Estacionaridade Forte em Modelos ARMAX

Hélio Joaquim Baptista Alho

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Estacionaridade Forte em Modelos ARMAX

Hélio Joaquim Baptista Alho

Dissertação para a obtenção do Grau de **Mestre em Matemática**

Área de Especialização em **Estatística, Optimização e Matemática Financeira**

Orientada por **Professora Doutora Maria da Graça Temido Mendes**

Professora Doutora Cristina Maria Martins

Júri

Presidente:	Professora Doutora Maria de Nazaré Mendes Lopes
Vogais:	Professora Doutora Ana Cristina Martins Rosa
	Professora Doutora Maria da Graça Temido Mendes

Data: Junho de 2015

Resumo

Neste tabalho estudamos um modelo auto-regressivo de máximos (ARMAX). Depois de estudadas as propriedades distribucionais básicas é estabelecida uma condição necessária e suficiente para a estacionaridade forte do modelo. Sob tal condição é caratecterizada a classe das distribuições estacionárias do modelo.

Palavras Chave: Modelo ARMAX, Estacionaridade Forte

Abstract

In this work a max autoregressive model (ARMAX) is studied. After the study of the basic distributional properties we establish a necessary and sufficient condition for the strong stationarity of the model. Under this condition, the class of its stationary distributions is characterized.

Keywords: ARMAX model, Strong stationarity

Agradecimentos

Agradeço em especial às minhas orientadoras de Dissertação a Professora Doutora Maria da Graça Temido e a Professora Doutora Cristina Martins por toda a sua disponibilidade, atenção e apoio dados na elaboração deste trabalho e sem o qual o mesmo não seria possível.

Agradeço de igual modo ao Professor Doutor José Augusto Ferreira e à Professora Doutora Helena Albuquerque por todo o seu apoio nos momentos mais difíceis da elaboração deste mesmo trabalho.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra agradeço todo o apoio prestado ao longo da minha formação académica.

Agradeço também à minha família e ao amigo Francisco Antunes por todo o apoio na elaboração deste trabalho.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

No presente trabalho estudamos um modelo para séries temporais com espaço de tempos $\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$ construído a partir de uma variável aleatória real (v.a.r.) X_0 com função de distribuição (f.d.) $H_0(x)$ e de duas sucessões de v.a.r.'s independentes $\{Y_n, n \geq 0\}$ e $\{Z_n, n \geq 0\}$, representadas daqui em diante por $\{Y_n\}$ e $\{Z_n\}$, respetivamente. Admitimos que estas duas sucessões são também independentes entre si e de X_0 e identicamente distribuídas com Y e Z, respetivamente. Denotamos a f.d. da v.a.r. Y por $G(x)$ e a f.d. da v.a.r. Z por $F(x)$. Assumimos que as v.a.r.'s presentes neste estudo se identificam como v.a.r. positivas. Mais, para uma dada f.d. F usamos as notações

$$\omega(F) = \sup\Big\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\Big\} \quad \text{e} \quad \alpha(F) = \inf\Big\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\Big\}.$$

Neste estudo iremos trabalhar com exemplos de processos estocásticos (p.e.) que são em geral, famílias de v.a.r.'s definidas sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ com valores num espaço mensurável (E, ε). Como $\{Y_n\}$ e $\{Z_n\}$ são sucessões de v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) então os p.e. por elas constituídos, $\widetilde{Y}= (Y_n, n \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}})$ e $\widetilde{Z}= (Z_n, n \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}})$ são fortemente estacionários ou estritamente estacionários. Recordamos que um p.e. $\Big(X_n, n \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}\Big)$ é fortemente estacionário se

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}, \quad \forall h \in \mathbb{N},$$

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \quad e \quad (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_k+h}) \tag{1.1}$$

têm a mesma lei de probabilidade, ou seja há invariância das leis de dimensão finita do processo por translação no tempo. Em particular a lei de X_t coincide com a lei de X_{t+r}, r arbitrariamente fixo em $\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$.

Mais ainda, admitindo que estaremos na presença de processos de $2^{\underline{a}}$ ordem, ou seja, tais que exista e seja finita, $E\Big(X_t^2\Big)$, $\forall t \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}$, então estaremos também na presença de p.e. fracamente estacionários ou estacionários ou seja processos estocásticos necessariamente de segunda ordem tais que

$$E\Big(X_t\Big) = m, \quad \forall t \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}; \tag{1.2}$$

$$Cov\Big(X_t, X_{t+h}\Big) = \gamma(h), \quad \forall t \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}; \tag{1.3}$$

onde a função $\gamma(h) = \Gamma(0,h), h \in \mathbb{Z}$ é chamada função de autocovariância do processo. Notemos que na definição de p.e. fortemente estacionário não se exige que o processo seja de segunda ordem.

Diremos que uma sucessão $(X_n, n \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}})$ se identifica como uma sucessão markoviana se, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t_1, \ldots, t_{n+1} \quad \text{com} \quad t_1 < \ldots < t_{n+1}$

$$P_{X_{t_{n+1}}|X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(\cdot|x_1,\ldots,x_n) = P_{X_{t_{n+1}}|X_{t_n}}(\cdot|x_n)$$

ou seja se

$$P\Big(X_{n+1} = s | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\Big) = P\Big(X_{n+1} = s | X_n = x_n\Big)$$

para todos os estados $x_1, \ldots, x_n$ tais que estas leis de probabilidade estejam definidas. Ou seja por palavras, se conhecido todo o passado do processo, a probabilidade da variável assumir um dado valor s no instante $n+1$ for igual à probabilidade dessa mesma variável assumir esse mesmo valor s conhecido apenas o instante imediatamente precedente. Em suma, trata-se de um processo em que a probabilidade de assumir um qualquer comportamento futuro, quando o seu estado presente é conhecido, não é alterada pelo conhecimento adicional respeitante ao seu passado.

Definimos então a sucessão $\{X_n\}$ como dada no seu instante inicial por X_0 e para instantes além da origem como o produto da v.a.r. Z nesse mesmo instante pelo máximo entre a v.a.r X no instante imediatamente anterior e a v.a.r. Y nesse mesmo instante, ou seja,

$$X_i = \begin{cases} Z_i \max\Big\{X_{i-1}, Y_i\Big\}, & \text{se } i \geq 1; \\ X_0, & \text{se } i = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Em particular, estudaremos o caso em que Z é degenerada[1] numa constante k com $0 < k < 1$. Nesse caso temos,

$$X_i = k \max\Big\{X_{i-1}, Y_i\Big\}, i \geq 1. \tag{1.5}$$

[1]Dizer que Z é degenerada numa constante k significa que a v.a.r. Z toma unicamente o valor k com probabilidade 1, isto é, a sua f.d. é da forma

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < k; \\ 1, & \text{se } x \geq k. \end{cases}$$

No capítulo 2, começamos por apresentar algumas fórmulas distribucionais e propriedades básicas dos modelos (1.4) e (1.5). Na secção 2.2 definimos as condições de existência de estacionaridade da distribuição no caso em que a v.a.r. Z é degenerada. Mostraremos ainda que é possível a construção de uma sucessão estacionária do tipo (1.5) com margens com f.d. igual a $H(x)$ se e só se $\ln H(e^x)$ é côncava. Isto é, é caracterizada a classe das distribuições estacionárias da sucessão (1.5).
Na secção 2.3 retomamos o processo ARMAX com Z não degenerada. Começamos por estabelecer uma condição necessária e suficiente de estacionaridade forte do processo, ao que se segue a caracterização da classe de distribuições estacionárias de (1.4). Tanto a seccção 2.2 como a seccção 2.3 finalizam com exemplos onde são evidenciadas tais distribuições estacionárias $H(x)$. A grande variedade de formas possíveis para $H(x)$, incluindo algumas das f.d.'s mais usuais em Estatística, como a exponencial, a normal, a gama, a beta e a Pareto, ilustra bem a aplicabilidade deste tipo de modelos.

Capítulo 2

Estacionaridade forte do modelo

2.1. Propriedades distribucionais

Seja $\bar{X}=\Big(X_n, n\in\mathbb{N}_{\mathbf{0}}\Big)$ o p.e. definido em (1.4). Comecemos por determinar as correspondentes fórmulas distribucionais básicas.

Consideremos em primeiro lugar o caso em que a v.a.r. Z é degenerada numa constante k, $0<k<1$.

De (1.5) temos que $X_i = k\max\Big\{X_{i-1}, Y_i\Big\}$ donde surgem, em particular, os casos que se seguem. De facto, tem-se

$$X_1 = k\max\Big\{X_0, Y_1\Big\} = \max\Big\{kX_0, kY_1\Big\}$$

e

$$\begin{aligned} X_2 &= k\max\Big\{X_1, Y_2\Big\} \\ &= \max\Big\{\max\Big\{k^2X_0, k^2Y_1\Big\}, kY_2\Big\} \\ &= \max\Big\{k^2X_0, k^2Y_1, kY_2\Big\}, \end{aligned}$$

bem como

$$\begin{aligned} X_3 &= k\max\Big\{X_2, Y_3\Big\} \\ &= \max\Big\{kX_2, kY_3\Big\} \\ &= \max\Big\{k^3X_0, k^3Y_1, k^2Y_2, kY_3\Big\} \\ &= \max\Big\{k^3X_0, \max\Big\{k^3Y_1, k^2Y_2, kY_3\Big\}\Big\}. \end{aligned}$$

Podemos então inferir para um i genérico

$$X_i = \max\Big\{k^iX_0, \max_{1\le j\le i}\Big\{k^{i-(j-1)}Y_j\Big\}\Big\}. \tag{2.1}$$

Consideremos agora o caso em que Z é não degenerada.

De (1.4) temos, sucessivamente,

$$X_1 = Z_1 \max\Big\{X_0, Y_1\Big\} = \max\Big\{Z_1 X_0, Z_1 Y_1\Big\}, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= Z_2 \max\Big\{X_1, Y_2\Big\} \\ &= \max\Big\{Z_2\Big(\max\Big\{Z_1 X_0, Z_1 Y_1\Big\}\Big), Z_2 Y_2\Big\} \\ &= \max\Big\{Z_1 Z_2 X_0, Z_1 Z_2 Y_1, Z_2 Y_2\Big\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_3 &= Z_3 \max\Big\{X_2, Y_3\Big\} \\ &= Z_3 \max\Big\{\Big(\max\Big\{Z_1 Z_2 X_0, Z_1 Z_2 Y_1, Z_2 Y_2\Big\}\Big), Y_3\Big\} \\ &= \max\Big\{Z_1 Z_2 Z_3 X_0, Z_1 Z_2 Z_3 Y_1, Z_2 Z_3 Y_2, Z_3 Y_3\Big\} \\ &= \max\Big\{X_0 Z_1 Z_2 Z_3, \max\Big\{Y_1 Z_1 Z_2 Z_3, Y_2 Z_2 Z_3, Y_3 Z_3\Big\}\Big\}. \end{aligned}$$

Então, para um i genérico, inferimos que

$$X_i = \max\Big\{X_0 \prod_{j=1}^{i} Z_j, \max_{1\le j\le i} Y_j \prod_{\ell=j}^{i} Z_\ell\Big\}. \tag{2.3}$$

De seguida provamos tal resultado por indução matemática.

Por (2.2) verificamos que a expressão é satisfeita para $i = 1$. Suponhamos, por hipótese de indução, que a expressão (2.3) é válida. Temos então

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= Z_{i+1} \max\Big\{X_i, Y_{i+1}\Big\} \\ &= Z_{i+1} \max\Big\{X_0 \prod_{j=1}^{i} Z_j, \max_{1\le j\le i} Y_j \prod_{l=j}^{i} Z_l, Y_{i+1}\Big\} \\ &= \max\Big\{X_0 \prod_{j=1}^{i+1} Z_j, \max_{1\le j\le i} Y_j \prod_{l=j}^{i+1} Z_l, Z_{i+1} Y_{i+1}\Big\} \\ &= \max\Big\{X_0 \prod_{j=1}^{i+1} Z_j, \max_{1\le j\le i+1} Y_j \prod_{l=j}^{i+1} Z_l\Big\} \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que a expressão (2.3) é válida para qualquer inteiro positivo i.

Observemos que, para cada i, X_i é independente de Y_{i+1} e de Z_{i+1}, $i \ge 1$. De facto, como X_i é uma função mensurável das v.a.r.'s $X_0, Y_1, \ldots, Y_i, Z_1, \ldots, Z_i$

e, por outro lado, Y_{i+1} é independente destas $2i+1$ v.a.r.'s, então X_i e Y_{i+1} são independentes. Analogamente concluímos que X_i e Z_{i+1} são independentes.

Denotamos por $H_i(x)$ a f.d. da v.a.r. X_i, ou seja,

$$H_i(x) = P(X_i \leq x), \quad i \geq 1.$$

Para o instante temporal $i+1$, $i \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} H_{i+1}(x) &= P(X_{i+1} \leq x) \\ &= P\Big(\underbrace{Z_{i+1} \max\Big\{X_i, Y_{i+1}\Big\}}_{\text{Por 1.4}} \leq x\Big) \\ &= P\Big(Z_{i+1}X_i \leq x, Z_{i+1}Y_{i+1} \leq x\Big). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como Z_{i+1} é independente de Y_{i+1} e de X_i temos

$$\begin{aligned} H_{i+1}(x) &= \int_{\mathbb{R}} P\Big(X_i \leq \frac{x}{z}, Y_{i+1} \leq \frac{x}{z}\Big) dF(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_i\Big(\frac{x}{z}\Big)\, G\Big(\frac{x}{z}\Big)\, dF(z), \end{aligned} \tag{2.5}$$

uma vez que as v.a.'s X_i e Y_{i+1} são independentes.

Similarmente ao efetuado anteriormente estudamos agora o caso em que a v.a.r. Z se comporta como uma v.a.r. degenerada numa constante k com $0 < k < 1$.

Proposição 1. *Se Z é v.a.r. degenerada numa constante k, $0 < k < 1$, então (2.5) traduz-se apenas como*

$$H_{i+1}(x) = H_i\Big(\frac{x}{k}\Big) G\Big(\frac{x}{k}\Big), \ \ i \geq 0. \tag{2.6}$$

Nestas condições temos ainda

$$H_i(x) = H_0\Big(\frac{x}{k^i}\Big) \prod_{j=1}^{i} G\Big(\frac{x}{k^j}\Big), \ \ i \geq 1. \tag{2.7}$$

Demonstração. No caso em que a v.a.r. Z é degenerada numa constante k com

$0 < k < 1$, a igualdade (2.6) resulta imediatamente de (2.5). E então temos

$$\begin{aligned}
H_{i+1}(x) &= H_i\Big(\frac{x}{k}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= P\Big(X_i \leq \frac{x}{k}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big) = P\Big(\underbrace{k\max\{X_{i-1},Y_i\}}_{\text{Por (1.5)}} \leq \frac{x}{k}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= P\Big(X_{i-1} \leq \frac{x}{k^2}, Y_i \leq \frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= \underbrace{P\Big(X_{i-1} \leq \frac{x}{k^2}\Big)P\Big(Y_i \leq \frac{x}{k^2}\Big)}_{\text{Por independência entre } X_{i-1} \text{ e } Y_i}G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= P\Big(X_{i-1} \leq \frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= P\Big(\underbrace{\max\Big\{k^{i-1}X_0, \max_{1\leq j\leq i-1}\Big\{k^{i-1-(j-1)}Y_j\Big\}\Big\}}_{\text{Por (2.1)}} \leq \frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= P\Big(k^{i-1}X_0 \leq \frac{x}{k^2}, \max_{1\leq j\leq i-1}\Big\{k^{i-j}Y_j\Big\} \leq \frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= P\Big(X_0 \leq \frac{x}{k^{i+1}}, \max\Big\{k^{i-1}Y_1, k^{i-2}Y_2, \ldots, kY_{i-1}\Big\} \leq \frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= P\Big(X_0 \leq \frac{x}{k^{i+1}}, k^{i-1}Y_1 \leq \frac{x}{k^2}, \ldots, kY_{i-1} \leq \frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= P\Big(X_0 \leq \frac{x}{k^{i+1}}, Y_1 \leq \frac{x}{k^{i+1}}, Y_2 \leq \frac{x}{k^i} \ldots, Y_{i-1} \leq \frac{x}{k^3}\Big)G\Big(\frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big).
\end{aligned}$$

Mas atendendo a que $\{Y_n\}$ é uma sucessão de v.a.r.'s independentes entre si e de X_0, temos

$$\begin{aligned}
H_{i+1}(x) &= H_0\Big(\frac{x}{k^{i+1}}\Big)G\Big(\frac{x}{k^{i+1}}\Big)G\Big(\frac{x}{k^i}\Big)\ldots G\Big(\frac{x}{k^3}\Big)G\Big(\frac{x}{k^2}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)\\
&= H_0\Big(\frac{x}{k^{i+1}}\Big)\prod_{j=1}^{i+1}G\Big(\frac{x}{k^j}\Big),\ \ i \geq 0,
\end{aligned}$$

ou seja

$$H_i(x) = H_0\Big(\frac{x}{k^i}\Big)\prod_{j=1}^{i}G\Big(\frac{x}{k^j}\Big),\ \ i \geq 1,$$

tal como pretendíamos mostrar. □

Continuando a supor que Z é degenerada numa constante k, $0 < k < 1$, determinemos agora a f.d. conjunta das v.a.r.'s

$$X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}.$$

Para tal começamos por estudar o caso particular com instantes temporais $i_1 = 1$, $i_2 = 3$. A f.d. de $\Big(X_1, X_3\Big)$ é definida por

$$H_{13}(x,y) = P\Big(X_1 \leq x, X_3 \leq y\Big),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por (2.1) sabemos que X_3 se escreve da forma

$$X_3 = \max\Big\{k^3 X_0, \max_{1\le j\le 3}\Big\{k^{3-(j-1)}Y_j\Big\}\Big\},$$

vindo assim

$$\begin{aligned}
H_{13}(x,y) &= P\Big(X_1 \le x, \max\Big\{k^3 X_0, \max_{1\le j\le 3}\Big\{k^{3-(j-1)}Y_j\Big\}\Big\} \le y\Big)\\
&= P\Big(X_1 \le x, k^3X_0 \le y, \max_{1\le j\le 3}\Big\{k^{3-(j-1)}Y_j\Big\} \le y\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, X_1 \le x, \max\Big\{k^3Y_1, k^2Y_2, kY_3\Big\} \le y\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, X_1 \le x, k^3Y_1 \le y, k^2Y_2 \le y, kY_3 \le y\Big).
\end{aligned}$$

Analogamente

$$X_1 = \max\Big\{kX_0, kY_1\Big\}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
H_{13}(x,y) &= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, \max\Big\{kX_0, kY_1\Big\} \le x, k^3Y_1 \le y, k^2Y_2 \le y, kY_3 \le y\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, X_0 \le \frac{x}{k}, Y_1 \le \frac{x}{k}, k^3Y_1 \le y, k^2Y_2 \le y, kY_3 \le y\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \min\Big\{\frac{y}{k^3}, \frac{x}{k}\Big\}, Y_1 \le \min\Big\{\frac{x}{k}, \frac{y}{k^3}\Big\}, Y_2 \le \frac{y}{k^2}, Y_3 \le \frac{y}{k}\Big).
\end{aligned}$$

Pela independência das variáveis do modelo em estudo temos

$$H_{13}(x,y) = H_0\left(\min\left\{\frac{x}{k}, \frac{y}{k^3}\right\}\right) G\left(\min\left\{\frac{x}{k}, \frac{y}{k^3}\right\}\right) G\left(\frac{y}{k^2}\right) G\left(\frac{y}{k}\right). \tag{2.8}$$

Tomando agora $n = 3$ e os instantes temporais $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_3 = 6$, temos a f.d. conjunta das v.a.r.'s X_1, X_3, X_6 dada por

$$H_{136}(x,y,z) = P\Big(X_1 \le x, X_3 \le y, X_6 \le z\Big),\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e, novamente por (2.1), sabemos que

$$X_3 = \max\Big\{k^3 X_0, \max_{1\le j\le 3}\Big\{k^{3-(j-1)}Y_j\Big\}\Big\},$$

$$X_6 = \max\Big\{k^6 X_0, \max_{1\le j\le 6}\Big\{k^{6-(j-1)}Y_j\Big\}\Big\},$$

vindo

$$\begin{aligned}
H_{136}(x,y,z) &= P\Big(X_1 \le x, \max\Big\{k^3X_0, \max_{1\le j\le 3}\Big\{k^{3-j+1}Y_j\Big\}\Big\} \le y,\\
&\quad \max\Big\{k^6X_0, \max_{1\le j\le 6}\Big\{k^{(6-j+1)}Y_j\Big\}\Big\} \le z\Big)\\
&= P\Big(X_1 \le x, k^3X_0 \le y, \max_{1\le j\le 3}\Big\{k^{(3-j+1)}Y_j\Big\} \le y, k^6X_0 \le z,\\
&\quad \max_{1\le j\le 6}\Big\{k^{(6-j+1)}Y_j\Big\} \le z\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, X_0 \le \frac{z}{k^6}, X_1 \le x, \max\Big\{k^3Y_1, k^2Y_2, kY_3\Big\} \le y,\\
&\quad \max\Big\{k^6Y_1, k^5Y_2, k^4Y_3, k^3Y_4, k^2Y_5, kY_6\Big\} \le z\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, X_0 \le \frac{z}{k^6}, X_1 \le x, k^3Y_1 \le y, k^2Y_2 \le y, kY_3 \le y,\\
&\quad k^6Y_1 \le z, k^5Y_2 \le z, k^4Y_3 \le z, k^3Y_4 \le z, k^2Y_5 \le z, kY_6 \le z\Big).
\end{aligned}$$

Como $X_1 = \max\Big\{kX_0, kY_1\Big\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
H_{136}(x,y,z) &= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, X_0 \le \frac{z}{k^6}, \max\Big\{kX_0, kY_1\Big\} \le x, k^3Y_1 \le y, k^2Y_2 \le y,\\
&\quad kY_3 \le y, k^6Y_1 \le z, k^5Y_2 \le z, k^4Y_3 \le z, k^3Y_4 \le z, k^2Y_5 \le z, kY_6 \le z\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, X_0 \le \frac{z}{k^6}, X_0 \le \frac{x}{k}, kY_1 \le x, k^3Y_1 \le y, k^2Y_2 \le y,\\
&\quad kY_3 \le y, k^6Y_1 \le z, k^5Y_2 \le z, k^4Y_3 \le z, k^3Y_4 \le z, k^2Y_5 \le z, kY_6 \le z\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \frac{y}{k^3}, X_0 \le \frac{z}{k^6}, X_0 \le \frac{x}{k}, kY_1 \le x, k^3Y_1 \le y, k^6Y_1 \le y,\\
&\quad k^2Y_2 \le y, k^5Y_2 \le z, kY_3 \le y, k^4Y_3 \le z, k^3Y_4 \le z, k^2Y_5 \le z, kY_6 \le z\Big)\\
&= P\Big(X_0 \le \min\Big\{\frac{y}{k^3}, \frac{z}{k^6}, \frac{x}{k}\Big\}, Y_1 \le \min\Big\{\frac{x}{k}, \frac{y}{k^3}, \frac{z}{k^6}\Big\}, Y_2 \le \min\Big\{\frac{y}{k^2}, \frac{z}{k^5}\Big\},\\
&\quad Y_3 \le \min\Big\{\frac{y}{k}, \frac{z}{k^4}\Big\}, Y_4 \le \frac{z}{k^3}, Y_5 \le \frac{z}{k^2}, Y_6 \le \frac{z}{k}\Big).
\end{aligned}$$

Tendo em conta a independência das variáveis envolvidas, temos

$$\begin{aligned}
H_{136}(x,y,z) &= H_0\Big(\min\Big\{\frac{x}{k}, \frac{y}{k^3}, \frac{z}{k^6}\Big\}\Big)G\Big(\min\Big\{\frac{x}{k}, \frac{y}{k^3}, \frac{y}{k^6}\Big\}\Big)G\Big(\min\Big\{\frac{y}{k^2}, \frac{z}{k^5}\Big\}\Big) \times\\
&\quad \times G\Big(\min\Big\{\frac{y}{k}, \frac{z}{k^4}\Big\}\Big)G\Big(\frac{z}{k^3}\Big)G\Big(\frac{z}{k^2}\Big)G\Big(\frac{z}{k}\Big).
\end{aligned}$$

Concluímos deste modo que para qualquer conjunto de índices

$$0 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_n$$

temos

$$H_{i_1,\ldots,i_n}(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}) = H_0\Big(\min_{1\le j\le n}\Big\{\frac{x_{i_j}}{k^{i_j}}\Big\}\Big)\prod_{l=1}^{n}\prod_{j=i_{l-1}}^{i_l-1} G\Big(\min_{l\le m\le n}\Big\{\frac{x_{i_m}}{k^{i_m-j}}\Big\}\Big) \tag{2.9}$$

com $i_0 = 0$.

De igual modo, ainda no caso de termos a variável Z degenerada numa constante k, temos a f.d. conjunta para as v.a.r.'s $X_0, X_1, \ldots, X_n$ da forma

$$H_{01\ldots n}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = H_0\Big(\min_{0\le j\le n}\Big\{\frac{x_j}{k^j}\Big\}\Big)\prod_{l=1}^{n} G\Big(\min_{l\le j\le n}\Big\{x_j/k^{j-l+1}\Big\}\Big). \quad (2.10)$$

Consideremos agora o caso em que Z é não degenerada.

A f.d. conjunta de $X_0, X_1, \ldots, X_n$ vem por sua vez definida por

$$\begin{aligned} H_{01\ldots n}(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= P\Big(X_0 \le x_0, X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n\Big) \\ &= P(X_0 \le x_0, \ldots, X_{n-1} \le x_{n-1}, Z_n \max\{X_{n-1}, Y_n\} \le x_n) \\ &= P(X_0 \le x_0, \ldots, X_{n-1} \le x_{n-1}, Z_n X_{n-1} \le x_n, Z_n Y_n \le x_n). \end{aligned}$$

Como Z_n é independente de $Y_n, X_{n-1}, \ldots, X_0$, temos

$$\begin{aligned} &H_{01\ldots n}(x_0, \ldots, x_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(X_0 \le x_0, \ldots, X_{n-1} \le x_{n-1}, X_{n-1} \le \frac{x_n}{z_n}, Y_n \le \frac{x_n}{z_n}\Big) dF(z_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(X_0 \le x_0, X_1 \le x_1, \ldots, X_{n-1} \le \min\{x_{n-1}, \frac{x_n}{z}\}, Y_n \le \frac{x_n}{z}\Big) dF(z_n). \end{aligned}$$

Sabemos que Y_n é independente das v.a.r. $X_0, \ldots, X_{n-1}$ pelo que temos

$$\begin{aligned} &H_{0\ldots n}(x_0, \ldots, x_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} P\Big(X_0 \le x_0, X_1 \le x_1, \ldots, X_{n-1} \le \min\Big\{x_{n-1}, \frac{x_n}{z}\Big\}\Big) G\Big(\frac{x_n}{z}\Big) dF(z_n). \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento para as v.a.'s $Z_{n-1}, \ldots, Z_1$, obtemos

$$\begin{aligned} &H_{01\ldots n}(x_0, \ldots, x_n) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} H_0\Big(\min_{0\le j\le n}\Big\{x_j/\prod_{k=1}^{j} z_k\Big\}\Big)\prod_{l=1}^{n} G\Big(\min_{l\le j\le n}\Big\{x_j/\prod_{k=1}^{j} z_k\Big\}\Big) dF(z_1), \ldots, dF(z_n), \end{aligned}$$

convencionando que $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} z_k = 1$.

À semelhança do que foi feito anteriormente também para o processo (1.4) se prova que, para quaisquer inteiros positivos $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$,

$$\begin{aligned} &H_{i_1,\ldots,i_n}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{i_n}} H_0\Big(\min_{1\le m\le n}\Big\{x_{i_m}/\prod_{k=1}^{i_m} z_k\Big\}\Big)\times \\ &\quad \times \prod_{l=1}^{n}\prod_{j=i_{l-1}}^{i_l-1} G\Big(\min_{l\le m\le n}\Big\{x_{i_m}/\prod_{k=j+1}^{i_m} z_k\Big\}\Big) dF(z_1)\ldots dF(z_{i_n}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

que é uma extensão de (2.9).

2.2. Estacionaridade quando Z é degenerada

Na presente secção passaremos ao estudo da existência de distribuição estacionária para o p.e. $\{X_n\}$ definido em (1.5) e em particular estudaremos as formas que a mesma pode assumir.

Com o objetivo de inferir uma condição de estacionaridade forte do p.e. $\{X_n\}$ comparamos em particular, $H_{13}(x,y)$ e $H_{24}(x,y)$.

A f.d. $H_{13}(x,y)$ já foi determinada em (2.8). De (2.9), temos

$$\begin{aligned} H_{24}(x,y) &= H_0\Big(\min\Big\{\frac{x}{k^2},\frac{y}{k^4}\Big\}\Big)G\Big(\min\Big\{\frac{x}{k^2},\frac{y}{k^4}\Big\}\Big)\times \\ &\quad\times G\Big(\min\Big\{\frac{x}{k},\frac{y}{k^3}\Big\}\Big)G\Big(\frac{y}{k^2}\Big)G\Big(\frac{y}{k}\Big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Portanto supondo como sendo válida a estacionaridade forte do p.e. $\{X_n\}$ então temos em particular que se verifica a igualdade entre as expressões (2.8) e (2.12) ou seja

$$H_{13}(x,y) = H_{24}(x,y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Desta igualdade retiramos que

$$H_0\Big(\min\Big\{\frac{x}{k^2},\frac{y}{k^4}\Big\}\Big)G\Big(\min\Big\{\frac{x}{k^2},\frac{y}{k^4}\Big\}\Big) = H_0\Big(\min\Big\{\frac{x}{k},\frac{y}{k^3}\Big\}\Big)$$

ou, de modo equivalente,

$$H_0\Big(\frac{1}{k}\min\Big\{\frac{x}{k},\frac{y}{k^3}\Big\}\Big)G\Big(\frac{1}{k}\min\Big\{\frac{x}{k},\frac{y}{k^3}\Big\}\Big) = H_0\Big(\min\Big\{\frac{x}{k},\frac{y}{k^3}\Big\}\Big).$$

Considerando $u=\min\left\{\frac{x}{k},\frac{y}{k^3}\right\}$, esta igualdade pode escrever-se como

$$H_0\Big(\frac{u}{k}\Big)G\Big(\frac{u}{k}\Big) = H_0(u). \tag{2.13}$$

A igualdade (2.13) sugere-nos assim uma condição necessária e suficiente para a estacionaridade forte do p.e. $\{X_t\}$. Antes de estabelecermos o teorema correspondente, apresentamos um lema que nos será útil na demonstração do mesmo.

Lema 1. *Se as f.d. H_0 e G verificarem (2.13), então tem-se*

$$H_0(u) = H_0\Big(\frac{u}{k^s}\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(\frac{u}{k^{s-j}}\Big),\ \forall s\geq 1. \tag{2.14}$$

Demonstração. Para $s=1$, a igualdade (2.14) coincide com (2.13) que, por hipótese é verdadeira.

Suponhamos por hipótese de indução, que a igualdade (2.14) é válida para um determinado $s \in \mathbb{N}$. Assim

$$\begin{aligned} H_0(u) &= H_0\Big(\frac{u}{k^s}\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(\frac{u}{k^{s-j}}\Big) \\ &= H_0\Big(\frac{u/k^s}{k}\Big)G\Big(\frac{u/k^s}{k}\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(\frac{u}{k^{s-j}}\Big), \quad \text{por (2.13)} \\ &= H_0\Big(\frac{u}{k^{s+1}}\Big)G\Big(\frac{u}{k^{s+1}}\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(\frac{u}{k^{s-j}}\Big) \\ &= H_0\Big(\frac{u}{k^{s+1}}\Big)\prod_{j=0}^{s} G\Big(\frac{u}{k^{s+1-j}}\Big), \end{aligned}$$

tal como pretendíamos mostrar. □

No teorema seguinte é apresentada uma condição necessária e suficiente de estacionaridade forte do modelo ARMAX com Z degenerada.

Teorema 1. *O p.e.* $\Big\{X_t\Big\}$ *definido em (1.5) é fortemente estacionário se e só se*

$$H_0(u) = H_0\Big(\frac{u}{k}\Big)G\Big(\frac{u}{k}\Big), \forall u \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Demonstração. Suponhamos válida a igualdade (2.15). Então, pelo Lema 1

$$H_0(u) = H_0\Big(\frac{u}{k^s}\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(\frac{u}{k^{s-j}}\Big), \quad \forall s \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Sejam $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ inteiros positivos e $t_m = i_m + s$ com s arbitrariamente fixo em $\mathbb{N}$. De (2.9), com $x_{t_m} = x_{i_m}$, para $1 \le m \le n$, e $t_0 = i_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
H_{t_1,\ldots,t_n}\Big(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}\Big) &= H_{t_1,\ldots,t_n}\Big(x_{t_1},\ldots,x_{t_n}\Big) \\
&= H_0\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m}}\Big)\prod_{\ell=1}^{n}\prod_{j=t_{\ell-1}}^{t_\ell-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m-j}}\Big) \\
&= H_0\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m}}\Big)\underbrace{\prod_{j=t_0}^{t_1-1} G\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m-j}}\Big)}_{\ell=1}\times \\
&\quad\times\prod_{\ell=2}^{n}\prod_{j=t_{\ell-1}}^{t_\ell-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m-j}}\Big) \\
&= H_0\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m}}\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m-j}}\Big)\times \\
&\quad\times\prod_{j=s}^{t_1-1} G\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m-j}}\Big)\prod_{\ell=2}^{n}\prod_{j=t_{\ell-1}}^{t_\ell-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n}\frac{x_{t_m}}{k^{t_m-j}}\Big) \\
&= H_0\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m+s}}\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m+s-j}}\Big)\times \\
&\quad\times\prod_{j=s}^{i_1+s-1} G\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m+s-j}}\Big)\prod_{\ell=2}^{n}\prod_{j=i_{\ell-1}+s}^{i_\ell+s-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m+s-j}}\Big) \\
&= H_0\Big(\frac{1}{k^s}\underbrace{\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m}}}_{\text{u}}\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(\frac{1}{k^{s-j}}\underbrace{\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m}}}_{\text{u}}\Big)\times \\
&\quad\times\prod_{q=0}^{i_1-1} G\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m-q}}\Big)\prod_{\ell=2}^{n}\prod_{q=i_{\ell-1}}^{i_\ell-1} G\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m-q}}\Big).
\end{aligned}$$

Atendendo a (2.16) temos então

$$\begin{aligned}
H_{t_1,\ldots,t_n}(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}) &= H_0\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m}}\Big)\prod_{q=0}^{i_1-1} G\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m-q}}\Big)\times \\
&\quad\times\prod_{\ell=2}^{n}\prod_{q=i_{\ell-1}}^{i_\ell-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m-q}}\Big) \\
&= H_0\Big(\min_{1\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m}}\Big)\prod_{l=1}^{n}\prod_{q=i_{\ell-1}}^{i_l-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n}\frac{x_{i_m}}{k^{i_m-q}}\Big) \\
&= H_{i_1,\ldots,i_n}\Big(x_{i_1},\ldots,x_{i_n}\Big)
\end{aligned}$$

o que nos permite concluir que existe invariância da lei de $\Big(X_{i_1},\ldots,X_{i_n}\Big)$ por uma translação s no tempo ou seja o processo é fortemente estacionário tal como pretendíamos mostrar.

Por outro lado, sendo $\{X_t\}$ fortemente estacionário, tem-se em particular, X_0 e

X_1, igualmente distribuídas. Então, de acordo com (2.7) vem

$$H_0(u) = H_1(u) = H_0\Big(\frac{x}{k}\Big)\prod_{j=1}^{1} G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) = H_0\Big(\frac{x}{k}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)$$

o que prova que (2.15) é condição necessária e suficiente para a estacionaridade forte do p.e. $\bar{X}=\Big(X_t, t \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}\Big)$. $\square$

Como a f.d. de X_i, $H_i(x)$, verifica a relação (2.6), se as v.a.'s X_i, $i \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}$ forem i.d. com f.d. $H(x)$, tem-se

$$H(x) = H\Big(\frac{x}{k}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big). \tag{2.17}$$

Então, em particular, tem-se $H_0(x) = H_0\Big(\frac{x}{k}\Big)G\Big(\frac{x}{k}\Big)$, logo o p.e. $\{X_n\}$ é fortemente estacionário. À igualdade (2.17) chamamos equação de estacionaridade do processo $\{X_n\}$. Assim uma solução para esta equação, se existir, será uma f.d. não degenerada $H(x)$ tal que

$$H(x) = \lim_{i\to+\infty} H_i(x) = \lim_{i\to+\infty} P\Big(X_i \le x\Big).$$

De (2.1) temos ainda

$$X_i = \max\Big\{k^i X_0, \max_{1\le j\le i} k^j Y_{i-(j-1)}\Big\}$$

pelo que

$$\begin{aligned} H_i(x) &= P\Big(X_i \le x\Big) \\ &= P\Big(k^i X_0 \le x, \max_{1\le j\le i} k^j Y_{i-(j-1)} \le x\Big) \\ &= P\Big(k^i X_0 \le x\Big)P\Big(\max_{1\le j\le i} k^j Y_{i-(j-1)} \le x\Big) \end{aligned} \tag{2.18}$$

pois X_0 é independente de $Y_1, Y_2, \dots Y_i, \quad i \ge 1$.

Como $0 < k < 1$,

$$\lim_{i\to+\infty} P\Big(k^i X_0 \le x\Big) = \lim_{i\to+\infty} H_0\Big(\frac{x}{k^i}\Big) = 1,$$

e logo temos

$$\begin{aligned} \lim_{i\to+\infty} H_i(x) &= \lim_{i\to+\infty} P\Big(\max_{1\le j\le i} k^j Y_{i-(j-1)} \le x\Big) \\ &= \lim_{i\to+\infty} P\Big(\bigcap_{j=1}^{i}\Big\{k^j Y_{i-(j-1)} \le x\Big\}\Big) \\ &= \lim_{i\to+\infty} \prod_{j=1}^{i} P\Big(Y_{i-(j-1)} \le \frac{x}{k^j}\Big) \end{aligned}$$

uma vez que as v.a.r's $Y_1, \dots Y_i, i > 1$, são independentes.

Assim

$$\lim_{i\to+\infty} H_i(x) = \lim_{i\to+\infty} \prod_{j=1}^{i} G\Big(\frac{x}{k^j}\Big). \tag{2.19}$$

O próximo teorema estabelece uma condição necessária e suficiente para que $\{X_n\}$ possua distribuição estacionária.

Teorema 2. *Seja $\{X_n\}$ a sucessão definida em (1.5) para algumas f.d. $H_0(x)$ e $G(x)$ e alguma constante k, com $0 < k < 1$. A sucessão $\{X_n\}$ possui distribuição estacionária se e só se existe algum $x > 0$ tal que*

$$0 < \sum_{j=1}^{+\infty} 1 - G\Big(x/k^j\Big) < +\infty. \tag{2.20}$$

Demonstração. Seja $L_i(x) = \prod_{j=1}^{i} G\Big(x/k^j\Big), \quad i \geq 1.$

Para cada $x \in \mathbb{R}$, a sucessão $\{L_i(x)\}_{i\geq 1}$ é limitada e monótona não decrescente pois $0 \leq L_i(x) \leq 1$ e

$$\begin{aligned} L_{i+1}(x) &= \prod_{j=1}^{i+1} G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) = G\Big(\frac{x}{k^{i+1}}\Big) \prod_{j=1}^{i} G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) \\ &= G\Big(\frac{x}{k^{i+1}}\Big) L_i(x) \leq L_i(x). \end{aligned}$$

Então existe $\lim_{i\to+\infty} L_i(x)$. Designemos tal limite por $H(x)$. De (2.19) temos

$$\lim_{i\to+\infty} H_i(x) = \lim_{i\to+\infty} \prod_{j=1}^{i} G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) = H(x) \quad \text{ou seja} \quad H(x) = \lim_{i\to+\infty} H_i(x).$$

A f.d. H é não degenerada se e só se existir $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < H(x) < 1$. Ora, de (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} H(x) &= \lim_{i\to\infty} \prod_{j=1}^{i} G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) \\ &\Leftrightarrow \ \ln H(x) = \lim_{i\to+\infty} \ln \prod_{j=1}^{i} G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) \\ &\Leftrightarrow \ \ln H(x) = \lim_{i\to+\infty} \sum_{j=1}^{i} \ln\ G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) \\ &\Leftrightarrow \ \ln H(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \ln\ G\Big(\frac{x}{k^j}\Big). \end{aligned}$$

Então, uma vez que $0 < H(x) < 1 \Longleftrightarrow 0 < -\ln H(x) < +\infty$, a f.d. H será não degenerada se e só se existir $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(-\ln\ G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big) < +\infty.$$

Observemos agora que, de acordo com a fórmula de Taylor, se obtém

$$-\ln y = 1 - y + \frac{1}{2\epsilon^2}\Big(1-y\Big)^2$$

para qualquer $y > 0$ e para algum $\epsilon \in]y, 1[$.

Por simplicidade de notação denotamos $\xi = 2\epsilon^2$ vindo assim

$$-\ln y = 1 - y + \frac{1}{\xi^2}\Big(1-y\Big)^2$$

para qualquer $y > 0$ e para algum $\xi \in]y, 1[$.

Então

$$-\ln G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) = \Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)\Bigg(1 + \frac{1}{\xi_j^2}\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)\Bigg)$$

com $\xi_j := \xi_j(x) \in \Big]G\Big(\frac{x}{k^j}\Big), 1\Big[$, do que se conclui

$$\sum_{j=1}^{+\infty} -\ln G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) = \sum_{j=1}^{+\infty}\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)\Bigg(1 + \frac{1}{\xi_j^2}\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)\Bigg). \tag{2.21}$$

Por outro lado, como

$$\frac{\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)\Bigg(1 + \frac{1}{\xi_j^2}\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)\Bigg)}{1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 1^+,$$

pelo critério de comparação de séries de termos positivos concluímos que

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)\Big(1 + \frac{1}{\xi_j^2}\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)\Big)$$

converge se e só se $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big)$ converge.

Assim devido a (2.21), $\quad 0 < \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} -\ln\, G\Big(\frac{x}{k^j}\Big) < +\infty \quad$ se e só se

$$0 < \sum_{j=1}^{+\infty}\Big(1 - G\Big(\frac{x}{k^j}\Big)\Big) < \ +\infty,$$

o que permite finalizar a demonstração. □

Exemplo 1. *Consideremos uma sucessão $\{Y_n\}$ com f.d. comum dependente de um parâmetro de forma α, $\alpha \in \mathbb{R}$. Concretamente:*

- *para $\alpha > 0$,*

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0; \\ 1 - \Big(1 - \alpha x\Big)^{1/\alpha}, & se\ 0 < x \leq \frac{1}{\alpha}; \\ 1, & se\ x > \frac{1}{\alpha}; \end{cases}$$

- *para* $\alpha < 0$,

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & se \;\; x \leq 0; \\ 1 - \Big(1 - \alpha x\Big)^{1/\alpha}, & se \;\; x > 0; \end{cases}$$

- *para* $\alpha = 0$,

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & se \; x \leq 0; \\ 1 - e^{-x}, & se \; x > 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

No caso de termos o parâmetro α *nulo* G_α *reduz-se à f.d. exponencial de parâmetro* $\lambda = 1$.

Como veremos a seguir o processo $\{X_n\}$ *possui distribuição estacionária* $H(x)$ *para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e qualquer* $k \in]0,1[$.

Ora, se $\alpha > 0$ *temos o extremo superior do suporte* $\omega(G_\alpha) = \frac{1}{\alpha} < +\infty$ *e assim como sabemos que* $H(x) = \lim\limits_{i \to +\infty} H_i(x) = \lim\limits_{i \to +\infty} \prod\limits_{j=1}^{i} G\Big(x/k^j\Big)$ *vem*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & se \; x \leq 0; \\ \prod\limits_{j=1}^{[\ln \alpha x / \ln k]} \left[1 - \left(1 - \alpha \dfrac{x}{k^j}\right)^{1/\alpha}\right], & se \;\; 0 < x \leq \frac{k}{\alpha}; \\ 1, & se \; x > \frac{k}{\alpha}. \end{cases}$$

No caso particular de termos $\alpha = 0$ *então, para qualquer* $x > 0$,

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{j=1}^{+\infty} 1 - G_\alpha\Big(x/k^j\Big) &= \sum_{j=1}^{+\infty} 1 - \Big[1 - e^{-x/k^j}\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-x/k^j} && (2.23) \\ &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} k^j/x && (2.24) \\ &= k/[x(1-k)] < +\infty, && (2.25) \end{aligned}$$

tendo em conta que $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} k^j$ *é uma série geométrica de razão* k, $0 < k < 1$ *e onde a desigualdade (2.24) se obtêm por uma simples aplicação da função logaritmo a ambos os membros da igualdade (2.23).*

Assim, a condição (2.20) correspondente a $0 < \sum\limits_{j=1}^{+\infty} 1 - G\left(\dfrac{x}{k^j}\right) < +\infty$ *verifica-se para qualquer* $x > 0$. *Neste caso*

$$H(x) = \lim_{i \to +\infty} \prod_{j=1}^{i} G_\alpha\left(\frac{x}{k^j}\right) = \begin{cases} 0, & se \; x \leq 0; \\ \prod\limits_{j=1}^{+\infty} \Big(1 - e^{-x/k^j}\Big), & se \; x > 0. \end{cases}$$

Por sua vez se $\alpha < 0$ temos de igual modo

$$
\begin{aligned}
0 < \sum_{j=1}^{+\infty} 1 - G_\alpha\Big(x/k^j\Big) &= \sum_{j=1}^{+\infty} 1 - \left[1 - \Big(1 - \alpha\Big(x/k^j\Big)\Big)^{1/\alpha}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(1 - \alpha x/k^j\Big)^{1/\alpha} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{k^j - \alpha x}{k^j}\right)^{1/\alpha} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} k^{-j/\alpha}\Big(k^j - \alpha x\Big)^{1/\alpha} \\
&\leq \Big(-\alpha x\Big)^{1/\alpha} \sum_{j=1}^{+\infty} k^{-j/\alpha} \qquad (2.26) \\
&= \Big(-\alpha x\Big)^{1/\alpha} \frac{1}{k^{1/\alpha}(1 - k^{-1/\alpha})},
\end{aligned}
$$

uma vez que a série em (2.26) é uma série geométrica de razão $r = k^{-1/\alpha}$.

Estaremos assim em condições de concluir que, se $\alpha < 0$,

$$
H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{+\infty} \Big[1 - (1 - \alpha x/k^j)^{1/\alpha}\Big], & \text{se } x > 0. \end{cases}
$$

□

Observação 1. *Da igualdade (2.17) concluímos que qualquer f.d. $H(x)$, não degenerada com $\alpha(H) > 0$, tal que a função $G_k(x)$ definida por*

$$
G_k(x) = \begin{cases} \frac{H(kx)}{H(x)}, & \text{se } x \geq \alpha(H)/k; \\ 0, & \text{se } x < \alpha(H)/k, \end{cases} \tag{2.27}
$$

(0<k<1) seja ainda uma f.d., é uma distribuição estacionária do processo $\{X_n\}$ definido por (1.5). Se $\alpha(H) = 0$ e $H(0) = 0$, considera-se $G_k(0) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{H(kx)}{H(x)}$, tendo-se

$$
G_k(x) = \begin{cases} \frac{H(kx)}{H(x)}, & \text{se } x > 0; \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{H(kx)}{H(x)}, & \text{se } x = 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{2.28}
$$

Reciprocamente, se $H(x)$ é uma distribuição estacionária do processo $\{X_n\}$, então, ainda de (2.17), a f.d. $G(x)$ tem a forma (2.27) ou (2.28).

Notamos que, para uma f.d. $H(x)$ *com* $\alpha(H) \geq 0$*, a função* $G_k(x)$ *definida por (2.27) ou (2.28) é uma f.d. se e só se* $\frac{H(kx)}{H(x)}$ *for não decrescente em* $\left]\frac{\alpha(H)}{k}, +\infty\right[$.

Consideremos agora a classe de todas as f.d.'s que são a distribuição estacionária para algum processo $\{X_n\}$ definido em (1.5) e denotemo-la por $\mathcal{L}$. Consideremos ainda a classe de todas as f.d.'s que, para qualquer $k \in]0,1[$, constituem a distribuição estacionária de algum processo $\{X_n\}$ definido por (1.5) e denotemo-la por $\mathcal{L}^*$. Naturalmente temos $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}$.

No próximo teorema são apresentadas as propriedades desta mesma classe $\mathcal{L}^*$ que acabamos de identificar.

Teorema 3. *Seja* $H(x)$ *uma f.d. não degenerada. Temos a equivalência entre*

(i) $H(x) \in \mathcal{L}^*$*;*

(ii) $H(x)$ *é tal que* $\alpha(H) \geq 0$ *e, para todo o* $k \in]0,1[$*, a função definida por (2.27) ou (2.28) é uma f.d.;*

(iii) $\alpha(H) \geq 0$ *e* $\ln H(e^x)$ *é uma função côncava para* $x \in]\ln\alpha(H), \ln\omega(H)[$.

Demonstração. A equivalência entre (i) e (ii) resulta da Observação 1.

Será então suficiente provar a equivalência entre (ii) e (iii). Para tal consideremos $H(x)$ uma f.d. tal que $\alpha(H) \geq 0$. Mas sabemos que para qualquer k, com $0 < k < 1$, temos $0 \leq G_k(x) \leq 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} G_k(x) = 1$ e $G_k(x)$ contínua à direita. Então estas funções G_k são f.d.'s se e só se o quociente $H(kx)/H(x)$ for uma função não decrescente de x, para $x > \alpha(H)/k$. Tal sucede se e só se $\ln \frac{H(kx)}{H(x)} = \ln H(kx) - \ln H(x)$ for de igual modo não decrescente. Considerando $L(x) = \ln H(e^x)$, para $x \in]\ln\alpha(H), \ln\omega(H)[$, a função $\frac{H(kx)}{H(x)}$ é não decrescente se e só se $L(\ln k + y) - L(y)$ for não decrescente, com k arbitrariamente fixo em $]0,1[$ e $y > \ln\alpha(H) - \ln k$.

Pretendemos então provar que $L(\ln k + y) - L(y)$ é não decrescente para k fixo em $]0,1[$ e $y > \ln\alpha(H) - \ln k$ se e só se $L(x)$ é uma função côncava para $x \in]\ln\alpha(H), \ln\omega(H)[$.

Suponhamos então que $L(\ln k + y) - L(y)$ é não decrescente para $y > \ln\alpha(H) - \ln k$. Tomando $y' = \ln k + y$, temos $L(\ln k + y') - L(y') \leq L(\ln k + y) - L(y)$ pois $y' < y$.

Então

$$\frac{L(\ln k + y') - L(y')}{-\ln k} \leq \frac{L(\ln k + y) - L(y)}{-\ln k}$$

e, tomando k' tal que $0 < k' < k < 1$, vem

$$\frac{L(\ln k + y') - L(y')}{-\ln k'} \leq \frac{L(\ln k + y) - L(y)}{-\ln k}.$$

Como L é não decrescente, obtemos $L(\ln k' + y') \leq L(\ln k + y')$ e assim

$$0 < \frac{L(\,\ln k' + y') - L(y')}{-\ln k'} \leq \frac{L(\ln k + y) - L(y)}{-\ln k}, \quad 0 < k < k' < 1, \tag{2.29}$$

isto é, $L(x)$ é côncava, para $x \in \,]\ln \alpha(H), \ln \omega(H)[$.

Reciprocamente se $L(x)$ for côncava, podemos escrever uma desigualdade análoga com $k = k'$ com $0 < k < 1$, o que equivale a afirmarmos então que $L(\ln k + y) - L(y)$ é não decrescente. □

Deste teorema resulta que no caso de $H(x)$ se identificar uma f.d. discreta, então não poderá pertencer a $\mathcal{L}^*$, uma vez que uma função côncava é contínua.

Por outro lado, como $\mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}$ temos que (iii) constitui uma condição suficiente para que uma f.d. pertença a $\mathcal{L}$, embora não constitua uma condição necessária porque $\mathcal{L}$ inclui estritamente $\mathcal{L}^*$.

Nos dois próximos exemplos ilustramos tal inclusão estrita.

Exemplo 2. *Seja $H(x)$ uma f.d. discreta com átomos de probabilidade em dois pontos distintos, a_1 e a_2, ou seja, em que o conjunto dos pontos de descontinuidade da f.d. H se resume a apenas dois pontos a_1 e a_2 tais que $0 < a_1 < a_2$. Seja $p = H(a_1)$. Para qualquer k tal que $0 < k < \frac{a_1}{a_2}$,*

$$G_k(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < \frac{a_1}{k}; \\ p, & se\ \frac{a_1}{k} \leq x < \frac{a_2}{k}; \\ 1, & se\ x \geq \frac{a_2}{k}, \end{cases}$$

é uma f.d. e logo $H(x) \in \mathcal{L}$. Contudo $H(x)$ não pertence a $\mathcal{L}^*$ uma vez que não se identifica como uma f.d. contínua.

□

Exemplo 3. *Consideremos uma f.d. H tal que $0 < \alpha(H) < \omega(H) < +\infty$. Esta f.d. pertence a $\mathcal{L}$ uma vez que, para $k = \alpha/\omega$ com $\alpha \equiv \alpha(H)$ e $\omega \equiv \omega(H)$, temos que*

$$G_k(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < \omega; \\ H(\alpha x/\omega), & se\ \omega \leq x < \frac{\omega^2}{\alpha}; \\ 1, & se\ x \geq \omega^2/\alpha, \end{cases} \tag{2.30}$$

é uma f.d.. Contudo $\ln H(e^x)$ *pode não ser côncava e consequentemente* H *pode não pertencer a* $\mathcal{L}^*$. □

Exemplo 4. *Tal como foi definida no Exemplo 1 a f.d.* $G_\alpha(x)$ *pertence à classe* $\mathcal{L}^*$, *com* $\alpha \leq 1$.

De modo a mostrarmos que esta afirmação é verdadeira bastar-nos-á provar que $\ln G_\alpha(e^x)$ *se identifica como uma função côncava. Isto é, que a sua segunda derivada é negativa ou seja*

$$\Big[g_\alpha(e^x) + e^x g'_\alpha(e^x)\Big] G_\alpha(e^x) - e^x (g_\alpha(e^x))^2 \leq 0, \tag{2.31}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$ *se* $\alpha \leq 0$ *e para todo o* $x < -\ln \alpha$ *se* $0 < \alpha \leq 1$, *onde* $g_\alpha(x)$ *identifica a função densidade de probabilidade associada a* $G_\alpha(x)$.

Consideremos $\alpha \neq 0$. *Se tomarmos* $y = e^x$, *como temos neste caso* $G_\alpha(x) = 1 - \Big(1 - \alpha x\Big)^{1/\alpha}$, $x \in]0, \omega(G_\alpha)[$, *vem a relação expressa em (2.31) escrita como*

$$\Bigg[1 - \Big(1 - \alpha y\Big)^{1/\alpha}\Bigg]\Bigg[\Big(1 - \alpha y\Big)^{(1/\alpha)-1} + y\Big(\alpha - 1\Big)\Big(1 - \alpha y\Big)^{1/\alpha - 2}\Bigg] - y\Big(1 - \alpha y\Big)^{2/\alpha - 2} \leq 0,$$

o que é equivalente a

$$\left(1 - \Big(1 - \alpha y\Big)^{1/\alpha}\right)\Big(1 - y\Big) - y\Big(1 - \alpha y\Big)^{1/\alpha} \leq 0$$

ou ainda a

$$1 - y \leq \Big(1 - \alpha y\Big)^{1/\alpha}$$

desigualdade que é satisfeita para quaisquer $\alpha \in]-\infty, 1]\backslash\{0\}$ *e* $y > 0$.

Logo temos que se $\alpha < 0$, $G_\alpha(x)$ *constitui a distribuição estacionária de* $\{X_n\}$, *sendo a f.d. comum de* $\{Y_n\}$ *dada por*

$$G_k(x) = \begin{cases} 0, & se\, x < 0; \\ k, & se\, x = 0; \\ \dfrac{1 - \Big(1 - \alpha k x\Big)^{1/\alpha}}{1 - \Big(1 - \alpha x\Big)^{1/\alpha}}, & se\, x > 0, \end{cases}$$

para qualquer $k \in]0, 1[$. *Notemos que por simples aplicação da regra de L'Hôpital, temos*

$$\lim_{x \to 0^+} G_k(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \Big(1 - \alpha k x\Big)^{1/\alpha}}{1 - \Big(1 - \alpha x\Big)^{1/\alpha}} = k = G_k(0)\; e\;\; G_k(0^-) = 0.$$

Para $0 < \alpha \leq 1$, temos que $G_\alpha(x)$ define a distribuição estacionária de $\{X_n\}$, dada por

$$G_k(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0; \\ k, & se\ x = 0; \\ \frac{1-\left(1-\alpha kx\right)^{1/\alpha}}{1-\left(1-\alpha x\right)^{1/\alpha}}, & se\ 0 < x < 1/\alpha; \\ 1-\left(1-\alpha kx\right)^{1/\alpha}, & se\ \frac{1}{\alpha} \leq x \leq 1/\alpha k. \end{cases} \tag{2.32}$$

Considerando $\alpha = 0$ como $G_\alpha(x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$, a desigualdade (2.31) dá lugar a

$$\begin{gathered} \left(e^{-y} - ye^{-y}\right)\left(1 - e^{-y}\right) - y\left(e^{-y}\right)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(1 - e^{-y}\right)(1 - y) - ye^{-y} \leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 - y \leq e^{-y} \end{gathered}$$

desigualdade que é de igual modo válida para todo o $y > 0$, vindo assim $\dfrac{G_\alpha(kx)}{G_\alpha(x)} = \dfrac{1-e^{-kx}}{1-e^{-x}}$, $x > 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ke^{-kx}}{e^{-x}} = k$, por aplicação da regra de L'Hôpital.

Assim temos

$$G_k(x) = \begin{cases} 0, & se\, x < 0; \\ k, & se\, x = 0; \\ \frac{1-e^{-kx}}{1-e^{-x}}, & se\, x > 0. \end{cases}$$

Nos três casos, $G_k(x)$ é uma f.d. contínua para $x > 0$, tendo contudo um átomo de probabilidade igual a k para $x = 0$.

□

Exemplo 5. *Consideremos agora a f.d. dada por*

$$\phi_{\alpha,\delta}(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0; \\ exp[-(\delta x)^{-\alpha}], & se\ x > 0, \end{cases}$$

com $\delta > 0$ e $\alpha > 0$.

Temos que esta f.d. pertence a $\mathcal{L}^*$ uma vez que para qualquer k em $]0,1[$ e $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{\alpha,\delta}(kx)}{\phi_{\alpha,\delta}(x)} &= exp[-(\delta kx)^{-\alpha}]\, exp(\delta x)^{-\alpha} \\ &= exp[-\delta^{-\alpha}(k^{-\alpha} - 1)x^{-\alpha}] \\ &= exp[-\delta(k^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}x]^{-\alpha} \end{aligned}$$

é a f.d. $\phi_{\alpha,\delta'}(x)$ com $\delta' = \delta(k^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$.

Reciprocamente, quando a f.d. comum de $\Big\{Y_n\Big\}$ *é dada por* $\phi_{\alpha,\delta}(x)$*, virá a distribuição estacionária de* $\Big\{X_n\Big\}$ *da forma* $\phi_{\alpha,\delta'}(x)$ *com* $\delta' = \delta(k^{-\alpha}-1)^{\frac{-1}{\alpha}}$.

2.3. Estacionaridade no caso geral

Voltemos a considerar o processo $\{X_n\}$ tal como o definimos em (1.4), em que Z é uma v.a.r. com f.d. $F(x)$. A igualdade (2.5) sugere que a equação

$$H_0(x) = \int_{\mathbb{R}} H_0(x/z)G(x/z)dF(z), \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.33}$$

é uma condição necessária e suficiente de estacionaridade forte do processo $\{X_n\}$ como provamos no teorema seguinte.

Teorema 4. *O processo definido em (1.4) é fortemente estacionário se e só se* H_0*,* F *e* G *satisfizerem a equação (2.33).*

Demonstração. Da igualdade (2.33) resulta

$$H_0(u) = \int_{\mathbb{R}^s} H_0\Big(u/\prod_{k=1}^{s} z_k\Big)\prod_{j=0}^{s-1} G\Big(u/\prod_{k=j+1}^{s} z_k\Big)dF(z_1)\ldots dF(z_s),\ \forall s \in \mathbb{N}, \tag{2.34}$$

que é uma extensão de (2.16). Sejam $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ inteiros positivos e $t_m = i_m + s$ com s arbitrariamente fixo em $\mathbb{N}$. Atendendo às fórmulas (2.11) e (2.34) e com $x_{t_m} = x_{i_m}$, $m = 1 \dots n$ e $t_0 = i_0 = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
H_{t_1\dots t_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n}) &= \int_{\mathbb{R}^{t_n}} H_0\Big(\min_{1\le m\le n} x_{t_m}/\prod_{k=1}^{t_m} z_k\Big) \underbrace{\prod_{j=0}^{t_1-1} G\Big(\min_{1\le m\le n} x_{t_m}/\prod_{k=j+1}^{t_m} z_k\Big)}_{\ell=1} \times \\
&\quad \times \prod_{\ell=2}^{n}\prod_{j=t_{\ell-1}}^{t_\ell-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n} x_{t_m}/\prod_{k=j+1}^{t_m} z_k\Big) dF(z_1)\dots dF(z_{t_n}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{t_n-s}} \Big[\int_{\mathbb{R}^s} H_0\Big(1/\prod_{k=1}^{s} z_k \underbrace{\min_{1\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=s+1}^{i_m+s} z_k}_{\mathrm{u}}\Big) \times \\
&\quad \times \prod_{j=0}^{s-1} G\Big(1/\prod_{k=j+1}^{s} z_k \underbrace{\min_{1\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=s+1}^{i_m+s} z_k}_{\mathrm{u}}\Big) dF(z_1)\dots dF(z_s)\Big] \times \\
&\quad \times \prod_{j=s}^{i_1+s-1} G\Big(\min_{1\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=j+1}^{i_m+s} z_k\Big) \times \\
&\quad \times \prod_{\ell=2}^{n}\prod_{j=i_{\ell-1}+s}^{i_\ell+s-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=j+1}^{i_m+s} z_k\Big) dF(z_{s+1})\dots dF(z_{t_n}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{t_n-s}} H_0\Big(\underbrace{\min_{1\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=s+1}^{i_m+s} z_k}_{\mathrm{u}}\Big) \prod_{j=s}^{i_1+s-1} G\Big(\min_{1\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=j+1}^{i_m+s} z_k\Big) \times \\
&\quad \times \prod_{\ell=2}^{n}\prod_{j=i_{\ell-1}+s}^{i_\ell+s-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=j+1}^{i_m+s} z_k\Big) dF(z_{s+1})\dots dF(z_{t_{i_n+s}}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{i_n}} H_0\Big(\min_{1\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=1}^{i_m} z_{k+s}\Big) \times \\
&\quad \times \prod_{\ell=1}^{n}\prod_{q=i_{\ell-1}}^{i_\ell-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=q+1}^{i_m} z_{k+s}\Big) dF(z_{1+s})\dots dF(z_{i_n+s}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{i_n}} H_0\Big(\min_{1\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=1}^{i_m} y_k\Big) \prod_{\ell=1}^{n}\prod_{q=i_{\ell-1}}^{i_\ell-1} G\Big(\min_{\ell\le m\le n} x_{i_m}/\prod_{k=q+1}^{i_m} y_k\Big) \\
&\qquad\qquad dF(y_1)\dots dF(y_{i_n}) \\
&= H_{i_1\dots i_n}(x_{t_1},\dots,x_{t_n}).
\end{aligned}
$$

Admitamos, por outro lado, que o processo $\{X_n\}$ é fortemente estacionário. Então

X_0 e X_1 são igualmente distribuídas e portanto temos

$$
\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R},\ H_0(x) &= P\Big(X_1 \leq x\Big) = P\Big(Z_1 \max\{X_0, Y_1\} \leq x\Big) \\
&= P\Big(Z_1 X_0, Z_1 Y_1 \leq x\Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}} P\Big(X_0 \leq x/z, Y_1 \leq x/z\Big) dF(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} H_0(x/z) G(x/z) dF(z)
\end{aligned}
$$

o que finaliza esta demonstração. □

Denotemos por $\widetilde{\mathcal{L}}$ a classe constituída por todas as f.d.'s H que se identificam como sendo a distribuição estacionária de alguma sucessão $\{X_n\}$, ou seja, para as quais existem f.d.'s $G(x)$ e $F(x)$ que definem uma solução da equação (2.33).

Tal como anteriormente, para além de caracterizarmos a classe $\widetilde{\mathcal{L}}$, identificando as propriedades das f.d.'s que a ela pertencem, interessar-nos-á também conhecer as condições a impôr sobre $F(x)$ e $G(x)$ de modo que exista a distribuição estacionária $H(x)$.

O processo mais natural, embora longe de ser o mais simples, seria determinar o termo geral da sucessão $H_n(x)$ e tomarmos o limite com $n \to +\infty$, contudo no exemplo que ilustramos em seguida este parece ser também o único processo possível.

Exemplo 6. *Consideremos uma f.d. $F(x)$ definida como*

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0; \\ x, & se\ 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & se\ x > 1, \end{cases} \tag{2.35}
$$

com correspondente função de densidade $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, e

$$
G(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 1; \\ 1 - 1/x, & se\ x \geq 1. \end{cases} \tag{2.36}
$$

De modo a introduzirmos uma simplicidade nos cálculos consideramos $H_0(x)$ definida por

$$
H_0(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 1; \\ 1 - 1/x, & se\ x \geq 1. \end{cases}
$$

Do resultado que obtivemos em (2.5) resulta que, para $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} H_1(x) &= \int_{\mathbb{R}} H_0\Big(\frac{x}{z}\Big)\, G\Big(\frac{x}{z}\Big)\, dF(z) \\ &= \int_0^1 \Big(1-\frac{z}{x}\Big)\,\Big(1-\frac{z}{x}\Big)\, dz \\ &= 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^2}. \end{aligned}$$

Conclui-se que $H_n(x)$ tem a forma

$$H_n(x) = 1+\sum_{j=1}^{n+1}\frac{(-1)^j}{x^j}b_n(j),\ x\geq 1.$$

Logo, para $x > 1$, temos de igual modo por (2.5)

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= \int_0^1 H_n\Big(\frac{x}{z}\Big)\, G\Big(\frac{x}{z}\Big)\, dz \\ &= \int_0^1 \Big[1+\sum_{j=1}^{n+1} b_n(j)\frac{(-1)^j}{x^j}z^j\Big]\Big(1-\frac{z}{x}\Big)dz \\ &= \int_0^1 \Big(1+\sum_{j=1}^{n+1} b_n(j)\frac{(-1)^j}{x^j}z^j-\frac{z}{x}-\sum_{j=1}^{n+1} b_n(j)\frac{(-1)^j}{x^{j+1}}z^{j+1}\Big)dz \\ &= \Bigg[z+\sum_{j=1}^{n+1} b_n(j)\frac{(-1)^j}{x^j}\frac{z^{j+1}}{j+1}-\frac{z^2}{2x}-\sum_{j=1}^{n+1} b_n(j)\frac{(-1)^j}{x^{j+1}}\frac{z^{j+2}}{j+2}\Bigg]_0^1 \\ &= 1+\sum_{j=1}^{n+1} b_n(j)\frac{(-1)^j}{x^j}\frac{1}{j+1}-\frac{1}{2x}-\sum_{j=1}^{n+1} b_n(j)\frac{(-1)^j}{x^{j+1}}\frac{1}{j+2} \\ &= 1-\frac{1}{x}\frac{b_n(1)+1}{2}+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{(-1)^j}{x^j(j+1)}(b_n(j)+b_n(j-1))+\frac{(-1)^{n+2}b_n(n+1)}{x^{n+2}(n+3)}. \end{aligned}$$

Deste modo temos os coeficientes b_n definidos respetivamente por

$$\begin{cases} b_{n+1}(1) = \frac{1+b_n(1)}{2}; \\ b_{n+1}(j) = \frac{b_n(j)+b_n(j-1)}{j+1} \quad se\ 2\leq j\leq n+1; \\ b_{n+1}(n+2) = \frac{b_n(n+1)}{n+3}. \end{cases}$$

Tomando limites com $n \to +\infty$ obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} b_n(j) = \lim_{n\to+\infty} b_n(j+1) = b(j),$$

ou seja no limite observamos que a sucessão $\{b_n\}$ começa a apresentar comportamento idêntico convergindo a partir de uma determinada ordem n_0 para um limite b_j e logo temos encontrada a lei limite quando $n \longmapsto +\infty$ de $H_n(x)$ ou seja a distribuição estacionária $H(x)$ que procuramos. Em particular

$$\begin{cases} b(1) = \frac{1+b(1)}{2}; \\ b(j) = \frac{b(j)+b(j-1)}{j+1} \quad se\ j\geq 2, \end{cases}$$

donde observamos que da primeira condição resulta $2b(1) = 1 + b(1) \Leftrightarrow b(1) = 1$. *Considerando por sua vez a segunda condição vem* $b(2) = \frac{b(2)+b(1)}{3} \Leftrightarrow b(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$. *Analogamente* $b(3) = \frac{b(3)+b(2)}{4} \Leftrightarrow b(3) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$. *Pelo que podemos assim concluir que* $b(j) = \frac{1}{j!}$ *para todo o* $j \geq 1$.

Logo, se $x > 1$, *temos*

$$H(x) = \lim_{n\to+\infty} H_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\Big(\frac{-1}{x}\Big)^j = e^{\frac{-1}{x}}.$$

Por outro lado, para $x \leq 1$,

$$H_{n+1}(x) = \int_0^x H_n\Big(\frac{x}{z}\Big)G\Big(\frac{x}{z}\Big)dz.$$

Aplicando limites a ambos os membros da igualdade obtemos

$$\begin{aligned} H(x) &= \lim_{n\to+\infty} H_{n+1}(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^x H_n\Big(\frac{x}{z}\Big)G\Big(\frac{x}{z}\Big)dz \\ &= \int_0^x e^{-z/x}\Big(1 - \frac{z}{x}\Big)dz \\ &= xe^{-1}. \end{aligned}$$

Então

$$H(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & se\ x > 1; \\ xe^{-1}, & se\ x \leq 1, \end{cases}$$

verifica a equação de estacionaridade com F *e* G *definidas por (2.35) e (2.36).*

De forma análoga poderíamos verificar que para as mesmas f.d.'s F *e* H_0 *e com*

$$G_\beta(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta+1}, & se\ x \geq 1; \\ 0, & se\ x < 1 \end{cases}$$

com $\beta > 1$, *se obteria a distribuição estacionária*

$$H(x) = \begin{cases} cx, & se\ \ x < 1; \\ e^{-x^{-\beta+1}}, & se\ x \geq 1, \end{cases}$$

onde

$$c = \int_0^1 (1-y)e^{-y^{\beta-1}/(\beta-1))}dy.$$

$\square$

Da equação (2.33) resulta, escrevendo $L(x) = H(x)G(x)$, que a classe $\widetilde{\mathcal{L}}$ pode ser formulada como a classe de todas as f.d.'s H que admitem a representação

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} L\Big(\frac{x}{z}\Big) dF(z), \tag{2.37}$$

em que $\frac{L(x)}{H(x)} \mathbb{1}_{[\alpha(L),+\infty[}(x)$ é uma f.d., no caso $\alpha(L) > \alpha(H)$. Notamos que, analogamente ao que foi referido na Observação 1, isto sucede se e só se $\frac{L(x)}{H(x)}$ é não decrescente para $x > \alpha(L)$.

Se $\alpha(H) = \alpha(L)$ e $H(\alpha(H)) = 0$, para $x = \alpha(L)$ o valor desta função assume-se como $\displaystyle\lim_{x \to \alpha(L)^+} \frac{L(x)}{H(x)}$.

Dada uma v.a. X, para indicarmos que uma f.d. associada a X pertence a $\widetilde{\mathcal{L}}$ usaremos a notação $X \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Se por sua vez tivermos uma v.a. Z com f.d. $F(x)$ definimos ainda a classe $\widetilde{\mathcal{L}}\ (Z)$ ou $\widetilde{\mathcal{L}}\ (F)$ de modo a identificarmos o conjunto das soluções da equação (2.33) para uma dada f.d. $F(x)$.

Se o processo $\{X_n\}$ é estacionário, então temos

$$X \stackrel{d}{=} Z \max\Big\{X, Y\Big\} \tag{2.38}$$

pelo que, para qualquer $\alpha > 0$,

$$X^\alpha \stackrel{d}{=} Z^\alpha \max\Big\{X^\alpha, Y^\alpha\Big\}, \tag{2.39}$$

o que significa que $\widetilde{\mathcal{L}}$ é fechada para a potenciação real de v.a.'s. Outra conclusão que resulta naturalmente de (2.38) é que qualquer que seja uma constante α positiva, se $X \in \widetilde{\mathcal{L}}$ então de igual modo $\alpha X \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Com Z fixa temos ainda que a classe $\widetilde{\mathcal{L}}\ (Z)$ é caracterizada por ser fechada para a soma e para máximos de v.a.r.'s.

Supondo a existência de momentos de todas as ordens das v.a.r.'s, X, Y e Z temos, da definição de $\{X_n\}$ dada por (1.4),

$$E\Big(X_i^n\Big) = E\Big(Z_i^n \max\{X_{i-1}^n, Y_i^n\}\Big) = E\Big(Z_i^n\Big) E\Big(\max\{X_{i-1}^n, Y_i^n\}\Big),$$

uma vez que Z_i é independente de X_{i-1} e de Y_i, $i \geq 1$. Mas observamos que as sucessões de v.a.r's $\{Y_n\}$ e $\{Z_n\}$ são por definição do nosso modelo identicamente distribuidas com as v.a.r.'s Y e Z e, se o processo $\{X_n\}$ for estacionário, as v.a.'s X_n, $n \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}$, são também identicamente distribuidas com uma v.a.r. X. Assim, podemos escrever

$$E\Big(X^n\Big) = E\Big(Z^n\Big) E\Big(W^n\Big), \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{com} \quad W = \max\Big\{X, Y\Big\}. \tag{2.40}$$

Fixando duas destas variáveis temos que a igualdade (2.40) permite-nos a construção de um método para a determinação de uma terceira variável, o que ilustraremos no próximo exemplo. Iremos deste modo abordar o caso em que temos variáveis distribuídas segundo uma distribuição Beta de parâmetros de forma r e s, isto é, com função de densidade de probabilidade da forma

$$\begin{aligned} f(x,r,s) &= \frac{1}{B(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x) \\ &= \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x) \end{aligned}$$

com r, s não negativos. Como usualmente $\Gamma(z)$ denota a função $\mathcal{G}ama$. Temos ainda a sua f.d. da forma

$$F(x,r,s) = \frac{B(x;r,s)}{B(r,s)} = I_x(r,s)$$

onde $B(x;r,s)$ denota a função beta incompleta e $I_x(r,s)$ a função beta incompleta regularizada.

Exemplo 7. *Consideremos duas v.a.r.'s X e W seguindo respetivamente uma distribuição Beta(r,s) e Beta(r+1,s). As respetivas f.d.'s $H(x)$ e $L(x)$ são tais que $\frac{L(x)}{H(x)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ é de igual modo uma f.d. como provamos seguidamente. Com efeito, para $x > 0$*

$$\frac{L(x)}{H(x)} = \frac{I_x(r+1,s)}{I_x(r,s)}$$

é contínua por ser o quociente de funções contínuas. A prova de que $\lim_{x\to 0^+} \frac{L(x)}{H(x)} = 0$ obtém-se usando a regra de L'Hôpital. De facto,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{L'(x)}{H'(x)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{I'_x(r+1,s)}{I'_x(r,s)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\Gamma(r+1+s)}{\Gamma(r+1)\Gamma(s)} \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} \frac{x^r(1-x)^{s-1}}{x^{r-1}(1-x)^{s-1}} \\ &= \frac{r+s}{r} \lim_{x\to 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

Naturalmente temos $\lim_{x\to 1^-} \frac{L(x)}{H(x)} = 1$.

Por outro lado $\frac{L(x)}{H(x)}$ *é crescente em* $]0,1[$*. Efetivamente*

$$\begin{aligned}
\left(\frac{L(x)}{H(x)}\right)' \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{I'_x(r+1,s)I_x(r,s) - I'_x(r,s)I_x(r+1,s)}{\Big(I_x(r,s)\Big)^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad I'_x(r+1,s)I_x(r,s) - I'_x(r,s)I_x(r+1,s) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(r+s)\Gamma^2(r+s)}{r\Gamma^2(r)\Gamma^2(s)} x^{r-1}\Big(1-x\Big)^{s-1}\Bigg[\int_0^x x t^{r-1}\Big(1-t\Big)^{s-1}dt - \\
&\qquad \int_0^x t^r(1-t)^{s-1}dt\Bigg] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^{r-1}\Big(1-x\Big)^{s-1}\Big(\int_0^x t^{r-1}\Big(1-t\Big)^{s-1}(x-t)dt\Big) \geq 0
\end{aligned}$$

o que se verifica pois $x \in]0,1[$.

Logo se existir uma v.a.r. Z *admitindo momentos de todas as ordens tal que a relação (2.38) se verifique para essas variáveis* X *e* W *então de (2.40) a v.a.r.* Z *tem que satisfazer*

$$E\Big(Z^n\Big) = \frac{E\Big(X^n\Big)}{E\Big(W^n\Big)}.$$

Deste modo temos a necessidade de conhecer o momento de ordem k, $k \geq 1$ *de uma distribuição Beta de parâmetros* α, β, *o qual calculamos em seguida.*

Pela definição da sua função de densidade temos

$$\begin{aligned}
E\Big(X^k\Big) &= \int_0^1 x^k \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)} \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+k+\beta)}{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)} x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)} \int_0^1 f(x,r,s)dx,
\end{aligned}$$

onde $f(x,r,s)$ *se identifica como a função de densidade de uma distribuição Beta de parâmetros* $r = \alpha + k$ *e* $s = \beta$*. Então*

$$E\Big(X^k\Big) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}.$$

No nosso caso, uma vez que $X \sim Beta(r,s)$ *e* $W \sim Beta(r+1,s)$*, vem*

$$\frac{E\Big(X^n\Big)}{E\Big(W^n\Big)} = \frac{\Gamma\Big(r+s\Big)\Gamma\Big(r+n\Big)}{\Gamma\Big(r\Big)\Gamma\Big(r+s+n\Big)} \frac{\Gamma\Big(r+1\Big)\Gamma\Big(r+s+n+1\Big)}{\Gamma\Big(r+s+1\Big)\Gamma\Big(r+n+1\Big)}.$$

Sabemos que a função Γ *verifica a igualdade* $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ *donde*

$$\begin{aligned}
E\Big(Z^n\Big) &= \frac{E\Big(X^n\Big)}{E\Big(W^n\Big)} = \frac{\Gamma(r+s)\Gamma(r+n)}{\Gamma(r)\Gamma(r+s+n)} \frac{r\Gamma(r)(r+s+n)\Gamma(r+s+n)}{(r+s)\Gamma(r+s)(r+n)\Gamma(r+n)} \\
&= \frac{r}{r+s}\frac{r+s+n}{r+n}.
\end{aligned}$$

Estaremos agora em condições de calcular a função geradora de momentos de Z*, definida por*

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E\Big(e^{tZ}\Big) \\ &= \int_0^1 e^{tZ}\, f_Z(z)dz \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Big(tz\Big)^n}{n!}\, f_Z(z)dz. \end{aligned}$$

Por termos uma série absolutamente convergente podemos trocar a ordem do integral com a da série, pelo que

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{n!} z^n\, f_Z(z)dz \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^1 z^n f_Z(z)dz \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, E\Big(Z^n\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \frac{r}{r+s}\, \frac{r+s+n}{r+n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \frac{r}{r+s} \Big(1 + \frac{s}{r+n}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \frac{r}{r+s} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \frac{r}{r+s}\, \frac{s}{r+n} \\ &= \frac{r}{r+s}\, e^t + \frac{s}{r+s} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \frac{r}{r+n} \end{aligned}$$

ou seja

$$M_Z(t) = \frac{r}{r+s}\, e^t + \frac{s}{r+s} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \frac{r}{r+n}.$$

Esta é a função geradora de momentos de uma mistura de uma v.a.r. degenerada em 1 *com uma v.a.r. com distribuição* $Beta(r, 1)$ *com coefecientes* $\frac{r}{r+s}$ *e* $\frac{s}{r+s}$ *respetivamente. Provemos que a distribuição* $Beta(r, s)$ *pertence a* $\widetilde{\mathcal{L}}$*, isto é* $H \in \widetilde{\mathcal{L}}$*. Temos então,*

$$F_Z(z) = \frac{r}{r+s} 1_{[1,+\infty]}(z) + \frac{s}{r+s} I_z(r, 1), z \in \mathbb{R}.$$

Assim

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} L\Big(\frac{x}{z}\Big)dF(z) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0; \\ \displaystyle\int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)dF(z), & se\ 0 \le x < 1; \\ 1, & se\ x \ge 1. \end{cases}$$

Para $0 \leq x < 1$ *obtemos, com* $Z' \sim B(r,1)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)dF(z) &= \frac{r}{r+s}L(x) + \frac{s}{r+s}\int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)f_{Z'}(z)dz \\
&= \frac{r}{r+s}L(x) + \frac{s}{r+s}\Big(\int_0^x 1 f_{Z'}(z)dz + \int_x^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)f_{Z'}(z)dz\Big) \\
&= \frac{r}{r+s}L(x) + \frac{s}{r+s}\Big(I_x(r,1) + \int_x^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)\frac{1}{B(r,1)}z^{r-1}dz\Big)
\end{aligned}$$

onde em particular utilizamos o facto de termos para a distribuição em questão $\frac{x}{z} > 1$. *Por outro lado sabemos que*

$$I_x(r,1) = \int_0^x \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)\Gamma(1)}t^{r-1}(1-t)^{1-1}dt = x^r$$

bem como sabemos de igual modo que a função Beta Incompleta em questão verifica

$$B(r,1) = \frac{(r-1)!(1-1)!}{(r+1-1)!} = \frac{1}{r}$$

donde, resulta

$$\int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)dF(z) = \frac{r}{r+s}L(x) + \frac{s}{r+s}\Big(x^r + r\int_x^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)z^{r-1}dz\Big). \tag{2.41}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int_x^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)z^{r-1}dz &= \Big[\frac{z^r}{r}L\Big(\frac{x}{z}\Big)\Big]_x^1 + \int_x^1 \frac{z^r}{r}\frac{d}{dz}L\Big(\frac{x}{z}\Big)dz \\
&= \frac{L(x)}{r} - \frac{x^r}{r}L(1) + \frac{1}{B(r+1,s)}\int_x^1 \frac{z^r}{r}\Big(\frac{x}{z}\Big)^r\Big(1-\frac{x}{z}\Big)^{s-1}\Big(-\frac{x}{z^2}\Big)dz.
\end{aligned}$$

Considerando no integral respetivo a mudança de variável dada por $u = \frac{x}{z}$ *obtemos*

$$\begin{aligned}
\int_x^1 \frac{z^r}{r}\Big(\frac{x}{z}\Big)^r\Big(1-\frac{x}{z}\Big)^{s-1}\Big(-\frac{x}{z^2}\Big)dz &= \frac{x^{r+1}}{r}\int_x^1 \Big(1-\frac{x}{z}\Big)^{s-1}\Big(\frac{1}{z^2}\Big)dz \\
&= \frac{x^{r+1}}{r}\int_x^1 \Big(1-u\Big)^{s-1}\frac{u^2}{x^2}\frac{-x}{u^2}dz \\
&= \frac{x^r}{r}\frac{(1-x)^s}{s}
\end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned}
\int_x^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)z^{r-1}dz &= \frac{L(x)}{r} - \frac{x^r}{r}L(1) + \frac{1}{B(r+1,s)}\frac{x^r}{r}\frac{(1-x)^s}{s} \\
&= \frac{I_x(r+1,s)}{r} - \frac{x^r}{r} + \frac{x^r}{r}\frac{(1-x)^s}{sB(r+1,s)} \\
&= \frac{1}{r}I_x(r+1,s) - x^r + \frac{x^r(1-x)^s}{sB(r+1,s)},
\end{aligned}$$

em que $L(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)1}t^{r-1}dt = 1$.

Voltando a (2.41), vem

$$\begin{aligned}\int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)dF(z) &= \frac{r}{r+s}I_x(r+1,s)+\frac{s}{r+s}x^r+\frac{s}{r+s}\Big(I_x(r+1,s)-x^r+\\ &\quad +\frac{x^r(1-x)^s}{sB(r+1,s)}\Big)\\ &= \frac{r}{r+s}I_x(r+1,s)+\frac{s}{r+s}x^r+\frac{s}{r+s}I_x(r+1,s)-x^r\frac{s}{s+r}+\\ &\quad +\frac{1}{s+r}\frac{x^r(1-x)^s}{s\,B(r+1,s)}\\ &= I_x(r+1,s)+\frac{1}{r+s}\,\frac{x^r(1-x)^s}{s\,B(r+1,s)},\end{aligned}$$

por definição da função Beta Incompleta temos,

$$\begin{aligned}\int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)dF(z) &= I_x(r,s)-\frac{x^r(1-x)^s}{rB(r,s)}+\frac{1}{r+s}\frac{x^r(1-x)^s}{s\,B(r+1,s)}\\ &= I_x(r,s)-x^r(1-x)^s\Big(\frac{-1}{rB(r,s)}+\frac{1}{B(r+1,s)(r+s)}\Big)\end{aligned}$$

e como temos que esta mesma função verifica $rB(r,s)=(r+s)B(r+1,s)$ *vem*

$$\int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)dF(z)=I_x(r,s)-x^r(1-x)^s\cdot 0=I_x(r,s).$$

Deste modo temos $H(x)=I_x(r,s)$ *ou seja* $I_x(r,s)$ *define uma solução da equação de estacionaridade pelo que concluímos que* $H(x)\in\widetilde{\mathcal{L}}$.

□

O teorema seguinte estabelece condições para a existência de distribuição estacionária do modelo em estudo.

Teorema 5. *Sejam* Y *e* Z *v.a.r.'s não negativas tais que* $E(\ln Y)$ *e* $E(\ln Z)$ *existem, com* $E(\ln Z)\neq 0$. *Então* $H_n(x)$ *tem limite* $H(x)$ *que é independente de* $H_0(x)$ *e verifica (2.33). Além disso* $H(x)=0$, *para todo o* x, *se* $E(\ln Z)>0$.

Demonstração. Seja $U_n=\max\Big\{Z_1\dots Z_nY_n, Z_1\dots Z_{n-1}Y_{n-1},\dots,Z_1Y_1\Big\}$. Temos pelo resultado (2.3) que

$$\begin{aligned}H_n(x) &= P\Big(X_n\le x\Big)\\ &= P\Big(\max\Big\{X_0\prod_{j=1}^n Z_j,\max_{1\le j\le n}Y_j\prod_{\ell=j}^n Z_\ell\Big\}\le x\Big)\\ &= P\Big(Z_1\dots Z_nX_0\le x, U_n\le x\Big),\end{aligned}\tag{2.42}$$

onde se usa o facto de $\max\limits_{1\le j\le n}Y_j\prod\limits_{\ell=j}^n Z_\ell$ e U_n serem igualmente distribuídas.

Por outro lado, como sabemos que $P(U_n \leq x)$ é decrescente em n, uma vez que

$$\begin{aligned} P(U_{n+1} \leq x) &= P(Y_{n+1}Z_1 \dots Z_n Z_{n+1} \leq x,\ Y_n Z_1 \dots Z_n \leq x, \dots Y_2 Z_1 Z_2 \leq x, Y_1 Z_1 \leq x) \\ &\leq P(Y_n Z_1 \dots Z_n \leq x, \dots Y_2 Z_1 Z_2 \leq x, Y_1 Z_1 \leq x) \\ &= P(U_n \leq x) \end{aligned}$$

e naturalmente da definição de probabilidade, limitada, temos então que $P(U_n \leq x)$ converge. Representando por $H(x)$ tal limite, vem

$$\lim_{n \to +\infty} P\Big(U_n \leq x\Big) = H(x) = P\Big(\sup_{k \geq 1} \Big\{Z_1 \dots Z_k Y_k\Big\} \leq x\Big).$$

Sendo $\{Z_n\}$ uma sucessão de v.a.r.'s i.i.d., temos pelo *Teorema de Kolmogorov* ([5], pag 271)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Z_i \xrightarrow{q.c.} E(\ln Z), \quad n \longmapsto +\infty,$$

e como a convergência quase certa implica a convergência em probabilidade temos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Z_i \xrightarrow{P} E(\ln Z), \quad n \longmapsto +\infty.$$

Pela *Desigualdade de Markov* ([5], pag 104), provamos que

$$P\Big(\frac{1}{n}|\ln Y_n| > \varepsilon\Big) \leq \frac{E(\ln Y_n)}{n\varepsilon} \longmapsto 0, \quad n \longmapsto +\infty,$$

isto é, $\frac{1}{n} \ln Y_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \longmapsto +\infty.$

Assim

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln Z_i + \frac{1}{n}\ln Y_n \xrightarrow{P} E(\ln Z), \quad n \longmapsto +\infty,$$

isto é, $\frac{1}{n} \ln Z_1 Z_2 \dots Z_n Y_n \xrightarrow{P} E(\ln Z), \quad n \longmapsto +\infty$, do que se conclui que, se $E(\ln Z)>0$, então

$$\ln Z_1 Z_2 \dots Z_n Y_n \xrightarrow{P} +\infty, \quad n \longmapsto +\infty,$$

isto é,

$$Z_1 Z_2 \dots Z_n Y_n \xrightarrow{P} +\infty, \quad n \longmapsto +\infty,$$

e se $E(\ln Z) < 0$, vem

$$\ln Z_1 Z_2 \dots Z_n Y_n \xrightarrow{P} -\infty, \quad n \longmapsto +\infty,$$

isto é,

$$Z_1 Z_2 \dots Z_n Y_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \longmapsto +\infty.$$

Da mesma forma se prova que, se $E(\ln Z) > 0$,

$$Z_1 Z_2 \dots Z_n X_0 \xrightarrow{P} +\infty, \quad n \longmapsto +\infty,$$

e se $E(\ln Z) < 0$, temos

$$Z_1 Z_2 \dots Z_n X_0 \xrightarrow{P} 0, \quad n \longmapsto +\infty.$$

Admitamos que $E(\ln Z) > 0$. Então de (2.42) temos

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = P(X_n \leq x) = P(Z_1 \dots Z_n X_0 \leq x, U_n \leq x) \leq P(Z_1 \dots Z_n X_0 \leq x)$$

e como $Z_1 \dots Z_n X_0 \xrightarrow{P} +\infty$, temos por definição de convergência em probabilidade que, $P(Z_1 \dots Z_n X_0 > x) \longmapsto 1,\ n \longmapsto +\infty$ e logo naturalmente $P(Z_1 \dots Z_n X_0 \leq x) \longmapsto 0, \quad n \longmapsto +\infty$ pelo que $H(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se, por outro lado, $E(\ln Z) < 0$, como de (2.42) obtemos

$$P\Big(U_n \leq x\Big) - P\Big(Z_1 \dots Z_n X_0 > x\Big) \leq P\Big(X_n \leq x\Big) \leq P\Big(U_n \leq x\Big), \tag{2.43}$$

do facto de se ter $Z_1 Z_2 \dots Z_n X_0 \xrightarrow{P} 0$, $n \longmapsto +\infty$ concluímos que

$$P(Z_1 Z_2 \dots Z_n X_0 > x) \longmapsto 0, \quad n \longmapsto +\infty,$$

donde

$$\lim_{n \to +\infty} P\Big(U_n \leq x\Big) \leq \lim_{n \to +\infty} P\Big(X_n \leq x\Big) \leq \lim_{n \to +\infty} P\Big(U_n \leq x\Big).$$

Então, pelo teorema das sucessões enquadradas,

$$\lim_{n \to +\infty} P\Big(X_n \leq x\Big) = H(x) = P\bigg(\sup_{k \geq 1} \Big\{Z_1 \dots Z_k Y_k\Big\} \leq x\bigg)$$

onde H é uma f.d.. Note-se que

$$Z_1 \dots Z_n Y_n \xrightarrow{P} 0, \quad n \longmapsto +\infty, \text{ implica } \lim_{x \to +\infty} P\Big(\sup_{k \geq 1} \Big\{Z_1 \dots Z_k Y_k\Big\} \leq x\Big) = 1.$$

□

No próximo ponto do nosso trabalho iremos relacionar a classe $\mathcal{L}^*$ definida na secção anterior com a classe $\widetilde{\mathcal{L}}$. Contudo, antes de tal será ainda necessário definir a classe de f.d.'s

$$\mathcal{H}^* = \bigg\{H(x) : H(x) = \int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big) dF(z)\bigg\}$$

com $L(x) \in \mathcal{L}^*$ e F concentrada em $[0, 1]$. Neste momento estaremos assim em condições de apresentar o teorema seguinte.

Teorema 6. *Para as classes de f.d.'s $\mathcal{H}^*$ e $\widetilde{\mathcal{L}}$ definidas anteriormente, temos $\mathcal{H}^* \subseteq \widetilde{\mathcal{L}}$.*

Demonstração. Ora se $H(x)$ for uma f.d. pertencente a $\mathcal{H}^*$ então por definição de $\mathcal{H}^*$ temos

$$H(x) = \int_0^1 L(x/z)dF(z), \quad \text{para algum} \quad L(x) \in \mathcal{L}^*.$$

Mas conhecendo o resultado que obtivemos em (2.37), para mostrarmos que $H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}$ será suficiente mostrar que $L(x)/H(x)$ é uma função não decrescente em $[0, 1]$.

Se $L(x) \in \mathcal{L}^*$ para qualquer $k \in]0, 1[$ e $x < y$, ter-se-á

$$\frac{L(kx)}{L(x)} \leq \frac{L(ky)}{L(y)},$$

o que por sua vez é ainda equivalente a

$$L(x/k)L(y) - L(y/k)L(x) \geq 0.$$

Então, para todo o $x < y$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \frac{L(x/z)L(y) - L(y/z)L(x)}{L(x)L(y)} dF(z) \\ &= \int_0^1 \frac{L(x/z)L(y)}{L(x)L(y)} dF(z) - \int_0^1 \frac{L(y/z)L(x)}{L(x)L(y)} dF(z) \\ &= \int_0^1 \frac{L(x/z)}{L(x)} dF(z) - \int_0^1 \frac{L(y/z)}{L(y)} dF(z) \end{aligned}$$

ou seja

$$\int_0^1 \frac{L(y/z)}{L(y)} dF(z) \leq \int_0^1 \frac{L(x/z)}{L(x)} dF(z).$$

Esta desigualdade traduz que

$$\frac{H(x)}{L(x)} = \int_0^1 \frac{L(x/z)}{L(x)} dF(z)$$

é uma função não crescente logo $\frac{L(x)}{H(x)}$ é uma função não decrescente tal como pretendíamos mostrar. □

Exemplo 8. *Consideremos $\alpha > 0$ e*

$$L(x) = \phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0; \\ exp(-x^{-\alpha}), & se\ x > 0, \end{cases}$$

que pelo Exemplo 5 sabemos que $L \in \mathcal{L}^*$. Então, sendo

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0; \\ x^\alpha, & se\ 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & se\ x > 1, \end{cases}$$

obtemos, para $x > 0$,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^1 L(x/z)dF(z) \\ &= \int_0^1 \alpha z^{\alpha-1} exp\Big(-\Big(\frac{x}{z}\Big)^{-\alpha}\Big)dz \\ &= \int_0^1 \alpha z^{\alpha-1} exp(-z^\alpha/x^\alpha)dz \\ &= x^\alpha(1 - exp(-x^{-\alpha})). \end{aligned}$$

Assim

$$H(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0; \\ x^\alpha(1 - exp(-x^{-\alpha})), & se\ x > 0, \end{cases}$$

é uma f.d. que se encontra em $\widetilde{\mathcal{L}}$.

□

Podemos ainda relacionar a classe $\widetilde{\mathcal{L}}$ com a classe das funções completamente monótonas que definiremos em seguida.

Definição 1. Uma função ϕ, não negativa, é completamente monótona se e só se, para todo o $n \geq 1$, verificar

$$(-1)^n \phi^{(n)}(x) \geq 0, \quad \forall\, n \geq 1,$$

onde $\phi^{(n)}(x)$ representa a derivada de ordem n de $\phi(x)$.

Temos então o resultado seguinte.

Teorema 7. *Dada $H(x)$ uma f.d. contínua com função de densidade de probabilidade $h(x)$ tal que H(0)=0 temos que*

(i) *se $h(x)$ for completamente monótona com $\frac{H(x)}{h(x)} \geq e^x - 1$, então $H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}$;*

(ii) *se $H\Big(\frac{1}{x}\Big)$ for completamente monótona com $\frac{H(x)}{h(x)} \geq x^2$, então $H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}$.*

Demonstração. Ora, pelo Teorema de *Bernstein* ([7], pag 160), sabemos que uma condição necessária e suficiente para que uma função $\phi(x)$ seja completamente monótona é que se possa escrever na forma

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} dF(z) \tag{2.44}$$

para alguma f.d. $F(x)$. De modo a mostrarmos (i) observamos que se $h(x)$ é completamente monótona também $1 - H(x)$ o será pois $\Big(1 - H(x)\Big)' = -h(x)$ o que implica que $(-1)^n\Big(1 - H(x)\Big)^{(n)} = (-1)^{n+1}h^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1}h^{(n-1)}(x)$. Então, por (2.44),

$$1 - H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} dF(z),$$

donde temos

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^{+\infty} \Big(1 - e^{-zx}\Big) dF(z) \\ &= \int_0^{+\infty} \Big(1 - e^{-x/z}\Big) dM(z) \end{aligned}$$

com $M(z) = 1 - F(1/z)$. Deste modo assumindo $x > 0$ temos que $H(x)$ irá satisfazer (2.37) com $L(x) = 1 - e^{-x}$. Se, para além disso, ainda tivermos $L(x)/H(x)$ não decrescente, então $H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}$ tal como se pretende mostrar. Para tal é suficiente que se verifique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{L(x)}{H(x)} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{1 - e^{-x}}{H(x)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad H(x)e^{-x} - (1 - e^{-x})h(x) \geq 0, \end{aligned}$$

ou seja $\frac{H(x)}{h(x)} \geq e^x - 1$.

De modo a provarmos (ii) temos que de (2.44) e se $H(1/x)$ for completamente monótona, vem

$$H(1/x) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} dF(z)$$

e logo

$$H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-z/x} dF(z).$$

Considerando a f.d.

$$L(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ e^{-1/x}, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

temos que $\frac{L(x)}{H(x)} = \frac{e^{-1/x}}{H(x)}$ é não decrescente se e só se, fazendo $y = 1/x$, $e^y H\Big(\frac{1}{y}\Big)$ for também não decrescente. Tal sucede se e só se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy} e^y H(1/y) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^y H(1/y) - e^y h(1/y) \frac{1}{y^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad e^y \Big(H(1/y) - \frac{h(1/y)}{y^2} \Big) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad H(1/y) - \frac{h(1/y)}{y^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 H(1/y) - h(1/y) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{H(1/y)}{h(1/y)} \geq \frac{1}{y^2}
\end{aligned}$$

ou seja

$$H(x)/h(x) \geq x^2$$

o que permite finalizar a demonstração de (ii) e a consequente demonstração do teorema. □

Exemplo 9. *Consideremos agora $H(x)$ a f.d. da lei $\mathcal{G}$ama de parâmetros α, λ com $\lambda = 1$ e $0 < \alpha \leq 1$. A função densidade de probabilidade correspondente a $H(x)$, dada por*

$$h(x) = x^{\alpha - 1} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x),$$

é completamente monótona por se identificar com o produto de duas funções completamente monótonas, as funções e^{-x} e $x^{\alpha-1}$. De facto temos $\Big(e^{-x}\Big)^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$. Então $(-1)^n \Big(e^{-x}\Big)^{(n)} = (-1)^{2n} e^{-x} = e^{-x} > 0$. Concluímos assim que e^{-x} é função completamente monótona. Quanto à segunda função temos $\Big[x^{\alpha-1}\Big]^{(n)} = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - n) x^{\alpha - 1 - n}$ e se n par temos um número par de fatores negativos e logo $\Big[x^{\alpha-1}\Big]^{(n)} > 0$ pelo que, $(-1)^n \Big[x^{\alpha-1}\Big]^{(n)} > 0$. Para n ímpar seria em tudo análogo pelo que podemos assim concluir que esta função é completamente *monótona. Logo $1 - H(x)$ é completamente monótona. Mais ainda, temos que*

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_0^x e^{-y} \ \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dy \\
&= \int_0^x x^{\alpha-1} \ e^{-y} \ \frac{y^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} dy \\
&= x^{\alpha-1} \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\frac{x}{y})^{1-\alpha} e^{-y} dy \\
&\geq x^{\alpha-1} \int_0^x \frac{e^{-y}}{\Gamma(\alpha)} dy \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-y} dy \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Big(1 - e^{-x}\Big)
\end{aligned}$$

com $0 < \alpha < 1$.

Então

$$\begin{aligned}
\frac{H(x)}{h(x)} &\geq \frac{\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\Big(1 - e^{-x}\Big)}{x^{\alpha-1} \ \frac{e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}} \\
&= \frac{1 - e^{-x}}{e^{-x}} \\
&= e^x - 1,
\end{aligned}$$

ou seja, temos

$$\frac{H(x)}{h(x)} \geq e^x - 1, \quad \forall\, x > 0,$$

donde, pela primeira alínea do Teorema 7, concluímos que $H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}$.

□

Exemplo 10. *Um outro exemplo de uma função que se encontra em $\widetilde{\mathcal{L}}$ é a f.d. definida por*

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & se\ x > 0; \\ 0, & se\ x \leq 0, \end{cases}$$

cuja função densidade é dada por $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. De facto, temos $H(1/x) = \frac{1/x}{1/x+1} = \frac{1}{x+1}$ é uma função completamente monótona para $x > 0$ e

$$H(x) = \frac{x}{x+1} \geq (\frac{x}{x+1})^2 = x^2 h(x).$$

Em suma, temos $H(1/x)$ completamente monótona com $\frac{H(x)}{h(x)} > x^2$, pelo que, mais uma vez pelo Teorema 7, segunda alínea, podemos concluir que $H(x)$ está em $\widetilde{\mathcal{L}}$.

□

Analogamente poderíamos verificar que a f.d. $H(x)$ da lei Beta(r,1), com $r \in]0,1[$ é tal que $H(1/x)$ é completamente monótona e além disso é satisfeita a desigualdade

$$H(x) \geq x^2 h(x), \quad \text{desde que} \quad r \in]0,1],$$

pelo que podemos incluir H nesta mesma classe de f.d.'s.

2.4. Estacionaridade quando o suporte de Z está contido no intervalo [0,1]

Nesta secção assumimos sempre v.a.r.'s Z com o seu suporte contido no intervalo [0,1], ou seja com f.d. $F_Z(x)$ tal que $F_Z(0) = 0$ e $F_Z(1) = 1$. A distribuição $Beta(r,s)$, $r > 0$, $s > 0$ surge como um caso de estudo de interesse e como tal daremos especial atenção ao estudo da classe $\widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$ que identifica o conjunto das soluções da equação

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} H(x/z)G(x/z)dF(z),$$

quando assumimos que Z apresenta tal distribuição. Mais ainda, começamos por assumir que temos $s = 1$ e $r > 0$ e nestas condições será possível concluir que algumas das distribuições mais usuais se encontram na classe $\widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$. O mesmo será concretizado através da apresentação de uma condição necessária e suficiente para que uma f.d. $H(x)$ pertença à classe $\widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$. Contudo, é de evidenciar ainda que estas classes $\widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$ são não disjuntas para diferentes $Z's$ e que uma f.d. poderá pertencer simultaneamente a mais do que uma destas classes.

Teorema 8. *Seja Z uma v.a. com distribuição $Beta(r,1)$ e seja $H(x)$ uma f.d. derivável. Então são equivalentes as seguintes afirmações*

(i) *$H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$;*

(ii) *A função*

$$G(x) = 1 - \frac{x}{r}\,\frac{H'(x)}{H(x)}, \quad x > \alpha(H), \tag{2.45}$$

é não decrescente;

(iii) *Existe uma f.d. $G(x)$ para a qual a f.d. $H(x)$ se pode exprimir na forma*

$$H(x) = exp\Big\{ - \int_x^{+\infty} \frac{r}{t}\Big[1 - G(t)\Big]dt\Big\}, \quad x > \alpha(H). \tag{2.46}$$

Demonstração. Suponhamos que $H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$ onde Z possui f.d. $F(x) = x^r$, com $0 \leq x \leq 1$, $r > 0$. Nestas condições temos a existência de uma f.d. $G(x)$ para a qual

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^1 H(x/z)G(x/z)dF(z) \\ &= \int_0^1 G(x/z)H(x/z)rz^{r-1}dz. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Considerando agora a mudança de variável dada por $y = \frac{x}{z} \Leftrightarrow z = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{-x}{y^2}$, $z = 0 \Rightarrow y = +\infty, z = 1 \Rightarrow y = x$, vem que

$$H(x) = \int_x^{+\infty} G(y)H(y)\; r\left(\frac{x}{y}\right)^{r-1} \frac{x}{y^2}\, dy = rx^r \int_x^{+\infty} G(y)H(y)\; y^{-r-1}\, dy.$$

Aplicando derivadas a ambos os membros da igualdade obtemos

$$\begin{aligned} H'(x) &= r^2x^{r-1}\int_x^{+\infty} y^{r-1}G(y)H(y)dy - rx^rG(x)H(x)x^{r-1} \\ &= r^2x^{r-1}\int_x^{+\infty} y^{r-1}G(y)H(y)dy - \frac{r}{x}G(x)H(x) \\ &= \frac{r}{x}\left[rx^r\int_x^{+\infty} y^{r-1}G(y)H(y)dy\right] - \frac{r}{x}G(x)H(x) \\ &= \frac{r}{x}H(x) - \frac{r}{x}G(x)H(x), \end{aligned}$$

ou seja temos

$$H'(x) = \frac{r}{x}H(x) - \frac{r}{x}G(x)H(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r}{x}G(x)H(x) = \frac{r}{x}H(x) - H'(x).$$

Então, para $x > \alpha(H)$,

$$G(x) = 1 - \frac{x}{r}\frac{H'(x)}{H(x)} \tag{2.48}$$

é uma função não decrescente.

Admitamos que $ii)$ se verifica, onde

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{r}{x}(1 - G(x)), \;\; x > \alpha(H).$$

Como $\frac{H'(x)}{H(x)}$ coincide com a derivada de $T(x) = \ln(H(x))$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_x^{+\infty} \frac{r}{t}(1 - G(t))dt = \lim_{a \to +\infty} T(a) - T(x) = -T(x),$$

obtemos

$$-\ln H(x) = -T(x) = \int_x^{+\infty} \frac{r}{t}(1{-}G(t))dt, \;\text{ ou seja, }\; -\ln H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{r}{t}(1{-}G(t))dt.$$

Considerando uma f.d. G que verifique (2.48) para $x > \alpha(H)$, obtemos (2.46), verificando-se $iii)$.

Reciprocamente, suponhamos que (2.46) se verifica.

Então

$$H'(x) = -H(x)\Big(0 - \frac{r}{x}(1 - G(x)\Big)$$

o que equivale a

$$H'(x) - \frac{r}{x}H(x) = -\frac{r}{x}G(x)H(x). \tag{2.49}$$

O que ainda podemos escrever como

$$H(x) - \frac{x}{r}H'(x) = L(x), \tag{2.50}$$

tomando para tal $L(x) = G(x)H(x)$. Tratando-se (2.49) de uma equação diferencial linear de primeira ordem cujo fator integrante é $\mu(x) = e^{-r\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x^r}$, obtemos

$$\begin{aligned} H(x) &= rx^r \int_x^{+\infty} y^{-r-1}G(y)H(y)dy & (2.51)\\ &= rx^r \int_0^1 \Big(\frac{x}{z}\Big)^{-r-1} G\Big(\frac{x}{z}\Big)H\Big(\frac{x}{z}\Big)\frac{-x}{z^2}dz & (2.52)\\ &= \int_0^1 G\Big(\frac{x}{z}\Big)H\Big(\frac{x}{z}\Big)rz^{r-1}dz & (2.53) \end{aligned}$$

onde realizamos uma mudança de variável em tudo semelhante à que realizámos anteriormente. O que prova que $H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$. □

Exemplo 11. *Seja $H(x)$ a f.d. da lei $\mathcal{G}ama$ com parâmetros $\alpha = r > 0$ e $\lambda = 1$ e portanto com função de densidade de probabilidade $h(x) = x^{r-1}\frac{e^{-x}}{\Gamma(r)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. Ilustramos neste exemplo que esta f.d. assim definida está em $\widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$ quando Z se caracteriza por seguir uma distribuição $Beta(r,1)$. Ora, pelo teorema anterior, sabemos que tal sucede se e só se a função $L(x)$ tal como a definimos em (2.50) for uma f.d. para a qual*

$$\frac{L(x)}{H(x)} = \frac{H(x) - \frac{x}{r}H'(x)}{H(x)} = 1 - \frac{x}{r}\frac{H'(x)}{H(x)} = G(x) \tag{2.54}$$

seja não decrescente, para $x > 0$. Neste caso

$$\begin{aligned} L(x) &= H(x) - \frac{x}{r}H'(x)\\ &= \int_0^x t^{r-1}\frac{e^{-t}}{\Gamma(r)}dt - \frac{x}{r}\Big[x^{r-1}\frac{e^{-x}}{\Gamma(r)}\Big]\\ &= \frac{1}{\Gamma(r)}\Big(\Big[\frac{t^r}{r}\,e^{-t}\Big]_0^x + \int_0^x \frac{t^r}{r}e^{-t}dt\Big) - \frac{x^r e^{-x}}{r\Gamma(r)}\\ &= \int_0^x \frac{t^r e^{-t}}{r\Gamma(r)}dt\\ &= \int_0^x \frac{t^r e^{-t}}{\Gamma(r+1)}dt \end{aligned}$$

que por sua vez corresponde à f.d. da lei $\mathcal{G}ama(1, r+1)$*. Para que* $\frac{L(x)}{H(x)}$ *seja não decrescente para* $x > 0$ *é suficiente que* $\frac{d}{dx}\frac{L(x)}{H(x)} \geq 0,\ x > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{L(x)}{H(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow & \quad \frac{L'(x)H(x) - L(x)H'(x)}{\Big[H(x)\Big]^2} \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \quad H(x)L'(x) - H'(x)L(x) \geq 0. \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
H(x)L'(x) - H'(x)L(x) &= \int_0^x t^{r-1}\frac{e^{-t}}{\Gamma(r)}dt\, x^r \frac{e^{-x}}{\Gamma(r+1)} - x^{r-1}\frac{e^{-x}}{\Gamma(r)}\int_0^x t^r \frac{e^{-t}}{\Gamma(r+1)}dt \\
&= x^r \frac{e^{-x}}{r\Gamma(r)}\int_0^x t^{r-1}\frac{e^{-t}}{\Gamma(r)}dt - x^{r-1}\frac{e^{-x}}{\Gamma(r)}\int_0^x t^r\frac{e^{-t}}{\Gamma(r+1)}dt \\
&= x^{r-1}\frac{e^{-x}}{\Gamma(r)}\left[\frac{1}{r\Gamma(r)}\int_0^x t^{r-1}(x-t)e^{-t}dt\right] \geq 0,
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\int_0^x (x-t)t^{r-1}e^{-t}dt \geq 0.$$

Então verifica-se (2.55).

□

Exemplo 12. *Do Exemplo 11 vem como consequência que a f.d.*

$$H(x) = \begin{cases} 0, \ se\ x < 0; \\ 1 - e^{-x^r}, \ se\ x \geq 0 \end{cases}$$

pertence a $\widetilde{\mathcal{L}}\ (Z)$*, quando* Z *apresenta de igual modo uma distribuição* $Beta(r, 1)$*, para todo o* r *estritamente positivo. Basta observarmos que, tomando* $r = 1$*,* $H(x)$ *identifica-se com a f.d. de uma lei exponencial, que é um caso particular de uma distribuição* $\mathcal{G}ama$ *de parâmetro* $\alpha = 1$*, pelo que, pelo Exemplo 11, pertence à classe* $\widetilde{\mathcal{L}}\ (Z)$ *com* Z *distribuído segundo uma distribuição uniforme em* $[0, 1]$ *e a função* $G(x)$ *definida por*

$$\begin{aligned}
G(x) &= 1 - \frac{x}{r}\frac{H'(x)}{H(x)} \\
&= 1 - \frac{x}{r}\ \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \\
&= 1 - xe^{-x}\Big(1 - e^{-x}\Big)^{-1}, \qquad x > 0.
\end{aligned}$$

Então, por $\widetilde{\mathcal{L}}$ *ser fechada para a potenciação de v.a.r.'s temos que* $H(x^r) = 1 - e^{-x^r}$ *pertence a* $\widetilde{\mathcal{L}}\ (Z^*)$ *com* $Z^* = Z^{1/r}$ *ou seja com distribuição* $Beta(r, 1)$ *e* $Y^* = Y^{1/r}$*,* *logo, com f.d.*

$$G^*(x) = G(x^r) = \begin{cases} 1 - x^r e^{-x^r}(1 - e^{-x^r})^{-1}, \; se \; x \geq 0; \\ 0, \; se \; x > 0. \end{cases}$$

$\square$

Exemplo 13. *Seja $H(x)$ a f.d. normal truncada em zero ou seja da forma $H(x) = 0$ para $x < 0$ e*

$$H(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \; x \geq 0.$$

De igual modo pela equação (2.50) temos, para $r = 1$,

$$\begin{aligned} L(x) &= H(x) - xH'(x) \\ &= H(x) - xh(x) \\ &= \int_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt - x \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad para \quad x > 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} - \frac{2x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Novamente pelo Teorema 8, sabemos que $H(x) \in \widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$ se e só se a função $\frac{L(x)}{H(x)}$ for não decrescente, para $x > 0$ com Z seguindo uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Tal sucede se e só se $\frac{d}{dx}\frac{L(x)}{H(x)} \geq 0 \Leftrightarrow L'(x)H(x) - L(x)H'(x) \geq 0$. Mas

$$\begin{aligned} L'(x)H(x) - L(x)H'(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \Big(\int_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Big) - \\ &\quad\; \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big(\int_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{2x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \Big(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \Big)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \times \\ &\quad\; \times \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \Big(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \Big)^2 x \Big(e^{-\frac{x^2}{2}} \Big)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{x^2}{2}} \Big[x^2 \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + x e^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Integrando por partes o segundo integral

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \;=\; x e^{-\frac{x^2}{2}} + \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

obtemos

$$x^2\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt + xe^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt - xe^{-\frac{x^2}{2}} + \int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt + xe^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\left(x^2 - t^2\right) \geq 0,$$

o que é satisfeito para todo o $x > 0$ e logo temos $H(x)$ em $\widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$.

□

A caracterização da classe $\widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$ fica um pouco mais complicada no caso de termos Z com distribuição $Beta(r, s)$, com ambos os parâmetros não negativos quaisquer. Se s for inteiro, a f.d. de Z torna-se um caso particular de uma classe mais geral de f.d.'s da forma

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i x^{r_i}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

com $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Naturalmente, de modo a que possamos identificar $F(x)$ como uma f.d. temos de ter satisfeitas as seguintes condições:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i r_i x^{r_i - 1} \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Com este tipo de f.d.'s a equação de estacionaridade vem da forma

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} H\Big(\frac{x}{z}\Big)G\Big(\frac{x}{z}\Big)dF(z) = \int_0^1 H\Big(\frac{x}{z}\Big)G\Big(\frac{x}{z}\Big)\sum_{i=1}^{m} a_i r_i z^{r_i - 1}dz. \tag{2.56}$$

Escrevendo $L(x) = H(x)G(x)$, e fazendo a mudança de variável $z = \frac{x}{y}$ tem-se que uma f.d. $H(x)$ está em $\widetilde{\mathcal{L}}\,(F)$, ou seja é solução da equação (2.56), se e só se

$$H(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i H_{r_i}(x) \tag{2.57}$$

com

$$H_{r_i}(x) = r_i x^{r_i}\int_x^{+\infty} y^{-r_i - 1}L(y)dy, \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.58}$$

com $L(x)$ tal que $\frac{L(x)}{H(x)}$ seja não decrescente para $0 < x < 1$. Naturalmente, se tivermos $a_i > 0$ e $H_{r_i}(x)$ admitindo a representação (2.58) com $\frac{L(x)}{H_{r_i}(x)}$ não decrescente para $0 < x < 1$, $i = 1, \ldots, m$ então a f.d. $H(x)$ que definimos em (2.57) está necessariamente na classe $\widetilde{\mathcal{L}}\,(F)$.

Exemplo 14. *Consideremos a f.d.* $L(x)$ *definida por*

$$L(x)=\begin{cases}0, & se\ x<0;\\ x^t, & se\ \ 0\le x\le 1;\\ 1, & se\ x>1.\end{cases}$$

Então para todo o $r>0$, $r\neq t$, *temos por (2.58)*

$$\begin{aligned}H_r(x) &= rx^r\int_x^{+\infty} y^{-r-1}L(y)\,dy\\ &= \int_x^{+\infty} r\,\frac{x^r}{y^r}\,\frac{1}{y}\,L(y)\,dy\\ &= \int_0^1 r\,z^r\,\frac{z}{x}\,\frac{x}{z^2}\,L\Big(\frac{x}{z}\Big)\,dz\\ &= \int_0^1 L\Big(\frac{x}{z}\Big)\,rz^{r-1}\,dz\end{aligned}$$

pela mudança de variável $z=\frac{x}{y}$ *e onde, para* $x>0$,

$$L\Big(\frac{x}{z}\Big)=\begin{cases}\Big(\frac{x}{z}\Big)^t, & se\ \ z\ge x;\\ 1, & se\ \ z<x.\end{cases}$$

Vem deste modo

$$\begin{aligned}H_r(x) &= \int_0^x 1\,rz^{r-1}dz+\int_x^1\Big(\frac{x}{z}\Big)^t rz^{r-1}dz\\ &= \int_0^x rz^{r-1}dz+\int_x^1 x^tz^{r-1-t}rdz\\ &= r\frac{x^r}{r}+rx^t\Big(\frac{1}{r-t}-\frac{x^{r-t}}{r-t}\Big)\\ &= x^r+\frac{rx^t}{r-t}-\frac{rx^r}{r-t}\\ &= \frac{1}{r-t}\Big(rx^t-tx^r\Big).\end{aligned}$$

Esta função verifica em particular

$$\begin{aligned}\frac{H_r(x)}{L(x)} &= \frac{\frac{1}{r-t}\Big(rx^t-tx^r\Big)}{x^t}\\ &= \frac{1}{r-t}(r-tx^{r-t}),\end{aligned}$$

constituindo uma função decrescente para todo o x *tal que* $0<x<1$ *e* $r,t>0$, $r\neq t$. *Significa isto que qualquer mistura de* m *f.d's deste tipo* $H_{r_i}(x)$, $i=1,\ldots,m$, *pertence a* $\widetilde{\mathcal{L}}\,(Z)$, *onde* Z *possui f.d. correspondente à mesma mistura de* m *f.d.'s* *da forma*

$$F_{r_i}(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0; \\ x^{r_i}, & se\ 0 \le x \le 1; \\ 1, & se\ x > 1, \end{cases}$$

para $i = 1, \dots m$.

□

Exemplo 15. *Consideremos* $L(x)$ *definida por*

$$L(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \le 1; \\ 1 - x^{-t}, & se\ x > 1, \end{cases}$$

com $t > 0$. *Com a função assim definida temos, para todo o* $r > 0$ *e* $0 \le x \le 1$, *que*

$$\begin{aligned} H_r(x) &= \int_0^x r z^{r-1} - \frac{r}{x^t} z^{r+t-1} dz \\ &= \frac{t x^r}{t + r}, \end{aligned}$$

o que implica $L(x)/H_r(x) = 0$. *Para* $x > 1$

$$\begin{aligned} H_r(x) &= \int_0^1 r z^{r-1} - \frac{r}{x^t} z^{r+t-1} dz \\ &= 1 - \frac{r}{(r+t)x^t} \end{aligned}$$

donde

$$\frac{d}{dx} \frac{H_r(x)}{L(x)} = -\frac{1}{r+t} \frac{t^2 x^{t-1}}{(x^t - 1)^2} \le 0.$$

Assim, para todo o $x \ge 0$ *e* $t > 0$, *temos* $L(x)/H_r(x)$ *não decrescente. Deste modo podemos concluir que qualquer mistura de f.d.'s da forma* $H_r(x)$, *ou seja qualquer f.d. que seja uma combinação linear de f.d.'s da forma* $H_r(x)$, $\sum_{i=1}^{m} a_i H_r(x)$, *estará necessariamente dentro da classe* $\widetilde{\mathcal{L}}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x^{r_i}\right)$. □

Bibliografia

[1] Alpuim, M. T., Contribuições à teoria de extremos em sucessões dependentes, DEIOC-Faculdade de Ciências, Univ. Lisboa, 1988.

[2] Alpuim, M. T., An extremal markovian sequence, J. Appl. Prob. 26 (1989) 219-232.

[3] Alpuim, M. T., Athayde, E., On the stationary distribution of some extremal markovian sequence, J. Appl. Prob. 27 (1990) 291-302.

[4] Gonçalves, E. & Mendes Lopes, N., Séries Temporais, Modelações Lineares e não lineares, 2ª ed., Sociedade Portuguesa de Estatística, 2008.

[5] Gonçalves, E. & Mendes Lopes, N., Probabilidades e Princípios Teóricos, 2ª ed., Escolar Editora, 2013.

[6] Grimmett, G. & Stirzaker, D. : Probability and Random Processes, Third Edition, Oxford University Press, 2001.

[7] Widder, D., The Laplace Transform, Princeton University Press, 1954.