



FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Análise Comparativa de Modelos de Cálculo de Estruturas de Betão Armado

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na Especialidade de Mecânica Estrutural

Autor

Vital Nai Quei Pereira Araújo

Orientadores

Carla Maria Araújo Fernandes Costa Pereira

Maria Helena Freitas Melão Barros

Esta dissertação é da exclusiva responsabilidade do seu autor, não tendo sofrido correções após a defesa em provas públicas. O Departamento de Engenharia Civil da FCTUC declina qualquer responsabilidade pelo uso da informação apresentada

Coimbra, Outubro, 2013

AGRADECIMENTOS

Os meus agradecimentos às minhas orientadoras Professora Doutora Carla Ferreira e Professora Doutora Helena Barros, pelo tempo despendido, acompanhamento e incentivo durante o percurso de pesquisa e realização da tese.

Um agradecimento especial aos meus amigos e colegas do Departamento de Engenharia Civil e outros, nomeadamente o Mestre e Eng.º Rui Costa, o Mestre e Eng.º Vladimiro Vaz, a Mestre Eng^a Sara Gomes, pela ajuda no uso de *softwares* de Elementos Finitos entre outros.

Um profundo e grato agradecimento aos meus queridos irmãos, irmãs e pais pelo apoio e confiança demonstrados ao longo da minha vida académica até o fim do curso.

RESUMO

Nesta tese realizou-se uma abordagem não linear de uma viga contínua de betão armado, de dois tramos de um trabalho experimental anteriormente feito por Ana Maria S. Teixeira Bastos (1997, FEUP), e compara-se os resultados com programas comerciais de cálculo de elementos finitos. Na análise não linear utilizaram-se modelos elasto-plásticos e fendilhação para betão, aplicados através do Método de Elementos Finitos (*MEF*).

Efectuou-se o dimensionamento de uma estrutura com modelos de análise-linear elástica com ou sem redistribuição. Comparou-se os resultados experimentais das vigas com os obtidos com os programas comerciais de *software midas*[®] *FEA* e *Abaqus*[®] *CAE 6.10-1*, usando elementos finitos bidimensionais, modelo elasto-plástico e modelo de fendilhação distribuída (“*Smearred Crack*”). E obteve-se conclusões relativas aos modelos utilizados, documentando de forma conveniente os casos de aplicação das ferramentas e modelos.

Palavras-chave: Fendilhação distribuída (“*Smearred Crack*”); Análise estrutural; Análise linear elástica; Análise não-linear; Lei constitutiva; Elasto-plástico; Métodos dos Elementos Finitos (*MEF*) bidimensional.

ABSTRACT

This thesis made an approach to linear and non-linear analysis of a reinforced concrete beam, the two spans of structure an experimental work previously done by Ana Maria S. Teixeira Bastos (1997, FEUP). The results were compared with commercial software's of finite elements calculations. The elasto-plastic and smeared crack models are applied to two-dimensional formulations of Finite Element Methods (FEM).

The design of the structure considering the linear elastic behaviour with or without redistribution was made. The comparison of experimental results of beams with *midas*[®] *FEA* and *Abaqus*[®] *CAE 6.10-1* commercial software's was made, using two-dimensional finite elements with elasto-plasticity and the Smeared Crack models. The conclusions were made about the results obtained with the models used in the cases of application of the tools were documented in an appropriate way.

Key-Words: Smeared Crack; Structural Analysis; Linear Elasticity Analysis; Non-Linear Analysis; Constitutive Law; Elasto-Plastic; two-dimensional of Finite Element Method (*EFM*).

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Considerações iniciais	1
1.2	Objectivo e trabalhos.....	2
1.3	Organização do trabalho	2
2	MODELOS DE FENDILHAÇÃO	3
2.1	Modelos macromecânicos de fendilhação do betão	3
2.1.1	Fendilhação distribuída.....	4
2.1.2	A localização da fenda.....	6
2.1.3	A aderência da fendilhação de Modo I.....	6
2.1.4	Mecânica da fractura linear elástica.....	7
2.1.5	Modelo de multifendas fixas	8
3	MODELOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL	12
3.1	Análise linear elástica.....	12
3.2	Análise não linear	13
3.3	Análise plástica	13
3.4	Ductilidade do das secções	16
3.5	Lei constitutiva	17
3.6	Método dos Elementos Finitos	20
3.7	A relação constitutiva da elasticidade para estados planos de tensão.....	20
4	AS VERIFICAÇÕES AOS ESTADOS LIMITES DO EC 2	23
4.1	Bases para o cálculo	23
4.1.1	Estados limites.....	23
4.1.1.1	Estado limite último (ELU).....	23
4.1.1.2	Estado limite de serviço (ELS).....	23
4.1.2	Materiais	23
4.1.3	Betão	24

4.1.4	Aço	25
4.1.5	A ductilidade e redistribuição de esforços.....	25
5	ESTUDO EXPERIMENTAL EXISTENTE SOBRE VIGAS.....	29
5.1	Características do modelo de ensaio	30
5.1.1	Propriedades dos materiais de ensaio.....	31
5.1.2	Instrumentos utilizados dos ensaios.....	32
5.1.3	Comportamento teórico dos modelos dos ensaios	33
5.1.4	Descrição dos ensaios e resultados da viga V_1 e V_2	33
5.1.5	Esforços em rotura (Viga V_1).....	35
5.1.6	Os valores das extensões médias da armadura.....	37
5.1.7	Comparação dos resultados obtidos nos ensaios das duas vigas V_1 e V_2	38
6	MODELAÇÃO NUMÉRICA.....	40
6.1	Enquadramento	40
6.2	As propriedades dos materiais	40
6.2.1	Comportamento do betão.....	41
6.2.2	Parâmetros adoptados na modelação do betão	43
6.2.3	Comportamento do aço.....	43
6.3	Modelação numérica da viga	44
6.3.1	Tipo de elementos finitos adoptados de <i>software midas FEA e Abaqus 6.10-1</i>	44
6.3.2	Condições de carregamento e dos apoios	45
6.3.3	Definição da malha da viga	46
6.4	Comparação entre o estudo experimental e os programas.....	49
7	CONCLUSÕES FINAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	54
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	55
	ANEXO A	57
	A.1 - As tensões da viga 1. (<i>midas FEA</i>).....	57
	Deslocamento vertical (Viga V_1) do modelo dano plástico/ <i>Abaqus</i>	58
	Tensão principal (Viga V_1) do modelo dano plástico/ <i>Abaqus</i>	58
	Extensão principal (Viga V_1) do modelo dano plástico/ <i>Abaqus</i>	58
	Tensão axial (Viga V_1) do modelo dano plástico/ <i>Abaqus</i>	58

ANEXO B.....	59
B-1: As forças e momentos do início de fendilhação	59

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 - O Burj Dubai Skyscraper, estruturas de betão armado. (Conundrum, 2008)	1
Figura 2.1– Modelo de fendas distribuídas: (G_f – energia de fractura; w_u – abertura de fendas distribuídas)	4
Figura 2.2 - Sistema de eixos, deslocamentos relativos e tensões numa fenda.....	5
Figura 2.3 – Aderência da fendilhação e curva de amolecimento para o <i>Modo I</i> de betão.....	6
Figura 2.4 - Modos de fractura (ACI, 1999).	7
Figura 2.5 – Lei de amaciamento “ <i>Softening</i> ”	7
Figura 2.6 – Referencial local da fenda. (Rots e Blaauwendraad, 1989)	9
Figura 3.1- Distribuição dos momentos numa viga contínua a uma carga pontual segundo uma análise linear elástica e elasto-plástica (Carmo, 2004)	15
Figura 3.2 - Comportamento reológico elástico, perfeitamente plástico	15
Figura 3.3 – Fissuração em leque na zona de aplicação da carga e diagrama dos esforços na armadura de tracção (Leonhardt, 1979).....	17
Figura 3.4 - Modelo físico para o comportamento elástico e plástico.....	18
Figura 3.5 - Modelo de comportamento elástico perfeitamente plástico.....	19
Figura 3.6 - Diagrama bilinear de tensões-extensões	19
Figura 4.1- Diagrama parábola-rectângulo para o betão comprimido	24
Figura 4.2 - Diagrama tensões-extensões para o aço (traccionado e comprimido)	25
Figura 4.3 - Redistribuição dos momentos flectores num tramo contínuo de viga. (Gonçalves, 2008).	27
Figura 5.1 – Análise de estrutura como viga contínua, (Carmo, 2004).....	29
Figura 5.2– Esquema do ensaio. Diagrama dos momentos flectores elásticos	30
Figura 5.3 - Armaduras das vigas dos ensaios	31
Figura 5.4 - Diagrama de tração da armadura de flexão.....	31
Figura 5.5 - Aspecto de ensaio e instrumento utilizado para a viga V_2 (Bastos, 1997).....	32
Figura 5.6 - Momentos resistentes últimos das vigas (Bastos, 1997).....	33
Figura 5.7- Aspecto do ensaio e rotura para a viga V_1 (Bastos, 1997).....	34
Figura 5.8 - (a): Diagramas cargas-deslocamentos dos pontos de aplicação das cargas da viga V_1 ; (b): Extensões (‰) na armadura superior (Bastos, 1997).....	35
Figura 5.9 - Aspecto da rotura de ensaio V_2 . (Bastos, 1997)	35
Figura 5.10 – Extensões médias entre as secções, S_1 e S_2 à carga de rotura experimental (Bastos, 1997).....	36
Figura 5.11 – Diagrama dos momentos flectores elásticos e momento médio na zona central obtido do ensaio de V_1 , ($F_{u,exp} = 150 \text{ kN}$ e $M_{elast} = -38.4 \text{ kNm}$). (Bastos, 1997)	36

Figura 5.12 – Verificação do valor da extensão média experimental (Viga V_2). (Bastos, 1997)	37
Figura 5.13 – Diagramas cargas-deslocamentos da secção de aplicação da carga (Bastos, 1997).	39
Figura 6.1 – Modelos ortogonais das fendas.	41
Figura 6.2 – Lei constitutiva do betão, (a) tracção, (b) compressão e (c) elástico (FEA, Analysis and Algorithm).	42
Figura 6.3 – O modelo de malha de elementos finitos (20x20 mm) de <i>midas FEA</i> para a viga de ensaios.	44
Figura 6.4 – O modelo de malha de elementos finitos (20x20 mm) de <i>Abaqus</i> para a viga de ensaios.	44
Figura 6.5 – Quatro nós de elementos contínuos de isoparamétrico no espaço XY . (Essex, 1995).	45
Figura 6.6- Estrutura da viga do ensaio experimental (mm)	45
Figura 6.7 – Esquema estrutural do ensaio numérico $\frac{1}{2}$ de viga (mm)	46
Figura 6.8 – Divisão das malhas em pequenas dimensões dominadas Elementos Finitos.....	46
Figura 6.9 – Diagrama de tensão e extensão para o betão à compressão (a) e à tracção (b), (Gomes, 2010).	47
Figura 6.10 - Diagrama Cargas-deslocamentos dos pontos de aplicação das forças no programa de <i>midas FEA</i> e <i>Abaqus</i> para a viga V_1 .	48
Figura 6.11 – Diagrama de comparação (<i>Cargas F-Deslocamentos</i>) onde mostra as diferenças nos diagramas de deslocamentos pelo <i>midas FEA</i> , <i>Abaqus</i> e trabalhos experimentais.	49
Figura 6.12 – Início da fendilhação da flexão para as vigas V_1 e V_2 (<i>midas FEA</i>).	50
Figura 6.13 - Início da fendilhação no apoio central da viga V_1 . (<i>midas FEA</i>).	51
Figura 6.14 – Início da fendilhação de flexão na zona de aplicação das cargas da viga V_1 . (<i>midas FEA</i>).	51
Figura 6.15 – Início de fendilhação no apoio central da viga V_2 . (<i>midas FEA</i>).	52
Figura 6.16 – Início de fendilhação de flexão da viga V_2 . (<i>midas FEA</i>).	52
Figura 6.17 – Deformação vertical de $\frac{1}{2}$ viga V_1 . (a) Momento inicial e (b) momento de rotura. (<i>Abaqus</i>).	53

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 4.1 – Coeficientes de redistribuição segundo o Eurocódigo-2.	26
Quadro 4.2 – Valor reduzido do momento flector resistente de cálculo	28
Quadro 4.3 – Análise linear com redistribuição dos momentos flectores num tramo contínuo de viga.	28
Quadro 5.1 - A percentagem e os varões da armadura longitudinal das duas vigas ensaiadas	30
Quadro 5.2 - Características do aço utilizado nos varões longitudinais e transversais	31
Quadro 5.3 - A característica do betão utilizado no ensaio	32
Quadro 5.4 – Dimensionamento segundo o diagrama elástico.	33
Quadro 5.5 – Resultados obtidos dos ensaios das vigas	34
Quadro 5.6 – Os valores das extensões na armadura de tracção	38
Quadro 5.7 – Valores da extensão média na zona de referência (entre as secções S_1 e S_0).	38
Quadro 5.8 – Comparação dos resultados e experimentais (Vigas V_1 e V_2).....	38
Quadro 6.1 – Valores de G_{f0} em função de $D_{máx}$	42
Quadro 6.2 – Propriedades do betão usadas nas simulações numéricas.....	43
Quadro 6.3 – Propriedades do aço das armaduras.	43
Quadro 6.4 – Tempo de cálculo na simulação da viga numérica da malha de 20 mm (<i>midas FEA e 1/2 viga de Abaqus</i>).	47
Quadro 6.5 – Os parâmetros usados do betão no modelo Dano Plástico de <i>Abaqus</i>	47
Quadro 6.6 – Os parâmetros de plasticidade do betão (HKS Inc de Rhode Island).	47

SIMBOLOGIA

A_c	- Área da secção transversal
$2D$	- Bidimensional
A_s	- Área de secção de uma armadura para betão armado
b	- Largura da alma em viga
$D_{máx}$	- Dimensão máxima do agregado
d	- Altura útil de secção transversal
E	- Módulo de elasticidade
ELU	- Estado Limite Último
$EC 2$	- Eurocódigo 2
ELS	- Estado Limite de Serviço
E_c	- Módulo de elasticidade do betão
E_{cm}	- Módulo de elasticidade secante do betão
E_s	- Valor de cálculo do módulo de elasticidade do aço de armadura
F	- Força aplicada
F_c	- Valor de cálculo da força de compressão no betão
F_s	- Valor de cálculo de tracção
L	- Comprimento do vão
LN	- Linha neutra
G_f	- Energia de fractura
G_{f0}	- Valor base de energia de fractura (dependente da dimensão máxima do agregado)
FIB	- Fédération Internationale du Béton
f_{ck}	- Valor característico da tensão de rotura do betão à compressão aos 28 dias de idade
f_{cd}	- Valor de cálculo de tensão de rotura do betão à compressão
f_{cm}	- Tensão média de rotura à compressão dos provetes cilíndricos
f_y	- Tensão de cedência do aço
f_{yk}	- Valor característico da tensão de cedência à tracção do aço das armaduras de betão armado
f_t	- Tensão última do aço das armaduras para betão armado/rotura à tração do aço das armaduras para betão armado
f_{tk}	- Tensão característica de rotura do aço
h	- Largura das fendas (<i>midas FEA</i>), altura da secção

I	- Momento de inércia da secção
M	- Momento flector
M_{cr}	- Momento-curvatura
$MC 90$	- Código Modelo 90
MEF	- Métodos dos Elementos Finitos
$1/R$	- Curvatura da secção
n	- Expoente
w	- Abertura das fendas
\underline{N}	- Matriz de transformação
β	- Ângulo característico
ε	- Extensão
ε_{c0}	- Extensão do betão à compressão correspondente ao início da cedência
ε_{c2}	- Extensão necessária para se atingir a tensão de rotura do betão à compressão
ε_{cu}	- Extensão última do betão em compressão
ε_{cu2}	- Extensão última
ε_c^{el}	- Extensão elástica de compressão
ε_c^{pl}	- Extensão plástica equivalente de compressão acção
ε_{sm}	- Extensão média da armadura tendo em consideração a contribuição do betão à tracção entre fendas
ε_{smr}	- Extensão da armadura calculada em secção não fendilhada para a carga de fendilhação
ε_{cu}	- Extensão última do betão em compressão
β_1	- Coeficiente dependente das propriedades de aderência do aço
β_2	- Coeficiente dependente da duração das cargas
σ	- Tensão
σ_{sr}	- Tensão na armadura em secção fendilhada sob a carga de fendilhação
σ_s	- Tensão na armadura em secção fendilhada sob as cargas consideradas
δ	- Coeficiente de redistribuição
ρ	- Percentagem da armadura longitudinal de flexão
ν	- Coeficiente de Poisson
V_1	- Viga 1
V_2	- Viga 2
X_u	- Profundidade do eixo neutro no estado limite último após a redistribuição
z	- Braço binário das forças interiores
\emptyset	- Diâmetro do varão

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Os modelos teóricos e o recurso aos métodos numéricos, a par dos trabalhos experimentais, têm vindo a dar um grande contributo na análise das estruturas, de modo a garantir que a previsão do comportamento em estado limite último se aproxime do valor das solicitações máximas que as estruturas podem suportar.

Nas últimas décadas, o dimensionamento admitindo o regime linear elástico das estruturas mas com redistribuição de esforços devida à plastificação da armadura, a consideração da não linearidade do betão sob compressão e a fendilhação sob tração, são modelos frequentemente utilizados na previsão da capacidade resistente. Estes modelos de análise não linear assumem maior relevância com o aumento da capacidade resistente dos materiais como, por exemplo, com o uso cada vez mais frequente de betões de alta resistência empregues em estruturas de grande dimensão (Figura 1.1).



Figura 1.1 - O Burj Dubai Skyscraper, estruturas de betão armado. (Conundrum, 2008)

Nestes últimos anos têm sido desenvolvidos programas de cálculo automático de análise linear e não-linear e que são utilizados pelos projetistas no dimensionamento. O comportamento do betão armado é evidentemente não linear e esta não linearidade é acentuada desde valores baixos das cargas aplicadas. As tensões de compressão no betão podem atingir um valor máximo, a partir do qual se verifica um amaciamento. Como o betão tem uma resistência à tração muito reduzida, a não linearidade devida à fendilhação é um factor importante na análise de vigas. A utilização de modelos de fendilhação, que é distribuída na presença das armaduras, implica o conhecimento dos parâmetros utilizados pelos modelos. Por esta razão, é fundamental que os modelos numéricos sejam aferidos com resultados experimentais.

1.2 Objectivo e trabalhos

O objectivo principal desta tese é a utilização de modelos e programas de cálculo que permitam o dimensionamento de estruturas de betão armado em situações correntes e de interesse prático.

São analisadas estruturas hiperestáticas em que há resultados experimentais conhecidos. Efectua-se o dimensionamento de uma estrutura pelos modelos de análise linear elástica com e sem redistribuição. Analisam-se as vigas com o programa de Elementos Finitos *Midas FEA* e *Abaqus* usando o modelo elasto-plástico e de fendilhação distribuída.

1.3 Organização do trabalho

O trabalho é constituído por 7 capítulos e anexos. No primeiro capítulo faz-se uma introdução ao trabalho, descrevem-se os assuntos tratados e os objectivos propostos. No capítulo 2 são expostos os principais modelos de fendilhação, dando-se destaque especial aos modelos base implementados na modelação numérica utilizada. No capítulo 3 abordam-se os modelos de análise estrutural e uma breve referência ao Método dos Elementos Finitos. No capítulo 4 expõe-se as verificações aos estados limites últimos e de serviço do EC 2. O capítulo 5 expõe o procedimento experimental da análise de umas vigas da tese de doutoramento de Ana Maria S. Teixeira Bastos (DEC, FEUP). Explicou-se todo o processo de experiências elaboradas nessa tese, desde os materiais, execução dos modelos e método para o ensaio experimental da viga em betão armado. No capítulo 6 fez-se a análise não linear de vigas de betão armado usando programas computacionais e faz-se a análise comparativa com os resultados experimentais. No capítulo 7 apresentam-se as conclusões e desenvolvimentos possíveis em trabalhos futuros.

2 MODELOS DE FENDILHAÇÃO

Os elementos de betão armado com distribuição das armaduras apresentam, geralmente, comportamento não linear. Ao nível granular o betão é constituído por elementos com diferentes propriedades. Devido a esta heterogeneidade desenvolvem-se microfendas (Mie,1984), preponderantemente nas interfaces entre os inertes e a ligante de cimento, originando-se uma microestrutura anisotrópica com micro zonas de dano mais intenso que acabam por degenerar em bandas de fendilhação. A fendilhação é, conseqüentemente, uma das principais fontes da não linearidade apresentada pelas estruturas de betão. A simulação numérica adequada do comportamento deste tipo de estruturas passa pela modelação dos fenómenos associados à fendilhação do betão. Por este facto, tem-se assistido, desde o fim da década de sessenta, a um considerável esforço de desenvolvimento de modelos de fendilhação para a simulação do comportamento de estruturas de materiais frágeis.

2.1 Modelos macromecânicos de fendilhação do betão

Numa escala macroscópica, o modelo macromecânico é um fenómeno associado ao comportamento do material. Quando analisadas sob o ponto de vista macroscópico, podem ser modeladas como um meio contínuo e isotrópico, sendo aplicáveis leis constitutivas formuladas em termos de tensões médias e extensões médias. Existem dois modelos base utilizados no Método dos Elementos Finitos (MEF) que representam a fendilhação em estruturas de betão: a fendilhação distribuída (Rashid,1968) e a fendilhação discreta (Ngo e Scordelis; Nilson, 1968; Hillerborg *et al.*, 1976):

- 1. Fendas discretas.
- 2. Fendas distribuídas (Figura 2.1).

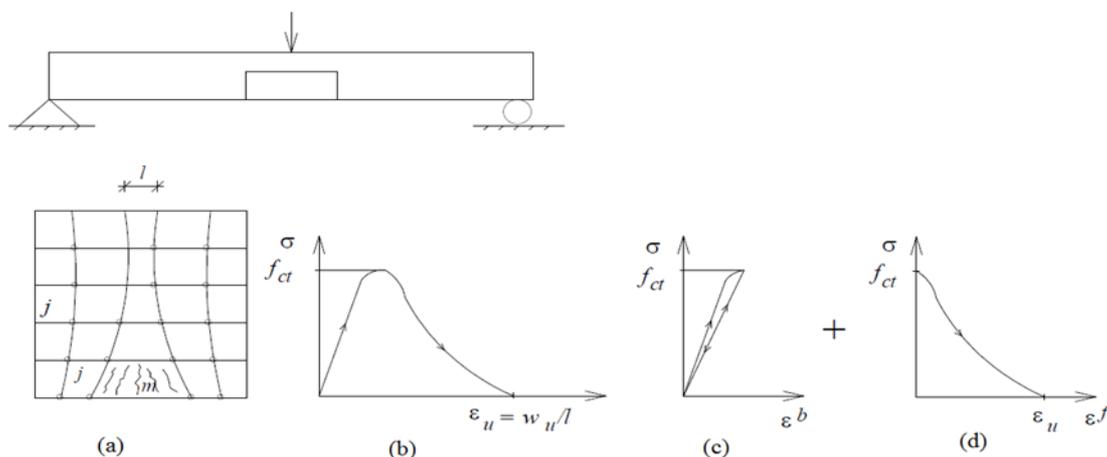


Figura 2.1– Modelo de fendas distribuídas: (G_f – energia de fractura; w_u – abertura de fendas distribuídas)

Nos modelos de fendas distribuídas, quando num elemento finito o material fica fendilhado (elemento m na Figura 2.1 (a)), as fendas consideram-se distribuídas no volume do material associado ao ponto de amostragem em causa. A lei constitutiva apresentada na Figura 2.1 (b) modela o comportamento macroscópico do betão fendilhado em termos de extensões totais. Caso se considere a deformação do betão fendilhado como a soma de deformação do betão com a deformação nas fendas, terá de se ter em conta a lei constitutiva do betão entre fendas (Figura 2.1 (c)) com a lei constitutiva que descreve o comportamento da fenda (Figura 2.1 (d)).

2.1.1 Fendilhação distribuída

Os dois deslocamentos relativos numa fenda estão apresentados na Figura 2.2, onde s é o escorregamento entre as duas faces do plano da fenda e w a abertura da fenda que surge sob a tensão normal à orientação da fenda e a tensão tangencial, definidas num sistema de eixo local. Os deslocamentos são transformados em extensões que dependem da área do elemento finito em que se inserem. (Garcia, 2009).

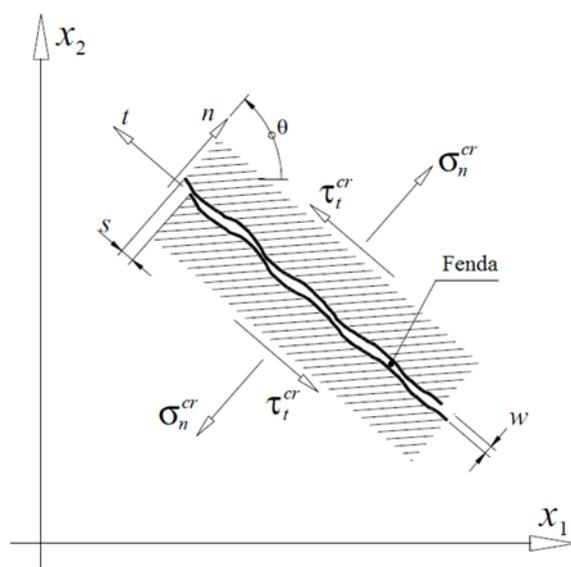


Figura 2.2 - Sistema de eixos, deslocamentos relativos e tensões numa fenda.

O modelo de fendilhação distribuída tem como objectivo modelar o comportamento do betão traccionado quando o valor da tensão ultrapassa o valor da resistência à tração do betão. Este modelo admite a fendilhação uniformemente distribuída no elemento fendilhado. Com esta abordagem as discontinuidades locais são distribuídas por uma área de influência dentro do elemento finito. (Blaauwendraad, 1985). Embora na rotura se verifique a localização das fendas e abertura das fendas localizadas, a micro-fendilhação é distribuída no betão pelas armaduras até valores próximos da rotura, tornando o modelo de fendilhação distribuída (nomenclatura inglesa “*Smeared Crack*”) (Rashid, 1968, Suidan e Schnobrich, 1973, Bazant *et al.*, 1979-1983, Litton 1974, Bazant e Gambarova 1980, Borst e Nauta 1985, Rots *et al.* 1985, Rots 1988) adequado na análise de vigas e foi o modelo escolhido para os casos em estudo neste trabalho.

A extensão total é dividida em duas componentes, uma correspondente ao betão entre fissuras e a outra correspondente à própria fissura. Esta decomposição permite formular diretamente, e de forma consistente, as leis do modelo da banda fendilhada a partir das relações abertura de fendas determinadas a partir de resultado experimental, respeitando integralmente a lei constitutiva do betão não fendilhado, já que esta é formulada de forma independente. A fissuração pode ser assim combinada de forma transparente com a elasticidade, a plasticidade ou a viscoelasticidade, assim como com os efeitos da temperatura, numa formulação unificada. (Borst, 1987).

Tal como nos modelos de extensão total, o início do processo de fractura ocorre após a violação do critério da tensão máxima, estabelecido no espaço das tensões principais. (Pimentel, 2004).

2.1.2 A localização da fenda

O comportamento não linear do betão é frequentemente denominado pela abertura da fenda previamente existente no elemento de betão. Neste contexto analisam-se as fendas diagonais que ocorrem instantaneamente e determinam a rotura por tensão de corte no betão armado.

A deformação localizada na fendilhação discreta, inspirou investigadores para desenvolver o modelo de fendilhação discreta (e.g. Ngo e Scordelis, 1967, Blaauwendraad e Grootenboer, 1981, Ingraffea e Saouma, 1984). Com esta abordagem as descontinuidades geométricas devidas às fendas são incorporadas na idealização da estrutura.

2.1.3 A aderência da fendilhação de Modo I

O modelo de aderência da fendilhação, denominado modelo da fenda fictícia (em nomenclatura inglesa “*fictitious crack model*”). (Hillerborg et al.), foi bem sucedido na análise da fractura do betão, pedra e materiais constituídos por cimento. A função do amolecimento $\sigma = f(w)$ é o principal componente do modelo de aderência da fendilhação. Esta função é uma propriedade do material que relaciona a tensão σ , que actua nas faces das fendas, correspondendo à abertura da fenda w (ver Figura 2.3). No modo I da abertura das fendas, a tensão σ é perpendicular às faces da fenda. (Gálves et al, 2002).

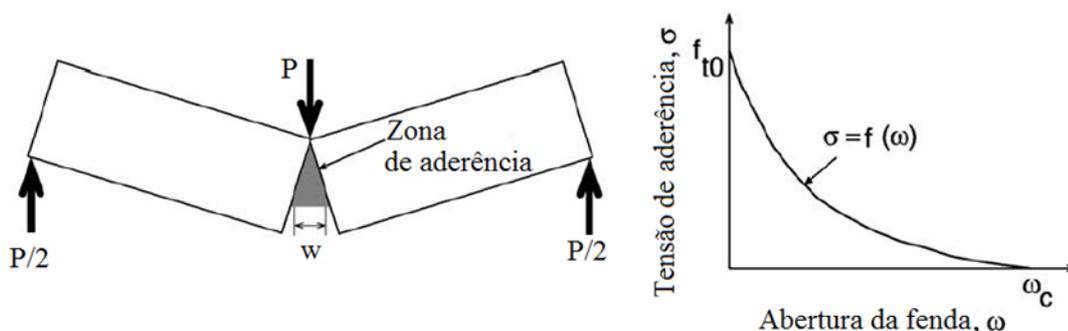


Figura 2.3 – Aderência da fendilhação e curva de amolecimento para o *Modo I* de betão

2.1.4 Mecânica da fractura linear elástica

Apresentam-se os principais modos de fractura (ver Figura 2.4), que podem ocorrer em estruturas de materiais frágeis. Os modos I e II de fractura, são submetidas a estado plano de tensão. O modo I de fractura é a abertura relativa das faces da fenda no plano da estrutura e o modo II de fractura é o deslizamento relativo das faces da fenda no plano da estrutura.

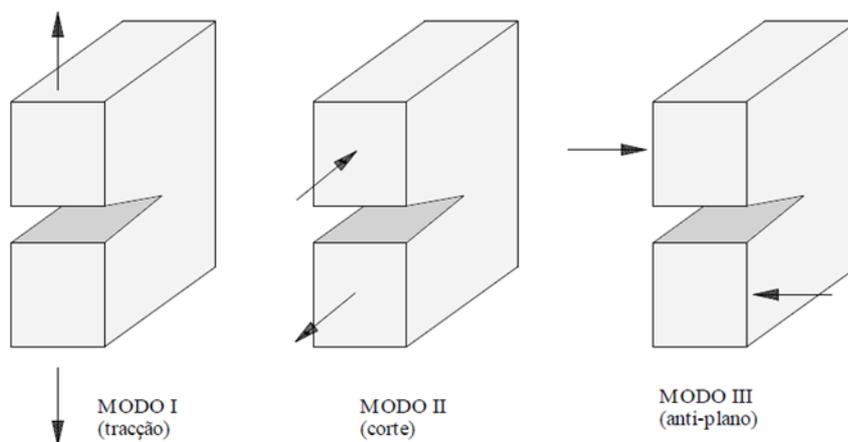


Figura 2.4 - Modos de fractura (ACI, 1999).

A lei representada na Figura 2.5 é a lei de amaciamento (“*Softening*” na nomenclatura inglesa), simula o *modo I* de fractura. A energia de fractura é a energia despendida na formação de uma fenda de área unitária, podendo ser quantificada a partir da área sob a curva $\sigma - w$ representada da Figura 2.5 (Barros, 2012).

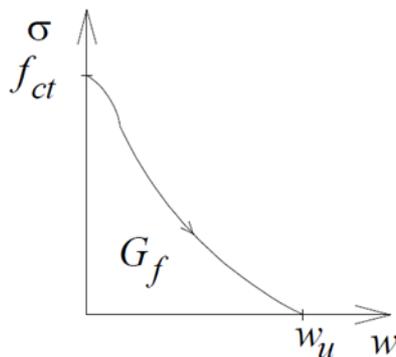


Figura 2.5 – Lei de amaciamento “*Softening*”.

A consideração da relação $\sigma - w$ como uma propriedade do material leva à definição de um parâmetro material definido pela área do diagrama $\sigma - w$. Este é o parâmetro que Hilleborg denominou de energia de fractura G_f , sendo w_u é a abertura da fenda a partir da qual o material deixa de transmitir tensões e a resistência à tração f_{ct} .

A análise comparativa entre resultados experimentais e resultados obtidos com modelos numéricos demonstra que os modelos de fendilhação que utilizam a resistência, a energia de fractura, a forma da curva de amolecimento e a largura da banda de fendilhação como parâmetros de fractura intrínsecos ao material permitem obter resultados bastante satisfatórios em termos de previsão do comportamento de estruturas constituídas por materiais frágeis. (Barros, 2012).

2.1.5 Modelo de multifendas fixas

Este modelo conjuga o modelo de fendilhação distribuída com a localização da abertura de fendas em função das leis da mecânica da fratura. A fendilhação surge após violação do critério da tensão máxima no betão, no referencial principal, e essa direcção é a direcção da fenda no elemento. No caso tridimensional, a extensão total é decomposta por (expressão 1),

$$\underline{\varepsilon}_{(6 \times 1)} = \underline{\varepsilon}^{cr}_{(6 \times 1)} + \underline{\varepsilon}^{co}_{(6 \times 1)} \quad (1)$$

Onde o expoente (cr) indica uma grandeza respeitante às fissuras e (co) uma grandeza respeitante ao betão não fissurado. Na expressão (1), o vetor das extensões no sistema global de eixos x,y,z vem dado por:

$$\underline{\varepsilon}_{(6 \times 1)} = \{\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yx} \ \gamma_{zx}\}^T \quad (2)$$

Tradicionalmente, a lei tensão-extensão em fendas distribuídas apresenta os eixos de ortotropia do material, nos quais passam a ser estabelecidas as leis constitutivas (Figura 2.6), o eixo n refere-se à direcção normal à fenda (associado ao modo I de fractura) e os eixos s, t às direcções tangenciais à fenda (Modo II e Modo III).

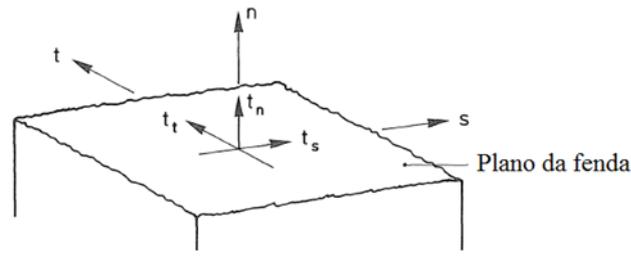


Figura 2.6 – Referencial local da fenda. (Rots e Blaauwendraad, 1989)

As relações constitutivas relativas à evolução da abertura das fissuras são estabelecidas no referencial local, n, s, t . Neste referencial define-se o vector das extensões locais da fissura,

$$e^{cr} = \{\varepsilon_{nn}^{cr} \quad \gamma_{ns}^{cr} \quad \gamma_{nt}^{cr}\}^T \quad (3)$$

onde ε_{nn}^{cr} é a extensão normal à fenda, corresponde ao modo I (Figura 2.4) de fractura, γ_{ns}^{cr} e γ_{nt}^{cr} são as direcções das fendas. As extensões, no referencial global, podem ser obtidas a partir das do referencial local através de,

$$\underline{\varepsilon}^{cr} = \underline{N} \times \underline{e}^{cr} \quad (4)$$

em que \underline{N} é a matriz de transformação que reflete a orientação à fenda, dada por:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} l_n^2 & l_n l_s & l_t l_n \\ m_n^2 & m_n m_s & m_t m_n \\ n_n^2 & n_n n_s & n_t n_n \\ 2 l_n m_n & l_n m_s + l_s m_n & l_t m_n + l_n m_t \\ 2 m_n n_n & m_n n_s + m_s n_n & m_t n_n + m_n n_t \\ 2 n_n l_n & n_n l_s + n_s l_n & n_t l_n + n_n l_t \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde $l_n, m_n, n_n; l_s, m_s, n_s; l_t, m_t, n_t$ são as coordenadas dos versores dos eixos locais $n, s, e t$ da fissura, expressas no sistema global x, y e z .

No sistema de coordenada local, a tração na fissura define-se através do vector \underline{t}^{cr} ,

$$\underline{t}^{cr} = \{t_n^{cr} \quad t_s^{cr} \quad t_t^{cr}\}^T \quad (6)$$

t_n^{cr} é a tração correspondente ao modo I de fractura na fissura e t_s^{cr}, t_t^{cr} são as tensões de corte na fissura correspondentes aos modos II e III de fractura, respectivamente. A relação entre as tensões no referencial local e no global é expressa por:

$$\underline{t}^{cr} = \underline{D}^{cr} \times \underline{e}^{cr} \quad (7)$$

com \underline{D}^{cr} uma matriz de dimensão 3×3 (cheia e não simétrica), a incorporação dos três modos *I*, *II* e *III* de fractura no caso mais geral é dada por,

$$\underline{D}^{cr} = \begin{bmatrix} D_{11}^{cr} & D_{12}^{cr} & D_{13}^{cr} \\ D_{21}^{cr} & D_{22}^{cr} & D_{23}^{cr} \\ D_{31}^{cr} & D_{32}^{cr} & D_{33}^{cr} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Desta forma, a equação (7) incorpora as relações entre a distorção e a tensão normal à fenda, assim como a relação entre a extensão normal à fenda com a tensão de corte (Borst, 1991).

A matriz \underline{D}^{cr} pode ser simplificada, quando se consideram apenas as componentes da diagonal (38) que contêm os módulos de rigidez dos modos *I*, *II* e *III* de fratura:

$$\underline{D}^{cr} = \begin{bmatrix} D_I^{cr} & 0 & 0 \\ 0 & D_{II}^{cr} & 0 \\ 0 & 0 & D_{III}^{cr} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para completar o sistema de equações do modelo constitutivo é necessária uma relação entre as tensões e extensões no betão intacto. Essa relação assume a forma:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}^{co} \times \underline{\varepsilon}^{co} \quad (10)$$

Tendo em atenção a igualdade (1) e (4), vem:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}^{co} [\underline{\varepsilon} - \underline{N} \times \underline{e}^{cr}] \quad (11)$$

Pré-multiplicando (11) por \underline{N}^T e atendendo a (6) e (7), obtém-se a relação entre as extensões das fissuras no referencial local e as extensões totais no referencial global,

$$\begin{aligned} \underline{t}^{cr} = \underline{N}^T \times \underline{\sigma}; \quad \underline{t}^{cr} = \underline{D}^{cr} \times \underline{e}^{cr} &\Leftrightarrow \underline{\sigma} = \underline{D}^{co} [\underline{\varepsilon} - \underline{N} \times \underline{e}^{cr}] \\ \Rightarrow \underline{e}^{cr} = [\underline{D}^{cr} + \underline{N}^T \times \underline{D}^{co} \times \underline{N}]^{-1} \times \underline{N}^T \times \underline{D}^{co} \times \underline{\varepsilon} &\quad (12) \end{aligned}$$

que uma vez substituída em (11), conduz à relação geral entre as tensões e extensões totais,

$$\underline{\sigma} = \underline{D}^{crco} \times \underline{\varepsilon} \quad (13)$$

onde o expoente (^{crco}) se refere ao betão fendilhado. A matriz \underline{D}^{crco} vem expressa por:

$$\underline{D}^{crco} = \underline{D}^{co} \left[\underline{I} - \underline{N} \times \left[\underline{D}^{cr} + \underline{N}^T \times \underline{D}^{co} \times \underline{N} \right]^{-1} \times \underline{N}^T \times \underline{D}^{co} \right] \quad (14)$$

A implementação computacional de (13) requer a sua formulação em termos incrementais, o que pressupõe uma linearização na vizinhança do estado de tensão corrente. (Pimentel, 2004, pp. 98 -104).

Este modelo é o desenvolvido no *software* utilizado neste trabalho.

3 MODELOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

A avaliação da resistência de estruturas de betão armado é determinada pela verificação ao estado limite último da estrutura. A regulamentação do EC2 na secção 5.1.1 diz que o objetivo de uma análise estrutural é o de determinar a distribuição quer de esforços, quer de tensões, extensões e deslocamentos, em toda ou parte da estrutura. Sempre que necessário deverá ser efectuada uma análise local complementar. No dimensionamento de estruturas é necessário considerar a relação ações aplicadas-resposta da estrutura, através do comportamento dos materiais e da geometria da estrutura. O dimensionamento consiste na caracterização final da estrutura garantindo a verificação simultânea dos estados limites últimos e de serviço.

Na análise estrutural é importante efectuar idealizações, tanto ao nível da geometria como do seu comportamento da estrutura, que devem ser ajustados ao problema em estudo. Essas idealizações originam vários métodos de análise como, análise linear elástica, análise não linear, com redistribuição de esforços e análise plástica. Os métodos de análise têm de satisfazer as condições de equilíbrio e de compatibilidade e são utilizados para verificação aos estados limites últimos.

É importante conhecer a ductilidade da estrutura através da capacidade de rotação plástica nas secções para poder garantir a capacidade de deformação necessária no método de análise. Para a verificação dos estados limites de serviço de acordo com EC2, a análise linear elástica é suficiente. Segundo o EC2 a análise linear deve ser aplicada na verificação dos estados limites de serviço.

3.1 Análise linear elástica

Segundo o EC2 a análise linear elástica, pode ser utilizada na verificação aos estados limites últimos. Esta análise está baseada na hipótese clássica da Resistência de Materiais segundo a qual existe uma proporcionalidade entre a solicitação e a resposta, tanto ao nível da secção como ao nível da estrutura (proporcionalidade entre as ações e as flechas, rotações, reações e esforços). A análise com redistribuição de esforços é adequada para vigas contínuas mas não deve ser utilizada no dimensionamento de pilares e pórticos. No betão armado os resultados

da análise linear elástica só se aproximam da realidade física se não houver fendilhação na zona tracionada de betão e, na zona comprimida os níveis de tensão forem baixos, o que acontece apenas em serviço, e se a armadura se encontrar em fase elástica. Na fase de rotura tanto o betão como o aço já terão ultrapassado a sua fase elástica, sendo a análise não linear ou plástica mais apropriada para a determinação da distribuição de esforços. Para efetuar esta análise é só necessário conhecer as dimensões das secções dos elementos que constituem a estrutura e os materiais utilizados. (Carmo, 2004).

“A análise elástica admite um comportamento linear elástico dos materiais com a manutenção da rigidez constante em todo o processo e traduz muito aproximadamente o valor dos esforços instalados para níveis de carga inferiores à carga de fendilhação do betão sendo aceitável a sua aplicação em fase de serviço. Já em estado limite último, fase em que tanto o aço como o betão ultrapassaram largamente o seu domínio elástico, ou quase elástico, a análise não linear ou o cálculo plástico parecem ser mais adequados à determinação da distribuição dos esforços realmente produzidos nas secções específicas. A análise não linear utiliza as leis constitutivas reais dos materiais permitindo acompanhar a evolução dos esforços e deformações durante todo o carregamento. A sua aplicação obriga no entanto a uma definição rigorosa dos parâmetros envolvidos na análise, sendo um processo delicado que, como tal, não se justifica nos dimensionamentos correntes. O método plástico é particularmente simples possibilitando não só a verificação da segurança da estrutura como também um pré-dimensionamento das estruturas correntes”. (Bastos, 1997).

3.2 Análise não linear

Aos materiais que têm comportamento não linear é necessário caracterizar a relação σ - ε . O comportamento de betão armado é determinado pelo comportamento dos dois materiais ($\sigma - \varepsilon$ do betão e aço), que definem a relação momento-curvatura (M - $1/r$) das secções e a relação carga-deslocamento.

3.3 Análise plástica

(Braestrup & Nielsen, 1993), concretizam os teoremas fundamentais da análise plástica “*Se existir uma possibilidade de uma estrutura romper sob uma solicitação aplicada isso verificar-se-á e poderá então concluir-se que a estrutura não apresenta segurança*” (primeiro

princípio) e, “ se existir uma possibilidade da estrutura suportar uma determinada solicitação a Natureza encontrará a melhor forma de o conseguir” (segundo princípio). “Assim, se o engenheiro encontrar um caminho único que seja de transferência das acções aplicadas para os apoios, poderá concluir da estabilidade da estrutura”.

A análise plástica assume que os materiais têm um comportamento elasto-plástico. As deformações elásticas são desprezáveis quando comparadas com as deformações plásticas. “A definição de comportamento plástico surge quase como oposição à definição de comportamento elástico. Comportamento elástico pressupõe que as deformações são proporcionais às acções e que as deformações são imediatamente anuladas quando as acções são retiradas da estrutura. Comportamento plástico pressupõe que não existe uma proporcionalidade entre as deformações e as acções, e que as deformações são irreversíveis. Um comportamento perfeitamente plástico tem a particularidade das deformações plásticas aumentarem para uma acção de valor constante. Por simplificação, por vezes supõe-se que os elementos de betão armado têm um comportamento elasto-plástico perfeito.” (Carmo, 2004).

Figura 3.1 mostra uma análise elasto-plástica de uma viga contínua submetida a cargas pontuais nos dois tramos. M_{apoio} é o momento que provoca a plastificação da secção sobre apoio intermédio e $M_{\text{vão}}$ é o momento que provoca a plastificação das secções a meio vão do tramo. O primeiro diagrama resulta da consideração de que os materiais têm um comportamento linear elástico enquanto que o segundo diagrama ocorre devido à formação de uma rótula plástica na secção do apoio, secção agora com um comportamento perfeitamente plástico, e da consideração de que a restante estrutura tem um comportamento linear elástico até ao instante em que se formam mais duas rótulas plásticas (mecanismo de colapso). Neste modelo admite-se que, para cargas superiores à que originou a formação da primeira rótula plástica a viga comporta-se não como uma viga contínua mas sim como duas vigas simplesmente apoiadas ligadas entre si por uma rótula de momento constante.

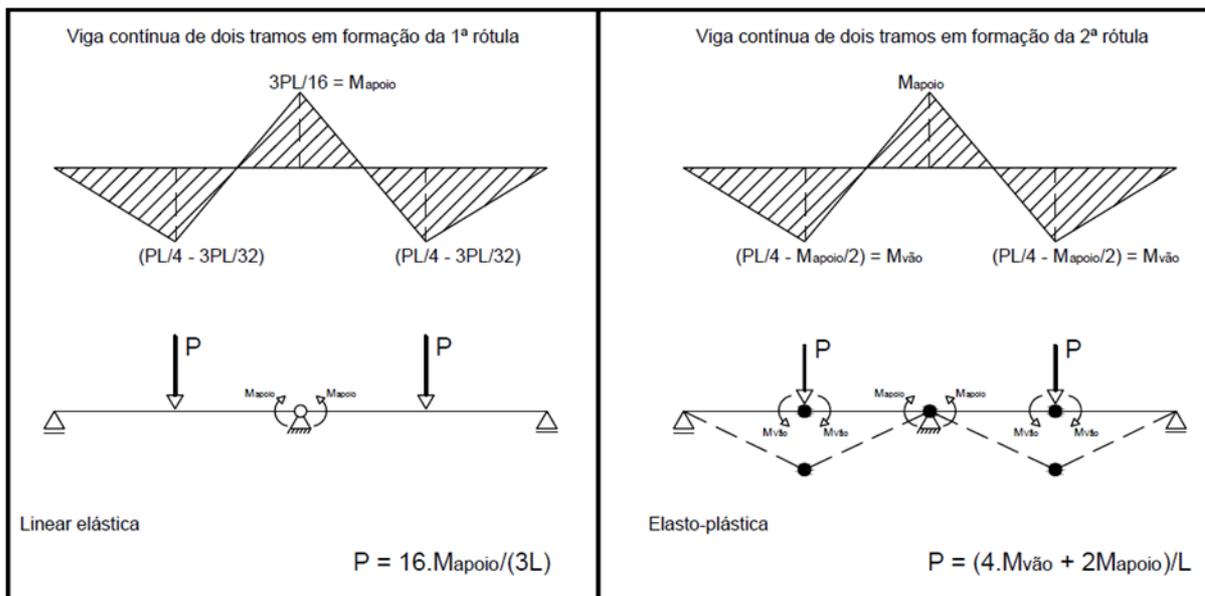


Figura 3.1- Distribuição dos momentos numa viga contínua a uma carga pontual segundo uma análise linear elástica e elasto-plástica (Carmo, 2004)

Em materiais dúcteis com um pronunciado patamar de cedência e uma tensão limite de proporcionalidade próxima da tensão de cedência, como o aço macio, pode admitir-se uma lei constitutiva idealizada como se indica na figura (Figura 3.2). Um comportamento reológico designado por elástico perfeitamente plástico.

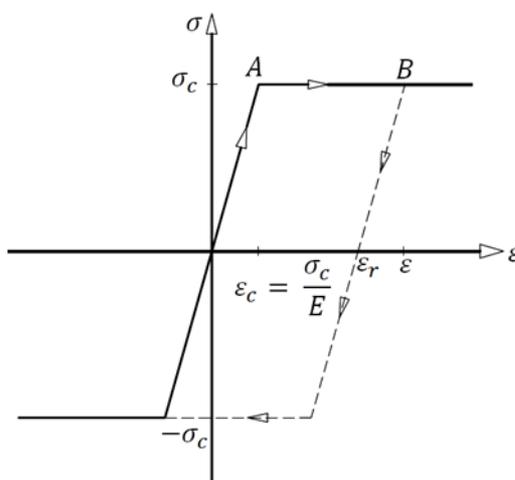


Figura 3.2 - Comportamento reológico elástico, perfeitamente plástico

A extensão correspondente ao patamar de cedência é, de uma maneira geral, um múltiplo da extensão máxima em regime elástico. Por exemplo, num aço macio a cedência inicia-se com uma extensão de aproximadamente 0,1% e o endurecimento começa a verificar-se para $\epsilon \approx 1.5\%$. A extensão de cedência é neste caso 14 vezes superior à extensão em regime

elástico. Devido a esta alteração o comportamento da estrutura modifica-se ou seja, nos elementos em que a cedência se atinge em primeiro lugar, a tensão mantém-se com esse valor até ao colapso da estrutura, *desde que não haja decréscimo de deformação*. (Silva, 1999).

3.4 Ductilidade do das secções

“Os parâmetros que influenciam a ductilidade das secções são:

- O grau de confinamento da zona comprimida de betão introduzido pelos estribos, especialmente importante em betões de fraca resistência (Rüsch e Stöckl, ref. em (Leonhardt, 1979)), exerce um efeito favorável na capacidade de rotação das secções, promovendo uma maior valia da extensão máxima do betão à compressão depois de atingida a tensão de escoamento do aço sob carga quase constante, o que corresponde a uma deformação de rótula ideal;
- A aderência aço betão: a diminuição da aderência nas zonas em que o aço atinge a cedência – o aumento rápido da extensão longitudinal e a contracção transversal do varão em cedência originam uma diminuição do atrito entre este e o betão circundante, com redução significativa da aderência entre os dois materiais – produz uma rápida progressão da zona de cedência que poderá afectar a capacidade de rotação da secção (Bigaj e Walraven, 1993)
- A altura da secção: influencia, por efeito de escala, a capacidade de rotação que segundo Hillerborg (ref. em Bigaj e Walraven, 1993), vem inversamente proporcional à altura da secção. No entanto, estudos mais recentes realizados por Alca *et al.* (1997), sobre vigas de altura variável de betão de alta resistência, não permitiram verificar tal influência.
- O efeito da deformação por esforço transversal: nas zonas de aplicação de cargas concentradas (ou nos apoios) desenvolve-se uma fissuração em forma de leque, decorrente do comportamento de treliça (Figura 3.3), que conduz a um aumento das deformações da armadura de tracção, deixando de se verificar a correspondência directa entre o momento flector na secção e o correspondente esforço na armadura longitudinal. Leonhardt, 1979, nos ensaios de Stuttgart sobre vigas de dois tramos, verificou, por medição das extensões sobre os varões, que a tensão na armadura se mantinha aproximadamente constante num comprimento igual à altura da secção, para cada lado da secção do apoio intermédio (o que justifica a imposição regulamentar da translação do diagrama da força na armadura longitudinal de tracção) diminuindo depois parabolicamente. Este efeito dá origem a um maior comprimento de

plastificação da armadura o que é acompanhado de um estrangulamento da zona comprimida de betão com aumento da sua extensão naquelas secções.

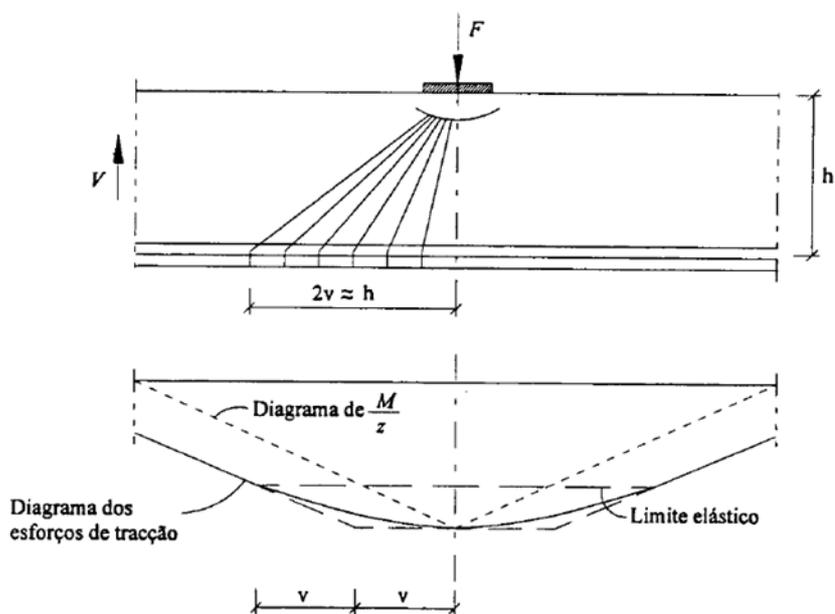


Figura 3.3 – Fissuração em leque na zona de aplicação da carga e diagrama dos esforços na armadura de tracção (Leonhardt, 1979)

- A esbelteza da peça (relação entre o comprimento e a altura da secção), que governa a relação entre as deformações das fibras, a curvatura da secção e a rotação global – para vigas de altura constante o comprimento da rótula plástica aumenta com o aumento do vão ((Scholz, 1993), Calvi *et al*, 1993);
- A forma do diagrama de momentos: o comprimento da rótula seria teoricamente igual ao da zona de momento constante. Assim, no caso de uma peça submetida a flexão circular, a rótula estender-se-ia a todo o comprimento da peça. Verifica-se, na realidade, que as maiores rotações concentram-se nas zonas mais fissuradas formando-se aí rótulas múltiplas cujo comprimento, segundo as observações de Dilger (ref em Leonhardt, 1979), é igual ou superior à altura da secção.” (Bastos, 1997)

3.5 Lei constitutiva

A lei constitutiva define o comportamento reológico do material, isto é, estabelece as relações entre os tensores das tensões e das extensões. A reologia do material é condicionada pelos complexos fenómenos físicos que acontecem ao nível do átomo, da molécula, do cristal, etc.

Uma vez que a quantificação do comportamento do material ainda não pode ser feita por via dedutiva, tem que utilizar-se a via fenomenológica baseada em ensaios experimentais. A lei constitutiva é a componente potencialmente mais complexa da relação força-deslocamento, uma vez que pode ser condicionada por diversos factores, tais como plasticidade, viscosidade, viscoelasticidade, anisotropia, etc. Em Engenharia Civil os materiais mais utilizados são os materiais resistentes como aço e betão que podem ser considerados de comportamento isotrópico com as mesmas características em todas as direcções ou são simétricas em relação a um plano de orientação arbitrária”. (Silva, 1999).

O conceito pode ser entendido com modelos físicos de comportamento. O comportamento elástico pode ser facilmente entendido imaginando uma mola à qual se aplicou um esforço. Quando se aplica a força a mola deforma-se, aumentando essa força, aumenta a deformação e, retirando a força, a mola recupera as dimensões iniciais (Figura 3.4).

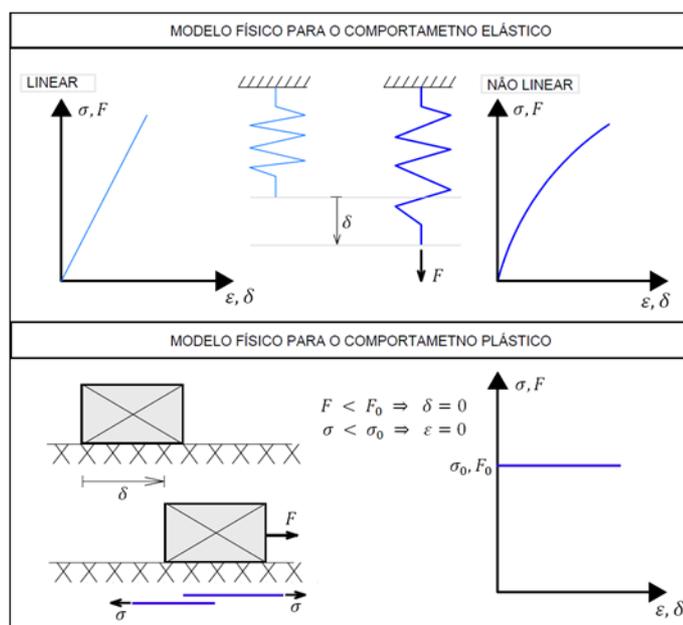


Figura 3.4 - Modelo físico para o comportamento elástico e plástico.

A relação entre a força na mola e a sua deformação é a mesma quer a força esteja a aumentar ou a diminuir, isto é, o seu comportamento é o mesmo em fase de carga e em fase de descarga. Se a força for proporcional à deformação, a lei constitutiva do modelo é (K -constante)

$$F = K \times \delta \Rightarrow \sigma = E \epsilon \quad (\text{Lei de Hooke}) \quad (15)$$

Um comportamento elástico perfeitamente plástico pode modelar-se, juntando em série o modelo elástico com o modelo plástico (Figura 3.5).

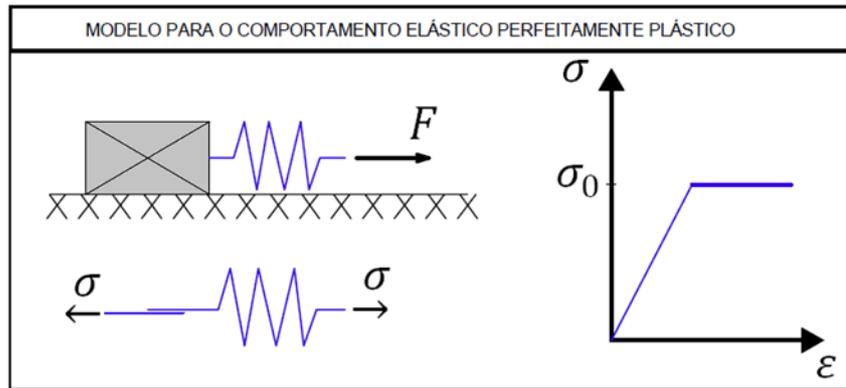


Figura 3.5 - Modelo de comportamento elástico perfeitamente plástico

As leis constitutivas unidimensionais às deformações instantâneas (Figura 3.6 e 3.7).

Lei elástica perfeitamente plástica de aço de construção:

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon & \text{se } \varepsilon < 0.002 \\ \sigma = f_{sy} & \text{se } \varepsilon \geq 0.002 \end{cases} \quad (16)$$

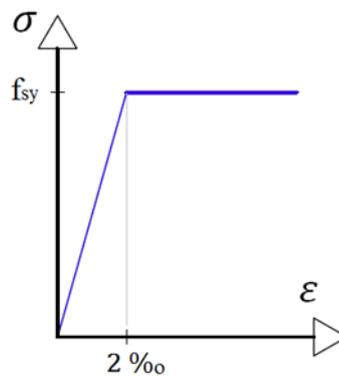


Figura 3.6 - Diagrama bilinear de tensões-extendões

Lei não linear (parábola – rectângulo) para betão comprimido:

$$\begin{cases} \sigma = f_c (\varepsilon - 250 \varepsilon^2) \times 10^3 & \text{se } \varepsilon < 0.002 \\ \sigma = f_c & \text{se } 0.002 \leq \varepsilon < 0.0035 \end{cases} \quad (17)$$

3.6 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método de análise matemática que consiste na discretização de um meio contínuo em elementos finitos, cada um mantendo as mesmas características originais. Os elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos pelos modelos matemáticos, para que sejam obtidos os resultados desejados. Este método teve origens no final do século XVIII, quando Gauss propôs a utilização de funções para a solução de problemas matemáticos e pouco evoluiu devido à dificuldade e à limitação existente no processamento de equações algébricas. Mais tarde, por volta de 1950, os avanços tecnológicos na computação, permitiram o desenvolvimento deste tipo de análise. No ano de 1956, Ray Clough, Turner, Topp e Martins, trabalhando num projecto de aeronaves para a Boeing, sugeriram um método de análise estrutural, similar ao *MEF*. Em 1960, estes autores utilizaram pela primeira vez o nome de Método dos Elementos Finitos, descrevendo-o. A partir de então, esta análise foi sendo aplicada em diversas áreas da Engenharia e outras afins. (Lotti *et al*, 2006).

Actualmente verifica-se que a maioria dos projectistas em engenharia civil procuram um *software* intuitivo para a obtenção de resultados credíveis na análise dos elementos da estrutura. Uma introdução à correspondente programação em *software*, constitui certamente um factor que conduzirá um futuro projectista a uma utilização mais segura dos programas de análise de estruturas.

3.7 A relação constitutiva da elasticidade para estados planos de tensão

As relações tensões - deformações deduzem-se da equação constitutiva da elasticidade tridimensional,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E}; & \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E}; & \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2\nu(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; & \gamma_{xz} &= \frac{2\nu(1+\nu)}{E} \tau_{xz}; & \gamma_{yz} &= \frac{2\nu(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (18)$$

E – Módulo de elasticidade; ν – coeficiente de poisson.

A relação matricial entre tensões e deformações; $\sigma = D \times \varepsilon = D \times \varepsilon$, onde D é a matriz constitutiva, que é simétrica.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = 0; \quad \varepsilon_z = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (19)$$

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y)}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x)}{E} \\ \gamma_{xy} = \frac{2 \times (1 - \nu)}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_z = \frac{\nu \times (\sigma_x + \sigma_y)}{E} \end{cases} \quad (20)$$

Resolvendo as três primeiras equações anteriores (20), da relação entre as três tensões ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$), e as correspondentes deformações obtêm-se:

$$\sigma_x = \frac{E \times (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)}{1 - \nu^2}; \quad \sigma_y = \frac{E \times (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)}{1 - \nu^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{E}{1 - \nu^2} \gamma_{xy} \quad (21)$$

Modificando o valor de σ_x e σ_y na expressão de ε_z obtida na equação (20), conclui-se:

$$\varepsilon_z = -\nu \times (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (22)$$

A deformação transversal e_z pode obter-se a partir da função e_x e e_y . Estados planos de deformação;

$$\varepsilon_z = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu \times (\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu \times (\sigma_x + \sigma_z)}{E} = 0 \\ \varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \nu \times (\sigma_x + \sigma_y)}{E} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{2 \times (1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Da condição em ε_z deduz-se que $\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$. Ao substituir este valor nas equações

E resolvendo-as em função de ε_x , ε_y , τ_{xy} chega-se a (24):

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E \times (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \times \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - \nu} \varepsilon_y \right) \\ \sigma_y = \frac{E \times (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \times \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1 - \nu} \varepsilon_x \right) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2 \times (1 + \nu)} \gamma_{xy} \end{cases} \quad (24)$$

Sendo assim obtida a matriz da elasticidade D para estado planos de deformação. (Simões, 2006).

4 AS VERIFICAÇÕES AOS ESTADOS LIMITES DO EC 2

As bases de cálculo utilizadas no dimensionamento e as verificações dos elementos de betão armado (vigas, pilares e fundações) seguem o EC2: Projecto de estruturas de betão – Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios. (Gonçalves, 2008).

O regulamento permite ao projectista tirar partido da ductilidade do elemento de betão armado na análise e dimensionamento aos estados limites últimos ao considerar possível os vários tipos de análise atrás mencionadas.

4.1 Bases para o cálculo

4.1.1 Estados limites

Os dois tipos de estados limites são considerados na verificação de segurança:

4.1.1.1 Estado limite último (ELU)

O estado limite último diz respeito ao colapso da estrutura, ou outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação no todo ou em parte, do funcionamento da mesma.

4.1.1.2 Estado limite de serviço (ELS)

O estado limite de serviço relaciona-se com a durabilidade da estrutura, aparência física, conforto e boa utilização funcional da mesma.

4.1.2 Materiais

A viga de betão armado é constituída por betão e aço. As suas relações tensão-extensão são determinadas a partir dos valores característicos das tensões de rotura, tensões de cedência e extensões desses materiais.

4.1.3 Betão

No dimensionamento de secções transversais, o Eurocódigo-2 propõe três leis distintas para as relações tensões-extensões, $\sigma_c - \varepsilon_c$, de cálculo do betão à compressão. No presente estudo utilizou-se a relação tensão-extensão parábola-rectângulo (Figura 4.1), definida pelas equações (25) e (26).

$$\sigma_c = f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^a \right], \quad \text{para } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad (25)$$

$$\sigma_c = f_{cd}, \quad \text{para } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \quad (26)$$

O valor do parâmetro ε_{cu2} depende da classe do betão e encontra-se indicado no quadro do EC2 do seu anexo. Tendo em conta o valor de $\varepsilon_{cu2} = 3.5 \text{ ‰}$, para classes inferiores a C50/60.

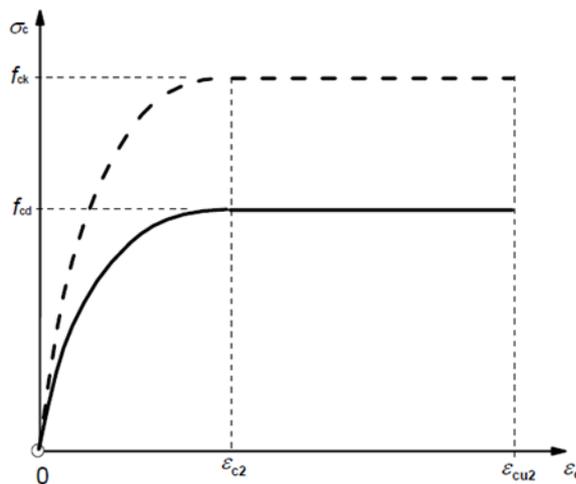


Figura 4.1- Diagrama parábola-rectângulo para o betão comprimido

4.1.4 Aço

Existem dois tipos distintos de diagramas tensão-extensão de cálculo para a armadura ordinária, ambos são referidos no Eurocódigo-2 (Figura 4.2).

- Diagrama bi-linear com o segundo ramo horizontal.
- Diagrama bi-linear, com o segundo ramo inclinado até uma extensão limite ε_{ud} .
O declive do segundo ramo é definido pelos pontos $(\varepsilon_{yd}, f_{yd})$ e $(\varepsilon_{uk}, kf_{yk}/\gamma_s)$.

A forma analítica para o diagrama tensão-extensão, $\sigma - \varepsilon$, do aço para o primeiro caso é dada por,

$$\sigma = \begin{cases} E_s \varepsilon & \text{se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd} + E_h (\varepsilon - \varepsilon_{yd}) & \text{se } \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ud} \end{cases} \quad (27)$$

E_s é o módulo de Young de aço, igual a 200 GPa e, ε_{yd} é o valor de cálculo da extensão correspondente à tensão de cedência do aço dada pela relação f_{yd}/E_s , ε_{ud} é o valor de cálculo da extensão limite, que se assumiu ser igual a 90% do valor característico da extensão última, i.e., $0.9\varepsilon_{uk}$, γ_s é o factor parcial para aço, igual a 1.15.

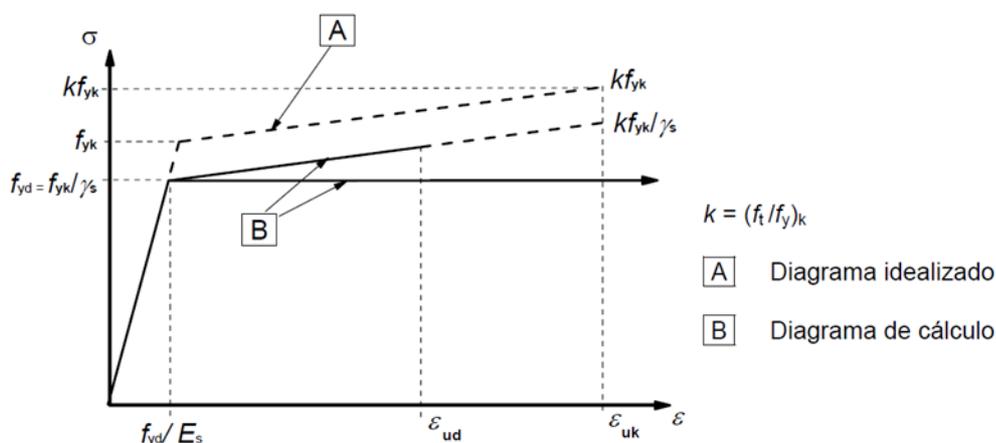


Figura 4.2 - Diagrama tensões-extensões para o aço (traccionado e comprimido)

4.1.5 A ductilidade e redistribuição de esforços

Os vários regulamentos (EC-2 e REBAP) permitem a utilização da análise linear elástica seguida de uma redução dos momentos máximos negativos por meio de coeficientes de redistribuição, δ , e de ajuste dos esforços nas restantes secções de modo a haver equilíbrio estático. A ductilidade depende fundamentalmente da percentagem das armaduras ou os coeficientes de redistribuição, o parâmetro x/d , distância do eixo neutro à fibra mais

comprimida sobre altura útil da secção e o efeito da geometria da secção inclui as propriedades mecânicas dos materiais.

As disposições regulamentares de dimensionamentos e disposições construtivas para assegurar que a estrutura tenha o comportamento apropriado relativamente ao modelo idealizado no dimensionamento consideram alguns critérios:

- Determinem limites à profundidade da linha neutra, x/d , em função do nível de redistribuição de esforços que se pretende.
- Definem classes de ductilidade para os aços e condicionam o uso dos aços menos dúcteis a determinados tipos de análise.
- Determinem limites, máximo e mínimo, à taxa de armadura longitudinal de tracção relativamente ao comportamento dúctil.

No Eurocódigo-2, secção 5.5, uma análise linear elástica com redistribuição limitada no caso de vigas contínuas que, têm uma relação entre vãos adjacentes entre 0,5 e 2, a redistribuição dos momentos flectores pode ser efetuada sem uma verificação explícita da capacidade de rotação, desde que (Quadro 4.1):

Quadro 4.1 – Coeficientes de redistribuição segundo o Eurocódigo-2.

Coeficiente de redistribuição (δ)	Resistência do betão/ Aço
$\delta \geq k_1 + k_2 x/d$	$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$
$\delta \geq k_3 + k_4 x/d$	$f_{ck} > 50 \text{ MPa}$
$\delta \geq k_5 = 0.7$	Armaduras da classe B e C
$\delta \geq k_6 = 0.8$	Armaduras da classe A
Os valores de k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 e k_6 são dados no respectivo Anexo Nacional	
k_1	0.44
$k_2 = k_4$	$1.25 (0.6 + 0.0014/\varepsilon_{cu2})$
k_3	0.54

Para o cálculo de redistribuição de momentos de vigas de ensaios (Bastos, 1997):

O EC2 permite o cálculo de redistribuição o que implica multiplicar os momentos flectores de cada extremidade por um coeficiente de redistribuição (δ), pelo que o resultado é o momento redistribuído, variando o coeficiente de redistribuição entre 0.7 e 1, o objectivo é reduzir o valor do momento flector nos apoios e aumentar a meio vão (Figura 4.3).

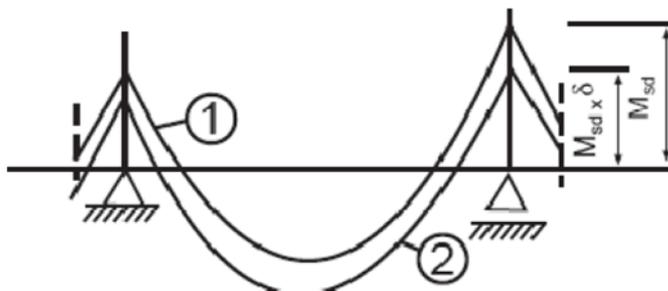


Figura 4.3 - Redistribuição dos momentos flectores num tramo contínuo de viga. (Gonçalves, 2008).

O coeficiente de redistribuição a multiplicar pelo momento flector do respectivo apoio deve ser:

$$\delta \geq K_1 + K_2 \times \frac{x_u}{d} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (28)$$

Os valores de K_1 , e K_2 a utilizar são indicados no respectivo anexo Nacional (ver Figura 5.3).

$$\frac{x_u}{d} \leq 0.45 \quad (29)$$

$$0.7 \leq \delta \leq 1 \quad (30)$$

Versão de EC2-2009 não tem a limitação imposta na equação (30)

Os passos de cálculo da distribuição de uma forma iterativa são:

$$\mu = \frac{M}{bd^2 f_{cd}} \quad (31)$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bd f_{cd}} \quad (32)$$

$$\alpha = \frac{x_u}{d} \quad (33)$$

$$M_{redistrib.} = M_{sd} \times \delta \quad (34)$$

No seguinte Quadro 4.2 representa os valores reduzidos calculados pela tabela e ábacos de dimensionamento de acordo com o EC 2. (Helena Barros e Joaquim Figueiras).

Quadro 4.2 – Valor reduzido do momento flector resistente de cálculo

Flexão simples duplamente armada	<i>Viga 1</i>	<i>Viga 2</i>
Momento no apoio (M_{sd} (kNm))	-49.0	-29.0
Área da secção rectangular (A (cm ²))	0.15 × 0.22	0.15 × 0.22
Área das armaduras (A _s (cm ²))	4.02	8.04
Valor reduzido do momento flector resistente de cálculo (μ)	0.366	0.217
Altura reduzida da linha neutra (α)	0.6034	0.3072

No quadro 4.3, obteve-se o valor de cálculo para o momento de redistribuição pelo coeficiente (δ) para as vigas de ensaios pelo EC 2.

Quadro 4.3 – Análise linear com redistribuição dos momentos flectores num tramo contínuo de viga.

<i>Vigas de ensaios</i>	<i>Viga 1</i>	<i>Viga 2</i>
Altura útil da secção (d)	0.185	0.185
Profundidade do eixo neutro no estado limite último após redistribuição (X_u)	0.112	0.057
K_1	0.44	0.44
Extensão última (ϵ_{cu2})	3.5 ‰	3.5 ‰
K_2	1.25	1.25
Coef. Distribuição (δ)	1.194	0.82
Momento de redistribuição ($M_{redistrib.}$ (kNm))	-58.52	-23.90

Para a viga V₁, o coeficiente de distribuição é maior que um, logo não se verifica a sua capacidade de rotação nesse apoio.

5 ESTUDO EXPERIMENTAL EXISTENTE SOBRE VIGAS

O estudo pretende que as vigas contínuas sejam representativas, em termos de comportamento estrutural, de uma parte de estrutura de maior dimensão apresentada como na Figura 5.1.

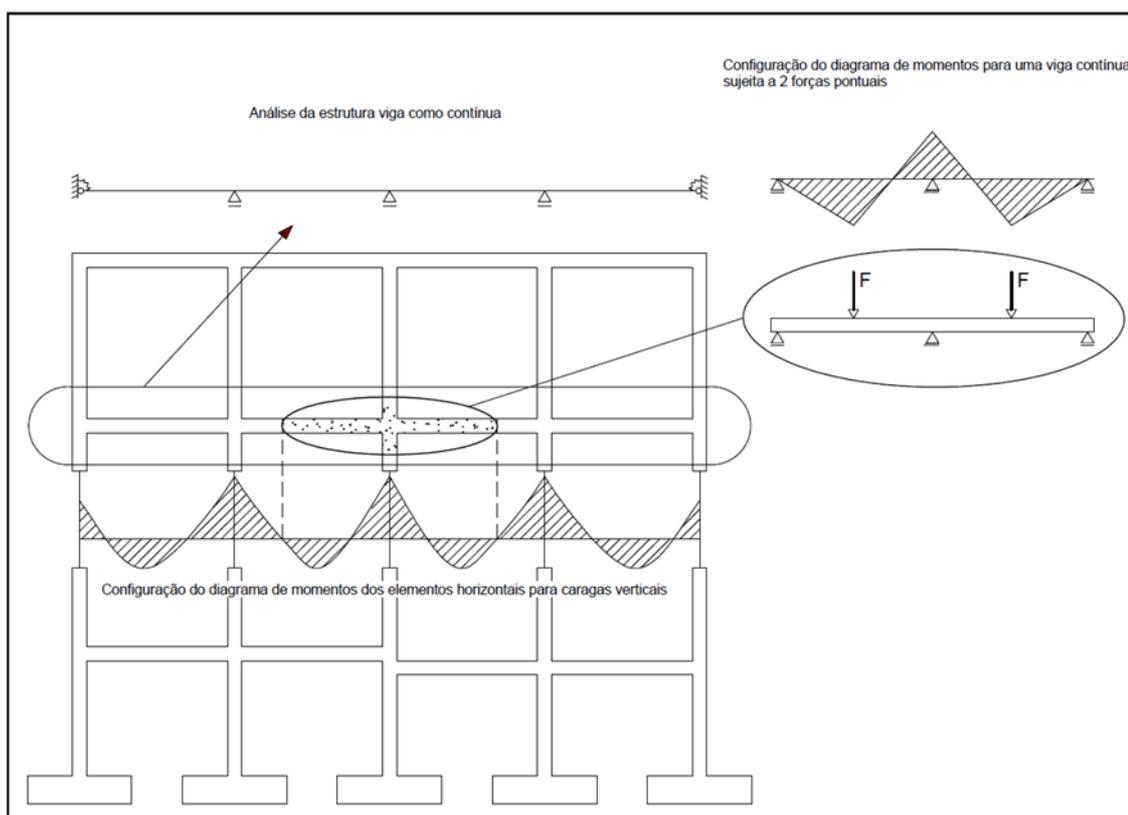


Figura 5.1 – Análise de estrutura como viga contínua, (Carmo, 2004)

Apresenta-se um resumo do estudo de um modelo experimental exposto na tese de doutoramento intitulada, “*Aplicação de teoria da plasticidade ao dimensionamento de peças lineares de betão em estado último de resistência*” (Bastos, 1997). Indica-se uma análise de vigas contínuas de betão armado, dimensionadas segundo os esforços elásticos e com uma redistribuição de 50% do momento flector de continuidade.

5.1 Características do modelo de ensaio

A viga contínua de dois tramos com o comprimento de 1.4 m entre apoios (Figura 5.2 e Figura 5.3), de secção rectangular $b \times h = 0.15 \times 0.22 \text{ m}^2$, solicitada por duas cargas simétricas aplicadas a um terço do comprimento do vão relativamente ao apoio central, que introduzem momentos elásticos no apoio de aproximadamente o dobro do valor dos correspondentes máximos nos vãos. (Bastos, 1997).

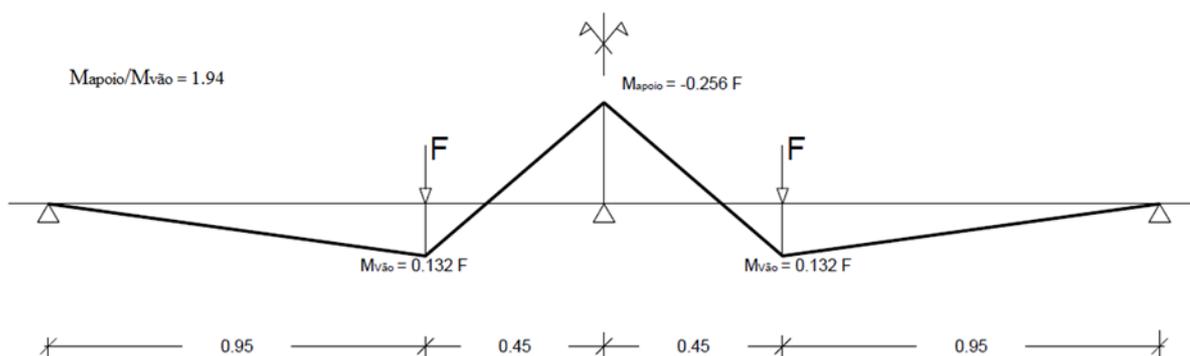


Figura 5.2– Esquema do ensaio. Diagrama dos momentos flectores elásticos

Realizaram-se os dois ensaios muito lentamente, com vários incrementos de carga de valor aproximadamente igual a 5 kN , com intervalos aproximados no início do carregamento, para detecção da carga de fendilhação, e na fase final para observação do mecanismo de rotura. Ocorreram os dois ensaios de duas vigas V_1 e V_2 de características parecidas (Quadro 5.1), diferindo apenas na armadura longitudinal na viga V_1 , concordando com o diagrama elástico. No segundo modelo, viga V_2 , as armaduras foram invertidas de modo a originar uma redistribuição de 50% no vão e no apoio da viga (Figura 5.3).

Quadro 5.1 - A percentagem e os varões da armadura longitudinal das duas vigas ensaiadas

	viga V_1	viga V_2
Armadura longitudinal (mm)	2Ø16	4Ø16
Percentagem da armadura longitudinal (ρ)	1.45 %	2.9 %
Armadura transversal, nos dois segmentos centrais	2Ø8 mm //5 cm	
Armadura transversal, entre as cargas e o apoio central	2Ø6 mm//12 cm	

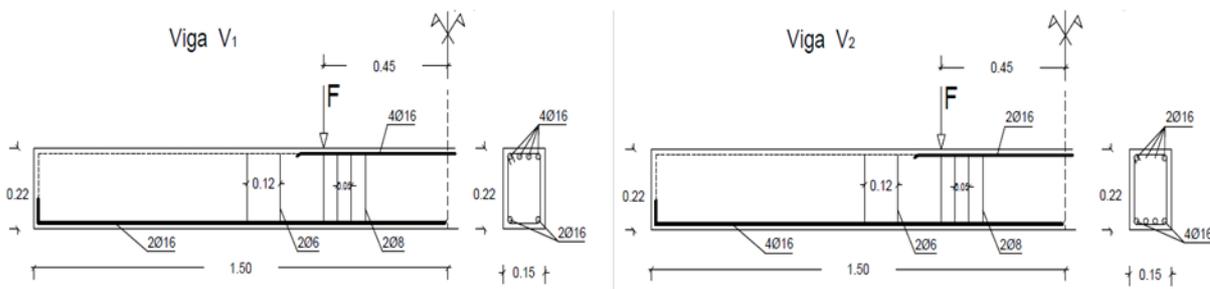


Figura 5.3 - Armaduras das vigas dos ensaios

5.1.1 Propriedades dos materiais de ensaio

O Quadro 5.2 representa as características das armaduras utilizadas nos ensaios de viga 1 e 2.

Quadro 5.2 - Características do aço utilizado nos varões longitudinais e transversais

Aço	f_y (MPa)	f_t (MPa)	f_t/f_y	E_s (GPa)	ϵ_u (‰)
Varões longitudinais (Ø16 mm)	440	827	1.8	200	15.7
Varões transversais (Ø8 mm; Ø6 mm)	350 ou 370	455 ou 450		200	

No comportamento à tração a armadura exibiu uma longa deformação até a rotura, portanto de características especialmente indicadas para o objectivo em causa, isto é, com uma ductilidade suficiente para que fosse alcançada a redistribuição de momentos pretendida (Figura 5.4).

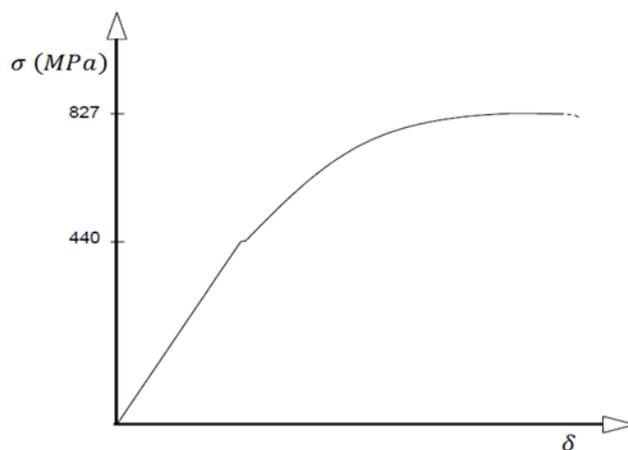


Figura 5.4 - Diagrama de tração da armadura de flexão

As propriedades mecânicas do betão usado no ensaio das vigas (Quadro 5.3). A resistência do betão à compressão (f_{ck}) tem um valor aproximado e a resistência média do betão à tracção, determinada a partir da resistência à compressão (f_{ctm}). (Bastos, 1997).

Quadro 5.3 - A característica do betão utilizado no ensaio

Betão	f_{ck} (MPa)	f_{ctm} (MPa)
Resistência à compressão	25.95	---
Resistência média à tracção	---	827

5.1.2 Instrumentos utilizados dos ensaios

LVDT montados. A determinação das rotações no meio das secções transversais distanciadas de 56.5 cm, o sistema foi localizado simetricamente em relação à secção a meio vão O tipo de equipamento de laboratório de estruturas para os ensaios: comparadores indutivos de deslocamento (LVDT), células de carga e extensómetros eléctricos de resistência (Figura 4.4). A instrumentação ligada a um sistema de aquisição multicanal de registo semi-contínuo (HP 3497A) e ligado a um computador de acesso a toda informação do processo. Os deslocamentos nas secções críticas e rotações no apoio entre os vãos foram medidos durante os ensaios para a viga V_2 (Figura 5.5), e para a viga V_1 através de célula de carga, e as extensões na armadura longitudinal superior, a meio vão, por meio de extensómetros eléctricos colados nos varões antes da sua moldagem. Na Figura 5.5, as abraçadeiras metálicas transversais distanciadas de 56.5 cm, ligadas por barras metálicas próximas das faces superiores e inferior das vigas, são para a determinação das rotações os comparadores indutivos que foram integrados desse sistema. Nas extremidades das barras, tinham liberdade de rodar no interior de dois veios, possibilitando a medição dos deslocamentos no meio das secções transversais pelos da viga.

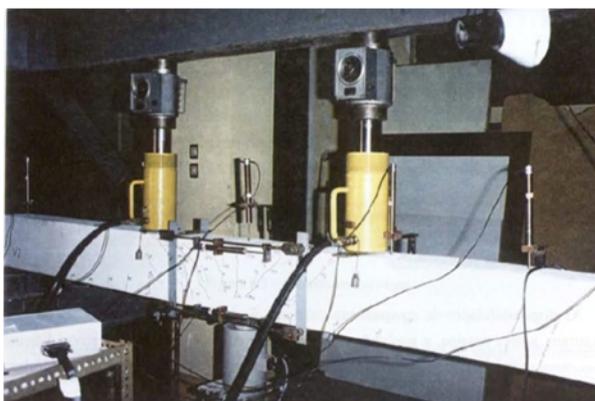


Figura 5.5 - Aspecto de ensaio e instrumento utilizado para a viga V_2 (Bastos, 1997)

5.1.3 Comportamento teórico dos modelos dos ensaios

A viga V_1 mostra a formação quase simultânea das rótulas plásticas nos vãos e no apoio. Após uma ligeira redistribuição, formar-se-ia a segunda rótula no vão depois de um acréscimo de carga (Quadro 5.4), para a carga última (a). A viga V_2 , com armaduras dimensionadas para uma redistribuição de 50% do momento de continuidade, a formação da primeira rótula sobre o apoio central (b).

Quadro 5.4 – Dimensionamento segundo o diagrama elástico.

	1º Rótula (apoio central)	Acréscimo de carga	2º Rótula (vão)
	$F = F_{1^{rot}} (kN)$ (apoio central)	$\Delta F (kN)$	$F_u (kN)$
Viga V_1	191	10	201
Viga V_2	113	112	225

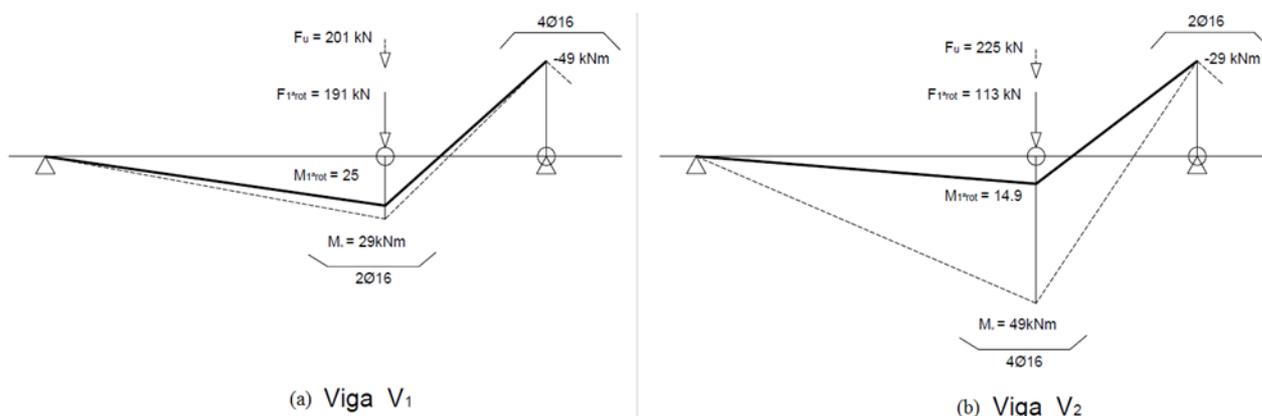


Figura 5.6 - Momentos resistentes últimos das vigas (Bastos, 1997)

5.1.4 Descrição dos ensaios e resultados da viga V_1 e V_2

A viga V_1 atingiu a rotura sob a carga $F_{u,exp}$, cerca de 75% do valor teoricamente esperado, por esgotamento da secção de um dos vãos (

Figura 5.7 (a)). Verificou-se a formação de fendas oblíquas que convergiam para o apoio central acompanhadas de fendas verticais de flexão sobre o apoio e nos vãos (

Figura 5.7 (b)). Na viga V_2 , a carga máxima foi de 224 kN, o valor aproximou-se da carga máximateórica (225 kN) obtida por cálculo plástico, traduzindo quase completa do mecanismo. A carga crítica $F_{cr} = 41.5 kN$, a fendilhação iniciou-se na viga V_2 , com as fendas

verticais de flexão na secção do apoio central e prolongaram a toda altura da viga (Figura 5.9).

Quadro 5.5 – Resultados obtidos dos ensaios das vigas

<i>Resultados obtidos</i>			
	$F_{u,exp} (kN)$	$F_{u,teo}(kN)$	$F_{u,exp} / F_{u,teo}$
Ensaio da viga V ₁	150	201	0.75
Ensaio da viga V ₂	224	225	0.99

A rotura foi originada pela progressão das fendas oblíquas mais acentuadas no vão direito, que se estenderam a toda a altura da viga, fazendo diminuir drasticamente a altura do bloco comprimido e conduzindo ao esgotamento da zona junto à aplicação da carga desse vão.

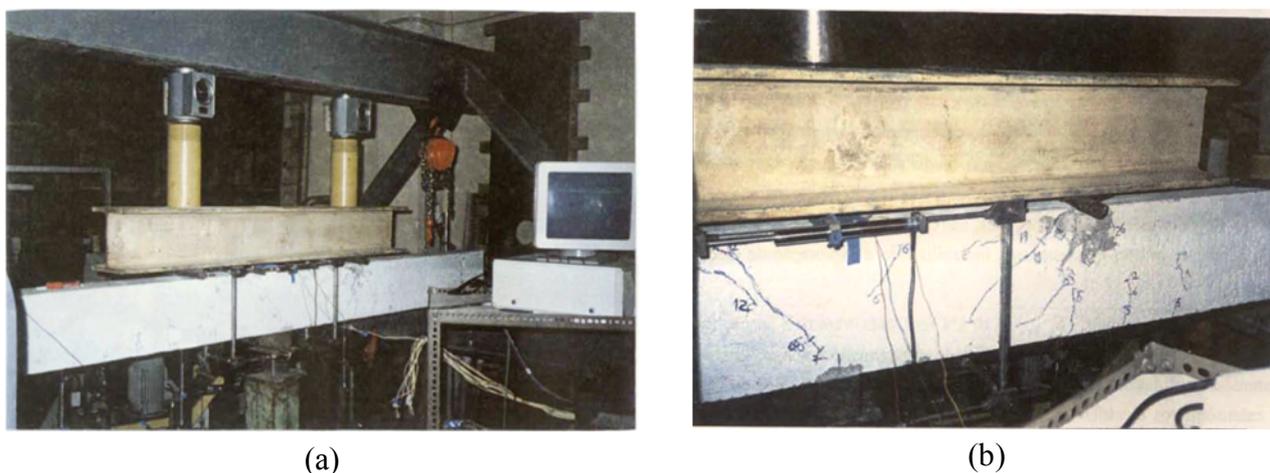


Figura 5.7- Aspecto do ensaio e rotura para a viga V₁ (Bastos, 1997).

Na figura (Figura 5.8 (a)), pode visualizar-se do comportamento da viga V₁ pelo diagrama cargas-flechas medidas nos pontos de aplicação das cargas, com valores superiores nas flechas do vão direito. A diferença encontrada a partir da $F \approx 30 kN$ faz pressupor um assentamento inicial, por ajuste dos dispositivos de apoio, que depois deixou de se manifestar.

Em cada tramo, para a carga máxima atingida $F_{u,exp} = 150 kN$, verifica-se no apoio central os valores das extensões medidas sobre varões da armadura obtidas por meio de extensómetros eléctricos neles instalados (Figura 5.8 (b)).

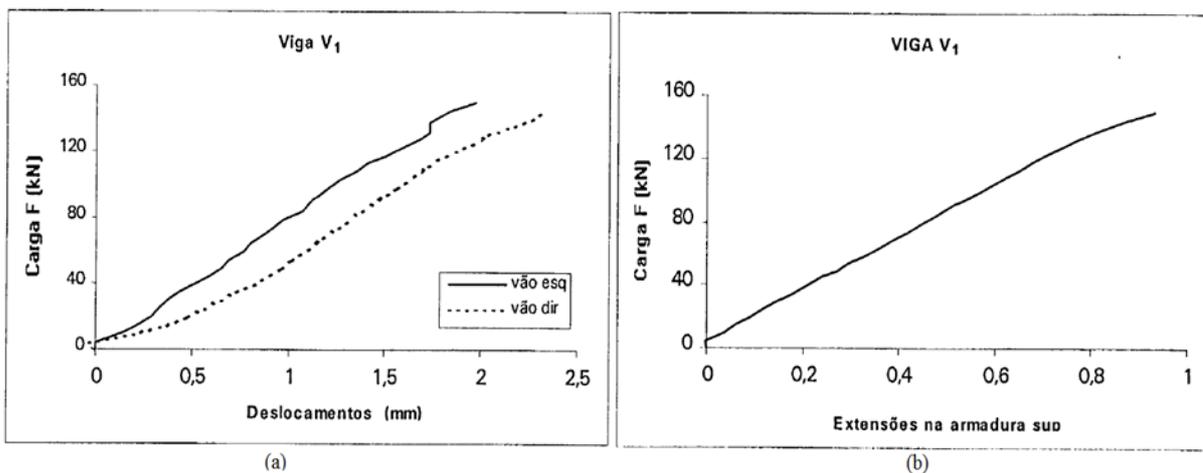


Figura 5.8 - (a): Diagramas cargas-deslocamentos dos pontos de aplicação das cargas da viga V₁; (b): Extensões (‰) na armadura superior (Bastos, 1997)

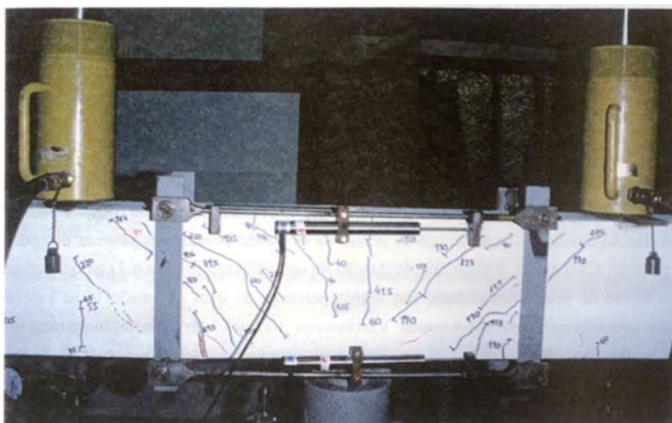


Figura 5.9 - Aspecto da rotura de ensaio V₂. (Bastos, 1997)

Com o valor do esforço transversal $V_{teor} = 97 \text{ kN}$, a plastificação da secção do apoio central iniciou-se e desenvolveu-se simetricamente para ambos os lados daquela secção.

5.1.5 Esforços em rotura (Viga V₁)

Os deslocamentos relativos entre S₁ e S₂ foram calculados para a carga máxima atingida, os correspondentes valores médios das extensões de tracção e de compressão no betão estão representados na Figura 5.10.

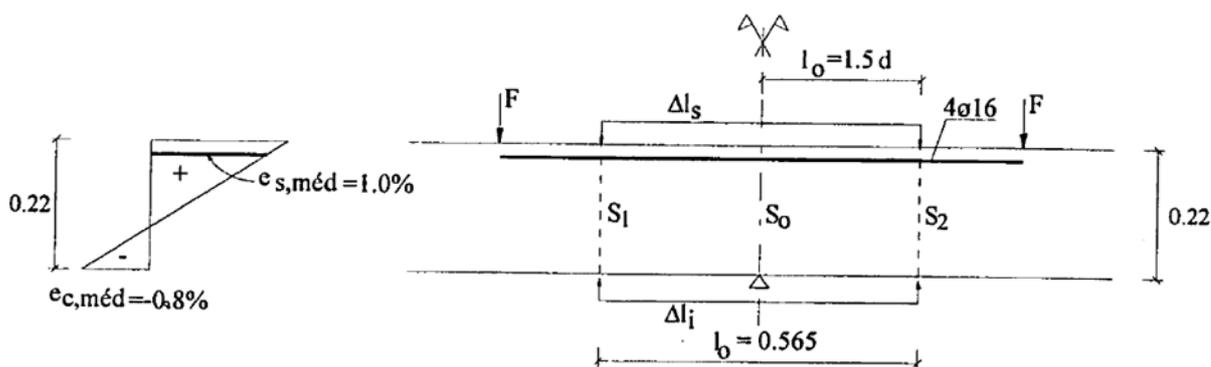


Figura 5.10 – Extensões médias entre as secções, S_1 e S_2 à carga de rotura experimental (Bastos, 1997)

Valores médios das extensões de tracção: $\varepsilon_s = \frac{\Delta l_s}{l_0}$

Valores médios de compressão no betão: $\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_0}$ ($l_0 = 56.5 \text{ cm}$)

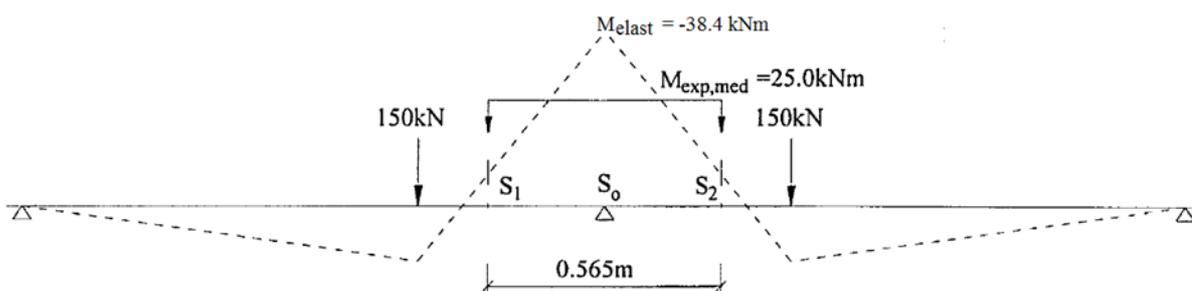


Figura 5.11 – Diagrama dos momentos flectores elásticos e momento médio na zona central obtido do ensaio de V_1 , ($F_{u,exp} = 150 \text{ kN}$ e $M_{elast} = -38.4 \text{ kNm}$). (Bastos, 1997)

Momento máximo no apoio: $M_{max} = M_{med} + \frac{0.567}{4} V_{elast} = 43.2 \text{ kNm}$

O valor encontrado é superior (12%) ao momento elástico, $M = 38.4 \text{ kNm}$

O diagrama das deformações médias (Figura 5.12) mostra o momento médio entre as mesmas secções e as características mecânicas reais dos materiais vem $M_{u,méd} = 35.0 \text{ kNm}$, o valor superior ao momento médio obtido a partir do diagrama experimental.

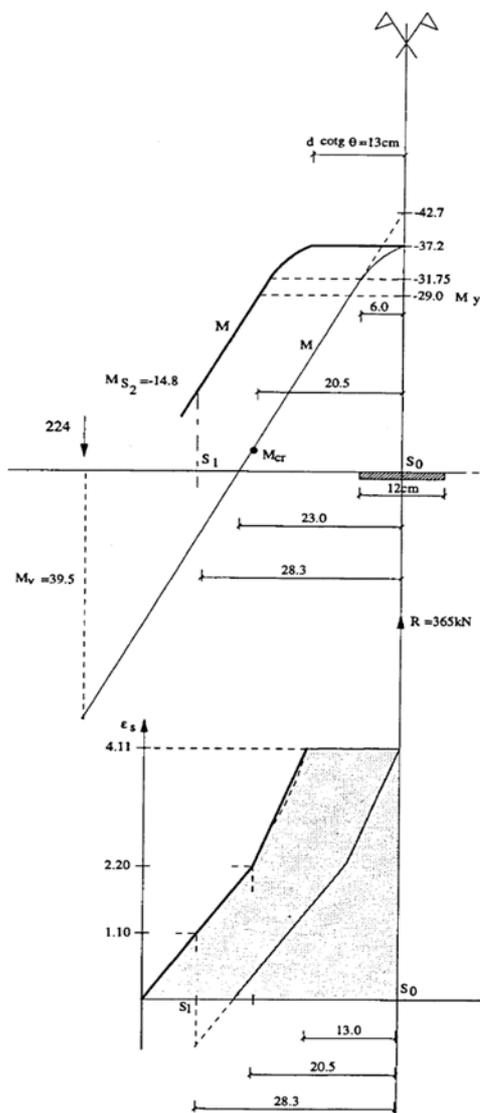


Figura 5.12 – Verificação do valor da extensão média experimental (Viga V₂). (Bastos, 1997)

A extensão média obtida foi: $\epsilon_{s,méd} = 1.4 \text{ ‰} < \epsilon_{s,méd} (\text{Exp}) = 2.5 \text{ ‰}$

5.1.6 Os valores das extensões médias da armadura

A determinação do valor mais correcto da extensão média da armadura, ϵ_{sm} , cuja expressão indicada pelo EC2, traduz o diagrama $\sigma - \epsilon$ do aço em betão armado fendilhado e é dada por,

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{smr} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \quad (\text{A2.2, EC2}) \quad (35)$$

Os novos valores das extensões médias da armadura, nas secções mais significativas indicam-se no Quadro 5.6.

Quadro 5.6 – Os valores das extensões na armadura de tracção

M (kNm)	ε_s (‰) - Sem contribuição do betão	ε_{sm} (‰) - Com contribuição do betão
-5.4 (M_{cr})	0.4	0.07
-14.8	1.10	1.10
-29 (M_y)	2.20	2.13
-37.2 ($M_{máx}$)	4.14	3.81

No Quadro 5.7 resumem-se os valores da extensão da armadura de flexão entre secções S_1 (ou S_2) e S_0 determinados para as diferentes hipóteses consideradas.

Quadro 5.7 – Valores da extensão média na zona de referência (entre as secções S_1 e S_0).

	$\varepsilon_{s,méd}$ (‰) - Sem contribuição do betão	$\varepsilon_{sm,méd}$ (‰) - Com contribuição do betão
sem translação de M/z	1.4	1.3
com translação de M/z	3.2	2.9

5.1.7 Comparação dos resultados obtidos nos ensaios das duas vigas V_1 e V_2

Os valores da carga de rotura obtidos experimentalmente nos ensaios das vigas V_1 e V_2 são comparados com os valores teóricos no Quadro 5.8.

Quadro 5.8 – Comparação dos resultados e experimentais (Vigas V_1 e V_2)

	Carga de rotura experimental $F_{u,exp}$ (kN)	Carga de rotura teórica $F_{u,teór}$ (kN)	$F_{u,exp}/F_{u,teór}$
Viga V_1	150	201	0.75
Viga V_2	224	225	0.99

Na Figura 5.13 representam-se das curvas cargas-flechas das vigas V_1 e V_2 .

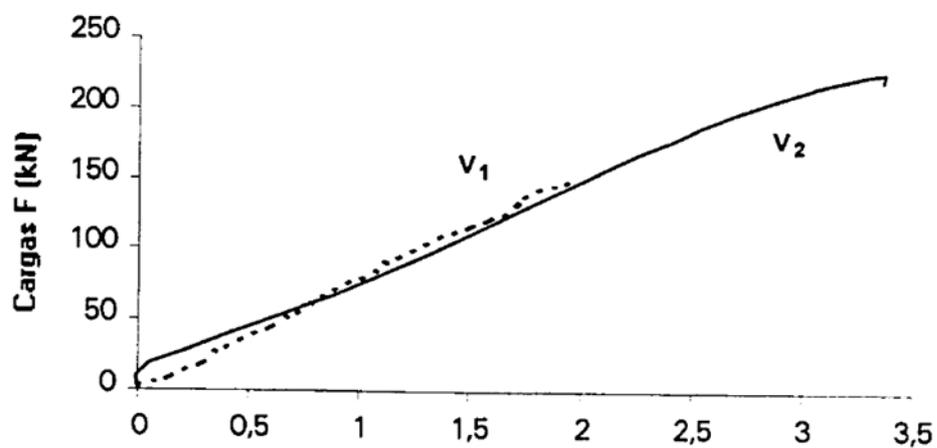


Figura 5.13 – Diagramas cargas-deslocamentos da secção de aplicação da carga (Bastos, 1997).

6 MODELAÇÃO NUMÉRICA

A modelação numérica das vigas descritas no capítulo anterior é efectuada através do *software midas[®] FEA e Abaqus[®] 6.10*. O objetivo desta modelação numérica é simular os resultados experimentais realizados feito por Bastos (1997).

6.1 Enquadramento

As simulações numéricas que utilizam o MEF pretendem resolver problemas reais que envolvem condições físicas, geométricas e de fronteiras complexas, através de métodos numéricos que aproximem a resolução das equações analíticas capazes de os descrever.

Os tipos de análises numéricas podem ser explícitos ou implícitos, sendo a principal diferença entre estes o instante temporal. Neste trabalho da tese, optou-se pelo método estático implícito que é conveniente nas análises não lineares de deformações.

O método utilizado designa-se por método *Newton-Raphson*, que adopta um processo incremental e iterativo, em que o número de iterações utilizadas em cada incremento deve ser o necessário até ocorrer a convergência que se verifica com a condição de equilíbrio estático do elemento.

O modelo numérico foi definido no ambiente interactivo *midas FEA*, que possibilita fazer a modelação com o recurso a ferramentas gráficas.

6.2 As propriedades dos materiais

Uma correcta escolha dos modelos representativos do comportamento dos materiais é fundamental para uma boa simulação numérica. De seguida são descritas as características que descrevem o comportamento dos materiais utilizados no modelo numérico. Os materiais são o betão e o aço das armaduras longitudinais das vigas dos ensaios (Bastos, 1997).

6.2.1 Comportamento do betão

Para traduzir a complexidade do betão não existe atualmente um só modelo que o consiga simular perfeitamente. O *midas FEA*, que detém um conjunto de modelos para o comportamento dos materiais, apresenta um modelo específico para betão: o *Total Strain Crack* classificado dentro do modelo de fendilhação distribuída “*Smeared Crack*”.

A Figura 6.1 indica a relação de tensão-extensão do comportamento do betão pode ser analisada pelo *midas FEA* que se baseia no comportamento de material ortotrópico depois do aparecimento de fendas. A Figura 6.1 (a) indica-se a perpendicularidade da tensão tangencial e normal no modelo de fenda fixa e as extensões principais não coincidentes com as direções das fendas. Na Figura 6.1 (b), da nova direção das extensões resultam as novas fendas na direcção das tensões principais, original o modelo de fenda rotacional.

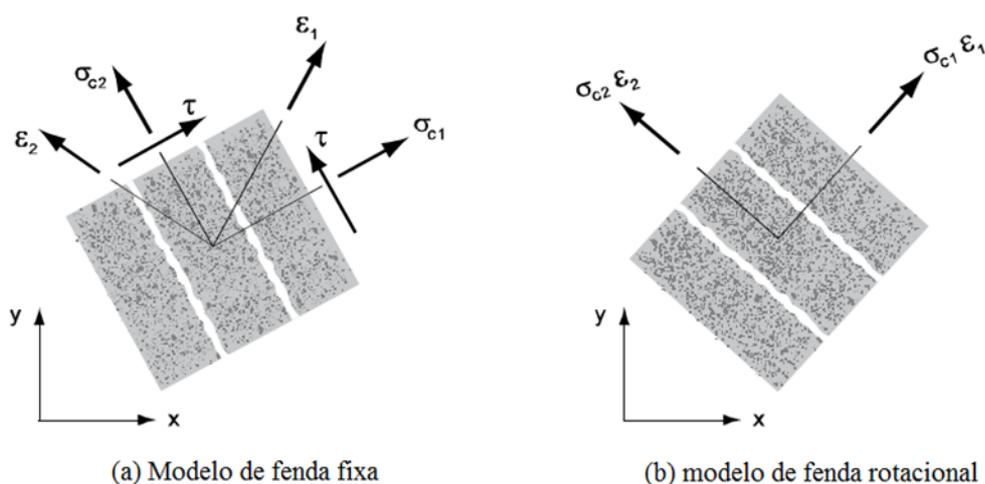


Figura 6.1 – Modelos ortogonais das fendas.

A lei constitutiva com modelos de fendilhação por tração baseia-se na teoria proposta por Vecchio e Collins. Esta teoria foi formulada em base de modelo bidimensional.

Os parâmetros necessários na definição da fendilhação do Modo I (“*Strain Crack*”) no modelo de cálculo são: o tipo de modelo de fendilhação; as propriedades do betão. As resistências médias à compressão e à tração do betão, de acordo com o EC 2 e o CEB-FIB 1990, são dadas por:

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f = f_{ck} + 8 \text{ (MPa)} \quad (36)$$

$$E_{cm} = 22 \left[\frac{f_{cm}}{10} \right]^{1/3} \quad (37)$$

$$f_{ctm} = 0.3 \times f_{ck}^{2/3} \leq C50/60 \quad (38)$$

A caracterização do comportamento do betão após a tensão de rotura ser atingida, é definida através da energia de fractura (G_f), como indicado na equação (39). Essa energia de fractura define-se por ser a energia necessária para desenvolver uma unidade de área de fendas, tendo em consideração as fendas no betão com resistências à compressão e é fornecida por:

$$G_f = G_{f0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cm0}} \right)^{0.7} \quad (39)$$

onde $f_{cm} = 10 \text{ (N/mm}^2\text{)}$. O Quadro 6.1 mostra os valores de G_f correspondente à máxima dimensão dos agregados.

Quadro 6.1 – Valores de G_{f0} em função de $D_{máx}$.

$D_{máx} \text{ (mm)}$	$G_{f0} \text{ (J/mm}^2\text{)}$
8	25
16	30
32	58

As leis constitutivas do betão utilizadas no programa *midas FEA* são as representadas na Figura 6.2. A Figura 6.2 (a) é a exponencial que representa o comportamento do betão em tração, a Figura 6.2 (b) é a curva tensão-extensão do betão à compressão e a Figura 6.2 (c) traduz o comportamento linear elástico.

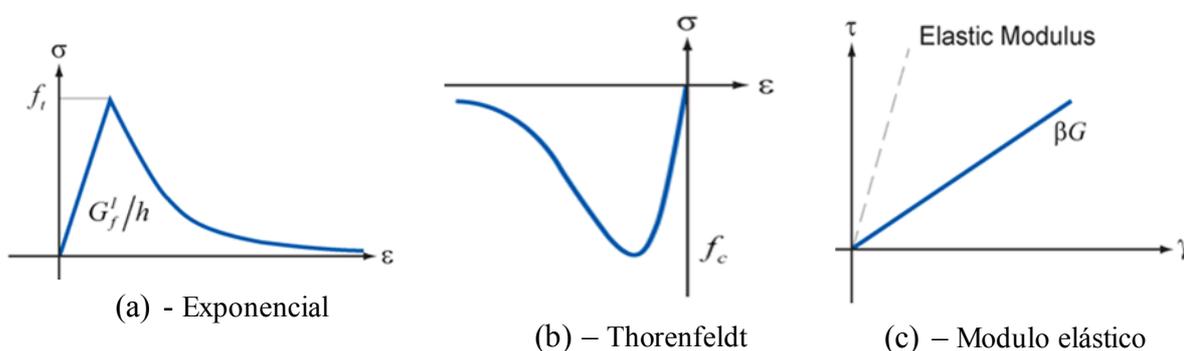


Figura 6.2 – Lei constitutiva do betão, (a) tração, (b) compressão e (c) elástico (FEA, Analysis and Algorithm).

6.2.2 Parâmetros adoptados na modelação do betão

Os parâmetros que definem as características do betão à compressão e à tracção, constam no seguinte quadro e foram retirados de Bastos (1997), e obedecem à relação de tensão-extensão de compressão para a análise estrutural não linear prevista no EC 2.

Quadro 6.2 – Propriedades do betão usadas nas simulações numéricas.

Coeficiente de Poisson	$\nu = 0.2$
Módulo de elasticidade	$E_{cm} = 30390 \text{ N/mm}^2$
Valor médio da tensão de rotura do betão à compressão	$f_{cm} = 29.95 \text{ N/mm}$
Energia de fractura	$G_f = 0.053879 \text{ N/mm}$
Ângulo característico	$\beta = 0.05$
Largura das fendas	$h = 20 \text{ mm}$

6.2.3 Comportamento do aço

O comportamento dos dois tipos de aço referentes às armaduras é definido através do elasto-plástico perfeito com as características do Quadro 6.3.

Quadro 6.3 – Propriedades do aço das armaduras.

	$E \text{ (GPa)}$	$f_{yk} \text{ (MPa)}$
Armadura principal ($\phi 16 \text{ mm}$)	200	440
Armadura principal ($\phi 8 \text{ mm}$)	200	440
$\varepsilon_u \text{ (‰)}$	15.7	

6.3 Modelação numérica da viga

6.3.1 Tipo de elementos finitos adoptados de *software midas FEA* e *Abaqus 6.10-1*.

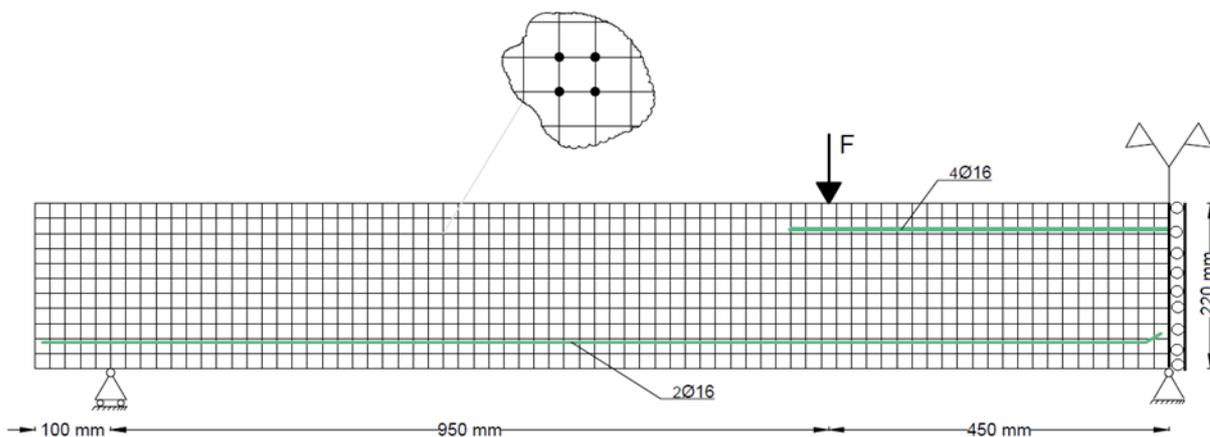


Figura 6.3 – O modelo de malha de elementos finitos (20x20 mm) de *midas FEA* para a viga de ensaios.

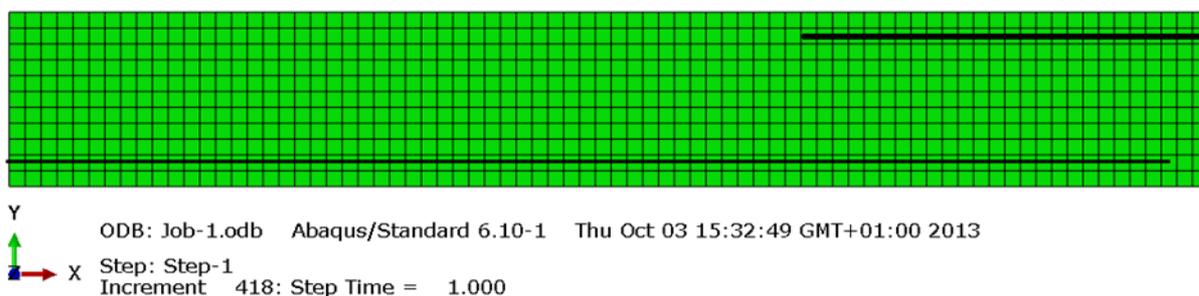


Figura 6.4 – O modelo de malha de elementos finitos (20x20 mm) de *Abaqus* para a viga de ensaios.

Neste trabalho de tese, optou-se por escolher elementos bidimensionais (2D), a que corresponde um tempo de cálculo inferior quando comparado com simulações que utilizam elementos tridimensionais (3D), sem perda de precisão pois a viga em flexão está sujeita a um estado plano de tensão. A malha de elemento é suficientemente refinada para permitir a localização muito aproximada das armaduras.

Optou-se por elementos de 4 nós para o plano de estado de tensão, nós com dois graus de liberdade nas duas direcções, X e Y, por nó. Os elementos utilizados estão representados na Figura 6.5 e foram considerados 4 pontos de Gauss para a integração numérica (FEA, Analysis and Algorithm).

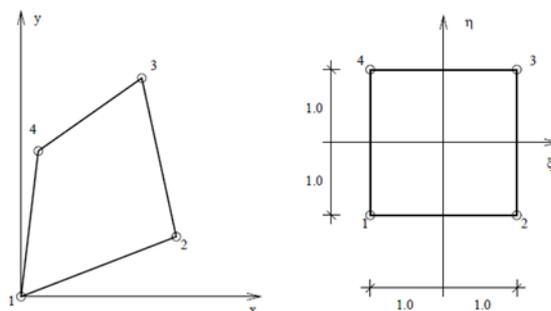


Figura 6.5 – Quatro nós de elementos contínuos de isoparamétrico no espaço XY . (Essex, 1995).

6.3.2 Condições de carregamento e dos apoios

As condições de apoios e de carregamento foram adoptadas de acordo com os ensaios experimentais realizados por Bastos (1997). O esquema estrutural dos ensaios experimentais encontra-se na Figura 6.6 e consiste numa viga continua simplesmente apoiada.

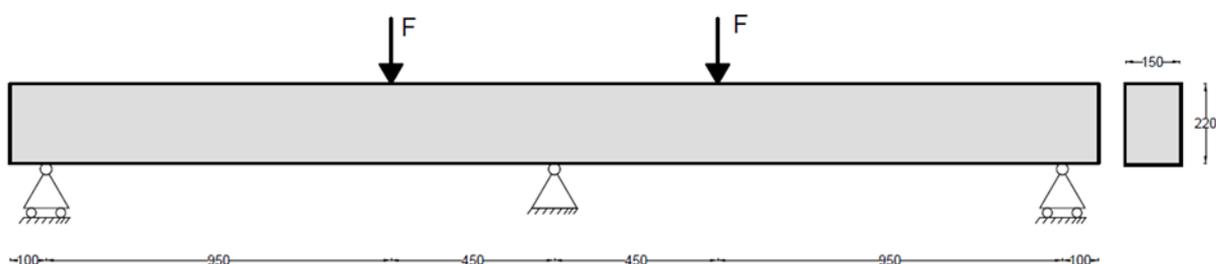


Figura 6.6- Estrutura da viga do ensaio experimental (mm)

Pelo esquema estrutural da viga (Figura 6.6), é possível verificar que a estrutura é simétrica, com dois tramos e cargas iguais, o que permite considerar apenas metade da estrutura, como se representa na Figura 6.7.

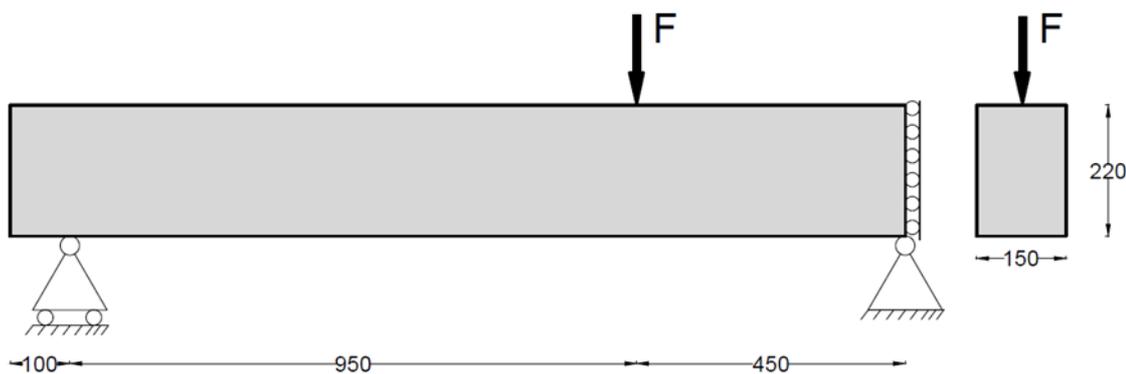


Figura 6.7 – Esquema estrutural do ensaio numérico 1/2 de viga (mm)

6.3.3 Definição da malha da viga

Neste caso de elementos de 2D, procedeu-se ao estudo da dimensão da malha a adoptar no elemento bidimensional que modela o betão, tendo-se executado análise da viga modelada para as malhas na Figura 6.8 que é de 20x20 mm.



Figura 6.8 – Divisão das malhas em pequenas dimensões dominadas Elementos Finitos

A análise consiste na verificação da influência do refinamento da malha sobre os resultados forças-deslocamentos (Figura 6.11) para as vigas de ensaios pelo programa de cálculo comercial *midas FEA*.

Como o Método dos elementos finitos é um método de aproximação, para que possa fornecer o melhor resultado dos padrões de fendilhação, é necessário a malha suficientemente refinada, o que implica tempos de cálculo maiores. Os tempos de cálculo encontram-se no Quadro 6.4. para a malha de elementos utilizada.

Quadro 6.4 – Tempo de cálculo na simulação da viga numérica da malha de 20 mm (*midas FEA e 1/2 viga de Abaqus*).

Análise	Viga V ₁	Viga V ₂
Tempo de ocorrência (<i>midas FEA</i>)	105.43 min	105.43 min
Tempo de ocorrência (<i>Abaqus</i>)	30 min	30 min

A Figura 6.10 mostra as curvas de forças-deslocamentos obtidos de dois *softwares midas FEA e Abaqus* para a viga do ensaio V₁. A principal diferença reside nos princípios usados para a fendilhação distribuída. No *Abaqus* usou-se o método de fendilhação distribuída com modelo numérico de betão por modelo Dano Plástico (em inglês *Damaged Plasticity*) com os parâmetros do betão (Quadro 6.5, e no *midas FEA* usou-se o método que foi referido no sub-capítulo de 7.2.2.

Quadro 6.5 – Os parâmetros usados do betão no modelo Dano Plástico de *Abaqus*

E _{cm} (GPa)	f _{cm} (MPa)	0.4 f _{cm} (MPa)	ε _{c0} (m/m)	ε _{c1} (m/m)	f _{cm} (MPa)	ν
30.39	29.95	11.98	0.0004	0.002	2.356	0.2

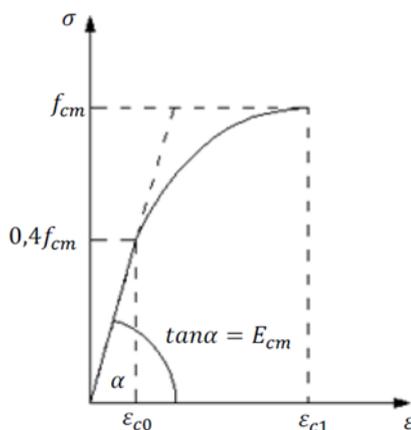


Figura 6.9 – Diagrama de tensão e extensão para o betão à compressão (a) e à tracção (b), (Gomes, 2010).

No comportamento não linear do betão foram considerados os parâmetros definidos por defeito em *Habbitt* (manual do *Abaqus*) e representados no Quadro 6.6.

Quadro 6.6 – Os parâmetros de plasticidade do betão (HKS Inc de Rhode Island).

ε	K _c	σ _{b0} /σ _{c0}
0.1	0.67	1.16

Os gráficos da Figura 6.10, referentes à viga V_1 de modelos de cálculos comerciais *Abaqus* e *Midas FEA*, e podem-se observar a semelhança do acréscimo das cargas-flechas em fase elástica.

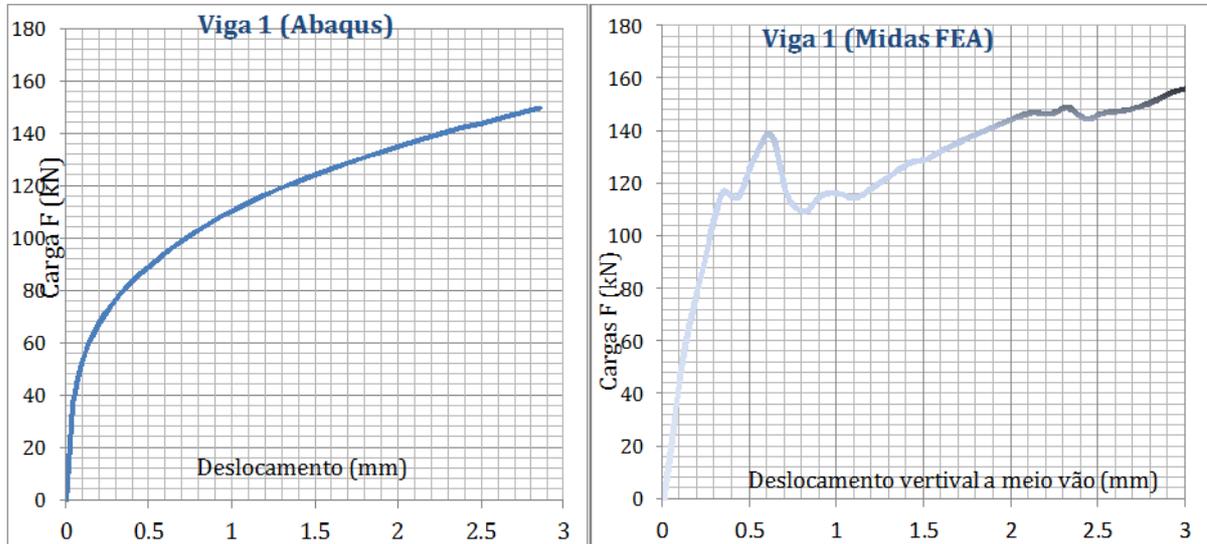


Figura 6.10 - Diagrama Cargas-deslocamentos dos pontos de aplicação das forças no programa de *midas FEA* e *Abaqus* para a viga V_1 .

6.4 Comparação entre o estudo experimental e os programas

Na Figura 6.11 representa a evolução da carga F em função do deslocamento, obtido através dos programas comerciais e ensaios experimentais. Constatou-se que até 1.3 mm de deslocamento, as cargas obtidas pelos programas comerciais são superiores aos obtidos pela análise numérica e aos resultados experimentais. A partir do deslocamento de 1.3 mm, os resultados obtidos pelo *Abaqus* são sempre superiores aos restantes. De facto as vigas experimentais têm uma rigidez menor que as vigas modeladas nos programas comerciais. A viga entra em rotura por cedência das armaduras devido às cargas aplicadas combinadas com a fendilhação do betão. O andamento dos resultados experimentais é semelhante ao do modelo numérico.

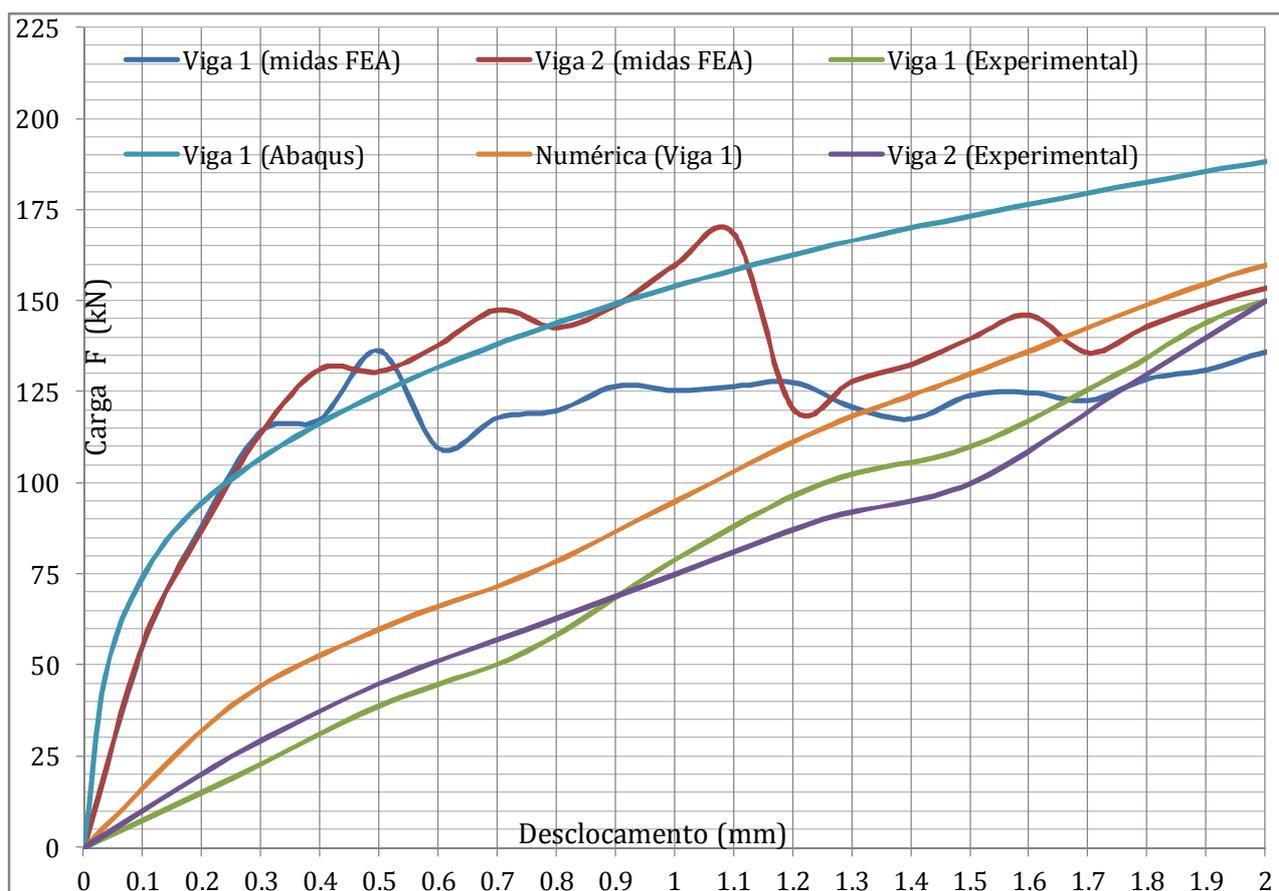


Figura 6.11 – Diagrama de comparação (*Cargas F-Deslocamentos*) onde mostra as diferenças nos diagramas de deslocamentos pelo *midas FEA*, *Abaqus* e trabalhos experimentais.

A figura 6.12 apresenta o início da fendilhação e a plastificação das armaduras para as vigas V_1 e V_2 . O início da fendilhação por flexão, que corresponde ao carregamento em cada tramo, ocorre para carga $F = 44.3 \text{ kN}$ para a viga V_1 e de $F = 43.7 \text{ kN}$ para a viga V_2 . A cedência das armaduras para o carregamento em cada tramo é de $F = 113 \text{ kN}$ para a viga V_1 e de 131 kN para a viga V_2 .

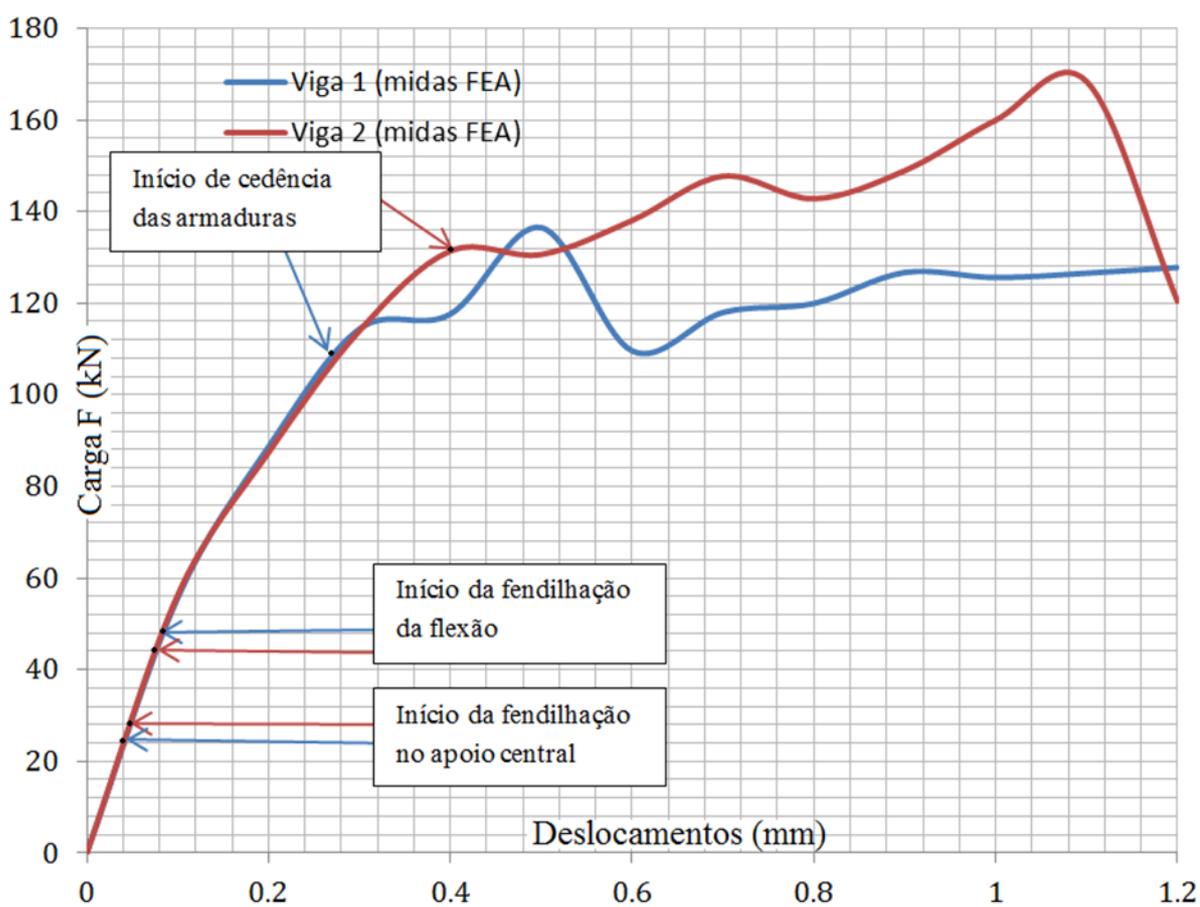


Figura 6.12 – Início da fendilhação da flexão para as vigas V_1 e V_2 (*midas FEA*).

Os diagramas carga-deslocamentos de viga V_1 e V_2 (Figura 6.12), apresentam o início de fendilhação do apoio central e nos dois tramos inicia a fendilhação com fendas verticais de flexão com inclinações semelhantes, embora encontram-se diferentes valores na fase de cedência das armaduras longitudinais.

Nos resultados obtidos experimentais da (Bastos, 1997, no ponto 6.2.3.2.1), a fendilhação iniciou-se sob carga $F_{cr} = 41.5 \text{ kN}$ e comparando com os modelos de cálculos, conclui-se que os resultados são inferiores em relação aos modelos de cálculos.

Para avaliar o comportamento das vigas durante o desenvolvimento da fendilhação, apresenta-se a distribuição da fendilhação obtida pelos programas de cálculo. Na viga de ensaio V_1 , na Figura 6.13 mostra a fendilhação no apoio central com o carregamento de forças F de 27.8 kN em cada tramo.

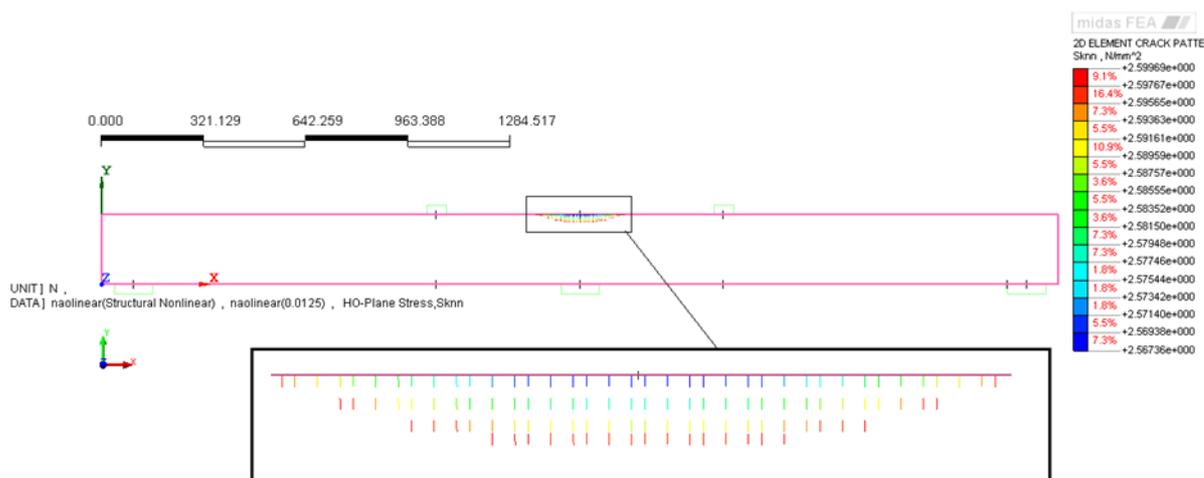


Figura 6.13 - Início da fendilhação no apoio central da viga V_1 . (midas FEA).

A Figura 6.14 (viga V_1) representa a distribuição das fendas na viga com o carregamento em cada tramo de 44.3 kN , com destaque para a zona de aplicação das cargas no início da fendilhação sob estas zonas.

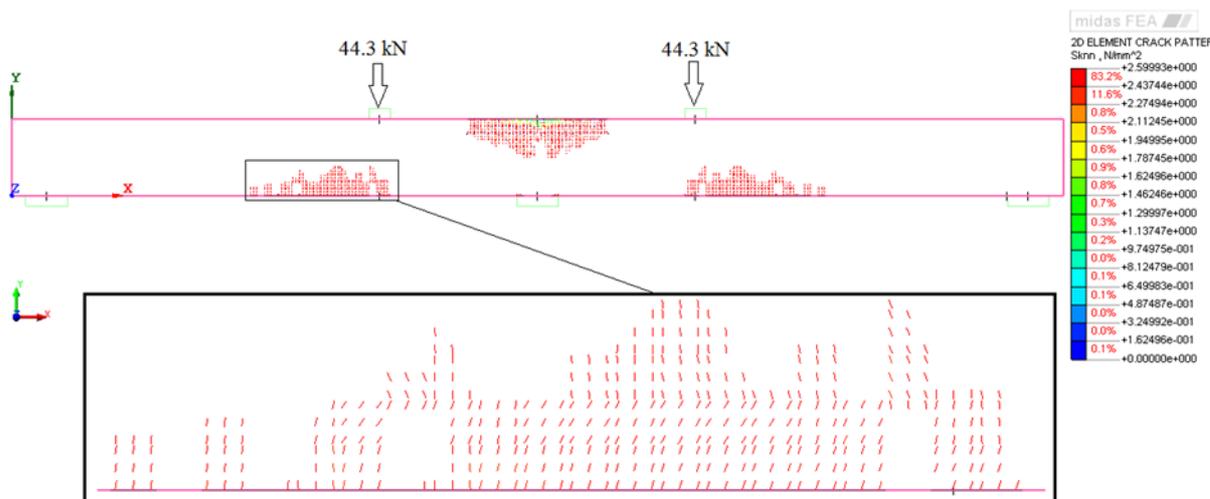


Figura 6.14 – Início da fendilhação de flexão na zona de aplicação das cargas da viga V_1 . (midas FEA).

Na viga V_2 , a Figura 6.15 mostra o início da fendilhação no apoio central com o carregamento em cada tramo de 28.1 kN .

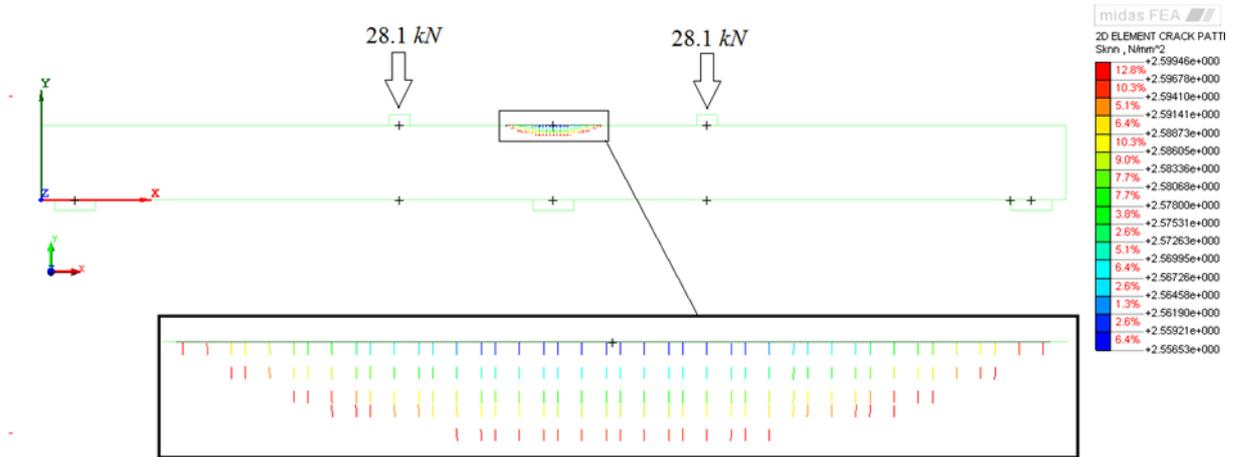


Figura 6.15 – Início de fendilhação no apoio central da viga V_2 . (midas FEA).

A Figura 6.16 (Viga V_2) a distribuição da fendilhação nos tramos com o carregamento de 43.7 kN .

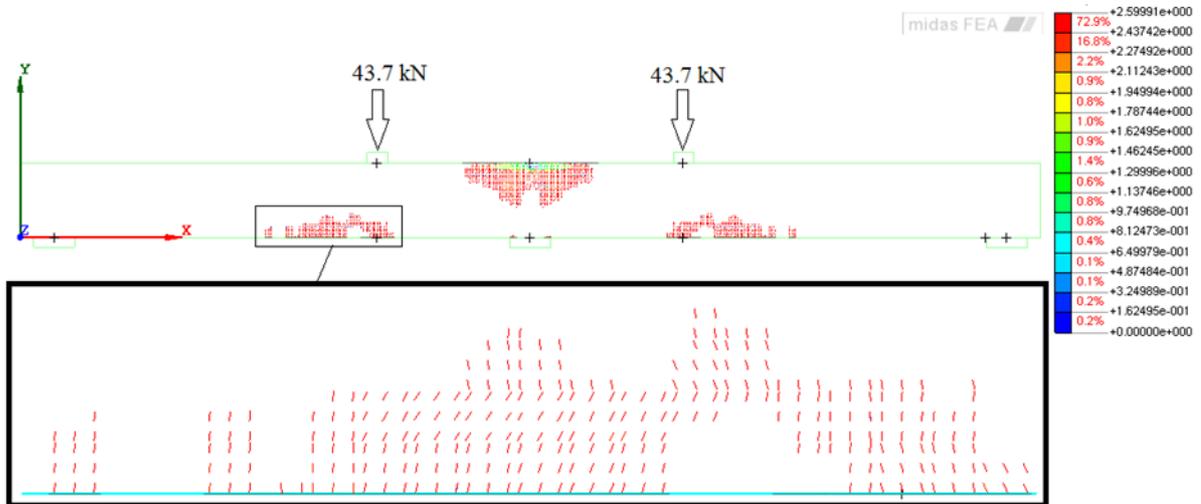


Figura 6.16 – Início de fendilhação de flexão da viga V_2 . (midas FEA).

A Figura 6.17 mostra a deformada da $\frac{1}{2}$ viga obtida com a modelação pelo *Abaqus*.

Normalmente os resultados numéricos mostram um comportamento mais rígido e comparando com resultados experimentais, pelos factores por exemplo, a aderência perfeita entre o aço e o betão, a ponderação de um betão homogéneo, ou de uma estrutura de viga sem imperfeições. Sendo em consideração que os resultados de modelação de dois ensaios são semelhantes.

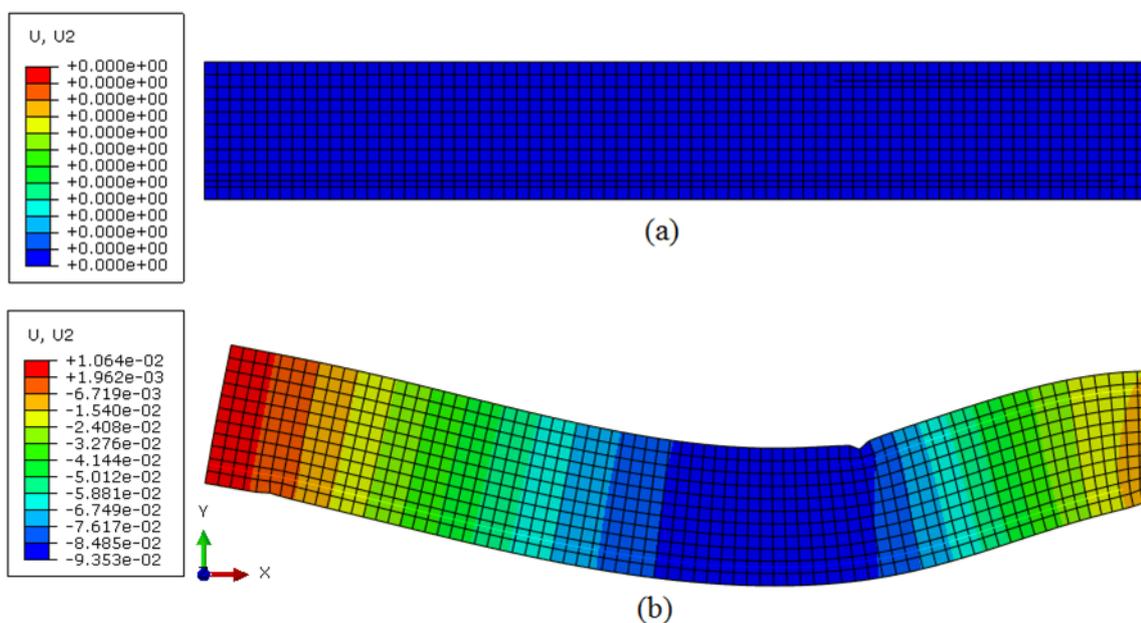


Figura 6.17 – Deformação vertical de $\frac{1}{2}$ viga V_1 . (a) Momento inicial e (b) momento de rotura. (*Abaqus*)

As tensões e extensões principais encontram-se no Anexo A.

7 CONCLUSÕES FINAIS E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Através dos modelos usados para os dois programas de fendilhação distribuída, obteve-se os resultados de tensões e extensões máximas e mínimas diferentes nos dois programas comerciais. Portanto, as fendas provocadas pelos carregamentos são diferentes porque os programas recorrem a modelos distintos. No *Abaqus* usou-se o modelo de dano plástico “*Concrete Damage Plasticity*” enquanto no *midas FEA* usou-se o modelo de “*Strain Crack*”.

Analisando os resultados obtidos pelos dois programas comerciais para a fendilhação distribuída através da observação dos diagramas de cargas-deslocamentos, concluiu-se que há uma semelhança entre o experimental e as modelações feitas nos programas convergindo para o mesmo valor.

Os resultados numéricos de modelos de cálculos mostram um comportamento mais rígido quando comparado com resultados experimentais, por diversos factores como por exemplo, a aderência perfeita entre o aço e o betão, a ponderação de um betão homogéneo ou de uma estrutura de viga sem imperfeições. As vigas experimentais têm uma rigidez menor que as vigas modeladas nos programas comerciais.

Na análise comparativa entre os modelos de cálculos e o experimental, verificou-se que no caso da flexão o momento resistente teórico é sempre maior que o de experimental. Isto deve-se ao facto da perda do betão de recobrimento originado pela encurvadura das armaduras comprimidas. Conclui-se que os resultados teóricos dos modelos estão mais do lado de segurança porque apresentam valores de esforços maiores que os experimentais.

Desenvolvimentos futuros:

- Verificar a rotação plástica das vigas ensaiadas pelos programas comerciais e comparar com o trabalho experimental obtido.
- Calcular a capacidade de rotação plástica obtida pelos modelos de cálculos comerciais e comparar com os ensaios experimentais.
- Desenvolver um modelo de escoras-tirantes.
- E para finalizar, propor-se um estudo de efeito dos esforços transversos ao modo tipo de fractura II e III.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alca, N., Alexandder, S. D., & MacGregor, J. G. (1997). "Effect os size on flexural Behaviour of High-Strenght Concrete Beams". ACI Structural Journal, Vol.94, Nº1, Jan-Feb,pp.40-49.
- Azevedo, Á. F. (2003). "*MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS*". Obtido de <http://www.fe.up.pt/~alvaro>
- Barros, J. A. (2012). "*Modelos de fendilhação para o betão*". Portugal: Departamento de Engenharia Civil da Universidade do Minho.
- Bastos, A. M. (1997). "EXPERIMENTAÇÃO COM METODOLOGIA". *Dissertação para obtenção do grau do Doutoramento em Engenharia Civil na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*.
- Blaauwendraad, J. (1985). "*SMEARED CRACK APPROACH AND FRACTURE LOCALIZATION IN CONCRETE*". The Netherlands: Delft University of Technology.
- Blaauwendraad, J., & Schneider, J. (1993). *Structural Analysis: Elastic or Plastic?*. Structural Engineering International, Março.
- Borst. (1987). "Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading - A unified approach".
- Borst, R. (1991). "*Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading - A unified approach*". TU - Delft report nr. 25-2-91-2-06, TNO-IBBIC report nr. BI-91-043, Delft University of Technology, TNO Institute for Building Materials and Structures, Delft.
- Borst, R., & Nauta, P. (1985). "*Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model*". Engineering Computations, 2, 35-46.
- Braestrup, M. W., & Nielsen, M. P. (1993). Plastic Methods of Analysis and Design. *Handbook of Structural Concrete*. Pitman Advanced Publishing Program, pp.21.1-20.54.
- Carmo, R. N. (2004). Rotação Plástica e Redistribuição de Esforços. "*Tese para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil na especialidade de Estruturas*". Coimbra, Portugal: Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade Coimbra.
- COSTA, R. (2004). BETAO ARMADO. UC:PT.
- FEA, m. (s.d.). *Analysis and Algorithm*.
- FEA, m. (s.d.). *en.midasuser.com*. Obtido em 1989, de Advanced Nonlinear and Detail Analysis System: <http://en.midasuser.com>
-

- Gálves, J. C. (2002). A discrete crack approach to normal/shear cracking of concrete. CEMENT AND CONCRETE RESEARCH. Pergamon.
- Garcia, I. L. (2009). *PROJECTO DE ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO COM BASE NA ANÁLISE NÃO LINEAR MATERIAL*. Dissertação do grau de Mestre em Engenharia Civil - Especialização em Estruturas.FEUP.
- Gomes, S. M. (2010). *Caracterização Numérica do Comportamento ao ELU de Esforço Transverso de Vigas de Grande Vão Prefabricadas em Betão de Alta Resistência Pré-Esforçado*. Universidade de Trás-Os-Montes e Alto Douro.
- Gonçalves, F. R. (2008). "Ferramentas de dimensionamento de estruturas em betão armado". *Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil*. Aveiro: Universidade de Aveiro.
- HKS Inc de Rhode Island, E. (s.d.). *Abaqus CAE*. Obtido de SIMULIA: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/abaqus-portfolio/abaquscae/>
- Leonhardt, F. (1979). "Construções de concreto". Rio de Janeiro: Editora Interciência.
- Morchão, C., & Appleton, J. (2007). *BETÃO ARMADO E PRÉ-ESFORÇADO I*. Lisboa: IST.
- Pimentel, M. J. (2004). "Modelação e análise de estruturas laminares de betão: Possibilidades e desafios". *FEUP*. Porto.
- Rots, J. G., & Blaauwendraad, J. (1989). "*Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating.*". *Heron*, 34(1).
- Scholz, H. (1993). "Contribution to Redistribution of Moments in Continuous Reinforced Concrete Beams". *ACI Structural Journal*. Países Baixos: March-April.
- Shi, Z. (2009). "ANALYSIS IN STRUCTURAL CONCRETE". Oxford, UK: Elsevier Ltd.
- Silva, V. D. (1999). "MECÂNICA E RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS". In V. D. Silva. Coimbra: Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra.
- Simões, L. M. (2006). "*ANÁLISE DE ESTRUTURAS*". Coimbra: ST - Artes Gráficas, Lda.
- Walraven, A. B. (Agosto de 1993). "Size Effect in Shear Failure on Diagonal Shear Failure of Beams without Stirrups". *CEB bulletin d'Information* n°218.

ANEXO A

A.1 - As tensões da viga V₁. (midas FEA).

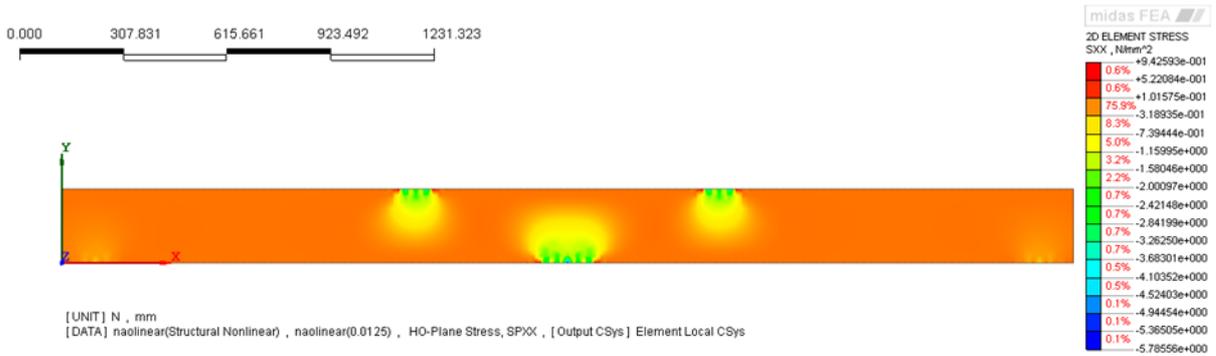


Figura A.1 – As tenções segundo eixo x (0.0125).

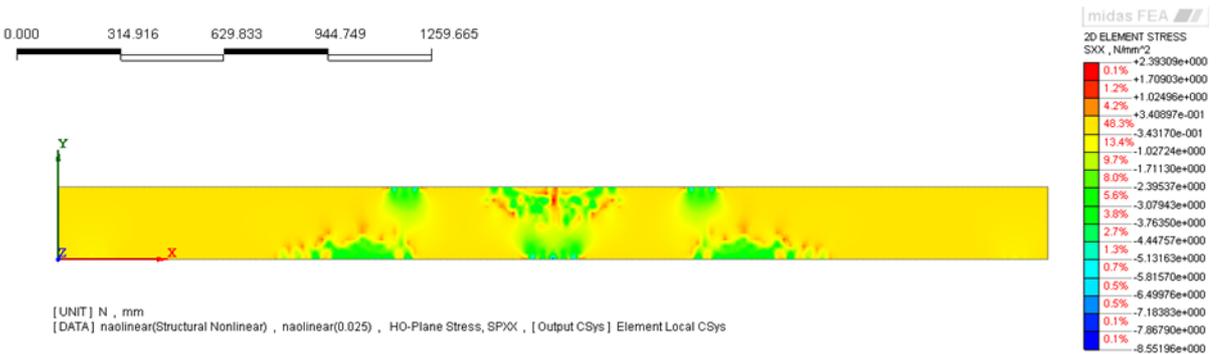


Figura A.2 – As tenções segundo eixo x (0.025).

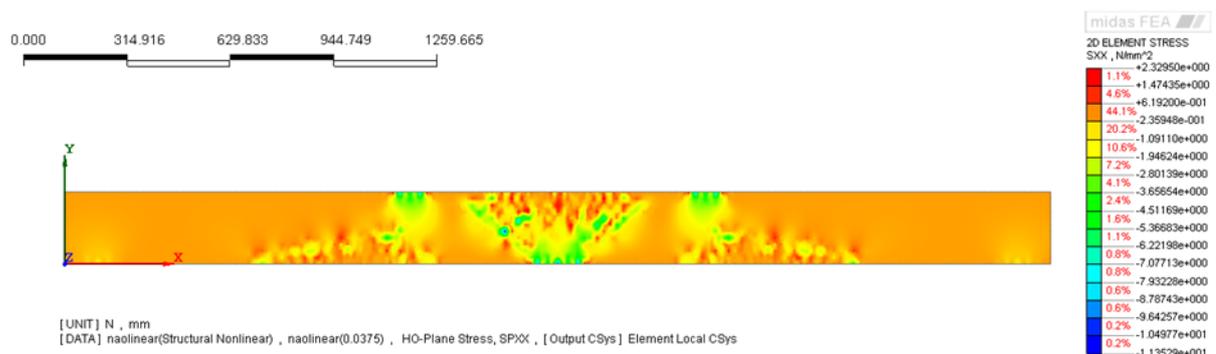


Figura A.3 – As tenções segundo eixo x (0.0375).

Deslocamento vertical (Viga V_1) do modelo dano plástico/*Abaqus*

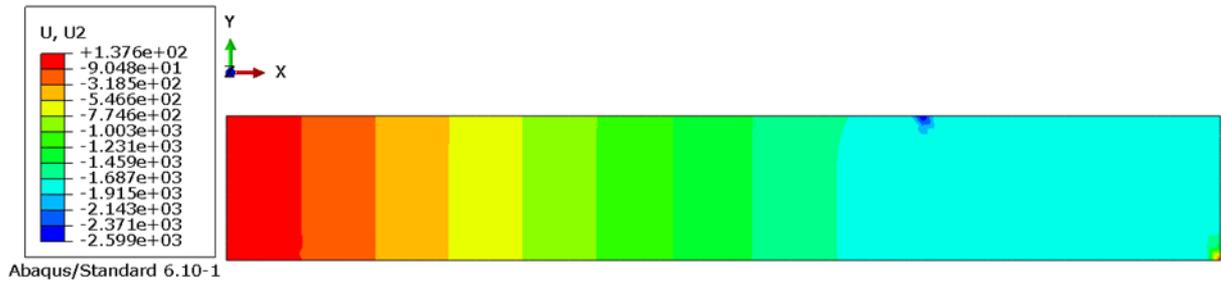


Figura A.4 – Deformada vertical para a viga V_1 . (*Abaqus*)

Tensão principal (Viga V_1) do modelo dano plástico/*Abaqus*

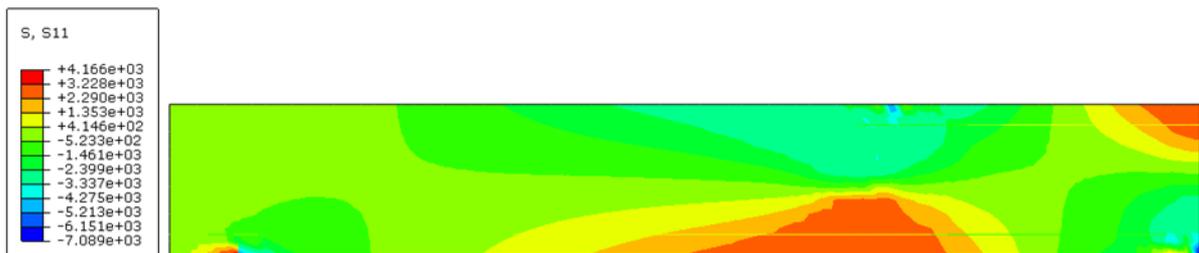


Figura A.5 – Tensão principal para a viga V_1 .(*Abaqus*).

Extensão principal (Viga V_1) do modelo dano plástico/*Abaqus*

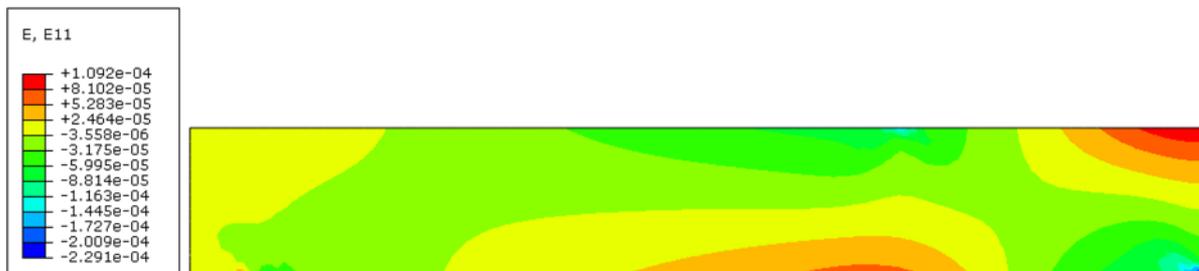


Figura A.6 – As extensões principais para a viga V_1 . (*Abaqus*)

Tensão axial (Viga V_1) do modelo dano plástico/*Abaqus*



Figura A.7 – Tensões axiais nas armaduras longitudinais para a viga V_1 . (*Abaqus*)

ANEXO B

B-1: As forças e momentos do início de fendilhação

Momento de fendilhação no apoio:

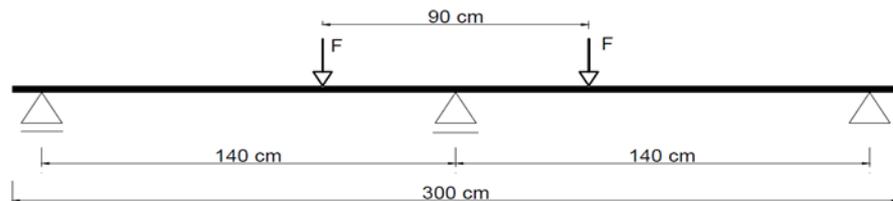


Figura B.1 – Esquema estrutural de vigas

$$f_{ct} = 2.36 \text{ MPa} \text{ (tensão de rotura do betão à tracção)}$$

$$\sigma = \frac{M}{w} = \frac{M \times v}{I} \quad \Leftrightarrow \text{secção rectangular: } w = \frac{bh^2}{6}$$

Logo, o momento de fendilhação é,

$$M_{cr} = f_{ct} \times w = 2.36 \times 10^3 \times \frac{0.15 \times 0.22^2}{6} = 2.85 \text{ kNm}$$

Carga F que provoca o início da fendilhação:

$$M_{cr} = \frac{3FL}{16} = 2.85 \text{ kNm} \quad \Rightarrow F = \frac{2.85 \times 16}{3 \times 1.4} = 10.86 \text{ kN}$$

Esforços e tensões na secção do apoio de betão armado:

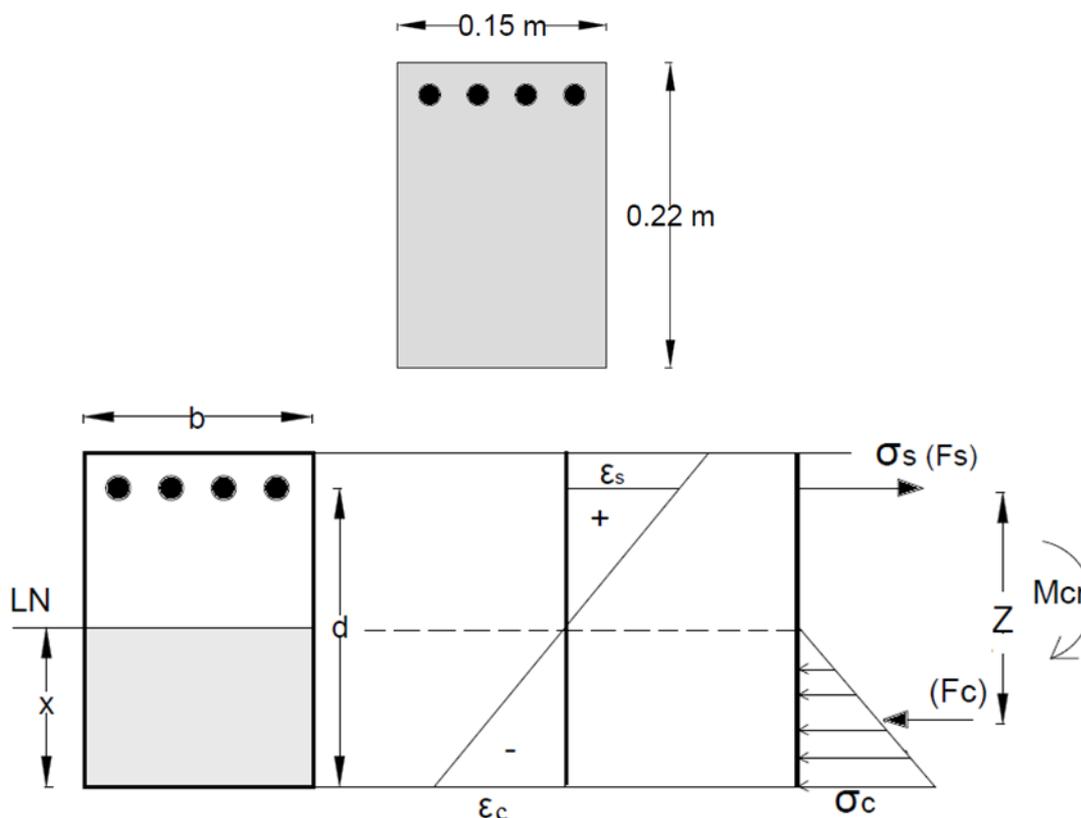


Figura B.2 – Secção transversal do meio vão (Secção homogeneizada).

$$A_s = 8.04 \text{ cm}^2$$

$$d = 0.185 \text{ m}$$

$$E_s = 200 \text{ GPa}$$

$$E_c = 30.39 \text{ GPa}$$

Posição da linha neutro (LN):

$$X = \frac{\sum A_i \times x_i}{\sum A_i} \Rightarrow \frac{bx \times x/2 + A_s \times E_s/E_c \times d}{bx + A_s \times E_s/E_c} \Rightarrow \frac{b \times x^2}{2} = A_s \times \frac{E_s}{E_c} (d - x)$$

$$\frac{0.15 \times x^2}{2} = 8.04 \times 10^{-4} \times \frac{200}{30.39} ((0.22 - 0.035) - x) \Leftrightarrow x = 0.084 \text{ m}$$

$$z = d - x/3 = 0.185 - 0.084/3 = 0.17 \text{ m}$$

Tensão no betão (σ_c):

$$M_{cr} = F_s \times z = F_c \times z = 2.85 \text{ kNm} \Rightarrow F_c = 18.17 \text{ kN}$$

$$F_c = \frac{\sigma_c \times x \times b}{2} \Rightarrow \sigma_c = \frac{2 \times F_c}{b \times x} = \frac{2 \times 18.17}{0.15 \times 0.084} = 2884.132 \cong 2.88 \text{ MPa}$$

Tensão nas armaduras (σ_s):

$$F_s = \sigma_s \times A_s$$

$$\sigma_s = \frac{F_s}{A_s} = \frac{18.17}{8.04 \times 10^{-4}} = 22599.5 \text{ kN/m}^2 \cong 22.6 \text{ MPa}$$

Extensões máxima no betão e nas armaduras (ϵ_c e ϵ_s):

$$\sigma = E \times \epsilon$$

$$\epsilon_c = \sigma_c / E_c = \frac{2884.132}{30.39 \times 10^6} = 0.09 \text{ ‰}$$

$$\epsilon_s = \sigma_s / E_s = \frac{22599.5}{200 \times 10^6} = 0.11 \text{ ‰}$$

Curvatura:

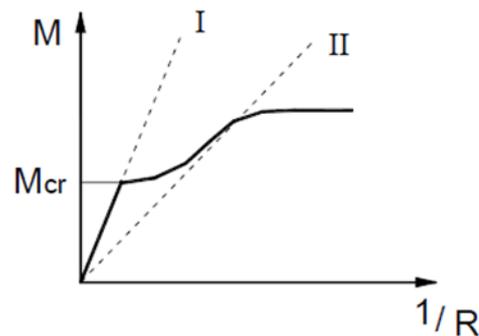


Figura B.3 – momento da curvatura (Morchão & Appleton, 2007).

$$1/R = (\epsilon_c + \epsilon_s) / d = \frac{0.09 \text{ ‰} + 0.11 \text{ ‰}}{0.185} = 0.0011 \text{ m}^{-1}.$$