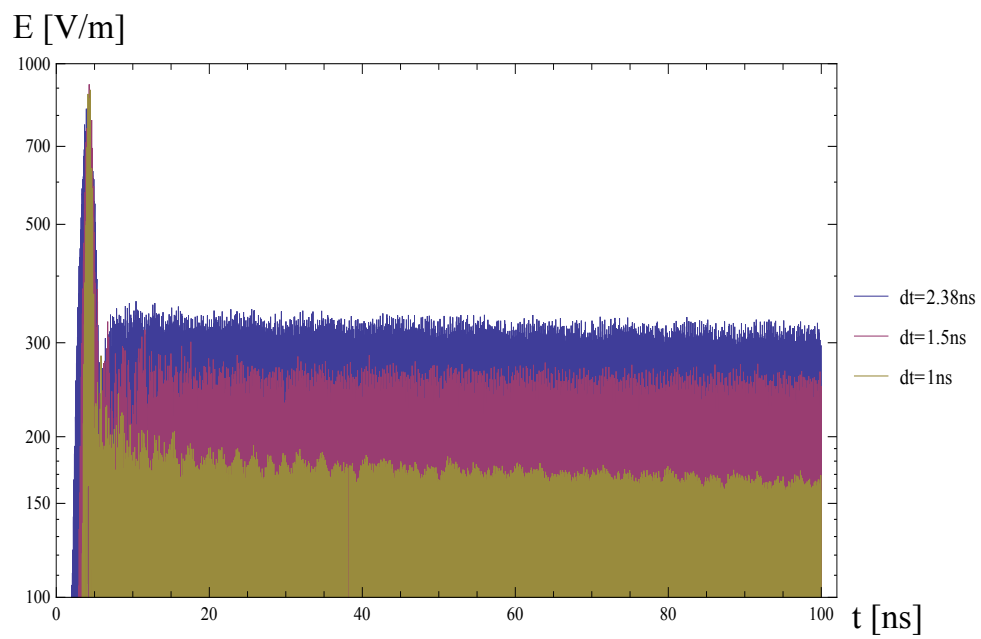


Figura 4.3: Influência do valor de  $\delta\tau$  (*fwhm* em *ns*) no decaimento do campo eléctrico no centro da estrutura, para um meio não linear com  $\chi^{(3)} = 1.33 * 10^{-6} m^2/V^2$  (representação logarítmica).



# Conclusão

Foi estudada uma nova nano-estrutura ressoadora aberta que, em teoria e no limite ideal em que os materiais não possuem perdas, sustém oscilações com tempo de vida infinito e sem perdas de radiação para o exterior. A primeira proposta baseada numa estrutura com materiais dieléctricos convencionais e com comportamento ENZ era limitada pelo teorema da reciprocidade: embora fosse perfeitamente isoladora na frequência pretendida, não permitia ser alimentada por excitações exteriores.

Para ultrapassar esta limitação foi explorado um mecanismo para excitar o ressoador a partir do exterior. Este mecanismo baseia-se em retirar a sintonização ao raio interior, para permitir a entrada de energia na estrutura, e substituir o material do núcleo por material não-linear tipo Kerr, i.e. que muda o seu índice de refração em resposta a uma intensidade de campo eléctrico aplicado. Este mecanismo apresentou excelentes resultados demonstrados pelo simulador electromagnético utilizado. De facto, para uma configuração fixa de  $\chi^{(3)}$ ,  $R_{1,0}/R_1$  e  $\epsilon_1$  o núcleo recebe energia do exterior e retém um valor de campo bem definido pela constante  $\chi^{(3)}|E_{trapp}|^2$ , e portanto a energia está quantizada. A intensidade do campo eléctrico de excitação possui um papel preponderante na resposta do material não linear. Para excitações inferiores a um certo limite mínimo não existe confinamento, embora para valores superiores a intensidade do confinamento se mantenha sempre no mesmo valor, verificando-se mais uma vez que a relação  $\chi^{(3)}|E_{trapp}|^2$  se mantém constante. Por último, foi estudada a influência do *fwhm* do pulso de excitação e verificado que influencia a resposta do material não-linear, de tal forma que muda a intensidade de campo eléctrico retida no núcleo da estrutura.

Foi sugerida uma implementação metamaterial do ressoador proposto, e todos os conceitos introduzidos foram validados pelo simulador electromagnético usado. Esta implementação apresentou resultados semelhantes aos da estrutura bi-dimensional.

Para trabalho futuro sugere-se um estudo de novas técnicas que permitam melhorar a implementação em tecnologia de microondas, o uso de material não-linear no guia de ondas e exploração de alternativas que permitam a entrada de mais energia no núcleo da estrutura, mantendo os tempos de

vida das oscilações infinitos.

# Bibliografia

- [1] “CST AG. - Computer Simulation Technology.” <https://www.cst.com>, 2014.
- [2] M. A. Noginov, G. Zhu, A. M. Belgrave, R. Bakker, V. M. Shalaev, E. E. Narimanov, S. Stout, E. Herz, T. Suteewong, and U. Wiesner, “Demonstration of a spaser-based nanolaser,” *Nature (London)*, vol. 460, p. 1110, July 2009.
- [3] R. F. Oulton, V. J. Sorger, T. Zentgraf, R. M. Ma, C-Gladden, L. Dai, G. Bartal, and X. Zhang, “Plasmon lasers at deep subwavelength scale,” *Nature (London)*, vol. 461, p. 629, August 2009.
- [4] C. F. Guo, T. Sun, F. Cao, Q. Liu, and Z. Ren, “Metallic nanostructures for light trapping in energy-harvesting devices,” *Light: Science & Applications*, vol. 3, April 2014.
- [5] A. Lagendijk, B. Tiggelen, and D. S. Wiersma, “Fifty years of anderson localization,” *Physics Today*, vol. 62, p. 24, August 2009.
- [6] P. Lalanne, C. Sauvan, and J. P. Hugonin, “Photon confinement in photonic crystal nanocavities,” *Laser & Photon*, vol. 2, pp. 514–526, September 2008.
- [7] M. R. Watts, S. G. Johnson, H. A. Haus, and J. D. Joannopoulos, “Electromagnetic cavity with arbitrary q and small modal volume without a complete photonic bandgap,” *Optics Letters*, vol. 27, p. 1785, October 2002.
- [8] A. Chiasera, Y. Dumeige, P. Féron, M. Ferrari, Y. Jestin, G. N. Conti, S. Pelli, and G. C. Righini, “Spherical whispering-gallery-mode microresonators,” *Laser & Photon*, vol. 4, pp. 457–482, July 2009.
- [9] A. B. Matsko and V. S. Ilchenko, “Optical resonators with whispering gallery modes - part i: basics,” *IEEE Journal of selectec topics in quantum electronics*, vol. 12, p. 1077, January/February 2006.
- [10] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, ch. 1. Brooks/Cole.

- [11] M. G. Silveirinha, “Trapping light in open plasmonic nanostructures,” *Physical review A*, vol. 89, p. 023813, February 2014.
- [12] “Wolfram Research Inc. - Mathematica.” <http://www.wolfram.com/mathematica/>, 2014.
- [13] S. A. Maier, *Plasmonic: Fundamentals and Applications*. New York: Springer, 2007.
- [14] G. V. Naik, V. M. Shalaev, and A. Boltasseva, “Alternative plasmonic materials: Beyond gold and silver,” *Advanced Materials*, vol. 25, p. 3264–3294, 2013.
- [15] B. Edwards and N. Engheta, “Experimental verification of displacement-current conduits in metamaterials-inspired optics circuitry,” *Physical Review Letters*, vol. 108, p. 193902, May 2012.
- [16] A. R. Davoyan, A. M. Mahmoud, and N. Engheta, “Optical isolation with epsilon-near-zero metamaterials,” *Optics Express*, vol. 21, pp. 3279–3286, February 2013.
- [17] N. Engheta, “Pursuing near-zero response,” *Materials Science*, vol. 340, pp. 286–287, April 2013.
- [18] A. Alù, M. G. Silveirinha, A. Salandrino, and N. Engheta, “Epsilon-near-zero (enz) metamaterials and electromagnetic sources: Tailoring the radiation phase pattern,” *Physical Review B*, vol. 75, p. 155410, April 2007.
- [19] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, ch. 8 and 3. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- [20] K. F. Lee, *Principles of Antenna theory*, pp. 67–68. John Wiley & Sons, 1984.
- [21] S. Lannebère and M. G. Silveirinha, “Infinite lifetime states with quantized energy in a core-shell plasmonic nanoparticle.”.
- [22] *Electromagnetic Wave Theory*, ch. 6, pp. 788–789. Cambridge, USA: EMW Publishing, 2005.
- [23] B. Edwards, A. Alù, M. E. Young, M. Silveirinha, and N. Engheta, “Experimental verification of epsilon-near-zero metamaterial coupling and energy squeezing using a microwave waveguide,” *Physical review letters*, vol. 100, p. 033903, January 2008.
- [24] *Nonlinear Optics*, ch. 1, pp. 1–4 and 10–11. Rochester, New York USA: Academic Press, Elsevier, third ed., 2008.