



Joel de Oliveira Vasco

Estimadores de Volatilidade e Construção de Portefólios

Dissertação de Mestrado em Economia, na especialidade de Economia Financeira, orientada pelo Prof. Doutor José Alberto Soares da Fonseca e pelo Prof. Doutor Pedro Manuel Cortesão Godinho, apresentada na Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra para obtenção do grau de Mestre.

Julho, 2014



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



FEUC FACULDADE DE ECONOMIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Estimadores de Volatilidade e Construção de Portefólios

Dissertação de Mestrado em Economia, na especialidade de Economia Financeira,
apresentada à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra para obtenção do
grau de Mestre.

COIMBRA - 2014

Orientando: Joel de Oliveira Vasco

Orientadores: Prof. Doutor José Alberto Soares da Fonseca e Prof. Doutor
Pedro Manuel Cortesão Godinho

Agradecimentos

A conclusão desta dissertação é um momento simbólico para mim enquanto aluno da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra. Foi muito desejada a entrada nesta faculdade e foram muitas as experiências que esta me ofereceu enquanto aluno. Neste momento, e mais do que nunca, tenho orgulho na ciência que escolhi e na Universidade em que estudo. Graças a elas sinto-me preparado para enfrentar novos desafios.

Antes de mais gostaria de agradecer à minha família, principalmente à minha mãe, que acreditou em mim mesmo quando senti que mais ninguém o fazia. Sem a sua confiança, muito provavelmente não estaria a escrever este texto, por isso, é a ela que tenho de dedicar este trabalho. Não posso deixar de agradecer à minha avó Adelaide Oliveira, senhora que admiro muito pelo trabalho árduo, honestidade e carinho, espero continuar a dar-lhe muitas alegrias. Gostava de agradecer ao meu pai pelo seu apoio, o genuíno entusiasmo que ele demonstra pelo meu percurso invulgar e, por ter herdado dele a paixão fervorosa pelas nossas áreas de estudos. Também gostava de agradecer ao Avelino Paiva pela a sua constante disponibilidade em ajudar sempre que necessário.

Em segundo lugar gostaria de agradecer aos meus orientadores. Professor José Fonseca, orientador e professor, teve um papel crucial tanto nos conteúdos que me foi lecionando desde o meu 2^o ano de faculdade, como pela disponibilidade em aceitar a aventura que foi a elaboração desta dissertação. Assim como, ao Professor Pedro Godinho, orientador e professor, cujos conteúdos que lecionou foram de invulgar pertinência e utilidade, tal como, a sua exigência e competência essenciais para a realização deste trabalho. Ainda do corpo docente da faculdade gostaria de agradecer à Professora Adelaide Duarte pela sua dedicação e pelo seu prezar de excelência, digna da minha maior admiração e, ao Professor Pedro Bação pela importância dos conteúdos que lecionou no meu percurso.

Não posso deixar de referir outras pessoas também importantes, que sem as quais esta experiência não teria tido o mesmo significado. Uma delas é a Rita Ribeiro gostaria de lhe agradecer, pela namorada e amiga, pela constante tentativa de me tirar da frente deste computador, por todo o apoio nos momentos difíceis e, por todas as alegrias que tive a oportunidade de passar ao seu lado. Outra pessoa bastante importante que teve um papel direto no meu percurso foi o meu amigo Gonçalo Marouvo, pessoa pela qual tenho a maior admiração pela humildade e excelência extraordinária e contagiante, agradeço também pela sua constante disponibilidade. Não poderia deixar de fazer referência ao André Carvalho, ao André Gomes, ao Ricardo Romeu e ao Vitor Santos pelo companheirismo permanente ao longo destes últimos cinco anos.

Quero mencionar ainda o meu agradecimento ao Paulo Soares, ao José Baptista, à Sónia Gonçalves, ao Andrés Aldana, ao André Ribeiro, ao Núbio Vidal, ao Sílvio Costa, ao Nuno Maranhão, ao Jorge Domingues, ao Rafael Borges, ao João Domingues e ao Ruben Honrado, por todas as experiências destes últimos cinco anos. Gostava ainda de agradecer ao Álvaro Pinto, ao Guilherme Silva, ao Francisco Santos e ao Diogo Branco pelo espírito de união e amizade.

*”...E vós amais o que é fácil!
Eu amo o Longe e a Miragem,
Amo os abismos, as torrentes, os desertos...
Ide! Tendes estradas,
Tendes jardins, tendes canteiros,
Tendes pátria, tendes tetos,
E tendes regras, e tratados, e filósofos, e sábios...
Eu tenho a minha Loucura !
Levanto-a, como um facho, a arder na noite escura...” - José Régio em
”Poemas de Deus e do Diabo”*

Resumo

O estudo da volatilidade assume um papel importante no investimento de ativos com risco e na estabilidade das instituições financeiras. Ao longo das últimas décadas foram várias as abordagens desenvolvidas com o intuito de analisar a volatilidade dos ativos. A teoria do portfólio desenvolvida por (Markowitz, 1952), influenciou a forma como se realizam investimentos até aos dias de hoje. Diferentes estimadores de volatilidade podem gerar diferentes portfólios e, conseqüentemente, diferentes resultados. Nesta dissertação analisámos diversos portfólios gerados através de métodos de estimação de volatilidade distintos, tais como, a Volatilidade Histórica (VH), o *Exponential Weighted Moving Average* (EWMA) e o *Dynamic Conditional Correlation* (DCC) (apresentado por (Engle, 2002)), sendo que este estudo se concentrou essencialmente na análise da composição e rentabilidades efetivas dos mesmos. Analisámos também o modelo *Baba Engle Kraft and Kroner* (BEKK) (apresentado por (Engle and Kroner, 1995)), mas não o usamos, apenas abordamos os problemas de estimação que este apresentou e deixamos alguns conselhos para quem o queira usar no futuro. Verificámos que os portfólios mais distintos são os portfólios gerados pela VH e pelo DCC. Nas rentabilidades diárias verificou-se uma maior proximidade dos portfólios gerados pelo EWMA aos portfólios selecionados pelo DCC, enquanto que, nas rentabilidades semanais verificou-se uma maior proximidade entre os portfólios gerados pela VH e o EWMA. Concluímos também que não existe nenhum método de estimação de volatilidade que gere portfólios cujas rentabilidades efetivas e as suas volatilidades sejam significativamente diferentes.

Palavras-chave: Estimadores de Volatilidade, Teoria do Portfólio, BEKK, DCC, Pesos de Portfólios, Rentabilidades de Portfólios

Classificação JEL: G110, G170, G320

Abstract

The study of the volatility is key issue to risky investments, and financial institutions. Different approaches were created in the past decades concerning this study object. The Portfolio Theory developed by (Markowitz, 1952), was one of the most important developments in risk investment theory. Different approaches to estimate volatility could generate different Portfolios and therefore results. In this dissertation we will analyse the compositions and results of portfolios generated by different volatility estimators. In order to do so we will use the Historic Volatility(VH), Exponential Weighted Moving Average (EWMA), and Dynamic Conditional Correlation (DCC)((Engle, 2002)). In addition we will review the BEKK model ((Engle and Kroner, 1995)) but we will not use it, we will just describe it's estimation problems and give some advices to whoever want's to use it in the future. We concluded the most outlying portfolios were selected by VH and DCC . In diary returns we found that portfolios generated by EWMA and DCC were quite similiar. The opposite was observed in the weekly return analysis where the portefolios selected by EWMA were quite similar to the portefolios generated by VH. We also found that in portfolios analysed, that there was no difference in the results of the portfolios constructed by different volatility estimators.

Keywords: Volatility Estimator, Portfolio Theory, BEKK, DCC, PortfolioWeights, Portfolio Returns

JEL Classification: G110, G170, G320

Lista de Acrónimos e Siglas

ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (Engle, 1982)

BEKK - Baba, Engle, Kraft and Kroner (Engle and Kroner, 1995)

CCC - Constant Conditional Correlation (Bollerslev, 1990)

DCC - Dynamic Conditional Correlation

EWMA - Exponential Weighted Middle Average

FARCH - Factor Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (Engle et al., 1990)

GARCH - Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (Bollerslev, 1986)

GMV - Global Minimum Variance (Portefólios de Variância Mínima)

S1D5 - Seleção 1 Dimensão 5

S2D5 - Seleção 2 Dimensão 5

S1D10 - Seleção 1 Dimensão 10

S2D10 - Seleção 2 Dimensão 10

VH - Volatilidade Histórica

Índice

1	Introdução	1
2	Revisão da Literatura	4
2.1	Os Factos Estilizados das Séries Temporais Financeiras	4
2.2	Os modelos ARCH e GARCH	5
2.3	Trabalho Relacionado	6
3	Teoria do Portefólio	8
3.1	Pressupostos	8
3.2	Cálculo dos Pesos de um Portefólio	9
3.3	A Fronteira de Eficiência	10
4	A Matriz de Covariância e os Estimadores de Volatilidade	12
4.1	Matriz de Covariância	12
4.2	Estimação da Volatilidade Histórica	13
4.3	Matriz de Covariância com Pesos Exponencialmente Crescentes	14
4.4	BEKK	15
4.5	DCC	18
5	Análise Empírica - Dados e Metodologia	20
5.1	Dados	21
5.2	Seleção de Ativos	22
5.3	Estimação das Matrizes de Covariância	23
5.4	Análise dos Pesos das Ações dos Portefólios	25
5.5	Análise de Rentabilidades	26
6	Resultados	26
6.1	Tempos de Execução	27
6.2	Problemas na Estimação do Modelo BEKK	28
6.3	Resultados da Análise de Pesos	29
6.3.1	Análise de Pesos Seleção 1 Dimensão 5	29
6.3.2	Análise de Pesos Seleção 2 Dimensão 5	30
6.3.3	Análise de Pesos Seleção 1 Dimensão 10	31
6.3.4	Análise de Pesos Seleção 2 Dimensão 10	31
6.3.5	Conclusões da Análise de Pesos	32
6.4	Resultados da Análise de Rentabilidades	32

7	Conclusão	33
A	Apêndices	38
A.1	Apêndice 1 - Distribuição Uniforme	38
A.2	Apêndice 2 - Testes Estatísticos	40
B	Anexos	42
B.1	Funções	42
B.1.1	Função RecMatCov, script Rcov.R	42
B.1.2	Função randpeso, script comPesos.R	44
B.1.3	Função com, script comPesos.R	44
B.1.4	Função comrent, script comRent.R	46
B.2	Quadros	49
B.3	Figuras	53

Lista de Quadros

1	Ações Seleccionadas para estudo de Portefólios de dimensão 5	22
2	Ações seleccionadas para estudo de Portefólios de dimensão 10	22
3	Tempos de recolha das matrizes de covariância	27
4	Taxa de Sucesso da estimação do DCC	27
5	Características da Máquina Utilizada	49
6	Médias e Variâncias do Indicador das Diferenças dos Pesos do Portefólio GMV, e dos pesos Gerados aleatoriamente, Seleção 1 Dimensão 5 . . .	49
7	Médias e Variâncias do Indicador das Diferenças dos Pesos do Portefólio GMV, e dos pesos Gerados aleatoriamente, Seleção 2 Dimensão 5 . . .	49
8	Médias e Variâncias do Indicador das Diferenças dos Pesos do Portefólio GMV, e dos pesos Gerados aleatoriamente, Seleção 1 Dimensão 10 . . .	49
9	Médias e Variâncias do Indicador das Diferenças dos Pesos do Portefólio GMV, e dos pesos Gerados aleatoriamente, Seleção 2 Dimensão 10 . . .	50
10	Análise de Rentabilidades, valores da estatística (W) dos testes de normalidade Shapiro-Wilk	50
11	Análise de Rentabilidades, valores do teste F de igualdade de variâncias	50
12	Análise de Rentabilidades, valores do teste-t de igualdade de Médias . .	51
13	Comparação Rentabilidade a um e cinco dias, valores das estatísticas dos testes t igualdade de médias e do teste F de igualdade de variâncias . .	51
14	Comparação Rentabilidade das médias (valores do teste t) e, variâncias (valores do teste F), de portefólios com as mesmas dimensões e métodos de Seleção diferentes, rentabilidade a um dia	51
15	Comparação Rentabilidade das médias (valores de teste t) e, variâncias (valores de teste F), de portefólios com as mesmas dimensões e métodos de Seleção diferentes, rentabilidade a cinco dias	52
16	Médias e Variâncias das Rentabilidade Efetivas do Portefólio GMV, Seleção 1 Dimensão 5, Sem Short Sales	52
17	Médias e Variâncias das Rentabilidade Efetivas do Portefólio GMV, Seleção 2 Dimensão 5, Sem Short Sales	52
18	Médias e Variâncias das Rentabilidade Efetivas do Portefólio GMV, Seleção 1 Dimensão 10, Sem Short Sales	52
19	Médias e Variâncias das Rentabilidade Efetivas do Portefólio GMV, Seleção 2 Dimensão 10, Sem Short Sales	53

Lista de Figuras

1	Fronteira de Eficiência dos Portefólios, adaptado de (Fabozzi et al., 2007)	11
2	Esquema da Metodologia; Fonte: Elaboração Própria	24
3	Esquema das Rentabilidades; Fonte: Elaboração Própria	24
4	Densidade da Distribuição Uniforme; Fonte:Elaboração Própria	38
5	Densidade da Distribuição Uniforme Adaptada	39
6	Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 1 Dimensão 5, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.	53
7	Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 1 Dimensão 5, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.	54
8	Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 2 Dimensão 5, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.	54
9	Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 2 Dimensão 5, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.	55
10	Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 1 Dimensão 10, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.	55
11	Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 1 Dimensão 10, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.	56
12	Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 2 Dimensão 10, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.	56
13	Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 2 Dimensão 10, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.	57
14	Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 1 Dimensão 5, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.	57
15	Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 1 Dimensão 5, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.	57
16	Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 2 Dimensão 5, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.	58
17	Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 2 Dimensão 5, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.	58
18	Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 1 Dimensão 10, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.	58
19	Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 1 Dimensão 10, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.	59

20	Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 2 Dimensão 10, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.	59
21	Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 2 Dimensão 10, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.	59

1 Introdução

Os processos de análise da volatilidade assumem um papel crucial tanto nos investimentos financeiros como na solidez das instituições financeiras, sendo a volatilidade inconstante um dos traços característicos dos investimentos nos mercados financeiros. Tendo isto em conta, neste estudo pretende-se fazer um levantamento das diversas abordagens que tentam explicar este fenómeno e analisar o impacto das mesmas na construção dos portefólios.

Um dos artigos centrais deste trabalho é o de (Markowitz, 1952), no qual foram apresentados os fundamentos da teoria do portefólio e do qual se retira uma conclusão fundamental: o investimento em dois títulos com risco traz vantagens na relação rentabilidade-risco, comparativamente com o investimento individual em cada um dos títulos. Às diferentes combinações de proporções existentes entre os dois títulos, está associado uma rentabilidade esperada, e uma variância de portefólio. O objetivo da teoria do portefólio é a determinação das proporções dos títulos da carteira que minimizam o risco (volatilidade), para uma determinada rentabilidade esperada. A construção deste depende de dois *inputs*: a rentabilidade esperada dos ativos e a matriz variância-covariância (matriz de covariância). Quando um portefólio preenche este requisito, apresenta a volatilidade mínima possível para uma determinada rentabilidade esperada (sendo esta igual ou superior à rentabilidade esperada do portefólio de variância mínima), dizemos que este pertence à fronteira de eficiência, nesta, existem diversas combinações de proporções dos títulos para cada rentabilidade esperada. A partir destas, o investidor realiza a escolha do portefólio que maximiza a sua utilidade.

Apresentam-se de seguida os diversos modelos de estimação da volatilidade abordados ao longo do trabalho. Por (Poon and Granger, 2003) foi apresentada uma revisão dos métodos de análise da volatilidade, sendo que estes foram apresentados novamente no trabalho de (Xiao and Aydemir, 2007). Entre os diversos métodos abordados pelos autores podemos destacar a Volatilidade Histórica (VH), e o *Exponential Weighted Moving Average* (EWMA). A incorporação da VH na nossa análise deveu-se a duas razões: ser um estimador tradicionalmente usado no estudo da volatilidade e ser o estimador utilizado na teoria do portefólio quando esta foi inicialmente apresentada. Já a escolha do EWMA justifica-se pelo facto de o modelo incorporar alguma sensibilidade nas últimas observações e, ao mesmo tempo, possuir um processo de cálculo simples.

O modelo *Baba Engle Kroner e Kraft* (BEKK)(Engle and Kroner, 1995), incorpora na análise os desfasamentos da rentabilidade e da sua volatilidade, tanto individuais como cruzados, podendo ser descrito como um caso específico do modelo GARCH mul-

tivariado. Este modelo possui algumas restrições com o objetivo de garantir que a matriz gerada é semi-definida positiva (propriedade essencial da matriz de covariância). Nesta dissertação não iremos utilizar este modelo, iremos sim apresentar os problemas de estimação, tais como: o tempo de execução e inexistência de convergência dos estimadores. Por (Engle, 2002) foi proposto um modelo mais parcimonioso com o propósito de estimar a matriz de covariância, *Dynamic Conditional Correlation* (DCC), inspirado no *Constant Conditional Correlation* (CCC) apresentado por (Bollerslev, 1990). Estes dois modelos, BEKK e DCC, e as suas variantes, são até aos dias de hoje tema de discussão quando falamos da estimação da matriz de covariância ((Caporin and McAleer, 2012)).

O objetivo desta dissertação consiste na análise dos portefólios gerados por estimadores de volatilidade diferentes, mais concretamente, pretendemos averiguar: a distinção da constituição dos portefólios, a rentabilidade efetiva e a volatilidade da mesma. Pretendemos deixar o nosso contributo com a análise destas questões, dado que são escassos os estudos que analisam a composição dos pesos dos portefólios gerados por estimadores diferentes.

No que diz respeito à metodologia iremos abordar quatro estimadores da matriz de covariância: Volatilidade Histórica (VH), *Exponential Weighted Moving Average* (EWMA), o modelo *Baba Engle Kroner and Kraft* (BEKK), e o modelo *Dynamic Conditional Correlation* (DCC). No que diz respeito ao modelo BEKK iremos apenas abordar os problemas da sua estimação, com as matrizes dos restantes estimadores iremos calcular os pesos de diversos portefólios e analisar a diferença que estes possuem entre eles. Os períodos de análise dos portefólios serão um e cinco dias, para cada um dos casos iremos estimar a matriz de covariância com base em rentabilidades a um (diárias) e a cinco (semanais) dias respetivamente. Os portefólios estimados terão dimensões de 5 e 10 ativos, tendo estas dimensões sido escolhidas com base na limitação da capacidade de computação apresentada pelos meios informáticos disponíveis.

No capítulo seguinte (2) irá ser feita a revisão da literatura, onde iremos abordar publicações e conceitos que achamos importante para a contextualização e entendimento do trabalho realizado. Em 3 será abordada a teoria do portefólio, os seus pressupostos e problemas. No capítulo 4 será apresentada uma definição teórica da matriz de covariância e serão abordados os estimadores de volatilidade. No capítulo 5 iremos apresentar os dados, os métodos de seleção dos ativos e a metodologia de análise utilizada. Por fim no capítulo 6 vamos apresentar os tempos de execução das funções de estimação dos diversos modelos, os problemas de estimação do modelo BEKK, os resultados da análise dos pesos dos ativos dos portefólios e os resultados das rentabilidades efetivas.

2 Revisão da Literatura

Nesta capítulo pretendemos apresentar conceitos e publicações úteis para a contextualização e entendimento do tema desta dissertação. Em primeiro lugar iremos fazer uma revisão dos factos estilizados da volatilidade das séries temporais financeiras, essa secção (2.1) permite expor as características do nosso objeto de estudo. Na secção 2.2 apresentar-se-á dois importantes modelos de análise univariada da volatilidade, o modelo ARCH e o modelo GARCH. Na ultima secção (2.3) será apresentado o trabalho relacionado que serviu de inspiração para a elaboração deste.

2.1 Os Factos Estilizados das Séries Temporais Financeiras

Um dos fatores que destaca a análise de séries financeiras da maior parte das análises econométricas é a existência de uma volatilidade inconstante ao longo do tempo. Sendo o estudo da volatilidade das séries financeiras um ponto fulcral deste trabalho, nesta secção aprofundar-se-á o tema, recorrendo aos factos estilizados apresentados por (Xiao and Aydemir, 2007). Um facto estilizado é uma realidade empírica verificada, que se foca na análise dos acontecimentos de forma generalista dando ênfase à análise da tendência do agregado. Aqui pretendemos apresentar os factos característicos das séries temporais financeiras que poderão assumir um papel relevante na compreensão do nosso objeto de estudo. Os factos estilizados são:

Caudas Largas: As distribuições das rentabilidades dos ativos dos mercados financeiros possuem muitas vezes uma configuração leptocúrtica. Ou seja, a sua distribuição probabilística possui um pico mais acentuado e, caudas mais espessas que a distribuição normal. Consequentemente existe uma maior probabilidade de ocorrência de acontecimentos mais afastados do valor esperado ((Fama, 1965)) comparativamente com distribuição normal.

”Clusters”de Volatilidade: Períodos de grande volatilidade são muitas vezes precedidos de outros períodos de grande volatilidade. Este fenómeno é um indicador de persistência dos choques, isto torna os modelos com desfasamentos (GARCH) adequados na estimação da volatilidade futura, pois estes captam as oscilações da volatilidade nos períodos imediatamente anteriores.

Efeitos de Alavancagem: Tal como foi verificado por (Black, 1976) existe uma correlação negativa entre o preço das ações e a volatilidade. Dada a incapacidade de adaptação das unidades produtivas no curto-prazo, uma variação negativa no resultado líquido de curto-prazo da entidade está associada a um desempenho negativo, este poderá ter como consequência direta a variação negativa dos preços das ações e um

aumento na volatilidade das rentabilidades das mesmas. No caso inverso, onde verificamos um aumento no rendimento, tende a verificar-se um aumento do preço e uma subsequente diminuição da volatilidade das rentabilidades das ações.

Memória Longa: Consideremos a auto-correlação de uma variável $y(y_t$ e $y_{t-\tau}$) dada por ρ_τ . Existe "memória longa" quando os coeficientes de correlação (ρ_τ) decaem lentamente numa progressão hiperbólica. Por outras palavras choques na volatilidade poderão afetar os valores futuros da volatilidade durante um longo período de tempo.

Co-movimentos de Volatilidade: Movimentos bruscos num determinado título podem ser compensados por movimentos inversos em outros títulos. Por exemplo: quando observamos as variações nas taxas de cambio, conseguimos verificar que os movimentos numa determinada moeda poderão ser compensados por movimentos contrários noutra, este tipo de fenómeno viabiliza a utilização de modelos multi-variados. A extrapolação deste raciocínio poderá ser feita na análise de mercados da mesma moeda com títulos diferentes.

Após termos retratado os factos estilizados das series temporais financeiras, iremos avançar para a apresentação dos modelos ARCH e GARCH, modelos clássicos de análise da volatilidade.

2.2 Os modelos ARCH e GARCH

Os modelos a apresentar nesta secção têm como objetivo facilitar o entendimento da lógica por detrás dos modelos GARCH multi-variado apresentados na secção 4.

O modelo *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* (ARCH) apresentado por (Engle, 1982), foi uma metodologia que revolucionou o estudo da volatilidade. Consideremos neste caso a rentabilidade condicional:

$$r_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, h_t^2); \quad (1)$$

segue uma distribuição normal de média zero e variância h_t^2 ($r_t | \Psi_{t-1}$, onde Ψ_{t-1} é a informação disponível até ao momento $t - 1$). Esta variância é dada por:

$$h_t^2 = \alpha + \alpha_1 r_{t-1}^2; \quad (2)$$

consideramos desta forma que a volatilidade futura da série irá depender de uma constante (α), e do desfasamento quadrado da rentabilidade (cujo efeito é medido por α_1). De uma forma geral podemos considerar que a volatilidade de r_t pode ser explicada por

p defasamentos das rentabilidades quadradas:

$$h_t^2 = \alpha + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i}^2. \quad (3)$$

Esta adaptação do modelo auto-regressivo permite realizar inferência sobre o valor futuro da volatilidade.

A aplicação deste tipo de modelos surge com espontaneidade na análise de séries financeiras dada a variação na volatilidade que estas apresentam. (Bollerslev, 1986) propôs outra abordagem, o modelo *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH):

$$h_t^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}^2; \quad (4)$$

este para além de incorporar na sua análise defasamentos da rentabilidade, inclui defasamentos da própria variância h_{t-1}^2 . Este pode igualmente ser representado de forma geral por p defasamentos da variável principal, e q defasamentos da variância.

Após termos exposto os modelos ARCH e GARCH iremos apresentar alguns artigos importantes relacionados com o tema desta dissertação.

2.3 Trabalho Relacionado

Iremos agora fazer referência a alguns dos estudos que inspiraram o tema desta dissertação:

(Engel et al., 1995) realizaram uma análise à eficiência do método média-variância, e à variabilidade dos elementos da matriz covariância. Foi apresentado uma versão do modelo média-variância que permitia os coeficientes da matriz covariância variarem de acordo com o modelo GARCH multivariado. Este tipo de modelos apresentam grandes dificuldades de estimação tendo sido impostas algumas restrições para o efeito, contudo, a conclusão do estudo é favorável ao uso de modelos GARCH multivariados na estimação de uma matriz covariância não constante.

(Kroner and Ng, 1998) apresentaram uma análise dos efeitos assimétricos da volatilidade das rentabilidades. Os choques negativos num determinado ativo tendem a originar uma volatilidade maior, contrariamente ao caso do choque positivo, tal como foi referido na secção 2.1 no facto estilizado **Efeitos de Alavancagem** (Black, 1976). É de salientar que neste artigo foram revistos os diversos modelos multi-variados de estimação da volatilidade, VECH (Bollerslev et al., 1988), Baba Engle Kroner Kraft (BEKK) (Engle and Kroner, 1995), Constant Correlation Model (CCC) (Bollerslev, 1990) e FARCH (Engle et al., 1990), pois para além da incorporação dos efeitos assimé-

tricos na volatilidade, este estudo tinha como objetivo a análise do impacto de choques negativos das rentabilidades cotações das grandes empresas na volatilidade das rentabilidades das pequenas. Uma conclusão importante foi o melhoramento substancial na análise usando modelos multi-variados de volatilidade, podendo-se relevar bastante importante na seleção dos portfólios.

(Pojarliev and Polasek, 2001) utilizaram a volatilidade histórica e o modelo BEKK como estimadores de volatilidade. Os objetos do estudo foram diversos índices acionistas de diversas regiões do Globo, tendo sido utilizados quatro métodos de construção de portfólios. O primeiro destes consistia no cálculo do portfólio de variância mínima (GMV) recorrendo à estimação da matriz de covariância da volatilidade histórica. A segunda metodologia foi idêntica à primeira, contudo, os valores da matriz covariância provinham de um BEKK(2,1). A terceira metodologia consistia no cálculo do portfólio de variância mínima para uma determinada rentabilidade fixa. Este, tinha como *inputs* a matriz covariância do modelo BEKK e as rentabilidades esperadas de cada uma das ações, que provinham da média histórica das mesmas, com isto, conclui-se que esta metodologia apresenta pesos relativamente mais estáveis que os portfólios GMV. Por fim o último método de construção de portfólios foi designado pelos autores de *"Market Timing Portfolio"*. Este consistia numa estratégia que alternava entre o investimento entre ativos sem risco, e o investimento em ativo com risco. O estudo constatou que a *"Market Timing Portfolio"* apresenta melhores resultados relativamente às restantes.

Os autores (Horasanl and Fidan, 2007) compararam vários portfólios construídos através de três estimadores de volatilidade distintos, a VH a 100 dias, o EWMA, e o GARCH(1,1). Ao parâmetro λ (parâmetro de alisamento exponencial, secção 4.3), foi atribuído o valor de 0.94, com base no relatório (Morgan and Reuters Ltd, 1996). O estudo conclui que os portfólios baseados no estimador EWMA apresentam melhores combinações rentabilidade esperada/volatilidade do que os portfólios gerados pelo GARCH(1,1). Com este estudo verificou-se que os modelos de alisamento exponencial possuem uma maior prontidão na adaptação às alterações do mercado, já o modelo GARCH(1,1) possui uma adaptação mais lenta.

(Peters, 2008) fez uma análise do modelo DCC e a incorporação do mesmo na construção de portfólios, propôs, como medidor da precisão de previsão dos estimadores, a volatilidade do portfólio GMV. Constatou o autor desse estudo que, em tendência, as matrizes previstas pelo modelo DCC apresentam no curto-prazo, menores volatilidades que as matrizes estimadas pela VH. O mesmo não acontece no longo-prazo, onde a VH tende a apresentar melhores resultados.

3 Teoria do Portefólio

Neste capítulo iremos explicitar os pressupostos e as formalizações da teoria do portefólio. Mais antigo que a teoria do portefólio é o provérbio popular: "Não ponhas todos os ovos na mesma cesta". A transposição deste conceito de diversificação surge com naturalidade para os mercados financeiros, onde existe incerteza no retorno dos ativos. Nos mercados financeiros o conceito de diversificação pode ser encarado como sinónimo de segurança dos investimentos, a escolha de um investimento está sempre condicionada por um trade-off entre o valor esperado e a volatilidade. Antes da abordagem de (Markowitz, 1952) não existia uma formalização de como é que essa diversificação deveria ser feita. Inicialmente abordar-se-á os pressupostos que sustentam a teoria do portefólio, em seguida o problema de minimização quadrática de cálculo dos pesos dos ativos e, por fim, a definição do conceito de fronteira de eficiência.

3.1 Pressupostos

Seguidamente iremos apresentar os pressupostos da teoria do portefólio de (Markowitz, 1952), tendo estes sido revistos por (Hawley and Beyhaghi, 2011):

1. A hipótese de eficiência de mercado convencionada que: o investidor é racional, ou seja, o comportamento deste é dependente do processo de maximização da utilidade; a informação é simétrica, deste modo, todos os intervenientes no mercado possuem a mesma informação; as rentabilidades dos ativos seguem uma distribuição normal, o que implica que a variância é finita e as rentabilidades são independentes umas das outras (esta hipótese é bastante criticada por alguns autores, estes defendem que a normalidade dos ativos não é empiricamente verificada).

2. Os investidores apresentam aversão ao risco. Um investidor que tenha de escolher entre dois portefólios diferentes com a mesma rentabilidade esperada irá preferir o portefólio que apresente menor risco em detrimento do outro.

3. Os investidores terão preferência em escolher os portefólios com maior rentabilidade em detrimento de portefólios com baixa rentabilidade, caso ambos apresentem o mesmo risco.

4. Os investidores são price-takers, ou seja, estes não conseguem afetar os preços de mercado. Este pressuposto pode entrar em conflito com a existência de investidores institucionais.

5. Os investidores sabem a rentabilidade esperada de todos os ativos constituintes das suas carteiras, esta é igual a todos os valores possíveis que poderá verificar ponderado pela probabilidade destes.

Após a apresentação dos pressupostos da teoria do portefólio, será abordado no ponto seguinte a metodologia usada para cálculo dos pesos dos ativos de uma carteira.

3.2 Cálculo dos Pesos de um Portefólio

Nesta secção iremos descrever o método de cálculo do portefólio pertencente à fronteira de eficiência apresentado por (Markowitz, 1952), bem como o seu valor esperado e a sua volatilidade. Iremos abordar o problema de minimização da variância que o investidor enfrenta na escolha das proporções das ações e, as restrições de rentabilidade esperada e soma das proporções dos ativos, ambas impostas neste processo.

No cálculo das proporções dos ativos dos portefólios o valor esperado e a volatilidade são representados da seguinte forma:

$$\mu_p = w' \mu; \tag{5}$$

$$\sigma_p^2 = w' \Sigma w; \tag{6}$$

o valor esperado do portefólio é dependente dos pesos representados pelo vetor w e do valor esperado das rentabilidades dos ativos (vetor μ). A variância do portefólio, apresentada na equação 6, dependerá igualmente do vetor pesos w e da matriz covariância das rentabilidades dos ativos Σ . No processo de escolha das proporções dos ativos o investidor depara-se com o seguinte problema de minimização:

$$\min(w' \Sigma w); \tag{7}$$

um problema de minimização de variância (como podemos observar na equação 6) que apresenta as seguintes restrições:

$$\mu_0 = w' \mu; \tag{8}$$

$$w' \iota = 1, \iota = [1, 1, 1, \dots, 1]. \tag{9}$$

A primeira destas pressupõe que a rentabilidade esperada do portefólio é igual à rentabilidade fixada pelo investidor (equação 8), sendo esta dependente da função de utilidade do mesmo. A segunda restrição considera que a soma de todos os pesos será igual a 1, sendo w' um vetor ($1 \times n$) e, ι um vetor ($n \times 1$) como é apresentado na equação 9. Este problema de otimização quadrática pode ser resolvido através dos multiplicadores de Lagrange, podendo os pesos serem calculados de acordo com (Fabozzi et al., 2007):

$$w = g + h \mu_0; \tag{10}$$

onde g e h derivam de:

$$g = \frac{1}{ac - b^2} \cdot \Sigma^{-1}[c\iota - b\mu]; \quad (11)$$

$$h = \frac{1}{ac - b^2} \cdot \Sigma^{-1}[c\mu - b\iota]; \quad (12)$$

sendo Σ^{-1} a inversa da matriz covariância das rentabilidades e \mathbf{a}, \mathbf{b} , e \mathbf{c} :

$$a = \iota' \Sigma^{-1} \iota; \quad (13)$$

$$b = \iota' \Sigma^{-1} \mu; \quad (14)$$

$$c = \mu' \Sigma^{-1} \mu; \quad (15)$$

O portefólio de variância mínima é aquele que apresenta a menor variância da fronteira de eficiência, encontrando-se no mínimo da parábola. Os pesos deste são obtidos segundo (Clarke et al., 2010):

$$w_{MV} = \frac{\Sigma^{-1} \iota}{\iota' \Sigma^{-1} \iota}; \quad (16)$$

nesta situação não possuímos restrição relativa à rentabilidade esperada (equação 8) pois o objetivo é obter o portefólio de menor variância possível, conseqüentemente, o processo de otimização acaba por ser mais simples.

Nesta secção foi mostrado o problema de minimização quadrática do cálculo dos pesos dos ativos. Na secção seguinte (3.3) vamos expor o conceito de fronteira de eficiência.

3.3 A Fronteira de Eficiência

Em seguida vamos discutir a fronteira de eficiência, a sua configuração, os diversos portefólios e os problemas que o investidor encontra tanto no trade-off rentabilidade/volatilidade, como na maximização da sua utilidade.

Cada portefólio possui uma determinada rentabilidade esperada e volatilidade, estas duas variantes podem ser representadas por um ponto num referencial cartesiano (figura 1). Consideramos que um portefólio pertence à fronteira de eficiência quando este minimiza a volatilidade para uma determinada rentabilidade esperada (μ_0).

Na figura 1 é possível observar o trade-off que existe entre rentabilidade esperada e o risco. A natureza crescente da curva denuncia uma relação positiva entre a rentabilidade esperada e a volatilidade. Segundo os pressupostos 2 e 3 da teoria do portefólio (secção 3.1), concluímos que o valor esperado tem um impacto positivo na utilidade do investidor. O mesmo não se aplica à volatilidade, pois esta tem um impacto ne-

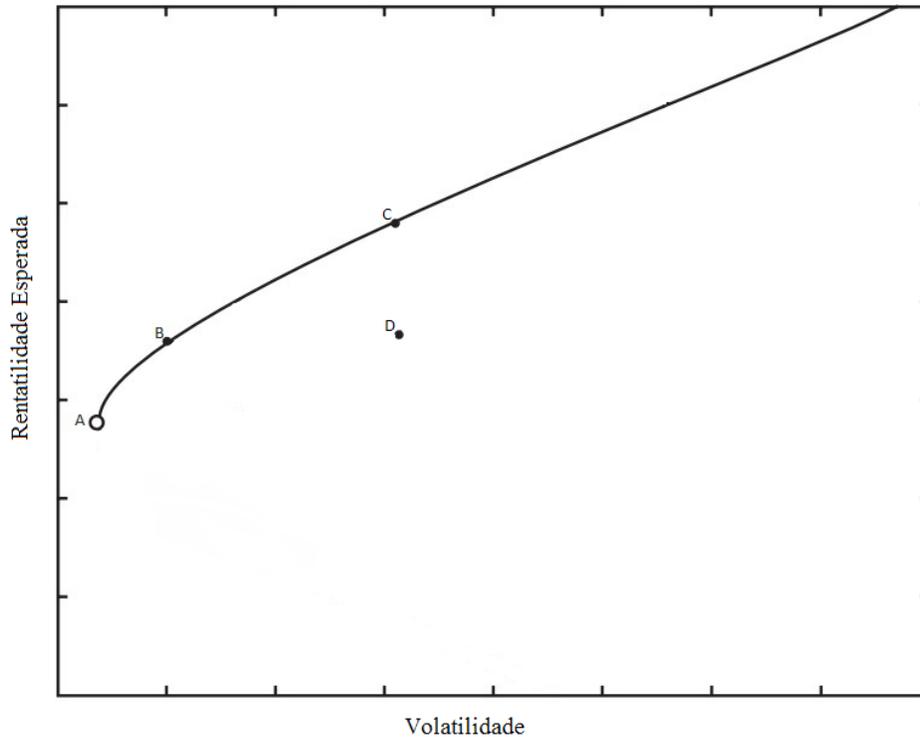


Figura 1: Fronteira de Eficiência dos Portefólios, adaptado de (Fabozzi et al., 2007)

gativo na utilidade do investidor. A escolha do portfólio que maximiza a função de utilidade esperada diverge consoante a função de utilidade e a aversão ao risco. Como podemos observar a curva de fronteira de eficiência possui uma configuração parabólica ((Merton, 1972)). O ponto A é o portfólio de variância mínima, sendo este, o que apresenta a menor variância de todos os portfólios possíveis. O ponto B representa o portfólio de variância mínima absoluta para uma determinada rentabilidade. O portfólio correspondente ao ponto C é igualmente pertencente à fronteira de eficiência e apresenta uma rentabilidade superior às rentabilidades dos portfólios A e B e, conseqüentemente, uma maior volatilidade. Já o portfólio definido no ponto D é ineficiente, pois é possível encontrar um portfólio com variância menor com a mesma rentabilidade (portfólio B) ou, um portfólio com a mesma volatilidade mas com uma rentabilidade maior (portfólio C).

Com esta ultima secção terminamos a nossa análise da teoria do portfólio, passaremos em seguida à apresentação da matriz de covariância e dos estimadores de volatilidade que iremos usar na análise empírica.

4 A Matriz de Covariância e os Estimadores de Volatilidade

Neste capítulo pretendemos apresentar a matriz de covariância e analisar os diversos estimadores de volatilidade que iremos utilizar na abordagem empírica. Inicialmente faremos a abordagem à matriz de covariância em termos teóricos, em seguida apresentaremos o estimador de volatilidade histórica, seguido da estimação da matriz de covariância com recurso ao alisamento exponencial, e por fim iremos analisar os modelos BEKK e DCC.

4.1 Matriz de Covariância

Nesta secção definiremos a matriz de covariância em termos teóricos, bem como as suas propriedades. Considerando X um vetor de variáveis aleatórias de comprimento n e X_i a variável aleatória de ordem i , o seu valor esperado é definido por:

$$\mu_i = E(X_i); \quad (17)$$

e a sua variância:

$$\sigma_i^2 = var(X_i) = E[(X_i - E(X_i))^2]; \quad (18)$$

sendo X_j uma variável aleatória constituinte do vetor X , dado $i \neq j$, a covariância entre X_i e X_j é dada por:

$$\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]; \quad (19)$$

assumindo para um vetor X com comprimento n a matriz de covariância é representada por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \sigma_{2,3} & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \sigma_{n,3} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

A matriz de covariância é semidefinida positiva ou não negativa, ou seja, dado um vetor ω cujo seu transporte é ω^T :

$$\omega^T \Sigma \omega \geq 0, \forall \omega \neq 0; \quad (21)$$

esta propriedade inerente das matrizes de covariância é essencial para a teoria do portfólio, pois o cálculo da variância do portfólio como podemos observar na equação 6 recorre a uma operação idêntica à apresentada na operação 21, onde ω representa os pesos dos ativos. Outra propriedade importante das matrizes de covariância é a simetria, facilmente se observa na equação 19 que o valor de $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Após a apresentação teórica da matriz de covariância realizada nesta secção iremos apresentar os estimadores de volatilidade que usaremos na parte empírica deste trabalho.

4.2 Estimação da Volatilidade Histórica

Após a apresentação da matriz de covariância em termos teóricos será discutido o estimador Volatilidade Histórica (VH). Para tal, iremos inicialmente apresentar os estimadores de variância e covariância individuais, ambos com correção do enviesamento amostral (*Bessel's Correction*). Considerando x_{ik} a rentabilidade do ativo k no período i , o estimador da variância histórica do título k têm a seguinte configuração:

$$s_k^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_k)^2. \quad (22)$$

Por sua vez a covariância histórica entre o ativo k e l é representada por:

$$s_{kj} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(x_{ik} - \bar{x}_k)(x_{il} - \bar{x}_l)]. \quad (23)$$

De forma matricial, dado X_i vetor de rentabilidades dos ativos para o período i , e \bar{X} o vetor das médias aritméticas das rentabilidades de cada título, a construção da matriz de covariância é dada por:

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T. \quad (24)$$

A construção da matriz de covariância histórica apresentada na matriz 20 da secção 4.1, seria realizada com recurso à equação 24. Na análise a realizar iremos considerar uma janela móvel igual para todos os métodos de estimação de volatilidade, desta forma, não será usada toda a amostra disponível (n), mas sim apenas as últimas τ observações do período que pretendemos analisar.

Achámos por bem incluir este estimador na nossa análise pelo facto de este ser consensual e simples. Este pode também servir de referência aos portfólios gerados

por modelos e estimação de volatilidade diferentes, dado que o uso dos mesmos é menos comum na construção de portfólios.

4.3 Matriz de Covariância com Pesos Exponencialmente Crescentes

Nesta secção iremos abordar a estimação da matriz de covariância com recurso aos pesos exponencialmente crescentes (EWMA). Esta abordagem é inspirada no método de Alisamento Exponencial. O método de Alisamento Exponencial consiste na atribuição de pesos exponencialmente crescentes de acordo com a proximidade da observação relativamente ao momento presente. O grau de sensibilidade às observações mais recentes é dado pelo parâmetro λ , sendo o valor de λ compreendido entre 0 e 1. Quanto maior for a proximidade deste ao valor 1, maiores serão os pesos atribuídos às observações mais antigas, analogamente, quanto mais próximo for o valor de λ de 0, maiores serão os pesos atribuídos às observações mais recentes.

Esta abordagem pode também ser adaptada para estimar a variância e a covariância, como é apresentado por exemplo por (Poon and Granger, 2003). Numa situação em que o objetivo é a análise de uma série temporal e não da sua volatilidade, a seleção do parâmetro λ poderá ser realizada através do parâmetro que minimiza a soma dos quadrados dos resíduos (sendo este, igual à diferença entre o valor real da série e o valor ajustado do método de alisamento exponencial). Já numa situação em que usamos o método de alisamento exponencial para analisar a volatilidade, tal procedimento deixa de ser adequado pela inexistência de indicadores relativos à volatilidade num determinado período. Desta forma as publicações que utilizam esta metodologia para analisar volatilidades usam um valor ótimo estimado pelo relatório (Morgan and Reuters Ltd, 1996). Sendo exemplo disso os estudos de (Horasanl and Fidan, 2007) e de (Minkah, 2007).

O vetor de pesos exponencialmente crescentes (Λ) é representado da seguinte forma:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 = (1 - \lambda) \\ \lambda_2 = \lambda_1 \lambda \\ \lambda_3 = \lambda_2 \lambda \\ \vdots \\ \lambda_n = \lambda_{n-1} \lambda \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Na construção da matriz de covariância é possível estipular um λ para cada um dos elementos, contudo, muitas das vezes este procedimento pode levar a que as matrizes

geradas não possuem as propriedades da matriz de covariância: ser simetria, e ser semi-definida positiva (tal como abordado na publicação de (Minkah, 2007), e apresentado na secção 4.1). Desta forma iremos utilizar neste trabalho o valor de $\lambda = 0.94$, parâmetro utilizado na maioria das publicações que usa este estimador e, recomendado pelo relatório (Morgan and Reuters Ltd, 1996).

Dados os pesos, assumimos que o valor esperado das rentabilidades são dados por:

$$\mu^* = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \quad (26)$$

Já matriz de covariância de pesos exponencialmente crescentes é dada por:

$$\Sigma = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - \mu^*)^T (x_i - \mu^*). \quad (27)$$

O método EWMA é um método de simples computação comparativamente com os métodos que iremos apresentar a seguir (secções 4.4, 4.5). Ao mesmo tempo este método apresenta uma maior sensibilidade de curto prazo comparativamente com o estimador de volatilidade histórica apresentado na secção 4.2. Estas foram as razões que nos levaram a incorporar este método na nossa análise.

4.4 BEKK

Nesta secção iremos expor o modelo *Baba Engle Kraft and Kroner* (BEKK), modelo que iremos abordar novamente na parte empírica do trabalho, mas não iremos utilizar na nossa análise. Para um melhor entendimento deste mostraremos inicialmente o modelo VECH (Bollerslev et al., 1988), um caso generalizado do modelo BEKK, tendo sido VECH o modelo que serviu de inspiração para o modelo BEKK. Consideremos a r_t o vetor das rentabilidades:

$$r_{t+1} | \Psi_t \sim N(0, H_t); \quad (28)$$

onde Ψ_t é a informação disponível no momento t (equação 28), assumimos que a rentabilidade condicional ($r_{t+1} | \Psi_t$), segue uma distribuição normal de média 0 e variância H_t . Nesta abordagem consideramos que a matriz H_t , matriz de covariância que dependerá de p desfasamentos do produto cruzado das rentabilidades r e, de q desfasamentos do

próprio h_t (Engle and Kroner, 1995). O modelo $VECH(p, q)$, sem variáveis exógenas, apresenta a seguinte configuração:

$$h_t = C_0 + A_1 \eta_{t-1} + \dots + A_q \eta_{t-q} + G_1 h_{t-1} + \dots + G_p h_{t-p}; \quad (29)$$

dado que h_t é o vetor que possui todas as variâncias e covariâncias empilhadas e, η o vetor que contem os produtos cruzados das rentabilidades igualmente empilhadas (equação 30). Sendo valor de n o número de ativos, C_0 um vetor com $n^2 \times 1$, A_i e G_i matrizes de dimensão $n^2 \times n^2$. O modelo com $n = 2$, considerando $p = q = 1$, pode ser representado de forma matricial por ((Engle and Kroner, 1995)):

$$h_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{21,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ c_{03} \\ c_{04} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-1}^2 \\ r_{1,t-1} r_{2,t-1} \\ r_{2,t-1} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}; \quad (30)$$

de notar que na equação 30 foi estimado $h_{21,t}$, este assume um papel redundante dado que a matriz de covariância é simétrica (secção 4.1). Outra observação a destacar é que todos os parâmetros fora da diagonal principal aparecerão duas vezes, tanto as rentabilidades cruzadas desfasadas ($r_{1,t-1} r_{2,t-1}$ e $r_{2,t-1} r_{1,t-1}$), como volatilidades desfasadas ($h_{ij,t-1}$ e $h_{ji,t-1}$). A eliminação dos parâmetros redundantes resultará num número total de parâmetros de $(\frac{n(n+1)}{2})^2$, sendo o número inicial de parâmetros n^4 . Este modelo possui algumas limitações no que diz respeito à estimação de alguns parâmetros redundantes e, também não garante que a matriz de covariância gerada é semi-definida positiva, sendo esta uma das propriedades constatada na secção 4.1.

O modelo BEKK é um modelo GARCH multivariado, consistindo este numa adaptação do modelo VECH. Os modelos GARCH multivariados são caracterizados pela grande complexidade computacional e, consequentes dificuldades de estimação. Face à redundância de alguns dos parâmetros do modelo VECH, em (Engle and Kroner, 1995) propuseram o modelo BEKK, uma forma mais parcimoniosa de realizar inferência multivariada sobre volatilidade de variáveis aleatórias.

Consideremos novamente a série das rentabilidades r com a mesma configuração que a apresentada na equação 28. O modelo BEKK possui então a seguinte configuração:

$$H_t = C_0^{*'} C_0^* + A_{11}^{*'} r_{t-1} r_{t-1}' A_{11}^* + G_{11}^{*'} H_{t-1} G_{11}^*; \quad (31)$$

onde (equação 31), a matriz H_t representa a matriz covariância, r_{t-1} o vetor da série

das rentabilidades desfasadas e H_{t-1} o desfasamento de H_t . Consideremos novamente n o número de variáveis a estimar, para $n = 2$ os parâmetros constantes podem ser representados por:

$$C_0^{*'} C_0^* = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}; \quad (32)$$

a matriz C_0^* é uma matriz triangular superior e os seus elementos não possuem significado prático (Engle and Kroner, 1995): a fatorização realizada nesta matriz foi apenas com o intuito de garantir que o valor final dos parâmetros constantes sejam positivos. Há que reparar que este produto de matrizes resulta uma matriz simétrica $C_0^{*'} C_0^*$ ($c_{21} = c_{12}$). As matrizes $A_{11}^{*'}$ e $G_{11}^{*'}$ são matrizes $n \times n$ que possuem os parâmetros referentes aos desfasamentos da série das rentabilidades e da matriz de covariância, podendo estas serem representadas por:

$$A_{11}^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad (33)$$

$$G_{11}^* = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Os elementos da matriz covariância podem ser representados da seguinte forma ¹ :

$$\sigma_{11,t} = c_{11} + a_{11}^2 r_{1,t-1}^2 + 2a_{11}a_{21}r_{1,t-1}r_{2,t-1} + a_{21}^2 r_{2,t-1}^2 + g_{11}^2 \sigma_{11,t-1} + 2g_{11}g_{21}\sigma_{21,t-1} + g_{21}^2 \sigma_{22,t-1}; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{21,t} = c_{21} + a_{11}a_{22}r_{1,t-1}^2 + (a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22})r_{1,t-1}r_{2,t-1} + a_{21}a_{22}r_{2,t-1}^2 + g_{11}g_{22}\sigma_{11,t-1} \\ + (g_{21}g_{12} + g_{11}g_{22})\sigma_{12,t-1} + g_{21}g_{22}\sigma_{22,t-1}; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\sigma_{22,t} = c_{22} + a_{12}^2 r_{1,t-1}^2 + 2a_{12}a_{22}r_{1,t-1}r_{2,t-1} + a_{22}^2 r_{2,t-1}^2 + g_{12}^2 \sigma_{11,t-1} + 2g_{12}g_{22}\sigma_{21,t-1} + g_{22}^2 \sigma_{22,t-1}; \quad (37)$$

Podemos observar que o modelo BEKK possui a vantagem de garantir que a matriz covariância apresentada na equação 31 é semi-definida positiva, tendo sido várias fatorizações realizadas neste sentido. O número de parâmetros estimados com o modelo BEKK é, segundo (Su and Huang, 2010), $(p + q)n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$, que contrasta com os n^4 parâmetros estimados do modelo VECH.

O modelo BEKK é o modelo computacionalmente mais exigente que abordamos,

¹representação consultada em http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc_homepage/xplore/tutorials/xflightnode67.html

mas infelizmente, por motivos que iremos apresentar com detalhe mais à frente, este modelo não irá ser usado na nossa análise. De qualquer forma, como é um dos modelos mais completos neste tipo de análise, não quisemos deixar de fazer referência.

4.5 DCC

No seguimento da apresentação dos modelos de estimação de volatilidade vamos descrever o modelo *Dynammic Conditional Correlation* (DCC), modelo que será usado na parte metodológica do trabalho. Iremos começar por apresentar brevemente o modelo *Constant Conditional Correlation* (CCC), que serviu de base para a criação do modelo DCC.

O modelo CCC apresentado por (Bollerslev, 1990), é um modelo de análise de volatilidade de curto-prazo, este assume:

$$r_{t+1}|\Psi_t \sim N(0, H_t); \quad (38)$$

considerando que a série das rentabilidades condicionais ($r_{t+1}|\Psi_t$) segue uma distribuição normal de média 0 e variância H_t (de acordo com a equação 38). Sendo h_{ijt} o elemento ij da matriz H_t no momento t , a incorporação da relação existente entre as rentabilidades dos ativos i e j é feita através do coeficiente de correlação condicional $\rho_{ij} = \frac{h_{ijt}}{\sqrt{h_{it}^2 h_{jt}^2}}$, fazendo uma manipulação simples nesta equação, obtêm-se:

$$h_{ijt} = \rho_{ij}(h_{it}^2 h_{jt}^2)^{1/2}; \quad (39)$$

já a variância condicional segue um GARCH(1,1):

$$h_{it}^2 = \alpha_0 + \alpha_i r_{t-1}^2 + \beta_i h_{1,t-1}. \quad (40)$$

A matriz de covariância condicional H_t pode ser especificada da seguinte forma:

$$H_t = D_t R D_t. \quad (41)$$

Tal como podemos observar na equação 41, R é a matriz de correlação constante com dimensão $n \times n$, cujos parâmetros podem ser especificados por $\rho_{ij} \sqrt{\omega_i \omega_j}$. Já a matriz D_t possui igualmente uma dimensão $n \times n$ e a sua diagonal principal é constituída pelos elementos h_{1t}, \dots, h_{Nt} (provenientes da equação 40).

O modelo DCC foi construído com o intuito de ser flexível como um GARCH univariado e, ao mesmo tempo incorporar a variação das correlações entre os ativos. Tal

como foi expresso pelos autores por (Engle, 2002), este possui uma configuração idêntica ao modelo CCC, apresentado na equação 41, com a diferença de considerar a matriz R variável ao longo do tempo.

Assumimos novamente que a rentabilidade condicional segue uma distribuição normal de média 0 e variância H_t , tal como definido no modelo CCC (equação 38), contudo estipulemos que a variância (H_t) é representada da seguinte forma:

$$H_t = D_t R_t D_t. \quad (42)$$

Ao contrário do que podemos observar na equação 41, em 42 o parâmetro R varia ao longo do tempo. Essa é a vantagem do DCC relativamente ao modelo CCC, a possibilidade dos elementos da matriz de correlação variarem ao longo do tempo. Consideremos a matriz D_t :

$$D_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{1,t}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{2,t}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{h_{N,t}} \end{bmatrix}; \quad (43)$$

onde D_t é uma matriz cuja diagonal principal (matriz 43) possui as estimativas de volatilidade individual provenientes de um GARCH(1,1):

$$h_{1,t} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_0 h_{1,t-1}; \quad (44)$$

e a matriz de correlação R_t possui a seguinte configuração:

$$R_t = \begin{bmatrix} 1 & q_{12,t} & \cdots & q_{1N,t} \\ q_{21,t} & 1 & \cdots & q_{2N,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N1,t} & q_{N2,t} & \cdots & 1 \end{bmatrix}; \quad (45)$$

sendo H_t a matriz de covariância, esta é semi-definida positiva (secção 4.1) então a matriz R_t terá de ser igualmente semi-definida positiva. Por sua vez como matriz de correlação terá que ter os seus elementos menores ou iguais à unidade. Para que ambas as condições requeridas se verifiquem é realizada a seguinte manipulação:

$$R_t = \bar{Q}_t Q_t \bar{Q}_t; \quad (46)$$

onde Q_t é uma matriz definida positiva cuja estimação pode variar consoante a abor-

dagem que usamos. Já a matriz \bar{Q} é definida por:

$$\bar{Q}_t = \text{diag}(Q_t)^{-\frac{1}{2}}; \quad (47)$$

esta tem o papel de ajustar os escalares da matriz Q_t , garantindo através do produto apresentado na equação 46 que $|q_{ij}| \leq 1$, tal como apresentado por (Peters, 2008). Consideremos a correlação gerada por um modelo GARCH(1,1), como sugerido por (Engle, 2002):

$$q_{ij,t} = \bar{\rho}_{ij} + \alpha(\epsilon_{i,t-1}\epsilon_{j,t-1} - \bar{\rho}_{ij}) + \beta(q_{ij,t-1} - \bar{\rho}_{ij}); \quad (48)$$

onde ρ_{ij} é o coeficiente de correlação incondicional e, ϵ o distúrbio estandardizado calculado através da divisão da série das rentabilidades pela variância condicional estimada:

$$\epsilon_t = D_t^{-1}r_t. \quad (49)$$

A estrutura dinâmica da correlação que iremos utilizar foi apresentada por (Engle, 2002) e possui a seguinte representação:

$$Q_t = S(1 - \alpha - \beta) + \alpha(\epsilon_{t-1}\epsilon'_{t-1}) + \beta Q_{t-1}; \quad (50)$$

consideramos desta forma que Q_t depende de S , a matriz de correlação incondicional, de ϵ_{t-1} (distúrbio estandardizado cujo efeito captado por α), e de Q_{t-1} (cujo efeito é captado por β). Esta estrutura dinâmica foi inspirada no modelo GARCH(1,1) apresentado na equação 48.

Decidimos incorporar este modelo na nossa análise pois este apresenta maior facilidade de computação que o modelo BEKK (apresentado na secção 4.4) e, ao mesmo tempo maior complexidade que o modelo EWMA (secção 4.3) e que a VH (secção 4.2).

5 Análise Empírica - Dados e Metodologia

Neste capítulo iremos apresentar dados e metodologia usados na análise empírica que realizamos. Serão inicialmente apresentados os dados utilizados, em seguida o método de seleção de ativos, a metodologia, o método de análise da dispersão dos pesos e por fim, o método de análise dos resultados dos portefólios. A implementação desta análise foi realizada com recurso ao *R*, ao longo da exposição iremos abordar os diversos *packages* e *scripts* que usámos, alguns destes estão disponíveis em anexo.

5.1 Dados

Nesta secção pretendemos apresentar os dados que iremos usar neste estudo, a sua dimensão e os primeiros processos de tratamento de dados que realizámos. Os dados usados neste trabalho foram extraídos do *DataStream*, consistindo em séries temporais dos preços ajustados das ações pertencentes ao índice *Euro-Next100*. Seleccionamos as ações constituintes deste índice, pois as empresas constituintes do mesmo possuem uma dimensão considerável, atuam no mercado internacional e, estão presentes numa grande diversidade de sectores de atividade e economias. O intervalo inicial foi definido de 17/02/1989 a 17/02/2014, sendo que, no início da amostra não estavam disponíveis todos os ativos. Face ao número de ativos limitado redefinimos o intervalo de forma a termos um número de ativos e observações adequado. O novo intervalo têm início em 17/02/2004 e fim em 17/02/2014, ficámos assim com os dados de 80 ações constituintes do índice *EuroNext100*, e 2610 observações.

Após esta restrição foram calculadas as taxas de rentabilidade a um e cinco dias. A taxa de rentabilidade do ativo i , com periodicidade τ , no momento t , é dada por:

$$R_{i,t,\tau} = \frac{(P_{i,t} - P_{i,t-\tau})}{P_{i,t-\tau}} \times 100. \quad (51)$$

No caso em que $\tau = 5$ a série das rentabilidades terá a seguinte configuração:

$$\begin{bmatrix} \frac{(P_{i,6} - P_{i,1})}{P_{i,1}} \times 100 \\ \frac{(P_{i,11} - P_{i,6})}{P_{i,6}} \times 100 \\ \frac{(P_{i,16} - P_{i,11})}{P_{i,11}} \times 100 \\ \vdots \\ \frac{(P_{i,n} - P_{i,n-5})}{P_{i,n-5}} \times 100 \end{bmatrix}; \quad (52)$$

as rentabilidades no vetor 52 ($\tau = 5$) evitam sobreposição de observações.

Os dados para análise são então 80 ações constituintes do índice *EuroNext100* entre 17/02/2004 a 17/02/2014. Ficamos assim com um total de 2610 observações nas séries de preços, 2609 nas séries de rentabilidades a um dia e, 521 observações nas séries de rentabilidades a cinco dias.

Vamos assumir que as rentabilidades seguem uma distribuição normal de média zero, e variância descrita pelo estimador de volatilidade usado, esta condição é essencial para a construção das carteiras segundo a teoria do portefólio. Muitas das vezes esta hipótese de normalidade não é verificada nos testes estatísticos, contudo, isso não implica que o modelo de média-variância deixe de ser eficaz na seleção de carteiras eficientes.

Após a apresentação das séries de estudo e das suas características iremos apresentar a forma de seleção de ações que serão utilizadas neste trabalho.

5.2 Seleção de Ativos

Nesta secção apresentar-se-á o método de seleção de ativos que foi usado, bem como, os grupos de ações que foram selecionadas a partir destes métodos. Dentro do grupo de 80 ações iremos dividir este em dois grupos de forma aleatória, constituídos respetivamente por 40 ações cada. No primeiro grupo aplicar-se-á o método de Seleção 1, no segundo o método de Seleção 2, sendo que, para cada um deles iremos criar um grupo de 5 e outro de 10 ativos respetivamente:

Quadro 1: Ações Selecionadas para estudo de Portefólios de dimensão 5

Seleção 1	Seleção 2
Essilor International S.A.	Jerónimo Martins SGPS, S.A
Bic	UCB S.A.
Energias de Portugal, S.A.	Atos SE
Koninklijke Vopak N.V.	Fugro N.V.
L’Air Liquide S.A.	AXA S.A.

Fonte: Elaboração Própria

Quadro 2: Ações selecionadas para estudo de Portefólios de dimensão 10

Seleção 1	Seleção 2
Essilor International S.A.	Heineken S.A
Bic	Jerónimo Martins SGPS, S.A
Energias de Portugal, S.A.	UCB S.A.
Koninklijke Vopak N.V.	Solvay S.A.
L’Air Liquide S.A.	Atos SE
Unilever N.V.	Accor
Reed Elsevier PLC/N.V.	Natixis
Delhaize Group S.A	Fugro N.V.
Icade SA	Renault S.A.
Dassault Systèmes S.A.	AXA S.A.

Fonte: Elaboração Própria

No método de Seleção 1 calculamos os pesos do portefólio de variância mínima de uma carteira constituída pelo grupo aleatoriamente definido de 40 ações, onde a matriz de covariância é estimada com recurso ao método da volatilidade histórica (secção 4.2). Daqui serão selecionados os ativos que apresentarem maiores proporções do portefólio. Os ativos selecionados estão apresentados na primeira coluna dos quadros 1 e 2.

No método de Seleção 2 o objetivo é obter ações com os pesos mais distintos. Desta forma calculamos igualmente o portefólio de variância mínima com as restantes 40 ações do grupo, ordenamos as proporções das ações na carteira por ordem crescente e segmentamos o portefólio em 10 grupos de 4 ações cada um. Esta segmentação foi feita com o objetivo de selecionar um ativo por cada conjunto de pesos relativamente próximos, garantindo que no final possuímos um grupo de ações com uma grande diversidade de pesos do portefólio construído inicialmente. Em cada grupo de 4 ações foi selecionada uma, dependendo a seleção desta do sector de atividade da empresa ou grupo cotado, tentámos não selecionar mais do que uma empresa por setor de atividade. Com isto, obtemos as 10 ações com as quais iremos realizar o nosso estudo tal como apresentado na segunda coluna do quadro 2. Após a seleção de 10 ações selecionaremos 5 deste grupo de 10, provenientes dos sectores de atividade mais diversos, estas são apresentadas na segunda coluna do quadro 1.

Após termos descrito os métodos de seleção das ações e das próprias ações selecionadas iremos analisar em seguida o método de análise utilizado, a fim de recolher as matrizes de covariância.

5.3 Estimação das Matrizes de Covariância

Seguidamente pretendemos descrever a metodologia que usámos para recolher as diversas matrizes de covariância que serviram de base para a construção dos portefólios.

Tal como abordamos na secção 5.2, iremos especificar o método de recolha das matrizes de covariância das carteiras de dimensão 5 e 10 títulos. Tendo sido estes selecionados tanto pelo método de Seleção 1 como pelo o método de Seleção 2. As diversas combinações de grupos de ações (Seleção 1 e 2, Dimensão 5 e 10), de rentabilidades (a um e cinco dias), e métodos de estimação (VH, EWMA, e DCC), perfazem um total de 24 recolhas de matrizes de covariância por cada período. Em ambas as análises com carteiras de dimensão 5 e 10, iremos utilizar o método de volatilidade histórica (secção 4.2), EWMA (secção 4.3), e o DCC (secção 4.5), excluindo o BEKK (secção 4.4) da nossa análise por razões que abordaremos mais à frente.

No processo de análise iremos estimar sucessivamente cada um dos modelos com um intervalo de estimação móvel, que será de 200 observações, sendo que, para cada intervalo definido iremos estimar os modelos e recolher a matriz covariância para o período seguinte. Este processo de recolha de matrizes permitirá analisar os portefólios provenientes de diferentes estimadores de volatilidade.

Como podemos observar na figura 2, para uma janela móvel de 7 observações, utilizamos inicialmente o conjunto de observações A , de $t - 6$ a t , para obter a matriz

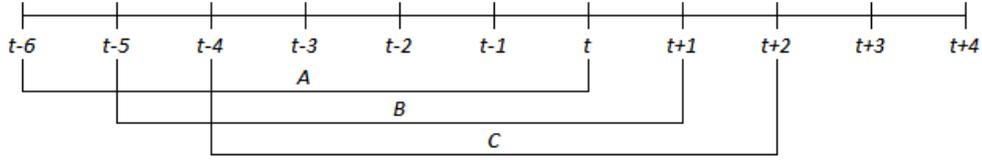


Figura 2: Esquema da Metodologia; Fonte: Elaboração Própria

de covariância estimada para $t + 1$. Em seguida, avançaremos a janela sucessivamente a fim de estimar as matrizes de covariância seguintes, como podemos observar pelos intervalos de estimação B e C. O processo será reproduzido até ao fim da amostra.

Tendo em conta que possuímos dois tipos de séries temporais, rentabilidades a um dia (2609 observações) e, rentabilidades a cinco dias (521 observações), iremos estimar as matrizes de covariância para todos os períodos da amostra das rentabilidades a 5 dias, numa janela móvel de dimensão de 200 observações. A dimensão desta janela móvel foi selecionada com o objetivo de: obter um número adequado de matrizes, que nos permita realizar a comparação dos portefólios gerados por métodos de estimação distintos e, ao mesmo tempo, obter um número razoável de observações que possibilite a convergência do modelo DCC (tanto na componente uni-variada como na estrutura dinâmica). Usaremos os dados das rentabilidades a 1 dia, que nos permitam calcular as matrizes de covariância dos mesmos períodos da série temporal das rentabilidades a 5 dias, de forma a que os períodos das matrizes de covariância finais sejam iguais entre as duas séries temporais.

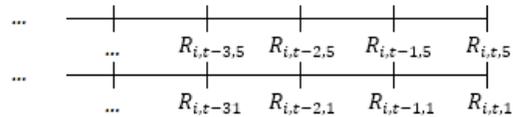


Figura 3: Esquema das Rentabilidades; Fonte: Elaboração Própria

Tal como podemos observar na equação 52, as rentabilidades a um dia são calculadas através das variações diárias dos valores das ações, e as rentabilidades a 5 dias são calculadas através da variação semanal. As estimações onde são usadas as rentabilidades a um dia utilizam informação da variação diária ocorrida nos dias anteriores. Contudo, a sua capacidade de previsão no modelo DCC resume-se a um período à frente, por ausência dos desfasamentos da série das rentabilidades. Por sua vez, a estimação com rentabilidades semanais não incorporam a variação das rentabilidades nos dias anteriores, mas sim das semanas anteriores. A vantagem que resulta desta agregação é a possibilidade de previsão da matriz de covariância a uma semana.

Para efetuar a análise representada na figura 2, elaboramos a função "RecMat-

Cov” presente no script *RCov.R* (pode ser consultada no anexo B.1.1). Esta função percorre a amostra das rentabilidades a 5 dias e das respectivas datas das rentabilidades a um dia, recolhendo a matriz de covariância para cada uma das datas e das rentabilidades. Caso existam problemas de convergência quando estimamos o modelo DCC, não serão guardadas quaisquer matrizes para o período.

Após a recolha das matrizes de covariância iremos calcular os pesos do portefólio de variância mínima (secção 3.2). Para cada um destes realizar-se-à dois tipos de análise: a análise da composição dos pesos das ações nas carteiras (secção 5.4), e a análise das rentabilidades efetivas (secção 5.5).

5.4 Análise dos Pesos das Ações dos Portefólios

Posteriormente iremos apresentar o método de análise dos pesos das ações constituintes da carteira. Usaremos como indicador de dispersão dos pesos dos portefólios o seguinte indicador:

$$I_{A,B} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (p_{A,i} - p_{B,i})^2}; \quad (53)$$

este indicador pretende analisar a diferença de pesos apresentados por dois portefólios A e B. Sendo k o número de ações em cada portefólios, seja $p_{A,i}$ o peso da ação i no portefólio A, e $p_{B,i}$ o peso da mesma ação i no portefólio B. Quanto maior for a proximidade deste indicador ao valor 0, maior é a proximidade entre os dois portefólios; inversamente, quanto mais afastado for o valor $I_{A,B}$ de 0 maior será a diferença na composição dos dois portefólios.

Dado o indicador de dispersão dos portefólios iremos realizar dois tipos de análise. A primeira das quais será a comparação dos portefólios construídos com métodos de estimação de volatilidade distintos. Com isto, pretendemos construir a distribuição deste indicador, pois este irá analisar a dispersão dos pesos das ações dos portefólios constituídos pelos diversos métodos de estimação de volatilidade usados. A segunda análise será a comparação dos pesos de dois portefólios, os quais foram gerados aleatoriamente de acordo com uma distribuição uniforme. Esta análise servirá apenas de referência às comparações realizadas na primeira análise, procuramos saber se os portefólios são ou não diferentes dos portefólios selecionados aleatoriamente. É de salientar que na geração de dados aleatórios foram realizadas algumas adaptações na Distribuição Uniforme, para que a probabilidade de pesos iguais a zero seja mais realista, esta adaptação pode ser consultada com mais detalhe no apêndice A.1. Após os dados gerados segundo a Distribuição Uniforme procedemos a um operação de reescalamiento dos

dados, esta consiste na divisão de cada peso gerado pela soma de todos os pesos gerados aleatoriamente (podendo ser consultada no anexo B.1.2). A função de recolha dos indicadores dos pesos dos títulos dos portefólios dos diversos estimadores de volatilidade, está apresentada em B.1.3.

Após a apresentação do método de análise dos pesos, iremos descrever o método a utilizar para analisar o desempenho dos portefólios, ou seja, a rentabilidade efetiva.

5.5 Análise de Rentabilidades

Nesta secção apresentar-se-á o método de análise de desempenho dos portefólios a utilizar, com vista a analisar o desempenho do portefólio. O indicador de desempenho e risco será a rentabilidade efetiva do portefólio. Esta é dada por:

$$R_{efec,t} = w' r_{efec,t}; \quad (54)$$

onde w' é o vetor dos pesos transposto, e $r_{efec,t}$ é o vetor das rentabilidades efetivamente verificadas dos ativos no momento t . Pretendemos com este indicador verificar se há algum método de estimação de volatilidade que se destaque em relação aos outros, este destaque poderá verificar-se tanto no valor esperado das rentabilidades efetivas verificadas, como na maior ou menor volatilidade das mesmas. A função de recolha das rentabilidades efetivas pode ser consultada no anexo B.1.4.

Após a apresentação dos dados, processos e indicadores de análise, iremos proceder à interpretação dos resultados deste estudo.

6 Resultados

Neste capítulo interpretaremos os resultados da análise empírica cuja metodologia e dados foram apresentados no capítulo 5. Tendo em conta que possuímos diversas abordagens de análise de volatilidade e que destas poderão resultar portefólios distintos. Nesta secção iremos comparar, a composição e, os resultados dos portefólios de variância mínima, vamos assumir este como referência para os diversos estimadores. Em primeiro lugar apresentaremos os tempos de estimação do processo observado na secção 5.3, em seguida os problemas de estimação do modelo BEKK, em terceiro lugar apresentaremos os resultados da análise dos pesos e por fim, os resultados da análise das rentabilidades efetivas.

6.1 Tempos de Execução

Nesta secção exporemos os tempos de execução do processo de recolha de matrizes de covariância apresentado na secção 5.3. Dada uma amostra de 521 observações e um intervalo de estimação móvel de 200, obteremos 321 matrizes. O tempo de recolha destas para cada um dos métodos de estimação da volatilidade é dado por:

Quadro 3: Tempos de recolha das matrizes de covariância

	Seleção 1 Dim. 5	Seleção 2 Dim. 5	Seleção 1 Dim. 10	Seleção 2 Dim. 10
Volat. Tradicional	58.69853 secs	59.09383 secs	1.228053 mins	1.251869 mins
EWMA	59.80432 secs	59.2059 secs	1.284809 mins	1.294334 mins
DCC	15.10891 mins	12.40543 mins	53.20338 mins	44.17421 mins

Fonte: Elaboração Própria; Função: RecMatCov, anexo B.1.1

Tanto a volatilidade histórica como o EWMA não revelaram problemas de estimação, tendo sido estimadas 642 matrizes (321 para cada uma das rentabilidades, diárias e semanais). O EWMA têm $\lambda = 0.94$ sendo este o parâmetro aconselhado para o alisamento de séries de volatilidades de dados diários de acordo com o relatório (Morgan and Reuters Ltd, 1996). Por outro lado, a estimação do modelo DCC e os cálculos a fim de retornar a matriz de covariância demoram cerca de 2.5217 secs com 5 ativos e, aproximadamente 12.4938 secs com 10 ativos para cada um dos períodos. Note-se que o número efetivo de matrizes é menor para alguns grupos de ativos, pois há situações em que a estimação do DCC não converge. Nesses casos, a matriz correspondente não foi calculada. Apresentaremos seguidamente a taxa de sucesso na estimação do modelo DCC:

Quadro 4: Taxa de Sucesso da estimação do DCC

	Seleção 1 Dim. 5	Seleção 2 Dim. 5	Seleção 1 Dim. 10	Seleção 2 Dim. 10
Total	321	321	321	321
Sucesso	210	172	85	136
Rácio	65,42%	53,58%	26,48%	42,37%

Fonte: Elaboração Própria; Função: RecMatCov, anexo B.1.1

São estimados dois modelos por cada período e, caso haja problemas de convergência em qualquer um deles a matriz de covariância não é recolhida. As taxas de sucesso são relativamente mais altas quando o modelo recebe apenas 5 ativos (quadro 4), possivelmente devido ao facto de nessa situação se realizarem menos estimações e tal poder levar a que haja menos problemas de convergência dos estimadores.

Após a apresentação dos tempos de execução da função de recolha das matrizes de covariância ("RecMatCov" script RCov.R, anexo B.1.1) para cada um dos estimadores, e da taxa de sucesso do modelo DCC, iremos descrever os problemas com que nos deparámos na estimação do modelo BEKK. Deixamos ainda em anexo as características da máquina usada nas estimações, (quadro 5).

6.2 Problemas na Estimação do Modelo BEKK

Nesta secção iremos apresentar os problemas de estimação com que nos deparámos na estimação do modelo BEKK. Tal como apresentamos na secção 4.4, o modelo BEKK estima $(p + q)Kn^2 + \frac{n(n+1)}{2}$ parâmetros, sendo p e q o número de defasamentos, K a generalidade do processo (assumimos sempre que $K = 1$), e n o número de títulos inseridos no modelo. Cada modelo BEKK (com 5 ações) demora cerca de 10.31828 mins a ser estimado, numa situação em que temos de efetuar 321×2 , (o produto por 2 deriva do facto de termos de realizar duas estimações uma com rentabilidades a 1 dia e outra com rentabilidades a 5 dias). Tal corresponderia a um tempo de estimação total é cerca de 110 horas e meia (quatro dias e meio). Contudo, observamos que o R usa apenas 20% da capacidade de processamento da máquina, o que possibilitaria que fossem executadas várias instâncias ao mesmo tempo como forma de agilizar o processo, por exemplo se fossem executadas 4 instâncias o tempo necessário seria $(\frac{521-200}{4} \times 10.31828 \times 2) \times \frac{1}{60} = 27.601$ horas, um tempo bastante mais razoável comparativamente com o inicialmente apresentado.

Apesar dos tempos de estimação fora do habitual, não foi este o fator que nos forçou a colocar o modelo BEKK fora da nossa análise. O problema deveu-se a não ter sido possível obter a convergência dos modelos BEKK na grande maioria dos casos: a taxa de sucesso na obtenção de convergência ficava de um modo em geral abaixo dos 10% o que é muito baixo, mesmo comparado com a taxa de sucesso na estimação do DCC. Assim, apenas seria possível usar um número muito baixo de observações na análise, o que nos leva a excluir o modelo BEKK.

Os principais problemas de estimação ocorreram com 10 ativos, pelo que julgamos que a estimação do modelo poderá ser exequível até no máximo 5 ativos. Para estimação de muitos períodos aconselhamos a execução de várias instâncias do R. A recolha automática de resultado pode levar a que sejam recolhidos resultados de modelos em que não há convergência. Para controlar este problema é necessário usar um mecanismo que identifique e exclua os casos de não convergência (isto é, função *TryCatch*)

Após termos apresentado os problemas de estimação do modelo BEKK e os tempos de estimação dos restantes modelos, passamos à apresentação os principais resultados

da análise da constituição dos portefólios.

6.3 Resultados da Análise de Pesos

Em seguida iremos interpretar os resultados da análise da dispersão dos pesos dos ativos dos diversos portefólios. Como auxiliar utilizaremos histogramas dos valores do indicador apresentado na equação 53, assim como, as médias e as variâncias de cada distribuição.

Tendo em conta que vamos analisar quatro grupos, de 5 e 10 ações, Seleção 1 e 2, e matrizes geradas para rentabilidades a 1 e 5 dias, detemos assim 8 comparações dos três estimadores. Em cada comparação entre carteiras vamos usar como referência um portefólio cujos pesos foram gerados aleatoriamente, tal como referimos na secção 5.4. Dado que os portefólios foram construídos com restrição à positividade dos pesos (sem venda a descoberto), teremos de fazer uma adaptação aos valores gerados aleatoriamente, pois a probabilidade de um peso ser igual a zero é maior do que este tomar qualquer outro valor. Os detalhes deste processo estão descritos no apêndice A.1.

Os indicadores da diferença dos pesos dos ativos dos portefólios (secção 5.4) são dados pelo indicador I , sendo que, a análise entre VH e EWMA é expressa pelo indicador $I_{VH,EWMA}$, VH e DCC dada por $I_{VH,DCC}$, EWMA e DCC por $I_{EWMA,DCC}$, e por fim o indicador dos pesos gerados aleatoriamente é apresentado por I_{Rand} .

Nas sub-secções seguintes iremos descrever as distribuições dos indicadores de comparação de pesos dos portefólios gerados por estimadores de volatilidade distintos.

6.3.1 Análise de Pesos Seleção 1 Dimensão 5

Posteriormente iremos analisar a distribuição dos indicadores das diferenças de pesos. Os portefólios foram construídos com as ações selecionadas pelo método de Seleção 1 (secção 5.2), sendo as carteiras constituídas por 5 títulos(S1D5). Os resultados apresentados podem ser consultados nas figuras 6, 7 e no quadro 6.

Nas rentabilidades a um dia podemos observar que o valor médio de $I_{VH,EWMA}$ e $I_{VH,DCC}$ estão relativamente próximos um do outro. Isto evidencia que os portefólios selecionados pela VH, em média, possuem um grau de diferenciação idêntico face aos portefólios originados pelo EWMA e pelo DCC. Em segundo lugar podemos destacar que a média do indicador que compara os portefólios EWMA com o DCC ($I_{EWMA,DCC}$) é a menor. Podemos concluir que, neste caso, em média, os portefólios selecionados pelo EWMA e pelo DCC possuem pesos mais próximos entre si do que os pesos dos portefólios gerados pela VH. Podemos também verificar que, todos os portefólios concebidos

a partir de dados reais, em média, se aproximam mais entre eles do que os portefólios cujos pesos foram gerados aleatoriamente (I_{rand}). O número de pesos iguais a zero sobre o número total de pesos, neste caso, é igual a 0.1749 (p).

Quanto às carteiras geradas pelas rentabilidades a 5 dias (Seleção 1 Dimensão 5), podemos observar uma maior proximidade nas médias dos indicadores dos diversos portefólios, comparativamente com a rentabilidade a um dia. Os valores das médias dos indicadores dos pesos $I_{VH,EWMA}$ e, $I_{VH,DCC}$, encontram-se relativamente próximos. Novamente a comparação $I_{EWMA,DCC}$ é a que apresenta maior proximidade com um valor médio menor. As conclusões desta análise são em tudo idênticas às conclusões apresentadas nas rentabilidades a 1 dia. Em média, os portefólios produzidos pelo EWMA e pelo DCC possuem uma maior proximidade entre si, do que os portefólios concebidos pela VH. Tal como na análise anterior, o valor dos pesos gerados segundo uma distribuição uniforme são, em média, mais afastados do que os pesos dos diversos portefólios, sendo que o rácio de pesos igual a zero é (p) 0.1742, em tudo semelhante às rentabilidades a um dia.

6.3.2 Análise de Pesos Seleção 2 Dimensão 5

Nesta sub-secção iremos apresentar o indicador das diferenças de pesos das carteiras de dimensão 5 seleccionadas a partir do método de seleção 2 (S2D5). Estes resultados podem ser consultados nas figuras 8, 9 e no quadro 7.

Podemos verificar que o valor médio do indicador que compara o VH e o EWMA, é ligeiramente menor que o valor médio do indicador de $I_{VH,DCC}$, contudo, a diferença entre as médias não é substancial. Já a média do indicador $I_{EWMA,DCC}$ é significativamente mais baixa que as médias dos indicadores de comparação dos restantes portefólios. Isto leva-nos a concluir novamente que, em média, os pesos dos portefólios gerados pelo DCC são mais próximos dos pesos seleccionados pelo EWMA, comparativamente com os pesos construídos pela VH. Quanto aos pesos gerados aleatoriamente possuem igualmente um valor médio maior que os restantes indicadores, com um p (rácio dos pesos iguais a zero sobre o total de pesos) igual a 0.2434, ligeiramente superior ao verificado na sub-secção 6.3.1.

Quanto às Rentabilidades a 5 dias verificou-se algo diferente do que foi até agora verificado. O indicador $I_{VH,EWMA}$ apresenta um valor médio mais baixo que o indicador $I_{EWMA,DCC}$. O que indica que em média, neste caso, os pesos gerados pelo EWMA se aproximam mais dos pesos gerados pela VH, face aos pesos seleccionados pelo DCC. Podemos observar que o valor médio do indicador $I_{VH,DCC}$ é o que apresenta o maior valor, algo que ocorre em quase todas as análises. Isto leva-nos a concluir que os

portefólios construídos segundo a VH e o DCC, em média são os que apresentam os pesos mais distintos. A média dos pesos gerados aleatoriamente é superior à média de todas as comparações de portefólios reais, com um valor de p de 0.21.

6.3.3 Análise de Pesos Seleção 1 Dimensão 10

Seguidamente iremos analisar o indicador das diferenças dos pesos na carteira de dimensão 10, selecionada pelo método de seleção 1 (S1D10) (quadro 8).

Nas rentabilidades a um dia (figura 10) verificamos grande proximidade dos valores médios dos indicadores $I_{VH,EWMA}$ e $I_{EWMA,DCC}$, o que nos leva a concluir que os pesos do EWMA possuem, em média, um grau de distinção idêntico face aos portefólios construídos pela VH e pelo DCC. Podemos verificar novamente que, os portefólios cujos pesos divergem mais são os gerados pela VH e pelo DCC, tal é confirmado pelo valor elevado da média do indicador $I_{VH,DCC}$. Há que destacar que de todas as análise realizadas esta é a que possui os portefólios mais distintos (valor médio dos indicadores maiores). O valor de p é 0.3168 ligeiramente maior do que o verificado nas carteiras de cinco ações.

Nas rentabilidades a cinco dias (figura 11) há apenas que destacar que a média do indicador $I_{VH,EWMA}$ é a que apresenta menor valor. Conclui-se que os portefólios selecionados pela VH e pelo EWMA são os que apresentam maior proximidade, tal como ocorreu na sub-secção 6.3.2, nas rentabilidades a cinco dias. O valor de p neste caso foi 0.3713.

6.3.4 Análise de Pesos Seleção 2 Dimensão 10

Nesta sub-secção iremos realizar a última análise de pesos, a do indicador de pesos de carteiras de dimensão 10, selecionadas através do método de seleção 2 (S2D10). Os resultados deste estão presentes nas figuras 12, 13 e no quadro 9.

Nas rentabilidades a um dia, verificamos que o indicador $I_{EWMA,DCC}$ apresenta o valor médio mais baixo. Já os valores médios dos indicadores $I_{VH,EWMA}$ e $I_{VH,DCC}$, apresentam novamente valores bastante próximos. O que nos leva a concluir que, em média, os pesos dos portefólios gerados pelo EWMA e pelo DCC possuem um grau de dispersão idêntico face aos pesos construídos pela VH. Concluimos também que, os pesos dos portefólios selecionados pelo EWMA e pelo DCC, em média, aproximam-se mais um do outro do que dos pesos dos portefólios gerados pela VH.

No que diz respeito à rentabilidade a 5 dias, verificamos que o indicador $I_{VH,EWMA}$ é o que apresenta o valor médio menor, o que nos indica que, em média, os portefólios

construídos através da VH e do EWMA são os mais semelhantes. Os indicadores $I_{VH,DCC}$ e $I_{EWMA,DCC}$ possuem valores bastante idênticos o que nos leva a concluir que a distinção entre os pesos dos portfólios selecionados pelo DCC são, em média, idênticos aos portfólios construídos pela VH e pelo EWMA.

Os valores de p das rentabilidades a um dia e a cinco dias são 0.5411 e 0.5512 respectivamente, este indicador apresenta um valor médio bastante superior ao apresentado pelos restantes indicadores de comparação dos portfólios.

6.3.5 Conclusões da Análise de Pesos

Nesta sub-seção pretendemos apresentar as conclusões das análises realizadas ao longo das últimas seções sobre distribuição dos indicadores dos pesos. Nos portfólios de rentabilidades a um dia podemos observar que na maioria dos casos os pesos dos portfólios gerados pelo EWMA e, pelo DCC aproximam-se mais entre eles. Estes na maioria dos casos distanciam-se de forma idêntica dos portfólios estimados através da VH. Nas rentabilidades a cinco dias podemos verificar uma tendência de maior proximidade entre os portfólios gerados pelos estimadores da VH e do EWMA. Estes tendem a ter um grau de distanciamento médio idêntico face aos pesos gerados pelo portfólio DCC.

Existe uma tendência constante no que diz respeito aos portfólios mais distintos. Na maior parte dos casos o indicador que apresenta maior valor médio é o indicador $I_{VH,DCC}$. Dado isto, concluímos que os pesos dos portfólios construídos pela VH e pelo DCC são os que apresentam valores mais distanciados.

Após termos interpretado os diversos resultados da comparação de pesos dos portfólios, iremos analisar na seção seguinte as diversas rentabilidades efetivas verificadas.

6.4 Resultados da Análise de Rentabilidades

Nesta seção pretendemos apresentar os resultados das rentabilidades efetivas dos portfólios. Os resultados das rentabilidades estão da figura 14 à figura 21, os testes realizados podem ser consultados em A.2.

Podemos verificar que (Quadro 10) todas as séries de rentabilidades efetivas rejeitam à hipótese de normalidade. De qualquer das formas julgamos que é pertinente a realização de testes de igualdades de médias e de variâncias. Em todos os casos foram aceites as hipóteses de igualdade de médias e de variâncias, como podemos observar pelos quadros 11 e 12 respetivamente. Com isto concluímos que, na nossa análise nenhum dos estimadores de volatilidade se destacou na média ou na variância da rentabilidade

efetiva.

Os resultados da comparação dos portefólios construídos por rentabilidades a um dia e rentabilidades a cinco estão presentes no quadro 13. Observamos que com os testes de igualdade de variância, as volatilidades das rentabilidades dos portefólios construídos com rentabilidades a cinco dias, são superiores às volatilidades dos portefólios construídos com rentabilidades a um dia. Algo previsível, dado que, geralmente, as volatilidades semanais são superiores às volatilidades diárias. Contudo, os testes realizados à igualdade das médias rejeitam sempre a hipótese de desigualdade (novamente quadro 13). Apesar disto, os valores médios das rentabilidades a cinco dias são quase sempre superiores aos valores dos portefólios das rentabilidades a um dia.

Nos quadros 14 e 15, estão presentes os testes realizados às diferentes distribuições das rentabilidades efetivas de portefólios constituídos por ações selecionadas por métodos de seleção diferentes (Método de Seleção 1 vs Método de Seleção 2). Com isto verificamos que, em quase todos os casos analisados, a volatilidade da rentabilidade efetiva dos portefólios selecionados pelo método de seleção 1, são menores do que as volatilidades dos portefólios selecionados pelos métodos de seleção 2. A única exceção verificada é na comparação da carteira S1D10 com S2D10, onde constatámos que a hipótese de igualdade das volatilidades não é rejeitada. Quanto aos teste realizados às médias, concluímos que nenhum dos métodos de seleção se destaca em relação ao outro.

7 Conclusão

Dado que a análise da volatilidade desempenha um papel crucial na sustentabilidade das instituições financeiras, é pertinente analisar os diferentes resultados que podem advir das diversas abordagens. Sendo a teoria do portefólio uma referência tão importante na construção de carteiras de ativos com risco, seria importante averiguar o impacto dos métodos de estimação da volatilidades diferentes na construção dos portefólios e, nas rentabilidades efetiva dos mesmos. Os métodos de volatilidade usados foram a Volatilidade Histórica, o EWMA, e o DCC (capítulo 4). Também abordamos o modelo BEKK, contudo, como este apresentou dificuldades de convergência, optamos por abordar apenas os problemas e deixar alguns conselhos para quem o pretenda usar no futuro (secção 6.2). Realizamos uma revisão da teoria do portefólio e do problema de minimização e das restrições com que o investidor se depara (capítulo 3).

No que diz respeito à análise empírica (capítulo 5), utilizamos as ações constituintes do índice *EuroNext100*, pelo facto de as empresas constituintes possuírem uma dimensão internacional e estarem presentes numa grande diversidade de sectores e economias.

Para seleccionar as ações utilizamos dois métodos de seleção (secção 5.2). O método de Seleção 1 que privilegia as ações com pesos mais representativos da carteira e o método de Seleção 2, que dá ênfase à diversidade de pesos e de setores das ações constituintes. Para além destes dois grupos de ações construímos portefólios com dimensão 5 e 10 de cada um dos métodos de seleção, sendo, que cada construção de portefólios basear-se-á em duas séries temporais, a das rentabilidades a um dia e a das rentabilidades a cinco dias como está presente na secção 5.1. Com o auxílio do *software* R, desenvolvemos um *script* que nos permite recolher a matriz covariância com um intervalo móvel definido (neste caso 200 observações, função apresentada em B.1.1), estas matrizes foram geradas para os diferentes períodos e rentabilidades sendo usadas para a construção dos diversos portefólios (secção 5.3).

Na primeira parte os resultados empíricos focam-se no tempo de recolha das matrizes de covariância dos diferentes métodos de estimação e, na taxa de sucesso da convergência do modelo DCC. Estes resultados assumem alguma importância no que diz respeito à prontidão de resposta dos investidores face às alterações de mercado. Após a recolha das matrizes a nossa análise centrou-se em dois pontos. O primeiro destes é a análise da dispersão dos pesos dos portefólios (secção 5.4) e, o segundo a análise das rentabilidades efetivas dos portefólios (secção 5.5). Na análise de dispersão de pesos podemos observar que a maior distinção dos pesos é verificada entre os portefólios selecionados pela VH e pelo DCC. Há ainda a destacar que, nas rentabilidades a um dia existe uma maior proximidade dos pesos dos portefólios construídos pelo EWMA e pelo DCC. Já na rentabilidades a cinco dias verificamos que existe uma maior proximidade entre os portefólios gerados pela VH e os portefólios construídos pelo EWMA. Quanto à rentabilidade efetiva, concluímos que não há nenhum método de estimação de volatilidade que se destaque em relação aos outros, nem no indicador da volatilidade da rentabilidade efetiva, nem na média das rentabilidades efetivas. O que podemos constatar é que os portefólios gerados através das rentabilidades a cinco dias possuem volatilidades das rentabilidades efetivas maiores, que as dos portefólios gerados por rentabilidades a um dia. Também se verificou que, na maioria dos casos os portefólios dos ativos do método de Seleção 1 possuem menor variância nas rentabilidade efetivas verificadas.

Há algumas limitações que gostaríamos de destacar. A primeira das quais é o facto de estarmos a analisar portefólios sem vendas a descoberto. Em alguns dos casos pode-se observar um rácio de pesos iguais a zero sobre o total de pesos (p) bastante elevado, este pode trazer uma proximidade excessiva entre os portefólios, algo que não aconteceria no caso dos portefólios possuírem vendas a descoberto. O que nos impediu de construir os portefólios sem vendas a descoberto foi: o facto de as vendas a descoberto

não estarem disponíveis à maioria dos investidores e o facto de não existir na bibliografia uma referência quanto à forma como devemos comparar os pesos dos ativos de dois portefólios. Outra limitação que destacamos é o valor parâmetro λ do EWMA. Optámos por usar um valor de referência sugerido por (Morgan and Reuters Ltd, 1996). Contudo, poderia ser interessante desenvolver uma forma de apurar o valor do coeficiente de alisamento exponencial e, este poderia levar a resultados diferentes. A terceira observação é relativa aos desfasamentos do modelo DCC. Seria interessante adaptar o código da função de estimação do mesmo a fim de garantir mais desfasamentos, tanto na componente GARCH uni-variado como na estrutura dinâmica. A última observação que pretendemos deixar é sobre o portefólio de variância mínima (GMV), neste trabalho os pesos dos portefólios calculados foram os portefólios de variância mínima, seria interessante alargar esta análise e fixar rentabilidades esperadas.

As recomendações de trabalho futuro a realizar são o aprofundamento das limitações apresentadas no parágrafo anterior e, a análise de outras metodologias de construção de portefólios, como por exemplo a Otimização Robusta.

Referências

- Black, F. (1976). Studies in stock price volatility changes. *In Proceedings of the 1976 American Statistical Association, Business and Economical Statistics Section*, pages 177–181.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *Rev Econ Stat*, 72:498–505.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., and Wooldridge, J. M. (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. *The Journal of Political Economy*, 96:116–131.
- Caporin, M. and McAleer, M. (2012). Do We Really Need Both Bekaert and Dolado? a Tale of Two Multivariate Garch Models. *Journal of Economic Surveys*, 26:736–751.
- Clarke, R., Thorley, S., Ph, D., Silva, H. D., and de Silva, H. (2010). Minimum Variance Portfolio Composition. *papers.ssrn.com*, 19:191–203.
- Engel, C., Frankel, J. a., Froot, K. a., and Rodrigues, A. P. (1995). Tests of conditional mean-variance efficiency of the U.S. stock market. *Journal of Empirical Finance*, 2(1):3–18.
- Engle, R. (2002). Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20:339–350.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50:987–1007.
- Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11:122.
- Engle, R. F., Ng, V., and Rothschild, M. (1990). Asset pricing with a FACTOR-ARCH covariance structure: empirical estimates for treasury bills. *Journal of Econometrics*, 45:213–237.
- Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A., and Focardi, S. M. (2007). *Robust Portfolio Optimization and Management*. Wiley , John Sons, Inc.

- Fama, E. F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, 38:34.
- Hawley, J. P. and Beyhaghi, M. (2011). Modern Portfolio Theory and Risk Management: Assumptions and Unintended Consequences. *SSRN Electronic Journal*, pages 1–36.
- Horasanl, M. and Fidan, N. (2007). Portfolio Selection by Using Time Varying Covariance Matrices. *Journal of Economic and Social Research*, 9(2):1–22.
- Kroner, K. F. and Ng, V. K. (1998). Modeling asymmetric comovements of asset returns. *Review of Financial Studies*, 11:817–844.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7:77–91.
- Merton, R. (1972). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of financial and quantitative analysis*, 7:1851–1872.
- Minkah, R. (2007). *Forecasting volatility*. PhD thesis, Uppsala University.
- Morgan, J. P. and Reuters Ltd (1996). RiskMetrics — Technical Document. Technical report, New York.
- Peters, T. (2008). *Forecasting the covariance matrix with the DCC GARCH model*. PhD thesis, Stockholm University.
- Pojarliev, M. and Polasek, W. (2001). Applying Multivariate Time Series Forecasts For Active Portfolio Management. *Financial Markets And Portfolio Management*, 15(2):201–211.
- Poon, S. H. and Granger, C. (2003). Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review. *Journal of Economic Literature*, 41:478–539.
- Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52:591–611.
- Su, W. and Huang, Y. (2010). Comparison of Multivariate GARCH Models with Application to Zero-Coupon Bond Volatility. Master’s thesis, Lund University.
- Xiao, L. and Aydemir, A. (2007). Volatility modelling and forecasting in finance. In *Forecasting Volatility in the Financial Markets*, pages 1–45.

A Apêndices

A.1 Apêndice 1 - Distribuição Uniforme

Neste apêndice pretendemos abordar o processo de geração de portfólios aleatórios. Procuramos gerar pesos segundo uma distribuição uniforme para que estes sirvam de referência às comparações realizadas entre os diversos portfólios. Contudo, como os portfólios construídos por ações reais são construídos com restrição de pesos positivos, muitos dos quais acabam por ser iguais a zero. Isto, faz com que a probabilidade de ocorrência do peso zero seja superior à dos restantes pesos. Para tal em cada grupo de ações que analisamos iremos usar o rácio de pesos iguais a zero sobre o total de pesos, que servirá de indicador para os dados gerados. Depois, os pesos são gerados através de uma distribuição uniforme. Quando assumimos que uma determinada variável segue uma distribuição Uniforme, assumimos que a probabilidade de ocorrência de qualquer valor entre o mínimo e o máximo é igual. Na figura 4 podemos observar que uma

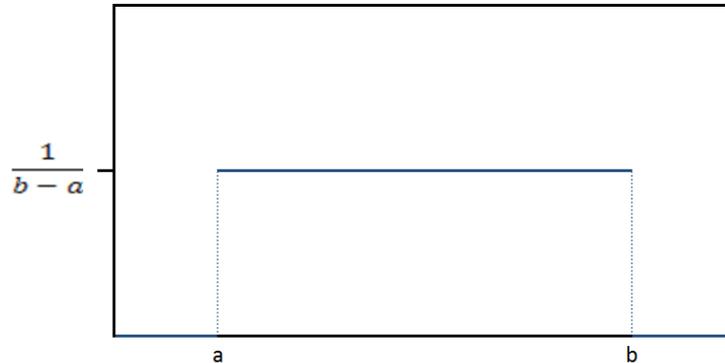


Figura 4: Densidade da Distribuição Uniforme; Fonte:Elaboração Própria

dada variável que segue uma distribuição uniforme entre o intervalo a e b , possui uma probabilidade de ocorrência de cada acontecimento de $\frac{1}{b-a}$ (dentro do intervalo a a b).

Poderíamos definir que os pesos seguem uma distribuição Uniforme entre 0 e 1, já que a construção dos portfólios que realizamos não possui vendas a descoberto. Contudo, verificámos que uma grande parte dos portfólios possui ações com pesos iguais a zero e, a geração aleatória (intervalo de 0 a 1), atribui probabilidade nula à geração de um fenómeno.

A solução foi alargar o intervalo de forma a conter valores negativos, e interpretar os valores negativos como zero. A probabilidade do intervalo negativo (cujos pesos são interpretados como nulos) deve ser igual à probabilidade de ocorrência de pesos iguais

a zero nos portfólios que analisamos. Desta forma:

$$p = \frac{n^{\circ} \text{ Pesos Iguais a Zero}}{\text{Total de Pesos Calculados}}. \quad (55)$$

Dada que a probabilidade de um acontecimento entre $-x$ e 0 é dada por:

$$p = \frac{x}{x+1}. \quad (56)$$

Sendo x a distancia entre $-x$ e 0 , e $x+1$ o intervalo inicialmente estipulado. Assim para um dado p , o valor de x :

$$x = \frac{p}{1-p}. \quad (57)$$

Será a partir deste x que definiremos os intervalos da geração de dados aleatórios, sendo estes gerados com recurso a função runif do R. Na figura 5 podemos observar o

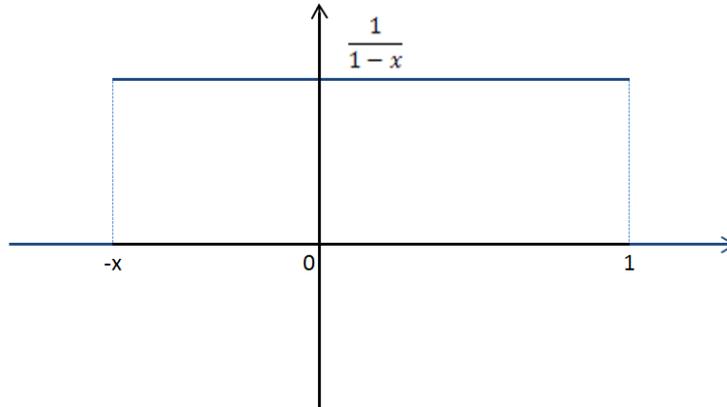


Figura 5: Densidade da Distribuição Uniforme Adaptada

intervalo definido, desta forma todos os pesos gerados entre $-x$ e 0 serão interpretados como pesos nulos. A função de geração dos pesos pode ser consultada em B.1.2.

A.2 Apêndice 2 - Testes Estatísticos

Neste apêndice pretendemos efetuar uma análise dos testes realizados às rentabilidades efetivas. Iremos começar por abordar o teste de normalidade Shapiro-Wilk, em seguida o teste de igualdade de variância e por fim o teste de igualdade das médias.

Teste de Shapiro-Wilk

Nesta secção iremos apresentar o teste de normalidade Shapiro-Wilk, tendo sido este apresentado por (Shapiro and Wilk, 1965). Dada uma determinada série temporal x_i , sendo que esta está ordenada da menor para a maior observação (ordenação das observações por ordem de grandeza) e, a_i um valor definido por uma metodologia proposta pelos autores ((Shapiro and Wilk, 1965)) que varia consoante a dimensão da amostra.

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2}{n \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}}. \quad (58)$$

No artigo original onde este teste foi apresentado poderão ser consultados a metodologia de cálculo de a_i , e os valores críticos associados ao valor de W.

Teste de Igualdade de Variâncias

Após o teste de normalidade é pertinente testar a igualdade das variâncias entre duas séries em análise. Considerando x_i e y_i duas variáveis independentes e identicamente distribuídas que seguem ambas uma distribuição normal, com variâncias s_x^2 e s_y^2 a estatística F seria calculada com:

$$F = \frac{s_x^2}{s_y^2} \quad (59)$$

Consideramos que a hipótese nula nesta análise é a igualdade das variâncias, esta, será aceite quando o valor de F for inferior ao valor crítico inicialmente estabelecido.

Teste de Igualdade de Médias

Após verificar a normalidade e a igualdade das variâncias podemos realizar inferência quanto à igualdade das médias. Dadas novamente as duas variáveis x e y , iremos testar com recurso ao teste-t a igualdade das médias:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_{x,y}} \quad (60)$$

Onde $s_{x,y}$:

$$s_{x,y} = \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}} \quad (61)$$

sendo s_x e s_y , as variâncias das séries x e y. A hipótese nula deste teste é a igualdade das médias das duas variáveis, esta, é rejeitada quando o valor da estatística teste t (equação 60) é inferior ao valor crítico definido.

B Anexos

B.1 Funções

B.1.1 Função RecMatCov, script Rcov.R

```
> ## Esta função recolhe as matrizes de covariancia de das rentabilidades
> #a um e a cinco dias
> ## assets-> vetor com o índice dos ativos
> ## inicio-> Inicio do intervalo de estimação
> ## fim-> Fim do intervalo de estimação
> ## intervalo-> janela móvel de estimação
> ## fich1-> Rentabilidades a 1 dia
> ## fich2-> Rentabilidades a 5 dias
> ## metodo-> inteiro indicador do método de estimação a usar ( consultar
> #em EstModelos.R)
> RecMatCov<- function( assets, inicio, fim, intervalo, fich1, fich2,metodo)
+ {
+   nassets<-length(assets) # número de ações
+
+   #Matriz de recolha da matriz empilhada da rentabilidade a um dia
+   matcov1<-matrix(data=0,nrow=nassets^2,ncol=fim+1-inicio-intervalo)
+
+   #Matriz de recolha da matriz empilhada da rentabilidade a cinco dias
+   matcov2<-matrix(data=0,nrow=nassets^2,ncol=fim+1-inicio-intervalo)
+
+   #Vector das datas cujas estimação foi bem sucedida
+   vecdatas<-c()
+   j<-1
+   while(inicio+intervalo<=fim)
+   {
+     #Intervalo de estimação das rentabilidades a cinco dias
+     mat2<-mconst(assets,fich2,inicio,inicio+intervalo)
+
+     # Ultima data das rentabilidades a cinco dias
+     datafim<-as.character(fich2[inicio+intervalo,1])
+
+     # índice da rentabilidade a um dia com a mesma data
+     #da rentabilidade a cinco dias
+     indxFim<-indiceDataFim(fich1,datafim[[1]])
+
+     # definição do intervalo das rentabilidades a um dia
+     mat1<-mconst(assets,fich1,indxFim-inter,indxFim)
+
+     # cálculo das matrizes das rentabilidades a um dia
+     matcov1<-calcMats(mat1,metodo)
+
+     #verificação do sucesso da estimação das rentabilidades
+     #a um dia
```

```

+   if(!is.null(matcov1))
+   {
+     #Estimação das rentabilidades a cinco dias caso a
+     # estimacão das rentabilidades a um dia tenha sido
+     #bem sucedida
+     matcov2<-calcMats(mat2,metodo)
+   }
+   else
+   {
+     #NULL caso a estimacão das rentabilidades a um dia não
+     #tenha sido bem sucedida
+     matcov2<-NULL
+   }
+   #Verificacão do sucesso da estimacão das rentabilidades a um
+   #e a cinco dias
+   if((!is.null(matcov1))&&!is.null(matcov2))
+   {
+     #Actualizacão do vector das datas bem sucedidas
+     vecdatas[j]<-datafim
+
+     #Empilhamento da matriz de covariancia das rentabilidades
+     #a um dia
+     matcov1[,j]<-c(matcov1)
+
+     #Empilhamento da matriz de covariancia das rentabilidades
+     #a cinco dias
+     matcov2[,j]<-c(matcov2)
+     j<-j+1
+     print(j)
+   }
+   inicio<-inicio+1
+ }
+ #Ajustamento caso a taxa de sucesso seja inferior a 100%
+ if(length(vecdatas)<ncol(matcov1))
+ {
+   #Eliminacão das colunas excedentes das matrizes de
+   # covariancia empilhadas das rentabilidades a um dia
+   matcov1<-matcov1[,-c(length(vecdatas)+1:ncol(matcov1))]
+
+   #Eliminacão das colunas excedentes das matrizes de
+   # covariancia empilhadas das rentabilidades a cinco dias
+   matcov2<-matcov2[,-c(length(vecdatas)+1:ncol(matcov2))]
+ }
+ #Atribuiçao das de sucesso de estimacão à matriz final
+ # das rentabilidades a um dia
+ colnames(matcov1)<-vecdatas
+
+ #Atribuiçao das de sucesso de estimacão à matriz final
+ # das rentabilidades a um dia

```

```

+   colnames(matcov2)<-vecdatas
+
+   #Retorno das duas matrizes em lista
+   return(list(matcov1,matcov2))}

```

B.1.2 Função randpeso, script comPesos.R

```

> #Função que gera os pesos segundo uma distribuição Uniforme
> # k-> número de ativos
> # x-> adaptação realizada a distribuição uniforme ( consultar no 1º
> #apendice da dissertação)
> randpeso<-function(k,x)
+ {
+   vec<-runif(k,min=-x,max=1)#Geração dos valores aleatorios entre -x e 1
+   i<-1
+   while(i<=k) # Caso os pesos sejam inferiores a 0 serão igualados a 0
+   {
+     if(vec[i]<=0) # Verificação da negatividade dos pesos
+       vec[i]=0
+     i<-i+1
+   }
+   s<-sum(vec) # soma dos pesos
+   if(s==0) # Verificação da nulidade da soma ( geração mal sucedida)
+     return(NULL)
+   i<-1
+   while(i<=k) #Rescalamento das observações sobre a soma das mesmas
+   {
+     vec[i]<-vec[i]/s #peso do ativo sobre o peso da soma de todos os ativos
+     i<-i+1
+   }
+   if((sum(vec)!=1)) # Verificação da soma dos ativos igual a um ( geração
+     #mal sucedida)
+     return(NULL)
+   return(vec) #Retorno dos vectores gerados segundo uma distribuição uniforme
+ }

```

B.1.3 Função com, script comPesos.R

Esta função calcula os indicadores dos pesos dos ativos dos portfólios para os métodos de volatilidade VH, EWMA e DCC. A função que calcula este indicador para os pesos aleatórios é a função "CarteirasRandom", pode ser encontrada no mesmo script ("comPesos.R").

```

> ## Função que calcula os indicadores da dispersão
> ##de pesos para os diferentes periodos
> ## assets-> vector com os indices das ações
> ## M1-> matrizes de covariancia empilhadas do método VH
> ## M2-> matrizes de covariancia empilhadas do método EWMA
> ## M4-> matrizes de covariancia empilhadas do método DCC

```

```

> ## fich-> Ficheiro das rentabilidades 1 ou 5 dias
> ## rentfix-> Rentabilidade fixa (-1 caso seja para calcular o GMV)
> comp<-function(assets,M1,M2,M4,fich,inter,rentfix)
+ {
+   res<-matrix(data=0,nrow=3,ncol=ncol(M1)) ## matriz de resposta
+   n<-ncol(M1) #número de datas a analisar
+   i<-1
+   vecrent<-Rents(assets,M1,fich,inter) #cálculo dos
+   ## valores médios das rentabilidades
+   #dos diversos periodos ( consultar DataTreat.R)
+   while(i<=n)
+   {
+     print(i)
+     data<-as.character(M1[1,i]) ## Conversão da data para character
+     scal<-indiceDataFim(fich,data) ## indice onde foi encontrada a data
+
+     ## Construção da matriz com os dados a analisar
+     mat<-mconst(assets,fich,scal-inter,scal)
+     ## Construção da matriz atraves do vector empilhado VH
+     matcov1<-constmatcov(M1[,i])
+
+     ## Construção da matriz atraves do vector empilhado EWMA
+     matcov2<-constmatcov(M2[,i])
+
+     ## Construção da matriz atraves do vector empilhado DCC
+     matcov4<-constmatcov(M4[,i])
+     if(rentfix==-1) # Caso se pretenda calcular o GMV
+     {
+       #Cálculo dos portefolios sem shorts
+       port1<-globalMin.portfolio(vecrent[,i], matcov1, shorts=FALSE)
+       port2<-globalMin.portfolio(vecrent[,i], matcov2, shorts=FALSE)
+       port4<-globalMin.portfolio(vecrent[,i], matcov4, shorts=FALSE)
+       # Cálculo do indicador da diferença de pesos para
+       #cada um dos portefólios construidos
+       res[,i]<-Indicador1(port1,port2,port4)
+     }
+     else #Cálculo dos portefólios com rentabilidade fixa
+     {
+       #Cálculo dos portefólios sem shorts com rentabilidade fixa
+       port1<-efficient.portfolio(vecrent[,i],matcov1,rentfix,shorts=FALSE)
+       port2<-efficient.portfolio(vecrent[,i],matcov2,rentfix,shorts=FALSE)
+       port4<-efficient.portfolio(vecrent[,i],matcov4,rentfix,shorts=FALSE)
+       res[,i]<-Indicador1(port1,port2,port4) # Cálculo do indicador da diferença
+       # de pesos para cada um dos portefólios construidos
+     }
+     i<-i+1
+   }
+   return(res) #Retorno da matriz com os respetivos indicadores
+

```

```
+ }
```

B.1.4 Função `comprent`, script `comRent.R`

```
> #Esta função devolve uma matriz com as rentabilidade definidas como input"filt"
> # assets-> indice dos ativos
> # M1; M2;M4-> Matrizes de covariância empilhadas (VH,EWMA,DCC)
> # fich-> ficheiro das rentabilidades
> # inter-> Intervalo móvel de estimação
> # rentfix-> Rentabilidade esperada fixada ( -1 caso GMV )
> # filt-> Output:
> #      1->Rentabilidade efectiva-Rentabilidade esperada
> #      2->Rentabilidade efectiva
> #      3->Rentabilidade esperada
> # shorts-> Construção dos portefolios realizada com ou sem short sales
> comprent<-function(assets, M1 , M2 , M4 , fich , inter ,rentfix,filt,shorts)
+ {
+   res<-matrix(data=0,nrow=4,ncol=ncol(M1)) #Criação da matriz de resposta
+   vecrent<-Rents(assets,M1,fich,inter)      #Cálculo das rentabilidades para
+   #os diversos intervalos
+   i<-1
+   j<-1
+   while(i<=ncol(M1)) # Percorre todas as datas
+   {
+     print(i)
+     data<-as.character(M1[1,i]) # Data do periodo i em character
+     print(data)
+     #Construção das matrizes atraves do vector empilhado
+     matcov1<-constmatcov(M1[,i])
+     matcov2<-constmatcov(M2[,i])
+     matcov4<-constmatcov(M4[,i])
+     #Definição dos portefolios a NULL para não efectuar análise caso
+     #eles não sejam construidos com sucesso
+     port1<-NULL
+     port2<-NULL
+     port4<-NULL
+     if(rentfix==-1) # Condição para o cálculo do GMV
+     {
+       #Uso da instrução TryCatch pelo facto de o solver nao resolver
+       #todos os portefolios com rentabilidade fixada e shorts (NO caso
+       #do GMV não existe este problema mas foi colocada a instrução na mesma)
+       print("VH")
+       port1<-tryCatch( {globalMin.portfolio(vecrent[,i], matcov1,
+shorts=shorts)}, warning=function(w) {return(NULL)}, error = function(e)
+{return(NULL)})
+
+       print("EWMA")
+       port2<-tryCatch( {globalMin.portfolio(vecrent[,i], matcov2,
+shorts=shorts)}, warning=function(w) {return(NULL)}, error = function(e)
```

```

+{return(NULL)}}
+
+     print("DCC")
+     port4<-tryCatch( {globalMin.portfolio(vecrent[,i], matcov4,
+shorts=shorts)}, warning=function(w) {return(NULL)}, error = function(e)
+{return(NULL)}}
+
+     #Verificação da nulidade de algum dos resultados
+     if((!is.null(port1))&&!is.null(port2)&&!is.null(port4))
+     {
+         #Cálculo do output #identificado em "filt"
+         res[,j]<-Retornos(assets,data,fich,port1,port2,port4,vecrent[,i],filt)
+     }
+ }
+ else
+ {
+     #Uso da instrução TryCatch pelo facto de o solver nao resolver todos
+     # os portefolios com rentabilidade fixada e shorts
+     print(rentfix)
+     print("Trad")
+     port1<-tryCatch( {efficient.portfolio(vecrent[,i],matcov1,
+target.return=rentfix, shorts=shorts)}, warning=function(w)
+ {return(NULL)}, error = function(e){return(NULL)}}
+
+     print("EWMA")
+     port2<-tryCatch( {efficient.portfolio(vecrent[,i],matcov2,
+target.return=rentfix, shorts=shorts)}, warning=function(w)
+ {return(NULL)}, error = function(e){return(NULL)}}
+
+     print("DCC")
+     port4<-tryCatch( {efficient.portfolio(vecrent[,i],matcov4,
+target.return=rentfix, shorts=shorts)}, warning=function(w)
+ {return(NULL)}, error = function(e){return(NULL)}}
+
+
+     #Verificação da nulidade de algum dos resultados
+     if((!is.null(port1))&&!is.null(port2)&&!is.null(port4))
+     {
+         #Cálculo do output identificado em "filt"
+         res[,j]<-Retornos(assets,data,fich,port1,port2,port4,vecrent[,i],filt)
+     }
+
+ }
+
+ #Verificação da construção bem sucedida dos 3 portefolios
+ if((is.null(port1))||(is.null(port2))||(is.null(port4)))
+ {
+     res<-res[,-j] # Caso nao tenha sido bem sucedida é removida a coluna
+ }
+ else #Caso contrário avançamos j para a próxima coluna

```

```
+ {
+   j<-j+1
+ }
+ i<-i+1 #incremento de i é independente do incremento de j
+ #(j-> colunas inseridas no resultado; i-> colunas a percorrer
+ #dado o número de casos a analisar)
+ }
+ return(res) #Retorno da matriz com as rentabilidades definidas com filt
+ }
```

B.2 Quadros

Quadro 5: Características da Máquina Utilizada

Processador	4ª geração do processador Intel® Core™ i7-4700MQ com tecnologia 2.0 Intel® Turbo Boost; velocidade de relógio : 2.40 / 3.40 Turbo GHz; cache de nível 3 : 6 MB
Sistema Operativo	Windows 8.1 64-bit
Memória	32.768 (8.192 + 8.192 + 8.192 + 8.192) MB; máxima expansibilidade : 32.768 (são acessíveis ao utilizador 2x slots de memória do; sistema e 2x à Assistência Técnica Autorizada (ASP)) MB; tecnologia : DDR3L RAM (1.600 MHz).

Fonte: <http://www.toshiba.pt/laptops/qosmio/qosmio-x70-a/qosmio-x70-a-13j/>.

Quadro 6: Médias e Variâncias do Indicador das Diferenças dos Pesos do Portefólio GMV, e dos pesos Gerados aleatoriamente, Seleção 1 Dimensão 5

		VH vs EWMA	VH vs DCC	EWMA vs DCC	Random
Rent.1	Média	0.2745	0.2637	0.2103	0.4603
Rent.1	Var.	0.0120	0.0260	0.0107	0.0292
Rent.5	Média	0.2877	0.2820	0.2657	0.4811
Rent.5	Var.	0.0117	0.01	0.0167	0.0343

Fonte: Elaboração Própria; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH,EWMA,DCC: Consultar na lista de acrónimos.

Quadro 7: Médias e Variâncias do Indicador das Diferenças dos Pesos do Portefólio GMV, e dos pesos Gerados aleatoriamente, Seleção 2 Dimensão 5

		VH vs EWMA	VH vs DCC	EWMA vs DCC	Random
Rent.1	Média	0.2694	0.2752	0.2235	0.5553
Rent.1	Var.	0.0159	0.028	0.0146	0.0448
Rent.5	Média	0.2359	0.2854	0.301	0.5189
Rent.5	Var.	0.0159	0.0139	0.0194	0.043

Fonte: Elaboração Própria; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH,EWMA,DCC: Consultar na lista de acrónimos.

Quadro 8: Médias e Variâncias do Indicador das Diferenças dos Pesos do Portefólio GMV, e dos pesos Gerados aleatoriamente, Seleção 1 Dimensão 10

		VH vs EWMA	VH vs DCC	EWMA vs DCC	Random
Rent.1	Média	0.31	0.3574	0.3074	0.4429
Rent.1	Var.	0.0116	0.0229	0.0151	0.0149
Rent.5	Média	0.2666	0.281	0.2904	0.4768
Rent.5	Var.	0.0096	0.0123	0.023	0.0169

Fonte: Elaboração Própria; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH,EWMA,DCC: Consultar na lista de acrónimos.

Quadro 9: Médias e Variâncias do Indicador das Diferenças dos Pesos do Portefólio GMV, e dos pesos Gerados aleatoriamente, Seleção 2 Dimensão 10

		VH vs EWMA	VH vs DCC	EWMA vs DCC	Random
Rent.1	Média	0.2911	0.2977	0.2594	0.6661
Rent.1	Var.	0.0161	0.0205	0.0137	0.0385
Rent.5	Média	0.2774	0.3003	0.297	0.6601
Rent.5	Var.	0.0144	0.0129	0.0203	0.0351

Fonte: Elaboração Própria; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH,EWMA,DCC: Consultar na lista de acrónimos.

Quadro 10: Análise de Rentabilidades, valores da estatística (W) dos testes de normalidade Shapiro-Wilk

Rentabilidade	Portefólio	V.H.	EWMA	DCC
Rent.1	S1D5	0.9386***	0.9191***	0.9182***
Rent.5	S1D5	0.9476***	0.9224***	0.9664***
Rent.1	S2D5	0.9076***	0.9745***	0.9813**
Rent.5	S2D5	0.9406***	0.951***	0.9364***
Rent.1	S1D10	0.9194***	0.922***	0.9573**
Rent.5	S1D10	0.9131***	0.9292***	0.9356***
Rent.1	S2D10	0.92***	0.9079***	0.9555***
Rent.5	S2D10	0.9638***	0.9563***	0.9487***

Fonte: Elaboração Própria; H_0 :Hipótese de Normalidade; H_1 :Hipótese de Não-Normalidade; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH, EWMA, DCC, S1D5, S2D5, S1D10, S2D10: Consultar na lista de acrónimos; *, **,***: nível de significância 10%, 5%, 1% respetivamente.

Quadro 11: Análise de Rentabilidades, valores do teste F de igualdade de variâncias

Rentabilidade	Portefólio	VH/EWMA	VH/DCC	EWMA/DCC
Rent.1	S1D5	0.9149	0.8933	0.9763
Rent.5	S1D5	1.0101	1.0813	1.0705
Rent.1	S2D5	1.0798	1.186	1.0983
Rent.5	S2D5	1.0328	0.8789	0.851
Rent.1	S1D10	1.0174	1.0295	1.0119
Rent.5	S1D10	0.8683	0.8833	1.0172
Rent.1	S2D10	0.8765	1.1232	1.2814
Rent.5	S2D10	0.9825	1.0029	1.0208

Fonte: Elaboração Própria; H_0 :Hipótese de Igualdade de Variâncias; H_1 :Hipótese de Desigualdade das Variâncias; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH, EWMA, DCC, S1D5, S2D5, S1D10, S2D10: Consultar na lista de acrónimos; *, **,***: nível de significância 10%, 5%, 1% respetivamente.

Quadro 12: Análise de Rentabilidades, valores do teste-t de igualdade de Médias

Rentabilidade	Portefólio	VH/EWMA	VH/DCC	EWMA/DCC
Rent.1	S1D5	-0.1906	-0.3823	-0.1888
Rent.5	S1D5	-0.139	0.1394	0.2815
Rent.1	S2D5	-0.087	0.1455	0.2392
Rent.5	S2D5	-0.047	-0.1846	-0.1406
Rent.1	S1D10	0.0376	0.1847	0.1476
Rent.5	S1D10	0.1781	-0.2372	-0.4021
Rent.1	S2D10	0.3153	0.014	-0.3102
Rent.5	S2D10	-0.155	0.0831	0.2378

Fonte: Elaboração Própria; H_0 :Hipótese de Igualdade das Médias; H_1 :Hipótese de Desigualdade das Médias; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH, EWMA, DCC, S1D5, S2D5, S1D10, S2D10: Consultar na lista de acrónimos; *, **,***: nível de significância 10%, 5%, 1% respetivamente.

Quadro 13: Comparação Rentabilidade a um e cinco dias, valores das estatísticas dos testes t igualdade de médias e do teste F de igualdade de variâncias

Indicador	Rent.1vsRent5	VH	EWMA	DCC
Média	S1D5	-0.842	-0.89	-0.4287
Variância	S1D5	0.2478***	0.2735***	0.2999***
Média	S2D5	-0.4076	-0.427	-0.7038
Variância	S2D5	0.198***	0.1893***	0.1467***
Média	S1D10	-0.422	-0.2183	-0.8187
Variância	S1D10	0.3985***	0.3401***	0.3419***
Média	S2D10	-0.0353	-0.4245	0.063
Variância	S2D10	0.2294***	0.2572***	0.2048***

Fonte: Elaboração Própria; H_0 :Hipótese de Igualdade das Médias/Variâncias; H_1 :Hipótese de Desigualdade das Médias/Variâncias. Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH, EWMA, DCC, S1D5, S2D5, S1D10, S2D10: Consultar na lista de acrónimos; *, **,***: nível de significância 10%, 5%, 1% respetivamente.

Quadro 14: Comparação Rentabilidade das médias (valores do teste t) e, variâncias (valores do teste F), de portefólios com as mesmas dimensões e métodos de Seleção diferentes, rentabilidade a um dia

Indicador	Portefólios	VH	EWMA	DCC
Média	S1D5vsS2D5	-0.7694	-0.7188	-0.3005
Variância	S1D5vsS2D5	0.5853***	0.6908**	0.7771*
Média	S1D10vsS2D10	-0.0658	0.1809	-0.2626
Variância	S1D10vsS2D10	0.9374	0.8076	1.0227

Fonte: Elaboração Própria; H_0 :Hipótese de Igualdade das Médias/Variâncias; H_1 :Hipótese de Desigualdade das Médias/Variâncias; VH, EWMA, DCC, S1D5, S2D5, S1D10, S2D10: Consultar na lista de acrónimos; *, **,***: nível de significância 10%, 5%, 1% respetivamente.

Quadro 15: Comparação Rentabilidade das médias (valores de teste t) e, variâncias (valores de teste F), de portfólios com as mesmas dimensões e métodos de Seleção diferentes, rentabilidade a cinco dias

Indicador	Portefólios	VH	EWMA	DCC
Média	S1D5vsS2D5	-0.2384	-0.1938	-0.54867
Variância	S1D5vsS2D5	0.4676***	0.4781***	0.3801***
Média	S1D10vsS2D10	0.2745	-0.0621	0.5793
Variância	S1D10vsS2D10	0.5396***	0.6106**	0.6127**

Fonte: Elaboração Própria; H_0 :Hipótese de Igualdade das Médias/Variâncias; H_1 :Hipótese de Desigualdade das Médias/Variâncias; VH, EWMA, DCC, S1D5, S2D5, S1D10, S2D10: Consultar na lista de acrónimos; *, **,***: nível de significância 10%, 5%, 1% respetivamente.

Quadro 16: Médias e Variâncias das Rentabilidade Efetivas do Portefólio GMV, Seleção 1 Dimensão 5, Sem Short Sales

		Volat. Hist.	EWMA	DCC
Rent.1	Media	0.124	0.1481	0.1726
Rent.1	Var.	1.5969	1.7454	1.7877
Rent.5	Media	0.2888	0.3231	0.2549
Rent.5	Var.	6.455	6.3806	5.9604

Fonte: Elaboração Própria; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH,EWMA,DCC: Consultar na lista de acrónimos.

Quadro 17: Médias e Variâncias das Rentabilidade Efetivas do Portefólio GMV, Seleção 2 Dimensão 5, Sem Short Sales

		Volat. Hist.	EWMA	DCC
Rent.1.	Media	0.2419	0.2571	0.217
Rent.1	Var.	2.7284	2.5268	2.3006
Rent.5	Media	0.3682	0.3868	0.4446
Rent.5	Var.	13.7824	13.3453	15.682

Fonte: Elaboração Própria; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH,EWMA,DCC: Consultar na lista de acrónimos.

Quadro 18: Médias e Variâncias das Rentabilidade Efetivas do Portefólio GMV, Seleção 1 Dimensão 10, Sem Short Sales

		Volat. Hist.	EWMA	DCC
Rent.1	Media	0.1078	0.0986	0.0627
Rent.1	Var.	2.5763	2.5323	2.5025
Rent.5	Media	0.2454	0.1734	0.3409
Rent.5	Var.	6,4648	7,4453	7,3192

Fonte: Elaboração Própria; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH,EWMA,DCC: Consultar na lista de acrónimos.

Quadro 19: Médias e Variâncias das Rentabilidade Efetivas do Portefólio GMV, Seleção 2 Dimensão 10, Sem Short Sales

		Volat. Hist.	EWMA	DCC
Rent.1	Media	0.1226	0.057	0.1198
Rent.1	Var.	2.7483	3.1355	2.4469
Rent.5	Media	0.1342	0.1995	0.0994
Rent.5	Var.	11.98	12.1932	11.945

Fonte: Elaboração Própria; Rent.1 e Rent.5: Rentabilidades a um e a cinco dias; VH,EWMA,DCC: Consultar na lista de acrónimos.

B.3 Figuras

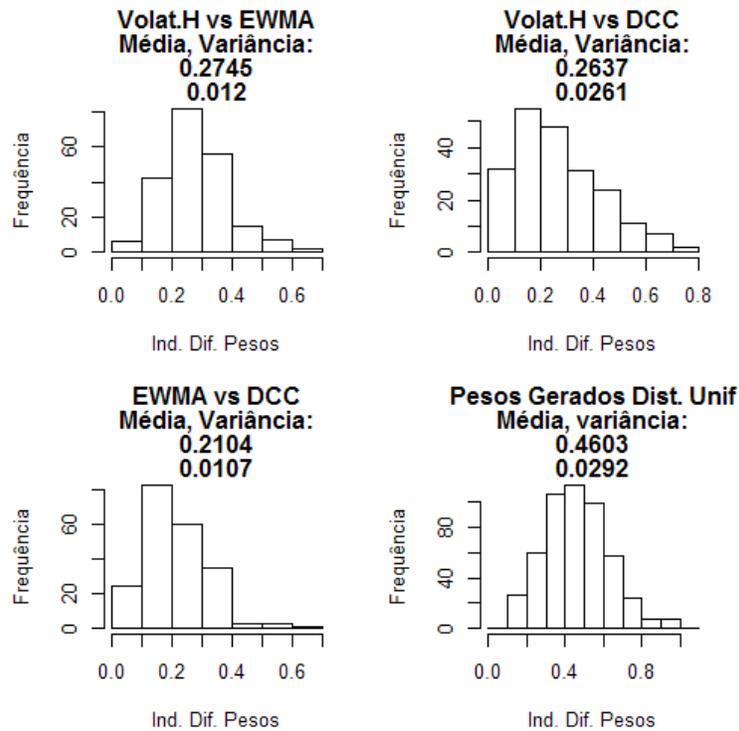


Figura 6: Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 1 Dimensão 5, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.

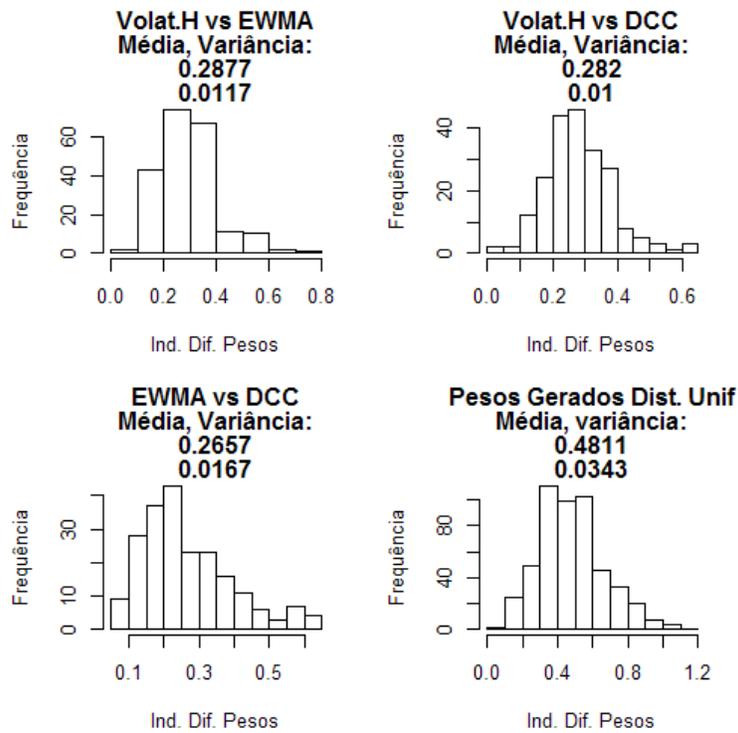


Figura 7: Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 1 Dimensão 5, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.

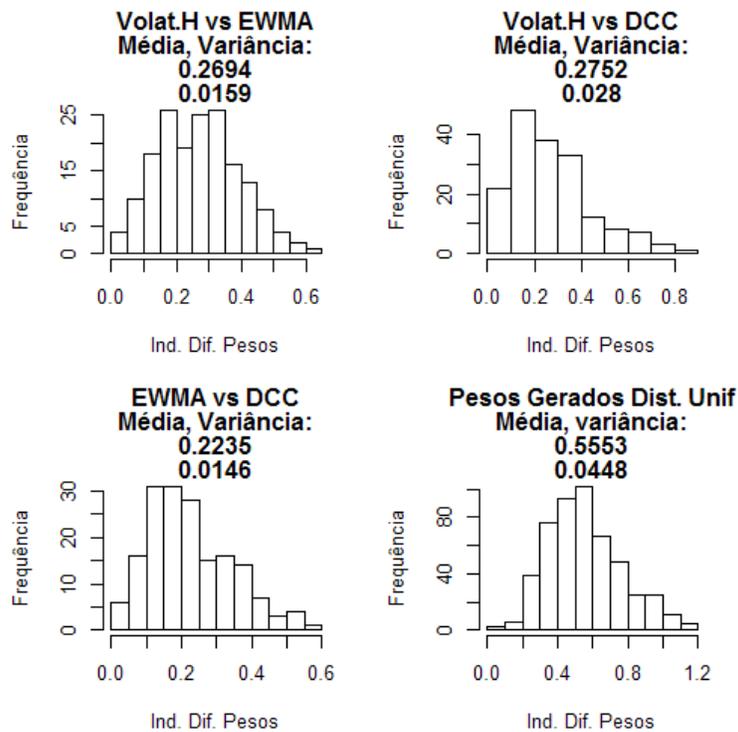


Figura 8: Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 2 Dimensão 5, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.

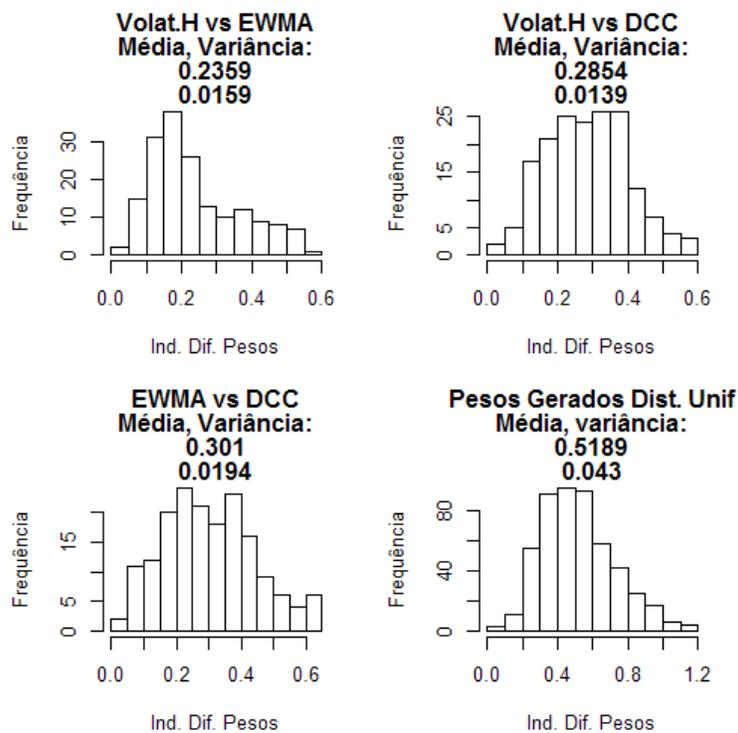


Figura 9: Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 2 Dimensão 5, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.

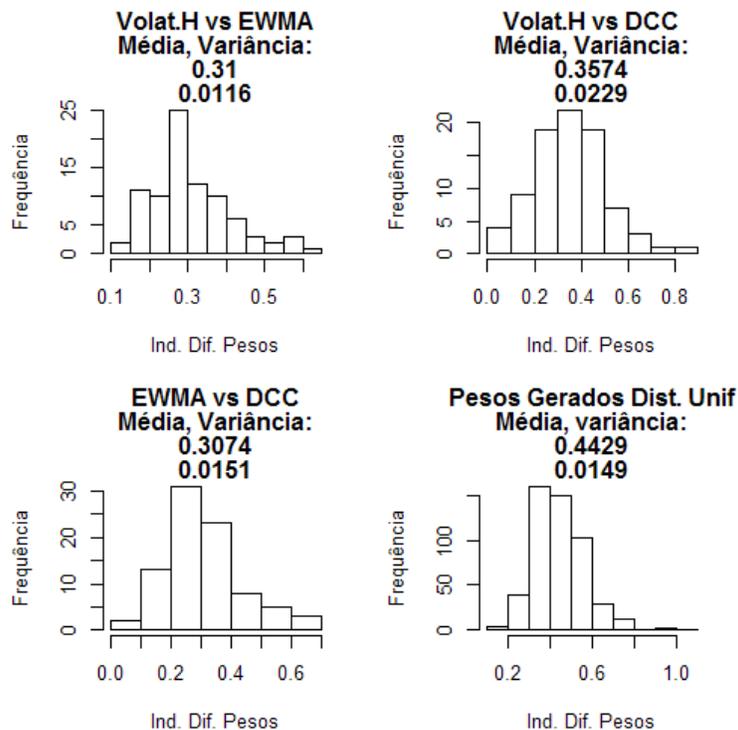


Figura 10: Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 1 Dimensão 10, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.

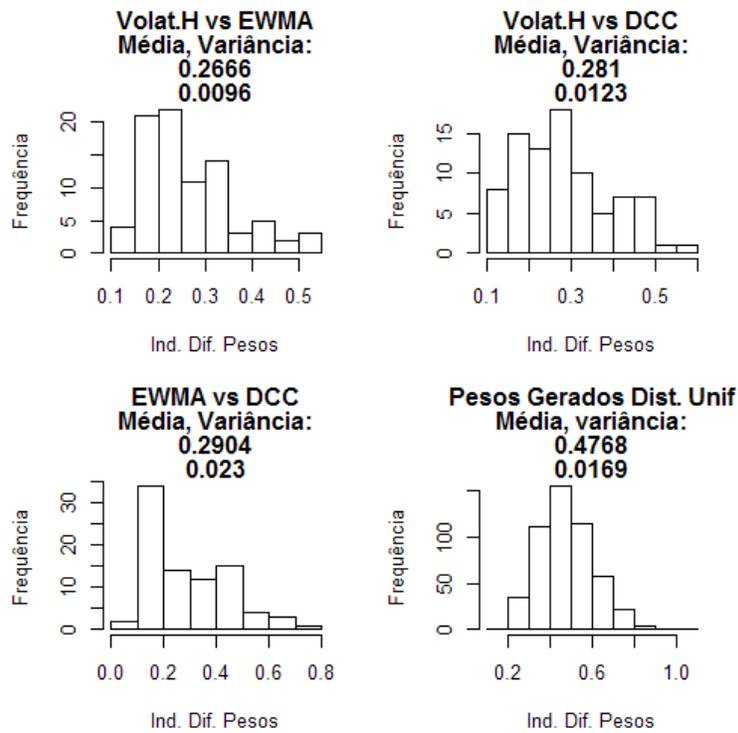


Figura 11: Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 1 Dimensão 10, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.

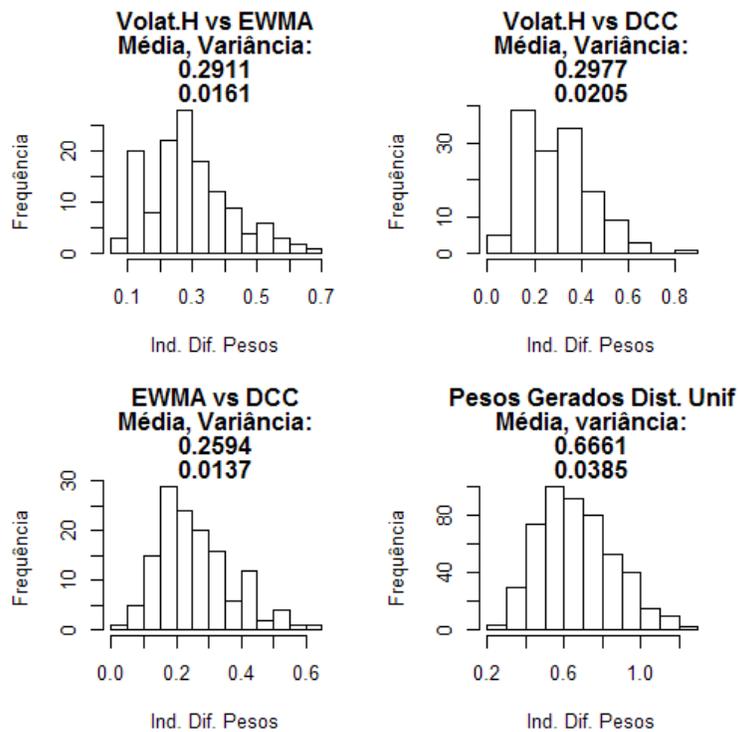


Figura 12: Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 2 Dimensão 10, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.

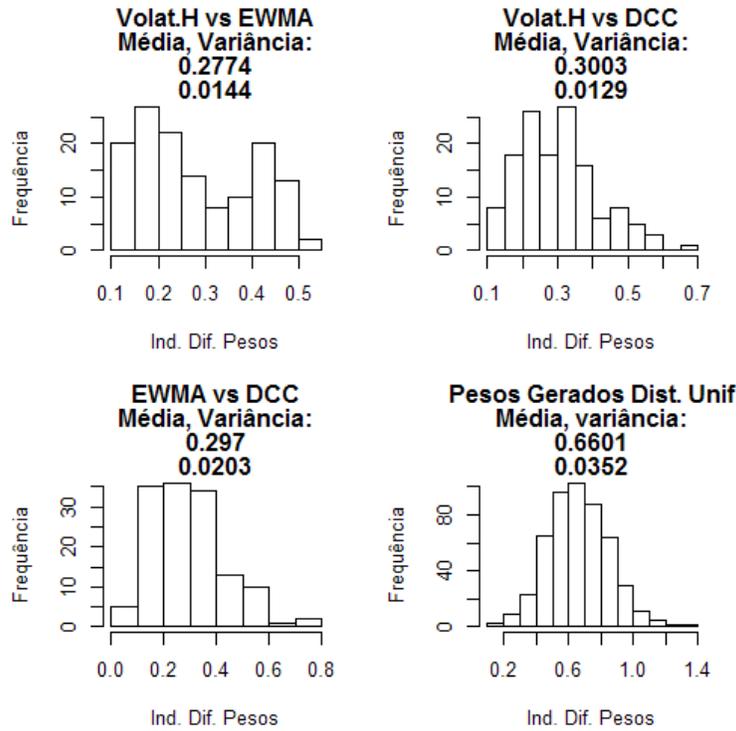


Figura 13: Distribuição do Indicador das Diferenças de Pesos, Seleção 2 Dimensão 10, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.

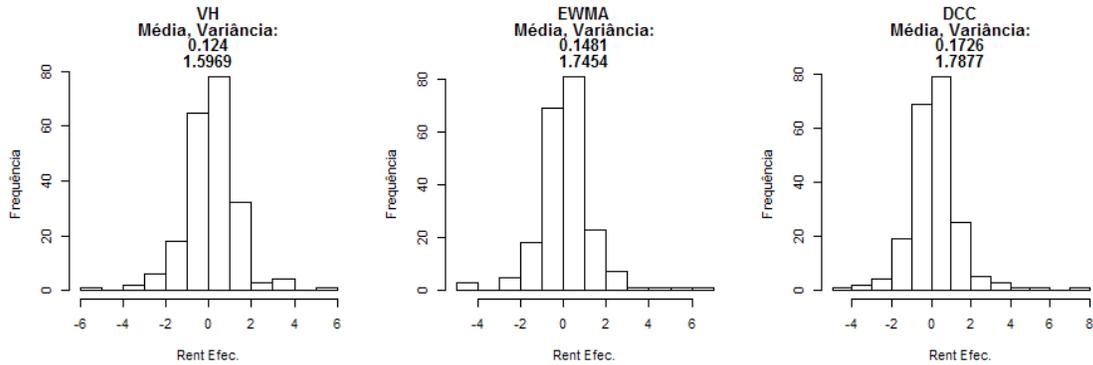


Figura 14: Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 1 Dimensão 5, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.

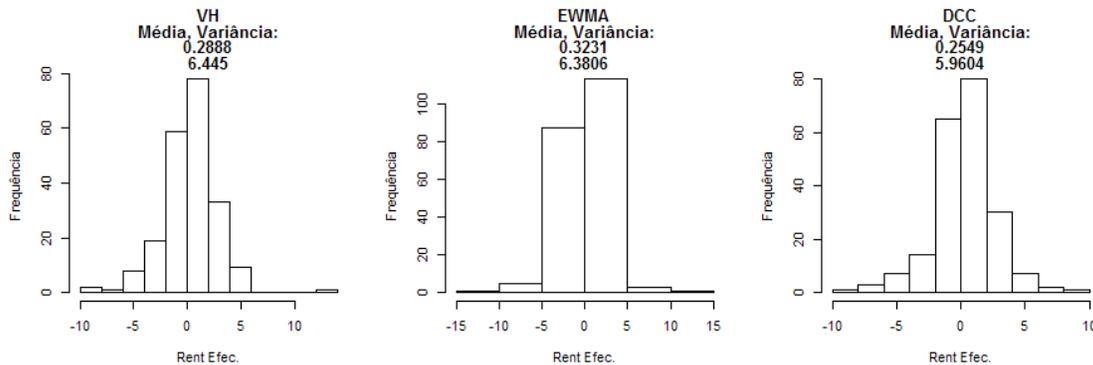


Figura 15: Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 1 Dimensão 5, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.

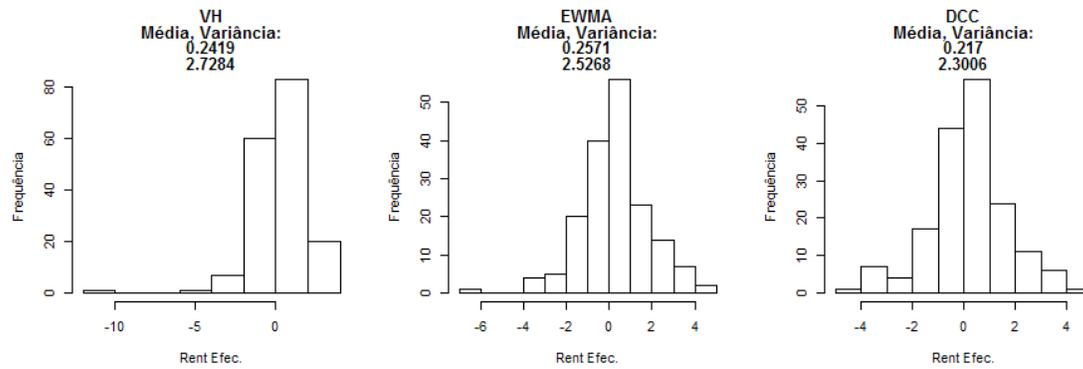


Figura 16: Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 2 Dimensão 5, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.

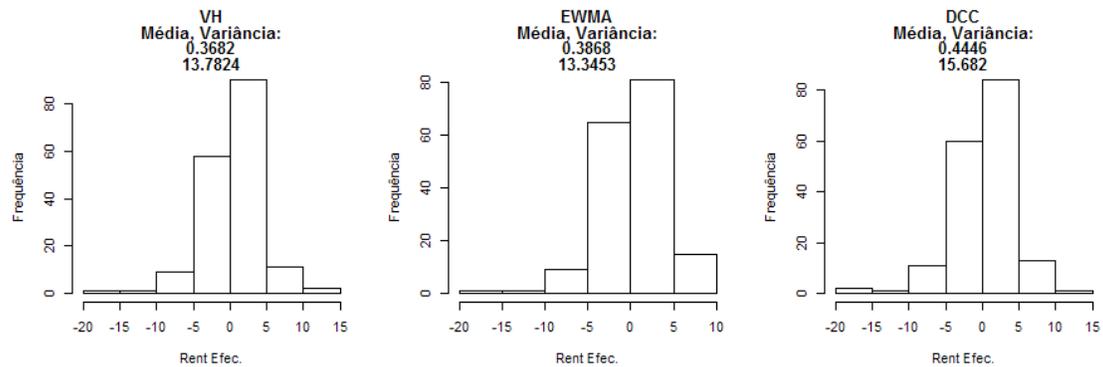


Figura 17: Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 2 Dimensão 5, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.

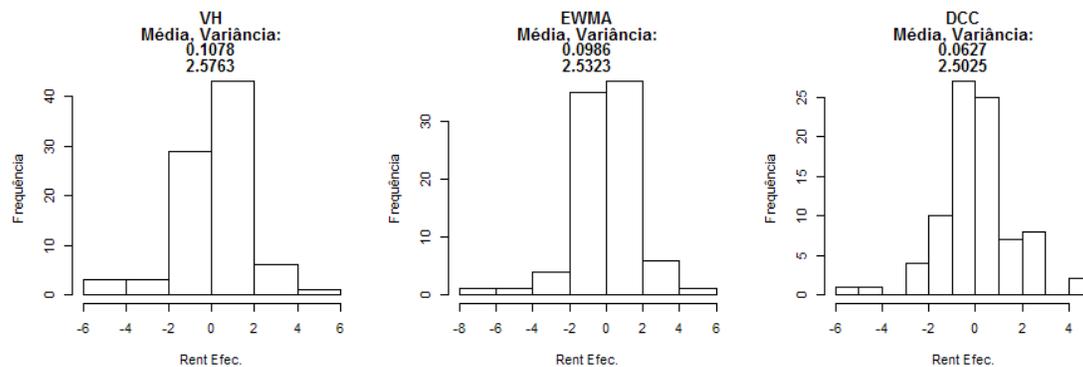


Figura 18: Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 1 Dimensão 10, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.

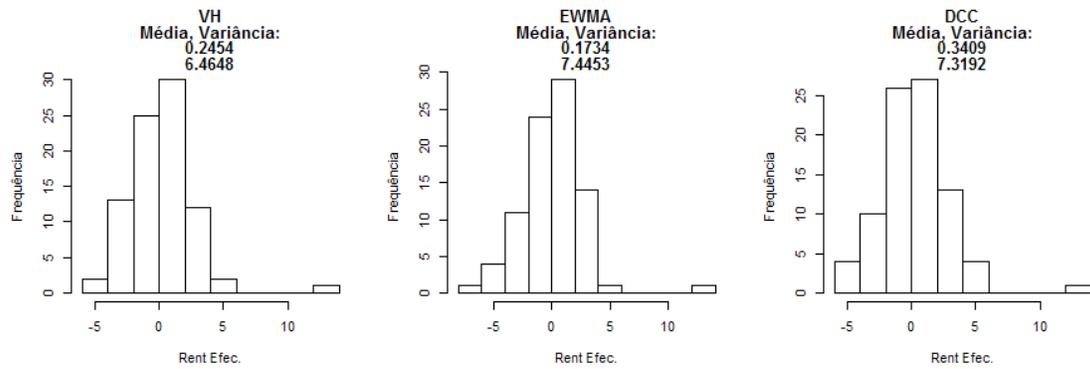


Figura 19: Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 1 Dimensão 10, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.

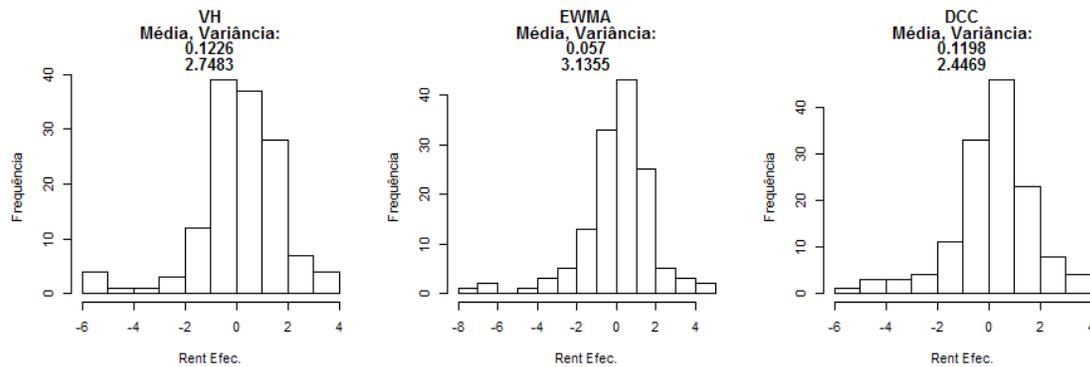


Figura 20: Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 2 Dimensão 10, Rentabilidade 1; Fonte: Elaboração Própria.

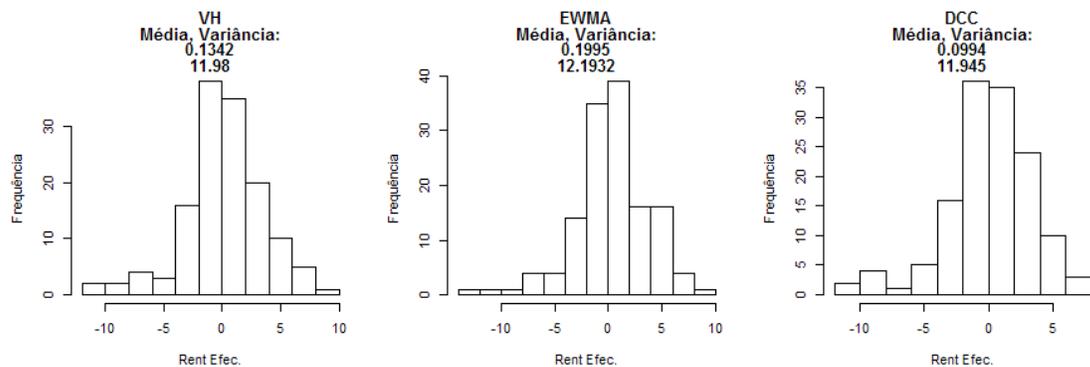


Figura 21: Distribuição da Rentabilidade Efetiva, Seleção 2 Dimensão 10, Rentabilidade 5; Fonte: Elaboração Própria.