



**FCTUC DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

# **CARACTERIZAÇÃO ACÚSTICA DE PAREDES DE ALVENARIA COM BLOCOS DE BETÃO, FABRICADOS COM INCORPORAÇÃO DE CORTIÇA**

## **UMA ABORDAGEM NUMÉRICA E EXPERIMENTAL**

Tese apresentada para a obtenção de grau de Doutor em Engenharia Civil, na Especialidade de Construções

Autor

**IGOR ANDRÉ DOS SANTOS E CASTRO**

Orientadores

**PROF. DOUTOR ANTÓNIO JOSÉ BARRETO TADEU**

**PROF. DOUTOR FERNANDO JOSÉ FORTE GARRIDO BRANCO**

Departamento de Engenharia Civil – Universidade de Coimbra

Colaboração institucional da Fundação para a Ciência e Tecnologia

Coimbra, Março, 2013





# CARACTERIZAÇÃO ACÚSTICA DE PAREDES DE ALVENARIA COM BLOCOS DE BETÃO, FABRICADOS COM INCORPORAÇÃO DE CORTIÇA – UMA ABORDAGEM NUMÉRICA E EXPERIMENTAL

## RESUMO

Diversos estudos permitiram evidenciar que a introdução de cortiça em betões influencia de maneira positiva o seu comportamento mecânico, acústico e térmico. Sabendo-se que Portugal é o maior produtor mundial de cortiça interessa desenvolver utilizações alternativas para o aproveitamento deste material, em especial para os seus desperdícios.

A presente tese avalia as vantagens da incorporação de resíduos de cortiça no fabrico de blocos, particularmente no desempenho acústico conferido por paredes de alvenaria construídas com esses blocos. Pretende-se que esta avaliação seja realizada de forma numérica e validada experimentalmente. Dada a complexidade da geometria em causa interessa desenvolver formulações numéricas mais eficientes em termos de cálculo.

O principal objetivo da presente tese é o desenvolvimento e implementação de novos modelos numéricos, baseados em formulações de acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira (BEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) para a avaliação do isolamento sonoro, conferido por aquelas paredes de alvenaria construídas com blocos fabricados com a incorporação de resíduos de cortiça. Pretende-se, desta forma, superar as limitações impostas por cada um dos métodos quando aplicados individualmente. Para este efeito, o domínio do problema é subdividido e as formulações BEM e o MFS são aplicadas a cada um dos subdomínios. As formulações são devidamente acopladas através da imposição das necessárias condições de fronteira. Estes modelos são formulados no domínio da frequência, ou seja, após a aplicação de transformadas de Fourier no domínio do tempo. Estes modelos numéricos são verificados por comparação dos resultados com soluções previamente conhecidas. A eficácia das formulações propostas é avaliada determinando o tempo de cálculo e a precisão dos resultados obtidos.

Numa primeira fase propõem-se formulações envolvendo apenas meios acústicos. Numa segunda fase são propostas formulações desenvolvidos e implementadas para meios elásticos e fluidos. As potencialidades das formulações desenvolvidas são evidenciadas pela resolução de vários problemas práticos.

Após a aplicação do método a meios infinitos e semi-infinitos, as formulações são adaptadas para permitir a determinação do isolamento acústico conferido por paredes contendo inclusões (cavidades dos blocos), as quais podem ser finas (encaixes entre blocos). Para este efeito são utilizadas funções de Green deduzidas para um sistema constituído por um meio elástico homogéneo, confinado por dois meios fluidos. A utilização dessas soluções fundamentais permite evitar a discretização das faces das paredes.

A avaliação do isolamento sonoro a sons de condução aérea conferido por várias paredes de alvenaria de blocos de betão, fabricados com incorporação de regranulado de cortiça expandida, é realizada após a caracterização experimental das composições de betões e dos blocos utilizados no fabrico das paredes de alvenaria. Os resultados obtidos são validados com aqueles obtidos nas câmaras acústicas construídas no ITeCons. Ainda na componente experimental desta tese, detalha-se o trabalho realizado na caracterização das câmaras acústicas, identificando-se a cadeia de medição implementada e os testes experimentais realizados.



# ACOUSTIC CHARACTERIZATION OF MASONRY WALLS WITH CONCRETE BLOCKS, MANUFACTURED WITH CORK INCORPORATION - NUMERICAL AND EXPERIMENTAL APPROACH

## ABSTRACT

Several studies have evidenced that the introduction of cork in concretes influences positively their mechanical, thermal and acoustic behaviour. Portugal is the world's largest producer of cork, so the development of alternative uses with this material is very important, particularly for its wastes.

The present thesis evaluates the advantages of incorporating cork waste in the fabrication of blocks, particularly in acoustic behaviour given by masonry walls built with such blocks. It is intended that this evaluation is numerically performed and experimentally validated. Due to the complexity of the geometry, it is of great interest to develop more efficient numerical formulations.

The main aim of this thesis is the development and implementation of new numerical models, based in coupling formulations between the Boundary Element Method (BEM) and the Method of Fundamental Solutions (MFS), for the evaluation of sound insulation, conferred by these studied walls. It's intended to overcome the limitations imposed by each of these methods when applied individually. For this purpose, the problem domain is subdivided and BEM and MFS formulations are applied to each of the subdomain. The formulations are properly coupled by imposing the necessary boundary conditions. These models are formulated in the frequency domain, in other words after applying Fourier's transforms at the time domain. These numerical models are verified by comparing the results with previously known solutions. The effectiveness of the proposed formulations is evaluated by determining the calculation time and accuracy of the results obtained.

In a first stage formulations involving only acoustic media are proposed. In a second stage developed formulations are proposed and implemented for elastic and fluid medium. The potential of the developed formulations is evidenced by the resolution of several practical problems.

After applying the method to infinite and semi-infinite medium, the formulations are adapted to allow determination of acoustic insulation given by walls containing inclusions (cavities of the blocks), which can be thin (joints between blocks). For this purpose Green's functions deduced for a system made by a homogeneous elastic medium and confined by two fluid medium are used. The use of these fundamental solutions avoids the discretization of the faces walls.

The evaluation of the airborne sound insulation conferred by several masonry walls of concrete blocks, manufactured with the incorporation of expanded cork regranulate, is carried out after the experimental characterization of the concrete compositions and concrete block used on masonry walls. The obtained results are validated on acoustic chambers built in *ITeCons*. The obtained results are validated on acoustic chambers built in *ITeCons*. Still within the experimental component of this thesis, the work carried out on the characterization of the acoustic chambers is also detailed, and both the implemented measurement network and the performed experimental tests are identified.



# AGRADECIMENTOS

É com enorme satisfação que concluo mais uma etapa da minha vida académica, que não seria possível sem o apoio de todos aqueles que tornaram real a concretização deste trabalho de investigação. A todos eles o meu profundo e sincero agradecimento. Alguns merecem especial destaque, não só pelo apoio incondicional como pelo tempo disponibilizado a este projeto.

Em primeiro de tudo, esta tese teria sido impossível de se realizar sem o apoio do meu orientador, o Prof. Doutor António José Barreto Tadeu, não só profissionalmente mas também pessoalmente. Manifesto a minha total admiração pelas suas capacidades na área de investigação, de trabalho polivalente e pela primazia no rigor exigido. A ele se deve, em grande parte, a concretização deste projeto, mediante as suas linhas de orientação decisivas e a partilha constante de conhecimento. Ao Prof. Doutor Fernando José Forte Garrido Branco, que assegurou igualmente parte da orientação desta tese, agradeço a total disponibilidade e empenho manifestados, sempre que deles necessitei.

Durante estes anos, tive a oportunidade de desenvolver todo o meu trabalho no Instituto de Investigação e Desenvolvimento Tecnológico em Ciências da Construção – *ITeCons*. Agradeço em especial à anterior e atual direção, pelas condições de trabalho, utilização do *cluster* computacional, ao qual recorri durante extensos períodos de cálculo intensivo, e pela utilização dos equipamentos laboratoriais que me foram disponibilizados. Agradeço também a todos aqueles que trabalharam e trabalham no *ITeCons*, pelo apoio e incentivo que me deram ao longo de todo o trabalho experimental e numérico. Em particular, quero agradecer o companheirismo dos meus colegas de gabinete, Doutora Ana Nossa, Eng<sup>a</sup>. Ana Isabel e, em especial, do Eng.<sup>o</sup> José Nascimento, que tiveram a paciência de lidar comigo diariamente, apoiando a realização deste projeto.

A todos aqueles que integram o Laboratório de Construções do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, pelos comentários e pelo apoio e incentivo que me deram ao longo de todo este trabalho, em particular ao Prof. Doutor Paulo Amado Mendes, à Prof.<sup>a</sup> Doutora Julieta António, ao Prof. Doutor Luis Godinho, ao Prof. Doutor Nuno Simões, à Prof.<sup>a</sup> Isabel Torres e ao José António.

Relativamente ao financiamento dado a esta tese, agradeço ao Ministério da Ciência e Ensino Superior, sob contrato de concessão da Fundação para a Ciência e a Tecnologia – *FCT*, que me concebeu uma bolsa de Investigação durante os quatro anos de trabalho científico (com a referência de Bolsa de Investigação SFRH / BD / 37425 / 2007).

Dou a minha atenção a todos aqueles que, embora não façam parte da minha vida profissional, sempre me ajudaram a continuar e a sorrir, e me animaram quando o trabalho não estava a correr da melhor forma.

A todos os meus colegas e em especial aos amigos, que me acompanharam durante estes anos, principalmente durante os últimos meses, agradeço a sua compreensão pela minha ausência.

Por último, e o mais importante, quero agradecer à minha família. À minha mãe Elvira, ao meu pai Joaquim, à minha irmã Marta, ao meu cunhado João Pedro, ao meu sobrinho Pedro Nuno e ao meu pequeno afilhado Ivan, pelo carinho e pela amizade que sempre dispensaram e que ajudaram a fazer de mim o que sou hoje. O incentivo que sempre me deram foi decisivo para que pudesse levar este trabalho a bom termo. Aos meus pais, em particular, quero deixar um agradecimento muito especial.

Quero agradecer à minha segunda família, aos meus sogros Alice e Carlos e à minha cunhada Cristiana, pela motivação que me deram e em especial ao carinho dos fins de semana, com os excelentes cozinhados, dando incentivo para o início das extenuantes semanas.

Dedico esta tese à minha querida esposa, Diana, que foi a pessoa mais importante e que mais me apoiou nesta difícil caminhada. O meu muito obrigado pela sua ajuda, pelas longas horas de espera, pela sua compreensão e pela sua paciência infinita, devido à minha ausência e à falta de disponibilidade. É o nosso triunfo!



# ÍNDICE

---

---

1	INTRODUÇÃO .....	1
1.1	ENQUADRAMENTO E MOTIVAÇÃO .....	1
1.2	OBJETIVOS .....	3
1.3	ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	4
2	ACOPLAMENTO ENTRE O BEM E O MFS NA MODELAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS FLUIDOS CONTENDO INCLUSÕES .....	7
2.1	INTRODUÇÃO .....	7
2.2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	11
2.3	FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO DE INTEGRAIS DE FRONTEIRA EM MEIOS FLUIDOS .....	12
2.3.1	Formulação de acoplamento (BEM/MFS) .....	12
2.3.1.1	Meio fluido infinito com inclusões fluidas submersas .....	12
2.3.1.2	Meio fluido infinito com inclusões rígidas submersas .....	17
2.3.1.3	Meio fluido infinito com inclusões vazias/cavidades submersas .....	18
2.3.1.4	Meio fluido infinito com inclusão fluida e inclusão rígida submersas .....	19
2.3.1.5	Meio fluido semi-infinito com inclusões rígidas submersas .....	19
2.3.2	Formulação de acoplamento (TBEM/MFS) .....	21
2.3.2.1	Meio fluido infinito com inclusões fluidas submersas .....	21
2.3.2.2	Meio fluido infinito com inclusões rígidas submersas .....	24
2.3.2.3	Meio fluido infinito com inclusões vazias/cavidades submersas .....	24
2.3.2.4	Meio fluido infinito com inclusão fluida e inclusão rígida submersas .....	25
2.3.2.5	Meio fluido semi-infinito com inclusões rígidas submersas .....	25

2.3.3	Formulação de acoplamento (TBEM+BEM/MFS).....	26
2.3.3.1	Meio fluido infinito com inclusões fluidas submersas.....	26
2.4	VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO .....	26
2.5	EFICIÊNCIA DE CÁLCULO PARA O MÉTODO DE ACOPLAMENTO .....	31
2.6	PRESSÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO .....	34
2.7	APLICAÇÕES NO DOMÍNIO DA ACÚSTICA.....	35
2.7.1	Análise de resposta, no domínio do tempo, num meio acústico na presença de uma barreira acústica rígida com espessura nula nas proximidades de uma estrutura semicircular .....	36
2.7.2	Análise de resposta, no domínio do tempo, numa estação de metro na presença de uma barreira acústica fina que separa duas vias-férreas .....	40
2.8	CONCLUSÕES .....	43
APÊNDICE A: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2D, EM BEM, EM MEIOS FLUIDOS INFINITOS.....		44
A.1	– DEFINIÇÕES DE ÂMBITO GERAL.....	44
A.2	– FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE PRESSÃO.....	45
A.3	– FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE FLUXOS DE PRESSÃO .....	45
APÊNDICE B: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2D, EM TBEM, EM MEIOS FLUIDOS INFINITOS.....		46
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		47
3	ACOPLAMENTO ENTRE O BEM E O MFS NA MODELAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS ELÁSTICOS CONTENDO INCLUSÕES.....	53
3.1	INTRODUÇÃO .....	53
3.2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	58
3.3	FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO DE INTEGRAIS DE FRONTEIRA EM MEIOS ELÁSTICOS.....	60
3.3.1	Formulação de acoplamento (BEM/MFS).....	60
3.3.1.1	Meio elástico infinito com inclusões elásticas enterradas.....	60
3.3.1.2	Meio elástico infinito com inclusões rígidas enterradas .....	65
3.3.1.3	Meio elástico infinito com inclusões vazias/cavidades enterradas .....	66
3.3.1.4	Meio elástico infinito com inclusões elástica e rígida .....	66
3.3.2	Formulação de acoplamento (TBEM/MFS).....	67
3.3.2.1	Meio elástico infinito com inclusões elásticas enterradas.....	67
3.3.2.2	Meio elástico infinito com inclusões rígidas enterradas .....	69
3.3.2.3	Meio elástico infinito com inclusões vazias/cavidades.....	70

3.3.2.4	Meio elástico infinito com inclusões elástica e rígida .....	70
3.3.3	Formulação de acoplamento (TBEM+BEM/MFS).....	71
3.3.3.1	Meio elástico infinito com inclusões elásticas enterradas.....	71
3.4	VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO .....	71
3.4.1	Meio elástico infinito com inclusões elásticas enterradas.....	71
3.4.2	Meio elástico infinito com inclusões rígidas enterradas .....	74
3.4.3	Meio elástico infinito com inclusões vazias/cavidades.....	75
3.4.4	Meio elástico infinito com inclusões elástica e rígida.....	77
3.5	RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	77
3.6	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	79
3.6.1	Resposta de deslocamentos em frequência para a solução de referência.....	81
3.6.2	Eficiência de cálculo para o método de acoplamento .....	83
3.6.3	Análise das respostas no domínio do tempo .....	85
3.7	CONCLUSÕES .....	88
APÊNDICE A: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2.5D, EM BEM, EM MEIOS ELÁSTICOS INFINITOS.....		89
A.1 – DEFINIÇÕES DE ÂMBITO GERAL.....		89
A.2 – FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE DESLOCAMENTOS .....		90
APÊNDICE B: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2.5D, EM TBEM, EM MEIOS ELÁSTICOS INFINITOS.....		91
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		93
4	ACOPLAMENTO ENTRE O BEM E O MFS NA MODELAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS HETEROGÊNEOS SÓLIDO-FLUIDO .....	103
4.1	INTRODUÇÃO .....	103
4.2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	106
4.3	FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO DE INTEGRAIS DE FRONTEIRA EM MEIOS ELÁSTICOS CONTENDO MEIOS HETEROGÊNEOS SÓLIDOS E FLUIDOS .....	108
4.3.1	Formulação de acoplamento (BEM/MFS).....	109
4.3.1.1	Meio elástico infinito com inclusões fluida e elástica .....	109
4.3.1.2	Meio elástico infinito com inclusões fluida e rígida.....	114
4.3.1.3	Meio elástico infinito com inclusões fluida e vazia/cavidade.....	115
4.3.2	Formulação de acoplamento (TBEM/MFS).....	115
4.3.2.1	Meio elástico infinito com inclusões fluida e elástica .....	115

4.3.2.2	Meio elástico infinito com inclusões fluida e rígida .....	117
4.3.2.3	Meio elástico infinito com inclusões fluida e vazia/cavidade.....	117
4.3.3	Formulação de acoplamento (TBEM+BEM/MFS).....	118
4.3.3.1	Meio elástico infinito com inclusões fluida e elástica .....	118
4.4	VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO .....	118
4.4.1	Meio elástico infinito com inclusões fluida e elástica.....	118
4.4.2	Meio elástico infinito com inclusões fluida e rígida .....	121
4.4.3	Meio elástico infinito com inclusões fluida e vazia/cavidade .....	122
4.5	RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO .....	123
4.6	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	124
4.6.1	Respostas de deslocamentos e de pressão em frequência para a solução de referência.....	128
4.6.2	Eficiência de cálculo para o método de acoplamento .....	128
4.6.3	Análise das respostas no domínio do tempo .....	131
4.7	CONCLUSÕES .....	135
APÊNDICE A: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2.5D, EM BEM, EM MEIOS ELÁSTICOS INFINITOS.....		
136		
A.1	– DEFINIÇÕES DE ÂMBITO GERAL .....	136
A.2	– FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE DESLOCAMENTOS .....	137
A.3	– FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE TRAÇÕES .....	138
APÊNDICE B: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2D, MEIOS FLUIDOS .....		
139		
B.1	– FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE PRESSÃO.....	139
B.2	– FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE FLUXOS DE PRESSÃO .....	140
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		
141		
5	IMPLEMENTAÇÃO DE ENSAIOS ACÚSTICOS NO LABORATÓRIO DO <i>ITECONS</i> .....	147
5.1	INTRODUÇÃO .....	147
5.2	DESCRIÇÃO DAS CÂMARAS ACÚSTICAS HORIZONTAIS DO <i>ITECONS</i> .....	149
5.2.1	Requisitos da envolvente das câmaras .....	151
5.2.2	Dimensões necessárias das câmaras .....	151
5.2.3	Aspetos construtivos da câmara fixa.....	152
5.2.4	Aspetos construtivos da câmara móvel.....	154
5.2.5	Aro e provetes de ensaio .....	156
5.3	EQUIPAMENTOS DE MEDIÇÃO .....	159
5.4	CORRECÇÃO DAS CÂMARAS HORIZONTAIS DO <i>ITECONS</i> .....	160

5.4.1	Controlo da difusibilidade na câmara reverberante fixa .....	161
5.4.2	Área de absorção máxima na câmara reverberante fixa.....	163
5.4.3	Correção dos tempos de reverberação .....	164
5.4.4	Medição do fator de perdas total.....	165
5.4.5	Ruído de fundo na câmara recetora.....	168
5.5	ENSAIO LABORATORIAL DE ISOLAMENTO A SONS AÉREOS.....	169
5.5.1	Controlo da humidade relativa e da temperatura no interior das câmaras .....	169
5.5.2	Posicionamento do equipamento de ensaio no interior das câmaras.....	170
5.5.3	Determinação do isolamento sonoro aos sons de condução aérea .....	171
5.5.4	Determinação do índice de isolamento aos sons de condução aérea .....	173
5.5.5	Pressão do sistema hidráulico de movimentação da câmara móvel .....	174
5.6	VALOR MÁXIMO DO ÍNDICE DE ISOLAMENTO AOS SONS DE CONDUÇÃO ÁREA..	174
5.6.1	Parede do tipo A .....	175
5.6.2	Parede do tipo B.....	176
5.6.3	Parede do tipo C.....	178
5.7	CONCLUSÕES .....	180
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	182
6	CARACTERIZAÇÃO ACÚSTICA DE PAREDES DE CONSTRUÇÃO COM BLOCOS DE BETÃO, FABRICADOS COM INCORPORAÇÃO DE CORTIÇA .....	185
6.1	INTRODUÇÃO .....	185
6.2	ABORDAGEM NUMÉRICA .....	188
6.2.1	Definição do problema.....	188
6.2.2	Formulação de acoplamento BEM+TBEM/MFS .....	189
6.2.2.1	No domínio exterior à Inclusão 1 .....	190
6.2.2.2	No domínio interior à Inclusão 1 .....	192
6.2.2.3	No domínio interior e exterior da Inclusão 2 .....	193
6.2.2.4	Sistema final de equações.....	194
6.2.3	Verificação da Formulação de acoplamento .....	195
6.3	UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE GREEN NO CÁLCULO DO ISOLAMENTO A SONS DE CONDUÇÃO AÉREA.....	197
6.3.1	Resultados experimentais.....	198
6.3.2	Resultados analíticos.....	201
6.3.3	Comparação de resultados .....	202

6.4	ABORDAGEM EXPERIMENTAL – CARACTERIZAÇÃO DE PAREDES DE ALVENARIA COM BLOCOS DE BETÃO COM INCORPORAÇÃO DE CORTIÇA .....	204
6.4.1	Fabrico da parede.....	206
6.4.2	Resultados acústicos em laboratório.....	208
6.4.2.1	Ensaio laboratoriais.....	208
6.4.2.2	Evolução ao longo do tempo do isolamento sonoro a sons de condução aérea conferido por paredes de alvenaria de blocos de betão com incorporação de cortiça .....	211
6.4.3	Resultados numéricos <i>versus</i> experimentais .....	213
6.4.4	Comparação de resultados .....	217
6.5	CONCLUSÕES .....	219
	APÊNDICE A: FUNÇÕES DE GREEN PARA MEIOS INFINITOS .....	220
	APÊNDICE B: FUNÇÕES DE GREEN PARA UMA CAMADA SÓLIDA LIMITADA POR DOIS MEIOS FLUIDOS .....	226
	APÊNDICE C: RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA CARACTERIZAÇÃO DOS BLOCOS DE BETÃO, FABRICADOS COM INCORPORAÇÃO DE CORTIÇA.....	243
	C.1 – PROPRIEDADES DOS AGREGADOS .....	243
	C.2 – CARACTERIZAÇÃO DA MISTURA.....	243
	C.3 – CARACTERIZAÇÃO DOS BLOCOS.....	247
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	251
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	257
7.1	SÍNTESE GERAL E PRINCIPAIS CONCLUSÕES .....	257
7.2	PERSPECTIVAS DE FUTURA INVESTIGAÇÃO.....	259

# CAPÍTULO 1

---

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 ENQUADRAMENTO E MOTIVAÇÃO

A cortiça é um produto natural, ecológico, orgânico, leve, exibe uma elevada estabilidade dimensional, uma considerável resistência face a cargas de compressão, não liberta cheiros nem gases nocivos, mantém-se inalterável e conserva a sua eficiência por longos períodos de tempo. Estas características permitem que a cortiça seja utilizada num vasto leque de aplicações. Estima-se que entre 20 a 30% da cortiça recebida nas fábricas para processamento é rejeitada, sobretudo sob a forma de partículas de pequenas dimensões. Dado que Portugal é o maior produtor mundial de cortiça, pode revelar-se economicamente interessante encontrar utilizações alternativas para a utilização daqueles resíduos industriais, tais como a incorporação destes agregados em misturas de betões. Encontram-se, na bibliografia, trabalhos realizados com este tipo de betões leves e tem-se verificado que estes exibem melhores propriedades térmicas e menor retração quando comparados com outros betões leves produzidos com recurso a agregados leves de outra natureza. Na indústria da construção, o excelente comportamento térmico da cortiça e a sua capacidade de absorver vibrações fazem deste material uma solução de eleição como isolante térmico ou acústico.

O desenvolvimento de novas aplicações para os grânulos de cortiça tem permitido registar vantagens em termos ambientais e técnicos. Os estudos desenvolvidos por diversos grupos de investigação permitiram concluir que a presença da cortiça poderá influenciar de maneira positiva o comportamento mecânico, acústico e térmico de betões. À data do início da realização deste trabalho, as experiências realizadas com a introdução de resíduos de cortiça na fabricação de betões leves, permitiu concluir que este material

possui características técnicas interessantes e que poderão constituir uma mais-valia para a sua aplicação em blocos de alvenaria, quando comparado com aqueles que incorporam poliestireno, argila expandida ou betão celular.

Nesse sentido, julgou-se importante a introdução deste agregado na produção de blocos de alvenaria substituindo, parcialmente, o agregado britado com intuito de melhorar o seu desempenho, quer na redução de peso, quer em termos térmicos, quer, e principalmente, em termos acústicos.

Na presente tese irá dar-se mais ênfase as características acústicas destes elementos de alvenaria. A sua caracterização pode ser realizada em termos numéricos ou em termos experimentais. Ao realizar uma abordagem por via numérica, verifica-se que existem várias técnicas que têm sido desenvolvidas para simular a propagação sonora, tais como: o Método dos Elementos de Fronteira (*Boundary Element Method* – BEM), o Método dos Elementos Finitos, o Método das Diferenças Finitas; o Método das Soluções Fundamentais (*Method of Fundamental Solutions* – MFS); entre outros. Contudo, em sistemas que incorporem inclusões finas, estes métodos podem ser ineficazes. Para a avaliação experimental é necessário a existências de instalações laboratoriais que permitam a realização de ensaios experimentais, tais como ensaios de isolamento a sons aéreos de elementos verticais, com equipamentos de alto desempenho necessários para a realização de testes credíveis.

A comunidade científica tem vindo a desenvolver trabalhos na modelação numérica de propagação sonora em meios acústicos e sólidos, contendo inclusões fluidas, elásticas, rígidas ou cavidades. Estes trabalhos têm dado origem a diversos temas de investigação e a um número significativo de artigos publicados em áreas como a acústica, a prospeção geofísica, a análise sísmica, a mecânica da fratura ou a deteção e/ou localização de defeitos e delaminações, através de técnicas não destrutivas, entre outras. O Método dos Elementos de Fronteira tem-se revelado bastante eficiente em problemas infinitos que envolvam a modelação da propagação de ondas. Contudo, esta formulação numérica degenera para sistemas que apresentam elementos/inclusões finas. No entanto, é possível recorrer às equações integrais de fronteira deduzidas a partir das equações da formulação clássica, obtendo uma formulação hipersingular (*Traction Boundary Element Method* – TBEM). Esta técnica tem permitido resolver problemas de propagação de ondas, na presença de inclusões finas ou mesmo com espessura tendencialmente nula. Outra abordagem possível é a utilização do Método das Soluções Fundamentais. Esta formulação permite obter soluções aceitáveis, na resolução de problemas de propagação de ondas, com um menor custo computacional. Contudo, o uso do MFS tal como do BEM tem as suas próprias limitações quando se pretende resolver um sistema com inclusões finas.

A presente tese possui como uma das motivações principais o desenvolvimento de modelos de simulação numérica, mais eficazes e mais eficientes, capazes de reproduzir fenómenos de propagação de ondas em meios fluidos e sólidos, infinitos ou confinados por superfícies planas, na presença de qualquer tipo de inclusão. De forma a incorporar nas formulações as vantagens de cada um dos métodos enunciados



anteriormente, o presente trabalho propõe o acoplamento dos métodos BEM e MFS, superando assim as limitações impostas por cada método quando utilizado de forma individual.

Estas ferramentas numéricas podem contribuir para o desenvolvimento de novas soluções de produtos e sistemas de construção na área de engenharia. Assim, é possível prever o isolamento a sons aéreos conferido pelos elementos de construção. Com esta técnica é possível efetuar várias simulações sem custos acrescidos, fazendo variar a geometria das inclusões, e das propriedades dos materiais, entre outros. Consegue-se, portanto, numa fase prévia ao desenvolvimento de novos materiais / elementos construtivos, efetuar análises sem que seja necessário realizar ensaios laboratoriais a vários protótipos, que se podem traduzir em custos excessivos para as empresas fabricantes.

Constitui, ainda, elemento de motivação deste trabalho a adaptação daquelas ferramentas numéricas para a avaliação do isolamento acústico a sons aéreos conferidos pelas paredes construídas por blocos fabricados com resíduos de cortiça. Considerou-se também relevante proceder à validação experimental dos modelos numéricos.

Este trabalho coincidiu com a fase de construção do primeiro edifício do *ITeCons* e simultaneamente com a construção das câmaras acústicas. Estes equipamentos, entre outras finalidades, tem constituído uma mais-valia para o desenvolvimento de novos produtos de construção, nomeadamente na avaliação do comportamento acústico de soluções construtivas. A validação dos resultados numéricos foi realizada após a caracterização experimental dos blocos e das composições de betão utilizadas, bem como das próprias câmaras acústicas.

Importa salientar que este trabalho enquadra-se no contexto da investigação que tem sido desenvolvida no Centro de Investigação em Ciências da Construção – *CICC*, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, e no Instituto de Investigação e Desenvolvimento Tecnológico em Ciências da Construção – *ITeCons*, no desenvolvimento de novos materiais mais ecológicos, nomeadamente de betões leves que incorporem na sua constituição produtos recicláveis, resultantes dos resíduos da indústria. As condições laboratoriais e de trabalho no *ITeCons*, nomeadamente a disponibilização de equipamentos calibrados e ensaios acreditados na área da acústica e de materiais, permitem a concretização de ensaios de caracterização de materiais e soluções indispensáveis na realização de validações.

## **1.2 OBJETIVOS**

O objetivo principal desta tese consiste no desenvolvimento e na implementação de modelos numéricos, baseados no acoplamento entre o BEM/TBEM e o MFS que permitam a resolução de problemas mais complexos tais como a avaliação do isolamento acústico a sons aéreos conferido por paredes construídas

por blocos de betão, fabricados com resíduos de cortiça. A validação destes modelos com resultados experimentais determinou que os blocos desenvolvidos e a composição do seu betão fossem caracterizados. De forma a permitir a realização de ensaios acústicos foi, ainda, necessário caracterizar e validar as câmaras acústicas horizontais do *ITeCons* recentemente construídas.

A concretização dos objetivos principais desta tese passou pela definição das seguintes tarefas:

- Desenvolver modelos numéricos de acoplamento entre o BEM+TBEM/MFS para a simulação da propagação de ondas em meios elásticos e fluidos, contendo inclusões as quais podem ser finas, com vista à redução do esforço computacional;
- Verificar os resultados obtidos, usando as formulações propostas, com soluções numéricas e analíticas já conhecidas (designadas como soluções de referência);
- Avaliar a eficiência computacional dos métodos desenvolvidos através da medição do tempo de cálculo, e da verificação da qualidade da solução;
- Demonstrar a aplicabilidade das formulações em diversas áreas de engenharia, envolvendo a propagação de ondas em meios acústicos e elásticos, contendo inclusões as quais podem ser finas;
- Adaptar as formulações propostas à avaliação do isolamento sonoro conferido por paredes contendo inclusões/cavidades, incorporando para o efeito as funções de Green que permitam evitar a discretização da superfície e interfaces planas da parede;
- Conceber e desenvolver um bloco de construção, utilizando como matéria-prima um betão leve contendo regranulado de cortiça expandida na sua composição.
- Implementar e criar condições de ensaio para a avaliação do isolamento a sons aéreos, conferido por elementos de separação verticais em câmaras acústicas.
- Validar os modelos de acoplamento propostos e desenvolvidos com resultados laboratoriais;

### **1.3 ESTRUTURA E ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

A presente dissertação é constituída por sete capítulos.

Na redação do presente documento, com a exceção dos Capítulos 1 e 7, todos os restantes capítulos são constituídos por uma introdução, pelo conteúdo principal (repartido por vários subcapítulos), pelas conclusões finais e pelas referências bibliográficas e apêndices.

A opção de individualizar cada capítulo foi no sentido de permitir uma leitura distinta destes textos, conservando a autonomia individual que se pretende conferir. Manteve-se a mesma simbologia em todo o documento.

Descrevem-se, de seguida, os conteúdos existentes nos Capítulos 2 a 7.

No Capítulo 2, são desenvolvidas formulações de acoplamento entre o BEM (clássico e em Trações) e o MFS para a simulação da propagação de ondas em meios acústicos infinitos ou semi-infinitos na presença de múltiplas inclusões (fluidas, rígidas, ou cavidades). Estas podem apresentar diferentes propriedades fluidas e, ainda, podem ser finas ou mesmo com espessura tendencialmente nula. O domínio do problema é subdividido e em cada subdomínio são aplicados individualmente o BEM (e/ou o TBEM) ou o MFS. Os vários subdomínios são posteriormente acoplados, através da composição das condições de fronteira necessárias. Após o desenvolvimento da formulação, esta é verificada comparando os resultados com soluções previamente conhecidas. A eficiência das formulações propostas é verificada avaliando o tempo e a precisão do cálculo computacional. No final do capítulo, a aplicabilidade da formulação proposta é demonstrada através do cálculo das respostas no domínio do tempo, para um conjunto de exemplos numéricos bidimensionais semi-infinitos e confinados.

O Capítulo 3 compreende uma abordagem em tudo semelhante à seguida no capítulo descrito anteriormente, mas considerando que o meio de propagação é elástico. Desenvolvem-se, assim, as formulações de acoplamento BEM / MFS acima referidas para um meio sólido elástico, considerando a presença de múltiplas inclusões, as quais podem ser rígidas, vazias e/ou preenchidas por um material elástico. Uma vez mais, recorre-se ao uso de soluções de referência para a verificação das formulações de acoplamento desenvolvidas. Determina-se, também, a eficiência de cálculo e, ainda, apresenta-se um exemplo numérico de forma a ilustrar a propagação de ondas em meios elásticos infinitos, contendo inclusões elásticas e heterogeneidades finas.

O Capítulo 4 aparece como uma extensão dos dois capítulos anteriores, onde se desenvolvem formulações de acoplamento para a propagação de ondas em meios heterogéneos sólidos-fluidos. De forma a manter a consistência na apresentação dos resultados, a verificação da solução e a avaliação do tempo de cálculo é em tudo semelhante ao dos capítulos anteriores. Na última secção deste capítulo, a aplicabilidade do método proposto é ilustrada por meio de um exemplo numérico que simula a propagação de ondas geradas por um carregamento bidimensional, num meio elástico que se encontra fissurado e possui uma inclusão fluida.

No Capítulo 5, é descrita a implementação de ensaios de isolamento a sons aéreos realizados nas câmaras acústicas horizontais do *ITeCons*, que obedecem a regras estabelecidas num conjunto de normas de ensaio, nacionais e internacionais. Descrevem-se, detalhadamente, as opções tomadas nas diversas fases de projeto e conceção das respetivas câmaras, tais como: o volume e as dimensões das câmaras acústicas;

o limite máximo e mínimo dos tempos de reverberação; os níveis de ruído de fundo na câmara recetora; a existência de um campo sonoro difuso; a determinação da área máxima de absorção sonora equivalente; a avaliação da importância dos encaminhamentos indiretos de propagação da energia sonora; o fator de perdas total da estrutura envolvente do aro provete; a abertura de ensaio para a colocação do provete; e as condições termo higrométricas das câmaras. São apresentadas as características principais dos equipamentos de medição existentes nesse laboratório, bem como a indicação dos procedimentos de medição e posicionamento desses equipamentos. Avalia-se, ainda, o valor máximo do índice de redução sonora de três tipos de provetes de paredes, instalados na câmara acústica, de forma a determinar a influência das transmissões marginais.

No Capítulo 6, as formulações numéricas de acoplamento BEM (clássico e em Trações) / MFS descritas nos Capítulos 2 a 4 são adaptadas de modo a permitir avaliar o isolamento acústico conferido por paredes de alvenaria de blocos, fabricados com betão incorporando resíduos de cortiça. Este capítulo apresenta estes novos modelos e numa primeira fase as soluções são verificadas comparando os resultados com as soluções de referência obtidos utilizando o BEM/TBEM. Nesta formulação as interfaces planas da camada da parede não são modeladas, pois utilizam-se funções de Green desenvolvidas para sistemas multicamadas. Para a determinação do isolamento sonoro a sons aéreos é necessário calcular a pressão sonora em cada meio fluido semi-infinito, numa malha de recetores e obter a diferença de pressões. A posição das grelhas e a posição de fonte dilatacional assumem um papel fundamental, na medida em que, o seu posicionamento influencia o valor desse isolamento. Para este efeito são estudadas diferentes configurações para o posicionamento destas grelhas e da fonte dilatacional. As funções de Green utilizadas são verificadas na avaliação do isolamento a sons aéreos conferido por elementos com grande espessura, uma vez que estas funções de Green só tinham sido utilizadas para avaliar o isolamento a sons aéreos de elementos de construção com espessura fina (tais como vidros). Posteriormente, fabricam-se e caracterizam-se várias misturas de betão contendo regranulado de cortiça expandida. Após essa análise fabricam-se blocos protótipos com as várias misturas e procede-se à sua caracterização física, mecânica, térmica e, principalmente, acústica. Finalmente, os resultados das medições laboratoriais da redução sonora são comparados com os obtidos através da formulação numérica proposta.

O Capítulo 7 sintetiza o trabalho desenvolvido e perspetiva as linhas gerais para o desenvolvimento de trabalhos futuros, relacionados com os tópicos abordados ao longo desta tese.

# CAPÍTULO 2

---

## 2 ACOPLAMENTO ENTRE O BEM E O MFS NA MODELAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS FLUIDOS CONTENDO INCLUSÕES

### 2.1 INTRODUÇÃO

A propagação de ondas acústicas, devido a fontes de pressão estáticas e dinâmicas, tem sido estudada intensamente nas últimas décadas. Estas ondas podem ser produzidas por veículos na presença de barreiras acústicas, edifícios e outros elementos de construção na área da acústica (Lacerda *et al.*, 1997; Godinho *et al.*, 2001; Godinho *et al.*, 2002; Branco *et al.*, 2003), por fontes posicionadas nas salas acústicas, dispositivos de ultrassons na presença de fissuras e inclusões (Achenbach *et al.*, 1986; Achenbach, 2002; Godinho *et al.*, 2003), por instrumentos de medição acústica no interior de furos de propagação sísmica (Sánchez-Sesma, 1983; Tadeu *et al.*, 1996; Pointer *et al.*, 1998; António e Tadeu, 2004) e na mecânica das fraturas (Huang, 1995; Richardson e Cruse, 1998). A modelação e análise da transferência de calor em sistemas com heterogeneidades também têm sido investigadas, na medida em que contribuem para a partilha de conhecimentos e técnicas na propagação de ondas (Godinho *et al.*, 2004; Simões e Tadeu, 2005).

Para o estudo dessas propagações de ondas acústicas em problemas contendo inclusões, têm sido realizadas diferentes aproximações científicas. As soluções analíticas são apenas conhecidas para

geometrias muito simples e para condições específicas de materiais, tais como inclusões circulares cilíndricas, superfícies do tipo semicilíndricas e semielípticas ou fissuras planas isoladas (Trifunac, 1971; Pao e Mow, 1973; Wong e Trifunac, 1974; Sánchez-Sesma e Iturrarán-Viveros, 2001), em meios homogêneos infinitos e semi-infinitos sujeitos a cargas lineares e a cargas pontuais de amplitude constante e duração infinita. As soluções fundamentais, funções de Green, podem ser usadas para situações mais complexas, tais como, por exemplo, para meios estratificados. Os resultados das equações integrais são tão complexos que, porém, só podem ser avaliados por métodos numéricos e em geral exigem grande esforço computacional.

A modelação de problemas de engenharia de vibração acústica é geralmente muito difícil e vários métodos numéricos, de complexidade variável, têm sido desenvolvidos, como, por exemplo: o *Thin Layer Method* – TLM (Kausel, 1994); o Método dos Elementos de Fronteira – BEM (Cruse, 1987; Koguchi e Watabe, 1997; Richardson e Cruse, 1998; Wu, 2000); o Método dos Elementos Finitos – FEM (Ihlenburg e Germanischer, 1998; Thompson, 2006); o Método das Diferenças Finitas – MDF (Savioja *et al.*, 1994; Leutenegger e Dual, 2002); e o *Ray Tracing Technique* (Kulowski, 1985).

Destas técnicas o BEM (Boundary Element Method) é um dos métodos mais adequados para a modelação de sistemas homogêneos não confinados contendo interfaces e inclusões irregulares, desde que as condições do campo infinito sejam automaticamente satisfeitas e apenas seja necessário discretizar os elementos de fronteira das respectivas inclusões. Os restantes métodos requerem uma discretização do domínio espacial. Este método requer apenas a discretização na fronteira das inclusões, sendo possível obter a resposta em qualquer ponto do domínio, em função dos resultados obtidos na fronteira (permite obter resultados, apenas nos pontos onde existe interesse prático de seu conhecimento, reduzindo, assim, a dimensão numérica do problema). Apesar deste método necessitar apenas da discretização na fronteira do elemento, requer ainda, assim, o conhecimento prévio de soluções fundamentais, ou seja, as funções de Green. A sua eficiência depende também da correta integração dos integrais singulares e hipersingulares. Além disso, para um determinado nível de precisão, o número necessário de elementos de fronteira depende da frequência de excitação, ou seja, quanto mais alta for a frequência (comprimentos de onda menores), maior é a necessidade do modelo possuir um elevado número de elementos de fronteira. Para o caso de frequências altas, o modelo necessita de um esforço computacional mais elevado. Além disso, a formulação clássica do BEM tende a falhar quando se trata de fissuras ou heterogeneidades muito finas (Dell'Erba *et al.*, 1998), deixando de ser um método válido para a modelação numérica de pequenos defeitos.

O Método dos Elementos de Fronteira em Trações (Traction Boundary Element Method – TBEM) é um método numérico que resolve a modelação de propagação de ondas na presença de heterogeneidades muito finas (ou mesmo de espessura nula), tais como pequenas imperfeições, fissuras com espessura nula ou defeitos quase imperceptíveis.

O aparecimento de integrais hipersingulares é uma das dificuldades decorrentes destas formulações. Rudolphi (1991) e Watson (1995) realizaram diversas tentativas para superar esta dificuldade. A maioria dos trabalhos publicados refere-se a geometrias 2D e, em alguns casos, geometrias 3D. Amado Mendes e Tadeu (2006) resolveram o caso de uma fissura 2D (constante segundo uma direção) inserida num meio infinito submetido a uma fonte tridimensional. A solução exige a aplicação de uma transformada de Fourier espacial ao longo da direção na qual a geometria da fissura não varia. Assim, a solução 3D é obtida como o somatório das soluções 2D, para diferentes números de ondas espaciais. A resultante das hipersingularidades de Kernels foi calculada analiticamente, definindo o equilíbrio dinâmico de semi-cilindros acima dos elementos de fronteira que discretizam a fissura. Esse trabalho foi estendido a partir do trabalho de Prosper e Kausel (2001) que definiu o comportamento de uma fissura 2D vazia, plana e horizontal. Após esse trabalho, Tadeu *et al.* (2006 a) propuseram uma combinação de duas formulações, BEM+TBEM, capaz de resolver o caso de uma inclusão fina, totalmente preenchida por um fluido, inserida num meio infinito, e aplicaram as mesmas técnicas numéricas para o caso de reflexões em meio elástico produzido por inclusões rígidas de espessura reduzida.

A formulação TBEM, no domínio da frequência, foi apresentada por Tadeu *et al.* (2007) e usada para estudar o comportamento de barreiras acústicas rígidas próximas de um edifício alto, e com um meio excitado por uma fonte sonora acústica. O modelo utiliza funções de Green que tomam em conta a presença da fachada de um edifício alto e a rigidez do pavimento, tornando, portanto, desnecessária a sua discretização. Usando uma técnica semelhante, a propagação de ondas 3D em redor de barreiras acústicas rígidas 2D (geometria constante segundo uma direção), com espessura próxima de zero e colocadas numa camada fluida foi estudado por António *et al.* (2007).

Outra estratégia bastante comum é formular o problema utilizando elementos finitos, de preferência com fronteiras de alguma forma absorventes, tais como fronteiras, ou elementos de transição bastante eficazes obtidos com a *Perfectly Matched Layer Technique* – PML. Elementos finitos têm a vantagem adicional de obter os efeitos não-lineares produzidos por uma carga, na sua proximidade. No entanto, o Método dos Elementos Finitos – FEM requer a discretização completa do meio que está a ser analisado. Infelizmente, o FEM (*Finite Element Method*) é inviável, devido ao elevado esforço computacional, para modelos com uma escala muito grande, a menos que sejam efetuadas aproximações ou restringidos os modelos para frequências baixas, negligenciando muitas vezes o comportamento não linear dos solos perto dos pontos de aplicação das cargas.

Recentemente, tornou-se popular uma técnica numérica diferente: a chamada técnica “meshless”, que não exige a discretização do domínio, nem a discretização dos elementos de fronteira das inclusões (Fairweather e Karageorghis, 1998; Chen *et al.*, 2002; Fairweather *et al.*, 2003; Song *et al.*, 2004; Brown *et al.*, 2005; Smyrlis, 2006). O Método das Soluções Fundamentais (MFS, *Method Fundamental Solutions*), uma destas técnicas, parece ser particularmente eficaz para o estudo da propagação de ondas,

uma vez que supera a complexidade matemática do BEM e fornece soluções aceitáveis para um menor esforço computacional. Godinho *et al.* (2006) estudaram o desempenho da formulação MFS para simular a propagação de ondas acústicas num meio fluido com uma inclusão. Os autores concluíram que o método pode ser muito eficiente, mesmo superando o BEM, para este tipo de problema. Posteriormente, Godinho *et al.* (2007) utilizaram com sucesso a formulação MFS no estudo da propagação de ondas acústicas e elásticas na presença de estruturas finas, usando uma técnica de decomposição do domínio. O MFS também tem sido utilizado, mais recentemente, para simular o efeito de torção em solos, ao longo de perfis topográficos bidimensionais com a incidência de ondas planas elásticas (Godinho *et al.*, 2009). Outros autores têm proposto o uso de funções mais enriquecidas para modelar problemas de torção, incluindo fissuras (Alves e Leitão, 2006). Ainda assim, o uso do MFS tem os seus defeitos e limitações na presença de inclusões finas e inclusões com fronteiras sinuosas.

Neste capítulo, pretende-se superar algumas das limitações impostas por cada método, por forma a efetuar uma análise de propagação de ondas em meios fluidos na presença de múltiplas inclusões. Propõe-se, assim, uma nova formulação, que consiste no acoplamento entre os métodos BEM (clássico e em Trações), com a formulação do MFS (Tadeu *et al.*, 2010). O Método dos Elementos de Fronteira (BEM), o Método dos Elementos de Fronteira em Trações (TBEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) são acoplados para a análise de problemas de propagação de ondas acústicas na presença de múltiplas inclusões, com geometria variada ou mesmo na presença de inclusões finas (ou com espessura nula). O domínio fica dividido em vários subdomínios que são modelados usando uma parte com o BEM (e/ou com o TBEM) e outra parte com o MFS, e estes subdomínios são posteriormente acoplados, com as necessárias condições fronteira a serem impostas. A abordagem é implementada para problemas gerais bidimensionais. A fim de investigar a precisão dos algoritmos de acoplamento propostos, utilizando diferentes combinações de formulações entre BEM com MFS, e TBEM com MFS, uma análise de verificação é realizada através da comparação com soluções de referência, no domínio da frequência.

O problema é definido nas próximas secções deste capítulo, com uma formulação acústica entre o BEM com o MFS e o TBEM com o MFS, estabelecidos para múltiplas inclusões inseridas num meio fluido infinito. Ambas as formulações de acoplamento são inicialmente verificadas e comparadas com soluções únicas obtidas pelo BEM e também pelo MFS, utilizadas como soluções de referência. É ainda determinada e avaliada a eficiência computacional do método proposto.

As respostas no domínio do tempo são obtidas através de uma transformada rápida inversa de Fourier, usando um impulso de Ricker para a variação temporal da fonte de excitação. Finalmente, a aplicabilidade do método proposto é demonstrado através do cálculo das respostas no domínio do tempo, para dois exemplos numéricos. No primeiro caso, a acoplamento do algoritmo entre o TBEM e o MFS é utilizado para obter a atenuação de pressão sonora fornecida por uma barreira acústica rígida, de espessura nula, colocada entre uma fonte acústica e uma inclusão rígida (simulando um edifício



semicircular). No segundo, o acoplamento do algoritmo de BEM+TBEM com o MFS calcula a propagação de ondas, no domínio do tempo, produzida por uma barreira acústica fina, colocada no interior de uma estação de metro, quando excitada por uma fonte acústica, simulando a passagem de uma carruagem.

## 2.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considerem-se duas inclusões cilíndricas irregulares e bidimensionais, submersas num meio fluido uniforme (Meio 1), com massa volúmica  $\rho_1$  (Figura 2.1).

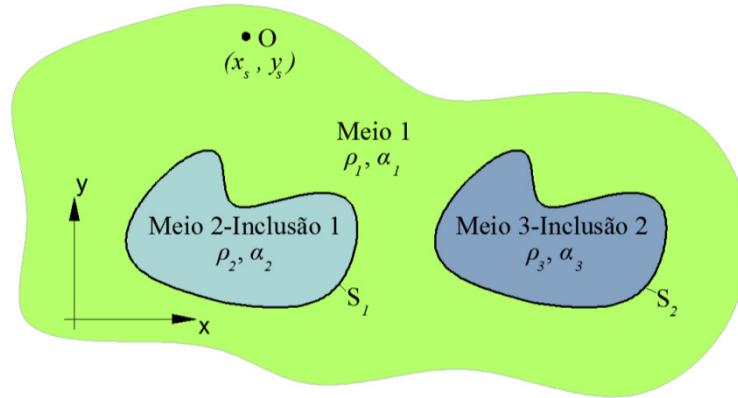


Figura 2.1: Representação esquemática com definição genérica da geometria do problema bidimensional, com inclusões submersas num meio fluido homogêneo infinito.

Este sistema é submetido a uma fonte linear harmônica posicionada em  $O (x_s, y_s)$ , que oscila com uma frequência  $\omega$ , e origina uma pressão incidente, num ponto geral localizado em  $(x, y)$ ,

$$p_{inc}(x, y, \omega) = AH_0(k_{\alpha_1} r_1), \quad (2.1)$$

onde o índice *inc* representa o campo incidente,  $r_1 = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$ ,  $A$  é a amplitude de onda,

$k_{\alpha_1}$  representa o número de onda e possui o valor de  $k_{\alpha_1} = \frac{\omega}{\alpha_1}$ ,  $\alpha_1$  é a velocidade de propagação das

ondas de pressão no meio fluido infinito e homogêneo, e  $H_n(\dots)$  corresponde às segundas funções de Hankel de ordem  $n$ . Os meios fluidos 2 e 3 estão dentro das inclusões 1 e 2, delimitadas pelas fronteiras  $S_1$  e  $S_2$ , com massas volúmicas  $\rho_2$  e  $\rho_3$  e velocidades de propagação das ondas de pressão  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , respetivamente.

## 2.3 FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO DE INTEGRAIS DE FRONTEIRA EM MEIOS FLUIDOS

Esta secção descreve o acoplamento entre a formulação do Método dos Elementos de Fronteira (BEM) com a formulação do Método das Soluções Fundamentais (MFS) utilizadas para obter o campo de pressão bidimensional gerado por uma fonte de pressão pontual situada na vizinhança, mas fora de duas inclusões submersas com formas irregulares, num meio fluido (ver Figura 2.1). Uma das inclusões é modelada com recurso ao BEM enquanto a outra é resolvida com o auxílio do MFS, conforme é ilustrada a discretização do sistema na Figura 2.2. Posteriormente, na secção 2.4, o método proposto é aplicado para um determinado exemplo numérico e comparado com outros métodos numéricos, de forma a ser validado.

### 2.3.1 Formulação de acoplamento (BEM/MFS)

#### 2.3.1.1 Meio fluido infinito com inclusões fluidas submersas

A pressão ( $p$ ) num determinado ponto do domínio do fluido exterior pode ser determinada usando a equação de Helmholtz (ou equação de onda), descrevendo-se no domínio da frequência ( $\omega$ ) por,

$$\nabla^2 p(x, y, \omega) + (k_{\alpha_1})^2 p(x, y, \omega) = 0, \quad (2.2)$$

onde o operador  $\nabla^2$  representa o Laplaciano referente a um ponto genérico com coordenadas  $(x, y)$ ,

$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$  e, como foi referido anteriormente,  $k_{\alpha_1}$  representa o número de onda.

Considerando um meio fluido homogéneo e infinito contendo uma inclusão fluida 1, limitada pela superfície  $S_1$ , e submetida a um campo de pressão incidente,  $p_{inc}$ , a equação integral da fronteira pode ser construída mediante a aplicação do teorema da reciprocidade (por exemplo, Manolis e Beskos, 1988), em que se baseia a formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira (BEM) para problemas escalares. As equações integrais ao longo da fronteira da inclusão  $S_1$  são possíveis de estabelecer, impondo condições de fronteira do tipo Dirichlet (imposição da pressão) e /ou do tipo Neumann (imposição de fluxos de pressão) em pontos da fronteira, levando a:

a) No domínio exterior à Inclusão 1 (Meio 1):

Considerando o caso específico de uma inclusão fluida e modelada através do Método dos Elementos de Fronteira, ao longo da qual são impostas como condições de fronteira, as continuidades das pressões e dos fluxos de pressão, e, aplicando à equação integral, num ponto sobre a fronteira da inclusão, obtém-se a expressão resultante para o estudo da propagação de ondas num meio fluido infinito, na presença de uma inclusão fluida, e quando o sistema é perturbado por um campo de ondas harmónicas incidente:

$$c p^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = \int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_f^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds - \int_{S_1} H_f^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) p^{(1)}(x, y, \omega) ds + p_{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega), \quad (2.3)$$

Nesta equação, o índice 1 corresponde ao domínio do fluido exterior;  $\mathbf{n}_{n1}$  é o vetor unitário, no sentido exterior, normal ao longo da fronteira  $S_1$ .  $G_f$  e  $H_f$  são, respetivamente, as soluções fundamentais (funções de Green) para a pressão ( $p$ ) e para o fluxo de pressão ( $q$ ), em  $(x, y)$  devido a um carregamento virtual localizado em  $(x_0, y_0)$ , apresentadas no Apêndice A.2 deste capítulo.  $p_{inc}$  é a pressão sonora incidente em  $(x_0, y_0)$ , quando a fonte sonora está localizada no ponto  $(x_s, y_s)$ . O fator  $c$  é uma constante definida pelas condições geométricas da fronteira na vizinhança do ponto de colocação, tomando o valor  $1/2$ , se  $(x_0, y_0) \in S_1$  e se  $S_1$  é suave.

A equação (2.3) ainda não tem em consideração a presença da Inclusão 2, que é modelada através de outro método, o MFS. Este método assume que a resposta dessa inclusão vizinha é dada por uma combinação linear de soluções fundamentais simulando o campo de pressões geradas por dois conjuntos de fontes virtuais  $NS$ . Estas cargas virtuais são distribuídas ao longo da interface da inclusão em análise a uma distância  $\delta$  da fronteira para o interior e para o exterior da inclusão (linhas  $\hat{C}^{(1)}$  e  $\hat{C}^{(2)}$  da Figura 2.2, respetivamente) a fim de evitar singularidades. As fontes de dentro e fora da inclusão têm amplitudes  $a_{n\_ext}^{(2)}$  e  $a_{n\_int}^{(2)}$  desconhecidas, respetivamente. No exterior e interior desta inclusão, as propagações de ondas de pressão nos meios fluidos são dadas por:

$$\begin{aligned} p^{(1)}(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} G_f^{(1)}(x, y, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \right] \\ p^{(3)}(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_int}^{(2)} G_f^{(3)}(x, y, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde  $G_f^{(1)}(x, y, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)$  e  $G_f^{(3)}(x, y, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega)$  são as soluções fundamentais que representam as pressões nos pontos localizados em  $(x, y)$  nos meios 1 e 3, gerados por fontes sonoras virtuais localizadas nas posições  $(x_{n\_ext}, y_{n\_ext})$  e  $(x_{n\_int}, y_{n\_int})$ .  $n\_ext$  e  $n\_int$  são os índices que indicam o número de fontes virtuais colocadas ao longo das linhas  $\hat{C}^{(1)}$  e  $\hat{C}^{(2)}$ , respetivamente.

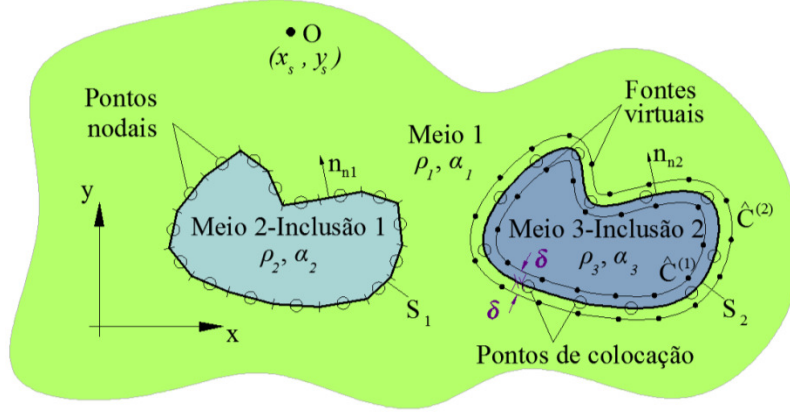


Figura 2.2: Discretização do sistema através da formulação BEM para a primeira inclusão e MFS para a segunda. Ambas as inclusões são preenchidas por um meio fluido (a direção normal,  $n_{n1}$  e  $n_{n2}$  representadas, correspondem à equação estabelecida no domínio exterior às inclusões): elementos de fronteira, posição das fontes virtuais e pontos de colocação.

O campo de pressões gerado por essa segunda inclusão pode ser visto como um campo incidente que atinge a primeira inclusão. Assim a equação (2.3) precisa de ser modificada de acordo com a equação seguinte:

$$\begin{aligned}
 c p^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = & \int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_f^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\
 & - \int_{S_1} H_f^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) p^{(1)}(x, y, \omega) ds, \\
 & + p_{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} [a_{n\_ext}^{(2)} G_f^{(1)}(x_0, y_0, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)]
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

b) No domínio interior à Inclusão 1 (Meio 2):

Considerando, novamente, o caso específico de uma inclusão fluida e modelada através do Método dos Elementos de Fronteira, ao longo da qual são impostas como condições de fronteira, as continuidades das

pressões e dos fluxos de pressão, e, aplicando à equação integral, num ponto sobre a fronteira da inclusão, obtém-se a seguinte equação integral, para o interior dessa inclusão fluida:

$$c p^{(2)}(x_0, y_0, \omega) = \int_{S_1} q^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) G_f^{(2)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds - \int_{S_1} H_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) p^{(2)}(x, y, \omega) ds, \quad (2.6)$$

Todas as variáveis desta equação foram descritas anteriormente, com o índice 2 a corresponder ao domínio interior da Inclusão 1, Meio 2. Refira-se apenas a mudança de direção do vetor unitário,  $\mathbf{n}_{n1}$ , aplicado na fronteira dessa inclusão, apontando agora para o seu interior.

c) No domínio exterior e interior à Inclusão 2 (Meio 1 e 3):

Como se referiu anteriormente, a Inclusão 2 é modelada com recurso ao Método das Soluções Fundamentais, em que não é necessário discretizar o domínio, nem a fronteira da inclusão, bastando apenas combinar as soluções fundamentais geradas por um conjunto de fontes virtuais.

Para determinar as amplitudes das ondas de pressão, desconhecidas, geradas pelas fontes virtuais  $a_{n\_ext}^{(2)}$  e  $a_{n\_int}^{(2)}$ , também é necessário impor a continuidade de pressões e fluxos de pressão na fronteira  $S_2$ , que é o limite da Inclusão 2, ao longo dos pontos de colocação  $NS$ , situados em  $(x_{col}, y_{col})$ . Isso deve ser feito tendo em conta o campo gerado pela Inclusão 1. Assim, a equação de pressões na fronteira da Inclusão 2 é definida como,

$$\int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_f^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \omega) ds - \int_{S_1} H_f^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_{col}, y_{col}, \omega) p^{(1)}(x, y, \omega) ds + p_{inc}(x_{col}, y_{col}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} [a_{n\_ext}^{(2)} G_f^{(1)}(x_{col}, y_{col}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)] = \sum_{n=1}^{NS} [a_{n\_int}^{(2)} G_f^{(3)}(x_{col}, y_{col}, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega)] \quad (2.7)$$

A partir desta equação de tensões é possível determinar a equação dos fluxos de pressão, dadas por,

$$\begin{aligned}
& \int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) \frac{\partial G_f^{(1)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega) ds \\
& - \int_{S_1} \frac{\partial H_f^{(1)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega) p^{(1)}(x, y, \omega) ds + \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega) \\
& + \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} \frac{\partial G_f^{(1)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \right] = \\
& \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_int}^{(2)} \frac{\rho_1}{\rho_3} \frac{\partial G_f^{(3)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x_{col}, y_{col}, -\mathbf{n}_{n2}, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega) \right]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

As funções de Green para os fluxos de pressão,  $\frac{\partial G_f^{(m)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}$  e  $\frac{\partial H_f^{(m)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}$ , são definidas no Apêndice A.3 deste capítulo. Nestas equações,  $\mathbf{n}_{n2}$  é o vetor unitário normal à fronteira  $S_2$ , apontando para o exterior.

d) Sistema final de equações:

A solução global é então obtida através da resolução das equações (2.5) a (2.8). Isto requer a discretização da superfície  $S_1$ , pertencente à Inclusão 1, em  $N$  elementos de fronteira retos, com um ponto nodal ao centro de cada elemento. Para a segunda inclusão é necessário a colocação de  $NS$  fontes virtuais, ao longo do exterior e interior da inclusão, com um determinado espaçamento  $\delta$  da fronteira. A discretização geral do sistema é esquematizada na Figura 2.2.

As integrações necessárias das equações (2.5) a (2.8) são avaliadas usando a quadratura de Gauss quando o ponto calculado não é o elemento carregado. Quando o elemento carregado é igual ao elemento integrado, a existência de integrais singulares nas funções de Green, é calculado analiticamente, seguindo a expressão dada por Tadeu *et al.* (1999), dada por:

$$\int_0^{L/2} H_0(k_{\alpha_m} r) dr = \frac{L}{2} H_0\left(k_{\alpha_m} \frac{L}{2}\right) + \pi \frac{L}{4} \left[ H_1\left(k_{\alpha_m} \frac{L}{2}\right) S_0\left(k_{\alpha_m} \frac{L}{2}\right) - H_0\left(k_{\alpha_m} \frac{L}{2}\right) S_1\left(k_{\alpha_m} \frac{L}{2}\right) \right], \tag{2.9}$$

onde  $S_{ns}(\dots)$  são as funções de Struve de ordem  $ns$  e  $L$  o comprimento do elemento fronteira.

As equações integrais finais, equações (2.5) a (2.8), são manipuladas e combinadas de forma a impor a continuidade da pressão e fluxos de pressão ao longo da fronteira das inclusões 1 e 2, para estabelecer um sistema de  $[(2NS + 2N) \times (2NS + 2N)]$  equações, formado pelas equações integrais de fronteira, dando origem ao seguinte sistema,

$$\begin{bmatrix} G_f^{(1)kl} & -H_f^{(1)kl} & G_p^{(1)kn} & 0 \\ -\frac{\rho_2}{\rho_1} G_f^{(2)kl} & -H_f^{(2)kl} & 0 & 0 \\ G_f^{(1)nl} & -H_f^{(1)nl} & G_p^{(1)nn} & -G_p^{(3)nn} \\ \frac{\partial G_f^{(1)nl}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & -\frac{\partial H_f^{(1)nl}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & \frac{\partial G_p^{(1)nn}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & -\frac{\rho_1}{\rho_3} \frac{\partial G_p^{(3)nn}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{(1)l} \\ p^{(1)l} \\ a_{n\_ext}^n \\ a_{n\_int}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{inc}^k \\ 0 \\ -p_{inc}^n \\ -\frac{\partial p_{inc}^n}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde  $k, l = 1, N$ ,  $n = 1, NS$ ,  $l$  identifica o elemento a ser integrado,  $G_f^{(m)km} = \int_{C_l} G_f^{(m)}(x_l, y_l, x_k, y_k, \boldsymbol{\omega}) dC_l$ ,

$$H_f^{(m)kl} = \int_{C_l} H_f^{(m)}(x_l, y_l, \mathbf{n}_{n1}, x_k, y_k, \boldsymbol{\omega}) dC_l, \quad G_f^{(1)nl} = \int_{C_l} G_f^{(1)}(x_l, y_l, x_n, y_n, \boldsymbol{\omega}) dC_l,$$

$$H_f^{(1)nl} = \int_{C_l} H_f^{(1)}(x_l, y_l, \mathbf{n}_{n1}, x_n, y_n, \boldsymbol{\omega}) dC_l, \quad G_p^{(1)kn} = G_f^{(1)}(x_k, y_k, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}),$$

$$G_p^{(1)nm} = G_f^{(1)}(x_n, y_n, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}) \text{ e } G_p^{(3)nm} = G_f^{(3)}(x_n, y_n, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \boldsymbol{\omega}).$$

A solução deste sistema de equações fornece as pressões nodais e fluxos de pressão ao longo da fronteira  $S_1$  e as amplitudes desconhecidas de pressão referentes às fontes virtuais,  $a_{n\_ext}^{(2)}$  e  $a_{n\_int}^{(2)}$ , que permitem determinar, assim, o campo de pressões dentro e fora das inclusões.

Combinações envolvendo outros tipos de inclusões podem ser resolvidas mediante a adequação das equações (2.5) a (2.8) às condições pretendidas, com as condições de fronteira necessárias, conforme se descrevem nas secções seguintes.

### 2.3.1.2 Meio fluido infinito com inclusões rígidas submersas

Considere-se o caso apresentado inicialmente, em que as inclusões embebidas no meio fluido infinito apresentam um material rígido, no seu interior. Sendo assim, têm de se garantir os fluxos de pressão normais nulos nas superfícies de ambas as inclusões,  $S_1$  e  $S_2$ . A equação integral de fronteira, no domínio exterior à Inclusão 1, equação (2.5), é então simplificada, pelo pressuposto enunciado anteriormente, ficando a equação seguinte,

$$\begin{aligned} c p^{(1)}(x_0, y_0, \boldsymbol{\omega}) = & - \int_{S_1} H_f^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \boldsymbol{\omega}) p^{(1)}(x, y, \boldsymbol{\omega}) ds \\ & + p_{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) + \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} G_f^{(1)}(x_0, y_0, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}) \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

A imposição de fluxos de pressão normais nulos, na equação integral de fronteira, no domínio da Inclusão 2, leva à simplificação da equação (2.8),

$$\begin{aligned}
& - \int_{S_1} \frac{\partial H_f^{(1)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) p^{(1)}(x, y, \boldsymbol{\omega}) ds + \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) \\
& + \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} \frac{\partial G_f^{(1)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais (2.11) e (2.12) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, fluxos de pressão normais nulos, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se assim, um sistema de  $[(NS + N) \times (NS + N)]$  equações.

### 2.3.1.3 Meio fluido infinito com inclusões vazias/cavidades submersas

Considere-se, novamente, o caso ilustrado inicialmente (Figura 2.1), em que as inclusões embebidas no meio fluido infinito são apresentadas como cavidades. Sendo assim, tem de se garantir a imposição de pressões nulas nas superfícies das inclusões,  $S_1$  e  $S_2$ . A equação integral de fronteira, no domínio exterior à Inclusão 1, equação (2.5), é simplificada, obtendo-se a equação seguinte:

$$\begin{aligned}
& \int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \boldsymbol{\omega}) G_f^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \boldsymbol{\omega}) ds + p_{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) \\
& + \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} G_f^{(1)}(x_0, y_0, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A imposição de pressão nula, na equação integral de fronteira, no domínio da Inclusão 2, leva à simplificação da equação (2.7),

$$\begin{aligned}
& \int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \boldsymbol{\omega}) G_f^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds \\
& + p_{inc}(x_{col}, y_{col}, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) + \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} G_f^{(1)}(x_{col}, y_{col}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Da mesma forma que foi descrito na secção anterior, a solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície  $S_2$  é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais, equações (2.13) e (2.14), são combinadas de modo a impor



as condições de fronteira, pressões nulas, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se assim, um sistema de  $[(NS + N) \times (NS + N)]$  equações.

#### 2.3.1.4 Meio fluido infinito com inclusão fluida e inclusão rígida submersas

Considerando o sistema da Figura 2.1, em que a primeira inclusão, embebida no meio fluido infinito, exibe propriedades de um meio fluido, enquanto a segunda se considera como uma inclusão rígida. São garantidas a continuidade da pressão e dos fluxos de pressão na superfície da primeira inclusão,  $S_1$ , que é modelada com auxílio do Método dos Elementos de Fronteira. Para a segunda inclusão, que é modelada com recurso ao Método das Soluções Fundamentais, é garantida a imposição dos fluxos de pressão na superfície da inclusão,  $S_2$ . As equações integrais de fronteira, no domínio da Inclusão 1, equação (2.5) e (2.6) são mantidas. A imposição de fluxos de pressão nulos, na equação integral de fronteira, no domínio da Inclusão 2, leva à simplificação da equação (2.8),

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) \frac{\partial G_f^{(1)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega) ds \\ & - \int_{S_1} \frac{\partial H_f^{(1)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega) p^{(1)}(x, y, \omega) ds + \frac{\partial p_{inc}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega), \\ & + \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} \frac{\partial G_f^{(1)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito anteriormente. As equações integrais finais (2.5), (2.6) e (2.15) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se assim, um sistema de  $[(NS + 2N) \times (NS + 2N)]$  equações.

#### 2.3.1.5 Meio fluido semi-infinito com inclusões rígidas submersas

Considerem-se duas inclusões cilíndricas, irregulares e bidimensionais, submersas num meio semi-infinito fluido uniforme 1 (Figura 2.3), submetido a uma fonte linear harmónica posicionada em  $O(x_s, y_s)$ , que oscila com uma dada frequência. As inclusões embebidas no meio fluido são rígidas. Sendo

assim, devem garantir-se os fluxos de pressão normais nulos nas superfícies de ambas as inclusões,  $S_1$  e  $S_2$ .

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito anteriormente.

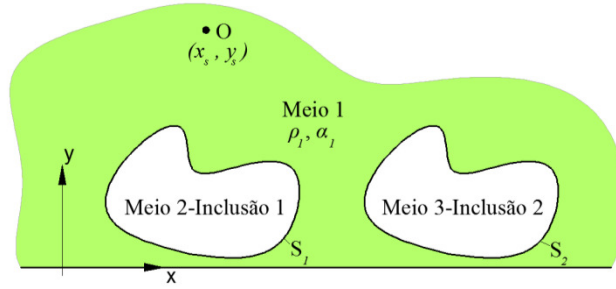


Figura 2.3: Representação esquemática com definição genérica da geometria do problema bidimensional, com inclusões rígidas submersas num meio fluido homogêneo e semi-infinito.

As equações integrais finais são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, fluxos de pressão normais nulos, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Estas são equivalentes às equações anteriores (2.11) e (2.12), adaptadas às funções de Green em campo semi-infinito. As funções de Green para campo infinito deverão ser reformuladas para satisfazer as condições de fronteira para a situação de um pavimento rígido, que exigem fluxos de pressão normal nulos nessa interface, em  $x=0$ . Essas condições podem ser satisfeitas automaticamente pela reposição do campo de pressões geradas pela fonte real e por uma fonte imagem, localizada de tal forma que é espelhada em relação ao plano horizontal ( $x=0$ ):

$$G_{\text{f,semi-infinito}}^{(m)}(x, y, x_s, y_s, \omega) = -\frac{i}{4} \left[ H_0(k_{\alpha_m} r_1) + H_0(k_{\alpha_m} r_2) \right], \quad (2.16)$$

em que  $r_1 = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}$  e  $r_2 = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y+y_s)^2}$  correspondem à distância entre o recetor e a fonte real e a fonte imagem, respetivamente.

Esta técnica pode ser visualizada como uma sobreposição da fonte real e campo incidente refletido a partir do solo, conforme ilustrado na Figura 2.4. Também nestes casos, só as superfícies das inclusões devem ser discretizadas.

Obtém-se, assim, um sistema de  $\left[ (NS + N) \times (NS + N) \right]$  equações.

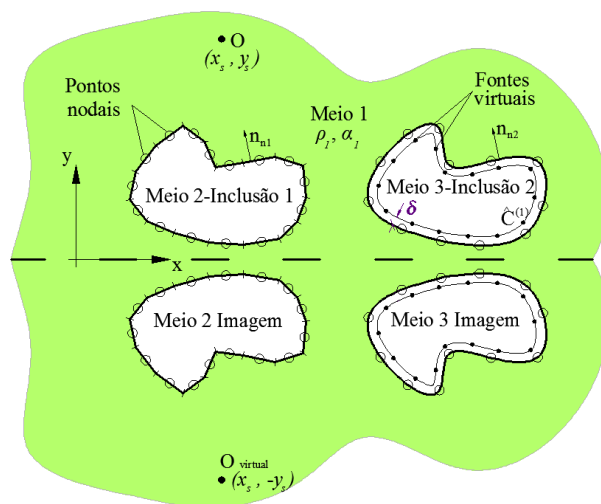


Figura 2.4: Geometria usada no modelo para o caso de um meio fluido exterior semi-infinito, simulando um pavimento rígido: fonte real e inclusões rígidas; fonte imagem e inclusões rígidas localizadas de tal forma que constituem um espelho em relação ao plano horizontal.

## 2.3.2 Formulação de acoplamento (TBEM/MFS)

### 2.3.2.1 Meio fluido infinito com inclusões fluidas submersas

O Método dos Elementos de Fronteira em Trações (TBEM) pode ser formulado para o caso das inclusões finas totalmente preenchidas por um fluido num meio homogêneo, como descreve Tadeu *et al.*, 2006b. A formulação hipersingular (ou em fluxos de pressão segundo a direção normal) deste método pode ser estabelecida por aplicação do operador gradiente, segundo a direção normal à fronteira no ponto de colocação. Na modelação da propagação de ondas em meios fluidos, este procedimento é equivalente à aplicação de cargas dipolares virtuais, ou seja, à aplicação de duas cargas de intensidade equivalente, em sentidos contrários e separados por uma pequena distância (Prosper e Kausel, 2001). Para situações em que são apresentados sistemas que contenham, para além das heterogeneidades, inclusões irregulares, pode-se criar uma formulação mais eficaz e eficiente. Para tal o TBEM pode ser acoplado com o Método das Soluções Fundamentais, em que o TBEM pode ser formulado através da aplicação de cargas dipolares, em vez de cargas monopolares (formulação BEM).

Seguindo estes pressupostos e considerando o exemplo da Figura 2.1, em que a primeira inclusão é modelada com o TBEM e a segunda com o MFS, a equação referente ao domínio exterior da primeira inclusão, equação anterior (2.5), é substituída para dar a equação seguinte em trações,

$$\begin{aligned}
a p^{(1)}(x_0, y_0, \omega) + c q^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n1}, \omega) = & \int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_f^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds \\
& - \int_{S_1} \overline{H}_f^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) p^{(1)}(x, y, \omega) ds, \quad (2.17) \\
+ \overline{p}_{inc}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega) + & \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} \overline{G}_f^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \right]
\end{aligned}$$

No que diz respeito à equação integral referente ao domínio interior da Inclusão 1, modelada com o TBEM, a equação anterior (2.6) é substituída pela equação seguinte,

$$\begin{aligned}
a p^{(2)}(x_0, y_0, \omega) + c q^{(2)}(x_0, y_0, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) = & \int_{S_1} q^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_f^{(2)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds \\
& \int_{S_1} \overline{H}_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) p^{(2)}(x, y, \omega) ds, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

As equações (2.17) e (2.18) podem ser vistas como resultado da aplicação de cargas dipolares ao longo da primeira superfície ( $S_1$ ), derivando de forma adequada as equações anteriores (2.5) e (2.6). Quanto às equações referentes à modelação da segunda inclusão com o MFS, as equações anteriores (2.7) e (2.8) mantêm-se iguais.

Como foi observado por Guiggiani (1998), o coeficiente  $a$  depende da geometria local junto do ponto de colocação, sendo zero para os elementos de fronteira retilíneos. O fator  $c$  e os vetores unitários,  $\mathbf{n}_{n1}$  e  $\mathbf{n}_{n2}$ , foram anteriormente definidos.

As soluções destas equações são definidas, pela discretização da superfície ( $S_1$ ) em  $N$  elementos de fronteira retos, com um ponto nodal no meio de cada elemento. As funções bidimensionais de Green estão definidas no Apêndice B deste capítulo.

Na equação (2.17) o campo incidente, expresso em termos de cargas dipolares, é calculado através da derivação da equação (2.1),

$$\overline{p}_{inc}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega) = \frac{iA}{2} k_{\alpha_1} H_1(k_{\alpha_1} r_1) \left( \frac{x - x_s}{r_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{n2}} + \frac{y - y_s}{r_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \right), \quad (2.19)$$

As integrações das funções de Green, necessárias para a resolução das equações (2.17) e (2.18), são realizadas numericamente através da quadratura de Gauss-Legendre, para a situação em que o elemento a ser integrado ( $C_l$ ) não é o mesmo que o elemento onde se aplica o carregamento virtual unitário. Quando o elemento a ser integrado é o mesmo que o elemento carregado, o seguinte integral torna-se hipersingular,

$$\int_{C_l} \bar{H}_f^{(m)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n1}, x_k, y_k, \boldsymbol{\omega}) dC_l = \int_{C_l} \frac{i}{4} k_{\alpha_m} \left[ -k_{\alpha} H_2(k_{\alpha_m} r) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n1}} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n1}} \right)^2 + \frac{H_1(k_{\alpha_m} r)}{r} \right] dC_l, \quad (2.20)$$

Sendo assim, este integral pode ser avaliado analiticamente, considerando-se o equilíbrio dinâmico de um semicilindro limitado inferiormente pelo elemento fronteira,  $C_l$ , levando a:

$$\int_{C_l} \bar{H}_f^{(m)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n1}, x_k, y_k, \boldsymbol{\omega}) dC_l = \frac{i}{2} (k_{\alpha_m})^2 \left[ \int_0^{L/2} H_0(k_{\alpha_m} r) dr - \frac{1}{k_{\alpha_m}} H_1\left(k_{\alpha_m} \frac{L}{2}\right) \right], \quad (2.21)$$

O integral  $\int_0^{L/2} H_0(k_{\alpha_m} r) dr$  foi avaliado anteriormente na equação anterior (2.9).

Discretizando as fronteiras das superfícies das inclusões 1 e 2, e aplicando uma carga virtual em cada nó, pelo exterior e interior à inclusão, e impondo, como condições de fronteira, a continuidade da pressão e dos fluxos de pressão segundo a direção normal, ao longo da fronteira, pode estabelecer-se um sistema final de  $[(2NS + 2N) \times (2NS + 2N)]$  equações, obtido pela combinação das equações (2.7), (2.8), (2.17) e (2.18). A sua resolução permite determinar os valores nodais desconhecidos,

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_f^{(1)kl} & -\bar{H}_f^{(1)kl} & \bar{G}_p^{(1)kn} & 0 \\ -\frac{\rho_2}{\rho_1} \bar{G}_f^{(2)kl} & -\bar{H}_f^{(2)kl} & 0 & 0 \\ G_f^{(1)nl} & -H_f^{(1)nl} & G_p^{(1)nn} & -G_p^{(3)nm} \\ \frac{\partial G_f^{(1)nl}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & \frac{\partial H_f^{(1)nl}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & \frac{\partial G_p^{(1)nn}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & -\frac{\rho_1}{\rho_3} \frac{\partial G_p^{(3)nm}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{(1)l} \\ p^{(1)l} \\ a_{n\_ext}^n \\ a_{n\_int}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{p}_{inc}^k \\ 0 \\ -p_{inc}^n \\ -\frac{\partial p_{inc}^n}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

onde  $k, l = 1, N$ ,  $n = 1, NS$ ,  $\bar{G}_f^{(m)kl} = \int_{C_l} \bar{G}_f^{(m)}(x_l, y_l, \mathbf{n}_{n2}, x_k, y_k, \boldsymbol{\omega}) dC_l$ ,

$$\bar{H}_f^{(m)kl} = \int_{C_l} \bar{H}_f^{(m)}(x_l, y_l, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_k, y_k, \boldsymbol{\omega}) dC_l, \quad \bar{G}_p^{(1)kn} = \bar{G}_f^{(1)}(x_k, y_k, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}).$$

A presente abordagem, segundo a qual o TBEM é formulado em termos dos gradientes da pressão segundo a direção normal, supera a dificuldade de um corpo esbelto, gerado pela formulação clássica BEM. A aplicação direta deste método hipersingular permite que uma fissura vazia, rígida ou com espessura tendencialmente nula, seja modelada usando uma única linha aberta de elementos de fronteira e a imposição de fluxos de pressão segundo a direção normal nulos, ao longo dessa linha. As aproximações

nodais das pressões sobre a fronteira identificam a diferença dos valores da pressão entre ambos os lados da descontinuidade, para o caso de uma fissura submersa num determinado meio.

### 2.3.2.2 Meio fluido infinito com inclusões rígidas submersas

Considere-se o mesmo problema da Figura 2.1 e as equações apresentadas na secção 2.3.1.2, no qual, se pretende que a inclusão modelada com a formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira seja agora modelada utilizando essa formulação em Trações.

Sendo assim, a equação (2.11), referente ao domínio exterior dessa inclusão, é substituída para dar a equação seguinte em trações,

$$a p^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = - \int_{S_1} \overline{H}_f^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) p^{(1)}(x, y, \omega) ds + \overline{p}_{inc}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} \overline{G}_f^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \right], \quad (2.23)$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais (2.11) e (2.23) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, fluxos de pressão normais nulos, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se, assim, um sistema de  $[(NS + N) \times (NS + N)]$  equações.

### 2.3.2.3 Meio fluido infinito com inclusões vazias/cavidades submersas

Considere-se o mesmo problema e as equações apresentadas na secção 2.3.1.3, no qual se pretende que a inclusão modelada com a formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira seja agora modelada utilizando essa formulação em Trações.

Sendo assim, a equação (2.13), referente ao domínio exterior dessa inclusão, é substituída para dar a equação seguinte em Trações,

$$c q^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n1}, \omega) = \int_{S_1} q^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_f^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds + \overline{p}_{inc}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n\_ext}^{(2)} \overline{G}_f^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \right], \quad (2.24)$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito anteriormente. As equações integrais finais (2.14) e (2.24), são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, pressão nula, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se, assim, um sistema de  $[(NS + N) \times (NS + N)]$  equações.

#### 2.3.2.4 *Meio fluido infinito com inclusão fluida e inclusão rígida submersas*

Considere-se o mesmo problema e as equações apresentadas na secção anterior, no qual se pretende que a inclusão modelada com a formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira seja agora modelada utilizando essa formulação em Trações. As equações integrais finais (2.15), (2.17) e (2.18) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se, assim, um sistema de  $[(NS + 2N) \times (NS + 2N)]$  equações.

#### 2.3.2.5 *Meio fluido semi-infinito com inclusões rígidas submersas*

Considere-se novamente o problema de duas inclusões cilíndricas, irregulares e bidimensionais, submersas num meio semi-infinito fluido uniforme 1 (conforme Figura 2.3), submetido a uma fonte linear harmónica posicionada em  $O(x_s, y_s)$ . As inclusões embebidas no meio fluido são rígidas. Sendo assim, tem de se garantir os fluxos de pressão normais nulos nas superfícies de ambas as inclusões,  $S_1$  e  $S_2$ .

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito anteriormente. As equações integrais finais são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, fluxos de pressão normais nulos, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Estas são equivalentes às equações anteriores (2.12) e (2.22), mas são resolvidas através das funções de Green em campo semi-infinito. Estas funções de Green deverão ser reformuladas para satisfazer as condições de fronteira para a situação de um pavimento rígido, que exigem fluxos de pressão normal nulos nessa interface, em  $x=0$ . Essas condições podem ser satisfeitas automaticamente pela reposição do campo de pressões geradas pela fonte real e outra fonte produzida por uma fonte imagem, localizada de tal forma que constitui um espelho em relação ao plano horizontal, conforme descrito anteriormente em 2.3.1.5.

Obtém-se assim, um sistema de  $[(NS + N) \times (NS + N)]$  equações.

### 2.3.3 Formulação de acoplamento (TBEM+BEM/MFS)

#### 2.3.3.1 Meio fluido infinito com inclusões fluidas submersas

As formulações do Método dos Elementos de Fronteira clássica e em Trações podem ser combinadas de modo a resolver os mesmos problemas descritos anteriormente (Figura 2.1). É possível determinar a solução, quando a Inclusão 1 é uma inclusão fina totalmente preenchida por um fluido: parte da superfície fronteira desta inclusão é carregada com cargas monopolares (formulação BEM); enquanto a parte restante é carregada com cargas bipolares (formulação TBEM). Mantendo a segunda inclusão modelada com o MFS (ou seja, mantendo as equações de fronteira referentes a esta inclusão), leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} G_f^{(1)k_1l} & -H_f^{(1)k_1l} & G_p^{(1)k_1n} & 0 \\ \bar{G}_f^{(1)k_2l} & -\bar{H}_f^{(1)k_2l} & \bar{G}_p^{(1)k_2n} & 0 \\ -\frac{\rho_2}{\rho_1} G_f^{(2)k_1l} & -H_f^{(2)k_1l} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho_2}{\rho_1} \bar{G}_f^{(2)k_2l} & -\bar{H}_f^{(2)k_2l} & 0 & 0 \\ G_f^{(1)nl} & -H_f^{(1)nl} & G_p^{(1)nn} & -G_p^{(3)nn} \\ \frac{\partial G_f^{(1)nl}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & \frac{\partial H_f^{(1)nl}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & \frac{\partial G_p^{(1)nn}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} & -\frac{\rho_1}{\rho_3} \frac{\partial G_p^{(3)nn}}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^{(1)l} \\ p^{(1)l} \\ a_{n\_ext}^n \\ a_{n\_int}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_{inc}^{k_1} \\ -\bar{P}_{inc}^{k_2} \\ 0 \\ 0 \\ -P_{inc}^n \\ -\frac{\partial p_{inc}^n}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

com  $k_1 = 1, \dots, \frac{N}{2}$ ,  $k_2 = \frac{N}{2} + 1, \dots, N$ ,  $l = 1, \dots, N$ ,  $n = 1, \dots, NS$ .

## 2.4 VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO

Os algoritmos de acoplamento propostos (BEM/MFS, TBEM/MFS e combinação de BEM+TBEM/MFS) descritos anteriormente são implementados computacionalmente e verificados através das soluções dadas pelo BEM e MFS, individualmente, resolvendo o campo de pressões gerado por duas inclusões circulares, centradas em (0.0m, 20.0m) e (20.0m, 5.0m), com raios de 5.0 m e 4.0 m, respetivamente, submersas num meio fluido infinito e semi-infinito. Cinco casos distintos são resolvidos, considerando diferentes



tipos de inclusões, nomeadamente: uma inclusão fluida, uma inclusão rígida e uma cavidade de acordo com a Tabela 2.1.

O meio fluido exterior ( $\rho_1 = 4000 \text{ kg/m}^3$ ) é homogéneo, permitindo uma velocidade de propagação das ondas de pressão  $\alpha_1 = 750 \text{ m/s}$ . As inclusões fluidas 1 e 2, embebidas no meio fluido, apresentam massas volúmicas iguais a  $\rho_2 = 2000 \text{ kg/m}^3$  e  $\rho_3 = 3000 \text{ kg/m}^3$  e exibem velocidades de ondas de pressão  $\alpha_2 = 2121 \text{ m/s}$  e  $\alpha_3 = 577 \text{ m/s}$ , respetivamente. O sistema é excitado por uma carga harmónica pontual, bidimensional, aplicada no ponto O (3.0 m, 4.0 m), como demonstra a Figura 2.5,

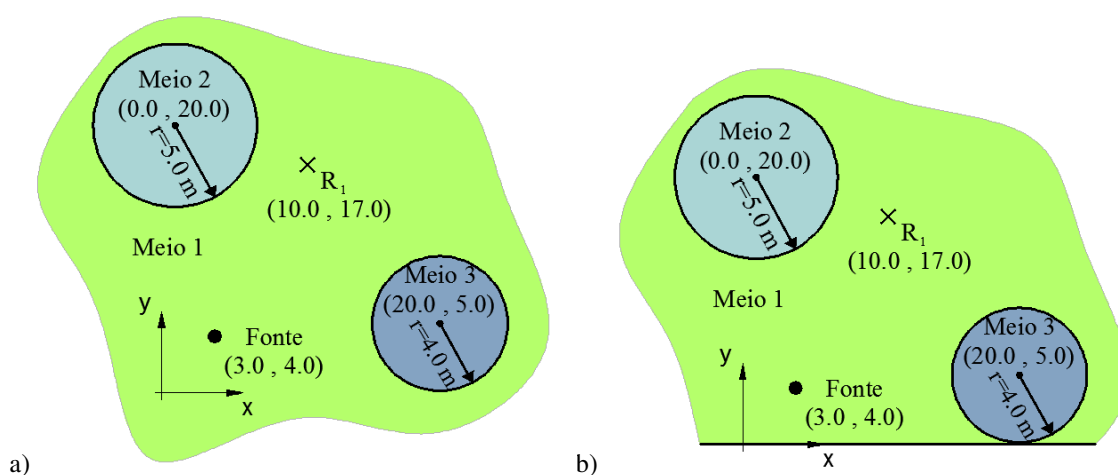


Figura 2.5: Geometria das inclusões circulares, preenchidas por meios fluidos homogéneos e confinados, inseridas num meio fluido homogéneo, posição da fonte sonora e recetor  $R_1$  situado no meio exterior: meio infinito (a) e meio semi-infinito (b).

As pressões são determinadas para o recetor  $R_1$ , localizado no ponto de coordenadas (10.0 m, 17.0 m). Os cálculos são realizados no domínio da frequência no intervalo entre 1 Hz e 100 Hz, com um incremento de frequência de 1Hz.

Os cálculos são realizados com a variação dos elementos de fronteira e das fontes virtuais, a fim de verificar a consistência dos resultados. Os resultados do algoritmo BEM, são utilizados como soluções de referência, utilizando 120 elementos de fronteira para modelar cada inclusão. Diversas combinações entre MFS/MFS, BEM/MFS e TBEM/MFS são calculadas e usam diferentes números de elementos de fronteira e fontes virtuais. Para as inclusões que são modeladas através do MFS, é necessária a colocação das fontes virtuais e dos pontos de colocação a uma determinada distância da fronteira dessas inclusões. Para avaliar esta distância foram colocados recetores ao longo da fronteira e avaliada a diferença em relação às condições de fronteira. O erro global naquela fronteira é encontrado calculando o erro global ao longo desta superfície, gerado pela diferença entre as respostas daqueles recetores e as condições fronteira

prescritas. Assim, as distâncias finalmente adotadas para a posição das fontes virtuais foram as que determinaram menores erros.

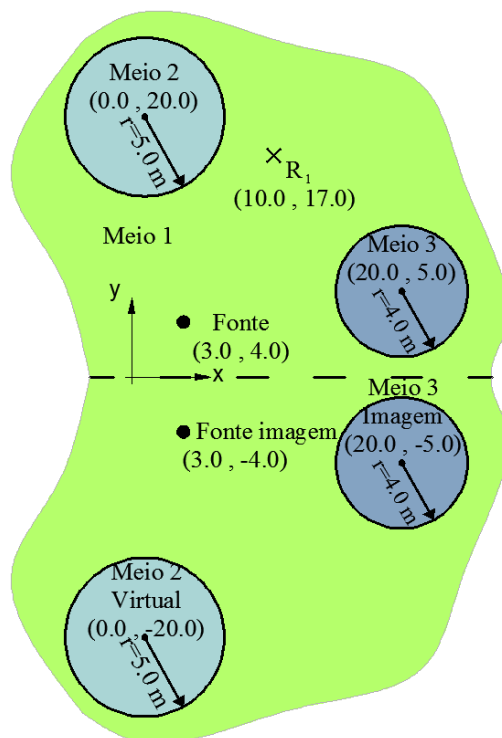


Figura 2.6: Geometria usada para o caso 5, de um meio fluido exterior semi-infinito, simulando um pavimento rígido: fonte real e inclusões rígidas; fonte imagem e inclusões imagem.

A solução de acoplamento para o problema apresentado no último caso, caso 5, ilustrado na Figura 2.5 b), é resolvido com recurso a funções de green em campo semi-infinito, apresentadas na secção 2.3.1.5. As condições de fronteira podem ser satisfeitas pela reposição do campo de pressões geradas por uma fonte real e outra fonte produzida por uma fonte imagem, localizada de tal forma que constitui um espelho em relação ao plano horizontal da fronteira,  $x=0.0\text{ m}$ , formando um campo incidente refletido a partir do solo, conforme ilustrado na Figura 2.6.

A Figura 2.7 e a Figura 2.8 apresentam a parte real (coluna à esquerda) e a parte imaginária (coluna à direita) relativas às respostas de pressão para os casos 1–5. As linhas correspondem às respostas calculadas pelo BEM (solução de referência), ou seja, quando as inclusões são modeladas com 120 elementos de fronteira para cada inclusão, como referido inicialmente. As diferentes formulações do MFS e soluções de acoplamento são representadas por marcadores e classificadas como MFS/MFS, BEM/MFS e TBEM/MFS. O número dos elementos de fronteira e as fontes virtuais utilizadas nas soluções de acoplamento variam de forma gradual, sendo calculados para 40, 80 e 120 elementos, para cada inclusão.

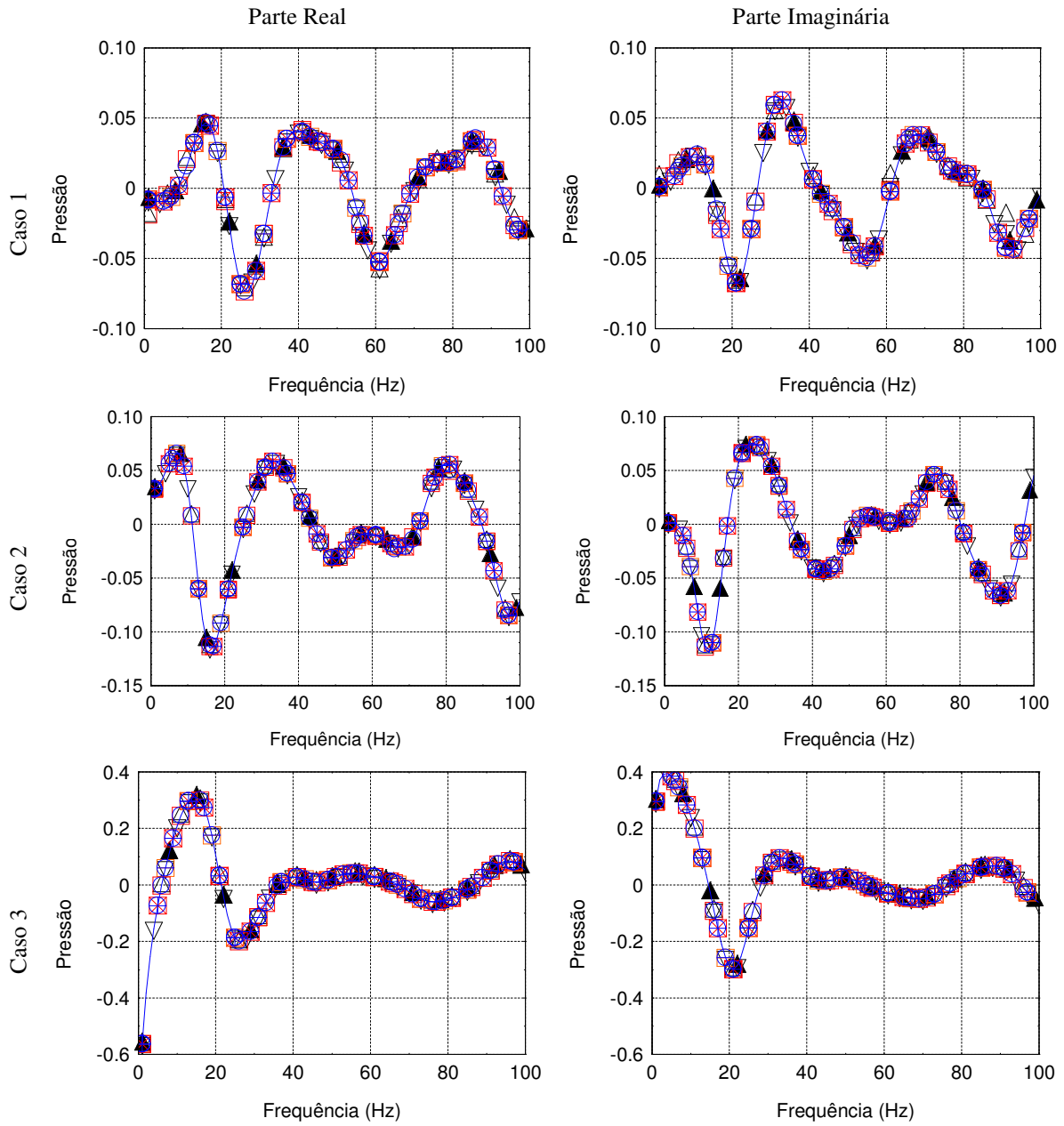


Figura 2.7: Respostas obtidas através do BEM, MFS e soluções propostas de acoplamento, quando o sistema é excitado por um fonte sonora de pressão, para os casos 1-3: — BEM (120/120); MFS/MFS (○ 40/40 ◻ 80/80 ⊕ 120/120); BEM/MFS (□ 40/40 ▤ 80/80 ⊗ 120/120); TBEM/MFS (△ 40/40 ▽ 80/80 ▲ 120/120).

Uma análise aos resultados revela que existe boa concordância entre as soluções propostas de acoplamento quando comparadas com a modelação BEM de referência, ou mesmo com a formulação MFS. Quanto maior é o número de fontes virtuais / pontos de colocação e elementos de fronteira menor será a diferença entre as várias modelações.

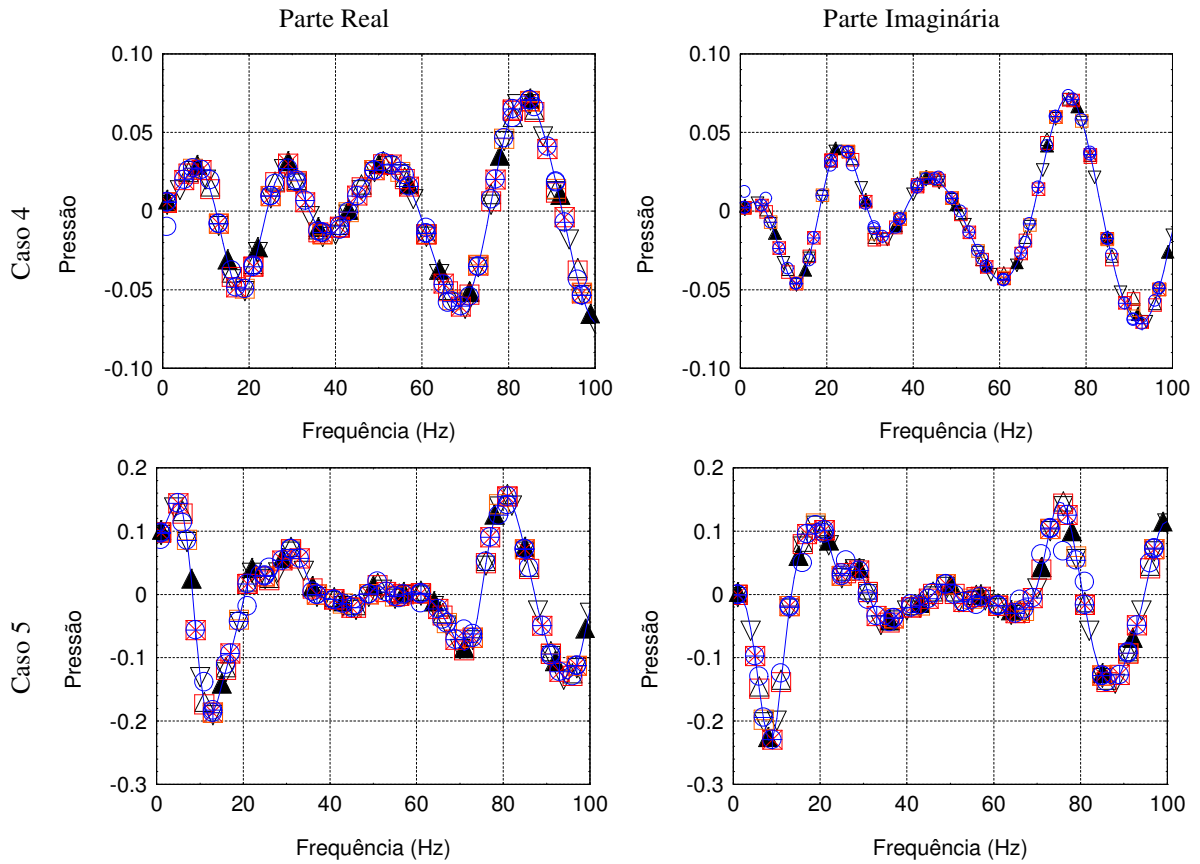


Figura 2.8: Respostas obtidas através do BEM, MFS e soluções propostas de acoplamento, quando o sistema é excitado por um fonte sonora de pressão, para os casos 4-5: — BEM (120/120); MFS/MFS (○ 40/40 ◐ 80/80 ⊕ 120/120); BEM/MFS (□ 40/40 ◻ 80/80 ⊠ 120/120); TBEM/MFS (△ 40/40 ▽ 80/80 ▲ 120/120).

Fica, assim, validado o método proposto de acoplamento para a modelação de um meio fluido, onde estão embebidas duas inclusões.

Tabela 2.1: Problemas resolvidos (5 casos) para diferentes tipos de propriedades no interior das inclusões e meio fluido exterior homogéneo.

	Inclusão 1 (modelada com BEM)	Inclusão 2 (modelada com MFS)	Meio fluido exterior homogéneo
Caso 1	Fluido	Fluido	Infinito
Caso 2	Rígido	Rígido	Infinito
Caso 3	Cavidade	Cavidade	Infinito
Caso 4	Fluido	Rígido	Infinito
Caso 5	Rígido	Rígido	Semi-infinito

## 2.5 EFICIÊNCIA DE CÁLCULO PARA O MÉTODO DE ACOPLAMENTO

A eficiência das formulações de acoplamento propostas é ilustrada através do cálculo de pressões numa grelha de recetores. Apresenta-se de seguida um problema, no qual é abordado o comportamento da propagação de ondas transmitidas num meio acústico homogéneo e infinito, causadas pela presença de uma barreira rígida em forma de arco, com espessura nula, localizada na proximidade de uma inclusão que apresenta no seu interior, um material fluido (ver Figura 2.9 a)). Para avaliar os benefícios da eficiência computacional de acoplamento proposto, apresentam-se os resultados, para duas frequências específicas, 140 Hz e 1024 Hz .

O meio acústico infinito exhibe as propriedades equivalentes ao ar, com uma velocidade de propagação e uma massa volúmica que permanecerá constante e igual a 340 m/s e 1.22 kg/m<sup>3</sup>, respetivamente. A inclusão fluida com uma massa volúmica de 180 kg/m<sup>3</sup> e uma velocidade igual a 360.0 m/s, é centrada na posição (0.0m, 0.0m) e possui um raio de 0.05 m. A barreira com uma geometria próxima de um arco, centrado na posição (0.0m, 0.0m), apresenta um raio de 0.10 m e um comprimento total de  $\frac{1.2 \pi}{32}$  m.

O sistema é excitado por uma fonte linear harmónica, localizada a 0.05 m da fissura, posicionada em (0.15m, 0.0m). As pressões são determinadas para o meio exterior e interior da inclusão e são obtidas para uma grelha bidimensional com 10 120 recetores ao longo das direções  $x$  e  $y$ , com espaçamentos de intervalos iguais, compreendida numa grelha de recetores:  $x = [-0.10m; 0.25m]$  e  $y = [-0.15m; 0.15m]$ .

O problema apresentado na Figura 2.9 a) foi calculado com auxílio da solução clássica e dual do Método dos Elementos de Fronteira (BEM/TBEM), e é designada nesta secção como a solução de referência.

A primeira inclusão fluida é discretizada com 560 elementos de fronteira, utilizando uma superfície fechada e carregada com cargas monopulares (BEM). A fissura utiliza 210 elementos de fronteira e é discretizada como uma linha aberta e carregada com cargas dipolares (TBEM), conforme se ilustra na Figura 2.9 b). Sendo assim, este problema é modelado considerando 2 subdomínios e utiliza um número total de 770 elementos de fronteiras, em ambas as frequências de análise.

A eficiência computacional foi avaliada através da determinação do tempo de processamento de cálculo, aqui designado por *CPU Time*, relativo à obtenção da pressão na malha de recetores em análise,

utilizando a formulação BEM/TBEM, em comparação com o MFS e a formulação proposta de acoplamento MFS/TBEM, para as frequências de análise.

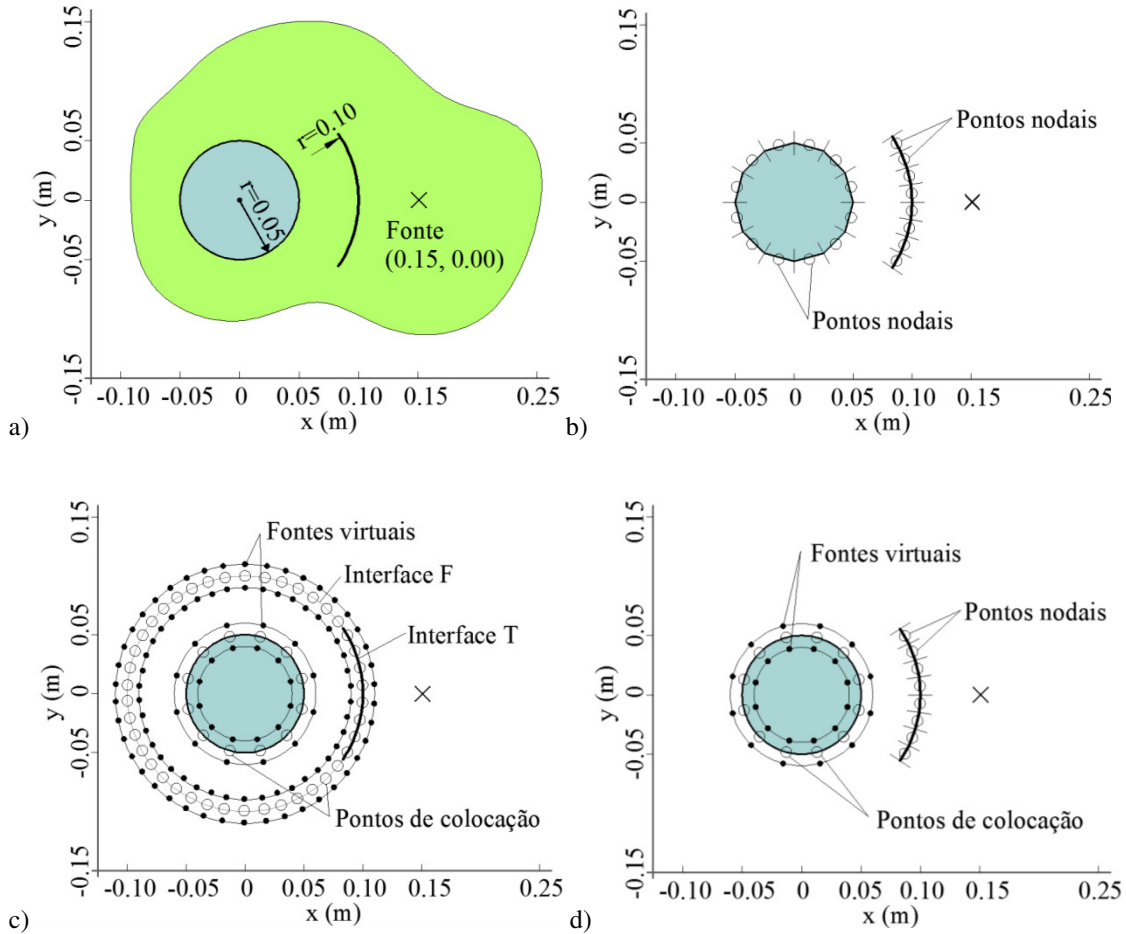


Figura 2.9: Aplicação numérica para a determinação da eficiência de cálculo: a) Geometria da inclusão fluida na vizinhança de uma barreira fina em forma de arco, ambas inseridas num meio acústico homogêneo e infinito, e posição da fonte dilatacional; b) Elementos de fronteira usados para a modelação BEM/TBEM; c) Posição das fontes virtuais e pontos de colocação usados pela modelação MFS; d) Posição das fontes virtuais, pontos de colocação (MFS) e elementos de fronteira (TBEM) usado pela formulação de acoplamento MFS/TBEM.

Como se afirmou anteriormente, o MFS é o método menos eficiente para a modelação de inclusões finas, tais como barreiras. A abordagem aqui utilizada para modelar a pressão em torno da barreira, para esta formulação, é baseada na decomposição do domínio interno em dois diferentes subdomínios, como está ilustrado na Figura 2.9 c). As interfaces entre estes dois subdomínios são circulares e contêm a barreira, Interface T, e uma superfície fictícia, Interface F. A fim de descrever corretamente o comportamento da barreira (com espessura nula), são impostos fluxos de pressão normais nulos ao longo de T. As continuidades de pressão e de fluxos de pressão são impostas ao longo da interface fictícia F. As fontes

virtuais usadas para modelar a resposta são colocadas a distâncias de 0.01 m afastadas da inclusão, tanto para o interior como para o exterior.

Para o modelo de acoplamento entre o MFS e o TBEM, a barreira é discretizada com elementos de fronteira, carregados por cargas dipolares (TBEM), enquanto a superfície da inclusão é modelada usando um conjunto de fontes virtuais localizadas a 0.005 m a partir da fronteira. Esta inclusão é, então, modelada com recurso ao MFS. Os pontos de colocação estão uniformemente distribuídos ao longo da sua superfície.

Os erros gerados no domínio em análise pelos métodos são avaliados comparando as respostas das pressões obtidas com a solução de referência. O erro global é definido pelo cálculo da integração do valor absoluto entre a diferença das respostas dos modelos de referência e os restantes modelos em análise para a grelha de recetores. Para avaliar a eficiência computacional, o *CPU Time* é registado simultaneamente ao fim de cada cálculo, para o mesmo problema modelado para as três formulações.

Para cada formulação efetuou-se o aumento do número de graus de liberdade (pontos nodais) de acordo com o valor de  $m=1$  a  $20$ . Em cada instante de cálculo foi registado o tempo necessário de cálculo, para cada grau de liberdade. A solução BEM/TBEM foi calculada pela discretização da inclusão e a superfície da fissura, com  $10m$  e  $4m$  elementos de fronteira, respetivamente. A solução MFS foi obtida simulando as interfaces da inclusão circular com  $10m$  fontes virtuais / pontos de colocação e  $20m$ , para a barreira, fontes virtuais / pontos de colocação, de forma a garantir os mesmos números de pontos utilizados nos diversos métodos. A solução de acoplamento proposta foi obtida com  $10m$  e  $4m$  fontes virtuais / pontos de colocação e elementos de fronteira, para simular a inclusão e a barreira, respetivamente.

Todas as soluções foram determinadas no mesmo computador que possui um processador *Intel Core™ Duo CPU E6750*, de forma a garantir o mesmo processamento de cálculo nas várias formulações.

A Figura 2.10 ilustra, assim, o erro global registado no domínio *versus* o tempo de processamento de cálculo necessário para cada formulação, com a variação do número de graus de liberdade, ou seja, com o incremento do número de elementos de fronteira e fontes virtuais / pontos de colocação. Esta figura apresenta os resultados numa escala logarítmica para permitir uma fácil interpretação dos resultados.

Fazendo uma análise às respostas obtidas, demonstra-se que a formulação de acoplamento MFS/TBEM, para ambas as frequências e para o mesmo tempo de cálculo, é sempre aquela que tem um erro global menor. Para este problema acústico, é também a formulação que converge mais rápido para a solução de referência com um tempo de cálculo bastante inferior.

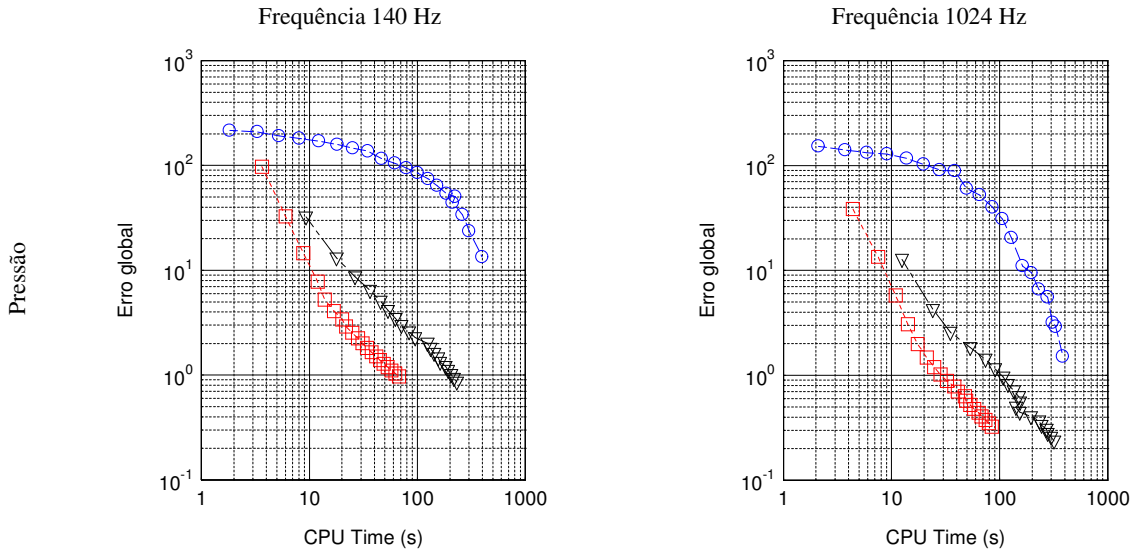


Figura 2.10: Erro global no domínio em função do *CPU Time* para um sistema composto por uma inclusão fluida circular localizada na proximidade de uma barreira com espessura nula, inseridas num meio acústico infinito:  $\nabla$  BEM/TBEM,  $\circ$  MFS e  $\square$  MFS/TBEM.

Pode então concluir-se que o método proposto de acoplamento, para o exemplo de uma inclusão fluida circular e de uma barreira, inseridas num meio acústico infinito, necessita de um menor número de elementos de fronteira e fontes virtuais / pontos de colocação, para registar o mesmo erro global. A formulação proposta permite assim calcular sistemas de uma forma mais rápida e eficiente.

## 2.6 PRESSÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

A formulação baseada no método de acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira e o Método das Soluções Fundamentais foi implementada no domínio da frequência. Deste modo, as respostas no domínio do tempo são calculadas a partir daqueles resultados mediante a aplicação de transformadas inversas de Fourier (rápida), com um algoritmo do tipo FFT – *Fast Fourier Transform*, ao conjunto de resultados para as várias frequências de cálculo  $\omega$ . O pulso emitido pela fonte de excitação corresponde à de um pulso de Ricker, que facilita a interpretação das respostas no domínio do tempo, dado que tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, decai rapidamente, reduzindo o esforço computacional necessário. A definição deste pulso ao longo do tempo compreende um pico positivo entre dois negativos de menor amplitude, sendo dado por:

$$u(\tau) = A(1 - 2\tau^2)e^{-\tau^2}, \quad (2.26)$$



onde  $A$  representa a amplitude do sinal;  $\tau = (t - t_s) / t_0$ ,  $t$  correspondendo à variável tempo,  $t_s$  o tempo em que ocorre o valor de pico, e  $\pi t_0$  é o período característico (dominante) do pulso de Ricker.

A aplicação da transformada de Fourier para esta função leva a que aquele pulso possa ser expresso no domínio da frequência pela equação:

$$U(\omega) = A \left[ 2t_0 \sqrt{\pi} e^{-i\omega t_s} \right] \Omega^2 e^{-\Omega^2}, \quad (2.27)$$

com  $\Omega = \omega t_0 / 2$ . A propagação de pulsos com a configuração do pulso de Ricker pode modelar-se através da multiplicação entre as respostas dadas pelas fontes aplicadas (de igual frequência e amplitude unitária) e os valores dados pela equação anterior.

A transformada de Fourier é calculada somando um número finito de termos. Este processo corresponde ao somatório de fontes virtuais periódicas igualmente espaçadas com intervalos de tempo iguais a  $\Delta\omega$ , em que o incremento de frequências é definido por  $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ . Fenómenos de *aliasing* são verificados, e devem ser evitados garantindo um espaçamento adequado entre estas para que a contribuição individual de cada fonte seja totalmente representada no período de tempo analisado (condicionado pelo incremento de frequência). Outra forma de o minimizar consiste na introdução de frequências complexas, com uma parte imaginária, da forma  $\omega_c = \omega - i\eta$ .  $\eta = 0.7\Delta\omega$  é o valor adotado usualmente em problemas de análise da propagação de ondas. Um valor superior levaria a uma perda de precisão da resposta, por inviabilizar a sua recuperação a partir de valores de amplitude muito reduzidos, e um valor muito inferior não produziria efeito de amortecimento da resposta, que é desejável para minimizar os fenômenos de *aliasing* (Tadeu, 1992).

Posteriormente, o efeito da introdução da constante imaginária é necessariamente tido em consideração, multiplicando-se as respostas no domínio do tempo por um fator exponencial,  $e^{\eta t}$ , no cálculo da pressão no domínio do tempo, de forma a recuperar a resposta original (Kausel e Roesset, 1992).

## 2.7 APLICAÇÕES NO DOMÍNIO DA ACÚSTICA

A aplicabilidade das formulações de acoplamento proposta é ilustrada através da resolução de dois problemas diferentes, com aplicação 2D, na área acústica rodoviária e outra ferroviária. É abordado, no primeiro exemplo, o comportamento de propagação 2D de ondas de pressão em meio fluido (acústico) homogêneo e semi-infinito, no qual está inserida uma barreira rígida acústica nas proximidades de uma

estrutura semicircular. O segundo exemplo diz respeito ao cálculo de pressões num campo produzido por uma fonte sonora numa estação de metro, na presença de uma barreira fina, com espessura reduzida, que é modelada como uma inclusão fina preenchida por um fluido. Nos dois problemas analisados, a velocidade das ondas de propagação sonora e a massa volúmica do meio acústico são mantidas constantes e iguais a 340 m/s e  $1.22 \text{ kg/m}^3$ , respetivamente, equivalente às propriedades do ar.

Ambos os cálculos são realizados no domínio da frequência, numa gama compreendida entre os 4 Hz e os 2048 Hz, com um incremento de frequência de 4 Hz, o que determina um período máximo de análise no domínio do tempo de 0.25 s.

### **2.7.1 Análise de resposta, no domínio do tempo, num meio acústico na presença de uma barreira acústica rígida com espessura nula nas proximidades de uma estrutura semicircular**

Uma barreira acústica rígida, colocada na vizinhança de uma cúpula, é usada para ilustrar a aplicabilidade da formulação proposta de acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira em Trações e o Método das Soluções Fundamentais (TBEM/MFS). A fonte de pressão sonora é colocada a 4.0 m da barreira, e 0.5 m acima do solo, como ilustra a Figura 2.11. A barreira, de 3.0 m de altura, é colocada a 5.0 m afastada de uma estrutura semicircular rígida.

Após a determinação das incógnitas referentes aos valores nodais, sobre as fronteiras discretizadas, calculam-se as respostas, em termos de pressões no meio fluido semi-infinito, numa grelha bidimensional de 26 347 recetores dispostos ao longo das direções  $x$  e  $y$ , igualmente espaçados e colocados nas proximidades da barreira acústica e da cúpula, no domínio definido por  $x=0.0\text{m}$  a  $x=25.0\text{m}$  e  $y=0.0\text{m}$  a  $y=10.0\text{m}$ .

A barreira é modelada como uma inclusão rígida usando o método TBEM, com uma espessura nula e é discretizada usando um número adequado de elementos de fronteira definido pela relação entre o comprimento de onda e o comprimento dos elementos de fronteira, que foi fixado em 6. Foram usados um mínimo de 30 elementos de fronteira. A estrutura semicircular é assumida como sendo rígida e foi simulada através do Método das Soluções Fundamentais, MFS, com um mínimo de 200 cargas virtuais / pontos de colocação. No presente exemplo, as cargas virtuais são colocadas a 0.5 m da fronteira. Esta distância foi determinada usando um procedimento semelhante ao descrito anteriormente na secção de verificação dos algoritmos, com base no cálculo do erro ao longo da fronteira. O número de fontes

virtuais / pontos de colocação aumenta com a frequência de acordo com a relação entre o comprimento de onda e a distância entre os pontos de colocação, que também foi fixado em 6.

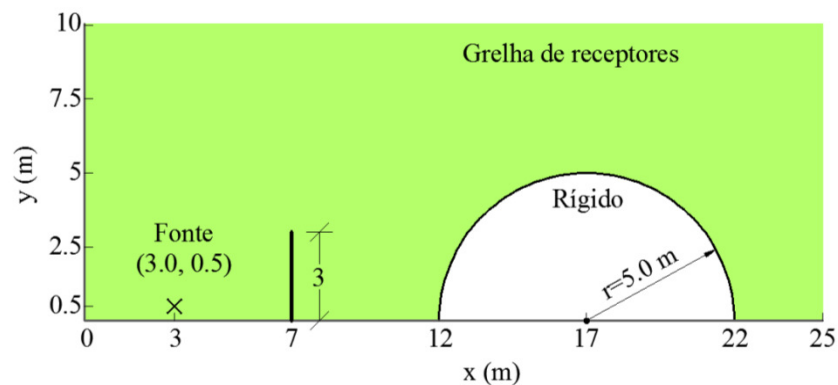


Figura 2.11: Geometria da barreira acústica rígida nas proximidades de uma estrutura semicircular (meio rígido), inseridos num meio fluido (ar) semi-infinito: geometria do sistema físico, posição da fonte sonora e zona abrangida pela grelha de recetores.

A Figura 2.12 ilustra esquematicamente a posição das fontes virtuais (interiores), pontos de colocação e dos elementos de fronteira. São usadas no problema funções de Green adequadas para um meio semi-infinito, tendo em conta a presença de um pavimento rígido.

O fluido é perturbado por uma fonte sonora que emite um pulso de Ricker com uma frequência característica de 500 Hz, a partir do instante inicial  $t=0$ s. De modo a analisar os resultados, foram captados alguns instantes na animação para ilustrar o campo de pressões calculado na malha de recetores provocado por uma barreira acústica situada na vizinhança de uma estrutura semicircular, em determinados períodos de tempo.

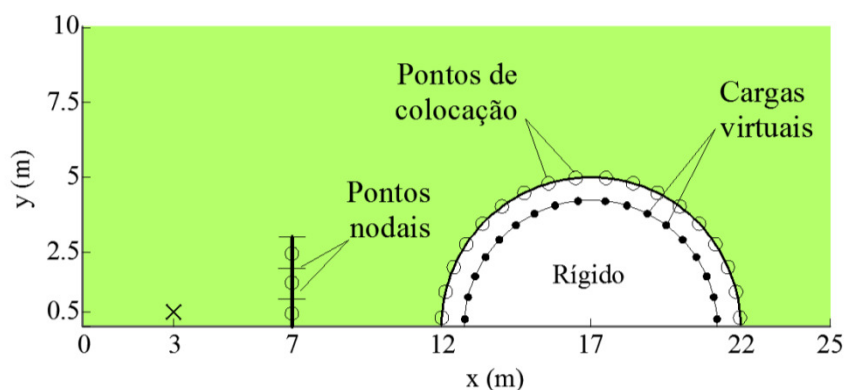


Figura 2.12: Barreira acústica rígida nas proximidades de uma estrutura semicircular: posição das cargas virtuais, pontos de colocação e dos elementos de fronteira.

A Figura 2.13 exibe gráficos para um campo de pressões em instantes de tempo diferentes quando as ondas sonoras se propagam no meio acústico semi-infinito. A cor encarnada e a cor azul representam as amplitudes de pressão mais elevada e mais baixa, no meio fluido, respetivamente.

Na primeira imagem, em  $t = 0.31$  ms, o pulso incidente já é visível, com a propagação de ondas perto da fonte sem que esta tenha sofrido qualquer perturbação, uma vez que ainda não atingiu o solo nem a barreira acústica. Como esperado, a magnitude das pressões é uniforme ao longo da frente de onda cilíndrica.

Em  $t = 3.05$  ms, o pulso incidente atingiu o solo rígido e já é visível um pulso refletido. Em  $t = 10.68$  ms o pulso incidente acaba de embater na barreira acústica. O pulso refletido é ainda muito perto da barreira acústica. O resultado da difração das ondas acústicas na parte superior da barreira pode ser visto em  $t = 14.65$  ms. Nas duas imagens seguintes, instantes  $t = 18.01$  ms e  $t = 21.06$  ms, as ondas de difração originadas no topo da barreira podem ser vistas a percorrer à volta da mesma, enquanto as ondas incidentes e as primeiras ondas refletidas são visíveis por detrás deste elemento vertical. Em  $t = 28.69$  ms, essas ondas são refletidas no pavimento, propagando-se em sentido contrário. Nesse mesmo instante, a frente de onda encontra a segunda inclusão, semicircular, e é visível o primeiro conjunto de reflexões provenientes da inclusão no instante seguinte ( $t = 39.67$  ms). A estrutura semicircular e a barreira são responsáveis por um conjunto de reflexões múltiplas, que viajam para trás e para a frente entre as duas estruturas, ilustrado na Figura 2.13 (i) ( $t = 47.30$  ms). No último instante, esses efeitos são mais evidentes, e os pulsos enclausurados entre a barreira rígida são visíveis na resposta, principalmente em recetores colocados junto ao solo ( $t = 57.98$  ms).

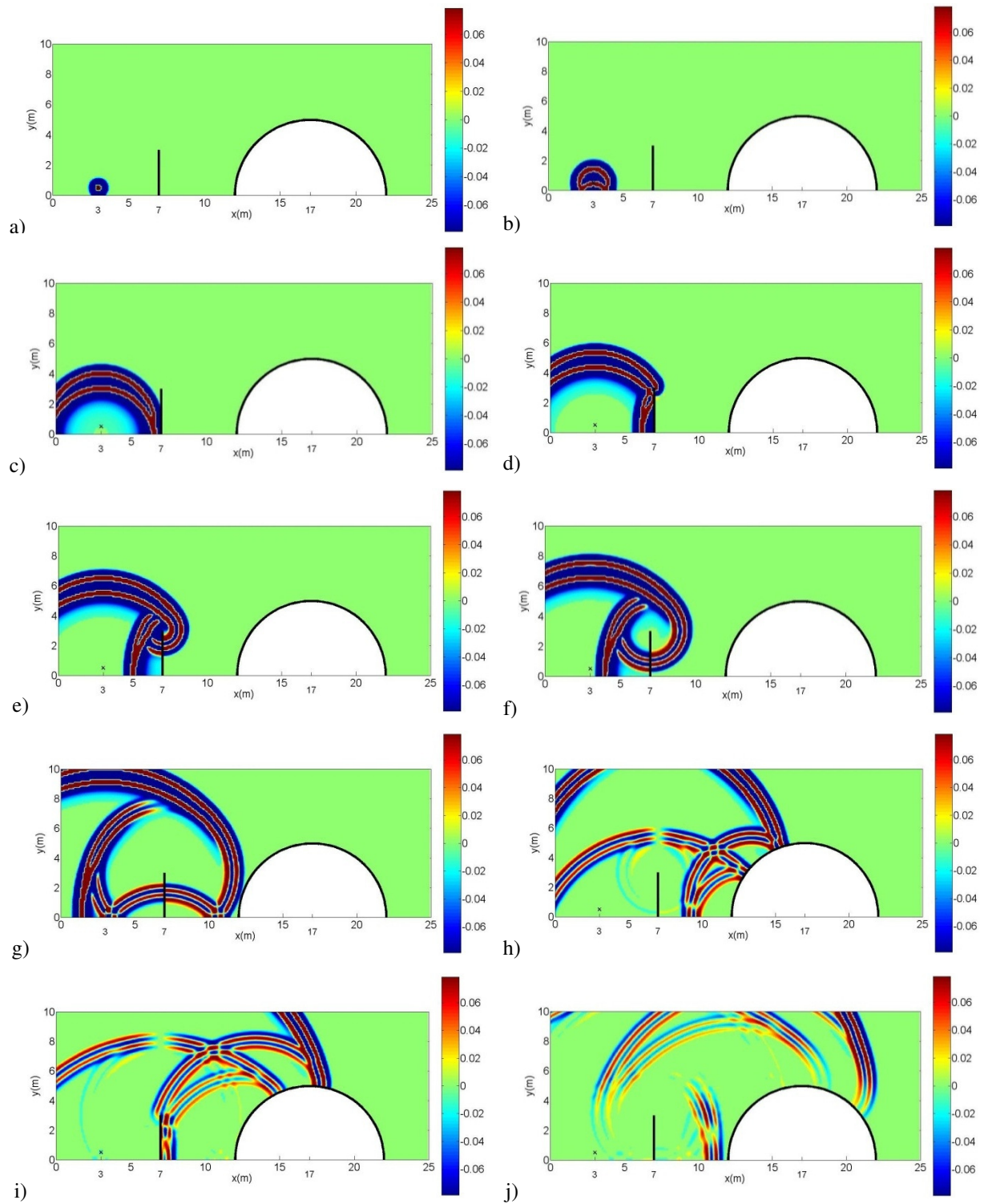


Figura 2.13: Pressões geradas nas proximidades de uma barreira acústica e de uma estrutura semicircular, ambas simuladas como inclusões rígidas, inseridas num meio fluido bidimensional semi-infinito. Respostas em  $t = 0.31$  ms (a),  $t = 3.05$  ms (b),  $t = 10.68$  ms (c),  $t = 14.65$  ms (d),  $t = 18.01$  ms (e),  $t = 21.06$  ms (f),  $t = 28.69$  ms (g),  $t = 39.67$  ms (h),  $t = 47.30$  ms (i) e  $t = 57.98$  ms (j).

## 2.7.2 Análise de resposta, no domínio do tempo, numa estação de metro na presença de uma barreira acústica fina que separa duas vias-férreas

Considere uma estação de metro (preenchida por ar), com duas vias-férreas, inseridas num meio acústico infinito (tratado como fluido). Uma barreira acústica fina (elemento totalmente preenchido por um fluido) é colocada dentro da estação para separar as duas vias-férreas. A propagação de ondas geradas no interior da estação de metro, quando excitada por uma carga pontual harmónica, é analisada com a combinação da formulação dos métodos TBEM+BEM com MFS.

Neste problema, uma carga de pressão acústica simula o ruído provocado pela passagem de um comboio que excita o meio descrito anteriormente. A inclusão plana e fina, com extremidades arredondadas é preenchida por um fluido com massa volúmica  $180 \text{ kg/m}^3$  e permite uma velocidade de onda de propagação de  $360.0 \text{ m/s}$  (essas propriedades são idênticas às da massa volúmica e velocidade das ondas dilatacionais, ondas P de aglomerado de cortiça). O meio infinito permite uma velocidade da onda de pressão de  $2000.0 \text{ m/s}$  e tem uma massa volúmica de  $1400 \text{ kg/m}^3$ .

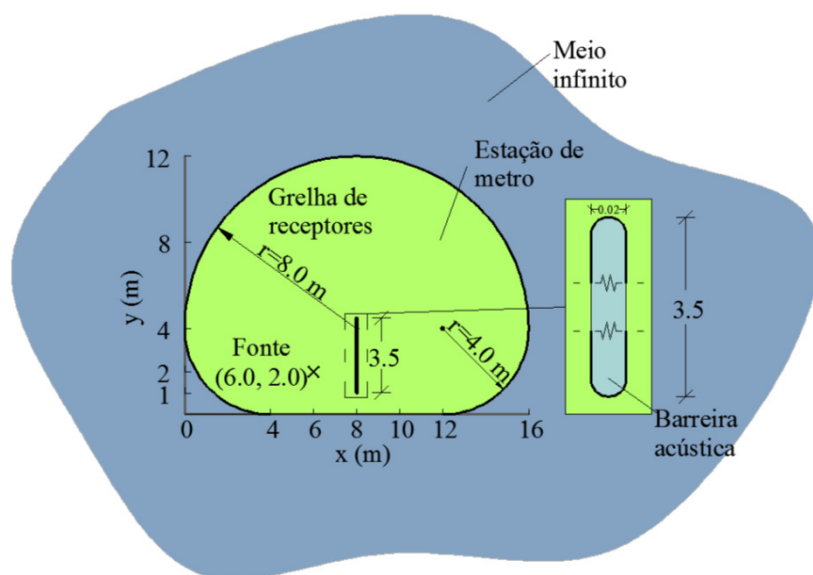


Figura 2.14: Geometria de uma barreira acústica fina, preenchida por um fluido, numa estação de metro inserida noutro meio acústico infinito, com a localização da posição da fonte sonora.

Como mostra a Figura 2.14, num corte transversal da estação, a barreira acústica fina separa as duas vias ferroviárias, com o objetivo de atenuar o ruído provocado pela circulação do comboio vizinho. A inclusão fina tem  $0.02 \text{ m}$  de espessura e as extremidades são definidas por semicircunferências. Parte da

superfície desta inclusão é modelada pela formulação TBEM enquanto a restante é discretizada através da formulação BEM. As superfícies da estação de metro são modeladas usando o MFS. A Figura 2.15 mostra a posição das fontes virtuais, pontos de colocação e os elementos de fronteira. As fontes virtuais são colocadas a 0.32 m a partir do limite da estação de metro. O mesmo procedimento descrito acima foi utilizado para definir a distância entre as fontes virtuais e a fronteira. A seleção do número de fontes virtuais / pontos de colocação foi definido em cada frequência de cálculo, com a relação entre o comprimento de onda e a distância entre sucessivas fontes virtuais / pontos de colocação, e fixado em 6. O número de elementos de fronteira foi escolhido, definindo a relação entre o comprimento de onda e o comprimento dos elementos de fronteira, também em 6. Um mínimo de 700 pontos de colocação / fontes virtuais e 240 elementos de fronteira foram usados para discretizar a superfície da estação de metro e a barreira acústica, respetivamente.

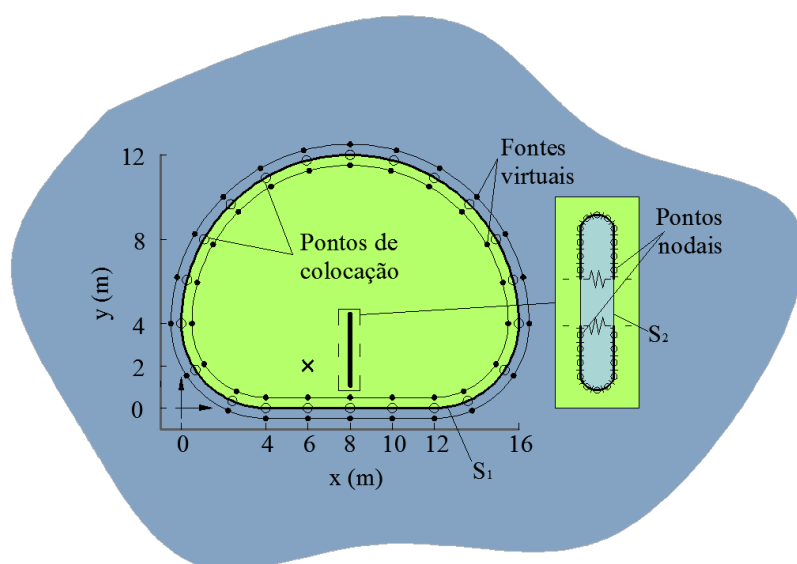


Figura 2.15: Barreira acústica fina numa estação de metro: posição das fontes virtuais, pontos de colocação e pontos nodais.

Os resultados foram calculados para uma grelha bidimensional de 4867 recetores igualmente espaçados entre si. Os resultados numéricos são apresentados numa vista bidimensional em diferentes instantes de tempo (Figura 2.16), com uma escala de cores que representa o campo de pressão total, quando a fonte é assumida ser modelada por um pulso Ricker com uma frequência característica de 400 Hz, com instante inicial em  $t = 0$  s.

Na primeira imagem, em  $t = 0.73$  ms, o pulso gerado propaga-se no meio fluido e ainda não atingiu a inclusão fina, o que acontece em  $t = 4.39$  ms. Quando atinge a inclusão, o campo incidente de pressões é parcialmente refletido, mas parte passa através do elemento fino ( $t = 8.54$  ms). Além disso, as ondas de difração são observáveis na parte inferior do elemento de separação. Apenas uma pequena perturbação é

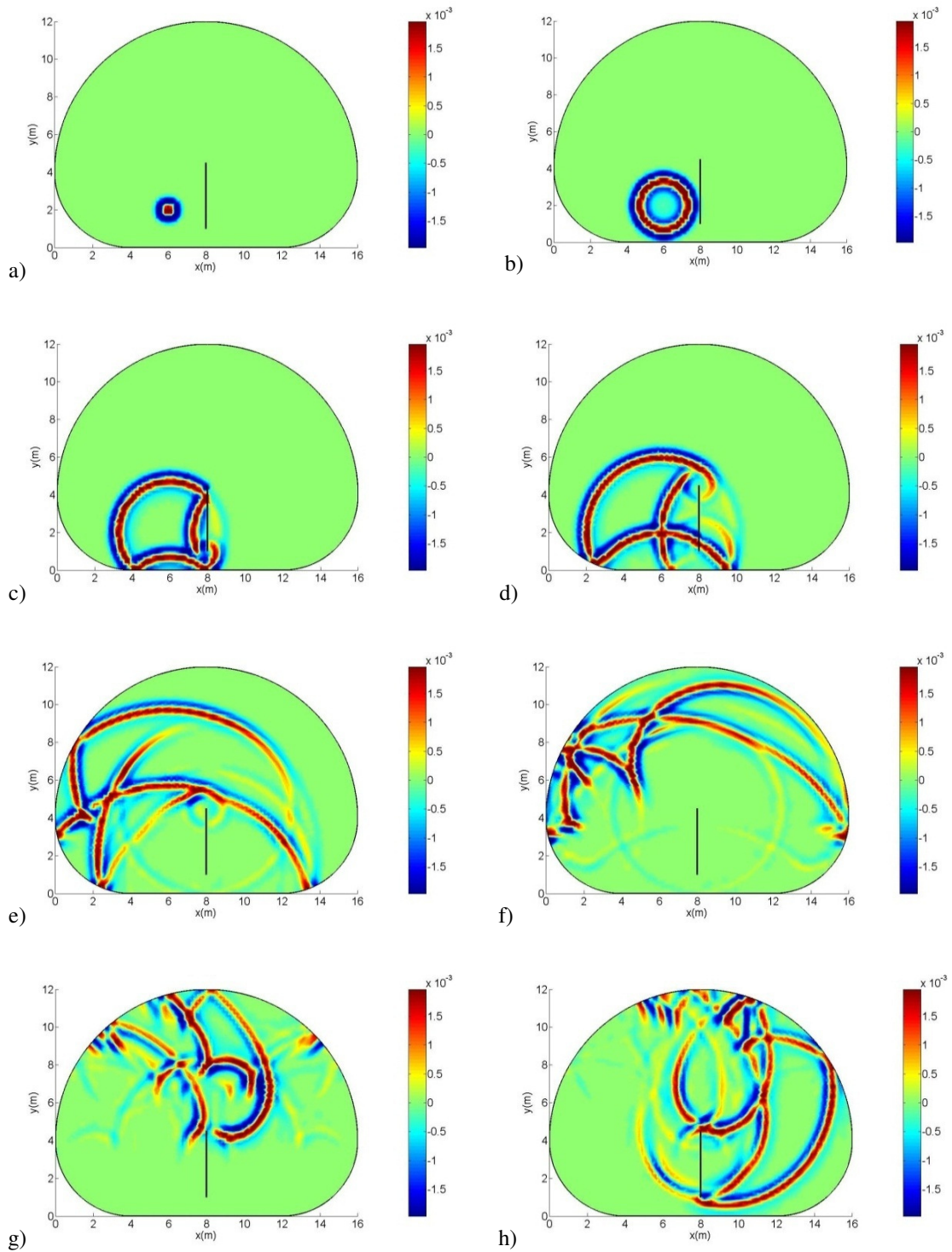


Figura 2.16: Barreira acústica fina que separa dois caminhos ferroviários numa estação de metro.

Respostas em  $t = 0.73$  ms (a),  $t = 4.39$  ms (b),  $t = 8.54$  ms (c),  $t = 12.21$  ms (d),  
 $t = 23.19$  ms (e),  $t = 33.69$  ms (f),  $t = 53.71$  ms (g) e  $t = 63.96$  ms (h).



observada com o aumento da propagação de ondas sonoras na inclusão fina, preenchida por um fluido diferente do meio de propagação. Em  $t = 12.21$  ms a onda que atravessou a inclusão já atingiu o lado direito da grelha de recetores. A interação entre essas ondas e as pertencentes à difração provenientes da parte superior e inferior da barreira podem ser vistas. A propagação de ondas refletidas para a esquerda e algumas difrações geradas pelo campo acústico incidente são claramente visíveis (ver Figura 2.16 e-f). Também é visível a maioria dos pulsos refletidos e transmitidos à superfície superior da estação de metro ( $t = 53.71$  ms), passando posteriormente para o lado direito da grelha, no último instante ( $t = 63.96$  ms). O processo dinâmico continua com ondas a serem refletidas, difratadas e refratadas na fronteira da barreira e nas paredes da estação de metro até que, posteriormente, toda a energia é dissipada deste meio.

## 2.8 CONCLUSÕES

O acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira (BEM), o Método de Elementos de fronteira em Trações (TBEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) foi proposto para uma análise transiente de problemas de propagação de ondas acústicas na presença de várias inclusões. Foi demonstrado que os algoritmos de acoplamento propostos superam as limitações decorrentes de cada método, exigindo um menor esforço computacional, mantendo a precisão adequada.

A formulação do TBEM, e a combinação da formulação que usa tanto o TBEM como o BEM clássico, juntamente com o MFS, foi proposta para superar a dificuldade exibida pelo BEM na presença de um corpo fino. Problemas envolvendo heterogeneidades de espessura reduzida, que podem ser rígidas, livres ou preenchidas por um fluido, num espaço infinito ou semi-infinito homogêneo, foram abordados no presente capítulo. O acoplamento das formulações propostas foi verificado, comparando as respostas com as geradas por soluções convencionais de BEM e MFS.

Finalmente, o acoplamento das formulações propostas foi usado para resolver dois exemplos numéricos. A propagação bidimensional de ondas de pressão nas proximidades de uma estrutura semi-circular, quando uma barreira acústica rígida é colocada entre essa estrutura rígida e uma fonte acústica, foi abordada no primeiro exemplo. No segundo exemplo, a atenuação de um campo de pressões produzida por uma fonte acústica na presença de uma barreira acústica fina (vista como uma inclusão fina totalmente preenchida por fluido) colocada no interior de uma estação de metro foi calculada para ilustrar as potencialidades das técnicas propostas.

# APÊNDICE A: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2D, EM BEM, EM MEIOS FLUIDOS INFINITOS

## A.1 – DEFINIÇÕES DE ÂMBITO GERAL

Propriedades do meio de propagação:

$\lambda, \mu$  Constantes elásticas (constante de Lamé e módulo de elasticidade transversal)

$\rho$  Massa volúmica

$\omega$  Frequência de análise

$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  Velocidade das ondas P (ondas dilatacionais)

$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  Velocidade das ondas S (ondas de corte)

Outros parâmetros:

$$r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$$

$A = \frac{1}{4i\rho\omega^2}$  Amplitude

Funções de Hankel do segundo tipo e de ordem  $n$ :

$$H_{n\alpha} = H_n(k_\alpha r)$$

$$H_{n\beta} = H_n(k_\beta r)$$

Funções auxiliares:

$$B_n = k_\beta^n H_{n\beta} - k_\alpha^n H_{n\alpha}$$

Funções de  $B_n$

## A.2 – FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE PRESSÃO

As funções bidimensionais de Green para a pressão no meio fluido infinito homogéneo ( $m$ ), em coordenadas cartesianas, são dadas por,

$$G_f^{(m)}(x, y, x_k, y_k, \omega) = -\frac{i}{4} H_0(k_{\alpha_m} r), \quad (2.28)$$

$$H_f^{(m)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_k, y_k, \omega) = \frac{i}{4} k_{\alpha_m} H_1(k_{\alpha_m} r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}_{n1}}, \quad (2.29)$$

## A.3 – FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE FLUXOS DE PRESSÃO

As funções bidimensionais de Green para os fluxos de pressão no meio fluido infinito homogéneo, em coordenadas cartesianas, são dadas por,

$$\frac{\partial G_f^{(m)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_k, y_k, \omega) = \frac{i}{4} k_{\alpha_m} H_1(k_{\alpha_m} r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}_{n2}}, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_f^{(m)}}{\partial \mathbf{n}_{n2}}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_k, y_k, \omega) = \frac{i}{4} k_{\alpha_m} \left\{ \left[ \frac{1}{r} H_1(k_{\alpha_m} r) - k_{\alpha_m} H_2(k_{\alpha_m} r) \right] \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}_{n1}} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}_{n2}} + \frac{H_1(k_{\alpha_m} r)}{r} \times \right. \\ \left. \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n1}} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n2}} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x} \left( \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n1}} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n2}} + \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n1}} \right) + \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n1}} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n2}} \right] \right\}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

em que  $r = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$ . As velocidades de ondas de pressão nestas equações são as que estão associados com o exterior e o interior do fluido das duas inclusões ( $m = 1, 2$ ).

## APÊNDICE B: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2D, EM TBEM, EM MEIOS FLUIDOS INFINITOS

As funções bidimensionais de Green para a pressão no meio fluido infinito homogéneo são dadas por:

$$\overline{G}_f^{(m)}(x, y, \mathbf{n}_{n_2}, x_k, y_k, \omega) = \frac{\partial G(x, y, x_k, y_k, \omega)}{\partial \mathbf{n}_{n_2}} = \frac{i}{4} k_{\alpha_m} H_1(k_{\alpha_m} r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}_{n_2}}, \quad (2.32)$$

As funções bidimensionais de Green para os fluxos de pressão no meio fluido infinito homogéneo são dadas por:

$$\begin{aligned} \overline{H}_f^{(m)}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, \mathbf{n}_{n_2}, x_k, y_k, \omega) &= \frac{\partial H(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, x_k, y_k, \omega)}{\partial \mathbf{n}_{n_2}} = \frac{\partial^2 G(x, y, x_k, y_k, \omega)}{\partial \mathbf{n}_{n_2} \partial \mathbf{n}_{n_1}} = \\ &= \frac{i}{4} k_{\alpha_m} \left\{ -k_{\alpha_m} H_2(k_{\alpha_m} r) \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n_1}} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n_1}} \right] + \frac{H_1(k_{\alpha_m} r)}{r} \left[ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n_1}} \right] \right\} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n_2}} +, \\ &= \frac{i}{4} k_{\alpha_m} \left\{ -k_{\alpha_m} H_2(k_{\alpha_m} r) \left[ \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_{n_1}} + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n_1}} \right] + \frac{H_1(k_{\alpha_m} r)}{r} \left[ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n_1}} \right] \right\} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_{n_2}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde  $n_k$  e  $n_l$  são os vetores unitários na direção normal exterior para os segmentos fronteira a serem carregados ( $C_k$ ) e integrados ( $C_l$ ), respetivamente. Estas equações podem ser vistas com funções de Green para pressão e fluxos de pressão, quando cargas dipolares são aplicadas ao longo da fronteira da inclusão, em vez de cargas monopolares.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Achenbach, J.D., Lin, W., Keer, L.M. (1986) Mathematical modeling of ultrasonic wave scattering by sub-surface cracks. *Ultrasonics*, 24, 207-215.
- Achenbach, J.D. (2002) Modeling for quantitative non-destructive evaluation. *Ultrasonics*, 40, 1-10.
- Alves, C.J.S., Leitão, V.M.A. (2006) Crack analysis using an enriched MFS domain decomposition technique. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(3): 160-166.
- Amado Mendes, P., Tadeu, A. (2006) Wave propagation in the presence of empty cracks in an elastic medium. *Computational Mechanics*, 38(3), 183-199.
- António, J., Tadeu, A. (2004) The use of monopole and dipole sources in crosswell surveying. *Geophysical Journal International*, 56, 231-245.
- António, J., Tadeu, A., Amado Mendes, P. (2007) A 2.5D traction boundary element method formulation applied to the study of wave propagation in a fluid layer hosting a thin rigid body. *Journal of Computational Acoustics*, 16(2), 177-198.
- Branco, F.G., Godinho, L., Tadeu, A. (2003) Acoustic insertion loss provided by rigid acoustic barriers of different shapes. *Journal of Computational Acoustics*, 11(4), 503-520
- Brown, D., Ling, L., Kansa, E., Levesley, J. (2005) On approximate cardinal preconditioning methods for solving PDEs with radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, 343-353.
- Chen, J.T., Chang, M.H., Chen, K.H., Chen, I.L. (2002) Boundary collocation method for acoustic eigenanalysis of three-dimensional cavities using radial basis function. *Computational Mechanics*, 29, 392-408.

- Cruse, T.A. (1987) Boundary Element Analysis. Computational Fracture Mechanics, *Kluwer Academic Publishers*.
- Dell'Erba, D.N., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P. (1998) Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems. *International Journal of Fracture*, 94, 89-101.
- Fairweather, G., Karageorghis, A. (1998) The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*, 9, 69-95.
- Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A. (2003) The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, 759-769.
- Godinho, L., António, J., Tadeu, A. (2001) 3D sound scattering by rigid barriers in the vicinity of tall buildings. *Applied Acoustics*, 62(11), 1229-1248.
- Godinho, L., António, J., Tadeu, A. (2002) Sound propagation around rigid barriers laterally confined by tall buildings. *Applied Acoustics*, 63(6), 595-609.
- Godinho, L., Tadeu, A., Branco, F.J. (2003) Wave scattering by infinite cylindrical shell structures submerged in a fluid medium. *Wave Motion*, 38(2), 131-149.
- Godinho, L., Tadeu, A., Simões, N. (2004) Study of transient heat conduction in 2.5D domains using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(6), 593-606.
- Godinho, L., Tadeu, A., Simões, N.A. (2006) Accuracy of the MFS and BEM on the analysis of acoustic wave propagation and heat conduction problems. Sladek Jan and Sladek Vladimir, editors. *Advances in Meshless Methods: Tech Science Press*.
- Godinho, L., Tadeu, A., Amado Mendes, P. (2007) Wave propagation around thin structures using the MFS. *Computers, Materials & Continua*, 5(2), 117-128.
- Godinho, L., Amado Mendes, P., Tadeu, A., Cadena-Isaza, A., Smerzini, C., Sánchez-Sesma, F.J., Madec, R., Komatitsch, D. (2009) Numerical simulation of ground rotations along 2D

- topographical profiles under the incidence of elastic plane waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(2B), 1147-1161.
- Guiggiani, M. (1998) Formulation and numerical treatment of boundary integral equations with hypersingular kernels. In: Sladek V, Sladek J, editors. *Singular Integrals in Boundary Element Methods*. Southampton and Boston: *Computational Mechanics Publications*.
- Huang, J.Y. (1995) Interaction of SH-waves with a finite crack in a half-space. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(2), 217-224.
- Ihlenburg, F., Germanischer, L. (1998) Finite Element analysis of acoustic scattering (Applied Mathematical Sciences). *Springer*.
- Kausel, E., Roesset, J.M. (1992) Frequency domain analysis of undamped systems. *The Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 118(4), 721-734.
- Kausel, E. (1994) Thin-layer method: Formulation in the time domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(6), 927-941.
- Koguchi, H., Watabe, H. (1997) Improving defects search in structure by boundary element and genetic algorithm scan method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 19, 105-116.
- Kulowski, A. (1985) Algorithmic representation of the ray tracing technique. *Applied Acoustics*, 18, 449-469.
- Lacerda, L.A., Wrobel, L.C., Mansur, W.J. (1997) A dual boundary element formulation for sound propagation around barriers over an infinite plane. *Journal of Sound and Vibration*, 202, 235-347.
- Leutenegger, T., Dual, J. (2002) Detection of defects in cylindrical structures using a time reverse method and a finite-difference approach. *Ultrasonics*, 40, 721-725.
- Manolis, G.D., Beskos, D.E., (1988) *Boundary Element Methods in Elastodynamics*. *Unwin Hyman (sold to Chapman and Hall)*, London.

- Pao, Y.H., Mow, C.C. (1973) Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane-Russak Inc., New York.
- Pointer, T., Liu, E., Hudson, J.A. (1998) Numerical modeling of seismic waves scattered by hydrofractures: application of the indirect boundary element method. *Geophysical Journal International*, 135, 289-303.
- Prosper, D., Kausel, E. (2001) Wave scattering by cracks in laminated media. *Proceedings of the International Conference on Computational Engineering and Science ICES'01*. Puerto Vallarta, Mexico.
- Richardson, J.D., Cruse, T.A. (1998) Nonsingular BEM for fracture modelling. *Computers and Structures*, 66(5), 695-703.
- Rudolphi, T.J. (1991) The use of simple solutions in the regularisation of hypersingular boundary integral equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 15, 269-278.
- Sánchez-Sesma, F.J. (1983) Diffraction of elastic waves by three dimensional surface irregularities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73, 1621-1636.
- Sánchez-Sesma, F.J., Iturrarán-Viveros, U. (2001) Scattering and diffraction of SH waves by a finite crack: an analytical solution. *Geophysical Journal International*, 145, 749-758.
- Savioja, L., Rinne, T., Takala, T. (1994) Simulation of room acoustics with a 3-D finite difference mesh. *Proceeding of the International Computer Music Conference 94*, Aarhus, Denmark, 463-466.
- Simões, N., Tadeu, A. (2005) 3D Transient heat transfer by conduction and convection across a 2D media using a Boundary Element Model. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 9(3), 221-234.
- Smyrlis, Y.S. (2006) The method of fundamental solutions: a weighted least-squares approach. *BIT Numerical Mathematics*, 46, 163-194.



- Song, K., Zhang, X., Lu, M. (2004) Meshless method based on collocation with consistent compactly supported radial basis functions. *Acta Mechanica Sinica*, 20(5), 551-557.
- Tadeu, A. (1992) Modelling and Seismic Imaging of Buried Structures. PhD Thesis, MIT, Cambridge.
- Tadeu, A., Santos, P., Kausel, E. (1999) Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements. Part I. SH wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23(8), 671-681.
- Tadeu, A., Kausel, E., Vrettos, C. (1996) Scattering of waves by subterranean structures via the boundary element method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 15(6), 387-397.
- Tadeu, A., Amado Mendes, P., António, J. (2006a) The simulation of 3D elastic scattering produced by thin rigid inclusions using the traction boundary element method. *Computers and Structures*, 84(31-32), 2244-2253.
- Tadeu, A., Amado Mendes, P., António, J. (2006b) 3D elastic wave propagation modelling in the presence of 2D fluid filled thin inclusions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(3), 176-193.
- Tadeu, A., António, J., Amado Mendes, P., Godinho, L. (2007) Sound pressure level attenuation provided by thin rigid screens coupled to tall buildings. *Journal of Sound and Vibration*, 304(3-5), 479-496.
- Tadeu, A., Antonio, J., Castro, I. (2010) Coupling the BEM/TBEM and the MFS for the numerical simulation of acoustic wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 405-416.
- Thompson, L.L. (2006) A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(3), 1315-1330.
- Trifunac, M.D. (1971) Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61, 1755-1770.

Watson, J.O. (1995) Singular boundary elements for the analysis of cracks in plane strain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 2389-2411.

Wong, H.L., Trifunac, M.D. (1974) Surface motion of semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH-waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 64, 1389-1403.

Wu, T.W., editor (2000) Boundary element acoustics - fundamentals and computer codes. *Southampton: WIT Press*.

# CAPÍTULO 3

---

## **3 ACOPLAMENTO ENTRE O BEM E O MFS NA MODELAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS ELÁSTICOS CONTENDO INCLUSÕES**

### **3.1 INTRODUÇÃO**

Nos sectores da engenharia automóvel, aeroespacial, civil, entre outros, a simulação numérica através de modelos computacionais, tem vindo a complementar, e mesmo a substituir, a necessidade da realização de ensaios laboratoriais em modelos em escala real ou em escala reduzida. O estudo da propagação de ondas em meios elásticos, contendo inclusões elásticas, inclusões rígidas, cavidades ou mesmo a existência de pequenos defeitos, tais como fissuras, com espessura reduzida ou tendencialmente nula, tem sido aprofundado em diversas áreas científicas relacionadas com a deteção, definição, localização e identificação de heterogeneidades (Amado Mendes e Tadeu, 2006).

Para a interpretação e exploração de muitas das técnicas usadas é necessária a compreensão dos fenómenos de propagação de ondas, gerados por uma fonte genérica, situada em determinado ponto do domínio, na proximidade de inclusões e heterogeneidades (Achenbach *et al.*, 1986; Huang, 1995; Tadeu *et al.*, 1996; Liu e Chen, 2001; Prosper, 2001; Achenbach, 2002; Tadeu *et al.*, 2002b; Godinho *et al.*, 2004; Santos e Tadeu, 2004). No presente capítulo, é apresentado o desenvolvimento e implementação de um conjunto de modelos/técnicas que podem auxiliar este tipo de análise.

Nos primeiros estudos para a determinação da propagação e a difração de ondas, foram analisados os movimentos oscilatórios em bacias aluviais com geometrias cilíndrica (Trifunac, 1971) e elíptica (Wong e Trifunac, 1974) provocados por fontes dinâmicas. Também foi estudada a propagação de ondas na presença de cavidades com geometria cilíndrica (Pao e Mow, 1973; Lee, 1977; Datta e Shah, 1982; Lee, 1988; Lee e Karl, 1992) e fissuras planas simples (Sánchez-Sesma e Iturrarán-Viveros, 2001), com recurso a soluções analíticas. As aproximações analíticas são conhecidas apenas para problemas com geometrias simples e regulares. Para os problemas mais reais é imperativa a utilização de métodos numéricos. Muitos esforços têm sido orientados nesse sentido, para o desenvolvimento de novas técnicas e esquemas numéricos implementados em modelos computacionais.

De entre as técnicas numéricas mais utilizadas (e populares) ao longo das últimas décadas destacam-se os seguintes métodos: o Método das Diferenças Finitas (Stephen *et al.*, 1985; Leslie e Randall, 1992; Yoon e McMechan, 1992; Savioja *et al.*, 1994; Cheng *et al.*, 1995), o Método dos Elementos Finitos (Norris e Sinha, 1983; Ellefsen, 1990; Sinha *et al.*, 1991; Ihlenburg e Germanischer, 1998, Thompson, 2006), Formulações Integrais de Fronteira (Bouchon e Schmitt, 1989), o Método dos Elementos de Fronteira (Banerjee e Butterfield, 1981; Brebbia *et al.*, 1984; Bouchon, 1993; Dong *et al.*, 1995; París e Cañas, 1997), o Método das Soluções Fundamentais (Chen *et al.*, 2008), *Thin Layer Method* (kausel, 1994), *Ray Tracing Technique* (Kulowski, 1985) e vários métodos híbridos, que combinam mais do que uma técnica (White e Sengbush, 1963; Ben-Menahem e Kostek, 1990; De Hoop *et al.*, 1994; Koguchi e Watabe, 1997; Richardson e Cruse, 1998; Liu e Chen, 2001; Leutenegger e Dual, 2002; Liu, 2002; Liu *et al.*, 2002; Weifang *et al.*, 2003; Galán e Abascal, 2004; Mahapatra e Gopalakrishnan, 2004).

O Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method* – FEM) é atualmente um dos métodos numéricos mais utilizados por investigadores e tem dado origem a inúmeros softwares comerciais. Este método pode ser usado para geometrias mais complexas, embora tenha a necessidade da discretização completa do domínio espacial a ser modelado. Este facto torna este método difícil de aplicar em modelos com uma escala muito grande, como aqueles que envolvem meios infinitos, ou mesmo para uma análise do sistema em frequências altas, a menos que sejam implementadas algumas simplificações.

Outro método muito utilizado, em especial em problemas de mecânica da fratura, em problemas elásticos lineares e problemas não lineares (Aliabadi, 1997), é o Método dos Elementos de Fronteira (BEM) que se revela como uma das técnicas numéricas mais eficientes e precisas, na avaliação da concentração de tensões e deslocamentos. Este método é também o mais adequado para a modelação da propagação de ondas em campo infinito, em sistemas homogêneos não confinados, semi-infinitos ou estratificados, contendo fronteiras irregulares e inclusões com diferentes geometrias, pois as condições de campo infinito são automaticamente satisfeitas e só os elementos pertencentes às interfaces entre os diversos domínios e as múltiplas inclusões devem ser discretizados. Isto conduz a uma das vantagens deste método em comparação com o Método dos Elementos Finitos, sendo possível reduzir a dimensão dos problemas.

Consequentemente, apenas as linhas das fronteiras das heterogeneidades são discretizadas nos problemas bidimensionais (2D), e nos problemas tridimensionais (3D) torna-se necessário discretizar apenas a superfície dessas heterogeneidades. Outras vantagens do BEM são a facilidade com que aborda as geometrias irregulares (por oposição ao Método das Diferenças Finitas) e a precisão de resposta, sem necessitar de discretizar os domínios interiores (Manolis e Beskos, 1988; Stamos e Beskos, 1996; António e Tadeu, 2002; Tadeu *et al.*, 2002a; Tadeu e Godinho, 2003). Apesar do BEM exigir apenas a discretização dos elementos de fronteira, do ponto de vista matemático é um método complexo, necessitando do conhecimento prévio das soluções fundamentais apropriadas (as funções de Green). A obtenção destas soluções é difícil, para sistemas não lineares ou heterogêneos, necessitando da resolução de integrais por via analítica ou numérica, por forma a garantir a sua eficiência. Além disso, para um determinado nível de precisão, o número dos elementos de fronteira depende da frequência de excitação, sendo necessária a discretização de um maior número de elementos de fronteira quanto maior é a frequência de análise. A obtenção das repostas em frequências muito altas, conduz em geral a um custo computacional excessivo.

Na presença de descontinuidades muito finas, tais como fissuras (com espessura próxima de zero), o BEM conduz ao aparecimento de singularidades na matriz do sistema de equações e, consequentemente, às degenerações na formulação numérica. Sendo assim, uma das formulações do Método dos Elementos de Fronteira adotada na análise dos problemas com fissuras designa-se por formulação dual deste método (Dual Boundary Element Method – DBEM). Quando os problemas de mecânica da fratura começaram a ser abordados, tornou-se necessária a alteração da formulação original BEM em deslocamentos, para produzir uma formulação em trações. Contudo, as formulações híbridas do BEM não têm de ser usadas, necessariamente, para tais problemas (Cruse, 1987a)). Foram obtidos bons resultados para exemplos bidimensionais em problemas elastodinâmicos e problemas da junção de vários meios, envolvendo fissuras em regime estacionário, em deslocamentos baseados na formulação BEM que foram utilizados através de uma transformada do domínio, com um especial tratamento das fissuras (Dineva e Manolis, 2001).

O método DBEM pode ser aplicado a fissuras com uma determinada geometria, sujeitas a diferentes tipos de carregamentos, em que numa das superfícies são aplicadas cargas monopolares, correspondendo à formulação por uma equação integral de fronteira em deslocamentos, enquanto nas superfícies oposta são aplicadas cargas dipolares correspondentes a uma formulação de equação integral em trações (Aliabadi, 1997; Dell’erba *et al.*, 1998; Chen e Hong, 1999; Aliabadi, 2002). Quando a equação integral de fronteira clássica é derivada, surge a formulação hipersingular do Método dos Elementos de Fronteira, existindo, assim, a dificuldade em proceder à integração de funções integrandas, que são fortemente singulares e hipersingulares. Têm sido sugeridas várias possibilidades para fazer face a tal problema (Sladek e Sladek, 1984; Budreck e Achenbach, 1988; Young, 1992; Boykov *et al.*, 2006). No caso particular da propagação de ondas em 2D e 2.5D, em meios elásticos e acústicos, o resultado da hipersingularidade de Kernels

pode ser calculado analiticamente através da definição do equilíbrio dinâmico de semicilindros sobre os elementos de fronteira e a discretização de inclusões finas (Tadeu *et al.*, 2007).

No seguimento desta problemática, em torno da modelação de heterogeneidades com espessura reduzida, foi proposta noutros trabalhos a adoção da equação integral de fronteira estabelecida em trações, através dos seguintes Métodos dos Elementos de Fronteira formulados em trações: *Traction Boundary Integral Equation Method* (TBIEM) e *Traction Boundary Element Method* (TBEM) (Cruse, 1987b; Sládek e Sládek, 1987; Takakuda, 1983; Prosper, 2001; Prosper e Kausel, 2001, Tadeu *et al.*, 2006). Prosper (2001) e Prosper e Kausel (2001) modelaram a propagação de ondas, em meio elástico e bidimensional, na presença de fissuras (vazias) horizontais e planas, com espessura nula. Estes métodos assentam num princípio em que a discretização da fissura se faz, apenas, através de uma única linha aberta dos elementos de fronteira carregados com cargas dipolares, ou seja, usando apenas tensões na equação integral dos elementos de fronteira. Tadeu *et al.* (2001), de forma a evitar resultados incorretos, aplicaram-se em problemas acústicos e elásticos, no domínio da frequência, a combinação das duas equações integrais de fronteira, uma formulação em deslocamentos e a outra formulação com a respetiva derivada ao longo da fronteira, segundo a direção normal.

Recentemente, utilizou-se uma técnica numérica diferente, denominada como a técnica de *meshless*. Esta não exige a discretização do domínio nem a discretização da fronteira das inclusões, tornando-se, assim, um método numérico bastante popular (Fairweather *et al.*, 2003; Godinho, 2009). A origem do Método das Soluções Fundamentais, *Method Fundamental Solution* (MFS), é baseada no método indireto BEM (Jaswon e Symm, 1977) e na definição geral das funções de Green (Greenberg, 1971). Este método parece ser particularmente eficaz para estudar a propagação de ondas, uma vez que elimina a complexidade matemática apresentada pelo BEM e oferece soluções aceitáveis, com um menor custo computacional (Godinho *et al.*, 2006). A solução proposta pelo MFS é calculada usando uma combinação linear das soluções fundamentais (funções de Green descritas por Tadeu *et al.*, 2009), gerada por um conjunto de fontes virtuais distribuídas, ao longo da fronteira das superfícies, e utiliza uma técnica de decomposição do domínio para simular o campo incidente e o campo refletido, produzido pelas heterogeneidades inseridas nesse domínio. Para evitar as singularidades, as respetivas fontes virtuais são colocados a uma determinada distância da fronteira dessas superfícies. Com o uso de soluções fundamentais, permite que a solução final verifique as condições de fronteira automaticamente. Ainda assim, a utilização deste método tem as suas próprias limitações, como, por exemplo, quando se tenta modelar inclusões finas tais como fissuras, ou mesmo, inclusões com fronteiras sinuosas (Alves e Leitão, 2006). Apesar disso, Godinho *et al.* (2007), através de uma técnica de decomposição do domínio, utilizaram este método com sucesso para o estudo de propagação de ondas, num meio acústico e elástico, na presença de inclusões finas.

Salienta-se que a grande generalidade dos trabalhos publicados, no domínio da modelação da propagação de ondas em meios elásticos, assume que o interior da fissura (vazia) possui um campo de tensões nulas, sendo modeladas bidimensionalmente e, em alguns casos, em 3D.

Atualmente, os investigadores têm tentado melhorar os esquemas numéricos, com vista a acelerar a análise e garantir a eficiência, precisão, estabilidade e flexibilidade dos métodos enunciados anteriormente. Numa tentativa de utilizar as vantagens das técnicas descritas anteriormente, utilizam diferentes formas de acoplamento entre os diversos métodos, de forma a reduzir as limitações e aproveitar as vantagens de cada método individualmente. O acoplamento entre os Métodos dos Elementos de Fronteira e dos Elementos Finitos tem sido frequentemente utilizado, onde cada técnica é aplicada a diferentes subdomínios (Soares *et al.*, 2007; Warszawski *et al.*, 2008; He *et al.*, 2011), sendo posteriormente combinados.

No capítulo anterior, propôs-se uma técnica de acoplamento entre um método sem malha e uma formulação BEM. A análise transiente da propagação de ondas acústicas na presença de múltiplas inclusões (exibindo um determinado meio fluido no seu interior) e defeitos (com espessura reduzida ou mesmo nula), foi abordada utilizando a técnica de acoplamento entre o Método das Soluções Fundamentais e a formulação original e/ou em trações do Método dos Elementos de Fronteira. Os subdomínios foram analisados separadamente pelos vários métodos e posteriormente foram acoplados através da imposição de condições de fronteira necessárias (Tadeu *et al.*, 2010).

Neste capítulo, pretende-se estender esse trabalho através do desenvolvimento de uma formulação de acoplamento entre o BEM e o MFS, para simular a propagação de ondas em meios elásticos na presença de inclusões, exibindo um qualquer material elástico, um material rígido ou estando na presença de uma cavidade, e na presença de heterogeneidades finas (com espessura tendencialmente nula). O problema é formulado no domínio da frequência, em que o domínio físico fica dividido em vários subdomínios. As ondas geradas pelas fontes virtuais usadas pelo Método das Soluções Fundamentais são vistas como ondas incidentes para o Método dos Elementos de Fronteira, enquanto o BEM considera os pontos de colocação (inseridos ao longo das superfícies) para impor as condições de fronteira nas superfícies modeladas pelo MFS, como recetores (Castro e Tadeu, 2012). A abordagem é implementada para problemas gerais de 2.5D, ou seja, para problemas constantes segundo uma direção ( $z$ ).

Nas secções seguintes a formulação proposta é aplicada a várias inclusões, embebidas num meio elástico infinito, que poderão ser elásticas, rígidas ou cavidades. Para tal são impostas condições de continuidade em deslocamentos e tensões, deslocamentos nulos ou tensões nulas, respetivamente, na fronteira das inclusões. Apresentam-se os sistemas finais de equações para os vários modelos de acoplamento, que são verificados em comparação com soluções obtidas pela formulação BEM, usada como solução de referência. Apresenta-se, depois, a forma como são obtidas as respostas no domínio do tempo por meio de

transformadas inversas de Fourier (rápida). Finalmente, a aplicabilidade do método proposto é demonstrado por meio de um exemplo numérico que simula a propagação de ondas num meio elástico, geradas por uma fonte dilatacional cilíndrica, quando uma fissura vazia é colocada na proximidade de uma inclusão elástica. Este exemplo também é utilizado para avaliar a eficiência computacional da nova formulação de acoplamento, através da determinação do tempo de cálculo, utilizando o método proposto, e da sua comparação com o tempo de cálculo requerido pela formulação BEM e MFS.

## 3.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considerem-se duas inclusões cilíndricas irregulares e bidimensionais, 1 e 2, com comprimento infinito, num meio elástico, espacialmente uniforme e infinito (Meio 1), com massa volúmica  $\rho_1$  (ver Figura 3.1). Os Meios 2 e 3, dentro das inclusões 1 e 2, apresentam massas volúmicas de  $\rho_2$  e  $\rho_3$ , respetivamente.  $\alpha_m$  é a velocidade de propagação das ondas P (ondas dilatacionais) e  $\beta_m$  é a velocidade de propagação das ondas S (ondas de corte) de cada meio  $m$ . Considere-se, ainda, que este sistema está sujeito a uma fonte pontual dilatacional 3D, localizada em  $(x_s, y_s)$  cuja amplitude varia sinusoidalmente na terceira dimensão ( $z$ ).

No domínio da frequência, o campo de ondas incidente, gerado por essa fonte que oscila num meio uniforme elástico, sem amortecimento intrínseco, não confinado, pode ser expresso por meio do potencial dilatacional clássico:

$$\phi_{\text{inc}}(\omega, x, y, k_z) = \frac{-iA}{2} H_0 \left( k_{\alpha_1} \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2} \right), \quad (3.1)$$

em que  $H_n(\dots)$  representa as funções de Hankel do segundo tipo e de ordem  $n$ ,  $i = \sqrt{-1}$  e  $k_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha_1^2} - k_z^2}$ , com  $\text{Im}(k_{\alpha_1}) < 0$ , onde  $k_z$  é o número de onda axial e para uma frequência de análise  $\omega$ .

Assumindo a existência de um conjunto infinito de fontes virtuais ( $m$ ), igualmente espaçadas ao longo da direção longitudinal  $z$ , o campo de ondas incidente, gerado pela fonte 3D, pode ser aproximado por um somatório discreto de campos 2D,

$$\phi_{\text{inc}}(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L_{\text{vs}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{\text{inc}}(\omega, x, y, k_{zm}) e^{-ik_{zm}z}, \quad (3.2)$$



onde  $L_{vs}$  representa o espaçamento entre as várias fontes virtuais. Este valor deve ser suficientemente elevado de forma a evitar perturbações na resposta pelas fontes adjacentes (Bouchon e Aki, 1977), e  $k_{zm}$

representa distintos números de onda,  $k_{zm} = \frac{2\pi}{L_{vs}} m$ .

Para o caso de problemas em 2.5D, a geometria mantém-se constante ao longo de uma direção. Nesse sentido, o campo de ondas tridimensional pode exprimir-se como a soma de problemas bidimensionais, correspondentes a cargas lineares harmónicas cuja amplitude varia sinusoidalmente ao longo daquela direção. Aquele somatório converge e pode ser aproximado por um número finito de termos (Tadeu e Kausel, 2000), com  $m = -M, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M$ ,

$$\phi_{inc}(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L_{vs}} \sum_{m=-M}^M \phi_{inc}(\omega, x, y, k_{zm}) e^{-ik_{zm}z}, \quad (3.3)$$

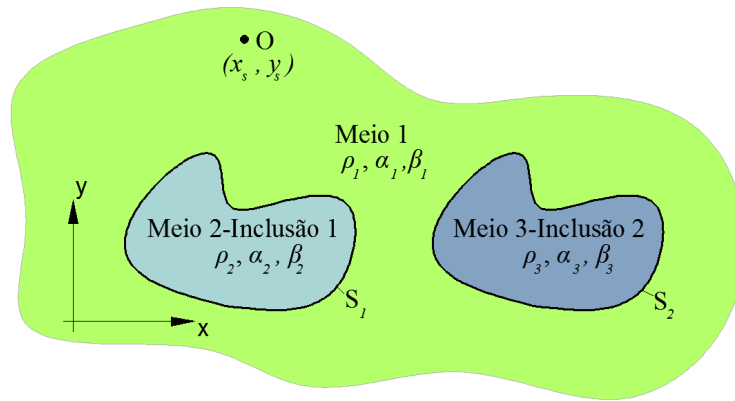


Figura 3.1: Representação esquemática com definição genérica da geometria do problema bidimensional, com inclusões enterradas num meio elástico homogêneo infinito.

É possível demonstrar que este somatório discreto corresponde a considerar um conjunto infinito de fontes virtuais, espaçadas periodicamente ao longo da direção  $z$ , com uma distância  $L_{vs}$ .

Na secção seguinte, descreve-se a formulação de acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira e o Método das Soluções Fundamentais para a modelação da propagação de ondas em meios elásticos na presença de inclusões de diferentes tipos: inclusões totalmente preenchidas por um material sólido, material rígido e cavidades.

### 3.3 FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO DE INTEGRAIS DE FRONTEIRA EM MEIOS ELÁSTICOS

Nesta secção, são apresentadas as equações, para determinar a propagação de ondas num meio elástico, geradas por uma fonte dilatacional situada na vizinhança, mas fora de duas inclusões enterradas com formas irregulares e homogéneas. Para a modelação do sistema apresentado na Figura 3.1 é utilizada uma formulação de acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira, para modelar a fronteira da primeira inclusão, e o Método das Soluções Fundamentais, para modelar a fronteira da segunda inclusão. A discretização considerada é ilustrada na Figura 3.2. Posteriormente, o método proposto é aplicado para um determinado exemplo numérico e comparado com os outros métodos numéricos individualmente.

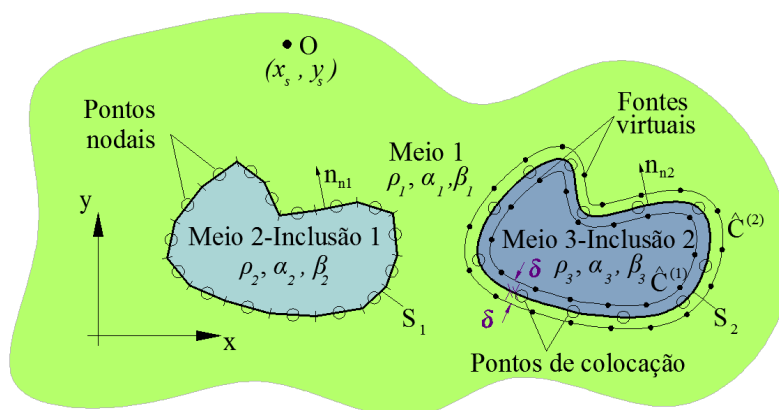


Figura 3.2: Discretização do sistema através da formulação BEM para a primeira inclusão e MFS para a segunda, ambas as inclusões são preenchidas por um meio elástico (a direção normal,  $n_{n1}$  e  $n_{n2}$  representadas, corresponde à equação estabelecida no domínio exterior às inclusões): elementos de fronteira, posição das fontes virtuais e pontos de colocação.

#### 3.3.1 Formulação de acoplamento (BEM/MFS)

##### 3.3.1.1 Meio elástico infinito com inclusões elásticas enterradas

Considere-se um meio elástico linear e homogéneo, de extensão infinita, onde se inserem duas inclusões elásticas com geometria bidimensional limitadas pelas fronteiras  $S_1$  e  $S_2$ . Este sistema físico encontra-se sob a ação de carregamentos correspondentes a cargas lineares harmónicas sinusoidais (segundo  $z$ ), localizadas no meio elástico exterior de propagação em coordenadas  $(x_s, y_s)$ .

Considerando a Inclusão 1, sujeita a um campo de deslocamentos incidente, dado por  $u_{inc}$ , a equação integral do elemento de fronteira em termos de deslocamentos pode ser deduzido, pela aplicação do teorema da reciprocidade (Manolis e Beskos, 1988), levando a:

a) No domínio exterior à Inclusão 1 (Meio 1):

Considerando o caso específico de uma inclusão elástica, Inclusão 1, modelada através do Método dos Elementos de Fronteira, ao longo da qual são impostas as condições de fronteira, as continuidades dos deslocamentos e das tensões, e, aplicando à equação integral, num ponto sobre a fronteira desta inclusão, obtém-se a expressão vetorial resultante para o estudo da propagação de ondas num meio elástico infinito, na presença de uma inclusão elástica, quando o sistema é perturbado por um campo de ondas harmónicas incidente:

$$c_{ij} u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega) \quad (3.4)$$

Nesta equação,  $i, j=1, 2$  representam, respetivamente, as direções normal e tangencial relativa à superfície da inclusão, enquanto  $i, j=3$  corresponde à direção constante  $z$ . Nestas equações, o índice 1 corresponde ao domínio exterior, Meio 1;  $\mathbf{n}_{n1}$  é o vetor unitário, no sentido exterior, normal ao longo da fronteira  $S_1$ , localizado em  $(x, y)$  e definido pelo vetor  $\mathbf{n}_{n1} = (\cos \theta_{n1}, \sin \theta_{n1})$ .  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega)$  definem as soluções fundamentais em termos de deslocamentos e para as tensões (funções de Green), na direção  $j$  da superfície  $S_1$  em  $(x, y)$ , causada por um carregamento virtual num ponto unitário, na direção  $i$  aplicado no ponto de aplicação,  $(x_0, y_0)$ . O efeito do campo de ondas incidentes no ponto  $(x, y)$  provocado por uma fonte dilatacional localizada em  $(x_s, y_s)$ , em termos de deslocamentos são definidos por  $u_j^{(1)}(x, y, \omega)$  na direção  $j$  em  $(x, y)$ , enquanto  $t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega)$  especifica as tensões nodais na direção  $j$  na fronteira em  $(x, y)$ .  $u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega)$  representa em termos de deslocamentos o campo incidente em  $(x_0, y_0)$  ao longo da direção  $i$ , quando a fonte é localizada em  $(x_s, y_s)$ . O coeficiente  $c_{ij}$  resulta da aplicação da equação integral sobre um ponto da fronteira, dependendo da geometria local desta, tomando um valor igual a  $\delta_{ij}/2$ , com  $\delta_{ij}$  a função delta de Kronecker, quando a fronteira é suave (ou seja, em que a função representativa da geometria apresenta derivadas contínuas).

Para o problema em análise, as soluções fundamentais  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_n, x_0, y_0, \omega)$  são já conhecidas (Tadeu e Kausel, 2000), correspondentes aos deslocamentos segundo as direções  $x, y, z$ , gerados por cargas unitárias aplicadas ao longo das mesmas direções em meios elásticos não confinados. Estas funções de Green são apresentadas no Apêndice A.2 deste capítulo, em coordenadas cartesianas, sendo possível a sua combinação para obter as soluções fundamentais dos deslocamentos no sistema local de coordenadas junto à fronteira da inclusão. De modo análogo, após adequada derivação, em ordem a  $x, y, z$ , do potencial dilatacional acima definido pela equação (3.1), combinam-se os deslocamentos (segundo as direções  $x, y, z$ ) gerados pelo campo de ondas incidente, por forma a obter o campo de deslocamentos segundo as direções normal e tangencial à fronteira  $S_1$ .

A equação integral de fronteira (3.4) ainda não tem em consideração a presença da inclusão vizinha, Inclusão 2, que se pretende que seja modelada por outra formulação, o MFS. Este método numérico assume que a resposta desta inclusão vizinha é encontrada, como uma combinação linear das soluções fundamentais, simulando o campo de deslocamentos gerado por dois conjuntos de  $NS$  fontes virtuais. Estas fontes virtuais são distribuídas ao longo da superfície da inclusão  $S_2$  e são distribuídas de uma determina distância  $\delta$  da fronteira, para o interior e para o exterior da inclusão (linhas  $\hat{C}^{(1)}$  e  $\hat{C}^{(2)}$ , respetivamente, na Figura 3.2), a fim de evitar singularidades. As fontes que estão situadas no interior da inclusão têm amplitudes desconhecidas  $a_{nj,n\_ext}^{(2)}$ , enquanto aquelas que estão localizadas fora da inclusão, no exterior, têm amplitudes desconhecidas  $a_{nj,n\_int}^{(2)}$ . No exterior e interior da inclusão, em meios elásticos, os campos de deslocamentos são dados por:

$$\left. \begin{aligned} u_i^{(1)}(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x, y, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \\ u_i^{(3)}(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_int}^{(2)} G_{ji}^{(3)}(x, y, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega) \end{aligned} \right\}, \quad (3.5)$$

onde  $G_{ji}^{(1)}(x, y, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)$  e  $G_{ji}^{(3)}(x, y, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega)$  são as soluções fundamentais (Funções de Green), representando os deslocamentos nos pontos  $(x, y)$  nos meios 1 e 3, na direção  $i$ , causado por um carregamento unitário na direção  $j$  aplicadas na posição  $(x_{n\_ext}, y_{n\_ext})$  e  $(x_{n\_int}, y_{n\_int})$ .  $n\_ext$  e  $n\_int$  são os índices que identificam o número de fontes virtuais colocadas ao longo das linhas  $\hat{C}^{(1)}$  e  $\hat{C}^{(2)}$ , respetivamente.

O campo de deslocamentos gerado por esta segunda inclusão pode ser visto como um campo incidente que atinge a primeira inclusão. Neste sentido, a equação (3.4) necessita de ser modificada de acordo com a expressão seguinte,

$$\begin{aligned}
c_{ij} u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = & \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\
& - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega), \\
& + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \omega)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

b) No domínio interior da Inclusão 1 (Meio 2):

Considerando, novamente, o caso específico da inclusão elástica, modelada através do Método dos Elementos de Fronteira, ao longo da qual são impostas as condições de fronteira, a continuidade dos deslocamentos e de tensões. A aplicação da equação integral, num ponto sobre a fronteira da inclusão, permite obter a seguinte equação que determina o campo de deslocamentos no interior dessa inclusão elástica:

$$\begin{aligned}
c_{ij} u_i^{(2)}(x_0, y_0, \omega) = & \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) G_{ij}^{(2)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\
& - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(2)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) ds
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Todas as variáveis da equação anterior foram descritas anteriormente, com o índice 2 a corresponder ao domínio interior da Inclusão 1, Meio 2. Refira-se apenas a mudança de direção do vetor unitário,  $\mathbf{n}_{n1}$ , aplicado na fronteira dessa inclusão, apontando agora para o seu interior.

c) No domínio exterior e interior da Inclusão 2 (Meio 1 e 3):

Como se referiu anteriormente, a Inclusão 2 é modelada com recurso ao Método das Soluções Fundamentais, na qual não é necessário discretizar o domínio nem discretizar a fronteira da inclusão, bastando apenas combinar as soluções fundamentais geradas por um conjunto de fontes virtuais.

A determinação das amplitudes desconhecidas nos pontos virtuais de carregamento  $a_{nj, n_{ext}}^{(2)}$  e  $a_{nj, n_{int}}^{(2)}$  é conseguido através da imposição da continuidade dos deslocamentos e tensões na fronteira  $S_2$ , pertencente à fronteira da Inclusão 2, ao longo dos  $NS$  pontos de colocação  $(x_{col}, y_{col})$ . Estas condições têm de ser verificadas de modo a considerar o campo incidente gerado pela Inclusão 1 e pela fonte pontual dilatacional.

Assim, a equação de deslocamentos na fronteira da Inclusão 2, é dada por:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \boldsymbol{\omega}) G_{ij}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds \\
& - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \boldsymbol{\omega}) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds + u_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) \\
& + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{int}}^{(2)} G_{ji}^{(3)}(x_{col}, y_{col}, x_{n_{int}}, y_{n_{int}}, \boldsymbol{\omega})
\end{aligned} \quad , \quad (3.8)$$

A partir desta equação de deslocamentos é possível determinar a equação das tensões, dadas por:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \boldsymbol{\omega}) \bar{G}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds \\
& - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \boldsymbol{\omega}) \bar{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds + \bar{u}_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) + \\
& \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} \bar{G}_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{int}}^{(2)} \bar{G}_{ji}^{(3)}(x_{col}, y_{col}, -\mathbf{n}_{n2}, x_{n_{int}}, y_{n_{int}}, \boldsymbol{\omega})
\end{aligned} \quad , \quad (3.9)$$

As funções de Green  $\bar{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  e  $\bar{G}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  são definidas pela aplicação do operador em trações em  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  e  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$ , que pode ser obtido através da combinação das derivadas das funções de Green, em ordem a  $x$ ,  $y$  e  $z$ , de modo a obter as tensões (ver Apêndice B). Nestas equações,  $\mathbf{n}_{n2}$  é o valor unitário normal, apontando para o exterior da superfície  $S_2$ , nos pontos de colocação  $(x_{col}, y_{col})$ .

d) Sistema final de equações:

A solução global é obtida pela resolução das equações (3.6) a (3.9). Isto requer a discretização da superfície  $S_1$ , pertencente à Inclusão 1, em  $N$  elementos de fronteira retos, com um ponto nodal ao centro de cada elemento. Para a segunda inclusão é necessária a colocação de  $NS$  fontes virtuais, ao longo do exterior e interior da inclusão, com um determinado espaçamento  $\delta$  da fronteira (conforme esquematizado na Figura 3.2).

As integrações descritas nas equações (3.6) a (3.9) tornam-se singulares, quando o elemento a ser integrado é o próprio elemento carregado. A sua integração é realizada de forma analítica, seguindo as expressões de Tadeu *et al.*, 1999a e Tadeu *et al.*, 1999b. Quando o elemento integrado é diferente do elemento carregado, o esquema de integração pela quadratura de Gauss é utilizado.

As equações integrais finais são alteradas e combinadas de modo a impor a continuidade de deslocamentos e tensões ao longo das fronteiras das duas inclusões. Aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada, obtém-se um sistema de  $[(6NS + 6N) \times (6NS + 6N)]$  equações, formado pelas equações integrais de fronteira.

A resolução deste sistema de equações fornece os deslocamentos e tensões nodais ao longo da fronteira  $S_1$  e as amplitudes inicialmente desconhecidas,  $a_{nj,n\_ext}^{(2)}$  e  $a_{nj,n\_int}^{(2)}$ . Com o conhecimento destes valores, é possível determinar o campo de deslocamentos em qualquer ponto no domínio do meio elástico exterior e em qualquer ponto interior das inclusões.

### 3.3.1.2 Meio elástico infinito com inclusões rígidas enterradas

Considere-se o caso apresentado inicialmente, em que as inclusões enterradas no meio elástico infinito apresentam agora um material rígido, no seu interior. Sendo assim, tem de se garantir os deslocamentos nulos nas superfícies de ambas as inclusões,  $S_1$  e  $S_2$ . A equação integral de fronteira, no domínio exterior à Inclusão 1, equação (3.6), é então simplificada:

$$0 = \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \boldsymbol{\omega}) G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \boldsymbol{\omega}) ds + u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}) \quad (3.10)$$

A imposição de deslocamentos nulos, na equação integral de fronteira, no domínio da Inclusão 2, leva à simplificação da equação (3.8):

$$\sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \boldsymbol{\omega}) G_{ij}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds + u_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (3.11)$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (localizados ao longo da linha  $\hat{C}^{(1)}$ ), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais (3.10) e (3.11) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, deslocamentos nulos, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada.

Obtém-se, assim, um sistema de  $[(3NS + 3N) \times (3NS + 3N)]$  equações.

### 3.3.1.3 Meio elástico infinito com inclusões vazias/cavidades enterradas

Considere-se, novamente, o caso ilustrado inicialmente (ver Figura 3.1), em que as inclusões enterradas no meio elástico infinito são apresentadas como inclusões vazias ou também designadas como cavidades. Sendo assim, têm de se impor tensões nulas nas superfícies das inclusões,  $S_1$  e  $S_2$ . A equação integral de fronteira, no domínio exterior à Inclusão 1, equação (3.6), é simplificada:

$$c_{ij} u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \omega) \quad (3.12)$$

A imposição de tensões nulas, na equação integral de fronteira, no domínio da Inclusão 2, leva à simplificação da equação (3.9):

$$- \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) \bar{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega) ds + \bar{u}_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} \bar{G}_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \omega) = 0 \quad (3.13)$$

Da mesma forma que foi descrito no capítulo anterior, a solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície  $S_2$  é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais, equações (3.12) e (3.13), são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, tensões nulas, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se assim, um sistema de  $[(3NS + 3N) \times (3NS + 3N)]$  equações.

### 3.3.1.4 Meio elástico infinito com inclusões elástica e rígida

Considerando o sistema da Figura 3.1, em que a primeira inclusão, embebida no meio elástico infinito, exibe no seu interior um meio elástico, enquanto a segunda se considera como uma inclusão rígida. São garantidas as continuidades dos deslocamentos e das tensões na superfície da primeira inclusão,  $S_1$ , que é



modelada com auxílio ao Método dos Elementos de Fronteira. Para a segunda inclusão, que é modelada com recurso ao Método das Soluções Fundamentais, são impostos deslocamentos nulos na superfície da inclusão,  $S_2$ . As equações integrais de fronteira, no domínio da Inclusão 1, equação (3.6) e (3.7), são mantidas. A imposição de deslocamentos nulos, na equação integral de fronteira, no domínio da Inclusão 2, leva à simplificação da equação (3.8),

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_{ij}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \omega) ds \\ & - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_{col}, y_{col}, \omega) ds + u_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, x_s, y_s, \omega), \\ & + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais (3.6), (3.7) e (3.14) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se, assim, um sistema de  $[(3NS + 6N) \times (3NS + 6N)]$  equações.

Outras combinações de tipos de inclusões podem ser resolvidas mediante a simplificação das equações (3.6) a (3.9) de acordo com as condições de fronteira necessárias.

### 3.3.2 Formulação de acoplamento (TBEM/MFS)

#### 3.3.2.1 Meio elástico infinito com inclusões elásticas enterradas

Considere-se a Figura 3.1 na qual existe um meio elástico linear, homogéneo e infinito, mas, agora, considerando que uma das inclusões apresenta uma geometria fina, preenchida por um material elástico, a qual está inserida nesse meio. Para a resolução deste problema propõe-se um método de acoplamento, na qual entra a formulação hipersingular do Método dos Elementos de Fronteira (TBEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS), capaz de resolver problemas de modelação da propagação de ondas em meios elásticos infinitos, na presença de inclusões finas preenchidas por material sólido, cuja geometria se mantém constante ao longo de uma direção longitudinal ( $z$ ).

Para ultrapassar as limitações apresentadas pelo BEM, para a resolução de um sistema, incorporando inclusões finas (Tadeu *et al.*, 1999a; Tadeu *et al.*, 1999b), procede-se à derivada das equações integrais em deslocamentos da formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira e, combinando-as segundo a normal ao ponto de colocação, de acordo com a lei de Hooke, deduz-se a formulação hipersingular do Método dos Elementos de Fronteira (Hong e Chen, 1988, Silveira *et al.*, 1998, Prosper, 2001). Para situações em que são apresentados sistemas que contenham, para além das heterogeneidades, inclusões irregulares, pode-se criar uma formulação mais eficaz e eficiente. Para tal o TBEM pode ser acoplado com o Método das Soluções Fundamentais, em que o TBEM pode ser formulado através da aplicação de cargas dipolares, em vez de cargas monopolares.

Seguindo estes pressupostos e considerando o exemplo anterior, em que a primeira inclusão é modelada com TBEM e a segunda com MFS, a equação referente ao domínio exterior da primeira inclusão, equação anterior (3.6), é substituída para dar lugar à equação em tensões seguinte,

$$\begin{aligned}
a_{ij}u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) + c_{ij}t_i^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n1}, \omega) &= \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds \\
&- \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) \overline{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{-inc}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega), \\
&+ \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n\_ext}^{(2)} \overline{G}_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

No que diz respeito à equação integral referente ao domínio interior da inclusão modelada com o TBEM, definida anterior pela equação (3.7), é substituída pela equação,

$$\begin{aligned}
a_{ij}u_i^{(2)}(x_0, y_0, \omega) + c_{ij}t_i^{(2)}(x_0, y_0, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) &= \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_{ij}^{(2)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds \\
&- \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(2)}(x, y, \omega) \overline{H}_{ij}^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Como foi observado por Guiggiani (1998), o coeficiente  $a_{ij}$ , depende da geometria local junto do ponto de colocação sendo nulo para elementos de fronteira retilíneos. O fator  $c_{ij}$  e os vetores unitários  $\mathbf{n}_{n1}$  e  $\mathbf{n}_{n2}$  são constantes, conforme definidos anteriormente.

Para a formulação de acoplamento entre o TBEM (para a primeira inclusão) e o MFS (para a segunda inclusão) as equações (3.8) e (3.9) referentes às equações integrais da superfície  $S_2$  são mantidas. As funções de Green para este método estão apresentadas no Apêndice B deste capítulo.

As soluções destas equações são definidas por discretização da superfície da fronteira ( $S_1$ ) em  $N$  elementos de fronteira retilíneos, com um ponto nodal no meio de cada elemento. As integrações das equações (3.15) e (3.16) são realizadas através de uma quadratura de Gauss quando o elemento a ser integrado não é o elemento carregado. Quando o elemento a ser integrado é o próprio elemento carregado, os integrais tornam-se hipersingulares. Numa abordagem indireta a este problema, é a utilização de uma solução analítica para os integrais hipersingulares. Esta consiste em definir o equilíbrio dinâmico de um semicilindro limitado inferiormente por cada um dos elementos de fronteira (Tadeu *et al.*, 1999a; Tadeu *et al.*, 1999b).

Estas equações e as equações anteriormente definidas (3.8) e (3.9), em conjunto com a aplicação de condições fronteira que especificam, ao longo das fronteiras, a continuidade de deslocamentos e tensões entre os vários meios elásticos, permitem estabelecer um sistema de  $[(6NS + 6N) \times (6NS + 6N)]$  equações lineares. As suas incógnitas são as componentes dos deslocamentos e das tensões nos nós que discretizam aquelas fronteiras.

A presente abordagem, segundo a qual o TBEM é formulado em termos de descolamentos e de tensões, supera a dificuldade de um corpo esbelto, gerado pela formulação clássica do BEM. A aplicação direta deste método hipersingular permite, por exemplo, que uma fissura vazia, rígida ou com espessura tendencialmente nula, possa ser modelada usando uma única linha aberta de elementos de fronteira e a imposição das condições necessárias ao longo dessa linha. As aproximações nodais dos deslocamentos sobre a fronteira identificam a diferença dos valores dos deslocamentos entre ambos os lados da descontinuidade, para o caso de uma fissura num determinado meio.

### 3.3.2.2 Meio elástico infinito com inclusões rígidas enterradas

Considere-se o caso apresentado inicialmente, em que as inclusões enterradas no meio elástico infinito apresentam agora um material rígido, no seu interior, e são modeladas com a formulação do Método dos Elementos de Fronteira em Trações. Sendo assim, têm de se garantir os deslocamentos nulos nas superfícies de ambas as inclusões,  $S_1$  e  $S_2$ . A equação integral de fronteira, no domínio exterior à Inclusão 1, equação (3.10), é então substituída para dar a equação seguinte em trações,

$$c_{ij} t_i^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n1}, \omega) = \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{-inc}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n\_ext}^{(2)} \overline{G}_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \quad , \quad (3.17)$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira (constantes), enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais (3.11) e (3.17) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, deslocamentos nulos, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se assim, um sistema de  $[(3NS + 3N) \times (3NS + 3N)]$  equações.

### 3.3.2.3 Meio elástico infinito com inclusões vazias/cavidades

Considere-se, novamente, o caso ilustrado inicialmente (ver Figura 3.1), em que as inclusões enterradas no meio elástico infinito são apresentadas como inclusões vazias ou também designadas como cavidades. As inclusões são modeladas agora com recurso à formulação do Método dos Elementos de Fronteira em Trações. Impõem-se tensões nulas nas superfícies das inclusões,  $S_1$  e  $S_2$ . A equação integral de fronteira, no domínio exterior à Inclusão 1, equação (3.12), é simplificada,

$$a_{ij} u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) \overline{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, \mathbf{n}_{n_2}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{\text{inc}}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n_2}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n\_ext}^{(2)} \overline{G}_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n_2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \quad (3.18)$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira (constantes), enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais (3.13) e (3.18) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, tensões nulas, em ambas as inclusões, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se assim, um sistema de  $[(3NS + 3N) \times (3NS + 3N)]$  equações.

### 3.3.2.4 Meio elástico infinito com inclusões elástica e rígida

Considere-se o mesmo problema e as equações apresentadas na secção anterior, no qual, se pretende que a inclusão modelada com a formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira seja agora modelada utilizando a formulação em Trações. As equações integrais finais (3.14), (3.15) e (3.16) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se assim, um sistema de  $[(3NS + 6N) \times (3NS + 6N)]$  equações.

### 3.3.3 Formulação de acoplamento (TBEM+BEM/MFS)

#### 3.3.3.1 Meio elástico infinito com inclusões elásticas enterradas

Considere-se, novamente, o caso apresentado anteriormente (Figura 3.1), em que as formulações de deslocamento e tensões podem ser combinadas de forma dual, numa tentativa de resolver os problemas de propagação de ondas em meios elásticos, contendo inclusões finas, sejam estas sólidas, rígidas e/ou cavidades.

A inclusão que foi inicialmente modelada com recurso ao BEM/TBEM pode ser modelada, uma parte da superfície da inclusão  $S_1$  com o Método dos Elementos de Fronteira (carregada com cargas monopolares), enquanto a outra parte com equações integrais de fronteira hipersingulares (carregada com cargas dipolares). As condições de fronteira, a dimensão do sistema de equações e os valores nodais mantêm-se, tal como se se utilizasse apenas uma das formulações de elementos de fronteira.

A segunda inclusão é modelada com recurso ao MFS, e as equações integrais de fronteira mantêm-se iguais ao estabelecido nas equações anteriores. Sendo assim, é possível determinar, de forma análoga, o acoplamento das formulações para este tipo de problemas.

## 3.4 VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO

### 3.4.1 Meio elástico infinito com inclusões elásticas enterradas

Os algoritmos de acoplamento propostos (BEM/MFS e TBEM/MFS), descritos anteriormente, são verificados comparando as respostas em soluções BEM e MFS, resolvendo o problema da propagação de ondas num meio elástico e infinito, constituído por aço. Este material apresenta descontinuidades circulares centradas em  $(0.0\text{m}, 0.2\text{m})$  e  $(0.2\text{m}, 0.05\text{m})$ , com raios de  $0.04\text{m}$  e  $0.03\text{m}$ , respetivamente, que são totalmente preenchidas com um produto de resina (Meio 2) e outro por cobre (Meio 3), conforme ilustrado na Figura 3.3.

O meio elástico infinito (aço), considerado homogéneo ( $\rho_1 = 7850\text{ kg/m}^3$ ), permite velocidades de propagação das ondas dilatacionais  $\alpha_1 = 5900\text{ m/s}$  e uma velocidade de propagação das ondas de corte igual a  $\beta_1 = 3230\text{ m/s}$ . A resina e o cobre do interior das Inclusões 1 e 2 possuem materiais elásticos com

massas volúmicas  $\rho_2 = 1250 \text{ kg/m}^3$  e  $\rho_3 = 8900 \text{ kg/m}^3$ , exibem velocidades de propagação das ondas dilatacionais e de corte iguais a  $\alpha_2 = 2600 \text{ m/s}$ ,  $\beta_2 = 1100 \text{ m/s}$  e  $\alpha_3 = 4700 \text{ m/s}$ ,  $\beta_3 = 2260 \text{ m/s}$ , respetivamente. O sistema é excitado por uma fonte dilatacional cilíndrica e harmónica, aplicada no ponto O (0.03m, 0.04m), onde a amplitude varia sinusoidalmente na terceira dimensão de acordo com  $k_z = 30 \text{ rad/m}$ .

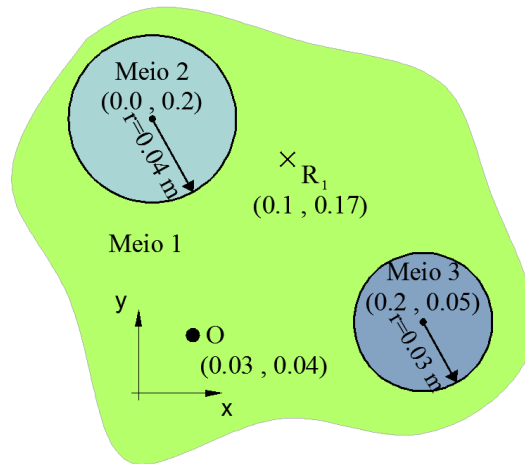


Figura 3.3: Geometria das inclusões circulares, constituídas por resina e cobre, enterradas num meio elástico infinito e homogêneo (aço), posição da fonte dilatacional e recetor  $R_1$ , situado no meio exterior.

As respostas dos deslocamentos são calculadas para o recetor  $R_1$ , localizado no meio elástico exterior em (0.1m, 0.17m). Os cálculos são realizados no domínio da frequência, no intervalo entre os 2500Hz e os 100 000Hz.

São realizados vários cálculos, de forma a avaliar as respostas dos deslocamentos para diferentes números dos elementos de fronteira e fontes virtuais a fim de verificar a consistência dos resultados e validar o acoplamento proposto. Sendo assim, são realizadas diversas combinações dos diferentes métodos BEM, MFS, BEM/MFS e TBEM/MFS, usando diferentes números dos elementos de fronteira e fontes virtuais, conforme a seguir se descreve.

Para as inclusões modeladas com o MFS, as distâncias entre as fontes virtuais (interiores e exteriores) e os pontos de colocação foram definidos através do cálculo de erros ao longo da fronteira. Para avaliar esta distância foram colocados recetores ao longo da fronteira e avaliada a diferença em relação às condições de fronteira. O erro global naquela fronteira encontra-se calculando o erro global ao longo desta superfície, gerado pela diferença entre as respostas daqueles recetores e as condições fronteira prescritas.

Assim, as distâncias finalmente adotadas para a posição das fontes virtuais foram as que determinaram menores erros.

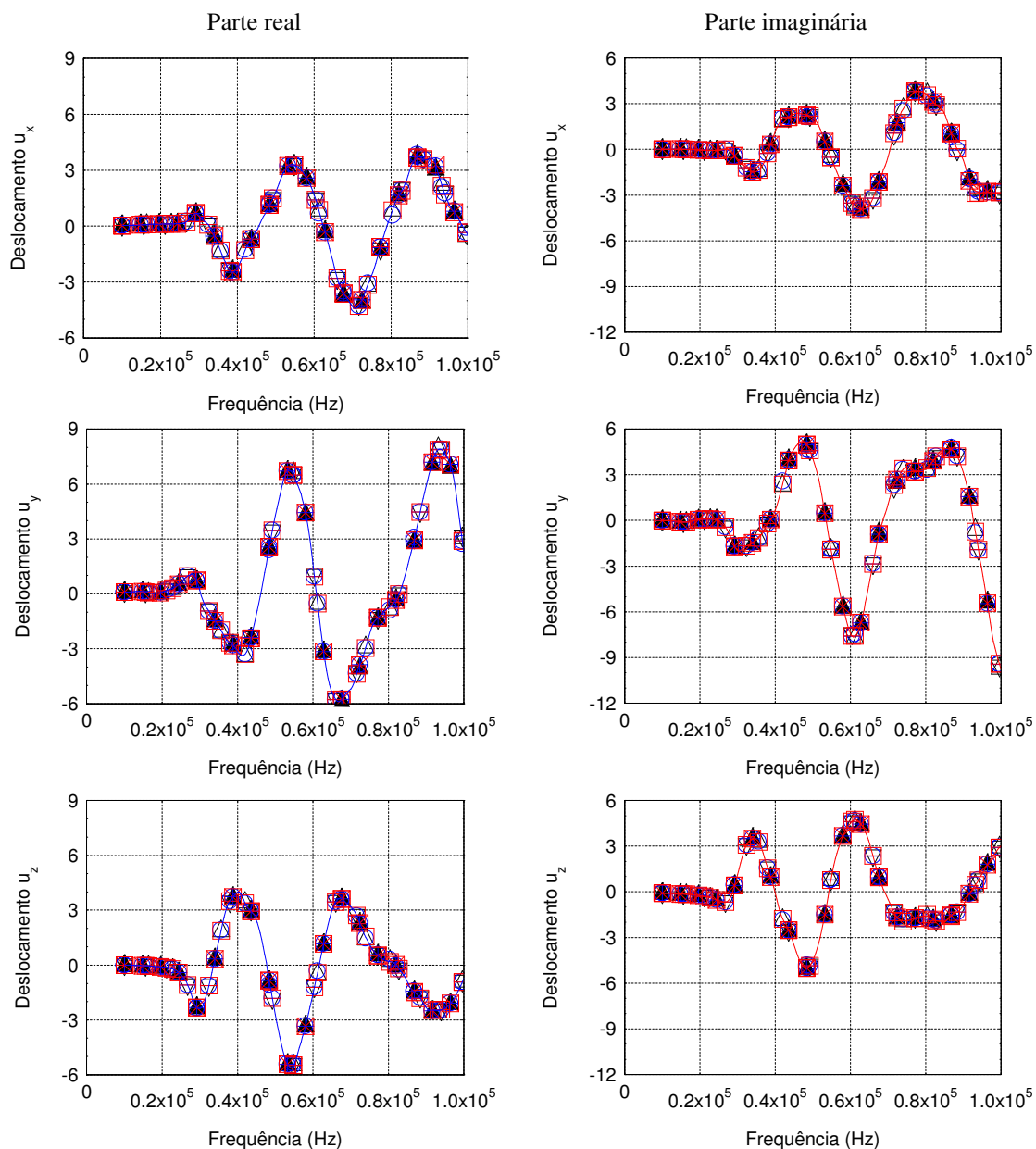


Figura 3.4: Deslocamentos, nas 3 componentes, para as formulações BEM, MFS e de acoplamento quando o sistema é excitado por uma fonte dilatacional localizada no exterior das inclusões elásticas: — BEM (150/150); MFS (○50/50 ⊖100/100 ⊕150/150); BEM/MFS (□50/50 ⊞100/100 ⊠150/150); TBEM/MFS (△50/50 ▽100/100 ▲150/150).

A solução de referência considerada é aquela que resolve o sistema utilizando o Método dos Elementos de Fronteira para modelação de ambas as inclusões. São utilizadas as funções de Green para a resolução de um meio elástico e infinito. Os deslocamentos nas componentes  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ , são calculados e são

apresentados na Figura 3.4, em que a parte real é apresentada na coluna à esquerda e a parte imaginária é apresentada na coluna à direita. As respostas produzidas pela solução de referência (formulação BEM) estão representadas por linhas, quando cada inclusão é modelada com 150 elementos de fronteira. O MFS e as soluções de acoplamento são indicados por marcadores e designados por “MFS”, “BEM/MFS” e “TBEM/MFS”. Para estas formulações são usadas 50, 100 e 150 elementos de fronteira e fontes virtuais para cada inclusão.

Uma análise aos resultados mostra uma boa concordância entre as soluções de acoplamento propostas e ambos os modelos individuais BEM e MFS. Quando se faz uma ampliação das figuras, verifica-se que a relação é tanto melhor quanto maior é o número dos elementos de fronteira e pontos virtuais/pontos de colocação, como seria expectável. Fica, assim, validado o método proposto de acoplamento para a modelação de um meio elástico, onde estão enterradas inclusões elásticas.

### **3.4.2 Meio elástico infinito com inclusões rígidas enterradas**

Considere-se novamente o exemplo numérico apresentado na Figura 3.3, para verificar o algoritmo de acoplamento proposto (BEM/MFS). Os resultados deste método também são comparados com as soluções individuais do BEM e MFS, de forma a validá-los.

O meio elástico infinito, aço, mantém as mesmas propriedades, e o tipo e a posição da fonte cilíndrica também são mantidos. O interior das inclusões é agora alterado, sendo consideradas como inclusões rígidas. As fontes virtuais interiores, utilizadas para calcular o campo refletido pela segunda inclusão, são posicionadas de forma a garantir o afastamento com menos erro ao longo da sua fronteira possível. As respostas dos deslocamentos são calculadas para o mesmo recetor,  $R_1$ , e para o mesmo domínio de frequência.

A figura seguinte apresenta a parte real (coluna à esquerda) e a parte imaginária (coluna à direita) para os deslocamentos na componente horizontal, vertical e normal. A representação esquemática adotada é a mesma utilizada na secção anterior. Como se pode observar na figura, existe, uma vez mais, uma boa aproximação entre os valores determinados pelos vários métodos, ficando, assim, validado o método de acoplamento proposto para a propagação de ondas em meios elásticos, contendo inclusões rígidas.



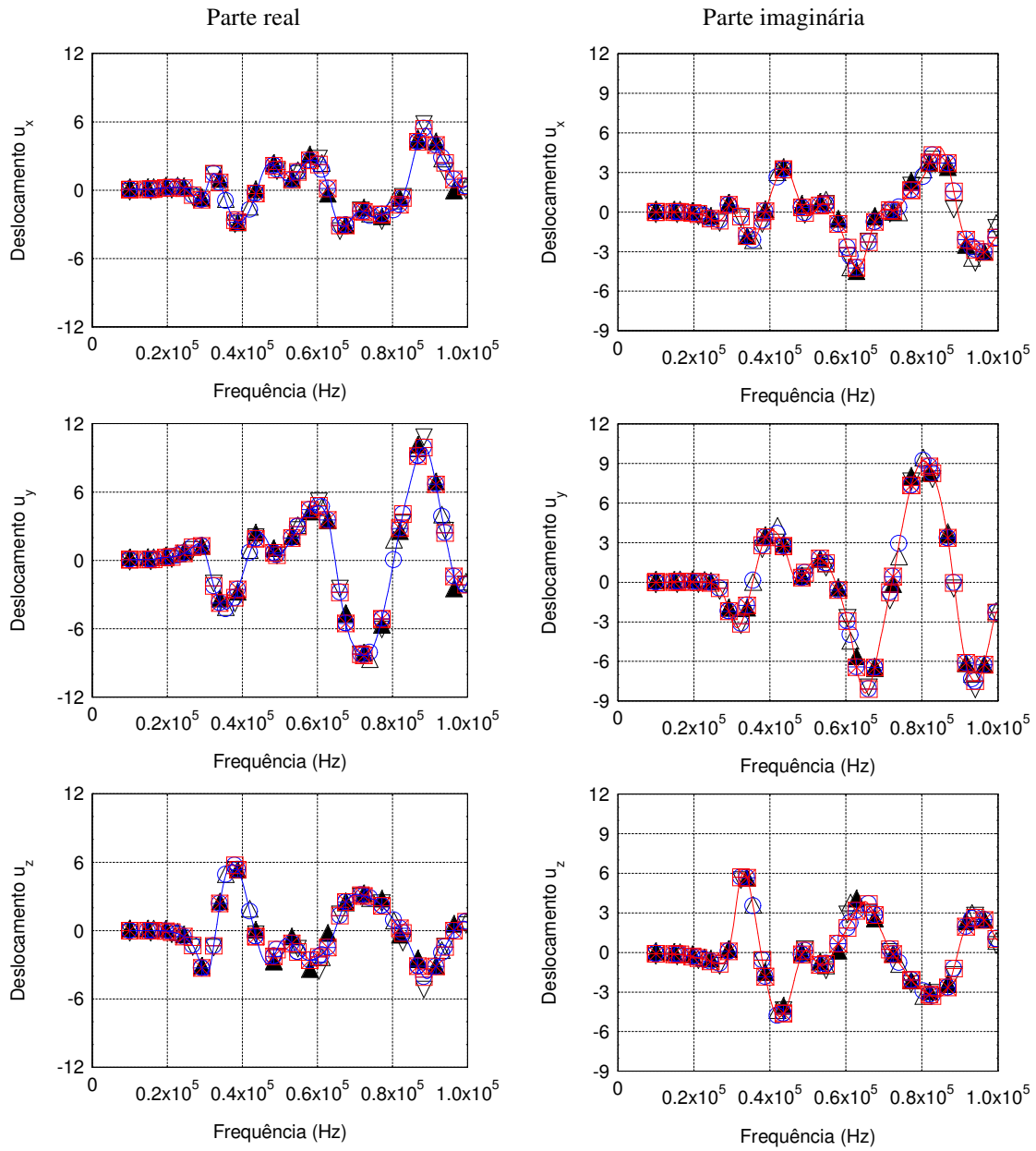


Figura 3.5: Deslocamentos, nas 3 componentes, para as formulações BEM, MFS e de acoplamento quando o sistema é excitado por uma fonte dilatacional localizada no exterior das inclusões rígidas: — BEM (150/150); MFS ( $\circ$ 50/50  $\ominus$ 100/100  $\oplus$ 150/150); BEM/MFS ( $\square$ 50/50  $\boxplus$ 100/100  $\boxtimes$ 150/150); TBEM/MFS ( $\triangle$ 50/50  $\nabla$ 100/100  $\blacktriangle$ 150/150).

### 3.4.3 Meio elástico infinito com inclusões vazias/cavidades

O exemplo numérico apresentado na Figura 3.3 é considerado aqui novamente, para verificar o algoritmo de acoplamento proposto (BEM/MFS) para um meio elástico infinito (aço), com as mesmas propriedades,

e com o mesmo tipo e a mesma posição da fonte cilíndrica. Considere-se, agora, a existência de duas cavidades embebidas no meio elástico infinito. As fontes virtuais interiores, utilizadas para calcular o campo refletido pela segunda inclusão, são posicionadas mediante os pressupostos considerados anteriormente.

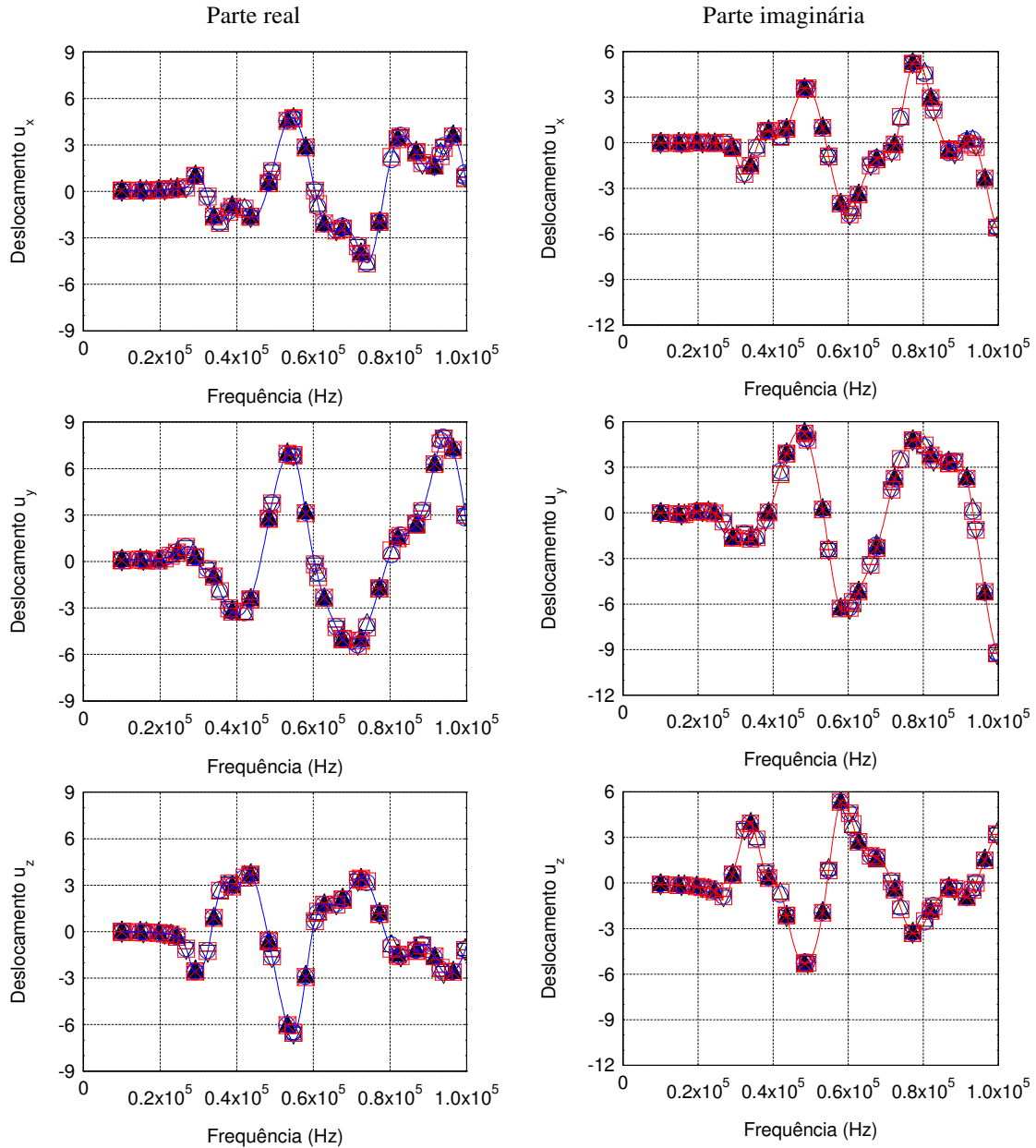


Figura 3.6: Deslocamentos, nas 3 componentes, para as formulações BEM, MFS e de acoplamento quando o sistema é excitado por uma fonte dilatacional localizada no domínio exterior às cavidades: — BEM (150/150); MFS ( $\circ$ 50/50  $\ominus$ 100/100  $\oplus$ 150/150); BEM/MFS ( $\square$ 50/50  $\boxplus$ 100/100  $\boxtimes$ 150/150); TBEM/MFS ( $\triangle$ 50/50  $\nabla$ 100/100  $\blacktriangle$ 150/150).

Os resultados deste método são comparados com as soluções individuais do BEM e MFS, para o mesmo recetor,  $R_1$ , e para o mesmo domínio de frequência.

A Figura 3.6 apresenta a parte real (coluna à esquerda) e a parte imaginária (coluna à direita) para os deslocamentos nas várias componentes. As designações das linhas e dos marcadores são mantidas. Como se pode observar na figura, existe, uma vez mais, uma boa aproximação entre os valores determinados pelos vários métodos, ficando assim, validado o método de acoplamento proposto para a propagação de ondas em meios elásticos, contendo cavidades.

### 3.4.4 Meio elástico infinito com inclusões elástica e rígida

O exemplo numérico apresentado na Figura 3.3 é calculado para a situação em que uma das inclusões é elástica e a outra é rígida, de forma a poder verificar o algoritmo de acoplamento proposto.

Através de uma análise aos resultados demonstrados na Figura 3.7, continua a existir uma boa uniformidade entre os diversos resultados dos vários métodos numéricos.

## 3.5 RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

A formulação baseada no acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira e o Método das Soluções Fundamentais para meios elásticos foi implementada no domínio da frequência. Sendo assim, as respostas no domínio do tempo são calculadas através da aplicação, a partir daqueles resultados, de transformadas inversas de Fourier (FFT) nos domínios do número de onda  $k_z$  e da frequência de cálculo  $\omega$ . Os cálculos da transformada inversa de Fourier na forma discreta correspondem à soma de um número finito de termos, tanto em frequência como para diferentes números de onda na direção  $z$ . O pulso emitido pela fonte de excitação corresponde à de um pulso de Ricker. A definição deste pulso ao longo do tempo compreende uma onda de amplitude positiva entre dois picos negativos de menor amplitude,

$$u(\tau) = A(1 - 2\tau^2)e^{-\tau^2}, \quad (3.19)$$

onde  $A$  representa a amplitude do sinal;  $\tau = (t - t_s)/t_0$ ,  $t$  correspondendo à variável tempo,  $t_s$  o tempo em que ocorre o valor máximo, e  $\pi t_0$  é o período característico (dominante) do sinal.

A aplicação da transformada de Fourier para esta função, leva a que aquele pulso possa ser expresso no domínio da frequência pela equação:

$$U(\omega) = A \left[ 2t_0 \sqrt{\pi} e^{-i\alpha_s} \right] \Omega^2 e^{-\Omega^2}, \quad (3.20)$$

com  $\Omega = \omega t_0 / 2$ .

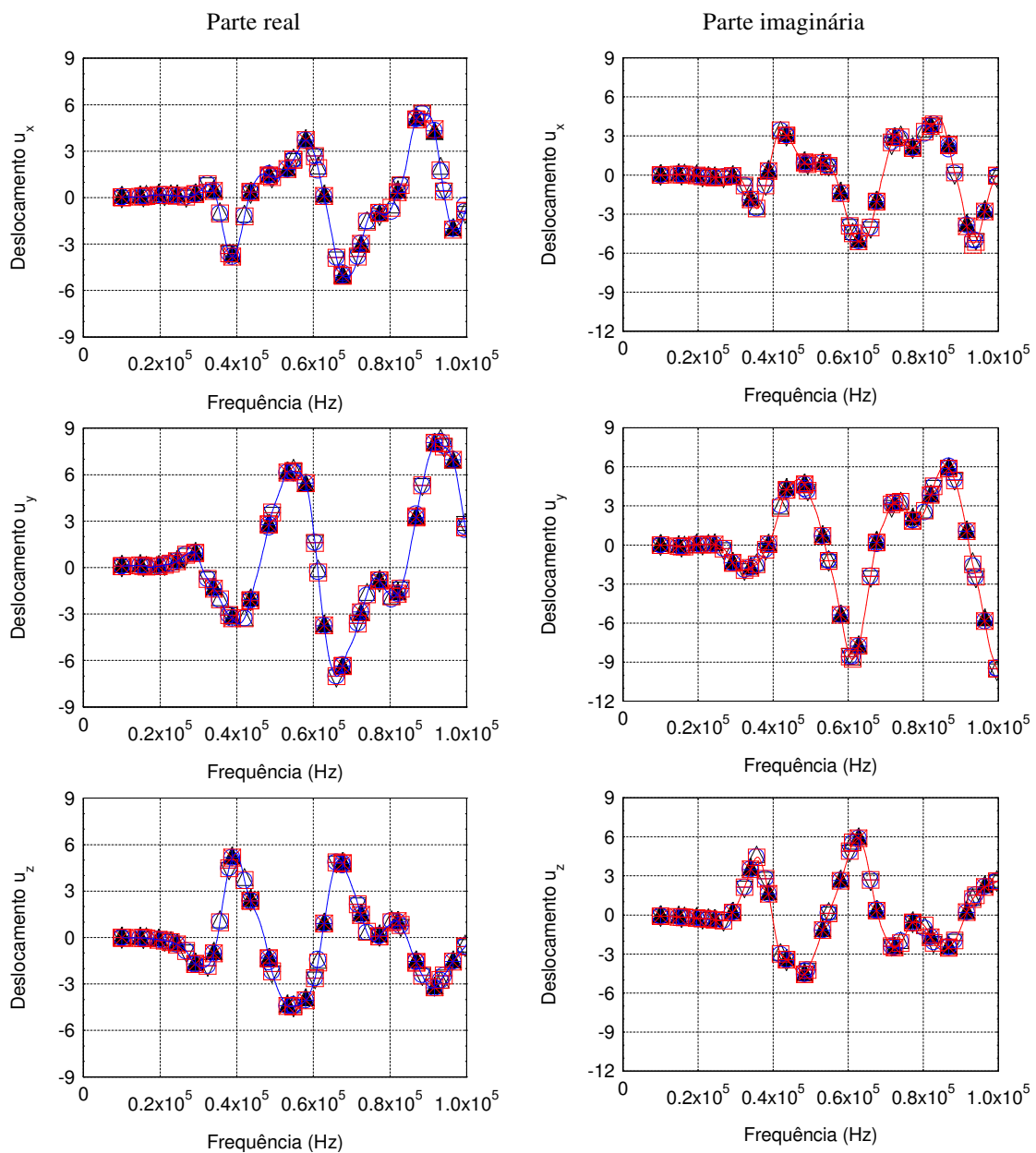


Figura 3.7: Deslocamentos, nas 3 componentes, para as formulações BEM, MFS e de acoplamento quando o sistema é excitado por uma fonte dilatacional localizada no exterior das inclusões elástica e rígida: — BEM (150/150); MFS (○50/50 ⊖100/100 ⊕150/150); BEM/MFS (□50/50 ▣100/100 ▤150/150); TBEM/MFS (△50/50 ▽100/100 ▲150/150).

De modo a evitar a possibilidade de contaminação da resposta por parte das fontes virtuais adjacentes e também evitar fenômenos de *aliasing*, recorre-se ao uso de frequências complexas do tipo  $\omega_c = \omega - i\eta$ , com uma parte imaginária,  $\eta = 0.7\Delta\omega$  e em que  $\Delta\omega$  é o incremento da frequência angular. Posteriormente, as respostas no domínio do tempo são multiplicadas pelo fator  $e^{\eta t}$  (Kausel e Roesset, 1992).

### 3.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A aplicabilidade e a capacidade das formulações de acoplamento propostas são ilustradas através do cálculo de deslocamentos numa grelha de recetores, gerados por uma carga dinâmica colocada na vizinhança de uma fissura, posicionada na proximidade de uma inclusão.

No caso em estudo, é abordado o comportamento da propagação de ondas transmitidas num meio elástico homogêneo e infinito, causadas pela presença de uma fissura em forma de arco, com espessura nula, localizada na proximidade de uma inclusão que apresenta no seu interior um material elástico, distinto do meio exterior (ver Figura 3.8 a)). Resumindo, pretende-se avaliar a propagação de ondas transmitidas no aço, que se encontra com um defeito e possui uma inclusão, preenchida por resina.

Os benefícios da eficiência computacional do acoplamento proposto são também avaliados com recurso ao mesmo exemplo numérico, para duas frequências específicas, 2500Hz e 320 000Hz .

O meio elástico infinito, aço, exhibe velocidades de ondas P e S e uma massa volúmica que permanecerá constante e igual a 5900 m/s , 3230 m/s e 7850 kg/m<sup>3</sup>, respetivamente. A inclusão elástica (resina) é centrada na posição (0.0m, 0.0m) e é circular com raio de 0.05 m . Este meio tem uma massa volúmica de 1250 kg/m<sup>3</sup>, uma velocidade de propagação das ondas dilatacionais (ondas P) equivalente a 2600 m/s e uma velocidade de propagação das ondas de corte (ondas S) igual a 1100 m/s . Uma fissura com espessura nula é embebida na proximidade da inclusão elástica. Este defeito tem uma geometria próxima de um arco, está centrado na posição (0.0m, 0.0m), possui um raio de 0.10 m e um comprimento total de  $\frac{1.2 \pi}{32}$  m .

O sistema é excitado por uma fonte dilatacional cilíndrica bidimensional (com  $k_z = 0$  rad/m), e localizada a 0.05 m da fissura, posicionada em (0.15m, 0.0m). O resultado do deslocamento é obtido para uma

grelha bidimensional, com 10140 recetores ao longo das direções  $x$  e  $y$  e com espaçamentos de intervalos iguais, com  $-0.10\text{m} \leq x \leq 0.25\text{m}$  e  $-0.15\text{m} \leq y \leq 0.15\text{m}$ .

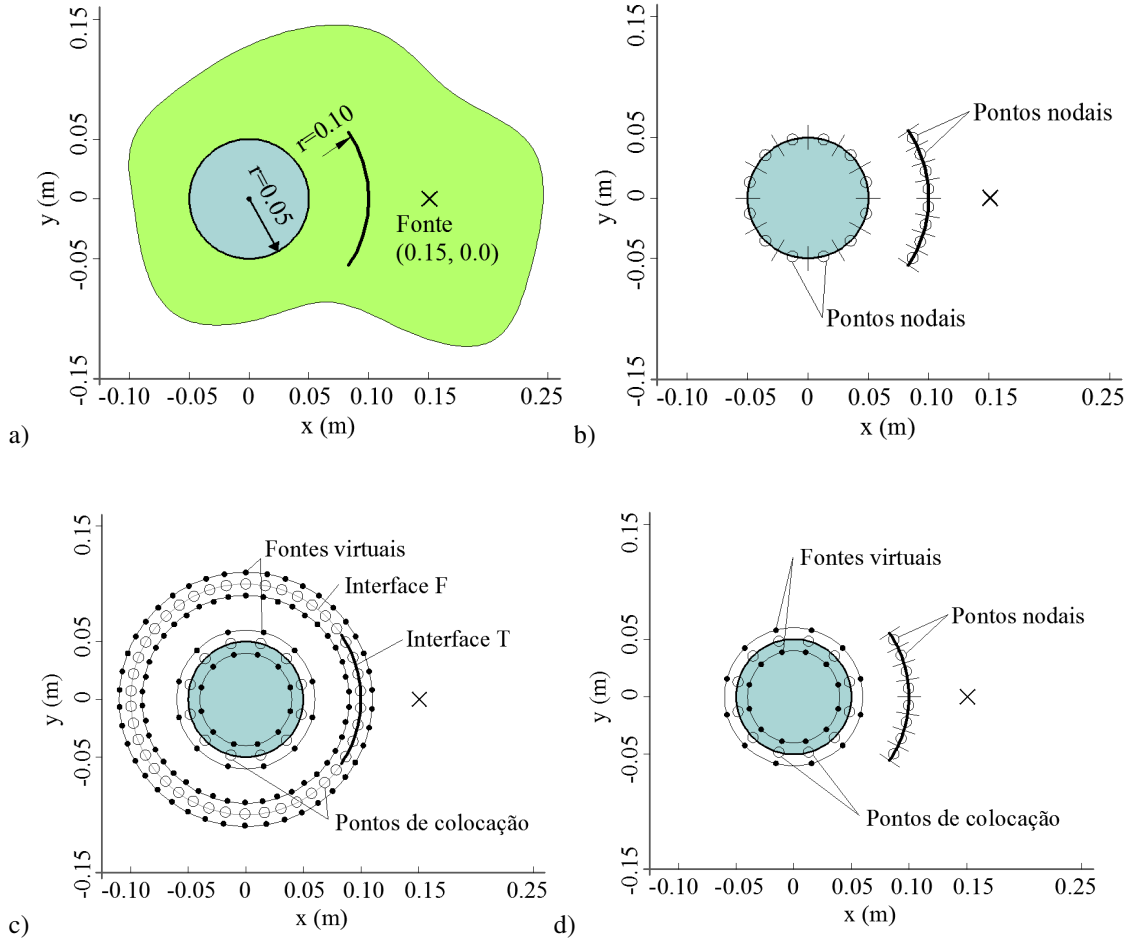


Figura 3.8: Aplicação numérica: a) Geometria da inclusão elástica (resina) na vizinhança de uma fissura em forma de arco, ambas inseridas num meio elástico homogéneo e infinito (aço), e posição da fonte dilatacional; b) Elementos de fronteira usados para a modelação BEM/TBEM; c) Posição das fontes virtuais e pontos de colocação usados na modelação do MFS; d) Posição das fontes virtuais e pontos de colocação (MFS) e elementos de fronteira (TBEM) usado pela formulação de acoplamento MFS/TBEM.

### 3.6.1 Resposta de deslocamentos em frequência para a solução de referência

Como não se conhecem soluções analíticas para este problema específico (Figura 3.8 a)), este é resolvido com auxílio da solução clássica e dual do Método dos Elementos de Fronteira (BEM/TBEM), e é designada nesta secção como a solução de referência.

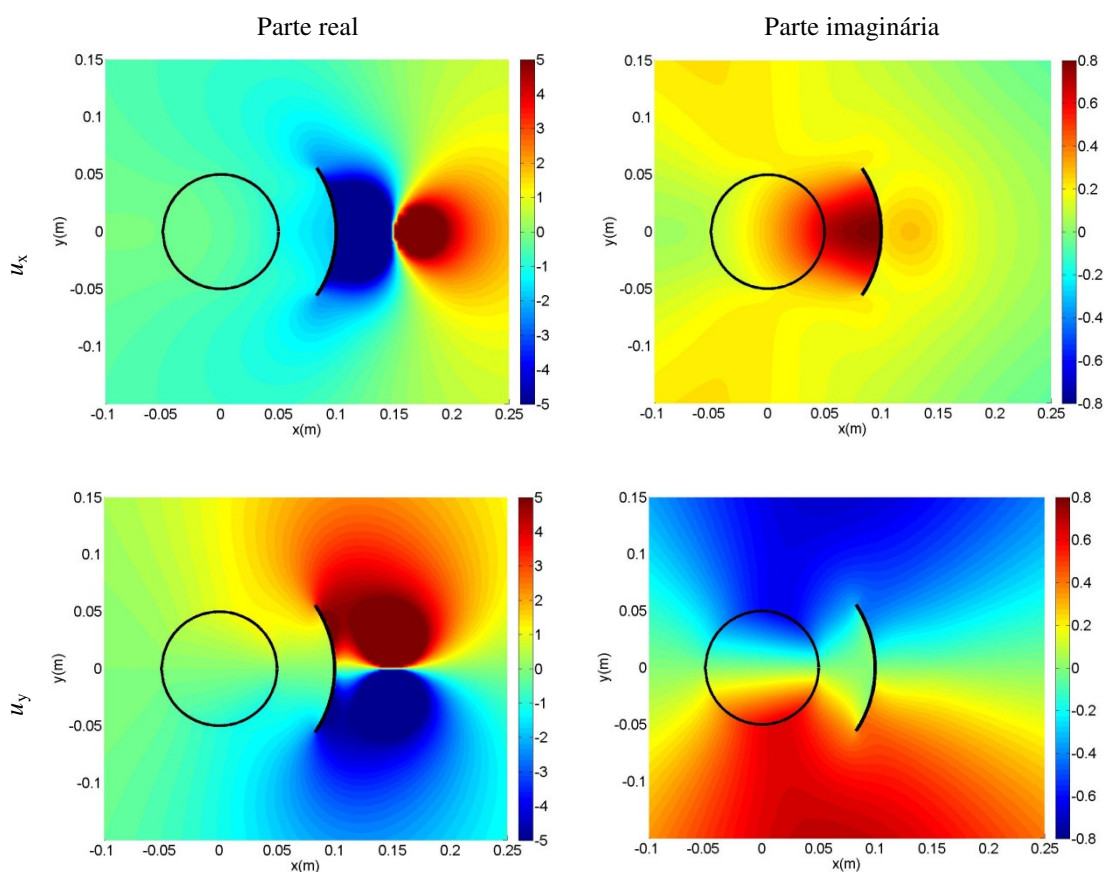


Figura 3.9: Resposta na grelha de recetores, parte real e imaginária nas componentes de deslocamento em  $x$  e  $y$ , modelada com a solução de referência, BEM/TBEM, para uma frequência de excitação de 2500 Hz .

O domínio do problema é dividido, sendo que o primeiro subdomínio (referente à inclusão circular elástica) é discretizado em 560 elementos de fronteira, utilizando uma superfície fechada e carregada com cargas monopolares (BEM), enquanto o outro subdomínio (a fissura) utiliza 210 elementos de fronteira e é discretizado como uma linha aberta e carregada com cargas de dipolares (TBEM), conforme se ilustra na Figura 3.8 b). Sendo assim, este problema utiliza um número total de 770 elementos de fronteiras, para ambas as frequências de análise.

Após a realização da discretização enunciada, procedeu-se ao cálculo dos deslocamentos. A Figura 3.9 ilustra a parte real e imaginária para a frequência de 2500 Hz, segundo as componentes dos deslocamentos, segundo as direções  $x$  e  $y$ . Nestas imagens é possível verificar a diferença entre as duas componentes dos deslocamentos. É também possível avaliar a alteração das respostas nos recetores, localizados nas proximidades da heterogeneidade.

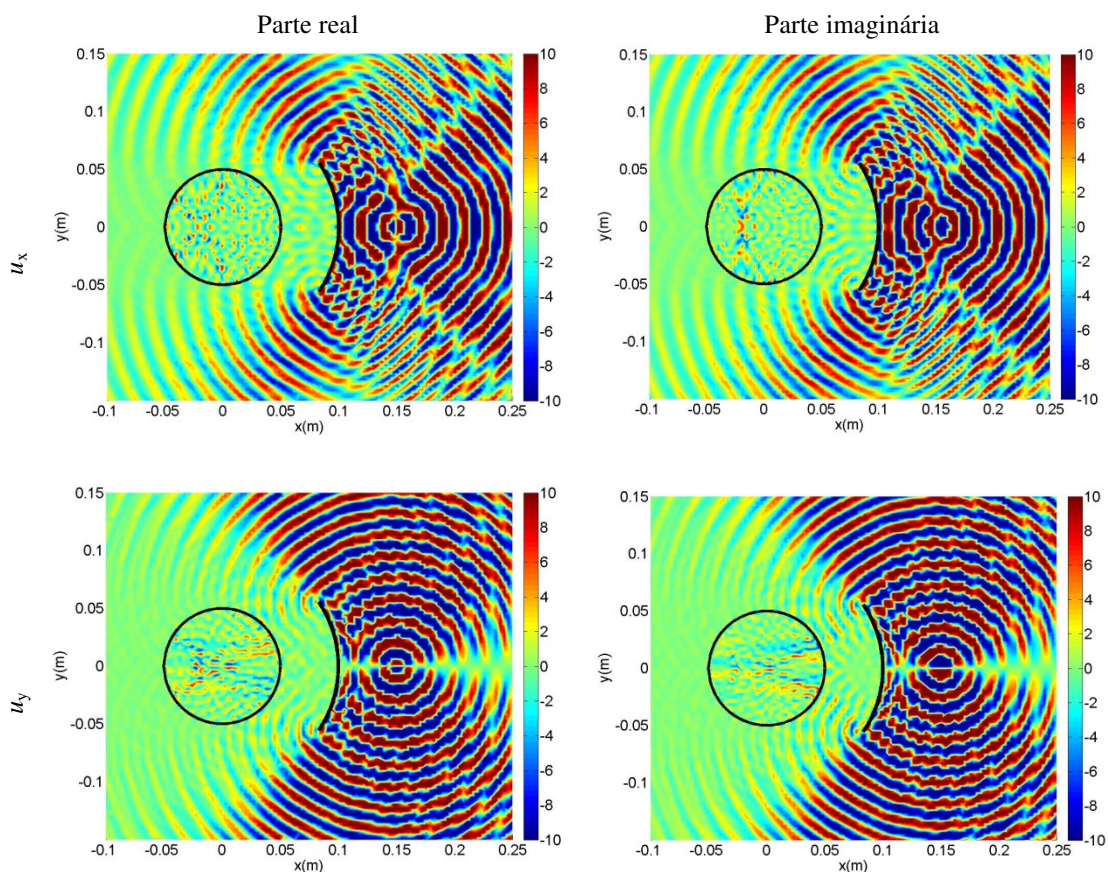


Figura 3.10: Resposta na grelha de recetores, parte real e imaginária nas componentes de deslocamento em  $x$  e  $y$ , modelada com a solução de referência, BEM/TBEM, para uma frequência de excitação de 320000 Hz.

Também foram avaliadas as respostas, para uma frequência de excitação mais elevada, 320 000 Hz, ilustrada na Figura 3.10. É possível observar os deslocamentos na malha de recetores, tanto para a parte real, como para a parte imaginária da solução de referência. Aqui, também é possível observar as diferenças nas duas componentes e também a influência da inclusão e da fissura, no meio de propagação infinito (aço) e no interior da Inclusão 1 (resina).



### 3.6.2 Eficiência de cálculo para o método de acoplamento

A eficiência computacional foi avaliada através da determinação do tempo de processamento de cálculo, aqui designado por *CPU Time*, relativo à obtenção dos deslocamentos para a malha de recetores, definida anteriormente, utilizando a formulação do Método dos Elementos de Fronteira, analisada na secção anterior (BEM/TBEM), em comparação com o Método das Soluções Fundamentais (MFS) e a formulação de acoplamento MFS/TBEM, para as mesmas frequências específicas de análise, 2500 Hz e de 320 000 Hz .

Como se sabe o Método dos Elementos de Fronteira é menos eficiente para a modelação de inclusões finas, tais como fissuras ou inclusões com fronteiras sinuosas. A abordagem aqui utilizada para modelar o deslocamento em torno da fissura, para esta formulação, é baseada na decomposição do domínio interno em dois diferentes subdomínios (Godinho *et al.*, 2007), como está ilustrado na Figura 3.8 c). As interfaces entre estes dois subdomínios são circulares e contêm a fissura, Interface T, e uma superfície fictícia, Interface F. A fim de descrever corretamente o comportamento da fissura (com espessura nula), como de uma cavidade se tratasse, impõem-se tensões nulas em ambos os lados da fissura. A continuidade de deslocamentos e tensões são impostas ao longo da interface virtual F. As fontes virtuais usadas para modelar a resposta são colocadas a distâncias de 0.01 m afastadas da inclusão, tanto para o interior, como para o exterior. De forma a simular as mesmas propriedades do meio elástico e infinito, considerou-se que as propriedades dos meios, na proximidade da fissura, são idênticas (aço).

Para o modelo de acoplamento entre o MFS e o TBEM, a fissura é discretizada com elementos de fronteira, carregados por cargas dipolares (TBEM), enquanto a superfície da inclusão é modelada usando um conjunto de fontes virtuais localizadas a 0.005 m a partir da fronteira. Esta inclusão é, então, modelada com recurso ao MFS. Os pontos de colocação estão uniformemente distribuídos ao longo da sua superfície. A discretização considerada pode ser visualizada na Figura 3.8 d).

Os erros gerados no domínio em análise pelos métodos são avaliados comparando as respostas obtidas com a solução de referência, que possui um grande número de elementos. O erro global do domínio é definido pelo cálculo da integração do valor absoluto entre a diferença das respostas obtidas para o modelo de referência e os restantes modelos em análise para a grelha de recetores considerada. Para avaliar a eficiência computacional, é registado o tempo de cálculo (designado aqui por *CPU Time*) simultaneamente ao fim de cada processo, para o mesmo problema modelado para as três formulações.

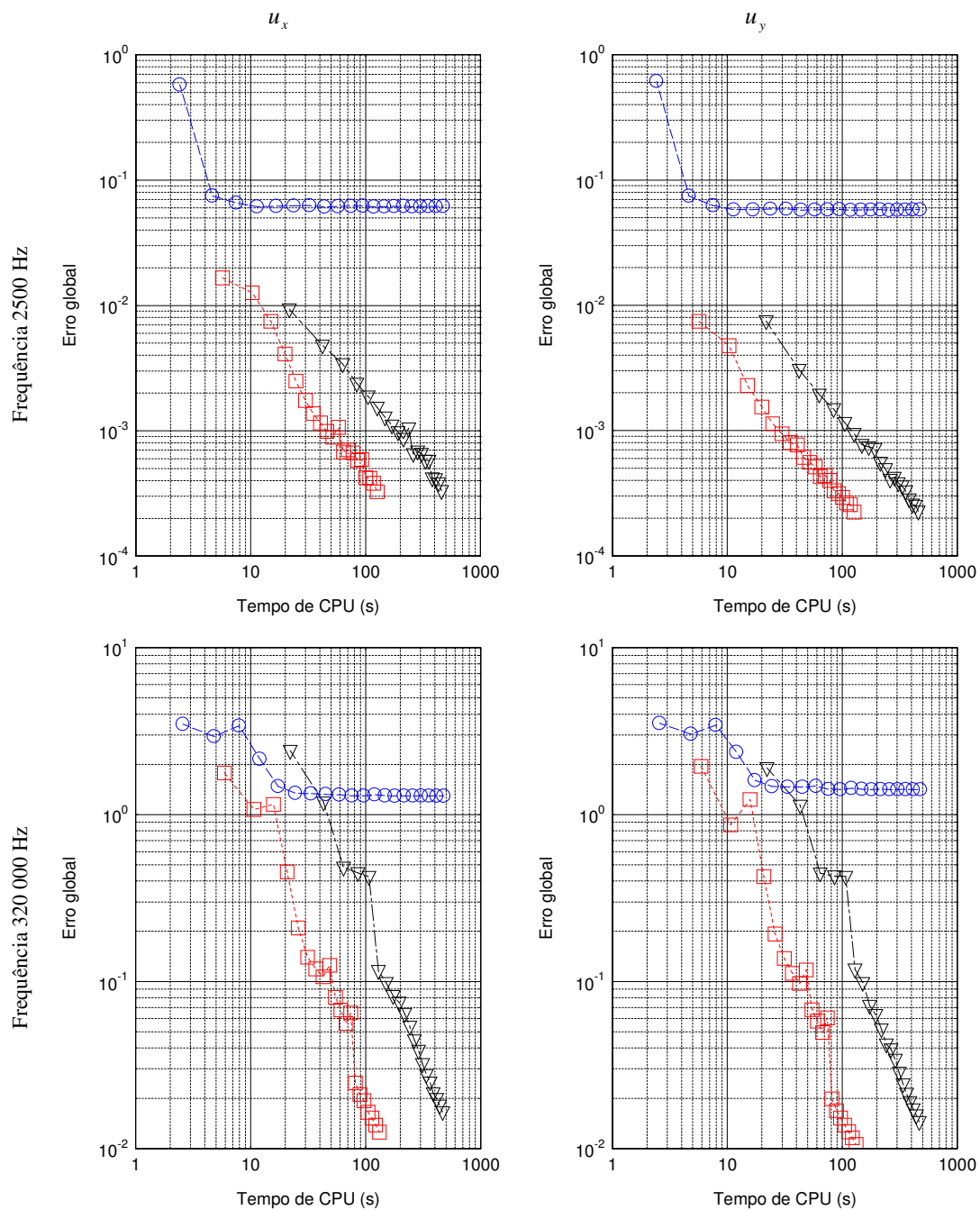


Figura 3.11: Erro global no domínio em função do CPU Time para um sistema composto por uma inclusão elástica localizada na proximidade de uma fissura com espessura nula, inseridas num meio elástico e infinito:  $\nabla$  BEM/TBEM,  $\circ$  MFS e  $\square$  MFS/TBEM.

Para a análise em curso, efetuou-se para cada formulação o aumento do número de graus de liberdade de acordo com o valor de  $m=1$  a  $20$ . Em cada instante de cálculo foi registado o tempo necessário de cálculo, para cada grau de liberdade e assim sucessivamente. A solução BEM/TBEM foi calculada pela discretização da inclusão e da superfície da fissura, com  $10m$  e  $4m$  elementos de fronteira,

respetivamente. A solução MFS foi obtida simulando as interfaces da inclusão circular com  $10m$  fontes virtuais / pontos de colocação e  $20m$  fontes virtuais / pontos de colocação para a segunda inclusão, de forma a garantir que os mesmos números de pontos são utilizados na fissura, para os diversos métodos.

A solução de acoplamento proposta foi obtida com  $10m$  e  $4m$  fontes virtuais / pontos de colocação e elementos de fronteira, para simular a inclusão e o defeito, respetivamente.

De forma a garantir o mesmo tipo de processamento de cálculo nas várias formulações, todas as soluções foram determinadas de forma independente no mesmo computador, que possui um processador *Intel Core™ Duo CPU E6750*.

A Figura 3.11 ilustra, assim, o erro global registado no domínio *versus* o tempo de processamento de cálculo necessário para cada formulação, com a variação do número de graus de liberdade, ou seja, com o incremento do número de elementos de fronteira e fontes virtuais / pontos de colocação. Esta figura apresenta os resultados numa escala logarítmica para permitir uma fácil interpretação dos resultados.

Realizando uma análise das respostas, demonstra-se que são registados menores erros com o aumento do número de graus de liberdade, embora o método MFS não melhore significativamente o seu erro global. Os resultados revelam, também, que o acoplamento entre a formulação MFS e TBEM é o algoritmo que requer menos tempo de processamento de cálculo, para a mesma precisão. Em ambos os casos, para o mesmo *CPU Time* a solução do acoplamento MFS/TBEM também exhibe sempre o menor erro global no domínio.

Pode-se então concluir que o método proposto de acoplamento, para o exemplo de uma inclusão circular e uma fissura, inseridas num meio elástico infinito, necessita de um menor número de elementos de fronteira e fontes virtuais / pontos de colocação, mantendo o mesmo erro global. É assim possível calcular sistemas de uma forma mais eficaz e eficiente, escolhendo um dos métodos que melhor se adequam a cada subdomínio, acoplando-os posteriormente.

### **3.6.3 Análise das respostas no domínio do tempo**

Considerando o exemplo numérico apresentado na Figura 3.8 a), pretende-se determinar as respostas de propagação das ondas, no domínio do tempo. Os resultados são calculados usando a formulação proposta de acoplamento entre o Método das Soluções Fundamentais (para a modelação da primeira inclusão) e o Método dos Elementos de Fronteira em Trações (para a modelação do defeito). Ambas as inclusões são discretizadas utilizando um determinado número de elementos de fronteira definida pela relação entre o comprimento de onda e o comprimento desses elementos de fronteira, fixada em 10. Para a discretização

da fissura foram utilizados um mínimo de 50 elementos de fronteira, modelada como se de uma linha aberta se tratasse. O outro subdomínio é realizado com recurso à formulação MFS, usando um mínimo de 200 cargas virtuais / pontos de colocação. O número de elementos de fronteira, fontes virtuais / pontos de colocação aumentam com o aumento da frequência de acordo com a relação, definida acima, entre o comprimento de onda e a distância entre os pontos de colocação. A Figura 3.8 d) ilustra esquematicamente a formulação de acoplamento utilizada: a posição das fontes virtuais; pontos de colocação; e elementos de fronteira.

O cálculo é realizado no domínio da frequência para gamas de frequência entre 2500 Hz e 640 000 Hz , com um incremento de frequência de 2500 Hz , que determina uma janela de tempo total de 0.4 ms .

O meio elástico (aço) é excitado por um pulso de fonte dilatacional cilíndrica, para uma frequência característica de 160 000 Hz , que começa a atuar em  $t=0$  ms . Os resultados numéricos são apresentados através de um conjunto de imagens, a partir das animações realizadas por computador. Na Figura 3.12 são apresentados os deslocamentos horizontais ( $u_x$ ), na coluna da esquerda, enquanto a coluna da direita ilustra os deslocamentos verticais ( $u_y$ ). A cor a vermelho representa a amplitude positiva de deslocamentos e a cor azul a negativa.

No instante  $t=0.01$  ms , a propagação da onda no meio elástico, devido à fonte dilatacional, pode ser observada, sem perturbações, uma vez que esta ainda não atingiu a fissura. As diferenças das componentes dos deslocamentos no plano horizontal e vertical também podem ser observadas.

Em  $t=0.02$  ms a frente de onda embate na fissura, parte do pulso incidente é refletido, como ondas P e ondas S, propagando-se no meio elástico infinito (aço) em sentido contrário. Este pulso também atinge as extremidades da fissura onde se geram ondas de difração que viajam ao longo das extremidades da fissura e encontram-se numa fase inicial de desenvolvimento.

Para o instante  $t=0.04$  ms as ondas já atingiram a inclusão circular elástica. As ondas que atravessam o meio da inclusão ( $u_x$  e  $u_y$ ) estão com desenvolvimento inicial no meio elástico (resina), como ondas P e S, e apresentam uma menor velocidade em relação à amplitude do campo incidente direto. Isto deve-se ao facto da inclusão possuir um material com uma velocidade de propagação menor comparativamente ao exterior. Verifica-se, assim, que a resina atrasa bastante a propagação de ondas no aço, como seria expectável.

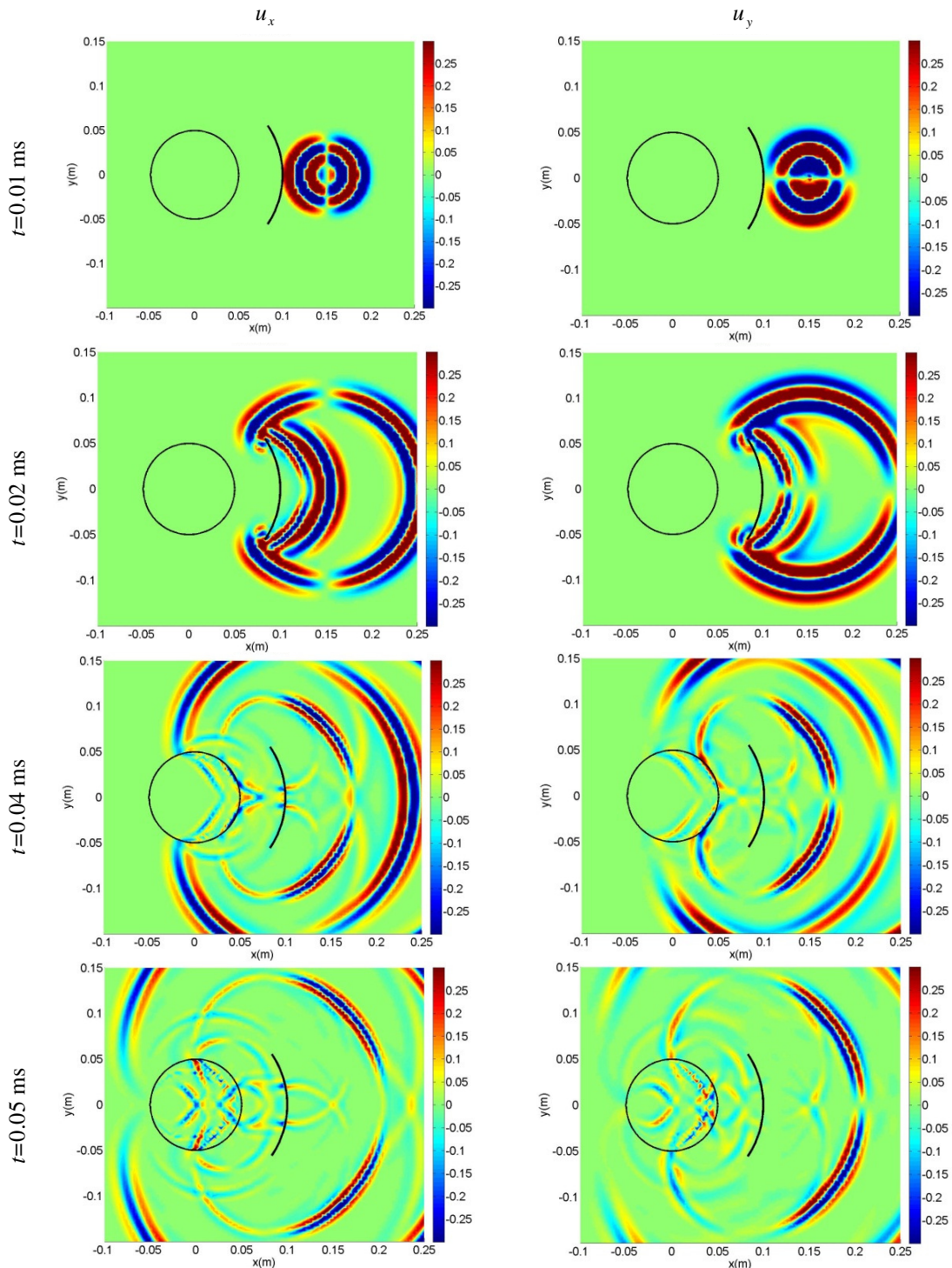


Figura 3.12: Propagação 2D de ondas nas proximidades de uma inclusão circular e elástica (resina) e de uma fissura, inseridas num meio elástico 2D (aço), homogéneo e não confinado, gerado por uma fonte dilatacional cilíndrica, modelada com um pulso de Ricker com uma frequência característica de 160 000Hz . Evolução dos deslocamentos,  $u_x$  e  $u_y$ , em diferentes instantes.

Nos últimos instantes ( $t = 0.05$  ms) são mostradas as múltiplas ondas de reflexão que continuam a propagar-se no meio elástico infinito. A propagação do campo de ondas, resultantes dos múltiplos pulsos de difração e reflexão, produzidos pelas superfícies da fissura e da inclusão circular, são claramente visíveis na grelha de recetores. É visível ainda que a frente de onda ainda se encontra no interior da inclusão, ou seja, a propagação de ondas é mais rápida através do meio exterior.

### 3.7 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foram propostas diferentes formulações do acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira (BEM) / o Método de Elementos de fronteira em Trações (TBEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) para o estudo da propagação de ondas, num meio elástico não confinado, nas proximidades de inclusões com diferentes características, inclusões rígidas, cavidades e preenchidas por um material elástico, mesmo com espessura reduzida.

Foi demonstrado que os algoritmos de acoplamento propostos superam as limitações decorrentes de cada método, exigindo um menor esforço computacional, mantendo a precisão adequada. Estas formulações foram verificadas através da comparação de vários métodos para o problema de diferentes inclusões cilíndricas circulares. De acordo com a geometria de cada inclusão, é possível discretizar a sua superfície, utilizando o método que mais se adapta ao problema, de forma a efetuar um cálculo mais eficaz e eficiente. Sendo que as inclusões finas podem ser modeladas com o TBEM e as inclusões circulares com o MFS. Posteriormente as equações são combinadas de forma a permitirem a resolução final do sistema.

# APÊNDICE A: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2.5D, EM BEM, EM MEIOS ELÁSTICOS INFINITOS

## A.1 – DEFINIÇÕES DE ÂMBITO GERAL

Propriedades do meio de propagação:

$\lambda, \mu$  Constantes elásticas (constante de Lamé e módulo de elasticidade transversal)

$\rho$  Massa volúmica

$\omega$  Frequência de análise

$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  Velocidade das ondas P (ondas dilatacionais)

$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  Velocidade das ondas S (ondas de corte)

Outros parâmetros:

$k_\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k_z^2}$ , com  $\text{Im}(k_\alpha) < 0$        $k_\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k_z^2}$ , com  $\text{Im}(k_\beta) < 0$

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$A = \frac{1}{4i\rho\omega^2}$  Amplitude

Funções de Hankel do segundo tipo e de ordem  $n$ :

$H_{n\alpha} = H_n(k_\alpha r)$

$H_{n\beta} = H_n(k_\beta r)$

Funções auxiliares:

$$B_n = k_\beta^n H_{n\beta} - k_\alpha^n H_{n\alpha}$$

Funções de  $B_n$

## A.2 – FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE DESLOCAMENTOS

As funções de Green para os deslocamentos, ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , no meio sólido, são dadas por,

$$G_{xx} = \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left[ \frac{\omega^2}{\beta^2} H_{0\beta} - \frac{1}{r} B_1 + \left( \frac{x-x_0}{r} \right)^2 B_2 \right]$$

$$G_{yy} = \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left[ \frac{\omega^2}{\beta^2} H_{0\beta} - \frac{1}{r} B_1 + \left( \frac{y-y_0}{r} \right)^2 B_2 \right]$$

$$G_{zz} = \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left[ \frac{\omega^2}{\beta^2} H_{0\beta} - k_z^2 B_0 \right]$$

$$G_{xy} = G_{yx} = \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left( \frac{x-x_0}{r} \right) \left( \frac{y-y_0}{r} \right) B_2$$

$$G_{xz} = G_{zx} = ik_z \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left( \frac{x-x_0}{r} \right) B_1$$

$$G_{yz} = G_{zy} = ik_z \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left( \frac{y-y_0}{r} \right) B_1$$

(3.21)

As derivadas das funções de Green anteriores fornecem as tensões seguintes, ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , no meio sólido,



$$\begin{aligned}
H_{rx} &= 2\mu \left[ \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial G_{rx}}{\partial x} + \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial G_{ry}}{\partial y} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial z} \right) \right] \cos \theta_{n1} + \mu \left[ \frac{\partial G_{ry}}{\partial x} + \frac{\partial G_{rx}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n1} \\
H_{ry} &= 2\mu \left[ \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial G_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial G_{ry}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n1} + \mu \left[ \frac{\partial G_{ry}}{\partial x} + \frac{\partial G_{rx}}{\partial y} \right] \cos \theta_{n1} \\
H_{rz} &= \mu \left[ \frac{\partial G_{rx}}{\partial z} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial x} \right] \cos \theta_{n1} + \mu \left[ \frac{\partial G_{ry}}{\partial z} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n1}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

com  $n_{n1}$  o vetor unitário, apontada para o exterior, definido por  $n_{n1} = (\cos \theta_{n1}, \sin \theta_{n1})$ ,  $H_n = H_n(x, y, n_{n1}, x_0, y_0, \omega)$  e  $G_n = G_n(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $r, t = x, y, z$ . Essas expressões podem ser combinadas para obter  $H_{ij}(x, y, n_{n1}, x_0, y_0, \omega)$  nas direções normal e tangencial. Nestas equações  $\mu = \rho \beta^2$ .

## APÊNDICE B: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2.5D, EM TBEM, EM MEIOS ELÁSTICOS INFINITOS

Estas funções de Green podem ser vistas como a combinação das derivadas das equações anteriores (3.21) e (3.22), em ordem ao longo de  $x$ ,  $y$  e  $z$  de modo a obter as tensões  $\bar{G}_{ij}(x, y, n_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega)$  e  $\bar{H}_{ij}(x, y, n_{n1}, n_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega)$ . Ao longo dos elementos de fronteira, em  $(x, y)$ , onde o vetor unitário é definido por  $n_{n1} = (\cos \theta_{n1}, \sin \theta_{n1})$ , e após o equilíbrio das tensões, as seguintes equações são expressas em  $x$ ,  $y$  e  $z$  geradas por cargas aplicadas ao longo das direções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e:

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{xr} &= 2\mu \left[ \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial G_{xr}}{\partial x} + \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial G_{yr}}{\partial y} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial z} \right) \right] \cos \theta_{n2} + \mu \left[ \frac{\partial G_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial G_{xr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n2} \\
\bar{G}_{yr} &= 2\mu \left[ \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial G_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial G_{yr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n2} + \mu \left[ \frac{\partial G_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial G_{xr}}{\partial y} \right] \cos \theta_{n2} \\
\bar{G}_{zr} &= \mu \left[ \frac{\partial G_{xr}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial x} \right] \cos \theta_{n2} + \mu \left[ \frac{\partial G_{yr}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n2}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{xr} &= 2\mu \left[ \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial H_{xr}}{\partial x} + \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial H_{yr}}{\partial y} + \frac{\partial H_{zr}}{\partial z} \right) \right] \cos \theta_{n_2} + \mu \left[ \frac{\partial H_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial H_{xr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n_2} \\
\bar{H}_{yr} &= 2\mu \left[ \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial H_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial H_{zr}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial H_{yr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n_2} + \mu \left[ \frac{\partial H_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial H_{xr}}{\partial y} \right] \cos \theta_{n_2} \\
\bar{H}_{zr} &= \mu \left[ \frac{\partial H_{xr}}{\partial z} + \frac{\partial H_{zr}}{\partial x} \right] \cos \theta_{n_2} + \mu \left[ \frac{\partial H_{yr}}{\partial z} + \frac{\partial H_{zr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n_2}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

com  $\mathbf{n}_{n_2} = (\cos \theta_{n_2}, \sin \theta_{n_2})$  definido como o vetor unitário em  $(x_{col}, y_{col})$  (pontos de colocação),

$$\bar{G}_{tr} = \bar{G}_{tr}(x, y, \mathbf{n}_{n_2}, x_{col}, y_{col}, \omega), \quad G_{tr} = G_{tr}(x, y, x_0, y_0, \omega), \quad \bar{H}_{tr} = \bar{H}_{tr}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, \mathbf{n}_{n_2}, x_{col}, y_{col}, \omega),$$

$$H_{tr} = H_{tr}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, x_0, y_0, \omega) \text{ e } r, t = x, y, z.$$

Estas equações podem ser vistas com funções de Green para deslocamentos e tensões, quando cargas dipolares são aplicadas ao longo da fronteira da inclusão, em vez de cargas monopolares.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Achenbach, J.D., Lin, W., Keer, L.M. (1986) Mathematical modeling of ultrasonic wave scattering by sub-surface cracks. *Ultrasonics*, 24, 207-215.
- Achenbach, J.D. (2002) Modeling for quantitative non-destructive evaluation. *Ultrasonics*, 40, 1-10.
- Aliabadi, M.H. (1997) A new generation of boundary element methods in fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, 86, 91-125.
- Aliabadi, M.H., editor (2002) *The Boundary Element Method: Application. in Solids and Structures*. Wiley.
- Alves, C.J.S., Leitão, V.M.A. (2006) Crack analysis using an enriched MFS domain decomposition technique. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(3), 160-166.
- Amado Mendes, P., Tadeu, A. (2006) Wave propagation in the presence of empty cracks in an elastic medium. *Computational Mechanics*, 38(3), 183-199.
- António, J., Tadeu, A. (2002) 3D Seismic response of a limited valley via BEM using 2.5D analytical green's functions for an infinite free-rigid layer. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22, 659-673.
- Banerjee, P.K., Butterfield, R. (1981) *Boundary Element Methods in Engineering*, London, McGraw-Hill Book Company.
- Ben-Menahem, A., Kostek, S. (1990) The equivalent force system of a monopole source in a fluid-filled open borehole. *Geophysics*, 56, 1477-1481.
- Bouchon, M., Aki, K. (1977) Discrete wave-number representation of seismic source wavefields. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67, 259-277.

- Bouchon, M., Schmitt, D.P. (1989) Full wave acoustic logging in an irregular borehole. *Geophysics*, 54, 758-765.
- Bouchon, M. (1993) A numerical simulation of the acoustic and elastic wavefields radiated by a source in a fluid-filled borehole embedded in a layered medium. *Geophysics*, 58, 475-481.
- Boykov, I.V., Boykova, A.I., Ventsel, E.S. (2006) An approximate method for evaluating hypersingular integrals. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(9), 799-807.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C., Wrobel, L.C. (1984) *Boundary Elements Techniques. Theory and Applications in Engineering*, Berlin, New York, Springer-Verlag.
- Budreck, D.E., Achenbach, J.D. (1988) Scattering from three-dimensional planar cracks by the boundary integral equation method. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 405-412.
- Castro, I., Tadeu, A. (2012) Coupling the BEM/TBEM and the MFS for the numerical simulation of elastic wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36, 169-180.
- Cheng, N., Cheng, C.H., Toksöz, M.N. (1995) Borehole wave propagation in three dimensions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97, 3483-3493.
- Chen, J.T., Hong, H.K. (1999) Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series. *Applied Mechanics Reviews*, 52, 17-33.
- Chen, C.S., Karageorghis, Smyrlis, Y.S., editors. *The Method of Fundamental Solutions: A Meshless Method*. Dynamic Publishers (2008).
- Cruse, T.A. (1987a) *Fracture Mechanics. Boundary Element Methods in Mechanics*, edited by D.E. Beskos, North Holland, Amsterdam, 333-365.
- Cruse, T.A. (1987b) *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Datta, S.K., Shah, A.H. (1982) Scattering of SH-waves by embedded cavities. *Wave Motion*, 4, 265-283.
- De Hoop, A.T., De Hon, B.P., Kurkjian, A.L. (1994) Calculation of transient tube wave signals in cross-borehole acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 95, 1773-1789.
- Dell'erba, D.N., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P. (1998) Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems. *International Journal of Fracture*, 94, 89-101.
- Dineva, P.S., Manolis G.D. (2001) Scattering of Seismic Waves by Cracks in Multi-layered Geological Regions: I. Mechanical Model; II. Numerical Results. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 21,615-625 e 627-641.
- Dong, W., Bouchon, M., Toksöz, M.N. (1995) Borehole seismic-source radiation in layered isotropic and anisotropic media: Boundary element modelling. *Geophysics*, 60, 735-747.
- Ellefsen, K.J. (1990) *Elastic wave propagation along a borehole in an anisotropic medium*. PhD thesis, MIT, Cambridge, MA.
- Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A. (2003) The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, 759-69.
- Galán, J.M., Abascal, R. (2004) Remote characterization of defects in plates with viscoelastic coatings using guided waves. *Ultrasonics*, 42, 877-882.
- Godinho, L., Tadeu, A., Branco, F.J. (2004) Dynamic analysis of submerged fluid-filled pipelines subjected to a point pressure load. *Journal of Sound and Vibration*, 271(1-2), 257-277.
- Godinho, L., Tadeu, A., Simões, N.A. (2006) *Accuracy of the MFS and BEM on the analysis of acoustic wave propagation and heat conduction problems*. Sladek Jan and Sladek Vladimir, editors. Advances in Meshless Methods: Tech Science Press.
- Godinho, L., Tadeu, A., Amado Mendes, P. (2007) Wave propagation around thin structures using the MFS. *Computers, Materials & Continua*, 5(2), 117-128.

- Godinho, L., Amado Mendes P., Tadeu, A., Cadena-Isaza, A., Smerzini, C., Sánchez-Sesma, F.J., Madec, R., Komatitsch, D. (2009) Numerical simulation of ground rotations along 2D topographical profiles under the incidence of elastic plane waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 2009, 99(2B), 1147-1161.
- Greenberg, M.D. (1971) *Application of Green's Functions in Science and Engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Guiggiani, M. (1998) *Formulation and numerical treatment of boundary integral equations with hypersingular kernels*. In: Sladek V, Sladek J, editors. *Singular Integrals in Boundary Element Methods*. Southampton and Boston: Computational Mechanics, Publications.
- He, Z.C., Liu, G.R., Zhong, Z.H., Zhang, G.Y., Cheng, A.G. (2011) A coupled ES-FEM/BEM method for fluid structure interaction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 140-147.
- Hong, H.K., Chen, J.T. (1988) Derivations of integral equations of elasticity. *The Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 114(6), 1028-1044.
- Huang, J.Y. (1995) Interaction of SH-waves with a finite crack in a half-space. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(2), 217-224.
- Ihlenburg, F., Germanischer, L. (1998) *Finite Element analysis of acoustic scattering*. Applied Mathematical Sciences. Springer.
- Jaswon, M.A., Symm, G.T. (1977) *Integral Equation Methods in Potential theory and Elastostatics*. Academic Press, London.
- Kausel, E., Roesset, J.M. (1992) Frequency domain analysis of undamped systems. *The Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 118(4), 721-734.
- Kausel, E. (1994) Thin-layer method: Formulation in the time domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(6), 927-941.

- Koguchi, H., Watabe, H. (1997) Improving defects search in structure by boundary element and genetic algorithm scan method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 19, 105-116.
- Kulowski, A. (1985) *Algorithmic representation of the ray tracing technique*. *Applied Acoustics*, 18, 449-469.
- Lee, V.W. (1977) On deformations near circular underground cavity subjected to incident plane SH waves. In: *Symposium on Applications Computer Methods in Engineering*, University of Southern California, Los Angeles, 951-961.
- Lee, V.W. (1988) Three-dimensional diffraction of elastic waves by a spherical cavity in an elastic half-space. 1: Closed-form solutions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 7, 149-161.
- Lee V.W., Karl J.A. (1992) Diffraction of SV waves by underground circular cylindrical cavities. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 11, 445-456.
- Leslie, H.D., Randall, C.T. (1992) Multipole sources in boreholes penetrating anisotropic formulations: Numerical and experimental results. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91, 12-27.
- Leutenegger, T., Dual, J. (2002) Detection of defects in cylindrical structures using a time reverse method and a finite-difference approach. *Ultrasonics*, 40, 721-725.
- Liu, G.R., Chen, S.C. (2001) Flaw detection in sandwich plates based on time-harmonic response using genetic algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 5505-5514.
- Liu, G.R. (2002) A combined finite element/strip element method for analyzing elastic wave scattering by cracks and inclusions in laminates. *Computational Mechanics*, 28, 76-81.
- Liu, S.W., Huang, J.H., Sung, J.C., Lee, C.C. (2002) Detection of cracks using neural networks and computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 2831-2845.

- Mahapatra, D.R., Gopalakrishnan, S. (2004) Spectral finite element analysis of coupled wave propagation in composite beams with multiple delaminations and strip inclusions. *International Journal of Solids and Structure*, 41, 1173-1208.
- Manolis, G.D., Beskos, D.E. (1988) *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Unwin Hyman (sold to Chapman and Hall), London.
- Norris, A.N., Sinha, B.K. (1983) Weak elastic anisotropy and the tube wave. *Geophysics*, 58, 1091-1098.
- Pao, Y.H., Mow C.C. (1973) *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*. Crane and Russak.
- París, F., Cañas, J. (1997) *Boundary Element Method: Fundamentals and Applications*, Oxford University Press.
- Prosper, D. (2001) *Modeling and Detection of Delaminations in Laminated Plates*. PhD Thesis, MIT, Cambridge.
- Prosper, D., Kausel, E. (2001) Wave scattering by cracks in laminated media. In: Atluri SN, Nishioka T, Kikuchi M (eds), CD: *Advances in Computational Engineering and Sciences. Proceedings of the international Conference on Computational Engineering and Science ICES'01*, Puerto Vallarta, Mexico, 19-25/08/2001. Tech Science Press.
- Richardson, J.D., Cruse, T.A. (1998) Nonsingular BEM for fracture modelling. *Computers and Structures*, 66(5), 695-703.
- Sánchez-Sesma, F.J., Iturrarán-Viveros, U. (2001) Scattering and diffraction of SH waves by a finite crack: an analytical solution. *Geophysical Journal International*, 145, 749-758.
- Santos, P., Tadeu, A. (2004) Scattering of seismic waves generated by an irregular seabed. *Computers and Structures*, 82(22), 1793-1804.
- Savioja, L., Rinne, T., Takala, T. (1994) Simulation of room acoustics with a 3-D finite difference mesh. *Proceedings ICMC'94*, Aarhus, Denmark, 463-466.



- Silveira, N.P.P., Guimarães, S., Telles, J.C.F. (1998) Accurate hypersingular integral computations in the development of numerical Green's functions for fracture mechanics. In: Sladek V. e Sladek J. (eds.), *Singular Integrals in Boundary Element Methods*, Computational Mechanics Publications, Southampton (UK) & Boston (USA), 197-222.
- Sinha, B.K., Norris, A.N., Chang, S.K. (1991) Borehole flexural modes in anisotropic formations. In *61st S.E.G Annual Meeting Expanded Abstracts*, Houston.
- Sladek, V., Sladek, J. (1984) Transient elastodynamic three-dimensional problems in cracked bodies. *Applied Mathematical Modelling*, 8, 2-10.
- Sládek, V., Sládek, J. (1987) A boundary integral equation method for dynamic crack problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(3), 269-277.
- Soares, Jr, Mansur, W.J., Von Estorff, O. (2007) An efficient time-domain FEM/BEM coupling approach based on FEM implicit Green's functions and truncation of BEM time convolution process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 1816-1826.
- Stamos, A.A., Beskos, D.E. (1996) 3-D seismic response analysis of long lined tunnels in half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 15(2), 111-118.
- Stephen, R.A., Cardo-Casas, F., Cheng, C.H. (1985) Finite difference synthetic acoustic logs. *Geophysics*, 50, 1588-1609.
- Tadeu, A., Kausel, E., Vrettos, C. (1996) Scattering of waves by subterranean structures via the boundary element method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 15(6), 387-397.
- Tadeu, A., Santos, P., Kausel, E. (1999a) Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements – Part I: SH wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23(8), 671-681.
- Tadeu, A., Santos, P., Kausel, E. (1999b) Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements – Part II: SV-P wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23(9), 757-768.

- Tadeu, A., Kausel, E. (2000) Green's Functions for Two-and-a-half Dimensional Elastodynamic Problems. *The Journal of Engineering Mechanics*, 126(10), 1093-1097.
- Tadeu, A., Godinho, L., Santos, P. (2001) Performance of the BEM solution in 3D acoustic wave scattering. *Advances in Engineering Software*, 32, 629-639.
- Tadeu, A., António, J., Kausel, E. (2002a) 3D Scattering of waves by a cylindrical irregular cavity of infinite length in a homogeneous elastic medium. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(27-28), 3015-3033.
- Tadeu, A., Godinho, L., Santos, P. (2002b) Wave motion between two fluid-filled boreholes in an elastic medium. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26, 101-117.
- Tadeu, A., Godinho, L. (2003) Scattering of acoustic waves by movable lightweight elastic screens. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(3), 215-226.
- Tadeu, A., Amado Mendes, P., António, J. (2006) The simulation of 3D elastic scattering produced by thin rigid inclusions using the traction boundary element method. *Computers and Structures*, 84(31-32), 2244-2253.
- Tadeu, A., Godinho, L., António, J., Amado Mendes, P. (2007) Wave propagation in cracked elastic slabs and half-space domains – TBEM and MFS approaches. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(10), 819-835.
- Tadeu, A., António, J., Godinho, L. (2009) Defining an Accurate MFS Solution for 2.5D Acoustic and Elastic Wave Propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(12), 1383-1385.
- Tadeu, A., António, J., Castro, I. (2010) Coupling the BEM/TBEM and the MFS for the numerical simulation of acoustic wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 405-416.
- Takakuda K. (1983) Diffraction of plane harmonic waves by cracks. *Bulletin of the JSME*, 26(214), 487-493.

- Thompson, L.L. (2006) A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(3), 1315-1330.
- Trifunac, M.D. (1971) Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61, 1755-1770.
- Warszawski, A., Soares, Jr, Mansur, W.J. (2008) A FEM–BEM coupling procedure to model the propagation of interacting acoustic–acoustic/acoustic–elastic waves through axisymmetric media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 3828-3835.
- Weifang, Z., Yongdong, W., Guorong, W., Yide, L. (2003) Analysis on acoustical scattering by a cracked elastic structure. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 16(3), 262-268.
- White, J.E., Sengbush, R.L. (1963) Shear waves from explosive sources. *Geophysics*, 28, 1001-1019.
- Wong, H.L., Trifunac, M.D. (1974) Surface motion of semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH-waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 64, 1389-1403.
- Yoon, K.H., McMechan, G.A. (1992) 3-D finite difference modelling of elastic waves in borehole environments. *Geophysics*, 57, 793-804.
- Young, A. (1992) A single-domain boundary element method for 3 D elastostatic crack analysis using continuous elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 1265-1293.



# CAPÍTULO 4

---

## 4 ACOPLAMENTO ENTRE O BEM E O MFS NA MODELAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM MEIOS HETEROGÊNEOS SÓLIDO-FLUIDO

### 4.1 INTRODUÇÃO

Vários métodos numéricos têm sido propostos para simular a propagação de ondas em meios elásticos e acústicos, após as soluções analíticas serem conhecidas para as geometrias simples e regulares (Trifunac, 1971; Pao e Mow, 1973; Wong e Trifunac, 1974; Lee, 1988; Lee e Karl, 1992; Sánchez-Sesma e Iturrarán-Viveros, 2001). Essas técnicas incluem o Método de Camada Fina (Thin Layer Method – TLM) (Kausel, 1994), o Método dos Elementos de Fronteira (BEM) (Aliabadi, 2002), o Método dos Elementos Finitos (FEM) (Ihlenburg, 1998; Thompson, 2006), o Método das Diferenças Finitas (FDM) (Chen *et al.*, 1994), o Método baseado no Traçado de Raios (Ray Tracing Technique) (Kulowski, 1985) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) (Chen *et al.*, 2008).

Destas técnicas, o FEM é sem dúvida o método numérico mais utilizado pelos investigadores e em softwares comerciais. Pode ser usado para resolver geometrias complexas, mas requer a discretização total do meio a ser modelado. A necessidade da discretização em domínios ilimitados ou em modelos de tamanho significativo torna o método computacionalmente inviável em muitos casos, a não ser que se

implementem alterações significativas no método. Estas podem implicar a utilização de elementos com pouca precisão, simulações apenas para frequências baixas, ou a introdução de elementos finitos que simulam a absorção ao longo de fronteiras pré-estabelecidas.

O BEM é uma das técnicas mais adequadas para a modelação da propagação de ondas em sistemas homogêneos, em campo infinito, contendo interfaces irregulares e inclusões. Na aplicação deste método apenas a fronteira das heterogeneidades necessita de ser discretizada e as condições em qualquer ponto do domínio ficam automaticamente satisfeitas (Stamos e Beskos, 1996; Tadeu *et al.*, 2002; António e Tadeu, 2002). Apesar disso, o BEM necessita do conhecimento prévio das soluções fundamentais (funções de Green) e também requer a integração correta da resultante dos integrais singulares e hipersingulares para garantir a sua eficiência. O número de elementos de fronteira depende da frequência de excitação, e é necessário um elevado número de elementos de fronteira para determinar as respostas no modelo para altas frequências, o que implica um custo computacional por vezes excessivamente alto.

Além disso, a simulação da propagação de ondas na presença de heterogeneidades muito finas, tais como fissuras, conduz a um sistema de equações mal condicionado, o que determina a degeneração das soluções (Dell'Erba *et al.*, 1998). O Método Dual dos Elementos de Fronteira (DBEM) é uma das formulações que tem sido proposta para superar este problema. A passagem da formulação original BEM em deslocamentos para uma formulação em trações torna-se necessária, nomeadamente em problemas da mecânica da fratura (Cruse, 1987a). Mas nem sempre é necessário usar esquemas híbridos para resolver estes tipos de problemas. Foram obtidos bons resultados em problemas bidimensionais elastodinâmicos envolvendo o acoplamento de diversos meios e fissuras, baseado em formulações BEM em deslocamentos (Dineva e Manolis, 2001). Usando o DBEM, após a discretização da superfície da inclusão, as cargas dipolares são aplicadas na superfície oposta, que é gerida pela equação integral dos elementos em tração (Aliabadi, 1997), enquanto as cargas monopolares são aplicadas ao longo da restante superfície, o que corresponde à aplicação da equação integral de deslocamentos. Para o caso de uma fissura vazia, com espessura tendencialmente nula a discretização é realizada ao longo de uma única linha aberta, em que os elementos de fronteira são carregados com cargas dipolares, usando apenas a equação integral formulada em trações (Takakuda, 1983; Cruse, 1987b; Sládek e Sládek; 1987). O aparecimento de integrais hipersingulares é uma das dificuldades colocadas pela formulação. No caso particular da propagação de ondas em meios 2D e 2.5D, estes integrais podem ser calculados analiticamente (Tadeu *et al.*, 2007).

Recentemente, têm sido propostas outras técnicas, métodos sem malha, que não requerem a discretização do domínio, nem o uso de elementos de fronteira (Fairweather *et al.*, 2003; Godinho *et al.*, 2009). O MFS (Jaswon e Symm, 1977) é um destes métodos que utiliza na sua formulação soluções fundamentais (Greenberg, 1971). O MFS evita a complexidade matemática do BEM, permite obter soluções aceitáveis na resolução de problemas de propagação de ondas, com menor custo computacional, como foi

comprovado por Godinho *et al.*, 2006 e por Tadeu *et al.*, 2009. A solução MFS é baseada numa combinação linear de soluções fundamentais (funções de Green), geradas por um conjunto de fontes fictícias virtuais para simular o campo de propagação direto e refletido produzido pelas fronteiras das heterogeneidades. De forma a evitar singularidades no sistema, estas fontes virtuais são colocadas a uma determinada distância das fronteiras das inclusões. O uso das soluções fundamentais permite determinar uma solução final, que verifica as condições de fronteira automaticamente. Contudo, o uso do MFS tem as suas próprias limitações quando se trata de inclusões finas, tais como fissuras ou inclusões com fronteiras sinuosas. A análise exigiria o uso de decomposição do domínio e / ou o uso de funções específicas para resolver o problema em causa, o que leva a um aumento do custo computacional (Alves, 2006). O número das fontes virtuais e as suas posições constituem outra dificuldade, pois os resultados são dependentes desses parâmetros. Entre as estratégias que têm sido propostas para lidar com este último problema há uma que consiste na verificação da exatidão da solução em pontos de colocação, junto à fronteira, onde as condições fronteira são conhecidas *a priori*.

Diferentes autores têm proposto o desenvolvimento de formulações que permitem determinar o estado da propagação de ondas em meios heterogêneos sólidos e fluidos e que superem as limitações individuais de cada um dos métodos, e que aproveitem as vantagens de cada um deles. Uma das técnicas consiste no acoplamento de diferentes métodos, acelerando assim a análise e garantindo uma melhor eficiência, estabilidade, precisão e flexibilidade nos resultados obtidos pelos novos métodos.

O acoplamento entre o BEM e o FEM tem sido desenvolvido e frequentemente utilizado, (Soares *et al.*, 2007; Warszawski *et al.*, 2008; He *et al.*, 2011). O acoplamento direto e o acoplamento iterativo são as duas abordagens mais utilizadas (Soares *et al.*, 2004; Soares *et al.*, 2005a; Soares *et al.*, 2005b). O acoplamento iterativo permite que os subdomínios possam ser analisados separadamente, levando a um sistema equações de menor dimensão e a um sistema com melhor acondicionamento, com discretizações independentes para cada subdomínio.

O acoplamento de métodos sem malha e do BEM é outra abordagem possível. O acoplamento entre o BEM ou TBEM com o MFS para analisar a propagação de ondas em meios heterogêneos sólido-fluido, onde estão inseridas múltiplas inclusões e heterogeneidades finas é o exemplo proposto neste capítulo. A abordagem é semelhante à utilizada nos capítulos anteriores, o domínio global é inicialmente dividido em subdomínios nos quais são modelados usando o BEM, o TBEM e/ou o MFS. Os subdomínios são posteriormente acoplados através da imposição das condições de fronteira necessárias (Tadeu *et al.*, 2010; Castro e Tadeu, 2012).

Neste capítulo pretende-se, então, estender o trabalho anterior, através de uma formulação que acopla o BEM / TBEM e o MFS para simular a propagação de ondas envolvendo a interação de fluido-sólido, como no caso de sistemas constituídos por meios elásticos e meios acústicos (António *et al.*, 2009; Rodríguez-Castellanos *et al.*, 2011). A simulação numérica revela-se útil quando se pretende entender

melhor a propagação das ondas na presença de inclusões, particularmente em meios fissurados e em zonas danificadas, quando nem sempre é fácil de interpretar os resultados registrados (Dresen *et al.*, 2010; Qu *et al.*, 2011).

A técnica proposta é formulada no domínio da frequência. As ondas geradas pelas fontes virtuais usadas pelo MFS são vistas como ondas incidentes pelo BEM / TBEM, enquanto o BEM vê os pontos de colocação, utilizados para impor as condições de fronteira nas suas interfaces, modelados com o recurso ao MFS, como recetores. A abordagem é implementada para problemas gerais em 2.5D. A precisão dos algoritmos de acoplamento propostos, usando combinações diferentes de BEM / TBEM e formulações MFS, são verificados, usando soluções de referência.

As formulações de acoplamento propostas para simular a propagação de ondas na presença de inclusões fluidas e elásticas são descritas nas próximas secções deste capítulo. Pretende-se também mostrar a eficiência computacional das formulações através da medição do tempo de cálculo, CPU Time. Finalmente, a aplicabilidade do método proposto é ilustrada por meio de um exemplo numérico que simula a propagação de ondas geradas por um carregamento bidimensional, num meio elástico que se encontra fissurado e possui uma inclusão fluida no seu interior.

## 4.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considerem-se duas inclusões cilíndricas irregulares e bidimensionais, 1 e 2, com comprimento infinito, num meio elástico, espacialmente uniforme e infinito (Meio 1), com massa volúmica  $\rho_1$  (ver Figura 4.1), com velocidade de propagação das ondas P (ondas dilatacionais)  $\alpha_1$ , e com uma velocidade de propagação das ondas S (ondas de corte)  $\beta_1$ . O Meio 2, no interior da Inclusão1, é um meio acústico, com uma massa volúmica  $\rho_2$  e permite que ondas de pressão (Ondas P) viajem com uma velocidade igual a  $\alpha_2$ . A Inclusão 2 é elástica (Meio 3), com uma massa volúmica  $\rho_3$ , com uma velocidade de propagação das ondas P (ondas dilatacionais)  $\alpha_3$  e com uma velocidade de propagação das ondas S (ondas de corte)  $\beta_3$ .

Considere-se, ainda, que este sistema está sujeito a uma fonte pontual dilatacional linear, localizada em  $(x_s, y_s)$  cuja amplitude varia sinusoidalmente ao longo de  $z$ .

No domínio da frequência, o campo de ondas incidentes gerado por essa fonte que oscila num meio uniforme elástico, sem amortecimento intrínseco, não confinado, pode ser expresso por meio do potencial dilatacional clássico:



$$\phi_{\text{inc}}(\omega, x, y, k_z) = \frac{-iA}{2} H_0 \left( k_{\alpha_1} \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2} \right), \quad (4.1)$$

em que  $H_n(\dots)$  representa as funções de Hankel do segundo tipo e de ordem  $n$ ,  $i = \sqrt{-1}$  e  $k_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha_1^2} - k_z^2}$ , com  $\text{Im}(k_{\alpha_1}) < 0$ , onde  $k_z$  é o número de onda axial.

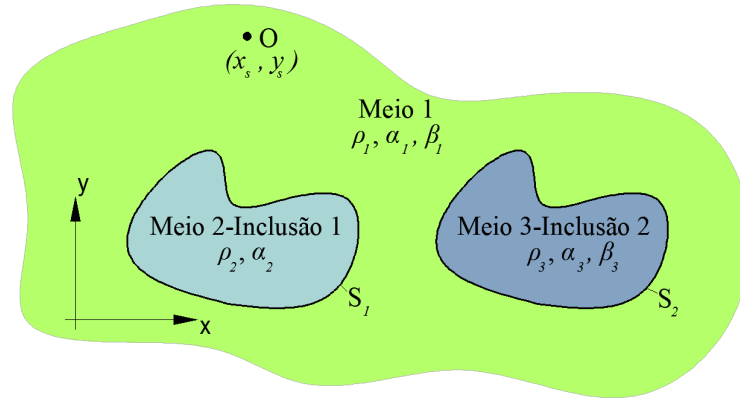


Figura 4.1: Representação esquemática com definição genérica da geometria do problema, com inclusões fluida e elástica, respetivamente, embebidas num meio elástico homogêneo, não confinado.

Assumindo a existência de um conjunto infinito de fontes virtuais, igualmente espaçadas ao longo da direção longitudinal  $z$ , o campo de ondas incidente, gerado pela fonte 3D, pode ser aproximado por um somatório discreto de campos bidimensionais,

$$\phi_{\text{inc}}(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L_{\text{vs}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{\text{inc}}(\omega, x, y, k_{zm}) e^{-ik_{zm}z}, \quad (4.2)$$

onde  $L_{\text{vs}}$  representa o espaçamento entre as várias fontes virtuais. Este valor deve ser suficientemente elevado de forma a evitar perturbações na resposta entre fontes adjacentes (Bouchon e Aki, 1977), e  $k_{zm}$  representa distintos números de onda,  $k_{zm} = \frac{2\pi}{L_{\text{vs}}} m$ .

Para o caso de problemas em 2.5D, a geometria mantém-se constante ao longo de uma direção ( $z$ ). Nesse sentido, o campo de ondas tridimensional pode exprimir-se como a soma de problemas bidimensionais, correspondentes a cargas lineares harmónicas cuja amplitude varia sinusoidalmente ao longo daquela direção. Aquele somatório converge e pode ser aproximado por um número finito de termos (Tadeu e Kausel, 2000), com  $m = -M, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M$ ,

$$\phi_{\text{inc}}(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L_{\text{vs}}} \sum_{m=-M}^M \phi_{\text{inc}}(\omega, x, y, k_{zm}) e^{-ik_{zm}z}, \quad (4.3)$$

É possível demonstrar que este somatório discreto corresponde a um conjunto infinito de fontes virtuais, espaçadas periodicamente ao longo da direção  $z$ , de uma distância  $L_{\text{vs}}$ .

O campo de deslocamento pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} u_x^{\text{inc}}(x, y, x_s, y_s, \omega) &= \frac{iA}{2} k_{\alpha_1} H_1(k_{\alpha_1} r) \frac{\partial r}{\partial x} \\ u_y^{\text{inc}}(x, y, x_s, y_s, \omega) &= \frac{iA}{2} k_{\alpha_1} H_1(k_{\alpha_1} r) \frac{\partial r}{\partial y}, \\ u_z^{\text{inc}}(x, y, x_s, y_s, \omega) &= \frac{A}{2} k_z H_0(k_{\alpha_1} r) \end{aligned} \quad (4.4)$$

### 4.3 FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO DE INTEGRAIS DE FRONTEIRA EM MEIOS ELÁSTICOS CONTENDO MEIOS HETEROGÊNEOS SÓLIDOS E FLUIDOS

Nesta secção, são apresentadas as equações finais, para determinar a propagação de ondas no meio elástico, geradas por uma fonte dilatacional situada na vizinhança, mas fora de duas inclusões submersas com formas irregulares e homogêneas. Para a modelação do sistema apresentado na Figura 4.2 é utilizada uma formulação de acoplamento entre o BEM, para a modelar a fronteira da primeira inclusão, e o MFS, para modelar a inclusão. A primeira inclusão é constituída por um meio fluido e a segunda inclusão por um meio elástico. A discretização considerada é ilustrada na Figura 4.2, onde se podem observar os elementos de fronteira utilizados para discretizar a primeira inclusão e as posições das fontes virtuais e os pontos de colocação, para modelar a segunda inclusão.

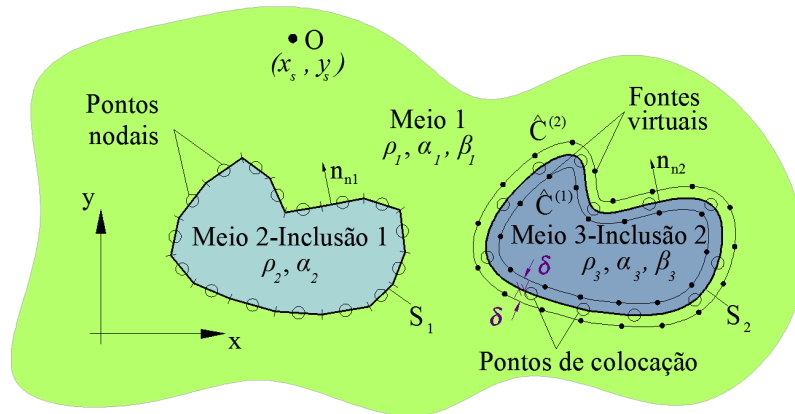


Figura 4.2: Discretização do sistema através da formulação BEM para a primeira inclusão, constituída por um meio fluido, e MFS para a segunda, preenchida por um meio elástico (a direção normal,  $n_{n1}$  e  $n_{n2}$  representadas, corresponde à equação estabelecida no domínio exterior às respetivas inclusões): elementos de fronteira, posição das fontes virtuais e pontos de colocação.

### 4.3.1 Formulação de acoplamento (BEM/MFS)

#### 4.3.1.1 Meio elástico infinito com inclusões fluida e elástica

Considere-se um meio elástico linear e homogéneo, de extensão infinita, onde se inserem duas inclusões com geometria bidimensional limitadas pelas fronteiras  $S_1$  e  $S_2$ . Este sistema físico encontra-se sob a ação de carregamentos correspondentes a cargas lineares harmónicas sinusoidais (segundo  $z$ ), localizadas nas coordenadas  $(x_s, y_s)$ , no meio elástico exterior de propagação.

Considerando a Inclusão 1, delimitada pela superfície  $S_1$ , e sujeita a um campo incidente, dado por  $u_{inc}$ , a equação integral do elemento de fronteira pode ser deduzida, pela aplicação do teorema da reciprocidade (Manolis e Beskos, 1988) levando a:

a) No domínio exterior à Inclusão 1 (Meio 1):

Considerando o caso específico de uma inclusão fluida inserida num meio elástico e modelada através do Método dos Elementos de Fronteira, ao longo da qual são impostas, como condições de fronteira, as continuidades de tensões normais e os deslocamentos, com tensões tangenciais nulas, e, aplicando à

equação integral, num ponto sobre a fronteira da inclusão, obtém-se a expressão vetorial resultante para o estudo da propagação de ondas num meio elástico infinito, na presença de uma inclusão fluida, e quando o sistema é perturbado por um campo de ondas harmónicas incidente:

$$c_{ij}u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = \int_{S_1} t_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_{i1}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega), \quad (4.5)$$

Nesta equação,  $i, j = 1, 2$  representam, respetivamente as direções normal e tangencial relativa à superfície da inclusão, enquanto  $i, j = 3$  corresponde à direção constante  $z$ . Nestas equações, o índice 1 corresponde ao domínio exterior, Meio 1;  $\mathbf{n}_{n1}$  é o vetor unitário, com sentido exterior, normal ao longo da fronteira  $S_1$ , em  $(x, y)$ , definido pelo vetor  $\mathbf{n}_{n1} = (\cos \theta_{n1}, \sin \theta_{n1})$ .  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega)$  definem as soluções fundamentais em termos de deslocamentos e tensões (funções de Green), na direção  $j$  da superfície  $S_1$  em  $(x, y)$ , causada por um carregamento virtual num ponto unitário, na direção  $i$  aplicado no ponto de aplicação,  $(x_0, y_0)$ . O efeito do campo de ondas incidente no ponto  $(x, y)$  provocado por uma fonte dilatacional localizada em  $(x_s, y_s)$ , em termos de deslocamentos é definido por  $u_j^{(1)}(x, y, \omega)$  na direção  $j$  em  $(x, y)$ , enquanto  $t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega)$  especifica as tensões nodais na direção  $j$  na fronteira em  $(x, y)$ .  $u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega)$  representa em termos de deslocamentos o campo incidente em  $(x_0, y_0)$  ao longo da direção  $i$ , quando a fonte é localizada em  $(x_s, y_s)$ . O coeficiente  $c_{ij}$  resulta da aplicação da equação integral sobre um ponto da fronteira, dependendo da geometria local desta, tomando um valor igual a  $\delta_{ij}/2$ , com  $\delta_{ij}$  a função delta de Kronecker, quando a fronteira é contínua sem pontos angulosos.

As funções de Green para os deslocamentos na direção  $x, y, z$  no meio sólido são descritas no Apêndice A.2, e as suas derivadas podem ser obtidas em (Tadeu e Kausel, 2000).

A equação integral de fronteira (4.5) ainda não considera a presença da inclusão vizinha, Inclusão 2, a qual é modelada por outra formulação, o MFS. Este método numérico assume que a resposta desta segunda inclusão é definida, como uma combinação linear das soluções fundamentais, simulando o campo de deslocamentos gerado por dois conjuntos de  $NS$  fontes virtuais. Estas fontes virtuais são distribuídas ao longo da superfície da inclusão  $S_2$  e são distribuídas com uma determinada distância  $\delta$  da fronteira, para o interior e para o exterior da inclusão (linhas  $\hat{C}^{(1)}$  e  $\hat{C}^{(2)}$ , respetivamente, representadas na Figura 4.2) a fim de evitar singularidades. As fontes que estão situadas no interior da inclusão têm

amplitudes desconhecidas  $a_{nj,n\_ext}^{(2)}$ , enquanto aquelas que estão localizadas fora da inclusão, no exterior, têm amplitudes desconhecidas  $a_{nj,n\_int}^{(2)}$ . No exterior e interior da inclusão, em meios elásticos, os campos de deslocamentos são definidas por:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)}(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x, y, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \\ u_i^{(3)}(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_int}^{(2)} G_{ji}^{(3)}(x, y, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega) \end{aligned} \quad , \quad (4.6)$$

onde  $G_{ji}^{(1)}(x, y, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)$  e  $G_{ji}^{(3)}(x, y, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega)$  são as soluções fundamentais (Funções de Green), representando os deslocamentos nos pontos  $(x, y)$  nos meios 1 e 3, na direção  $i$ , causados por um carregamento unitário na direção  $j$  aplicado na posição  $(x_{n\_ext}, y_{n\_ext})$  e  $(x_{n\_int}, y_{n\_int})$ .  $n\_ext$  e  $n\_int$  são os índices que identificam o número de fontes virtuais colocadas ao longo das linhas  $\hat{C}^{(1)}$  e  $\hat{C}^{(2)}$ , respetivamente.

O campo de deslocamentos gerado por esta segunda inclusão pode ser visto como um campo incidente que atinge a primeira inclusão. Então, a equação (4.5) é alterada de acordo com a expressão seguinte,

$$\begin{aligned} c_{ij} u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) &= \int_{S_1} t_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_{i1}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega), \\ &\quad + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \end{aligned} \quad (4.7)$$

b) No domínio interior da Inclusão 1 (Meio 2):

Considerando, o caso de uma inclusão fluida, modelada através do Método dos Elementos de Fronteira, a aplicação da equação integral, num ponto sobre a fronteira da inclusão, permite obter a seguinte equação integral, para o interior dessa inclusão fluida:

$$\begin{aligned} c p^{(2)}(x_0, y_0, \omega) &= \int_{S_1} q^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) G_f^{(2)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\ &\quad - \int_{S_1} H_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) p^{(2)}(x, y, \omega) ds \end{aligned} \quad , \quad (4.8)$$

Nesta equação anterior, o índice 2 corresponde ao domínio interior da Inclusão 1 (Meio 2), como já foi referido anteriormente.  $G_f^{(2)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $H_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega)$  são funções de Green que representam as pressões e os fluxos de pressão na fronteira  $S_1$  em  $(x, y)$ , causada por uma carga de pressão unitária no ponto nodal  $(x_0, y_0)$  (ver Apêndice C.1).  $p^{(2)}(x, y, \omega)$  corresponde à pressão em  $(x, y)$ ,  $q^{(2)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega)$  especifica o fluxo de pressão ao longo da fronteira em  $(x, y)$ . Refira-se, ainda, a mudança de direção do vetor unitário,  $\mathbf{n}_{n1}$ , aplicado na fronteira dessa inclusão, apontando agora para o interior.

c) No domínio interior e exterior da Inclusão 2 (Meio 1 e 3):

Como se referiu anteriormente, a Inclusão 2 é modelada com recurso ao Método das Soluções Fundamentais, na qual não é necessário discretizar o domínio, nem a fronteira da inclusão, bastando apenas combinar as soluções fundamentais geradas por um conjunto de fontes virtuais.

A determinação das amplitudes desconhecidas nos pontos de carregamento virtuais  $a_{nj,n\_ext}^{(2)}$  e  $a_{nj,n\_int}^{(2)}$  é necessária à imposição da continuidade das tensões e dos deslocamentos na fronteira  $S_2$ , pertencente à fronteira da Inclusão 2, ao longo dos  $NS$  pontos de colocação  $(x_{col}, y_{col})$ . Isso deve ser realizado de modo a ter em consideração o campo incidente gerado pela Inclusão 1.

Assim, a equação de deslocamentos na fronteira da Inclusão 2,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} t_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_{i1}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \omega) ds - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_{col}, y_{col}, \omega) ds \\ + u_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) \quad , \quad (4.9) \\ = \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_int}^{(2)} G_{ji}^{(3)}(x_{col}, y_{col}, x_{n\_int}, y_{n\_int}, \omega) \end{aligned}$$

A partir da equação anterior, de deslocamentos, é possível determinar a equação referente às tensões,

$$\begin{aligned}
& \int_{S_1} I_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_1, \boldsymbol{\omega}) \bar{G}_{i1}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_2, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds \\
& - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \boldsymbol{\omega}) \bar{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds + \bar{u}_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_2, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) + \\
& \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} \bar{G}_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_2, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \boldsymbol{\omega}) \\
& = \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{int}}^{(2)} \bar{G}_{ji}^{(3)}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_2, x_{n_{int}}, y_{n_{int}}, \boldsymbol{\omega})
\end{aligned} \tag{4.10}$$

As funções de Green  $\bar{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  e  $\bar{G}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_2, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  são definidas pela aplicação do operador em trações  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_1, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  e  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$ , que podem ser obtidas através da combinação das derivadas das funções de Green, em ordem de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , de modo a obter tensões (ver Apêndice B). Nestas equações,  $\mathbf{n}_2$  é o valor unitário normal, apontando para o exterior da superfície  $S_2$ , nos pontos de colocação  $(x_{col}, y_{col})$ .

#### d) Sistema final de equações

A solução global é obtida pela resolução das equações (4.7) a (4.10). Isto requer a discretização da superfície  $S_1$ , pertencente à Inclusão 1, em  $N$  elementos de fronteira retos, com um ponto nodal no centro de cada elemento. Para a segunda inclusão é necessária a colocação de  $NS$  fontes virtuais, ao longo do exterior e interior dessa inclusão, com um determinado afastamento de fronteira,  $\delta$  (conforme esquematizado na Figura 4.2).

As integrações, descritas nas equações (4.7) a (4.10), são singulares, quando o elemento a ser integrado coincide com o elemento carregado. Estes integrais podem ser determinados analiticamente, seguindo as expressões de Tadeu *et al.*, 1999a e Tadeu *et al.*, 1999b. Quando o elemento a ser integrado é diferente do elemento carregado, aplicam-se as integrações necessárias, que são obtidas através da quadratura de Gauss.

As equações integrais finais são alteradas e combinadas de modo a impor a continuidade de tensões e de deslocamentos normais, com tensões tangenciais nulas ao longo da fronteira da Inclusão 1, e a continuidade de tensões e de deslocamentos ao longo da fronteira da Inclusão 2. Aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada, obtém-se um sistema de  $[(6NS + 4N) \times (6NS + 4N)]$  equações, formado pelas equações integrais de fronteira.

A relação  $u_1^{(1)} = -\left(\frac{1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\partial p^{(2)}}{\partial \mathbf{n}_{n1}}\right)$  é usada para relacionar os gradientes de pressão e deslocamentos, enquanto a pressão normal corresponde a tensões normais.

A resolução deste sistema de equações fornece os deslocamentos e tensões normais, nos vários pontos nodais, ao longo da fronteira  $S_1$  e as amplitudes inicialmente desconhecidas,  $a_{nj,n\_ext}^{(2)}$  e  $a_{nj,n\_int}^{(2)}$ . Sendo assim, é possível determinar o campo de pressões a ser definido no meio acústico, interior da Inclusão 1, e o campo de deslocamentos no interior da Inclusão 2 e no meio infinito exterior (Meio 1).

#### 4.3.1.2 Meio elástico infinito com inclusões fluida e rígida

Considere-se o caso apresentado inicialmente, em que existem duas inclusões embebidas no meio elástico infinito. A primeira inclusão é constituída por um fluido e a segunda inclusão, agora, apresenta um material rígido, no seu interior. Sendo assim, têm de se garantir deslocamentos nulos na superfície da Inclusão 2, em  $S_2$ .

A imposição de deslocamentos nulos, na equação integral de fronteira, no domínio da Inclusão 2, leva à simplificação da equação (4.9),

$$\int_{S_1} t_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) G_{i1}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \omega) ds - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_{col}, y_{col}, \omega) ds + u_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega) = 0 \quad (4.11)$$

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira e é discretizada como linhas retas, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (localizadas no interior), seguindo o procedimento descrito anteriormente. As equações integrais de fronteira que definem o domínio exterior e interior da Inclusão 1, equações (4.7) e (4.8), são mantidas e combinadas com a equação integral final (4.11), que impõe deslocamentos nulos na fronteira  $S_2$ . Aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada, obtém-se, assim, um sistema de  $[(3NS + 4N) \times (3NS + 4N)]$  equações.



### 4.3.1.3 Meio elástico infinito com inclusões fluida e vazia/cavidade

Considere-se, novamente, o caso ilustrado inicialmente na Figura 4.2, em que a segunda inclusão embendada no meio elástico infinito é agora uma cavidade. Sendo assim, são impostas tensões nulas ao longo da superfície da inclusão,  $S_2$ .

A imposição de tensões nulas, na fronteira da Inclusão 2, permite a simplificação da equação (4.10),

$$-\sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) \bar{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega) ds + \bar{u}_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} \bar{G}_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \omega) = 0 \quad (4.12)$$

Como foi descrito na secção anterior, a solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira, enquanto a superfície  $S_2$  é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores). As equações integrais de fronteira que definem o domínio exterior e interior da Inclusão 1, equações (4.7) e (4.8), são mantidas e são combinadas com a equação integral final (4.12), que impõe tensões nulas na fronteira  $S_2$ . Aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada, obtém-se um sistema de  $[(3NS + 4N) \times (3NS + 4N)]$  equações.

## 4.3.2 Formulação de acoplamento (TBEM/MFS)

### 4.3.2.1 Meio elástico infinito com inclusões fluida e elástica

Considere-se, novamente, o meio elástico, homogéneo e infinito, em que uma das inclusões apresenta uma geometria fina, preenchida por um material fluido. O método de acoplamento é definido pela formulação hipersingular do Método dos Elementos de Fronteira (TBEM) e pelo Método das Soluções Fundamentais (MFS), capaz de resolver problemas de modelação da propagação de ondas em meios elásticos infinitos, na presença de inclusões finas.

Para ultrapassar as limitações apresentadas pelo BEM, para a resolução de um sistema, incorporando inclusões finas (Tadeu *et al.*, 2006; Amado Mendes e Tadeu, 2006), procede-se à derivada das equações integrais em deslocamentos da formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira e combinando-as segundo a direção normal ao ponto de colocação, de acordo com a lei de Hooke, deduz-se

a formulação hipersingular do Método dos Elementos de Fronteira (Hong e Chen, 1988, Silveira *et al.*, 1998, Prosper, 2001). Para problemas físicos, nos quais são apresentados sistemas que contenham, para além de heterogeneidades, também incluam inclusões irregulares, podem criar-se formulações mais eficazes e eficientes. Para tal o TBEM pode ser acoplado com o Método das Soluções Fundamentais, em que o TBEM pode ser formulado através da aplicação de cargas dipolares, em vez de cargas monopolares.

Seguindo estes pressupostos e considerando o problema físico anterior, em que a primeira inclusão é modelada com TBEM e a segunda com MFS, a equação referente ao domínio exterior da primeira inclusão, equação anterior (4.7), é substituída para dar a equação seguinte em trações,

$$\begin{aligned}
a_{ij} u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) + c_{il} t_l^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n1}, \omega) &= \int_{S_1} t_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_{il}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds \\
&- \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) \overline{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{-inc}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega), \\
&+ \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n\_ext}^{(2)} \overline{G}_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

No que diz respeito à equação integral referente ao domínio interior da inclusão modelada com o TBEM, a equação anterior (4.8) é substituída pela equação,

$$\begin{aligned}
a p^{(2)}(x_0, y_0, \omega) + c q^{(2)}(x_0, y_0, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) &= \int_{S_1} q^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_f^{(2)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds \\
&- \int_{S_1} \overline{H}_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) p^{(2)}(x, y, \omega) ds,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Como foi observado por Guiggiani (1998), o coeficiente  $a_{ij}$  depende da geometria local junto do ponto de colocação, sendo nulo para elementos de fronteira retilíneos. O fator  $c_{ij}$  e os vetores unitários  $\mathbf{n}_{n1}$  e  $\mathbf{n}_{n2}$  são constantes, conforme definidos anteriormente.

Para a formulação de acoplamento entre o TBEM (para a primeira inclusão) e o MFS (para a segunda inclusão) as equações (4.9) e (4.10) referentes às equações integrais da superfície  $S_2$ , podem ser mantidas.

As funções de Green,  $\overline{G}$  e  $\overline{H}$ , estão apresentadas nos Apêndice B e C deste capítulo.

As soluções destas equações são definidas por discretização da superfície da fronteira ( $S_1$ ) em  $N$  elementos de fronteira retilíneos, com um ponto nodal no meio de cada elemento. As integrações das equações (4.9), (4.10), (4.13) e (4.14) são realizadas através de uma quadratura de Gauss quando o elemento a ser integrado não é o elemento carregado. Quando o elemento a ser integrado é o próprio

elemento carregado, os integrais tornam-se hipersingulares. A solução analítica para estes integrais hipersingulares pode ser obtida de forma indireta. Esta consiste em definir o equilíbrio dinâmico de um semicilindro limitado inferiormente por cada um dos elementos de fronteira (Tadeu *et al.*, 2006; Amado Mendes e Tadeu, 2006).

Estas equações, em conjunto com a aplicação de condições de fronteira, especificam a continuidade de tensões normais e deslocamentos, com tensões tangenciais nulas ao longo da fronteira da Inclusão 1, e a continuidade de deslocamentos e tensões ao longo da fronteira da Inclusão 2, e permitem estabelecer um sistema de  $[(6NS + 4N) \times (6NS + 4N)]$  equações lineares.

A presente abordagem supera a dificuldade de um corpo esbelto, gerado pela formulação clássica BEM. A aplicação direta deste método hipersingular permite que uma inclusão vazia, rígida, ou apresentando uma espessura nula, possa ser modelada usando uma única linha aberta de elementos de fronteira.

#### 4.3.2.2 *Meio elástico infinito com inclusões fluida e rígida*

Considere-se o mesmo problema e as equações apresentadas na secção anterior, no qual se pretende que a inclusão modelada com a formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira seja agora modelada utilizando essa formulação em Trações.

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira e é modelada como uma linha reta, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito acima. As equações integrais finais (4.11), (4.13) e (4.14) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, deslocamentos nulos na Inclusão 2, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se, assim, um sistema de  $[(3NS + 4N) \times (3NS + 4N)]$  equações.

#### 4.3.2.3 *Meio elástico infinito com inclusões fluida e vazia/cavidade*

Considere-se, novamente, o caso ilustrado inicialmente na Figura 4.2, em que a segunda inclusão embebida no meio elástico infinito é apresentada agora como uma cavidade. Sendo assim, têm de se impor tensões nulas ao longo da superfície da inclusão,  $S_2$ .

A solução integral de fronteira ao longo da superfície ( $S_1$ ) requer a discretização em  $N$  elementos de fronteira e é modelada como uma linha reta, enquanto a superfície da Inclusão 2 é modelada com recurso a  $NS$  pontos de colocação / fontes virtuais (interiores), seguindo o procedimento semelhante ao descrito

acima. As equações integrais finais (4.12), (4.13) e (4.14) são combinadas de modo a impor as condições de fronteira, tensões nulas, na Inclusão 2, aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada. Obtém-se, assim, um sistema de  $[(3NS + 4N) \times (3NS + 4N)]$  equações.

### **4.3.3 Formulação de acoplamento (TBEM+BEM/MFS)**

#### *4.3.3.1 Meio elástico infinito com inclusões fluida e elástica*

Considere-se, novamente, o caso apresentado anteriormente (Figura 4.2), em que as formulações de deslocamento e tensões também podem ser combinadas de forma dual, para resolver problemas de propagação de ondas em meios elásticos, contendo inclusões finas preenchidas.

A inclusão que foi inicialmente modelada com recurso ao BEM pode ser agora modelada, parte da superfície da inclusão  $S_1$  com o Método dos Elementos de Fronteira (carregada com cargas monopolares), enquanto a outra parte pode ser modelada com equações integrais de fronteira hipersingulares (carregada com cargas dipolares). As condições de fronteira, a dimensão do sistema de equações e os valores nodais mantêm-se, tal como se utilizasse apenas uma das formulações de elementos de fronteira.

A segunda inclusão é modelada com recurso ao MFS, e as equações integrais de fronteira mantêm-se iguais ao estabelecido nas secções anteriores. Sendo assim, é possível determinar, de forma análoga, o acoplamento das formulações para este tipo de problemas.

## **4.4 VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO DE ACOPLAMENTO**

### **4.4.1 Meio elástico infinito com inclusões fluida e elástica**

O algoritmo de acoplamento proposto (BEM/MFS), descrito anteriormente, é verificado comparando os resultados com as soluções BEM e MFS, resolvendo o campo de ondas num meio elástico que contém duas inclusões circulares, centradas em  $(0.0\text{m}, 20.0\text{m})$  e  $(22.0\text{m}, 5.0\text{m})$ , com raios de 5.0 m e 6.0 m, respetivamente (ver Figura 4.3).

O meio elástico infinito é homogéneo ( $\rho_1 = 2140 \text{ kg/m}^3$ ) e permite velocidades de propagação das ondas dilatacionais  $\alpha_1 = 4208 \text{ m/s}$  e uma velocidade de propagação das ondas de corte igual a  $\beta_1 = 2656 \text{ m/s}$ . O fluido da Inclusão 1 exibe uma massa volúmica igual a  $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$  e permite uma velocidade das ondas P de  $\alpha_2 = 1500 \text{ m/s}$ , enquanto a segunda inclusão, elástica, possui uma massa volúmica  $\rho_3 = 2250 \text{ kg/m}^3$  e apresenta uma velocidade de propagação das ondas dilatacionais e das ondas de corte igual a  $\alpha_3 = 2630 \text{ m/s}$  e  $\beta_3 = 1416 \text{ m/s}$ , respetivamente.

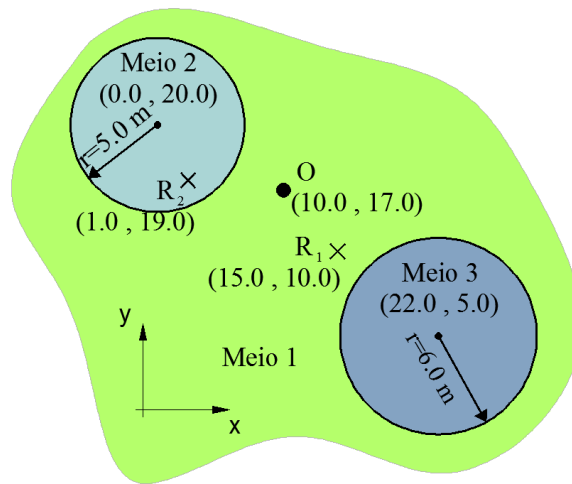


Figura 4.3: Geometria das duas inclusões circulares, constituídas por um meio fluido e elástico, respetivamente, embebidas num meio elástico infinito e homogéneo: posição da fonte dilatacional; recetores situados no meio exterior e no interior da Inclusão 1.

O sistema é excitado por uma fonte dilatacional cilíndrica e harmónica, aplicada no ponto O (10.0m,17.0m), onde a amplitude varia sinusoidalmente na terceira dimensão de acordo com  $k_z = 0.2 \text{ rad/m}$ .

Os deslocamentos e as pressões são calculados para os recetores  $R_1$  e  $R_2$ , localizados no meio elástico exterior e interior da Inclusão 1, em (15.0m,10.0m) e (1.0m,19.0m), respetivamente. Os cálculos são realizados no domínio da frequência, no intervalo entre os 1 Hz e os 200 Hz.

Para as inclusões modeladas com o MFS, as distâncias entre as fontes virtuais (interiores e exteriores) e os pontos de colocação foram definidas através do cálculo de erros ao longo da fronteira. Para avaliar esta distância foram colocados recetores ao longo da fronteira e avaliada a diferença em relação às condições de fronteira. O erro global naquela fronteira é encontrado calculando o erro global ao longo desta superfície, gerado pela diferença entre as respostas daqueles recetores e as condições fronteira prescritas.

Assim, as distâncias finalmente adotadas para a posição das fontes virtuais foram as que determinaram menores erros.

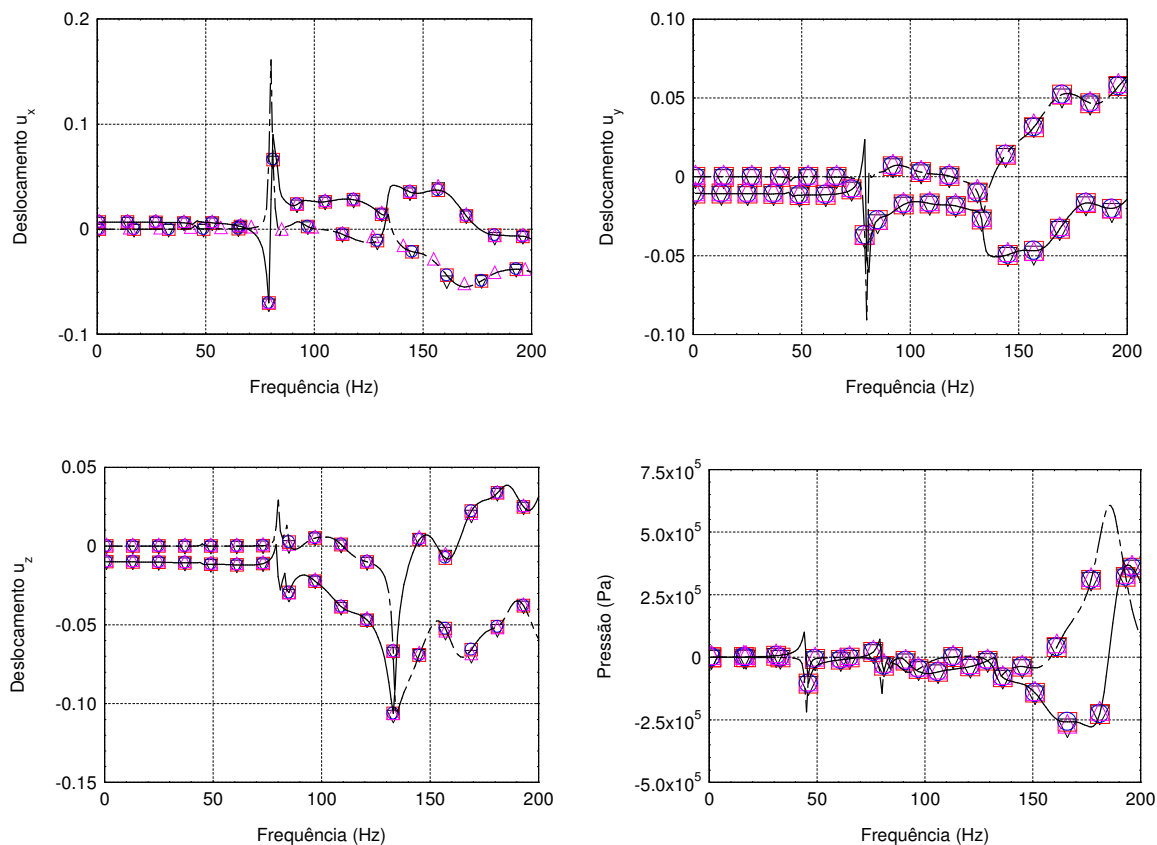


Figura 4.4: Deslocamentos, nas 3 componentes ( $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ), no recetor  $R_1$  e pressão no recetor  $R_2$  para as formulações BEM, MFS e de acoplamento, quando o sistema é excitado por uma fonte dilatacional localizada no exterior às inclusões fluido e elástico: — BEM;  $\triangle$  TBEM/BEM;  $\circ$  MFS;  $\square$  BEM/MFS;  $\nabla$  TBEM/MFS.

A solução de referência considerada é aquela que resolve o sistema utilizando o Método dos Elementos de Fronteira para modelação de ambas as inclusões. São utilizadas as funções de Green para a resolução de um meio elástico e infinito. Os deslocamentos nas componentes  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  (recetor  $R_1$ ) e a pressão (recetor  $R_2$ ) são calculados e são apresentados na Figura 4.4, em que a parte real é apresentada por uma linha contínua e a parte imaginária é apresentada por uma linha descontínua. As respostas produzidas pela solução de referência estão representadas por linhas, quando cada inclusão é modelada por 200 elementos de fronteira. As restantes formulações são representadas por marcadores e designados por TBEM/TBEM, MFS, BEM/MFS e TBEM/MFS. Também para estas formulações são usados 200 elementos de fronteira e 200 fontes virtuais para cada inclusão.

Os resultados apresentados demonstram uma boa concordância entre as soluções de acoplamento propostas e ambos os modelos individuais BEM e MFS. Fica, assim, validado o método proposto de acoplamento para a modelação de um meio elástico, onde estão embebidas inclusões elástica e fluida.

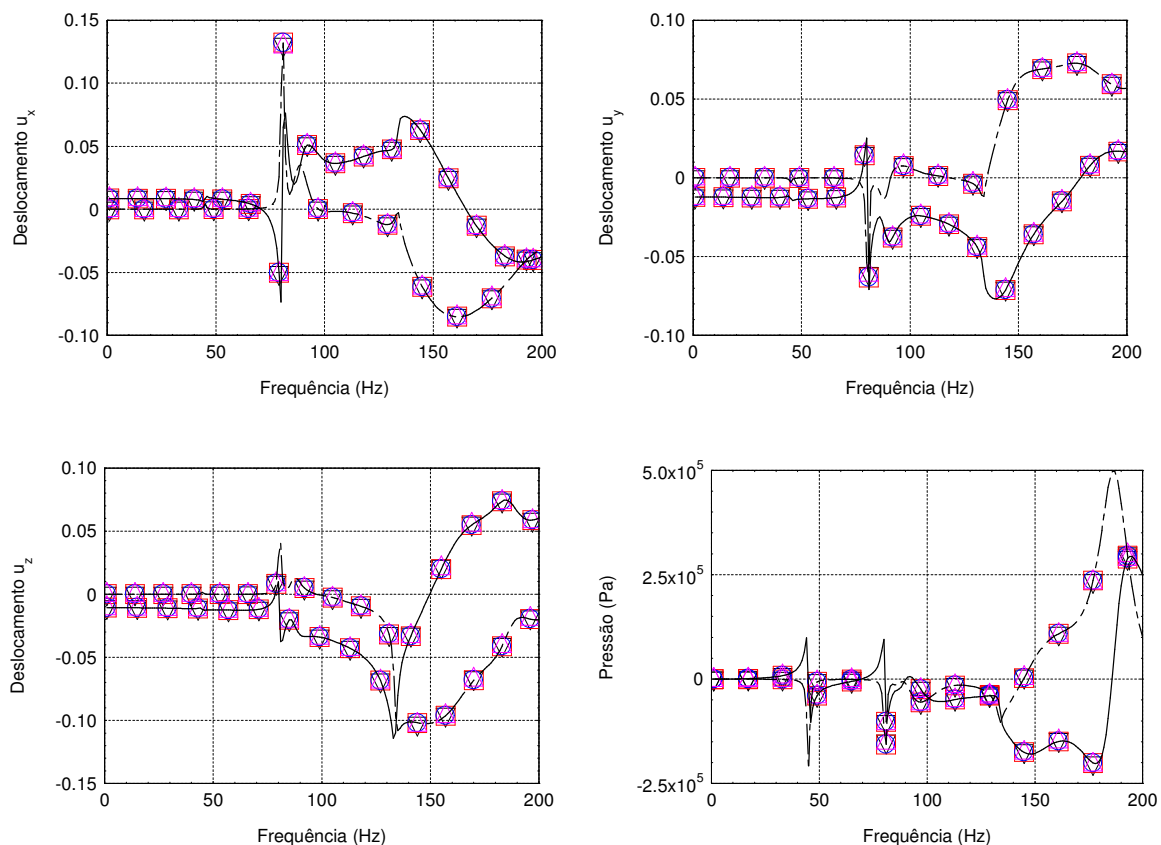


Figura 4.5: Deslocamentos, nas 3 componentes ( $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ), no recetor  $R_1$  e pressão no recetor  $R_2$  para as formulações BEM, MFS e de acoplamento, quando o sistema é excitado por uma fonte dilatacional localizada no exterior às inclusões fluida e rígida: — BEM;  $\triangle$  TBEM/BEM;  $\circ$  MFS;  $\square$  BEM/MFS;  $\nabla$  TBEM/MFS.

#### 4.4.2 Meio elástico infinito com inclusões fluida e rígida

Considere-se novamente o exemplo numérico apresentado na Figura 4.3. O meio elástico, infinito, mantém as mesmas propriedades e o tipo e posição da fonte cilíndrica também são preservados. O fluido existente no interior da Inclusão 1 assume as mesmas propriedades, enquanto o interior da Inclusão 2 é agora considerado como rígido. Os resultados deste método também são comparados com as soluções individuais do BEM e MFS, de forma a validá-los.

As fontes virtuais interiores, utilizadas para calcular o campo refletido pela segunda inclusão, são posicionadas de forma a garantir o afastamento com menor erro de fronteira possível. As respostas dos deslocamentos e da pressão são calculadas para os mesmos recetores,  $R_1$  e  $R_2$ , respetivamente e, ainda, para o mesmo domínio de frequência.

A Figura 4.5 apresenta a parte real (linha contínua) e a parte imaginária (linha descontínua) para os deslocamentos (na componente horizontal, vertical e normal) e para a pressão. A representação esquemática adotada é a mesma utilizada na secção anterior. Como se pode observar nesta figura, existe, uma vez mais, uma boa aproximação entre os vários métodos, ficando assim, validado o método de acoplamento proposto para a propagação de ondas em meios elásticos, contendo inclusões fluida e rígida.

### **4.4.3 Meio elástico infinito com inclusões fluida e vazia/cavidade**

Considere-se novamente o exemplo numérico apresentado na Figura 4.3. O meio elástico infinito mantém as mesmas propriedades e o tipo e a posição da fonte cilíndrica também são preservados. O fluido existente no interior da Inclusão 1 assume as mesmas propriedades, enquanto o interior da Inclusão 2 é agora uma cavidade. Os resultados da formulação proposta também são comparados com as soluções individuais do BEM e MFS.

As fontes virtuais interiores utilizadas para calcular o campo refletido pela segunda inclusão são posicionadas de forma a garantir o afastamento com menor erro de fronteira possível. As respostas dos deslocamentos e da pressão são calculadas para os mesmos recetores,  $R_1$  e  $R_2$ , respetivamente e, ainda, para o mesmo domínio de frequência.

A Figura 4.6 apresenta a parte real (linha contínua) e a parte imaginária (linha descontínua) para os deslocamentos (na componente horizontal, vertical e normal) e para a pressão. A representação esquemática adotada é a mesma utilizada na secção anterior. Como se pode observar nesta figura, existe, uma vez mais, uma boa aproximação entre os vários métodos. Fica, assim, validado o método de acoplamento proposto para a propagação de ondas em meios elásticos, contendo inclusões fluidas e cavidades.



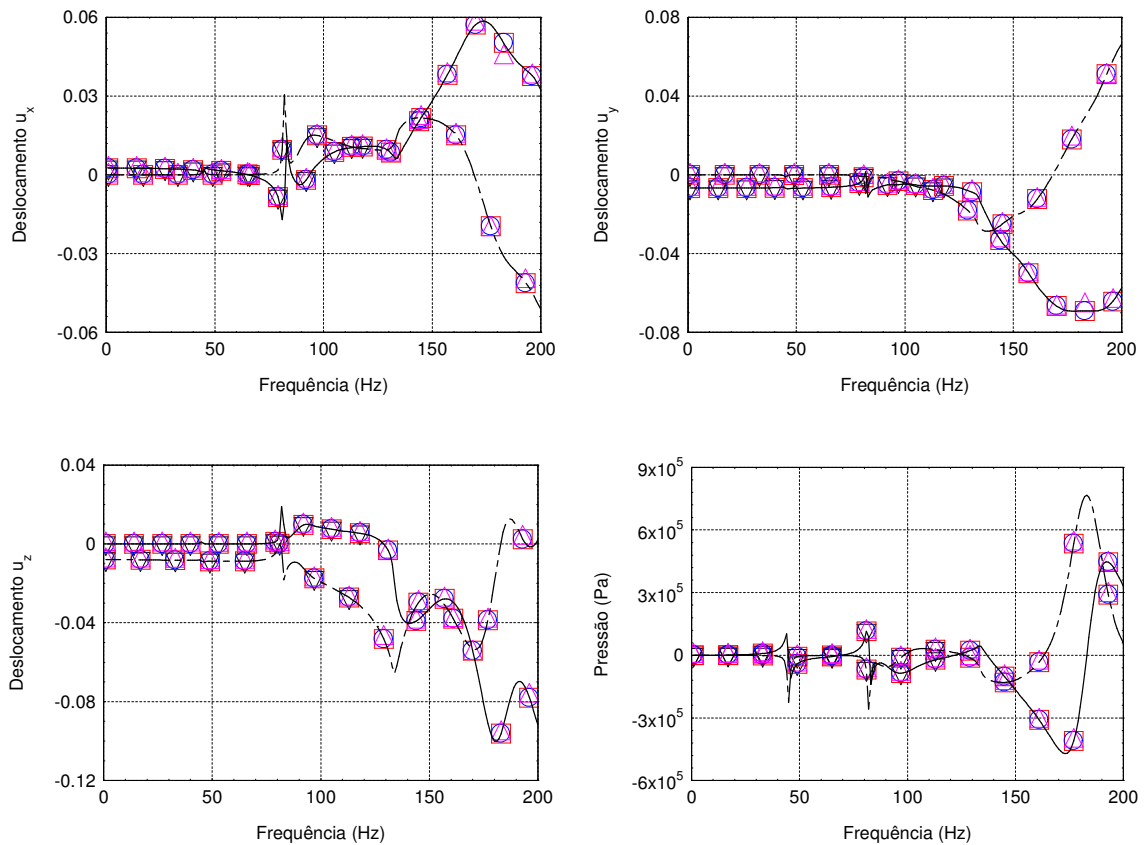


Figura 4.6: Deslocamentos, nas 3 componentes ( $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ), no recetor  $R_1$  e pressão no recetor  $R_2$  para as formulações BEM, MFS e de acoplamento, quando o sistema é excitado por uma fonte dilatacional localizada no exterior às inclusões fluida e cavidade: — BEM;  $\triangle$  TBEM/BEM;  $\circ$  MFS;  $\square$  BEM/MFS;  $\nabla$  TBEM/MFS.

## 4.5 RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

A formulação baseada no acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira e o Método das Soluções Fundamentais para meios elásticos foi implementada no domínio da frequência. Sendo assim, as respostas no domínio do tempo são calculadas através da aplicação, a partir daqueles resultados de transformadas inversas de Fourier (FFT) nos domínios do número de onda  $k_z$  e da frequência de cálculo  $\omega$ . Os cálculos da transformada inversa de Fourier na forma discreta correspondem à soma de um número finito de termos, tanto em frequência como para diferentes números de onda na direção  $z$ . O pulso emitido pela fonte de excitação corresponde à de um pulso de Ricker. A definição deste pulso ao longo do tempo compreende uma onda de amplitude positiva entre dois negativos de menor amplitude,

$$u(\tau) = A(1 - 2\tau^2)e^{-\tau^2}, \quad (4.15)$$

onde  $A$  representa a amplitude do sinal;  $\tau = (t - t_s)/t_0$ ,  $t$  correspondendo à variável tempo,  $t_s$  o tempo em que ocorre o valor máximo, e  $\pi t_0$  é o período característico (dominante) do sinal.

A aplicação da transformada de Fourier para esta função leva a que aquele pulso possa ser expresso no domínio da frequência pela equação:

$$U(\omega) = A \left[ 2t_0 \sqrt{\pi} e^{-i\omega t_s} \right] \Omega^2 e^{-\Omega^2}, \quad (4.16)$$

com  $\Omega = \omega t_0 / 2$ .

De modo a evitar a possibilidade de contaminação da resposta por parte das fontes virtuais adjacentes e também evitar fenómenos de *aliasing*, recorre-se ao uso de frequências complexas do tipo  $\omega_c = \omega - i\eta$ , com uma parte imaginária,  $\eta = 0.7\Delta\omega$  e em que  $\Delta\omega$  é o incremento da frequência angular. Posteriormente, as respostas no domínio do tempo são multiplicadas pelo fator  $e^{\eta t}$  (Kausel e Roesset, 1992).

## 4.6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A aplicabilidade e a eficiência das formulações de acoplamento propostas são ilustradas através do cálculo de deslocamentos e de pressões numa grelha de recetores.

No caso em estudo, é abordado o comportamento da propagação de ondas transmitidas num meio elástico homogéneo e infinito, causadas pela presença de uma fissura em forma de arco, com espessura nula, localizada na proximidade de uma inclusão que apresenta no seu interior um material fluido (ver Figura 4.7 a). Portanto, pretende-se avaliar a propagação de ondas no meio infinito e no interior da inclusão, no qual se encontram um defeito e uma inclusão fluida.

Os benefícios da eficiência computacional de acoplamento proposto são também avaliados com recurso ao mesmo exemplo numérico, para duas frequências específicas, 140 Hz e 9000 Hz.

O meio elástico infinito exhibe velocidades de ondas P e S e uma massa volúmica que permanecerá constante e igual a 2630 m/s, 1416 m/s e 2250 kg/m<sup>3</sup>, respetivamente. A inclusão fluida é centrada na posição (0.0m, 0.0m) e possui um raio de 0.05 m. Este meio tem uma massa volúmica de 1000 kg/m<sup>3</sup>,

uma velocidade de propagação das ondas dilatacionais (ondas P) igual a 1500 m/s. Uma fissura com espessura nula é embebida no meio elástico e na proximidade da inclusão fluida. Este defeito tem uma geometria próxima de um arco, está centrado na posição (0.0m, 0.0m) e possui um raio de 0.10 m e um comprimento total de  $\frac{1.2 \pi}{32}$  m.

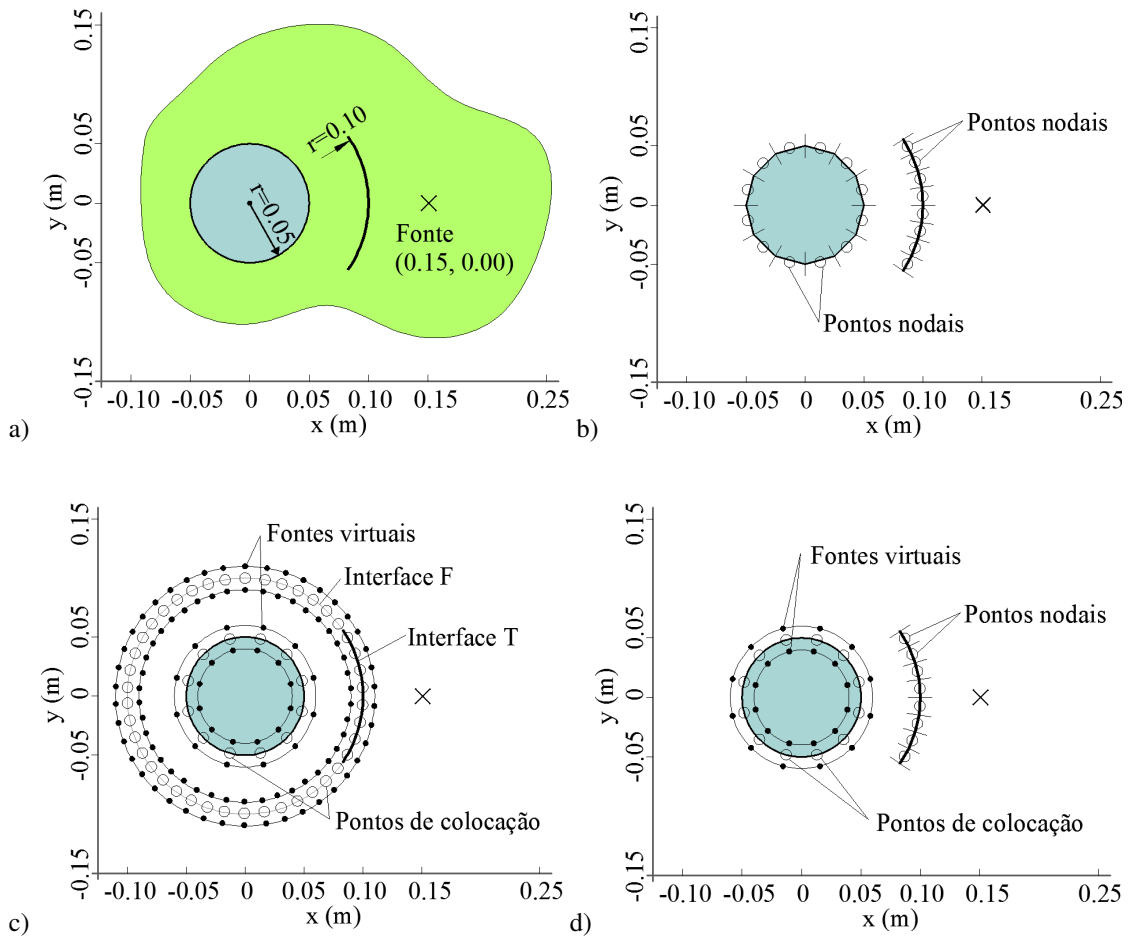


Figura 4.7: Aplicação numérica: a) Geometria da inclusão fluida na vizinhança de uma fissura em forma de arco, ambas inseridas num meio elástico homogêneo e infinito, e posição da fonte dilatacional; b) Elementos de fronteira usados para a modelação BEM/TBEM; c) Posição das fontes virtuais e pontos de colocação usados pela modelação MFS; d) Posição das fontes virtuais, pontos de colocação (MFS) e elementos de fronteira (TBEM) usados pela formulação de acoplamento MFS/TBEM.

O sistema é excitado por uma fonte dilatacional cilíndrica (com  $k_z = 0$  rad/m), localizada a 0.05 m da fissura, posicionada em (0.15m, 0.0m). Os resultados dos deslocamentos, no meio exterior, e das pressões, no interior da inclusão, são obtidos para uma grelha bidimensional com 10120 recetores ao

longo das direções  $x$  e  $y$ , com espaçamentos de intervalos iguais, compreendida numa grelha de recetores:  $x = [-0.10\text{m}; 0.25\text{m}]$  e  $y = [-0.15\text{m}; 0.15\text{m}]$ .

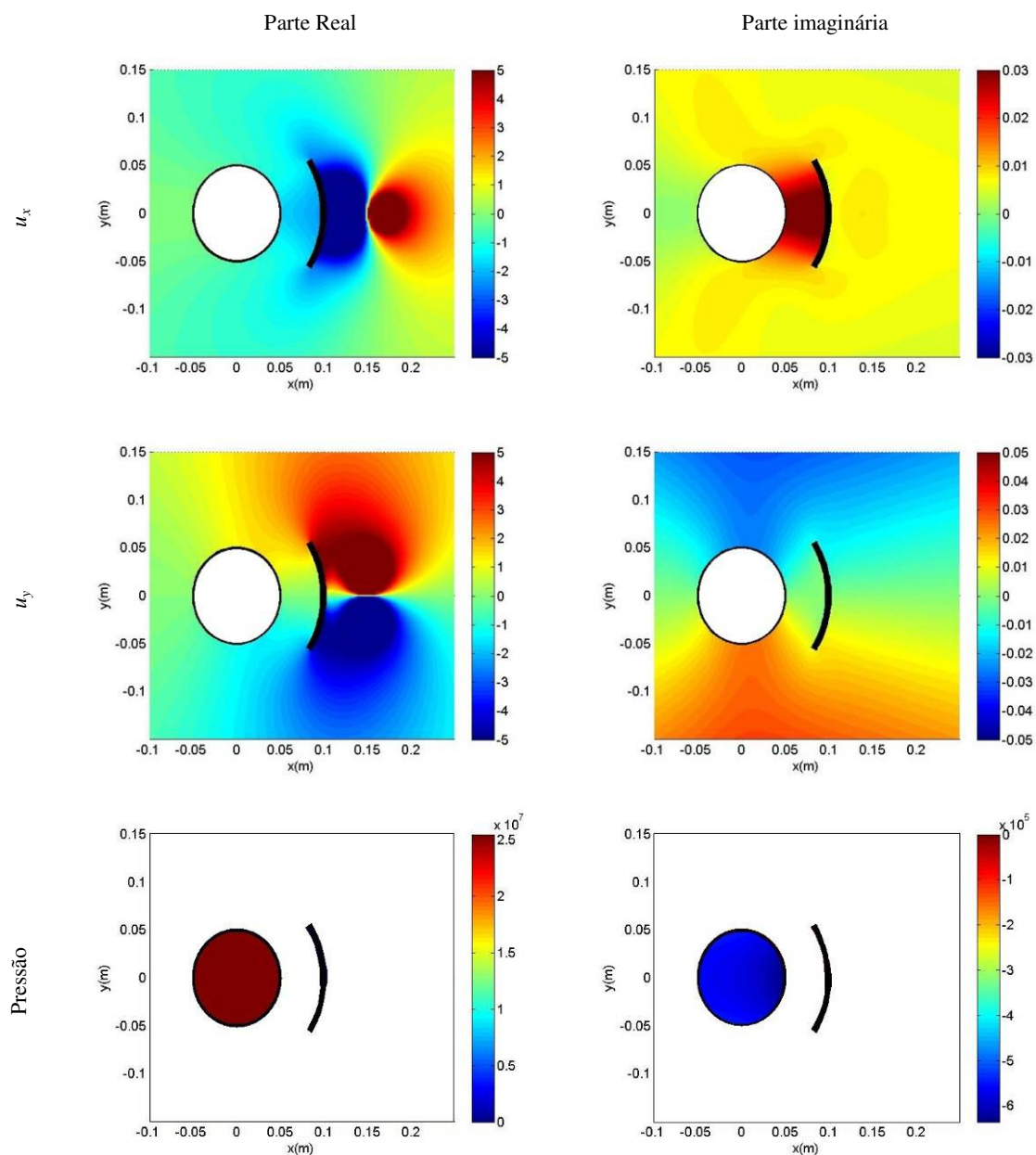


Figura 4.8: Resposta na grelha de recetores, parte real (coluna à direita) e imaginária (coluna à esquerda) nas componentes de deslocamento em  $x$  e  $y$ , no meio elástico infinito e pressão no interior da inclusão fluida, modelada com a solução de referência, BEM/TBEM, para uma frequência de excitação de 140 Hz .

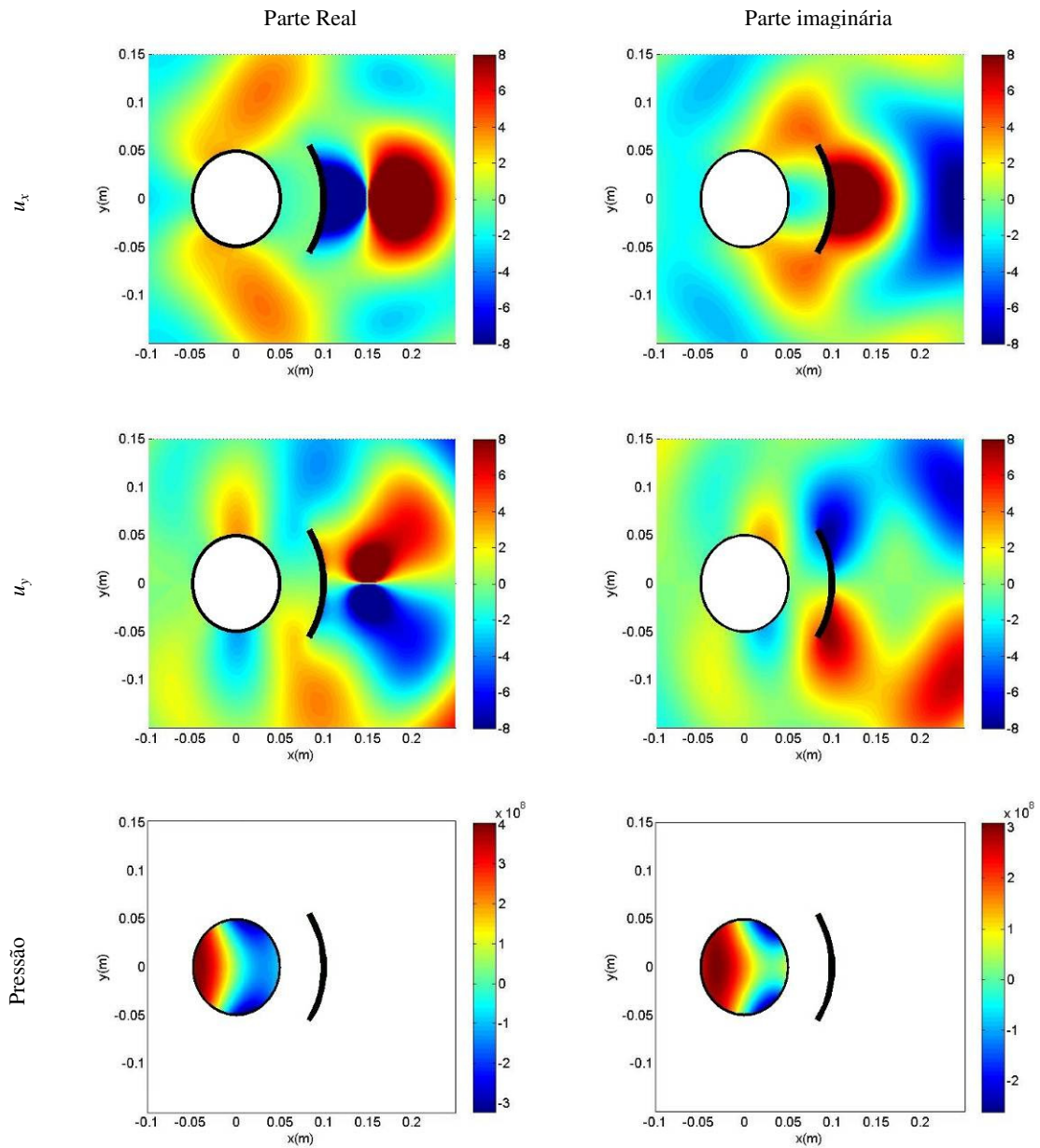


Figura 4.9: Resposta na grelha de recetores, parte real (coluna à direita) e imaginária (coluna à esquerda) nas componentes de deslocamento em  $x$  e  $y$ , no meio elástico infinito e pressão no interior da inclusão fluida, modelada com a solução de referência, BEM/TBEM, para uma frequência de excitação de 9000 Hz.

### **4.6.1 Respostas de deslocamentos e de pressão em frequência para a solução de referência**

Como não se conhecem as soluções analíticas para este problema específico (Figura 4.7a)), este é resolvido com auxílio da solução clássica e dual do Método dos Elementos de Fronteira (BEM/TBEM), e é designada nesta secção como a solução de referência.

O domínio do problema é modelado considerando 2 subdomínios. O primeiro subdomínio refere-se à primeira inclusão fluida, é discretizado em 560 elementos de fronteira, utilizando uma superfície fechada e carregada com cargas monopolares (BEM). O segundo subdomínio, referente à fissura, utiliza 210 elementos de fronteira e é discretizado como uma linha aberta e carregada com cargas de dipolares (TBEM), conforme se ilustra na Figura 4.7 b). Sendo assim, este problema utiliza sempre um número total de 770 elementos de fronteiras em ambas as frequências de análise.

Considerando o exemplo anterior, a Figura 4.8 ilustra a parte real e imaginária dos deslocamentos, para a primeira frequência de análise, 140 Hz, no campo infinito, segundo as componentes  $x$  e  $y$  e as pressões no interior da inclusão fluida, respetivamente. Nestas imagens é possível verificar a diferença das componentes dos deslocamentos, nas direções horizontal e vertical. É também possível avaliar a alteração das respostas dos recetores, localizados nas proximidades da heterogeneidade.

Também foram avaliadas as respostas, para uma frequência de excitação mais elevada, 9000 Hz, ilustrada na Figura 4.9, onde é possível observar as respostas nos deslocamentos da malha de recetores, localizados no meio exterior, tanto para a parte real, como para a parte imaginária da solução de referência. Aqui, também é possível observar a influência da inclusão e da fissura, no meio de propagação infinito e a pressão determinada no interior da Inclusão 1.

### **4.6.2 Eficiência de cálculo para o método de acoplamento**

A eficiência computacional foi avaliada através da determinação do tempo de processamento de cálculo, aqui designado por *CPU Time*, relativo à obtenção dos deslocamentos, na malha de recetores localizados no meio elástico exterior, e das pressões, na malha de recetores localizados no interior da inclusão, utilizando a formulação BEM/TBEM, em comparação com o Método das Soluções Fundamentais (MFS) e a formulação proposta de acoplamento MFS/TBEM, para as frequências de análise, 140 Hz e 9000 Hz.

Como se afirmou anteriormente, o MFS é o método menos eficiente para a modelação de inclusões finas, tais como fissuras. A abordagem aqui utilizada para modelar o deslocamento em torno da fissura, para esta formulação, é baseada na decomposição do domínio interno em dois diferentes subdomínios, como está ilustrado na Figura 4.7 c). As interfaces entre estes dois subdomínios são circulares e contêm a fissura, Interface T, e uma superfície fictícia, Interface F. A fim de descrever corretamente o comportamento da fissura (com espessura nula), como se de uma cavidade se tratasse, são impostas tensões nulas ao longo da superfície T. A continuidade de deslocamentos e tensões é imposta ao longo da interface virtual F. As fontes virtuais usadas para modelar a resposta são colocadas a uma distância de 0.01 m, afastadas da inclusão, tanto para o interior, como para o exterior.

Para o modelo de acoplamento entre o MFS e o TBEM, a fissura é discretizada em elementos de fronteira, carregados por cargas dipolares (TBEM), enquanto a superfície da inclusão é modelada usando um conjunto de fontes virtuais localizadas a 0.005 m a partir da fronteira. Esta inclusão é, então, modelada com recurso ao MFS. Os pontos de colocação estão uniformemente distribuídos ao longo da sua superfície.

Os erros gerados pelos métodos, no domínio em análise, são avaliados comparando as respostas obtidas com a solução de referência (calculada anteriormente). O erro global do domínio é definido pelo cálculo da integração do valor absoluto entre a diferença das respostas do modelo de referência e os restantes modelos em análise para a grelha total de recetores. Para avaliar a eficiência computacional, o *CPU Time* é registado simultaneamente ao fim de cada cálculo, para o mesmo problema modelado para as três formulações. Efetuaram-se três comparações: duas primeiras para a grelha de recetores exteriores (localizados no Meio 1) na determinação dos deslocamentos horizontais e verticais; a terceira para a grelha de recetores interiores da inclusão circular (Meio 2) no cálculo da pressão.

Para a análise em curso, efetuou-se para cada formulação o aumento do número de graus de liberdade (pontos nodais) de acordo com o valor de  $m=1$  a 20. Em cada instante de cálculo foi registado o tempo necessário de cálculo, para cada grau de liberdade e assim sucessivamente. A solução BEM/TBEM foi calculada pela discretização da inclusão e a superfície da fissura, com  $10m$  e  $4m$  elementos de fronteira, respetivamente. A solução do MFS foi obtida simulando as interfaces da inclusão circular com  $10m$  fontes virtuais / pontos de colocação e  $20m$ , para a fissura, fontes virtuais / pontos de colocação, de forma a garantir o mesmo número de pontos utilizados nos diversos métodos. A solução de acoplamento proposta foi obtida com  $10m$  e  $4m$  fontes virtuais / pontos de colocação e elementos de fronteira, para simular a inclusão e o defeito, respetivamente.

De forma a garantir o mesmo processamento de cálculo nas várias formulações, todas as soluções foram determinadas, no mesmo computador, que possui um processador *Intel Core™ Duo CPU E6750*.

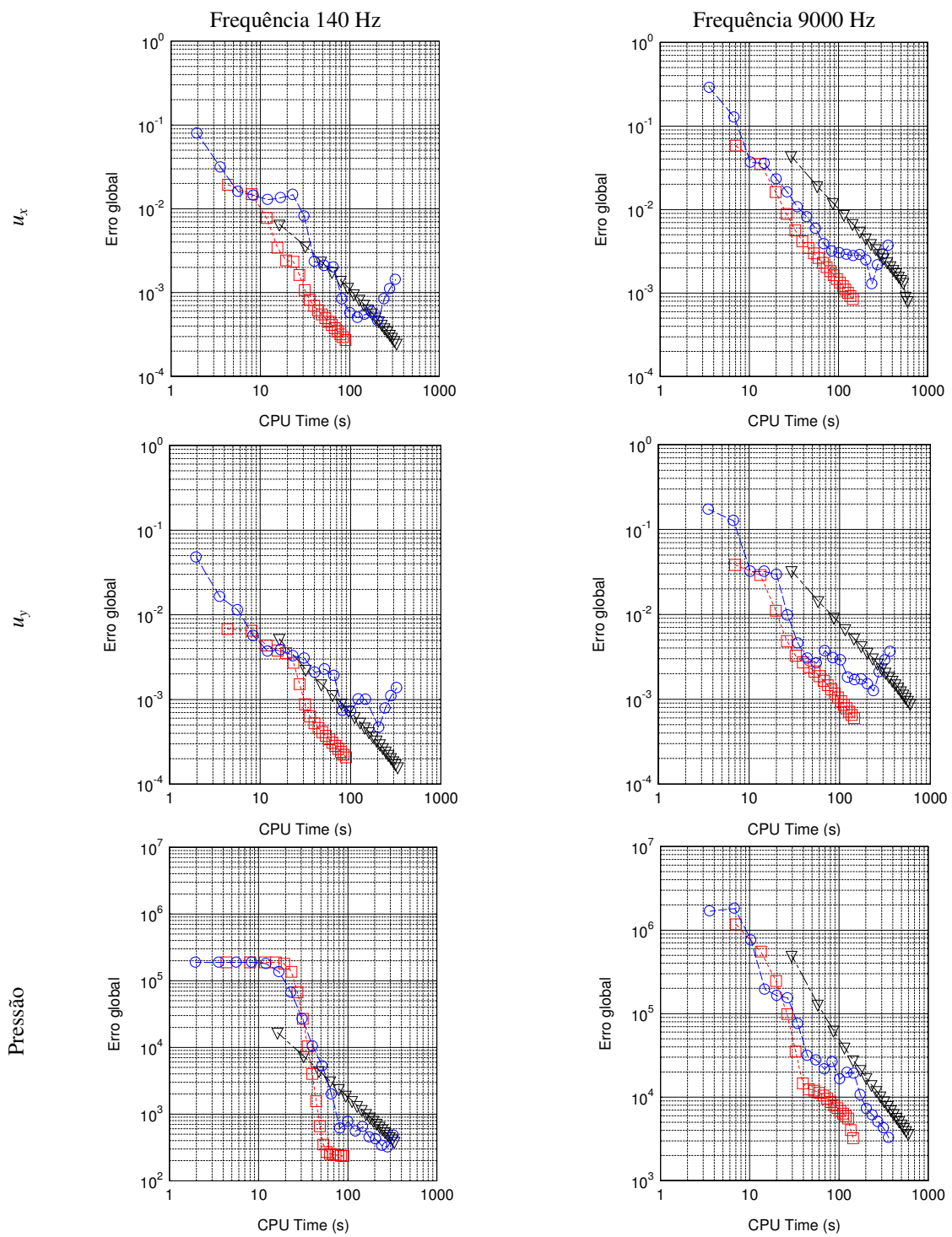


Figura 4.10: Erro global em função do *CPU Time* para um sistema composto por uma inclusão fluida circular localizada na proximidade de uma fissura com espessura nula, inseridas num meio elástico infinito:  $\nabla$  BEM/TBEM,  $\circ$  MFS e  $\square$  MFS/TBEM.



A Figura 4.10 ilustra, assim, o erro global registado no domínio *versus* o tempo de processamento de cálculo necessário para cada formulação, com a variação do número de graus de liberdade, ou seja, com o incremento do número de elementos de fronteira e fontes virtuais / pontos de colocação. Esta figura apresenta os resultados numa escala logarítmica para permitir uma fácil interpretação dos resultados. Fazendo uma análise às respostas obtidas, demonstra-se que a formulação de acoplamento MFS/TBEM, para ambas as frequências e para um n.º de graus de liberdade superior a três iterações, é aquela que regista melhor performance para o cálculo dos deslocamentos. O mesmo se passa para a determinação das pressões na grelha de recetores interiores à inclusão, para um maior número de elementos.

A formulação que converge mais rapidamente para a solução de referência com um tempo de cálculo bastante inferior corresponde ao método proposto.

Verifica-se também que o MFS não apresenta uma tendência constante e tem um comportamento com grandes oscilações, especialmente para um maior número de fontes de virtuais, pois o sistema de equações torna-se instável. O MFS apresenta melhores resultados do que aqueles apresentados pelo BEM/TBEM quando se pretendem obter as pressões. O cálculo de deslocamentos apresenta erros globais mais baixos quando são modelados pelo BEM/TBEM em comparação com os obtidos através do MFS.

Pode então concluir-se que o método proposto de acoplamento, para o exemplo de uma inclusão fluida circular e uma fissura, inseridas num meio elástico infinito, necessita de um menor número de elementos de fronteira e fontes virtuais / pontos de colocação, para registar o mesmo erro global, com exceção dos primeiros termos. A formulação proposta permite assim calcular sistemas de uma forma mais rápida e eficiente.

### **4.6.3 Análise das respostas no domínio do tempo**

A aplicabilidade da formulação de acoplamento proposta para um sistema de solução mais complexo é ilustrada através do cálculo da propagação de ondas em campo infinito, na vizinhança de uma inclusão circular preenchida por um fluido, localizada num meio fissurado, como está ilustrado na Figura 4.11.

As velocidades das ondas P e das ondas S existentes no meio elástico infinito e as massas volúmicas são 4208 m/s, 2656 m/s e 2140 kg/m<sup>3</sup>, respetivamente. O furo, centrado em (0.0 m, 0.0 m), é preenchido por um fluido, com um raio de 0.1016 m. Este meio tem propriedades equivalentes às da água, com uma massa volúmica de 1000 kg/m<sup>3</sup>, e uma velocidade das ondas P 1500 m/s.

O resultado dos deslocamentos (no meio elástico) e das pressões (no interior do furo preenchido por um fluido) é obtido para uma grelha de receptores ao longo das direções  $x$  e  $y$ , com espaçamentos de intervalos iguais e localizados na proximidade da inclusão e das fissuras, com  $x = [-0.4\text{m}; 0.4\text{m}]$  e  $y = [-0.4\text{m}; 0.4\text{m}]$ .

Os resultados foram calculados usando apenas a nova formulação de acoplamento entre o Método das Soluções Fundamentais, para a primeira inclusão, e o Método dos Elementos de Fronteira em Trações, para a modelação dos vários defeitos existentes. Todas as inclusões são discretizadas utilizando um determinado número de elementos de fronteira definida pela relação entre o comprimento de onda e o comprimento desses elementos de fronteira, fixado em 10. Para a discretização de cada fissura foi utilizado um número mínimo de 10 elementos de fronteira, modeladas como se de uma linha aberta se tratasse. O furo é modelado com recurso à formulação do MFS, usando no mínimo de 40 cargas virtuais / pontos de colocação. O número de elementos de fronteira, fontes virtuais / pontos de colocação aumentam com o incremento da frequência de acordo com a relação, definida acima, entre o comprimento de onda e da distância entre os pontos de colocação. A Figura 4.11 ilustra esquematicamente a formulação de acoplamento utilizada: a posição das fontes virtuais; pontos de colocação; e elementos de fronteira.

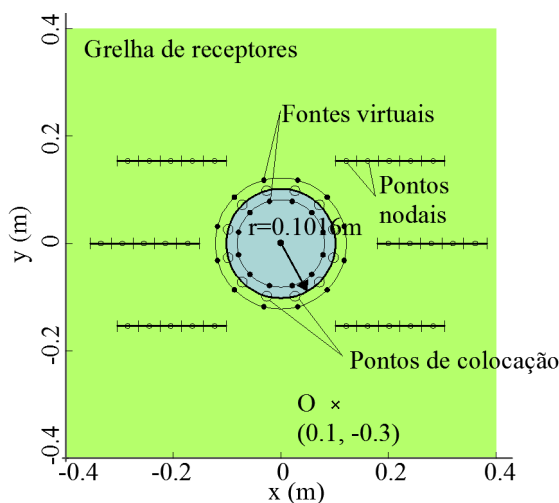


Figura 4.11: Geometria e discretização de um furo preenchido por um fluido em redor de um meio elástico fissurado: posição das fontes virtuais, pontos de colocação (MFS) e elementos de fronteira (TBEM) utilizados pela formulação de acoplamento proposta MFS/TBEM.

O cálculo é realizado no domínio da frequência, entre 140 Hz e 71 680 Hz, com um incremento de frequência de 140 Hz, que determina uma janela de tempo total de 7.14 ms.

O meio elástico infinito é excitado por um pulso dilatacional cilíndrico localizado em O (0.1m, -0.3m) com uma frequência característica de 30 000 Hz, que tem início no instante  $t = 0$  ms. Os resultados

numéricos são apresentados através de um conjunto de imagens, a partir das animações realizadas em computador, ver Figura 4.12. Nesta figura são apresentados os deslocamentos horizontais ( $u_x$ ), na coluna da esquerda, os deslocamentos verticais ( $u_y$ ), na coluna central, enquanto a coluna à direita ilustra o campo de pressões no interior do furo circular. A cor a vermelho representa a amplitude positiva de deslocamentos ou pressões e a cor azul a negativa.

No primeiro instante, em  $t = 0.01$  ms, a propagação dos pulsos esféricos, devido à fonte dilatacional localizada em O, pode ser observada no meio elástico infinito, sem perturbações, uma vez que ainda não atingiu nenhuma heterogeneidade. O fluido no interior do furo também não sofreu qualquer variação de pressão. As diferenças das componentes dos deslocamentos no plano horizontal e vertical também podem ser claramente observadas.

No instante seguinte, em  $t = 0.04$  ms parte do pulso incidente é refletido, na direção contrária, como ondas P e ondas S depois de embater na primeira fissura, continuando a propagar-se no meio exterior. O pulso incidente que acaba de atingir as extremidades da fissura também pode ser visto. Estas ondas geram ondas de difração que viajam ao longo das extremidades da fissura e encontram-se numa fase inicial de desenvolvimento. Refira-se ainda que, neste instante, parte do pulso incidente atinge o furo preenchido pelo fluido e é transmitido em ondas P. No interior do fluido pode ser observado o campo de pressões gerado, que começa agora a desenvolver-se. Pode verificar-se também que a onda de propagação no interior do fluido é mais lenta em comparação com a onda que viaja no exterior, devido a uma velocidade das ondas P mais baixa no interior da inclusão, comparativamente à velocidade das ondas P no meio elástico infinito.

Em  $t = 0.07$  ms é perceptível a existência de sombra por detrás de cada fissura, mas não é fácil distinguir os dois tipos de propagação de ondas, visto que são quase coincidentes, nesta fase inicial. A propagação de ondas de pressão na água começa a ser mais evidente neste instante.

Nos últimos instantes ( $t = 0.10$  ms e  $t = 0.15$  ms) são ilustradas as múltiplas ondas de reflexão, ondas S e ondas P, que continuam a propagar-se no meio elástico infinito. A propagação do campo de ondas resultantes dos múltiplos pulsos de difração e reflexão, produzidos pelas superfícies das fissuras e da inclusão circular, são claramente visíveis na grelha de recetores, que continua a dissipar a sua energia total. A energia das ondas fica confinada entre as fissuras e a inclusão, e gera um campo de ondas complexas devido a múltiplas reflexões e refrações. Ainda pode ser vista a frente da onda de pressão a atravessar de forma mais lenta o furo preenchido por um fluido, comparativamente com a frente de onda que viaja em redor da inclusão.

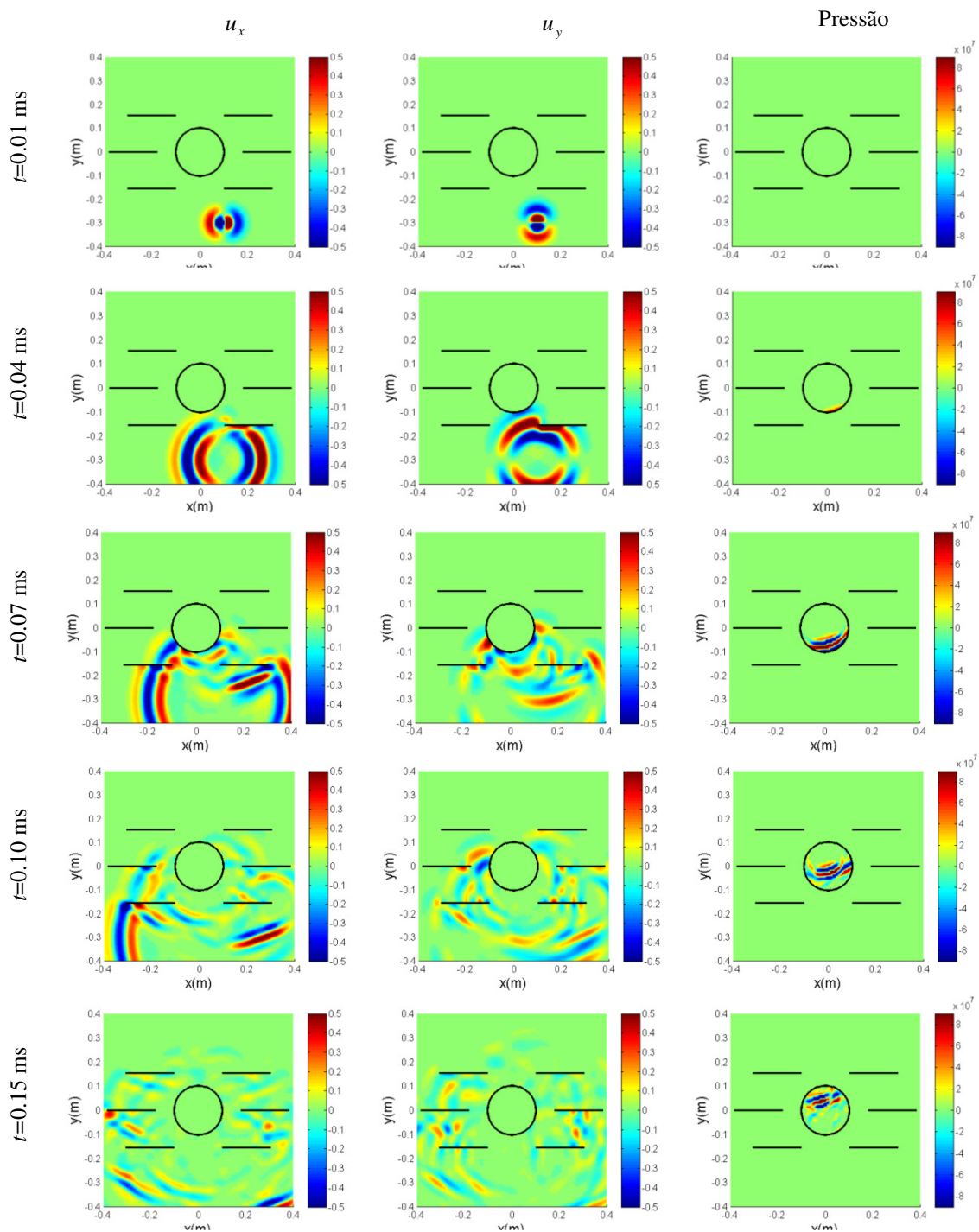


Figura 4.12: Propagação de ondas nas proximidades de uma inclusão circular, preenchida por um fluido (água), inserida num meio elástico 2D, homogéneo, não confinado e fissurado, gerada por uma fonte dilatacional cilíndrica, modelada com um pulso de Ricker com uma frequência característica de 30 000Hz . Evolução dos deslocamentos,  $u_x$  e  $u_y$ , e da pressão em diferentes instantes.

## 4.7 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foram desenvolvidas e propostas diferentes formulações do acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira (BEM) / o Método de Elementos de fronteira em Trações (TBEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) para o estudo da propagação de ondas, envolvendo a interação entre meios sólidos e meios fluidos, contendo múltiplas inclusões. As formulações de acoplamento propostas superam as limitações decorrentes de cada método individual e requerem um menor esforço computacional, mantendo uma precisão adequada.

Estas formulações foram verificadas e validadas através da comparação dos seus resultados com soluções de referência obtidas com formulações convencionais BEM/TBEM. O campo de ondas, gerado por inclusões fluidas, rígidas e cavidades embebidas em meios elásticos, homogêneo e infinito, e sujeito a ondas originadas por uma fonte dilatacional, foi simulado.

Os resultados obtidos com a formulação proposta e aqueles gerados pelo BEM e TBEM foram semelhantes.

A formulação proposta de acoplamento entre o MFS e o TBEM permite evitar as limitações impostas por cada um dos métodos. A aplicabilidade, a estabilidade e a eficiência da formulação proposta foi evidenciada pela simulação da propagação de ondas em redor de um furo preenchido por um fluido, inserido num estrato elástico fissurado.

# APÊNDICE A: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2.5D, EM BEM, EM MEIOS ELÁSTICOS INFINITOS

## A.1 – DEFINIÇÕES DE ÂMBITO GERAL

Propriedades do meio de propagação:

$\lambda, \mu$  Constantes elásticas (constante de Lamé e módulo de elasticidade transversal)

$\rho$  Massa volúmica

$\omega$  Frequência de análise

$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  Velocidade das ondas P (ondas dilatacionais)

$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  Velocidade das ondas S (ondas de corte)

Outros parâmetros:

$k_\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k_z^2}$ , com  $\text{Im}(k_\alpha) < 0$        $k_\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - k_z^2}$ , com  $\text{Im}(k_\beta) < 0$

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$A = \frac{1}{4i\rho\omega^2}$  Amplitude

Funções de Hankel do segundo tipo e de ordem  $n$ :

$H_{n\alpha} = H_n(k_\alpha r)$

$H_{n\beta} = H_n(k_\beta r)$

Funções auxiliares:

$$B_n = k_\beta^n H_{n\beta} - k_\alpha^n H_{n\alpha}$$

Funções de  $B_n$

## A.2 – FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE DESLOCAMENTOS

As funções de Green para os deslocamentos, ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , no meio sólido, são dados por,

$$G_{xx} = \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left[ \frac{\omega^2}{\beta^2} H_{0\beta} - \frac{1}{r} B_1 + \left( \frac{x-x_0}{r} \right)^2 B_2 \right]$$

$$G_{yy} = \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left[ \frac{\omega^2}{\beta^2} H_{0\beta} - \frac{1}{r} B_1 + \left( \frac{y-y_0}{r} \right)^2 B_2 \right]$$

$$G_{zz} = \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left[ \frac{\omega^2}{\beta^2} H_{0\beta} - k_z^2 B_0 \right]$$

$$G_{xy} = G_{yx} = \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left( \frac{x-x_0}{r} \right) \left( \frac{y-y_0}{r} \right) B_2$$

$$G_{xz} = G_{zx} = ik_z \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left( \frac{x-x_0}{r} \right) B_1$$

$$G_{yz} = G_{zy} = ik_z \frac{1}{4i\rho\omega^2} \left( \frac{y-y_0}{r} \right) B_1$$

(4.17)

As derivadas das funções de Green anteriores fornecem as tensões seguintes, ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , no meio sólido,

$$\begin{aligned}
H_{rx} &= 2\mu \left[ \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial G_{rx}}{\partial x} + \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial G_{ry}}{\partial y} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial z} \right) \right] \cos \theta_{n1} + \mu \left[ \frac{\partial G_{ry}}{\partial x} + \frac{\partial G_{rx}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n1} \\
H_{ry} &= 2\mu \left[ \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial G_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial G_{ry}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n1} + \mu \left[ \frac{\partial G_{ry}}{\partial x} + \frac{\partial G_{rx}}{\partial y} \right] \cos \theta_{n1} \\
H_{rz} &= \mu \left[ \frac{\partial G_{rx}}{\partial z} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial x} \right] \cos \theta_{n1} + \mu \left[ \frac{\partial G_{ry}}{\partial z} + \frac{\partial G_{rz}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n1}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

com  $n_{n1}$  o vetor unitário, apontado para o exterior, definido por  $n_{n1} = (\cos \theta_{n1}, \sin \theta_{n1})$ ,  $H_n = H_n(x, y, n_{n1}, x_0, y_0, \omega)$  e  $G_n = G_n(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $r, t = x, y, z$ . Essas expressões podem ser combinadas para obter  $H_{ij}(x, y, n_{n1}, x_0, y_0, \omega)$  nas direções normal e tangencial. Nestas equações  $\mu = \rho \beta^2$ .

### A.3 – FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE TRAÇÕES

Estas funções de Green podem ser vistas como a combinação das derivadas das equações anteriores (4.17) e (4.18), em ordem ao longo de  $x$ ,  $y$  e  $z$  de modo a obter as tensões  $\bar{G}_{ij}(x, y, n_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega)$  e  $\bar{H}_{ij}(x, y, n_{n1}, n_{n2}, x_{col}, y_{col}, \omega)$ . Ao longo dos elementos de fronteira, em  $(x, y)$ , onde o vetor unitário é definido por  $n_{n1} = (\cos \theta_{n1}, \sin \theta_{n1})$ , e após o equilíbrio das tensões, as seguintes equações são expressas em  $x$ ,  $y$  e  $z$  geradas por cargas aplicadas ao longo das direções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e:

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{xr} &= 2\mu \left[ \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial G_{xr}}{\partial x} + \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial G_{yr}}{\partial y} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial z} \right) \right] \cos \theta_{n2} + \mu \left[ \frac{\partial G_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial G_{xr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n2} \\
\bar{G}_{yr} &= 2\mu \left[ \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial G_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial G_{yr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n2} + \mu \left[ \frac{\partial G_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial G_{xr}}{\partial y} \right] \cos \theta_{n2} \\
\bar{G}_{zr} &= \mu \left[ \frac{\partial G_{xr}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial x} \right] \cos \theta_{n2} + \mu \left[ \frac{\partial G_{yr}}{\partial z} + \frac{\partial G_{zr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n2}
\end{aligned} \tag{4.19}$$



e

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{xr} &= 2\mu \left[ \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial H_{xr}}{\partial x} + \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial H_{yr}}{\partial y} + \frac{\partial H_{zr}}{\partial z} \right) \right] \cos \theta_{n_2} + \mu \left[ \frac{\partial H_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial H_{xr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n_2} \\
\bar{H}_{yr} &= 2\mu \left[ \left( \frac{\alpha^2}{2\beta^2} - 1 \right) \left( \frac{\partial H_{xr}}{\partial x} + \frac{\partial H_{zr}}{\partial z} \right) + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \frac{\partial H_{yr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n_2} + \mu \left[ \frac{\partial H_{yr}}{\partial x} + \frac{\partial H_{xr}}{\partial y} \right] \cos \theta_{n_2} \\
\bar{H}_{zr} &= \mu \left[ \frac{\partial H_{xr}}{\partial z} + \frac{\partial H_{zr}}{\partial x} \right] \cos \theta_{n_2} + \mu \left[ \frac{\partial H_{yr}}{\partial z} + \frac{\partial H_{zr}}{\partial y} \right] \sin \theta_{n_2}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

com  $\mathbf{n}_{n_2} = (\cos \theta_{n_2}, \sin \theta_{n_2})$  definido como o vetor unitário em  $(x_0, y_0)$  (pontos de colocação),

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{ir} &= \bar{G}_{ir}(x, y, \mathbf{n}_{n_2}, x_{col}, y_{col}, \omega), & G_{ir} &= G_{ir}(x, y, x_0, y_0, \omega), & \bar{H}_{ir} &= \bar{H}_{ir}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, \mathbf{n}_{n_2}, x_{col}, y_{col}, \omega), \\
H_{ir} &= H_{ir}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, x_0, y_0, \omega) \text{ e } r, t = x, y, z.
\end{aligned}$$

Estas equações podem ser vistas com funções de Green para deslocamentos e tensões, quando cargas dipolares são aplicadas ao longo da fronteira da inclusão, em vez de cargas monopolares.

## APÊNDICE B: FUNÇÕES DE GREEN PARA CARGAS 2D, MEIOS FLUIDOS

### B.1 – FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE PRESSÃO

As funções bidimensionais de Green para a pressão no meio fluido infinito homogêneo, em coordenadas cartesianas, são dadas por,

$$G_f^{(m)}(x, y, x_k, y_k, \omega) = -\frac{i}{4} H_0(k_{\alpha_m} r), \tag{4.21}$$

$$H_f^{(m)}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, x_k, y_k, \omega) = \frac{i}{4} k_{\alpha_m} H_1(k_{\alpha_m} r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}_{n_1}}, \tag{4.22}$$

## B.2 – FUNÇÕES DE GREEN, EM TERMOS DE FLUXOS DE PRESSÃO

As funções bidimensionais de Green para a pressão no meio fluido infinito homogéneo, são dadas por,

$$\overline{G}_f^{(m)}(x, y, \mathbf{n}_k, x_k, y_k, \omega) = \frac{\partial G(x, y, x_k, y_k, \omega)}{\partial \mathbf{n}_k} = \frac{i}{4} k_{\alpha} H_1(k_{\alpha_m} r) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}_k}, \quad (4.23)$$

As funções bidimensionais de Green para os fluxos de pressão no meio fluido infinito homogéneo são dadas por,

$$\begin{aligned} \overline{H}_f^{(m)}(x, y, \mathbf{n}_l, \mathbf{n}_k, x_k, y_k, \omega) &= \frac{\partial H(x, y, \mathbf{n}_l, x_k, y_k, \omega)}{\partial \mathbf{n}_k} = \frac{\partial^2 G(x, y, x_k, y_k, \omega)}{\partial \mathbf{n}_k \partial \mathbf{n}_l} = \\ &= \frac{i}{4} k_{\alpha_m} \left\{ -k_{\alpha_m} H_2(k_{\alpha_m} r) \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_l} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_l} \right] + \frac{H_1(k_{\alpha_m} r)}{r} \left[ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_l} \right] \right\} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_k} +, \\ &= \frac{i}{4} k_{\alpha_m} \left\{ -k_{\alpha_m} H_2(k_{\alpha_m} r) \left[ \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{n}_l} + \left( \frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_l} \right] + \frac{H_1(k_{\alpha_m} r)}{r} \left[ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_l} \right] \right\} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}_k} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde  $n_k$  e  $n_l$  são os vetores unitários na direção normal exterior para os segmentos fronteira a serem carregados ( $C_k$ ) e integrados ( $C_l$ ), respetivamente. Estas equações podem ser vistas com funções de Green para pressão e fluxos de pressão, quando cargas dipolares são aplicadas ao longo da fronteira da inclusão, em vez de cargas monopolares.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aliabadi, M.H., editor (2002) *The Boundary Element Method: Appl. in Solids and Structures*. Wiley.
- Alves, C.J.S., Leitão, V.M.A. (2006) Crack analysis using an enriched MFS domain decomposition technique. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(3), 160-166.
- Amado Mendes, P., Tadeu, A. (2006) Wave propagation in the presence of empty cracks in an elastic medium. *Computational Mechanics*, 38(3), 183-199.
- António, J., Tadeu, A. (2002) 3D Seismic response of a limited valley via BEM using 2.5D analytical green's functions for an infinite free-rigid layer. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22, 659-673.
- António, J., Tadeu, A., Amado Mendes, P. (2009) Simulation of wave propagation in a fluid-filled borehole embedded in a cracked medium using a coupled BEM/TBEM formulation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(6), 3326–3339.
- Bouchon, M., Aki, K. (1977) Discrete wave-number representation of seismic source wavefields. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67, 259-277.
- Castro, I., Tadeu, A. (2012) Coupling the BEM/TBEM and the MFS for the numerical simulation of elastic wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36, 169-180.
- Chen, C.S., Karageorghis, Smyrlis, Y.S., editors. *The Method of Fundamental Solutions: A Meshless Method*. Dynamic Publishers, 2008.
- Cruse, T.A. (1987a) *Fracture Mechanics. Boundary Element Methods in Mechanics*, edited by D.E. Beskos, North Holland, Amsterdam, 333-365.

- Cruse, T.A. (1987b) *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Dell'era, D.N., Aliabadi, M.H., Rooke, D.P. (1998) Dual boundary element method for three-dimensional thermoelastic crack problems. *International Journal of Fracture*, 94, 89-101.
- Dineva, P.S., Manolis G.D. (2001) Scattering of Seismic Waves by Cracks in Multi-layered Geological Regions: I. Mechanical Model; II. Numerical Results. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 21, 615-625 e 627-641.
- Dresen, G., Stanchits, S., Rybacki, E. (2010) Borehole breakout evolution through acoustic emission location analysis. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 47, 426–435.
- Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A. (2003) The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, 759-69.
- Godinho, L., Tadeu, A., Simões, N.A. (2006) *Accuracy of the MFS and BEM on the analysis of acoustic wave propagation and heat conduction problems*. Sladek Jan and Sladek Vladimir, editors. Advances in Meshless Methods: Tech Science Press.
- Godinho, L., Amado Mendes, P., Tadeu, A., Cadena-Isaza, A., Smerzini, C., Sánchez-Sesma, F.J., Madec, R., Komatitsch, D. (2009) Numerical simulation of ground rotations along 2D topographical profiles under the incidence of elastic plane waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 2009, 99(2B), 1147-1161.
- Greenberg, M.D. (1971) *Application of Green's Functions in Science and Engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Guiggiani, M. (1998) *Formulation and numerical treatment of boundary integral equations with hypersingular kernels*. In: Sladek V, Sladek J, editors. Singular Integrals in Boundary Element Methods. Southampton and Boston: Computational Mechanics, Publications.
- He, Z.C., Liu, G.R., Zhong, Z.H., Zhang, G.Y., Cheng, A.G. (2011) A coupled ES-FEM/BEM method for fluid structure interaction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 140-147.

- Hong, H.K., Chen, J.T. (1988) Derivations of integral equations of elasticity. *The Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 114(6), 1028-1044.
- Ihlenburg, F., Germanischer, L. (1998) *Finite Element analysis of acoustic scattering*. Applied Mathematical Sciences. Springer.
- Jaswon, M.A., Symm, G.T. (1977) *Integral Equation Methods in Potencial theory and Elastostatics*. Academic Press, London.
- Kausel, E., Roesset, J.M. (1992) Frequency domain analysis of undamped systems. *The Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 118(4), 721-734.
- Kausel, E. (1994) Thin-layer method: Formulation in the time domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(6), 927-941.
- Kulowski, A. (1985) *Algorithmic representation of the ray tracing technique*. *Applied Acoustics*, 18, 449-469.
- Lee, V.W. (1988) Three-dimensional diffraction of elastic waves by a spherical cavity in an elastic half-space. 1: Closed-form solutions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 7, 149-161.
- Lee V.W., Karl J.A. (1992) Diffraction of SV waves by underground circular cylindrical cavities. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 11, 445-456.
- Manolis, G.D., Beskos, D.E. (1988) *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Unwin Hyman (sold to Chapman and Hall), London.
- Pao, Y.H., Mow C.C. (1973) *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*. Crane and Russak.
- Prosper, D. (2001) *Modeling and Detection of Delaminations in Laminated Plates*. PhD Thesis, MIT, Cambridge.

- Qu, P., Shen, R., Fua, L., Wang, Z. (2011) Time delay effect due to pore pressure changes and existence of cleats on borehole stability in coal seam. *International Journal of Coal Geology*, 85, 212–218.
- Rodríguez-Castellanos, F., Sánchez-Sesma F., Ortiz-Alemán, C., Nava-Flores, M., Martin, R. (2011) Indirect Boundary Element Method applied to fluid–solid interfaces. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31, 470–477.
- Sánchez-Sesma, F.J., Iturrarán-Viveros, U. (2001) Scattering and diffraction of SH waves by a finite crack: an analytical solution. *Geophysical Journal International*, 145, 749-758.
- Savioja, L., Rinne, T., Takala, T. (1994) Simulation of room acoustics with a 3-D finite difference mesh. *Proceedings ICMC'94*, Aarhus, Denmark, 463-466.
- Silveira, N.P.P., Guimarães, S., Telles, J.C.F. (1998) Accurate hypersingular integral computations in the development of numerical Green's functions for fracture mechanics. In: Sladek V. e Sladek J. (eds.), *Singular Integrals in Boundary Element Methods*, Computational Mechanics Publications, Southampton (UK) & Boston (USA), 197-222.
- Sládek, V., Sládek, J. (1987) A boundary integral equation method for dynamic crack problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(3), 269-277.
- Soares, Jr, Von Estorff, O., Mansur, W.J. (2004) Iterative coupling of BEM and FEM for nonlinear dynamic analyses. *Computational Mechanics*, 34, 67-73.
- Soares, Jr, Carrer, J.A.M., Mansur W.J. (2005a) Nonlinear elastodynamic analysis by the BEM: an approach based on the iterative coupling of the D-BEM and TD-BEM formulations. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 29, 761-774.
- Soares, Jr, Von Estorff O., Mansur W.J. (2005b) Efficient nonlinear solid-fluid interaction analysis by an iterative BEM/FEM coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64, 1416-1431.

- Soares, Jr, Mansur, W.J., Von Estorff, O. (2007) An efficient time-domain FEM/BEM coupling approach based on FEM implicit Green's functions and truncation of BEM time convolution process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 1816-1826.
- Stamos, A.A., Beskos, D.E. (1996) 3-D seismic response analysis of long lined tunnels in half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 15(2), 111-118.
- Tadeu, A., Santos, P., Kausel, E. (1999a) Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements – Part I: SH wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23(8), 671-681.
- Tadeu, A., Santos, P., Kausel, E. (1999b) Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements – Part II: SV-P wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23(9), 757-768.
- Tadeu, A., Kausel, E. (2000) Green's Functions for Two-and-a-half Dimensional Elastodynamic Problems. *The Journal of Engineering Mechanics*, 126(10), 1093-1097.
- Tadeu, A., António, J., Kausel, E. (2002) 3D Scattering of waves by a cylindrical irregular cavity of infinite length in a homogeneous elastic medium. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(27-28), 3015-3033.
- Tadeu, A., Amado Mendes, P., António, J. (2006) The simulation of 3D elastic scattering produced by thin rigid inclusions using the traction boundary element method. *Computers and Structures*, 84(31-32), 2244-2253.
- Tadeu, A., Godinho, L., António, J., Amado Mendes, P. (2007) Wave propagation in cracked elastic slabs and half-space domains – TBEM and MFS approaches. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(10), 819-835.
- Tadeu, A., António, J., Godinho, L. (2009) Defining an Accurate MFS Solution for 2.5D Acoustic and Elastic Wave Propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(12), 1383-1385.

- Tadeu, A., António, J., Castro, I. (2010) Coupling the BEM/TBEM and the MFS for the numerical simulation of acoustic wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 405-416.
- Takakuda K. (1983) Diffraction of plane harmonic waves by cracks. *Bulletin of the JSME*, 26(214), 487-493.
- Thompson, L.L. (2006) A review of finite-element methods for time-harmonic acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 119(3), 1315-1330.
- Trifunac, M.D. (1971) Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61, 1755-1770.
- Warszawski, A., Soares, Jr, Mansur, W.J. (2008) A FEM–BEM coupling procedure to model the propagation of interacting acoustic–acoustic/acoustic–elastic waves through axisymmetric media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 3828-3835.
- Wong, H.L., Trifunac, M.D. (1974) Surface motion of semi-elliptical alluvial valley for incident plane SH-waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 64, 1389-1403.



# CAPÍTULO 5

---

## 5 IMPLEMENTAÇÃO DE ENSAIOS ACÚSTICOS NO LABORATÓRIO DO *ITECONS*

### 5.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, foram desenvolvidas e propostas diferentes formulações de acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira (BEM) / Método de Elementos de fronteira em Trações (TBEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) para o estudo da propagação de ondas, envolvendo a interação entre meios sólidos e/ou meios acústicos. De acordo com a geometria de cada inclusão, é possível discretizar as superfícies, utilizando o método que mais se adequa ao problema, de forma a efetuar um cálculo mais eficaz e mais eficiente. Ilustrou-se a aplicabilidade das várias formulações através da resolução de vários problemas. Na presente tese, pretende-se que estes modelos sejam aplicados nomeadamente a paredes. Pretende-se que os resultados destes modelos sejam comparados com ensaios laboratoriais em instalações que permitam essa avaliação de forma consistente e fiável.

Este trabalho coincidiu com a fase de construção do novo edifício do Instituto de Investigação e Desenvolvimento Tecnológico em Ciências da Construção – *ITeCons* e simultaneamente com a construção das câmaras acústicas.

Construíram-se duas câmaras horizontais, para os ensaios de medição do isolamento a sons aéreos, em elementos de separação verticais, e que também servem para a realização de ensaios de avaliação da absorção sonora. Construíram-se também duas câmaras acústicas verticais justapostas, para os ensaios em elementos de separação/compartimentação horizontais, tais como pavimentos, tetos ou revestimentos de piso, tanto para ensaios de isolamento a sons aéreos, bem como para ensaios de isolamento a sons de percussão. O presente trabalho foca-se apenas na implementação de ensaios de isolamento a sons aéreos nas câmaras acústicas horizontais.

Todos os ensaios laboratoriais acústicos encontram-se atualmente acreditados segundo a norma NP EN ISO/IEC 17025 e obedecem a regras estabelecidas num conjunto de normas, nacionais e internacionais, mais especificamente, na norma NP EN ISO 140-1, complementadas com alguns requisitos impostos pelas normas de ensaio NP EN 20140-3, no que respeita a ensaios de medição do isolamento sonoro. No que concerne às especificações das câmaras, para o caso dos ensaios de medição da absorção sonora, estes encontram-se descritos na norma NP EN ISO 354.

Ao contrário das restantes câmaras existentes no País, as câmaras são móveis, permitindo a construção de provetes de ensaio num espaço exterior, sendo, posteriormente, transportados e instalados no interior das câmaras, na sua posição final de ensaio. Desta forma, criam-se condições para ensaiar provetes, cujos componentes apresentam grandes dimensões. Assim, estes provetes permanecem no interior das câmaras unicamente o tempo necessário para a realização dos ensaios, podendo ser, de imediato, removidos com recurso a equipamentos mecânicos de elevação e transporte, e libertando, deste modo, as câmaras acústicas para a realização de novos ensaios.

No projeto e conceção dos dois conjuntos de câmaras acústicas atendeu-se às especificações estabelecidas naquelas normas. Particular atenção foi dada às condicionantes de uma das câmaras horizontais, uma vez que esta será utilizada enquanto câmara recetora, em ensaios de isolamento sonoro de elementos de separação verticais, e, como câmara reverberante, em ensaios para medição da absorção sonora.

A norma NP EN ISO 140-1 estabelece um conjunto de especificações relacionadas com o tipo de campo sonoro que devem apresentar: as dimensões das câmaras acústicas; o limite máximo e mínimo dos tempos de reverberação que estas devem apresentar nas baixas frequências; os níveis de ruído de fundo na câmara recetora, que devem ser suficientemente baixos, para permitir medir o som proveniente da câmara emissora sem influenciar os resultados do ensaio de isolamento; a importância dos encaminhamentos indiretos de propagação da energia sonora; o fator de perdas total da estrutura envolvente do aro provete; e a abertura de ensaio para a colocação do provete. Relativamente às dimensões das câmaras acústicas de ensaio, recomenda-se que o volume das câmaras adjacentes não seja igual, sugerindo-se que a diferença entre os respetivos volumes e/ou dimensões lineares seja de, pelo menos, 10%. Indica-se, também, que o volume deverá ser superior a 50 m<sup>3</sup>. Ainda naquela norma, é indicada uma área aproximada de 10 m<sup>2</sup>,

para a abertura de ensaio, no caso de paredes. Exige-se, ainda, que o lado menor da câmara tenha um comprimento superior a 2.3 m.

Como se referiu, a câmara horizontal fixa utiliza-se também para a realização de ensaios de absorção sonora. Para tal também tem de se ter em consideração o estabelecido pela norma NP EN ISO 354, que define o volume e as dimensões máximas admissíveis da câmara de ensaio. Também exige a observação de um campo sonoro difuso e especifica a área máxima de absorção sonora equivalente, em função do volume da câmara acústica.

A implantação e a constituição das paredes das câmaras foram estudadas de modo a garantir as condições termo higrométricas exigidas pela norma NP EN ISO 354, a qual preconiza que a humidade relativa se deve situar entre 30% e 90% e a temperatura deve ser superior a 15 °C.

Para além da verificação destas exigências, que condicionaram, desde o início, a conceção e geometria das câmaras de ensaio, houve a necessidade de proceder à análise de algumas das especificações acima referidas, após a construção das câmaras de ensaio.

No presente capítulo, descreve-se o conjunto de câmaras acústicas horizontais construídas no *ITeCons*, analisando-se detalhadamente as opções tomadas nas fases de projeto e de especificação de equipamentos e, ainda, questões relacionadas com os processos construtivos adotados.

Descrevem-se, ainda, a caracterização e a preparação das duas câmaras horizontais para a realização de ensaios de isolamento a sons aéreos de elementos verticais (para provetes de ensaio, tais como, paredes, envidraçados e janelas) e ensaios para a determinação do coeficiente de absorção de materiais absorventes e de elementos construtivos, visto que a câmara reverberante é a mesma que a câmara recetora para os ensaios de isolamento de condução aérea.

São apresentadas as características principais do equipamento de medição existentes no laboratório, bem como a indicação dos procedimentos de medição e posicionamento dos equipamentos: da fonte; dos microfones; e dos elementos de reverberação.

## **5.2 DESCRIÇÃO DAS CÂMARAS ACÚSTICAS HORIZONTAIS DO ITECONS**

Os sistemas para ensaios de isolamento a sons de condução aérea em laboratório são compostos por duas câmaras, alinhadas horizontalmente para o ensaio de elementos verticais. As instalações laboratoriais aqui descritas consistem numa câmara fixa, usada como câmara recetora, e outra móvel, usada como câmara

emissora. A fixa é também usada para ensaios de absorção sonora, pelo que, apesar de não ser da índole desta tese, se descrevem as considerações necessárias para a sua realização.

No sistema de ensaio aqui apresentado, a definição de um conceito de provete móvel é, também, essencial, sendo que apenas com um provete amovível se poderia rentabilizar a utilização da tecnologia atrás descrita. Neste sentido, os provetes de ensaio foram concebidos de forma a poderem ser removidos do espaço entre as duas câmaras e transportados para outros espaços do laboratório, com recurso a uma ponte rolante. Desta forma, torna-se mais expedito e simples todo o processo de ensaio, e permite-se que a construção e a demolição de provetes sejam realizadas noutros locais onde estes trabalhos não interfiram com o funcionamento do sistema de ensaio, nem causem danos nos equipamentos existentes.

A Figura 5.1 apresenta uma representação esquemática tridimensional deste sistema, identificando as câmaras fixa e móvel horizontais.

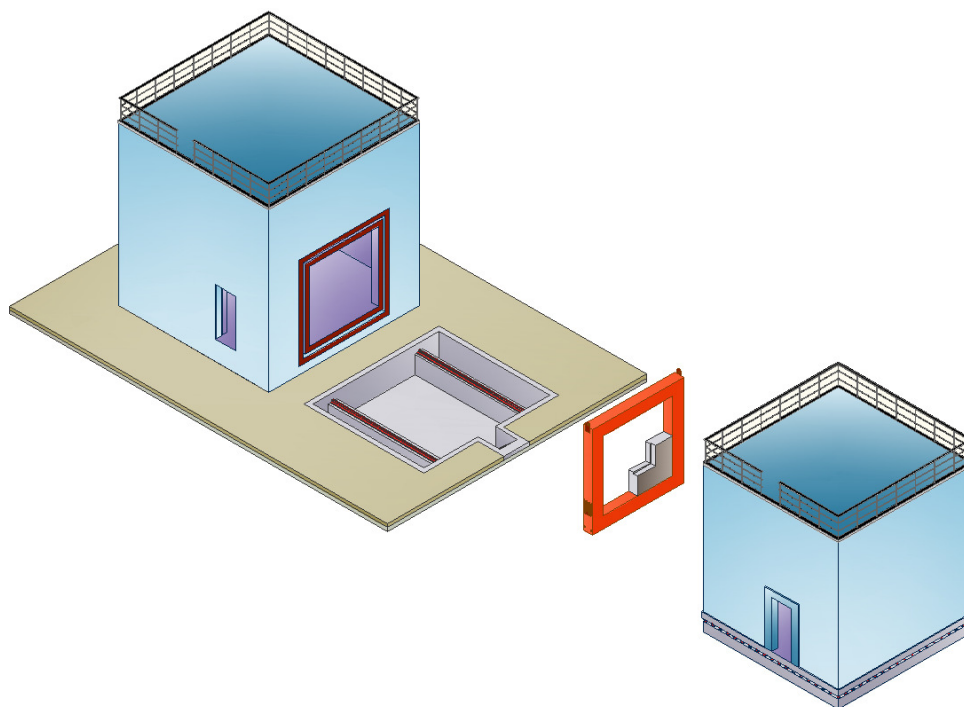


Figura 5.1: Esquema geral tridimensional do sistema de câmaras horizontais: a fixa, que funciona como receptora; a móvel, que é a emissora; e o aro móvel, onde se inserem os provetes de ensaio.

Apresentam-se, de seguida, os requisitos necessários à envolvente das câmaras e os principais aspetos construtivos tidos em conta na conceção das câmaras acústicas do *ITeCons*, e que permitem fazer face às exigências identificadas na secção anterior.

## 5.2.1 Requisitos da envolvente das câmaras

Embora tanto a câmara emissora como a recetora apresentem exigências específicas de comportamento acústico, é importante distinguir, desde já, as duas situações. De facto, a câmara emissora irá, durante o ensaio, ter a presença de uma fonte sonora que gera níveis sonoros equivalentes na ordem dos 100 dB. Nestas circunstâncias, o nível sonoro no interior desta câmara será claramente dominado pelo ruído emitido pela fonte sonora, enquanto o ruído de fundo, proveniente da envolvente ou de instalações técnicas da própria câmara, será negligenciável. Assim, a exigência de isolamento a sons aéreos entre a câmara e o ambiente exterior não necessita de ser muito elevada, sendo suficiente contar com isolamentos da ordem dos 60 dB.

No caso da câmara recetora (a fixa), o nível sonoro que aí chega é bastante mais reduzido devido ao isolamento dos provetes de ensaio. De forma a permitir o ensaio de elementos de construção com elevado isolamento (p. ex., 70 dB) é necessário garantir um isolamento bastante superior entre a câmara recetora e o meio exterior. Localizando-se estas câmaras acústicas num laboratório de ensaios com diversos equipamentos ruidosos, apenas com um elevado índice de isolamento das paredes é possível evitar a contaminação dos resultados de ensaios por ruídos provenientes deste laboratório. Desta forma, definiu-se como requisito fundamental para a envolvente da câmara que esta tivesse um isolamento sonoro a sons aéreos o maior possível, e não inferior a 80 dB.

Por outro lado, os resultados de ensaios nestas câmaras poderiam, também, ser contaminados por vibrações que se propagam ao longo da estrutura das câmaras ou entre as estruturas da câmara emissora e recetora. Desta forma, torna-se essencial garantir um adequado isolamento destes dispositivos às vibrações.

## 5.2.2 Dimensões necessárias das câmaras

A norma NP EN ISO 354 apresenta algumas exigências aplicáveis à câmara horizontal reverberante onde se realizam os ensaios de medição da absorção sonora. Nomeadamente, o seu volume deve ser de, aproximadamente, 200 m<sup>3</sup>, no qual a norma NP EN ISO 140-1 indica que o volume deverá ser superior a 50 m<sup>3</sup>. A sua geometria deverá permitir que seja verificada a condição seguinte,

$$l_{max} < 1.9V^{1/3}, \quad (5.1)$$

onde  $l_{max}$  representa o comprimento da maior linha reta contida nos limites da câmara e  $V$  refere-se ao volume da câmara. Exige-se, ainda, que o lado menor tenha um comprimento superior a 2.3 m. Assim, decidiu-se executar uma câmara semi-cúbica, com arestas de 5.85m, obtendo um volume real de 203.98 m<sup>3</sup>. No que se refere às dimensões da outra câmara de ensaio, recomenda-se que o volume da câmara adjacente não seja igual, sugerindo-se que a diferença entre os respetivos volumes e/ou dimensões lineares seja de, pelo menos, 10%. Executou-se a câmara acústica emissora (móvel) com uma aresta próxima de 5.65m, com um volume mais reduzido, de 181.54 m<sup>3</sup>.

Ainda naquela norma, é indicado que a abertura da câmara para instalar o provete deve ter uma área aproximada de 10 m<sup>2</sup>. Para tal, a abertura de ensaio nas duas câmaras executou-se com dimensões quadrangulares com arestas de 3.16m.

### **5.2.3 Aspetos construtivos da câmara fixa**

Para atingir os objetivos dos requisitos da sua envolvente, a câmara recetora, designada como fixa, é constituída por duas estruturas independentes, formando duas caixas que seguem o conceito de *box-in-a-box*. A estrutura da caixa interior é integralmente realizada em betão armado, com todas as suas superfícies em elementos planos com 200 mm de espessura. A caixa exterior, envolvendo a primeira, é constituída por uma estrutura reticulada em betão armado, com enchimento em alvenaria de tijolo de 220 mm de espessura, rebocado pelo exterior, com uma espessura aproximada de 20 mm. A cobertura desta estrutura é realizada em pavimento aligeirado de vigotas pré-esforçadas, sobre o qual se construiu uma laje maciça de betão armado com 550 mm de espessura. A caixa de ar entre as duas estruturas, com 70 mm de espessura, foi integralmente preenchida com lã de rocha de 70 kg/m<sup>3</sup>.

Para garantir o funcionamento como elemento duplo, as estruturas das duas caixas que constituem esta câmara são fisicamente desligadas entre si, apoiando-se a laje de pavimento da caixa interior num sistema de isolamento constituído por uma cofragem perdida de 18 mm (permitindo diretamente a betonagem da laje de pavimento da câmara interior) sobre apoios antivibráticos de mola. Este sistema encontra-se assente na face superior da laje de pavimento da caixa exterior, sendo este o único contacto entre as duas estruturas (ver Figura 5.2).

Foi aplicada uma malha principal de apoios de mola, do tipo CDM HELIVIBRAM 2000/4, com aproximadamente 3 unidades/m<sup>2</sup>, com uma frequência natural de 4Hz. Também foram instalados apoios adicionais do tipo CDM HELIVIBRAM 4000/4 no perímetro do pavimento da câmara, onde os apoios recebem a carga proveniente das paredes. Com a aplicação deste sistema procurou-se proceder ao isolamento entre as duas caixas, impedindo a transmissão significativa de vibrações marginais entre elas e

minimizando, assim, o efeito dessas transmissões no resultado de ensaios de isolamento a realizar. Complementarmente, este sistema é, todo ele, isolado da laje térrea do próprio edifício, onde se localizam estas câmaras, através de uma manta resiliente em granulado de borracha do tipo CDM 43.010 (ver pormenor representado na Figura 5.2). Na zona periférica das câmaras, onde assentam as paredes verticais em betão armado, aplicou-se uma manta com maior capacidade de carga, do tipo CDM 45.010.

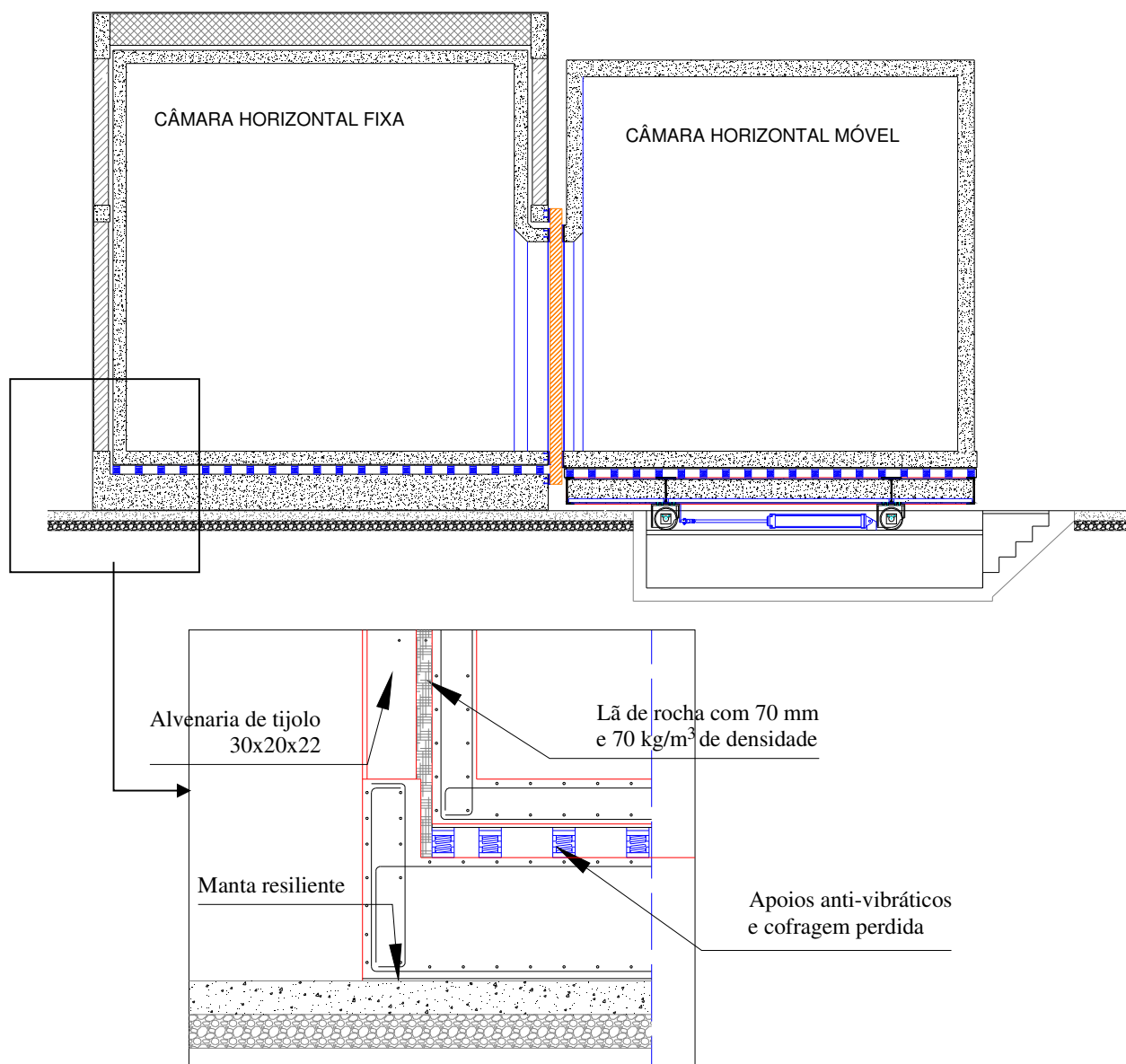


Figura 5.2: Câmaras horizontais : esquema em corte longitudinal; pormenorização do sistema de isolamento de vibrações na base da câmara horizontal fixa.

Um aspeto fundamental na conceção destas câmaras foi também o tratamento de eventuais pontos fracos, no que respeita ao isolamento a sons aéreos. Um dos pontos sensíveis é constituído pelas portas de acesso ao interior das câmaras, que necessitam, obrigatoriamente, de um tratamento cuidadoso. Assim, este acesso foi realizado por um sistema de duas portas (Figura 5.3), estando uma instalada em cada caixa, e sendo cada uma delas especificada com uma exigência mínima de isolamento de 54 dB. O espaço entre as paredes interior e exterior da câmara, nomeadamente o seu contorno, foi vedado com tela de forma a evitar a passagem de partículas da lã de rocha da caixa de ar para o exterior.

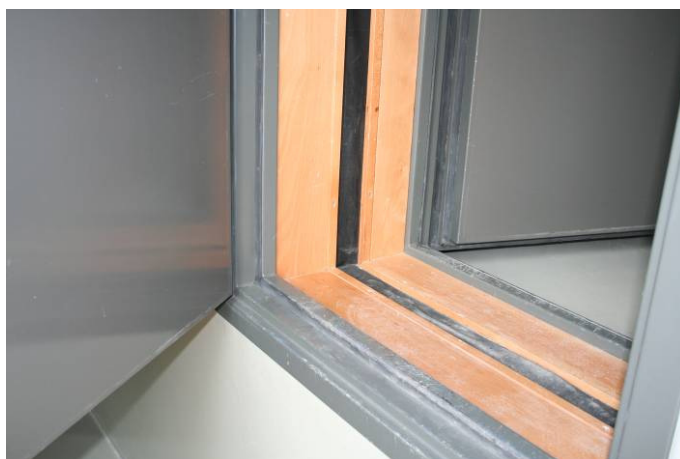


Figura 5.3: Pormenor das portas de acesso ao interior da câmara fixa horizontal.

A implantação e a constituição das paredes das câmaras foram estudadas de modo a garantir as condições termo higrométricas exigidas pela norma NP EN ISO 354, a qual preconiza que a humidade relativa se deve situar entre 30% e 90% e a temperatura deve ser superior a 15 °C. Garante-se ainda, que a temperatura ao longo de todo o ano seja inferior a 30 °C. Assim, têm-se observado temperaturas médias a rondar os 22 °C, podendo utilizar-se a expressão da velocidade de propagação do som indicada na mesma norma, para cálculo da área de absorção sonora equivalente.

#### **5.2.4 Aspetos construtivos da câmara móvel**

Tal como foi referido anteriormente, a conceção deste sistema de ensaio baseia-se no princípio da utilização de câmaras móveis e provetes amovíveis. Dada a menor exigência de isolamento existente para a câmara emissora, tomou-se a opção de a construir com apenas uma caixa de betão armado simples, com maior espessura. A câmara móvel é, então, realizada com recurso a uma estrutura maciça de betão armado, sendo constituída por uma única caixa com paredes, pavimento e teto com 250 mm de espessura, com golas de reforço com maior espessura na zona das aberturas de vãos. Esta caixa assenta sobre um



mecanismo de movimentação acionado por um sistema hidráulico. Ainda assim, também no caso desta câmara se optou por garantir o seu isolamento às vibrações provenientes do ambiente exterior, razão pela qual também neste caso se recorreu a um sistema de isolamento em que a câmara assenta sobre uma cofragem perdida de 18 mm (permitindo diretamente a betonagem da laje de pavimento da câmara) sobre apoios de mola do tipo CDM HELIVIBRAM 2000/4. Este sistema encontra-se assente na face superior de uma laje de betão armado com 400 mm de espessura, que, por sua vez, se apoia no sistema de movimentação desta câmara. Uma representação esquemática do sistema de isolamento pode ser observada na Figura 5.4.

É ainda importante fazer aqui referência ao sistema que permite a movimentação da câmara móvel (Figura 5.4), sistema esse, acionado por um módulo hidráulico, que garante um controlo preciso da aplicação de carga para a movimentação. Este sistema apresenta a possibilidade de seleção entre duas velocidades de movimento (1 mm/min ou 10 mm/min), sendo a mais lenta utilizada para o ajuste fino da câmara, quando se procede ao aperto do aro do provete de ensaio. É também possível controlar a força de aperto de forma a manter a pressão dentro de limites pré-estabelecidos. Sob o sistema de movimentação existe um fosso acessível, destinado a operações de reparação e manutenção (Figura 5.5) do próprio sistema.

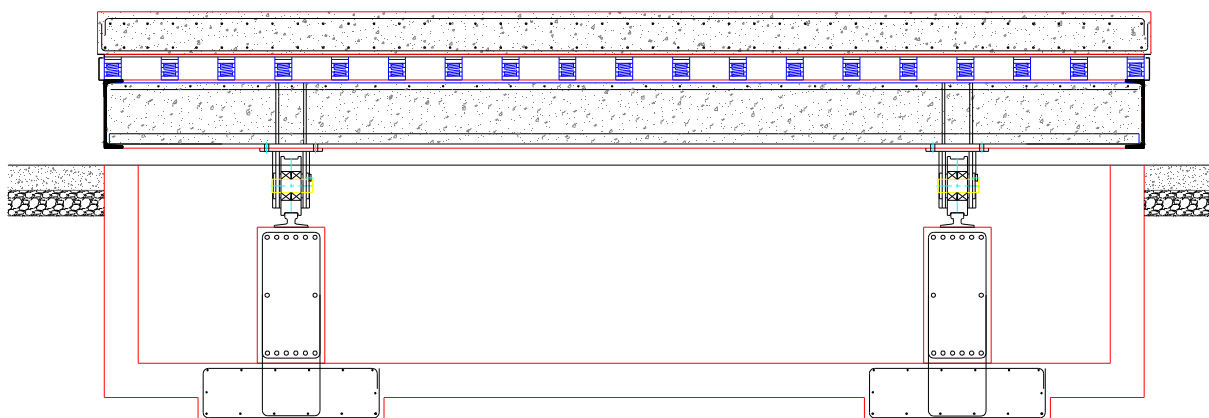


Figura 5.4: Esquema do sistema de isolamento adoptado para a câmara horizontal móvel e sistema hidráulico para movimentação desta câmara amovível.

Tal como no caso anterior, a especificação das portas de acesso a esta câmara obedeceram a requisitos de elevado desempenho acústico, mantendo-se a exigência e os cuidados indicados anteriormente. No entanto, tratando-se de uma única caixa em betão armado, as duas portas encontram-se fixas à mesma estrutura.

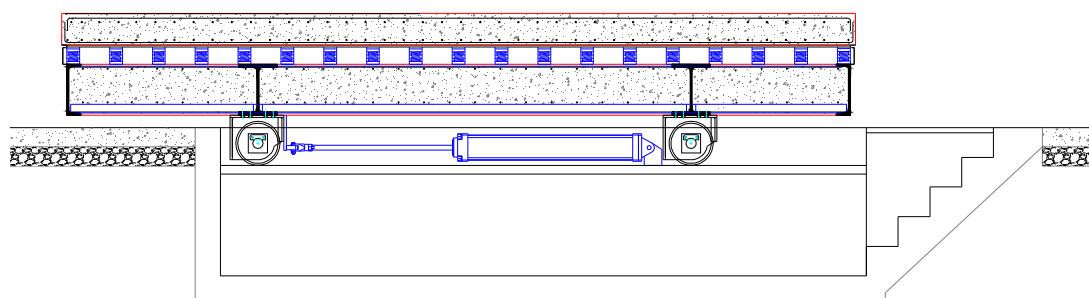


Figura 5.5: Esquema transversal do sistema de movimentação da câmara horizontal móvel e parte técnica.

### 5.2.5 Aro e provetes de ensaio

Os provetes a ensaiar são construídos no interior de um aro pré-fabricado, com estrutura em chapa de aço, formando uma secção tubular, reforçada com septos transversais, preenchida no interior por betão. Este aro pode ser concebido de forma a ter a espessura adequada ao provete que se queira ensaiar. O aro (Figura 5.6) apresenta uma área aberta, quadrada, onde é construído um provete com 10 m<sup>2</sup>, cumprindo as exigências da norma NP EN ISO 140-3. Note-se, ainda, que o contacto com a estrutura das duas câmaras acústicas se realiza apenas através deste aro, não sendo o provete sujeito a qualquer pressão de aperto aquando da movimentação da câmara móvel.



Figura 5.6: Aspecto dos aros de provetes de ensaio: aro com provete de alvenaria revestida a gesso projectado para ensaio (à esquerda); aro usado para ensaio de isolamento a sons aéreos de janelas e envidraçados (à direita).

Quando este provete se encontra instalado entre as duas câmaras, é acionado o sistema de movimentação da câmara móvel, movendo-se esta no sentido de apertar o aro do provete de ensaio contra a câmara fixa. Para que este processo seja eficaz, torna-se necessário que exista uma boa vedação entre o provete e as

aberturas das duas câmaras. Para tal, recorreu-se à aplicação de tiras resilientes, em borracha, em todo o perímetro da abertura de inserção do provete, em cada uma das câmaras acústicas horizontais. No caso da câmara fixa, aplicaram-se dois conjuntos de tiras resilientes, um na zona da abertura correspondente à caixa exterior, e outro na zona correspondente à caixa interior. Em ambos os casos, estas tiras são do tipo CDM 02.040. Estes dispositivos foram especificados de forma a apresentarem uma frequência de ressonância da ordem dos 10 Hz. No caso da câmara móvel, foi aplicada apenas uma tira do tipo CDM 05.040 (veja-se a Figura 5.7).

Note-se que, de forma a não danificar este sistema de apoio, o aperto final das câmaras móveis é realizado com a velocidade mais reduzida, sendo o provete apertado entre as duas câmaras até que a força exercida seja superior a 120 kN e não superior a 400 kN. Desta forma garante-se, por um lado, a completa vedação do espaço entre o provete e as câmaras e, por outro, que as borrachas de apoio não fiquem danificadas.



Figura 5.7: Zona onde se insere o aro do provete de ensaio na câmara horizontal móvel: aspecto geral, na primeira imagem; pormenor das bandas de isolamento para encosto dos aros, na segunda imagem.

Foram desenvolvidos alguns provetes destinados a tipos de ensaio específicos: um para a realização de ensaios de determinação da absorção sonora de materiais e elementos de construção; e outro para a realização de ensaios de isolamento a sons aéreos de envidraçados e paredes. No primeiro caso, a preocupação fundamental era a de garantir que as superfícies do provete em contacto com a câmara de ensaio (fixa) fossem as mais refletoras possíveis. Para tal, foi construído um provete em betão armado, com 30 cm de espessura, aproximadamente, e em que uma das superfícies apresenta um aspeto vidrado, garantindo um coeficiente de absorção muito baixo. No que respeita ao provete para ensaio de envidraçados, este é apresentado na primeira imagem da Figura 5.6, onde se pode observar a existência de uma abertura com  $1.50 \times 1.25 \text{ m}^2$  para instalação do provete. A conceção e construção deste aro seguiu as especificações constantes da norma NP EN 20140-3.

Câmara acústica horizontal (receptora ou emissora)

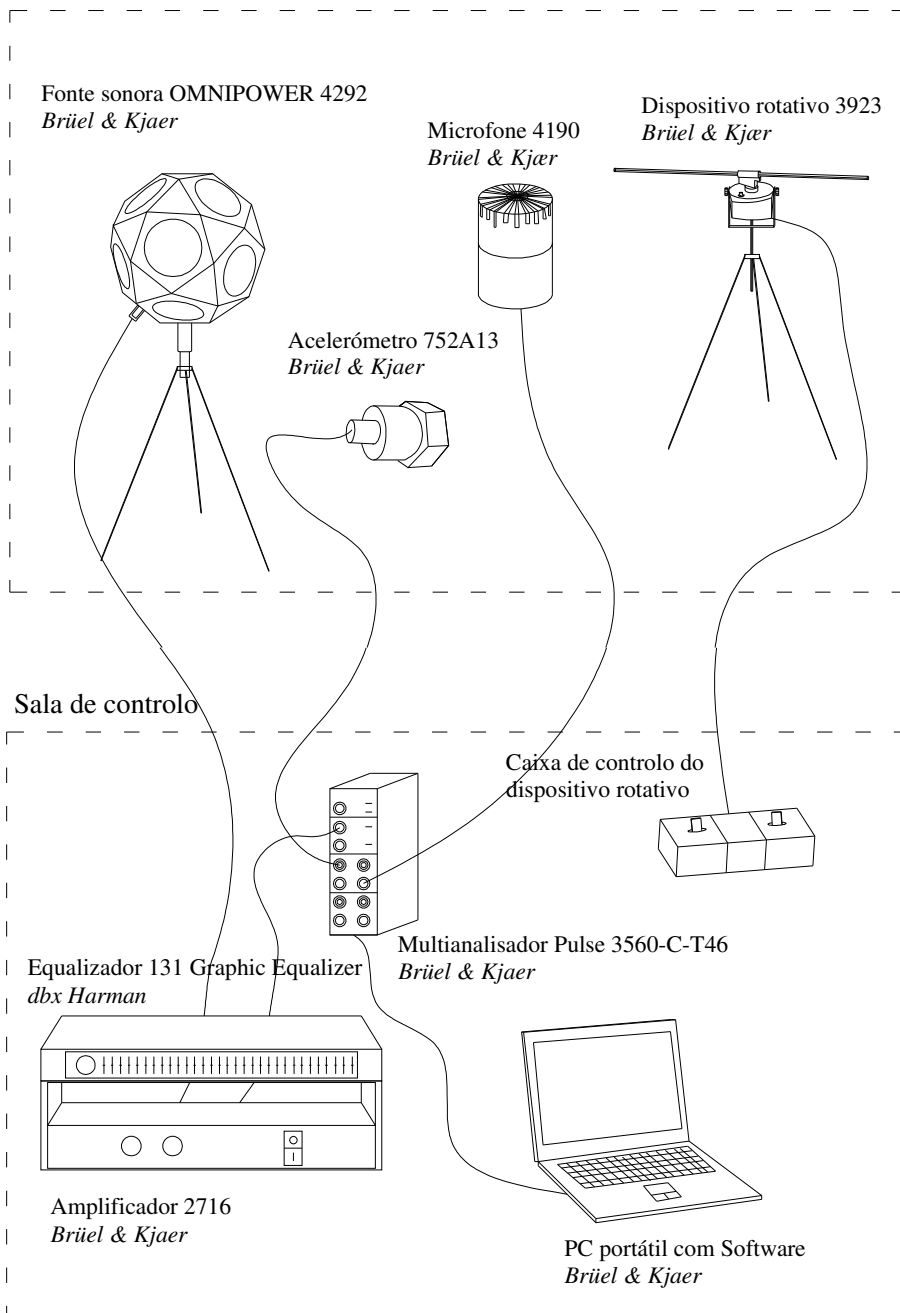


Figura 5.8: Esquema de funcionamento da cadeia de medição utilizada nos ensaios, desde as câmaras acústicas horizontais recetora e emissora até à sala de controlo.

## 5.3 EQUIPAMENTOS DE MEDIÇÃO

No projeto das câmaras acústicas do *ITeCons* foi prevista a instalação de cablagens necessárias ao controlo da operação dos equipamentos de ensaio e de aquisição de dados, nomeadamente das fontes sonoras (omnidirecional de ruídos aéreos) e dos microfones estáticos e rotativos montados em girafas rotativas e, ainda, a possibilidade de ligação de acelerómetros no interior das câmaras (ver esquema apresentado na Figura 5.8).

O equipamento de aquisição de sinal é baseado num sistema multi analisador Pulse, modelo 3560-C-T46, da marca *Brüel & Kjaer*, com cinco canais. A este sistema ligam-se os microfones instalados no interior das câmaras acústicas, os acelerómetros utilizados para registo das vibrações nos provetes de ensaio e as fontes sonoras de ruído aéreo.

Existem dois microfones de 1/2'' do tipo 4190, um em cada câmara, montados em girafas giratórias do tipo 3923, da marca *Brüel & Kjaer*. Os microfones, antes e depois de qualquer ensaio, são calibrados, através de um excitador portátil de calibração, do tipo 4231, da marca *Brüel & Kjaer*, em conformidade com a norma IEC 60942.

Salienta-se, ainda, que o equipamento para medição do nível de pressão sonora é da classe de exatidão 0 ou 1, conforme definido na norma IEC 60651 e na IEC 60804. Os filtros de 1/3 de oitava também se encontram em conformidade com os requisitos definidos na IEC 61260, e devem permitir obter o tempo de reverberação, estando em conformidade com a norma NP EN ISO 354.

As fontes de ruído aéreo estacionário necessárias para excitar o meio acústico, para a determinação dos níveis de pressão e dos tempos de reverberação, são do tipo OMNIPOWER 4292 da marca *Brüel & Kjaer*. Estas são constituídas por vários altifalantes de modo a garantir que o campo sonoro seja uniforme e omnidirecional. Esse campo sonoro gerado é de banda larga, com diferenças de nível de pressão sonora entre bandas de 1/3 de oitava adjacentes inferiores a 6 dB. Estas são ainda ligadas a um amplificador, do tipo 2716, da mesma marca e um equalizador, do tipo 131 Graphic Equalizer, da marca *dbx Harman*.

Para a determinação do fator de perdas totais, descrito na secção seguinte, foi necessária a utilização de acelerómetros da *Brüel & Kjaer*, do tipo 752A13. Estes são ligados ao transdutor de sinal, o PULSE, que regista os valores determinados.

As câmaras são monitorizadas a partir de uma sala de controlo, localizada na vizinhança das instalações de ensaio, de forma que os ensaios acústicos possam decorrer sem influência de fatores humanos. A partir desta sala de controlo, é possível visionar o decorrer dos ensaios, sem necessidade de ali aceder, através de câmaras instaladas no seu interior e acessíveis a partir da rede informática estruturada do edifício (ver Figura 5.9).

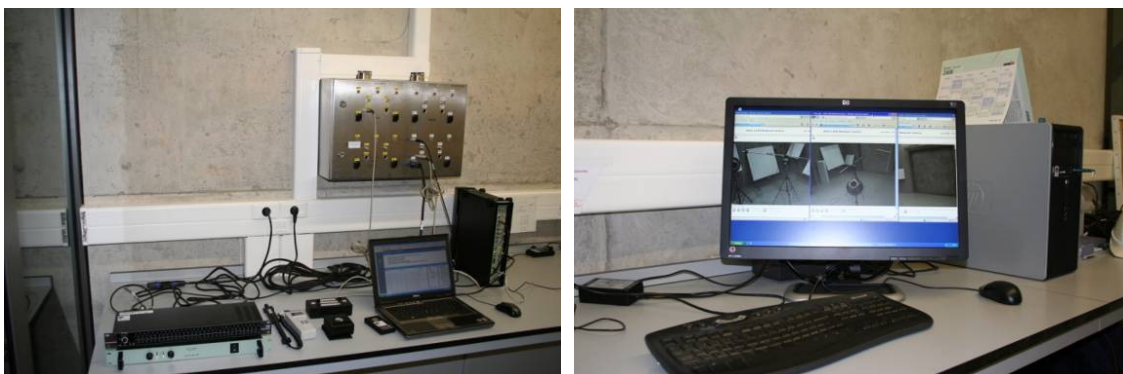


Figura 5.9: Equipamento de ensaio e de aquisição, na sala de controlo (na primeira imagem).

Monitorização dos ensaios através de câmaras instaladas no interior das câmaras acústicas (na segunda imagem).

## 5.4 CORRECÇÃO DAS CÂMARAS HORIZONTAIS DO *ITECONS*

Como foi referido anteriormente, as câmaras horizontais são adjacentes e comunicam entre si através de uma abertura de  $10\text{ m}^2$ , onde é inserido o provete de ensaio. A câmara fixa tem um volume de  $203.98\text{ m}^3$ , enquanto a câmara móvel tem um volume mais reduzido, de  $181.54\text{ m}^3$ , pelos motivos enunciados anteriormente.

A norma NP EN ISO 140-1 impõe que a câmara acústica reverberante tenha um campo sonoro que seja difuso no seu interior, pelo que, verificando-se grandes variações dos níveis de pressão, será necessário recorrer à instalação de difusores no seu interior. A sua necessidade foi avaliada e corrigida.

Para a realização de ensaios de isolamento a sons aéreos de elementos de compartimentação verticais, os tempos de reverberação em ambas as câmaras, nas baixas frequências, não devem ser demasiado elevados nem demasiado baixos. Para dar cumprimento a esta exigência foi necessário dotar ambas as câmaras de painéis adicionais com alguma absorção. Estes painéis são amovíveis, no caso da câmara fixa, a recetora, para que possam ser retirados aquando da realização de ensaios de absorção sonora.

Quando se ensaiam provetes pesados é conveniente que se assegure que a dissipação de energia da estrutura envolvente resulta num fator de perdas maior ou igual a um valor mínimo. O índice de redução sonora máximo de elementos verticais que podem ser testados nas câmaras, sem serem afetados de forma significativa por transmissões marginais, depende do tipo de elemento a ser ensaiado.

Também é imposto pela norma que o ruído de fundo na sala recetora deva ser suficientemente baixo para que os resultados do ensaio de isolamento a sons aéreos não sejam afetados.

Descrevem-se de seguida com maior detalhe os requisitos impostos pelas normas aplicáveis, relativamente às condições exigíveis, às instalações laboratoriais e às condições a verificar para a realização dos ensaios.

### 5.4.1 Controlo da difusibilidade na câmara reverberante fixa

Para se conseguir estabelecer um campo sonoro difuso satisfatório foram utilizados painéis em policarbonato transparente, com uma espessura de 5 mm (Figura 5.10) e dimensões variáveis, de 2.00x1.50 m<sup>2</sup>, 2.00x1.00 m<sup>2</sup> e 1.50x1.00 m<sup>2</sup>. Estes elementos difusores fixos apresentam uma reduzida área de absorção sonora e uma massa superficial de cerca de 5.90 kg/m<sup>2</sup>. Na sua preparação, foram usados esticadores metálicos com diferentes comprimentos, de modo a conferir curvaturas côncavas e convexas ligeiras, com diferentes raios de curvatura. Posteriormente, foram fixos ao teto através de outros esticadores, em posições aleatórias e com orientações igualmente variáveis.

Na verificação dos requisitos da difusibilidade do campo sonoro, adotou-se, como provete de ensaio, um conjunto de painéis de lã de rocha com uma área total de cerca de 12 m<sup>2</sup>, com 50 mm de espessura, com um coeficiente de absorção sonora superior a 0.90, na gama de frequências entre 500 e 4000 Hz. Este provete foi montado sobre o pavimento reverberante, segundo uma montagem do tipo "A", pela norma NP EN ISO 354. O procedimento para o controlo da difusibilidade do campo sonoro seguiu o método indicado no Anexo A dessa mesma norma. Assim, foram inicialmente efetuadas medições de absorção sonora ( $\alpha_s$ ) do provete de ensaio, sem difusores colocados na câmara de ensaio, de acordo com a seguinte equação,

$$\alpha_s = \frac{A_r}{S}, \quad (5.2)$$

em que  $A_r$  é a área de absorção sonora equivalente do provete de ensaio, em metros quadrados e  $S$  é a área, em metros quadrados, do provete de ensaio. A área de absorção sonora equivalente é dada pela equação,

$$A_r = 55.3V \left( \frac{1}{c_2 T_2} - \frac{1}{c_1 T_1} \right) - 4V (m_2 - m_1), \quad (5.3)$$

em que  $c_t$  é a velocidade de propagação do som no ar à temperatura  $t$ ,  $T_1$  e  $m_1$  é o tempo de reverberação, em segundos, e o coeficiente de atenuação devido à presença do ar, em metros recíprocos,

respetivamente, da câmara vazia.  $T_2$  e  $m_2$  é o tempo de reverberação, em segundos, e o coeficiente de atenuação devido à presença do ar, em metros recíprocos, respetivamente, da câmara com o provete de ensaio.



Figura 5.10: Difusores fixos, constituídos por painéis em policarbonato, dispostos no tecto da câmara horizontal fixa.

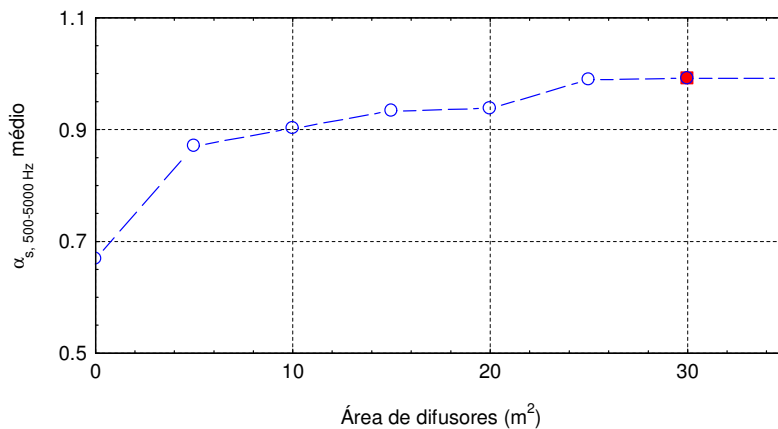


Figura 5.11: Evolução do valor médio de  $\alpha_s$ , para a gama de frequências entre 500 e 5000 Hz, em função da área, numa face, dos painéis de policarbonato utilizados para controlo da difusibilidade do campo sonoro.

Seguidamente, foram realizadas as mesmas medições, para um número crescente de difusores fixos, dispostos em incrementos de 5 em 5 m<sup>2</sup>, tendo-se determinado o valor médio do coeficiente de absorção sonora, na gama de frequências de 500 a 5000 Hz. Os resultados dos ensaios são apresentados, de forma sintética, no gráfico da Figura 5.11, sendo possível observar que o valor médio do coeficiente de absorção sonora cresce em função de incremento de difusores até atingirem um valor máximo para um valor médio de  $\alpha_s$  de 0.99, com uma área de difusores de 30 m<sup>2</sup>, mantendo-se a partir daí constante.



Deste modo, conclui-se que, para a câmara reverberante analisada, o número ótimo de difusores fixos em policarbonato é de 15, correspondentes a uma área de difusores de 30 m<sup>2</sup>. Constatou-se, assim, a necessidade de instalar uma área total (de ambas as faces) dos difusores, que totaliza cerca de 28% da área total da superfície da câmara reverberante.

## 5.4.2 Área de absorção máxima na câmara reverberante fixa

A área de absorção sonora equivalente,  $A_1$ , da câmara emissora, sem provede de ensaio e com o número ótimo de difusores, foi também avaliada. Esses valores máximos estão apresentados na Figura 5.12 na norma NP EN ISO 354, corrigidos pelo fator  $(V/200)^{2/3}$ .

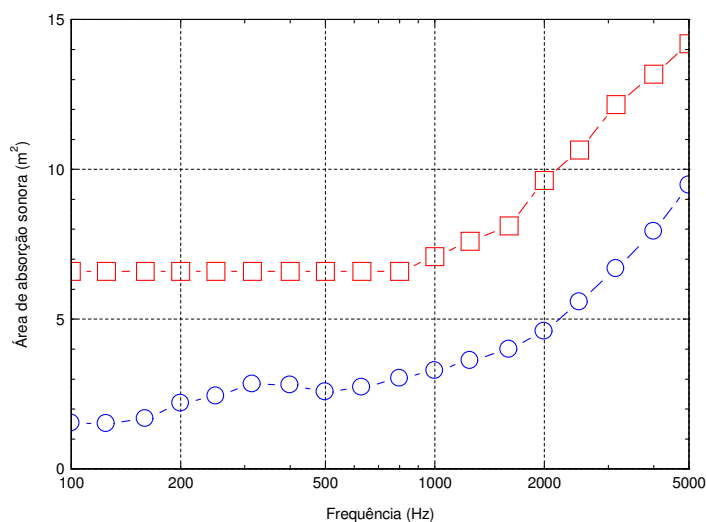


Figura 5.12: Evolução do valor da área de absorção sonora equivalente: valores limites estipulados na norma NP EN ISO 354 □; área de absorção sonora obtidos na câmara vazia, após controle da difusibilidade do campo sonoro,  $A_1$  ○.

Verifica-se que os valores não são ultrapassados, cumprindo com os valores limites estipulados por essa norma. Pode ainda observar-se que a área de absorção sonora equivalente da câmara vazia, no domínio da frequência, apresenta alguma regularidade, sem picos nem depressões de amplitude superiores a 15% da média dos valores correspondentes às duas bandas de terços de oitava adjacentes.

### 5.4.3 Correção dos tempos de reverberação

No que se refere às exigências das câmaras horizontais destinadas a ensaios de isolamento a sons de condução aérea, a norma NP EN ISO 140-1 exige que se estabeleça um campo sonoro difuso e que o tempo de reverberação nas câmaras, nas baixas frequências, se situe no intervalo de valores definido pela equação (5.2). Após a aplicação de difusores, no interior da câmara fixa, para a preparar para os ensaios de absorção sonora, e da câmara móvel para a preparar para os ensaios de isolamento a sons aéreos, verificou-se que os tempos de reverberação nas baixas frequências eram bastante elevados (ver Figura 5.14), situando-se fora do intervalo definido pela equação seguinte,

$$1 \leq T_r \leq 2 \left( \frac{V}{50} \right)^{2/3}, \quad (5.4)$$

sendo  $T_r$  o tempo de reverberação em segundos.

Para reduzir o tempo de reverberação nas baixas frequências foram instalados, nas duas câmaras, painéis com dimensões  $1.50 \times 1.50 \text{ m}^2$ ,  $1.25 \times 1.25 \text{ m}^2$ ,  $1.00 \times 1.00 \text{ m}^2$  e  $0.75 \times 0.75 \text{ m}^2$ . com inclinações e posições variadas e caixas de ressonância forradas com telas, de dimensões  $0.30 \times 0.40 \times 0.70 \text{ m}^3$ ,  $0.30 \times 0.40 \times 0.60 \text{ m}^3$  e  $0.30 \times 0.40 \times 0.50 \text{ m}^3$  (Figura 5.13). Em alguns dos painéis incorporaram-se, no seu interior, painéis de lã de rocha, com 30 mm de espessura. Note-se que, para ensaios de absorção sonora, na câmara fixa, aqueles painéis e caixas são retirados para o exterior, permanecendo apenas os difusores de policarbonato dispostos no teto, de forma a ter um espaço difuso e reverberante.



Figura 5.13: Câmaras horizontais após a correção dos tempos de reverberação, através de painéis e caixas de ressonância: na câmara emissora (à esquerda); na câmara recetora (à direita).

Os tempos de reverberação foram medidos, em ambas as câmaras, após a colocação na abertura destas de um provete de betão armado com 30 cm de espessura aproximada, em que a face orientada para a câmara reverberante apresenta um acabamento vidrado, de modo a ter uma absorção sonora reduzida.

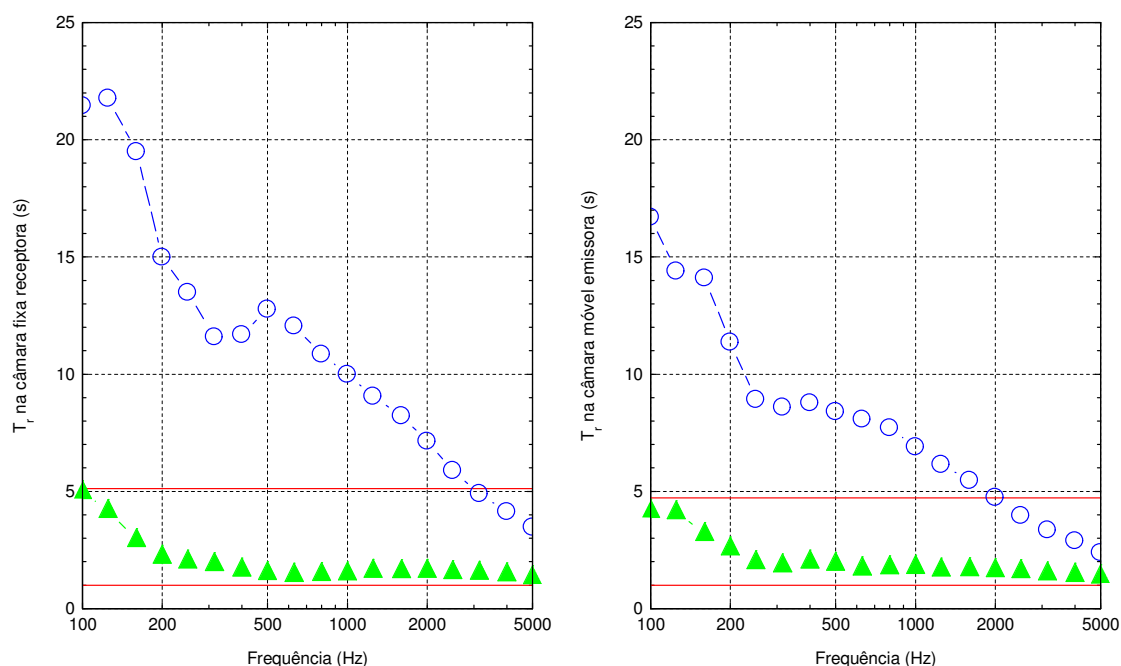


Figura 5.14: Tempos de reverberação nas câmaras fixa e móvel, antes da correção (  $\circ$  ) e após a correção (  $\blacktriangle$  ) (com difusores e painéis), com a utilização da parede de betão 30 m de espessura aproximada, como provete. Valores limites mínimo e máximo estabelecidos pela norma NP EN ISO 140-1 — .

Esta câmara, com um volume de  $203.98 \text{ m}^3$ , deve assim exibir, nas baixas frequências, tempos de reverberação que se situem entre  $1.00 \text{ s} \leq T_r \leq 5.11 \text{ s}$ , calculado de acordo com a equação (5.4). Os tempos de reverberação, no interior da câmara móvel, devem situar-se no intervalo  $1.00 \text{ s} \leq T_r \leq 4.72 \text{ s}$ . Estes limites máximos e mínimos dos tempos de reverberação estão representados na Figura 5.14 com linha contínua a vermelho. Nesta mesma figura, apresentam-se os tempos de reverberação medidos, nas câmaras fixa e móvel, antes e após a colocação dos painéis e caixas absorventes.

#### 5.4.4 Medição do fator de perdas total

A razão entre a massa do provete e a massa da estrutura envolvente pode influenciar o índice de redução sonora de um provete. Este efeito é mais significativo no caso de provetes pesados em que o fator de perdas internas da estrutura envolvente afeta os resultados, por transmissões marginais.

A norma NP EN ISO 140-1 exige que, para ensaios a provetes pesados, se deve garantir que a dissipação de energia da estrutura envolvente resulte num fator de perdas,  $\eta$ , maior ou igual ao valor determinado através da equação:

$$\eta = 0.01 + 0.3\sqrt{f}, \quad (5.5)$$

sendo  $f$  a frequência de análise (Hz).

O fator de perdas total,  $\eta_{total}$ , inclui as frações de energia dissipada devido a perdas internas, perdas nas fronteiras e perdas por radiação. A norma NP EN ISO 140-3 recomenda também que o fator de perdas seja avaliado, indicando, para o efeito, um procedimento descrito no Anexo E, dessa mesma norma, onde o fator de perdas total deve ser determinado a partir da seguinte expressão,

$$\eta_{total} = \frac{2.2}{f \cdot T_r}, \quad (5.6)$$

A verificação da exigência relativa a um fator de perdas mínimo (NP EN ISO 140-1), quando se ensaiam provetes mais pesados, foi efetuada numa parede de blocos de betão maciçados com cerca de 440 kg/m<sup>2</sup> (Figura 5.15), de acordo com os procedimentos indicados na mesma norma.

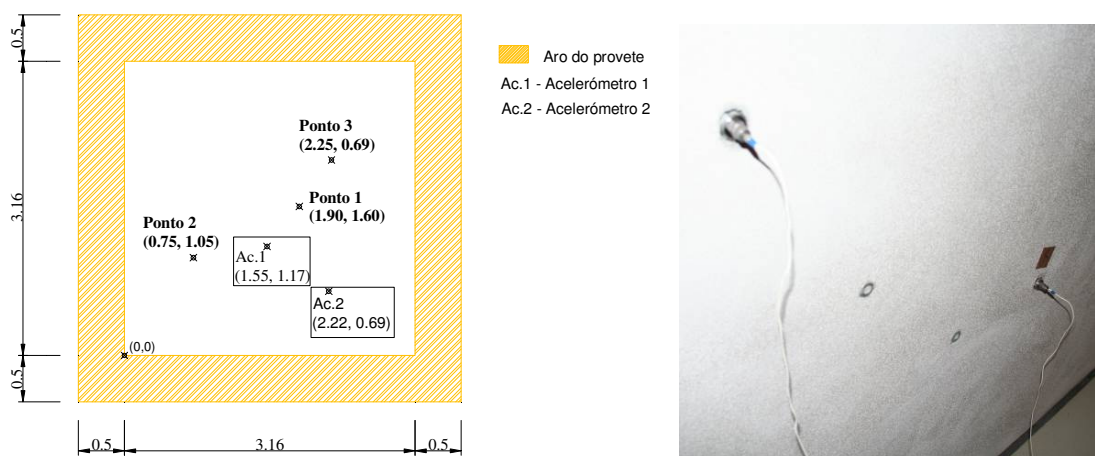


Figura 5.15: Ensaio de medição do fator de perdas total: posições relativas, em metros, no aro do provete, dos acelerómetros e pontos de excitação de impacto; acelerómetros instalados, nas posições Ac.1 e Ac.2, na parede pesada.

No caso do cálculo do fator de perdas total, o tempo de reverberação é determinado medindo o decaimento da vibração da parede sujeita a uma excitação de impacto. A norma aconselha que sejam efetuadas medições com três pontos de excitação (ponto 1 a 3) e dois pontos de medição, Ac.1 e Ac.2, considerando dois decaimentos por ponto (representando assim uma amostragem de um total de 12 decaimentos). A massa do martelo de excitação deve ser equivalente a cerca de 100 cm<sup>2</sup> do elemento a excitar. Para o provete em análise, a massa do martelo deverá ter cerca de 4.40 kg.

A referida norma não especifica as características dos acelerómetros, a intensidade da força, nem a distância às posições de impacto ou entre posições de medição. Como já foi constatado por outros autores (Paixão, 2002; Paixão e Gerges, 2004), estes aspetos têm influência nos resultados obtidos. Neste trabalho, adotaram-se as distâncias indicadas no método Nordtest, para medições *in situ* da transmissão de vibrações em edifícios (NT ACOU 090). Apesar de a norma NP EN ISO 140-1 indicar qual deverá ser a massa aproximada para o martelo de impacto, optou-se por usar martelos com diferentes massas: um martelo A com massa de 0.48 kg, um martelo B com massa de 0.61 kg e um martelo C com massa de 4.40 kg.

Na figura seguinte, apresenta-se o fator de perdas total, calculado pela expressão (5.6), obtido para cada um dos martelos e, ainda, o valor mínimo definido pela equação (5.5).

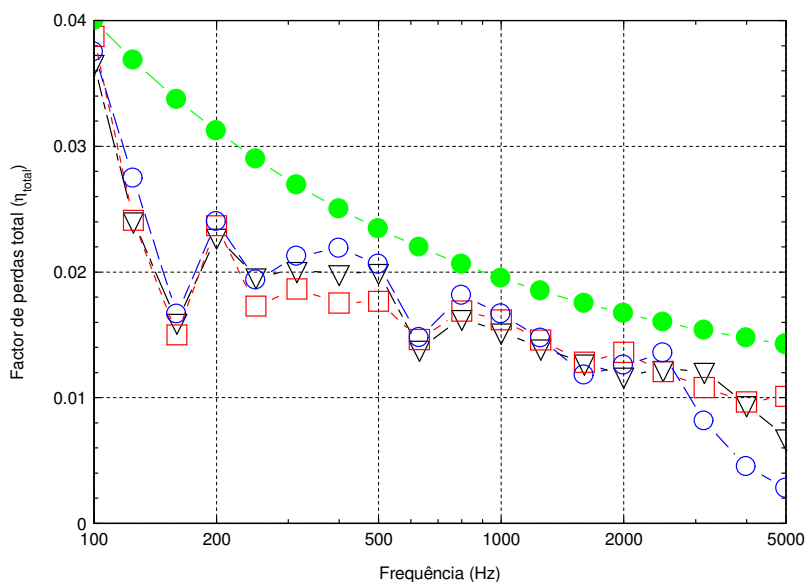


Figura 5.16: Fator de perdas total medido na parede de alvenaria com  $440 \text{ kg/m}^2$ , para o martelo do tipo A ○, para o martelo do tipo B □, para o martelo do tipo C ▽ e valor mínimo recomendado pela NP EN ISO 140-1 ●.

Como se pode observar na Figura 5.16 os valores obtidos não cumprem o mínimo exigido pela norma da equação (5.5), proposta por Meier e Schmitz (1999). Craik (1996) apresenta, ainda, uma expressão diferente  $\eta = 1/\sqrt{f} + 0.015$  que conduz a valores mínimos, ainda mais elevados.

Considera-se que os valores teóricos impostos pela norma talvez devessem ser revistos, uma vez que não se conseguem atingir na prática, conforme já foi constatado por outros autores (Paixão, 2002; Paixão e Gerges, 2004; Delannoy e Recuero, 2007).

Os resultados obtidos experimentalmente comprovam que para as diferentes massas dos martelos o valor do fator de perdas total não se altera significativamente.

### 5.4.5 Ruído de fundo na câmara recetora

A norma impõe que o nível sonoro na câmara recetora, sem equipamentos ruidosos em funcionamento, possua níveis de ruído de fundo baixos. Avaliaram-se esses níveis, em terços de oitava, com a utilização de uma parede pesada como provete de ensaio, na câmara fixa. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 5.17, em dB.

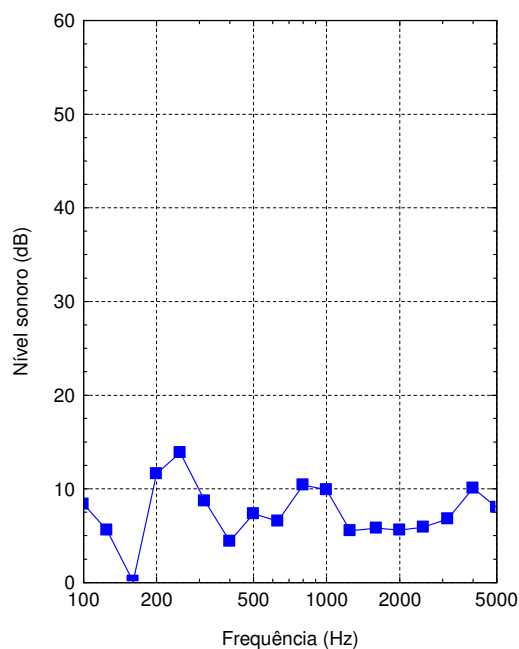


Figura 5.17: Resultado obtido experimentalmente para o ruído de fundo, em bandas de um terço de oitava, expresso em dB.

Como se pode observar os níveis (em dB) são extremamente reduzidos, em todas as frequências de análise, inclusivamente são valores abaixo do limite mínimo de medição do equipamento, 14.6 dB.

## **5.5 ENSAIO LABORATORIAL DE ISOLAMENTO A SONS AÉREOS**

Nesta secção, são descritos todas as considerações tomadas na realização do ensaio laboratorial de isolamento a sons de condução aérea, como, por exemplo, a pressão necessária a exercer sobre o sistema hidráulico de movimentação da câmara móvel horizontal, as condições termo higrométricas de ambas as câmaras e o posicionamento de todo o equipamento de ensaio no interior das câmaras acústicas de forma a cumprir todos os requisitos normativos.

As equações para a determinação do isolamento sonoro a sons aéreos, em cada banda de frequência, são apresentadas. É também demonstrado como se determina o índice de isolamento aos sons de condução aérea.

### **5.5.1 Controlo da humidade relativa e da temperatura no interior das câmaras**

De forma a avaliar as condições termo higrométricas das câmaras acústicas *ITeCons*, ao longo da realização de um ensaio, efetuou-se um estudo para analisar a sua variabilidade espacial no interior das câmaras horizontais. O registo da humidade relativa e da temperatura foi efetuado em diversas zonas no interior de cada uma das câmaras: 4 pontos ao longo do raio de rotação do microfone rotativo, e um outro habitualmente utilizado para medição no decurso dos ensaios regulares.

Os registos foram determinados, e evidencia-se que o valor do desvio padrão médio da temperatura, em graus centígrados, é equivalente a 0.05 °C e o valor do desvio padrão médio da humidade relativa, em percentagem, é igual a 0.64%. A proximidade dos valores registados ao longo destas medições permite confirmar a reduzida variabilidade espacial daqueles parâmetros dentro de cada uma das câmaras e mesmo entre os dois espaços de ensaio.

## 5.5.2 Posicionamento do equipamento de ensaio no interior das câmaras

Após a correta colocação do provete de ensaio entre as duas câmaras (emissora e recetora) e respetivo aperto da câmara, devem instalar-se os microfones, as fontes sonoras e as caixas de ressonância na posição correta, exigida pela norma.

Relativamente ao posicionamento das caixas de ressonância, estas encontram-se como estabelecido na secção anterior. Quanto ao posicionamento do equipamento de medição no interior de ambas as câmaras horizontais, os microfones montados nas girafas rotativas devem ter um raio de varrimento, no mínimo, de 1 m e o plano onde se situa esse movimento de rotação deve ser inclinado, com um ângulo superior ou igual a  $10^\circ$  em relação a qualquer superfície da câmara (parede, pavimento e teto). Foram garantidas as distâncias de separação mínimas entre posições de microfones (mínimo de 0.7 m), entre qualquer posição do microfone e os limites da câmara e dos elementos difusores (mínimo de 0.7 m), entre qualquer posição do microfone e a fonte sonora (mínimo de 1.0 m) e entre qualquer posição do microfone e do provete (mínimo de 1.0 m).

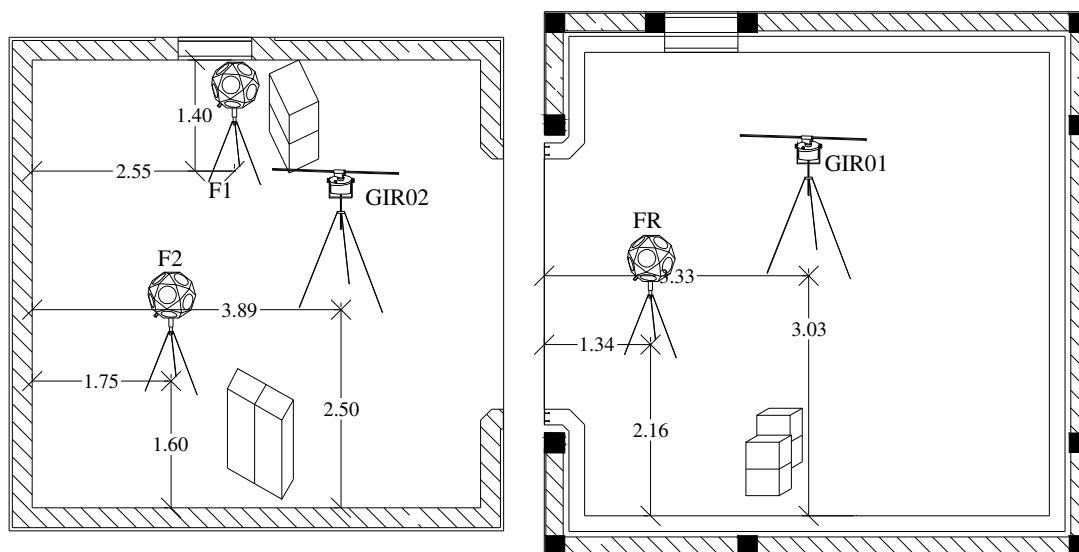


Figura 5.18: Esquema do posicionamento, em planta, do eixo dos equipamentos no interior das câmaras acústicas horizontais, para a realização de ensaio de isolamento a sons de condução aérea. A primeira câmara é a horizontal móvel (emissora) e a segunda a horizontal fixa (recetora).

Conforme esquematizado na Figura 5.18, para cada ensaio de isolamento sonoro a sons aéreos é necessária a colocação, ao eixo, dos equipamentos nas posições identificadas: dispositivos rotativos, que transportam os microfones, estão localizados nos pontos GIR01 e GIR02, para a câmara horizontal recetora e emissora, respetivamente; as posições de fonte, F1 e F2, na câmara emissora, para a medição



dos níveis de pressão em ambas as câmaras; a posição da fonte na câmara recetora, FR, para a medição do tempo de reverberação nesta mesma câmara.

Antes da medição do tempo de reverberação a GIR01 é acionada, através da caixa de controlo do sistema rotativo, de forma a parar em três posições fixas, distanciadas de ângulo de 120° a partir do seu centro. Salienta-se que, para a medição do ruído de fundo, a fonte do sistema é desligada, de modo a não emitirem ruído residual.

### 5.5.3 Determinação do isolamento sonoro aos sons de condução aérea

Antes da medição do nível médio da pressão sonora em cada câmara, deve gerar-se ruído através da fonte emissora de ruídos de condução aérea, que produz um campo estacionário e com um espectro contínuo na gama de frequências considerada. Preferencialmente, esta fonte deve gerar um ruído branco. Para o respetivo ensaio, a fonte deve ser colocada em pelo menos duas posições distintas, no interior da câmara emissora, segundo as posições indicadas na Figura 5.18 (F1 e F2 da câmara emissora).

Regista-se então o nível médio da pressão sonora em cada câmara acústica para a posição de fonte F1, emissora e recetora, num intervalo de tempo de 32s, que representa o varrimento dos microfones rotativos (GIR01 e GIR02) por cada volta completa, em bandas de um terço de oitava, entre as frequências centrais de 100 e 5000 Hz. Repete-se novamente o ensaio, para a segunda posição de fonte, F2.

O nível médio de pressão sonora é determinado para cada banda de frequência,  $i$ , em cada câmara, emissora (1) e recetora (2), resultante das várias medições efetuadas, de acordo com as seguintes expressões,

$$L_{1,i} = 10 \log \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 10^{L_{1,i,j}/10} \right), \quad (5.7)$$

e

$$L_{2,b,i} = 10 \log \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 10^{L_{2,b,i,j}/10} \right), \quad (5.8)$$

onde  $L_{1,i}$  e  $L_{2,b,i}$  representam os níveis sonoros médios na câmara emissora e na câmara recetora, respetivamente, para a banda de frequência  $i$ , ambos expressos em deciBel.  $L_{1,i,j}$  e  $L_{2,b,i,j}$  representam os níveis sonoros medidos na câmara emissora e na câmara recetora, respetivamente, correspondente à

medição  $j$ , para a banda de frequência  $i$ , ambos expressos em deciBel. O número total de medições efetuadas é representado por  $n$ .

Após a medição do nível médio de pressão sonora, em ambas as câmaras, deverá medir-se o ruído de fundo, em condições idênticas, na câmara recetora (nível sonoro na ausência do ruído produzido pela fonte sonora), de forma avaliar a sua influência nos resultados. A medição do ruído de fundo é obtida através de um varrimento completo de microfone móvel, GIR01.

Se a diferença entre o nível sonoro medido considerando a fonte e o nível sonoro do ruído de fundo for superior a 15 dB, não se efetuam correções ao nível sonoro. Se a diferença entre estes dois níveis for inferior a 15 dB, mas superior a 6 dB, deve ser calculado o nível sonoro corrigido pela equação seguinte,

$$L_{2,i} = 10 \log \left( 10^{L_{2,b,i}/10} - 10^{L_b/10} \right) \text{dB}, \quad (5.9)$$

onde  $L_{2,i}$  representa o nível sonoro médio corrigido para a banda de frequência em análise e  $L_b$  representa o nível sonoro médio produzido pelo ruído de fundo, ambos expressos em deciBel.

Se a diferença entre aqueles níveis for menor ou igual a 6 dB, em qualquer uma das bandas de frequência, deverá ser efetuada uma correção de forma a subtrair 1.3 dB ao nível sonoro medido com a fonte sonora em funcionamento. Neste caso, o valor de isolamento sonoro  $R$  (obtido) é inferior ao isolamento sonoro real, no qual deve ser identificado em laboratório de ensaio.

Por último, é medido o tempo de reverberação na câmara recetora, também em bandas de terços de oitava, para posterior correção (ou normalização) da curva de isolamento sonoro. É necessária a realização de três posições fixas do microfone, GIR01, sendo repetidos dois decaimentos para cada medição, dando lugar a um total de seis medições. A posição da fonte é a indicada na Figura 5.18, como FR.

Os valores médios do tempo de reverberação,  $T$ , para cada banda de terços de oitava, correspondem à média aritmética das curvas de decaimento registadas,  $T_i$ , para uma posição de fonte e microfone, nas  $n$  leituras, de acordo com a equação seguinte,

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i, \quad (5.10)$$

Após a conclusão do ensaio, procede-se ao cálculo, para cada banda de frequência, na determinação do isolamento sonoro a sons aéreos,  $R_i$ , expresso em deciBel, de acordo com a equação seguinte,

$$R_i = L_{1,i} - L_{2,i} + 10 \log \left( \frac{S}{A_i} \right), \quad (5.11)$$

onde  $S$  representa a área do elemento de ensaio, expressa em metros quadrados, que é equivalente à abertura de ensaio (no caso das câmaras acústicas horizontais do *ITeCons*, o provete grande é equivalente a  $10\text{m}^2$ ) e  $A_i$  representa a área de absorção equivalente, em cada banda de frequência  $i$ , expressa em metros quadrados, através da equação de Sabine (1992), que se determina através da equação,

$$A_i = 0.16 \frac{V}{T_i}, \quad (5.12)$$

onde o volume da câmara recetora é representado por  $V$ , em metros cúbicos.

#### **5.5.4 Determinação do índice de isolamento aos sons de condução aérea**

A determinação do índice de isolamento,  $R_w$ , aos sons de condução aérea é feita de acordo com a norma EN ISO 717-1, através da comparação da curva de isolamento resultante das medições laboratoriais com uma curva de referência. A curva de referência é definida para o intervalo de frequências compreendido entre 100 e 3150 Hz e o procedimento de comparação entre as curvas é obtido através do ajustamento da curva de referência à curva de isolamento medida. Uma vez efetuado o ajuste, o índice de isolamento é dado pelo valor da curva de referência correspondente à frequência dos 500 Hz.

O isolamento sonoro a sons de condução aérea e a curva de referência do provete de ensaio deve ser apresentado, pelos valores do isolamento sonoro normalizado, em forma de tabela e em gráfico.

Devem ainda ser determinados os parâmetros  $C$ ,  $C_{tr}$ ,  $C_{100-5000}$ ,  $C_{tr\ 100-5000}$ , correspondentes à adaptação dos resultados aos dois espectros de referência indicados na mesma norma.

### **5.5.5 Pressão do sistema hidráulico de movimentação da câmara móvel**

As câmaras acústicas horizontais destinam-se à realização de ensaios de isolamento sonoro normalizado a sons aéreos de elementos verticais e à realização de ensaios de absorção sonora de materiais e elementos de construção, baseando-se a conceção do sistema de ensaios no princípio da utilização de câmaras móveis e provetes amovíveis. Revelou-se necessário avaliar a influência e a dispersão dos resultados obtidos para diferentes valores da carga de ajuste, ou seja, de aperto entre aquelas câmaras acústicas e o aro do provete.

Para a sua realização construiu-se uma parede de alvenaria pesada do tipo C (descrita em pormenor na secção seguinte), acondicionada com diferentes pressões (do sistema hidráulico) de aperto da câmara móvel horizontal, nomeadamente para valores nominais de cerca de 50 bar (122 kN), 100 bar (244 kN) e 150 bar (367 kN) e determinou-se e avaliou-se o índice de isolamento sonoro a sons aéreos.

Dos resultados obtidos (não apresentados), em bandas de um terço de oitava, as curvas apresentam valores concordantes nos três ensaios. Em todos os casos, obtiveram-se equivalentes valores do índice de redução sonora ponderado e dos termos de adaptação.

## **5.6 VALOR MÁXIMO DO ÍNDICE DE ISOLAMENTO AOS SONS DE CONDUÇÃO ÁREA**

O índice de redução sonora máximo obtido em laboratório, que não é influenciado significativamente pelas transmissões marginais, vai depender do tipo de provete a ser ensaiado. Para evitar que seja necessário avaliar a contribuição das transmissões marginais sempre que se obtém um bom desempenho acústico dos elementos, determinou-se o índice de redução sonora máximo,  $R'_{\max}$ , para um conjunto de soluções representativas do tipo de ensaios a efetuar. Apenas quando o valor de ensaio de isolamento a sons aéreos, em cada banda de frequência, do provete ensaiado for superior a  $R'_{\max} - 15$  dB será necessário investigar as transmissões marginais.

O anexo A da norma NP EN ISO 140-1 indica algumas construções representativas a serem ensaiadas em câmaras horizontais acústicas: parede do tipo A; parede do tipo B; e parede do tipo C.

No laboratório do *ITeCons* foram construídos e ensaiados os três tipos de provetes com as características representadas nas Figura 5.19 (parede do tipo A – painéis aligeirados), Figura 5.21 (parede do tipo B – parede de alvenaria leve) e Figura 5.23 (parede do tipo C – parede de alvenaria pesada).

### 5.6.1 Parede do tipo A

A parede do tipo A, de acordo com a norma NP EN ISO 140-1, deve ser uma parede dupla de painéis leves com várias camadas, com uma massa superficial de pelo menos  $30\text{kg/m}^2$ . Deve existir, entre os dois panos, uma cavidade de pelo menos 200 mm de espessura (incluindo o isolamento), contendo lã mineral com 100 mm de espessura, no mínimo.

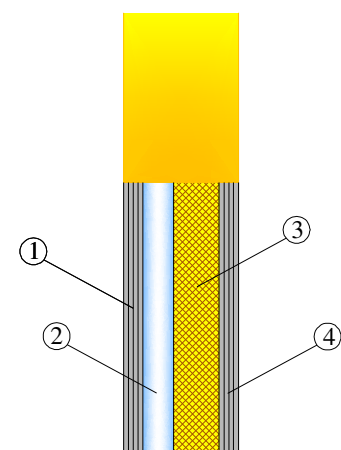
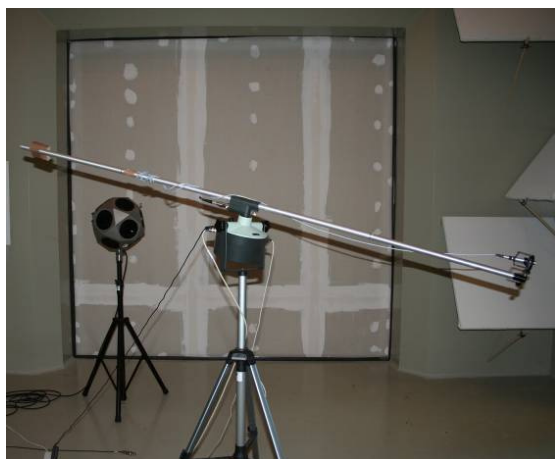


Figura 5.19: Parede do tipo A: imagem real do provete instalado entre as câmaras horizontais; esquema transversal da composição do provete leve: 4 placas de gesso cartonado de 12.5 mm de espessura, com juntas desencontradas, barradas e calafetadas, em todas as camadas (1 e 4); caixa de ar com 180 mm (2); lã de rocha de 120 mm com uma massa volúmica de  $70\text{kg/m}^3$  (3).

Esta parede é constituída por 2 conjuntos de 4 placas de gesso cartonado com 12.5 mm de espessura (cada placa), com juntas desencontradas e convenientemente barradas (com bandas de papel e massa de acabamento) e calafetadas (com bandas acústicas no perímetro do aro) em ambas as camadas, separados por uma caixa de ar de 300 mm semipreenchida com 120 mm de lã de rocha, com massa volúmica de  $70\text{kg/m}^3$ .

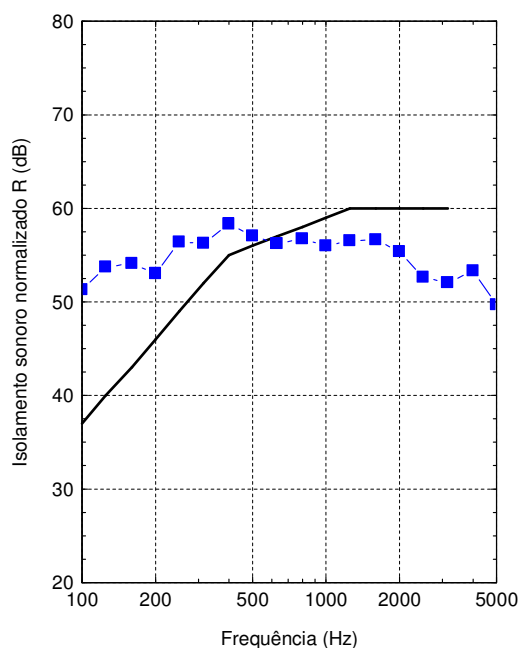


Figura 5.20: Resultado obtido experimentalmente, em bandas de um terço de oitava, para a parede leve, do tipo A: isolamento sonoro a sons aéreos normalizado R ■; curva dos valores de referência para condução aérea (EN ISO 717-1) —.

Após a execução do provete leve, do tipo A, procedeu-se à realização do ensaio de isolamento a sons aéreos, nas câmaras acústicas horizontais e efetuou-se o cálculo, conforme descrito na secção anterior, em bandas de um terço de oitava.

Para este provete obteve-se um índice de redução sonora,  $R_w$ , igual a 56 (-1; 0; -2; -1) dB, no qual as medições da redução sonora e a curva de referência, em bandas de um terço de oitava, estão representados na Figura 5.20. Verifica-se que, para esta parede leve, a curva de isolamento situa-se entre os 50 dB e os 60 dB, na gama de frequências de 100Hz e os 5000Hz.

## 5.6.2 Parede do tipo B

A norma NP EN ISO 140-1 refere que a parede do tipo B deve ser uma parede de alvenaria leve rebocada numa das faces, com uma massa superficial de  $(100 \pm 10) \text{ kg/m}^2$ , reforçada com uma estrutura independente constituída por duas placas de gesso cartonado assentes sobre uma estrutura de madeira ou metal. A cavidade entre a parede e o revestimento deve ter no mínimo 50 mm e conter lã mineral no seu interior.

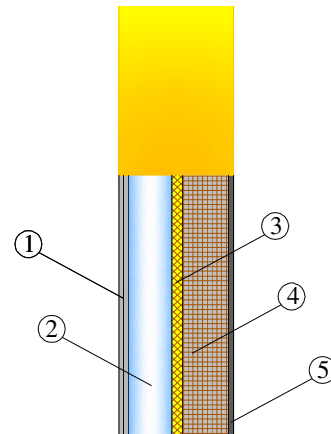


Figura 5.21: Parede do tipo B: imagem real do provete instalado entre as câmaras horizontais; esquema transversal da composição do provete de alvenaria leve: 2 placas de gesso cartonado de 12.5 mm, com juntas desencontradas, barradas e calafetadas, em todas as camadas (1); caixa de ar com 170 mm (2); lã de rocha de 30 mm com uma massa volúmica de  $70\text{kg/m}^3$  (3); blocos de betão em argila expandida de 150 mm, com juntas de argamassa de 12.5 mm, aproximadamente, com um peso total de  $82\text{kg/m}^2$  (4); reboco de argamassa com 20 mm de espessura, com uma massa superficial de  $24\text{kg/m}^2$  (5).

Construiu-se, assim, uma parede deste tipo para ser ensaiada nas câmaras do *ITeCons*. A parede foi construída por um pano de blocos de argila expandida com 150 mm de espessura, rebocado numa das faces com uma espessura de reboco de cerca de 20 mm. Esta parede é revestida por uma estrutura independente constituída por perfis metálicos e duas placas de gesso cartonado com 12.5 mm cada, com juntas desencontradas e convenientemente barradas (com bandas de papel e massa de acabamento) e calafetadas (com bandas acústicas no perímetro do aro) em ambas as camadas. Entre a parede e o revestimento existe uma cavidade de 200 mm de espessura contendo lã de rocha com 30 mm de espessura, com massa volúmica de  $70\text{kg/m}^3$ .

Após a execução do provete de alvenaria leve, do tipo B, procedeu-se à realização do ensaio de isolamento a sons aéreos, nas câmaras acústicas horizontais e efetuou-se o cálculo, conforme descrito na secção anterior, em bandas de um terço de oitava.

Para este provete obteve-se um índice de redução sonora,  $R_w$ , igual a 64 (-1; -4; 0; -4) dB, no qual as medições da redução sonora e a curva de referência, em bandas de um terço de oitava, estão representadas na Figura 5.22. Verifica-se que para esta parede de alvenaria leve, a curva de isolamento aumenta, em regra, com o acréscimo da frequência. Em comparação com a curva da parede do tipo A, existe um decréscimo de isolamento nas duas primeiras frequências, que depois se aproxima dos 400Hz. A partir daí existe um aumento substancial no valor de isolamento sonoro normalizado.

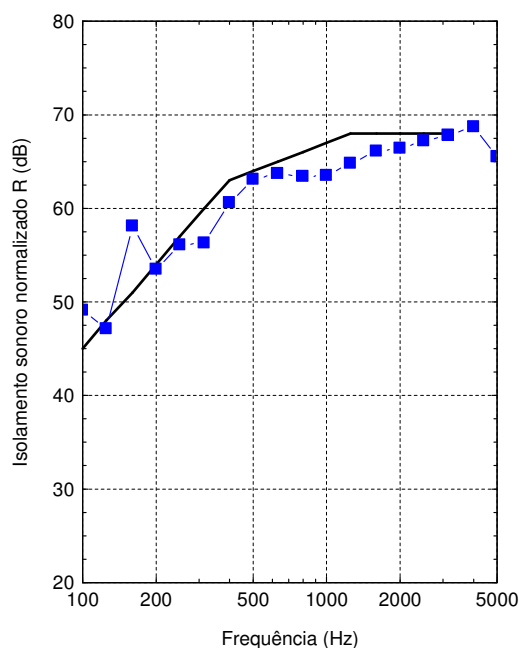


Figura 5.22: Resultado obtido experimentalmente, em bandas de um terço de oitava, para a parede de alvenaria leve, do tipo B: isolamento sonoro a sons aéreos normalizado R ■; curva dos valores de referência para condução aérea (EN ISO 717-1) — .

### 5.6.3 Parede do tipo C

A parede do tipo C deverá ser, de acordo com a norma NP EN ISO 140-1, uma parede de alvenaria pesada, constituída por uma parede de tijolos ou blocos, com uma massa superficial de  $(400 \pm 40) \text{ kg/m}^2$  rebocada numa das faces. Essa parede deverá ser revestida por uma estrutura independente constituída por duas camadas de placas de gesso cartonado, com 12.5 mm de espessura cada, assentes sobre perfis de madeira ou metálicos. Entre a parede e o revestimento deve existir uma cavidade com pelo menos 50 mm de espessura contendo lã mineral.

A parede deste tipo, que foi construída para ser ensaiada, foi executada com blocos de betão de 200 mm de espessura, com a furação totalmente preenchida por argamassa. As juntas de argamassa têm cerca de 12.5 mm e a parede foi rebocada numa das faces, apresentando uma massa superficial de cerca de  $440 \text{ kg/m}^2$ . A esta parede foi adicionado um pano constituído por duas placas de gesso cartonado com 12.5 mm de espessura, cada placa, com juntas desencontradas e convenientemente barradas (com bandas de papel e massa de acabamento) e calafetadas (com bandas acústicas no perímetro do aro) em ambas as



camadas, assentes sobre uma estrutura independente de perfis metálicos. Esta parede tem uma caixa de ar de 140 mm onde se incluiu lã de rocha com 30 mm de espessura e massa volúmica de  $70\text{ kg/m}^3$ .

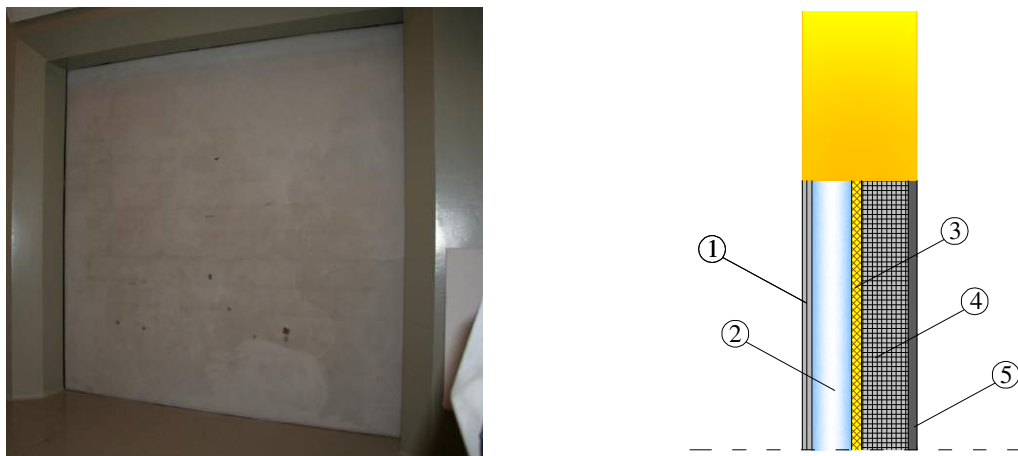


Figura 5.23: Parede do tipo C: imagem real do provete instalado entre as câmaras horizontais; esquema transversal da composição do provete de alvenaria pesada: 2 placas de gesso cartonado de 12.5 mm, com juntas desencontradas, barradas e calafetadas, em todas as camadas (1); caixa de ar com 110 mm (2); lã de rocha de 30 mm com uma massa volúmica de  $70\text{ kg/m}^3$  (3); blocos de betão de 200 mm, com furação totalmente preenchida com argamassa e com juntas de argamassa de 12.5 mm, aproximadamente, com um peso total de  $368\text{ kg/m}^2$  (4); reboco de argamassa com 60 mm de espessura, com uma massa superficial de  $72\text{ kg/m}^2$  (5).

Após a execução do provete de alvenaria pesada, do tipo C, procedeu-se à realização do ensaio de isolamento a sons aéreos, nas câmaras acústicas horizontais e efetuou-se o cálculo, conforme descrito na secção anterior, em bandas de um terço de oitava.

Para este provete obteve-se um índice de redução sonora,  $R_w$ , igual a 72 (-1; -2; 0; -2) dB, no qual as medições da redução sonora e a curva de referência, em bandas de um terço de oitava, estão representadas na Figura 5.24. Verifica-se que esta parede de alvenaria pesada possui um melhor desempenho, em todas as frequências, em relação às restantes paredes, do tipo A e do tipo B.

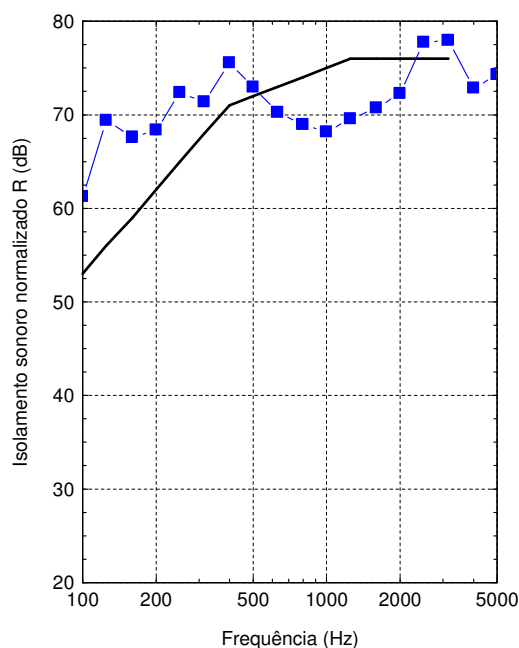


Figura 5.24: Resultado obtido experimentalmente, em bandas de um terço de oitava, para a parede de alvenaria pesada, do tipo C: isolamento sonoro a sons aéreos normalizado R ■; curva dos valores de referência para condução aérea (EN ISO 717-1) —.

## 5.7 CONCLUSÕES

Neste capítulo, são descritos todos os procedimentos tomados em projeto e aplicados na construção das câmaras acústicas existentes no *ITeCons*, para a realização de ensaios de isolamento. Procurou-se justificar as várias opções tomadas na fase de projeto, bem como os cuidados tidos na execução, de forma a garantir um funcionamento adequado deste equipamento de ensaio. As câmaras aqui descritas foram definidas e especificadas tendo em atenção as exigências constantes na normalização em vigor, de forma a permitir a realização de ensaios reconhecidamente válidos para a caracterização de elementos de construção.

Posteriormente, apresentou-se a preparação e caracterização das câmaras acústicas horizontais do *ITeCons*. O controlo da difusibilidade do campo sonoro foi garantido através da colocação de difusores fixos, materializados por painéis de policarbonato com uma absorção sonora reduzida, com diferentes áreas e orientações, e suspensos no teto da câmara de ensaio. Comprovou-se, experimentalmente, que no caso da câmara horizontal fixa, a área ótima de ambas as faces dos difusores representa cerca de 30% da área total da superfície da câmara reverberante.

Com esta solução, os tempos de reverberação passam a ser superiores a 1.00 s, em ambas as câmaras, e inferiores a 5.11 s e 4.72 s, na câmara fixa e móvel, respetivamente, na gama das baixas frequências, conforme imposto pelas normas em vigor. A redução dos tempos de reverberação registados nas câmaras acústicas foi conseguida com auxílio da colocação de painéis absorventes nas paredes das câmaras, de dimensão, posicionamento e orientação variáveis. Foram também avaliados, experimentalmente, os valores do fator de perdas total, para um provete pesado.

O ensaio de isolamento sonoro a sons aéreos foi descrito e foram apresentadas todas as expressões de cálculo para a determinação do índice de isolamento sonoro. Os três provetes tipo, especificados pela normalização, permitiram a determinação dos valores máximos do índice de isolamento sonoro a sons aéreos, para as instalações analisadas, correspondentes aos seguintes valores: para paredes do tipo A (painéis aligeirados), 56 dB; para paredes do tipo B (paredes de alvenaria leve), 64 dB; e, para paredes do tipo C (paredes de alvenaria pesada), 72 dB.

Devido a todos estes aspetos, considera-se que as câmaras acústicas horizontais apresentam condições ideais para a realização de ensaios de isolamento de condução aérea na determinação do índice de redução sonora.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Beranek, L., Vér, I. (1992) *Noise and Vibration Control Engineering*. Wiley, New York.
- Bies, A., Hansen, H. (2003) *Engineering Noise Control. Theory and Practice*. Spon Press, London.
- Brüel & Kjaer (2007) *PULSE Multi-analyzer System Type 3560-B/C/D/E – Technical Documentation*, 12.
- Brüel & Kjaer (2003) *PULSE – Getting Started an Introduction to PULSE*.
- Craik, R.M. (1996) *Sound Transmission through Building using Statistical Energy Analysis*. Gower Publishing Limited, England.
- Delannoy, J., Recuero, M. (2007) Loss factor measurements on plasterboard, *19th International Congress on Acoustics*, Madrid, 2-7 September 2007.
- Everest, F. (1991) *Acoustics of Small Rooms. Handbook for Sound Engineers. The new audio cyclopedia*, Glen Ballou Editor, Oxford, 43-66.
- Ingard, U., Bolt, R. (1951) Absorption Characteristics of Acoustic Material with Perforated Facings. *Journal of the Acoustical Society of America*, 23, 533-540.
- Kinsler, L., Sanders J., Frey, A. (1982) *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons.
- Kuttruff, H. (1997) *Sound in Enclosures. Encyclopedia of Acoustics. A wiley-Interscience Publication*, New York, 3, 1101-1115.
- Mateus, D. (2004) *Isolamento acústico de elementos de compartimentação leves em edifícios. Tese de Doutoramento*, DEC-FCTUC, Coimbra.

- Meier, A., Schmitz, A. (1999) Application of Total Loss Factor Measurements for the Determination of Sound Insulation. *Building Acoustics*, 6(2), 71-84.
- NP EN ISO 140-1 (2001) Medição do isolamento sonoro de edifícios e de elementos de construção, Parte 1: Especificações para laboratórios sem transmissão marginal (ISO 140-1:1997). *IPQ*, 2002.
- NP EN ISO 140-3 (1998) Medição do isolamento sonoro de edifícios e de elementos de construção. Parte 3: Medição em laboratório do isolamento sonoro a sons aéreos de elementos de construção (ISO 140-3:1995). *IPQ*, 1998.
- NP EN ISO 354 (2007) Medição da absorção sonora em câmara reverberante (ISO 354:2003). *IPQ*, 2007.
- NP EN ISO/IEC 17025 (2005) General requirements for the competence of testing and calibration laboratories. *IPQ*, 2005.
- NT ACOU 090 (1994) Building Structures, junctions: Transmission of vibrations – field measurements.
- Paixão, D.X. (2002) Caracterização do isolamento acústico de uma parede de alvenaria utilizando análise estatística de energia, SEA. *Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina*.
- Paixão, D.X., Gerges, S.Y. (2004) Perda de transmissão sonora em paredes de alvenaria de tijolo maciço. *Ambiente Construído*, 4(2), 95-110.
- Sabine, W. (1992) Collected Papers in Acoustics. *Cambridge: Harvard University Press*.
- Schroeder, M. (1979) Integrated-Impulse Method Measuring Sound Decay without Impulses. *Journal Acoustical Society of America*, 66(2), 497-500.
- Takahashi, D. (1997) A New Method for Predicting the Sound Absorption of Perforated Absorber Systems. *Applied Acoustics*, 51(1), 71-84.



# CAPÍTULO 6

---

## **6 CARACTERIZAÇÃO ACÚSTICA DE PAREDES DE CONSTRUÇÃO COM BLOCOS DE BETÃO, FABRICADOS COM INCORPORAÇÃO DE CORTIÇA**

### **6.1 INTRODUÇÃO**

Na conceção de novos elementos de compartimentação, quer interiores, quer exteriores, a indústria de construção tem desenvolvido novas soluções tecnológicas que recorrem à utilização de paredes constituídas por múltiplas camadas de diversos materiais, ou mesmo à criação de novas geometrias, na tentativa de obter um produto mais leve e com bom comportamento físico e mecânico. O objetivo principal deste capítulo é a determinação do isolamento sonoro de elementos de compartimentação, quer em termos experimentais, quer em termos numéricos, de forma a apoiar o desenvolvimento de novos materiais para a indústria de construção, nomeadamente na caracterização acústica de paredes de alvenaria que incorporem blocos de betão, fabricados com incorporação de regranulado de cortiça.

Os investigadores têm-se preocupado em desenvolver ferramentas numéricas para simular o comportamento acústico e avaliar, nomeadamente, o isolamento sonoro de diversos elementos de construção (Carvalho, 1999; Tadeu e António, 2002; António *et al.*, 2003; Tadeu e Godinho, 2003). Num destes trabalhos, determinou-se o isolamento sonoro de camadas fluidas e sólidas, inseridas num meio fluido infinito. A influência das fronteiras que separam as várias camadas, sólido-sólido e sólido-fluido, é

determinada com recurso a funções de Green adequadas que evitem a discretização das interfaces de separação das camadas, considerando a existência de cargas harmónicas lineares, cuja amplitude varia de forma sinusoidal ao longo de uma direção, aplicadas em meios fluidos ou sólidos. A integração destas soluções para diferentes números de onda permite determinar a resposta de cargas pontuais. Estas soluções fundamentais relacionam variáveis, tais como tensões ou deslocamentos, em determinada posição no interior de um corpo elástico ou acústico, produzidas por cargas dinâmicas aplicadas em qualquer ponto do meio. A determinação das funções de Green exige o conhecimento dos potenciais de deslocamento no meio sólido e potenciais de pressão no meio fluido. Os potenciais de deslocamento utilizados para a definição das funções de Green são os mesmos definidos na metodologia usada por Tadeu e Kausel (2000) na avaliação das funções de Green para uma carga harmónica linear, com variação sinusoidal da amplitude ao longo de uma direção, colocada num espaço infinito. Os potenciais de pressão no fluido obtêm-se usando um procedimento equivalente. Ambos os potenciais de deslocamento e os de pressão são escritos como uma sobreposição de ondas planas seguindo a abordagem usada por Lamb (1904), para o caso bidimensional, e por Bouchon (1979) e Kim e Papageorgiou (1993) no cálculo de respostas tridimensionais através de uma formulação discreta em função do número de onda. As funções de Green finais, para um meio confinado, obtêm-se com a soma do resultado de um meio infinito (deslocamentos ou pressões provocados por uma fonte no meio infinito) com os termos provenientes das interfaces (deslocamentos ou pressões provocados por uma fonte devido às reflexões das fronteiras), usando uma técnica similar à descrita por Kawase (1988).

Refira-se que em trabalhos anteriores, Tadeu e António (2002) e Tadeu *et al.* (2004), o problema físico em estudo apenas contempla camadas com espessura reduzida e sem qualquer tipo de inclusões no seu interior. Validaram-se os resultados numéricos obtidos, através das funções de Green, em comparação com resultados experimentais para elementos finos de apenas uma e duas camadas, vidros simples e duplos com diversas espessuras.

Um dos objetivos deste capítulo é a validação daquelas soluções para elementos com espessuras superiores. Pretende-se, ainda, utilizar aquelas soluções fundamentais na adaptação das formulações numéricas desenvolvidas ao longo dos Capítulos 2, 3 e 4 do presente trabalho de modo a tornar possível a simulação da propagação de ondas em elementos de parede com cavidades.

Este trabalho coincidiu com a realização de um projeto de I&DT em copromoção com entidades industriais que visa desenvolver um bloco de alvenaria em betão com substituição do agregado britado por um resíduo de cortiça, o regranulado de cortiça expandida na ótica da sustentabilidade (Carvalho, 1996). No âmbito desse projeto, pretende-se, entre muitos outros objetivos, desenvolver um bloco com uma geometria que permita um bom desempenho acústico. Para este efeito revela-se importante adequar uma ferramenta numérica, que permita efetuar tal análise, através da adaptação das diferentes formulações de acoplamento propostas, entre o Método dos Elementos de Fronteira (BEM) / Método de



Elementos de fronteira em Trações (TBEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS). Julga-se ser possível prever o isolamento sonoro conferido por uma camada sólida contendo inclusões, limitada por dois meios fluidos homogêneos e infinitos. Este tipo de modelação pode revelar-se mais eficaz e mais eficiente, pois permite superar algumas das limitações impostas por cada método quando aplicado de forma individual (Castro e Tadeu, 2012). O domínio do problema é dividido em vários subdomínios, em que as várias inclusões são modeladas com o BEM (e/ou com o TBEM) ou com o MFS, em função da sua geometria. Os vários subdomínios são acoplados impondo as condições de fronteira necessárias.

Relativamente aquele projeto I&DT, a cortiça que se pretende utilizar é um produto natural, ecológico, orgânico, leve e exibe uma elevada estabilidade dimensional. Apresenta, ainda, uma considerável resistência à compressão, não liberta cheiros nem gases nocivos, mantém-se inalterável e conserva a sua eficiência por longos períodos de tempo. Com estas características é possível utilizar a cortiça num vasto leque de aplicações (Cordeiro, 1998; Karade *et al.*, 2001). A utilização de resíduos de cortiça pode ser utilizada, como, por exemplo, no fabrico de betões leves (Aziz, 1979). Benazzouk *et al.* (2003) utilizaram outros resíduos, como o de borracha, em misturas de betões demonstrando resultados que indicam que estes betões exibem melhores propriedades térmicas e menor retração quando comparados com outros betões leves produzidos com recurso a outros materiais. Nesse sentido, poderá ser interessante a incorporação de resíduos de cortiça em betões, já que esta mistura exibe um excelente comportamento térmico e possui uma boa capacidade para absorver vibrações. Têm-se vindo a desenvolver trabalhos de investigação, onde se desenvolvem composições de betão que incorporam na sua constituição grânulos de cortiça, resultantes dos resíduos da transformação desta (Jalali *et al.*, 2005; Karade, 2006; Branco *et al.*, 2007; Branco *et al.*, 2008; Reis, 2012). O desenvolvimento de novas utilizações para estes grânulos de cortiça traz inegáveis vantagens em termos ambientais. Da experiência obtida ao longo daqueles trabalhos, é expectável que a utilização de resíduos de cortiça na fabricação de betões leves permita conferir características técnicas interessantes, quando comparados com aqueles que incorporam poliestireno (Ganesh e Saradhi, 2003), argila expandida, betão celular e entre outros.

Neste capítulo é inicialmente apresentada a adaptação das formulações de acoplamento BEM+TBEM/MFS, apresentadas nos Capítulos 2, 3 e 4, de modo a permitir a avaliação do isolamento conferido por uma camada sólida elástica, contendo inclusões com formas finas e irregulares. As interfaces planas das camadas não são modeladas, pois utilizam-se as já referidas funções de Green desenvolvidas para sistemas multicamadas. A formulação de acoplamento proposta é verificada através da comparação de resultados com a solução BEM/TBEM.

Depois são utilizadas as funções de Green no cálculo do isolamento sonoro a sons de condução aérea. Estas soluções são comparadas com resultados laboratoriais obtidos numa parede de betão armado com 30cm de espessura. Posteriormente, fabricam-se e caracterizam-se várias misturas de betão contendo regranulado de cortiça expandida. Após essa análise fabricam-se blocos protótipos com as várias misturas

e procedeu-se à sua caracterização física, mecânica, térmica e, principalmente, acústica. As medições laboratoriais da redução sonora são comparadas com as obtidas através da formulação numérica.

## 6.2 ABORDAGEM NUMÉRICA

Pretende-se caracterizar acusticamente paredes constituídas por blocos de betão fabricados com incorporação de regranulado de cortiça expandida (ECG). Estes blocos, no seu interior, possuem furações verticais preenchidas por ar. As juntas verticais, de encosto entre blocos, são de encaixe macho-fêmea (com junta “seca”), ver Figura 6.1. Pretendem-se determinar as pressões em cada um dos lados da parede de alvenaria gerada por uma fonte sonora colocada num dos meios fluidos.



Figura 6.1: Geometria bidimensional (em corte) de uma camada sólida (blocos de betão com regranulado de cortiça expandida) infinita no plano  $xz$ , limitada por dois meios fluidos semi-infinitos.

### 6.2.1 Definição do problema

Para exemplificar a metodologia utilizada considerem-se duas inclusões, uma fina (Inclusão 1) e outra irregular (Inclusão 2), ambas bidimensionais (não são consideradas as bases de assentamento de blocos), inseridas num meio elástico espacialmente uniforme (camada sólida), com massa volúmica  $\rho_1$ , com velocidade de propagação das ondas P (ondas dilatacionais)  $\alpha_1$  e velocidade de propagação das ondas S (ondas de corte)  $\beta_1$ . O interior da Inclusão 1 é um meio acústico, com uma massa volúmica  $\rho_2$  e permite que as ondas de pressão (ondas P) viajem com uma velocidade igual a  $\alpha_2$ . A Inclusão 2, também ela fluida, possui uma massa volúmica  $\rho_3$  e uma velocidade de propagação das ondas P (ondas dilatacionais) igual a  $\alpha_3$ . A camada sólida é confinada por dois meios fluidos acústicos, Fluido 1 e Fluido 2, que

assumem propriedades iguais, massa volúmica igual a  $\rho_f$  e uma velocidade de propagação das ondas dilatacionais  $\alpha_f$ , conforme ilustrado na Figura 6.2.

Este sistema é submetido a uma fonte linear harmónica localizada na posição  $O(x_s, y_s)$ , que oscila com uma frequência  $\omega$ , e origina uma pressão incidente, num ponto geral localizado em  $(x, y)$ ,

$$p_{inc}(x, y, x_s, y_s, \omega) = -\frac{i}{2} AH_0(k_{\alpha_1} r_1), \quad (6.1)$$

onde o índice *inc* representa o campo incidente,  $r_1 = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$ ,  $A$  é a amplitude de onda,

$k_{\alpha_1}$  representa o número de onda e possui o valor de  $k_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha_f^2} - k_z^2}$  e  $H_n(\dots)$  corresponde às segundas

funções de Hankel de ordem  $n$ . As inclusões 1 e 2 são delimitadas pelas fronteiras  $S_1$  e  $S_2$ , respetivamente.

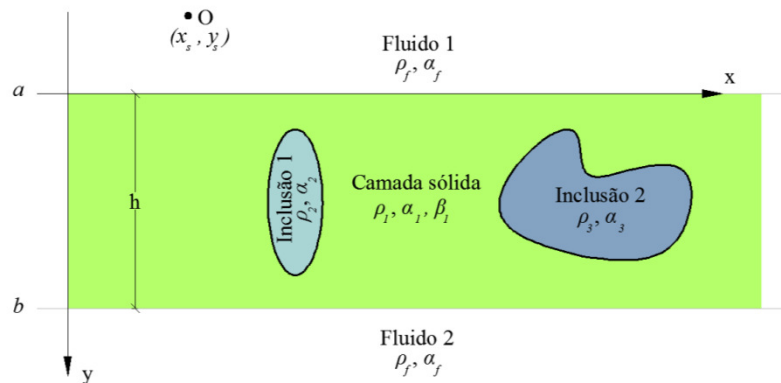


Figura 6.2: Geometria bidimensional (em corte) de uma camada sólida limitada por dois meios fluidos semi-infinitos, Fluido 1 e Fluido 2. Cavidade fina (Inclusão 1) e cavidade irregular (Inclusão 2) no interior da camada sólida intermédia.

## 6.2.2 Formulação de acoplamento BEM+TBEM/MFS

A presente formulação é adaptada daquelas apresentadas nos Capítulos 2, 3 e 4. A influência das fronteiras horizontais que separam as superfícies externas da camada é representada por funções de Green, de modo a evitar a sua discretização (descritas no Apêndice B deste capítulo).

Para a modelação do sistema apresentado na Figura 6.2 é utilizada uma formulação de acoplamento. O Método dos Elementos de Fronteira, método clássico, combinado com o Método dos Elementos de Fronteira em Trações (BEM+TBEM), é utilizado para modelar a primeira inclusão (limitada pela superfície  $S_1$ ). O Método das Soluções Fundamentais (MFS) é usado para modelar a segunda inclusão, que é irregular (limitada pela superfície  $S_2$ ). A discretização considerada é ilustrada na Figura 6.3.

Este sistema físico encontra-se sob a ação de cargas de pressão lineares harmónicas sinusoidais (segundo  $z$ ), localizadas nas coordenadas  $(x_s, y_s)$ , no meio acústico exterior de propagação.

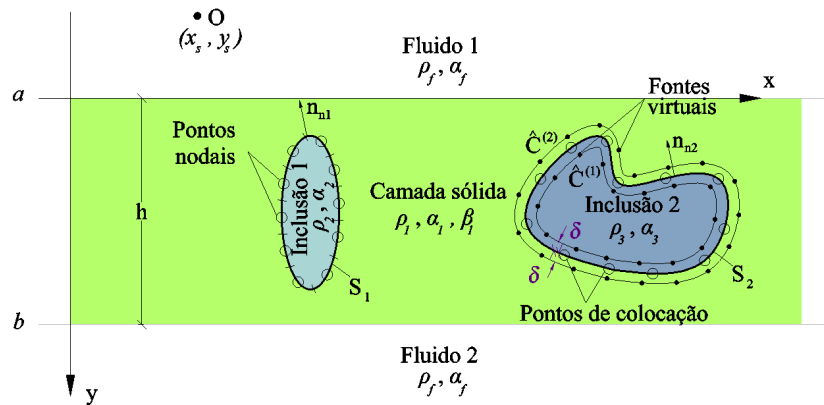


Figura 6.3: Discretização de duas inclusões fluidas inseridas numa camada sólida, limitada por dois meios fluidos, Fluido 1 e Fluido 2, através da formulação BEM+TBEM para a primeira inclusão fina, e MFS para a segunda inclusão irregular ( $n_{n1}$  e  $n_{n2}$  representam as normais a cada uma das inclusões): elementos de fronteira, posição das fontes virtuais e pontos de colocação.

A equação integral do elemento de fronteira pode ser deduzida aplicando o teorema da reciprocidade (Manolis e Beskos, 1988):

### 6.2.2.1 No domínio exterior à Inclusão 1

Parte da Inclusão 1, inserida num meio elástico, é modelada através do Método dos Elementos de Fronteira, ao longo da qual são impostas como condições de fronteira, as continuidades de tensões normais e deslocamentos, com tensões tangenciais nulas. Aplicando a equação integral a cada um dos pontos nodais sobre a fronteira da inclusão, obtém-se a expressão vetorial que permite simular a propagação de ondas num meio elástico infinito, na presença de uma inclusão fluida, quando o sistema é perturbado por um campo de ondas harmónicas incidente. Essa equação de fronteira tem de ter em conta a presença da inclusão vizinha, Inclusão 2, a qual é modelada pelo Método das Soluções Fundamentais. Este método numérico assume que a resposta desta segunda inclusão é definida, como uma combinação linear das soluções fundamentais, simulando o campo de deslocamentos gerado por dois conjuntos de

$NS$  fontes virtuais. Estas fontes virtuais são distribuídas ao longo da superfície da inclusão  $S_2$  e são distribuídas com uma determinada distância  $\delta$  da fronteira, para o interior e para o exterior da inclusão (linhas  $\hat{C}^{(1)}$  e  $\hat{C}^{(2)}$ , respetivamente, representadas na Figura 6.3) a fim de evitar singularidades. As fontes que estão situadas no interior da inclusão têm amplitudes desconhecidas  $a_{nj,n\_ext}^{(2)}$ , enquanto aquelas que estão localizadas fora da inclusão, no exterior, têm amplitudes desconhecidas  $a_{nj,n\_int}^{(2)}$ .

O campo de deslocamentos gerado por esta segunda inclusão pode ser visto como um campo incidente que atinge a primeira inclusão:

$$\begin{aligned}
c_{ij}u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) = & \int_{S_1} t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, \omega) G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\
& - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, x_0, y_0, \omega) ds + u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega) \cdot \\
& + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj,n\_ext}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Nesta equação,  $i, j=1, 2$  representam, respetivamente, as direções normal e tangencial relativa à superfície da inclusão, enquanto  $i, j=3$  corresponde à direção constante  $z$ . Nestas equações, o índice 1 corresponde ao domínio exterior, camada sólida;  $\mathbf{n}_{n_1}$  é o vetor unitário, com sentido exterior, normal ao longo da fronteira  $S_1$ , em  $(x, y)$ , definido pelo vetor  $\mathbf{n}_{n_1} = (\cos \theta_{n_1}, \sin \theta_{n_1})$ .  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, x_0, y_0, \omega)$  definem as soluções fundamentais em termos de deslocamentos e tensões (funções de Green), na direção  $j$  da superfície  $S_1$  em  $(x, y)$ , causada por um carregamento virtual num ponto unitário, na direção  $i$  aplicado no ponto de aplicação,  $(x_0, y_0)$ . Como já foi referido, as funções  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  encontram-se descritas no Apêndice B deste capítulo. As funções  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, x_0, y_0, \omega)$  obtêm-se através de derivadas das funções de Green  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$ , de modo a determinar tensões ao longo das direções  $x, y$  e  $z$ .  $G_{ji}^{(1)}(x, y, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)$  são as soluções fundamentais (Funções de Green), representando os deslocamentos nos pontos  $(x, y)$  da camada sólida, na direção  $i$ , causadas por um carregamento unitário na direção  $j$  aplicado na posição  $(x_{n\_ext}, y_{n\_ext})$ .  $n\_ext$  são os índices que identificam o número de fontes virtuais colocadas ao longo das linhas  $\hat{C}^{(1)}$ , respetivamente. O efeito do campo de ondas incidente no ponto  $(x, y)$  provocado por uma fonte dilatacional localizada em  $(x_s, y_s)$ , em termos de deslocamentos é definido por  $u_j^{(1)}(x, y, \omega)$  na direção  $j$  em  $(x, y)$ , enquanto  $t_j^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n_1}, \omega)$  especifica as tensões nodais na direção  $j$  na fronteira em  $(x, y)$ .  $u_i^{inc}(x_0, y_0, x_s, y_s, \omega)$  representa em termos de deslocamentos o campo incidente em  $(x_0, y_0)$  ao

longo da direção  $i$ , quando a fonte é localizada em  $(x_s, y_s)$ . O coeficiente  $c_{ij}$  resulta da aplicação da equação integral sobre um ponto da fronteira, dependendo da geometria local desta, tomando um valor igual a  $\delta_{ij}/2$ , com  $\delta_{ij}$  a função delta de Kronecker, quando a fronteira é contínua sem pontos angulosos.

Relativamente à resolução da outra parte da inclusão fina (Tadeu *et al.*, 2006; Amado Mendes e Tadeu, 2006) procede-se à derivada das equações integrais em deslocamentos da formulação clássica do Método dos Elementos de Fronteira. Combinando-as segundo a direção normal ao ponto de colocação, de acordo com a lei de Hooke, deduz-se a formulação hipersingular do Método dos Elementos de Fronteira (Hong e Chen, 1988; Silveira *et al.*, 1998; Prosper, 2001). A equação referente à outra parte do domínio exterior da primeira inclusão, a equação anterior (6.2), é então complementada com a seguinte equação em trações,

$$\begin{aligned}
a_{ij}u_i^{(1)}(x_0, y_0, \omega) + c_{i1}t_1^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n1}, \omega) &= \int_{S_1} t_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_{i1}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds \\
&- \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \omega) \overline{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds + \overline{u}_i^{inc}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \omega). \quad (6.3) \\
&+ \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n\_ext}^{(2)} \overline{G}_{ji}^{(1)}(x_0, y_0, \mathbf{n}_{n2}, x_{n\_ext}, y_{n\_ext}, \omega)
\end{aligned}$$

Como foi observado por Guiggiani (1998), o coeficiente  $a_{ij}$  depende da geometria local junto do ponto de colocação, sendo nulo para elementos de fronteira retilíneos. As funções de Green,  $\overline{G}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega)$  e  $\overline{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega)$  podem ser vistas como a combinação das derivadas das equações anteriores  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega)$ , respetivamente, ao longo de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

### 6.2.2.2 No domínio interior à Inclusão 1

A aplicação da equação integral, num ponto sobre a fronteira da inclusão modelada pelo Método dos Elementos de Fronteira (parte da inclusão), permite obter a seguinte equação integral:

$$\begin{aligned}
c p^{(2)}(x_0, y_0, \omega) &= \int_{S_1} q^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) G_f^{(2)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\
&- \int_{S_1} H_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega) p^{(2)}(x, y, \omega) ds. \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Nesta equação anterior, o índice 2 corresponde ao domínio interior da Inclusão 1.  $G_f^{(2)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e  $H_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega)$  são funções de Green que representam as pressões e os fluxos de pressão na fronteira  $S_1$  em  $(x, y)$ , causada por uma carga de pressão unitária no ponto nodal  $(x_0, y_0)$  (ver Apêndice B do Capítulo 4).  $p^{(2)}(x, y, \omega)$  corresponde à pressão em  $(x, y)$ ,  $q^{(2)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \omega)$  especifica o fluxo de pressão ao longo da fronteira em  $(x, y)$ .

A segunda parte da inclusão fina é modelada com recurso ao Método dos Elementos de Fronteira em Trações. A aplicação da equação integral, num ponto sobre essa parte da fronteira da inclusão, permite obter a seguinte equação integral:

$$a p^{(2)}(x_0, y_0, \omega) + c q^{(2)}(x_0, y_0, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) = \int_{S_1} q^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \omega) \overline{G}_f^{(2)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) ds - \int_{S_1} \overline{H}_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega) p^{(2)}(x, y, \omega) ds \quad (6.5)$$

As funções de Green para os fluxos de pressão,  $\overline{G}_f^{(2)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega)$  e  $\overline{H}_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_0, y_0, \omega)$ , para a Inclusão 2 são obtidas através das derivadas a  $G_f^{(2)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$  e a  $H_f^{(2)}(x, y, -\mathbf{n}_{n1}, x_0, y_0, \omega)$ , respetivamente.

### 6.2.2.3 No domínio interior e exterior da Inclusão 2

Como se referiu anteriormente, a Inclusão 2 é modelada com recurso ao Método das Soluções Fundamentais, na qual não é necessário discretizar o domínio, nem a fronteira da inclusão, bastando apenas combinar as soluções fundamentais geradas por um conjunto de fontes virtuais.

Para a determinação das amplitudes desconhecidas nos pontos de carregamento virtuais,  $a_{nj,n\_ext}^{(2)}$  e  $a_{nj,n\_int}^{(2)}$ , é necessária a imposição das continuidades de tensões normais e dos deslocamentos, com tensões tangenciais nulas na fronteira  $S_2$ , pertencente à fronteira da Inclusão 2, ao longo dos  $NS$  pontos de colocação  $(x_{col}, y_{col})$ . Isso deve ser realizado de modo a ter em consideração o campo incidente gerado pela Inclusão 1.

Assim, a equação de deslocamentos na fronteira da Inclusão 2 é dada por,

$$\begin{aligned}
& \int_{S_1} t_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \boldsymbol{\omega}) G_{i1}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \boldsymbol{\omega}) H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds \\
& + \bar{u}_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} G_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \boldsymbol{\omega}) \\
& = \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n_{int}}^{(2)} G_f^{(3)}(x_{col}, y_{col}, x_{n_{int}}, y_{n_{int}}, \boldsymbol{\omega}) \right]
\end{aligned} \quad (6.6)$$

A partir da equação anterior, de deslocamentos, é possível determinar a equação referente às tensões,

$$\begin{aligned}
& \int_{S_1} t_1^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \boldsymbol{\omega}) \bar{G}_{i1}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds \\
& - \sum_{j=1}^3 \int_{S_1} u_j^{(1)}(x, y, \boldsymbol{\omega}) \bar{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega}) ds + \bar{u}_i^{inc}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_s, y_s, \boldsymbol{\omega}) \\
& + \sum_{n=1}^{NS} \sum_{j=1}^3 a_{nj, n_{ext}}^{(2)} \bar{G}_{ji}^{(1)}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n_{ext}}, y_{n_{ext}}, \boldsymbol{\omega}) \\
& = \sum_{n=1}^{NS} \left[ a_{n_{int}}^{(2)} \bar{G}_f^{(3)}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n_{int}}, y_{n_{int}}, \boldsymbol{\omega}) \right]
\end{aligned} \quad (6.7)$$

As funções de Green  $\bar{H}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  e  $\bar{G}_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n2}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  são definidas pela aplicação do operador em trações  $H_{ij}^{(1)}(x, y, \mathbf{n}_{n1}, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$  e  $G_{ij}^{(1)}(x, y, x_{col}, y_{col}, \boldsymbol{\omega})$ , que podem ser obtidas através da combinação das derivadas das funções de Green, em ordem de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , de modo a obter tensões. Nestas equações,  $\mathbf{n}_{n2}$  é o valor unitário normal, apontando para o exterior da superfície  $S_2$ , nos pontos de colocação  $(x_{col}, y_{col})$ .

A função de Green para os fluxos de pressão,  $\bar{G}_f^{(3)}(x_{col}, y_{col}, \mathbf{n}_{n2}, x_{n_{int}}, y_{n_{int}}, \boldsymbol{\omega})$  é obtida através da derivada a  $G_f^{(3)}(x_{col}, y_{col}, x_{n_{int}}, y_{n_{int}}, \boldsymbol{\omega})$ .

#### 6.2.2.4 Sistema final de equações

A solução global é obtida pela resolução das equações (6.2) a (6.7). Isto requer a discretização da superfície  $S_1$ , pertencente à Inclusão 1, em  $N$  elementos de fronteira retos, com um ponto nodal no centro de cada elemento (para BEM+TBEM). Para a segunda inclusão é necessária a colocação de  $NS$  fontes virtuais, ao longo do exterior e interior dessa inclusão, com um determinado afastamento de fronteira,  $\delta$  (conforme esquematizado na Figura 6.3).

As integrações, descritas nas equações (6.2) a (6.7), são hipersingulares, quando o elemento a ser integrado coincide com o elemento carregado. Estes integrais podem ser determinados analiticamente,



seguindo as expressões de Amado Mendes e Tadeu (2006). Quando o elemento a ser integrado é diferente do elemento carregado, aplicam-se as integrações necessárias, que são obtidas através da quadratura de Gauss.

As equações integrais finais são alteradas e combinadas de modo a impor a continuidade de tensões e de deslocamentos normais, com tensões tangenciais nulas ao longo da fronteira da Inclusão 1 e 2. Aplicando sucessivamente um carregamento virtual em cada nó da fronteira discretizada, obtém-se um sistema de  $[(4NS + 4N) \times (4NS + 4N)]$  equações, formado pelas equações integrais de fronteira.

As relações  $u_1^{(1)} = -\left(\frac{1}{\rho_2}\right)\left(\frac{\partial p^{(2)}}{\partial n_{n1}}\right)$  e  $u_1^{(1)} = -\left(\frac{1}{\rho_3}\right)\left(\frac{\partial p^{(3)}}{\partial n_{n2}}\right)$  são usadas para relacionar os gradientes de pressão e deslocamentos, enquanto a pressão normal corresponde a tensões normais.

A resolução deste sistema de equações fornece os deslocamentos e tensões normais, nos vários pontos nodais, ao longo da fronteira  $S_1$ , e as amplitudes inicialmente desconhecidas,  $a_{nj,n\_ext}^{(2)}$  e  $a_{nj,n\_int}^{(2)}$ . Sendo assim, é possível determinar o campo de pressões a ser definido nos meios acústicos, interior à Inclusão 1 e 2, e exterior à camada sólida.

A possibilidade da aplicação da formulação de acoplamento proposta para um número maior de inclusões, existentes na camada sólida intermédia, é relativamente simples, para isso basta discretizar as sucessivas fronteiras das inclusões, aplicando individualmente o melhor método e combinando-os posteriormente.

### 6.2.3 Verificação da Formulação de acoplamento

O algoritmo de acoplamento proposto (combinação de BEM+TBEM/MFS), descrito anteriormente, é implementado e é verificado através da comparação de resultados com a solução BEM/TBEM, resolvendo o campo de pressões gerado por duas inclusões circulares, centradas em  $(0.25\text{m}, 0.1\text{m})$  e  $(0.55\text{m}, 0.1\text{m})$ , com raios de  $0.05\text{ m}$  e  $0.1\text{ m}$ , respetivamente, inseridas numa camada elástica limitada por dois meios fluidos.

Para os meios fluidos homogéneos representados são mantidas a velocidade de ondas de propagação sonora e a massa volúmica constantes e iguais a  $1500\text{ m/s}$  e  $1000\text{ kg/m}^3$ , respetivamente, equivalente às propriedades da água.

O meio elástico semi-infinito, com uma espessura de 0.20m, é homogéneo ( $\rho_1 = 1400 \text{ kg/m}^3$ ) e permite velocidades de propagação das ondas dilatacionais  $\alpha_1 = 2200 \text{ m/s}$  e uma velocidade de propagação das ondas de corte igual a  $\beta_1 = 1350 \text{ m/s}$ . O sistema é excitado por uma carga harmónica pontual, bidimensional ( $k_z = 0 \text{ rad/m}$ ), aplicada no ponto O  $(0.25 \text{ m}, -0.15 \text{ m})$ , como é ilustrado na Figura 6.4.

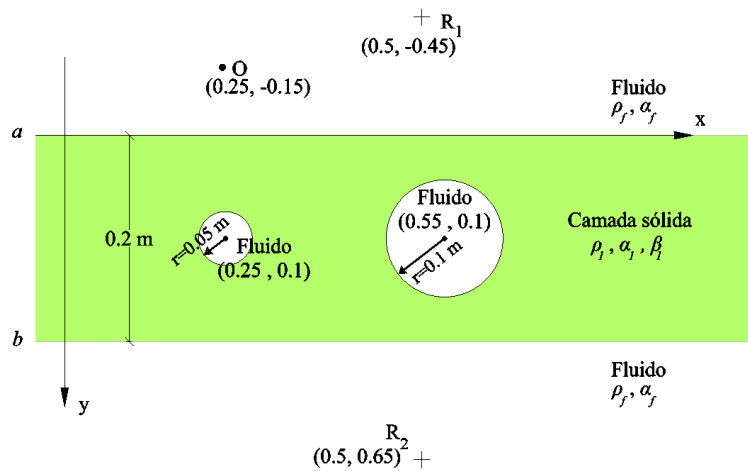


Figura 6.4: Geometria bidimensional (em planta) de uma camada sólida, confinada por dois meios fluidos, onde estão inseridos a fonte pontual dilatacional e os recetores  $R_1$  e  $R_2$ . A camada sólida possui no seu interior duas inclusões circulares, preenchidas por meios fluidos homogéneos.

As pressões são determinadas para os recetores  $R_1$  e  $R_2$ , localizados no ponto de coordenadas  $(0.5 \text{ m}, -0.45 \text{ m})$  e  $(0.5 \text{ m}, 0.65 \text{ m})$ , respetivamente. Os cálculos são realizados no domínio da frequência no intervalo entre 50 Hz e 5000 Hz, com um incremento de frequência de 50 Hz.

Os resultados do algoritmo BEM/TBEM são comparados com os resultados obtidos pela solução proposta BEM+TBEM/MFS. A primeira inclusão é discretizada com 50 elementos de fronteira (BEM+TBEM), enquanto a segunda utiliza 100 fontes virtuais (MFS), afastadas de 0.01m da superfície.

A Figura 6.5 apresenta a parte real (coluna à esquerda) e a parte imaginária (coluna à direita) relativas às respostas de pressão para os recetores  $R_1$  e  $R_2$ . As linhas correspondem às respostas calculadas pelo BEM/TBEM e os marcadores correspondem às respostas determinadas pelo BEM+TBEM/MFS.

Uma análise aos resultados revela que existe boa concordância entre as soluções propostas de acoplamento, quando comparadas com a modelação BEM/TBEM.

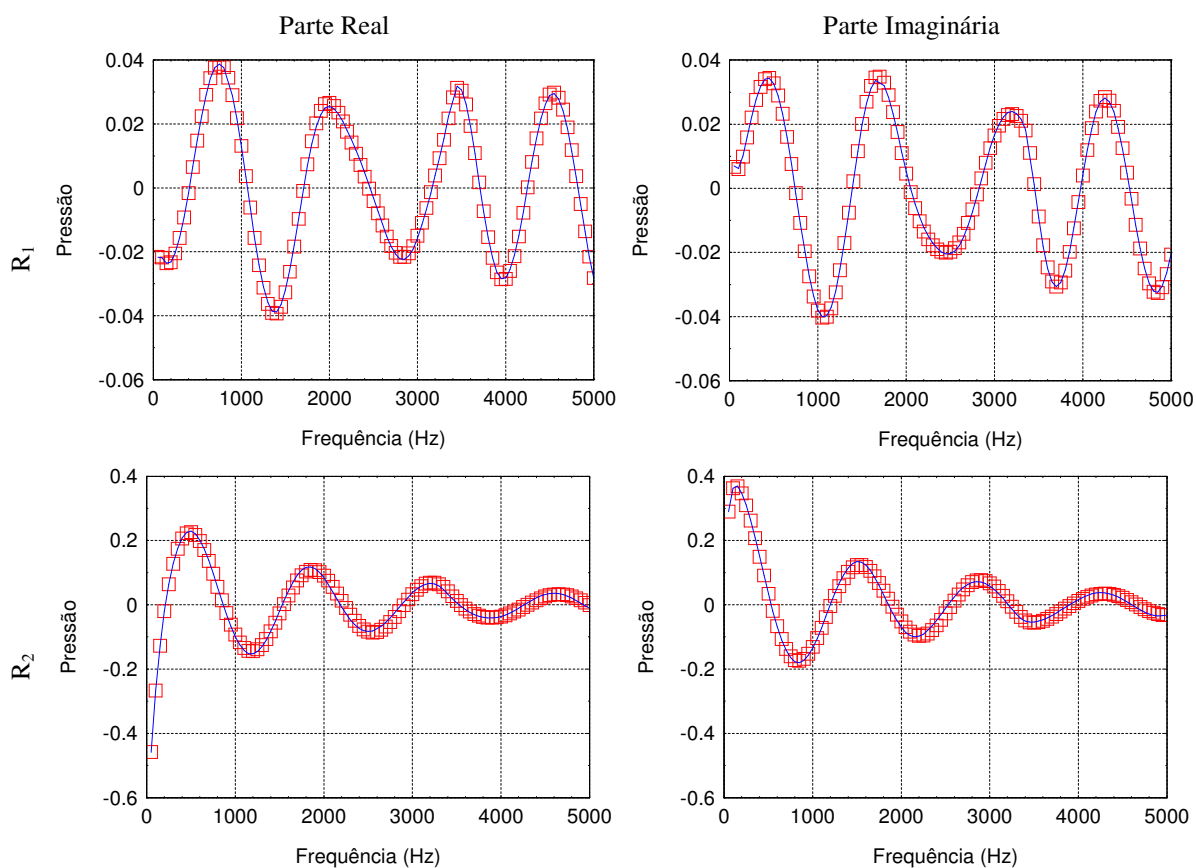


Figura 6.5: Respostas obtidas através do BEM/TBEM e BEM+TBEM/MFS, quando o sistema é excitado por um fonte dilatacional, na presença de uma camada sólida, contendo inclusões, confinada por dois meios fluidos, para os recetores  $R_1$  e  $R_2$ : BEM/TBEM (—); BEM+TBEM/MFS (□).

### 6.3 UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE GREEN NO CÁLCULO DO ISOLAMENTO A SONS DE CONDUÇÃO AÉREA

Na presente secção pretende-se utilizar as funções de Green, incorporadas no método de acoplamento proposto, de forma a verificar se estas podem, só por si, ser utilizadas para avaliar o isolamento a sons aéreos conferido por elementos com grande espessura (sem inclusões no seu interior). Como se referiu na introdução deste capítulo, estas funções de Green só tinham sido utilizadas para avaliar o isolamento a sons aéreos de elementos de construção com espessura fina (tais como vidros). Nesse sentido, pretende-se determinar de forma numérica a pressão sonora em cada meio fluido semi-infinito, numa malha de recetores. O isolamento sonoro conferido pelo elemento de separação vertical (com espessura muito superior à de um vidro) é obtido através da diferença de pressões entre os dois meios acústicos. Para este efeito, são colocadas grelhas de recetores em ambos os fluidos. A posição destas grelhas e a posição de

fonte dilatacional assumem um papel fundamental, na medida em que, o seu posicionamento influencia o valor desse isolamento. Para este efeito são estudadas diferentes configurações para o posicionamento destas grelhas e da fonte dilatacional.

Pretende-se que os resultados matemáticos sejam comparados com os obtidos experimentalmente. Para isso foi necessária a construção de uma parede simples. Neste caso optou-se pela construção de uma parede de betão armado à qual foi ensaiada nas câmaras acústicas do *ITeCons*, descritas no capítulo anterior, de acordo com as normas em vigor (NP EN ISO 140-1:2001).

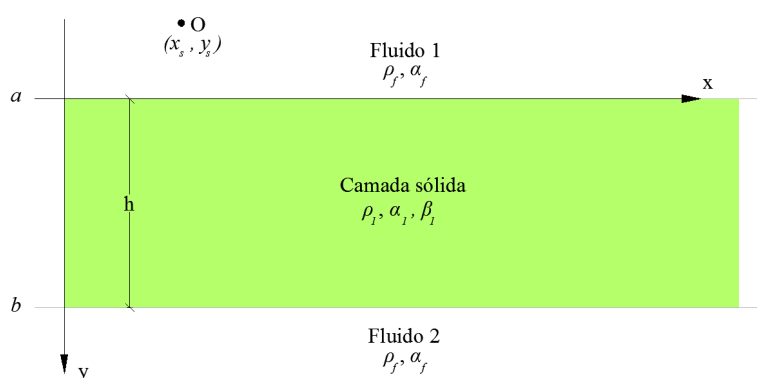


Figura 6.6: Geometria bidimensional (em planta) de uma parede constituída por um pano simples (sólido), com uma espessura  $h$ , confinada por dois meios acústicos, onde está inserida uma fonte pontual dilatacional, situada no fluido superior em  $(x_s, y_s)$ .

### 6.3.1 Resultados experimentais

Durante a construção das câmaras acústicas do *ITeCons* também foram executados alguns elementos construtivos destinados a ensaios específicos. Como já se referiu, uma das paredes construídas servirá para verificar se as soluções fundamentais desenvolvidas se adequam à determinação do isolamento sonoro conferido por elementos de construção com elevada espessura  $e$ , também, para a realização de ensaios de determinação do coeficiente de absorção sonora de materiais de elementos de construção. Na construção daquela parede, a preocupação fundamental era a de garantir que a superfície da parede em contacto com a câmara de ensaio (fixa) fosse a mais refletora possível para que esta fosse adequada à realização de ensaios de absorção (não abordados no presente trabalho). Foi, então, construída uma parede em betão armado (ver Figura 6.7), com 30 cm de espessura e em que uma das superfícies apresenta um aspeto vidrado, garantindo um coeficiente de absorção muito baixo. Na sua conceção, foi prevista uma malha dupla em varão nervurado, em aço com 10 mm de diâmetro, numa malha quadrada, com afastamento de 0.2 m (em ambas as direções), soldadas a uma chapa de aço de contorno, reforçada,

com 5 mm de espessura. Posteriormente, o provete foi colocado na horizontal e betonado com betão de classe C25/30, contra uma superfície plástica lisa, de forma a tornar a sua face “espelhada”. O aro apresenta uma área aberta, quadrada, toda em betão armado com 10 m<sup>2</sup>, cumprindo as exigências da norma NP EN ISO 140-3:1998. Note-se, ainda, que o contacto com a estrutura das duas câmaras acústicas se realiza apenas através deste aro, não sendo o provete sujeito a qualquer pressão de aperto aquando da movimentação da câmara móvel.

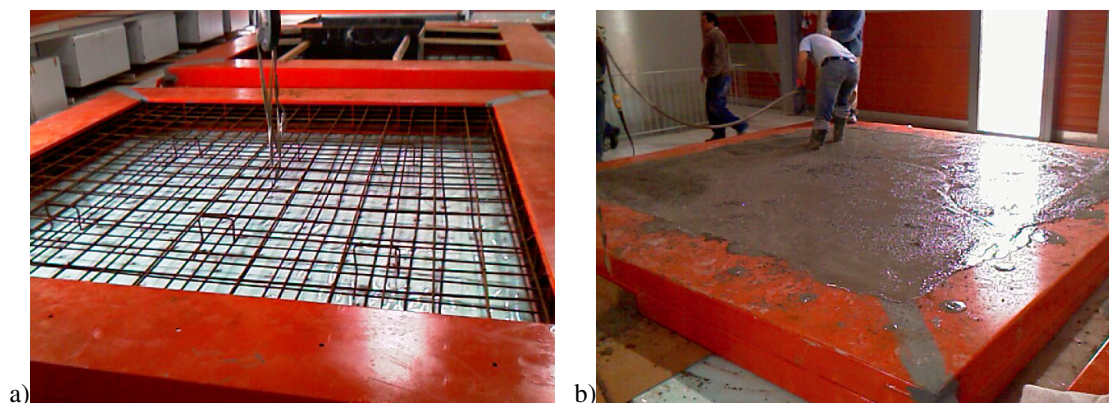


Figura 6.7: Execução do provete vertical em betão armado nas instalações do *ITeCons*: a) imagem real no aro metálico com a malha quadrada superior e inferior; b) betonagem do elemento e vibração do betão.

Após o período de cura suficiente, determinaram-se os parâmetros físicos, da respetiva parede, necessários à introdução de valores no modelo numérico. As velocidades das ondas P e S foram determinadas com um equipamento da marca *Proceq* e modelo *Pundit Lab*. Constatou-se que a parede de betão armado exibe uma velocidade de ondas P e S de 4886 m/s e 2693 m/s, respetivamente. Verificou-se, ainda, que a parede exibe uma massa volúmica média de 2500 kg/m<sup>3</sup>.

Após a execução do provete de betão armado e respetivo período de cura, instalou-se o provete entre as câmaras acústicas horizontais. Procedeu-se à realização do ensaio de isolamento a sons aéreos, nas condições descritas no Capítulo 5 da presente tese (NP EN ISO 140-3:1998).

Após o registo de valores de pressão sonora no interior das duas câmaras acústicas (em dB), do ruído de fundo e dos tempos de reverberação da câmara recetora, efetuou-se o cálculo de isolamento sonoro a sons aéreos normalizado para a parede de betão armado, em bandas de um terço de oitava. Obteve-se, assim, um índice de redução sonora igual a 63 (-1; -4; -1; -4) dB.

As curvas de redução sonora, em bandas de um terço de oitava e em 1/24 oitavos, estão representadas na Figura 6.8. Verifica-se que para esta parede pesada, a curva de isolamento em terço de oitava situa-se, entre os 45 dB e os 75 dB, na gama de frequências em análise, dos 100Hz e dos 5000Hz. Constata-se,

também, a quebra de isolamento do sistema, em especial, na frequência próxima dos 5000Hz, associada à frequência de ressonância do painel devido à propagação de ondas P (ao longo da direção transversal):

$$f_{res} = \frac{\alpha_1}{2.h}, \quad (6.8)$$

em que  $\alpha_1$  é a velocidade de propagação das ondas P e  $h$  é a espessura da camada sólida (conforme Figura 6.6). Utilizando a equação (6.8) para as propriedades da parede de betão armado, determina-se uma frequência de ressonância do painel próxima dos 8000Hz. A Figura 6.9 evidencia o início desta quebra.

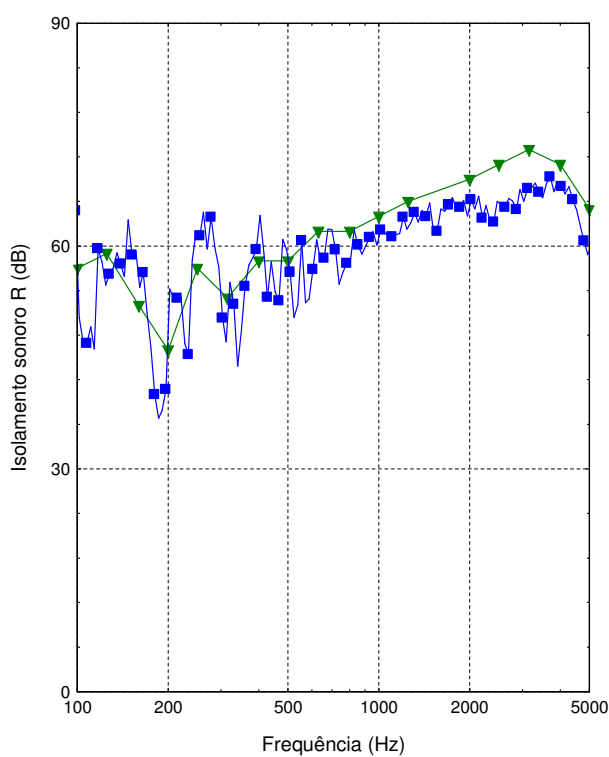


Figura 6.8: Resultado experimental na determinação do isolamento sonoro a sons aéreos normalizado para uma parede de betão armado, com 30 cm de espessura, em: bandas de 1/3 oitava ▼; bandas de 1/24 oitavos ■.

### 6.3.2 Resultados analíticos

Como se descreveu anteriormente, pretende-se determinar o isolamento sonoro conferido por esta parede, com recurso às funções de Green utilizadas no presente capítulo para uma camada elástica inserida num meio fluido.

Os dois meios fluidos são homogêneos, a velocidade de ondas de propagação sonora e a massa volúmica são de 340 m/s e 1.22 kg/m<sup>3</sup>, respetivamente, equivalente às propriedades do ar.

No modelo matemático foram contabilizadas as perdas internas da parede de betão armado através da definição de um módulo de elasticidade e de constantes de Lamé complexas. Este módulo de elasticidade foi obtido pela expressão  $E = E_r(1 + i\eta)$ , onde  $E_r$  é o módulo de elasticidade convencional e  $\eta$  é o fator de perdas internas, considerado igual a  $\eta = 0.05$  (Mechel, 2002).

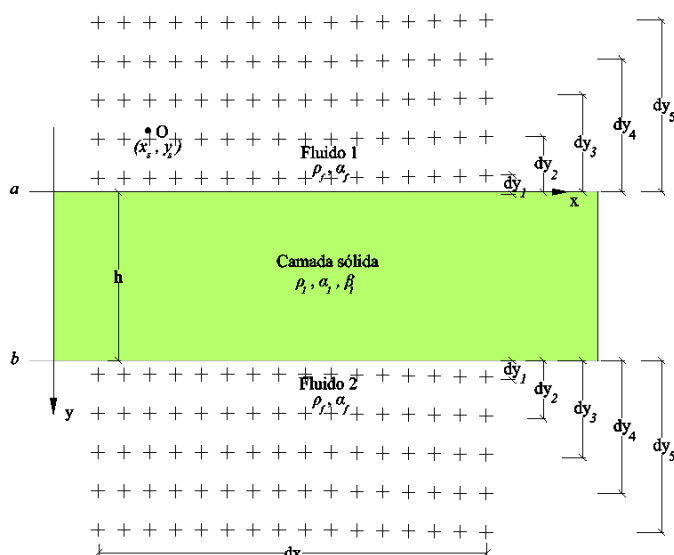


Figura 6.9: Geometria de uma parede em betão armado, limitada por dois meios fluidos, onde se insere a fonte dilatacional (meio fluido superior) e a malha de recetores, na camada fluida superior e inferior.

Como a resposta irá depender da posição da fonte e da posição dos recetores, utilizaram-se várias configurações para o seu posicionamento. As grelhas de recetores, localizadas em ambos os meios acústicos, resultam do posicionamento destes ao longo de linhas localizadas em  $dy_1 = 0.5$  m,  $dy_2 = 1.5$  m e  $dy_3 = 2.5$  m ou  $dy_1 = 0.5$  m,  $dy_2 = 1.5$  m,  $dy_3 = 2.5$  m,  $dy_4 = 7.5$  m e  $dy_5 = 12.5$  m, conforme é ilustrado na Figura 6.9. Ao longo da direção  $x$ , o afastamento entre recetores foi de 2.0 m, ao longo de  $dx = 30.0$  m (malha apertada) ou  $dx = 60.0$  m (malha mais alargada). Cada grelha foi, assim,

constituída por um total de 48, 80, 93 e 155 recetores, respetivamente, posicionados em cada meio acústico. A carga dilatacional bidimensional ( $k_z = 0 \text{ rad/m}$ ) foi posicionada, no meio acústico superior, em três posições distintas,  $(x_s, y_s) = (0.0\text{m}, -2.0\text{m})$ ,  $(x_s, y_s) = (0.0\text{m}, -6.0\text{m})$  e  $(x_s, y_s) = (0.0\text{m}, -10.0\text{m})$ .

Os resultados numéricos são avaliados para uma gama de frequências entre os 100Hz e os 5000Hz, com um incremento de frequência logarítmico considerando  $k_z = 0 \text{ rad/m}$  (2D). Para cada recetor é calculada a pressão, em Pa. Posteriormente é realizada uma média logarítmica, em dB, para os recetores localizados no meio superior e outra média para o meio inferior. Posteriormente efetua-se a integração, em bandas 1/3 oitavas, em cada lado da camada sólida. O isolamento a sons de condução aérea é determinado pela diferença de níveis calculada entre ambos os fluidos, que serão apresentados na secção seguinte.

### 6.3.3 Comparação de resultados

Na Figura 6.10 apresentam-se, em simultâneo, os resultados experimentais e aqueles obtidos de forma analítica. Os resultados estão apresentados, em terços de oitava.

A análise aos resultados permite verificar que, quando a malha de recetores é mais reduzida, o valor do isolamento sonoro diminui. Quando se afasta a fonte sonora da camada sólida, essa tendência é mais acentuada nas frequências mais altas. Avaliando o gráfico b) da Figura 6.10, ou seja, quando o número de linhas de recetores aumenta e se afastam da superfície da camada elástica, conclui-se que o isolamento nas altas frequências continua a aumentar quando a fonte se afasta. Nas baixas frequências o isolamento sonoro aumenta quando a fonte sonora se aproxima da camada sólida.

Para os casos em que os recetores se distribuem ao longo de 60m, segundo a direção horizontal, os resultados de isolamento são muito mais próximos, entre si, independente da posição da fonte sonora, particularmente até aos 1000Hz. A partir desta frequência o isolamento sonoro aumenta quando a fonte sonora é colada mais próxima da superfície. Para o último caso, em que se coloca uma malha de recetores mais abrangente, o isolamento sonoro nas altas frequências não varia de forma acentuada com a posição da fonte sonora. Verifica-se que, nas baixas frequências, o isolamento aumenta com o afastamento da fonte.

A curva de isolamento obtida em laboratório apresenta algumas oscilações nas baixas frequências. Este comportamento resulta dos modos próprios de vibração das câmaras acústicas nas baixas frequências.



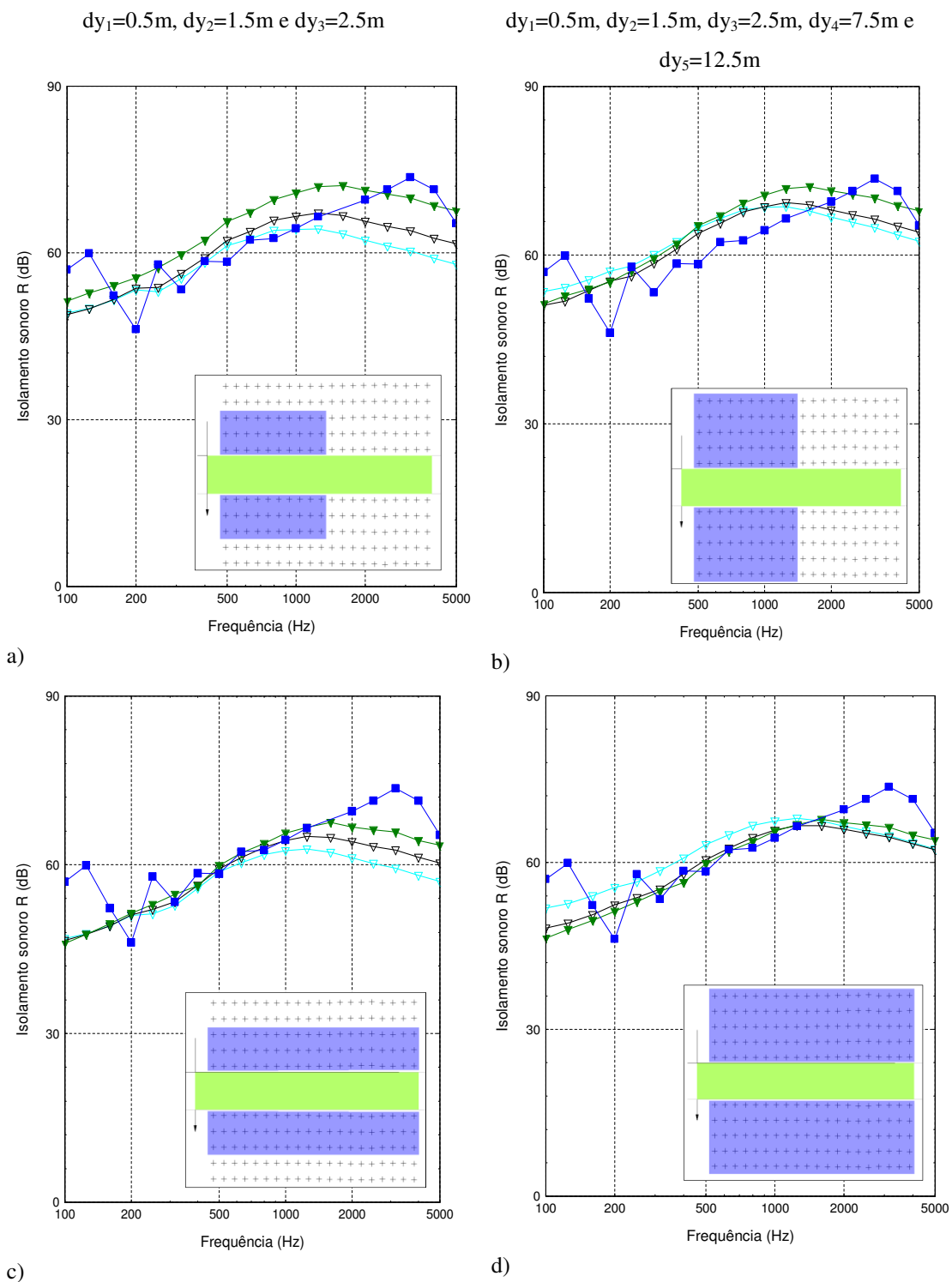


Figura 6.10: Resultados de isolamento sonoro (R), em bandas de terços de oitava, em dB, obtidos para uma parede de betão armado. Ensaio laboratorial, ■, e resultados analíticos, em função da localização da fonte sonora:  $(x_s, y_s) = (0; -2)$  ▼;  $(x_s, y_s) = (0; -6)$  ▽;  $(x_s, y_s) = (0; -10)$  ▽: a)  $dx=30m$ ; b)  $dx=30m$ ; c)  $dx=60m$ ; d)  $dx=60m$ .

Comparando os resultados analíticos com aqueles obtidos de forma experimental, constata-se que os resultados são mais próximos quando se utiliza a maior grelha de recetores. Esta proximidade é maior quando a fonte está mais próxima da camada sólida. A quebra do isolamento do painel associado à frequência de ressonância deste é evidente nas frequências altas, tal como já foi referido anteriormente.

Considera-se que as funções de Green permitem avaliar o isolamento sonoro a sons aéreos de paredes com uma espessura considerável.

## 6.4 ABORDAGEM EXPERIMENTAL – CARACTERIZAÇÃO DE PAREDES DE ALVENARIA COM BLOCOS DE BETÃO COM INCORPORAÇÃO DE CORTIÇA

Pretende-se continuar com o desenvolvimento deste trabalho, aplicando a formulação proposta de acoplamento para uma situação mais complexa, a determinação do isolamento sonoro conferido por uma parede de alvenaria constituída por vários blocos de alvenaria.



Figura 6.11: Mistura de betão com incorporação de regranulado de cortiça expandida, na fabricação de blocos de cimento: a) agregado em granel; b) corte transversal de um cubo betonado com a nova mistura leve.

Como se referiu anteriormente, esta tese decorreu em simultâneo com um projeto I&DT, tendo como objetivo o desenvolvimento de um bloco de alvenaria, utilizando como matéria-prima betão com substituição de agregado britado por regranulado de cortiça expandida (ECG) na sua composição, de granulometria 4/8. Pretende-se que esses blocos sejam economicamente competitivos e que garantam a satisfação dos diversos requisitos impostos pelas normas de especificação dos materiais destinados à produção de alvenaria, prevendo-se a otimização do seu desempenho mecânico e físico, em especial em termos térmicos e acústicos. De uma forma mais detalhada, o bloco a desenvolver deveria possuir características que permitissem respeitar as exigências impostas pelas normas de especificação de produto em vigor, aplicáveis a materiais destinados à produção de alvenaria, nomeadamente, a norma NP EN 771-3:2010. Para além de todos os outros requisitos que estes blocos devem cumprir – físicos,

mecânicos e térmicos – iremos dar mais ênfase, na presente secção, ao seu desempenho acústico, aferido pela caracterização do seu isolamento sonoro quando aplicados em panos de alvenaria não rebocados e rebocados.

A Figura 6.12 esquematiza o trabalho realizado durante esta abordagem experimental. Antes da realização desses blocos, efetuou-se uma análise laboratorial preliminar para o conhecimento e obtenção das propriedades gerais dos agregados. Determinaram-se, então, as massas volúmicas, as baridades, as percentagens dos vazios, as absorções de água e as curvas granulométricas dos agregados envolvidos na mistura. Foram realizadas várias percentagens de substituição do agregado britado pelo ECG (entre os 15% e os 50% de substituição em volume). A quantidade dos agregados, para cada mistura, foi possível obter-se através das várias curvas granulométricas ótimas. Após a fabricação das várias misturas, realizaram-se ensaios experimentais na tentativa de caracterizar as misturas e determinar qual a substituição máxima possível e ideal do agregado britado pela cortiça. Determinaram-se, então, a massa volúmica, a condutibilidade térmica e a resistência de compressão (aos 7, 14, 28 e 90 dias), para cada mistura realizada. Após maior conhecimento sobre esta nova mistura, produziram-se blocos com e sem cortiça, para duas geometrias distintas, e realizaram-se ensaios laboratoriais a esses blocos: físicos, mecânicos, térmicos, e em especial, acústicos.

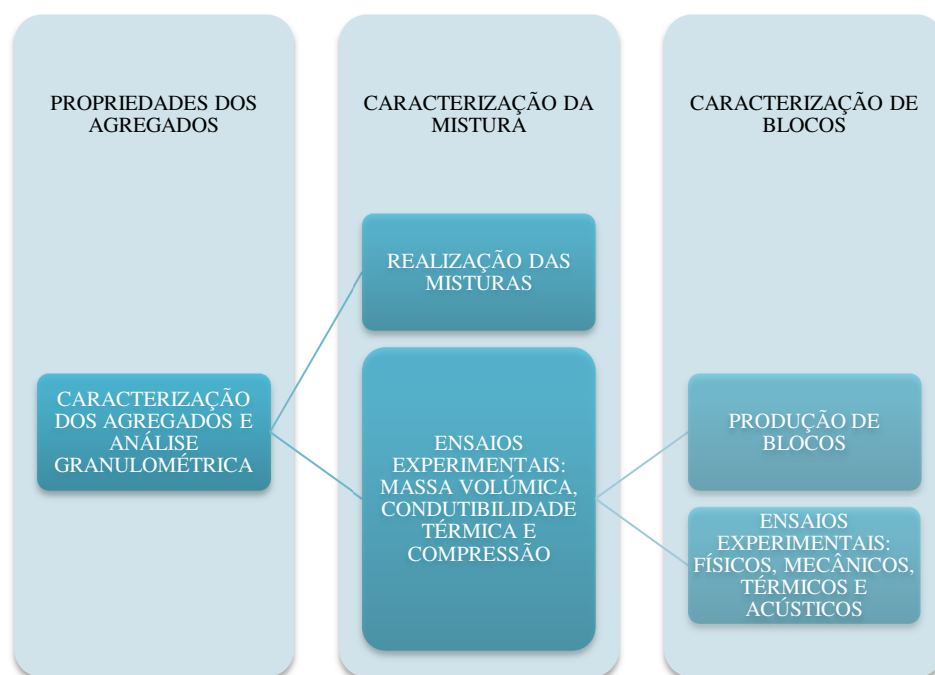


Figura 6.12: Esquema de trabalho realizado na abordagem experimental na caracterização de blocos que incorporam resíduos de cortiça.

Os resultados provenientes da modelação numérica, apresentada anteriormente, foram comparados e validados com os resultados experimentais, que se apresentam nas secções seguintes.

A utilização de modelos numéricos permitirá evitar a construção de numerosos protótipos (paredes) e a realização de ensaios em laboratório. A realização destes protótipos traduz-se em custos elevados, pois envolvem frequentemente a realização de novos moldes e a paragem de linhas de produção. Este tipo de análise permitirá ainda reduzir tempos de análise de possíveis soluções de construção.

### 6.4.1 Fabrico da parede

Como se referiu anteriormente, para a realização inicial do projeto I&DT, foi necessária a caracterização dos materiais, nomeadamente o estudo das propriedades físicas dos agregados (brita, areia e regranulado de cortiça expandida), para a obtenção da composição ótima da mistura, por forma a ser utilizada no fabrico de blocos de betão com incorporação de cortiça. A dimensão máxima do agregado utilizada foi de 8 mm. Os resultados obtidos para as propriedades dos agregados estão descritos no Anexo C.1 deste capítulo.

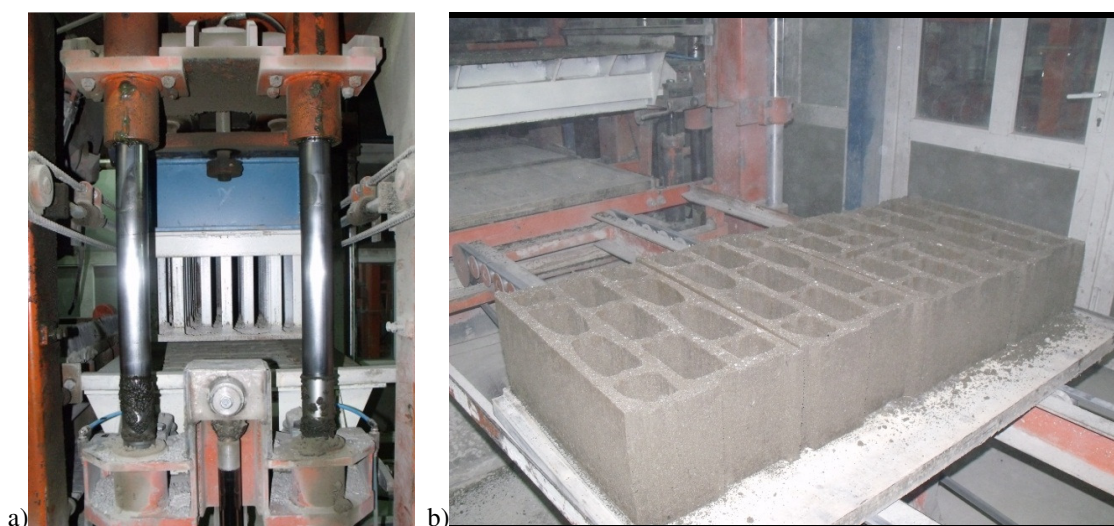


Figura 6.13: Betonagem em fábrica dos blocos protótipos com incorporação de regranulado de cortiça expandida: a) enchimento do molde e aplicação da vibroprensa; b) aspecto geral dos blocos à saída da vibração e prensagem.

Como o principal objetivo desta tarefa visa o estudo de formulações de misturas de betão com cortiça, determinaram-se várias composições de betão incorporando diferentes proporções de cortiça (regranulado de cortiça expandida 4/8) em substituição de correspondentes quantidades em volume de agregados britados (15%ECG, 20%ECG, 25%ECG, 30%ECG, 35%ECG e 50%ECG), assim como a mistura de betão correntemente utilizado (aqui designada por REF), apenas utilizando agregados minerais correntes. Assim, é possível realizar uma comparação de caracterização laboratorial. Executaram-se várias amassaduras para cada tipo de mistura e betonaram-se, em moldes metálicos, quantidades suficientes para

a realização de ensaios laboratoriais. Nessas misturas procurou-se manter os mesmos agregados britados que as empresas correntemente utilizam. Também se tentou preservar as quantidades e o tipo de cimento e água bem como a relação água/cimento.

Da realização desse estudo, no qual os resultados obtidos estão descritos no Anexo C.2 deste capítulo, conclui-se que a massa volúmica do betão com cortiça decresce significativamente com o aumento da substituição de brita por regranulado de cortiça, como seria expectável. A substituição em 50% do agregado britado pelo regranulado na mistura faz com que exista um decréscimo da massa volúmica, para quase metade, face ao betão de referência. É ainda evidente a melhoria existente na resistência térmica do betão leve com cortiça quando comparado com betão normal, sendo que o coeficiente de condutibilidade térmica dos betões com cortiça possa atingir uma redução máxima na ordem dos 60%.

Fazendo uma análise aos resultados da resistência à compressão, é evidente que existe um decréscimo significativo em função do aumento da substituição de regranulado de cortiça. Contudo, verifica-se um resultado muito interessante: na mistura REF aos 7 dias para os 90 dias de idade aumenta a sua resistência à compressão em 5%, aproximadamente, enquanto nas misturas com ECG é notória a evolução da resistência ao longo do tempo, registando-se um aumento médio de 40% de resistência à compressão aos 90 dias face aos 7 dias iniciais. Verifica-se, ainda, que a composição 35%ECG teve um aumento dessa resistência em 50%.

Ponderando todos estes resultados, verifica-se que a proporção ideal obtida para a realização de uma mistura que incorpora resíduos é a substituição volumétrica em cerca de 20% de brita por regranulado de cortiça expandida. A perda de resistência à compressão aos 90 dias não é significativa. Existe, assim, um ganho térmico na ordem dos 20% e com a diminuição de peso superior a 10%.

Produziram-se então blocos com duas configurações distintas, em moldes existentes em fábrica (como se ilustra na Figura 6.13), para cada mistura, suficientes para conferir paredes de ensaio com 10m<sup>2</sup> (utilizados em ensaios acústicos) e para os restantes ensaios de caracterização dos blocos.

Numa primeira fase, fabricaram-se blocos com uma geometria do tipo 1 (conforme ilustrado na Figura 6.14 a)), com a substituição em volume dos agregados britados por regranulado de cortiça expandida em 20%, de acordo com os resultados ótimos obtidos e descritos anteriormente (20%ECG). Decidiu-se fabricar mais dois lotes de blocos, com misturas próximas da anterior, com substituição em volume de agregados britados em 15%ECG e 25%ECG, de forma a avaliar o seu comportamento em blocos. Fabricaram-se, ainda, blocos com a mistura de betão de referência (REF) para comparação dos resultados experimentais.

Numa segunda fase, fabricaram-se blocos para a geometria do tipo 2 (conforme ilustrado na Figura 6.14 b)), com uma mistura de betão de referência (REF) e, por razões de limitações de produção da fábrica, só foi possível realizar uma mistura com 25%ECG.

Após produção industrial dos vários blocos, para as diferentes misturas, e respetiva cura, procedeu-se a ensaios laboratoriais de caracterização acústica. Paralelamente, promoveu-se uma campanha de ensaios experimentais para a caracterização física, mecânica e térmica, apresentados no Apêndice C.3 deste capítulo.

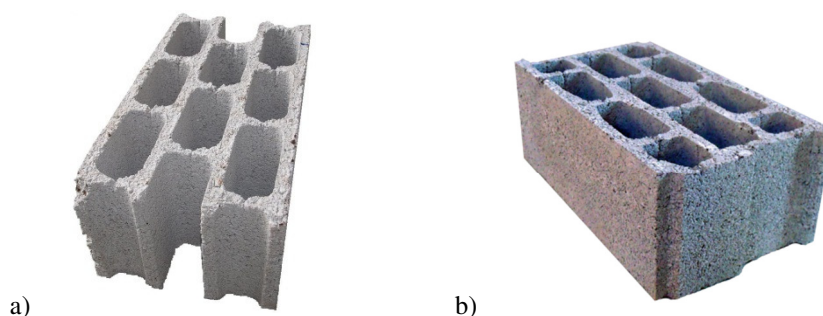


Figura 6.14: Blocos de cimento com incorporação de regranulado de cortiça expandida analisados: a) bloco com geometria do tipo 1; b) bloco com geometria do tipo 2.

Verifica-se que os blocos com cortiça apresentam uma resistência à compressão mais baixa, mas com um decréscimo significativo da massa volúmica. Outro resultado interessante é que para a maior substituição de brita por ECG, na geometria do tipo 1, existe uma melhoria significativa do coeficiente de absorção de água por capilaridade.

## 6.4.2 Resultados acústicos em laboratório

Para avaliação do comportamento acústico de paredes de alvenaria constituídas por blocos de betão com incorporação de regranulado de cortiça expandida, realizaram-se ensaios laboratoriais acústicos nas instalações do *ITeCons*.

### 6.4.2.1 Ensaios laboratoriais

A determinação do índice de isolamento sonoro para sons de condução aérea, em paredes constituídas por blocos de betão com regranulado de cortiça expandida (ECG) e blocos de betão tradicional (REF), para comparação referencial, foi efetuada nas câmaras horizontais existentes no *ITeCons*, de acordo com as normas NP EN ISO 140-3:1998 e NP EN ISO 717-1:2009, através de ensaios realizados em paredes de

alvenaria com  $10\text{m}^2$ . As instalações laboratoriais e o procedimento de ensaio foram descritos no Capítulo 5 da presente tese.

Pretende-se avaliar o isolamento sonoro, para a geometria do tipo 1 (com as misturas REF, 15%ECG, 20%ECG e 25%ECG) e para a geometria do tipo 2 (com as misturas REF e 25%ECG). Os provetes são executados numa zona de construção de provetes apropriada (Figura 6.15 a)) e são transportados, posteriormente, para as imediações das câmaras e instalados no interior das câmaras acústicas (ver Figura 6.15 b)). Após ensaio e análise de resultados, o provete é retirado e é colocado novamente na zona de construção dos provetes, onde é executada a primeira camada de reboco com grânulos de cortiça (Figura 6.15 c)). O processo repete-se, e é instalado novamente no interior das câmaras, após o período de secagem da argamassa (ver Figura 6.15 d)). O provete é novamente retirado, sendo rebocado na outra face, ficando ambas as faces do provete rebocadas, repetindo-se todo o processo.



Figura 6.15: Ensaio experimental da parede de alvenaria composta por blocos com incorporação de aglomerado de cortiça expandida: a) Execução final do paramento vertical; b) Instalação do provete no interior das câmaras horizontais para realização dos ensaios laboratoriais; c) Início da execução de reboco, com argamassa de cimento com regranulado de cortiça; d) Instalação do provete rebocado no interior das câmaras horizontais para realização dos ensaios laboratoriais.

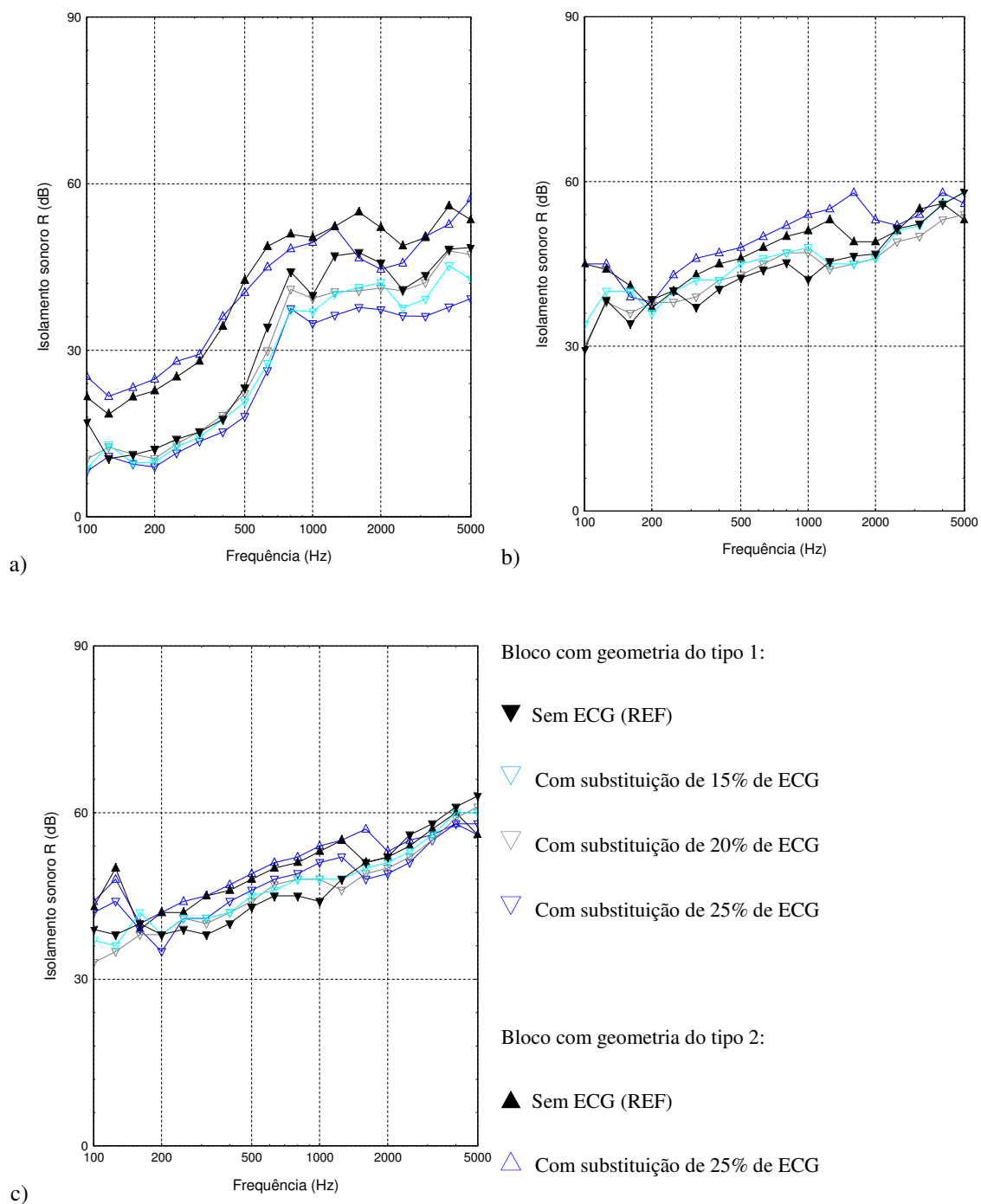


Figura 6.16: Curvas de isolamento sonoro (R), em bandas de um terço de oitava, para uma parede simples de alvenaria em blocos com e sem incorporação de regranulado de cortiça expandido, com: a) sem reboco, apenas com as juntas de argamassa horizontais de assentamento; b) juntas de argamassa horizontais e rebocado numa face; c) juntas de argamassa horizontais e rebocado em ambas as faces.



As medições dos níveis sonoros foram efetuadas no domínio da frequência, em bandas de terços de oitava, considerando as paredes: a) com junta de assentamento horizontal de argamassa, sem reboco; b) o mesmo provete mas com reboco numa das faces; c) o mesmo provete mas com reboco em ambas as faces. As curvas de isolamento sonoro, obtidas em função da frequência, são apresentadas na Figura 6.16. Constata-se que, para a primeira situação (Figura 6.16 a)), as paredes de alvenaria sem aplicação de reboco nas faces, fabricada com a geometria do tipo 2, apresenta melhor comportamento nas bandas de frequência compreendidas entre 100Hz e 400Hz, resultando um índice de isolamento de 40dB, enquanto para a parede constituída por blocos de betão tradicional se obteve um índice de 38dB. Para os provetes constituídos com a geometria do tipo 1, os níveis são inferiores (devido a um peso mais baixo por bloco), sendo entre eles muito próximos até os 1000Hz. Os índices de isolamento sonoro obtidos foram de 26dB, 25dB, 26dB e 24dB, para as misturas REF, 15%ECG, 20%ECG e 25%ECG, respetivamente.

Comprova-se que o acréscimo de isolamento proporcionado pela aplicação de reboco apenas numa face é bastante significativo ( $\geq 10\text{dB}$ ), relativamente às paredes sem reboco, com a colmatação de possíveis poros do bloco e da argamassa de assentamento e no aumento significativo de massa do provete. Quando se consideram ambas as faces rebocadas, o aumento de isolamento é menos relevante, registando-se incrementos no índice de isolamento entre 1dB e os 2dB, quando comparado com os resultados das paredes com uma face rebocada.

É também evidente que, para ambas as geometrias, o nível de isolamento para os provetes constituídos por blocos de cortiça são superiores àqueles que contêm a mistura de referência, principalmente nas frequências médias.

#### *6.4.2.2 Evolução ao longo do tempo do isolamento sonoro a sons de condução aérea conferido por paredes de alvenaria de blocos de betão com incorporação de cortiça*

Nos ensaios acústicos laboratoriais realizados em paredes de alvenaria, não se conhece como varia o seu isolamento a sons aéreos ao longo do tempo devido à secagem do bloco, das juntas de assentamento (horizontais e verticais) e do reboco de argamassa, nem é definido na norma de ensaio o tempo necessário de cura, podendo este índice ser diferente, ao longo do tempo, influenciando assim os resultados finais.

Nesse sentido, um dos provetes foi utilizado para proceder a essa avaliação. Este provete é composto por blocos de betão com aglomerado de cortiça expandida, fabricado com blocos com a geometria do tipo 1 e para a mistura 15%ECG. As medições foram efetuadas, após a construção do provete, para a primeira hora de vida do provete, até à sua estabilização, ou seja, até se registar uma massa constante do provete. Foram efetuadas medições de 24 em 24 horas (em média), sendo efetuadas mais medições nas primeiras horas de vida do provete.

Para determinar a massa do provete, aquando da construção do pano de alvenaria de blocos com aglomerado de cortiça expandida, com junta de argamassa, reproduziu-se em simultâneo um provete de pequenas dimensões, com as mesmas condições de assentamento da parede de alvenaria para ser possível a sua pesagem, como se ilustra na Figura 6.17. Este provete, também foi submetido às mesmas condições higrotérmicas do provete de ensaio, estabilizando no interior da câmara acústica.

Determinou-se, então, o isolamento sonoro conferido pela parede de alvenaria, em frequência, com registo simultâneo da massa do provete pequeno. Repetiram-se os ensaios, nos moldes descritos anteriormente, até que a massa do provete pequeno fosse constante, ou seja, que apresentasse uma variação inferior a 0,1% do peso total, em relação à última medição efetuada.

Na Figura 6.18 a), apresentam-se os resultados obtidos do isolamento a sons de condução área, para o primeiro ( $t = 1h$ ) e para último instante ( $t = 250h$ ), correspondendo ao instante de estabilização do provete, quando o provete não é rebocado (Figura 6.17 a)). Não se apresentam os resultados referentes aos instantes intermédios, dado tornar-se difícil a interpretação dos gráficos de isolamento sonoro a sons aéreos. Durante esse período, o provete de reduzidas dimensões diminuiu a sua massa total em 1,2%. Para ambos os instantes, o índice de isolamento sonoro manteve-se nos 25dB. Apesar disso, é evidente um decréscimo de isolamento a sons aéreos ao longo do tempo, principalmente nas frequências mais altas, acima dos 1000 Hz.

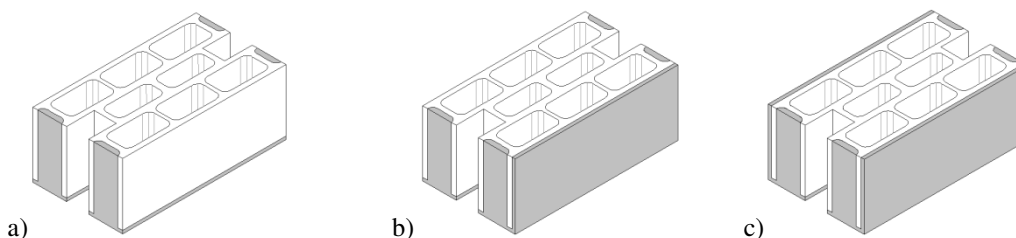


Figura 6.17: Perspectiva tridimensional do provete de pequena dimensão, constituído por um bloco com geometria do tipo 1, com incorporação de regranulado de cortiça expandida, com: a) juntas de argamassa de assentamento; b) juntas de argamassa de assentamento e rebocado numa face; c) juntas de argamassa de assentamento e rebocado em ambas as faces.

Posteriormente, rebocou-se uma das faces da parede de alvenaria com argamassa leve, com uma espessura aproximada de 15mm. Efetuou-se o mesmo procedimento no provete pequeno (ver Figura 6.17 b)) e registaram-se as curvas de isolamento da parede e massas do provete pequeno, através do procedimento descrito anteriormente. O índice de isolamento sonoro obtido para o primeiro instante foi de 45dB, com tendência de subida até às primeiras 24h, atingindo um isolamento superior, de 47dB (não representado). A massa do provete estabilizou após 300h (correspondendo a uma perda da massa total do provete em 1,7%), existindo uma diminuição de 1dB do valor do isolamento sonoro a sons aéreos, em relação às 24h, obtendo-se 46dB. Resumindo, o índice de isolamento sobe significativamente nas primeiras 24h e durante a sua estabilização decresce o seu índice de isolamento sonoro a sons aéreos.

Realizando uma análise mais detalhada ao gráfico da Figura 6.18 b), é possível visualizar um ganho, ao longo do tempo, nas frequências médias (315 Hz - 1600 Hz), com diminuição nas altas frequências (acima dos 2000 Hz). Salienta-se que, após as 150h (corresponde a uma secagem na ordem dos 1,5% do peso total do provete), o índice de isolamento a sons aéreos manteve-se constante, 46dB, com pequenas oscilações em frequência (não representado).

Por último, rebocou-se a outra face da parede de alvenaria e do provete pequeno (como está ilustrado na Figura 6.17 c)), estando a outra face rebocada já com a cura estabilizada. Para o primeiro instante (1h), obteve-se um índice de isolamento sonoro de 47dB. Atingiu-se mais 1dB após as primeiras 24h (não representado), tal como aconteceu para o segundo caso analisado. Quando o provete atinge uma secagem de 1,1% do seu peso total (ao fim das 200h), o índice volta a decrescer e atinge os mesmos 47dB, valor obtido para o instante inicial, que se mantêm até ao final, isto é, até obter massa constante (correspondente às 250h). O decréscimo de isolamento nas altas frequências, com o aumento da secagem do provete, também é evidente para o caso em que o segundo pano é rebocado. Neste caso, existe um acréscimo de isolamento, ao longo do tempo, nas frequências mais baixas (200Hz – 500Hz), com o aumento da secagem do provete, como é ilustrado na Figura 6.18 c).

Conclui-se, assim, que existe alteração do nível de isolamento de condução aérea, em frequência, e do respetivo índice de isolamento, durante o período de secagem do reboco da argamassa. A diferença desse índice pode chegar aos 2dB para este provete de análise. Nos casos anteriormente referidos, verifica-se o decréscimo do isolamento nas frequências mais altas, ao longo do tempo. Quando é rebocada uma face do provete, é evidente o aumento nas frequências médias ao longo do tempo. No entanto, quando se reboca a outra face da parede, verifica-se que não existe alteração nas médias frequências, mas existe uma ligeira subida de isolamento sonoro nas frequências mais baixas.

Para provetes com idênticas características, é aconselhado que o ensaio laboratorial se efetue nas 200h seguintes, após a construção do provete de ensaio, de modo a obter um isolamento sonoro a sons de condução aérea em frequência, e o respetivo índice, de uma forma mais aproximada do seu comportamento após secagem do provete.

### **6.4.3 Resultados numéricos *versus* experimentais**

Na presente secção, utiliza-se a formulação numérica proposta para a determinação de pressões numa malha de recetores localizada em ambas as camadas fluidas infinitas, que limitam uma camada sólida. Pretende-se, então, determinar o isolamento a sons de condução aérea em paredes de alvenaria constituídas por blocos de cimento para as várias misturas apresentadas.

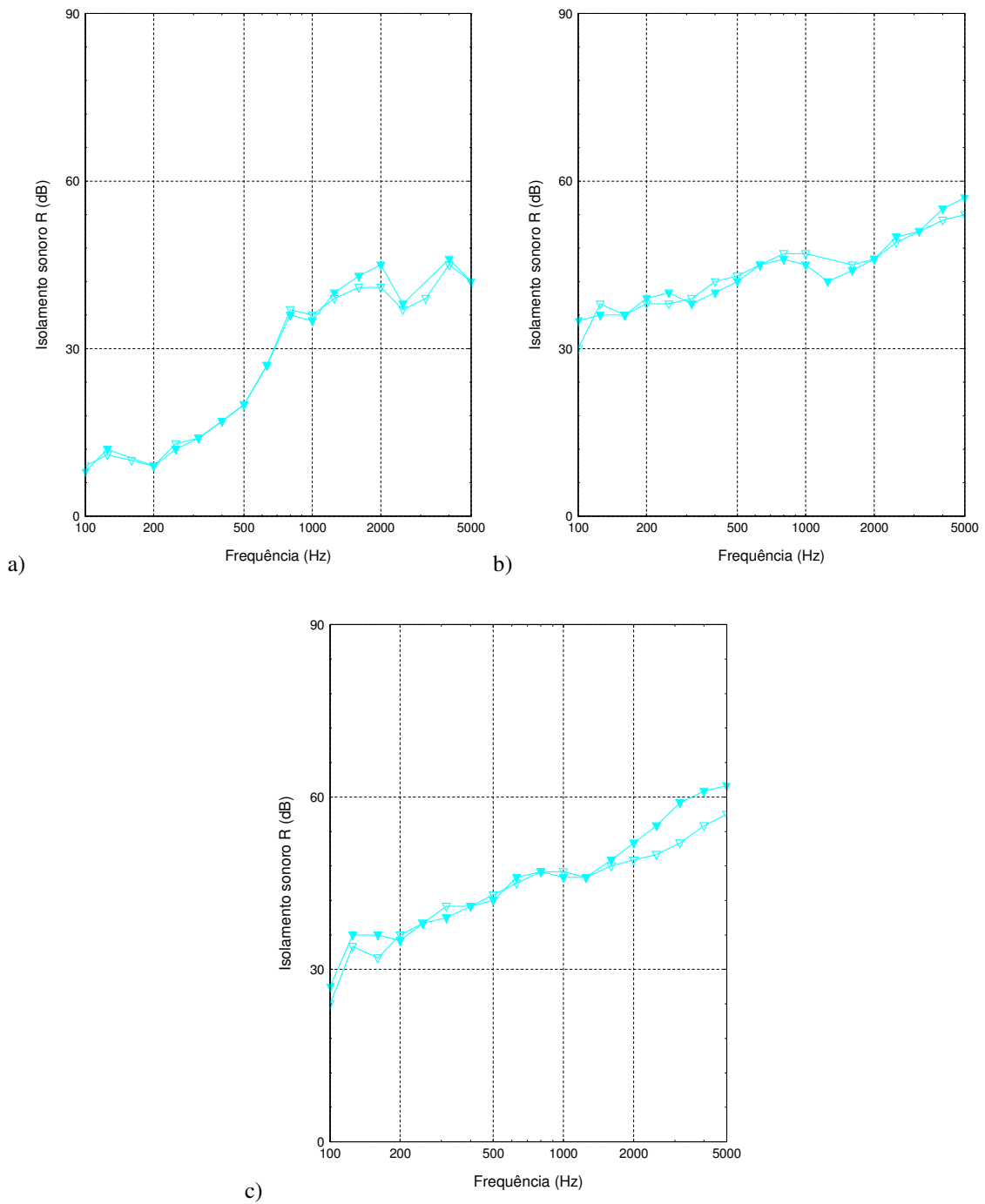


Figura 6.18: Isolamento a sons de condução aérea, em dB e em terços de oitava, para  $t=1h$  ( $\blacktriangledown$ ) e para  $t=250h$  ( $\triangledown$ ): a) sem reboco, apenas com as juntas de argamassa de assentamento; b) com juntas de argamassa e rebocado numa face; c) com juntas de argamassa e rebocado em ambas as faces.

Os blocos em análise apresentam diversas furações no seu interior, com geometrias variadas, conforme se ilustra na Figura 6.14. Na Figura 6.19 representa-se, esquematicamente, o encaixe entre os blocos de alvenaria (ilustrada apenas para a geometria do tipo 2) utilizados na análise numérica. Para simplificar a figura apresenta-se, apenas, uma metade de cada bloco.

As inclusões são discretizadas de acordo com a geometria dessas inclusões. É possível discretizar essas superfícies, utilizando o método que mais se adapta ao problema. Para as inclusões que apresentam uma geometria fina (Inclusão 1), preenchidas por um meio fluido, como é o caso do encaixe entre os blocos (junta seca), usou-se o Método dos Elementos de Fronteira (BEM) para a metade da inclusão e o Método dos Elementos de Fronteira em Trações (TBEM) para a restante parte da inclusão fina. Para modelar a fronteira das restantes inclusões, como geometrias irregulares (Inclusão 2), também preenchidas por um meio fluido, utilizou-se o Método das Soluções Fundamentais (MFS). Posteriormente, as equações são acopladas de forma a permitirem a resolução final do sistema, conforme foi descrito anteriormente.

Considerou-se, segundo a direção horizontal, um desenvolvimento de uma parede ao longo de 60m. Ao longo do comprimento total desta parede, existe um número elevado de cavidades. Para tornar possível o seu cálculo numérico, considerou-se, por bloco, apenas duas inclusões circulares de área equivalente a todas as cavidades desse mesmo bloco (referente às inclusões do tipo 2). Para o bloco de geometria do tipo 1, a área total média das cavidades é de  $880\text{cm}^2$ , a que corresponde a duas cavidades circulares com 0.118m de raio. O bloco de geometria do tipo 2 possui a área total média das cavidades equivalente a  $820\text{cm}^2$ , a que corresponde a duas cavidades circulares com 0.114m de raio. A Figura 6.20 ilustra a discretização utilizada.

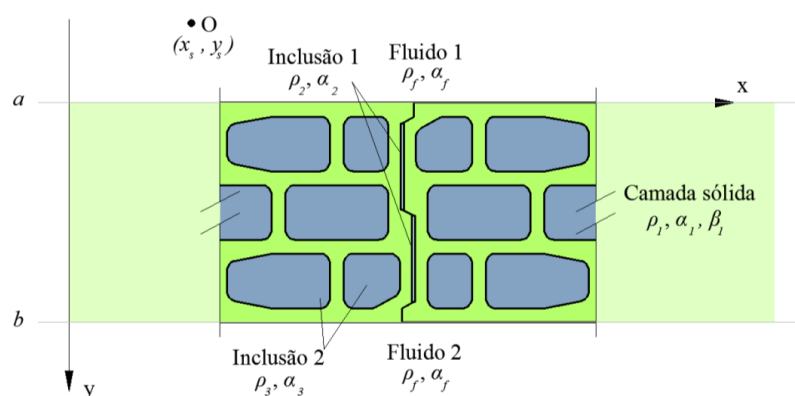


Figura 6.19: Representação esquemática de metade de dois blocos, com a geometria utilizada para as inclusões finas (Inclusão 1) e para as inclusões irregulares (Inclusão 2). As inclusões são preenchidas por um fluido (ar) e inseridas numa camada sólida (betão com incorporação de regranulado de cortiça expandida), infinita na direção  $x$ , limitada por duas camadas fluidas semi-infinitas.

No modelo matemático descrito foram contabilizadas as perdas internas do elemento sólido igual a  $\eta = 0.01$  (Mechel, 2002).

A parede de alvenaria de blocos é simulada, em 2D ( $k_z = 0$  rad/m), como uma camada sólida, contendo inclusões, com uma espessura idêntica à da parede real, incluindo a espessura de reboco, em ambos os lados. Como as juntas horizontais e o reboco de argamassa utilizado apresentam propriedades semelhantes à mistura dos blocos, considerou-se no modelo numérico parte da mesma camada sólida. Esta camada, apesar de ser um material bastante poroso, considerou-se uma simplificação no modelo numérico ao introduzirem-se as propriedades como se de um material elástico homogêneo se tratasse, equivalente à mistura de betão com incorporação de regranulado de cortiça, que exhibe velocidades de ondas P e S e uma massa volúmica que permanecerão constantes. Estes parâmetros foram determinados em placas de betão com recurso ao Pundit, utilizando o procedimento referido anteriormente. Os resultados obtidos apresentam-se na Tabela 6.1.

As inclusões vazias são consideradas preenchidas por ar, no qual são mantidas a velocidade de ondas de propagação sonora e a massa volúmica constantes e iguais a 340 m/s e 1.22 kg/m<sup>3</sup>, respetivamente.

Tabela 6.1: Velocidades de ondas P e S e massa volúmica aparente, à temperatura de 23°C e humidade relativa de 50°C, para as diferentes composições de betão.

	Velocidades de ondas P [m/s]	Velocidades de ondas S [m/s]	Massa volúmica aparente [kg/m <sup>3</sup> ]
REF	3942	2135	2127.52
15%ECG	3254	1898	1920.37
20%ECG	3333	1973	1897.38
25%ECG	3511	1885	1846.78
30%ECG	3471	1867	1788.41
35%ECG	3206	1701	1668.66
50%ECG	2609	1317	1249.75

Perante os resultados obtidos na secção 6.3 deste capítulo, no exemplo referente à parede homogênea de betão armado, a posição da malha de recetores adotada foi a maior grelha. Da mesma forma se considerou a posição da fonte sonora em  $(x_s, y_s) = (0; 2)$ . Determinou-se o isolamento sonoro para quatro paredes de alvenaria rebocada em ambas as faces, constituída por blocos de betão: a) REF; b) 15%ECG; c) 20%ECG; d) 25%ECG.

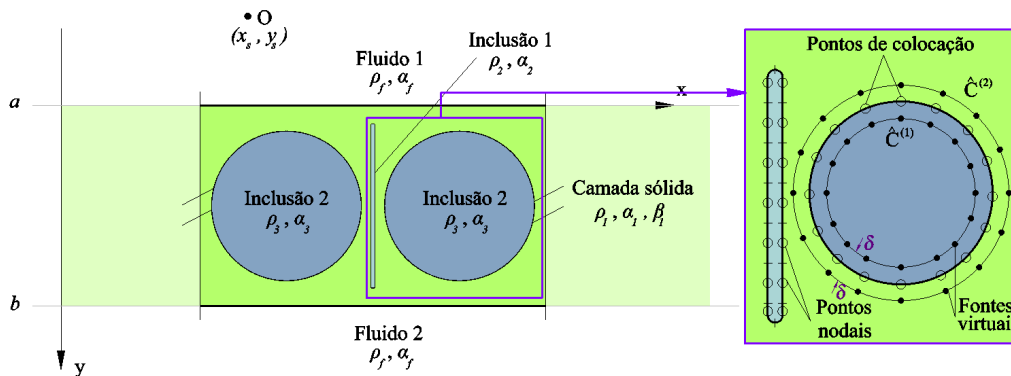


Figura 6.20: Discretização utilizada no modelo para as inclusões finas (Inclusão 1) e para as inclusões irregulares (Inclusões 2). As inclusões são preenchidas por um fluido (ar) e inseridas numa camada sólida (betão com incorporação de regranulado de cortiça expandida), infinita na direção  $x$ , limitada por duas camadas fluidas semi-infinitas: posição das fontes virtuais, pontos de colocação e pontos nodais.

#### 6.4.4 Comparação de resultados

Na Figura 6.21 apresentam-se ambos os resultados, numéricos e experimentais. A curva de isolamento, determinada laboratorialmente (já apresentada na secção 6.4.2), indica que o isolamento a sons de condução aérea situa-se entre os 33dB e os 64dB, na gama de frequências dos 100Hz aos 5000Hz, em terços de oitavas. Os resultados numéricos situam-se em níveis próximos.

Para os quatro casos em análise, verifica-se que os resultados numéricos são próximos dos obtidos experimentalmente. Para a parede de alvenaria com blocos de cimento de referência (REF) o crescimento linear (em escala logarítmica) de isolamento acima dos 1000Hz observado nos resultados laboratoriais, não se prevê o mesmo andamento exato nos resultados numéricos, conforme está ilustrado na Figura 6.21 a). Na Figura 6.21 b), é evidente que ambos os resultados, nas médias frequências, são praticamente coincidentes, quando estamos na presença de uma solução de parede de alvenaria com incorporação de 15% de regranulado de cortiça expandida. O mesmo comportamento acontece para o terceiro caso (20%ECG) que se ilustra na Figura 6.21 c). Para a Figura 6.21 d), também existe um comportamento semelhante entre as curvas numérica e experimental.

Refira-se que para a determinação das curvas de isolamento a sons de condução aérea, com recurso às formulações de acoplamento propostas, para as paredes de alvenaria constituídas por blocos de betão, existem outros fatores que não foi possível ter em consideração. Como se referiu anteriormente, as inclusões existentes em cada bloco foram simplificadas por inclusões circulares de área equivalente. Estas

e as inclusões de encaixe entre blocos também foram modeladas como se se tratasse de inclusões infinitas segundo a direção perpendicular ao plano  $xy$ . Nesse sentido, as juntas de assentamento entre blocos não se consideraram.

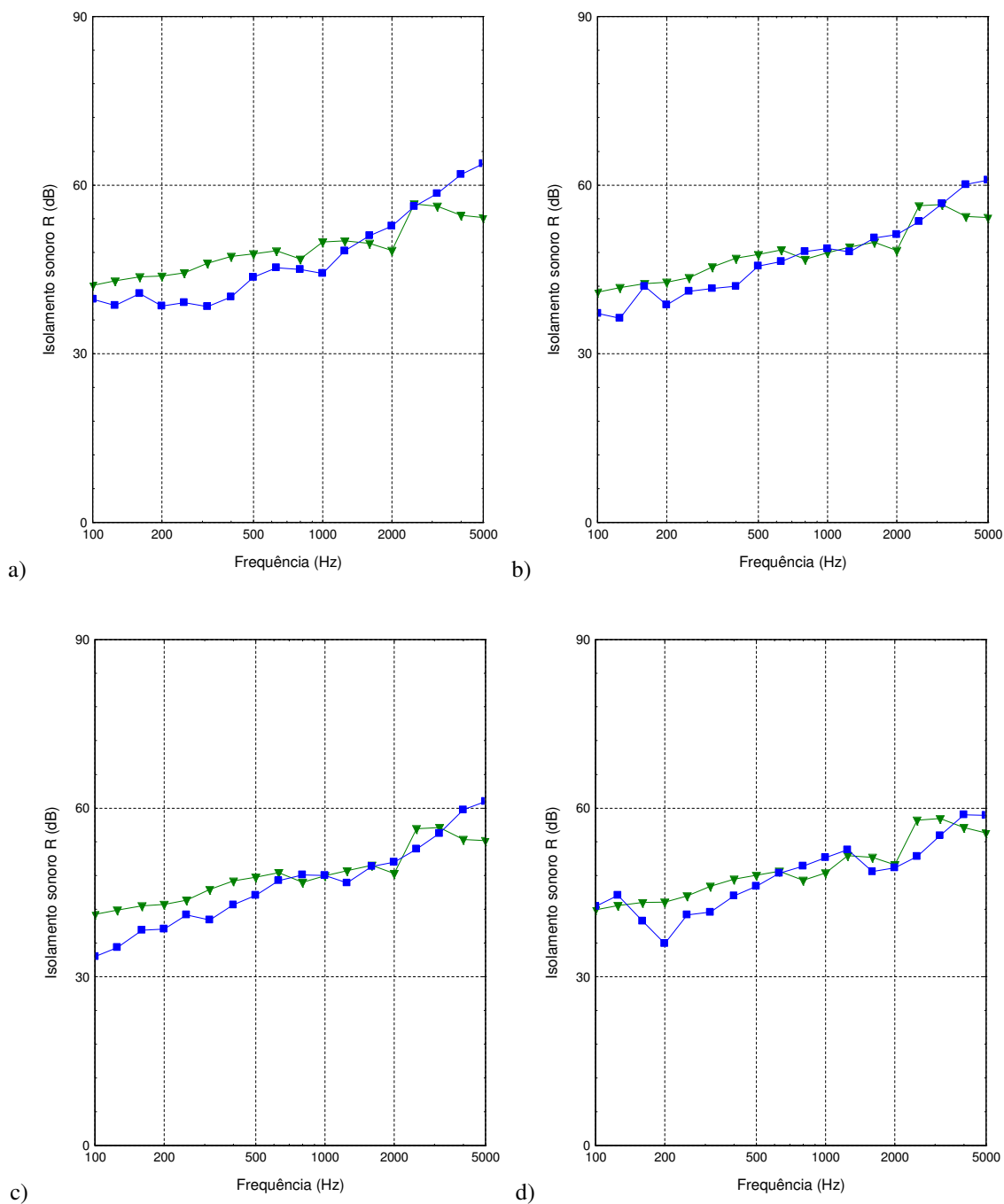


Figura 6.21: Isolamento sonoro a sons aéreos ( $R$ ), em laboratório (■) e obtidos de forma numérica (▼), em bandas de terços de oitava (em dB), obtidos para uma parede de alvenaria de blocos de betão: a) REF; b) 15%ECG; c) 20%ECG; d) 25%ECG.



## 6.5 CONCLUSÕES

O isolamento acústico conferido por elementos de construção com uma espessura considerável, em painéis simples sem inclusões, pode ser determinado através das funções de Green, em sistemas constituídos por camadas horizontais de material sólido e/ou fluido quando sujeitos à ação de cargas lineares harmônicas e sinusoidais. Estas funções não requerem a discretização das superfícies de contacto entre as várias camadas horizontais. Assim, a economia no esforço de cálculo é significativa, e permite que estas funções sejam incorporadas nos métodos numéricos de acoplamento propostas na presente tese, sendo necessária apenas a discretização das fronteiras das inclusões. Em comparação com os resultados laboratoriais, foi demonstrado que a posição da fonte sonora em relação à camada sólida faz variar o isolamento sonoro dos elementos verticais de construção. Foi, ainda, demonstrado que existe uma boa aproximação de valores experimentais e analíticos.

Apresentaram-se os resultados experimentais obtidos para a mistura de betão com incorporação de resíduos de cortiça, onde é possível observar as vantagens e desvantagens da utilização dessa nova mistura em blocos de betão. A massa volúmica desta mistura decresce significativamente com o aumento da substituição de brita por regranulado de cortiça. Verificou-se uma melhoria substancial na resistência térmica do betão leve com a introdução da cortiça. Existiu um decréscimo da resistência à compressão com o aumento da introdução de cortiça, que não é muito importante para o fim a que se destina. Contudo, as misturas com ECG têm uma evolução desta resistência, dos 7 para os 90 dias, muito superior (75%) em comparação com a mistura de referência (5%).

Verificou-se que os blocos com cortiça apresentam uma resistência à compressão mais baixa, mas com um decréscimo significativo da massa volúmica, uma melhoria significativa do coeficiente de absorção de água por capilaridade e um aumento de resistência térmica. Para as várias paredes de alvenaria, constituídas por blocos de cimento com diferentes proporções de regranulado de cortiça expandida, com cavidades de diversas geometrias (finas e irregulares), foi determinado o seu isolamento sonoro a sons de condução aérea, tanto em termos laboratoriais, como numéricos. Foi, ainda, demonstrado que os ensaios laboratoriais de isolamento a sons aéreos, em paredes de alvenaria de blocos, devem ser realizados, no mínimo, 200h após a construção do provete, devido ao período de secagem dos diversos constituintes.

Através da formulação de acoplamento proposta na presente dissertação foram determinados os resultados numéricos, que se revelaram próximos dos resultados experimentais.

## APÊNDICE A: FUNÇÕES DE GREEN PARA MEIOS INFINITOS

### Meio Sólido:

Um espaço homogêneo e infinito é sujeito em  $(x_0, y_0)$  à ação de uma carga linear, com a amplitude a variar no espaço, com a forma  $p(x, y, z, t) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)e^{i[\omega t - k_z(z - z_0)]}$  atuando numa das três direções do sistema de coordenadas. Na expressão anterior  $\delta(x - x_0)$  e  $\delta(y - y_0)$  são funções delta de Dirac,  $\omega$  é a frequência da fonte e  $k_z$  é o número de onda na direção  $z$ , como está ilustrado na figura seguinte.

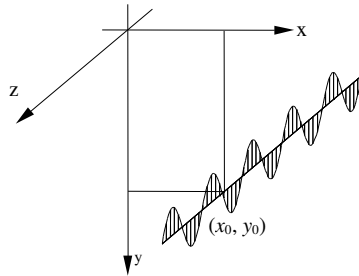


Figura 6.22: Geometria do problema para espaço infinito: carga linear harmónica e sinusoidal segundo  $z$ .

A resposta a esta solicitação pode ser calculada aplicando uma transformada de Fourier espacial na direção  $z$  às equações de Helmholtz para uma carga pontual (Gradshteyn e Ryzhik, 1980). Estas equações, depois de submetidas a uma transformada de Fourier na direção  $z$ , adquirem a seguinte forma:

$$\left( \frac{\partial^2 \hat{A}_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_p}{\partial y^2} + k_\alpha^2 \hat{A}_p \right) = \frac{-iH_0^{(2)}(-ik_z r)}{4\rho\alpha^2}$$

$$\left( \frac{\partial^2 \hat{A}_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{A}_s}{\partial y^2} + k_\beta^2 \hat{A}_s \right) = \frac{-iH_0^{(2)}(-ik_z r)}{4\rho\beta^2} \quad (6.9)$$

sendo  $k_\alpha = \sqrt{k_p^2 - k_z^2}$  (com  $\text{Im}(k_\alpha) \leq 0$  e  $k_p = \omega/\alpha$ ) e  $k_\beta = \sqrt{k_s^2 - k_z^2}$  (com  $\text{Im}(k_\beta) \leq 0$  e  $k_s = \omega/\beta$ ). Defina-se que  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  e  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  são as velocidades das ondas P (pressão) e ondas S (corte), respetivamente, sendo  $\lambda$  e  $\mu$  as constantes de Lamé e  $\rho$  a massa volúmica.

$\hat{A}_p(x, y, k_z, \omega)$  e  $\hat{A}_s(x, y, k_z, \omega)$  são as transformadas de Fourier de dois potenciais  $A_p(x, y, z, \omega)$  e  $A_s(x, y, z, \omega)$  que correspondem às partes irrotacional (compressão) e rotacional (distorcional) do vetor deslocamento,  $H_n^{(2)}(\cdot)$  são funções de Hankel do segundo tipo e ordem  $n$ ,  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$  e  $i = \sqrt{-1}$ . Das condições de equilíbrio obtêm-se  $\hat{A}_p$  e  $\hat{A}_s$ ,

$$\hat{A}_p = \frac{i}{4\rho\omega^2} [H_0^{(2)}(k_\alpha r) - H_0^{(2)}(-ik_z r)]$$

$$\hat{A}_s = \frac{i}{4\rho\omega^2} [H_0^{(2)}(k_\beta r) - H_0^{(2)}(-ik_z r)] \quad (6.10)$$

É possível calcular os deslocamentos  $G_{ij}$  na direção  $i$  devido a uma carga aplicada na direção  $j$  a partir da relação

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 (\hat{A}_p - \hat{A}_s)}{\partial x_i \partial x_j} + \delta_{ij} \bar{\nabla}^2 \hat{A}_s \quad (6.11)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $x_j = x, y, z$  para  $j=1, 2, 3$ , e  $\frac{\partial}{\partial z} = -ik_z$ . Podemos observar que:

$$\hat{A}_p - \hat{A}_s = \frac{1}{4i\rho\omega^2} [H_0^{(2)}(k_\beta r) - H_0^{(2)}(k_\alpha r)]$$

$$\bar{\nabla}^2 \hat{A}_s = \frac{1}{4i\rho\beta^2} H_0^{(2)}(k_\beta r) \quad (6.12)$$

As funções de Green e expressões resultantes para tensões e extensões foram apresentadas por Tadeu e Kausel (2000), as quais estão em conformidade com a solução para cargas em movimento previamente determinada por Pedersen *et al.* (1994) e Papageorgiou e Pei (1998).

Essas mesmas equações podem ser escritas como uma sobreposição de ondas planas homogêneas e não homogêneas quando a carga atua na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**Carga aplicada na direção do eixo x:**

Os potenciais de deslocamento que resultam da aplicação, na direção  $x$ , de uma carga linear, harmônica e sinusoidal ao longo da direção  $z$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  são dados pelas expressões:

$$\phi^x = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{k}{\nu} e^{-i\nu|y-y_0|} \right) e^{-ik(x-x_0)} dk$$

$$\psi_x^x = 0$$

$$\psi_y^x = \frac{i(-ik_z)}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{e^{-i\gamma|y-y_0|}}{\gamma} \right) e^{-ik(x-x_0)} dk \quad (6.13)$$

$$\psi_z^x = \frac{-\text{sgn}(y-y_0)}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{-i\gamma|y-y_0|} \right) e^{-ik(x-x_0)} dk$$

onde  $\nu = \sqrt{k_p^2 - k_z^2 - k^2}$  com  $\text{Im}(\nu) \leq 0$ ,  $\gamma = \sqrt{k_s^2 - k_z^2 - k^2}$  com  $\text{Im}(\gamma) \leq 0$ , sendo a integração efetuada relativamente ao número de onda horizontal ( $k$ ) na direção  $x$ .

A transformação destes integrais num somatório pode ser conseguida se se imaginar a existência de um número infinito de fontes virtuais distribuídas ao longo da direção  $x$ , separadas de uma distância  $L_x$ . Os potenciais de compressão e rotação anteriores podem ser escritos então como:

$$\phi^x = E_a \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left( \frac{k_n}{\nu_n} E_b \right) E_d$$

$$\psi_x^x = 0$$

$$\psi_y^x = E_a k_z \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left( \frac{E_c}{\gamma_n} \right) E_d \quad (6.14)$$

$$\psi_z^x = -\text{sgn}(y-y_0) E_a \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (E_c) E_d$$

onde  $E_a = \frac{1}{2\rho\omega^2 L_x}$ ,  $E_b = e^{-i\nu_n|y-y_0|}$ ,  $E_c = e^{-i\gamma_n|y-y_0|}$ ,  $E_d = e^{-ik_n(x-x_0)}$ ,  $\nu_n = \sqrt{k_p^2 - k_z^2 - k_n^2}$

com  $\text{Im}(\nu_n) \leq 0$ ,  $\gamma_n = \sqrt{k_s^2 - k_z^2 - k_n^2}$  com  $\text{Im}(\gamma_n) \leq 0$  e  $k_n = \frac{2\pi}{L_x}n$ , os quais podem ser aproximados por uma soma finita de termos ( $N$ ).

As funções de Green podem ser calculadas em função dos potenciais de compressão e rotação,  $\phi^x$ ,  $\psi_x^x$ ,  $\psi_y^x$  e  $\psi_z^x$ . As três componentes do deslocamento podem ser expressas da seguinte forma,

$$G_{xx}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \frac{-ik_n^2}{\nu_n} E_b + \left( -i\gamma_n - \frac{ik_z^2}{\gamma_n} \right) E_c \right] E_d$$

$$G_{yx}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i \text{sgn}(y-y_0) k_n E_b + i \text{sgn}(y-y_0) k_n E_c \right] E_d \quad (6.15)$$

$$G_{zx}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-ik_z k_n}{\nu_n} E_b + \frac{ik_z k_n}{\gamma_n} E_c \right) E_d$$

As expressões correspondentes para forças aplicadas ao longo das direções  $y$  e  $z$  podem ser calculadas de forma semelhante. A derivação dessas soluções é apresentada de seguida mas em forma condensada.

#### Carga aplicada na direção do eixo $y$ :

Os potenciais de deslocamento resultantes de uma carga linear, harmónica e sinusoidal ao longo da direção  $z$ , aplicada no ponto  $(x_0, y_0)$  na direção  $y$ , escrevem-se numa forma discreta de acordo com as expressões:

$$\phi^y = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} [\text{sgn}(y-y_0) E_b] E_d$$

$$\psi_x^y = E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-E_c}{\gamma_n} \right) E_d$$

$$\psi_y^y = 0 \quad (6.16)$$

$$\psi_z^y = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n}{\gamma_n} E_c \right) E_d$$

As funções de Green para o meio sólido infinito 2.5D são:

$$G_{xy}^{full} = G_{yx}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i \operatorname{sgn}(y - y_0) k_n E_b + i \operatorname{sgn}(y - y_0) k_n E_c \right] E_d$$

$$G_{yy}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i v_n E_b + \left( \frac{i v_n^2}{\gamma_n} \right) E_c \right] E_d \quad (6.17)$$

$$G_{zy}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i \operatorname{sgn}(y - y_0) k_z E_b + i \operatorname{sgn}(y - y_0) k_z E_c \right] E_d$$

#### Carga aplicada na direção do eixo z:

De forma análoga, os potenciais de deslocamento, resultantes da aplicação de uma carga linear, harmônica e sinusoidal ao longo da direção  $z$ , no ponto  $(x_0, y_0)$  na direção  $z$ , são expressos de forma discreta:

$$\phi^z = E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_b}{v_n} \right) E_d$$

$$\psi_x^z = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \operatorname{sgn}(y - y_0) E_c \right] E_d$$

$$\psi_y^z = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-k_n}{\gamma_n} E_c \right) E_d \quad (6.18)$$

$$\psi_z^z = 0$$

As funções de Green para um meio sólido infinito 2.5D são representadas por:

$$G_{xz}^{full} = G_{zx}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-i k_z k_n}{v_n} E_b + \frac{i k_z k_n}{\gamma_n} E_c \right) E_d$$

$$G_{yz}^{full} = G_{zy}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i \operatorname{sgn}(y - y_0) k_z E_b + i \operatorname{sgn}(y - y_0) k_z E_c \right] E_d \quad (6.19)$$

$$G_{zz}^{full} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \frac{-ik_z^2}{v_n} E_b + \left( \frac{-ik_n^2}{\gamma_n} - i\gamma_n \right) E_c \right] E_d$$

### Meio Fluido:

O potencial de pressão num meio fluido infinito, devido a uma fonte de pressão linear e sinusoidal aplicada no ponto  $(x_0, y_0)$ , pode ser obtido usando um processo similar ao anteriormente descrito para o meio sólido, conduzindo à expressão

$$\phi_{fluido}(\omega, x, y, k_z) = \frac{-i}{2} \left( -\frac{\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) H_0^{(2)} \left( k_{\alpha_f} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) \quad (6.20)$$

onde  $k_{\alpha_f} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\alpha_f^2} - k_z^2}$ , com  $\text{Im } k_{\alpha_f} \leq 0$ ,  $\lambda_f$  é a constante de Lamé do fluido,  $\alpha_f = \sqrt{\lambda_f / \rho_f}$  é a velocidade das ondas acústicas (de compressão ou pressão) no meio e  $\rho_f$  é a massa volúmica do fluido.

O potencial de pressão no fluido pode ser expresso numa forma discreta de acordo com a expressão,

$$\phi_{fluid} = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_f}{v_n^f} \right] E_d \quad (6.21)$$

onde  $E_f = e^{-i v_n^f |y-y_0|}$ ,  $v_n^f = \sqrt{k_{pf}^2 - k_z^2 - k_n^2}$  com  $\text{Im}(v_n^f) \leq 0$  e  $k_{pf} = \omega / \alpha_f$ .

As funções de Green para um meio fluido infinito 2.5D podem ser escritas como,

$$G_{fx}^{full} = -\frac{1}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{k_n}{v_n^f} E_f \right] E_d$$

$$G_{fy}^{full} = -\frac{1}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \text{sgn}(y-y_0) E_f \right] E_d \quad (6.22)$$

$$G_{fz}^{full} = -\frac{1}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{k_z}{v_n^f} E_f \right] E_d$$

## APÊNDICE B: FUNÇÕES DE GREEN PARA UMA CAMADA SÓLIDA LIMITADA POR DOIS MEIOS FLUIDOS

Neste apêndice são apresentadas as funções de Green para uma camada sólida limitada por dois meios fluidos. As expressões seguintes foram propostas e validadas em trabalhos anteriores (Tadeu e António, 2001; Tadeu e António, 2002) no cálculo de deslocamentos no sólido e pressões nos fluidos, para uma camada sólida limitada por dois fluidos.

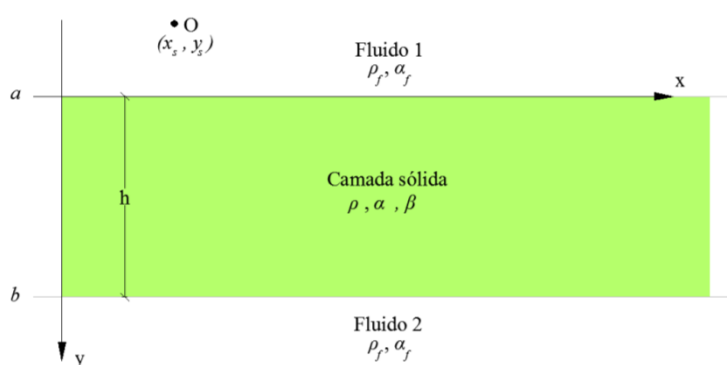


Figura 6.23: Geometria bidimensional (em planta) de uma camada simples (elástica), confinada por dois meios acústicos, onde está inserida uma fonte pontual dilatacional situada em  $(x_s, y_s)$ .

### Carga aplicada no meio sólido na direção do eixo $x$ :

Considere-se o modelo apresentado na Figura 6.23, constituído por uma camada elástica homogênea com espessura  $h$ , limitada por dois meios fluidos, com características idênticas e submetido a uma carga aplicada no meio sólido em  $(x_s, y_s)$ , na direção do eixo horizontal  $x$ , com variação harmónica ao longo de  $z$ . As funções de Green podem ser expressas através dos termos gerados pela fonte, como se se tratasse de um campo infinito, somados aos termos relativos da superfície que limita os meios, de forma a satisfazer as condições de fronteira nas duas superfícies de contacto entre os fluidos e o sólido. Nessa superfície de contacto são, então, impostas a continuidade de deslocamentos e tensões normais às superfícies de contacto, com tensões tangenciais nulas. Neste problema específico as duas superfícies de contacto (definidas na Figura 6.2 como interface  $a$  e  $b$ ) geram termos da superfície que podem ser expressos de forma semelhante aos termos da fonte.



*Meio sólido - superfície de contacto a*

$$\varphi_0^{x-a} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n}{\nu_n} E_{b0} A_n^x \right) E_d$$

$$\psi_{x0}^{x-a} = 0 \quad , \quad (6.22)$$

$$\psi_{y0}^{x-a} = E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{c0}}{\gamma_n} B_n^x \right) E_d$$

$$\psi_{z0}^{x-a} = -E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( E_{c0} C_n^x \right) E_d$$

*Meio Fluido 1 - superfície de contacto a:*

Quando  $y < 0$ :

$$\varphi_{Fluido1}^a = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}}{\nu_n^f} D_n^x \right] E_d , \quad (6.22)$$

$$\text{onde } \nu_n^f = \sqrt{\left( \frac{\omega}{\alpha_f} \right)^2 - k_z^2 - k_n^2} .$$

*Meio sólido - superfície de contacto b:*

$$\varphi_0^{x-b} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n}{\nu_n} E_{b0} E_n^x \right) E_d$$

$$\psi_{x0}^{x-b} = 0 \quad , \quad (6.22)$$

$$\psi_{y0}^{x-b} = E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{c0}^b}{\gamma_n} F_n^x \right) E_d$$

$$\psi_{z0}^{x-b} = -E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( E_{c0}^b G_n^x \right) E_d$$

Meio Fluido 2 - superfície de contacto b:

Quando  $y > h$ :

$$\phi_{Fluido 2}^b = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}^b}{v_n^f} H_n^x \right] E_d, \quad (6.22)$$

onde,  $E_{b0}^b = e^{-i v_n |y-h|}$ ,  $E_{c0}^b = e^{-i \gamma_n |y-h|}$ ,  $E_{f0}^b = e^{-i v_n^f |y-h|}$ .  $A_n^x$ ,  $B_n^x$ ,  $C_n^x$ ,  $D_n^x$ ,  $E_n^x$ ,  $F_n^x$ ,  $G_n^x$  e  $H_n^x$  são os coeficientes a serem determinados através da imposição das condições de fronteira, de forma a que o campo produzido simultaneamente pelos termos da fonte e os termos da superfície produzam  $\sigma_{yx}^s = \sigma_{yx}^f = 0$ ,  $\sigma_{yz}^s = \sigma_{yz}^f = 0$ ,  $\sigma_{yy}^s = \sigma_{yy}^f$  e  $u_y^s = u_y^f$ , em  $y=0$  e  $y=h$ .

Com a imposição destas condições de fronteira estabelecidas para cada valor de  $n$ , resulta um sistema de oito equações a oito incógnitas. O sistema final de equações tem a seguinte forma:

$$\left[ a_{ij}^x \quad i=1, 8; j=1, 8 \right] \left[ c_i^x \quad i=1, 8 \right] = \left[ b_i^x \quad i=1, 8 \right], \quad (6.22)$$

cujos termos  $a_{ij}^x \quad i=1, 8; j=1, 8$  se definem como:

$$\begin{array}{llll} a_{11}^x = -2k_n^2 & a_{12}^x = -k_z^2 & a_{13}^x = k_n^2 - \gamma_n^2 & a_{14}^x = 0 \\ a_{15}^x = -a_{11}^x E_{bh} & a_{16}^x = -a_{12}^x E_{ch} & a_{17}^x = -a_{13}^x E_{ch} & a_{18}^x = 0 \\ a_{21}^x = -2 & a_{22}^x = 1 & a_{23}^x = 1 & a_{24}^x = 0 \\ a_{25}^x = -a_{21}^x E_{bh} & a_{26}^x = -a_{22}^x E_{ch} & a_{27}^x = -a_{23}^x E_{ch} & a_{28}^x = 0 \\ a_{31}^x = \frac{-k_s^2}{v_n} - \frac{2v_{zn}^2}{v_n} & a_{32}^x = 0 & a_{33}^x = 2\gamma_n & a_{34}^x = \frac{-i 2\rho\omega^2}{v_n^f \mu} \\ a_{35}^x = a_{31}^x E_{bh} & a_{36}^x = 0 & a_{37}^x = a_{33}^x E_{ch} & a_{38}^x = 0 \\ a_{41}^x = -i & a_{42}^x = 0 & a_{43}^x = i & a_{44}^x = \frac{-2\rho\omega^2}{k_{pf}^2 \lambda_f} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
a_{45}^x = -a_{41}^x E_{bh} & a_{46}^x = 0 & a_{47}^x = -a_{43}^x E_{ch} & a_{48}^x = 0 \\
a_{51}^x = a_{11}^x E_{bh} & a_{52}^x = a_{12}^x E_{ch} & a_{53}^x = a_{13}^x E_{ch} & a_{54}^x = 0 \\
a_{55}^x = -a_{11}^x & a_{56}^x = -a_{12}^x & a_{57}^x = -a_{13}^x & a_{58}^x = 0 \\
a_{61}^x = a_{21}^x E_{bh} & a_{62}^x = a_{22}^x E_{ch} & a_{63}^x = a_{23}^x E_{ch} & a_{64}^x = 0 \\
a_{65}^x = -a_{21}^x & a_{66}^x = -a_{22}^x & a_{67}^x = -a_{23}^x & a_{68}^x = 0 \\
a_{71}^x = a_{31}^x E_{bh} & a_{72}^x = 0 & a_{73}^x = a_{33}^x E_{ch} & a_{74}^x = 0 \\
a_{75}^x = a_{31}^x & a_{76}^x = 0 & a_{77}^x = a_{33}^x & a_{78}^x = a_{34}^x \\
a_{81}^x = a_{41}^x E_{bh} & a_{82}^x = 0 & a_{83}^x = a_{43}^x E_{ch} & a_{84}^x = 0 \\
a_{85}^x = -a_{41}^x & a_{86}^x = 0 & a_{87}^x = -a_{43}^x & a_{88}^x = -a_{44}^x
\end{array}$$

$c_i^x \ i = 1, 8$

$$\begin{array}{cccc}
c_1^x = A_n^x & c_2^x = B_n^x & c_3^x = C_n^x & c_4^x = D_n^x / k_n \\
c_5^x = E_n^x & c_6^x = F_n^x & c_7^x = G_n^x & c_8^x = H_n^x / k_n
\end{array}$$

$b_i^x \ i = 1, 8$

$$\begin{array}{cc}
b_1^x = -2k_n^2 E_{b1} + (-k_s^2 + 2k_n^2) E_{c1} & b_2^x = -2E_{b1} + 2E_{c1} \\
b_3^x = \left( \frac{k_s^2}{V_n} + \frac{2V_{zn}^2}{V_n} \right) E_{b1} - 2\gamma_n E_{c1} & b_4^x = -iE_{b1} + iE_{c1} \\
b_5^x = 2k_n^2 E_{bh1} - (-k_s^2 + 2k_n^2) E_{ch1} & b_6^x = 2E_{bh1} - 2E_{ch1}
\end{array}$$

$$b_7^x = \left( \frac{k_s^2}{v_n} + \frac{2v_{zn}^2}{v_n} \right) E_{bhl} - 2\gamma_n E_{chl} \quad b_8^x = iE_{bhl} - iE_{chl}$$

com  $E_{b1} = e^{-i v_n y_0}$ ,  $E_{c1} = e^{-i \gamma_n y_0}$ ,  $v_{zn} = \sqrt{-k_z^2 - k_n^2}$ ,  $E_{bh} = e^{-i v_n h}$ ,  $E_{ch} = e^{-i \gamma_n h}$ ,  $E_{bhl} = e^{-i v_n |h-y_0|}$  e  $E_{chl} = e^{-i \gamma_n |h-y_0|}$ .

Determinam-se, assim, as amplitudes dos vários potenciais através da resolução do sistema de equações (6.22). Os deslocamentos e as pressões associados aos termos da superfície  $a$  e  $b$  podem ser obtidos usando as equações que relacionam os potenciais com os deslocamentos e as pressões. Como se referiu anteriormente, as funções de Green para a camada sólida são obtidas adicionando os termos da fonte e os termos da superfície originados nas duas superfícies de contacto sólido-fluído. Os deslocamentos no sólido são obtidos através da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= G_{xx}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ A_n^x \frac{-i k_n^2}{v_n} E_{b0} + \left( -i \gamma_n C_n^x - \frac{i k_z^2}{\gamma_n} B_n^x \right) E_{c0} \right] E_d + \\ & E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ E_n^x \frac{-i k_n^2}{v_n} E_{b0} + \left( -i \gamma_n G_n^x - \frac{i k_z^2}{\gamma_n} F_n^x \right) E_{c0} \right] E_d \\ G_{yx} &= G_{yx}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -i k_n A_n^x E_{b0} + i k_n C_n^x E_{c0} \right) E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( i k_n E_n^x E_{b0} - i k_n G_n^x E_{c0} \right) E_d, \\ G_{zx} &= G_{zx}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-i k_z k_n}{v_n} A_n^x E_{b0} + \frac{i k_z k_n}{\gamma_n} B_n^x E_{c0} \right) E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-i k_z k_n}{v_n} E_n^x E_{b0} + \frac{i k_z k_n}{\gamma_n} F_n^x E_{c0} \right) E_d \end{aligned} \quad (6.22)$$

em que as funções de Green  $G_{xx}^{full}$ ,  $G_{yx}^{full}$  e  $G_{zx}^{full}$  estão descritas no Apêndice A deste capítulo.

As expressões para o cálculo das pressões no Fluido 1 (quando  $y < 0$ ) e no Fluido 2 (quando  $y > h$ ), são dadas por :

$$\begin{aligned} \sigma_{fx}^{-1} &= -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n E_{f0}}{v_n^f} D_n^x \right) E_d, \\ \sigma_{fx}^{-2} &= -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n E_{f0}^b}{v_n^f} H_n^x \right) E_d \end{aligned} \quad (6.22)$$

As expressões para cargas aplicadas ao longo da direção  $y$  e  $z$  podem ser derivadas de forma análoga.

**Carga aplicada no meio sólido na direção do eixo y:**

Considere-se a carga linear, harmónica sinusoidal ao longo da direção  $z$ , aplicada em  $(x_s, y_s)$  na direção  $y$ . Os termos da superfície gerados nas duas superfícies de contacto entre o sólido e o fluido, podem ser expressos através dos potenciais de seguida apresentados.

*Meio sólido - superfície de contacto a:*

$$\begin{aligned}\phi_0^{y-a} &= E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} (E_{b0} A_n^y) E_d \\ \psi_{x0}^{y-a} &= E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-E_{c0}}{\gamma_n} C_n^y \right) E_d\end{aligned}\tag{6.22}$$

$$\psi_{y0}^{y-a} = 0$$

$$\psi_{z0}^{y-a} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n}{\gamma_n} E_{c0} B_n^y \right) E_d$$

*Meio Fluido 1 - superfície de contacto a:*

Quando  $y < 0$ :

$$\phi_{Fluido1}^a = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}}{v_n^f} D_n^y \right] E_d\tag{6.23}$$

*Meio sólido - superfície de contacto b:*

$$\begin{aligned}\phi_0^{y-b} &= E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} (E_{b0}^b E_n^y) E_d \\ \psi_{x0}^{y-b} &= E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-E_{c0}^b}{\gamma_n} G_n^y \right) E_d\end{aligned}\tag{6.24}$$

$$\psi_{y0}^{y-b} = 0$$

$$\psi_{z0}^{y-b} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n}{\gamma_n} E_{c0}^b F_n^y \right) E_d$$

Meio fluido 2 - superfície de contacto b:

Quando  $y > h$ :

$$\phi_{Fluido 2}^b = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}^b}{v_n^f} H_n^y \right] E_d, \quad (6.22)$$

A imposição das oito condições de fronteira requeridas para cada valor de  $n$  traduz-se num sistema de oito equações a oito incógnitas. O sistema final de equações fica da seguinte forma:

$$\left[ a_{ij}^y \ i=1,8; j=1,8 \right] \left[ c_i^y \ i=1,8 \right] = \left[ b_i^y \ i=1,8 \right], \quad (6.22)$$

cujos termos  $a_{ij}^y \ i=1,8; j=1,8$  se definem de seguida:

$$\begin{array}{llll} a_{11}^y = -2v_n & a_{12}^y = \frac{-k_n^2}{\gamma_n} + \gamma_n & a_{13}^y = \frac{-k_z^2}{\gamma_n} & a_{14}^y = 0 \\ a_{15}^y = a_{11}^y E_{bh} & a_{16}^y = a_{12}^y E_{ch} & a_{17}^y = a_{13}^y E_{ch} & a_{18}^y = 0 \\ a_{21}^y = -2v_n & a_{22}^y = \frac{-k_n^2}{\gamma_n} & a_{23}^y = \frac{-k_z^2}{\gamma_n} + \gamma_n & a_{24}^y = 0 \\ a_{25}^y = a_{21}^y E_{bh} & a_{26}^y = a_{22}^y E_{ch} & a_{27}^y = a_{23}^y E_{ch} & a_{28}^y = 0 \\ a_{31}^y = (-k_s^2 - 2v_{zn}^2) & a_{32}^y = -2k_n^2 & a_{33}^y = -2k_z^2 & a_{34}^y = \frac{-i 2\rho\omega^2}{v_n^f \mu} \\ a_{35}^y = -a_{31}^y E_{bh} & a_{36}^y = -a_{32}^y E_{ch} & a_{37}^y = -a_{33}^y E_{ch} & a_{38}^y = 0 \\ a_{41}^y = -iv_n & a_{42}^y = \frac{-ik_n^2}{\gamma_n} & a_{43}^y = \frac{-ik_z^2}{\gamma_n} & a_{44}^y = \frac{-2\rho\omega^2}{k_{pf}^2 \lambda_f} \\ a_{64}^y = 0 & a_{46}^y = a_{42}^y E_{ch} & a_{47}^y = a_{43}^y E_{ch} & a_{48}^y = 0 \\ a_{51}^y = a_{11}^y E_{bh} & a_{52}^y = a_{12}^y E_{ch} & a_{53}^y = a_{13}^y E_{ch} & a_{54}^y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
a_{55}^y = a_{11}^y & a_{56}^y = a_{12}^y & a_{57}^y = a_{13}^y & a_{58}^y = 0 \\
a_{61}^y = a_{21}^y E_{bh} & a_{62}^y = a_{22}^y E_{ch} & a_{63}^y = a_{23}^y E_{ch} & a_{64}^y = 0 \\
a_{65}^y = a_{21}^y & a_{66}^y = a_{22}^y & a_{67}^y = a_{23}^y & a_{68}^y = 0 \\
a_{71}^y = a_{31}^y E_{bh} & a_{72}^y = a_{32}^y E_{ch} & a_{73}^y = a_{33}^y E_{ch} & a_{74}^x = 0 \\
a_{75}^y = -a_{31}^y & a_{76}^y = -a_{32}^y & a_{77}^y = -a_{33}^y & a_{78}^y = a_{34}^y \\
a_{81}^y = a_{41}^y E_{bh} & a_{82}^y = a_{42}^y E_{ch} & a_{83}^y = a_{43}^y E_{ch} & a_{84}^x = 0 \\
a_{85}^y = a_{41}^y & a_{86}^y = a_{42}^y & a_{87}^y = a_{43}^y & a_{88}^y = -a_{44}^y
\end{array}$$

$c_i^y \ i=1,8$

$$\begin{array}{cccc}
c_1^y = A_n^y & c_2^y = B_n^y & c_3^y = C_n^y & c_4^y = D_n^y \\
c_5^y = E_n^y & c_6^y = F_n^y & c_7^y = G_n^y & c_8^y = H_n^y
\end{array}$$

$b_i^y \ i=1,8$

$$\begin{array}{cc}
b_1^y = 2v_n E_{b1} - \left( \frac{v_{zn}^2}{\gamma_n} + \gamma_n \right) E_{c1} & b_2^y = 2v_n E_{b1} - \left( \frac{v_{zn}^2}{\gamma_n} + \gamma_n \right) E_{c1} \\
b_3^y = \left( -k_s^2 - 2v_{zn}^2 \right) E_{b1} + 2v_{zn}^2 E_{c1} & b_4^y = i v_n E_{b1} + \left( \frac{i k_n^2}{\gamma_n} + \frac{i k_z^2}{\gamma_n} \right) E_{c1} \\
b_5^y = 2v_n E_{bh1} - \left( \frac{v_{zn}^2}{\gamma_n} + \gamma_n \right) E_{ch1} & b_6^y = 2v_n E_{bh1} - \left( \frac{v_{zn}^2}{\gamma_n} + \gamma_n \right) E_{ch1}
\end{array}$$

$$b_7^y = (k_s^2 + 2v_{zn}^2)E_{bh1} - 2v_{zn}^2 E_{ch1} \qquad b_8^y = i v_n E_{bh1} + \left( \frac{ik_n^2}{\gamma_n} + \frac{ik_z^2}{\gamma_n} \right) E_{ch1}$$

com  $E_{b1} = e^{-i v_n y_0}$ ,  $E_{c1} = e^{-i \gamma_n y_0}$ ,  $v_{zn} = \sqrt{-k_z^2 - k_n^2}$ ,  $E_{bh} = e^{-i v_n h}$ ,  $E_{ch} = e^{-i \gamma_n h}$ ,  $E_{bh1} = e^{-i v_n |h-y_0|}$  e  $E_{ch1} = e^{-i \gamma_n |h-y_0|}$ .

Após calcular a amplitude de cada potencial, as funções de Green para os deslocamentos no sólido são obtidas através da adição dos termos da fonte com os termos da superfície originados nas suas superfícies de contacto,

$$\begin{aligned} G_{xy} &= G_{xy}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -i A_n^y k_n E_{b0} + i B_n^y k_n E_{c0} \right) E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -i E_n^y k_n E_{b0} + i F_n^y k_n E_{c0} \right) E_d \\ G_{yy} &= G_{yy}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i v_n A_n^y E_{b0} + \left( \frac{-i k_n^2}{\gamma_n} B_n^y + \frac{-i k_z^2}{\gamma_n} C_n^y \right) E_{c0} \right] E_d + \\ & \quad E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i v_n E_n^y E_{b0} + \left( \frac{-i k_n^2}{\gamma_n} F_n^y + \frac{-i k_z^2}{\gamma_n} G_n^y \right) E_{c0} \right] E_d, \qquad (6.22) \\ G_{zy} &= G_{zy}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -i A_n^y k_z E_{b0} + i C_n^y k_z E_{c0} \right) E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -i E_n^y k_z E_{b0} + i G_n^y k_z E_{c0} \right) E_d \end{aligned}$$

em que as funções de Green  $G_{xy}^{full}$ ,  $G_{yy}^{full}$  e  $G_{zy}^{full}$  estão descritas no Apêndice A deste capítulo.

As expressões para o cálculo das pressões no Fluido 1 (quando  $y < 0$ ) e no Fluido 2 (quando  $y > h$ ), são dadas por :

$$\begin{aligned} \sigma_{fy}^{-1} &= -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{f0}}{v_n^f} D_n^y \right) E_d, \qquad (6.22) \\ \sigma_{fy}^{-2} &= -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{f0}^b}{v_n^f} H_n^y \right) E_d \end{aligned}$$



**Carga aplicada no meio sólido na direção do eixo z:**

Por último, a carga aplicada em  $(x_s, y_s)$ , no meio sólido, considera-se a atuar na direção  $z$ . Os termos da superfície gerados nas duas superfícies de contacto do sólido, podem ser expressos através dos seguintes potenciais:

*Meio sólido - superfície de contacto a:*

$$\begin{aligned}\varphi_0^{z-a} &= E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{b0}}{v_n} A_n^z \right) E_d \\ \psi_{x0}^{z-a} &= E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( E_{c0} B_n^z \right) E_d \\ \psi_{y0}^{z-a} &= E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-k_n}{\gamma_n} E_{c0} C_n^z \right) E_d \\ \psi_{z0}^{z-a} &= 0\end{aligned}\tag{6.22}$$

*Meio Fluido 1 - superfície de contacto a:*

Quando  $y < 0$ :

$$\varphi_{Fluido1}^a = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}}{v_n^f} D_n^z \right] E_d,\tag{6.22}$$

*Meio sólido - superfície de contacto b:*

$$\begin{aligned}\varphi_0^{z-b} &= E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{b0}^b}{v_n} E_n^z \right) E_d \\ \psi_{x0}^{z-b} &= E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( E_{c0}^b F_n^z \right) E_d \\ \psi_{y0}^{z-b} &= E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-k_n}{\gamma_n} E_{c0}^b G_n^z \right) E_d \\ \psi_{z0}^{z-b} &= 0\end{aligned}\tag{6.22}$$

Meio Fluido 2 - superfície de contacto b:

Quando  $y > h$  :

$$\varphi_{Fluido 2}^b = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}^b}{v_n^f} H_n^z \right] E_d, \quad (6.22)$$

A imposição das oito condições de fronteira requeridas para cada valor de  $n$  conduz a um sistema de oito equações a oito incógnitas, no qual o sistema final de equações tem a seguinte forma:

$$\left[ a_{ij}^z \ i=1,8; j=1,8 \right] \left[ c_i^z \ i=1,8 \right] = \left[ b_i^z \ i=1,8 \right], \quad (6.22)$$

cujos termos  $a_{ij}^z \ i=1,8; j=1,8$  definem-se como:

$$\begin{array}{llll} a_{11}^z = -2 & a_{12}^z = 1 & a_{13}^z = 1 & a_{14}^z = 0 \\ a_{15}^z = -a_{11}^z E_{bh} & a_{16}^z = -a_{12}^z E_{ch} & a_{17}^z = -a_{13}^z E_{ch} & a_{18}^z = 0 \\ a_{21}^z = -2k_z^2 & a_{22}^z = k_z^2 - \gamma_n^2 & a_{23}^z = -k_n^2 & a_{24}^z = 0 \\ a_{25}^z = -a_{21}^z E_{bh} & a_{26}^z = -a_{22}^z E_{ch} & a_{27}^z = -a_{23}^z E_{ch} & a_{28}^z = 0 \\ a_{31}^z = -\left( \frac{k_s^2}{v_n} + \frac{2v_{zn}^2}{v_n} \right) & a_{32}^z = 2\gamma_n & a_{33}^z = 0 & a_{34}^z = \frac{-i 2\rho\omega^2}{v_n^f k_z \mu} \\ a_{35}^z = a_{31}^z E_{bh} & a_{36}^z = a_{32}^z E_{ch} & a_{37}^z = 0 & a_{38}^z = 0 \\ a_{41}^z = -ik_z & a_{42}^z = ik_z & a_{43}^z = 0 & a_{44}^z = \frac{-2\rho\omega^2}{k_{p_f}^2 \lambda_f} \\ a_{45}^z = -a_{41}^z E_{bh} & a_{46}^z = -a_{42}^z E_{ch} & a_{47}^z = 0 & a_{48}^z = 0 \\ a_{51}^z = a_{11}^z E_{bh} & a_{52}^z = a_{12}^z E_{ch} & a_{53}^z = a_{13}^z E_{ch} & a_{54}^z = 0 \\ a_{55}^z = -a_{11}^z & a_{56}^z = -a_{12}^z & a_{57}^z = -a_{13}^z & a_{58}^z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
a_{61}^z = a_{21}^z E_{bh} & a_{62}^z = a_{22}^z E_{ch} & a_{63}^z = a_{23}^z E_{ch} & a_{64}^z = 0 \\
a_{65}^z = -a_{21}^z & a_{66}^z = -a_{22}^z & a_{67}^z = -a_{23}^z & a_{68}^z = 0 \\
a_{71}^z = a_{31}^z E_{bh} & a_{72}^z = a_{32}^z E_{ch} & a_{73}^z = 0 & a_{74}^z = 0 \\
a_{75}^z = a_{31}^z & a_{76}^z = a_{32}^z & a_{77}^z = 0 & a_{78}^z = a_{34}^z \\
a_{81}^z = a_{41}^z E_{bh} & a_{82}^z = a_{42}^z E_{ch} & a_{83}^z = 0 & a_{84}^z = 0 \\
a_{85}^z = -a_{41}^z & a_{86}^z = -a_{42}^z & a_{87}^z = 0 & a_{88}^z = -a_{44}^z
\end{array}$$

$c_i^z \quad i = 1, 8$

$$\begin{array}{cccc}
c_1^z = A_n^z & c_2^z = B_n^z & c_3^z = C_n^z & c_4^z = D_n^z \\
c_5^z = E_n^z & c_6^z = F_n^z & c_7^z = G_n^z & c_8^z = H_n^z
\end{array}$$

$b_i^z \quad i = 1, 8$

$$\begin{array}{ll}
b_1^z = 2(-E_{b1} + E_{c1}) & b_2^z = -2k_z^2 E_{b1} + (k_z^2 - \gamma_n^2 - k_n^2) E_{c1} \\
b_3^z = \left( \frac{k_s^2}{v_n} + \frac{2v_{zn}^2}{v_n} \right) E_{b1} - 2\gamma_n E_{c1} & b_4^z = -ik_z E_{b1} + ik_z E_{c1} \\
b_5^z = -2(-E_{bh1} + E_{ch1}) & b_6^z = 2k_z^2 E_{bh1} - (k_z^2 - \gamma_n^2 - k_n^2) E_{ch1} \\
b_7^z = \left( \frac{k_s^2}{v_n} + \frac{2v_{zn}^2}{v_n} \right) E_{bh1} - 2\gamma_n E_{ch1} & b_8^z = ik_z E_{bh1} - ik_z E_{ch1}
\end{array}$$

com  $E_{b1} = e^{-iv_n y_0}$ ,  $E_{c1} = e^{-i\gamma_n y_0}$ ,  $v_{zn} = \sqrt{-k_z^2 - k_n^2}$ ,  $E_{bh} = e^{-iv_n h}$ ,  $E_{ch} = e^{-i\gamma_n h}$ ,  $E_{bh1} = e^{-iv_n |h-y_0|}$  e  $E_{ch1} = e^{-i\gamma_n |h-y_0|}$ .

A resolução do sistema permite obter a amplitude de cada potencial. As funções de Green podem ser calculadas, para o meio sólido, como a soma dos termos da fonte com os termos da superfície, originados nas duas superfícies de contacto sólido-fluido, obtendo-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
G_{xz} &= G_{xz}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-ik_z k_n}{v_n} A_n^z E_{b0} + \frac{ik_z k_n}{\gamma_n} C_n^z E_{c0} \right) E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-ik_z k_n}{v_n} E_n^z E_{b0} + \frac{ik_z k_n}{\gamma_n} G_n^z E_{c0}^b \right) E_d \\
G_{yz} &= G_{yz}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -ik_z A_n^z E_{b0} + iB_n^z k_z E_{c0} \right) E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -ik_z E_n^z E_{b0} + iF_n^z k_z E_{c0}^b \right) E_d, \\
G_{zz} &= G_{zz}^{full} + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \frac{-ik_z^2}{v_n} A_n^z E_{b0} + \left( \frac{-ik_n^2}{\gamma_n} C_n^z - i\gamma_n B_n^z \right) E_{c0} \right] E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \frac{-ik_z^2}{v_n} E_n^z E_{b0} + \left( \frac{-ik_n^2}{\gamma_n} G_n^z - i\gamma_n F_n^z \right) E_{c0}^b \right] E_d
\end{aligned} \tag{6.22}$$

em que as funções de Green  $G_{xz}^{full}$ ,  $G_{yz}^{full}$  e  $G_{zz}^{full}$  estão descritas no Apêndice A deste capítulo.

As expressões permitem determinar as pressões no Fluido 1 (quando  $y < 0$ ) e no Fluido 2 (quando  $y > h$ ), são dadas por :

$$\begin{aligned}
\sigma_{fz}^1 &= -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{f0}}{v_n^f} D_n^z \right) E_d, \\
\sigma_{fz}^2 &= -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{f0}^b}{v_n^f} H_n^z \right) E_d
\end{aligned} \tag{6.22}$$

### Carga de pressão aplicada no Fluido 1:

A linha da aplicação da carga linear, harmónica e sinusoidal ao longo de  $z$ , é definida por  $(x_s, y_s)$ . Os termos da interface produzidos nas duas superfícies de contacto, no topo e na base, podem ser expressos através dos seguintes potenciais:

*Meio sólido - superfície de contacto a:*

$$\begin{aligned}
\phi_0^{y-a} &= E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( E_{b0} A_n^f \right) E_d \\
\psi_{x0}^{y-a} &= E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-E_{c0}}{\gamma_n} C_n^f \right) E_d,
\end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\psi_{y0}^{y-a} = 0$$

$$\psi_{z0}^{y-a} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n}{\gamma_n} E_{c0} B_n^f \right) E_d$$

*Meio Fluido 1 - superfície de contacto a:*

Quando  $y < 0$  :

$$\phi_{Fluido1}^a = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}}{v_n^f} D_n^f \right] E_d, \quad (6.22)$$

**Carga de pressão aplicada no Fluido 2:**

*Meio sólido - superfície de contacto b:*

$$\phi_0^{y-b} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( E_{b0}^b E_n^f \right) E_d$$

$$\psi_{x0}^{y-b} = E_a k_z \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{-E_{c0}^b}{\gamma_n} G_n^f \right) E_d, \quad (6.22)$$

$$\psi_{y0}^{y-b} = 0$$

$$\psi_{z0}^{y-b} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{k_n}{\gamma_n} E_{c0}^b F_n^f \right) E_d$$

*Meio Fluido 2 - superfície de contacto b:*

Quando  $y > h$  :

$$\phi_{Fluido2}^b = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ \left( \frac{-\alpha_f^2}{\omega^2 \lambda_f} \right) \frac{E_{f0}^b}{v_n^f} H_n^f \right] E_d, \quad (6.22)$$

A determinação dos coeficientes incógnitas passa pela formulação de um sistema de oito equações a oito incógnitas, resultado da imposição das oito condições fronteira para cada valor de  $n$  ,

$$\left[ a_{ij}^f \quad i = 1, 8; j = 1, 8 \right] \left[ c_i^f \quad i = 1, 8 \right] = \left[ b_i^f \quad i = 1, 8 \right], \quad (6.22)$$

sendo os seus termos  $a_{ij}^f$   $i = 1, 8; j = 1, 8$  definidos como:

$$\begin{array}{llll}
a_{11}^f = -2\nu_n & a_{12}^f = \frac{-k_n^2}{\gamma_n} + \gamma_n & a_{13}^f = \frac{-k_z^2}{\gamma_n} & a_{14}^f = 0 \\
a_{15}^f = a_{11}^f E_{bh} & a_{16}^f = a_{12}^f E_{ch} & a_{17}^f = a_{13}^f E_{ch} & a_{18}^f = 0 \\
a_{21}^f = -2\nu_n & a_{22}^f = \frac{-k_n^2}{\gamma_n} & a_{23}^f = \frac{-k_z^2}{\gamma_n} + \gamma_n & a_{24}^f = 0 \\
a_{25}^f = a_{21}^f E_{bh} & a_{26}^f = a_{22}^f E_{ch} & a_{27}^f = a_{23}^f E_{ch} & a_{28}^f = 0 \\
a_{31}^f = (-k_s^2 - 2\nu_{zn}^2) & a_{32}^f = -2k_n^2 & a_{33}^f = -2k_z^2 & a_{34}^f = \frac{-i 2\rho\omega^2}{\nu_n^f \mu} \\
a_{35}^f = -a_{31}^f E_{bh} & a_{36}^f = -a_{32}^f E_{ch} & a_{37}^f = -a_{33}^f E_{ch} & a_{38}^f = 0 \\
a_{41}^f = -i\nu_n & a_{42}^f = \frac{-ik_n^2}{\gamma_n} & a_{43}^f = \frac{-ik_z^2}{\gamma_n} & a_{44}^f = \frac{-2\rho\omega^2}{k_{pf}^2 \lambda_f} \\
a_{45}^f = a_{41}^f E_{bh} & a_{46}^f = a_{42}^f E_{ch} & a_{47}^f = a_{43}^f E_{ch} & a_{48}^f = 0 \\
a_{51}^f = a_{11}^f E_{bh} & a_{52}^f = a_{12}^f E_{ch} & a_{53}^f = a_{13}^f E_{ch} & a_{54}^f = 0 \\
a_{55}^f = a_{11}^f & a_{56}^f = a_{12}^f & a_{57}^f = a_{13}^f & a_{58}^f = 0 \\
a_{61}^f = a_{21}^f E_{bh} & a_{62}^f = a_{22}^f E_{ch} & a_{63}^f = a_{23}^f E_{ch} & a_{64}^f = 0 \\
a_{65}^f = a_{21}^f & a_{66}^f = a_{22}^f & a_{67}^f = a_{23}^f & a_{68}^f = 0 \\
a_{71}^f = a_{31}^f E_{bh} & a_{72}^f = a_{32}^f E_{ch} & a_{73}^f = a_{33}^f E_{ch} & a_{74}^f = 0 \\
a_{75}^f = -a_{31}^f & a_{76}^f = -a_{32}^f & a_{77}^f = -a_{33}^f & a_{78}^f = a_{34}^f \\
a_{81}^f = a_{41}^f E_{bh} & a_{82}^f = a_{42}^f E_{ch} & a_{83}^f = a_{43}^f E_{ch} & a_{84}^f = 0
\end{array}$$

$$a_{85}^f = a_{41}^f \quad a_{86}^f = a_{42}^f \quad a_{87}^f = a_{43}^f \quad a_{88}^f = -a_{44}^f$$

$$c_i^f \quad i = 1, 8$$

$$c_1^f = A_n^f \quad c_2^f = B_n^f \quad c_3^f = C_n^f \quad c_4^f = D_n^f$$

$$c_5^f = E_n^f \quad c_6^f = F_n^f \quad c_7^f = G_n^f \quad c_8^f = H_n^f$$

$$b_i^f \quad i = 1, 8$$

$$b_1^f = 0 \quad b_2^f = 0$$

$$b_3^f = \frac{-i2\rho\omega^2}{v_n^f \mu} E_{f1} \quad b_4^f = \frac{2\rho\omega^2}{k_{p_f}^2 \lambda_f} E_{f1}$$

$$b_5^f = 0 \quad b_6^f = 0$$

$$b_7^f = 0 \quad b_8^f = 0$$

com  $E_{b1} = e^{-i v_n y_0}$ ,  $E_{c1} = e^{-i \gamma_n y_0}$ ,  $v_{zn} = \sqrt{-k_z^2 - k_n^2}$ ,  $E_{f1} = e^{-i v_n^f y_0}$ ,  $E_{bh} = e^{-i v_n h}$ ,  $E_{ch} = e^{-i \gamma_n h}$ ,  
 $E_{bhl} = e^{-i v_n |h-y_0|}$  e  $E_{chl} = e^{-i \gamma_n |h-y_0|}$ .

Após a resolução do sistema, as funções de Green para o sólido são obtidas a partir dos termos da superfície gerados nas duas superfícies de contacto, sólido-fluido, resultando as seguintes expressões:

$$G_{yf} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -i A_n^f k_n E_{b0} + i B_n^f k_n E_{c0} \right) E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -i E_n^f k_n E_{b0} + i F_n^f k_n E_{c0} \right) E_d$$

$$G_{yf} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i v_n A_n^f E_{b0} + \left( \frac{-i k_n^2}{\gamma_n} B_n^f + \frac{-i k_z^2}{\gamma_n} C_n^f \right) E_{c0} \right] E_d +$$

$$E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left[ -i v_n E_n^f E_{b0} + \left( \frac{-i k_n^2}{\gamma_n} F_n^f + \frac{-i k_z^2}{\gamma_n} G_n^f \right) E_{c0} \right] E_d \quad , \quad (6.22)$$

$$G_{zf} = E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -iA_n^f k_z E_{b0} + iC_n^f k_z E_{c0} \right) E_d + E_a \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( -iE_n^f k_z E_{b0} + iG_n^f k_z E_{c0} \right) E_d$$

As expressões para obter as pressões no Fluido 1 (quando  $y < 0$ ) e no Fluido 2 (quando  $y > h$ ), respectivamente, resultam da soma dos termos gerados pela fonte e dos termos da superfície:

$$\sigma^1 = \sigma^{full} - \frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{f0}^f}{V_n^f} D_n^f \right) E_d, \quad (6.22)$$

$$\sigma^2 = -\frac{i}{L_x} \sum_{n=-N}^{n=+N} \left( \frac{E_{f0}^b}{V_n^f} H_n^f \right) E_d$$

em que  $\sigma^{full} = -\frac{i}{2} H_0^{(2)} \left[ k_{\alpha f} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right]$ .

Em problema com  $k_z = 0$ , o sistema de equações é reduzido a seis incógnitas, para todas as expressões apresentadas anteriormente, sendo determinadas as funções de Green para o caso bidimensional.



## APÊNDICE C: RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA CARACTERIZAÇÃO DOS BLOCOS DE BETÃO, FABRICADOS COM INCORPORAÇÃO DE CORTIÇA

### C.1 – PROPRIEDADES DOS AGREGADOS

Os agregados foram submetidos a ensaios de determinação da baridade e da percentagem de vazios (NP EN 1097-3:2002), tal como a ensaios para a determinação da massa volúmica e da absorção de água (NP EN 1097-6:2003 e para o regranulado de cortiça NP EN 1097-6:2003 – Anexo C). A Tabela 6.2 lista os resultados médios obtidos em 3 provetes para cada agregado.

Tabela 6.2: Propriedades dos agregados: massa volúmica, baridade, percentagem de vazios e coeficiente de absorção de água em 24h.

	<b>Brita</b>	<b>Areia</b>	<b>ECG 4/8</b>
Massas volúmica (Mg/m <sup>3</sup> )	2.69	2.46	0.15
Baridade (Mg/m <sup>3</sup> )	1.30	1.51	0.07
Percentagem de vazios (%)	52	39	52
Coeficiente de absorção de água em 24h (%)	4.9	10.4	54.3

### C.2 – CARACTERIZAÇÃO DA MISTURA

Após a caracterização dos agregados a introduzir na mistura, foi necessário definir a possível composição da mistura e o desempenho espectável desta em blocos de betão com incorporação de regranulado de cortiça expandida. Pretende-se manter o mesmo tipo de agregados britados utilizados na produção de blocos correntes, bem como as quantidades e tipo de cimento e água, numa relação de  $A/C = 0.6$ . A quantidade de água foi, contudo, ajustada em função da sua necessidade aquando da sua produção. As quantidades dos agregados foram ajustadas, em função da curva ótima de mistura.

Efetuuou-se a previsão de vazios, considerando que estes apenas estão incorporados na pasta ligante, através do cálculo da compacidade pela expressão do índice de vazios atribuída a Faury:

$$I = \frac{K}{\sqrt[3]{D}} + \frac{K'}{\frac{R}{D} - 0.75} \quad (6.22)$$

em que  $K$  é o coeficiente numérico que depende da consistência do betão, da potência de compactação, da natureza dos agregados, e também da utilização dos adjuvantes,  $K'$  é o parâmetro que depende da potência de compactação,  $D$  é a máxima dimensão da classe mais grosseira do conjunto de agregados utilizados e  $R$  é o raio médio do molde da peça (Sousa Coutinho, 1988).

Tendo em conta que a consistência da mistura é muito seca, considerou-se um meio de compactação com vibração muito potente, tal como sucede na fábrica de blocos. De modo conservativo, adotou-se uma razão unitária de  $\frac{R}{D}$ . Assim, obtém-se um volume de vazios correspondente a  $0.140\text{m}^3$  (volume total dos constituintes fluidos). A constituição da parte sólida é de  $0.860\text{m}^3$ , por unidade de volume aparente de betão.

Na fase de definição da mistura do betão leve, diversas variáveis como as dimensões dos agregados utilizados, as respetivas massas volúmicas e baridades, assim como a relação água/cimento, podem condicionar significativamente as suas propriedades mecânicas. Para a quantificação dos agregados a utilizar na mistura partiu-se de uma análise granulométrica dos agregados escolhidos para a constituição do betão (areia, brita e regranulado de cortiça). Como foi referido, o cálculo das proporções, em que cada um dos constituintes que integra a mistura, foi realizado com base no método de Faury.

A água de amassadura é imprescindível para hidratar o ligante (cimento) e para garantir ligações de natureza química entre todos os constituintes do betão. Neste caso, embora a relação água/cimento não tenha sido mantida em todas as composições estudadas, optou-se por conservar idêntica quantidade de cimento em cada mistura, devido à importância que este ligante hidráulico assume, em termos económicos.

Nestas condições, para a quantificação dos agregados a utilizar nas várias misturas de betão a estudar, adotando as curvas granulométricas dos agregados escolhidos para a constituição do betão (areia, brita e cortiça), promoveu-se o seu ajuste a uma curva de referência ótima, para satisfação dos requisitos especificados para o betão endurecido, incluindo a consistência, massa volúmica, resistência e durabilidade.

Pretende-se desenvolver misturas de betão que incorporem resíduos de cortiça expandida. Determinaram-se várias composições de betão incorporando diferentes proporções de cortiça em substituição de correspondentes volumes de agregados britados (20%ECG, 25%ECG, 30%ECG, 35%ECG e 50%ECG). Produziu-se uma mistura de betão corrente (REF), apenas utilizando agregados minerais correntes, para posterior comparação de resultados.

De modo a proceder ao estudo do desempenho do betão com cortiça, realizaram-se numa instalação fabril amassaduras experimentais, procedentes do estudo das composições da mistura (Tabela 6.3), para a subsequente realização de ensaios de caracterização física e mecânica das diferentes composições.

Tabela 6.3: Composições de betões estudadas.

	<b>Brita (kg)</b>	<b>Areia (kg)</b>	<b>ECG (kg)</b>	<b>Cimento (kg)</b>	<b>Água (l)</b>
REF	468.0	390.0	0.0	68.8	26.0
20%ECG	201.3	514.5	8.7	68.8	32.0
25%ECG	153.0	523.8	10.8	68.8	32.0
30%ECG	112.7	523.8	13.0	68.8	30.0
35%ECG	72.5	523.8	15.2	68.8	29.0
50%ECG	0.0	467.7	21.7	68.8	33.0

De forma a estudar a mistura desenvolvida, foram betonados vários provetes prismáticos com 150x150x600 mm<sup>3</sup> (largura x altura x comprimento). Após o adequado endurecimento destes provetes de betão, extraíram-se carotes cilíndricos, com 95mm de diâmetro e 95 mm de altura, e placas prismáticas, 150x150x40 mm<sup>3</sup> (largura x altura x comprimento), para a realização de ensaios de caracterização física, mecânica e térmica de todas as misturas.

Neste âmbito, importa referir que foram realizados ensaios de determinação da resistência à compressão de carotes de betão, para diferentes idades de cura para 6 provetes, segundo a norma NP EN 12504-1:2009 (Tabela 6.4). Fazendo uma análise aos resultados da resistência à compressão, é evidente que existe um decréscimo em função do aumento da substituição de regranulado de cortiça. Contudo, é notória a elevada evolução da resistência à compressão dos betões leves com cortiça, dos 7 para os 90 dias. Este aumento de resistência à compressão, ao longo do tempo, na mistura 50%ECG foi de 75%, que supera o obtido na mistura de betão de referência, 5%.

O desempenho térmico das misturas utilizadas para a produção de blocos para alvenaria foi também avaliado, através da determinação do respetivo coeficiente de condutibilidade térmica pelo método “*Guarded Hot Plate*”, em provetes com dimensões 150 x 150 mm<sup>2</sup> e aproximadamente 40 mm de espessura, de acordo com as normas EN 12664:2001 e ISO 8302:1991, para 4 provetes de cada mistura. Na Tabela 6.5 resumem-se os valores médios obtidos para a massa volúmica aparente dos provetes ensaiados, assim como para os correspondentes coeficientes de condutibilidade térmica.

Tabela 6.4: Resistência à compressão de carotes das diferentes composições de betão aos 7, 14, 28 e 90 dias (N/mm<sup>2</sup>).

	<b>7 dias</b>	<b>14 dias</b>	<b>28 dias</b>	<b>90 dias</b>
REF	15.36	13.78	16.17	16.20
20%ECG	7.11	7.00	7.82	11.53
25%ECG	6.29	6.58	7.33	11.29
30%ECG	5.45	4.57	5.51	8.18
35%ECG	3.56	4.12	3.99	7.14
50%ECG	1.21	1.40	1.61	2.11

Tabela 6.5: Coeficientes de condutibilidade térmica e massa volúmica à temperatura de 23°C e humidade relativa de 50%, das diferentes composições de betão.

	<b>Coeficiente de condutibilidade térmica (<math>\lambda</math>) [mW/m °C]</b>	<b>Massa volúmica aparente [kg/m<sup>3</sup>]</b>
REF	1033.17	2127.52
20% ECG	810.87	1897.38
25% ECG	856.90	1846.78
30% ECG	778.77	1788.41
35% ECG	670.10	1668.66
50% ECG	415.33	1249.75

Do estudo laboratorial realizado, conclui-se que a massa volúmica do betão com cortiça decresce significativamente com o aumento da substituição de brita por regranulado de cortiça, como seria expectável. A substituição em 50% do agregado britado na mistura faz com que exista um decréscimo de 41% da massa volúmica, face ao betão corrente. Observa-se, ainda, uma melhoria significativa na resistência térmica do betão leve com cortiça, quando comparado com betão corrente, sendo que o decréscimo do coeficiente de condutibilidade térmica dos betões com cortiça se relaciona com o aumento da quantidade de cortiça na mistura.

De forma a analisar a influência que a quantidade de cortiça, na mistura de betão leve, tem na absorção de humidade ambiente, após secagem a 105°C conservaram-se os provetes com maior proporção de cortiça (30%ECG, 35%ECG e 50%ECG) em ambiente controlado, com temperatura a 23°C e 50% de humidade

relativa, ao longo de um período de 9 meses, efetuando-se pesagens regulares, num total de 115 medições.

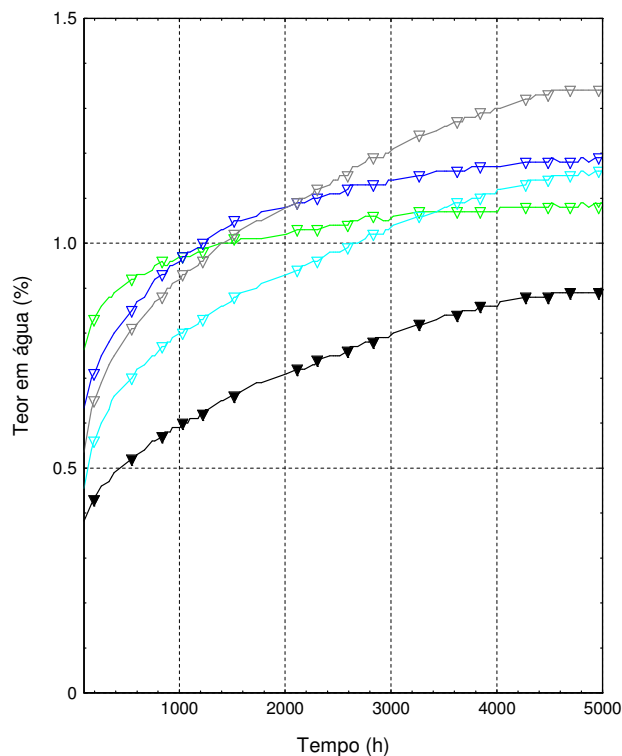


Figura 6.24: Variação do teor em água, em percentagem, em função do tempo de condicionamento, em horas. Misturas: ▼ de referência, sem ECG, (REF); ▽ com substituição de 15% de ECG; ▽ com substituição de 30% de ECG; ▽ com substituição de 35% de ECG; ▽ com substituição de 50% de ECG.

Este registo permitiu concluir, numa fase inicial, que os provetes com maior incorporação de regranulado de cortiça expandida apresentam uma maior percentagem de teor em água. Esta tendência inverte-se, ao longo do tempo, verificando-se a longo prazo que, quanto maior for a incorporação de cortiça na mistura, menor será o teor em água do betão leve (conforme ilustrado na Figura 6.24). No entanto, as misturas com cortiça apresentam sempre uma maior percentagem de teor em água em comparação com a mistura de betão tradicional (REF).

### C.3 – CARACTERIZAÇÃO DOS BLOCOS

Após análise aos valores da resistência à compressão, do coeficiente de condutibilidade térmica, da massa volúmica aparente e da consistência da mistura, conclui-se que as proporções de substituição volumétrica

de brita por regranulado de cortiça expandida situam-se próximas dos 20%. Após essa análise, produziram-se blocos com duas configurações distintas e para cada mistura, usando moldes existentes em fábrica. Fabricou-se um número de blocos suficientes para a realização de ensaios laboratoriais de caracterização física, mecânica, térmica e acústica.

Numa primeira fase, produziram-se blocos com uma geometria do tipo 1 (conforme ilustrado na Figura 6.14 a) do Capítulo 6), com a substituição em volume dos agregados britados por regranulado de cortiça expandida em 20%, de acordo com os resultados ótimos obtidos e descritos anteriormente (20%ECG). Decidiu-se fabricar mais dois lotes de blocos, com misturas próximas da anterior, com substituição em volume de agregados britados em 15%ECG e 25%ECG. Fabricaram-se, ainda, blocos com a mistura de betão de referência (REF) para comparação dos resultados experimentais. Numa segunda fase, fabricaram-se blocos para a geometria do tipo 2 (conforme ilustrado na Figura 6.14 b) deste capítulo, com uma mistura de betão de referência (REF) e, por razões de limitações de produção, só foi possível realizar a mistura de 25%ECG.

Após produção industrial dos blocos de betão com cortiça (ECG) e de betão tradicional (REF), recolheu-se uma amostra aleatória de seis blocos, por cada composição de betão, e promoveu-se uma campanha de ensaios experimentais, dos quais se apresentam de seguida os seus resultados.

Segundo a NP EN 772-16:2002 foram determinadas as dimensões dos blocos, através de medições de comprimento, largura, altura, espessura dos septos exteriores e interiores, profundidade dos furos que não atravessam o bloco e espessura combinada dos septos, utilizando paquímetros apropriados. Na globalidade, para o mesmo molde de fabrico, as dimensões dos blocos de betão com cortiça são muito semelhantes às dos blocos de betão tradicional, excetuando a sua altura, que para os blocos de betão com cortiça apresenta um acréscimo médio de aproximadamente 3% face aos de betão tradicional, devido à alta compressibilidade dos agregados de cortiça expandida e elevada capacidade de recuperação de deformações. A planeza das faces dos blocos de betão com cortiça (NP EN 772-20:2002), face à determinada para blocos de betão tradicional, apresenta algumas diferenças expectáveis. Todavia os blocos com cortiça apresentam relativa homogeneidade geométrica, atestando uma produção industrial uniforme.

Tendo em consideração que os blocos analisados possuem furos verticais (perpendicularmente à face de assentamento), avaliou-se a resistência à compressão aparente, para a qual se consideram as dimensões brutas da face carregada axialmente (área bruta) e a resistência à compressão efetiva, deduzindo à área bruta a superfície dos respetivos furos (área efetiva), de acordo com a norma NP EN 772-1:2002. Previamente à realização do ensaio de compressão, as faces de assentamento foram regularizadas com argamassa tradicional de cimento e areia, com uma espessura mínima de 3mm, e os blocos foram condicionados através da sua imersão total em tanque de água com temperatura controlada ( $20^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{C}$ )

durante, pelo menos, 15 horas. Na Tabela 6.6 resumem-se os resultados obtidos nos ensaios de compressão uniaxial dos blocos de betão.

Tabela 6.6: Coeficientes de resistência à compressão de blocos para alvenaria (valores médios).

		<b>Resistência à compressão aparente (N/mm<sup>2</sup>)</b>	<b>Resistência à compressão efetiva (N/mm<sup>2</sup>)</b>
Geometria do tipo 1	REF	3.0	8.0
	15%ECG	1.4	3.6
	20%ECG	1.2	3.4
	25%ECG	1.2	3.1
Geometria do tipo 2	REF	3.5	8.2
	25%ECG	1.4	3.3

Expetavelmente, a resistência à compressão dos blocos de betão com cortiça revela-se inferior à correspondente aos blocos de betão tradicionais. Contudo, o comportamento mecânico dos blocos de betão de ECG apresenta-se promissor.

Tabela 6.7: Coeficiente de absorção de água por capilaridade em blocos de blocos para alvenaria de betão de agregados (valores médios).

		<b>Coeficiente de absorção de água (g.m<sup>-2</sup>.s<sup>-0.5</sup>)</b>
Geometria do tipo 1	REF	145
	15%ECG	152
	20%ECG	145
	25%ECG	125
Geometria do tipo 2	REF	136
	25%ECG	142

O estudo da absorção de água por capilaridade nos blocos de betão assume-se como uma preocupação fundamental em termos de durabilidade para as alvenarias. Esta característica foi avaliada de acordo com a NP EN 772-11:2002, por imersão da face exposta de cada bloco de alvenaria, perpendicular ao plano de assentamento, durante 10 minutos em água, com uma altura da lâmina líquida de 5mm. Como resultado, os valores médios do coeficiente de absorção de água são apresentados na Tabela 6.7, mostrando que a absorção de água nos blocos ECG é semelhante à dos blocos de referência (REF). Um dado interessante,

para os blocos com a geometria do tipo 1, é que o coeficiente de absorção de água tendeu a decrescer com o aumento do teor de cortiça.

A massa volúmica real seca e aparente seca de blocos de betão com cortiça foi igualmente determinada (Tabela 6.8). Os blocos foram submetidos a um processo de secagem em estufa ventilada, a aproximadamente 70°C, até atingirem massa constante, seguindo os princípios da NP EN 772-13:2002. De modo a ponderar a furação vertical do bloco no cômputo da massa volúmica real seca do bloco, foi determinada a sua percentagem de furação por impressão em papel através de medições por pesagem, de acordo com a NP EN 772-2:2001. Como previsto, os blocos de betão com cortiça são mais leves do que os blocos de betão tradicional, verificando-se reduções na massa volúmica de cerca de 30% nos blocos de ECG.

Tabela 6.8: Massa volúmica aparente seca e massa volúmica real seca.

		<b>Massa volúmica aparente seca (kg/m<sup>3</sup>)</b>	<b>Massa volúmica real seca (kg/m<sup>3</sup>)</b>
Geometria do tipo 1	REF	843	2086
	15%ECG	674	1681
	20%ECG	623	1646
	25%ECG	575	1431
Geometria do tipo 2	REF	927	2013
	25%ECG	806	1755

Tendo por base os resultados do coeficiente de condutibilidade térmica obtidos e apresentados no Anexo C.2 deste capítulo, é possível determinar os valores do coeficiente de transmissão térmica de paredes de alvenaria constituídas por blocos de cortiça.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amado Mendes, P., Tadeu, A., (2006) Wave propagation in the presence of empty cracks in an elastic medium, *Computational Mechanics*, 38(3), 183-199.
- António, J., Tadeu, A., Godinho, L. (2003) Analytical evaluation of the acoustic insulation provided by double infinite walls. *Journal of Sound and Vibration*, 263(1), 113-129.
- Aziz, M., Murphy, C., Ramaswamy, S. (1979) Lightweight concrete using cork granules. *The International Journal of Lightweight Concrete*, 2(1), 29-33.
- Benazzouk, A., Mezreb, K., Doyen, G., Goullieux, A., Quéneudec, M. (2003) Effect of rubber aggregates on the physico-mechanical behaviour of cement-rubber composites-influence of the alveolar texture of rubber aggregates. *Cement & Concrete Composites*, 25, 711-720.
- Bouchon M. (1979) Discrete wave number representation of elastic wave fields in three-space dimensions. *Journal of Geophysical Research*, 84, 3609-3614.
- Branco, F.G., Reis, M., Tadeu, A. (2007) Can Cork be used as a Concrete Aggregate? *International Journal for Housing Science and its Applications*, 31(1), 1-12.
- Branco, F.G., Tadeu, A., Reis, M. (2008) Experimental Evaluation of the Durability of Cork Concrete. *International Journal for Housing Science and its Applications*, 32(2), 159-162.
- Carvalho, A. (1996) Cork as a lightweight partition material. Economical and acoustical analyses. *Proceedings of the CIB W89 Beijing International Conference*, Beijing, China.
- Carvalho, A. (1999) The use of agglomerated cork as underlay for improvement of impact sound insulation in buildings, *137th Meeting of the Acoustical Soc. of America & 2nd Convention of the European Acoustics Association*, Berlin, Germany.

- Castro, I., Tadeu, A. (2012) Coupling the BEM/TBEM and the MFS for the numerical simulation of elastic wave propagation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36, 169-180.
- Cordeiro, N. (1998) Cork suberin as a new source of chemicals. Isolation and chemical characterization of its composition. *International Journal of Biological Macromolecules*, 22, 71-80.
- EN 12664 (2001) Thermal performance of building materials and products. Determination of thermal resistance by means of guarded hot plate and heat flow meter methods. Dry and moist products of medium and low thermal resistance. *IPQ*, 2001.
- Ganesh Babu, K., Saradhi Babu, D. (2003) Behaviour of lightweight expanded polystyrene concrete containing silica fume. *Cement and Concrete Research*, 33, 755-762.
- Gradshteyn, I., Ryzhik, I. (1980) Table of Integrals, Series and Products, *Academic Press, New York*.
- Guiggiani, M. (1998) Formulation and numerical treatment of boundary integral equations with hypersingular kernels. In: Sladek V, Sladek J, editors. *Singular Integrals in Boundary Element Methods*. Southampton and Boston: *Computational Mechanics Publications*.
- Hong, H.K., Chen, J.T. (1988) Derivations of integral equations of elasticity. *The Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 114(6), 1028-1044.
- ISO 8302 (1991) Thermal insulation - Determination of steady-state thermal resistance and related properties - Guarded hot plate apparatus.
- Jalali, S., Eires, R., Camões, A. (2005) Experimental characterization of granulated cork lightweight concrete. *Waste Recycling*, Z. Wzorek, J. Kulczycka, P. Fečko and M. Kušnierová ed., Kraków, Poland, 129-133.
- Karade, S., Irle, M., Maher, K. (2001) Physico-chemical aspects of the use of cork in cementitious composites. In *ICWSF 2001- The Fifth International Conference on the Development of World Science, Wood Technology and Forestry*, Ljubljana, Slovenia, 97-103.

- Karade, S. (2006) Influence of granule properties and concentration on cork-cement compatibility. *Holz als Rohund Werkstoff*, 64, 281-286.
- Kawase, H. (1988) Time-domain response of a semicircular canyon for incident SV, P and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78, 1415-1437.
- Kim, J., Papageorgiou, A., (1993) Discrete wavenumber boundary element method for 3-D scattering problems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 119(3), 603-624.
- Lamb, H. (1904) On the propagation of tremors at the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* 1904, 1-42.
- Manolis, G.D., Beskos, D.E., (1988) Boundary Element Methods in Elastodynamics. *Unwin Hyman (sold to Chapman and Hall)*, London.
- Mechel, F. (2002) *Formulas of Acoustics*. Springer Verlag, Berlim, Alemanha.
- NP EN 1097-3 (2002) Ensaios das propriedades mecânicas e físicas dos agregados. Parte 3: Determinação da baridade e do volume de vazios. *IPQ*, 2002.
- NP EN 1097-6 (2003) Ensaios das propriedades mecânicas e físicas dos agregados. Parte 6: Determinação da massa volúmica e da absorção de água. *IPQ*, 2003.
- NP EN 771-3 (2010) Especificações para unidades de alvenaria. Parte 3: Blocos de betão de agregados (agregados correntes e leves). *IPQ*, 2010.
- NP EN 772-1 (2002) Métodos de ensaio de blocos para alvenaria. Parte 1: Determinação da resistência à compressão. *IPQ*, 2002.
- NP EN 772-2 (2001) Métodos de ensaio de blocos para alvenaria. Parte 2: Determinação da percentagem de furação em blocos de betão para alvenaria (por impressão em papel). *IPQ*, 2001.

- NP EN 772-11 (2002) Métodos de ensaio de blocos para alvenaria. Parte 11: Determinação da absorção de água por capilaridade de blocos para alvenaria de betão de agregados, de betão "face à vista" e de pedra natural, e da taxa de absorção inicial de água de blocos cerâmicos. *IPQ*, 2002.
- NP EN 772-13 (2002) Métodos de ensaio de blocos para alvenaria. Parte 13: Determinação da massa volúmica real seca e da massa volúmica aparente seca de blocos para alvenaria (excepto blocos de pedra natural). *IPQ*, 2002.
- NP EN 772-16 (2002) Métodos de ensaio de blocos para alvenaria. Parte 16: Determinação das dimensões. *IPQ*, 2002.
- NP EN 772-20 (2002) Métodos de ensaio de blocos para alvenaria. Parte 20: Determinação da planeza das faces de blocos para alvenaria de betão de agregados, de betão "face à vista" e da pedra natural. *IPQ*, 2002.
- NP EN ISO 140-1 (2001) Medição do isolamento sonoro de edifícios e de elementos de construção, Parte 1: Especificações para laboratórios sem transmissão marginal (ISO 140-1:1997). *IPQ*, 2002.
- NP EN ISO 140-3 (1998) Medição do isolamento sonoro de edifícios e de elementos de construção. Parte 3: Medição em laboratório do isolamento sonoro a sons aéreos de elementos de construção (ISO 140-3:1995). *IPQ*, 1998.
- NP EN ISO 717-1 (2009) Acústica. Determinação do isolamento sonoro em edifícios e de elementos de construção. Parte 1: Isolamento sonoro a sons de condução aérea (ISO 717-1:1996 + A1:2006). *IPQ*, 2009.
- NP EN 12504-1 (2009) Ensaio do betão nas estruturas. Parte 1: Carotes. Extração, exame e ensaio à compressão. *IPQ*, 2009.
- Papageorgiou, A., Pei, D. (1998) A Discrete 3-D response of 2-D scatterers, *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 27, 619-638.
- Pedersen, H., Sánchez-Sesma, F., Campillo, M. (1994) Three-dimensional Scattering by two-dimensional topographies, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84, 1169-1183.

- Prosper, D. (2001) *Modeling and Detection of Delaminations in Laminated Plates*. PhD Thesis, MIT, Cambridge.
- Reis, M. (2012) Caracterização das Propriedades Físicas, Mecânicas e Térmicas de Betões com Incorporação de Cortiça. *Tese de Doutoramento*, DEC-FCTUC, Coimbra.
- Silveira, N.P.P., Guimarães, S., Telles, J.C.F. (1998) Accurate hypersingular integral computations in the development of numerical Green's functions for fracture mechanics. In: Sladek V. e Sladek J. (eds.), *Singular Integrals in Boundary Element Methods*, Computational Mechanics Publications, Southampton (UK) & Boston (USA), 197-222.
- Sousa Coutinho, A. (1988) *Fabrico e Propriedades do Betão*, Vol II, 2ª edição, LNEC, Lisboa.
- Tadeu, A., Kausel, E., (2000) Green's functions for two-and-a-half dimensional elastodynamic problems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE 2000*, 126(10), 1093-1097.
- Tadeu, A., António, J. (2001) 2.5D Green's Functions for Elastodynamic Problems in Layered Acoustic and Elastic Formations, *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(4), 477-495.
- Tadeu A., António, J. (2002) Acoustic insulation of single panel walls provided by analytical expressions versus the mass law. *Journal of Sound and Vibration*, 257(3), 457-475.
- Tadeu, A., Godinho, L. (2003) Scattering of acoustic waves by movable lightweight elastic screens. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(3), 215-226.
- Tadeu, A., António, J., Mateus, D. (2004) Sound Insulation Provided by Single and Double Panel Walls – a Comparison of Analytical Solutions and Experimental Results, *Journal of Applied Acoustics*, 65, 15-29.
- Tadeu, A., Amado Mendes, P., António, J. (2006) The simulation of 3D elastic scattering produced by thin rigid inclusions using the traction boundary element method. *Computers and Structures*, 84(31-32), 2244-2253.



# CAPÍTULO 7

---

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 7.1 SÍNTESE GERAL E PRINCIPAIS CONCLUSÕES

O trabalho de investigação desenvolvido no âmbito da presente tese teve como principal objetivo contribuir para o desenvolvimento e implementação de modelos computacionais, baseados em formulações de acoplamento entre o Método dos Elementos de Fronteira (BEM), o Método de Elementos de fronteira em Trações (TBEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) numa análise transiente de problemas de propagação de ondas em meios fluidos e/ou sólidos, na presença de várias inclusões, quer sejam fluidas, elásticas, cavidades ou rígidas. Estas inclusões podem ter qualquer tipo de geometria, por exemplo, circulares, semi-circulares, ovais, ou mesmo inclusões finas, com espessura tendencialmente nula. Os meios de propagação são homogéneos, apresentando-se como infinitos, semi-infinitos, ou podendo encontrar-se confinados por superfícies planas. As perturbações introduzidas naqueles meios correspondem à atuação de fontes de ondas de pressão ou fontes dilatacionais com variação sinusoidal no espaço, que excitam sistemas cuja geometria se mantém constante ao longo de uma direção longitudinal. Esta abordagem é usualmente designada por formulação do problema a duas dimensões e meia, 2.5D, permitindo a determinação das respostas tridimensionais, 3D, como um somatório de soluções bidimensionais, calculadas para distintos números de onda axiais. Aquelas soluções são calculadas no domínio da frequência, podendo obter-se a evolução temporal do campo tridimensional de respostas, após a aplicação de transformadas inversas de Fourier. Assim, foram desenvolvidas e implementadas diferentes formulações de acoplamento entre o Método dos Elementos de

Fronteira (BEM) e o Método das Soluções Fundamentais (MFS) para o estudo da propagação de ondas nos meios acima referidos, contendo inclusões irregulares, finas ou com espessura tendencialmente nula.

A formulação do BEM, e a combinação da formulação que usa tanto o TBEM, como o BEM clássico, juntamente com o MFS, foi proposta para superar a dificuldade exibida pelo BEM na presença de um corpo fino. Os algoritmos de acoplamento propostos superam as limitações decorrentes de cada método, exigindo um menor esforço computacional, mantendo a precisão adequada. De acordo com a geometria de cada inclusão, é possível discretizar a sua superfície, utilizando o método que mais se adapta ao problema, de forma a efetuar um cálculo mais eficaz e eficiente. Sendo que as inclusões finas podem ser modeladas com o TBEM e as restantes inclusões com o MFS. Posteriormente, as equações são combinadas de forma a permitirem a resolução final do sistema. O acoplamento das formulações propostas foi verificado, comparando as respostas com as geradas por soluções individuais de BEM e MFS, para diferentes inclusões cilíndricas circulares.

Nos Capítulos 2, 3 e 4, o acoplamento das formulações propostas foram usadas para resolver vários exemplos numéricos: a propagação bidimensional de ondas de pressão nas proximidades de uma estrutura semi-circular, quando uma barreira acústica rígida é colocada entre essa estrutura rígida e uma fonte acústica; a atenuação de um campo de pressões produzida por uma fonte acústica na presença de uma barreira acústica fina (vista como uma inclusão fina totalmente preenchida por um fluido) colocada no interior de uma estação de metro; a propagação bidimensional de ondas nas proximidades de uma inclusão circular e elástica, apresentando propriedades de uma resina, e de uma fissura, inseridas num meio elástico, que apresenta propriedades equivalentes ao aço, homogéneo e não confinado, gerado por uma fonte dilatacional; a simulação da propagação de ondas em redor de um furo preenchido por um fluido, inserido num estrato elástico que se encontra fissurado.

Incorporando nessas formulações (BEM+TBEM/MFS) desenvolvidas as funções de Green adequadas, foi possível avaliar o isolamento conferido por uma camada sólida elástica, contendo inclusões com formas finas e irregulares. As fronteiras horizontais infinitas, referentes às interfaces de cada camada, modeladas pelas funções de Green, impedem a sua discretização, sendo necessária apenas a discretização das inclusões existentes no meio sólido, o que se traduz na diminuição do esforço de cálculo, permitindo também resolver problemas mais complexos. A formulação proposta de acoplamento foi verificada através da comparação de resultados com a solução BEM/TBEM.

As funções de Green, referidas anteriormente, foram utilizadas no cálculo do isolamento sonoro a sons de condução aérea para elementos de construção com uma espessura considerável. Estas foram verificadas em comparação com resultados laboratoriais obtidos para uma parede de betão armado com 30cm de espessura. Efetuou-se uma análise da variação do isolamento acústico a sons aéreos, conferidos por elementos de separação vertical, com a proximidade e o afastamento da grelha de recetores e/ou da fonte sonora. Dos resultados obtidos, concluiu-se que existe uma boa relação entre os resultados analíticos e



experimentais, em especial quando consideramos uma malha de recetores mais alargada e quando a fonte está mais próxima da camada sólida.

Fabricaram-se e caracterizaram-se, ainda, diversas misturas de betão contendo várias percentagens de regranulado de cortiça expandida (com granulometria 4/8) em substituição do agregado britado correntemente utilizado pela indústria de blocos. Após essa análise, fabricaram-se blocos protótipos com várias misturas e duas configurações de geometrias distintas. Procedeu-se, assim, à sua caracterização física, mecânica, térmica e, principalmente, acústica. As medições laboratoriais da redução sonora são comparadas com os resultados obtidos através da formulação numérica proposta de acoplamento. Dos resultados obtidos, concluiu-se que existe uma boa relação entre os resultados numéricos e experimentais. Julga-se que o método numérico proposto constitui uma boa ferramenta para a previsão do isolamento acústico a sons aéreos de elementos de construção.

Para a realização dos ensaios laboratoriais descritos anteriormente, na determinação da redução sonora a sons aéreos, descreveram-se na presente tese todos os procedimentos considerados em projeto e aplicados na construção das câmaras acústicas no *ITeCons*. Procurou-se justificar as várias opções tomadas na fase de projeto, bem como os cuidados tidos na execução, de forma a garantir um funcionamento adequado deste equipamento de ensaio. Estas câmaras foram definidas e especificadas tendo em atenção as exigências constantes na normalização em vigor, de forma a permitir a realização de ensaios reconhecidamente válidos para a caracterização de elementos de construção. Apresentou-se, ainda, a preparação e caracterização das câmaras acústicas horizontais: o controlo da difusibilidade do campo sonoro foi garantido, bem como a redução dos tempos de reverberação conforme é exigido pelas normas em vigor. O ensaio de isolamento sonoro a sons aéreos foi descrito e foram apresentadas todas as expressões de cálculo para a determinação do índice de isolamento sonoro.

Em suma, para o estudo de caracterização acústica paredes de alvenaria com blocos de betão, fabricados com incorporação de cortiça, foi possível prever o isolamento a sons de condução aérea. Para este efeito foram desenvolvidas formulações de acoplamento entre o BEM/TBEM e o MFS, incorporando funções de Green apropriadas, envolvendo a interação entre os meios sólidos e os meios fluidos, contendo múltiplas inclusões. A formulação de acoplamento proposta supera as limitações decorrentes de cada método individual e requer um menor esforço computacional, mantendo uma precisão adequada.

## **7.2 PERSPECTIVAS DE FUTURA INVESTIGAÇÃO**

Como já foi referido, as formulações numéricas e analíticas desenvolvidas e descritas neste trabalho permitem a modelação de outros problemas físicos não contemplados aqui, podendo assim ser aplicadas à resolução de outros problemas de engenharia e a outras áreas. Por outro lado, algumas destas formulações

podem servir de base de desenvolvimento de novos algoritmos, para a simulação de problemas ainda mais complexos.

Neste sentido, com base no conhecimento que foi adquirido neste trabalho, pretende-se ampliar a investigação de forma a desenvolver novas formulações numéricas e/ou analíticas que permitam modelar fenômenos mais complexos. Nesta sequência, propõem-se alguns trabalhos que poderão ser efetuados dentro do mesmo âmbito de conhecimento.

Um dos possíveis tópicos de investigação está relacionado com a possibilidade de introdução, nos modelos de acoplamento desenvolvidos, da variação espacial das propriedades dos meios de propagação, tais como a massa volúmica e as velocidades de propagação das ondas no meio. Diferentes áreas da engenharia poderão vir a beneficiar com esse tipo de desenvolvimento. Não menos importante, e tendo em conta a mesma linha de raciocínio, seria interessante introduzir nesses modelos a absorção sonora, existentes nas fronteiras das inclusões e, ainda, a variação desse coeficiente em função da frequência.

Nos modelos numéricos de acoplamento é possível introduzir outras funções de Green, como, por exemplo, para os casos de multicamadas sólidas elásticas separadas e limitadas por meios fluidos limitadas por dois meios fluidos, incluindo inclusões no seu interior, quer sejam elásticas, fluidas, rígidas ou cavidades. Tal permitiria, por exemplo, a determinação do isolamento a sons de condução aérea de painéis duplos, contendo inclusões no seu interior de qualquer natureza e geometria.

Por último, propõe-se o desenvolvimento das soluções tridimensionais referentes às formulações de acoplamento, propostas no presente trabalho, entre o BEM+TBEM e o MFS na modelação da propagação de ondas em meios infinitos e semi-infinitos, quer sejam fluidos ou elásticos, contendo inclusões de qualquer natureza: fluidas, sólidas, rígidas e/ou cavidades, sejam estas regulares ou finas.

