



Estimação não-paramétrica do Valor em Risco

Ana Filipa Almeida Oliveira

Dissertação para a obtenção do Grau de

Mestre em Métodos Quantitativos em Finanças

Júri

Presidente: Professor Doutor Carlos Manuel Rebelo Tenreiro da Cruz

Orientador: Professor Doutor Paulo Eduardo Aragão Aleixo Neves de Oliveira

Vogais: Professor Doutor Pedro André Ribeiro Madeira Cunha Cerqueira

Data: Fevereiro de 2015

Resumo

A presente dissertação consiste num estudo sobre a estimação não-paramétrica do Valor em Risco. O trabalho inicia-se por uma revisão teórica do conceito do Valor em Risco. Seguidamente apresentam-se alguns métodos não-paramétricos utilizados para a sua estimação. Aprofunda-se mais concretamente a estimação do núcleo, enunciando-se as suas propriedades teóricas. Posteriormente, algumas aplicações da estimação do núcleo são também estudadas, nomeadamente a estimação do núcleo com transformação dos dados e a estimação do núcleo com dupla transformação dos dados. Por fim é apresentado um estudo de simulação para avaliar a estimação do Valor em Risco.

Palavras Chave: Valor em Risco, Estimação do núcleo, Transformação de dados, Distribuição de Champernowne, Distribuição Beta.

Abstract

This dissertation is a study of a nonparametric estimation of Value-at-Risk. The work begins with a theoretical review of the concept of Value-at-Risk. Following are presented some nonparametric methods used for this estimation. More specifically the kernel estimation is the method that is focused, presenting its theoretical properties. Subsequently, some applications of kernel estimation are also studied, particularly the kernel estimation with transformation of data and the kernel estimation with double transformation of data. Finally is presented a simulation study to evaluate the estimation of the Value-at-Risk.

Keywords: Value-at-Risk, Kernel estimation, Transformation of data, Champernowne distribution, Beta distribution.

Agradecimentos

A realização desta dissertação marca o fim de uma importante etapa da minha vida. Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram de forma decisiva para a sua concretização.

Ao Professor Doutor Paulo Oliveira, expresso o meu profundo agradecimento pela orientação nesta dissertação. Muito obrigada pelo profissionalismo e pela total disponibilidade que sempre revelou para comigo. O seu constante apoio foi determinante na elaboração desta dissertação.

Às Minhas Colegas de Mestrado, Cátia, Madalena e Mónica, um agradecimento especial pela amizade, companhia e pelos bons momentos partilhados.

O meu profundo e sentido obrigada a todas as pessoas que me acompanharam ao longo do percurso do Mestrado e que contribuíram para a concretização desta dissertação, apoiando-me intelectual e emocionalmente.

Ao Mário, um agradecimento especial pelo apoio em todos os momentos. Por tudo, a minha enorme gratidão!

À Minha Família, em especial à Minha Mãe e ao Meu Pai um enorme obrigada por acreditarem sempre em mim e naquilo que faço e por todos os ensinamentos de vida. Espero que esta etapa, que agora termino, possa, de alguma forma, retribuir e compensar todo o carinho, apoio e dedicação que, constantemente, me oferecem. A eles, dedico todo este trabalho.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Valor em Risco: Definições e Metodologias	3
2.1	Valor em Risco	3
2.2	Estimador do núcleo	7
3	Estimador do núcleo usando transformações dos dados	21
3.1	Estimador do núcleo com transformação dos dados	21
3.2	Estimador do núcleo com dupla transformação dos dados	27
4	Estudo de Simulação	33
5	Conclusão	49
A	Apêndice A	51
B	Apêndice B	59
	Bibliografia	76

Capítulo 1

Introdução

Nos mercados financeiros existem inúmeras variáveis a controlar para que uma instituição consiga atingir o êxito. A perda financeira é, sem dúvida, uma variável aleatória fulcral para a qual os investidores necessitam de meios para a controlar, de forma a, tanto quanto possível, minimizá-la. Uma forma para obter algum controlo consiste na quantificação dos riscos de perda ou insolvência associados a uma carteira de investimentos. Assim, a introdução de medidas de risco e as suas propriedades matemáticas têm vindo a atrair bastante atenção e desempenham um papel importante na atividade seguradora e em finanças. O conceito de Valor em Risco surgiu, para assim, ajudar a medir e controlar o risco de perda inerente a uma determinada carteira de ativos financeiros. Este é simultaneamente uma medida quantitativa do risco e uma técnica de gestão do risco que auxilia os investidores na tomada de decisão. Mais concretamente, o Valor em Risco permite calcular o capital adequado que a instituição financeira deverá ter para, com uma certa probabilidade definida à partida, se proteger do risco de insolvência.

Assim sendo, o objetivo desta dissertação é estudar um método de estimação não-paramétrica para o Valor em Risco. A abordagem utilizada consiste em obter uma estimativa do Valor em Risco a partir da estimação não-paramétrica da função de distribuição associada à variável aleatória de risco X , representativa das perdas financeiras. A existência de uma vasta quantidade de dados históricos diários inerente às perdas financeiras, leva a que a distribuição inerente consiga ser explicada pelos dados, não havendo, assim, necessidade de se fixar, à partida, uma família de distribuições inerente à variável representativa das perdas. Por estas duas razões, a liberdade na escolha da forma da distribuição e a quantidade de dados, tudo leva a crer que um método não-paramétrico pode conduzir a bons resultados. O método não-paramétrico que se estuda aprofundadamente neste trabalho é o estimador do núcleo, na medida em que as suas propriedades e os estudos elaborados por inúmeros autores, revelam que este método se trata de uma ferramenta bastante útil que conduz a bons resultados para problemas de estimação em geral. Este método permite flexibilidade de aplicação suficiente para abor-

dar de forma mais eficiente a estimação nas caudas da distribuição onde, naturalmente, a existência de observações é mais escassa. Desde há alguns anos, vários autores têm analisado esta temática, evidenciando que certas adaptações ao método do estimador do núcleo poderão resolver algumas das dificuldades gerais do método. Desta forma, surgiu a motivação, para nesta dissertação se realizar o estudo de adaptações do método do estimador do núcleo, nomeadamente a estimação do núcleo com transformação dos dados, e a estimação do núcleo com dupla transformação dos dados para a função de distribuição da variável aleatória das perdas.

No capítulo 2 procede-se a uma breve descrição do Valor em Risco e a uma apresentação dos métodos que irão ser utilizados para a sua estimação e das suas propriedades mais relevantes para o objetivo desta dissertação. Neste capítulo é dado mais destaque ao estimador do núcleo, aprofundado-se o seu conceito e as suas propriedades. As diferentes adaptações do estimador do núcleo são remetidas para o capítulo 3, com uma breve descrição do motivo do seu uso. No último capítulo é efetuado um estudo de simulação que visa complementar o presente trabalho. Com recurso ao software R, o estudo permite uma avaliação numérica da estimação do Valor em Risco obtida por cada um dos métodos não-paramétricos apresentados, partindo de um conjunto de amostras de distribuições consideradas representativas de perdas financeiras.

Capítulo 2

Valor em Risco: Definições e Metodologias

Este capítulo apresenta o conceito de Valor em Risco como transformação da função de distribuição. Descreve também metodologias gerais para a estimação não-paramétrica da função de distribuição, que permitem posteriormente, utilizando a transformação referida atrás, obter aproximações para o Valor em Risco. São referidos dois métodos, a função de distribuição empírica pela sua simplicidade, e o estimador do núcleo. Este último é analisado de uma forma mais profunda, apresentando-se as suas propriedades teóricas.

2.1 Valor em Risco

A noção de quantil de uma variável aleatória define um limiar que só é ultrapassado com uma probabilidade pré-definida. Esta noção adequa-se, portanto, à definição de montantes de proteção contra riscos demasiado elevados. Assim, o Valor em Risco de nível α (VaR_α) será interpretado como sendo o quantil de ordem α associado à variável aleatória de risco X . Tal como se salientou anteriormente, o Valor em Risco de nível α representa o capital necessário para que o risco de insolvência não seja superior a $1 - \alpha$. Portanto estaremos naturalmente interessados em estimar o Valor em Risco para valores de α próximos de 1, de forma a identificar capitais mínimos para que o risco de insolvência seja pequeno. De seguida apresenta-se a definição desta medida de risco.

Definição 2.1 *Seja X uma variável aleatória, com função de distribuição F_X , o Valor em Risco de nível α , associado a esta variável X , é definido como sendo,*

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x, F_X(x) \geq \alpha\}. \quad (2.1)$$

Mais particularmente, caso a função de distribuição F_X seja invertível, esta medida de risco será expressa da forma seguinte:

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha). \quad (2.2)$$

Como se observa o Valor em Risco é definido como uma transformação da função de distribuição. Assim, uma abordagem natural à construção de aproximações para o Valor em Risco consiste em obter boas aproximações para a função de distribuição e aplicar a estas a mesma transformação. Daí que nos interessemos em seguida pela descrição de métodos de aproximação para a função de distribuição. Optou-se pelo recurso a métodos não-paramétricos para estimar a função de distribuição, devido à elevada quantidade de dados históricos na área financeira e para evitar os erros de aproximação inerentes a uma má escolha inicial da família de distribuições. Alguns problemas surgem quando se pretende estimar o Valor em Risco e é crucial atenuá-los. Um dos problemas é devido à possibilidade da função de distribuição estimada, na zona da cauda direita, crescer lentamente para 1, aspeto inerente às distribuições designadas de caudas pesadas. Do ponto de vista geométrico, fixando um certo limiar α , uma estimativa para o Valor em Risco corresponde à abcissa do gráfico da função de distribuição estimada onde esta função atinja esse limiar α , portanto pequenas flutuações das estimações para a função de distribuição poderão conduzir a grandes diferenças para o valor estimado do Valor em Risco. Na figura que se apresenta de seguida podemos analisar o gráfico de duas estimações para a função de distribuição com este tipo de problema.

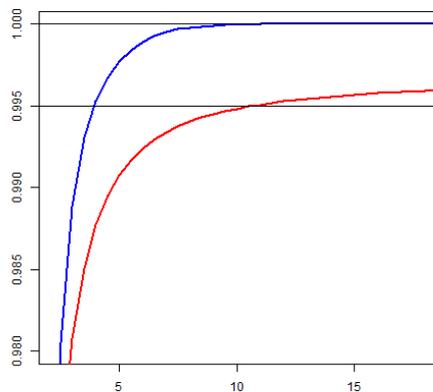


Figura 2.1: Estimações para a função de distribuição F_X , considerando $\alpha = 0.995$.

A possibilidade de ocorrência deste problema no nosso trabalho é grande, pois é usual os dados relativos às perdas em questão serem descritos por distribuições de probabilidade com caudas pesadas. Desta forma, um dos nossos objetivos, é encontrar um método de estimação que ajude a atenuar este género de problemas. O método mais intuitivo para estimar a função de distribuição F_X é a função de distribuição empírica. Recorde-se a sua definição.

Definição 2.2 *Sejam $X_i, i = 1, \dots, n$, observações da variável aleatória X que representa as perdas, com função de distribuição F_X . A função de distribuição empírica é*

definida por:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(X_i - x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

onde

$$\mathbb{I}(u) = \begin{cases} 1 & , u \leq 0 \\ 0 & , u > 0. \end{cases}$$

Desta forma, o estimador empírico do Valor em Risco de nível α é dado por:

$$\widehat{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x, \hat{F}_n(x) \geq \alpha\}. \quad (2.4)$$

As propriedades descritas abaixo justificam o motivo pelo qual se pode considerar a função de distribuição empírica como estimador para a função de distribuição F_X .

Proposição 2.3 Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$E \left[\hat{F}_n(x) \right] = F_X(x).$$

Este resultado indica que o estimador \hat{F}_n é centrado.

Proposição 2.4 Sejam $X_i, i = 1, \dots, n$, observações independentes da variável aleatória X , com função de distribuição F_X . Para cada $x \in \mathbb{R}$, a variância do estimador \hat{F}_n é dada por:

$$Var \left[\hat{F}_n(x) \right] = \frac{1}{n} F_X(x) (1 - F_X(x)).$$

Estas duas últimas proposições podem facilmente ser provadas recorrendo ao facto de que $n\hat{F}_n(x)$, sendo um somatório, tem distribuição Binomial de parâmetros $(n, F_X(x))$.

Vejam agora alguns resultados respeitantes à convergência quase certa do estimador \hat{F}_n para F_X . A seguinte proposição permite estabelecer a convergência pontual da função de distribuição empírica.

Proposição 2.5 Para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x) \text{ q.c. .}$$

O resultado anterior decorre diretamente da Lei Forte dos Grandes Números. A validade deste resultado permite concluir que o estimador \hat{F}_n , para cada $x \in \mathbb{R}$, é consistente. O seguinte teorema permite estabelecer a convergência uniforme da função de distribuição empírica.

Teorema 2.6 (Glivenko-Cantelli) Sejam X_1, \dots, X_n , observações independentes da variável aleatória X com função de distribuição F_X , e seja \hat{F}_n a função de distribuição empírica. Então, para $n \rightarrow \infty$, tem-se

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} | \hat{F}_n(x) - F_X(x) | \xrightarrow{\text{q.c.}} 0.$$

Prova: Seja $\epsilon > 0$. Fixando $k > \frac{1}{\epsilon}$, considera-se pontos intermédios u_0, \dots, u_k tais que

$$-\infty = u_0 < u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{k-1} \leq u_k = +\infty,$$

o que define uma partição do conjunto \mathbb{R} em k intervalos disjuntos tais que

$$F_X(u_j^-) \leq \frac{j}{k} \leq F_X(u_j), j = 1, \dots, k-1,$$

onde, para cada j ,

$$F_X(u_j^-) = P[X_j < u_j] = F_X(u_j) - P[X = u_j].$$

Então, por construção, como $u_{j-1} < u_j$,

$$0 \leq F_X(u_j^-) - F_X(u_{j-1}) \leq \frac{j}{k} - \frac{(j-1)}{k} = \frac{1}{k} < \epsilon.$$

Sendo $\hat{F}_n(x)$ uma variável aleatória, pela Proposição 2.5, têm-se a convergência pontual, isto é, com $n \rightarrow \infty$, para $j = 1, \dots, k-1$,

$$|\hat{F}_n(u_j) - F_X(u_j)| \xrightarrow{q.c.} 0 \quad e \quad |\hat{F}_n(u_j^-) - F_X(u_j^-)| \xrightarrow{q.c.} 0.$$

E posteriormente, quando $n \rightarrow \infty$,

$$\Delta_n = \max_{j=1, \dots, k-1} \left\{ |\hat{F}_n(u_j) - F_X(u_j)|, |\hat{F}_n(u_j^-) - F_X(u_j^-)| \right\} \xrightarrow{q.c.} 0.$$

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe um único $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$u_{j-1} \leq x \leq u_j.$$

Então tem-se

$$\hat{F}_n(x) - F_X(x) \leq \hat{F}_n(u_j^-) - F_X(u_{j-1}) \leq \hat{F}_n(u_j^-) - F_X(u_j^-) + \epsilon.$$

$$\hat{F}_n(x) - F_X(x) \geq \hat{F}_n(u_{j-1}) - F_X(u_j^-) \geq \hat{F}_n(u_{j-1}) - F_X(u_{j-1}) - \epsilon.$$

Assim, para cada x , existe um único $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$\hat{F}_n(u_{j-1}) - F_X(u_{j-1}) - \epsilon \leq \hat{F}_n(x) - F_X(x) \leq -F_X(u_j^-) \geq \hat{F}_n(u_j^-) - F_X(u_j^-) + \epsilon,$$

o que permite concluir,

$$|\hat{F}_n(x) - F_X(x)| \leq \Delta_n + \epsilon \xrightarrow{q.c.} \epsilon, (n \rightarrow \infty).$$

Uma vez que o resultado anterior é válido para um x arbitrário, então,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F_X(x)| \leq \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, temos

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F_X(x)| \xrightarrow{q.c.} 0. \blacksquare$$

Apesar da função de distribuição empírica ser um estimador centrado e consistente para a função de distribuição, pela sua simplicidade não consegue extrapolar para além do máximo dos dados. Tal propriedade causa problemas quando a amostra tem relativamente poucas observações, mas também, pelo facto de a probabilidade de obter um valor de perda superior ao máximo observado poder ser considerada não nula. Como estamos interessados em fazer o estudo para ordens de α bastante próximas de 1, usando a função de distribuição empírica para estimar a função de distribuição, a escassez de informações conduz a estimativas pouco precisas. Neste trabalho a forma que se escolheu para contornar este problema foi recorrer a outro método não-paramétrico, através do estimador do núcleo para a função de distribuição desconhecida F_X .

2.2 Estimador do núcleo

O conceito do estimador do núcleo foi estudado por inúmeros autores, os quais procuraram estudar as suas propriedades matemáticas em variados contextos. Nadaraya [7], Watson e Leadbetter [20] estudaram este estimador no contexto de problemas de regressão. Parzen [8] e Rosenblatt [10] estudaram-no para aproximações para a função densidade e Tiago de Oliveira [17] abordou a temática da estimação do núcleo para a função de distribuição. Segundo este último autor, o estimador do núcleo para a função de distribuição desconhecida F_X surge como sendo um integral do estimador do núcleo para a função densidade desconhecida f_X , proposto por Parzen [8] e Rosenblatt [10].

Definição 2.7 *Sejam X_1, \dots, X_n , observações independentes da variável aleatória X , o estimador do núcleo para a função de distribuição desconhecida F_X é definido, para $x \in \mathbb{R}$, por*

$$\hat{F}_{nb}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{b}\right). \quad (2.5)$$

Denomina-se por janela ou parâmetro de suavização o parâmetro $b = b_n$ tal que (b_n) é uma sucessão de números reais estritamente positivos que satisfaz

$$b_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

e para $u \in \mathbb{R}$,

$$K(u) = \int_{-\infty}^u k(v)dv,$$

onde k é uma função densidade de probabilidade, denominada por função núcleo.

Importa salientar que, nesta definição, intuitivamente apenas é necessário que a função K seja uma função de distribuição, a diferenciabilidade de K é apenas um

requisito necessário em termos práticos. Usualmente a função núcleo k , associada à função de distribuição K , é uma função de densidade simétrica e não negativa. As propriedades teóricas associadas a este estimador foram já amplamente estudadas por vários autores, entre eles, Tiago de Oliveira [17], Yamato [21], Tenreiro [12, 13]. Citamos, pela sua relevância para o presente estudo os resultados para o valor médio e variância do estimador \hat{F}_{nb} .

Proposição 2.8 *Seja X_1, \dots, X_n observações da variável aleatória X com função de distribuição F_X . O estimador \hat{F}_{nb} para a função de distribuição F_X , tem o seguinte valor médio, para cada $x \in \mathbb{R}$,*

$$E \left[\hat{F}_{nb}(x) \right] = E \left[K \left(\frac{x - X}{b} \right) \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} K \left(\frac{x - y}{b} \right) F_X(dy).$$

Proposição 2.9 *Seja X_1, \dots, X_n observações independentes da variável aleatória X com função de distribuição F_X . A variância do estimador \hat{F}_{nb} para a função de distribuição F_X , é dada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por*

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\hat{F}_{nb}(x) \right] &= \frac{1}{n} \text{Var} \left[K \left(\frac{x - X}{b} \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K^2 \left(\frac{x - y}{b} \right) F_X(dy) \right) - \frac{1}{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K \left(\frac{x - y}{b} \right) F_X(dy) \right)^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

De seguida estuda-se um resultado importante relativo à convergência uniforme quase certa do estimador \hat{F}_{nb} para F_X , expresso pelo Teorema 2.12. No que se segue, $C(F_X)$ denotará o conjunto de todos os pontos de continuidade da função F_X e $U(\mathbb{R})$ denotará a classe de todas as funções reais de variável real limitadas e uniformemente contínuas. Relembre-se que a função $\mathbb{I}(\cdot)$ denota a função de indicatriz de $]-\infty, 0]$ definida por (2.2). Por forma a reescrever a expressão do estimador do núcleo podemos usar a seguinte notação:

$$K_n(u) = K \left(\frac{u}{b} \right), u \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Começamos por apresentar dois resultados auxiliares para a prova do resultado de convergência uniforme do estimador do núcleo.

Lema 2.10 *Se $K_n \rightarrow \mathbb{I}(\cdot)$, então para qualquer $g \in U(\mathbb{R})$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) d\hat{F}_{nb}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x) \text{ q.c.}$$

Prova: Como g é uma função uniformemente contínua e limitada, são válidas as seguintes propriedades: existe uma constante $M > 0$, tal que

$$|g(x)| \leq M, \forall x; \quad (2.8)$$

e dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que

$$|x| < \delta \Rightarrow |g(x+y) - g(y)| < \epsilon, \forall y. \quad (2.9)$$

Como $K_n \rightarrow \mathbb{I}(\cdot)$, para $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo $N_0 = N_0(\epsilon, \delta)$, tal que

$$K_n(-\delta) + 1 - K_n(\delta) < \epsilon, \forall n > N_0. \quad (2.10)$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) d\hat{F}_{nb}(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(x + X_i) dK_n(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \int_{-\infty}^{+\infty} dK_n(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{|x| \geq \delta} |g(x + X_i)| dK_n(x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |g(X_i)| \int_{|x| \geq \delta} dK_n(x) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{|x| < \delta} |g(x + X_i) - g(X_i)| dK_n(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

O primeiro e segundo termo da última expressão em (2.11) são inferiores a $M\epsilon$ respectivamente devido a (2.8) e (2.10). O terceiro termo é inferior a ϵ devido a (2.9). Então, conclui-se que (2.11) é para qualquer $n > N_0$ inferior a $(2M+1)\epsilon$. Consequentemente, uma vez que $\epsilon > 0$ é arbitrário, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) d\hat{F}_{nb}(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \right] = 0.$$

Como g é limitada, pela Lei forte dos grandes números, obtém-se,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x) \text{ q.c. .}$$

Desta forma se pode concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) d\hat{F}_{nb}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x) \text{ q.c. . } \blacksquare$$

Lema 2.11 Se $K_n \rightarrow \mathbb{I}(\cdot)$, então, para todo $x \in C(F_X)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x) \text{ q.c. .}$$

Prova: Seja $\{a_m\}$ uma sequência de números positivos convergente para zero. Seja $g_{1m}(t)$, para $m \in \mathbb{Z}^+$, uma função contínua com valores em $[0, 1]$ tal que

$$g_{1m}(t) = \begin{cases} 1 & , t \leq x - a_m \\ 0 & , t \geq x, \end{cases}$$

Seja $g_{2m}(t)$, para $m \in \mathbb{Z}^+$, uma função contínua com valores em $[0, 1]$ tal que

$$g_{2m}(t) = \begin{cases} 1 & , t \leq x \\ 0 & , t \geq x + a_m, \end{cases}$$

Por construção, pode-se escolher $g_{1m}(t)$ e $g_{2m}(t)$ por forma a que seja válido para qualquer m , $g_{1m}, g_{2m} \in U(\mathbb{R})$.

Com recurso ao Lema 2.10, para qualquer m , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1m}(t) d\hat{F}_{nb}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1m}(t) dF_X(t), \quad (2.12)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2m}(t) d\hat{F}_{nb}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2m}(t) dF_X(t), \quad (2.13)$$

em N_m^c , onde N_m é um conjunto com $P(N_m) = 0$ e N_m^c é o complementar de N_m . Agora, definindo $N = \bigcup_{m=1}^{+\infty} N_m$, tem-se que $P(N) = 0$ e são válidas as expressões (2.12) e (2.13) em N^c , para qualquer m . Pela definição de g_{1m} e g_{2m} , obtêm-se as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} F_X(x - a_m) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1m}(t) dF_X(t) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{1m}(t) d\hat{F}_{nb}(t) \leq \hat{F}_{nb}(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2m}(t) d\hat{F}_{nb}(t) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g_{2m}(t) dF_X(t) \leq F_X(x + a_m). \end{cases} \quad (2.14)$$

A combinação de (2.12), (2.13) e (2.14) implica que, para qualquer m , se tenha

$$F_X(x - a_m) \leq \liminf_n \hat{F}_{nb}(x) \leq \limsup_n \hat{F}_{nb}(x) \leq F_X(x + a_m), \text{ em } N^c.$$

Fazendo $m \rightarrow +\infty$ na inequação anterior, se $x \in C(F_X)$ tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{F}_{nb}(x) = F_X(x), \text{ em } N^c. \blacksquare$$

Teorema 2.12 *Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F_X . Se $K_n \rightarrow \mathbb{I}(\cdot)$ e $F_X(x)$ é contínua, então para o estimador $\hat{F}_{nb}(x)$ dado por (2.5), tem-se,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} | \hat{F}_{nb}(x) - F_X(x) | \xrightarrow{q.c.} 0. \quad (2.15)$$

Prova: Se $K_n \rightarrow \mathbb{I}(\cdot)$ e $F_X(x)$ é uma função contínua, pelo Lema 2.11 tem-se, para qualquer $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_n(x) = F_X(x) \text{ q.c. .}$$

De forma análoga à prova do Teorema 2.6 (Glivenko-Cantelli), se prova (2.15). \blacksquare

Por forma a medir a qualidade do estimador do núcleo irão ser utilizados três critérios de erro, nomeadamente o Erro Quadrático Médio que define um critério de erro pontual, o Erro Quadrático Médio Integrado ou o Erro Quadrático Médio Ponderado Integrado que definem os erros de aproximação de uma forma global, cometidos na estimação da função de distribuição F_X .

Definição 2.13 *O Erro Quadrático Médio (EQM) de \hat{F}_{nb} é, para cada $x \in \mathbb{R}$, definido por:*

$$EQM\{\hat{F}_{nb}(x)\} = E\left[\{\hat{F}_{nb}(x) - F_X(x)\}^2\right]. \quad (2.16)$$

Definição 2.14 *O Erro Quadrático Médio Integrado (EQMI) de \hat{F}_{nb} é dado por:*

$$EQMI\{\hat{F}_{nb}\} = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \{\hat{F}_{nb}(x) - F_X(x)\}^2 dx\right]. \quad (2.17)$$

Definição 2.15 *O Erro Quadrático Médio Ponderado Integrado (EQMPI) de \hat{F}_{nb} é dado por:*

$$EQMPI\{\hat{F}_{nb}\} = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \{\hat{F}_{nb}(x) - F_X(x)\}^2 w(x) dx\right]. \quad (2.18)$$

Onde a função $w(\cdot)$ é a função peso pela qual se pretende ponderar a respetiva média.

Azzalini [2] e Reiss [9] analisaram as propriedades do estimador do núcleo para a função de distribuição e, recorrendo a aproximações baseadas no desenvolvimento em polinómio de Taylor, apresentaram o Teorema 2.19, o qual descreve o valor assintótico para o Erro Quadrático Médio do estimador do núcleo. Para uma mais fácil descrição dos resultados a demonstrar, introduz-se a notação de ordem de crescimento o .

Definição 2.16 *Seja a_n e b_n sequências de números reais. Diz-se que a_n é de ordem inferior a b_n , escrevendo-se*

$$a_n = o(b_n), (n \rightarrow +\infty) \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = 0.$$

Uma vez que o Erro Quadrático Médio de \hat{F}_{nb} pode ser decomposto, para cada $x \in \mathbb{R}$, da forma seguinte:

$$\begin{aligned} EQM\{\hat{F}_{nb}(x)\} &= E\left[\{\hat{F}_{nb}(x) - F_X(x)\}^2\right] \\ &= Var\left[\hat{F}_{nb}(x)\right] + \left(\text{Viés}\left[\hat{F}_{nb}(x)\right]\right)^2, \end{aligned}$$

torna-se útil, para uma melhor compreensão da prova do Teorema 2.19 apresentar os lemas seguintes, os quais tratam da caracterização dos dois termos em que se decompõe o EQM.

Lema 2.17 *Seja F_X a função de distribuição a estimar, para a qual se admite a existência de terceira derivada limitada. Considerem-se a função núcleo k e respetiva função de distribuição K tais que o momento de ordem três associado a k exista e seja finito. Quando $n \rightarrow +\infty$ e $nb^2 \rightarrow +\infty$, a variância do estimador do núcleo \hat{F}_{nb} da forma (2.5), pode ser representada, para cada $x \in \mathbb{R}$, por:*

$$\text{Var} \left[\hat{F}_{nb}(x) \right] = \frac{F_X(x) [1 - F_X(x)]}{n} - 2f_X(x) \frac{b}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt + o(b^4). \quad (2.19)$$

Prova: Considere-se a expressão (2.6) para a variância do estimador \hat{F}_{nb} . Tomando, $v(t) = K^2(t)$, obtém-se que,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2 \left(\frac{x-y}{b} \right) F_X(dy) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v \left(\frac{x-y}{b} \right) F_X(dy) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x-y}{b}} v'(t)dt \right) F_X(dy) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} v'(t)F_X(x-tb)dt. \end{aligned}$$

Com recurso ao desenvolvimento em polinómio de Taylor de grau 2, podemos representar $F_X(x-tb)$ por:

$$F_X(x-tb) = F_X(x) - tbF'_X(x) + \frac{1}{2}t^2b^2F''_X(x) + o(b^2). \quad (2.20)$$

E posteriormente,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2 \left(\frac{x-y}{b} \right) F_X(dy) &= \\ &= F_X(x) - 2bF'_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)k(t)dt + b^2F''_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2K(t)k(t)dt + o(b^2). \end{aligned}$$

Observe-se que o resto de Lagrange garante que se mantém $o(b^2)$ na expressão anterior, uma vez que permite a integração do termo em $o(b^2)$. De forma análoga podemos concluir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K \left(\frac{x-y}{b} \right) F_X(dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)F_X(x-tb)dt.$$

Recorrendo ao desenvolvimento em polinómio de Taylor de $F_X(x-tb)$, dado pela expressão (2.20), por k ser uma função densidade simétrica e não negativa, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} k(t)dt &= 1, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} tk(t)dt &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

e pela integrabilidade de $o(b^2)$, garantida pelo resto de Lagrange, podemos concluir o seguinte resultado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K \left(\frac{x-y}{b} \right) F_X(dy) = F_X(x) + \frac{1}{2}b^2f'_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt + o(b^2).$$

Consequentemente, obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\hat{F}_{nb}(x) \right] &= \frac{F_X(x) [1 - F_X(x)]}{n} - 2 \frac{b}{n} f_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)k(t)dt \\ &\quad + \frac{b^2}{n} f'_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 K(t)k(t)dt - \frac{b^2}{n} F_X(x) f'_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 k(t)dt \quad (2.22) \\ &\quad - \frac{b^4}{n} \left(\frac{1}{2} f'_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 k(t)dt \right)^2 + o\left(\frac{b^4}{n}\right) + o\left(\frac{b^2}{n}\right). \end{aligned}$$

Se $n \rightarrow +\infty$ e $nb^2 \rightarrow +\infty$, nesta última expressão os termos em b^2 e b^4 podem ser desprezados, devido, respetivamente a $\frac{b^2}{nb^4} \rightarrow 0$ e $\frac{b^4}{nb^4} \rightarrow 0$, obtendo-se, desta forma a seguinte expressão para a variância de $\hat{F}_{nb}(x)$.

$$\text{Var} \left[\hat{F}_{nb}(x) \right] = \frac{F_X(x) [1 - F_X(x)]}{n} - 2f_X(x) \frac{b}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt + o(b^4). \blacksquare$$

Lema 2.18 *Sejam K e k , respetivamente, a função de distribuição e densidade do núcleo, tais que o momento de ordem três associado a k exista e seja finito. Seja F_X a função de distribuição a estimar, para a qual se admite a existência de terceira derivada limitada. Para cada $x \in \mathbb{R}$, o viés associado ao estimador \hat{F}_{nb} da forma (2.5), pode ser aproximado por:*

$$\text{Viés} \left[\hat{F}_{nb}(x) \right] = \frac{1}{2} b^2 f'_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 k(t)dt + o(b^2).$$

Prova: Decorre da Proposição 2.8 que o Viés do estimador \hat{F}_{nb} , é definido, para cada $x \in \mathbb{R}$, por:

$$\begin{aligned} \text{Viés} \left[\hat{F}_{nb}(x) \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} K \left(\frac{x-y}{b} \right) F_X(dy) - F_X(x) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} k(t) F_X(x-tb) dt \right) - F_X(x). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Novamente, por k ser uma função densidade simétrica e não negativa, ou seja, se verificar (2.21), pelo uso do desenvolvimento em polinómio de Taylor de $F_X(x-tb)$ recorrendo à expressão (2.20) e pelo facto do resto de Lagrange garantir que $o(b^2)$ é integrável em \mathbb{R} , podemos concluir o seguinte resultado para o viés de \hat{F}_{nb} , para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{Viés} \left[\hat{F}_{nb}(x) \right] = \frac{1}{2} b^2 f'_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 k(t)dt + o(b^2). \blacksquare$$

Teorema 2.19 *Seja F_X a função de distribuição a estimar, para a qual se admite a existência de terceira derivada limitada. Considere-se a função núcleo k e respetiva função de distribuição K tais que o momento de ordem três associado a k exista e seja finito. Quando $n \rightarrow +\infty$ e $nb^2 \rightarrow +\infty$, o Erro Quadrático Médio de \hat{F}_{nb} pode ser*

aproximado, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ por:

$$EQM\{\hat{F}_{nb}(x)\} = \frac{F_X(x)[1 - F_X(x)]}{n} - 2f_X(x)\frac{b}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt + b^4 \left(\frac{1}{2}f_X'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt \right)^2 + o(b^4). \quad (2.24)$$

onde F_X e f_X denotam, respetivamente, a função de distribuição e de densidade associadas à variável aleatória X .

Com recurso aos Lemas 2.17 e 2.18, se prova o teorema anterior.

Deduzem-se a partir da representação que o Teorema 2.19 enuncia as propriedades seguintes, nas quais se definem os valores assintóticos do Erro Quadrático Médio Integrado e do Erro Quadrático Médio Ponderado Integrado do estimador considerado.

Proposição 2.20 *Seja F_X a função de distribuição a estimar, para a qual se admite a existência de terceira derivada limitada. Considere-se a função de distribuição K e respetiva função do núcleo k tais que o momento de ordem três associado a k exista e seja finito. Quando $n \rightarrow +\infty$ e $nb^2 \rightarrow +\infty$, o valor assintótico do Erro Quadrático Médio Integrado de \hat{F}_{nb} é descrito pela seguinte expressão,*

$$EQMI\{\hat{F}_{nb}(\cdot)\} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x)[1 - F_X(x)] dx - \frac{2}{n}b \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt + \frac{1}{4}b^4 \int_{-\infty}^{+\infty} [f_X'(x)]^2 dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt \right)^2 + o(b^4). \quad (2.25)$$

Prova: A expressão enunciada é obtida mediante a integração da expressão assintótica do EQM dada por (2.24), onde o Teorema de Fubini permite o controlo da integrabilidade do coeficiente referente a $o(b^4)$.

De uma forma semelhante se obtém a proposição seguinte.

Proposição 2.21 *Seja F_X a função de distribuição a estimar, para a qual se admite a existência de terceira derivada limitada. Considerem-se a função núcleo k e respetiva função de distribuição K tais que o momento de ordem três associado a k exista e seja finito. Quando $n \rightarrow +\infty$ e $nb^2 \rightarrow +\infty$, o valor assintótico do Erro Quadrático Médio Ponderado Integrado de \hat{F}_{nb} pode ser aproximado por:*

$$EQMPI\{\hat{F}_{nb}(\cdot)\} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x)[1 - F_X(x)] w(x) dx - \frac{2}{n}b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)w(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt + \frac{1}{4}b^4 \int_{-\infty}^{+\infty} [f_X'(x)]^2 w(x) dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt \right)^2 + o(b^4). \quad (2.26)$$

Prova: O valor assintótico do EQMPI é obtido por uma integração ponderada do valor assintótico para o EQM (2.24), onde a função peso é $w(\cdot)$. Mais uma vez, recorre-se ao Teorema de Fubini para garantir o controlo da integrabilidade do coeficiente referente a $o(b^4)$.

Saliente-se ainda que observando estas três últimas expressões para os diferentes critérios de erro, (2.24), (2.25) ou (2.26), verifica-se que em todas elas a ordem de grandeza do último termo, onde a função de densidade intervém, poderá impedir a diminuição do EQM, EQMI ou EQMPI, respetivamente. Com efeito, algumas distribuições poderão ser mais facilmente estimadas em contraste com outras.

Para se proceder à estimação do núcleo para a função de distribuição é necessário escolher à priori os parâmetros que o definem, ou seja, a janela b e função núcleo k . Desta forma, é necessário determinar qual o efeito de cada um destes parâmetros no estimador do núcleo para a função de distribuição F_X . A otimização dos critérios de erro relativamente a cada um dos parâmetros é essencial para se poder concluir quais serão as escolhas para a janela e função núcleo que permitirão que o estimador do núcleo seja o mais eficiente.

Como a escolha da janela é determinante na estimação do núcleo, é crucial apresentar uma discussão sobre a otimização dos critérios de erro relativamente à janela b . A janela b determina o grau de suavização a ser feita. Ou seja, este parâmetro é o responsável pela rapidez de oscilação da função de distribuição estimada. Pela análise da expressão (2.19), ao considerar a janela b pequena a estimação da função de distribuição apresenta bastante oscilação, pelo contrário, se a janela b for grande a estimação da função de distribuição será bastante suavizada, desprezando-se certas características relevantes da função. Desta forma podemos concluir que o valor ótimo para a janela depende inversamente do tamanho da amostra, na medida em que, quanto mais vasta é a amostra, maior é a oscilação da função, ou seja, menor é a janela, e vice-versa.

Em geral as abordagens para otimizar a janela b são baseadas na minimização dos erros considerados na avaliação da eficácia da estimação.

Desta forma, é apresentado nesta dissertação um estudo da janela mediante a discussão da otimização dos critérios de erro, EQM, EQMI ou EQMPI, do estimador do núcleo \hat{F}_{nb} para F_X . Segundo o Teorema 2.19, surge a seguinte proposição.

Proposição 2.22 *O valor da janela b que minimiza os termos mais significativos da*

expressão (2.24) é dado por:

$$b_x^* = \left(\frac{2f_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt}{(f'_X(x))^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt \right)^2} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.27)$$

onde f_X denota a função de densidade da variável aleatória X e $K(\cdot)$ a função de distribuição associada à função núcleo k .

Como o nosso objetivo é estimar o quantil de nível α , ou seja, determinar o ponto x tal que $F_X(x) = \alpha$, esta particular abordagem de estimação do valor ótimo para a janela parece conduzir a uma elevada variabilidade das aproximações de F_X , uma vez que depende da precisão da estimação de f_X (e conseqüentemente de F_X), na cauda da distribuição. Uma forma de controlar esta instabilidade é estimar o valor ótimo para a janela por forma a considerar todo o domínio da função de distribuição. Assim uma alternativa ao valor ótimo para a janela b obtido por (2.27), pode ser obtida minimizando o valor assintótico do Erro Quadrático Médio Integrado dado por (2.25), em função do parâmetro b . Desta forma obtém-se a seguinte proposição.

Proposição 2.23 *O valor ótimo para a janela b , na perspectiva do EQMI, é dado por:*

$$b^* = \left(\frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} [f'_X(x)]^2 dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt \right)^2} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.28)$$

onde f_X denota a função de densidade da variável aleatória X e $K(\cdot)$ a função de distribuição associada à função núcleo k .

Para além desta última abordagem, poderemos calcular o valor ótimo para a janela b , por forma a que mais peso seja dado à eficácia da estimação na parte do domínio junto ao quantil. O peso atribuído que, neste trabalho, se considerou como o adequado é aquele que é descrito pela função $w(x) = x^2$, fazendo com que grandes diferenças na estimação sejam consideradas mais relevantes nas caudas da distribuição. Minimizando a expressão (2.26), em ordem a b , obtém-se o valor ótimo para a janela b , que minimiza o valor assintótico do Erro Quadrático Médio Ponderado Integrado, como se descreve abaixo.

Proposição 2.24 *O valor ótimo para a janela b , segundo o critério de erro EQMPI, é igual a,*

$$b^{**} = \left(\frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)x^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} [f'_X(x)]^2 x^2 dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt \right)^2} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.29)$$

onde f_X denota a função de densidade da variável aleatória X e K a função de distribuição associada à função núcleo k .

Na sequência deste estudo, é útil nesta parte do trabalho apresentar uma discussão sobre a escolha da função núcleo k , a qual é usualmente uma função densidade de probabilidade simétrica, limitada e centrada na origem. Silverman [11] e Wand e Jones [19] apresentaram nos seus trabalhos um elaborado estudo sobre o efeito que a forma da função núcleo k tem sobre a estimação do núcleo no contexto da densidade. Silverman [11] constatou que a função núcleo Epanechnikov é ótima, na perspectiva do Erro Quadrático Médio e Wand e Jones [19] demonstraram que quando se minimiza o Erro Quadrático Médio Integrado em relação a k , a função núcleo Epanechnikov é considerado ótima. No entanto, Wand e Jones [19] elaboraram um estudo com intuito de comparar a função núcleo Epanechnikov com outras funções núcleo, e constataram que o EQMI usando a função núcleo Epanechnikov não difere muito do EQMI usando outra função núcleo. O que revela que a escolha da função núcleo não é determinante para a eficiência do estimador do núcleo, mas sim a escolha da janela. Corroborando com estes dois autores, Epanechnikov [6] no seu trabalho sugere que a escolha do núcleo é pouco significativa para os resultados da estimação.

Desta forma, baseada no trabalho de Wand e Jones [19] é apresentada uma discussão sobre a otimização dos critérios de erro do estimador do núcleo no contexto da função de distribuição, mediante a escolha da função núcleo k , ou seja, da função de distribuição do núcleo K . No estudo que se segue, iremos considerar as seguintes notações:

$$\begin{aligned}\mu_2(g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 g(u) du; \\ R(g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(u))^2 du; \\ B(g) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u g(u) g'(u) du.\end{aligned}$$

Perante a otimização do EQMI do estimador do núcleo \hat{F}_{nb} , o valor ótimo para a janela b dado por (2.28), pode ser reescrito como sendo:

$$b^* = \left(\frac{B(K)}{R(f'_X)(\mu_2(K'))^2} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.30)$$

onde f_X denota a função de densidade da variável aleatória X e K a função de distribuição associada à função núcleo k . Substituindo esta última expressão para b no valor assintótico do EQMI, temos que a otimização deste erro, em ordem a K , consiste na

minimização da expressão seguinte:

$$-\frac{3(B(K))^{\frac{4}{3}}}{4(R(f'_X))^{\frac{1}{3}}(\mu_2(k))^{\frac{2}{3}}}n^{-\frac{4}{3}}.$$

Tal indica que a minimização do EQMI em ordem a K , consiste na maximização do quociente $\frac{(B(K))^2}{\mu_2(k)}$. Procedendo ao estudo relativamente aos outros dois critérios de erro considerados, EQM ou EQMPI, constatamos que a sua minimização em ordem a K passa também por maximizar o quociente anteriormente referido. Resta portanto determinar qual será a variação do quociente $\frac{(B(K))^2}{\mu_2(k)}$ perante as diversas escolhas para a função núcleo k (e consequentemente para a função de distribuição K). Para exemplificação do pretendido, considerou-se algumas das funções núcleos usuais, a Epanechnikov, Gaussiana e Uniforme e analisou-se numericamente qual das três conduz à maximização de $\frac{(B(K))^2}{\mu_2(k)}$.

Apresente-se a definição da função núcleo Epanechnikov.

Definição 2.25 Denotando por k^* a função núcleo Epanechnikov, esta pode ser definida por:

$$k^*(t) = \frac{3}{4}(1-t^2), \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (2.31)$$

Consequentemente, se obtém a correspondente função de distribuição associada a esta função núcleo.

Definição 2.26 Denotando por K^* a função de distribuição associada à função núcleo Epanechnikov k^* , a sua descrição é dada por:

$$K^*(t) = \begin{cases} 0 & , t < -1 \\ \frac{3t-t^3+2}{4} & , -1 \leq t < 1 \\ 1 & , t \geq 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

A função núcleo Gaussiana corresponde à função de densidade de probabilidade associada à distribuição $Normal(0,1)$ e a função núcleo Uniforme é definida como sendo a função de densidade associada à distribuição $Unif(-1,1)$. Na tabela seguinte são apresentados os valores numéricos do quociente $\frac{(B(K))^2}{\mu_2(k)}$ para cada uma das três funções núcleos referidas.

Os resultados presentes na Tabela 2.1 indicam que perante uma análise numérica poderemos considerar que a escolha da função núcleo não é muito relevante para o método do núcleo, no contexto da função de distribuição, o que corrobora com o trabalho de Wand e Jones [19]. Uma vez que em termos teóricos, a função de distribuição é obtida pela integração da função densidade e visto que é válido considerar a função Epanechnikov como a função núcleo ótima no contexto da densidade, também neste trabalho,

Função núcleo	Valor numérico de $\frac{(B(K))^2}{\mu_2(k)}$
Epanechnikov	0.3306122
Gaussiana	0.3183099
Uniforme	0.3333333

Tabela 2.1: Comparação de funções núcleo.

poderemos adotar tal pressuposto no contexto da função de distribuição. Desta forma, é aceitável considerar a função núcleo Epanechnikov na determinação do estimador do núcleo para a função de distribuição F_X .

Retomando o estudo da escolha da janela b , observamos que as possibilidades para o valor ótimo de b (2.27), (2.28) ou (2.29), ainda continuam a ser valores desconhecidos, na medida em que dependem de f_X , a qual é uma função desconhecida. Desta forma, podemos considerar uma regra que na prática é muito utilizada, a qual consiste em considerar para a função de densidade f_X a função de densidade de probabilidade de uma distribuição Normal com média $\mu = 0$ e parâmetro de escala σ estimado pelo desvio-padrão da amostra associada à variável aleatória X . Assim sendo, considera-se

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.33)$$

Desta forma, considerando, à partida, a função núcleo Epanechnikov k^* , podemos obter três estimativas para o valor ótimo da janela b , consoante se minimize o EQM, o EQMI ou o EQMPI de \hat{F}_{nb} , as quais serão posteriormente utilizadas no cálculo do estimador do núcleo para a função de distribuição F_X . Uma estimativa para o valor ótimo da janela b (2.27), obtido pela minimização do EQM, é descrita por:

$$\hat{b}_x^* = \left(\frac{45\sqrt{2\pi}}{7x^2} \sigma^5 \exp\left\{\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}, \quad (2.34)$$

onde x representa o quantil de ordem p (definida à partida), da distribuição $Normal(0, \sigma)$. Note-se que a ordem p a considerar deverá ser próxima de 1, pois o nosso estudo passa por estimar o Valor em Risco para níveis de α próximos de 1. Assim sendo é bastante apropriado considerar para o valor de p o valor escolhido para α . Após obtenção do valor ótimo para o parâmetro de suavização b (2.28), pela minimização do EQMI, uma sua estimativa é dada por:

$$\hat{b}^* = \left(\frac{180\sqrt{\pi}\sigma^3}{7} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.35)$$

Podemos determinar uma aproximação para o valor ótimo da janela b (2.29), obtido através da minimização do EQMPI, a qual é dada por:

$$\hat{b}^{**} = \left(\frac{120\sqrt{\pi}}{7\sigma} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}. \quad (2.36)$$

Desta forma, considerando a função núcleo Epanechnikov e considerando estas três possibilidades para estimar o valor ótimo para a janela b , estamos em condições para se proceder à aplicação do estimador do núcleo, por forma a obter uma estimativa para a função de distribuição F_X , e conseqüentemente uma estimativa para o Valor em Risco de nível α , a qual será definida pelo uso da expressão seguinte:

$$\widehat{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x, \hat{F}_{nb}(x) \geq \alpha\}. \quad (2.37)$$

Um problema geral do estimador do núcleo para a função de distribuição é a escassez de observações na cauda, o que conduz a uma grande variabilidade deste estimador nos pontos da cauda da distribuição. Por forma a contornar tal problema apresentam-se no capítulo seguinte duas possíveis adaptações do estimador do núcleo.

Capítulo 3

Estimador do núcleo usando transformações dos dados

Neste capítulo são apresentadas duas adaptações do método do estimador do núcleo para a função de distribuição, recorrendo a transformações dos dados. O motivo pelo qual se aborda esta temática relaciona-se com a necessidade de atenuar o problema do estimador do núcleo conduzir a maus resultados de estimação da função de distribuição nas caudas da distribuição, devido à escassez de observações nesta zona. O método do estimador do núcleo com transformação dos dados ou com dupla transformação dos dados são as adaptações consideradas neste trabalho. O conceito destes métodos, o estudo das propriedades teóricas inerentes e o motivo pelo qual se usam estas adaptações são alvo de detalhe neste capítulo. Embora os primeiros estudos de adaptações do método do núcleo tenham surgido no contexto da densidade, posteriores estudos analisam adaptações deste método para estimar a função distribuição. De entre os estudos mais recentes, Buch-Larsen, Guillén e Nielsen [5] sugerem que possíveis adaptações do método do núcleo passam pelo uso de transformações dos dados.

3.1 Estimador do núcleo com transformação dos dados

Um dos problemas referidos na estimação do núcleo é o da escassez de informação na zona das caudas da distribuição de probabilidade, o que leva a estimativas imprecisas da função de distribuição. Desta forma, torna-se necessário encontrar uma forma de transformar, de uma forma reversível, os dados referentes à variável aleatória de risco X , representativa das perdas, por forma a que a escassez de observações desta variável aleatória de risco seja atenuada na zona pretendida, a zona das caudas da distribuição.

O facto de existirem distribuições em que a estimação é mais difícil do que outras, leva ao surgimento da ideia de transformar os dados iniciais, para tentar que, após esta transformação, estes tenham uma distribuição que possa ser mais facilmente estimada. Note-se que o significado de facilidade de estimação já se discutiu anteriormente na página 15, referente à secção 2.2. Naturalmente, a transformação considerada afetará a

determinação dos parâmetros envolvidos na estimação do núcleo. Os critérios de erro utilizados para avaliar a eficácia do estimador do núcleo com transformação dos dados para a função de distribuição F_X são aqueles que foram anteriormente referidos, o Erro Quadrático Médio (EQM), o Erro Quadrático Médio Integrado (EQMI), ou o Erro Quadrático Médio Ponderado Integrado (EQMPI) cometidos na estimação da função de distribuição. Avaliando a eficácia da estimação desta nova abordagem, comparativamente ao método clássico do estimador do núcleo para a função de distribuição, teremos as razões que motivam o uso desta adaptação, ou seja, determinaremos se com esta adaptação o erro cometido na estimação será minimizado.

Definição 3.1 *Sejam $X_i, i = 1, \dots, n$, observações independentes da variável aleatória X , com função de distribuição F_X . Seja $T(\cdot)$ uma transformação invertível, estritamente crescente e côncava, onde $Z_i = T(X_i), i = 1, \dots, n$, denotam as observações independentes da variável aleatória de risco transformada $Z = T(X)$, com função de distribuição F_Z . O estimador do núcleo para a função de distribuição F_Z é dado por:*

$$\begin{aligned} \hat{F}_{nb}^Z(z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{z - Z_i}{b}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{T(x) - T(X_i)}{b}\right) . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Onde $K(\cdot)$ e b denotam, respetivamente, a função de distribuição associada à função núcleo e a janela a considerar. Pelo facto da transformação $T(\cdot)$ ser considerada estritamente crescente, podemos representar o estimador do núcleo com transformação dos dados para a função de distribuição F_X da seguinte forma:

$$\hat{F}_{nb}(x) = \hat{F}_{nb}^Z(T(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{T(x) - T(X_i)}{b}\right) . \quad (3.2)$$

Para se determinar o estimador do núcleo com transformação dos dados para a função de distribuição F_X é necessário determinar à partida a função núcleo, $k(\cdot)$, a janela b e a transformação $T(\cdot)$. No capítulo anterior, argumentou-se que a função núcleo Epanechnikov é considerada como a ótima para o estimador do núcleo para a função de distribuição F_X , portanto também será considerada como ótima para esta adaptação do estimador do núcleo.

Vários autores têm contribuído com o seu trabalho para aprofundar a temática da escolha da transformação $T(\cdot)$, no contexto da densidade. No entanto, têm vindo a ser apresentados trabalhos onde se analisa a escolha da transformação $T(\cdot)$ com o objetivo de se aplicar o método do núcleo para estimar a função de distribuição, entre

3.1. ESTIMADOR DO NÚCLEO COM TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS

eles surgem os trabalhos de Bolancé e Nielsen [3], Wand, Marron e Ruppert [18] e Buch-Larsen, Guillén, Nielsen e Bolancé [5].

Na definição anterior, em termos teóricos apenas é necessário a invertibilidade da transformação $T(\cdot)$, uma vez que o facto de $T(\cdot)$ ser côncava e estritamente crescente é apenas referido por conveniência prática. A concavidade da transformação $T(\cdot)$ permitirá a aglutinação dos dados em algumas zonas dos dados, esperando-se que correspondam às caudas da distribuição, ou seja, o método do núcleo utilizará uma maior quantidade de observações para efetuar a estimação em cada ponto, reduzindo assim o enviesamento da função de distribuição estimada. Para facilitar a aplicação prática considera-se $T(\cdot)$ como uma transformação estritamente crescente para que a relação de ordem a que obedecem os dados seja mantida. Mais propriamente pode-se considerar $T(\cdot)$ como uma função de distribuição, para que o contradomínio da função seja limitado num intervalo. Com estes requisitos presentes, decidiu-se neste trabalho escolher uma transformação paramétrica $T(\cdot)$, baseada na função de distribuição associada à conhecida distribuição Champernowne, denominada por transformação de Champernowne modificada. Esta escolha foi motivada pela análise do trabalho elaborado por Buch-Larsen, Guillén, Nielsen e Bolancé [5], o qual indica que esta transformação é fácil de implementar e permite obter bons resultados ao nível da estimação da função de distribuição, no contexto de distribuições com caudas pesadas. Uma vez que a transformação $T(\cdot)$ escolhida é uma função de distribuição, a variável aleatória transformada $Z = T(X)$ pode ser aproximada pela distribuição $Unif(0, 1)$. Assim, o método do núcleo será aplicado a um conjunto de dados que se espera que estejam aproximadamente uniformemente distribuídos em $[0, 1]$, resultando numa boa aproximação para a função de distribuição associada a estes dados. Posteriormente, de uma forma reversível, aplica-se a transformação em sentido inverso e obtém-se o estimador do núcleo para a função de distribuição associada à variável inicial, permitindo desta forma atenuar um dos problemas do método do núcleo para a função de distribuição. Para se proceder à definição da transformação de Champernowne modificada é necessário recorrer à definição da função de distribuição associada à distribuição de Champernowne. Denotando por $CH(\cdot, \cdot)$ a distribuição de Champernowne, apresenta-se a seguinte definição.

Definição 3.2 *Seja W uma variável aleatória, tal que $W \sim CH(\delta, M)$, então a função de distribuição associada a W é dada por:*

$$F_W(w) = \frac{w^\delta}{w^\delta + M^\delta}, w \geq 0.$$

Esta função de distribuição assume valores bastante dispersos para valores do seu do-

mínio próximos da origem, o que conduz a problemas na fronteira. Por esta razão, torna-se útil realizar uma translação desta função de distribuição. Surgindo assim a transformação de Champernowne modificada, descrita na definição seguinte.

Definição 3.3 *A transformação de Champernowne modificada é definida por:*

$$T(w) = \frac{(w+c)^\delta - c^\delta}{(w+c)^\delta + (M+c)^\delta - 2c^\delta}, w \geq 0, \quad (3.3)$$

com os $\delta > 0$, $M > 0$ e $c \geq 0$.

Observe-se que a transformação $T(\cdot)$ considerada é uma transformação paramétrica, portanto é necessário estimar os parâmetros que lhe dizem respeito. Tal estimação pode ser obtida pela informação do conjunto de dados da variável aleatória inicial X , uma vez que se pretende que a variável aleatória transformada $Z = T(X)$ seja próxima da distribuição $Unif(0,1)$. A estimação dos parâmetros δ , M e c pode ser feita pelo método da máxima verosimilhança.

Por último resta a determinação da janela que, tal como no método original, é obtida pela minimização dos erros considerados na avaliação da eficácia da estimação. Pela análise do trabalho dos autores Alemany, Bolancé e Guillén [1], podemos considerar que o valor ótimo para a janela b utilizado no estimador do núcleo com transformação dos dados para a função de distribuição F_X , deduz-se a partir das expressões consideradas para a escolha da janela b do estimador do núcleo para a função de distribuição da variável transformada $Z = T(X)$. Para melhor compreensão, iremos apresentar, também neste trabalho, uma discussão sobre a otimização dos critérios de erro obtidos na estimação do núcleo com transformação dos dados, relativamente à janela b . Mais propriamente, interessa-nos avaliar o efeito da transformação $T(\cdot)$ sobre cada um dos critérios de erro do estimador \hat{F}_{nb} . Considerando o estimador do núcleo para a função de distribuição baseado em (3.1), poderemos obter os respetivos resultados assintóticos para o EQM, o EQMI e o EQMPI do estimador do núcleo com transformação dos dados \hat{F}_{nb} , os quais são enunciados de seguida.

Teorema 3.4 *Seja F_X a função de distribuição a estimar, para a qual se admite a existência de terceira derivada limitada. Considere-se a função núcleo k e respetiva função de distribuição K tais que o momento de ordem três associado a k exista e seja finito. Quando $n \rightarrow +\infty$ e $nb^2 \rightarrow +\infty$, o Erro Quadrático Médio do estimador \hat{F}_{nb} ,*

3.1. ESTIMADOR DO NÚCLEO COM TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS

apresentado pela Definição 3.1, pode ser aproximado, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\begin{aligned} EQM\{\hat{F}_{nb}(x)\} &= \frac{F_X(x)[1 - F_X(x)]}{n} - \frac{1}{T'(x)} 2f_X(x) \frac{b}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt \\ &+ \left(\frac{1}{T'(x)}\right)^2 \left(1 - \frac{\frac{f_X(x)}{T'(x)}}{\frac{f_X'(x)}{T''(x)}}\right)^2 b^4 \left(\frac{1}{2}f_X'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt\right)^2 + o(b^4). \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde F_X e f_X denotam, respetivamente, a função de distribuição e de densidade, associadas à variável aleatória X e $T(\cdot)$ representa a transformação dos dados a considerar.

Prova: Considere-se a representação do estimador \hat{F}_{nb} dada pela expressão (3.2), onde $Z = T(X)$. A representação do EQM de \hat{F}_{nb}^Z , é para cada $T(x) \in \mathbb{R}$, dada por:

$$\begin{aligned} EQM\{\hat{F}_{nb}^Z(T(x))\} &= E\left[\{\hat{F}_{nb}^Z(T(x)) - F_Z(T(x))\}^2\right] \\ &= E_T\left[\{\hat{F}_{nb}(x) - F_X(x)\}^2\right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Uma vez que \hat{F}_{nb}^Z é o estimador do núcleo para a função de distribuição F_Z , estamos em condições de poder aplicar o Teorema 2.19, ou seja, podemos aproximar o Erro Quadrático Médio de \hat{F}_{nb}^Z , para qualquer $T(x) \in \mathbb{R}$ por:

$$\begin{aligned} EQM\{\hat{F}_{nb}^Z(T(x))\} &= \frac{F_Z(T(x))[1 - F_Z(T(x))]}{n} - 2f_Z(T(x)) \frac{b}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt \\ &+ b^4 \left(\frac{1}{2}f_Z'(T(x)) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt\right)^2 + o(b^4). \end{aligned}$$

Visto que a variável aleatória $Z = T(X)$, temos

$$f_Z(T(x)) = \frac{f_X(x)}{T'(x)},$$

e consequentemente,

$$f_Z'(T(x)) = f_X'(x) \left[\frac{1}{T'(x)} - \frac{f_X(x)T''(x)}{f_X'(x)(T'(x))^2} \right].$$

Desta forma conclui-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} EQM\{\hat{F}_{nb}(x)\} &= \frac{F_X(x)[1 - F_X(x)]}{n} - \frac{1}{T'(x)} f_X(x) \frac{b}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt \\ &+ \left(\frac{1}{2}f_X'(x) \left[\frac{1}{T'(x)} - \frac{f_X(x)T''(x)}{f_X'(x)(T'(x))^2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt\right) b^4 + o(b^4). \blacksquare \end{aligned} \quad (3.6)$$

Minimizando a expressão (3.4) em ordem ao parâmetro b , obtém-se:

$$\begin{aligned} b_{x,T}^* &= (T'(x))^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\frac{f_X(x)}{T'(x)}}{\frac{f_X'(x)}{T''(x)}}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2f_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} tK(t)K'(t)dt}{(f_X'(x))^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2k(t)dt\right)^2}\right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \\ &= (T'(x))^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\frac{f_X(x)}{T'(x)}}{\frac{f_X'(x)}{T''(x)}}\right)^{-\frac{2}{3}} b_x^*, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde b_x^* é o valor ótimo determinado aquando da estimação do núcleo para a função de distribuição F_X , descrito pela expressão (2.27). O EQM do estimador do núcleo com transformação dos dados é inferior ao EQM do estimador do núcleo clássico se:

$$(T'(x))^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{\frac{f_X(x)}{f_X'(x)}}{\frac{T'(x)}{T''(x)}} \right)^{-\frac{2}{3}} > 1.$$

Desta forma de um ponto de vista prático, podemos considerar que o valor ótimo para a janela b relativo ao estimador do núcleo com transformação dos dados é a menos de uma constante igual ao valor ótimo de b do estimador do núcleo tradicional.

A partir da representação enunciada pelo Teorema 3.4, o Teorema de Fubini permite determinar os valores assintóticos do Erro Quadrático Médio Integrado e do Erro Quadrático Médio Ponderado Integrado do estimador do núcleo com transformação dos dados \hat{F}_{nb} . E posteriormente, quer considerando EQMI ou EQMPI, pode-se concluir que o valor ótimo para a janela b relativo ao estimador do núcleo com transformação dos dados é deduzível a partir do valor ótimo de b do estimador do núcleo tradicional.

Por conseguinte, o valor ótimo para o parâmetro b , para todo o domínio da função de distribuição F_X , é obtido de uma forma análoga às expressões (2.27), (2.28) e (2.29), substituindo f_X por f_Z .

As possibilidades para o valor ótimo de b continuam a ser desconhecidas, portanto podemos aqui aplicar a regra prática considerada no estimador do núcleo clássico, ou seja, considerar para a função de densidade de probabilidade f_Z a função de densidade de probabilidade de uma distribuição Normal com média $\mu = 0$ e parâmetro de escala σ estimado pela amostra transformada, descrita por (2.33).

Desta forma, considerando, à partida, a função núcleo Epanechnikov, podemos obter três estimativas para o valor ótimo da janela b , consoante se minimize o EQM, EQMI ou o EQMPI, as quais são posteriormente utilizadas no cálculo do estimador do núcleo com transformação dos dados \hat{F}_{nb} , repare-se na sua descrição abaixo. Uma estimativa para o valor ótimo da janela b , análogo a (2.27) substituindo f_X por f_Z , obtido pela minimização do EQM, é descrita por:

$$\hat{b}_z^* = \left(\frac{45\sqrt{2\pi}}{7z^2} \sigma^5 \exp \left\{ \frac{z^2}{2\sigma^2} \right\} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}, \quad (3.8)$$

onde z representa o quantil de ordem p (definida à partida), da distribuição *Normal*(0, σ). Após obtenção do valor ótimo para o parâmetro de suavização b , análogo a (2.28) substituindo f_X por f_Z , pela minimização do EQMI, uma sua estimativa é dada por:

$$\hat{b}^* = \left(\frac{180\sqrt{\pi}\sigma^3}{7} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}. \quad (3.9)$$

3.2. ESTIMADOR DO NÚCLEO COM DUPLA TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS

Podemos determinar uma aproximação para o valor ótimo da janela b , análogo a (2.29) substituindo f_X por f_Z , obtido através da minimização do EQMPI, a qual é dada por:

$$\hat{b}^{**} = \left(\frac{120\sqrt{\pi}}{7\sigma} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}. \quad (3.10)$$

Desta forma, estamos em condições de poder aplicar o estimador do núcleo com transformação dos dados para a determinação da função de distribuição F_X , e consequentemente estimar o Valor em Risco de nível α , com recurso à expressão (2.37).

3.2 Estimador do núcleo com dupla transformação dos dados

Na apresentação anterior do estimador do núcleo com transformação dos dados verifica-se que após aplicar a transformação em causa, a distribuição dos dados transformados aproxima-se da distribuição $Unif(0, 1)$. Neste seguimento surge a motivação de poder aplicar novamente uma transformação aos dados, que permita que a distribuição dos dados duplamente transformados se aproxime de uma distribuição tal que a função de distribuição a esta associada seja mais facilmente estimada por via do método do núcleo. Posto isto, surge o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados para a função de distribuição F_X . Nesta adaptação do método do núcleo iremos inicialmente aplicar a transformação Champernowne modificada aos dados iniciais da variável aleatória de risco X , para assim se obter numa primeira fase dados transformados cuja distribuição seja próxima da $Unif(0, 1)$. Visto que esta transformação aplica-se a dados que estão próximos da $Unif(0, 1)$ e queremos como resultado final dados aproximados por uma distribuição, é útil numa segunda fase aplicar uma nova transformação aos dados que seja uma função inversa de uma função distribuição. Por forma a facilitar a apresentação desta adaptação do método do núcleo, esta nova transformação é denotada por $M^{-1}(\cdot)$.

Nesta parte da dissertação iremos estudar o método do estimador do núcleo com dupla transformação dos dados para a função de distribuição, evidenciando as suas propriedades teóricas e as vantagens do seu uso. Resumidamente, o estimador aqui apresentado, requer inicialmente uma transformação $T(\cdot)$ dos dados da variável aleatória X , posteriormente é necessário aplicar uma transformação $M^{-1}(\cdot)$ aos dados transformados e por último é aplicado o método do núcleo aos dados duplamente transformados, para de forma reversível se obter uma estimativa para a função de distribuição F_X . Apresente-se de seguida a definição do estimador do núcleo com dupla transformação dos dados para F_X .

Definição 3.5 *Sejam $X_i, i = 1, \dots, n$, observações independentes da variável aleatória X , com função de distribuição F_X . Seja $T(\cdot)$ uma transformação onde $Z_i = T(X_i)$, $i = 1, \dots, n$, denotam as observações independentes da variável aleatória de risco transformada $Z = T(X)$. Seja a transformação $M^{-1}(\cdot)$ onde $Y_i = M^{-1}(Z_i)$, $i = 1, \dots, n$, denotam as observações independentes da variável aleatória de risco duplamente transformada $Y = M^{-1}(Z)$. As duas transformações envolvidas são definidas por forma a que a função composta $M^{-1}(T(\cdot))$ seja invertível, côncava e estritamente crescente. O estimador do núcleo para a função de distribuição F_Y é dado por:*

$$\begin{aligned} \hat{F}_{nb}^Y(y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y - Y_i}{b}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{M^{-1}(T(x)) - M^{-1}(T(X_i))}{b}\right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Onde $K(\cdot)$ e b denotam, respetivamente, a função núcleo e a janela a considerar.

O requisito de $M^{-1}(T(\cdot))$ ser uma função estritamente crescente, permite representar o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados para a função de distribuição F_X da seguinte forma:

$$\hat{F}_{nb}(x) = \hat{F}_{nb}^Y(M^{-1}(T(x))) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{M^{-1}(T(x)) - M^{-1}(T(X_i))}{b}\right). \quad (3.12)$$

Observe-se que a invertibilidade da função composta $M^{-1}(T(\cdot))$ é o único requisito necessário para a definição, em termos teóricos, do estimador do núcleo com dupla transformação dos dados. Enquanto que o facto de $M^{-1}(T(\cdot))$ ser estritamente crescente e côncava é apenas necessário para facilitar a aplicação prática deste estimador.

A determinação do estimador do núcleo com dupla transformação dos dados para a função de distribuição F_X , envolve a determinação da função de distribuição do núcleo, $K(\cdot)$, da janela b , mas também, das transformações $T(\cdot)$ e $M^{-1}(\cdot)$. No capítulo anterior evidenciou-se as razões de usar a função núcleo Epanechnikov para representar a função núcleo associada ao método do estimador do núcleo, para a função de distribuição F_X . Pelas mesmas razões, e por o estimador que agora é apresentado ser uma adaptação do estimador do núcleo, também se considera a função núcleo Epanechnikov.

A transformação $T(\cdot)$ é aquela que se considerou para o estimador do núcleo com transformação dos dados para a função de distribuição F_X , ou seja a transformação de Champernowne modificada, dada pela expressão (3.3).

O motivo do uso da transformação $M^{-1}(\cdot)$ é a obtenção de dados duplamente transformados que tenham uma distribuição que seja próxima de uma distribuição por nós conhecida. Analisando a expressão do valor assintótico do EQMI (2.25), por forma

3.2. ESTIMADOR DO NÚCLEO COM DUPLA TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS

a determinar o valor ótimo para a janela b , constata-se que é suficiente minimizar a expressão:

$$\frac{1}{4}b^4 \int_{-\infty}^{+\infty} [f'_Y(x)]^2 dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 k(t) dt \right)^2 - \frac{2}{n} b \int_{-\infty}^{+\infty} t K(t) K'(t) dt \quad . \quad (3.13)$$

Fixando o parâmetro b e as funções $k(\cdot)$ e $K(\cdot)$, a expressão anterior é mínima quando a componente $\int_{-\infty}^{+\infty} [f'_Y(x)]^2 dx$ é mínima. O estudo elaborado pelo autor Terrell [16] revela que a função de densidade associada à distribuição $Beta(3, 3)$ definida no domínio $[-1, 1]$, permite minimizar $\int_{-\infty}^{+\infty} [f'_Y(x)]^2 dx$ no conjunto de todas as funções de densidade com variância conhecida. Para fundamentar este resultado iremos apresentar o Teorema 3.7, bem como recordar a seguinte definição.

Definição 3.6 *Seja W uma variável aleatória, tal que $W \sim Beta(3, 3)$ definida no domínio $[-1, 1]$, então as funções de densidade $m(\cdot)$ e de distribuição $M(\cdot)$, associadas a W são dadas por:*

$$m(w) = \frac{15}{16} (1 - w^2)^2 \quad , \quad -1 \leq w \leq 1 \quad , \quad (3.14)$$

$$M(w) = \begin{cases} 0 & , w < -1 \\ \frac{3}{16}w^5 - \frac{5}{8}w^3 + \frac{15}{16}w + \frac{1}{2} & , -1 \leq w < 1 \\ 1 & , w \geq 1 \end{cases} \quad . \quad (3.15)$$

Teorema 3.7 *Sejam $f(\cdot)$ as funções de variável real com variância conhecida σ^2 . A função $g(\cdot)$ com variância conhecida σ^2 , descrita pela expressão (3.14), é de entre as funções $f(\cdot)$ a que tem menor valor para a funcional $\int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2 dx$.*

Prova: Seja $f(\cdot)$ uma função densidade com média zero e variância igual à variância de $g(\cdot)$. Definindo, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$e(x) = f(x) - g(x) ,$$

temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e(x) dx = 0 ,$$

com $e(x) \geq 0$ para $|x| \geq 1$. O que resulta em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(x))^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (g'(x))^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (e'(x))^2 dx + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x) e'(x) dx .$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x) e'(x) dx &= \frac{15}{4} \int_{-1}^1 (1 - 3x^2) e(x) dx \\ &= \frac{15}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - 3x^2) e(x) dx + \frac{15}{4} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) e(x) dx . \end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)e'(x)dx \geq 0.$$

O que implica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (g'(x))^2 dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (f'(x))^2 dx. \blacksquare$$

Perante estes resultados, constatamos que a distribuição $Beta(3, 3)$ definida no domínio $[-1, 1]$, permite que a escolha da janela b se torne numa abordagem mais simples, facilitando assim a implementação do método do núcleo.

De facto acabamos por demonstrar que o critério de erro considerado consegue ser minimizado com a utilização da transformação $M^{-1}(\cdot)$, a qual representa a inversa da função de distribuição associada à $Beta(3, 3)$ definida no domínio $[-1, 1]$. Resumidamente, para se poder obter o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados para a função de distribuição F_X , é necessário aplicar aos dados das perdas a transformação de Champernowne modificada (3.3), obtendo-se dados representativos de uma variável aleatória transformada cuja distribuição é próxima da $Unif(0, 1)$. Posteriormente, aos dados das perdas transformados, é aplicada, novamente, uma transformação, usando a inversa da função de distribuição da $Beta(3, 3)$ definida no domínio $[-1, 1]$. Como resultado tem-se dados representativos de uma variável aleatória duplamente transformada cuja distribuição é próxima da $Beta(3, 3)$ definida no domínio $[-1, 1]$. Por último, o estimador do núcleo será aplicado a este conjunto de dados duplamente transformados, cuja função de distribuição tem suporte para todo \mathbb{R} , e posteriormente, de uma forma reversível, obtém-se o estimador do núcleo para a função de distribuição associada à variável inicial X .

Para esclarecer quais serão os valores ótimos para a janela b , considerados no estimador do núcleo com dupla transformação dos dados, recorre-se às expressões (2.27), (2.28) e (2.29), substituindo f_X por f_Y . A função de densidade f_Y pode ser representada pela função de densidade $m(\cdot)$ (3.14), associada à $Beta(3, 3)$ definida no domínio $[-1, 1]$. Ao fixar a função núcleo Epanechnikov, obtém-se três possíveis estimativas para o valor ótimo da janela b , segundo se minimize cada um dos critérios de erro considerados na avaliação da eficácia da estimação, repare-se nos seguintes resultados. Uma estimativa para o valor ótimo da janela b , segundo a minimização do EQM de $\hat{F}_{nb}(x)$ é dada por:

$$\hat{b}_y^* = \left(\frac{3}{7y^2} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}, \quad (3.16)$$

onde y representa o quantil de ordem p (definida à partida), da distribuição $Beta(3, 3)$ definida no domínio $[-1, 1]$. Consoante a minimização do EQMI de $\hat{F}_{nb}(x)$, obtém-se

3.2. ESTIMADOR DO NÚCLEO COM DUPLA TRANSFORMAÇÃO DOS DADOS

como estimativa para o valor ótimo da janela b , o seguinte resultado:

$$\hat{b}^* = 3^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \quad . \quad (3.17)$$

Uma aproximação para o valor ótimo da janela b , obtido através da minimização do EQMPI de $\hat{F}_{nb}(x)$ é igual a:

$$\hat{b}^{**} = \left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} \quad . \quad (3.18)$$

Por conseguinte, com a determinação destes critérios, pode-se aplicar o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados, por forma a determinar a função de distribuição F_X , e consequentemente estimar o Valor em Risco de nível α , com recurso à expressão (2.37).

Capítulo 4

Estudo de Simulação

Neste capítulo pretende-se apresentar um estudo de simulação que permita avaliar a eficácia da estimação do Valor em Risco de nível α , associado à variável aleatória de risco X representativa das perdas financeiras. Como nos capítulos anteriores foram analisados alguns métodos que permitem estimar a medida de risco VaR_α , estamos em condições de poder aplicar cada um dos métodos abordados, e retirar certas conclusões sobre a eficácia de cada um deles na estimação do VaR_α .

Nos capítulos precedentes mencionou-se que o VaR_α , associado à variável aleatória de risco X com função de distribuição F_X , será estimado a partir de uma estimação da função de distribuição F_X . E esta função, por sua vez, será estimada pelo estimador do núcleo e por duas possíveis adaptações deste método, o estimador do núcleo com transformação dos dados e o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados.

O estudo de simulação em causa consiste na obtenção de amostras de 1000 estimações do VaR_α , provenientes da utilização de cada um dos métodos referidos, e posteriormente avalia-se cada uma das amostras segundo alguns critérios. A média e o desvio-padrão de cada uma das amostras simuladas do Valor em Risco de nível α são dois destes critérios que permitem concluir sobre a eficácia da estimação no uso de cada um dos métodos estudados. Outro critério bastante importante na avaliação da eficácia do método é o cálculo do Erro Quadrático Médio de cada uma das amostras simuladas para o VaR_α , o qual permite determinar a diferença entre o Valor em Risco de nível α teórico e estimado. Por forma a comprovar os resultados obtidos nestes três critérios recorreu-se à análise gráfica da função de distribuição empírica para cada uma das amostras simuladas do VaR_α .

Nas estimações em causa é necessário a existência de dados históricos, para assim se poder estimar o VaR_α associado e compará-lo com o correspondente valor teórico. Para tal o mais evidente será simular dados que sigam uma determinada família de distribuições de probabilidade, pois desta forma o Valor em Risco de nível α é um valor conhecido. Escolheu-se um conjunto de famílias de distribuições com diferentes formas das caudas da distribuição, que usualmente são consideradas adequadas para representar

os dados das perdas, ou seja, com assimetria positiva. A distribuição Weibull, Burr, Pareto, LogNormal e ainda duas misturas de distribuição LogNormal-Pareto e Pareto-Poisson foram as nossas escolhas. Desta foram com auxílio do software R geraram-se 1000 amostras de tamanho $n = 500$ e 1000 amostras de tamanho $n = 2000$ para cada uma das distribuições apresentadas na Tabela 4.1.

Distribuição	$F_X(x)$	Parâmetros
<i>Weibull</i>	$1 - e^{-\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\beta}$	$(\beta, \gamma) = (0.5, 1)$
<i>LogNormal</i>	$\int_{-\infty}^{\ln(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$	$(\mu, \sigma) = (0, 1.25)$
<i>Burr</i>	$1 - \frac{1}{(1+x^\gamma)^\beta}$	$(\beta, \gamma) = (0.9, 1.5)$
<i>Pareto</i>	$1 - \frac{\gamma^\beta}{(x+\gamma)^\beta}$	$(\beta, \gamma) = (1.5, 1)$ $(\beta, \gamma) = (7, 2)$
<i>70%LogNormal</i> <i>+30%Pareto</i>	$0.7 \int_{-\infty}^{\ln(x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ $+0.3 \left(1 - \frac{\gamma^\beta}{(x+\gamma)^\beta}\right)$	$(\mu, \sigma, \beta, \gamma) = (0, 1.25, 1.5, 1)$
<i>70%Pareto</i> <i>+30%Poisson</i>	$0.7 \left(1 - \frac{\gamma^\beta}{(x+\gamma)^\beta}\right)$ $+0.3 \sum_{t=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}$	$(\beta, \gamma, \lambda) = (1.5, 1, 2)$

Tabela 4.1: Distribuições usadas no estudo de simulação.

Para cada uma das amostras simuladas, segundo os métodos abordados estimou-se o VaR_α com $\alpha = 0.99$ e $\alpha = 0.995$. Para se poder avaliar a estimação do VaR_α é necessário o conhecimento do valor teórico desta medida de risco. Desta forma, apresenta-se na Tabela 4.2 o Valor em Risco de nível α teórico, para cada uma das distribuições utilizadas.

Distribuição	VaR_α	
	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
<i>Weibull</i> (0.5, 1)	21.208	28.072
<i>LogNormal</i> (0, 1.25)	18.319	25.023
<i>Burr</i> (0.9, 1.5)	30.181	50.543
<i>Pareto</i> (1.5, 1)	20.544	33.200
<i>Pareto</i> (7, 2)	1.861	2.263
<i>70%LogNormal</i> (0, 1.25) + <i>30%Pareto</i> (1.5, 1)	18.987	27.476
<i>70%Pareto</i> (1.5, 1) + <i>30%Poisson</i> (2)	16.181	25.040

Tabela 4.2: Valor em Risco de nível α teórico.

Neste capítulo denotaremos o método do núcleo por EN, o método do núcleo com transformação dos dados por ENT e o método do núcleo com dupla transformação dos dados por ENDT, indicando em índice o respetivo critério de erro considerado na escolha da janela, EQM ou EQMPI.

Embora nos capítulos anteriores a discussão de cada um dos métodos tenha tido em conta como critério de erro o EQMI, este não será tido em conta neste estudo de simulação. A razão de excluir este critério prende-se com o facto do Erro Quadrático Médio Integrado de F_X medir a diferença entre o valor teórico e estimado desta função, considerando a mesma ponderação em qualquer ponto de F_X . Uma vez que estamos interessados na estimação de F_X em pontos das caudas da distribuição, o EQM não será um critério de erro útil, mas sim o EQMPI, pois este último atribui maior ponderação, à diferença do valor teórico e estimado de F_X , em pontos da cauda da distribuição.

Ao longo dos capítulos anteriores, por forma a complementar os estudos teóricos do método do núcleo e suas adaptações, realizaram-se em paralelo uma série de análises numéricas que permitem avaliar as diferentes abordagens discutidas. Estes estudos numéricos são, também, nesta parte da dissertação apresentados.

Aquando da implementação numérica de cada um dos métodos verificamos que a determinação do Valor em Risco, para valores de α próximos de 1, seria bastante difícil pelo uso do método do núcleo com transformação dos dados. Tal problema deve-se ao facto da estimação, por este método, para a função de distribuição, apresentar sempre um crescimento para 1 demasiado lento. Esta característica indica que o método do núcleo com transformação dos dados (ENT) subestima a função de distribuição F_X , o que leva a que este método sobrestime o Valor em Risco de nível α . Esta sobrevalorização do VaR_α traduz-se em termos numéricos na necessidade de considerar-se uma amplitude maior para o intervalo de valores de estimações do VaR_α . Como consequência, no estudo de simulação elaborado verifica-se que na maior parte dos casos as amostras de estimações desta medida, obtidas pelo método ENT, não têm nenhum valor numérico. Posto isto, neste estudo de simulação, em cada uma das tabelas a serem analisadas a notação “—” significa que não se determinou nenhum valor numérico para o Valor em Risco de nível α . Por exemplo ao gerarmos uma amostra de tamanho 2000 para a distribuição de $Weibull(0.5, 1)$ e para a distribuição de $Pareto(1.5, 1)$, aplicando o método do núcleo e suas adaptações, como estimação de F_X obtemos os gráficos expressos nas Figuras 4.1 e 4.2, que ilustram este comportamento em termos numéricos.

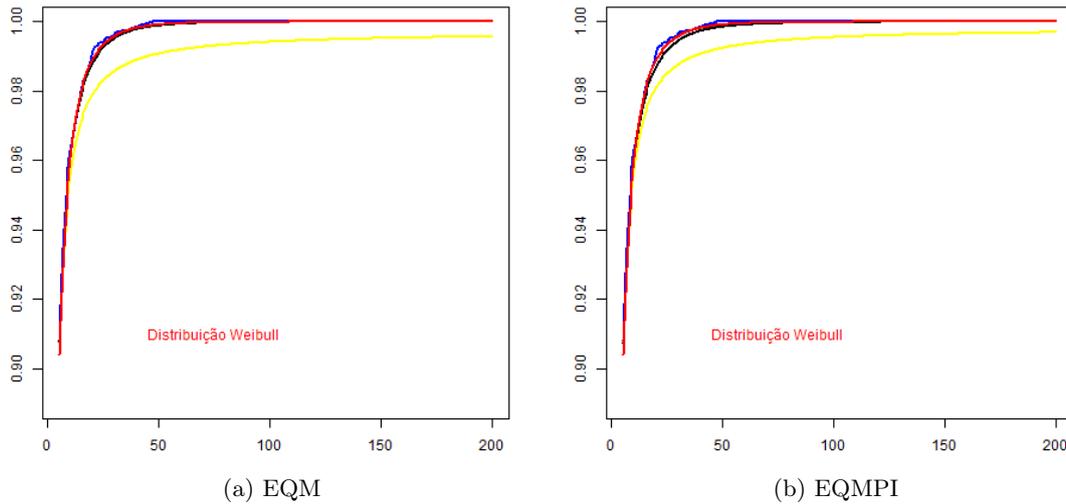


Figura 4.1: Função de distribuição F_X teórica (vermelho), estimativa para a função de distribuição F_X pelo método do núcleo (azul), estimativa para a função de distribuição F_X pelo método do núcleo com transformação dos dados (amarelo) e estimativa para a função de distribuição F_X pelo método do núcleo com dupla transformação dos dados (preto), referentes à distribuição $Weibull(0.5, 1)$.

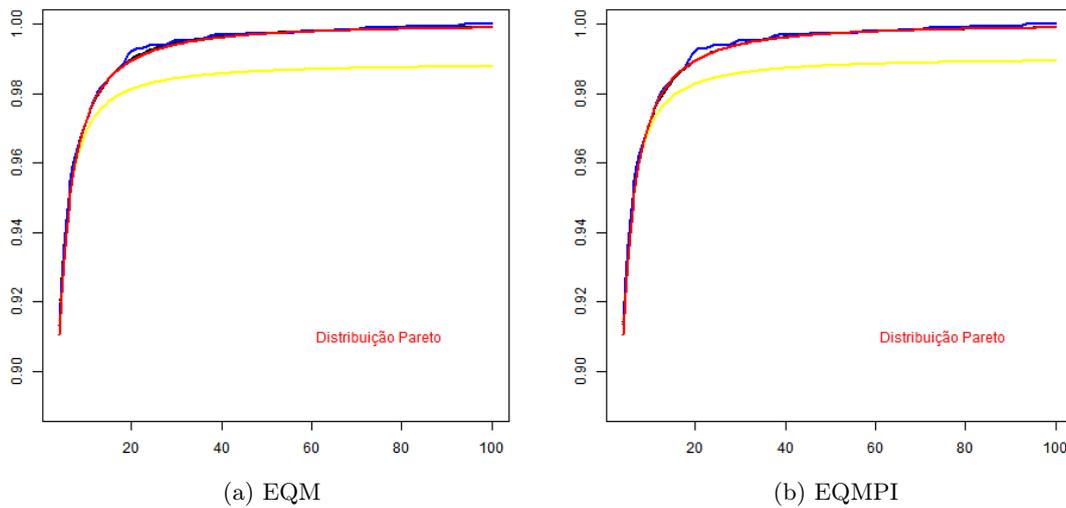


Figura 4.2: Função de distribuição F_X teórica (vermelho), estimativa para a função de distribuição F_X pelo método do núcleo (azul), estimativa para a função de distribuição F_X pelo método do núcleo com transformação dos dados (amarelo) e estimativa para a função de distribuição F_X pelo método do núcleo com dupla transformação dos dados (preto), referentes à distribuição $Pareto(1.5, 1)$.

Após estas análises numéricas particulares do método em causa, fixando cada uma das distribuições, procedemos à obtenção das amostras de tamanho 1000 das estimações

do VaR_α . Posteriormente avaliamos a eficácia da estimação de cada um dos métodos, tendo como referência o Valor em Risco de nível α teórico, expresso na Tabela 4.2. Inicialmente, nesta avaliação recorre-se à comparação da média das amostras de \widehat{VaR}_α com o verdadeiro valor de VaR_α e à análise do desvio-padrão de cada uma das amostras de \widehat{VaR}_α . Os valores da média e desvio-padrão de cada uma das amostras podem ser consultados nas Tabelas A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.7, que se encontram no Apêndice A. Pela sua análise constata-se que o tamanho da amostra influencia consideravelmente, como seria de esperar, a eficácia de estimação. Comparando o valor médio da estimação do VaR_α com o verdadeiro valor, verifica-se que para o método do núcleo com transformação dos dados (ENT) a diferença entre estes é bastante grande, ou seja o VaR_α é claramente sobrestimado, para cada uma das distribuições consideradas. Examinando os métodos estimador do núcleo e estimador do núcleo com dupla transformação, reconhece-se que apesar de o primeiro método possuir um valor médio do \widehat{VaR}_α mais próximo do verdadeiro valor, o ENDT tem um menor desvio-padrão.

Visto que com estes resultados não podemos tirar conclusões concordantes sobre qual o método mais aconselhável, surgiu a motivação de utilizar o Erro Quadrático Médio do estimador do Valor em Risco de nível α como critério de erro na avaliação da estimação. Denotando o Erro Quadrático Médio de \widehat{VaR}_α por $EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$, este mede a diferença entre o Valor em Risco de nível α teórico e estimado, e podemos expressá-lo da seguinte forma:

$$EQM_{\widehat{VaR}_\alpha} = EQM \left[\widehat{VaR}_\alpha(X) \right] = E \left[\left(\widehat{VaR}_\alpha(X) - VaR_\alpha(X) \right)^2 \right]. \quad (4.1)$$

Nas tabelas seguintes apresentam-se, para cada uma das distribuições, o erro quadrático médio associados às amostras das estimações para o VaR_α , provenientes do uso do método do núcleo, método do núcleo com transformação de dados e método do núcleo com dupla transformação dos dados, usando para a escolha da janela os critérios de erros EQM e EQMPI.

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$Weibull(0.5, 1)$			
Método		$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
$EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$	EN_{EQM}	17.299	48.192	4.278	13.584
	EN_{EQMPI}	17.545	48.337	4.293	13.680
	ENT_{EQM}	55403.156	NA	712.164	15763.093
	ENT_{EQMPI}	23745.874	72885.415	320.675	4114.667
	$ENDT_{EQM}$	38.137	126.327	6.775	21.624
	$ENDT_{EQMPI}$	73.506	258.492	11.068	37.005
		$LogNormal(0, 1.25)$			
$EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$	EN_{EQM}	14.651	52.680	3.485	12.372
	EN_{EQMPI}	14.840	52.777	3.499	12.477
	ENT_{EQM}	--	--	--	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	73598.067	--
	$ENDT_{EQM}$	18.184	72.839	3.786	13.460
	$ENDT_{EQMPI}$	27.064	122.461	4.714	18.302
		$Burr(0.9, 1.5)$			
$EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$	EN_{EQM}	190.782	1431.875	147.883	259.460
	EN_{EQMPI}	184.917	1428.131	376.283	493.564
	ENT_{EQM}	--	--	--	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	--	--
	$ENDT_{EQM}$	152.903	1335.019	25.991	163.647
	$ENDT_{EQMPI}$	192.724	2002.749	28.945	196.557

Tabela 4.3: Erro quadrático médio associado às amostras de estimações para o VaR_α , referentes às distribuições $Weibull(0.5, 1)$, $LogNormal(0, 1.25)$ e $Burr(0.9, 1.5)$.

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$Pareto(1.5, 1)$			
	Método	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
$EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$	EN_{EQM}	101.445	332.495	15.526	62.117
	EN_{EQMPI}	187.789	423.398	13.980	61.628
	ENT_{EQM}	--	--	53536.419	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	28384.153	--
	$ENDT_{EQM}$	56.956	359.779	10.677	56.883
	$ENDT_{EQMPI}$	72.811	520.750	12.095	67.632
		$Pareto(7, 2)$			
$EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$	EN_{EQM}	0.050	0.129	0.014	0.037
	EN_{EQMPI}	0.051	0.130	0.014	0.037
	ENT_{EQM}	1576.155	391.342	1.479	969.276
	ENT_{EQMPI}	312.752	4140.397	0.704	15.341
	$ENDT_{EQM}$	0.086	0.220	0.022	0.056
	$ENDT_{EQMPI}$	0.137	0.365	0.030	0.079
		$70\%LogNormal(0, 1.25) + 30\%Pareto(1.5, 1)$			
$EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$	EN_{EQM}	27.943	102.819	4.828	19.272
	EN_{EQMPI}	26.962	101.876	4.780	19.382
	ENT_{EQM}	--	--	54904.247	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	31680.059	--
	$ENDT_{EQM}$	25.313	123.370	4.795	18.696
	$ENDT_{EQMPI}$	35.155	186.355	5.767	23.835
		$70\%Pareto(1.5, 1) + 30\%Poisson(2)$			
$EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$	EN_{EQM}	58.504	240.693	12.071	42.739
	EN_{EQMPI}	51.974	234.713	10.541	41.912
	ENT_{EQM}	7314.468	33597.552	45.616	15500.770
	ENT_{EQMPI}	2992.519	32338.052	24.337	4900.475
	$ENDT_{EQM}$	27.802	211.791	6.694	38.355
	$ENDT_{EQMPI}$	30.679	248.821	6.954	42.698

Tabela 4.4: Erro quadrático médio associado às amostras de estimações para o VaR_α , referentes às distribuições $Pareto(1.5, 1)$, $Pareto(7, 2)$, $70\%LogNormal(0, 1.25) + 30\%Pareto(1.5, 1)$ e $70\%Pareto(1.5, 1) + 30\%Poisson(2)$.

Repare-se que em alguns dos casos o $EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$ é impossível de calcular, tal é devido, ao aspeto referido anteriormente, do estimador do núcleo com transformação dos dados para a função de distribuição ter como resultado uma função que cresce para 1 muito lentamente.

Pela análise destas duas últimas tabelas, é fácil de concluir que quanto maior for o tamanho da amostra de cada distribuição, menor será o erro cometido na estimação do VaR_α .

Os resultados presentes nas Tabelas 4.3 e 4.4, permitem tirar conclusões diferentes quando consideramos distribuições diferentes. Nos casos das distribuições $Weibull(0.5, 1)$, $LogNormal(0, 1.25)$ e $Pareto(7, 2)$ o estimador do núcleo (EN) é o método que permite obter um menor erro quadrático médio para o estimador do Valor em Risco de nível α , embora no caso da distribuição $Pareto(7, 2)$ a ordem de grandeza do $EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$ não sofre grande alteração quando comparado com o obtido pelo método ENDT. Contudo, o método do estimador do núcleo com dupla transformação dos dados permite reduzir consideravelmente o erro quadrático médio do estimador da medida de risco, quando se considera a distribuição $Burr(0.9, 1.5)$. Além disso, considerando as distribuições $Pareto(1.5, 1)$ e $70\%Pareto(1.5, 1) + 30\%Poisson(2)$ o método ENDT condiciona a redução do erro quadrático médio, exceto para quando o nível de α é igual a 0.995 e se usa o EQMPI como critério de erro na escolha da janela. Considerando a distribuição $70\%LogNormal(0, 1.25) + 30\%Pareto(1.5, 1)$, o uso método ENDT, com o EQM para o critério da janela, possibilita reduzir o erro quadrático médio do estimador mas esta redução é bastante pequena, contrariamente ao usar o EQMPI para critério da janela, o erro quadrático médio de \widehat{VaR}_α é reduzido aquando da utilização do método EN. Mediante o exposto, pode-se constatar que o método do núcleo com dupla transformação dos dados (ENDT) permite minimizar o $EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$, considerando de entre todas as distribuições aquelas com caudas mais pesadas $Pareto(1.5, 1)$ e $Burr(0.9, 1.5)$. Desta forma, podemos concluir que o método do núcleo com dupla transformação dos dados é eficaz para se estimar a medida de risco VaR_α , quando a variável aleatória de risco tem uma distribuição com caudas pesadas.

Por forma a consumir os resultados sobre a eficácia de estimação dos métodos estimador do núcleo e estimador do núcleo com dupla transformação dos dados, surge a motivação de analisar, para $\alpha = 0.995$, a função de distribuição empírica inerente às amostras de \widehat{VaR}_α , os seus gráficos são apresentadas nas figuras seguintes.

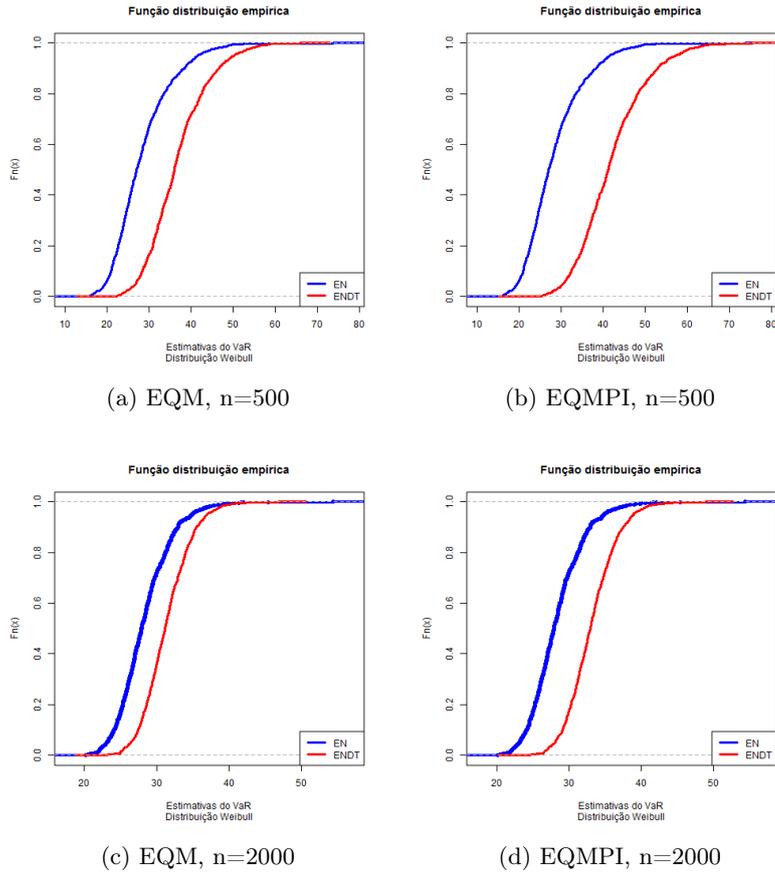


Figura 4.3: Função de distribuição empírica associada às amostras de estimações para o VaR_α , referentes à distribuição $Weibull(0.5, 1)$.

Numa primeira análise da Figura 4.3 verificamos que o tamanho da amostra influencia consideravelmente a eficácia do estimador. Esta figura também revela que o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados (ENDT) permite que o estimador \widehat{VaR}_α tenha um menor desvio em torno da sua média. No entanto, tendo em conta que, para $\alpha = 0.995$, o verdadeiro valor para o VaR_α , desta distribuição é 28.072, pela análise dos gráficos anteriores, verifica-se que o método EN permite que o valor médio para \widehat{VaR}_α seja mais próximo do verdadeiro valor, comparativamente com o método ENDT. Note-se que estes resultados confirmam o que foi concluído anteriormente.

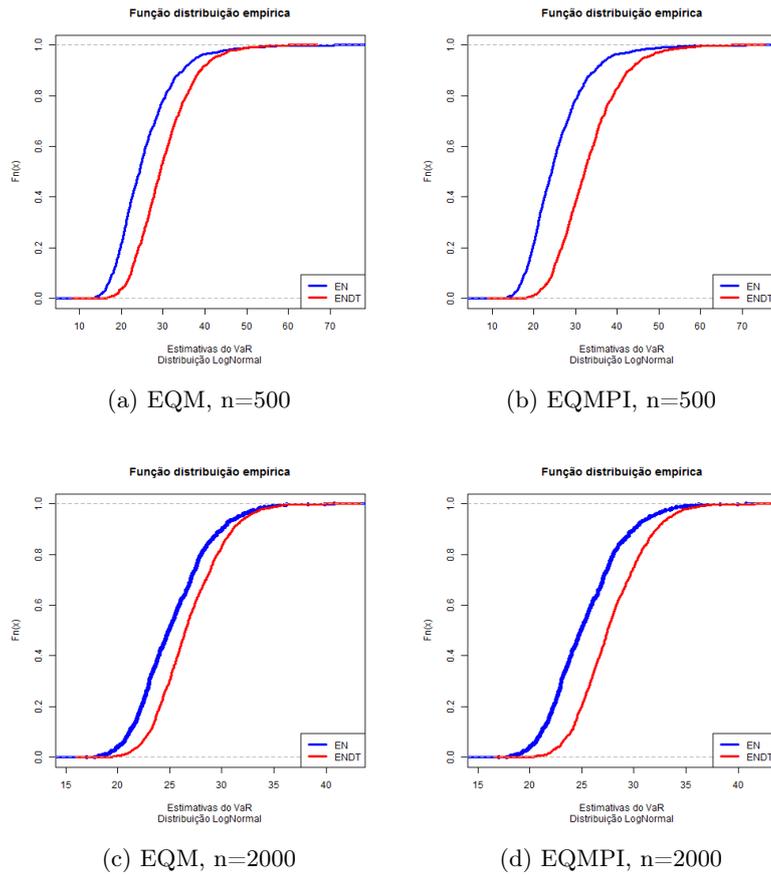


Figura 4.4: Função de distribuição empírica associada às amostras de estimações para o VaR_α , referentes à distribuição $LogNormal(0, 1.25)$.

Pela análise desta última figura verifica-se que o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados (ENDT) permite que o estimador \widehat{VaR}_α tenha um menor desvio em torno da sua média. Contudo, verifica-se que, para $\alpha = 0.995$, o valor médio do estimador aproxima-se do verdadeiro valor de VaR_α , o qual neste caso é 2.263, quando se considera o método EN. Tais resultados corroboram as conclusões que foram anteriormente retiradas. Podemos também verificar na figura que o tamanho da amostra influencia consideravelmente a eficácia do estimador.

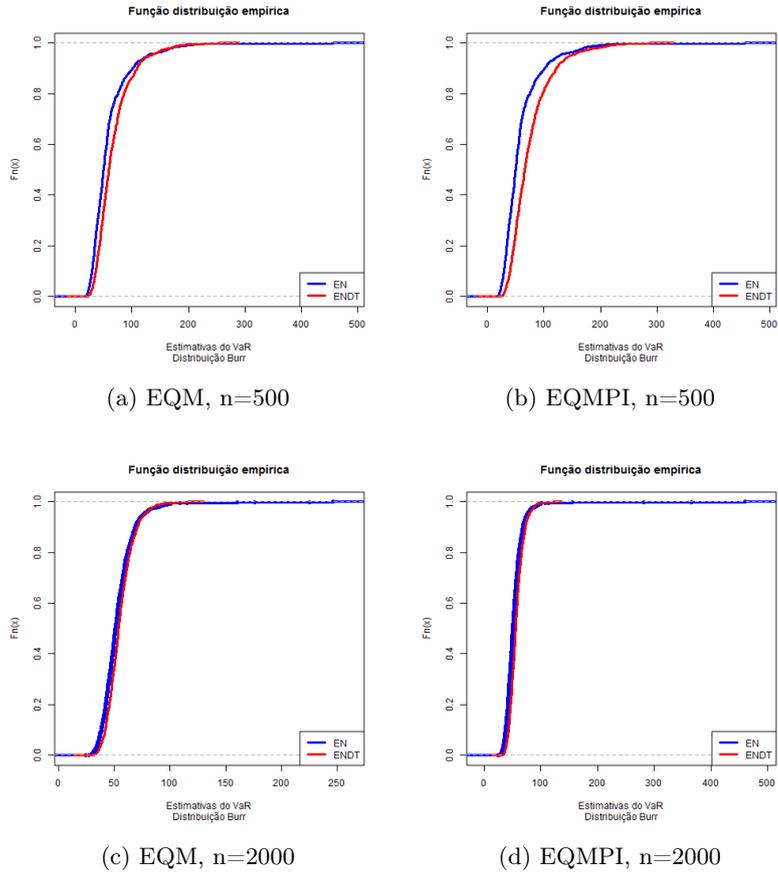


Figura 4.5: Função de distribuição empírica associada às amostras de estimações para o VaR_α , referentes à distribuição $Burr(0.9, 1.5)$.

Pela análise desta última figura verifica-se que o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados (ENDT) permite que o estimador \widehat{VaR}_α tenha um menor desvio em torno da sua média. Sendo assim a eficácia de estimação do Valor em Risco de nível α é melhorada com o método ENDT, o que vai de encontro à análise do $EQM_{\widehat{VaR}_\alpha}$. Contudo, como se pode verificar na figura esta melhoria de estimação pelo uso do método ENDT é pouco notável, quando comparável com o uso do método EN. Mais uma vez a figura indica que a estimação do VaR_α é significativamente influenciada pelo tamanho da amostra.

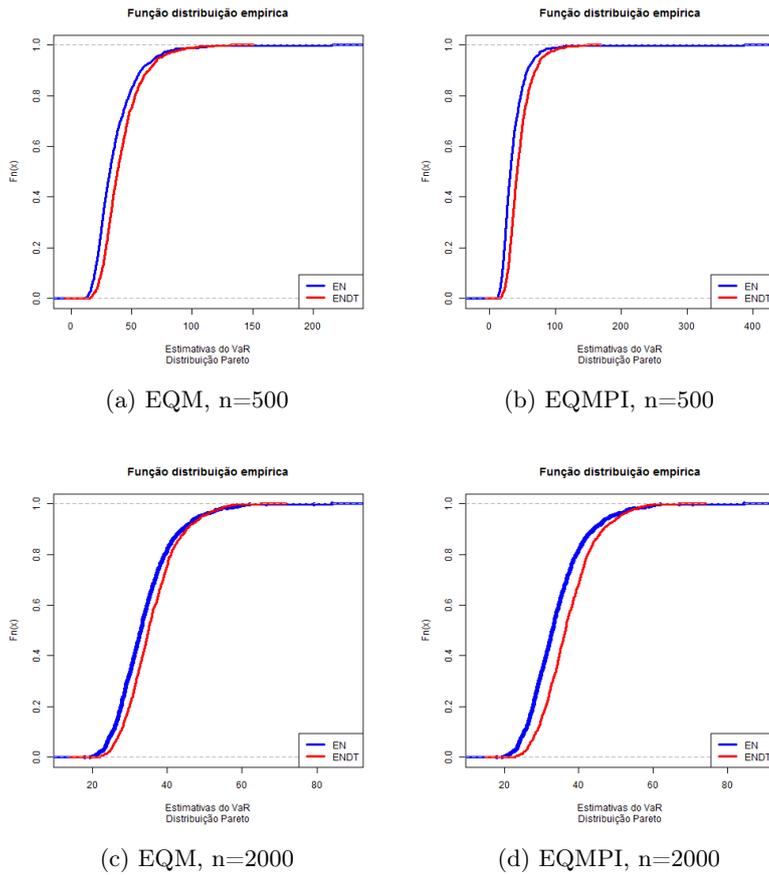


Figura 4.6: Função de distribuição empírica associada às amostras de estimações para o VaR_α , referentes à distribuição $Pareto(1.5, 1)$.

Ao analisarmos a Figura 4.6, verificamos que o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados (ENDT) permite que o estimador \widehat{VaR}_α tenha um menor desvio em torno da sua média. Sendo assim a eficácia de estimação do Valor em Risco de nível α é melhorada com o método ENDT, o que vai de encontro à análise do erro quadrático médio deste estimador. Contudo como se pode verificar na figura esta melhoria de estimação pelo uso do método ENDT é pouco notável, quando comparável com o uso do método EN.

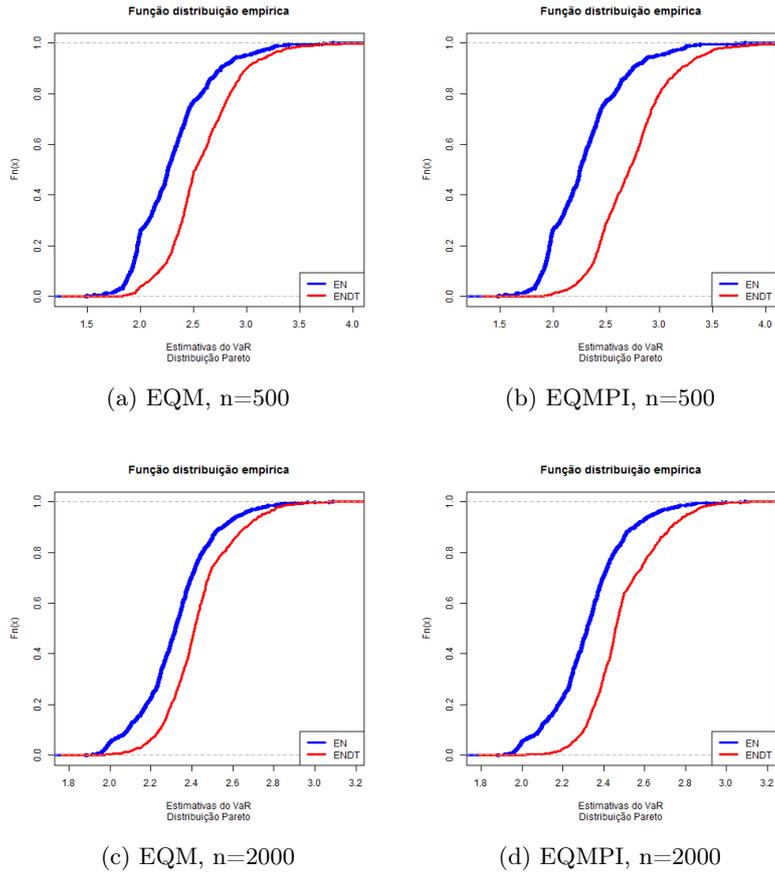


Figura 4.7: Função de distribuição empírica associada às amostras de estimações para o VaR_α , referentes à distribuição $Pareto(7, 2)$.

Pela análise desta última figura verifica-se que o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados (ENDT) permite que o estimador \widehat{VaR}_α tenha um menor desvio em torno da sua média. No entanto, a figura também revela que o método do núcleo (EN) permite um valor médio do estimador mais próximo do verdadeiro valor para o VaR_α , o qual para $\alpha = 0.995$ é igual a 2.263.

Por estes resultados podemos considerar que a eficácia de estimação do Valor em Risco de nível α é melhorada com o método ENDT.

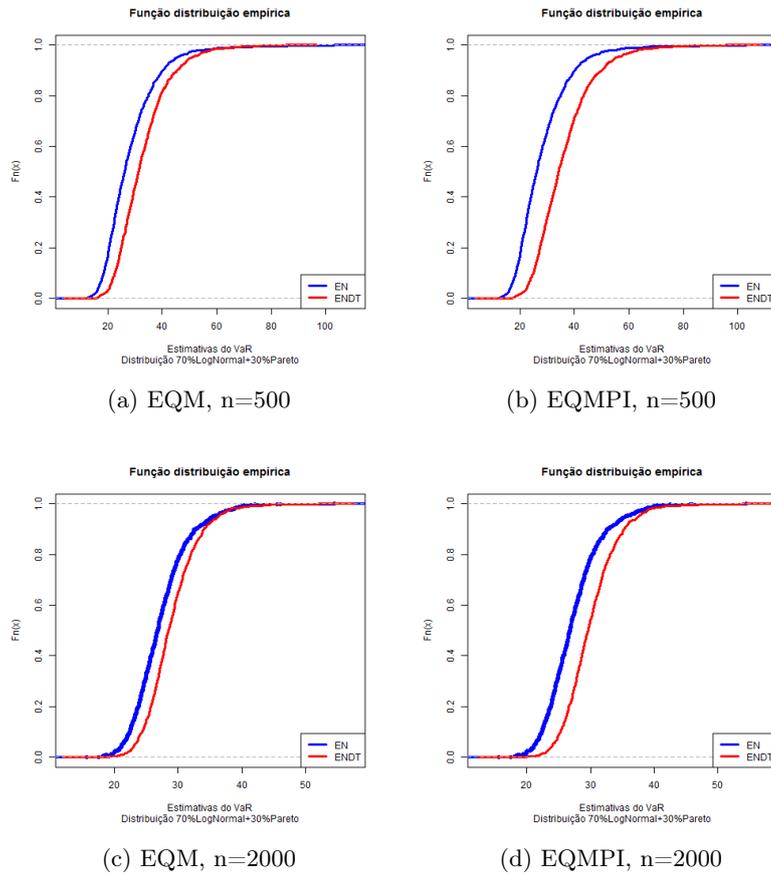


Figura 4.8: Função de distribuição empírica associada às amostras de estimações para o VaR_α , referentes à mistura de distribuições $70\%LogNormal(0, 1.25) + 30\%Pareto(1.5, 1)$.

Ao considerar uma mistura de distribuições $70\%LogNormal(0, 1.25) + 30\%Pareto(1.5, 1)$, pode-se constatar, como seria de esperar, que a componente referente à $Pareto(1.5, 1)$ permite atenuar o efeito da componente $LogNormal(0, 1.25)$, assim sendo o método (ENDT) consegue ter um valor médio do estimador mais próximo do verdadeiro valor de VaR_α . Mais uma vez verificamos que os resultados da estimação são consideravelmente influenciados pelo tamanho da amostra.

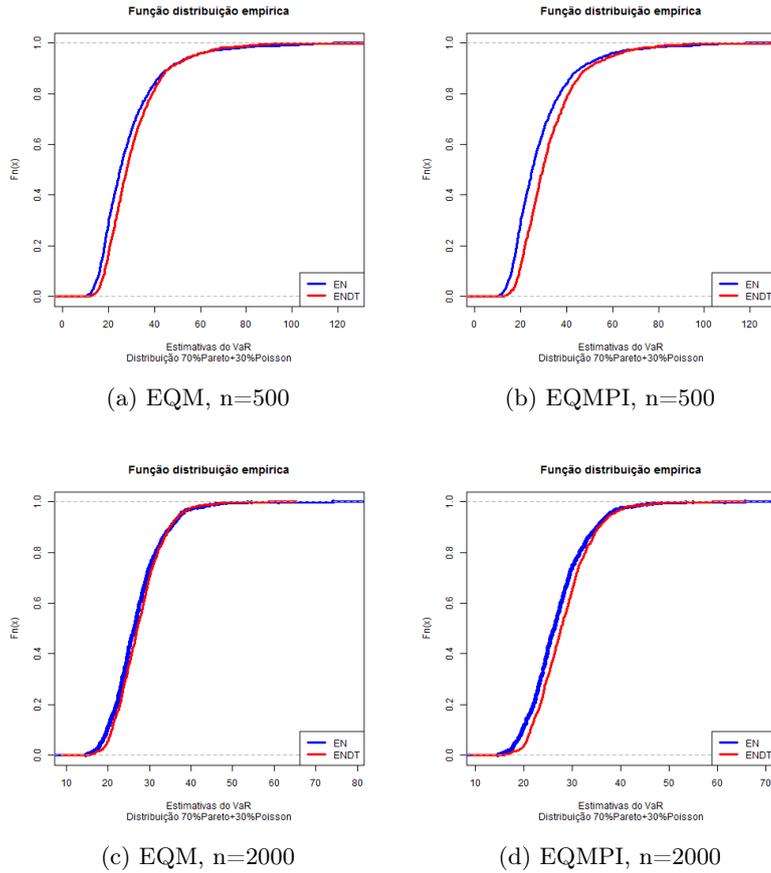


Figura 4.9: Função de distribuição empírica associada às amostras de estimações para o VaR_α , referentes à mistura de distribuições $70\%Pareto(1.5, 1) + 30\%Poisson(2)$.

Pela análise da Figura 4.9, verifica-se que a eficácia do estimador \widehat{VaR}_α não difere muito em ambos os métodos EN e ENDT, principalmente quando se analisa amostras de tamanho elevado.

Em suma poderemos afirmar que o tamanho da amostra influencia consideravelmente a eficácia da estimação do Valor em Risco de nível α , e além disso, considerar que o método do núcleo com dupla transformação dos dados (ENDT) pode conduzir a uma melhor eficácia do estimador \widehat{VaR}_α , quando se está perante amostras de dados representadas por distribuições de caudas pesadas.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação foi estudada a estimação não-paramétrica do Valor em Risco de nível α . O conceito do Valor em Risco de nível α foi numa primeira parte abordado. Sendo o VaR_α uma medida de risco bastante útil que permite medir e controlar o risco de perdas inerentes a um dado ativo, surgiu como motivação desta dissertação a possibilidade em estimar, ou seja, quantificar esta importante medida de risco.

A estimação desta importante medida de risco consiste numa estimação da função de distribuição da variável de risco. A função de distribuição empírica e o estimador do núcleo foram os dois métodos de estimação não-paramétrica abordados no contexto da função de distribuição. De uma forma mais minuciosa aprofundou-se o estimador do núcleo para a função de distribuição, evidenciando-se as suas propriedades teóricas. Mais ainda, duas adaptações do método do núcleo foram estudadas, o estimador do núcleo com transformação dos dados e o estimador do núcleo com dupla transformação dos dados para a função de distribuição associada à variável de risco. Ao longo deste trabalho evidenciou-se as propriedades teóricas inerentes a estas duas adaptações, bem como o motivo do seu uso. No desenrolar deste estudo recorreu-se a fundamentos matemáticos para fundamentar as decisões e conclusões que foram sendo tomadas em cada um dos métodos abordados.

Por último, procedeu-se a um estudo de simulação para avaliar a eficácia da estimação do Valor em Risco de nível α , consoante o uso do método do núcleo e suas adaptações. Conforme a distribuição inerente aos dados que se considera, as conclusões retiradas por parte deste estudo de simulação foram bastante diversas. Contudo, conclui-se que o método do núcleo e o método do núcleo com dupla transformação dos dados são preferíveis ao método do núcleo com transformação dos dados, para estimar o Valor em Risco de nível α , qualquer que seja a consideração para a distribuição inerente aos dados. Como seria de esperar verifica-se que o tamanho da amostra influencia significativamente a eficácia de estimação do Valor em Risco de nível α . Acima de tudo, a principal conclusão a retirar deste estudo de simulação é a de que o método do núcleo com dupla transformação dos dados permite aumentar consideravelmente a eficácia do

estimador para o Valor em Risco de nível α , quando estamos perante distribuições com caudas pesadas. Esta última conclusão numérica vai de encontro aos resultados teóricos discutidos na parte teórica desta dissertação.

No entanto, a realização deste estudo permitiu corroborar a existência de algumas dificuldades na estimação do Valor em Risco de nível α , nomeadamente as existentes na aplicação do método do núcleo com apenas uma transformação dos dados. Neste caso, verificamos que com este método o Valor em Risco de nível α é sobrevalorizado, o que pode ser consequência da utilização da distribuição *Champernowne*. Posto isto, pode-se apontar uma sugestão para futuros estudos e aprofundamentos relacionados com o tema central desta tese. Esta sugestão é a de estudar o método do núcleo com apenas uma transformação dos dados usando a função de distribuição da *Beta(3, 3)* definida no domínio $[-1, 1]$, visto que esta distribuição é bastante adaptável para se conseguir aproximar de uma dada família de distribuições.

Apêndice A

Apêndice A

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$Weibull(0.5, 1)$			
Método		$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
Valor médio	EN_{EQM}	21.430	28.378	21.232	28.325
	EN_{EQMPI}	21.448	28.365	21.227	28.333
	ENT_{EQM}	243.732	--	47.302	146.719
	ENT_{EQMPI}	157.908	289.663	38.645	89.696
	$ENDT_{EQM}$	25.750	36.776	22.921	31.368
	$ENDT_{EQMPI}$	28.447	41.986	23.865	33.138
VaR_α teórico		21.208	28.072	21.208	28.072
Desvio-padrão	EN_{EQM}	4.155	6.939	2.069	3.679
	EN_{EQMPI}	4.184	6.950	2.073	3.691
	ENT_{EQM}	76.835	--	5.593	41.082
	ENT_{EQMPI}	71.165	72.09	4.077	17.820
	$ENDT_{EQM}$	4.186	7.114	1.960	3.282
	$ENDT_{EQMPI}$	4.595	8.060	2.002	3.370

Tabela A.1: Valor médio e desvio-padrão das amostras de estimações para o VaR_α , associadas à distribuição $Weibull(0.5, 1)$.

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$LogNormal(0, 1.25)$			
	Método	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
Valor médio	EN_{EQM}	18.753	25.548	18.377	25.272
	EN_{EQMPI}	18.767	25.537	18.373	25.284
	ENT_{EQM}	--	--	--	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	247.826	--
	$ENDT_{EQM}$	20.611	30.143	19.127	26.832
	$ENDT_{EQMPI}$	21.872	33.117	19.560	27.795
VaR_α teórico		18.319	25.023	18.319	25.023
Desvio-padrão	EN_{EQM}	3.805	7.243	1.867	3.510
	EN_{EQMPI}	3.828	7.250	1.871	3.524
	ENT_{EQM}	--	--	--	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	146.596	--
	$ENDT_{EQM}$	3.598	6.832	1.771	3.193
	$ENDT_{EQMPI}$	3.802	7.550	1.783	3.260

Tabela A.2: Valor médio e desvio-padrão das amostras de estimações para o VaR_α , associadas à distribuição $LogNormal(0, 1.25)$.

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$Burr(0.9, 1.5)$			
	Método	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
Valor médio	EN_{EQM}	33.745	58.898	31.841	53.315
	EN_{EQMPI}	33.681	58.794	32.145	53.750
	ENT_{EQM}	--	--	--	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	--	--
	$ENDT_{EQM}$	35.264	67.096	31.787	55.397
	$ENDT_{EQMPI}$	37.316	75.067	32.457	57.504
VaR_α teórico		30.181	50.543	30.181	50.543
Desvio-padrão	EN_{EQM}	13.351	36.925	12.053	15.875
	EN_{EQMPI}	13.147	36.897	19.308	21.995
	ENT_{EQM}	--	--	--	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	--	--
	$ENDT_{EQM}$	11.278	32.590	4.841	11.842
	$ENDT_{EQMPI}$	11.915	37.453	4.877	12.176

Tabela A.3: Valor médio e desvio-padrão das amostras de estimações para o VaR_α , associadas à distribuição $Burr(0.9, 1.5)$.

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$Pareto(1.5, 1)$			
	Método	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
Valor médio	EN_{EQM}	22.441	36.575	20.907	34.049
	EN_{EQMPI}	22.572	36.696	20.842	34.042
	ENT_{EQM}	--	--	213.247	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	150.188	--
	$ENDT_{EQM}$	23.750	42.128	21.545	35.867
	$ENDT_{EQMPI}$	25.219	46.459	22.060	37.210
VaR_α teórico		20.544	33.200	20.544	33.200
Desvio-padrão	EN_{EQM}	9.897	17.928	3.926	7.839
	EN_{EQMPI}	13.560	20.288	3.729	7.809
	ENT_{EQM}	--	--	128.684	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	107.680	--
	$ENDT_{EQM}$	6.836	16.744	3.112	7.058
	$ENDT_{EQMPI}$	7.142	18.582	3.132	7.183

Tabela A.4: Valor médio e desvio-padrão das amostras de estimações para o VaR_α , associadas à distribuição $Pareto(1.5, 1)$.

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$Pareto(7, 2)$			
	Método	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
Valor médio	EN_{EQM}	1.901	2.298	1.918	2.322
	EN_{EQMPI}	1.900	2.296	1.918	2.322
	ENT_{EQM}	17.749	21.193	3.043	13.965
	ENT_{EQMPI}	10.243	41.815	2.673	5.737
	$ENDT_{EQM}$	2.058	2.575	1.969	2.430
	$ENDT_{EQMPI}$	2.152	2.741	2.000	2.488
VaR_α teórico		1.861	2.263	1.861	2.263
Desvio-padrão	EN_{EQM}	0.221	0.358	0.102	0.183
	EN_{EQMPI}	0.222	0.358	0.102	0.183
	ENT_{EQM}	36.438	8.127	0.289	28.867
	ENT_{EQMPI}	15.582	52.317	0.211	1.810
	$ENDT_{EQM}$	0.217	0.350	0.100	0.167
	$ENDT_{EQMPI}$	0.229	0.370	0.105	0.169

Tabela A.5: Valor médio e desvio-padrão das amostras de estimações para o VaR_α , associadas à distribuição $Pareto(7, 2)$.

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$70\%LogNormal(0, 1.25) + 30\%Pareto(1.5, 1)$			
	Método	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
Valor médio	EN_{EQM}	19.538	28.194	19.050	27.274
	EN_{EQMPI}	19.529	28.161	19.034	27.276
	ENT_{EQM}	--	--	215.267	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	157.267	--
	$ENDT_{EQM}$	21.296	32.861	19.770	28.981
	$ENDT_{EQMPI}$	22.606	36.057	20.226	30.052
VaR_α teórico		18.987	27.476	18.987	27.476
Desvio-padrão	EN_{EQM}	5.260	10.120	2.197	4.388
	EN_{EQMPI}	5.167	10.075	2.187	4.400
	ENT_{EQM}	--	--	130.243	--
	ENT_{EQMPI}	--	--	112.180	--
	$ENDT_{EQM}$	4.472	9.719	2.046	4.056
	$ENDT_{EQMPI}$	4.699	10.622	2.058	4.149

Tabela A.6: Valor médio e desvio-padrão das amostras de estimações para o VaR_α , associadas à mistura de distribuições $70\%LogNormal(0, 1.25) + 30\%Pareto(1.5, 1)$.

		$n = 500$		$n = 2000$	
		$70\%Pareto(1.5, 1) + 30\%Poisson(2)$			
	Método	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$
Valor médio	EN_{EQM}	17.476	29.004	16.596	27.002
	EN_{EQMPI}	17.404	28.915	16.540	26.989
	ENT_{EQM}	67.769	177.498	21.706	111.237
	ENT_{EQMPI}	43.593	161.140	19.865	70.348
	$ENDT_{EQM}$	17.627	30.948	16.717	27.634
	$ENDT_{EQMPI}$	18.288	32.662	16.953	28.261
VaR_α teórico		16.181	25.040	16.181	25.040
Desvio-padrão	EN_{EQM}	7.542	15.007	3.451	6.239
	EN_{EQMPI}	7.108	14.830	3.228	6.177
	ENT_{EQM}	68.251	103.383	3.887	89.886
	ENT_{EQMPI}	47.365	117.842	3.283	53.390
	$ENDT_{EQM}$	5.073	13.306	2.533	5.627
	$ENDT_{EQMPI}$	5.125	13.817	2.523	5.688

Tabela A.7: Valor médio e desvio-padrão das amostras de estimações para o VaR_α , associadas à mistura de distribuições $70\%Pareto(1.5, 1) + 30\%Poisson(2)$.

Apêndice B

Apêndice B

Algoritmo B.1: Código utilizado em linguagem R

```
rm(list=ls())
library(actuar) # para utilizar distribuição Burr e Pareto
##### dados_Champ #####
library(stats4) #para o mle

#Transformar dados pela Cdf da Champernowne
#função densidade da Champernowne
Champ_dens<-function(x, delta ,M, ct){
  delta*(x+ct)^(delta -1)*((M+ct)^delta -ct^delta)
  / ((x+ct)^delta +(M+ct)^delta -2*ct^delta)^2
}
#função -logverosimilhança para estimar 3 parâmetros
mChamp_LL<-function(delta ,M, ct){
  V = Champ_dens(am, delta ,M, ct)
  res<-(-sum(log(V)))
  return(res)
}

#função distribuição acumulada da Champernowne
Champ_cdf<-function(x, delta ,M, ct){
  ((x+ct)^delta -ct^delta) / ((x+ct)^delta
  +(M+ct)^delta -2*ct^delta)
}
Ch_cdf<-function(x){
  Champ_cdf(x, parametros [1] , parametros [2] , parametros [3])
}
##### dados_Champ #####
```

```

##### ENDT #####
#função distribuição acumulada da Beta(3,3)
Beta3_cdf<-function(x){
  ((3/16)*x^5-(5/8)*x^3+(15/16)*x+(1/2))*((x>=-1)&(x<=1))+(x>1)
}
#Cálculo da inversa da função distribuição
# acumulada da Beta(3,3) ponto a ponto
inversa<-function(pt, f, lower=-1, upper=1) {
  f2<-function(x) f(x)-pt
  uniroot(f2, lower=lower, upper=upper)$root
}

#Cálculo da janela minimizando EQM, para percentil 99%
b_Clas<-function(percentil){
  qq<-(qbeta(percentil, 3, 3))*2-1
  res<-(3/(7*qq^2))^(1/3)*length(am)^(-1/3)
  return(res)
}

#Função distribuição acumulada do núcleo Epanechnikov
K<-function(x){
  ((3*x-x^3+2)/4)*((x>=-1)&(x<=1))+(x>1)
}
Kb<-function(y, obs, b){
  K((y-obs)/b)
}

#Estimador do núcleo da cdf da Beta(3,3)
Beta_KE<-function(y, Y_data, b){
  soma<-0
  for (i in 1:length(Y_data)){
    soma<-soma+Kb(y, Y_data[i], b)
  }
  soma/length(Y_data)
}

```

```

#Estimação do núcleo da cdf de X, método ENDT
#usar as funções anteriores: inversa e Ch_cdf
DTKE<-function(x,b){
  pt<-function(x){Ch_cdf(x)}
  f_x<-inversa(Ch_cdf(x),Beta3_cdf,-1,1)
  Beta_KE(f_x,Y_data,b)
}
#Cálculo do estimador do núcleo da cdf de X, pelo método ENDT
F_DTKE<-function(x,b){
  res<-array()
  for(i in 1:length(x)){
    res[i]<-DTKE(x[i],b)
  }
  return(res)
}
##### ENDT #####

##### ENT #####
bTKE_Clas<-function(percentil){
  qq<-qnorm(percentil,0,sd(Z_data))
  aa<-((45*sqrt(2*pi))/(7*qq^2))*(sd(Z_data)^5)
  *exp((qq^2)/(2*sd(Z_data)^2))
  res<-(aa)^(1/3)*length(am)^(-1/3)
  return(res)
}
f1<-function(x){
  ((x^2)*exp(-(x^2)/(2*sd(Z_data)^2)))/(sqrt(2*pi)*sd(Z_data))
}
f2<-function(x){
  ((x^4)*exp(-(x^2)/(sd(Z_data)^2)))/(2*pi*sd(Z_data)^6)
}
#Estimador do núcleo da cdf da variável transformada Z
F_trans<-function(z,Z_data,b){
  soma<-0
  for(i in 1:length(Z_data)){

```

```

    soma<-soma+Kb(z,Z_data[i],b)
  }
  soma/length(Z_data)
}
#Estimaco do núcleo da cdf de X, método ENT
TKE<-function(x,b){
  F_trans(Ch_cdf(x),Z_data,b)
}
#Clculo do estimador do núcleo da cdf de X, pelo método ENT
F_TKE<-function(x,b){
  res<-array()
  for(i in 1:length(x)){
    res[i]<-TKE(x[i],b)
  }
  return(res)
}
##### ENT #####

##### EN #####
#Clculo da janela minimizando EQM, para percentil 99%
bCKE_Clas<-function(percentil){
  qq<-(qnorm(percentil,0,sd(am)))
  aa<-((45*sqrt(2*pi))/(7*qq^2))*(sd(am)^5)*
    exp((qq^2)/(2*sd(am)^2))
  res<-((aa)^(1/3)*length(am)^(-1/3))
  return(res)
}
f4<-function(x){
  ((x^2)*exp(-(x^2)/(2*sd(am)^2)))/(sqrt(2*pi)*sd(am))
}
f5<-function(x){
  ((x^4)*exp(-(x^2)/(sd(am)^2)))/(2*pi*sd(am)^6)
}
#Estimador do núcleo da cdf da variável X
CKE<-function(x,b) {

```

```

v<-Kb(x, am, b)
sum(v)/length(am)
}
#Cálculo do estimador do núcleo da cdf de X, EN
F_CKE<-function(x, b){
  res<-array()
  for(i in 1:length(x)){
    res[i]<-CKE(x[i], b)
  }
  return(res)
}
#### EN #####

#### VaR_alfa #####
#estimação cdf obtido por método ENDT
VaR_alfa<-function(alfa, x, b, metodo, f){
#Encontrar valor de x para qual a cdf de ENDT é maior que alfa
  for(k in 1:length(x)){
    if(metodo(x[k], b)<=alfa){
      res=x[k+1]
      posicao=k+1
    }
  }
  af<-approxfun(x, f)
  f3<-function(y){
    af(y)-alfa
  }
  uniroot(f3, c(x[posicao-1], x[posicao+1]))$root
}

#produzir mistura de distribuição LogNormal e Pareto
Gera<-function(n, p, meanlog, sdlog, shape, scale){
  am<-array
  am1<-rlnorm(n, meanlog, sdlog)
  am2<-rpareto(n, shape, scale)

```

```

  u<-runif(n)
  am<-am1*(u<=p)+am2*(u>p)
  return(am)
}

#produzir mistura de distribuição Pareto e Poisson
Gera1<-function(n,p,shape,scale,lambda){
  am<-array
  am1<-rpareto(n,shape,scale)
  am2<-rpois(n,lambda)
  u<-runif(n)
  am<-am1*(u<=p)+am2*(u>p)
  return(am)
}

V_DTKE_Clas<-array()
V_DTKE_WISE<-array()
V_TKE_Clas<-array()
V_TKE_WISE<-array()
V_CKE_Clas<-array()
V_CKE_WISE<-array()
V1_DTKE_Clas<-array()
V1_DTKE_WISE<-array()
V1_TKE_Clas<-array()
V1_TKE_WISE<-array()
V1_CKE_Clas<-array()
V1_CKE_WISE<-array()

am<-array()
shape<-0.5 # usar para a distribuição Weibull
scale<-1 # usar para a distribuição Weibull
#####
meanlog<-0
sdlog<-1.25
#####

```

```

shape1<-0.9
shape2<-1.5
#####
shape<-1.5 # usar para a distribuição Pareto
scale<-1 # usar para a distribuição Pareto
#####
shape<-7 # usar para a distribuição Pareto
scale<-2 # usar para a distribuição Pareto
#####
lambda<-2

p<-0.7
n<-500 # usar para tamanho da amostra n=500
n<-2000 # usar para tamanho da amostra n=2000
m<-1000 # n° de amostras a simular
alfa<-0.99
alfa1<-0.995
xxx<-seq(0,400,0.5)
for(i in 1:m){
  am<-rweibull(n,shape,scale) #usar para distribuição Weibull
  am<-rlnorm(n,meanlog,sdlog) #usar para distribuição LogNormal
  am<-rburr(n,shape1,shape2) #usar para distribuição Burr
  am<-rpareto(n,shape,scale) #usar para distribuição Pareto
  #usar para mistura #70%LogNormal+30%Pareto
  am<-Gera(n,p,meanlog,sdlog,shape,scale)
  #usar para mistura #70%Pareto+30%Poisson
  am<-Gera1(n,p,shape,scale,lambda)
  ### dados_Champ #####
  #Estimação dos parâmetros (delta,M,c)
  est_par<-mle(mChamp_LL,start=list(delta=0.7,
M=median(am),ct=0.01),fixed=list(ct=0.01),method="L-BFGS-B",
lower=c(0.1,0.1,0.005))
  delta<-coef(summary(est_par))["delta","Estimate"]
  M<-coef(summary(est_par))["M","Estimate"]
  est_par2<-mle(mChamp_LL,start=list(delta=0.7,

```

```

M=median(am), ct=0.01), fixed=list(delta=delta, M=M),
method="L-BFGS-B", lower=c(0.005, 0.005, 0.005))
suppressWarnings(summary(est_par2))
if (suppressWarnings(is.finite
(coef(summary(est_par2))["ct", "Std. Error"]))) {
  suppressWarnings(ct<-coef(summary(est_par2))
["ct", "Estimate"])
} else {
  ct<-0
}
parametros<-c(delta, M, ct)
#Transformar dados pela cdf da Champernowne
Z_data<-Ch_cdf(am)
#ordenar os dados Zi
Z_data<-sort(Z_data)
##### dados_Champ #####

##### ENDT #####

Y_data<-array()
for(j in 1:length(am)){
  Y_data[j]<-inversa(Z_data[j], Beta3_cdf, -1, 1)
}
#Cálculo da janela minimizando EQMPI
b_WISE<-(9/7)^(1/3)*
length(am)^(-1/3)

FC<-F_DTKE(xxx, b_Clas(0.99))
FW<-F_DTKE(xxx, b_WISE)
##### ENDT #####

##### ENT #####
i1<-integrate(f1, -Inf, Inf)
i1$value
i2<-integrate(f2, -Inf, Inf)
i2$value

```

```

#Cálculo da janela minimizando EQMPI
bTKE_WISE<-((i1$value/i2$value)*(45/7))^(1/3)*
  length(am)^(-1/3)

FTC<-F_TKE(xxx,bTKE_Clas(0.99))
FTW<-F_TKE(xxx,bTKE_WISE)
##### ENT #####

##### EN #####

i1<-integrate(f4,-Inf,Inf)
i1$value
i2<-integrate(f5,-Inf,Inf)
i2$value
#Cálculo da janela minimizando EQMPI
bCKE_WISE<-((i1$value/i2$value)*(45/7))^(1/3)*
  length(am)^(-1/3)

FCKE_C<-F_CKE(xxx,bCKE_Clas(0.99))
FCKE_W<-F_CKE(xxx,bCKE_WISE)
##### EN #####

##### VaR_alfa #####
V_DTKE_Clas[i]<-VaR_alfa(alfa,xxx,b_Clas(0.99),DTKE,FC)
V_DTKE_WISE[i]<-VaR_alfa(alfa,xxx,b_WISE,DTKE,FW)

V_CKE_Clas[i]<-VaR_alfa(alfa,xxx,bCKE_Clas(0.99),CKE,FCKE_C)
V_CKE_WISE[i]<-VaR_alfa(alfa,xxx,bCKE_WISE,CKE,FCKE_W)

if(max(FTC)>= alfa) {
  V_TKE_Clas[i]<-VaR_alfa(alfa,xxx,bTKE_Clas(0.99),TKE,FTC)
}
if(max(FTW)>= alfa) {
  V_TKE_WISE[i]<-VaR_alfa(alfa,xxx,bTKE_WISE,TKE,FTW)
}

```

```

#alfa1
V1_DTKE_Clas[i]<-VaR_alfa(alfa1,xxx,b_Clas(0.99),DTKE,FC)
V1_DTKE_WISE[i]<-VaR_alfa(alfa1,xxx,b_WISE,DTKE,FW)

V1_CKE_Clas[i]<-VaR_alfa(alfa1,xxx,bCKE_Clas(0.99),CKE,
                        FCKE_C)
V1_CKE_WISE[i]<-VaR_alfa(alfa1,xxx,bCKE_WISE,CKE,FCKE_W)

if( max(FTC)>= alfa1) {
  V1_TKE_Clas[i]<-VaR_alfa(alfa1,xxx,bTKE_Clas(0.99),TKE,FTC)
}

if( max(FIW)>= alfa1) {
  V1_TKE_WISE[i]<-VaR_alfa(alfa1,xxx,bTKE_WISE,TKE,FIW)
}
}

if (length(V_DTKE_Clas)!=m){
  V_DTKE_Clas<-c(V_DTKE_Clas,rep(NA,m-length(V_DTKE_Clas)))
}
if (length(V_DTKE_WISE)!=m){
  V_DTKE_WISE<-c(V_DTKE_WISE,rep(NA,m-length(V_DTKE_WISE)))
}

if (length(V_CKE_Clas)!=m){
  V_CKE_Clas<-c(V_CKE_Clas,rep(NA,m-length(V_CKE_Clas)))
}
if (length(V_CKE_WISE)!=m){
  V_CKE_WISE<-c(V_CKE_WISE,rep(NA,m-length(V_CKE_WISE)))
}

if (length(V_TKE_Clas)!=m){
  V_TKE_Clas<-c(V_TKE_Clas,rep(NA,m-length(V_TKE_Clas)))
}
if (length(V_TKE_WISE)!=m){

```

```

V_TKE_WISE<-c(V_TKE_WISE, rep(NA,m-length(V_TKE_WISE)))
}

if (length(V1_DTKE_Clas)!=m){
  V1_DTKE_Clas<-c(V1_DTKE_Clas, rep(NA,m-length(V1_DTKE_Clas)))
}

if (length(V1_DTKE_WISE)!=m){
  V1_DTKE_WISE<-c(V1_DTKE_WISE, rep(NA,m-length(V1_DTKE_WISE)))
}

if (length(V1_CKE_Clas)!=m){
  V1_CKE_Clas<-c(V1_CKE_Clas, rep(NA,m-length(V1_CKE_Clas)))
}

if (length(V1_CKE_WISE)!=m){
  V1_CKE_WISE<-c(V1_CKE_WISE, rep(NA,m-length(V1_CKE_WISE)))
}

if (length(V1_TKE_Clas)!=m){
  V1_TKE_Clas<-c(V1_TKE_Clas, rep(NA,m-length(V1_TKE_Clas)))
}

if (length(V1_TKE_WISE)!=m){
  V1_TKE_WISE<-c(V1_TKE_WISE, rep(NA,m-length(V1_TKE_WISE)))
}

#vetor de VaR alfa
VaR<-data.frame(DTKE_Clas=V_DTKE_Clas,DTKE_WISE=V_DTKE_WISE,
  CKE_Clas=V_CKE_Clas,CKE_WISE=V_CKE_WISE,TKE_Clas=V_TKE_Clas,
  TKE_WISE=V_TKE_WISE)
write.csv(VaR, file="VaR_alfa_1000.csv",row.names=FALSE)

#vetor de VaR alfa1
VaR_1<-data.frame(DTKE_Clas=V1_DTKE_Clas,
  DTKE_WISE=V1_DTKE_WISE,CKE_Clas=V1_CKE_Clas,
  CKE_WISE=V1_CKE_WISE,TKE_Clas=V1_TKE_Clas,
  TKE_WISE=V1_TKE_WISE)

```

```

write.csv(VaR_1, file="VaR_alfa1_1000.csv", row.names=FALSE)

###Avaliação das amostras de estimações do VaR_alpha###

V<-read.csv("VaR_alfa_1000.csv")
V1<-read.csv("VaR_alfa1_1000.csv")

V_DTKE_Clas<-V$DTKE_Clas
V_DTKE_WISE<-V$DTKE_WISE
V_CKE_Clas<-V$CKE_Clas
V_CKE_WISE<-V$CKE_WISE
V_TKE_Clas<-V$TKE_Clas
V_TKE_WISE<-V$TKE_WISE
V1_DTKE_Clas<-V1$DTKE_Clas
V1_DTKE_WISE<-V1$DTKE_WISE
V1_CKE_Clas<-V1$CKE_Clas
V1_CKE_WISE<-V1$CKE_WISE
V1_TKE_Clas<-V1$TKE_Clas
V1_TKE_WISE<-V1$TKE_WISE

#elimina dados não observados
V_DTKE_Clas<-V_DTKE_Clas[!is.na(V_DTKE_Clas)]
V_DTKE_WISE<-V_DTKE_WISE[!is.na(V_DTKE_WISE)]
V_CKE_Clas<-V_CKE_Clas[!is.na(V_CKE_Clas)]
V_CKE_WISE<-V_CKE_WISE[!is.na(V_CKE_WISE)]
V_TKE_Clas<-V_TKE_Clas[!is.na(V_TKE_Clas)]
V_TKE_WISE<-V_TKE_WISE[!is.na(V_TKE_WISE)]
V1_DTKE_Clas<-V1_DTKE_Clas[!is.na(V1_DTKE_Clas)]
V1_DTKE_WISE<-V1_DTKE_WISE[!is.na(V1_DTKE_WISE)]
V1_CKE_Clas<-V1_CKE_Clas[!is.na(V1_CKE_Clas)]
V1_CKE_WISE<-V1_CKE_WISE[!is.na(V1_CKE_WISE)]
V1_TKE_Clas<-V1_TKE_Clas[!is.na(V1_TKE_Clas)]
V1_TKE_WISE<-V1_TKE_WISE[!is.na(V1_TKE_WISE)]

#Média da amostra dos VaR estimados

```

```

mean_DTKE_Clas<-mean(V_DTKE_Clas ,na.rm=TRUE)
mean_DTKE_WISE<-mean(V_DTKE_WISE,na.rm=TRUE)
mean_CKE_Clas<-mean(V_CKE_Clas ,na.rm=TRUE)
mean_CKE_WISE<-mean(V_CKE_WISE,na.rm=TRUE)
mean_TKE_Clas<-mean(V_TKE_Clas ,na.rm=TRUE)
mean_TKE_WISE<-mean(V_TKE_WISE,na.rm=TRUE)

#valor teórico do VaR
#usar para distribuição Weibull
VaR_teorico<-qweibull(alfa ,shape ,scale)
#usar para distribuição LogNormal
VaR_teorico<-qlnorm(alfa ,meanlog ,sdlog)
#usar para distribuição Burr
VaR_teorico<-qburr(alfa ,shape1 ,shape2)
#usar para distribuição Pareto
VaR_teorico<-qpareto(alfa ,shape ,scale)
#usar para mistura #70%LogNormal+30%Pareto
VaR_teorico<-p*qlnorm(alfa ,meanlog ,sdlog)+
  (1-p)*qpareto(alfa ,shape ,scale)
#usar para mistura #70%Pareto+30%Poisson
VaR_teorico<-p*qpareto(alfa ,shape ,scale)+
  (1-p)*qpois(alfa ,lambda)

mean_VaR<-data.frame(DTKE_Clas=mean_DTKE_Clas ,
DTKE_WISE=mean_DTKE_WISE,TKE_Clas=mean_TKE_Clas ,
TKE_WISE=mean_TKE_WISE,CKE_Clas=mean_CKE_Clas ,
CKE_WISE=mean_CKE_WISE,teorico=VaR_teorico)
write.table(mean_VaR, file="mean_VaR_Distribuição.txt",sep=";",
            row.names=FALSE)

#Desvio-padrão da amostra dos VaR estimados
sd_DTKE_Clas<-sd(V_DTKE_Clas ,na.rm=TRUE)
sd_DTKE_WISE<-sd(V_DTKE_WISE,na.rm=TRUE)
sd_CKE_Clas<-sd(V_CKE_Clas ,na.rm=TRUE)
sd_CKE_WISE<-sd(V_CKE_WISE,na.rm=TRUE)

```

```

sd_TKE_Clas<-sd(V_TKE_Clas ,na.rm=TRUE)
sd_TKE_WISE<-sd(V_TKE_WISE,na.rm=TRUE)

sd_VaR<-data.frame(DTKE_Clas=sd_DTKE_Clas ,
DTKE_WISE=sd_DTKE_WISE,TKE_Clas=sd_TKE_Clas ,
TKE_WISE=sd_TKE_WISE,CKE_Clas=sd_CKE_Clas ,CKE_WISE=sd_CKE_WISE)
write.table(sd_VaR, file="sd_VaR_Distribuição.txt", sep=";",
            row.names=FALSE)

#Função distribuição empírica
png('EQM_Distribuição.png')
plot(ecdf(V_CKE_Clas),
     main="Função_distribuição_empírica",
     xlab="Estimativas_do_VaR", col="blue", xlim=c(0,45), lwd=3)
lines(ecdf(V_DTKE_Clas), col="red", lwd=3)
legend("bottomright", c("EN", "ENDT"), lwd=c(3,3),
      col=c("blue", "red"))
mtext("Distribuição", side=1, line=4)
dev.off()

png('EQMPI_Distribuição.png')
plot(ecdf(V_CKE_WISE), main="Função_distribuição_empírica",
     xlab="Estimativas_do_VaR", col="blue", xlim=c(0,45), lwd=3)
lines(ecdf(V_DTKE_WISE), col="red", lwd=3)
legend("bottomright", c("EN", "ENDT"), lwd=c(3,3),
      col=c("blue", "red"))
mtext("Distribuição", side=1, line=4)
dev.off()

#alfa1
png('EQM_Distribuição_alfa1.png')
plot(ecdf(V1_CKE_Clas),
     main="Função_distribuição_empírica",
     xlab="Estimativas_do_VaR", col="blue", xlim=c(0,45), lwd=3)
lines(ecdf(V1_DTKE_Clas), col="red", lwd=3)

```

```

legend("bottomright",c("EN","ENDT"),lwd=c(3,3),
        col=c("blue","red"))
mtext("Distribuição", side=1,line=4)
dev.off()

png('EQMPI_Distribuição_alfa1.png')
plot(ecdf(V1_CKE_WISE),main="Função_distribuição_empírica",
      xlab="Estimativas_do_VaR",col="blue",xlim=c(0,45),lwd=3)
lines(ecdf(V1_DTKE_WISE),col="red",lwd=3)
legend("bottomright",c("EN","ENDT"),lwd=c(3,3),
        col=c("blue","red"))
mtext("Distribuição", side=1,line=4)
dev.off()

#Erro quadrático médio do VaR estimado
EQM_DTKE_Clas<-sum((V_DTKE_Clas- VaR_teorico)^2)
/length(V_DTKE_Clas)
EQM_DTKE_WISE<-sum((V_DTKE_WISE- VaR_teorico)^2)
/length(V_DTKE_WISE)
EQM_CKE_Clas<-sum((V_CKE_Clas- VaR_teorico)^2)
/length(V_CKE_Clas)
EQM_CKE_WISE<-sum((V_CKE_WISE- VaR_teorico)^2)
/length(V_CKE_WISE)
EQM_TKE_Clas<-sum((V_TKE_Clas- VaR_teorico)^2)
/length(V_TKE_Clas)
EQM_TKE_WISE<-sum((V_TKE_WISE- VaR_teorico)^2)
/length(V_TKE_WISE)

EQM_VaR<-data.frame(DTKE_Clas=EQM_DTKE_Clas,
DTKE_WISE=EQM_DTKE_WISE,TKE_Clas=EQM_TKE_Clas,
TKE_WISE=EQM_TKE_WISE,CKE_Clas=EQM_CKE_Clas,
CKE_WISE=EQM_CKE_WISE)
write.table(EQM_VaR, file="EQM_VaR_Distribuição.txt",sep=";",
            row.names=FALSE)

```

```

#alfa1
#Média da amostra dos VaR estimados
mean1_DTKE_Clas<-mean(V1_DTKE_Clas ,na.rm=TRUE)
mean1_DTKE_WISE<-mean(V1_DTKE_WISE,na.rm=TRUE)
mean1_CKE_Clas<-mean(V1_CKE_Clas ,na.rm=TRUE)
mean1_CKE_WISE<-mean(V1_CKE_WISE,na.rm=TRUE)
mean1_TKE_Clas<-mean(V1_TKE_Clas ,na.rm=TRUE)
mean1_TKE_WISE<-mean(V1_TKE_WISE,na.rm=TRUE)

#valor teórico do VaR
#usar para a distribuição Weibull
VaR1_teorico<-qweibull(alfa1 ,shape , scale)
#usar para a distribuição LogNormal
VaR1_teorico<-qlnorm(alfa1 ,meanlog ,sdlog)
#usar para a distribuição Burr
VaR1_teorico<-qburr(alfa1 ,shape1 ,shape2)
#usar para a distribuição Pareto
VaR1_teorico<-qpareto(alfa1 ,shape , scale)
#usar para mistura #70%LogNormal+30%Pareto
VaR1_teorico<-p*qlnorm(alfa1 ,meanlog ,sdlog)+
  (1-p)*qpareto(alfa1 ,shape , scale)
#usar para mistura #70%Pareto+30%Poisson
VaR1_teorico<-p*qpareto(alfa1 ,shape , scale)+
  (1-p)*qpois(alfa1 ,lambda)

mean_VaR1<-data.frame(DTKE_Clas=mean1_DTKE_Clas ,
DTKE_WISE=mean1_DTKE_WISE,TKE_Clas=mean1_TKE_Clas ,
TKE_WISE=mean1_TKE_WISE,CKE_Clas=mean1_CKE_Clas ,
CKE_WISE=mean1_CKE_WISE,teorico=VaR1_teorico)
write.table(mean_VaR1, file="mean_VaR1_Distribuição.txt" ,
  sep=" ; " ,row.names=FALSE)

#Desvio-padrão da amostra dos VaR estimados
sd1_DTKE_Clas<-sd(V1_DTKE_Clas ,na.rm=TRUE)
sd1_DTKE_WISE<-sd(V1_DTKE_WISE,na.rm=TRUE)

```

```

sd1_CKE_Clas<-sd(V1_CKE_Clas ,na.rm=TRUE)
sd1_CKE_WISE<-sd(V1_CKE_WISE,na.rm=TRUE)
sd1_TKE_Clas<-sd(V1_TKE_Clas ,na.rm=TRUE)
sd1_TKE_WISE<-sd(V1_TKE_WISE,na.rm=TRUE)

sd_VaR1<-data.frame(DTKE_Clas=sd1_DTKE_Clas ,
DTKE_WISE=sd1_DTKE_WISE,TKE_Clas=sd1_TKE_Clas ,
TKE_WISE=sd1_TKE_WISE,CKE_Clas=sd1_CKE_Clas ,
CKE_WISE=sd1_CKE_WISE)
write.table(sd_VaR1, file="sd_VaR1_Distribuição.txt",sep=";",
row.names=FALSE)

#Erro quadrático médio do VaR estimado
EQM1_DTKE_Clas<-sum((V1_DTKE_Clas- VaR1_teorico)^2)/
length(V1_DTKE_Clas)
EQM1_DTKE_WISE<-sum((V1_DTKE_WISE- VaR1_teorico)^2)/
length(V1_DTKE_WISE)
EQM1_CKE_Clas<-sum((V1_CKE_Clas- VaR1_teorico)^2)/
length(V1_CKE_Clas)
EQM1_CKE_WISE<-sum((V1_CKE_WISE- VaR1_teorico)^2)/
length(V1_CKE_WISE)
EQM1_TKE_Clas<-sum((V1_TKE_Clas- VaR1_teorico)^2)/
length(V1_TKE_Clas)
EQM1_TKE_WISE<-sum((V1_TKE_WISE- VaR1_teorico)^2)/
length(V1_TKE_WISE)

EQM_VaR1<-data.frame(DTKE_Clas=EQM1_DTKE_Clas ,
DTKE_WISE=EQM1_DTKE_WISE,TKE_Clas=EQM1_TKE_Clas ,
TKE_WISE=EQM1_TKE_WISE,CKE_Clas=EQM1_CKE_Clas ,
CKE_WISE=EQM1_CKE_WISE)
write.table(EQM_VaR1, file="EQM_VaR1_Distribuição.txt",sep=";",
row.names=FALSE)

```


Bibliografia

- [1] Alemany, R., Bolancé, C. e , Guillén, M. (2012). *Nonparametric estimation of Value-at-Risk*. Xarxa de Referència en Economia Aplicada (XREAP), Document de Treball XREAP2012-19.
- [2] Azzalini, A. (1981). *A note on the estimation of a distribution function and quantiles by a kernel method*. *Biometrika*, 68, pp. 326-328.
- [3] Bolancé, C., Guillén, M., Nielsen, J. (2003). Kernel density estimation of actuarial loss functions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32, pp. 19-36.
- [4] Bolancé, C., Guillén, M., Nielsen, J. (2008). Inverse beta transformation in kernel density estimation. *Statistics & Probability Letters*, 78, pp. 1757-1764.
- [5] Buch-Larsen, T., Guillén, M., Nielsen, J., Bolancé, C. (2005). Kernel density estimation for heavy-tailed distributions using the Champernowne transformation. *Statistics*, 39, pp. 503-518.
- [6] Epanechnikov, V. A. (1969). *Nonparametric estimation of a multivariate probability density*. *Theory of Probability and Its Applications*, 14, pp. 153-158.
- [7] Nadaraya, E. A. (1964). *Some new estimates for distribution functions*. *Theory of Probability and Its Applications*, 9, pp. 497-500.
- [8] Parzen, E. (1962). *On estimation of a probability density function and mode*. *Annals of Mathematical Statistics*, 33, pp. 1065-1076.
- [9] Reiss, R.-D. (1981). *Nonparametric estimation of smooth distribution functions*. *Scandinavian Journal of Statistics*, 8, pp. 116-119.
- [10] Rosenblatt, M. (1956). *Remarks on some non-parametric estimates of a density function*. *Annals of Mathematical Statistics*, 27, pp. 832-837.
- [11] Silverman, B. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman & Hall/CRC Finance Series, London.

- [12] Tenreiro, C. (2003). *On the asymptotic behaviour of multistage plug-in bandwidth selectors for kernel distribution function estimators*. Journal of Nonparametric Statistics, 18, pp. 101-116.
- [13] Tenreiro, C. (2006). *Asymptotic behaviour of the ISE for automatic kernel distribution estimators*. Journal of Nonparametric Statistics, 15, pp. 485-504.
- [14] Tenreiro, C. (2010). *Uma introdução à estimação não-paramétrica da densidade*. XVIII Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística (São Pedro do Sul, 2010).
- [15] Tenreiro, C. (2013). *Boundary kernels for distribution function estimation*. REVS-TAT Statistical Journal, 11(2), pp. 169-190.
- [16] Terrel, G. (1990). *The maximal smoothing principle in density estimation*. Journal of the American Statistical Association, 85, pp. 270-277.
- [17] Tiago de Oliveira, J. (1963). *Estatística de densidades: resultados assintóticos*. Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa, 9, pp. 111-206.
- [18] Wand, M. P., Marron, J., Ruppert, D. (1991). *Transformations in density estimation*. Journal of the American Statistical Association, 86, pp. 343-361.
- [19] Wand, M. P., Jones, M. C. (1995). *Kernel Smoothing*. Monographs on Statistics and Applied Probability, 60. Chapman & Hall.
- [20] Watson, G. S., Leadbetter, M. R. (1964). *Hazard analysis II*. Sankhyā Ser. A, 26, pp. 101-116.
- [21] Yamato, H. (1973). *Uniform convergence of an estimator of a distribution function*. Bulletin of Mathematical Statistics, 15, pp. 69-78.