Modelos de variáveis inteiras

Rui Jorge Nunes Sequeira

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Modelos de variáveis inteiras

Rui Jorge Nunes Sequeira

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**

Área de Especialização em **Estatística, Optimização e Matemática Financeira**

Júri

Presidente: Doutora Maria Esmeralda Elvas Gonçalves

Orientador: Doutora Maria da Graça Santos Temido Neves Mendes

Vogal: Doutora Cristina Maria Tavares Martins

Data: Agosto de 2014

Resumo

Existem muitos fenómenos que podem ser descritos por séries temporais de valores inteiros não-negativos. Uma modelação adequada destes fenómenos exclui os modelos clássicos, baseados em processos reais, como os modelos ARMA. Há já uma larga classe de modelos de valores inteiros, entre os quais se encontram os modelos INARMA, construídos a partir de uma operação aleatória inteira que substitui a multiplicação escalar usual.

Neste trabalho, estudamos dois modelos desta classe, os modelos médias móveis GINMA e INMA(q), principalmente no que diz respeito à caracterização da distribuição limite do máximo. Depois de estabelecida a estacionaridade forte do processo e admitindo que a função de distribuição marginal pertence à classe de Anderson, prova-se que a sucessão de máximos, de amostras com dimensão assintoticamente geométrica, converge em distribuição para uma variável aleatória com distribuição Gumbel discreta.

Palavras Chave: Séries temporais, classe de Anderson, distribuição assintótica de máximos.

Abstract

There are many phenomena that should be described by positive integer-valued time series. To model this type of phenomena, the classical models based on real valued processes, for instance ARMA models, render inadequate. A large class of integer-valued models, including the INARMA models, have been developed with the usual scalar multiplication replaced by an integer-valued random operation.

In this work, we study two models in this class, the GINMA and the INMA(q) models, mainly in what concerns the limiting distribution of the maximum. After proving that the underlying process is strict stationarity, assuming that its margins belong to the Anderson's class we prove that the sequence of maxima converges in distribution to the discrete Gumbel, when a geometric growing dimension of the sample is considered.

Keywords: Time series, Anderson's class, asymptotic distribution of maxima.

Agradecimentos

À Professora Doutora Maria da Graça Temido, minha orientadora, por todo o apoio e motivação, pela disponibilidade constante e pelas suas ideias e sugestões, sempre importantes para o prosseguimento do trabalho ao longo do ano.

Ao Professor Doutor José Augusto Ferreira, coordenador do Mestrado em Matemática, pelo apoio e incentivo e pelo tempo dispendido.

Aos meus professores do Departamento de Matemática que contribuíram para a minha formação académica e pessoal.

Ao Departamento de Matemática, pelas condições de trabalho.

À minha família, especialmente aos meus pais, pelo apoio e dedicação aos longo dos anos.

Aos meus amigos, pelo incentivo dado.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Muitas das séries temporais que se encontram na prática são pela sua natureza constituídas por variáveis aleatórias (v.a.) discretas, em particular inteiras não negativas. Este tipo de dados surge naturalmente associado a processos de contagem, como por exemplo: a variação de uma população, o número de falhas de uma máquina e o número de anos hidrológios até que ocorra um fenómeno de impacto bastante significativo. Para este tipo de fenómenos, é de todo o interesse o estudo de métodos de modelação e análise adequados ao caso discreto.

Ao longo das últimas décadas tem-se assistido a um interesse crescente por séries temporais de v.a. inteiras e existe já um leque alargado de resultados de interesse, em particular no que respeita à modelação.

Na literatura podemos encontrar vários modelos de contagem. De entre as várias classes deste tipo de modelos, encontra-se uma classe baseada num operador aleatório aplicável a inteiros denominada operação aleatória binomial ou operação thinning. Com esta operação foi possível construir modelos análogos aos modelos autoregressivos de média móvel, usualmente designados modelos ARMA, bem como a muitas das suas generalizações. A ideia fundamental consistiu em encontrar uma operação que pudesse substituir a operação multiplicação de um número real por uma v.a. real, por uma outra operação entre um escalar real e uma v.a. inteira cujo resultado ainda fosse um número inteiro. No domínio das variáveis contínuas os modelos ARMA são já uma referência clássica e, talvez por isso, a ideia de encontrar modelos análogos para dados de contagem tenha atraído a atenção de muitos autores, entre os quais destacamos McKenzie, Al-Osh e Alzaid em muitas das suas publicações, por exemplo [11] e [1].

Este trabalho foi construído em torno de vários objectivos, entre os quais salientamos a caracterização da distribuição assintótica do máximo, sob normalização linear, associado a dois modelos de v.a. inteiras. Referimo-nos aos modelos estacionários GINMA e INMA(q), introduzidos em [5] e em [11], respectivamente. Seguimos, para o efeito, fundamentalmente [5], [7], [11] e [15].

Esta dissertação foi organizada, dividindo o trabalho realizado desde outubro de 2013, em quatro capítulos.

Para além desta introdução, que compreende o Capítulo 1, no Capítulo 2 são apresentados, e quase sempre demonstrados, os resultados considerados fundamentais para os propósitos dos Capítulos 3 e 4. Com efeito, o Capítulo 2 é bastante extenso, quando comparado com os seguintes, devido à quantidade de definições e resultados necessários ao estudo de v.a. inteiras e do seu máximo. Concretamente, introduzimos a definição de operador aleatório binomial, acompanhada das suas propriedades mais relevantes, e estudamos o efeito que tal operador exerce sobre as caudas das distribuições, quando estas pertencem a uma classe especial, aqui designada Classe de Anderson e denotada por $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. Esta classe é constituída por todas as funções de distribuição inteiras cuja cauda verifica

$$1 - F_Z(z) = [z]^{\xi} r^{-[z]} L_Z(z), z \to +\infty, \tag{1.1}$$

com $r > 1$, e consequentemente

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - F(n-1)}{1 - F(n)} = r > 1. \tag{1.2}$$

De modo a podermos apresentar o estudo do comportamento limite do máximo associado a sucessões fortemente estacionárias, com função distribuição (f.d.) comum na classe de Anderson, na Secção 2.3, expômos alguns resultados da Teoria de Valores Extremos para este tipo de sucessões, seguindo para tal, principalmente, [2], [8] e [14]. Referimo-nos a condições suficientes para a convergência em distribuição do máximo $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, sob normalização linear, como a condição de independência assintótica $D(u_n)$ e a condição de dependência local $D'(u_n)$, devidas a [8], ao que se acrescenta as suas adaptações $D_{k_n}(u_n)$ e $D'_{k_n}(u_n)$, introduzidas em [14] e adequadas a modelos com margens inteiras. É também dada evidência às condições necessárias e suficientes de existência de tal limite para o máximo. Concretamente

$$\lim_{x \to \omega_F^-} \frac{1 - F(x)}{1 - F(x^-)} \to 1, \tag{1.3}$$

onde $\omega_F = \sup\{x \in \overline{\mathbb{R}} : F(x) < 1\}$, é condição necesssária e suficiente para que exista um sucessão real $\{u_n\}$ tal que $n(1 - F(u_n)) \to \tau > 0$, $n \to +\infty$, ou seja $P(M_n \leq u_n) = F^n(u_n) \to e^{-\tau}$, $n \to +\infty$, no caso em que as v.a. da sucessão são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Em caso de dependência, e sob estacionaridade forte, há que acrescentar a validade da condição $D(u_n)$ para que se obtenha um limite não degenerado para $P(M_n \leq u_n)$. Mais ainda, para v.a. inteiras que não verificam (1.3), o limite (1.2) é condição necessária e suficiente para a existência de $\{u_n\}$ real e de uma sucessão de inteiros positivos estritamente crescente $\{k_n\}$ satisfazendo $\frac{k_{n+1}}{k_n} \to r > 1$, $n \to +\infty$, tais que $k_n(1-F(u_n)) \to \tau > 0$, $n \to +\infty$. Assim sendo, (1.2) é condição necesssária e suficiente para a existência de limite de $F^{k_n}(u_n)$. Similarmente, sendo $\{X_n\}$ fortemente estacionária, sob a condição $D_{k_n}(u_n)$, obtemos limite não degenerado para a sucessão $\{P(M_{k_n}(u_n))\}$.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo do modelo GINMA (Generalized Integer Moving Average), com génese em [11], onde recebeu esta designação.
Trata-se de um processo com margens definidas por

$$X_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{n-i} \tag{1.4}$$

onde o símbolo "$\circ$" representa a operação aleatória já referida, $\{Z_n\}$ representa uma sucessão de v.a. inteiras i.i.d. e $\{\beta_i\}$ verifica $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i < +\infty$, ou mais restritivamente, $\beta_i = \mathcal{O}(|i|^{-\delta})$, $|i| \to +\infty$, para algum $\delta > 1$. É nosso contributo (embora com alguns conteúdos muito semelhantes a outros já existentes na literatura) a prova de que esta sucessão é fortemente estacionária. Seguindo de perto [5] provamos na Secção 3.2 que se $\{Z_n\}$ tem f.d. comum pertencente a uma sub-classe de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, aqui denotada por $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$, então $\{X_n\}$ também possui f.d. na classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$. Segue, na Secção 3.3, a demonstração de que a sucessão de máximos M_{k_n}, sob normalização linear adequada, converge em distribuição para uma v.a. com distribuição de Gumbel discreta $G(x) = \exp(-r^{-[x]})$, $x \in \mathbb{R}$. Os resultados desta última secção do Capítulo 3 seguem exaustivamente o trabalho desenvolvido em [7] e em [15].

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo de um modelo particular INMA de ordem finita, introduzido em [11], principalmente no que diz respeito à estacionaridade forte e, à semelhança do que é apresentado no Capítulo 3, ao estudo da distribuição limite do máximo M_{k_n}. Trata-se de um processo de média móvel finito "em patamares", definido por

$$X_n = \begin{cases} \beta_0 \circ Z_n & \text{com probabilidade } b_0 \\ \beta_0 \circ Z_n + \beta_1 \circ Z_{n-1} & \text{com probabilidade } b_1 \\ \quad \ddots & \\ \beta_0 \circ Z_n + \ldots + \beta_{q-1} \circ Z_{n-q+1} & \text{com probabilidade } b_{q-1} \\ \beta_0 \circ Z_n + \ldots + \beta_{q-1} \circ Z_{n-q+1} + Z_{n-q} & \text{com probabilidade } b_q \end{cases} \tag{1.5}$$

com $\beta_i \in]0,1[, \; i = 0, 1, \ldots, q-1$ e

$$b_i = \begin{cases} \beta_0 & \text{se } i = 0 \\ (1-\beta_0)\ldots(1-\beta_{i-1})\beta_i & \text{se } q-1 \geq i \geq 1 \\ (1-\beta_0)\ldots(1-\beta_{q-1}) & \text{se } i = q \end{cases},$$

onde $\{Z_n\}$ é uma sucessão de v.a. inteiras i.i.d. e todas as operações aleatórias são independentes entre si.

Em [5] e [7] é apresentado o comportamento distribucional limite do máximo assumindo ambos que as margens do processo possuem f.d. Geométrica.
Neste trabalho estendemos os resultados obtidos por estas duas autoras, considerando que tais margens têm f.d. na subclasse $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$. Especificamente, depois de validar as condições $D_{k_n}(u_n)$ e $D'_{k_n}(u_n)$, provamos que a sucessão de máximos $\{M_{k_n}\}$ tem como limite em distribuição uma v.a. com f.d. Gumbel discreta.

Nesta dissertação denotamos por F_X a f.d. de qualquer sucessão $\{X_n\}$ de v.a. identicamente distribuídas com X. Mais, denotamos por S_X o suporte da v.a. X.

Capítulo 2

Resultados fundamentais

2.1. Operador aleatório binomial

O operador aleatório binomial ou operador *thinning* tem, como já dissemos, por papel principal a substituição da operação multiplicação no contexto das v.a. inteiras ou de contagem. A definição que apresentamos de seguida de tal operador surge naturalmente associada a v.a. de contagem, uma vez que, grosso modo, num conjunto de acontecimentos aleatórios, estamos a seleccionar ou a eliminar cada um com uma certa probabilidade.

Definição 1. *([1])*

Dá-se o nome de operador aleatório binomial ao operador que transforma um número real $\beta \in [0,1]$ e uma v.a. inteira estritamente positiva Z, numa variável aleatória inteira positiva X da seguinte forma

$$X = \beta \circ Z = \sum_{i=1}^{Z} B_i(\beta) \tag{2.1}$$

em que $\{B_i(\beta)\}_{i\geq 1}$ é um sucessão de v.a. independentes com distribuição de Bernoulli de parâmetro β e independente de Z.

Notamos que se $S_Z = \mathbb{N}$ então $S_X = \mathbb{N}_0$. Mais, a sucessão $\{B_i(\beta)\}_{i\geq 1}$ é usualmente designada *sucessão de contagem do operador.*

As propriedades da função geradora de probabilidades (f.g.p.), cuja definição apresentamos de seguida, são fundamentais nas demonstrações que apresentamos neste e nos próximos capítulos.

Definição 2.

Seja X uma v.a. discreta com suporte S_X.

1. *A função geradora de probabilidades de X (ou da sucesão $\{p_j = P(X=j)\}$) é definida por*

   $$P_X(s) = \sum_{j\in S_X} p_j s^j = E(s^X),\ s \in \mathcal{D}(P_X)$$

   onde $\mathcal{D}$ representa o domínio da função indicada.

2. *A função geradora da sucessão* $\{1 - F(j)\}$ *é dada por*

$$Q_X(s) = \sum_{j \in S_X} (1 - F(j))s^j, \; s \in \mathcal{D}(Q_X).$$

A função geradora de probabilidades $\{p_j\}$, $j \geq 1$, é muitas vezes convenientemente escrita na forma

$$\tilde{P}_X(h) = \sum_{j \in S_X} p_j (1+h)^j = E((1+h)^X), \; h \in \mathcal{D}(\tilde{P}_X),$$

tendo-se $\tilde{P}_X(h) = P_X(1+h)$.

Observação 1. *Notamos que se existir* $\lim\limits_{z \to +\infty} \dfrac{1 - F(z)}{1 - F(z+1)} = r > 1$, *então, pelo critério de D'Alembert, concluímos que* Q_X *tem raio de convergência* r. *Usando o mesmo critério, também se prova que* P_X *tem raio de convergência* r, *pois*

$$\begin{aligned} \frac{P(Z = z)}{P(Z = z+1)} &= \frac{F_Z(z) - F_Z(z-1)}{F_Z(z+1) - F_Z(z)} = \frac{\frac{1 - F_Z(z-1)}{1 - F_Z(z)} - 1}{1 - \frac{1 - F_Z(z+1)}{1 - F_Z(z)}} \\ &\to \frac{r-1}{1 - 1/r} = r, \; z \to +\infty. \end{aligned}$$

Ao longo deste trabalho, $\mathcal{O}_x(g(x))$, $x \longrightarrow a$, denota uma função $f(x)$ que verifica $\lim\limits_{x \to a} |\dfrac{f(x)}{g(x)}| \leq C, x \longrightarrow a$, onde C representa uma constante, e $o_x(g(x))$, $x \longrightarrow a$, denota uma função $h(x)$ que verifica $h(x)/g(x) \longrightarrow 0, x \longrightarrow a$. A igualdade assintótica entre f e g, quando $x \to a$, é denotada por $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$.

Proposição 1 (Propriedades do Operador, ([5]))**.**

Seja $X = \beta \circ Z$ *uma v.a. definida em (2.1). Para as funções geradoras introduzidas na definição 2 tem-se*

1. $\tilde{P}_X(h) = \tilde{P}_Z(\beta h)$

2. *Se* $S_Z = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{N}_0$ *então* $Q_X(s) = \beta Q_Z(1 - \beta + \beta s)$

3. $E((1+h)^Z) = 1 + hE(Z) + \mathrm{o}_h(1), \; h \to 0$

4. $E(X) = \beta E(Z)$

5. $Var(X) = \beta^2 Var(Z) + \beta(1-\beta)E(Z)$

6. $1 \circ Z = Z$ *e* $0 \circ Z = 0$

7. $\beta_1 \circ (\beta_2 \circ Z) =^d (\beta_1 \beta_2) \circ Z$

8. $\beta_1 \circ (\beta_2 \circ Z) =^d \beta_2 \circ (\beta_1 \circ Z)$

9. $\beta \circ (Z+Y) =^d \beta \circ Z + \beta \circ Y$ *(com sucessões de contagem independentes)*

10. $\beta_1 \circ Z + \beta_2 \circ Z \neq^d (\beta_1 + \beta_2) \circ Z$

Demonstração.

1. Com efeito tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_X(h) &= E\left((1+h)^X\right) = E\left((1+h)^{\sum_{i=1}^{Z} B_i(\beta)}\right) \\
&= \sum_{k\in S_Z} E\left((1+h)^{\sum_{i=1}^{k} B_i(\beta)}\right) P(Z=k) \\
&= \sum_{k\in S_Z} E\left(\prod_{i=1}^{k}(1+h)^{B_i(\beta)}\right) P(Z=k) \\
&= \sum_{k\in S_Z} \prod_{i=1}^{k} E\left((1+h)^{B_i(\beta)}\right) P(Z=k) \\
&= \sum_{k\in S_Z} \prod_{i=1}^{k} (1\times(1-\beta)+\beta\times(1+h))P(Z=k) \\
&= \sum_{k\in S_Z} (1+\beta h)^k P(Z=k) = E\left((1+\beta h)^Z\right) \\
&= \tilde{P}_Z(\beta h).
\end{aligned}$$

2. Uma vez que $\tilde{P}_X(h) = \tilde{P}_Z(\beta h)$, tem-se

$$P_X(1+h) = \tilde{P}_X(h) = \tilde{P}_Z(\beta h) = P_Z(1+\beta h) = P_Z(1-\beta+\beta(1+h)).$$

   Por outro lado $Q_X(s) = \frac{1-P_X(s)}{1-s}$, donde

$$\begin{aligned}
Q_X(s) &= \frac{1-P_Z(1-\beta+\beta s)}{1-s} = \beta\frac{1-P_Z(1-\beta(1-s))}{\beta(1-s)} \\
&= \beta Q_Z(1-\beta+\beta s).
\end{aligned}$$

3. Admitamos, sem perda de generalidade, que $S_Z = \mathbb{N}_0$ e que $E((1+h)^Z)$ existe.

Tem-se

$$\begin{aligned}
E((1+h)^Z) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(1+h)^k P(Z=k) \\
&= P(Z=0)+(1+h)P(Z=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}(1+h)^k P(Z=k) \\
&= P(Z=0)+(1+h)P(Z=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}h^j\right)P(Z=k) \\
&= P(Z=0)+(1+h)P(Z=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}(1+kh+\mathcal{O}(h^2))P(Z=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}P(Z=k)+hP(Z=1)+h\sum_{k=2}^{+\infty}kP(Z=k)+\mathrm{o}_h(1) \\
&= 1+hE(Z)+\mathrm{o}_h(1),\ h\to 0.
\end{aligned}$$

4. $E(X)=E(E(X|Z))=E(ZE(B_i(\beta)))=E(\beta Z)=\beta E(Z)$.

5.

$$\begin{aligned}
Var(X) &= Var(E(X|Z))+E(Var(X|Z)) \\
&= E(Z)\beta+E(Z)(E(Z)-1)\beta^2-E(Z)^2\beta^2+\beta^2E(Z^2)-\beta^2E(Z)^2 \\
&= \beta^2E(Z^2)-\beta^2E(Z)^2+\beta E(Z)-E(Z)\beta^2 \\
&= \beta^2Var(Z)+(1-\beta)\beta E(Z).
\end{aligned}$$

6. $1\circ Z=\sum_{j=1}^{Z}B_i(1)=Z$ e $0\circ Z=\sum_{j=1}^{Z}B_i(0)=0$.

7. Atendendo à primeira propriedade obtemos

$$\tilde{P}_{\beta_1\circ(\beta_2\circ Z)}(h)=\tilde{P}_{\beta_2\circ Z}(\beta_1 h)=\tilde{P}_Z(\beta_2\beta_1 h)=\tilde{P}_Z(\beta_1\beta_2 h)=\tilde{P}_{(\beta_1\beta_2)\circ Z}(h).$$

8. Devido à demonstração anterior vem trivialmente

$$\tilde{P}_{\beta_1\circ(\beta_2\circ Z)}(h)=\tilde{P}_Z(\beta_1\beta_2 h)=\tilde{P}_{\beta_1\circ Z}(\beta_2 h)=\tilde{P}_{\beta_2\circ(\beta_1\circ Z)}(h).$$

9. $\beta\circ(Z+Y)=\sum_{i=1}^{Z+Y}B_i(\beta)=\sum_{i=1}^{Z}B_i(\beta)+\sum_{i=Z+1}^{Z+Y}B_i(\beta)=\beta\circ Z+\beta\circ Y$.

10. Com os argumentos já usados na demonstração da Propriedade 1., tem-se

$$
\begin{aligned}
E[(1+h)^{\beta_1\circ Z+\beta_2\circ Z}] &= E[E[(1+h)^{\beta_1\circ Z+\beta_2\circ Z}]|Z] \\
&= E[[E[(1+h)^{\beta_1\circ Z}|Z]][E[(1+h)^{\beta_2\circ Z}|Z]] \\
&= \sum_{k\in S_Z}\left((1+\beta_1 h)^k\right)\left((1+\beta_2 h)^k\right)P(Z=k) \\
&= \sum_{k\in S_Z}[(1+\beta_1 h)(1+\beta_2 h)]^k P(Z=k) \\
&= E((1+(\beta_1+\beta_2)h+\beta_1\beta_2 h^2)^Z).
\end{aligned}
$$

Como a propriedade 1 establece que $E((1+h)^{(\beta_1+\beta_2)\circ Z}) = E((1+(\beta_1+\beta_2)h)^Z)$, a diferença fica comprovada com, por exemplo, $\beta_1=\beta_2=0.5$.

□

Finalizamos esta secção com um lema sobre soma por partes de números reais.

Lema 1 (Soma por partes).
Sejam $\{a_i\}_{i\geq 0}$, $\{b_i\}_{i\geq 0}$ *duas sucessões reais tais que* $A_i = \sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j < \infty$. *Então*

$$\sum_{i=i_0}^{i_1} a_i b_i = A_{i_0-1}b_{i_0} - A_{i_1}b_{i_1+1} + \sum_{i=i_0}^{i_1} A_i(b_{i+1}-b_i),\ \forall\ i_0 < i_1 \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Demonstração.

Começamos por provar que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=i_0}^{i_1} A_i(b_{i+1}-b_i) &= \sum_{i=i_0}^{i_1}\sum_{j=i+1}^{+\infty} a_j(b_{i+1}-b_i) \\
&= \sum_{j=i_0+1}^{i_1} a_j \sum_{i=i_0}^{j-1}(b_{i+1}-b_i) + \sum_{j=i_1+1}^{+\infty} a_j \sum_{i=i_0}^{i_1}(b_{i+1}-b_i).
\end{aligned}
$$

Como $\sum_{i=k}^{j-1}(b_{i+1}-b_i) = b_j - b_k$ (é uma soma telescópica), o último termo dá lugar a

$$\begin{aligned}
&\sum_{vi_0+1}^{i_1} a_j(b_j - b_{i_0}) + \sum_{j=i_1+1}^{+\infty} a_j(b_{i_1+1} - b_{i_0}) \\
&\quad = \sum_{j=i_0+1}^{i_1} a_j b_j - \sum_{j=i_0+1}^{+\infty} a_j b_{i_0} + \sum_{j=i_1+1}^{+\infty} a_j b_{i_1+1} \\
&\quad = \sum_{j=i_0+1}^{i_1} a_j b_j - A_{i_0} b_{i_0} + A_{i_1} b_{i_1+1} \\
&\quad = \sum_{j=i_0}^{i_1} a_j b_j - a_{i_0} b_{i_0} - A_{i_0-1} b_{i_0} - (A_{i_0} - A_{i_0-1}) b_{i_0} + A_{i_1} b_{i_1+1} \\
&\quad = \sum_{j=i_0}^{i_1} a_j b_j - A_{i_0-1} b_{i_0} + A_{i_1} b_{i_1+1}.
\end{aligned}$$

Provámos que $\sum_{i=i_0}^{i_1} A_i(b_{i+1}-b_i) = \sum_{j=i_0}^{i_1} a_j b_j - A_{i_0-1}b_{i_0} + A_{i_1}b_{i_1+1}$ o que é equivalente a (2.2). □

2.2. Classe de Anderson

Apresentamos de seguida as definições de função de variação regular no infinito e de função de variação lenta no infinito, as quais serão usadas adiante.

Definição 3.

Diz-se que uma função $H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é de variação regular no infinito de expoente $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\forall y > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{H(yx)}{H(x)} = y^\alpha.$$

Diz-se que uma função $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é de variação lenta no infinito, se $\forall y > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{L(yx)}{L(x)} = 1.$$

Na proposição seguinte são apresentadas algumas propriedades das funções de variação lenta, as quais são usadas em algumas demonstrações.

Proposição 2. *([13])*

1. *Sejam L_1 e L_2 funções de variação lenta no infinito.*

    - *$\forall \gamma > 0$, $x^\gamma L(x) \to +\infty$; $x \to +\infty$ e $x^{-\gamma}L(x) \to 0$, $x \to +\infty$.*
    - *$\forall a \in \mathbb{R}$, $L^a(x)$ é uma função de variação lenta.*

- $L_1(x) + L_2(x)$ *e* $L_1(x)L_2(x)$ *são funções de variação lenta.*
- *Se* $L_2(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, *então* $L_1(L_2(x))$ *é uma função de variação lenta.*

2. Seja U *uma função de variação regular de expoente* α *no infinito.*

- *Existe uma função de variação lenta* $L(x)$ *tal que* $\mathrm{U}(x) = x^{\alpha}L(x)$.
- *Seja* $\varepsilon > 0$. *Existe* t_0 *tal que, para* $t \geq t_0$ *e para* $x \geq 1$, *se tem*

$$(1-\varepsilon)x^{\alpha-\varepsilon} < \frac{\mathrm{U}(tx)}{\mathrm{U}(t)} < (1+\varepsilon)x^{\alpha+\varepsilon}.$$

Definição 4. *(Classe de Anderson, [5])*

Dizemos que uma f.d. F pertence à classe de Anderson se

$$1 - F(z) \sim [z]^{\xi}(1+\lambda)^{-[z]}L(z), \quad z \to +\infty, \tag{2.3}$$

onde $\xi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ *e* L *é uma função de variação lenta no infinito.*

A Classe de Anderson será denotada por $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. Devemos observar que afirmar que uma v.a. pertence a $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ significa que a sua f.d. pertence a $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$.

Exemplo 1. *Seja* F *a f.d. de uma v.a. com distribuição Binomial Negativa Generalizada de parâmetros* $\beta > 0$ *e* $\theta \in]0,1[$. *Para* $m \geq 1$ *tem-se*

$$\begin{aligned}
1 - F(m-1) &= \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{\beta+n-1}{n}(1-\theta)^{\beta}\theta^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\beta+n+m-1}{n+m}(1-\theta)^{\beta}\theta^{n+m} \\
&= (1-\theta)^{\beta-1}(1-\theta)\theta^{m}\theta^{n}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(m+n+\beta-1)!}{(m+n)!(\beta-1)!} \\
&= \frac{(1-\theta)^{\beta-1}m^{\beta-1}\theta^{m}}{(\beta-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\theta^{n}(1-\theta)\prod_{i=1}^{\beta-1}\left(\frac{m+n+i}{m}\right) \\
&= \frac{(1-\theta)^{\beta-1}m^{\beta-1}\theta^{m}}{(\beta-1)!}(1+\frac{1}{m}C(m,\theta,\beta))
\end{aligned}$$

onde

$$C(m,\theta,\beta) = m\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\prod_{i=1}^{\beta-1}(1+\frac{n+i}{m}) - 1\right](1-\theta)\theta^{n}.$$

Devido à desigualdade $\left|\prod_{i=1}^{k} x_i - \prod_{i=1}^{k} y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$*, válida para quaisquer* x_i, y_i *pertencentes a* $]0,1[$*, obtemos*

$$\begin{aligned} C(m,\theta,\beta) &= m\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\prod_{i=1}^{\beta-1}\left(1+\frac{n+i}{m}\right)\frac{n+\beta}{n+\beta} - \prod_{i=1}^{\beta-1}\frac{n+\beta}{n+\beta}\right] \\ &\leq m\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\beta)^{\beta-1}\sum_{i=1}^{\beta-1}\frac{n+i}{m(n+\beta)}(1-\theta)\theta^n \\ &\leq \beta\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\beta)^{\beta-1}(1-\theta)\theta^n \end{aligned}$$

que é uma série convergente. Então

$$\begin{aligned} 1-F(m-1) &= \frac{(1-\theta)^{\beta-1}m^{\beta-1}\theta\ m}{(\beta-1)!}(1+\mathrm{o}_m(1)) \\ &= (m-1)^{\beta-1}\theta^{m-1}\frac{(1-\theta)^{\beta-1}\theta m^{\beta-1}}{(\beta-1)!(m-1)^{\beta-1}} \times (1+\mathrm{o}_m(1)) \\ &= (m-1)^{\beta-1}\theta^{m-1}L_Z(m) \end{aligned}$$

onde $L_Z(x) = \frac{(1-\theta)^{\beta-1}\theta}{(\beta-1)!}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\beta-1}(1+\mathrm{o}_x(1)),\ x \to +\infty$*, é uma função de variação lenta no infinito.*

Assim, provámos que F *pertence à classe de Anderson.*

Exemplo 2. *Numa fila de espera M/M/1, seja* q_i*,* $i \geq 1$*, o comprimento máximo da fila no i-ésimo período e* $Q_n = \max_{1\leq i\leq n} q_i$ *o o comprimento máximo da fila até ao fim do n-ésimo período. As v.a.* q_i*,* $i \geq 1$*, são independentes e se a fila for inicialmente vazia são também identicamente distribuídas.*
Pode ser mostrado que quando a intensidade de tráfego ρ *é menor do que 1, a f.d. de* q_i *é definida por* $F(n) = \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}$*,* $n \in \mathbb{N}$*.*

Facilmente se verifca que pertence a $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$*. De facto,*

$$1-F(n) = \frac{\rho^n-\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} \sim \rho^n(1-\rho), n \to +\infty.$$

Por outro lado tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1-F(n)}{1-F(n+1)} &= \frac{\rho^n-\rho^{n+1}}{\rho^{n+1}-\rho^{n+2}}\frac{1-\rho^{n+2}}{1-\rho^{n+1}}\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{1-\rho^{n+2}}{1-\rho^{n+1}} \to \frac{1}{\rho},\ n\to+\infty.\end{aligned}$$

Exemplo 3. *A v.a com distribuição de Gumbel discreta (ou discretizada) tem f.d. dada por* $F(x)=\exp\left(-r^{-[x]}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, $r>1$. *Neste caso tem-se*

$$1-F(n)=1-\exp\left(-r^{-n}\right)=r^{-n}+\mathcal{O}(r^{-2n})\sim r^{-n},\ n\to+\infty.$$

Proposição 3. *([5])*

Seja Z *uma variável aleatória com suporte* $\mathbb{N}$. *Nas condições da definição do operador aleatório binomial tem-se, para* $X=\beta\circ Z$,

$$1-F_X(k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(1-\beta)^{n-k}\beta^{k+1}(1-F_Z(n)),\ k\in\mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

Demonstração.

Sabe-se que sendo Q_X a f.g.p. da sucessão $\{1-F_X(j)\}$, se tem, de acordo com a propriedade 2 da Proposição 1, $Q_X(s)=\beta Q_Z(1-\beta+\beta s)$. Como tal

$$\begin{aligned}Q_X(s) &= \beta Q_Z(1-\beta-\beta s)=\beta\sum_{n=0}^{+\infty}(1-F_Z(n))(1-\beta+\beta s)^n\\ &= \beta\sum_{n=0}^{+\infty}(1-F_Z(n))\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-\beta)^{n-k}(\beta s)^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}s^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(1-\beta)^{n-k}\beta^{k+1}(1-F_Z(n))\end{aligned}$$

ou seja

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_X(k))s^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\left[\binom{n}{k}(1-\beta)^{n-k}\beta^{k+1}(1-F_Z(n))\right]s^k.$$

Então, dada a arbitrariedade de s, obtemos (2.4)

□

Na demonstração do Teorema 1 é usado o resultado do lema que se segue.

Lema 2.

Sejam $\eta>0$ *e* $\{X_k\}$ *uma sucessão de v.a. tais que* $E(\frac{X_k}{k+\eta})=\theta$ *e* $Var(\frac{X_k}{k+\eta})\to 0$, $k\to+\infty$. *Seja* g *uma função contínua e limitada. Então*

$$E\left(g(\frac{X_k}{k+\eta})\right)\to g(\theta),\ k\to+\infty.$$

Demonstração. De acordo com o Teorema 5.8 de [4], concluímos que $\frac{X_k}{k+\eta} \to^{m.q.} \theta$, $k \to +\infty$. Assim $\frac{X_k}{k+\eta} \to^{P} \theta,\ k \to +\infty$. Por outro lado, pelo Teorema de Slutsky ([12], pag 169), como g é contínua, obtemos $g(\frac{X_k}{k+\eta}) \to^{P} g(\theta)$, $n \to +\infty$. Como g é limitada, o Teorema da Convergência Dominada em $\mathcal{L}$ (ver por exemplo [16]) permite concluir a demonstração. □

Teorema 1. *([6])*

Seja Z uma v.a. com suporte $\mathbb{N}$ com f.d F_Z pertencente à classe de Anderson. Seja $X = \beta \circ Z$ com f.d. F_X. Então F_X pertence à classe de Anderson e tem-se

$$1 - F_X(z) \sim A\,[z]^{\xi}(1+\lambda/\beta)^{-[z]}L_Z(z),\ z \to +\infty,$$

onde $A = \beta\left(\frac{1+\lambda}{\lambda+\beta}\right)^{\xi+1}$.

Demonstração.

De acordo com a Proposição 3, para k suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
1 - F_X(k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(1-\beta)^{n-k}\beta^{k+1}(1-F_Z(n))\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k}{k}(1-\beta)^{n}\beta^{k+1}(1-F_Z(n+k))\\
&\sim \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}(1-\beta)^{n}\beta^{k+1}(n+k)^{\xi}L_Z(n+k)(1+\lambda)^{-(n+k)}\\
&\sim \beta^{k+1}\frac{\Gamma(k+\xi+2)}{\Gamma(k+1)}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k+\xi+1}{n}\left(\frac{1-\beta}{1+\lambda}\right)^{n}\\
&\qquad \times(1+\lambda)^{-k}(n+k)^{\xi}\frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+k+\xi+2)}L_Z(n+k).
\end{aligned}$$

A fórmula de Stirling, $\Gamma(k+1) \sim \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$, $k \to +\infty$, dá origem a

$$\frac{\Gamma(k+\xi+2)}{\Gamma(k+1)(k+\xi+2)} \sim k^{\xi},\ k \to +\infty.$$

Então obtemos

$$\begin{aligned}
1 - F_X(k) &= \beta^{k+1}\frac{\Gamma(k+\xi+2)(1+\lambda)^{\xi+2}}{\Gamma(k+1)(\lambda+\beta)^{k+\xi+2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k+\xi+1}{n}\left(\frac{1-\beta}{1+\lambda}\right)^{n}\\
&\qquad \times\left(\frac{\lambda+\beta}{1+\lambda}\right)^{k+\xi+2}\frac{L^*(n+k+\xi+2)}{n+k+\xi+2}\\
&\sim \beta^{k+1}\frac{\Gamma(k+\xi+2)}{\Gamma(k+1)(k+\xi+2)}\frac{(1+\lambda)^{\xi+2}}{(\lambda+\beta)^{k+\xi+2}}L^*(k+\xi+2)\\
&\qquad \times\sum_{n=0}^{+\infty}f_k(n)\frac{U(n+k+\xi+2)}{U(k+\xi+2)}
\end{aligned}$$

onde $L^*(n) \sim L(n), n \to +\infty$, $U(n) = L^*(n)/n$ e $f_k(n)$ representa a função de probabilidade de uma v.a Binomial Negativa Generalizada, mais concretamente, uma v.a. X_k com distribuição $BN(k+\xi+2,(1-\beta))/(\lambda+\beta)$ de média $(1-\beta)(k+\xi+2)/(\lambda+\beta)$ e variância $(1-\beta)(k+\xi+2)/(\lambda+\beta)$.

De acordo com a Proposição 2, sobre funções de variação regular e funções de variação lenta, concluímos que U é uma função de variação regular, bem como

$$\left(\frac{n}{k+\xi+2}+1\right)^{-1-\epsilon}(1-\epsilon) \leq \frac{U(n+k+\xi+2)}{U(k+\xi+2)} \leq \left(\frac{n}{k+\xi+2}+1\right)^{-1+\epsilon}(1+\epsilon)$$

para k suficientemente grande e $n \in \mathbb{N}$. Como $\frac{X_k}{k+\xi+2}$ tem média $\frac{1-\beta}{\lambda+\beta}$, não dependente de k, e variância $\frac{1-\beta}{(\lambda+\beta)(k+\xi+2)} \to 0, k \to +\infty$, devido ao Lema 2, com $\eta = \xi+2$ e $g(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{1-\epsilon}$ ou $g(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{1+\epsilon}$ contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^+$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\lambda}{\lambda+\beta}\right)^{-1-\epsilon} &\leq \liminf_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_k(n)\frac{U(n+k+\xi+2)}{U(k+\xi+2)} \\ &\leq \limsup_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_k(n)\frac{U(n+k+\xi+2)}{U(k+\xi+2)} \leq \left(\frac{1+\lambda}{\lambda+\beta}\right)^{-1+\epsilon},\end{aligned}$$

pois $g(\frac{1-\beta}{\lambda+\beta}) = (\frac{1+\lambda}{\lambda+\beta})^{-1\pm\epsilon}$. A arbitrariedade de ϵ permite finalizar a demonstração.

□

Nos resultados que se seguem consideramos o caso particular da classe de Anderson com L_Z constante. Esta classe particular será denotada por $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$.

O lema que apresentamos de seguida estabelece essencialmente que a soma de duas v.a independentes na classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$ pertence ainda à mesma classe. Numa primeira parte estabelece o mesmo resultado sobre a soma, exigindo apenas que uma das v.a. pertença à classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$ e que a outra possua f.g.p. convergente.

Lema 3. *([5])*

(i) *Suponhamos que a v.a. Y_1 satisfaz*

$$1 - F_{Y_1}(z) \sim K[z]^{\xi}(1+\lambda)^{-[z]},\ z \to +\infty, \tag{2.5}$$

onde $\xi \in \mathbb{R}$, $K > 0$ e $\lambda > 0$, e que é independente da v.a. inteira Y_2 que verifica

$$E[(1+\lambda^*)^{Y_2}] < +\infty,$$

para algum $\lambda^* > \lambda$. *Então*

$$P(Y_1+Y_2>z) \sim KE[(1+\lambda)^{Y_2}][z]^{\xi}(1+\lambda)^{-[z]}, z \to +\infty.$$

(ii) *Suponhamos que* Y_1 *e* Y_2 *são independentes e verificam*

$$1-F_{Y_i}(z) \sim K_i\,[z]^{\xi}(1+\lambda)^{-[z]},\ z \to +\infty,$$

com $\xi_i \in \mathbb{R}, K_i > 0$ *e* $\lambda > 0$ *para* $i \in \{1,2\}$. *Então, se* $\xi_1 = \xi_2 = \xi < -1$, *temos*

$$P(Y_1+Y_2>z) \sim \left(K_1E[(1+\lambda)^{Y_2}] + K_2E[(1+\lambda)^{Y_1}]\right)[z]^{\xi}(1+\lambda)^{-[z]},\ z \to +\infty, \tag{2.6}$$

e se $\xi_1 > -1$, $\xi_2 > -1$, *temos*

$$P(Y_1+Y_2>z) \sim \lambda K_1\,K_2\frac{\Gamma(\xi_1+1)\Gamma(\xi_2+1)}{\Gamma(\xi_1+\xi_2+2)}[z]^{\xi_1+\xi_2+1}(1+\lambda)^{-[z]},\ z \to +\infty. \tag{2.7}$$

Demonstração.

Notemos que $\frac{P(Y_1>z-i)}{P(Y_1>z)} \to (1+\lambda)^i$, $z \to +\infty$. Além disso $E(1+\lambda)^{Y_2} < E(1+\lambda^*)^{Y_2} < +\infty$. Então, com $\gamma \in\,]0,1[$, temos

$$\begin{aligned} P(Y_1+Y_2>z) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y_1>z-i)dF_2(i) \\ &= P(Y_1>z)\sum_{i=0}^{[\gamma z]}\frac{P(Y_1>z-i)}{P(Y_1>z)}dF_2(i) + \sum_{i=[\gamma z+1]}^{+\infty} P(Y_1>z-i)dF_2(i) \\ &\leq P(Y_1>z)\sum_{i=0}^{[\gamma z]}(1+\lambda)^i(1+\mathrm{o}(1))dF_2(i) + \sum_{i=[\gamma z+1]}^{+\infty} dF_2(z) \\ &\sim P(Y_1>z)E[(1+\lambda)^{Y_2}] + \mathrm{o}_z(1),\ z \to +\infty, \end{aligned}$$

onde se aplica o Teorema da Convergência Dominada.

(ii) Dividindo adequadamente em três parcelas, temos

$$\begin{aligned} P(Y_1+Y_2>z) &= P\left(Y_2 \leq \left[\frac{z}{2}\right], z-Y_2 \leq Y_1 < +\infty\right) \\ &+ P\left(Y_1 \leq \left[\frac{z}{2}\right], z-Y_1 \leq Y_2 < +\infty\right) + P\left(Y_1 > \left[\frac{z}{2}\right], Y_2 > \left[\frac{z}{2}\right]\right) \\ &= \sum_{i=0}^{[z/2]} P(Y_1>z-i)dF_2(i) + \sum_{i=0}^{[z/2]} P(Y_2>z-i)dF_1(i) \qquad (2.8) \\ &\qquad +\mathcal{O}(z^{\xi_1+\xi_2}(1+\lambda)^{-z}). \end{aligned}$$

Como por (2.5)

$$P(Y_1 > z-i) \sim K_1([z-i])^{\xi_1}(1+\lambda)^{-[z-i]} \sim K_1 z^{\xi_1}\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_1}(1+\lambda)^{-[z]}(1+\lambda)^i$$

obtemos

$$\sum_{i=0}^{[z/2]} P(Y_1 > z-i)dF_2(i) \sim K_1[z]^{\xi_1}(1+\lambda)^{-[z]}\sum_{i=0}^{[\frac{z}{2}]}\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_1}(1+\lambda)^i dF_2(i)$$

De igual modo

$$\sum_{i=0}^{[z/2]} P(Y_2 > z-i)dF_1(i) \sim K_2[z]^{\xi_2}(1+\lambda)^{-[z]}\sum_{i=0}^{[\frac{z}{2}]}\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_2}(1+\lambda)^i dF_1(i)$$

Admitamos $\xi_1 = \xi_2 = \xi < -1$. Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\sum_{i=0}^{[\frac{z}{2}]}\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_1}(1+\lambda)^i dF_2(i) \to \sum_{i=0}^{+\infty}(1+\lambda)^i dF_2(i) = E(1+\lambda)^{Y_2},\ z\to+\infty,$$

e portanto obtemos a primeira parcela do segundo membro de (2.6). Se, por outro lado, $\xi_1 > -1$ e $\xi_2 > -1$, obtemos

$$\sum_{i=0}^{[\frac{z}{2}]}\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_1}(1+\lambda)^i dF_2(i) \to +\infty,\ z\to+\infty.$$

Uilizando a soma por partes (Lema 1), temos

$$\sum_{i=0}^{[\frac{z}{2}]}\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_1}(1+\lambda)^i dF_2(i)$$

$$= 1-\left(1-\frac{[z/2]+1}{[z]}\right)^{\xi_1}(1+\lambda)^{[z/2]+1}K_2[z/2]^{\xi_1}(1+\lambda)^{-[z/2]}(1-F_2(z/2))+$$

$$+\sum_{i=0}^{[z/2]}(1+\lambda)^i\left(\left(1-\frac{i+1}{[z]}\right)^{\xi_1}(1+\lambda)-\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_1}\right)(1-F_2(i))$$

$$\sim 1+K_2\lambda\sum_{i=0}^{[z/2]}\left(\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_1} i^{\xi_2}\right).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{[z/2]}\left(1-\frac{i}{[z]}\right)^{\xi_1} i^{\xi_2} &\sim \int_0^{[z/2]+1}\left(1-\frac{[x]}{[z]}\right)^{\xi_1}[x]^{\xi_2}dx \\
&= \int_0^{\frac{[z/2]+1}{z}}\left(1-\frac{[yz]}{[z]}\right)^{\xi_1}[yz]^{\xi_2}dz \\
&\sim z^{\xi_2+1}\int_0^{1/2}(1-y)^{\xi_1}y^{\xi_2}dy,\ z\to+\infty,
\end{aligned}$$

donde

$$\sum_{i=0}^{[z/2]} P(Y_1 > z-i)dF_2(i) \sim K_1[z]^{\xi_1}(1+\lambda)^{-[z]}\left(1 + K_2\lambda[z]^{\xi_2+1}\int_0^{1/2}(1-y)^{\xi_1}y^{\xi_2}dy\right)$$
$$\sim \lambda K_1K_2[z]^{\xi_1+\xi_2+1}(1+\lambda)^{-[z]}\int_0^{1/2}(1-y)^{\xi_1}y^{\xi_2}dy. \qquad (2.9)$$

Analogamente

$$\sum_{i=0}^{[z/2]} P(Y_2 > z-i)dF_1(i) \sim \lambda K_1K_2[z]^{\xi_1+\xi_2+1}(1+\lambda)^{-[z]}\int_0^{1/2}(1-y)^{\xi_2}y^{\xi_1}dy. \quad (2.10)$$

Concluímos então por (2.8) que

$$P(Y_1+Y_2 > z) \sim \sum_{i=0}^{[z/2]} P(Y_1 > z-i)dF_2(i) + \sum_{i=0}^{[z/2]} P(Y_2 > z-i)dF_1(i)$$
$$\sim \lambda K_1K_2[z]^{\xi_1+\xi_2+1}(1+\lambda)^{-[z]}\int_0^{1}(1-y)^{\xi_1}y^{\xi_2}dy.$$

Atendendo à relação entre as funções Beta e Gama obtemos

$$\int_0^1 (1-y)^{\xi_1}y^{\xi_2}dy = \frac{\Gamma(\xi_1+1)\Gamma(\xi_2+1)}{\Gamma(\xi_1+\xi_2+2)},$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 2. *Notamos que no caso em que Y_1 e Y_2 verificam (2.5) com λ_1 diferente de λ_2 a aproximação (2.6) (com $\xi_1 < -1$ e $\xi_2 < -1$) dá lugar a*

$$P(Y_1+Y_2 > z) \sim K_1E[(1+\lambda_1)^{Y_2}][z]^{\xi_1}(1+\lambda_1)^{-[z]} + K_2E[(1+\lambda_2)^{Y_1}][z]^{\xi_2}(1+\lambda_2)^{-[z]},\ z \to +\infty.$$

Por outro lado, também se obtém (2.9) e (2.10) com λ substituído por λ_1 e λ_2 e assim, admitindo $\lambda_2 > \lambda_1$ o que implica $(\frac{1+\lambda_2}{1+\lambda_1})^{-[z]} \longrightarrow 0, z \to +\infty$, (2.7) dá lugar a

$$P(Y_1+Y_2 > z) \sim K_1[z]^{\xi_1+\xi_2+1}(1+\lambda_1)^{-[z]},\ z \to +\infty.$$

2.3. Distribuição assintótica do máximo

Existem muitas situações em que interessa caracterizar a f.d. do máximo de uma amostra aleatória, $M_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Na situação mais simples em que estas v.a. podem ser consideradas i.i.d. com f.d. F, a v.a. M_n tem f.d. F^n. Sendo F desconhecida, torna-se útil obter uma aproximação assintótica para tal f.d. O facto de $F^n(x)$ ter limite degenerado em 0 ou em 1, quando $n \to +\infty$, motivou a procura de uma normalização $\{u_n\}$ com a qual se obtenha, como limite de $F^n(u_n)$, uma f.d. $G(x)$ não degenerada. A normalização usual é da forma $u_n = a_n x + b_n$.

No primeiro resultado desta secção é estabelecida uma condição necessária e suficiente de existência de tal limite.

A caracterização da classe de f.d. G que surge como limite de $F^n(a_n x + b_n)$ não foi alvo do nosso estudo.

Teorema 2. *([8])*

Seja $\{X_n\}$ uma sucessão de v.a. i.i.d. com f.d. F tal que $\lim\limits_{x\to\omega_F^-} F(x) = 1$. Para $0 < \tau < +\infty$, existe uma sucessão $\{u_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} F^n(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(M_n \leq u_n(x)) = e^{-\tau}$, se e só se $\lim\limits_{x\to\omega_F} \dfrac{1-F(x)}{1-F(x^-)} = 1$ ou equivalentemente $\lim\limits_{x\to\omega_F} \dfrac{F(x)-F(x^-)}{1-F(x^-)} = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $1 - F(u_n) \sim \frac{\tau}{n}$, para algum $\tau \in]0, +\infty[$, mas que $\lim\limits_{x\to\omega_F} \dfrac{1-F(x)}{1-F(x^-)} = 1$ não se verifica. Então existe $\epsilon > 0$ e uma sucessão $\{x_n\}$ que, quando $x_n \to \omega_F$, verifica $\frac{1-F(x_n)}{1-F(x_n^-)} \leq 1 - 2\epsilon$, ou seja

$$F(x_n) - F(x_n^-) \geq 2\epsilon(1 - F(x_n^-)). \tag{2.11}$$

Vamos escolher a subsucessão $\{n_j\}$ tal que, $\forall j$, $1 - \frac{\tau}{n_j}$ está próximo do ponto médio do salto que F possui em x_j no seguinte sentido:

$$1 - \frac{\tau}{n_j} \leq \frac{F(x_j^-) + F(x_j)}{2} \leq 1 - \frac{\tau}{n_j + 1}.$$

Para infinitos valores de j, $u_{n_j} < x_j$ ou $u_{n_j} \geq x_j$. Admitindo que se verifica $u_{n_j} < x_j$, então, para tais valores de j, temos $n_j(1 - F(u_{n_j})) \geq n_j(1 - F(x_j^-))$. Assim

$$\begin{aligned} n_j(1 - F(x_j^-)) &= \tau + n_j \left(\left(1 - \frac{\tau}{n_j}\right) - \frac{F(x_j) + F(x_j^-)}{2} + \frac{F(x_j) - F(x_j^-)}{2} \right) \\ &\geq \tau + n_j \frac{(F(x_j) - F(x_j^-))}{2} - n_j \left(\frac{\tau}{n_j} - \frac{\tau}{n_j + 1} \right) \\ &\geq \tau + \epsilon\, n_j (1 - F(x_j^-)) - \frac{\tau}{n_j + 1}. \end{aligned}$$

Obtém-se $(1-\epsilon) n_j (1 - F(x_j^-)) \geq \tau - \frac{\tau}{n_j+1}$. Dado que $n_j \to +\infty$ e que, por hipótese $\tau \in]0, +\infty[$, vem

$$\limsup_{j\to+\infty} n_j(1 - F(x_j^-)) > \tau.$$

Consequentemente, da desigualdade $n_j(1 - F(u_{n_j})) \geq n_j(1 - F(x_j^-))$ resulta

$$\limsup_{j\to+\infty} n_j(1 - F(u_{n_j})) > \tau,$$

o que contradiz a hipótese inicial em que se supôs $1 - F(u_n) \sim \frac{\tau}{n}$. Provamos o caso em que $u_{n_j} \geq x_j$ de forma análoga.

Reciprocamente, suponhamos que $\lim\limits_{x \to \omega_F} \dfrac{1 - F(x)}{1 - F(x^-)} = 1$ se verifica e consideremos ainda uma sucesssão $\{u_n\}$ para a qual $F(u_n^-) \leq 1 - \frac{\tau}{n} \leq F(u_n)$ (por exemplo $u_n = \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{\tau}{n}\} \equiv F^{-1}(1 - \frac{\tau}{n})$). As desigualdades anteriores reduzem-se às desigualdades

$$\frac{1 - F(u_n)}{1 - F(u_n^-)}\tau \leq n(1 - F(u_n)) \leq \tau.$$

Uma vez que $u_n \to \omega_F$, $n \to +\infty$, concluímos que $1 - F(u_n) \sim \frac{\tau}{n}$. □

Observamos que a condição $\lim_{x \to \omega_F^-} F(x) = 1$ e a condição $\lim_{x \to \omega_F} \frac{1-F(x)}{1-F(x^-)} = 1$ são trivialmente verificadas por qualquer f.d. F que seja contínua numa vizinhança esquerda do limite superior do seu suporte. No entanto, é obvio que se excluem dos resultados do teorema anterior f.d como a Binomial que verifica $\lim_{x \to \omega_F^-} F(x) < 1$, bem como a Binomial Negativa e a Gumbel discretizada ($G(x) = \exp(-r^{-[x]}), r > 1$, $x \in \mathbb{R}$) para as quais se tem

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - F(n-1)}{1 - F(n)} = r > 1. \tag{2.12}$$

São também excluídas destes resultados f.d que como a Poisson verificam (2.12) com $r = +\infty$.

Exemplo 4 (Distribuição de Poisson)**.** *Sendo X uma v.a. com distribuição $P(\lambda)$, temos $p_r = P(X = r) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$, para $\lambda > 0$ e $r = 0, 1, 2, \ldots$ e portanto*

$$\frac{p_n}{1 - F(n-1)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!(1 - \sum\limits_{r=0}^{n-1} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^r}{r!})} = \frac{\lambda^n/n!}{\sum\limits_{r=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^r}{r!}} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{r=n+1}^{+\infty} \lambda^{r-n}\dfrac{n!}{r!}}$$

O último somatório no denominador pode ser reescrito na forma

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{\lambda^s}{(n+1)\ldots(n+s)} \leq \sum_{s=1}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^s = \frac{\lambda/n}{1 - \lambda/n} \to 0,\ n \to +\infty.$$

Portanto $\frac{p_n}{1-F(n-1)} \to 1$, $n \to +\infty$.

Consequentemente o teorema anterior mostra que não existe distribuição limite não degenerada para $P(M_n \leq u_n)$, qualquer que seja a sucessão $\{u_n\}$.

Exemplo 5 (Distribuição Geométrica)**.** *Seja X uma v.a. com distribuição Geométrica de parâmetro 1-p. Temos $p_r = P(X = r) = p^{r-1}(1-p)$, $0 < p < 1$, para $r \in \mathbb{N}$, e portanto*

$$\frac{p_n}{1 - F(n-1)} = \frac{p^{n-1}}{\sum_{r=n}^{+\infty} p^{n-1}} = 1 - p$$

o que mostra que não existe limite não degenerado para $P(M_n \leq u_n)$*, isto é, se* $P(M_n \leq u_n) \to \rho$ *então* $\rho = 0$ *ou* $\rho = 1$.

Para f.d. inteiras com extremo superior do suporte infinito que verifica (2.12) surgiu em [2] um resultado bastante relevante que permite estabelecer um comportamento "quase estável" para a f.d. do máximo de n v.a. i.i.d.. Concretamente mostra-se que (2.12) é condição necessária e suficiente para que exista uma sucessão real $\{b_n\}$ tal que $F^n(x + b_n)$ seja limitada inferiormente e superiormente por $\exp(-r^{-(x-1)})$ e $\exp(-r^{-x})$, para qualquer x real.

Passamos a apresentar um conjunto de lemas que são necessários à demonstração do resultado principal de [2].

Lema 4. *([2])*

Seja F *uma f.d. com cauda* $\mathcal{F} \equiv 1 - F$ *e suponhamos que* $\{u_n\}$ *é uma sucessão de reais tais que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$. *Então*

(i) $\liminf\limits_{n\to+\infty} \; n\mathcal{F}(u_n) = -\log(\limsup\limits_{n\to+\infty} \; F^n(u_n))$

e

(ii) $\limsup\limits_{n\to+\infty} \; n\mathcal{F}(u_n) = -\log(\liminf\limits_{n\to+\infty} \; F^n(u_n))$

Demonstração. (i) Uma vez que a função log é contínua e estritamente crescente, temos

$$\log(\limsup_{n\to+\infty} \; F^n(u_n)) = \limsup_{n\to+\infty} \; (n \log F(u_n)).$$

Uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} \; \mathcal{F}(u_n) = 0$ e que $\log(1 - x) \sim -x$, $x \to 0$, tem-se $\log F(u_n) \sim -\mathcal{F}(u_n)$. Daí deduz-se que

$$\limsup_{n\to\infty} \; (n \log F(u_n)) = \limsup_{n\to\infty} \; (-n\mathcal{F}(u_n)) = -\liminf_{n\to\infty} \; (n\mathcal{F}(u_n)).$$

Para o caso (ii) a demonstração é análoga. $\square$

Do Lema 4 decorre imediatamente a equivalência entre $n(1 - F(u_n)) \to \tau > 0$, $n \to +\infty$, e $F^n(u_n)) \to e^{-\tau}$, $n \to +\infty$.

Seja F uma f.d. inteira com $w_F = +\infty$ e $\mathcal{F} = 1 - F$. A F é associada uma f.d. contínua F_c da seguinte forma. Consideremos inicialmente $h(n) = -\log \mathcal{F}(n), n \geq 1$, a qual é uma função estritamente crescente de inteiros positivos que verifica $\lim\limits_{n\to+\infty} h(n) = +\infty$. Defina-se h_c como a extensão de h dada por

$$h_c(x) = h([x]) + (x - [x])(h([x + 1]) - h([x]))$$

de modo que h_c é contínua, estritamente crescente e $\lim_{x\to+\infty} h_c(x) = +\infty$. Então

$$\mathcal{F}_c(x) = e^{-h_c(x)},\ x \geq 1,$$

representa a cauda de uma f.d F_c que é contínua e estritamente crescente. Além disso $\mathcal{F}_c([x]) = \mathcal{F}([x]) = \mathcal{F}(x)$ e, uma vez que $[1+x] > x \geq [x]$, temos também

$$\mathcal{F}(x+1) \leq \mathcal{F}_c(x) \leq \mathcal{F}(x).$$

Lema 5.

Com $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_c$ nas condições já apresentadas tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{F}(n)}{\mathcal{F}(n+1)} = e^{\alpha},\ \alpha > 0, \tag{2.13}$$

se e só se

$$\forall y > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathcal{F}_c(x)}{\mathcal{F}_c(x+y)} = e^{\alpha y},\ \alpha > 0. \tag{2.14}$$

Demonstração. De (2.13) concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} h(n+1) - h(n) = -\alpha \tag{2.15}$$

Por outro lado, pela definição de h_c, obtemos

$$\begin{aligned} h_c(x+y) - h_c(x) &= h([x+y]) + (x+y-[x+y])(h([x+y+1]) - h([x+y])) \\ &- (h([x]) + (x-[x])(h([x+1]) - h([x]))). \end{aligned}$$

Observemos agora que, devido a (2.15), se tem $\lim_{x\to+\infty} h([x+y+1]) - h([x+y]) = -\alpha$, bem como $\lim_{x\to+\infty} h([x+1]) - h([x]) = -\alpha$. Como para x e y positivos se tem $[x+y] = [x]+[y]$ ou $[x+y] = [x]+[y]+1$, obtemos, no primeiro caso,

$$\lim_{x\to+\infty} h_c(x+y) - h_c(x) = -\alpha[y] - \alpha(y-[y]) = -\alpha y.$$

No segundo caso obtemos o mesmo limite. Assim

$$\lim_{x\to+\infty} \log \mathcal{F}_c(x) - \log \mathcal{F}_c(x+y) = \alpha y,$$

o que equivale a (2.14).

A implicação contrária obtém-se trivialmente uma vez que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_c$ sao iguais para argumentos inteiros. $\square$

Lema 6.

A f.d. H verifica

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-H(x+y)}{1-H(x)}=e^{-\alpha y}, \tag{2.16}$$

para qualquer y real se e só se existe uma sucessão real $\{b_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-H(x+b_n))=e^{-x}, \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Demonstração. Seja G uma f.d. que verifica $H(y)=G(e^y)$, $\forall y\in\mathbb{R}$. Uma vez que se tem

$$\frac{1-G(tx)}{1-G(t)}=\frac{1-H(\ln(tx))}{1-H(\ln t)}=\frac{1-H(\ln t+\ln x)}{1-H(\ln t)} \tag{2.18}$$

(2.16) é equivalente a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-G(tx)}{1-G(t)}=x^{\alpha}, \tag{2.19}$$

isto é, $1-G$ é uma função de variação regular de expoente $-\alpha$. Então, pelo Teorema 1.6.2 de [8], obtemos a existência de $\{\beta_n\}_n$ $(1-G(\beta_n)\sim 1/n)$ tal que,

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-G(\beta_n x))=x^{-\alpha}, \forall x>0, \tag{2.20}$$

ou seja, obtemos (2.17) com $b_n=\log\beta_n$. A implicação recíproca obtém-se de igual modo, uma vez que o Teorema 1.6.2 de [8] estebelece a equivalência entre (2.19) e (2.20). □

Apresentamos de seguida o teorema principal de [2].

Teorema 3. *([2])*

Seja F uma f.d. com suporte $\mathbb{N}$. Então, existe uma sucessão de reais $\{b_n\}$ tal que

$$e^{-e^{-\alpha(x-1)}}\le\liminf_{n\to+\infty}F^n(x+b_n)\le\limsup_{n\to+\infty}F^n(x+b_n)\le e^{-e^{-\alpha x}}, \tag{2.21}$$

para algum $\alpha>0$ e para qualquer x real, se e só se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathcal{F}(n)}{\mathcal{F}(n+1)}=e^{\alpha}. \tag{2.22}$$

Demonstração. Admitamos que F satisfaz (2.22). Pelo Lema 5 podemos verificar que, para qualquer y fixo, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathcal{F}_c(x)}{\mathcal{F}_c(x+y)}=e^{\alpha y}$, ou seja

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{\mathcal{F}_c(\log z)}{\mathcal{F}_c(\log kz)}=k^{\alpha},\ \forall k>0.$$

De acordo com o Lema 6, com b_n definido por $\mathcal{F}_c(b_n)=1/n$, tem-se $\lim_{n\to+\infty}F_c^n(x+b_n)=\exp(-e^{-\alpha x})$.

Assim (2.21) segue das desigualdades $\mathcal{F}(x+1) \leq \mathcal{F}_c(x) \leq \mathcal{F}(x)$.

Suponhamos reciprocamente que (2.21) se verifica para alguma sucessão $\{b_n\}$.

Uma vez que F e F_c são iguais para argumentos inteiros será suficiente provar $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathcal{F}_c(n)}{\mathcal{F}_c(n+1)} = e^{\alpha}$, o que por sua vez será estabelecido pelo Lema 6, se mostrarmos que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_c^n(x+b_n) = \exp(-e^{-\alpha x})$.

Como $\{F^n(x+b_n)\}$ é limitada, qualquer subsucessão $\{n_i\}$ contém uma subsucessão $\{n_i'\}$ tal que $\{F^{n_i'}(x+b_{n_i'})\}$ é convergente. Isto é, existe uma f.d. G tal que $\lim\limits_{n_i'\to\infty} F^{n_i'}(x+b_{n_i'}) = G(x)$. Ora de (2.21) resulta que $\exp(-e^{-\alpha(y-1)}) \leq G(y^-) \leq G(y) \leq \exp(-e^{-\alpha y})$ e, como limite de f.d. inteiras, G também é inteira. Então $G(m) = \exp(-e^{-\alpha m})$, $m \in \mathbb{Z}$.. Assim para todos os pontos de continuidade x de G, temos $\lim\limits_{n_i'\to+\infty} F^{n_i'}(x+b_{n_i'}) = \exp(-e^{-\alpha[x]})$. Da definição da função h e do Lema 4 segue que

$$\lim_{n_i'\to+\infty} h(x+b_{n_i'}) - \log(n_i') = \alpha[x],\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Mostremos que

$$\lim_{n_i'\to\infty} x + b_{n_i'} - [x+b_{n_i'}] = x - [x]. \tag{2.24}$$

De facto, se este limite não se verificasse então $[x]-\varepsilon+b_{n_i'} > [x+b_{n_i'}]$ ou $[x]+\varepsilon+b_{n_i'} < [x+b_{n_i'}]$ para infinitos valores de n_i'.

No primeiro caso obtemos $[[x]-\varepsilon+b_{n_i'}] \geq [x+b_{n_i'}]$ e portanto

$$h([x]-\epsilon+b_{n_i'}) - \log(n_i') \geq h(x+b_{n_i'}) - \log n_i',\ \forall x,$$

para um número infinito de n_i', o que contradiz (2.23).

Analogamente se obtém uma contradição se considerarmos $[x]+\varepsilon+b_{n_i'} < [x+b_{n_i'}]$, para infinitos valores de n_i'.

De (2.23) e (2.24) e da definição de h_c, temos que $\lim\limits_{n_i'\to+\infty} h_c(x+b_{n_i'}) - \log n_i' = \alpha x$, nos pontos x de continuídade de G. Pelo Lema 4 isto é o mesmo que

$$\lim_{n_i'\to+\infty} F_c^{n_i'}(x+b_{n_i'}) = \exp(-e^{-\alpha x}).$$

Como toda a subsucessão $\{F_c^{n_i}(x+b_{n_i})\}$ de $\{F_c^n(x+b_n)\}$ contém uma subsucessão $\{F_c^{n_i'}(x+b_{n_i'})\}$ convergente para $\exp(-e^{-\alpha x})$, prova-se que $\{F_c^n(x+b_n)\}$ converge para $\exp(-e^{-\alpha x})$. Como dito anteriormente, pelo Lema 6, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{F}_c(n)}{\mathcal{F}_c(n+1)} = e^{\alpha}$$

e o mesmo para F. $\square$

Como mostra a demonstração do teorema anterior, para f.d. inteiras com w_F infinito, ao longo de certas subsucessões, $\{F^n\}$ poderá ter limite não degenerado. Em [15] prova-se que

$$\frac{1-F(n-1)}{1-F(n)} \to r > 1,\ n \to +\infty, \tag{2.25}$$

é condição necessária e suficiente para a existência de uma sucessão de inteiros positivos estritamente crescente $\{k_n\}$ a verificar

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} \to r > 1,\ n \to +\infty, \tag{2.26}$$

e de uma sucessão real $\{b_n\}$ tais que $k_n(1 - F(x + b_n)) \to_{n\to\infty} \tau > 0$, ou seja, $F^{k_n}(x+b_n) \to_{n\to\infty} e^{-\tau}$. Assim basta considerar o máximo de amostras de dimensão k_n onde $\{k_n\}$ tem crescimento geométrico.

No mesmo trabalho é identificada a f.d. limite de $F^{k_n}(x + b_n)$ como sendo a Gumbel discreta. Este resultado constitui o teorema seguinte. Antes apresentamos um lema necessário à sua demonstração.

Lema 7. *(Lema de Khintchine, [8])*

Seja $\{F_n\}$ uma sucessão de f.d. e G uma f.d. não degenerada. Sejam $a_n > 0$ e b_n constantes tais que $\lim_{n\to+\infty} F_n(a_n x + b_n) \to G(x)$. Então, para alguma f.d. não degenerada G^* e constantes $\alpha_n > 0$ e β_n, tem-se $\lim_{n\to+\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) \to G^*(x)$, se e só se $\alpha_n^{-1}\alpha_n \to a > 0$, $n \to +\infty$, e $a_n^{-1}(\beta_n - b_n) \to b \in \mathbb{R}$, $n \to +\infty$, donde $G_*(x) = G(ax + b)$.

Teorema 4. *([15])*

Seja F uma f.d. com suporte igual a $\mathbb{N}_0$. Se F verificar (2.25) e existir uma sucessão real $\{b_n\}$ e uma sucessão de inteiros positivos estritamente crescente $\{k_n\}$ que verifica (2.26), tais que $k_n(1 - F(x + b_n)) \to \tau(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, então $\tau(x) = \tau(0)r^{-[x]}$, $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Uma vez que

$$\begin{aligned}\frac{k_n(1-F(b_n+x))}{k_n(1-F(b_n))} &= \frac{1-F(b_n+x)}{1-F([b_n]+x)}\frac{1-F([b_n]+[x]+x-[x])}{1-F([b_n])} \\ &= \frac{1-F(b_n+x)}{1-F([b_n]+x)}\frac{1-F([b_n]+[x])}{1-F([b_n])}\end{aligned} \tag{2.27}$$

da convergência do primeiro membro e do segundo termo do terceiro membro concluímos que $\frac{1-F(b_n+x)}{1-F([b_n]+x)}$ converge quando $n \to +\infty$.

Nesse caso, de acordo com (2.25), $\frac{1-F(b_n+x)}{1-F([b_n]+x)}$ converge para 1 ou para $1/r$. Se existir $x \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1-F(x+b_n)}{1-F(x+[b_n])} \to 1$ (basta considerar x natural) então, de $k_n(1 - F(x+b_n)) \to \tau(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (hipótese) vem $k_n(1 - F(x+[b_n])) \to \tau(x)$, $n \to +\infty$.

Então, com $G(x) \equiv G^*(x) = \exp(-\tau(x))$, pelo Teorema de Khintchine, concluímos que

$$b_n - [b_n] \to 0, \; n \to +\infty,$$

e portanto, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e n suficientemente elevado, temos $[b_n + x] = [[b_n] + x] = [b_n] + [x]$.

Assim, para qualquer x real, $\frac{1-F(x+b_n)}{1-F([b_n]+x)} \to 1$, $n \to +\infty$, ficando excluído o limite $1/r$.

Como de (2.25) decorre que $\frac{1-F([b_n]+[x])}{1-F([b_n])} \to r^{-[x]}$, $n \to +\infty$, atendendo a (2.27) obtemos o pretendido.

□

Notamos que no resultado anterior se pode alterar k_n para $[k_n/\tau(0)]$ e obter sempre o limite $G(x) = \exp(-r^{-[x]})$.

Exemplo 6. *Seja F uma f.d. inteira pertencente à classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$, isto é, a satisfazer $1 - F_Z(z) \sim [z]^{\xi}(1+\lambda)^{-[z]}L_Z(z), z \to +\infty, z \in \mathbb{R}$, com $\lambda > 0$. Com*

$$b_n = \frac{1}{\ln(1+\lambda)}\left(\ln n + \xi \ln \frac{\ln n}{\ln(1+\lambda)} + \ln\left((1+\lambda)\frac{(1+\lambda)^{-\xi}}{\xi!}\right)\right)$$

obtemos, para qualquer x real,

$$\exp(-(1+\lambda)^{-(x-1)}) \leq \lim_{n\to\infty}\inf F^n(x+b_n) \leq \lim_{n\to\infty}\sup F^n(x+b_n) \leq \exp(-(1+\lambda)^{-x}).$$

Por outro lado, com $k_n = [(1+\lambda)^n K^{-1}]$ e $b_n = n + \frac{\xi \ln n}{\ln(1+\lambda)}$, obtemos

$$\begin{aligned} k_n(1-F(x+b_n)) &\sim (1+\lambda)^n(x+n+\frac{\xi\ln n}{\ln(1+\lambda)})^{\xi}(1+\lambda)^{-[x]-b_n} \\ &\sim n^{\xi}(1+\lambda)^{-[x]}(1+\lambda)^{-\frac{\xi\ln n}{\ln(1+\lambda)}} \\ &\sim (1+\lambda)^{-[x]}, n \to +\infty, \end{aligned}$$

isto é $F^{k_n}(x+b_n) \to \exp(-(1+\lambda)^{-[x]}), n \to +\infty$. O mesmo limite pode ser obtido com $k_n = [K^{-1}(1+\lambda)^n n^{-\xi}]$ e $b_n = n$.

Nos resultados apresentados até aqui sobre o máximo M_n, considerámos o caso restritivo em que as variáveis aleatórias são i.i.d., situação em que $P(M_n \leq u_n) = F^n(u_n)$ ou $P(M_{k_n} \leq u_n) = F^{k_n}(u_n)$ no contexto do Teorema 4.

Se considerarmos sucessões de v.a. estritamente estacionárias, em [8] prova-se que sob certas restrições, $P(M_n \leq u_n)$ possui uma f.d. limite não degenerada igual à que teria se as v.a. da sucessão fossem i.i.d. Referimo-nos às condições $D(u_n)$ (que confere à sucessão independência assintótica) e à condição $D'(u_n)$, sob a qual as v.a. da sucessão $\{X_n\}$ assumem um comportamento oscilatório como ocorre no caso i.i.d.

Com o objectivo de estender este resultado ao caso das f.d. F discretas, com w_F infinito, que não verificam $\lim_{x \to \omega_F} \dfrac{1 - F(x)}{1 - F(x^-)} = 1$, mas sim $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1 - F(x_n)}{1 - F(x_{n-1})} = r > 1$, onde $\{x_n\}$ coincide com o suporte de F (no caso das v.a inteiras tem-se (2.25)), em [14] são adaptadas estas condições de Leadbeter, provando-se que $P(M_{k_n} \leq u_n)$ e $F^{k_n}(u_n)$ possuem a mesma f.d. limite. Trata-se das condições $D_{k_n}(u_n)$ e condição $D'_{k_n}(u_n)$ apresentadas adiante.

Recordamos que a sucessão de v.a. $\{X_n\}$ é fortemente estacionária se para quaisquer índices $j_1, j_2, \ldots, j_n$ e para qualquer inteiro m, os vetores $(X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_n})$ e $(X_{j_1+m}, X_{j_2+m}, \ldots X_{j_n+m})$ forem igualmente distribuídos. Notamos que estes índices se podem considerar consecutivos, situação que consideramos neste trabalho.

Definição 5. *([8])*

Seja $\{u_n\}$ uma sucessão real. A sucessão de v.a. $\{X_n\}$ satisfaz a condição $D(u_n)$ se, para quaisquer inteiros $1 \leq i_1 < ... < i_p < j_1 < ... < j_q \leq n$, com $j_1 - i_p > \ell_n$, se tem

$$\Big|P\Big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \leq u_n\}, \bigcap_{m=1}^{q}\{X_{j_m} \leq u_n\}\Big) - P\Big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \leq u_n\}\Big)P\Big(\bigcap_{m=1}^{q}\{X_{j_m} \leq u_n\}\Big)\Big| \leq \alpha_{n,\ell_n}, \tag{2.28}$$

onde $\lim_{n \to +\infty} \alpha_{n,\ell_n} = 0$ para algum $\ell_n = o_n(n)$.

Definição 6. *([8])*

A condição $D'(u_n)$ verifica-se para $\{X_n\}$ se existe uma sucessão real $\{u_n\}$ tal que $\lim_{s \to \infty} \limsup_{n \to \infty} n \sum_{j=1}^{[\frac{n}{s}]} P(X_0 > u_n, X_j > u_n) = 0$.

Teorema 5. *([8])*

Se a sucessão estacionária $\{X_n\}$ verificar as condições $D(u_n)$ e $D'(u_n)$, então $n(1 - F(u_n)) \to_{n \to \infty} \tau > 0$ se e só se $P(M_n \leq u_n) \to_{n \to \infty} e^{-\tau}$.

Observamos que, de acordo com o Teorema 2, o limite (2.25) invalida a existência de $\{u_n\}$ tal que $n(1 - F(u_n)) \to_{n \to \infty} \tau > 0$. Em [10] prova-se um resultado paralelo a este Teorema de Leadbetter, respeitante a sucessões de v.a. inteiras fortemente estacionárias com f.d. a verificar (2.25). Trata-se da generalização do Teorema 3 ao caso em que a sucessão de v.a. é estacionária, o qual passamos a apresentar.

Teorema 6. *([10])*

Seja $\{X_n\}$ uma sucessão estacionária com f.d. marginal inteira F, com $w_F = +\infty$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-F(n)}{1-F(n+1)} = 1+\lambda,\ \lambda > 0. \tag{2.29}$$

Se $\{X_n\}$ verificar as condições $D(u_n)$ e $D'(u_n)$, em que $u_n = x + b_n$, então, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(-(1+\lambda)^{-(x-1)}) \leq \lim_{n\to\infty} \inf F^n(x+b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup F^n(x+b_n) \leq \exp(-(1+\lambda)^{-x}).$$

Como já referimos anteriormente, em [14] são introduzidas as seguintes adaptações de $D(u_n)$ e $D'(u_n)$, as quais permitem generalizar a equivalência do Teorema 5, isto é, estabelecer que $F^{k_n}(u_n)$ e $P(M_{k_n} \leq u_n)$ possuem o mesmo limite, caso exista.

Definição 7. *([14])*

Seja $\{k_n\}$ uma sucessão de inteiros estritamente crescente e $\{u_n\}$ uma sucessão real. A sucessão de v.a. $\{X_n\}$ satisfaz a condição $D_{k_n}(u_n)$ se, para quaisquer inteiros $1 \leq i_1 < ... < i_p < j_1 < ... < j_q \leq k_n$, com $j_1 - i_p > \ell_n$, se tem (2.28), onde $\lim_{n\to+\infty} \alpha_{n,\ell_n} = 0$ para algum $\ell_n = o_n(k_n)$.

Definição 8. *([14])*

Sejam $\{k_n\}$ e $\{s_n\}$ sucessões de inteiros estritamente crescentes que verificam $\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{s_n} = +\infty$, e $\{u_n\}$ uma sucessão real. A sucessão de v.a. $\{X_n\}$ satisfaz a condição $D'_{k_n}(u_n)$ se

$$\lim_{n\to+\infty} k_n \sum_{j=2}^{[k_n/s_n]} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) = 0.$$

Teorema 7. *([14])*

Seja $\{k_n\}$ uma sucessão de inteiros estritamente crescente a satisfazer (2.26). Seja $\{X_n\}$ uma sucessão estacionária $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sucessões reais tais que $\{X_n\}$ satisfaz $D_{k_n}(u_n)$ e $D'_{k_n}(u_n)$, com $u_n = x/a_n + b_n$, para qualquer x real. Então $\lim_{n\to+\infty} k_n(1-F(u_n)) = \tau > 0 < +\infty$ se e só se $\lim_{n\to+\infty} P(M_{k_n} \leq u_n) = e^{-\tau}$.

Como consequência do Teorema 4 e do Teorema 7 obtemos o resultado seguinte.

Teorema 8.

Seja $\{X_n\}$ uma sucessão estacionária com f.d. marginal inteira F, com $w_F = +\infty$, que satisfaz (2.29). Se existir uma sucessão de inteiros positivos estritamente crescente que verifica (2.26) e uma sucessão real $\{b_n\}$ tais que $\{X_n\}$ satisfaz $D_{k_n}(x + b_n)$ e $D'_{k_n}(x + b_n)$, para qualquer x real, então

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_{k_n} \leq x + b_n) = e^{-(1+\lambda)^{-[x]}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 3

Modelo GINMA

3.1. Estacionaridade forte

Provamos seguidamente que a sucessão de v.a. GINMA, introduzida em ([5]), definida por

$$X_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{n-i} \tag{3.1}$$

é fortemente estacionária, sob a hipótese, já colocada, de que a série $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i$ é convergente.

A prova encontra-se dividida em várias proposições.

Proposição 4.

Sejam $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ duas sucessões de variáveis aleatórias fortemente estacionárias. Se $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ forem independentes, então a sucessão $\{Z_n\}$, definida por $Z_n = X_n + Y_n$, é fortemente estacionária.

Demonstração. Com efeito, para quaisquer k e t e $x_i \geq \min S_{X_i+Y_i}$, $i = 1, \ldots, k$, tem-se

$$\begin{aligned}
&P(X_1 + Y_1 \leq x_1, \ldots, X_k + Y_k \leq x_k) \\
&\quad = \sum_{j_i \in S_{Y_i}, i=1,\ldots k} P(X_1 \leq x_1 - j_1, \ldots, X_k \leq x_k - j_k) \times P(Y_1 = j_1, \ldots, Y_k = j_k) \\
&\quad = \sum_{j_i \in S_{Y_i}, i=1,\ldots k} P(X_{1+t} \leq x_1 - j_1, \ldots, X_{k+t} \leq x_k - j_k) \times P(Y_{1+t} = j_1, \ldots, Y_{k+t} = j_k) \\
&\quad = P(X_{1+t} + Y_{1+t} \leq x_1, \ldots, X_{k+t} + Y_{k+t} \leq x_k).
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.

Seja N um inteiro positivo arbitrariamente fixo. A sucessão de v.a. $\{X_n^{(N)}\}_n$ definida por $X_n^{(N)} = \sum_{i=0}^{N} \beta_i \circ Z_{n-i}$ é fortemente estacionária.

Demonstração. A função geradora de probabilidades do vector $(X_n^{(N)}, X_{n+1}^{(N)}, \ldots, X_{n+k}^{(N)})$ é dada por $E(s_0^{X_n^{(N)}} s_1^{X_{n+1}^{(N)}} \ldots s_k^{X_{n+k}^{(N)}})$.

Sejam $s_0, s_1, \ldots, s_k$ números reais para os quais esta esperança matemática existe. Tem-se

$$E\left(s_0^{X_n^{(N)}} s_1^{X_{n+1}^{(N)}} \ldots s_k^{X_{n+k}^{(N)}}\right)$$

$$= \quad E\left(s_0^{\beta_N \circ Z_{n-N}}\right) E\left(s_0^{\beta_{N-1} \circ Z_{n-N+1}} s_1^{\beta_N \circ Z_{n-N+1}}\right) \times$$

$$\times \ldots \times E\left(s_0^{\beta_{N-k+1} \circ Z_{n+k-N-1}} \ldots s_{k-1}^{\beta_N \circ Z_{n+k-N-1}}\right) E\left(s_0^{\beta_{N-k} \circ Z_{n+k-N}} \ldots s_k^{\beta_N \circ Z_{n+k-N}}\right) \times$$

$$\times \ldots \times E\left(s_0^{\beta_0 \circ Z_n} \ldots s_k^{\beta_k \circ Z_n}\right) E\left(s_1^{\beta_0 \circ Z_{n+1}} \ldots s_k^{\beta_{k-1} \circ Z_{n+1}}\right) \times$$

$$\times \ldots \times E\left(s_{k-1}^{\beta_0 \circ Z_{n+k-1}} s_k^{\beta_1 \circ Z_{n+k-1}}\right) E\left(s_k^{\beta_0 \circ Z_{n+k}}\right)$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} E\left(\prod_{l=0}^{j} s_l^{\beta_{N-j+l} \circ Z_{n-N+j}}\right) \prod_{j=0}^{N-k} E\left(\prod_{l=0}^{k} s_l^{\beta_{N-k-j+l} \circ Z_{n-N+k+j}}\right)$$

$$\times \prod_{j=0}^{k-1} E\left(\prod_{l=0}^{j} s_{k-l}^{\beta_{j-l} \circ Z_{n+k-j}}\right)$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1} E\left(\prod_{l=0}^{j} s_l^{\beta_{N-j+l} \circ Z_{n-N+j+t}}\right) \prod_{j=0}^{N-k} E\left(\prod_{l=0}^{k} s_l^{\beta_{N-k-j+l} \circ Z_{n-N+k+j+t}}\right)$$

$$\times \prod_{j=0}^{k-1} E\left(\prod_{l=0}^{j} s_{k-l}^{\beta_{j-l} \circ Z_{n+k-j+t}}\right)$$

$$= E\left(s_0^{X_{n+t}^{(N)}} s_1^{X_{n+1+t}^{(N)}} \ldots s_k^{X_{n+k+t}^{(N)}}\right)$$

para qualquer $t \geq 1$, uma vez que as variáveis da sucessão $\{Z_n\}_n$ são i.i.d. Assim, os vectores $(X_n^{(N)}, X_{n+1}^{(N)}, \ldots, X_{n+k}^{(N)})$ e $(X_{n+t}^{(N)}, X_{n+t+1}^{(N)}, \ldots, X_{n+t+k}^{(N)})$ são identicamente distribuídos para quaisquer n, k e t. Isto é, $\{X_n^N\}_n$ é fortemente estacionária. $\square$

A convergência quase certa da série $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{n-i}$ é estabelecida a partir do Teorema 4.2.1 de [9], cujo enunciado apresentamos de seguida.

Teorema 9. *([9])*

Seja $\{X_n\}_n$ uma sucessão de variáveis aleatórias de média finita. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} E(|X_n|)$ é *convergente então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$ *é quase certamente absolutamente convergente.*

Proposição 6.

A sucessão de variáveis aleatórias $\{X_n^{(N)}\}_N$ *definida por* $X_n^{(N)} = \sum_{i=0}^{N} \beta_i \circ Z_{n-i}$ *converge quase certamente para* $\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{n-i}$*, quando* $N \to +\infty$*.*

Demonstração.

Uma vez que as variáveis $\beta_i \circ Z_{n-i}$ são positivas, para quaisquer n e i inteiros, tem-se

$$\sum_{i=1}^{+\infty} E(\beta_i \circ Z_{n-i}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i E(Z_{n-i}) = E(Z_1) \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i.$$

Como $\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i$ é convergente, pelo Teorema 9 temos o resultado pretendido. □

Proposição 7.

A sucessão de variáveis aleatórias $\{X_n^+\}_n$ *definida por* $X_n^+ = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{n-i}$ *é fortemente estacionária.*

Demonstração.

Como a convergência quase certa de um vector é equivalente à convergência quase certa das suas margens, atendendo à proposição anterior, temos

$$(X_n^{(N)}, X_{n+1}^{(N)}, \ldots, X_{n+k}^{(N)}) \to^{q.c.} (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k}),\ N \to +\infty,$$

bem como

$$(X_{n+t}^{(N)}, X_{n+t+1}^{(N)}, \ldots, X_{n+t+k}^{(N)}) \to^{q.c.} (X_{n+t}, X_{n+t+1}, \ldots, X_{n+t+k}),\ N \to +\infty,$$

para quaisquer n, k e t. Por outro lado, convergência quase certa implica a convergência em distribuição e assim, pela Proposição 5, os vectores $(X_n^{(N)}, X_{n+1}^{(N)}, \ldots, X_{n+k}^{(N)})$ e $(X_{n+t}^{(N)}, X_{n+t+1}^{(N)}, \ldots, X_{n+t+k}^{(N)})$ são igualmente distribuídos.

A unicidade do limite permite-nos concluir que os vetores $(X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+k})$ e $(X_{n+t}, X_{n+t+1}, \ldots, X_{n+t+k})$ também são igualmente distribuídos. □

Proposição 8.

A sucessão de variáveis aleatórias $\{X_n\}_n$ *dada por* $X_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{n-i}$ *é fortemente estacionária.*

Demonstração.

Tem-se $X_n = X_n^+ + X_n^-$, com $X_n^- = \sum_{i=-\infty}^{-1} \beta_i \circ Z_{n-i}$.

Analogamente às proposições anteriores, prova-se que $\{X_n^-\}$ é fortemente estacionária. Assim X_n é a soma de dois processos estacionários independentes, pelo que também é fortemente estacionário. □

3.2. Margens na classe de Anderson

No teorema seguinte prova-se que se as v.a. de $\{Z_n\}$ pertencem à classe $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^*$, então também $X_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{n-i}$ pertence a $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^*$. Notemos que no Teorema 1 já se provou que as parcelas $\beta_i \circ Z_{n-i}$ pertencem a $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^*$ e que no Lema 3 se estabelecem condições para que a soma de duas v.a. pertençam à classe $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}^*$.

Em muitos dos resultados que se seguem será ainda necessário acrescentar a restrição

$$\beta_i = \mathcal{O}(|i|^{-\delta}),\ |i| \to +\infty, \tag{3.2}$$

para algum $\delta > 1$. Notamos que esta hipótese implica a convergência de $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i$.

Teorema 10. *([5])*

Seja $\{X_n\}_n$ a sucesssão estacionária dada por $X_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{n-i}$, $\beta_i \in]0,1[$, $\beta_{\max}$ único, e suponhamos que a f.d. das margens de $\{Z_n\}$ satisfaz (2.5), com $\xi \neq -1$, e os coeficientes β_i satisfazem (3.2). Então

$$P(X_n > z) = 1 - F_X(z) \sim K'[z]^{\xi}(1+\lambda')^{-[z]}, z \to +\infty, \tag{3.3}$$

com $\lambda' = \lambda/\beta_{max}$ *e* $K' = K\beta_{\max}(\frac{1+\lambda}{\lambda+\beta_{\max}})E\left((1+\lambda')^{\sum_{i\neq i_0} \beta_i \circ Z_{-i}}\right)$.

Demonstração.

Uma vez que F_Z verifica

$$\frac{1-F_Z(n)}{1-F_Z(n+1)} \to 1+\lambda,\ n \to +\infty, \tag{3.4}$$

como já foi referido anteriormente na observação 1, pelo critério D'Alembert, o raio de convergência de $\tilde{P}_Z(h)$ é definido por $|1+h| < 1+\lambda$. Consideremos $h > 0$.

Por outro lado, concluímos que $\tilde{P}_{\beta\circ Z}(h) = \tilde{P}_Z(\beta h)$ é finita para $0 < \beta h < \lambda$.

Denotemos por i_0 o valor de i para o qual β_{max} é assumido e consideremos

$$X_0 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i} = \beta_{\max} \circ Z_{-i_0} + \sum_{\substack{i=-\infty \\ i\neq i_0}}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}. \tag{3.5}$$

De acordo com o Teorema 1 a v.a. $\beta_{\max} \circ Z_{i_0}$ pertence à classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$ com λ substituído por $\frac{\lambda}{\beta_{\max}}$.

Com o objectivo de aplicar o Lema 3 i) provemos que a v.a. $\sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq i_0}}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}$ tem f.g.p finita. Seja $\beta^* = \max\{\beta_i : \beta_i \neq \beta_{\max}\}$.

Com efeito, temos

$$E\left((1+h)^{\sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq i_0}}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}} \right) = \prod_{\substack{i=-\infty \\ i \neq i_0}}^{+\infty} E((1+h)^{\beta_i \circ Z_{-i}}) = \prod_{\substack{i=-\infty \\ i \neq i_0}}^{+\infty} \tilde{P}_Z(\beta_i h),$$

onde $\tilde{P}_Z(\beta_i h) < +\infty$ para $h < \frac{\lambda}{\beta^*}$ e $i \neq i_0$.

Devido à propriedade 3 da Proposição 1 obtemos $\tilde{P}_Z(h) = 1 + hE(Z) + \mathrm{o}_h(1)$, $h \to 0$. Ora, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $M = M(\epsilon) > 0$ tal que $\frac{1}{M^\delta} \frac{\lambda}{\beta^*} < \epsilon$. Assim para $i > M$ e $h < \frac{\lambda}{\beta^*}$ tem-se $\beta_i h < C \frac{1}{i^\delta} \frac{\lambda}{\beta^*} < \epsilon$, donde $\tilde{P}_Z(\beta_i h) = (1 + \beta_i h E(Z))(1 + \epsilon')$, com $\epsilon' > 0$.

Então

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{i=M \\ i \neq i_0}}^{+\infty} \tilde{P}_Z(\beta_i h) &= \exp\left((1+\epsilon') \sum_{\substack{i=M \\ i \neq i_0}}^{+\infty} \ln(1 + \beta_i h E(Z)) \right) \\
&\leq \exp\left((1+\epsilon') \sum_{\substack{i=M \\ i \neq i_0}}^{+\infty} (\beta_i h E(Z)) \right) \\
&\leq \exp\left((1+\epsilon') h E(Z) \sum_{\substack{i=M \\ i \neq i_0}}^{+\infty} \beta_i \right) < +\infty.
\end{aligned}$$

O mesmo se prova para $\prod_{\substack{i=-\infty \\ i \neq i_0}}^{-M} \tilde{P}_Z(\beta_i h)$. Como $\prod_{\substack{i=-M \\ i \neq i_0}}^{M} \tilde{P}_Z(\beta_i h)$ é finito, fica estabelecido que $\prod_{\substack{i=-\infty \\ i \neq i_0}}^{+\infty} \tilde{P}_Z(\beta_i h)$ é também finito.

Como $h < \frac{\lambda}{\beta^*}$ e $\frac{\lambda}{\beta^*} > \lambda'$, podemos escolher $\lambda^* > \lambda'$ tal que $E\left((1+\lambda^*)^{\sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq i_0}}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}} \right) < +\infty$, e aplicar diretamente o Lema 3 i).

Então (3.5) representa a soma de duas v.a. independentes nas condições do Lema 3 i), do que se obtém (3.3) com $K' = K\beta_{\max}(\frac{1+\lambda}{\lambda+\beta_{\max}}) E\left((1+\lambda')^{\sum_{i \neq i_0} \beta_i \circ Z_{-i}} \right)$. $\square$

Observação 3. *No caso em que existem $s > 1$ valores de β_i iguais a $\beta_{\max}$, há que escrever (3.5) com as parcelas $\beta_{\max} \circ Z_{-i_0} + \beta_{\max} \circ Z_{-i_1} + \ldots + \beta_{\max} \circ Z_{-i_{s-1}}$ isoladas e aplicar o Lema 3 ii) $s-1$ vezes.*

3.3. Distribuição assintótica do máximo

Esta secção é dedicada ao estudo da convergência em distribuição do máximo M_{k_n} associado à sucessão GINMA em estudo.

Em [5] é demonstrado um conjunto de resultados onde se estabelece a validade das condições $D(x + b_n)$ e $D'(x + b_n)$ de Leadbetter para a sucessão GINMA com $\beta_{\max}$ único, $\xi \neq -1$ e coeficientes β_i a satisfazer (3.2). Apresentamos o Teorema 5.1.6 de [5] reescrito na forma seguinte.

Teorema 11. *([5])*

Suponhamos que a sucesssão estacionária GINMA, $\{X_n\}$, verifica as hipóteses do Teorema 10. Então $\{X_n\}_n$ satisfaz $D(x + b_n)$ e $D'(x + b_n)$ com $b_n = (\ln(1 + \lambda'))^{-1}(\ln n + \xi \ln\ln n + \ln K')$, onde λ' e K' são definidas no Teorema 10, e consequentemente tem-se

$$e^{-(1+\lambda)^{-(x-1)}} \leq \liminf_{n\to+\infty} F_X^n(x + b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} F_X^n(x + b_n) \leq e^{-(1+\lambda)^{-x}}$$

bem como

$$e^{-(1+\lambda')^{-(x-1)}} \leq \liminf_{n\to+\infty} P(M_n - b_n \leq x) \leq \limsup_{n\to+\infty} P(M_n - b_n \leq x) \leq e^{-(1+\lambda')^{-x}}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Em [7] prova-se a existência de limite não degenerado para $P(M_{k_n} \leq x + b_n)$ sob as hipóteses do teorema anterior, o que constitui o último teorema deste capítulo. De acordo com os Teoremas 7 e 8, tal prova passa necessariamente pela validação das condições $D_{k_n}(x + b_n)$ e $D'_{k_n}(x + b_n)$ com k_n e b_n devidamente relacionados. Assim, com base em [7], apresentamos e demonstramos um conjunto de resultados que serve de suporte à demonstração desse teorema final.

Proposição 9. *([7])*

Suponhamos que a sucessão GINMA definida anteriormente satisfaz as hipóteses do Teorema 10. Se $\{h_n\}$ e $\{\gamma_n\}$ são sucessões de reais positivos tais que $\frac{h_n}{\gamma_n} \to 0$, $n \to +\infty$, então

$$E((1 + h_n)^{\sum_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}}) < +\infty$$

Demonstração.

Note-se que $\tilde{P}_Z(h) = E((1+h)^Z) = 1+hE(Z)(1+\mathrm{o}(1))$, $h \to 0$, e que $\log(1+x) < x$, para $x > -1$. Então

$$\begin{aligned} E((1+h_n)^{\sum_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}}) &= E\left(\prod_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} (1+h_n)^{\beta_i \circ Z_{-i}}\right) = \prod_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} E\left((1+h_n)^{\beta_i \circ Z_{-i}}\right) \\ &= \prod_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} E\left((1+\beta_i h_n)^Z\right). \end{aligned}$$

Como para qualquer $i \geq \gamma_n + 1$ e $\delta > 1$ se tem

$$0 < \beta_i h_n \leq C i^{-\delta} h_n \leq C(\gamma_n+1)^{-\delta} h_n < C\frac{h_n}{\gamma_n^\delta} < C\frac{h_n}{\gamma_n}, \to 0,\ n \to +\infty,$$

o último produtório é igual a

$$\begin{aligned} \prod_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} (1+\beta_i h_n E(Z)(1+\mathrm{o}_n(1))) &= \exp\left(\sum_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} \ln(1+\beta_i h_n E(Z)(1+\mathrm{o}_n(1))\right) \\ &\leq \exp\left(\sum_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} \beta_i h_n E(Z)(1+\mathrm{o}_n(1))\right) \\ &\leq \exp\left(C h_n E(Z)(1+\mathrm{o}_n(1)) \sum_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} \frac{1}{i^\delta}\right) \\ &\leq C_1 \exp(\frac{h_n}{\gamma_n^\delta}) \leq C_2,\ n \to +\infty, \end{aligned}$$

onde C, C_1 e C_2 representam constantes positivas. □

Em [5] prova-se que a sucessão $\{E\left((1+h)^{X_0+X_j}\right)\}_j$ é limitada considerando h num intervalo adequado. Apresentamos de seguida tal resultado.

Proposição 10. *([5])*

Consideremos que a sucessão GINMA satisfaz as hipóteses do Teorema 10. Sejam $\beta^* = \max\{\beta_i : \beta_i \neq \beta_{\max}\}$, $\beta^{**} = \max_{t\geq 1} \max_i\{\beta_i + \beta_{i+t}\}$ *e* $\beta' = \max\{\beta^*, \frac{\beta^{**}}{2}\}$.

Então, para h tal que $2\beta' h + \beta' h^2 < \lambda$, tem-se $E((1+h)^{X_0+X_t})$ convergente, para qualquer $t \geq 1$.

Demonstração. Tem-se

$$
\begin{aligned}
E((1+h)^{X_0+X_t}) &= E\left((1+h)^{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\beta_i\circ Z_{-i}+\beta_{i+t}\circ Z_{-i}}\right) \\
&= \prod_{i=-\infty}^{+\infty} E\left((1+h)^{\beta_i\circ Z_{-i}+\beta_{i+t}\circ Z_{-i}}\right) \\
&= \prod_{i=-\infty}^{+\infty} E\left((1+(\beta_i+\beta_{i+t})h+\beta_i\beta_{i+t}h^2)^Z\right) \\
&= \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_Z\left((\beta_i+\beta_{i+t})h+\beta_i\beta_{i+t}h^2\right).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Uma vez que $(\beta_i+\beta_{i+t})h+\beta_i\beta_{i+t}h^2 < 2\beta' h + \beta' h^2 < \lambda$, fica provado que

$$\tilde{P}_Z((\beta_i+\beta_{i+t})h+\beta_i\beta_{i+t}h^2) < +\infty.$$

Por outro lado, para $h \in]0,\lambda[$, $\tilde{P}_Z(h) \geq 1$ e

$$P'_Z(h) = E(Z(1+h)^{Z-1}) \equiv \sum_{z=1}^{+\infty} z(1+h)^{z-1}P(Z=z)$$

é convergente de acordo com o critério D'Alembert.

Assim, para $h_1 > 0$ e $h_2 > 0$ tais que $h_1+h_2 < \beta' h^2 + 2\beta' h < \lambda$, o Teorema do Valor Médio garante que

$$\frac{\tilde{P}_Z(h_1+h_2)-\tilde{P}_Z(h_1)}{h_2} \leq \tilde{P}'_Z(h_1+h_2) < C,$$

onde C representa uma constante. Então

$$\tilde{P}_Z(h_1+h_2) < \tilde{P}_Z(h_1) + Ch_2 < \tilde{P}_Z(h_1) + \tilde{P}_Z(h_1)Ch_2 = \tilde{P}_Z(h_1)(1+Ch_2),$$

pois $\tilde{P}_Z \geq 1$.

Com base nestes resultados, temos

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_Z((\beta_i+\beta_{i+1})h+\beta_i\beta_{i+t}h^2) \\
&\leq \prod_{i=+\infty}^{+\infty} \tilde{P}_Z((\beta_i+\beta_{i+t})h) \prod_{i=-\infty}^{+\infty}(1+\beta_i\beta_{i+t}h^2) \\
&\leq \prod_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_Z(\beta_i h) \prod_{i=-\infty}^{+\infty}(1+C\beta_{i+t}h) \prod_{i=-\infty}^{+\infty}(1+C\beta_i\beta_{i+t}h^2).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Procedendo como na demonstração da Proposição 9, obtemos

$$\begin{aligned}\prod_{i=-\infty}^{+\infty} \tilde{P}_Z(\beta_i h) &\leq \exp\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \beta_i h E(Z)(1+\mathrm{o}_h(1))\right) \\ &\leq \exp((1+\varepsilon)hE(Z))\exp\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\beta_i\right) < +\infty.\end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned}\prod_{i=-\infty}^{+\infty}(1+C\beta_i\beta_{i+t}h) &\leq \exp\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} C\beta_i\beta_{i+t}h^2\right) \\ &\leq \exp(Ch^2)\exp\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\beta_i\beta_{i+t}\right) < +\infty,\end{aligned}$$

e o mesmo para o segundo produtório de (3.7).

Juntando (3.6) e (3.7) com a convergência dos três produtórios envolvidos, fica provado que, para qualquer $t \geq 1$, $E((1+h)^{X_0+X_t})$ é convergente. □

Nas proposições seguintes são estabelecidas as condições necessárias à validade das condições $D_{k_n}(u_n)$ e $D'_{k_n}(u_n)$.

Proposição 11. *([7])*

Seja $\{X_n\}$ a sucessão definida por (3.1). Suponhamos que existe uma sucessão real $\{b_n\}$ e uma sucessão estritamente crescente de inteiros $\{k_n\}$ tais que $k_n(1 - F(x+b_n)) \to \tau(x) > 0$, $n \to +\infty$. Se existirem sucessões reais positivas $\{\varepsilon_n\}$ e $\{\ell_n\}$ com $\varepsilon_n \to 0$ e $\ell_n = \mathrm{o}(k_n)$ tais que

$$\lim_{n\to+\infty} k_n P\left(\sum_{i=\ell_n}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i} > \varepsilon_n\right) = 0 \tag{3.8}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} k_n P\left(\sum_{i=-\infty}^{-\ell_n} \beta_i \circ Z_{-i} > \varepsilon_n\right) = 0 \tag{3.9}$$

então a sucessão GINMA verifica a condição $D_{k_n}(u_n)$.

Demonstração.

Sejam $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p < j_1 < \ldots < j_q \leq k_n$ números inteiros tais que $j_1 - i_p > 2\ell_n$. Consideremos $X'_j = X_j - X^*_j$ com

$$X^*_j = \sum_{i=-\ell_n+1}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{j-i}$$

e $X_j'' = X_j - X_j^{**}$ com

$$X_j^{**} = \sum_{i=-\infty}^{\ell_n - 1} \beta_i \circ Z_{j-i}.$$

Uma vez que $\{X_j^*, j \le i_p\}$ e $\{X_j^{**}, j \ge j_1\}$ são independentes tem-se

$$\begin{aligned}
&P\big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \le u_n\}\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \le u_n\}\big)\\
&\quad \le P\big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s}^* \le u_n\}\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t}^{**} \le u_n\}\big)\\
&\quad = P\big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s}^* \le u_n\}\big)P\big(\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t}^{**} \le u_n\}\big)\\
&\quad = P\big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} - X_{i_s}' \le u_n\}\big)P\big(\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} - X_{j_t}'' \le u_n\}\big)\\
&\quad \le P\big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \le u_n + M_{k_n}'\}\big)P\big(\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \le u_n + M_{k_n}''\}\big)\\
&\quad \le \Big\{P\big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \le u_n\}\big) + P\big(\bigcup_{s=1}^{p}\{u_n < X_{i_s} \le u_n + M_{k_n}'\}\big)\Big\}\\
&\qquad\qquad \times\Big\{P\big(\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \le u_n\}\big) + P\big(\bigcup_{t=1}^{q}\{u_n < X_{j_t} \le u_n + M_{k_n}''\}\big)\Big\}
\end{aligned}$$

onde $M_{k_n}' = \max\limits_{0 \le j \le k_n} X_{i_s}'$ e $M_{k_n}'' = \max\limits_{0 \le j \le k_n} X_{j_t}''$.

Como tal

$$\begin{aligned}
&P\left(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \le u_n\}\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \le u_n\}\right) - P\left(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \le u_n\}\right)P\left(\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \le u_n\}\right)\\
&\quad \le 2P\big(\bigcup_{s=1}^{p}\{u_n < X_{i_s} \le u_n + M_{k_n}'\}\big) + P\big(\bigcup_{t=1}^{q}\{u_n < X_{j_t} \le u_n + M_{k_n}''\}\big)\\
&\quad \le 2P\big(\bigcup_{s=1}^{p}\{u_n < X_{i_s} \le u_n + \varepsilon_n\}\big) + 2P\big(M_{k_n}' > \varepsilon_n\big)\\
&\qquad\qquad + P\big(\bigcup_{t=1}^{q}\{u_n < X_{j_t} \le u_n + \varepsilon_n\}\big) + P\big(M_{k_n}'' > \varepsilon_n\big)\\
&\quad \le 2\,k_n\big(F_X(u_n + \varepsilon_n) - F_X(u_n)\big) + 2k_nP\big(X_{i_s}' > \varepsilon_n\big)\\
&\qquad\qquad + k_n\big(F_X(u_n + \varepsilon_n) - F_X(u_n)\big) + k_nP\big(X_{j_t}'' > \varepsilon_n\big) = o_n(1),
\end{aligned}$$

onde $k_nP\big(X_{i_s}' > \varepsilon_n\big) \to 0, n \to +\infty$, devido a (3.9) e $k_nP\big(X_{j_t}'' > \varepsilon_n\big) \to 0, n \to +\infty$, devido a (3.8).

De modo análogo se obtém a outra desigualdade. Com efeito

$$
\begin{aligned}
& P\Big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \leq u_m\}\Big)P\Big(\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \leq u_n\}\Big) \\
& \leq P\Big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X^*_{i_s} \leq u_n\}\Big)P\Big(\bigcap_{t=1}^{q}\{X^{**}_{j_t} \leq u_n\}\Big) \\
& = P\Big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X^*_{i_s} \leq u_n\}\bigcap_{t=1}^{q}\{X^{**}_{j_t} \leq u_n\}\Big) \\
& \leq P\Big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \leq u_n + M^{'}_{k_n}\}\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \leq u_n + M^{''}_{k_n}\}\Big) \\
& \leq P\Big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \leq u_n\}\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \leq u_n\}\Big) + \\
& \quad +2\,k_n\big(F_X(u_n+\varepsilon_n) - F_X(u_n)\big) + 2k_nP\big(X^{'}_{i_s} > \varepsilon_n\big) \\
& \quad +k_n\big(F_X(u_n+\varepsilon_n) - F_X(u_n)\big) + k_nP\big(X^{''}_{j_t} > \varepsilon_n\big) \\
& = P\Big(\bigcap_{s=1}^{p}\{X_{i_s} \leq u_n\}\bigcap_{t=1}^{q}\{X_{j_t} \leq u_n\}\Big) + o(1).
\end{aligned}
$$

□

Proposição 12. *([7])*

Seja $\{X_n\}_n$ a sucessão estacionária GINMA definida por (3.1). Suponhamos que existe uma sucessão real $\{b_n\}$ e uma sucessão estritamente crescente de inteiros $\{k_n\}$ tais que $k_n(1-F(x+b_n)) \to \tau(x) > 0$, $n \to +\infty$.

Se existir uma sucesssão real $\{\gamma_n\}$ com $\gamma_n < \frac{k_n}{s_n}$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n^2}{s_n} P\left(\sum_{i=\gamma_n}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i} > \varepsilon\right) = 0 \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n^2}{s_n} P\left(\sum_{i=-\infty}^{-\gamma_n-1} \beta_i \circ Z_{-i} > \varepsilon\right) = 0 \tag{3.11}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} k_n \sum_{j=1}^{2\gamma_n} P(X_0 + X_j > 2u_n) = 0 \tag{3.12}$$

então $\{X_n\}_n$ verifica a condição $D'_{k_n}(x+b_n)$.

Demonstração.

Sejam $X_0 = X_0' + X_0''$ com $X_0' = \sum_{i=-\gamma_n}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}$ e $X_0'' = \sum_{i=-\infty}^{-\gamma_n-1} \beta_i \circ Z_{-i}$, e de modo análogo $X_j = X_j^* + X_j^{;}$ com $X_j^* = \sum_{i=-\infty}^{\gamma_n} \beta_i \circ Z_{-i}$ e $X_j^{**} = \sum_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}$.

Notemos que X'_0 e X^*_j são independentes, para $j > 2\gamma_n$, porque envolvem as variáveis Z_{γ_n}, $Z_{\gamma_n - 1}, \ldots$ e $\ldots$, $Z_{j-\gamma_n+1}$, $Z_{j-\gamma_n}$. Assim

$$\begin{aligned}
P(X_0 > u_n, X_j > u_n) &\leq P(X'_0 + X''_0 > u_n, X_j > u_n, X''_0 \leq \varepsilon) + P(X''_0 > \varepsilon) \\
&\leq P(X'_0 > u_n - \varepsilon, X_j > u_n) + P(X''_0 > \varepsilon) \\
&\leq P(X'_0 > u_n - \varepsilon, X^*_j > u_n - \varepsilon) \\
&\qquad + P(X''_0 > \varepsilon) + P(X^{**}_j > \varepsilon) \\
&= P(X'_0 > u_n - \varepsilon) P(X^*_j > u_n - \varepsilon) \\
&\qquad + P(X''_0 > \varepsilon) + P(X^{**}_j > \varepsilon).
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $P(X''_0 > -\varepsilon) = 1$, obtemos

$$P(X'_0 > u_n - \varepsilon) = P(X'_0 > u_n - \varepsilon, X''_0 > -\varepsilon) \leq P(X_0 > u_n - 2\varepsilon)$$

donde

$$k_n P(X'_0 > u_n - \varepsilon) \leq k_n P(X_0 > u_n - 2\varepsilon) \to \tau(x - 2\varepsilon),\, n \to +\infty.$$

De igual modo se mostra que

$$k_n P(X^{**}_j > u_n - \varepsilon) \leq k_n P(X_j > u_n - 2\varepsilon) \to \tau(x - 2\varepsilon),\, n \to +\infty.$$

Então

$$\begin{aligned}
k_n \sum_{j=2\gamma_n+1}^{[k_n/s_n]} P(X_0 > u_n, X_j > u_n) &\leq k_n \sum_{j=1}^{[k_n/s_n]} P(X'_0 > u_n - \varepsilon) P(X^*_j > u_n - \varepsilon) \\
&\qquad + k_n \frac{k_n}{s_n} P(X''_0 > \varepsilon) + k_n \frac{k_n}{s_n} P(X^{**}_j > \varepsilon) \\
&\leq \frac{1}{s_n} (\tau(x - 2\varepsilon))^2 + \frac{k_n^2}{s_n} P(\sum_{i=-\infty}^{-\gamma_n - 1} \beta_i \circ Z_{-i} > \varepsilon) \\
&\qquad + \frac{k_n^2}{s_n} P(\sum_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i} > \varepsilon) \\
&= o_n(1).
\end{aligned}$$

Para as parcelas da forma $P(X_0 > u_n, X_j > u_n)$, com $j \leq 2\gamma_n$, notemos que $P(X_0 > u_n, X_j > u_n) \leq P(X_0 + X_j > 2u_n)$ e que assim, o limite (3.12) implica

$$\lim_{n \to +\infty} k_n \sum_{j=1}^{2\gamma_n} P(X_0 > u_n, X_j > u_n) = 0.$$

$\square$

Teorema 12.

Suponhamos que a sucessão GINMA verifica as hipóteses do Teorema 10.

Então existe $\{k_n\}$ *que satisfaz* $\frac{k_{n+1}}{k_n} \longrightarrow 1+\lambda$, $\lambda > 0$ *e* $\{b_n\}$ *real tais que a sucessão GINMA satisfaz* $D_{k_n}(x+b_n)$ *e* $D'_{k_n}(x+b_n)$. *Assim*

$$P(M_{k_n} \leq x+b_n) \to \exp(-(1+\lambda')^{-[x]}),\ x \in \mathbb{R},$$

com $\lambda' = \lambda/\beta_{max}$.

Demonstração.

Uma vez que, de acordo com o Teorema 10, temos

$$1 - F_X(x+b_n) \sim K'[x+b_n]^{\xi}(1+\lambda')^{-[x+b_n]},$$

considerando $k_n = [(K')^{-1}b_n^{\xi}(1+\lambda')^{b_n}]$, obtemos

$$k_n(1-F_X(x+b_n)) \longrightarrow (1+\lambda')^{-[x]}, n \longrightarrow +\infty.$$

Vamos provar que se verificam (3.8) e (3.9).

Pela desigualdade de Markov, vem

$$\begin{aligned} k_n P(\sum_{i=\ell_n}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i} > \varepsilon_n) &\leq k_n \frac{E(\sum_{i=\ell_n}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i})}{\varepsilon_n} \leq \frac{k_n}{\varepsilon_n} E(Z) \sum_{i=\ell_n}^{+\infty} \beta_i \\ &\leq C \frac{k_n}{\varepsilon_n} E(Z) \sum_{i=\ell_n}^{+\infty} \frac{1}{i^{\delta}} \leq C_1 \frac{k_n}{\varepsilon_n} E(Z) \frac{1}{\ell_n^{\delta}} \end{aligned}$$

Com $\varepsilon_n = k_n^{-\beta}$, $\beta > 0$, e $\ell_n = k_n^{\eta}$, $\eta \in]0,1[$, tais que $1+\beta < \eta\delta$ prova-se que $\frac{k_n}{\varepsilon_n}\frac{1}{\ell_n^{\delta}} \to 0$. Assim provámos (3.8).

Note-se que $\{(\beta,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \beta > 0,\ 0 < \eta < 1,\ 1+\beta < \eta\delta\} = \{(\beta,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\delta} < \eta < 1,\ 0 < \beta < \delta\eta - 1\} \neq \emptyset$, $\forall \delta > 1$.

De igual modo se prova (3.9). Pela Proposição 11 fica estabelecida a condição $D_{k_n}(x+b_n)$.

Usemos a Proposição 12 para provar $D'_{k_n}(x+b_n)$.

De acordo com a desigualdade de Markov e com a Proposição 10, temos

$$P(X_0+X_j > 2u_n) = P((1+h)^{X_0+X_j} > (1+h)^{2u_n}) \leq \frac{E((1+h)^{X_0+X_j})}{(1+h)^{2u_n}} \leq \frac{C_1}{(1+h)^{2b_n}}$$

e então

$$k_n \sum_{i=1}^{2\gamma_n} P(X_0+X_j > 2u_n) \leq C k_n \gamma_n \frac{1}{(1+h)^{2b_n}}$$

Consideremos, por exemplo, $b_n = n$, $k_n = [\frac{1}{K'} n^{-\xi}(1+\lambda')^n]$, $s_n = [k_n^\alpha]$, com $\alpha \in]0,1[$, e $\gamma_n = (\frac{k_n}{s_n})^\mu$ com $\mu \in]0,1[$.

Uma vez que existe h tal que $2\beta' h + \beta' h^2 < \lambda$ (hipótese da Proposição 10) e $(1+h)^2 > 1+\lambda'$, consideramos $1 < \theta < 2$ tal que $(1+h)^2 = (1+\lambda')^\theta$. Assim obtemos

$$\begin{aligned} k_n \gamma_n \frac{1}{(1+h)^{2b_n}} &\leq k_n \left(\frac{k_n}{s_n}\right)^\mu \frac{1}{(1+\lambda')^{\theta n}} \\ &\leq C \frac{n^{-\xi(1+\mu)}(1+\lambda')^{n(1+\mu)}}{(n^{-\xi}(1+\lambda')^n)^{\alpha\mu}} (1+\lambda')^{-\theta n} \\ &= C n^{-\xi(1+\mu-\alpha\mu)}(1+\lambda')^{n(1+\mu-\alpha\mu-\theta)} \\ &= C n^{-\xi(1+\mu(1-\alpha))}(1+\lambda')^{n(1+\mu(1-\alpha)-\theta)} \\ &= \mathrm{o}_n(1),\ n \to +\infty, \end{aligned}$$

desde que se escolham $\mu \in]0,1[$ e $\alpha \in]0,1[$ tais que $\mu(1-\alpha) < \theta - 1$.

Fica assim provado o limite (3.12).

Por outro lado, continuando a usar a desigualdade de Markov, e de acordo com o resultado da Proposição 9, temos

$$\frac{k_n^2}{s_n} P\left(\sum_{i=\gamma_n+1}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i} > \varepsilon\right) \leq \frac{k_n^2}{s_n} \frac{E((1+h_n)^{\sum_{\gamma_n+1}^{+\infty} \beta_i \circ Z_{-i}})}{(1+h_n)^\varepsilon} \leq C \frac{k_n^2}{s_n} \frac{1}{(h_n)^\varepsilon}.$$

Ora, com $h_n^\varepsilon = (\frac{k_n^2}{s_n})^\rho$, onde $\rho > 1$, obtemos $\frac{k_n^2}{s_n} \frac{1}{(h_n)^\varepsilon} = \mathrm{o}_n(1),\ n \to +\infty$.

Fica assim provado o limite (3.10). De igual modo se prova o limite (3.11). □

Capítulo 4

Modelo INMA(q)

4.1. Definição e estacionaridade forte

Neste capítulo estudamos uma sucessão média móvel de ordem finita de v.a. inteiras, $\{X_n\}$, proposta por [11], onde recebe a designação INMA(q) (abreviadamente *Integer Moving Average*). Esta sucessão é definida por

$$X_n = \begin{cases} \beta_0 \circ Z_n & \text{com probabilidade } b_0 \\ \beta_0 \circ Z_n + \beta_1 \circ Z_{n-1} & \text{com probabilidade } b_1 \\ \ddots & \\ \beta_0 \circ Z_n + \ldots + \beta_{q-1} \circ Z_{n-q+1} & \text{com probabilidade } b_{q-1} \\ \beta_0 \circ Z_n + \ldots + \beta_{q-1} \circ Z_{n-q+1} + Z_{n-q} & \text{com probabilidade } b_q \end{cases} \tag{4.1}$$

com $\beta_i \in]0,1[,\ i = 0, 1, \ldots, q-1$ e

$$b_i = \begin{cases} \beta_0 & \text{se } i = 0 \\ (1-\beta_0)\ldots(1-\beta_{i-1})\beta_i & \text{se } q-1 \geq i \geq 1 \\ (1-\beta_0)\ldots(1-\beta_{q-1}) & \text{se } i = q \end{cases},$$

onde $\{Z_n\}$ é uma sucessão de v.a. inteiras i.i.d. e todas as operações aleatórias são independentes entre si. Todas as operações aleatórias envolvendo X_n e X_m, $n \neq m$, são também consideradas independentes.

Assim definida a sucessão $\{X_n\}$ é q-dependente uma vez que, para qualquer n, X_n e X_{n+k} são dependentes se $k \leq q$ e independentes em caso contrário.

Notamos que $\{X_n\}$ se pode escrever na forma

$$X_n = \sum_{j=0}^{q} \mathbb{I}_{A_j} \left(\sum_{i=0}^{j} \beta_i \circ Z_{n-i} \right) \tag{4.2}$$

onde $A_0, A_1, \ldots, A_q$ constituem uma partição do espaço Ω e $\mathbb{I}_{A_j}$, $j = 0, 1, \ldots, q$ representa a indicatriz do conjunto A_j. As v.a $\mathbb{I}_{A_j}$, $j = 0, 1, \ldots, q$, são dependentes mas, para cada $j = 0, 1, \ldots, q$, $\mathbb{I}_{A_j}$ e $\sum_{i=0}^{j} \beta_i \circ Z_{n-i}$ são independentes.

Em [11] considera-se que $\{Z_n\}$ tem margens com f.d. Geométrica de parâmetro ρ e que assim $\{X_n\}$ forma um sucessão com as mesmas distribuições marginais.

Provemos a estacionaridade forte da sucessão $\{X_n\}$.

Proposição 13.

A sucessão INMA(q) definida por (4.1) é fortemente estacionária.

Demonstração.

Escreva-se X_n na forma (4.2).

Seja $j \in \{0, 1, \ldots, q\}$ arbitrariamente fixo. Por analogia com o que demonstrámos na Proposição 5, concluímos que a sucessão $\{Y_{n,j}\}_n$ definida por

$$Y_{n,j} = \sum_{i=0}^{j} \beta_i \circ Z_{n-i}$$

é fortemente estacionária. Facilmente se prova que $\{W_{n,j}\}_n$ com $W_{n,j} = \mathbb{I}_{A_j} Y_{n,j}$ é também fortemente estacionária pois, para $x_i \geq \min S_{W_j},\ i = 1, \ldots k$,

$$P(W_{n,j} \leq x_0, \ldots, W_{n+k,j} \leq x_k) = P(Y_{n,j} \leq x_0, \ldots, Y_{n+k,j} \leq x_k) b_j + (1 - b_j).$$

Assim como $X_n = \sum_{j=0}^{q} W_{n,j}$ é a função mensurável de uma sucessão fortemente estacionária, prova-se que $\{X_n\}$ é fortemente estacionária (ver [3], pag 30). □

4.2. Distribuição assintótica do máximo

Em [5] assume-se que a sucessão estacionária $\{X_n\}$ possui margens com distribuição Geométrica e prova-se que são válidas as condições $D(x + b_n)$ e $D'(x + b_n)$, com $b_n = -\frac{\ln n}{\ln \rho} - 1$. De acordo com o Teorema 6, fica então estabelecido que

$$e^{-\rho^{(x-1)}} \leq \liminf_{n\to\infty} P\{M_n \leq x + b_n\} \leq \limsup_{n\to\infty} P\{M_n \leq x + b_n\} \leq e^{-\rho^x}$$

para qualquer x real.

Em [7], supondo ainda que a distribuição comum de $\{Z_n\}$ é Geométrica (e consequentemente o mesmo para $\{X_n\}$), prova-se o resultado que apresentamos de seguida.

Teorema 13. *([7])*

Seja $\{X_n\}$ a sucessão estacionária INMA(q) definida por (4.1) com distribuição marginal comum Geométrica de parâmetro $\rho \in [0, 1[$. Com $u_n = x+n-1$ e $k_n = [\rho^{-n}]$ tem-se $k_n(1 - F_X(x + n - 1)) \longrightarrow \rho^{[x]}$, $n \to +\infty$ e

$$P(M_{k_n} \leq x + n - 1) \longrightarrow \exp(-\rho^{[x]}), n \to +\infty,$$

para qualquer x real.

Neste trabalho consideramos que as margens de $\{Z_n\}$ pertencem à classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$ e estendemos o resultado do teorema anterior.

Começamos por provar um resultado análogo ao Teorema 1 onde se prova que se $\{Z_n\}$ tem f.d. comum a satisfazer (2.5), o mesmo acontece à f.d. marginal de $\{X_n\}$.

Teorema 14.

Seja $\{X_n\}_n$ a sucessão de v.a. estacionária definida por 4.1. Se a f.d. de $\{Z_n\}_n$ satisfizer (2.5), com $\xi \neq -1$, então

$$P(X_n > z) \sim A_q[z]^{\xi}(1+\lambda)^{-[z]},\ z \to +\infty,$$

com

$$A_q = \begin{cases} \lambda k \prod_{i=0}^{q-1} \tilde{P}_Z(\beta_i\lambda)\beta_{q-1} \prod_{i=0}^{q-1}(1-\beta_{i-1}) & se\ \xi > -1 \\ k \prod_{i=0}^{q-1} \tilde{P}_Z(\beta_i\lambda)\beta_{q-1} \prod_{i=0}^{q-1}(1-\beta_{i-1}) & se\ \xi < -1 \end{cases}$$

Demonstração. Tem-se

$$P(X_n > z) = \sum_{j=0}^{q} P\left(\sum_{i=0}^{j} \beta_i \circ Z_{n-i} > z\right) b_j,\ z \in \mathbb{R}^+. \tag{4.3}$$

De acordo com o Teorema 1, a f.d. de $\beta_i \circ Z_{n-i}$ verifica (2.5) com λ substituído por λ/β_i e k por $k\beta(\frac{1+\lambda}{1+\beta_i})^{\xi+1}$.

Aplicando o Lema 3 repetidas vezes (independentemente de existirem valores repetidos de β_i para $i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$) obtemos, para $j \in \{0, 1, \dots, q-1\}$ e $\beta_{j,\max} = \max\{\beta_i, i = 0, \dots, j\}$,

$$P(\sum_{i=0}^{j} \beta_i \circ Z_{n-i} > z) \sim C_j[z]^{\xi}(1+\lambda'_j)^{-[z]},\ z \to +\infty,$$

onde $\lambda'_j = \lambda/\beta_{j,\max} > \lambda$ e C_j é uma constante dependente das constantes iniciais A,λ, ξ e $\beta_0, \dots, \beta_j$.

Por outro lado, uma vez que $\max\{\beta_0, \dots, \beta_j\} = \beta_q = 1$ e $\sum_{i=0}^{q} \beta_i \circ Z_{n-i} = Z_{n-q} + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i \circ Z_{n-i}$, onde $\sum_{i=0}^{q-1} \beta_i \circ Z_{n-i}$ tem f.g.p. finita, pelo Lema 3 i), obtemos

$$P(\sum_{i=0}^{q} \beta_i \circ Z_{n-i} > z) \sim C_q[z]^{\xi}(1+\lambda)^{-[z]},\ z \to +\infty$$

com

$$
\begin{aligned}
C_q &= \begin{cases} \lambda k E((1+\lambda)^{\sum_{i=0}^{q-1}\beta_i \circ Z_{-i}}) & \text{se } \xi > -1 \\ kE((1+\lambda)^{\sum_{i=0}^{q-1}\beta_i \circ Z_{-i}}) & \text{se } \xi < -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lambda k \prod_{i=0}^{q-1} E(1+\beta_i\lambda)^{Z_{-i}} & \text{se } \xi > -1 \\ k \prod_{i=0}^{q-1} E(1+\beta_i\lambda)^{Z_{-i}} & \text{se } \xi < -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

De (4.3) concluímos que

$$
\begin{aligned}
P(X_n > z) &= \sum_{j=0}^{q} P(\sum_{i=0}^{j} \beta_i \circ Z_{n-i} > z) b_j \\
&\sim \sum_{j=0}^{q-1} C_j [z]^{\xi} (1+\lambda_j')^{-[\xi]} b_j + C_q [z]^{\xi} (1+\lambda)^{-[z]} b_q \\
&= C_q [z]^{\xi} (1+\lambda)^{-[z]} \beta_{q-1} \prod_{i=0}^{q-1} (1-\beta_{i-1})(1+\mathrm{o}_z(1)),\ z \to +\infty,
\end{aligned}
$$

uma vez que $(\frac{1+\lambda_j'}{1+\lambda})^{-[z]} \to 0,\ z \to +\infty$, para qualquer $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$. A demonstração fica completa, considerando $A_q = C_q \beta_{q-1} \prod_{i=0}^{q-1} (1-\beta_{i-1})$. □

Enunciamos e demonstramos de seguida uma proposição análoga à Proposição 10 e que serve o mesmo objectivo relativamente à demonstração da validade de $D'_{k_n}(x+b_n)$. Notamos que este resultado é uma extensão do Teorema 3.1.1 de [5], considerando agora que as margens de $\{Z_n\}$ pertencem à classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$.

Teorema 15.

Seja $\{X_n\}$ a sucessão definida por (4.1). A f.g.p. de $X_n + X_{n-j}$, $j = 1, \ldots, q$, é finita, para h tal que $(1+\beta^*)h + \beta^* h^2 < \lambda$ com $\beta^* = \max\{\beta_i, i = 0, 1, \ldots, q-1\}$.

Demonstração.

Comecemos por observar que

$$
\begin{aligned}
& P_{X_n + X_{n-j}}(1+h) \\
=\ & E[(1+h)^{X_n + X_{n-j}}] = E[E[(1+h)^{X_n+X_{n-j}} | Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_{n-q-j}]] \\
=\ & E[E[(1+h)^{X_n} | Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_{n-q-j}] E[(1+h)^{X_{n-j}} | Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_{n-q-j}]]
\end{aligned}
$$

e seja $B_i(h) = 1 + \beta_i h$, para $0 \leq \beta_i \leq 1$ e $0 \leq i \leq q$.

Relativamente às esperanças condicionais tem-se

$$\begin{aligned}
& E[(1+h)^{X_n}|Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_{n-q-j}]E[(1+h)^{X_{n-j}}|Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_{n-q-j}] \\
= & \left(\sum_{l=0}^{q} b_l \prod_{k=0}^{l} B_k^{Z_{n-k}}(h)\right)\left(\sum_{i=0}^{q} b_i \prod_{k=0}^{i} B_k^{Z_{n-k-j}}(h)\right) \\
= & \sum_{l=0}^{q}\sum_{i=0}^{q} b_j b_i \prod_{k=0}^{l} B_k^{Z_{n-k}}(h) \prod_{k=0}^{i} B_k^{Z_{n-k-j}}(h) \\
= & \sum_{l=0}^{j-1}\sum_{i=0}^{q} b_j b_i \prod_{k=0}^{l} B_k^{Z_{n-k}}(h) \prod_{k=0}^{i} B_k^{Z_{n-k-j}}(h) \\
+ & \sum_{l=j}^{q}\sum_{i=0}^{q} b_j b_i \prod_{k=0}^{l} B_k^{Z_{n-k}}(h) \prod_{k=0}^{i} B_k^{Z_{n-k-j}}(h) \\
= & \sum_{l=0}^{j-1}\sum_{i=0}^{q} b_j b_i \prod_{k=0}^{l} B_k^{Z_{n-k}}(h) \prod_{k=0}^{i} B_k^{Z_{n-k-j}}(h) \\
+ & \sum_{m=0}^{q-j}\sum_{i=0}^{q} b_{m+j} b_i \prod_{k=0}^{j-1} B_k^{Z_{n-k}}(h) \prod_{k=0}^{m} B_{k+j}^{Z_{n-k-j}}(h) \prod_{k=0}^{i} B_k^{Z_{n-k-j}}(h) \\
= & \sum_{l=0}^{j-1}\sum_{i=0}^{q} b_j b_i \prod_{k=0}^{l} B_k^{Z_{n-k}}(h) \prod_{k=0}^{i} B_k^{Z_{n-k-j}}(h) \\
+ & \sum_{m=0}^{q-j}\sum_{i=0}^{m} b_{m+j} b_i \prod_{k=0}^{j-1} B_k^{Z_{n-k}}(h) \prod_{k=0}^{i} (B_{k+j}(h)B_k(h))^{Z_{n-k-j}} \prod_{k=0}^{m} B_k^{Z_{n-k-j}}(h) \\
+ & \sum_{m=0}^{q-j}\sum_{i=m+1}^{q} b_{m+j} b_i \prod_{k=0}^{j-1} B_k^{Z_{n-k}}(h) \prod_{k=0}^{i} (B_{k+j}(h)B_k(h))^{Z_{n-k-j}} \prod_{k=0}^{i} B_k^{Z_{n-k-j}}(h)
\end{aligned}$$

Então, devido à independência das variáveis da sucessão $\{Z_n\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
P_{X_n+X_{n-j}}(1+h) \quad = \quad & \sum_{l=0}^{j-1}\sum_{i=0}^{q} b_j b_i \prod_{k=0}^{l} E\left(B_k^{Z_{n-k}}(h)\right) \prod_{k=0}^{i} E\left(B_k^{Z_{n-k-j}}(h)\right) + \\
+ \quad & \sum_{m=0}^{q-j}\sum_{i=0}^{m} b_{m+j} b_i \prod_{k=0}^{j-1} E\left(B_k^{Z_{n-k}}(h)\right) \times \\
\times \quad & \prod_{k=0}^{i} E\left((B_{k+j}(h)B_k(h))^{Z_{n-k-j}}\right) \prod_{k=0}^{m} E\left(B_k^{Z_{n-k-j}}(h)\right) + \\
+ \quad & \sum_{m=0}^{q-j}\sum_{i=m+1}^{q} b_{m+j} b_i \prod_{k=0}^{j-1} E\left(B_k^{Z_{n-k}}(h)\right) \times \\
\times \quad & \prod_{k=0}^{i} E\left((B_{k+j}(h)B_k(h))^{Z_{n-k-j}}\right) \prod_{k=0}^{i} E\left(B_k^{Z_{n-k-j}}(h)\right)
\end{aligned}$$

Uma vez que esta última expressão envolve somas e produtos finitos, resta-nos provar a convergência das f.g.p. envolvidas. Concretamente, de termos do tipo $E\left(B_k^{Z_{n-k}}(h)\right)$ e de $E\left((B_{k+j}(h)B_k(h))^{Z_{n-k-j}}\right)$.

De acordo com o que afirmamos na Observação 1, $E\left(B_k^{Z_{n-k}}(h)\right) = E((1+\beta_k h)^Z)$ é convergente para $\beta_k h < \lambda$ e

$$E\left((B_{k+j}(h)B_k(h))^{Z_{n-k-j}}\right) = E((1 + (\beta_{k+j} + \beta_k)h + \beta_{k+j}\beta_k h^2)^Z)$$

é convergente para $(\beta_{k+j} + \beta_k)h + \beta_{k+j}\beta_k h^2 < \lambda$. Mas $(1 + \beta^*)h + \beta^* h^2 < \lambda$ implica $(\beta_{k+j} + \beta_k)h + \beta_{k+j}\beta_k h^2 < \lambda$ bem como $\beta_k h < \lambda$ para quaisquer j e k em $\{0, 1, \ldots, q-1\}$.

Fica assim concluída a demonstração.

$\square$

Finalizamos o capítulo com o já referido teorema onde se estabelece que a distribuição limite da sucessão de máximos M_{k_n}, sob normalização do tipo $x + b_n$, é a distribuição de Gumbel discreta.

Teorema 16.

Seja $\{X_n\}$ a sucessão estacionária INMA(q) definida por (4.1) com f.d. marginal de $\{Z_n\}$ pertencente à classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$. Seja $k_n = [n^{-\xi} A_q^{-1}(1+\lambda)^n]$ com A_q definido no Teorema 14. Tem-se $k_n(1 - F_X(x+n)) \longrightarrow (1+\lambda)^{-[x]}$, $n \to +\infty$, bem como

$$P(M_{k_n} \leq x + n) \longrightarrow \exp(-(1+\lambda)^{-[x]}),\ n \to +\infty,$$

para qualquer x real.

Demonstração.

Do Teorema 14 decorre que também $\{X_n\}$ tem margens na classe $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$ e assim

$$\begin{aligned} k_n(1 - F_X(x+n)) = k_n P(X_1 > x+n) &\sim n^{-\xi}(1+\lambda)^{n-[x+n]}(n+x)^{\xi} \\ &\sim (1+\lambda)^{-[x]},\ n \to +\infty. \end{aligned} \tag{4.4}$$

De forma a obter a distribuição limite da sucessão de máximos M_{k_n} usamos o Teorema 8, para provar que as condições $D_{k_n}(u_n)$ e $D'_{k_n}(u_n)$ se verificam para $\{X_n\}$, com $u_n = x + n$. Uma vez que a sucessão é q-dependente a condição $D_{k_n}(u_n)$ é trivialmente verificada.

Para estabelecer a condição $D'_{k_n}(u_n)$ usa-se primeiro a q-dependência do processo para obter

$$
\begin{aligned}
&k_n \sum_{j=2}^{[k_n/s_n]} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) \\
&= k_n \sum_{j=2}^{q+1} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) + k_n \sum_{j=q+2}^{[k_n/s_n]} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) \\
&\leq k_n \sum_{j=2}^{q+1} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) + k_n \sum_{j=q+2}^{[k_n/s_n]} P(X_1 > u_n) P(X_j > u_n) \\
&\leq k_n \sum_{j=2}^{q+1} P(X_1 + X_j > 2u_n) + \frac{1}{s_n} (k_n P(X_1 > u_n))^2 \\
&\leq k_n \sum_{j=2}^{q+1} P(X_1 + X_j > 2u_n) + o_n(1).
\end{aligned}
$$

atendendo a (4.4) e a que $s_n \to +\infty$.

De acordo com a Proposição 15, $E((1+h)^{X_1+X_j})$ é convergente para h tal que $(1+\beta^*)h + \beta^* h^2 < \lambda$. Assim, para $2 \leq j \leq q+1$, usando a desigualdade de Markov, obtemos

$$
\begin{aligned}
P(X_1 + X_j > 2u_n) &= P((1+h)^{X_1+X_j} > (1+h)^{2u_n}) \\
&\leq \frac{E((1+h)^{X_1+X_j})}{(1+h)^{2u_n}} \leq \frac{C}{(1+h)^{2u_n}},
\end{aligned}
$$

onde C representa uma constante.

Uma vez que existe h tal que $(1+\beta^*)h + \beta^* h^2 < \lambda$ e $(1+h)^2 > (1+\lambda)$, seja $\theta > 1$ tal que $(1+h)^2 = (1+\lambda)^\theta$. Temos então

$$
k_n \sum_{j=2}^{q+1} P(X_1 > u_n, X_j > u_n) \leq C_1 \frac{n^\xi (1+\lambda)^n}{(1+\lambda)^{\theta n}} = o_n(1), n \to +\infty.
$$

$\square$

Devemos observar que no teorema anterior também se pode considerar $k_n = [(1+\lambda)^n]$ e $b_n = n - \frac{\xi \ln n}{\ln(1+\lambda)}$.

Bibliografia

[1] Al-osh, M. e Alzaid, A., Integer-valued moving average (INMA) process. *Stat. Pap.* 29, 281-300, 1988.

[2] Anderson, C.W., Extreme value theory for a class of discrete distribution with applications to some stochastic processes. *J. Appl. Prob.*, 7, 99-113, 1970.

[3] Azencott, R., Dacunha-Castelle, D., Séries d'observations irregulières, modélisation et prévision. *Masson, Paris,* 1984.

[4] Gonçalves, E. e Mendes Lopes, N., Probabilidades, princípios teóricos. *Escolar Editora, Lisboa*, 2000.

[5] Hall, A., Extremos de sucessões de contagem. Tese de Doutoramento. *Faculdade de Ciências de Universidade de Lisboa.* 1998.

[6] Hall, A., Extremes of integer-valued moving averages models with exponential type-tails. *Extremes* 6, 361-379, 2003.

[7] Hall, A. e Temido, M.G., On the maximum term of MA and max-AR models with margins in Anderson's class. *Theory Probab. Appl.*, 51, 291-304, 2007.

[8] Leadbetter, M. R., Lindgren, G. e Rootzén, H., Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. *Springer-Verlag, Berlin*, 1982.

[9] Lukacs, E., Stochastic convergence. *Academic Press*, 1975.

[10] McCormick, W.P., Asymptotic analysis of extremes from autoregressive negative binomial processes. *Journal of Applied Probability* 29, 904-920, 1992.

[11] McKenzie, E., Auto regressive-moving-average processes with negative binomial and geometric marginal distribution. *Advances in Applied Probability* **18**, 679-705, 1986.

[12] Monfort, A., Cours de Probabilités. *Économie et Statistiques Avancées*. Economica Paris, 1980.

[13] Resnick, S., Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes. Springer-Verlag, New York, 1987.

[14] Temido, M.G. e Canto e Castro, L., Max-semistable laws in extremes of stationary random sequences. *Theory Probab. Appl.*, 47, 365-374, 2003.

[15] Temido, M.G., Domínios de atracção de funções de distribuição discretas. *Novos Rumos em Estatística, eds L. Carvalho et al., Edições SPE*, 415-426, 2002.

[16] Tenreiro, C., Apontamentos de Teoria das Probabilidades. DMUC, Coimbra, 2002.