

Ricardo Joel Teixeira Costa

# MODELAÇÃO DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS PORTICADAS PLANAS DE BETÃO ARMADO

Dissertação de Doutoramento na área científica de Engenharia Civil, especialidade de Estruturas, orientada pelo Professor Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa e pelo Professor Doutor Alfredo Manuel Pereira Geraldes Dias e apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Março de 2013



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



Trabalho realizado com o apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia por intermédio da bolsa SFRH/BD/36605/2007 no âmbito do QREN - POPH - Tipologia 4.1 - Formação Avançada, comparticipado pelo Fundo Social Europeu e por fundos nacionais do MCTES.



Ricardo Joel Teixeira Costa

# MODELAÇÃO DE LIGAÇÕES VIGA-PILAR NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS PORTICADAS PLANAS DE BETÃO ARMADO

Dissertação de Doutoramento na área científica de Engenharia Civil, especialidade de Estruturas, orientada pelo Professor Doutor Paulo Manuel Mendes Pinheiro da Providência e Costa e pelo Professor Doutor Alfredo Manuel Pereira Galdes Dias e apresentada ao Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Março de 2013



UNIVERSIDADE DE COIMBRA





# Resumo

Os modelos convencionais de análise de estruturas porticadas de betão armado assumem que (i) as ligações viga-pilar são rígidas ou (ii) o seu comportamento pode ser representado por modelos vocacionados para simular o comportamento de elementos lineares. No primeiro caso despreza-se o efeito do comportamento das ligações viga-pilar sobre o comportamento global da estrutura. No segundo caso as ligações viga-pilar são substituídas por prolongamentos dos elementos lineares adjacentes, o que reduz a complexidade do problema original. Existe uma convicção generalizada, ainda que não fundamentada, de que os erros associados a estes modelos são admissíveis. No entanto, ambos os modelos são desadequados, na medida em que o primeiro obscurece o efeito do comportamento da ligação, enquanto o segundo não contempla as diferenças de comportamento entre ligações viga-pilar e elementos lineares.

Foram desenvolvidos, por diversos investigadores, vários modelos mecânicos de comportamento para ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado que podem ser classificados em dois grupos: (i) modelos rigorosos, especialmente para o caso das ações cíclicas e (ii) modelos simplificados, habitualmente materializados por molas angulares nas extremidades das vigas. Os modelos do primeiro grupo são vocacionados para a simulação numérica de ensaios experimentais de ligações viga-pilar isoladas e são desadequados para uma utilização corrente, na medida em que (i) são complexos, não permitindo a construção de modelos estruturais de forma célere, (ii) são computacionalmente exigentes e (iii) dependem de muitos parâmetros sem significado físico evidente. Os modelos do segundo grupo, apesar de poderem ser calibrados para situações específicas, (i) não conduzem a resultados aceitáveis numa gama de configurações suficientemente grande para permitir a sua utilização generalizada, (ii) não simulam adequadamente os modos de deformação dominantes nas ligações e (iii) não é simples o relacionamento entre as grandezas estáticas e cinemáticas usadas para definir o seu comportamento e as grandezas estáticas e cinemáticas habitualmente consideradas mais relevantes para qualificar o comportamento das ligações viga-pilar.

O presente estudo pretende contribuir para a clarificação do comportamento quase-estático monotónico das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado, para a identificação dos seus efeitos e para a sua adequada modelação.

O estudo é iniciado com a revisão bibliográfica, que estabelece o estado de conhecimento actual sobre ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado, sobre o qual o presente estudo se alicerçou. Segue-se uma análise exploratória que visa avaliar, de forma simples e expedita, se é necessária a existência de modelos mecânicos consistentes para ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado, concluindo-se que, em determinadas situações, é.

De modo a complementar este resultado, avaliou-se, com o auxílio do programa de elementos finitos ATENA 3D, se o dimensionamento da armadura longitudinal das vigas e pilares com

base nos esforços nas suas extremidades efectivas constitui um procedimento seguro. Os resultados desta análise reforçam a conclusão anterior, de que as ligações viga-pilar não devem ser consideradas como um prolongamento das vigas e pilares adjacentes, mas sim como elementos estruturais independentes.

No seguimento destas conclusões, é desenvolvido um modelo de ligação viga-pilar baseado no método das componentes. Para tal, foram inicialmente identificadas as componentes relevantes das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado, com pormenorizações de armadura correntes, e seguidamente, foram desenvolvidos, analisados e validados modelos de comportamento para estas componentes.

Com o modelo de ligação viga-pilar desenvolvido formulou-se um novo elemento, que foi adicionado ao programa de elementos finitos EvalS, vocacionado para análise de estruturas reticuladas planas, juntamente com um modelo seccional de fibras para elementos lineares, para o que foi necessário ter em consideração as especificidades do método das forças fictícias (MFF), o procedimento de análise materialmente não linear implementado no EvalS.

Este programa foi seguidamente utilizado para avaliar o efeito do comportamento das ligações viga-pilar (i) sobre a capacidade de carga e a deformabilidade lateral de estruturas porticadas correntes e (ii) sobre os resultados da avaliação do desempenho sísmico de estruturas dimensionadas de acordo com as disposições actuais recorrendo a uma análise *pushover*. Concluiu-se que a não consideração do comportamento efectivo das ligações viga-pilar pode conduzir a resultados pouco rigorosos.

Tendo em atenção estes resultados, foram estabelecidos procedimentos simplificados para avaliar, de forma expedita, a relevância da deformabilidade das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado e, desta forma, identificar em que condições é adequada a utilização dos modelos simplificados referidos acima.

Por fim, avaliou-se, novamente com o auxílio do programa ATENA 3D, o impacto de diversos factores na rigidez e na capacidade resistente das ligações viga-pilar, entre os quais, a pormenorização da armadura, a configuração da ligação e o esforço axial nos pilares.

# Abstract

Conventional structural models of reinforced concrete frames assume beam-column joints to be either rigid or represented by a centreline joint model. The rigid joint model fully ignores the influence of the beam-column joint behaviour over the overall behaviour of the frame. The centreline joint model replaces the beam-column joint by one-dimensional beams and columns framing into the joint, thus reducing the complexity of the original problem. There is a widespread belief that the error associated with either of these models is admissible. However, both models are inadequate because the former obscures the effect of the behaviour of the beam-column joint while the latter excludes the behaviour differences between beams/columns and beam-column joints.

Several investigators have developed mechanical models for beam-column joints in reinforced concrete frames that may be included in two main groups: (i) complex models, mainly aimed for cyclic actions, and (ii) simplified models, where the beam-column joint flexibility is simulated through hinges at the ends of the beams framing into the beam-column joint. Models in the former group are more suitable for numerical simulation of experimental tests and are not suited for everyday use in design offices, because (i) they are too complicated, the development of a structural model becoming a hard task, (ii) they are computationally demanding and (iii) they depend on many parameters without a clear physical meaning. The models in the latter group can be calibrated for specific situations, but (i) they do not provide acceptable accuracy for a widespread use, (ii) they do not simulate properly the main deformation modes in beam-column joints and (iii) their constitutive laws are not directly related to the most relevant variables for beam-column joint behaviour.

The objectives of the present study are threefold. First, to contribute to the clarification of the quasi-static monotonic behaviour of beam-column joints in reinforced concrete frames. Second, to identify the effects of this behaviour. And, finally, to define appropriate modelling approaches for beam-column joints in reinforced concrete frames.

The study begins with a literature review, establishing the current state of knowledge on beam-column joints in reinforced concrete frames. This is followed by an exploratory analysis aiming to evaluate, in a simple way, if consistent mechanical models are required for beam-column joints in reinforced concrete frames. It was found that, in certain situations, these more rigorous models are required.

In order to complement the former analysis, the finite element program ATENA 3D was used in order to assess if it is safe to design the reinforcement of beams and columns in accordance with the internal forces at the joint boundary. The results of this analysis strengthened the previous findings that beam-column joints should be modelled as independent structural elements and not as simple extensions of beams and columns.

Following these findings, a model based on the components method was developed for beam-column joints in reinforced concrete frames. This required the identification of the relevant components of beam-column joints in reinforced concrete frames, for standard rebar detailing

schemes, and subsequent development, testing and validation of the models for these components.

A new element was developed according to the proposed beam-column joint model. This element was implemented in EvalS, a finite element program for the nonlinear analysis of skeletal structures, along with a sectional fibre model for linear elements. The implementation of these models took into account the particularities of the Fictitious Forces Method (MFF), the analysis procedure implemented in EvalS for material nonlinear analysis.

EvalS was then used to evaluate the effect of the behaviour of beam-column joints (i) on the load capacity and lateral deformability of reinforced concrete frames and (ii) on the results of the evaluation of the seismic performance of structures designed according to the current codes using a pushover analysis. It was found that beam-column joint behaviour must be taken into account in order to get accurate results.

Bearing in mind these results, simplified procedures were established to evaluate, in a simple manner, the significance of the deformability of the beam-column joints in reinforced concrete frames and thus identify the conditions under which it is appropriate to use the simple models mentioned above.

Finally, it was evaluated, again with ATENA 3D, the impact of various factors on the stiffness and load capacity of beam-column joints, including the detailing of the rebars, the connection configuration and the value of axial force in the columns.

# Palavras-chave

ligações viga-pilar

betão armado

estruturas porticadas

método dos elementos finitos

método das componentes

flexibilidade/rigidez

classificação

# Keywords

beam-column joint

reinforced concrete

framed structures

finite element method

components method

flexibility/stiffness

classification



# Agradecimentos

Ao Professor Doutor Paulo Providência e Costa e ao Professor Doutor Alfredo Dias, meus orientadores científicos, por aceitarem orientar-me, pelas incontáveis horas que despenderam, pela paciência e disponibilidade com que o fizeram, pelos ensinamentos, pelas inúmeras sugestões e correções, pelo apoio, pela amizade, incentivo, confiança e camaradagem, a minha profunda gratidão e sincero reconhecimento.

Ao Professor Doutor Luís Cruz Simões, coordenador do Laboratório de Estruturas, agradeço o apoio e as condições que proporcionou para a realização deste trabalho.

Ao Professor Fernando Gomes não posso deixar de agradecer as longas e agradáveis discussões, os esclarecimentos, as sugestões e a disponibilidade.

Ao Miguel Ferreira, pela amizade e camaradagem, pela disponibilidade, pelas inúmeras sugestões, por facultar e explicar o código do EvalS e ter auxiliado nas tarefas de programação, o meu muito obrigado.

Ao Pedro Gala quero agradecer a amizade, a disponibilidade, os esclarecimentos e as discussões relativas ao MFF.

Da mesma forma manifesto a minha gratidão e reconhecimento ao Anísio Andrade pela amizade, pelas sugestões, pelas agradáveis conversas, pelo carácter e pelo rigor científico.

À minha família, em particular aos meus pais, agradeço os sacrifícios, o apoio, a compreensão e encorajamento permanente.

Um agradecimento muito especial à Marina por tudo e em particular pelo carinho, incentivo, compreensão e apoio incondicionais em todos os momentos.

Finalmente, a todos os que de alguma forma contribuíram para o meu percurso académico, ao Ricardo Oliveira, à Dulce Marques e aos demais colegas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra, o meu muito obrigado pelo apoio, preocupação e encorajamento.





# Índice geral

<b>Resumo</b> .....	<b>v</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>vii</b>
<b>Palavras-chave</b> .....	<b>ix</b>
<b>Keywords</b> .....	<b>ix</b>
<b>Agradecimentos</b> .....	<b>xi</b>
<b>Índice geral</b> .....	<b>xiii</b>
<b>Índice de figuras</b> .....	<b>xxi</b>
<b>Índice de tabelas</b> .....	<b>xxxiii</b>
<b>Simbologia</b> .....	<b>xxxvii</b>
Letras latinas minúsculas.....	xxxvii
Letras latinas maiúsculas.....	xxxix
Letras gregas minúsculas.....	xlii
Letras gregas maiúsculas.....	xliv
Subscritos.....	xliv
Sobrescritos.....	xlv
Abreviaturas.....	xlvi
<b>Capítulo 1 Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1. Enquadramento do tema.....	1
1.2. Objectivos do estudo.....	4
1.3. Organização deste documento.....	5
<b>Capítulo 2 Revisão bibliográfica e terminologia</b> .....	<b>9</b>
2.1. Introdução.....	9
2.2. Terminologia básica.....	10
2.2.1. Ligação viga-pilar.....	10
2.2.2. Classificação das ligações viga-pilar.....	12
2.2.2.1. Classificação das ligações de acordo com o tipo de solicitação.....	12
2.2.2.2. Classificação das ligações de acordo o número e disposição de elementos adjacentes (configuração da ligação).....	12
2.2.2.3. Classificação das ligações de acordo com a pormenorização da armadura.....	13
2.2.2.4. Classificação das ligações de acordo com as suas propriedades mecânicas.....	14
2.3. Modelação de ligações viga-pilar em estruturas de betão armado.....	19
2.3.1. Modelos de ligação viga-pilar implícitos.....	19
2.3.2. Modelos de ligação viga-pilar explícitos.....	20

2.3.2.1. Modelos de elementos finitos.....	22
2.3.2.2. Modelos mecânicos/macro-elementos.....	26
2.3.3. Modelação corrente de ligações viga-pilar em estruturas de betão armado.....	29
2.4. Estudos experimentais.....	30
2.5. Normas e outras especificações técnicas.....	35
2.5.1. NP EN 1992-1-1.....	36
2.5.2. NP EN 1998-1.....	36
2.5.2.1. Edifícios de classe de ductilidade média (DCM).....	37
2.5.2.2. Edifícios de classe de ductilidade elevada (DCH).....	37
2.5.2.3. Disposições relativas a amarrações.....	39
2.5.2.4. Outras disposições relevantes.....	40
2.5.3. ACI-ASCE 352.....	40
2.5.4. ACI 318-08.....	44
2.5.5. ASCE/SEI 41-06.....	45
2.6. Notas finais.....	47
<b>Capítulo 3 Importância de um modelo mecânico consistente para ligações viga-pilar.....</b>	<b>49</b>
3.1. Introdução.....	49
3.2. Influência da dimensão da ligação na grandeza dos esforços utilizados no dimensionamento das vigas e pilares.....	50
3.2.1. Relação entre esforços na interface da ligação e na intersecção dos eixos dos elementos....	50
3.2.2. Relação entre esforços nas extremidades efectivas da viga e do pilar.....	52
3.3. Efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar no comportamento de estruturas porticadas de betão armado.....	53
3.3.1. Generalidades.....	53
3.3.2. Critérios simplificados para avaliação da relevância da flexibilidade das ligações viga-pilar..	54
3.3.3. Avaliação do efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar sobre a capacidade de carga das estruturas de betão armado.....	62
3.3.3.1. Conversão dos resultados experimentais.....	63
3.3.3.2. Validação dos resultados experimentais.....	66
3.3.3.3. Análise estrutural não linear.....	68
3.3.3.4. Estudo paramétrico.....	73
3.4. Notas finais.....	84
<b>Capítulo 4 Análise dos campos de tensões nas armaduras em ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado.....</b>	<b>87</b>
4.1. Introdução.....	87
4.2. Resultados experimentais relevantes.....	88
4.3. O programa ATENA 3D.....	89
4.3.1. Selecção do programa informático de análise por elementos finitos.....	89
4.3.2. Modelos constitutivos.....	90

4.3.2.1. Betão .....	90
4.3.2.2. Armaduras .....	97
4.3.2.3. Aderência aço-betão .....	97
4.3.3. Elementos finitos, geração da malha e resolução do sistema de equações.....	99
4.4. Validação do programa ATENA 3D para modelação de ligações viga-pilar de betão armado.....	99
4.4.1. Introdução .....	99
4.4.2. Malhas e tipos de elementos finitos adoptados.....	100
4.4.3. Modelos materiais adoptados e respectivos parâmetros .....	102
4.4.4. Calibração dos parâmetros da lei constitutiva do betão .....	104
4.4.5. Objectividade da malha .....	107
4.4.6. Efeito das condições de aderência .....	109
4.5. Estudo do estado de tensão nas armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior da ligação viga-pilar.....	110
4.5.1. Introdução .....	110
4.5.2. Ligações interiores.....	111
4.5.2.1. Carregamento gravítico (CG).....	112
4.5.2.2. Carregamento lateral (CL) .....	115
4.5.3. Ligações de extremidade .....	123
4.5.4. Ligações de cobertura de extremidade .....	129
4.5.4.1. Momentos de fecho (MF).....	131
4.5.4.2. Momentos de abertura (MA) .....	132
4.6. Notas finais.....	133
<b>Capítulo 5 Modelo para ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado .....</b>	<b>135</b>
5.1. Introdução.....	135
5.2. O método das componentes.....	136
5.2.1. Enquadramento do método das componentes.....	136
5.2.2. Fundamentos do método das componentes.....	137
5.2.3. Aplicação do método das componentes às estruturas metálicas e mistas .....	138
5.3. Modelação de ligações viga-pilar de betão armado .....	140
5.3.1. Porquê um macro-elemento?.....	141
5.3.1.1. Continuidade do pilar na zona da ligação .....	141
5.3.1.2. Contabilização rigorosa dos esforços .....	141
5.3.1.3. Dimensão relativa da ligação viga-pilar .....	142
5.3.1.4. O cálculo manual .....	142
5.3.1.5. Adequação da simplificação da modelação da componente alma do pilar ao corte .....	142
5.3.2. Modelo de ligação viga-pilar proposto .....	143
5.3.2.1. Componentes relevantes em ligações viga-pilar de betão armado .....	143
5.3.2.2. Caracterização do comportamento das componentes .....	145
5.3.2.3. Montagem das componentes.....	146

5.3.2.4. Análise crítica do modelo desenvolvido .....	151
5.4. Componentes amarração em tracção e compressão .....	154
5.4.1. Introdução .....	154
5.4.2. Amarrações rectilíneas .....	155
5.4.2.1. Formulação do problema .....	155
5.4.2.2. Modelo simplificado .....	156
5.4.3. Amarrações curvilíneas .....	158
5.4.3.1. Formulação do problema .....	160
5.4.3.2. Modelo simplificado .....	161
5.4.4. A localização das deformações .....	166
5.4.5. Implementação dos modelos .....	167
5.4.5.1. Justificação da abordagem adoptada .....	167
5.4.5.2. Modelo de amarração rectilínea .....	172
5.4.5.3. Modelo de amarração curvilínea .....	172
5.4.6. Validação dos modelos simplificados .....	174
5.4.7. Tendências experimentais em amarrações com troços curvilíneos .....	179
5.4.8. Componente amarração traccionada e componente amarração comprimida .....	180
5.5. Componente núcleo da ligação ao corte .....	183
5.5.1. Introdução .....	183
5.5.2. Modelos de comportamento para o núcleo da ligação ao corte .....	184
5.5.2.1. Modelos de painel .....	185
5.5.2.2. Modelos de escora diagonal .....	187
5.5.2.3. Modelos não fundamentados em analogias físicas .....	191
5.5.3. Análise comparativa dos modelos de comportamento para o núcleo da ligação ao corte .....	196
5.6. Notas finais .....	205
<b>Capítulo 6 Análise estrutural com modelação explícita das ligações viga-pilar .....</b>	<b>207</b>
6.1. Introdução .....	207
6.2. Implementação do modelo de ligação viga-pilar no EvalS .....	208
6.2.1. Relações de equilíbrio e compatibilidade .....	209
6.2.2. Matriz de rigidez do elemento ligação viga-pilar .....	210
6.2.3. Relação de equilíbrio na configuração deformada da ligação .....	212
6.2.4. Interface gráfico do EvalS para ligações viga-pilar .....	218
6.3. Modelo seccional de fibras para elementos lineares – implementação no EvalS .....	220
6.3.1. Modelo de fibras .....	221
6.3.1.1. Propriedades geométricas da secção transversal .....	222
6.3.1.2. Cálculo dos esforços na secção recorrendo ao modelo de fibras .....	224
6.3.1.3. Relação momento-curvatura-esforço axial .....	225
6.3.2. Modelação do <i>tension-stiffening</i> .....	226

6.3.3. Interface gráfico do EvalS para modelos de fibras .....	232
6.4. O método das forças fictícias (MFF).....	234
6.4.1. Integração do modelo seccional de fibras no MFF .....	235
6.4.2. Integração de modelo de ligação viga-pilar no MFF.....	238
6.4.3. Formula recursiva para as formulações total e incremental do MFF .....	240
6.5. Validação dos modelos .....	243
6.5.1. Elementos 1D.....	243
6.5.1.1. Estruturas com solução analítica.....	243
6.5.1.2. Tirantes de betão armado.....	246
6.5.1.3. Vigas de betão armado em flexão simples.....	247
6.5.1.4. Ocorrência de localização das deformações em elementos viga-pilar de betão armado .....	250
6.5.1.5. Flexão composta e <i>beam growth</i> em elementos viga-pilar de betão armado.....	252
6.5.1.6. Notas finais relativas à modelação de elementos lineares .....	256
6.5.2. Subestruturas com ligações viga-pilar .....	256
6.5.2.1. Ligações viga-pilar interiores.....	257
6.5.2.2. Ligações viga-pilar de extremidade.....	260
6.5.2.3. Notas finais relativas à modelação de subestruturas.....	264
6.6. Influência da ligação viga-pilar sobre a capacidade de carga da estrutura.....	265
6.6.1. Análise de subestruturas (estruturas arquétipo).....	267
6.6.1.1. Subestruturas utilizadas .....	268
6.6.1.2. Propriedades mecânicas e geométricas das vigas, pilares e ligação viga-pilar .....	268
6.6.1.3. Efeito da resistência da ligação viga-pilar sobre a capacidade de carga da subestrutura .....	271
6.6.1.4. Efeito conjunto da resistência e da flexibilidade da ligação viga-pilar na capacidade de carga da estrutura arquétipo .....	273
6.6.1.5. Efeito da flexibilidade da ligação viga-pilar sobre a deformabilidade lateral da subestrutura .....	275
6.6.2. Análise de estruturas porticadas completas.....	276
6.6.2.1. Caracterização da estrutura .....	277
6.6.2.2. Propriedades mecânicas e geométricas das vigas, pilares e ligações viga-pilar.....	278
6.6.2.3. Efeito do comportamento da ligação viga-pilar na capacidade de carga da estrutura completa.....	280
6.6.2.4. Efeito do comportamento da ligação viga-pilar na deformabilidade lateral da estrutura completa.....	283
6.7. Influência da deformação da ligação viga-pilar nos resultados da análise <i>pushover</i> .....	284
6.7.1. Considerações gerais .....	284
6.7.2. Caracterização da estrutura analisada.....	285
6.7.3. Modelação do comportamento da estrutura .....	286
6.7.4. Análise <i>pushover</i> .....	287

6.7.4.1. Generalidades.....	287
6.7.4.2. Curvas de capacidade.....	288
6.7.4.3. Pontos de desempenho.....	289
6.7.4.4. Deslocamento relativo entre lajes.....	289
6.7.4.5. Esforços e deformações locais .....	290
6.7.4.6. Sensibilidade aos efeitos de segunda ordem .....	292
6.8. Notas finais.....	293
<b>Capítulo 7 Avaliação simplificada da necessidade de modelação explícita de ligações viga-pilar .....</b>	<b>295</b>
7.1. Introdução.....	295
7.2. Análise crítica do critério de classificação de acordo com a rigidez da NP EN 1993-1-8 .....	296
7.3. Avaliação da representatividade da estrutura arquétipo .....	297
7.3.1. Condições de fronteira das estruturas arquétipo.....	298
7.3.2. Esforços nas secções extremas das vigas e pilares .....	300
7.3.3. Deslocamento lateral relativo .....	302
7.3.4. Notas finais relativas à representatividade das estruturas arquétipo.....	303
7.4. Estrutura arquétipo com ligação viga-pilar explícita.....	303
7.4.1. Simplificações na estrutura arquétipo.....	303
7.4.2. Rigidez efectiva ou equivalente.....	306
7.5. Comparação dos modelos rígido e explícito para ligação viga-pilar .....	312
7.5.1. Erro relativo dos deslocamentos laterais .....	312
7.5.2. Incremento dos esforços e redução de capacidade de carga.....	314
7.5.3. Evolução das parcelas do erro relativo dos deslocamentos laterais .....	317
7.5.4. Classificação das ligações viga-pilar.....	319
7.5.4.1. Efeito da deformação das ligações sobre os campos de esforços.....	319
7.5.4.2. Efeito da deformação da ligação viga-pilar sobre o <i>drift</i> (CSC4-DR) .....	326
7.6. Comparação dos modelos de eixos e explícito para ligação viga-pilar .....	327
7.6.1. Variação relativa dos deslocamentos .....	327
7.6.2. Evolução das parcelas do erro relativo dos deslocamentos laterais .....	329
7.6.3. Incremento dos esforços .....	331
7.6.4. Classificação das ligações viga-pilar.....	331
7.6.4.1. Efeito da deformação da ligação sobre os campos de esforços.....	331
7.6.4.2. Efeito da deformação da ligação viga-pilar sobre o <i>drift</i> (CSC4-DE) .....	334
7.7. Avaliação e exemplificação dos critérios simplificados de classificação .....	334
7.7.1. Modelo rígido vs. modelo explícito .....	336
7.7.2. Modelo de eixos vs. modelo explícito .....	338
7.8. Notas finais.....	339
<b>Capítulo 8 Estudo paramétrico do comportamento de ligações viga-pilar recorrendo ao MEF .....</b>	<b>341</b>
8.1. Introdução.....	341

8.2. Caracterização do comportamento do núcleo da ligação viga-pilar .....	342
8.3. Espécimes laboratoriais de referência .....	345
8.3.1. Ligação viga-pilar interior (IJ) .....	345
8.3.2. Ligação viga-pilar de extremidade (EJ) .....	346
8.4. Ligação viga-pilar interior .....	348
8.4.1. Análise do modelo IJ-Ref .....	348
8.4.2. Efeito da quantidade de armadura transversal na ligação .....	350
8.4.3. Efeito de varões verticais intermédios nos pilares .....	356
8.4.4. Efeito de varões diagonais na ligação .....	358
8.4.5. Efeito da resistência à compressão do betão .....	364
8.4.6. Efeito do esforço axial nos pilares .....	365
8.4.7. Efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico .....	368
8.5. Ligação viga-pilar de extremidade .....	371
8.5.1. Análise do modelo EJ-Ref .....	371
8.5.2. Efeito da quantidade de armadura transversal na ligação .....	373
8.5.3. Efeito de varões verticais intermédios nos pilares .....	376
8.5.4. Efeito de varões diagonais na ligação .....	377
8.5.5. Efeito do diâmetro interno da dobra dos varões da armadura longitudinal das vigas .....	378
8.5.6. Efeito das chapas de ancoragem na armadura longitudinal da viga .....	382
8.5.7. Efeito da resistência à compressão do betão .....	383
8.5.8. Efeito do esforço axial nos pilares .....	386
8.5.9. Efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico .....	387
8.6. Notas finais .....	390
<b>Capítulo 9 Principais conclusões e propostas para estudos adicionais .....</b>	<b>395</b>
9.1. Resumo do estudo efectuado .....	395
9.2. Principais conclusões .....	396
9.3. Propostas de estudos adicionais .....	398
<b>Anexo Modelação simplificada da componente amarração .....</b>	<b>401</b>
A.1. Introdução .....	401
A.2. Relações tensão de aderência-escorregamento .....	401
A.2.1. MC90/MC2010 .....	403
A.2.2. Tensão de aderência constante por troços .....	406
A.3. Modelos simplificados para amarração rectilínea e relação constitutiva $\tau$ -s constante por troços .....	407
A.3.1. Modelo com aderência dependente da tensão longitudinal no varão .....	407
A.3.1.1. Relações estruturais .....	408
A.3.1.2. Particularização das relações estruturais .....	409
A.3.1.3. Relação constitutiva para a amarração .....	412

A.3.1.4. Análise crítica do modelo.....	413
A.3.2. Modelo com valor da tensão de aderência independente da tensão normal do varão .....	413
A.3.2.1. Relações constitutivas.....	414
A.3.2.2. Determinação do comportamento da amarração .....	415
A.4. Notas finais .....	430
<b>Referências bibliográficas.....</b>	<b>433</b>
<b>Índice remissivo .....</b>	<b>445</b>



# Índice de figuras

Figura 1.1 – Representação esquemática dos capítulos da tese e das principais relações entre eles.....	8
Figura 2.1 – Terminologia básica: (a) vista lateral de uma ligação viga-pilar com vigas de secção transversal de diferentes alturas e (b) vista em planta de uma ligação viga-pilar excêntrica. ....	10
Figura 2.2 – Identificação das secções transversais das vigas e pilares. ....	10
Figura 2.3 – Terminologia utilizada pela NP EN 1993-1-8 (IPQ [2010c]), (a) configuração de junta só num lado, (b) configuração de junta em dois lados. ....	15
Figura 2.4 – Modelação da junta (IPQ [2010c]) nos casos de (a) viga num só lado, (b) viga de ambos os lados. ....	16
Figura 2.5 – Juntas de resistência total (IPQ [2010c]), (a) ligação viga-pilar de cobertura de extremidade, (b) ligação viga-pilar de extremidade. ....	17
Figura 2.6 – Classificação das juntas por rigidez (IPQ [2010c]). ....	18
Figura 2.7 – Modelos implícitos de ligação viga-pilar, (a) modelo de eixos, (c) modelo de troços rígidos ( $0 \leq \beta \leq 1$ ), (b) modelo de ligação rígido. ....	20
Figura 2.8 – Modelo de ligação proposto por Elmorsi, Kianoush <i>et al.</i> [2000]. ....	22
Figura 2.9 – Modelo de ligação proposto por Fleury, Reynouard <i>et al.</i> [2000]. ....	22
Figura 2.10 – Modelo de ligação proposto por Youssef e Ghobarah [2001]. ....	27
Figura 2.11 – Modelo de ligação proposto por Lowes e Altoontash [2003]. ....	27
Figura 2.12 – Modelo de ligação proposto por Altoontash [2004]. ....	28
Figura 2.13 – Modelo de ligação proposto por Shin e LaFave [2004]. ....	28
Figura 2.14 – Modelo de ligação proposto por Tajiri, Shiohara <i>et al.</i> [2006]. ....	28
Figura 2.15 – Ligação viga-pilar no Cypecad (a) modelação da ligação viga-pilar, (b) equilíbrio de esforços na ligação viga-pilar (adaptado de CYPE Ingenieros S.A. [2012b]). ....	30
Figura 2.16 – Diagramas de esforços no interior da ligação, (a) momentos flector e (b) esforço transversal (adaptado de CYPE Ingenieros S.A. [2012b]). ....	30
Figura 2.17 – Configurações de ensaios experimentais, (a) ligações de cobertura de extremidade submetidas a momento de abertura, (b) ligação de extremidade, (c) ligação interior. ....	31
Figura 2.18 – Pormenorização da armadura das ligações viga-pilar (Taylor [1974]). ....	31
Figura 2.19 – Resultados experimentais das ligações viga-pilar de cobertura de extremidade reportados por Nilsson e Losberg [1976]. ....	32
Figura 2.20 – Pormenorizações da armadura das ligações viga-pilar (Sarsam [1983]). ....	32
Figura 2.21 – Pormenorizações tipo utilizadas por Roeser [2002]. ....	34
Figura 2.22 – Contribuições relativas para o deslocamento das subestruturas RK4 (ligação viga-pilar de extremidade) e RA2 (ligação viga-pilar interior) (Roeser [2002]). ....	34
Figura 2.23 – Modelação da flexibilidade da ligação ao corte (ASCE [2007b]). ....	46
Figura 3.1 – Alçado lateral (parcial) de uma estrutura porticada plana. ....	50
Figura 3.2 – Carregamento e condições de apoio simplificadas, (a) caso I, (b) caso II. ....	51
Figura 3.3 – Evolução do quociente $M_e/M_p$ com o parâmetro $f$ . ....	51
Figura 3.4 – Ligação viga-pilar de extremidade de estrutura com $L_{ce}/h_c = L_{be}/h_b = 7.5$ sujeita a acções	

gravíticas. Momento flector (a) nas secções $e$ e (b) nas secções $p$ .	53
Figura 3.5 – Efeito da rigidez da ligação na distribuição de esforços em vigas submetidas a cargas uniformemente distribuídas, (a) caso geral, (b) $k = 0$ , (c) $k = \infty$ .	53
Figura 3.6 – Efeito da rigidez da ligação no valor (a) dos momentos flectores $M_1$ e $M_2$ e (b) da flecha $\delta$ .	54
Figura 3.7 – Ligações viga-pilar de betão armado de extremidade ensaiadas por Sarsam [1983].	56
Figura 3.8 – Determinação experimental da distorção da ligação viga-pilar (Sarsam [1983]).	57
Figura 3.9 – Relações experimentais $M_b-\gamma$ segundo Sarsam [1983] e rigidez mínima requerida pela NP EN 1993-1-8 para classificação das ligações como nominalmente rígidas.	58
Figura 3.10 – (a) Configuração deformada da subestrutura, (b) rigidez de flexão de uma viga simplesmente apoiada $K_b^{sa}$ , (c) cálculo da relação linear $M_{bj}-\theta_b$ .	60
Figura 3.11 – Relação $M_{bj}-\theta_b$ para o modo de deformação da viga representado na Figura 3.10(c) e relação $M_{bj}-\gamma$ experimental (Sarsam [1983]).	61
Figura 3.12 – Situações em que a ligação viga-pilar pode ser considerada nominalmente rígida de acordo com a expressão (3.8): porções das curvas a cheio abaixo da curva a tracejado (para os espécimes EX1 e EX3 ensaiados por Sarsam [1983]).	62
Figura 3.13 – Situações em que a ligação viga-pilar pode ser considerada nominalmente rígida de acordo com a expressão (3.9): porções das curvas na zona a sombreado (para os espécimes EX1 e EX3 ensaiados por Sarsam [1983]).	62
Figura 3.14 – Regularização dos resultados experimentais, (a) representação esquemática da curva proposta por Richard e Abbott [1975], (b) resultados experimentais e aproximação analítica contínua.	63
Figura 3.15 – Modelo de ligação viga-pilar (Mitra e Lowes [2007]), (a) momento distorcional $M_\gamma$ e distorção $\gamma$ ; (b) sistema de esforços na periferia da ligação.	65
Figura 3.16 – Comparação dos resultados experimentais (Sarsam [1983]) com modelos de comportamento (Roeser [2002], LaFave e Kim [2011]).	67
Figura 3.17 – (a) Estrutura porticada regular não contraventada (estrutura original), (b) estrutura arquétipo e sua configuração deformada.	70
Figura 3.18 – Curvas de comportamento características para $P$ constante, (a) rotura material ou foi atingido $M_{\gamma,max}$ , (b) rotura por instabilidade.	71
Figura 3.19 – Limite de esbelteza $\lambda_{min}$ (§5.8.3.1(1) da NP EN 1992-1-1).	74
Figura 3.20 – Variação de $H_{max}$ com o esforço axial no pilar superior.	75
Figura 3.21 – Redução relativa de $H_{max}$ associada à distorção da ligação viga-pilar.	76
Figura 3.22 – Deslocamento da extremidade livre do pilar superior para $H = H_{max}$ .	78
Figura 3.23 – Variação relativa de $d_H$ provocado pelo efeito da deformabilidade da ligação.	79
Figura 3.24 – Componentes da deformabilidade da subestrutura representada na Figura 3.17, (a) flexão da viga e dos pilares, (b) distorção da ligação viga-pilar.	81
Figura 3.25 – Evolução de $f_j / (f_j + f_{bend})$ com $L_{ce}$ (esq.) e $L_{be}$ (dir.).	83
Figura 4.1 – Modelo de comportamento para betão em tracção: (a) critério de cedência de Rankine, (b) comprimento característico e resistência à tracção corrente (Červenka e Papanikolaou [2008]).	92
Figura 4.2 – Superfície de cedência e direcção de retorno plástico.	94
Figura 4.3 – Função $1/r(\theta, e)$ para $1.0 \geq e \geq 0.5$ .	94
Figura 4.4 – Traços da superfície definida pela expressão (4.25) no plano desviatório para $f_t = f'_c / 10$ : (a) $e = 0.5$ , (b) $e = 0.6$ , (c) $e = 0.7$ .	95
Figura 4.5 – Evolução de $\sigma$ com a extensão plástica equivalente (Červenka, Jendele <i>et al.</i> [2010]),	

(a) endurecimento, (b) amaciamento. ....	96
Figura 4.6 – Movimento relativo das armaduras e do betão envolvente (Červenka, Červenka <i>et al.</i> [2003]). ....	98
Figura 4.7 – Componentes do escorregamento identificável a nível macroscópico. ....	98
Figura 4.8 – <i>Tension stiffening</i> (Červenka, Jendele <i>et al.</i> [2010]). ....	103
Figura 4.9 – Representação simplificada do ensaio experimental realizado por Roeser [2002]. ....	104
Figura 4.10 – Efeito do parâmetro $w_d$ na relação $F_1-w_1$ para $r_c^{\min} = 0.8$ . ....	105
Figura 4.11 – Efeito do parâmetro $r_c^{\min}$ na relação $F_1-w_1$ para $w_d = 5$ mm. ....	106
Figura 4.12 – Efeito do parâmetro $w_d$ na relação $F_1-w_1$ para $r_c^{\min} = 0.7$ . ....	106
Figura 4.13 – Extensão nas armaduras longitudinais das vigas (secções A e B). ....	106
Figura 4.14 – Representação do modelo de EF. ....	107
Figura 4.15 – Relação $F_1-w_1$ dos modelos adoptados na avaliação da objectividade da malha. ....	108
Figura 4.16 – Extensão nas armaduras longitudinais das vigas nos modelos adoptados na avaliação da objectividade da malha. ....	108
Figura 4.17 – Relação $F_1-w_1$ dos modelos adoptados na avaliação do efeito das condições de aderência. ....	109
Figura 4.18 – Extensão nas armaduras longitudinais das vigas dos modelos adoptados na avaliação do efeito das condições de aderência. ....	109
Figura 4.19 – Numeração das armaduras longitudinais das vigas/pilares e das cintas da ligação do espécime RA2 (Roeser [2002]). ....	111
Figura 4.20 – Cargas aplicadas e condições de apoio: (a) carregamento gravítico (CG), (b) carregamento lateral (CL). ....	111
Figura 4.21 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal das vigas dos modelos (a) RA2-CG-Ref e (b) RA2-CG-SC. ....	113
Figura 4.22 – Tensão normal na armadura longitudinal das vigas na ligação viga-pilar. ....	114
Figura 4.23 – Tensão normal na armadura longitudinal das vigas no interior da ligação (campo de esforços simétricos na ligação): (a) esforços na periferia da ligação, (b) representação simplificada das resultantes em metade da ligação. ....	114
Figura 4.24 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal das vigas dos modelos (a) RA2-CL-Ref e (b) RA2-CL-SC. ....	116
Figura 4.25 – Distribuição de $\varepsilon_3^p$ no plano médio do modelo RA2-CL-Ref: (a) $F = F_{\max} = 99.0$ kN, (b) $F = 93.2$ kN (pós-pico). ....	117
Figura 4.26 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal dos pilares dos modelos (a) RA2-CL-Ref, (b) e RA2-CL-SC. ....	118
Figura 4.27 – Evolução da tensão normal nas cintas na ligação do modelo RA2-CL-Ref. ....	119
Figura 4.28 – Representação esquemática da evolução da tensão nas cintas da ligação do modelo RA2-CL-Ref. ....	119
Figura 4.29 – Tensão normal na armadura longitudinal das vigas na ligação viga-pilar. ....	120
Figura 4.30 – Tensão normal na armadura longitudinal dos pilares na ligação viga-pilar. ....	121
Figura 4.31 – Tensão normal na armadura longitudinal dos pilares nos modelos RA2-CL-Ref e RA2-CL-CC-ASC-FY. ....	122
Figura 4.32 – Tensão normal na armadura longitudinal das vigas nos modelos RA2-CL-SC e RA2-CL-SC-ASV-FY. ....	123

Figura 4.33 – Configuração genérica dos modelos numéricos estudados. ....	124
Figura 4.34 – Modelo BCJ4-Ref no ATENA 3D: (a) malha de elementos finitos, (b) disposição da armadura. ....	125
Figura 4.35 – Numeração dos elementos da armadura da viga, pilares e ligação dos modelos BCJ4/BCJ3. ....	125
Figura 4.36 – Cargas aplicadas e condições de apoio. ....	125
Figura 4.37 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga do modelo BCJ4-Ref. ....	126
Figura 4.38 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal dos pilares no modelo BCJ4-Ref. ...	126
Figura 4.39 – Evolução da tensão normal nas cintas na ligação do modelo BCJ4-Ref. ....	126
Figura 4.40 – Distribuição de $\varepsilon_3^p$ no plano médio do modelo BCJ4-Ref para: (a) $F = F_{\max} = 88.2$ kN, (b) $F = 56.5$ kN (pós-pico). ....	127
Figura 4.41 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga do modelo BCJ4-SC-R65. ...	127
Figura 4.42 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal dos pilares no modelo BCJ4-SC-R65. ....	128
Figura 4.43 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga do modelo BCJ4-SC-R130. ....	128
Figura 4.44 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal dos pilares no modelo BCJ4-SC-R130. ....	129
Figura 4.45 – Ligações de cobertura de extremidade submetidas a (a) momentos de fecho (MF) e (b) momentos de abertura (MA). ....	130
Figura 4.46 – Sistema de cargas aplicadas: (a) momentos de fecho e (b) momentos de abertura. ....	131
Figura 4.47 – Identificação dos varões: (a) momentos de fecho e (b) momentos de abertura. ....	131
Figura 4.48 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga e do pilar na ligação viga-pilar de cobertura de extremidade submetida a momento de fecho. ....	132
Figura 4.49 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga para a ligação viga-pilar de cobertura de extremidade submetida a momento de abertura. ....	133
Figura 4.50 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal do pilar para a ligação viga-pilar de cobertura de extremidade submetida a momento de abertura. ....	133
Figura 5.1 – Exemplo de modelo das componentes para uma junta (Faella, Piluso <i>et al.</i> [2000]).....	138
Figura 5.2 – (a) Campo de esforços na periferia da ligação, (b) parcelas do esforço de corte horizontal a meia altura da ligação (Faella, Piluso <i>et al.</i> [2000]). ....	139
Figura 5.3 – Tensão de aderência na armadura na interface armadura-betão: (a) segmento de viga com comprimento igual à altura da secção transversal do pilar, (b) ligação viga-pilar. ....	144
Figura 5.4 – Subcampos de esforços auto equilibrados e modos de deformação correspondentes: (a) campo de esforços genérico, (b) modo de corte puro, (c) modos de flexão simétricos, (d) modos de flexão anti-simétricos, (e) modos axiais simétricos, (f) modos axiais anti-simétricos.....	147
Figura 5.5 – Esforço de corte no plano horizontal a meia altura da ligação, (a) decomposição dos momentos flectores em binários, (b) seccionamento da ligação e correspondentes diagramas de corpo livre ( $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ , $0 \leq \alpha_2 \leq 1$ ). ....	148
Figura 5.6 – Modelos para o núcleo da ligação ao corte (Charney e Marshal [2006]): (a) modelo de <i>scissors</i> , (b) modelo de <i>Krawinkler</i> original, (c) modelo de <i>Krawinkler</i> modificado.....	148
Figura 5.7 – Representação (traço cheio grosso) da configuração deformada da estrutura nas imediações da ligação (Charney e Marshal [2006]): (a) modelo de <i>Krawinkler</i> e (b) modelo de <i>scissors</i> .....	148
Figura 5.8 – Modelos de ligação viga-pilar com perfis em I ou H, com molduras cuja altura é diferente de $h_c$ : (a) ligação soldada (Tschemmernegg e Humer [1988]), (b) ligação aparafusada (Tschemmernegg,	

Rubin <i>et al.</i> [1998]), (c) efeito do esforço transversal da viga (Alves [2008]).	149
Figura 5.9 – Modelação do núcleo da ligação ao corte, (a) M1, (b) M2, (c) M3.	150
Figura 5.10 – Modelo desenvolvido. Versões alternativas para a componente núcleo da ligação ao corte: (a) mola linear, (b) mola angular.	151
Figura 5.11 – Modelação de amarrações em tracção: (a) ligações de extremidade com amarração rectilínea ou em cotovelo, (b) ligação interior com armadura rectilínea contínua, (c) modelação da armadura longitudinal contínua da viga em ligação interior.	152
Figura 5.12 – Distribuição das tensões de aderência na armadura longitudinal quando as faces opostas da ligação apresentam momento flector com sentido (a) simétrico e (b) igual.	153
Figura 5.13 – Modelação da amarração rectilínea: (a) amarração rectilínea, (b) modelo proposto e (c) célula genérica $i$ .	156
Figura 5.14 – Amarração curvilínea (Minor e Jirsa [1975]): (a) escorregamento associado à deformação radial do betão, (b) tensões de aderência para varões rectilíneos e curvilíneos.	159
Figura 5.15 – Segmento infinitesimal de varão de amarração curvilínea: (a) esforços, (b) esforços simplificados, (c) movimento de corpo rígido na direcção radial.	160
Figura 5.16 – Amarração curvilínea, (a) modelo proposto, (b) célula genérica $i$ .	161
Figura 5.17 – Célula curvilínea genérica $i$ (versão alternativa).	163
Figura 5.18 – Células de extremidade numa amarração com troços curvilíneos e rectilíneos: (a) troço curvilíneo e (b) troço rectilíneo.	163
Figura 5.19 – Ensaio realizado por Soroushian, Obaseki <i>et al.</i> [1987].	165
Figura 5.20 – Comprimento máximo da célula do modelo da amarração que garante rigidez positiva.	168
Figura 5.21 – Escorregamento ao longo da extremidade da amarração para diferentes valores de $s_{min}$ .	171
Figura 5.22 – Espécime 3 (Viwathanatepa, Popov <i>et al.</i> [1979a]): (a) relação $\sigma_s$ - $s$ da extremidade solicitada, (b) distribuição de $\tau$ ao longo da amarração.	176
Figura 5.23 – Espécime EX3 (Viwathanatepa, Popov <i>et al.</i> [1979a]): (a) distribuição de $\sigma_s$ ao longo da amarração, (b) distribuição de $s$ ao longo da amarração.	176
Figura 5.24 – Relação $\sigma_s$ - $s$ da extremidade solicitada (Ueda, Lin <i>et al.</i> [1986]): (a) espécime S61, (b) espécime S64, (c) espécime S101, (d) espécime S107.	177
Figura 5.25 – Relação $\sigma_s$ - $s$ da extremidade solicitada (Ueda, Lin <i>et al.</i> [1986]): (a) espécime B81, (b) espécime B103, (c) espécime B104.	177
Figura 5.26 – Distribuição de $\sigma_s$ para $\sigma_{s1} = f_y$ : (a) espécime B81, (b) espécime B103.	178
Figura 5.27 – Espécime J11-90-15-5-L (Marques e Jirsa [1975]): (a) relação $\sigma_s$ - $s$ da extremidade solicitada, (b) distribuição de $\sigma_s$ para $\sigma_{s1} = f_y$ .	178
Figura 5.28 – Comportamento da amarração: efeito do (a) do ângulo de dobragem $\theta$ , (b) raio de dobragem interno $r_i$ .	180
Figura 5.29 – Representação em corte horizontal da deformação na ligação viga-pilar provocada pela resultante de compressão transmitida pela viga: (a) configuração indeformada, (b) configuração deformada com betão indeformável, (c) configuração deformada com deslocamento do betão na periferia da ligação igual ao do varão.	181
Figura 5.30 – Análise da secção transversal da viga/pilar na interface da ligação viga-pilar: (a) geometria da secção transversal, (b) distribuição de extensões, (c) distribuição de tensões, (c) resultantes de tracção e compressão.	182
Figura 5.31 – Modelos físicos de comportamento da ligação viga-pilar: (a) painel, (b) escora diagonal.	183

Figura 5.32 – Distorção do núcleo da ligação: (a) com encurtamento da diagonal, (b) sem encurtamento da diagonal. ....	184
Figura 5.33 – Forças internas num elemento de betão armado com fendilhação diagonal (Paulay e Priestley [1992]). ....	184
Figura 5.34 – Mecanismo de escora diagonal equivalente (Parra-Montesinos e Wight [2002]). ....	188
Figura 5.35 – Comportamento de betão confinado em compressão (Sheikh e Uzumeri [1982]). ....	190
Figura 5.36 – Relação entre a distorção e a rotação da diagonal (Roeser [2002]). ....	193
Figura 5.37 – Modelo proposto por Kim e LaFave [2009]: (a) relação $\tau_{jh}-\gamma$ ; (b) efeito dos parâmetros não geométricos, (c) efeito dos parâmetros geométricos. ....	195
Figura 5.38 – Representação esquemática das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002]. ....	197
Figura 5.39 – Resultados experimentais as ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002], confrontados com estimativas teóricas. ....	198
Figura 5.40 – Representação esquemática das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002]. ....	200
Figura 5.41 – Comportamento das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002]. ...	201
Figura 5.42 – Comportamento das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Sarsam [1983]. ...	202
Figura 6.1 – Elemento de ligação viga-pilar, (a) numeração das componentes, (b) graus de liberdade e forças nodais. ....	209
Figura 6.2 – Exemplos de modos de deformação unitários correspondentes aos graus de liberdade (a) $u_7$ , (b) $u_6$ , (c) $u_4$ e (d) $u_5$ . ....	211
Figura 6.3 – Modo de deformação associado a $u_5$ , (a) Modo inicial com $u_5 = 1$ e $u_4 = u_6 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = 0$ , modos correctivos para impor (b) $u_1 = u_7 = 0$ , (c) $u_2 = u_8 = 0$ e (d) $u_3 = u_9 = 0$ . ....	211
Figura 6.4 – Forças nodais equivalentes em elementos lineares, (a) equilíbrio das forças nodais na configuração deformada, (b) forças nodais independentes consideradas, (c) forças nodais dependentes obtidas por equilíbrio na configuração inicial e (d) carregamento equivalente. ....	213
Figura 6.5 – Forças nodais equivalentes em ligações viga-pilar. ....	215
Figura 6.6 – Exemplo 1, (a) equilíbrio na configuração deformada, (b) equilíbrio na configuração indeformada com forças nodais equivalentes. ....	216
Figura 6.7 – Exemplo 2, (a) equilíbrio na configuração deformada, (b) equilíbrio na configuração indeformada com forças nodais equivalentes. ....	216
Figura 6.8 – Exemplo 3, (a) equilíbrio na configuração deformada, (b) equilíbrio na configuração indeformada com forças nodais equivalentes. ....	217
Figura 6.9 – Exemplo 4, (a) equilíbrio na configuração deformada, (b) equilíbrio na configuração indeformada com forças nodais equivalentes. ....	217
Figura 6.10 – Janela principal do EvalS. ....	218
Figura 6.11 – Janela para definição da biblioteca de componentes tipo e de ligações viga-pilar tipo. ....	219
Figura 6.12 – Janela para definição da lei de comportamento não linear de cada componente tipo. ....	219
Figura 6.13 – Janela para selecção da tipologia de ligação viga-pilar e do ângulo dos seus lados com o sistema de eixos de referência da estrutura. ....	220
Figura 6.14 – Visualização dos esforços na ligação viga-pilar e nas componentes. ....	220
Figura 6.15 – Forma poligonal $j$ vazada, (a) numeração dos vértices, (b) trapézios auxiliares. ....	222

Figura 6.16 – Discretização da secção transversal, (a) secção transversal original e o sentido positivo dos esforços, (b) decomposição em subdomínios, (c) fibras referenciadas pelo centro geométrico do subdomínio.....	224
Figura 6.17 – Comportamento de um tirante de betão armado, (a) geometria do tirante, (b) diagrama carga-extensão média do tirante, (c) diagrama de tensões de tracção do betão ( <i>smeared</i> ).....	227
Figura 6.18 – Comportamento do betão em tracção (a) relação $N-\varepsilon_m$ no tirante (Fib [2010b]), (b) relação $\sigma_{cm}-\varepsilon_m$ (betão efectivo), (c) relação constitutiva local do betão em tracção (betão não efectivo).....	229
Figura 6.19 – Relação constitutiva não local para o betão em tracção.....	230
Figura 6.20 – Área efectiva de betão em tracção, (a) viga com secção parcialmente comprimida, (b) laje com secção parcialmente comprimida e (c) elemento com secção transversal toda em tracção.....	231
Figura 6.21 – Raio da área de betão efectivo para cada tirante.....	232
Figura 6.22 – Janela para caracterização dos materiais.....	233
Figura 6.23 – Janela para definição de relações $\sigma-\varepsilon$ por pontos.....	233
Figura 6.24 – Janela para criar a secção transversal tipo.....	233
Figura 6.25 – Janela para definição dos modelo de fibras.....	234
Figura 6.26 – Janela para avaliação de reserva de resistência e ductilidade.....	235
Figura 6.27 – Esforços fictícios do MFF.....	236
Figura 6.28 – Carregamento fictício num elemento linear.....	236
Figura 6.29 – Integração do modelo de fibras no procedimento iterativo do MFF.....	238
Figura 6.30 – Procedimento iterativo do MFF aplicado a uma estrutura constituída por uma componente.....	239
Figura 6.31 – Ilustração da formulação incremental do MFF para o caso OD.....	241
Figura 6.32 – Exemplo simplificado para avaliação do incremento de forças equivalentes: (a) problema original, (b) equilíbrio na configuração deformada, (c) equilíbrio na configuração indeformada com forças equivalentes.....	242
Figura 6.33 – Primeiro problema utilizado na validação do modelo de fibras.....	243
Figura 6.34 – Configuração deformada da estrutura.....	244
Figura 6.35 – Segundo e terceiro problema utilizado na validação do modelo de fibras.....	244
Figura 6.36 – Evolução da curvatura e da extensão axial.....	246
Figura 6.37 – Validação da implementação do modelo de <i>tension stiffening</i> no EvalS.....	247
Figura 6.38 – Geometria das vigas modeladas, carregamento e condições e apoio.....	247
Figura 6.39 – Malhas de elementos finitos utilizadas na análise das vigas VT1/VT2.....	249
Figura 6.40 – Influência da malha de elementos finitos utilizada na simulação do comportamento das vigas VT1/VT2.....	249
Figura 6.41 – Influência do número de fibras na simulação do comportamento das vigas VT1/VT2.....	250
Figura 6.42 – Simulação numérica e resultados experimentais das vigas em flexão simples.....	250
Figura 6.43 – Representação esquemática de respostas (a) objectiva e (b) não objectiva (adaptado de Calabrese, Almeida <i>et al.</i> [2010]).	251
Figura 6.44 – Efeito do <i>beam growth</i> (Kim, Stanton <i>et al.</i> [2004]).....	253
Figura 6.45 – Modelação da viga VT1/VT2, (a) modelo 1D original, (b) modelo 1D com “controlo de deslocamento” e (c) discretização no ATENA 3D.....	254
Figura 6.46 – Efeito da restrição ao alongamento axial na viga VT1/VT2. Variação com a carga da	

(a) flecha máxima, (b) esforço axial, (c) alongamento axial. ....	254
Figura 6.47 – Efeito das condições fronteira e do confinamento do betão sobre a variação da carga máxima com (a) a flecha vertical e (b) o esforço axial. ....	255
Figura 6.48 – Sistema de aplicação de cargas adoptado por Roeser [2002], (a) ligação viga-pilar interior, (b) ligação viga-pilar de extremidade. ....	257
Figura 6.49 – Condições de apoio e aplicação de carga nas simulações numéricas efectuadas, (a) ligação viga-pilar interior, (b) ligação viga-pilar de extremidade. ....	257
Figura 6.50 – Procedimento adoptado para mimetizar o procedimento de controlo de deslocamento em subestruturas com ligação viga-pilar (a) interior e (b) exterior. ....	258
Figura 6.51 – Relação $F-\delta$ para as subestruturas com ligação viga-pilar interior. ....	259
Figura 6.52 – Mecanismos de transferência de tensões dos varões para o betão, (a) reforços em U, (b) chapas de ancoragem. ....	261
Figura 6.53 – Relação $F-\delta$ para as subestruturas com ligação viga-pilar de extremidade. ....	263
Figura 6.54 – Comportamento das componentes, (a) rígido com resistência ilimitada (R, US), (b) rígido com resistência limitada (R,LS), (c) comportamento não linear (F). ....	266
Figura 6.55 – Estrutura arquétipo, (a) dimensões dos espécimes, (b) condições de apoio e carregamento. ....	267
Figura 6.56 – Relação momento curvatura para (a) vigas e (b) pilares. ....	269
Figura 6.57 – Comportamento das componentes (a) C1 a C8 e (b) C9 das ligações viga-pilar. ....	270
Figura 6.58 – Mecanismo de colapso da estrutura arquétipo, (a) C9, (b) vigas. ....	272
Figura 6.59 – Evolução dos parâmetros $\alpha_2$ , $\alpha_3$ , $\alpha_4$ e $\alpha_5$ , (a) SE1, (b) SE2, (c) SE3. ....	274
Figura 6.60 – Relação $H-\delta$ para $n = 0.3$ , (a) SE1, (b) SE2, (c) SE3. ....	276
Figura 6.61 – Estrutura porticada completa. ....	277
Figura 6.62 – Geometria do eixo das armaduras longitudinais utilizada no modelo de comportamento da amarração, (a) ligações viga-pilar de extremidade e de cobertura exterior, (b) ligações viga-pilar de cobertura exterior e interior. ....	278
Figura 6.63 – Relação constitutiva para as componentes amarração. ....	279
Figura 6.64 – Relação constitutiva para o núcleo da ligação ao corte. ....	279
Figura 6.65 – Configuração deformada da estrutura para as cargas $q_v = 32$ kN/m e $q_h = 1$ kN/m para 2nd,F e $\rho_j = 0.11\%$ para pilares encastrados (esq.) e articulados (dir.) na base. ....	281
Figura 6.66 – Diagrama de momentos flectores para as cargas $q_v = 32$ kN/m e $q_h = 1$ kN/m para 2nd,F e $\rho_j = 0.11\%$ para pilares encastrados (esq.) e articulados (dir.) na base. ....	281
Figura 6.67 – Quocientes $\Delta_g/\Delta_{g,fmax}$ (não delimitado por parêntesis) e $f_g/f_{g,max}$ (entre parêntesis) para $q_v = 32$ kN/m e $q_h = q_{h,max}$ (2nd,F), (a) ENC e $\rho_j = 0.56\%$ , (b) ART e $\rho_j = 0.56\%$ , (c) ENC e $\rho_j = 0.11\%$ , (d) ART e $\rho_j = 0.11\%$ . ....	282
Figura 6.68 – Curvas de capacidade para pilares com base, (a) encastrada, (b) articulada. ....	284
Figura 6.69 – Dimensões gerais da estrutura porticada de 4 níveis (Arêde [1997]). ....	286
Figura 6.70 – Comportamento da amarração para: (a) um varão de diâmetro $\phi_1$ , (b) um varão de diâmetro $\phi_2 > \phi_1$ , (c) $n^{\phi_1} + n^{\phi_2}$ varões de diâmetro $\phi_1$ e $\phi_2$ . ....	287
Figura 6.71 – Curvas de capacidade do pórtico interior para distribuição de forças laterais (a) uniforme e (b) modal. ....	288
Figura 6.72 – Aumento da deformação lateral da estrutura. ....	288
Figura 6.73 – Análise <i>pushover</i> para o Sismo 1 assumindo uma distribuição modal de forças laterais. ....	



Deslocamento lateral das lajes: (a) absoluto e (b) relativo ( <i>drift</i> ).....	290
Figura 6.74 – Momento flector e esforço axial nas extremidades das vigas e pilares correspondentes ao ponto de desempenho com ligações viga-pilar rígidas (S1/M/R). .....	290
Figura 6.75 – Momento flector e esforço axial nas extremidades das vigas e pilares correspondentes ao ponto de desempenho com ligações viga-pilar deformáveis (S1/M/F). .....	290
Figura 6.76 – Curvatura para o ponto de desempenho com ligações viga-pilar rígidas (S1/M/R), (a) extremidades das vigas, (b) extremidades dos pilares, (c) representação gráfica de $\chi/\chi_y$ nas extremidades das vigas/pilares. ....	291
Figura 6.77 – Curvatura para o ponto de desempenho com ligações viga-pilar flexíveis (S1/M/F), (a) extremidades das vigas, (b) extremidades dos pilares, (c) representação gráfica de $\chi/\chi_y$ nas extremidades das vigas/pilares. ....	291
Figura 6.78 – Deformação das componentes para o ponto de desempenho com ligações viga-pilar flexíveis (ST1/M/F), (a) componentes 1 a 8, (b) componente 9.....	292
Figura 7.1 – Modelos simplificados da estrutura porticada: (a) modelo completo, (b) modelo simplificado para cargas laterais, (c) modelo simplificado para cargas verticais. ....	298
Figura 7.2 – Estruturas arquétipo: (a) com cargas ao nível do piso – Estrutura 1 (E1), (b) sem cargas ao nível do piso – Estrutura 2 (E2).....	299
Figura 7.3 – Soluções da equação (7.3). ....	300
Figura 7.4 – Desvio da secção de momento nulo relativamente à secção de meio vão. ....	300
Figura 7.5 – Erro relativo nos momentos nas extremidades das vigas da estrutura E1 (Figura 7.2(a)). ...	301
Figura 7.6 – Erro relativo nos momentos nas extremidades das vigas da estrutura E2 (Figura 7.2(b)). ...	301
Figura 7.7 – Estrutura arquétipo com modelação explícita da ligação viga-pilar (E3): (a) modelo completo, (b) pormenor da ligação. ....	304
Figura 7.8 – Estruturas arquétipo com modelação explícita da ligação viga-pilar: (a) E4, (b) E5.....	304
Figura 7.9 – Parcelas da deformação do par de componentes amarração em compressão e tracção....	304
Figura 7.10 – Sistema de coordenadas nodais para um elemento linear com rotação livre numa extremidade. Configuração inicial e configuração deformada genérica.....	307
Figura 7.11 – Modos de deformação e distribuição de momentos flectores para o elemento encastrado-articulado. ....	308
Figura 7.12 – Variação da rigidez elementar efectiva com o nível de carga para diferentes: (a) percentagens geométricas armadura longitudinal e (b) comprimentos do pilar. ....	309
Figura 7.13 – Variação da rigidez elementar efectiva com o nível de carga (no caso 1.86-0.00) para vários valores: (a) da tensão de rotura à compressão do betão e (b) da tensão de cedência do aço.....	311
Figura 7.14 – Efeito do esforço axial sobre a rigidez elementar efectiva.....	311
Figura 7.15 – Efeito de $\varepsilon_d^{1st}$ e $\alpha_{cr}^{Rig}$ em (a) $\varepsilon_M$ e (b) $\varepsilon_u$ .....	316
Figura 7.16 – Variação de $\varepsilon_{d,jy}^{1st} k_{jy}$ . ....	318
Figura 7.17 – Variação de $\varepsilon_{d,jb}^{1st} k_{jb}$ . ....	319
Figura 7.18 – Variação de $\varepsilon_{d,jc}^{1st} k_{jc}$ . ....	319
Figura 7.19 – Critérios simplificados de classificação de ligações viga-pilar de acordo com a sua deformabilidade tendo em consideração o incremento de esforços totais. ....	320
Figura 7.20 – Superfície definida pela expressão (7.68).....	321
Figura 7.21 – Interpretação geométrica do procedimento adoptado. ....	322
Figura 7.22 – Variação de $\alpha_{cr}^{Rig}$ com $\zeta$ e $\theta$ de acordo com a expressão (7.77).....	323

Figura 7.23 – Efeito da variação de $\lambda_{j,b}$ .....	324
Figura 7.24 – Efeito da variação de $\lambda_{j,c}$ .....	324
Figura 7.25 – Associação de três molas em série.....	325
Figura 7.26 – Subestrutura arquétipo E6 com modelação implícita da ligação viga-pilar (modelo de eixos).....	327
Figura 7.27 – Variação de $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} k_{j\gamma}$ .....	329
Figura 7.28 – Variação de $\varepsilon_{d,jb}^{1st,e} k_{jb}$ .....	330
Figura 7.29 – Variação de $\varepsilon_{d,jc}^{1st,e} k_{jc}$ .....	330
Figura 7.30 – Efeito da variação de $\lambda_{j,b}$ .....	330
Figura 7.31 – Efeito da variação de $\lambda_{j,c}$ .....	330
Figura 7.32 – Variação de $\varepsilon_{d,hb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e}$ .....	331
Figura 7.33 – Variação de $\varepsilon_{d,hb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e}$ .....	331
Figura 7.34 – Exemplo de aplicação: geometria do pórtico e forças aplicadas.....	335
Figura 8.1 – Esforço de corte no plano horizontal a meia altura da ligação viga-pilar.....	342
Figura 8.2 – Pontos de monitorização nos modelos de EF no plano do pórtico.....	342
Figura 8.3 – Determinação da distorção da ligação viga-pilar (primeira abordagem).....	343
Figura 8.4 – Determinação da distorção da ligação viga-pilar (segunda abordagem).....	344
Figura 8.5 – Secções transversais: (a) pilares e (b) vigas.....	345
Figura 8.6 – Geometria das ligações viga-pilar de extremidade para o modelo EJ-Ref.....	347
Figura 8.7 – Identificação dos pontos de monitorização de tensão nas armaduras do modelo IJ-Ref.....	348
Figura 8.8 – Resultados dos modelos de EF: (a) relação $H-d$ dos modelos de EF IJ-Ref e IJ-RIG e (b) tensão nas cintas na ligação do modelo IJ-Ref.....	349
Figura 8.9 – Tensão nas armaduras longitudinais do modelo de EF IJ-Ref: (a) secção AA' e (b) secção BB'.....	349
Figura 8.10 – Modelo de EF IJ-Ref: (a) distorção do núcleo da ligação e (b) tensão tangencial no plano médio do núcleo da ligação.....	350
Figura 8.11 – Curvas $H-d$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes percentagens mecânicas de armadura transversal.....	351
Figura 8.12 – Curvas $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes percentagens mecânicas de armadura transversal.....	351
Figura 8.13 – Comportamento da ligação viga-pilar interior para os modelos com maior e menor percentagem mecânica de armadura transversal na ligação ( $H_{max}$ e $d_{Hmax}$ são a força horizontal aplicada máxima e o correspondente deslocamento horizontal).....	352
Figura 8.14 – Redução do braço interno provocado pelo escorregamento dos varões da armadura longitudinal das vigas no interior da ligação.....	353
Figura 8.15 – Tensão na armadura longitudinal das vigas na periferia da ligação na secção CC': (a) modelo de EF IJ-JTR-27.7 e (b) modelo de EF IJ-JTR-0.0.....	354
Figura 8.16 – Relação $\tau_{jh}-\gamma$ determinada pelos modelos de (a) LaFave e Kim [2011] e (b) Roeser [2002] para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados.....	355
Figura 8.17 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes quantidades de varões verticais intermédios.....	357
Figura 8.18 – Varões na diagonal em ligações viga-pila interiores: (a) varões da armadura longitudinal	

dos pilares e (b) varões diagonais com dispositivos mecânicos de amarração.....	358
Figura 8.19 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes quantidades de varões da armadura longitudinal dos pilares dispostos na diagonal da ligação. ....	359
Figura 8.20 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ de modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes tensões de cedência nos varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares ( $\rho = 0.50$ ). ....	360
Figura 8.21 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ de modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes tensões de cedência nos varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares ( $\rho = 0.75$ ). ....	361
Figura 8.22 – Evolução da tensão nas cintas dos modelos IJ-DR-0.50, IJ-DR-0.50-800, IJ-DR-0.75 e IJ-DR-0.75-800. ....	362
Figura 8.23 – Efeito da perda de aderência entre os varões das armaduras longitudinais rectilíneas do pilar e das vigas e o betão envolvente. ....	362
Figura 8.24 – Eficiência dos varões diagonais de tracção e compressão no comportamento de ligações viga-pilar interiores: (a) identificação das diagonais, (b) comportamento da ligação viga-pilar. ....	363
Figura 8.25 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes valores da tensão de rotura do betão à compressão. ....	364
Figura 8.26 – Relação $\tau_{jh}-\gamma$ determinadas pelos modelos de (a) LaFave e Kim [2011] e (b) Roeser [2002] para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.8.....	365
Figura 8.27 – Comparação das relações $\tau_{jh}-\gamma$ determinadas pelos modelos de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011] com as determinadas pelos modelos de EF (a) IJ-CS-20 e (b) IJ-CS-50. ....	366
Figura 8.28 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para os modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes níveis de esforço axial nos pilares. ....	366
Figura 8.29 – Comportamento experimental e modelação numérica do painel PV20 (Vecchio e Collins [1986]). ....	367
Figura 8.30 – Elementos transversais na ligação viga-pilar interior. ....	368
Figura 8.31 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes configurações na direcção ortogonal ao plano do pórtico. ....	369
Figura 8.32 – Relação $\tau_{jh}-\gamma$ para os modelos de EF analisados confrontada com a determinada pelo modelo de LaFave e Kim [2011] para as ligações viga-pilar desses modelos.....	370
Figura 8.33 – Identificação dos pontos de monitorização de tensões nas armaduras do modelo EJ-Ref. ....	371
Figura 8.34 – Resultados dos modelos de EF: (a) relação $H-d$ para os modelos EJ-Ref e EJ-RIG e (b) tensão nas cintas na ligação do modelo EJ-Ref.....	372
Figura 8.35 – Tensão nas armaduras longitudinais do modelo de EF EJ-Ref: (a) secção $CC'$ e (b) secção $AA'$ . ....	372
Figura 8.36 – Modelo de EF EJ-Ref: (a) distorção do núcleo da ligação e (b) tensão tangencial no plano médio do núcleo da ligação.....	373
Figura 8.37 – Expansão lateral localizada da ligação viga-pilar: (a) representação esquemática e (b) padrão de fendilhação da ligação no modelo de EF EJ-Ref.....	373
Figura 8.38 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidades com diferentes percentagens de armadura transversal. ....	374
Figura 8.39 – Relação $\tau_{jh}-\gamma$ determinadas pelos modelos de (a) LaFave e Kim [2011] e (b) Roeser [2002] para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.14.....	375

Figura 8.40 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes quantidades de varões verticais intermédios.....	376
Figura 8.41 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes quantidades de varões da armadura longitudinal dos pilares dispostos na diagonal da ligação.....	378
Figura 8.42 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para os modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes raios internos de dobra dos varões da armadura longitudinal da viga no interior da ligação.....	379
Figura 8.43 – Comparação das curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade em que a amarração da armadura longitudinal da viga é efectuada recorrendo a chapas de ancoragem e à dobragem para o interior da ligação.....	382
Figura 8.44 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade constituídas por betões com valor diferente da tensão de rotura à compressão.....	384
Figura 8.45 – Relação $\tau_{jh}-\gamma$ determinada pelos modelos de (a) LaFave e Kim [2011] e (b) Roeser [2002] para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.24.....	385
Figura 8.46 – Comparação das relações $\tau_{jh}-\gamma$ determinadas pelos modelos de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011] com as determinadas pelos modelos de EF (a) EJ-CS-20 e (b) EJ-CS-50.....	385
Figura 8.47 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para os modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes níveis de esforço axial nos pilares.....	386
Figura 8.48 – Elementos transversais na ligação viga-pilar de extremidade.....	388
Figura 8.49 – Curvas (a) $H-d$ e (b) $\tau_{jh}-\gamma$ para os modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes configurações na direcção ortogonal ao plano do pórtico.....	388
Figura 8.50 – Relação $\tau_{jh}-\gamma$ determinada para os modelos de EF pelo ATENA 3D e para as respectivas ligações pelo modelo de LaFave e Kim [2011].....	389
Figura A.1 – Mecanismo de resistência por aderência para armaduras nervuradas (Eligehausen, Popov <i>et al.</i> [1983]), (a) fase inicial, (b) fase intermédia, (c) fase final.....	402
Figura A.2 – Relação tensão de aderência-escorregamento (MC90 [1990]).....	403
Figura A.3 – Amarração rectilínea, (a) $\sigma_{s0}=f_y$ , (b) $\sigma_{s0}>f_y$ .....	410
Figura A.4 – Relação constitutiva para a amarração.....	413
Figura A.5 – Relação constitutiva constante por troços para a componente aderência.....	414
Figura A.6 – Comprimento da amarração.....	415
Figura A.7 – Cenário 1 e 2 no passo $p$ , (a) distribuição de $\tau_a$ ao longo do varão, (b) esforço na componente aderência da célula 1.....	419
Figura A.8 – Relação constitutiva $F_1-s_1$ até ao instante B (fim do movimento de corpo rígido).....	420
Figura A.9 – Escorregamento relativo da célula $i$ em relação à célula $n$ para $i < n$ , (a) distribuição das resultantes de aderência, (b) esforços no troço compreendido entre as secções $p$ e $i$ .....	425
Figura A.10 – Deformação axial de um elemento linear homogéneo, (a) carga concentrada, (b) carga uniformemente distribuída.....	425
Figura A.11 – Escorregamento relativo da célula $i$ em relação à célula $n$ para $i > n$ , (a) distribuição das resultantes de aderência, (b) esforços no troço compreendido entre as secções $i$ e $p$ .....	426
Figura A.12 – Distribuição de tensões tangenciais na armadura, (a) cenário 2-1, (b) cenário 2-2.....	427
Figura A.13 – Valores limite para a cedência das armaduras.....	427
Figura A.14 – Comportamento de uma amarração curta, (a) relação $F_0-s_0$ , (b) relações $\tau$ - $s$ .....	430

# Índice de tabelas

Tabela 2.1 – Classificação das ligações viga-pilar de acordo com o número e disposição dos elementos adjacentes (adaptado de ACI-ASCE Committee 352 [2002]).....	13
Tabela 2.2 – Pormenorização da armadura em ligações viga-pilar de extremidade (adaptado de Roeser [2002]). .....	14
Tabela 2.3 – Tipos de modelos de junta (IPQ [2010c]).....	16
Tabela 2.4 – Valores do parâmetro $\gamma$ (ACI-ASCE Committee 352 [2002]). .....	43
Tabela 2.5 – Resistência das ligações viga-pilar ( $f_c'$ em MPa e $A_j$ em mm <sup>2</sup> , ACI Committee 318 [2008])...	45
Tabela 3.1 – Quociente $M_e/M_p$ para os cenários considerados. ....	52
Tabela 3.2 – Propriedades geométricas dos espécimes e propriedades mecânicas do betão (Sarsam [1983]). .....	56
Tabela 3.3 – Propriedades mecânicas das armaduras (Sarsam [1983]). .....	57
Tabela 3.4 – Parâmetros da curva de Richard e Abbott [1975].....	64
Tabela 3.5 – Esbelteza $\lambda$ dos pilares.....	74
Tabela 4.1 – Carga máxima suportada pelos modelos para $r_c^{\min} = 0.8$ . ....	105
Tabela 4.2 – Carga máxima suportada pelos modelos para $w_d = 5$ mm. ....	106
Tabela 4.3 – Carga máxima suportada pelos modelos para $r_c^{\min} = 0.7$ . ....	106
Tabela 4.4 – Modelos usados na avaliação da objectividade da malha. ....	107
Tabela 5.1 – Valores aproximados do parâmetro $\beta$ (CEN [2005a]). .....	140
Tabela 5.2 – Características geométricas e mecânicas dos espécimes ensaiados por Ueda, Lin <i>et al.</i> [1986]. .....	176
Tabela 5.3 – Parâmetro $\alpha_{rt}$ .....	195
Tabela 5.4 – Modelo proposto por Kim e LaFave [2009].....	195
Tabela 5.5 – Principais características das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002]...	197
Tabela 5.6 – Colapso das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002] .....	199
Tabela 5.7 – Média e desvio padrão da carga de colapso das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002].....	199
Tabela 5.8 – Principais características das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002]. .....	200
Tabela 5.9 – Colapso das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002].....	203
Tabela 5.10 – Média e desvio padrão da carga de colapso das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002].....	203
Tabela 5.11 – Colapso das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Sarsam [1983]. .....	204
Tabela 6.1 – Pontos notáveis da relação constitutiva proposta por Gupta e Maestrini [1990] .....	229
Tabela 6.2 – Erro relativo do deslocamento transversal.....	244
Tabela 6.3 – Erros no cálculo do deslocamento transversal e axial da estrutura. ....	245
Tabela 6.4 – Propriedades geométricas das vigas.....	247
Tabela 6.5 – Propriedades mecânicas e geométricas das vigas. ....	247

Tabela 6.6 – Propriedades mecânicas e geométricas das vigas (continuação).....	248
Tabela 6.7 – Cargas máximas aplicadas em subestruturas com ligações viga-pilar interiores. ....	258
Tabela 6.8 – Cargas máximas aplicadas em subestruturas com ligações viga-pilar de extremidade.....	262
Tabela 6.9 – Armaduras transversais na ligação (assumindo 2 ramos por cinta). ....	271
Tabela 6.10 – Variação do parâmetro $\alpha_1$ com a quantidade de armadura transversal na ligação. ....	272
Tabela 6.11 – Carga (uniformemente distribuída nas vigas) máxima suportada pela estrutura. ....	280
Tabela 6.12 – Valores dos parâmetros $\alpha_2$ a $\alpha_5$ , para o exemplo analisado.....	282
Tabela 6.13 – Deslocamento alvo e corte basal correspondente. ....	289
Tabela 6.14 – Valores do coeficiente $\theta$ para pontos de desempenho dos casos ST1/M/R ( $\theta_R$ ) e ST1/M/F ( $\theta_F$ ). ....	293
Tabela 7.1 – Número mínimo de pisos para $\varepsilon < 10\%$ . ....	302
Tabela 7.2 – Armadura longitudinal nas secções transversais. ....	308
Tabela 7.3 – Rigidez elementar efectiva em função da quantidade de armadura longitudinal para $n = 0$ e $Q = 0.6Q_u$ . ....	310
Tabela 7.4 – Rigidez elementar efectiva em função da tensão de rotura à compressão do betão e da tensão de cedência do aço. ....	311
Tabela 7.5 – Efeito do esforço axial sobre a rigidez elementar efectiva. ....	312
Tabela 7.6 – Valores da esbelteza simplificada e correspondentes rigidezes normalizadas mínimas. ....	322
Tabela 7.7 – Esbelteza simplificada considerada e correspondente coeficientes mínimos de rigidez normalizada. ....	332
Tabela 7.8 – Exemplo de aplicação: rigidez das componentes da ligação viga-pilar [ $10^3$ kN/m]. ....	335
Tabela 7.9 – Exemplo de aplicação: resultado da aplicação dos critérios simplificados de classificação a ligações viga-pilar interiores.....	337
Tabela 7.10 – Exemplo de aplicação: resultado da aplicação dos critérios simplificados de classificação a ligações viga-pilar de extremidade.....	337
Tabela 7.11 – Exemplo de aplicação: incremento relativo dos esforços $\varepsilon_{MG}^{Rig}$ nos pilares de cada piso [%]. ....	337
Tabela 7.12 – Exemplo de aplicação: resultado da aplicação dos critérios simplificados de classificação a ligações viga-pilar interiores.....	338
Tabela 7.13 – Exemplo de aplicação: resultado da aplicação dos critérios simplificados de classificação a ligações viga-pilar de extremidade.....	338
Tabela 7.14 – Exemplo de aplicação: incremento relativo dos esforços $\varepsilon_{MG}^e$ nos pilares de cada piso [%]. ....	339
Tabela 8.1 – Modelos de EF utilizados para analisar efeito da percentagem mecânica de armadura transversal em ligações viga-pilar interiores. ....	350
Tabela 8.2 – Tensão tangencial a meia altura da ligação viga-pilar para $H \approx 84.5$ kN.....	353
Tabela 8.3 – Efeito da percentagem mecânica de armadura transversal em ligações viga-pilar interiores (valores em MPa).....	355
Tabela 8.4 – Modelos utilizados para analisar efeito dos varões verticais intermédios nos pilares em ligações viga-pilar interiores.....	356
Tabela 8.5 – Efeito dos varões verticais intermédios nos pilares em ligações viga-pilar interiores (valores em MPa). ....	357
Tabela 8.6 – Modelos de EF utilizados para estudar o efeito da colocação de varões da armadura	

longitudinal dos pilares na diagonal na ligação em ligações viga-pilar interiores.....	359
Tabela 8.7 – Efeito da colocação de parte dos varões da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação viga-pilar interior sobre o comportamento da ligação viga-pilar (valores em MPa). ....	360
Tabela 8.8 – Modelos utilizados na análise do efeito da resistência à compressão do betão em ligações viga-pilar interiores. ....	364
Tabela 8.9 – Efeito da resistência à compressão do betão em ligações viga-pilar interiores (valores em MPa). ....	365
Tabela 8.10 – Valores do esforço axial nos pilares, em ligações viga-pilar, nos modelos analisados. ....	366
Tabela 8.11 – Efeito do esforço axial nos pilares em ligações viga-pilar interiores (valores em MPa). ...	367
Tabela 8.12 – Modelos utilizados na análise do efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico em ligações viga-pilar interiores. ....	368
Tabela 8.13 – Efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico sobre o comportamento da ligação viga-pilar interior (valores em MPa). ....	369
Tabela 8.14 – Modelos utilizados na análise do efeito da percentagem mecânica de armadura transversal em ligações viga-pilar de extremidade. ....	374
Tabela 8.15 – Efeito da armadura transversal em ligações viga-pilar de extremidade sobre o comportamento da própria ligação (valores em MPa). ....	374
Tabela 8.16 – Modelos utilizados na análise do efeito de varões verticais intermédios nos pilares em ligações viga-pilar de extremidade.....	376
Tabela 8.17 – Efeito de varões verticais intermédios nos pilares sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade (valores em MPa). ....	377
Tabela 8.18 – Modelos utilizados na análise do efeito da disposição dos varões da armadura longitudinal dos pilares na diagonal em ligações viga-pilar de extremidade. ....	377
Tabela 8.19 – Efeito da disposição parcial da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação viga-pilar de extremidade sobre o seu comportamento (valores em MPa).....	378
Tabela 8.20 – Modelos utilizados na análise do efeito do diâmetro interno da dobra dos varões da armadura longitudinal da viga no comportamento da ligação viga-pilar de extremidade. ....	379
Tabela 8.21 – Efeito do raio interno da dobra dos varões da armadura longitudinal da viga sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade (valores em MPa). ....	380
Tabela 8.22 – Diâmetro mínimo do mandril de acordo com a ACI 318-08 (ACI Committee 318 [2008]).	380
Tabela 8.23 – Diâmetro mínimo do mandril segundo diversas recomendações técnicas. ....	381
Tabela 8.24 – Modelos utilizados na análise do efeito da resistência à compressão do betão no comportamento da ligação viga-pilar de extremidade. ....	383
Tabela 8.25 – Efeito da resistência à compressão do betão sobre o comportamento de ligações viga-pilar de extremidade (valores em MPa). ....	384
Tabela 8.26 – Modelos utilizados na análise do efeito do esforço axial nos pilares sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade. ....	386
Tabela 8.27 – Efeito do esforço axial nos pilares sobre o comportamento de ligações viga-pilar de extremidade (valores em MPa). ....	387
Tabela 8.28 – Modelos utilizados na análise do efeito da configuração da ligação viga-pilar de extremidade na direcção ortogonal ao plano do pórtico.....	387
Tabela 8.29 – Efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade (valores em MPa). ....	388
Tabela 8.30 – Síntese dos resultados do estudo paramétrico efectuado. ....	393

Tabela A.1 – Parâmetros de aderência para armaduras nervuradas com $A_{sr} \approx A_{sr,min}$ (MC90 [1990]). ....	404
Tabela A.2 – Tensão de aderência em função do estado de tensão na armadura (Lowes, Mitra <i>et al.</i> [2004]). .....	407



# Simbologia

A nomenclatura adoptada neste documento segue, sempre que possível, a nomenclatura adoptada pela fontes consultadas e nos casos em que existe potencial de confusão segue, genericamente, a ISO 3898 (ISO [1997]).

## Letras latinas minúsculas

$a_b$	metade da distância entre varões paralelos
$b$	largura da secção transversal
$b_c''$	largura do núcleo do pilar medida pelo contorno exterior das armaduras transversais
$b_{LM}$	largura da linha média da camada
$b_w$	largura da secção transversal da viga
$c$	coesão; profundidade do eixo neutro; recobrimento da armadura
$d$	altura útil da secção transversal
$\mathbf{d}$	vector dos deslocamentos nodais
$d'$	distância do eixo da armadura comprimida à fibra de betão mais comprimida
$\mathbf{d}_{cd,i}$	vector das componentes do deslocamento do nó da célula $i$ nas direcções $c$ e $d$ ;
$d_H$	deslocamento horizontal
$d_{strut}$	largura da escora
$\mathbf{d}_{tr}$	vector das componentes do deslocamento dos nós de duas células consecutivas da amarração curvilínea nas direcções $t$ e $r$ (tangencial e radial, respectivamente);
$\mathbf{d}_{tr,i}$	vector das componentes do deslocamento do nó da célula $i$ nas direcções $t$ e $r$ (tangencial e radial, respectivamente);
$e$	excentricidade; excentricidade do eixo da viga em relação ao eixo do pilar; distância entre eixos de varões paralelos
$f$	esforço na componente do modelo de ligação viga-pilar
$\mathbf{f}$	vector dos esforços nas componentes do modelo de ligação viga-pilar
$f_b$	tensão transversal ao eixo da armadura correspondente ao colapso
$f_c'$	tensão de rotura do betão à compressão uniaxial em ensaio normalizado de cilindros com 30 cm de altura e 15 cm de diâmetro
$f_{cd}$	valor de cálculo da tensão de rotura do betão à compressão
$f_{ck}$	valor de característico da tensão de rotura do betão à compressão
$f_{ct}$	resistência à tracção betão
$f_{ctd}$	valor de cálculo da resistência à tracção do betão
$f_{ctm}$	valor médio da resistência à tracção do betão
$f_t$	resistência à tracção efectiva do betão
$f_{t,k}$	resistência à tracção corrente na direcção $k$
$f_{tm}$	valor médio da resistência à tracção do aço de armaduras de betão armado
$f_u$	tensão última das armaduras

$f_y$	tensão de cedência
$f_{y,b}$	tensão de cedência da armadura longitudinal da viga
$f_{y,t}$	tensão de cedência das cintas
$f_{yd}$	valor de cálculo da tensão de cedência
$f_{yh}$	tensão de cedência da armadura em espiral
$f_{yk}$	valor de característico da tensão de cedência
$f_{ywd}$	valor de cálculo da tensão de cedência das armaduras transversais
$h$	altura da secção transversal; largura do apoio
$h_{jc}$	distância entre as camadas exteriores da armadura longitudinal do pilar
$h_{jw}$	distância entre as camadas exteriores da armadura longitudinal da viga
$h_L$	altura das nervuras
$k$	rigidez
$\mathbf{k}$	matriz de rigidez tangente do modelo de ligação viga-pilar
$k_{ad,i}$	rigidez tangente da componente de aderência da célula $i$
$k_f$	rigidez transversal
$k_{g,i}$	rigidez tangente global da célula $i$
$k_{jb,ini}$	rigidez inicial adimensionalizada da junta
$k_{jb,sec}$	rigidez secante adimensionalizada da junta
$k_{m,i}$	rigidez tangente da componente armadura da célula $i$
$k_\tau$	rigidez tangente da relação $\tau$ - $s$
$l_d$	comprimento mínimo de amarração para amarrações rectilíneas
$l_{dh}$	comprimento mínimo de amarração para amarrações em gancho <i>standard</i>
$l_{dt}$	comprimento mínimo de amarração para amarrações em gancho <i>standard</i> com cabeça de amarração
$l_{ij}^p$	direcção de retorno plástico
$m$	atrito interno
$n$	numero de varões; esforço axial reduzido; numero de células em que a amarração é discretizada
$n_p$	numero de pisos acima do piso em análise
$nvf$	numero de vértices da forma
$\rho$	componente das forças aplicadas sobre a armadura com a direcção radial, por unidade de comprimento; número de células solicitadas; quociente entre a área da secção transversal dos varões dispostos na diagonal e a área da secção transversal da totalidade dos varões da armadura longitudinal dos pilares
$q$	carga uniformemente distribuída
$r$	raio do eixo da armadura
$r_c$	factor redutor da capacidade resistente do betão à compressão por efeito das extensões transversais de tracção
$r_i$	raio interno de dobragem da armadura
rec	recobrimento da armadura

$S$	movimento da armadura; escorregamento; espaçamento vertical das cintas
$S_{wd}$	componentes do movimento do nó das células de uma amarração curvilínea no referencial $(w, d)$
$S_{d,i}$	componente do movimento relativo da armadura na célula $i$ na direcção $d$
$S_L$	distância livre entre nervuras
$S_h$	espaçamento vertical entre eixos das camadas de armadura transversal
$S_i$	escorregamento da célula $i$
$S_F$	quociente entre a rigidez normal e a rigidez de corte nas fendas
$S_{r,i}$	componente radial do movimento relativo da armadura na célula $i$
$S_{t,i}$	componente tangencial do movimento relativo da armadura na célula $i$
$S_{tr}$	componentes do movimento do nó das células de uma amarração curvilínea no referencial $(t, r)$
$S_{w,i}$	componente do movimento relativo da armadura na célula $i$ na direcção $w$
$u$	perímetro da secção transversal do varão; deslocamento nodal
$w$	deslocamento
$w_d$	encurtamento do provete de betão correspondente à anulação da tensão normal de compressão instalada
$w_k^{\max}$	abertura máxima que a fenda ortogonal à direcção $k$ já experimentou
$w_0$	abertura da fenda de tracção correspondente à anulação da tensão normal de tracção instalada
$y$	deslocamento transversal ao eixo da armadura
$z$	braço interno da secção transversal

## Letras latinas maiúsculas

$A$	área
$\mathbf{A}$	matriz de compatibilidade do modelo de ligação viga-pilar
$A_c$	área da secção transversal do núcleo do pilar medida pelo contorno exterior da armadura transversal; área de betão na secção transversal de um tirante de betão armado
$A_g$	área da secção transversal do pilar; área de secção transversal de betão
$A_j$	secção transversal da armadura transversal na ligação (todos os ramos das cintas)
$A_s$	área da secção transversal dos varões da armadura longitudinal/armadura longitudinal traccionados
$A'_s$	área da secção transversal dos varões da armadura longitudinal em compressão
$A_{sb}$	área da secção transversal dos varões da armadura longitudinal das vigas
$A_{sc}$	área da secção transversal dos varões da armadura longitudinal dos pilares
$A_{sc,d}$	área da secção transversal dos varões da armadura longitudinal dos pilares colocados na diagonal na ligação viga-pilar
$A_{sh}$	área total da secção transversal das cintas na ligação viga-pilar
$A_{sj,eff}$	área da secção transversal dos varões da armadura transversal efectiva na ligação viga-

	pilar
$A_{sr}$	área de nervuras
$A_{st}$	área da secção transversal de todos os ramos dos estribos; área de armadura longitudinal traccionada
$A_{sv,i}$	área total da secção transversal dos varões verticais intermédios nos pilares
$A_{s1}$	área da secção transversal dos varões superiores da armadura longitudinal da viga
$A_{s2}$	área da secção transversal dos varões inferiores da armadura longitudinal da viga
$A_v$	área da secção transversal da armadura transversal na ligação viga-pilar
$B$	largura do núcleo do pilar
$\mathbf{B}$	matriz de equilíbrio do modelo de ligação viga-pilar
$Bl$	índice de armadura longitudinal da viga
$C$	força resultante de compressão; distância entre eixos das armaduras longitudinais dos pilares
$C_{strut}$	força resultante de compressão na escora
$D$	diâmetro do mandril
$E$	módulo elasticidade
$\mathbf{E}$	tensor dos módulos de elasticidade instantâneos do betão (tensor de ordem quatro)
$E_T$	módulo de elasticidade tangente da armadura
$E_{ijkl}$	componente do tensor dos módulos de elasticidade instantâneos do betão
$E'_{ijkl}$	componente do tensor que relaciona a tensão com a extensão de fractura
$E_{sh}$	módulo de endurecimento para armaduras ordinárias
$El$	rigidez de flexão
$F$	força aplicada; força nodal
$\mathbf{F}$	vector das forças nodais
$F_{ad}$	força instalada na componente aderência
$F_{ad,i}$	força instalada na componente aderência da célula $i$
$\bar{F}_{ad}$	força instalada na componente aderência por unidade de comprimento da amarração
$F_{bt}$	força de tracção instalada no varão na secção de início do troço curvilíneo
$\mathbf{F}_{tr}$	vector dos esforços nas componentes das células de uma amarração curvilínea nos referencial $(t, r)$
$F_{cws}$	força instalada na componente alma do pilar solicitado por corte
$F_{c,i}$	força instalada na componente betão da célula $i$
$F_i$	força aplicada segundo a coordenada $i$ ; esforço $i$ ; força instalada na célula $i$
$F_{max}$	força máxima suportada pela estrutura
$F_{m,i}$	força instalada na componente armadura da célula $i$
$\mathbf{F}_{tr}$	vector das componentes radiais e tangenciais das forças instaladas em duas células consecutivas da amarração curvilínea
$G$	módulo de distorção
$G^{\parallel}$	rigidez ao corte da ligação viga-pilar fendilhada

$G_f$	energia de fractura
$G^f$	função que define a direcção das extensões de fractura
$G^p$	função que define a direcção das extensões plásticas (função potencial plástico)
$H$	força horizontal
$I$	momento de inércia
$I_g$	momento de inércia da secção transversal total de betão
$I_1$	primeiro invariante do estado de tensão
$I_2'$	segundo invariante da componente de desvio do estado de tensão
$I_3'$	terceiro invariante da componente de desvio do estado de tensão
$J_I$	índice de armadura transversal da ligação
$K$	rigidez de flexão de um elemento linear
$K_b^{sa}$	rigidez de flexão de uma viga simplesmente apoiada
$L$	comprimento de amarração com tensões de aderência instaladas
$L_b$	comprimento da viga medido entre faces dos pilares
$L_{be}$	comprimento da viga medido entre eixos dos pilares
$L_c$	comprimento do pilar medido entre faces das vigas; comprimento característico de compressão
$L_{ce}$	comprimento do pilar medido entre eixos das vigas
$L_e$	comprimento do vão medido entre eixos
$L_n$	comprimento de cada célula da discretização da amarração
$L_p$	comprimento da rótula plástica
$L_{reg}$	comprimento adoptado para efeitos de regularização
$L_t$	comprimento característico de tracção; comprimento total da amarração
$L_y$	comprimento da amarração com tensões de aderência instaladas quando o varão atinge a cedência
$M$	momento flector
$M_b$	momento flector na extremidade da viga à face do pilar
$M_{b,pl,Rd}$	momento plástico resistente de cálculo da secção transversal da viga
$M_c$	momento flector na extremidade do pilar à face da viga
$M_{c,pl,Rd}$	momento plástico resistente de cálculo da secção transversal do pilar
$M_e$	momento flector na extremidade do elemento no ponto de intersecção dos eixos
$M_{Ed,enc}$	momento actuante de cálculo assumindo encastramento à face do apoio
$M_{j,b}$	momento flector na extremidade da viga no ponto de intersecção com o eixo do pilar
$M_{j,c}$	momento flector na extremidade do pilar no ponto de intersecção com o eixo da viga
$M_{j,Rd}$	momento resistente de cálculo da junta
$M_p$	momento flector na extremidade do elemento na periferia da ligação viga-pilar
$M_\gamma$	momento distorcional
$N$	esforço axial

$N_{col}$	força axial aplicado no pilar
$N_r$	força axial de fendilhação de uma tirante de betão armado
$P$	força vertical
$Q$	força nodal; resultante das cargas gravíticas aplicadas no piso
$\mathbf{Q}$	vector de cargas nodais
$R$	reação de apoio
$S$	rigidez; momento estático
$T$	força resultante de tracção
$\mathbf{T}$	matriz de transformação de coordenadas
$V$	esforço transversal
$V_a$	força de corte transmitida por atrito ao longo da fenda
$V_{cws}$	força de corte a meia altura da alma do pilar
$V_{jh}$	força de corte horizontal a meia altura da ligação
$V_{jhd}$	força de corte horizontal de cálculo a meia altura da ligação
$Vol_j$	volume do paralelepípedo que constitui a ligação

## Letras gregas minúsculas

$\alpha$	factor multiplicador de carga; coeficiente que tem em conta a sobrerresistência do aço; amplificação; erro relativo; quociente entre módulo de elasticidade do aço e do betão; inclinação
$\alpha_e$	coeficiente de homogeneização de aço em betão
$\phi$	diâmetro do varão
$\gamma$	distorção da ligação viga-pilar
$\gamma_{Rd}$	coeficiente que tem em conta a sobrerresistência do aço
$\gamma_s$	coeficiente parcial relativo ao aço das armaduras para betão armado
$\delta$	deslocamento; variação
$\delta_{ij}$	delta de <i>Kronecker</i>
$\varepsilon$	extensão; erro relativo
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor das extensões; vector das deformações das componentes da célula da amarração curvilínea
$\varepsilon_c$	extensão no betão
$\varepsilon_{c,u}$	extensão última do betão
$\varepsilon_c^p$	extensão plástica equivalente correspondente $f'_c$
$\varepsilon_{eq}^p$	extensão plástica equivalente
$\varepsilon_{ij}$	componente do tensor das extensões
$\varepsilon'_{ij}$	componente do tensor das extensões nas direcções principais de ortotropia do material
$\varepsilon_d$	tolerância adoptada para a variação dos deslocamentos
$\hat{\varepsilon}_{kk}^f$	extensão máxima de fractura experimentada na direcção $k$ de ortotropia do material

$\varepsilon_V^p$	extensão volumétrica plástica
$\varepsilon_s$	extensão nas armaduras
$\varepsilon_{sh}$	extensão nas armaduras correspondente ao fim do patamar de cedência
$\varepsilon_u$	extensão última das armaduras
$\varepsilon_x$	extensão na direcção x
$\varepsilon_y$	extensão na direcção y; extensão de cedência das armaduras
$\bar{\varepsilon}_y$	extensão no betão quando as armaduras atingem a cedência
$\varepsilon_0$	extensão no betão em ensaio de compressão uniaxial correspondente a $f'_c$ ; extensão axial ao nível do centro de gravidade da secção transversal
$\varepsilon_1$	extensão principal máxima
$\varepsilon_2$	extensão principal mínima em estado plano de tensão
$\varepsilon_3^p$	extensão principal plástica mínima
$\zeta$	<i>softening coefficient</i> ; quociente entre as cargas laterais e gravíticas aplicadas ao nível de um piso
$\eta$	coeficiente de redução da resistência do betão à compressão devido às extensões de tracção na direcção transversal; quociente entre rigidezes efectivas de componentes amarração;
$\theta$	terceira coordenada de <i>Haigh-Westergaard</i> ; deformação da mola angular; ângulo ao centro; inclinação; rotação; <i>drift</i> ; ângulo entre os sistema de eixos local da ligação e o sistema de eixos global
$\theta_n$	ângulo ao centro de cada célula
$\theta_{strut}$	inclinação da escora
$\lambda$	parâmetro de carga; esbelteza
$\lambda^f$	multiplicador de fractura
$\lambda^p$	multiplicador plástico
$\nu$	esforço axial reduzido; coeficiente de <i>Poisson</i>
$\xi$	primeira coordenada de <i>Haigh-Westergaard</i>
$\rho$	taxa de armadura longitudinal de tracção de um elemento linear; segunda coordenada de <i>Haigh-Westergaard</i> ; quociente entre a rigidez das vigas e dos pilares
$\rho'$	taxa de armadura longitudinal de compressão de um elemento linear
$\rho_b$	percentagem de armadura longitudinal da viga
$\rho_c$	quociente entre as armaduras do pilar e a área de secção transversal bruta do pilar
$\rho_{max}$	taxa máxima admissível de armadura de tracção da viga que atravessa a ligação
$\rho_j$	taxa de armadura transversal na ligação viga-pilar
$\rho_s$	taxa volumétrica de armadura transversal na ligação viga-pilar
$\rho_{sv,i}$	razão entre as percentagens de armadura vertical intermédia e horizontal na ligação
$\sigma$	tensão normal
$\boldsymbol{\sigma}$	tensor das tensões; vector das forças instaladas nas componentes das células da amarração
$\sigma_b$	tensão transversal ao eixo da armadura

$\sigma_c$	tensão instalada no betão
$\sigma_{c0}$	tensão correspondente ao início da deformação plástica em compressão uniaxial
$\sigma_h$	tensão normal horizontal num elemento em estado plano de tensão
$\sigma_{ij}$	componente do tensor das tensões
$\sigma_{ij}^t$	estimativa elástica da componente do tensor das tensões
$\sigma_{ij}^{n-1}$	componente do tensor das tensões no passo $n - 1$
$\sigma_{ij}^p$	componente do tensor dos correctores plásticos
$\sigma'_{ij}$	componente do tensor das tensões nas direcções de ortotropia do material
$\sigma_{ij}^{t'}$	estimativa elástica da componente do tensor das tensões nas direcções de ortotropia do material
$\sigma_{ij}^{\prime n-1}$	componente do tensor das tensões no passo $n - 1$ nas direcções de ortotropia do material
$\sigma_{\text{pilar}}$	tensão de compressão no pilar obtida pelo quociente entre o esforço axial e a secção transversal do pilar
$\sigma_s$	tensão instalada na armadura
$\sigma'_s$	tensão instalada na armadura de compressão
$\sigma_v$	tensão normal vertical num elemento em estado plano de tensão
$\sigma_1$	tensão principal máxima num elemento em estado plano de tensão
$\sigma_2$	tensão principal mínima num elemento em estado plano de tensão
$\tau$	tensão tangencial; tensão de aderência
$\tau_{jh}$	tensão tangencial nominal em plano horizontal a meia altura da ligação viga-pilar
$\chi$	curvatura
$\omega_j$	percentagem mecânica de armadura transversal

## Letras gregas maiúsculas

$\Delta$	variação ou incremento; deformação na componente do modelo de ligação viga-pilar
$\mathbf{\Delta}$	vector das deformações nas componentes do modelo de ligação viga-pilar
$\Delta_{ad,i}$	deformação da componente de aderência da célula $i$
$\Delta_{c,i}$	deformação da componente betão da célula $i$
$\mathbf{\Delta}_{cmp}$	vector de deformações nas componentes de uma célula de uma amarração curvilínea
$\Delta_{m,i}$	deformação da componente armadura da célula $i$

## Subscritos

b	viga
b1	extremidade da viga à direita da ligação viga-pilar (periferia da ligação viga-pilar)
b2	extremidade da viga à esquerda da ligação viga-pilar (periferia da ligação viga-pilar)
c	pilar; betão
CG	centro geométrico



cr	valor crítico de encurvadura
c1	extremidade do pilar abaixo da ligação viga-pilar (periferia da ligação viga-pilar)
c2	extremidade do pilar acima da ligação viga-pilar (periferia da ligação viga-pilar)
d	valor de cálculo; deslocamento
ef	efectivo
E	valor actuante; regime elástico; equivalente
F	fictício
Ed	valor actuante de cálculo
Eq	equivalente
ID	inferior do lado direito
IE	inferior do lado esquerdo
ini	inicial
j	junta; ligação viga-pilar
k	valor característico
M	momento flector
pl	análise rígido-plástica
R	valor resistente
Rd	valor resistente de cálculo
s	armadura; situação de serviço
SD	superior do lado direito
SE	superior do lado esquerdo
sec	secante
T	total
u	carga máxima
y	regime pós-cedência
0	inicial

## Sobrescritos

cr	secção fendilhada
e	elástico linear
f	fractura
H	horizontal
<i>i</i>	numero da iteração
mc	parâmetro proposto no MC90 [1990] ou no Fib [2010a]
max	máximo
min	mínimo
nl	não linear
NRig	ligação viga-pilar deformável
p	plástico
Rig	ligação viga-pilar rígida
V	vertical

y	cedência
1st	primeira ordem
2nd	segunda ordem

## Abreviaturas

ACI	<i>American Concrete Institute</i>
ASCE	<i>American Society of Civil Engineers</i>
AP	aderência perfeita
BCA	boas condições de aderência
BP	chapas de ancoragem ( <i>bearing plate</i> )
CG	carregamento predominantemente gravítico
CL	carregamento predominantemente lateral
CS	resistência à compressão do betão ( <i>concrete compressive strength</i> )
CTD	configuração na direcção transversal ao plano do pórtico da estrutura ( <i>configuration in transversal direction</i> )
DCH	classe de ductilidade alta ( <i>ductility class high</i> )
DCL	classe de ductilidade baixa ( <i>ductility class low</i> )
DCM	classe de ductilidade média ( <i>ductility class medium</i> )
DR	armadura diagonal ( <i>diagonal reinforcement</i> )
EF	elementos finitos
EJ	ligação viga-pilar de extremidade ( <i>exterior beam-column joint</i> )
EN	Norma Europeia
FNE	forças nodais equivalentes
ICR	varões intermédios da armadura longitudinal do pilar ( <i>intermediate column reinforcement bars</i> )
IBD	diâmetro interno da dobra ( <i>internal bend diameter</i> )
IJ	ligação viga-pilar interior ( <i>interior beam column joint</i> )
JTR	armadura transversal na ligação ( <i>joint transverse reinforcement</i> )
LVDT	transdutor de deslocamentos ( <i>linear variable differential transformer</i> )
MCFT	<i>Modified compression field theory</i>
MEF	método dos elementos finitos
NP	Norma Portuguesa
OCA	outras condições de aderência

---

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1. Enquadramento do tema

A utilização exclusiva de elementos lineares na modelação numérica de estruturas porticadas correntes é natural, dada (i) a relativa esbelteza característica das vigas e pilares, (ii) a redução da complexidade do problema original resultante da utilização exclusiva de modelos unidimensionais e, portanto, (iii) a redução do custo computacional da sua modelação, e (iv) a convicção generalizada, ainda que não fundamentada, de que os erros associados a este modelo são admissíveis, tanto em termos de segurança estrutural como em termos de custos. Uma inconsistência nesta abordagem reside na modelação das ligações viga-pilar. De facto, estes elementos constituem zonas de descontinuidade estrutural, cujo comportamento não é descrito de forma adequada pelas hipóteses cinemáticas usadas na formulação dos elementos lineares, como as associadas às teorias de *Euler-Bernoulli* e de *Timoshenko*.

As ligações viga-pilar de estruturas porticadas de edifícios em betão armado viram a atenção das comunidades científica e técnica crescer a partir da década de 1960. Este interesse resultou de se ter verificado, em estudos de reconhecimento efectuados após a ocorrência de sismos, que a capacidade resistente destas estruturas era frequentemente condicionada pela capacidade resistente das ligações viga-pilar. Até essa data, os danos observados das acções sísmicas sobre as estruturas de edifícios de betão armado situavam-se predominantemente nas vigas e pilares. Esta diferença de comportamento ficou a dever-se, não à qualidade superior das ligações viga-pilar anteriores à década de 1960, mas sim ao deficiente dimensionamento das vigas e pilares. Mais precisamente, a deficiente pormenorização das armaduras dos pilares, com o betão inadequadamente confinado, conduzia frequentemente ao colapso das estruturas em consequência da formação de mecanismos do tipo *soft-storey*. Assim, o aumento da capacidade resistente das vigas e pilares por comparação com a das ligações começou a ser notória por esta altura, evidenciando o facto das ligações viga-pilar serem igualmente um elemento crítico para a capacidade resistente de estruturas porticadas de betão armado (Paulay e Priestley [1992], Tajiri,

Shiohara *et al.* [2006], Lee, Kim *et al.* [2009]).

Nas últimas décadas foram levados a cabo numerosos estudos, especialmente em zonas de elevado risco sísmico (E.U.A., Japão, Nova Zelândia), com o objectivo de identificar os parâmetros com maior influência sobre capacidade resistente das ligações viga-pilar de estruturas reticuladas de betão armado. Quanto aos mecanismos resistentes destes elementos, embora ainda não tenha sido alcançado um consenso análogo ao existente para os elementos lineares, as principais conclusões de diversos estudos já são consideradas pela maioria das especificações técnicas relativas a estruturas de betão armado em situação sísmica, essencialmente na forma de (i) disposições que visam limitar os esforços transmitidos pelas vigas e pilares à ligação e (ii) esquemas de pormenorização da armadura que visam garantir uma adequada capacidade resistente das ligações viga-pilar das estruturas sujeitas a acções sísmicas.

A degradação da resistência e da rigidez das ligações viga-pilar sujeitas a acções cíclicas de forte intensidade também tem merecido atenção já que estes elementos estruturais constituem zonas de elevada dissipação de energia.

A modelação corrente de ligações viga-pilar de estruturas de betão armado baseia-se em procedimentos simplistas, adaptados a programas de análise estrutural vocacionados para a modelação de estruturas reticuladas com recurso quase exclusivo a elementos lineares (1D), os quais são naturalmente inapropriados para modelar adequadamente os modos de deformação predominantes nas ligações viga-pilar e para quantificar o seu estado de tensão em termos das grandezas mais relevantes. As abordagens mais comuns são englobáveis em dois grandes grupos: a deformabilidade da ligação viga-pilar ou é totalmente ignorada ou é considerada de forma aproximada através de um procedimento *ad hoc*. No primeiro destes grupos, o modelo da ligação viga-pilar é rígido, ou seja, a sua forma e as suas dimensões são indiferentes aos esforços a que está sujeita. No segundo grupo, a deformabilidade da ligação viga-pilar é considerada no modelo através (i) do prolongamento das vigas e pilares para o interior da ligação, (ii) da modificação da rigidez à flexão das vigas e pilares adjacentes à ligação e/ou (iii) da disposição de molas angulares ligando as extremidades das vigas a um nó rígido. Estes modelos simplificados dão origem a diversas dificuldades no processo de análise, que se prendem, por um lado, com a avaliação do estado de tensão na ligação viga-pilar em termos das grandezas mais significativas para o seu comportamento e, por outro lado, com a quantificação suficientemente precisa da sua deformabilidade e a avaliação do seu efeito sobre o comportamento global da estrutura onde está inserida. Além disso, estes modelos simplificados, embora possam ser usados de forma satisfatória na análise elástica linear, quando adequadamente calibrados, dificilmente conduzem a bons resultados na análise não linear, na medida em que, não só não representam adequadamente a variação da rigidez da ligação viga-pilar ao longo da história de carga, como não apresentam indicadores que facilitem a detecção do seu colapso.

Embora já existam disposições técnicas com vista ao dimensionamento racional de ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado, nomeadamente para acções sísmicas, os procedimentos correntes de dimensionamento destes elementos para acções quase-estáticas e monotónicas, e mesmo alguns procedimentos simplificados para acções sísmicas, ignoram a

verificação explícita da capacidade resistente, deformabilidade e ductilidade das ligações viga-pilar. Estes procedimentos pressupõem, pelo menos implicitamente, que as ligações viga-pilar (i) resistem aos esforços transmitidos pelas vigas e pilares adjacentes e (ii) dispõem de ductilidade e rigidez suficientes para garantir um comportamento adequado das estruturas em que estão incorporadas, bastando para tal que a pormenorização da armadura das vigas e dos pilares adjacentes seja mantida no interior da ligação, desprezando as diferenças entre os estados de tensão típicos dos elementos lineares e das ligações viga-pilar. Alternativamente, são utilizadas pormenorizações padronizadas para as armaduras apresentadas por algumas especificações técnicas, ou deixa-se esta pormenorização a cargo do técnico responsável pela moldagem da armadura em obra, dispensando a verificação explícita, apoiada numa análise estrutural, da adequação da pormenorização à situação em causa (Nilson, Darwin *et al.* [2003]).

A utilização deste tipo de procedimentos simplificados para a modelação e dimensionamento correntes de ligações viga-pilar de estruturas de betão armado é paradoxal, dada a elevada dimensão relativa destes elementos, o custo reduzido que um dimensionamento e uma pormenorização adequada acarretam e a importância destes elementos para a segurança da estrutura. De facto, tomando como termo de comparação as ligações viga-pilar em estruturas metálicas, apesar da dimensão relativa destas ser significativamente inferior à das ligações em estruturas de betão armado e do custo de uma pormenorização adequada das ligações em estruturas metálicas poder ser significativo, estes elementos são alvo de uma muito maior atenção por parte dos projectistas, de modo a garantir a sua adequada modelação e dimensionamento.

Ainda no caso particular das estruturas metálicas, está disponível um elevado número de procedimentos, em alguns casos em especificações técnicas de âmbito internacional, destinados a auxiliar o projectista na determinação das propriedades mecânicas das ligações viga-pilar e a orientá-lo na selecção dos modelos a utilizar para simular o seu comportamento. Para este tipo de estruturas também estão disponíveis procedimentos simplificados que permitem avaliar em que casos é necessária a modelação explícita da deformabilidade das ligações viga-pilar. Já para as estruturas de betão armado, o panorama é o oposto: não foram encontrados estudos genéricos relativos ao efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar sobre o comportamento estrutural, nem estudos que estabeleçam critérios ou procedimentos expeditos para a identificação dos casos em que os modelos simplificados indicados anteriormente são adequados. Deve-se acrescentar que os modelos explícitos para ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado existentes na bibliografia da especialidade estão longe de ser consensuais.

De uma forma geral, a necessidade de optimização das soluções estruturais tendo em vista a redução dos custos, mas mantendo margens de segurança adequadas, requer modelos computacionais cada vez mais fiáveis que permitam avaliar de forma rigorosa os efeitos das acções sobre as estruturas. Neste sentido, a modelação de estruturas porticadas de betão armado recorrendo exclusivamente a elementos lineares (1D) pode revelar-se uma abordagem insatisfatória, em virtude tanto da capacidade resistente limitada das ligações como da sua deformabilidade. Este último aspecto pode ser relevante não só em estruturas esbeltas, para

os quais os efeitos de segunda ordem – e logo a deformabilidade das ligações – é condicionante, mas também em estruturas pouco esbeltas, se se atender à interdependência entre a flexibilidade das estruturas e os efeitos das acções sísmicas sobre estas.

De facto, a banalização dos betões de elevada resistência, decorrente do desenvolvimento de aditivos mais eficazes (*e.g.*, superplastificantes) e a redução relativa do custo de betões e armaduras com maior resistência, bem como o facto do projecto de arquitectura exigir frequentemente a dissimulação da estrutura do edifício, de modo a proporcionar uma maior versatilidade dos espaços (maiores vãos livres), tem conduzido a elementos estruturais cada vez mais esbeltos e, conseqüentemente, mais sensíveis a efeitos de segunda ordem. Nestes casos, a deformabilidade das ligações viga-pilar pode conduzir a agravamentos significativos dos efeitos de segunda ordem.

Já em estruturas pouco esbeltas, a elevada dimensão relativa das ligações viga-pilar pode torná-las responsáveis por uma parcela significativa das deformações laterais da estrutura e, conseqüentemente, a contabilização pouco rigorosa da deformabilidade das ligações pode levar a estimativas grosseiras dos deslocamentos da estrutura. Ora estes deslocamentos podem ser relevantes tanto na análise das condições de serviço como quando para a avaliação do efeito das acções sísmicas são utilizados métodos de análise não linear estáticos (análise *pushover*) ou dinâmicos. Além disso, os modelos de análise e dimensionamento simplificados podem conduzir a um sobredimensionamento excessivo e diferencial das vigas e pilares, minando os pressupostos subjacentes ao dimensionamento pela capacidade resistente real e, conseqüentemente, conduzir a modos de colapso efectivos diferentes dos antecipados por uma análise simplificada.

## 1.2. Objectivos do estudo

São demasiadas as lacunas apresentadas pelo conhecimento actual relativo ao efeito que as ligações viga-pilar, e em particular a sua deformabilidade, tem sobre o comportamento de estruturas porticadas de betão armado sob acções quase-estáticas e monotónicas. Genericamente, o estudo desenvolvido e vertido para o presente documento, teve como principais objectivos: a identificação dessas lacunas, o estabelecimento de metodologias para as ultrapassar, o desenvolvimento de modelos e procedimentos de análise, a aplicação destes modelos e procedimentos a estudos paramétricos cobrindo as situações consideradas relevantes, a análise detalhada dos resultados destes estudos e o estabelecimento de procedimentos expeditos com vista à identificação dos casos em que o efeito da deformação das ligações sobre o comportamento global das estruturas é relevante.

Assim, numa primeira fase, foi necessário identificar quais os efeitos da deformabilidade das ligações viga-pilar relevantes no âmbito da engenharia de estruturas, para, posteriormente, e em função dos efeitos detectados, se desenvolver o restante trabalho.

Os objectivos parcelares deste estudo podem ser sistematizados da seguinte forma:

- (i) avaliar se, na modelação das estruturas porticadas de betão armado, deve ser utilizado um elemento estrutural de ligação viga-pilar independente, ou se, pelo contrário, atendendo tanto aos esquemas de pormenorização da armadura correntes como à

necessidade de garantir a simplicidade do procedimento de análise, as ligações viga-pilar podem e devem ser modeladas e dimensionadas como meros prolongamentos das vigas e pilares adjacentes e/ou como elementos rígidos;

- (ii) desenvolver um modelo mecânico rigoroso para as ligações viga-pilar (ii.i) compatível com elementos viga e pilar 1D, (ii.ii) com um grau de complexidade não excessivo, ou seja, que possibilite a sua utilização corrente na análise e dimensionamento de estruturas, (ii.iii) facilmente implementável em programas de elementos finitos vocacionados para a utilização no projecto de estruturas de betão armado e (ii.iv) compatível com procedimentos de análise não-linear simplificados;
- (iii) avaliar, com rigor, a influência do comportamento das ligações viga-pilar sobre o comportamento de estruturas porticadas de betão armado;
- (iv) desenvolver critérios de classificação expedita das ligações viga-pilar, relativos à influência do comportamento destas sobre o comportamento da estrutura em que estão inseridas e que determinem qual o nível de aproximação mais adequado para a sua modelação;
- (v) avaliar quais os parâmetros que têm maior influência sobre o comportamento das ligações (pormenorização da armadura, o valor do esforço axial no pilar e existência, tipo e posição de elementos transversais ao plano do pórtico) e estabelecer ordens de grandeza para esta influência.

### 1.3. Organização deste documento

A partir do estudo efectuado foi desenvolvida esta tese de doutoramento, a qual se encontra organizada em nove capítulos, cuja ordenação reflecte genericamente a sequência cronológica desse estudo.

O Capítulo 1 é iniciado com uma apresentação do tema de estudo, onde se justificam a sua relevância, pertinência e actualidade para a engenharia de estruturas, e se indicam quais os aspectos ainda insuficientemente cobertos pelo conhecimento técnico e científico. Segue-se a explicitação dos objectivos que nortearam o programa de trabalhos. Este capítulo é concluído com a apresentação da organização da dissertação.

O Capítulo 2 consiste numa breve revisão bibliográfica relativa a ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado. Esta revisão bibliográfica estabelece o estado de conhecimento actual, que constitui, naturalmente, a base sobre a qual o presente estudo se alicerçou. São abordados estudos experimentais, estudos numéricos e alguns modelos simplificados de resistência e comportamento propostos para ligações viga-pilar de estruturas de betão armado submetidas a acções quase-estáticas monotónicas e cíclicas. São apresentadas propostas de classificação das ligações desenvolvidas por alguns investigadores com o intuito de sistematizar quer o seu estudo quer a sua análise e dimensionamento. Por fim, apresentam-se as principais disposições patentes nas especificações técnicas europeias (Eurocódigos) e norte americanas relativas a ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado. Note-se que, embora o âmbito do presente estudo se restrinja às acções quase-

estáticas e monotónicas, são incluídas diversas referências a trabalhos sobre acções cíclicas, não só porque é reduzido o número de estudos sobre acções quase-estáticas monotónicas mas também porque alguns dos aspectos abordados são relevantes para ambos os tipos de acções.

No Capítulo 3 apresenta-se uma análise que visa avaliar, de forma simples e expedita, a necessidade de um modelo mecânico consistente para ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado. São avaliadas as consequências da utilização dos procedimentos tradicionais na modelação e dimensionamento destas estruturas face à dimensão relativa das ligações viga-pilar e é apresentada uma avaliação simplificada e exploratória da relevância do comportamento das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado.

No Capítulo 4 são sumariamente apresentadas as características do ATENA 3D (Červenka Consulting [2009]), um dos dois programas de elementos finitos utilizados no presente estudo. O ATENA 3D é um programa vocacionado para a análise 3D de elementos de betão armado, tendo sido incluídos neste capítulo exemplos de aplicação desenvolvidos com o intuito de avaliar e demonstrar a sua aptidão para modelar o comportamento de ligações viga-pilar. Em seguida, o ATENA 3D é utilizado na análise pormenorizada de uma série de problemas numéricos, definidos por diversas tipologias de ligações viga-pilar e diferentes tipos de solicitação quase-estática e monotónica, por forma a aprofundar a compreensão do comportamento destes elementos estruturais e avaliar se o dimensionamento da armadura longitudinal das vigas e pilares com base nos esforços nas suas extremidades efectivas constitui um procedimento inseguro. Esta análise permite mostrar que não existe uma base racional para modelar e dimensionar as ligações viga-pilar como um prolongamento das vigas e pilares adjacentes, e que, pelo contrário, estas devem ser modeladas e dimensionadas como um elemento estrutural independente.

No seguimento das conclusões do capítulo anterior, é desenvolvido no Capítulo 5 um modelo de ligação viga-pilar baseado no método das componentes. Inicialmente foram identificadas as componentes relevantes para as ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado com pormenorizações de armaduras correntes, tendo sido posteriormente desenvolvidos, analisados e validados modelos de comportamento para estas componentes. De entre estes, destaca-se o modelo simplificado para as amarrações, rectilíneas e/ou curvilíneas, das armaduras longitudinais das vigas e pilares, vocacionado para as relações tensão de aderência-escorregamento do MC90 [1990].

O Capítulo 6 é iniciado com uma muito breve apresentação do EvalS (Ferreira [2011]), o segundo programa de elementos finitos utilizado nesta tese, este vocacionado para a análise de estruturas reticuladas planas. Mais especificamente, apresentam-se os dois principais grupos de sub-rotinas desenvolvidos para proceder aos estudos apresentados no decorrer do capítulo. Estes dois grupos consistem na implementação (i) do modelo de ligação viga-pilar desenvolvido no Capítulo 5 na forma de um novo elemento e (ii) de um modelo seccional de fibras para elementos lineares, dirigido à análise não linear rigorosa de estruturas reticuladas. O procedimento de análise materialmente não linear implementado no EvalS tem por base o *Método das Forças Fictícias* (MFF) (Gala [2007]; Gala, Providência *et al.* [2010]), de modo que no desenvolvimento dos grupos de sub-rotinas referidos foi necessário atender às especificidades deste procedimento numérico. Com o intuito de validar os modelos



desenvolvidos, procede-se à simulação numérica do comportamento de várias subestruturas ensaiadas experimentalmente por outros autores e de problemas com solução analítica conhecida. A concluir o capítulo, o comportamento das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado submetidas a acções quase-estáticas e monotónicas, é alvo de um estudo com o objectivo de determinar o seu efeito em termos (i) da redução da capacidade de carga destas estruturas associada aos efeitos de segunda ordem e (ii) dos resultados da avaliação do desempenho sísmico destas estruturas com uma análise estática não linear (análise *pushover*).

Os ensaios laboratoriais cujos resultados foram usados no Capítulo 6 utilizam uma subestrutura simples, constituída por uma ligação viga-pilar e por parte dos dois a quatro elementos lineares por ela interligados. No Capítulo 7 avalia-se em que termos estas subestruturas podem ser utilizadas para representar, de modo suficientemente aproximado, estruturas porticadas com uma tipologia aproximadamente regular. Seguidamente, são estabelecidos procedimentos simplificados para avaliar, de forma expedita, a relevância da deformabilidade das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado e, desta forma, identificar em que condições é adequada a sua modelação de forma simplificada.

Tendo os estudos apresentados no Capítulo 6 permitido concluir que as ligações viga-pilar pode ser determinantes para o comportamento global das estruturas porticadas de betão armado, no Capítulo 8 procedeu-se à análise, a uma escala mais fina, da relevância de alguns parâmetros sobre o comportamento das ligações viga-pilar. É assim apresentado um estudo paramétrico efectuado com o ATENA 3D, com o objectivo de avaliar o impacto de diversos factores na rigidez e na capacidade resistente das ligações viga-pilar. Mais especificamente, foi estudado o efeito da pormenorização da armadura, da configuração da ligações e do esforço axial nos pilares sobre a rigidez e a capacidade resistente das ligações.

O Capítulo 9 encerra a tese e, como é habitual nestes capítulos derradeiros, tem dois grandes objectivos, igualmente importantes. Por um lado, resume o estudo efectuado e as principais conclusões estabelecidas no seu decorrer, expressando-as de forma clara e sintética, e evidenciando a sua importância para o avanço da ciência e para a prática da engenharia estrutural. A conclusão fundamental, e que não pode deixar de ser enunciada aqui, é que a deformação das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado submetidas a acções quase-estáticas não pode, por motivos de segurança, ser ignorada. Por outro lado, sendo o objecto de uma tese de doutoramento alvo de minuciosa e prolongada atenção científica, não é de admirar que, paralelamente às conclusões estabelecidas, algumas questões se levantem. Além disso, o tempo disponível para este tipo de trabalho também é, felizmente, limitado. Assim, este capítulo também identifica os aspectos relativos à temática estudada, que, ou não puderam ser investigados, ou não o foram com a profundidade exigível, mas que, pela sua importância, devem ser objecto de estudo por parte das comunidades científica e técnica.

A Figura 1.1 representa, de forma esquemática, as principais relações entre os diversos capítulos que constituem a tese.

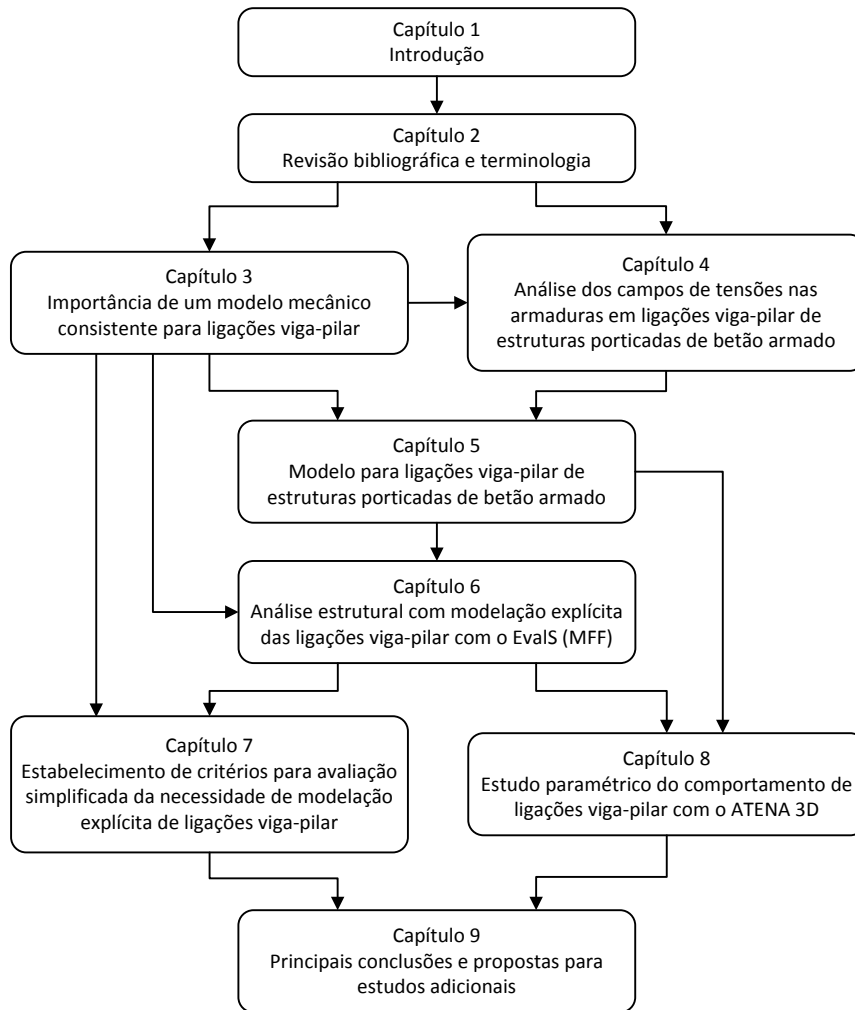


Figura 1.1 – Representação esquemática dos capítulos da tese e das principais relações entre eles.

---

# Capítulo 2

## Revisão bibliográfica e terminologia

### 2.1. Introdução

Neste capítulo é apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre modelação de ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado, tendo sido dada particular atenção, por um lado, aos objectivos a que essa modelação se propõe e, por outro lado, às abordagens habituais para modelação de ligações viga-pilar utilizadas em programas informáticos de cálculo estrutural de estruturas reticuladas.

Também são revistos estudos experimentais relativos a ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado submetidas a acções quase-estáticas e monotónicas, realçando-se as suas principais conclusões.

Por fim são apresentadas as normas, regulamentos e outras especificações técnicas europeias e norte americanas consideradas mais relevantes para este estudo.

Dada a existência de diversos estudos sobre ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado, com perspectivas mais ou menos distintas, e por este tema ser relativamente recente, não existe uma terminologia de referência aceite pela generalidade dos investigadores e projectistas. Este facto em si já é um inconveniente, porém, mais grave, é o facto de, por vezes, o mesmo termo ser utilizado com sentidos bastante diferentes por diferentes autores ou vice-versa (ou seja, um mesmo fenómeno ou característica ser designado distintamente por diferentes autores). Foram estes os motivos, para além de outras vantagens relativas à consistência e clareza do texto, que levaram a definir com precisão a terminologia base utilizada neste documento e apresentá-la neste capítulo. Assim, para além de conter uma breve discussão de aspectos fundamentais abordados no decorrer deste estudo, esta secção poderá também ser consultada durante a leitura dos restantes capítulos, sempre que seja duvidoso o significado atribuído pelo autor a algum termo específico.

## 2.2. Terminologia básica

### 2.2.1. Ligação viga-pilar

Para este estudo adoptou-se a definição de *ligação viga-pilar* (ou *ligação*) em estruturas porticadas de betão armado proposta pelas recomendações da ACI-ASCE 352 (ACI-ASCE Committee 352 [2002]), que a definem espacialmente, como o troço de pilar compreendido ao longo da altura da secção transversal da viga com secção transversal mais alta que intersecta o pilar na região em causa (Figura 2.1). As características mecânicas da ligação resultam da sua geometria, das características e distribuição espacial dos materiais componentes e da sua topologia, ou seja, da forma como está fisicamente ligada aos elementos lineares e, eventualmente laminares, que une. Assim, a forma como as ligações viga-pilar cumprem a sua função, *i.e.*, relacionam os deslocamentos, e eventualmente as rotações, das secções de extremidade das vigas e pilares adjacentes, depende do conjunto destas propriedades geométricas, mecânicas e topológicas. Neste estudo admitir-se-á que os pórticos apresentam vigas e pilares com eixos complanares, o que exclui as *ligações viga-pilar excêntricas*.

Designam-se de *elementos adjacentes* os elementos lineares concorrentes numa ligação viga-pilar. Uma vez que neste estudo só são consideradas estruturas reticuladas ortogonais, este tipo de ligação pode apresentar um ou dois elementos do tipo pilar e um a quatro elementos do tipo viga.

A *periferia da ligação viga-pilar* é a envolvente paralelepípedica do troço de pilar que, de acordo com a definição anterior, constitui a ligação (Figura 2.1). *Secções extremas* ou *extremidades efectivas* das vigas e pilares adjacentes à ligação são as secções complanares com uma das faces desta periferia, podendo designar-se de *interfaces viga-ligação* ou *interfaces pilar-ligação* (secções b1, b2, c1 e c2 da Figura 2.2) ou, mais simplesmente, de *faces*

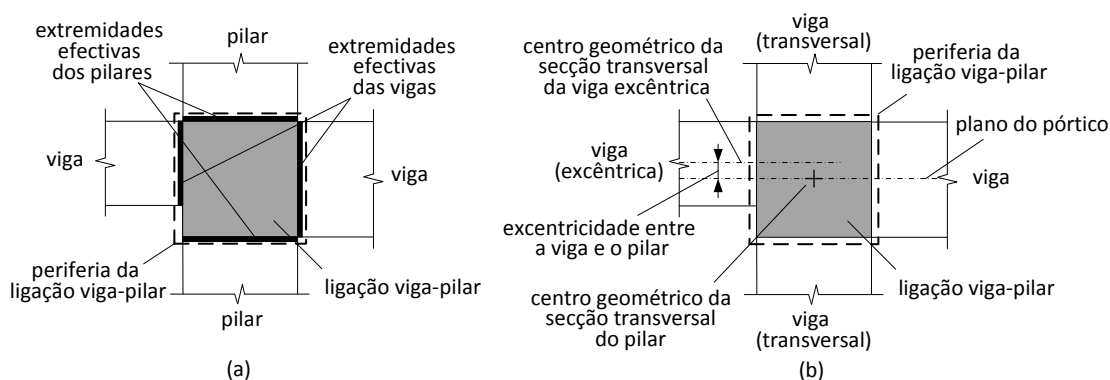


Figura 2.1 – Terminologia básica: (a) vista lateral de uma ligação viga-pilar com vigas de secção transversal de diferentes alturas e (b) vista em planta de uma ligação viga-pilar excêntrica.

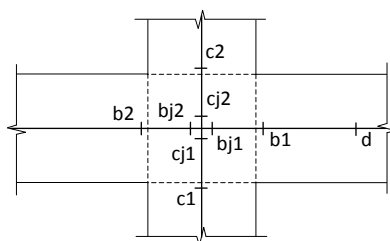


Figura 2.2 – Identificação das secções transversais das vigas e pilares.

da ligação. Em vez dos índices  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  e  $c_2$ , estas faces também serão designadas por *direita*, *esquerda*, *base* e *topo*.

O *núcleo da ligação* é a zona da ligação em que o valor da tensão de corte é significativamente agravado pela “transferência” de esforços das vigas para o pilar, tendo-se considerado que é a parte da ligação compreendida entre os planos horizontais definidos pelas resultantes de compressão e tracção correspondentes ao momento flector na interface viga-ligação.

Neste estudo, só se considera o comportamento plano dos pórticos (análise plana), o que pressupõe que (i) eles são simétricos relativamente ao plano definido pelos eixos das suas vigas e colunas e (ii) as forças que constituem o carregamento têm linhas de acção contidas neste mesmo plano. Este plano é designado *plano do pórtico* (Figura 2.1). Quando se considera um dado pórtico, dizem-se *vigas transversais* aquelas cujo eixo é perpendicular ao plano desse pórtico, as quais o intersectam em ligações viga-pilar (Figura 2.1). A análise acima referida, embora plana, considera a presença de vigas transversais, quando estas existem, para efeitos de caracterização do comportamento das ligações viga-pilar (Capítulos 5 e 8).

Define-se *altura da secção transversal* de um elemento linear como a dimensão da secção transversal de desse elemento medida na direcção paralela ao plano do pórtico e *largura da secção transversal* como a dimensão da secção transversal desse elemento medida na direcção ortogonal ao plano do pórtico. Define-se *esbelteza da ligação viga-pilar* como o quociente entre a altura da maior secção transversal das vigas adjacentes à ligação e a altura da secção transversal do troço do pilar na zona da ligação viga-pilar, ou seja,  $h_b/h_c$ .

Neste estudo apenas se consideram ligações viga-pilar em que as secções transversais dos pilares adjacentes à ligação são iguais e as secções transversais das vigas adjacentes à ligação também são iguais. Além disso apenas se consideram casos em que os eixos das vigas e dos pilares são ortogonais. Desta forma, *altura da ligação* é a dimensão da ligação paralela ao eixo dos pilares e corresponde à altura da secção transversal das vigas adjacentes e a *largura da ligação* é a dimensão da ligação na direcção paralela ao eixo das vigas e corresponde à altura da secção transversal dos pilares adjacentes. A *espessura* ou *profundidade da ligação* é a dimensão da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico.

Os esforços nas extremidades das peças lineares são sempre referidos às secções contidas na periferia das ligações. Tal como já foi referido, estas secções são denotadas  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  e  $c_2$ , ver Figura 2.2, e os esforços correspondentes são denotados de forma similar, por exemplo  $M_{b_1}$  para o momento flector na viga direita à face da ligação. É porém bastante comum a referência a “esforços” em secções imaginárias das peças lineares situadas junto à intersecção dos eixos da viga e do pilar (secções  $b_{j1}$ ,  $b_{j2}$ ,  $c_{j1}$  e  $c_{j2}$  da Figura 2.2) – neste caso os esforços serão denotados com o  $j$  nos subscriptos (por exemplo  $M_{b_{j1}}$ ). De modo semelhante, os deslocamentos nas extremidades das peças lineares são também referidos às secções contidas na periferia da ligação ( $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  e  $c_2$ ) embora alguns autores utilizem valores referidos a secções afastadas da interface viga-ligação (por exemplo a secção  $d$  da Figura 2.2).

Define-se *comportamento da ligação viga-pilar* como a relação entre o campo de esforços nas extremidades dos elementos adjacentes à ligação e os deslocamentos relativos dessas extremidades.

## 2.2.2. Classificação das ligações viga-pilar

Numa óptica de sistematização do estudo das ligações é conveniente organizá-las com base em critérios racionais. Nesse sentido, já foram publicadas diversas propostas para classificação de ligações viga-pilar de betão armado. De entre esses critérios estão os que classificam as ligações de acordo (i) tipo de solicitação a que é espectável que estas venham a ser submetidas, (ii) número e disposição relativa dos elementos lineares adjacentes e (iii) a sua pormenorização. Seguidamente apresentam-se algumas propostas de classificação das ligações viga-pilar de acordo com estes critérios.

Não foi encontrada qualquer publicação que propusesse critérios de classificação de ligações viga-pilar de betão armado de acordo com as propriedades mecânicas da própria ligação e dos elementos lineares adjacentes. Por esse motivo será apresentada a classificação proposta para ligações viga-pilar de estruturas metálicas e mistas aço-betão.

### 2.2.2.1. Classificação das ligações de acordo com o tipo de solicitação

A ACI-ASCE 352 classifica as ligações viga-pilar em ligações de Tipo 1 e de Tipo 2.

As ligações de Tipo 1 são dimensionadas tendo em consideração unicamente os requisitos de resistência da ACI 318-02 (ACI Committee 318 [2002]) excluindo o seu §21 (estruturas sísmo-resistentes) relativo a elementos que não têm como requisito garantir uma deformação significativa fora do regime elástico.

As ligações de Tipo 2 são dimensionadas para acções sísmicas, ou seja, para manter a capacidade resistente mesmo quando submetidas a inversões das deformações em regime inelástico.

Enquanto as ligações de Tipo 1 são dimensionadas apenas para a capacidade resistente, as ligações de Tipo 2, além desse requisito de resistência, têm ainda que garantir um nível adequado de dissipação de energia durante as inversões de deformação no regime inelástico. Neste contexto, as ligações abordadas neste estudo podem ser dimensionadas como ligações de Tipo 1 ou 2.

### 2.2.2.2. Classificação das ligações de acordo o número e disposição de elementos adjacentes (configuração da ligação)

As ligações viga-pilar podem ser classificadas de acordo com o número e disposição dos elementos lineares adjacentes, ou seja, de acordo com a sua configuração.

Na Tabela 2.1 são apresentados os tipos de ligações viga-pilar mais comuns juntamente com a terminologia adaptada da ACI-ASCE 352. As vigas estão representadas com uma largura inferior aos pilares somente por uma questão de clareza da representação. A classificação apresentada é relativa à flexão das vigas e pilares no plano  $x-z$ .

Embora este estudo apenas se debruce sobre o comportamento de pórticos planos, também é tida em consideração a eventual existência de elementos transversais, correspondendo tanto a casos 3D como 2D da Tabela 2.1. Porém, quando se considera a existência de elementos transversais (vigas e lajes), é ignorada a transmissão de esforços destes para a ligação, não contabilizando, conseqüentemente, esforços na ligação nos dois planos ortogonais.

Tabela 2.1 – Classificação das ligações viga-pilar de acordo com o número e disposição dos elementos adjacentes (adaptado de ACI-ASCE Committee 352 [2002]).

nomenclatura	3D	2D
ligação interior		
ligação de extremidade		
ligação de canto		
ligação de cobertura interior		
ligação de cobertura de extremidade		
ligação de cobertura de canto		

### 2.2.2.3. Classificação das ligações de acordo com a pormenorização da armadura

Na literatura existem vários estudos relativos a ligações viga-pilar, maioritariamente experimentais, que diferem substancialmente na pormenorização da armadura, no procedimento experimental utilizado e nos parâmetros estudados.

Em particular, a descrição textual da pormenorização adoptada nas ligações viga-pilar pode tornar-se algo confusa devido à ligação viga-pilar não ter nenhuma direcção facilmente diferenciável independentemente do sistema de eixos de referência adoptado (como por exemplo a direcção longitudinal no caso das vigas) e não haver uma terminologia universal para identificar a pormenorização.

Apresenta-se seguidamente uma proposta de sistematização das soluções de pormenorização

da armadura mais comuns em ligações viga-pilar de extremidade 2D. Esta organização pode facilmente ser estendida, com ligeiras adaptações, a ligações com outro número ou disposição dos elementos adjacentes.

Kordina, Teutsch *et al.* [1998] (citados por Roeser [2002]) definem a pormenorização da armadura da ligação com base numa chave que permite a sua identificação recorrendo à Tabela 2.2. Nesta tabela a linha K é relativa à armadura longitudinal dos pilares e aos varões de compressão da armadura longitudinal da viga, a linha L à amarração dos varões de tracção da armadura longitudinal da viga, a linha M aos varões diagonais na ligação e a linha N à armadura transversal da ligação (cintas e ganchos horizontais). Deste modo, a pormenorização da ligação de extremidade pode ser inequivocamente identificada com base na chave KLMN. Por exemplo, uma ligação com chave 1616 é uma ligação com K = 1, L = 6, M = 1 e N = 6, ou seja, a armadura longitudinal dos pilares é constituída por varões contínuos, a armadura longitudinal da viga é constituída por varões em U dispostos em planos verticais, e a ligação é reforçada com varões diagonais e varões em U dispostos em planos horizontais uniformemente distribuídos pela altura da ligação.

#### 2.2.2.4. Classificação das ligações de acordo com as suas propriedades mecânicas

A resposta das ligações viga-pilar é sempre não linear, em maior ou menor grau. Os conceitos de ligação rígida ou perfeitamente articulada são simplificações teóricas mas úteis na medida em que possibilitam a simplificação da análise e dimensionamento de estruturas reticuladas.

O estabelecimento de um sistema de classificação das ligações viga-pilar de acordo com as propriedades mecânicas da própria ligação e dos elementos lineares adjacentes tem como objectivo a identificação das situações em que a determinação do comportamento da

Tabela 2.2 – Pormenorização da armadura em ligações viga-pilar de extremidade (adaptado de Roeser [2002]).

	1	2	3	4	5	6	7
K							
L							
M							
N							



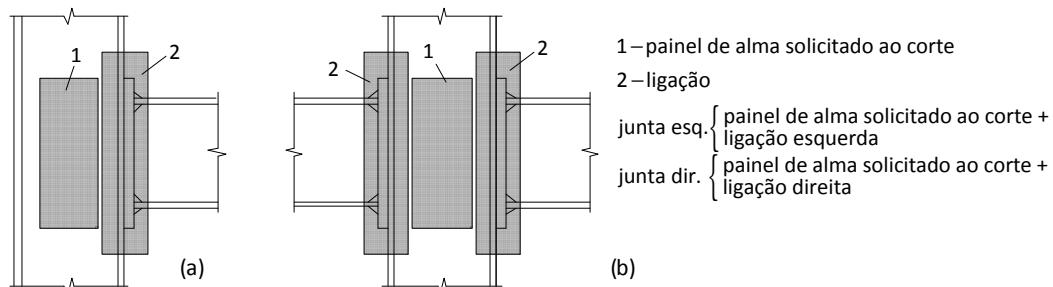


Figura 2.3 – Terminologia utilizada pela NP EN 1993-1-8 (IPQ [2010c]), (a) configuração de junta só num lado, (b) configuração de junta em dois lados.

estrutura usando a modelação simplificada da ligação não origina um erro significativo. Embora este tipo de classificação ainda não tenha sido formulado para estruturas porticadas de betão armado, já existe para estruturas metálicas, na forma de critérios objectivos e procedimentos simplificados, os quais são analisados seguidamente.

Antes de apresentar os critérios de classificação para ligações viga-pilar em estruturas metálicas, é importante fazer a distinção entre o significado dos termos *ligação* e *junta*, no âmbito da NP EN 1993-1-8 (IPQ [2010c]) e clarificar em que difere esta nomenclatura da adoptada nesta tese. De acordo com a NP EN 1993-1-8, *ligação* é o “local onde dois ou mais elementos convergem” e, o modelo para efeitos de cálculo, no contexto do método das componentes (Capítulo 5), “é o conjunto das componentes básicas necessárias para representar o comportamento da ligação na transmissão dos esforços relevantes” (§1.4.2 da NP EN 1993-1-8). *Junta* é a “zona onde dois ou mais elementos estão interligados” e, o modelo para efeitos de cálculo, no contexto do método das componentes (Capítulo 5), “é o conjunto das componentes básicas que efectuam a união dos elementos de modo a assegurar que os esforços relevantes são transmitidos entre eles” (§1.4.4 da NP EN 1993-1-8). Uma *junta vigacoluna* é constituída por um painel de alma e por uma única ligação (configuração de junta num só lado) ou por duas ligações (configuração de junta em dois lados), ver Figura 2.3.

Para clarificação, nesta tese, e a menos que seja feita referência em contrário, o termo *ligação* é utilizado com o significado anteriormente apresentado (§2.2.1). Por outro lado, sempre que se pretenda referir a ligação com o significado atribuído pela NP EN 1993-1-8, esta norma será explicitamente referida.

Relativamente à modelação de juntas, o §5.1.1(2) da NP EN 1993-1-8, permite modelá-las como (i) articuladas, quando se pode admitir que não transmitem momento flector, (ii) contínuas, quando se pode admitir que o seu comportamento não tem efeito na análise, e (iii) semi-contínuas, quando o seu comportamento tem de ser tomado em consideração na análise estrutural.

A escolha do modelo a adoptar para a junta depende do tipo de análise a efectuar e da classificação da junta. Idealmente, a junta deveria ser classificada de acordo com a sua resistência, rigidez e ductilidade (Gomes [2002]). Porém, os critérios de classificação incluídos na NP EN 1993-1-8 só consideram a rigidez e resistência da ligação.

Na Tabela 2.3 reproduz-se a matriz proposta pela NP EN 1993-1-8 para a selecção do modelo de junta a utilizar de acordo com o tipo de análise e da classificação das juntas quanto à sua rigidez e resistência.

Tabela 2.3 – Tipos de modelos de junta (IPQ [2010c]).

método de análise global	classificação da junta		
elástica	nominalmente articulada	rígida	semi-rígida
rígido-plástica	nominalmente articulada	resistência total	resistência parcial
elasto-plástica	nominalmente articulada	rígida e resistência total	semi-rígida e resistência parcial semi-rígida e resistência total rígida e resistência parcial
modelo de junta a utilizar	articulada	contínua	semi-contínua

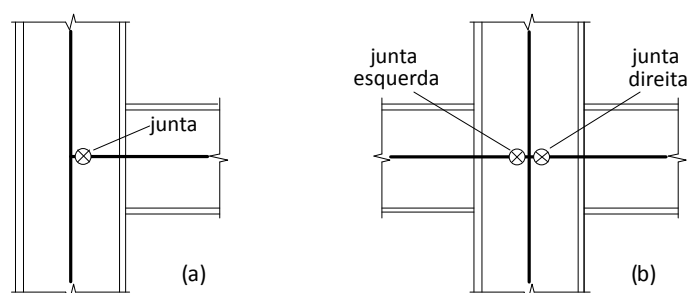


Figura 2.4 – Modelação da junta (IPQ [2010c]) nos casos de (a) viga num só lado, (b) viga de ambos os lados.

Tipicamente, na extremidade das vigas (na ligação<sup>1</sup>) o esforço predominante é o momento flector enquanto no pilar ao longo da altura da secção transversal da viga é corte (Capítulo 5). Além disso, os esforços na alma do pilar no interior da ligação dependem dos esforços nas extremidades efectivas de todos os elementos lineares adjacentes. Por estes motivos, num modelo que reproduza rigorosamente o comportamento das ligações viga-pilar, cada uma destas zonas deve ser modelada separadamente (Jaspart [2000], §5.3(4) da EN 1993-1-8). No entanto, como na maioria dos programas informáticos de análise estrutural de estruturas reticuladas esta abordagem não é exequível, na NP EN 1993-1-8 é proposta uma abordagem simplificada para o modelo de junta (alma do pilar + ligação<sup>1</sup>), que consiste em concentrar a deformabilidade da junta numa mola angular localizada no eixo de cada viga junto à sua intersecção com o eixo do pilar (Jaspart [2000]), Figura 2.4.

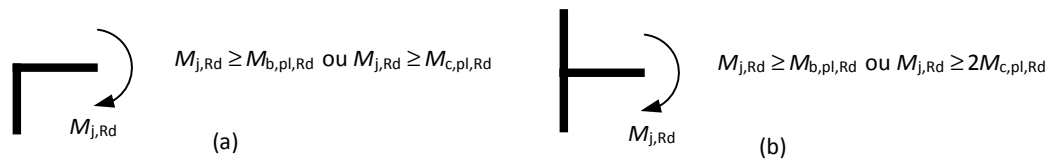
A modelação das juntas como molas angulares nas extremidades das vigas permite classificá-las simplificada e recorrendo a procedimentos expeditos. Esta simplificação deve-se (i) à possibilidade de expressar o seu comportamento por uma relação momento-rotação e ao facto (ii) dos esforços na junta e na extremidade da viga adjacente serem comuns.

Apresentam-se, seguidamente, os procedimentos propostos na NP EN 1993-1-8 para a classificação das juntas (também denominados por critérios simplificados de classificação) e os critérios que efectivamente estiveram na base desses procedimentos.

#### 2.2.2.4.1. Classificação das ligações de acordo com a sua resistência

De acordo com a relação entre os valores de cálculo do momento resistente de uma junta e das secções transversais extremas dos elementos lineares adjacentes, essa junta pode ser classificada (i) de resistência total, (ii) nominalmente articulada ou (iii) de resistência

<sup>1</sup> Nomenclatura da NP EN 1993-1-8.



$M_{j,Rd}$  – momento resistente de cálculo da junta  
 $M_{b,pl,Rd} / M_{c,pl,Rd}$  – momento plástico resistente da secção transversal da viga/pilar

Figura 2.5 – Juntas de resistência total (IPQ [2010c]), (a) ligação viga-pilar de cobertura de extremidade, (b) ligação viga-pilar de extremidade.

parcial. Mais precisamente, pode considerar-se nominalmente articulada, se a união à viga adjacente não der azo ao desenvolvimento de valores significativos do momento flector que possam afectar de modo desfavorável os elementos ou a estrutura no seu todo. Note-se que esta definição satisfaz critérios tanto de rigidez como de resistência. Por outro lado, uma junta pode ser considerada de resistência total se o valor de cálculo da sua resistência for pelo menos igual ao dos elementos lineares adjacentes. Finalmente, uma junta que não satisfaça qualquer destes dois critérios é classificada como junta de resistência parcial.

Em termos práticos, de acordo com o §5.2.3.3 da NP EN 1993-1-8, uma junta de uma ligação viga-pilar de extremidade ou de cobertura de extremidade pode ser considerada de resistência total se satisfizer os critérios apresentados na Figura 2.5. Uma junta pode ser considerada nominalmente articulada se o valor de cálculo do seu momento resistente não exceder 25% do momento de cálculo requerido para que esta possa ser considerada de resistência total.

Note-se que, em virtude da junta incorporar a componente painel de alma do pilar em corte, a classificação das juntas em ligações viga-pilar interiores ou de cobertura interiores não é elementar, contrariamente aos casos representados na Figura 2.5. Além disso, no Capítulo 5 mostra-se que, mesmo em ligações de extremidade, o critério apresentado na Figura 2.5(b) é o resultado de simplificações que no caso de estruturas de betão armado se podem revelar excessivamente conservadoras.

#### 2.2.2.4.2. Classificação das ligações de acordo com a sua rigidez

De acordo com a sua rigidez de deformação angular, uma junta pode ser classificada como (i) nominalmente rígida, (ii) nominalmente articulada (ver §2.2.2.4.1) ou (iii) semi-rígida.

Uma junta pode ser considerada nominalmente rígida se a sua rigidez rotacional (deformação angular) for tão elevada que é desprezável o erro de uma análise baseada na hipótese de continuidade total. Uma junta que não satisfaça as condições para ser considerada como nominalmente rígida nem nominalmente articulada (ver §2.2.2.4.1) deve ser considerada semi-rígida.

De acordo com o §5.2.2.5(1) da NP EN 1993-1-8, a classificação das juntas de ligações viga-pilar numa destas classes pode ser feita comparando a rigidez rotacional (deformação angular) inicial da junta  $S_{j,ini}$  com os limites apresentados na Figura 2.6.

Em estruturas reticuladas de betão armado não é adequada a modelação das ligações viga-pilar através de molas angulares, com comportamento definido por relações momento-rotação, localizadas na extremidade das vigas junto aos eixos dos pilares (Capítulo 3, Capítulo 5). Além disso, devido à fendilhação do betão, as vigas, pilares e ligações viga-pilar de

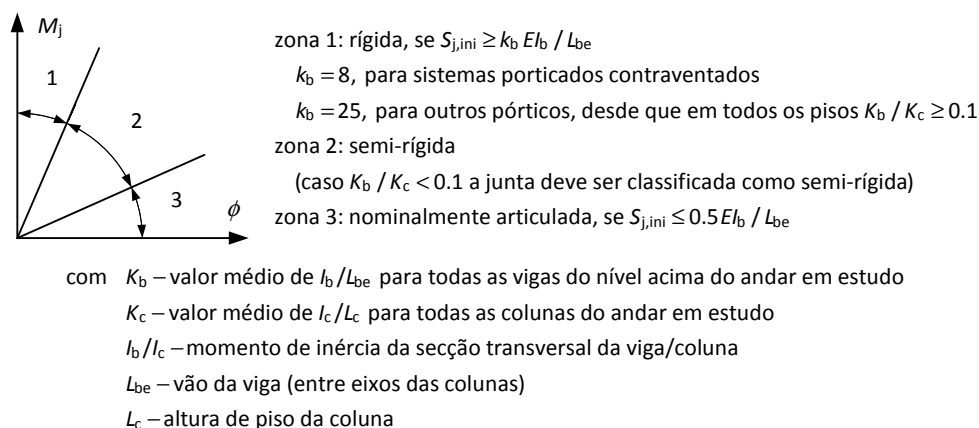


Figura 2.6 – Classificação das juntas por rigidez (IPQ [2010c]).

betão armado, não estão normalmente em regime elástico, mesmo para valores reduzidos das cargas aplicadas. Por este motivo, as suas rigidezes não são adequadamente caracterizadas pelos valores das respectivas rigidezes tangentes iniciais. Consequentemente, pode não ser admissível a aplicação dos critérios simplificados apresentados na Figura 2.6 a estruturas de betão armado (Capítulos 3 e 7).

Na base do procedimento proposto na NP EN 1993-1-8 para classificação das ligações viga-pilar de acordo com a respectiva rigidez, estiveram critérios baseados no comportamento global da estrutura (Briquet, Guisse *et al.* [1994], Gomes, Kulhmann *et al.* [1998]).

De acordo com Briquet, Guisse *et al.* [1994] e Gomes, Kulhmann *et al.* [1998], uma junta só deve ser considerada nominalmente rígida caso a sua deformação não tenha uma influência significativa na distribuição de esforços nem na deformação global da estrutura. Para garantir estas condições, foram propostos critérios para definir a fronteira entre juntas nominalmente rígidas e semi-rígidas, estabelecidos analisando as estruturas porticadas, com as juntas modeladas inicialmente como semi-rígidas e seguidamente como rígidas<sup>2</sup>, e avaliando a variação do valor dos quocientes entre cargas e deslocamentos.

Em termos de capacidade resistente foi proposto (CEN [1992]) que uma junta possa ser considerada nominalmente rígida se a capacidade resistente da estrutura não for inferior a 95% da capacidade resistente de uma estrutura com ligações rígidas, ou seja

$$\alpha_u \geq 0.95 \alpha_{u,\infty} \quad (2.1)$$

em que  $\alpha_u$  ( $\alpha_{u,\infty}$ ) é o factor de carga de colapso para juntas modeladas como semi-rígidas (rígidas).

Em termos de deformabilidade lateral foi proposto (Briquet, Guisse *et al.* [1994]) que uma junta possa ser considerada nominalmente rígida se

$$\delta \leq \frac{\delta_\infty}{0.90} \quad (2.2)$$

em que  $\delta$  ( $\delta_\infty$ ) é a componente lateral do deslocamento calculado para cargas de serviço modelando as juntas como semi-rígidas (rígidas).

<sup>2</sup> Na verdade, tal como se verá no §2.3, o modelo usado não foi um modelo rígido mas sim um modelo de eixos, que é implicitamente deformável.

### 2.2.2.4.3. Classificação das ligações viga-pilar de acordo com a sua ductilidade/capacidade de rotação

A NP EN 1993-1-8 não classifica as ligações de acordo com a sua ductilidade/capacidade de rotação. No entanto, apresenta disposições para o cálculo da capacidade de rotação de alguns tipos de juntas e dispensa a verificação da capacidade de rotação das juntas cujo valor de cálculo do momento resistente exceda o dos elementos lineares adjacentes em, pelo menos, 20%.

Também neste caso, pode não ser admissível a extensão deste procedimento a ligações viga-pilar de betão armado, tendo em consideração a inadequação do modelo de mola angular nas extremidades das vigas junto ao eixo do pilar.

No Capítulo 5 mostra-se que o comportamento das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado pode ser fundamentalmente determinado pelo comportamento do núcleo da ligação, cujo estado de tensão, tal como foi já referido, depende dos esforços nas extremidades efectivas de todos os elementos lineares adjacentes à ligação. Por este motivo, e pelos outros já apresentados, pode não ser admissível estender às estruturas de betão armado os procedimentos simplificados para classificação de juntas desenvolvidos para estruturas metálicas.

## 2.3. Modelação de ligações viga-pilar em estruturas de betão armado

Nos últimos 40 anos foi e continua a ser dedicada muita investigação à modelação de ligações viga-pilar de betão armado. Esta investigação é maioritariamente dirigida para acções cíclicas (sísmicas) e está vocacionada para o desenvolvimento de modelos de resistência e/ou de degradação da resistência das ligações viga-pilar sob acções cíclicas de elevada amplitude. Só uma pequena parte da investigação desenvolvida sobre modelação de ligações viga-pilar tem como alvo o estabelecimento de modelos de ligações viga-pilar, gerais, objectivos, práticos, integráveis em modelos de estruturas completas e com vista a uma utilização corrente na análise e dimensionamento de estruturas. Nesta secção, apresenta-se uma revisão bibliográfica relativa a modelos de comportamento em que são referenciados os modelos considerados mais relevantes tendo em atenção os objectivos a que este estudo se propõe.

Para uma maior clareza na sistematização dos modelos disponíveis para ligações viga-pilar de estruturas de betão armado, considera-se primeiramente a sua classificação em *modelos implícitos* e *explícitos*. Modelos de ligação viga-pilar *explícitos* são modelos que incorporam elementos não rígidos com relações constitutivas vocacionadas para modelar o comportamento da ligação, ou seja, distintas das dos elementos lineares adjacentes. Nos modelos de ligação viga-pilar *implícitos*, pelo contrário, a deformabilidade da ligação viga-pilar é simulada alterando as propriedades geométricas e/ou mecânicas (comprimento, rigidez seccional) dos elementos lineares adjacentes à ligação.

### 2.3.1. Modelos de ligação viga-pilar implícitos

O modelo de ligação viga-pilar implícito mais corrente é o *modelo de eixos* (*centerline joint models*), Figura 2.7(a), o qual é constituído por prolongamentos fictícios das vigas e pilares adjacentes, para o interior da ligação. Ou seja, os elementos lineares são prolongados até ao ponto onde os seus eixos se intersectam. Do ponto de vista mecânico, este modelo de ligação

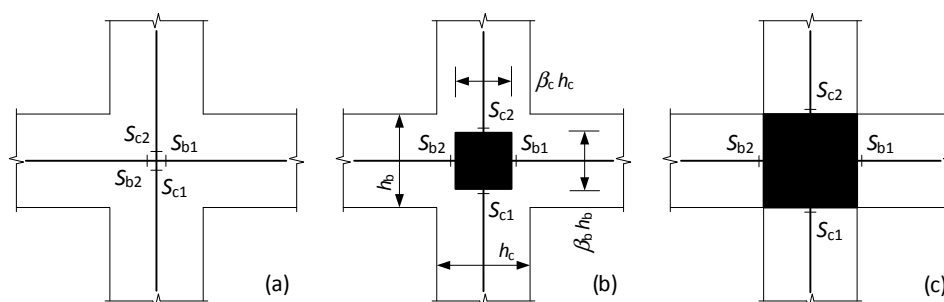


Figura 2.7 – Modelos implícitos de ligação viga-pilar, (a) modelo de eixos, (c) modelo de troços rígidos ( $0 \leq \beta \leq 1$ ), (b) modelo de ligação rígido.

é flexível, estando a sua flexibilidade associada aos segmentos das vigas e pilares localizados no volume delimitado pela periferia da ligação, mas apresenta duas inconsistências: por um lado, pressupõe a sobreposição dos elementos lineares na zona da ligação, por outro lado, uma vez que a geometria de uma ligação não satisfaz as hipóteses de definição de peça linear, não há qualquer justificação para admitir que a ligação se deforma predominantemente como uma peça linear. Note-se ainda que, neste caso, embora este seja um modelo de ligação deformável, o nó que liga os eixos dos prolongamentos fictícios das vigas e pilares é rígido.

O modelo de ligação de viga-pilar de troços rígidos (Figura 2.7(b)) generaliza o anterior (Figura 2.7(a)), considerando que o prolongamento das peças lineares no interior da ligação não o ocupa totalmente, sendo rígida uma zona, maior ou menor, habitualmente disposta simetricamente na vizinhança da intersecção dos seus eixos e definida pelos parâmetros  $\beta_b$  e  $\beta_c$ , ver Figura 2.7 (b). Assim, tomando este modelo como referência, para uma das situações limite, ou seja,  $\beta_b = \beta_c = 0$ , obtém-se o caso representado na Figura 2.7(a), ao passo que para a outra situação limite, ou seja,  $\beta_b = \beta_c = 1$ , obtém-se o modelo de ligação viga-pilar rígido, ver Figura 2.7(c), que ignora totalmente a deformação da ligação.

De modo a ajustar os resultados do modelo de troços rígidos, e seus casos limite, aos resultados experimentais, as recomendações da ASCE [2007b] preconizam a combinação destes modelos com uma redução da rigidez à flexão dos elementos lineares adjacentes que permita dotar o modelo estrutural de uma parcela de flexibilidade adicional, também decorrente da deformabilidade das ligações viga-pilar – ver §2.5.5.

### 2.3.2. Modelos de ligação viga-pilar explícitos

Os modelos de ligação viga-pilar explícitos podem ser classificados em *modelos de análise local* e *modelos de análise global* (Alva [2004], Fleury, Reynouard *et al.* [2000]).

Os modelos de análise global são estabelecidos com o objectivo de produzir na estrutura porticada um efeito análogo ao do comportamento efectivo da ligação em termos de comportamento global (*e.g.*, *drift*) mas que habitualmente não reproduzem os modos de deformação efectivos da ligação. Tipicamente são modelos constituídos por molas rotacionais dispostas nas extremidades das vigas e/ou pilares, pelo que, também são denominados modelos de molas rotacionais ou angulares. A determinação das relações momento-rotação destes elementos requer uma calibração cuidada e extensa (Sharma, Eligehausen *et al.* [2011]) e a sua utilização é limitada pelo facto de não conduzirem a deformações e esforços locais rigorosos nos elementos adjacentes devido às deficiências intrínsecas na simulação dos modos

de deformação efectivos das ligações.

Os modelos de análise local, também designados *modelos macroscópicos explícitos*, são modelos que se fundamentam nos campos de tensões predominantes na ligação e procuram reproduzir os seus modos de deformação mais relevantes. São exemplos deste grupo, e os mais recorrentes na literatura, os modelos de escoras e tirantes para a representação do campo de tensões em regiões de descontinuidade de elementos de betão armado (regiões D, Schlaich, Schafer *et al.* [1987]) – apresentam a desvantagem de determinarem apenas a capacidade resistente da ligação (Paulay e Priestley [1992], Vollum e Newman [1999b]). Também se enquadram neste grupo os modelos de elementos finitos 2D e 3D, justificáveis face à complexidade do campo de tensões no interior da ligação, e os modelos constituídos por várias molas, análogos aos que resultam da aplicação do método das componentes (Capítulo 5), genericamente designados neste estudo por *modelos mecânicos* ou *macro-elementos*.

De acordo com Lowes, Mitra *et al.* [2004], cronologicamente, os primeiros modelos propostos baseavam-se na calibração experimental de rótulas plásticas nas extremidades das vigas e pilares que simultaneamente simulavam a não linearidade dos elementos 1D e das ligações viga-pilar (Otani [1974], Anderson e Townsend [1977]). Embora computacionalmente eficiente, esta abordagem não fornece um modelo de ligação independente, passível de ser utilizado com diferentes formulações de elementos finitos e é de difícil calibração experimental.

Posteriormente, foram desenvolvidos modelos de ligação viga-pilar que desacoplaram os elementos 1D das ligações viga-pilar (representadas por elementos 0D – molas angulares), de forma a poder avaliar separadamente as fontes de não linearidade (El-Metwally e Chen [1988], Alath e Kummath [1995]). À custa de um aumento moderado do volume de cálculo, esta abordagem fornece um meio independente de caracterizar o comportamento não linear das ligações. Porém, dada a diversidade de tipologias de ligação, pormenorizações e campos de esforços aplicados às ligações viga-pilar, esta abordagem também não facilita o desenvolvimento de procedimentos de calibração objectivos e precisos.

Mais recentemente, têm sido publicados estudos que recorrem a modelos de elementos finitos 2D/3D e a modelos mecânicos. Embora os modelos de elementos finitos 2D/3D (em seguida genericamente denominados por modelos de elementos finitos) potenciem a modelação objectiva das ligações viga-pilar, acarretam um volume de cálculo inoportuno para a análise de uma estrutura completa, estando por isso actualmente limitados a estudos localizados das ligações viga-pilar e das extremidades dos elementos adjacentes. De modo a reduzir o volume de cálculo, foram também desenvolvidos modelos híbridos que conjugam elementos finitos 2D com elementos 1D, compatíveis com os habituais elementos 1D usados em vigas e pilares e que, embora apresentem algumas limitações, permitem analisar estruturas porticadas, ainda que de reduzida dimensão, devido ao elevado número de graus de liberdade das ligações e à complexidade inerente a esses modelos.

Por fim, os modelos mecânicos são contemporâneos dos modelos de elementos finitos e constituem uma abordagem que procura harmonizar a objectividade e transparência dos modelos de elementos finitos com a eficiência computacional dos modelos de análise global.

Analisando a sequência cronológica apresentada, pode-se concluir que os modelos de análise

local não são mais que uma contingência de recursos computacionais limitados e que a evolução natural é no sentido da adopção de elementos finitos 3D com relações constitutivas não lineares. No entanto, dado que os modelos de elementos finitos continuam a acarretar custos computacionais inoportáveis para a análise de uma estrutura completa, conclui-se que actualmente os macro-elementos são a abordagem mais adequada para modelar as ligações viga-pilar.

Em seguida, serão sumariamente apresentados alguns trabalhos relativos à modelação de ligações viga-pilar de estruturas de betão armado recorrendo a modelos de elementos finitos e a macro-elementos que ilustram o estado do conhecimento actual.

### 2.3.2.1. Modelos de elementos finitos

A utilização de modelos de elementos finitos materialmente não lineares para modelar ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado sofreu uma evolução acelerada nos últimos anos. Em seguida, apresentam-se resumidamente alguns estudos que ilustram essa evolução.

Os modelos de ligação viga-pilar com elementos finitos podem ser classificados em (i) modelos “híbridos” e (ii) modelos tradicionais.

Como exemplo de modelos híbridos podem-se referir as propostas de Elmersi, Kianoush *et al.* [2000] e Fleury, Reynouard *et al.* [2000] que em seguida são sumariamente apresentadas.

Elmersi, Kianoush *et al.* [2000] propuseram um modelo para estudar o comportamento das ligações viga-pilar sob acção sísmica utilizando elementos finitos 0D, 1D e 2D (Figura 2.8). Este modelo é constituído por (i) cinco elementos rectangulares para estados planos de tensão com comportamento materialmente não linear, tendo o elemento central 12 nós e os quatro elementos que representam as extremidades dos elementos viga e pilar adjacentes 10 nós cada (zonas de rótulas plásticas), (ii) elementos 1D biarticulados com comportamento materialmente não linear para modelar os varões da armadura longitudinal das vigas e pilares e (iii) elementos de contacto 0D para modelar a aderência entre os varões da armadura de flexão das vigas e pilares e o betão envolvente. É assumido um campo de deslocamentos cúbico no interior de cada um dos elementos 2D e para o escorregamento entre os varões e o betão.

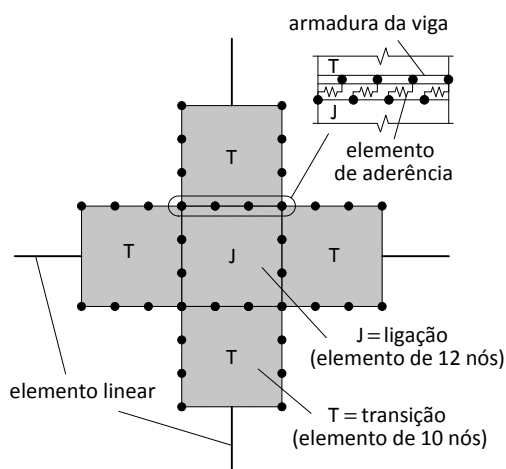


Figura 2.8 – Modelo de ligação proposto por Elmersi, Kianoush *et al.* [2000].

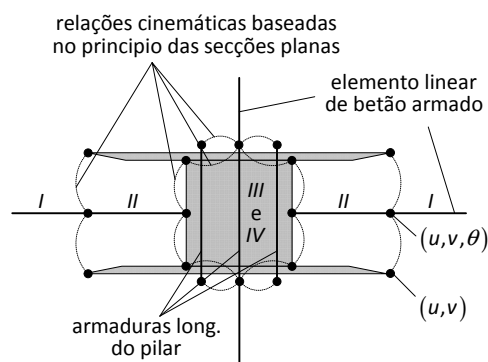


Figura 2.9 – Modelo de ligação proposto por Fleury, Reynouard *et al.* [2000].



A compatibilidade do campo de deslocamentos dos elementos de transição 2D de 10 nós com o dos elementos 1D das vigas e pilares é estabelecida por uma matriz de transformação entre os deslocamentos generalizados (rotação e translação) na extremidade dos elementos 1D e o deslocamento (translação) dos dois nós da face do elemento de transição adjacente.

Para modelar o betão foi adoptado o modelo constitutivo proposto por Elmorsi [1998], para os varões da armadura um modelo idêntico ao proposto por Menegotto e Pinto [1973] e para a aderência entre os varões e o betão um modelo semelhante ao desenvolvido por Elgehausen, Popov *et al.* [1983] com as alterações propostas por Filippou, Popov *et al.* [1983a] e Filippou, Popov *et al.* [1983b].

Flury, Reynouard *et al.* [2000] propuseram um modelo de ligação viga-pilar (Figura 2.9) composto por (i) dois elementos rectangulares planos de quatro nós dispostos em paralelo (elementos III e IV) para modelar o betão e a armadura na ligação, respectivamente, (ii) um conjunto de elementos planos de quatro nós de pequena espessura ao longo das faces superior e inferior dos elementos III e IV e que se prolonga para as vigas ao longo de um comprimento correspondente à altura da secção transversal das vigas (zona de transição) para modelar a armadura de flexão e o escorregamento entre esta e o betão envolvente, (iii) elementos viga na zona de transição para modelar o betão (elemento II) – a armadura longitudinal da viga já está contabilizada nos elementos planos quatro nós – (iv) elementos biarticulados para modelar a armadura longitudinal dos pilares que atravessam o núcleo da ligação e (v) relações adicionais para garantir a compatibilidade dos campos de deslocamentos dos vários elementos.

Para exemplificar a adopção dos denominados modelos tradicionais podem-se referir os trabalhos realizados por Vollum [1998], Baglin e Scott [2000], Hamil [2000], Hegger, Sherif *et al.* [2004], Elgehausen, Ozbolt *et al.* [2006], Mitra [2007], Sasmal, Novák *et al.* [2010b], Sagbas, Vecchio *et al.* [2011], Ibrahim [2011]). Em seguida serão sumariamente descritos alguns destes estudos.

Vollum [1998] modelou os ensaios experimentais realizados por Ortiz [1993] (2D, quase-estáticos e monotónicos) recorrendo ao programa de EF ANSYS v5.3 (ANSYS Inc. [1998]). O objectivo deste estudo foi avaliar a viabilidade dos modelos de EF para estimar a capacidade resistente de ligações viga-pilar e, desta forma, validar modelos de escoras e tirantes mais simples. A modelação do betão foi efectuada a partir de elementos sólidos hexaédricos de oito nós correspondentes ao elemento 65 da biblioteca de elementos do ANSYS v5.3 (ANSYS Inc. [1998]) e foram testadas discretizações diferentes. Foi assumido um comportamento não linear para o betão, adoptando para tal o modelo proposto por William e Warke [1974], e para modelar a armadura foram testados dois modelos: um distribuído (*smearred*) e o outro com elementos biarticulados ligados aos nós dos elementos sólidos que modelam o betão. Enquanto no primeiro se admite a aderência perfeita entre varões e betão envolvente na zona da ligação, no segundo admite-se a inexistência dessa aderência. De uma forma geral, a modelação dos ensaios experimentais não foi satisfatória, devido à divergência prematura do procedimento numérico atribuída à fissuração excessiva. Consequentemente nunca foi atingida a carga de colapso observada experimentalmente e o modelo não permitiu identificar o mecanismo de colapso. Além disso, Vollum [1998] concluiu que os resultados eram muito

sensíveis a pequenos ajustes na modelação que alteravam significativamente a rigidez dos espécimes. Ainda assim, este estudo permitiu Vollum [1998] concluir que o mecanismo dominante para transferência de forças na zona das ligações viga-pilar é o mecanismo de escora inclinada e não o mecanismo de treliça (Capítulo 5).

Baglin e Scott [2000] complementaram um programa experimental de ligações viga-pilar 2D de extremidade submetidas a acções quase-estáticas e monotónicas com modelos de elementos finitos no programa informático SBETA (Červenka Consulting [2000b]) desenvolvido para a análise de estruturas de betão armado em estado plano de tensão ou deformação. Foram adoptados para o betão elementos quadriláteros de quatro nós pelo que houve necessidade de adoptar malhas finas. No entanto, de acordo com Baglin e Scott [2000], as malhas finas com este elemento conduzem a respostas excessivamente rígidas da ligação. Para minimizar a rigidez excessiva, estes autores optaram por refinar as malhas apenas (i) nas zonas de compressão onde era espectável o esmagamento do betão (para não atrasar o esmagamento) e (ii) nas zonas com elevado gradiente de tensões e/ou comportamento complexo (diagonal de compressão e zona de amarração dos varões traccionados da armadura longitudinal das vigas). Para modelar os varões da armadura foram usados elementos lineares biarticulados embebidos com comportamento bilinear com endurecimento de forma a reproduzir o comportamento verificado experimentalmente. O betão foi modelado recorrendo ao modelo constitutivo proposto por defeito no SBETA, que partilha do mesmo nome. De acordo com Baglin e Scott [2000], o SBETA permitiu a determinação da totalidade da relação força-deslocamento bem como reproduzir o padrão de fissuração nas ligações viga-pilar e identificar os tipos de rotura.

Também para complementar uma campanha de ensaios experimentais, Hegger, Sherif *et al.* [2004] modelaram várias ligações viga-pilar interiores e de extremidade recorrendo ao ATENA 2D (Červenka Consulting [2000a]), o programa de elementos finitos que sucedeu ao SBETA. Tal como o SBETA, o ATENA 2D foi desenvolvido especificamente para modelar o comportamento materialmente não linear de elementos de betão armado submetidos a estado planos de tensão ou deformação. Usou-se o elemento isoparamétrico plano quadrilátero de nove nós para modelar o betão e elementos lineares biarticulados embebidos para modelar as armaduras. A versão utilizada do ATENA 2D assume aderência perfeita entre os varões da armadura e o betão envolvente, pelo que foi necessário utilizar uma malha de elementos finitos mais fina no interior da ligação (10 mm de lado) do que nas vigas e pilares, para que a deformação no betão envolvente dos varões no interior da ligação viga-pilar exibisse deformações equivalentes ao escorregamento dos varões relativamente ao betão. Para as armaduras foi assumido um comportamento elástico-perfeitamente plástico e para o betão foi adoptado o modelo SBETA com a adaptação de alguns parâmetros, em particular para reflectir o estado de confinamento do betão na zona das ligações viga-pilar. Hegger, Sherif *et al.* [2004] reportaram uma boa concordância entre os resultados experimentais e os resultados dos modelos de EF, tanto em termos de grandezas globais (relação força-deslocamento) como em termos de grandezas locais (tensões e extensões nos varões das armaduras).

Mitra [2007] simulou dois ensaios experimentais de ligações viga-pilar 2D interiores

submetidos a acções aplicadas de forma quase-estático e monotónica. Foi utilizado o programa de EF DIANA 9.1 (TNO DIANA [2007]) e foi efectuada uma análise bidimensional assumindo um estado plano de tensão. Para modelar o betão, foram usados elementos quadriláteros de quatro nós com uma malha fina (elementos com 10 mm de lado), a armadura transversal foi modelada discretamente recorrendo a elementos lineares embebidos (aderência perfeita) e a armadura longitudinal das vigas e pilares foi modelada por elementos lineares com dois graus de liberdade ligados aos elementos de betão por intermédio de elementos de aderência contínuos. Para as armaduras foi adoptado o modelo elástico-plástico de *Von-Mises* e para a aderência aço-betão foi adoptado o modelo proposto por Eligehausen, Popov *et al.* [1983]. Para o comportamento do betão em compressão foi adoptado um modelo elástico linear e o modelo de *Drucker-Prager*. Para o comportamento do betão em tracção foi adoptado um modelo de fendas múltiplas fixas. Apesar de ter modelado com sucesso diversos ensaios *benchmark* que atestaram a capacidade do programa modelar isoladamente fenómenos complexos como a aderência ou o comportamento de elementos de betão ao corte, Mitra [2007] não conseguiu modelar as ligações viga-pilar com sucesso devido a problemas de convergência e ao tempo excessivo de cálculo. Mitra [2007] concluiu que os programas informáticos de elementos finitos *state of the art* apesar de adequados para estudar mecanismos individuais com comportamento não linear, ainda não permitiam o estudo da interacção de diferentes mecanismos complexos, não só devido à falta de algoritmos estáveis e robustos capazes de captar e lidar com diferentes modos de rotura em simultâneo mas também devido ao elevado tempo computacional que requeriam.

Sasmal, Novák *et al.* [2010b] modelaram ensaios de ligações viga-pilar de extremidade submetidas a cargas verticais e cargas laterais aplicadas de forma quase-estática e cíclica com o programa de EF ATENA 3D (Červenka Consulting [2009]). Estes autores pretendiam avaliar o comportamento cíclico de ligações viga-pilar dimensionadas apenas para cargas gravíticas e de ligações viga-pilar dimensionadas para cargas laterais cíclicas mas com pormenorizações inadequadas para garantir um comportamento dúctil. As armaduras foram modeladas de forma discreta recorrendo a elementos biarticulados embebidos e o betão foi modelado recorrendo a elementos hexaédricos quadráticos com 50 a 100 mm de lado. Foi possível adoptar malhas tão grosseiras devido à possibilidade de modelar de forma explícita o escorregamento entre os varões das armaduras e o betão envolvente. O modelo utilizado para as armaduras é baseado no de Menegotto e Pinto [1973] e a aderência entre o betão e os varões utiliza o modelo proposto no MC90 [1990]. Para o betão foi adoptado o modelo de comportamento *CC3NonLinCementitious2* proposto no ATENA 3D. Este modelo baseia-se na decomposição das extensões numa parcela elástica, uma parcela plástica e uma parcela de fractura e combina um modelo de plasticidade não associada com um modelo de fractura. O modelo de plasticidade adopta a superfície de cedência proposta por Menétrey e William [1995] e o modelo de fractura baseia-se no trabalho desenvolvido por Bažant e Oh [1983]. À semelhança de Hegger, Sherif *et al.* [2004], Sasmal, Novák *et al.* [2010b] adaptaram alguns parâmetros no modelo de comportamento do betão em compressão para reflectir o estado de confinamento do betão na zona das ligações viga-pilar. Sasmal, Novák *et al.* [2010b] concluíram que os resultados da simulação numérica com o ATENA 3D apresentaram uma boa correspondência com os resultados experimentais, não só em termos de histerese da relação

força-deslocamento mas também em termos do padrão de danos exibido pelas ligações viga-pilar.

Também foram reportados bons resultados na modelação do comportamento de ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado recorrendo ao método dos elementos finitos com o programa VecTor2 (Sagbas, Vecchio *et al.* [2011]) e MASA (Eligehausen, Ozbolt *et al.* [2006]), que também são programas especificamente desenvolvidos para a modelação de elementos de betão armado.

Os exemplos apresentados sugerem que os programas de EF de carácter mais genérico apresentaram, no passado, problemas em modelar elementos de betão armado (ANSYS, DIANA). Pelo contrário, também sugerem que programas desenvolvidos especificamente para modelar elementos de betão armado (SBETA, ATENA 2D, ATENA 3D, VecTor2, MASA) apresentaram um bom desempenho.

Como nota final, refira-se que a revisão bibliográfica apresentada sugere que os modelos de elementos finitos materialmente não lineares desenvolvidos para a modelação de estruturas de betão armado, atingiram maturidade e fiabilidade suficiente para serem actualmente considerados uma ferramenta viável para análise de estruturas com características especiais (dimensão, geometria complexa, incerteza nas condições fronteira – Walraven [2010], Fib [2010b]). Existem no entanto alguns aspectos a ter em consideração quando se ponderar a sua utilização, nomeadamente

- (i) baseiam-se em modelos de comportamento material complexos, sendo os mais relevantes a mecânica da fractura não linear, a teoria da plasticidade, a teoria dos microplanos, a teoria do dano e a teoria viscoelástica e viscoplástica (Fib [2010b]);
- (ii) requerem muito tempo de modelação e de análise da grande quantidade de informação que constitui o seu *output*;
- (iii) os elevados custos computacionais só permitem a modelação de pequenas partes da estrutura, sendo recomendável, sempre que possível, recorrer a simplificações estruturais;
- (iv) exigem a definição/quantificação de parâmetros sem significado físico ou cujo significado físico só é possível de apreender com o conhecimento dos fundamentos teóricos subjacentes, que habitualmente são pouco elementares;
- (v) as soluções podem apresentar forte sensibilidade em relação às opções do operador (malha de elementos adoptada, definição das condições fronteira).

### 2.3.2.2. Modelos mecânicos/macro-elementos

Os macro-elementos representam, de forma simples, os principais mecanismos que determinam o comportamento da ligação recorrendo a elementos flexíveis 0D (molas) conjugados com elementos rígidos. A cada mola é atribuída uma lei de comportamento e a conjugação de todas as molas e elementos rígidos conduz ao comportamento global da ligação.

Youssef e Ghobarah [2001] propuseram um modelo para ligações viga-pilar 2D sob acções cíclicas composto por (i) quatro elementos rígidos biarticulados dispostos em quadro ao longo

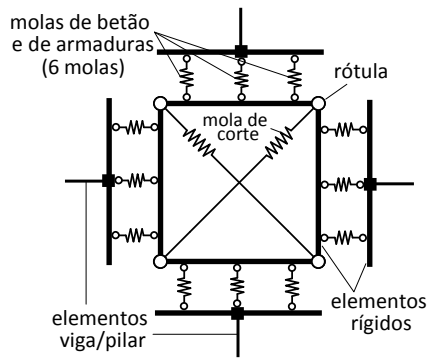


Figura 2.10 – Modelo de ligação proposto por Youssef e Ghobarah [2001].

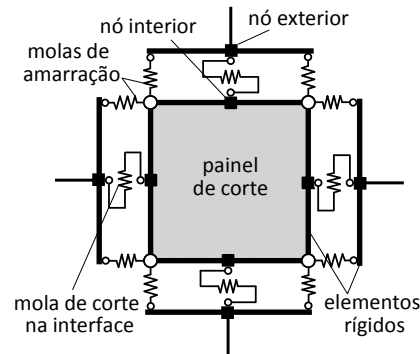


Figura 2.11 – Modelo de ligação proposto por Lowes e Altoontash [2003].

da periferia da ligação, (ii) duas molas lineares dispostas diagonalmente no interior do quadro e (iii) seis molas (Figura 2.10) dispostas entre cada um dos elementos rígidos que constituem o quadro e um outro elemento rígido paralelo e solidário com a extremidade da viga/pilar adjacente. As molas diagonais visam simular a rigidez à distorção da ligação e, das 24 molas dispostas na interface da ligação, doze são representativas do comportamento da armadura longitudinal das vigas e pilares no interior da ligação e doze são representativas do comportamento do betão envolvente. Cada uma das 12 molas representativas da armadura modela o escorregamento de um grupo de varões no interior da ligação e cada uma das 12 molas de betão tem em consideração a rigidez e resistência à compressão de uma zona de betão da secção transversal da viga ou pilar adjacente. A distância entre as molas de extremidade em cada face é tal que o momento último da secção transformada seja igual ao momento último da secção real.

Lowes e Altoontash [2003] propuseram um modelo composto por (i) um quadro formado por quatro elementos rígidos biarticulados dispostos ao longo da periferia da ligação, (ii) um painel no interior do quadro e (iii) interfaces entre a ligação e cada uma das vigas e pilares adjacentes modeladas por três molas lineares (Figura 2.11) dispostas entre uma das faces do quadro e um elemento rígido correspondente à extremidade da viga/pilar e ortogonal ao respectivo eixo. Duas das molas da interface entre a ligação e cada uma das vigas/pilares são paralelas ao eixo da viga/pilar e visam modelar a amarração dos varões da respectiva armadura longitudinal no interior da ligação. A terceira mola da interface entre a ligação e cada uma das vigas/pilares é ortogonal ao eixo da viga/pilar e visa modelar a deformação por corte na interface da ligação. O painel no interior da moldura visa modelar a distorção da ligação e também pode ser idealizado como uma mola angular entre dois elementos rígidos num dos cantos do quadro (Lowes, Mitra *et al.* [2004]). Mitra e Lowes [2007] propuseram uma nova versão do modelo desenvolvido por Lowes e Altoontash [2003] em que as molas da interface paralelas aos eixos das vigas/pilares adjacentes foram deslocadas para o eixo das resultantes de compressão e tracção das secções transversais das extremidades das vigas/pilares adjacentes e o modelo de comportamento da mola angular no canto do quadro foi modificado – em vez de um mecanismo resistente de treliça foi assumido um mecanismo de escora diagonal. Tanto o modelo proposto por Lowes e Altoontash [2003] como o modelo proposto por Mitra e Lowes [2007] incorporam, para além dos graus de liberdade dos nós correspondentes às extremidades das vigas/pilares, quatro graus de liberdade adicionais correspondentes a translações de nós interiores ao modelo de ligação.

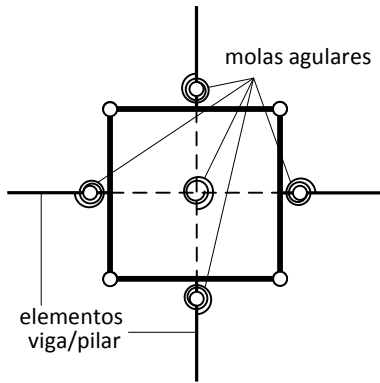


Figura 2.12 – Modelo de ligação proposto por Altoontash [2004].

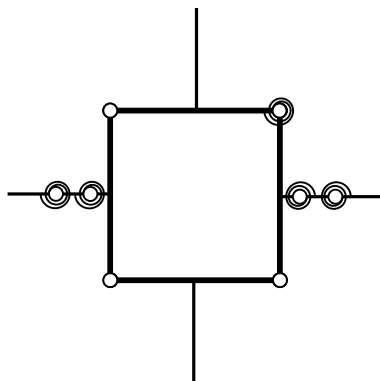


Figura 2.13 – Modelo de ligação proposto por Shin e LaFave [2004].

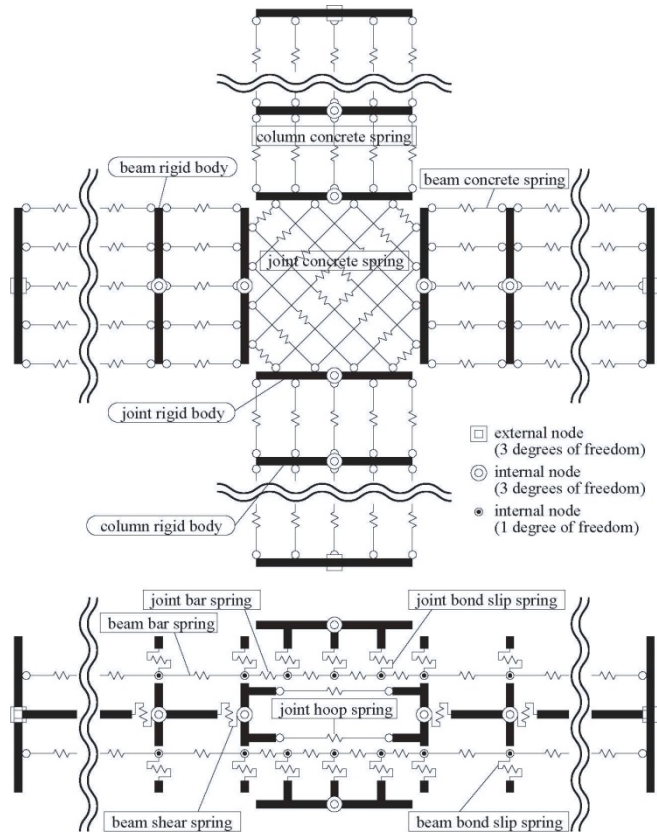


Figura 2.14 – Modelo de ligação proposto por Tajiri, Shiohara *et al.* [2006].

Altoontash [2004] propôs um modelo de ligação viga-pilar baseado no modelo de Lowes e Altoontash [2003] em que a ligação é modelada por um painel e por quatro molas angulares dispostas nos pontos intermédios das faces do painel, às quais estão ligados os elementos viga e pilar. O painel visa modelar a distorção da ligação e as molas angulares visam modelar a rotação relativa entre as faces da ligação e a extremidade das vigas. Contrariamente ao que ocorre no modelo proposto por Lowes e Altoontash [2003], no modelo proposto por Altoontash [2004] é desprezada a deformação por corte e a deformação axial nas interfaces entre a ligação e as vigas/pilares (Figura 2.12). A rigidez do painel no modelo proposto por Altoontash [2004] é materializada por uma mola angular entre dois segmentos de recta que em cada instante unem os pontos médios dos lados de um quadro formado por elementos rígidos biarticulados dispostos ao longo da periferia da ligação viga-pilar (ou seja, igual à mola angular de canto).

Shin e LaFave [2004] propuseram um modelo constituído por (i) quatro elemento rígidos biarticulados dispostos ao longo da periferia da ligação em quadro, (ii) uma mola angular num dos cantos do quadro e (iii) duas molas dispostas em série na extremidade de cada viga (Figura 2.13). Este modelo visa modelar ligações viga-pilar com comportamento dúctil e pormenorizadas de acordo com as disposições técnicas sísmicas actuais. A mola angular no canto do quadro modela o efeito do corte no núcleo da ligação, uma das duas molas dispostas em série na extremidade de cada viga modela a rótula plástica na extremidade da viga e outra modela a rotação relativa da viga em relação ao núcleo da ligação provocada pelo escorregamento da armadura longitudinal da viga no interior da ligação.

Tajiri, Shiohara *et al.* [2006] propuseram o macro-elemento composto por elementos rígidos e por molas lineares apresentado na Figura 2.14. Este modelo visa simular o comportamento não só das ligações viga-pilar propriamente ditas mas também das zonas das vigas e pilares adjacentes onde é de esperar a formação de rótulas plásticas sob acções sísmicas. Trata-se de um modelo complexo dada a modelação explícita da armadura na zona da ligação e do escorregamento da armadura longitudinal da viga na ligação e nos troços de viga imediatamente adjacentes à ligação. Este modelo, além dos graus de liberdade associados aos nós exteriores à ligação, incorpora também nós interiores à ligação com 1 e 3 graus de liberdade.

Os exemplos apresentados mostram que, de forma geral, os modelos mecânicos caracterizam-se por desacoplar (i) distorção da ligação, (ii) deformação da amarração da armadura longitudinal dos elementos 1D adjacentes à ligação e (iii) deformação dos elementos 1D. Desta forma, estes modelos são, geralmente, mais rigorosos que os modelos de análise local.

### 2.3.3. Modelação corrente de ligações viga-pilar em estruturas de betão armado

A modelação das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado é habitualmente efectuada com recurso a modelos implícitos (§2.3.1). Apresentam-se, em seguida, exemplos de diferentes abordagens em programas informáticos de cálculo de estruturas reticuladas com expressão significativa no mercado nacional.

A esmagadora maioria dos programas de cálculo de estruturas reticuladas estão vocacionados para a modelação das ligações viga-pilar recorrendo a modelos de eixos (Figura 2.7(a)) e o dimensionamento dos elementos viga/pilar adjacentes é efectuado com base nos esforços apresentados por estes elementos na intersecção dos respectivos eixos (secções assinaladas na Figura 2.7(a)). No Capítulo 3 são avaliadas as consequências desta simplificação sobre os esforços de dimensionamento adoptados para as vigas e pilares.

Os programas SAP2000 (Computers & Structures Inc. [2009d]), ETABS (Computers & Structures Inc. [2009b]) e SAFE (Computers & Structures Inc. [2009c]), de acordo com os respectivos manuais (Computers & Structures Inc. [2009a]), adoptam o modelo implícito genérico representado na Figura 2.7(b). Os esforços adoptados para dimensionamento das vigas e pilares adjacentes à ligação são também os das secções representadas na Figura 2.7(b). O valor dos parâmetros  $\beta_b$  e  $\beta_c$  (*rigid-end factors*, Figura 2.7(b)) é deixado ao critério do utilizador mas é recomendada a adopção de valores que não excedam 0.5. Consequentemente a ligação viga-pilar é assumida rígida caso se adopte um *rigid-end factor* unitário e deformável caso se adopte um *rigid-end factor* inferior à unidade.

O programa Cypecad (CYPE Ingenieros S.A. [2012a]), de acordo com o respectivo manual de utilizador (CYPE Ingenieros S.A. [2012b]), modela as ligações viga-pilar como rígidas. Cada ligação viga-pilar é constituída por um *nó geral* e vários *nós associados* na periferia da ligação em número igual ao dos elementos lineares adjacentes (Figura 2.15(a)). Os nós associados não apresentam liberdade de movimentos em relação ao nó geral, equivalendo, como já foi referido, a usar o modelo de ligação viga-pilar rígido (Figura 2.7(c)).

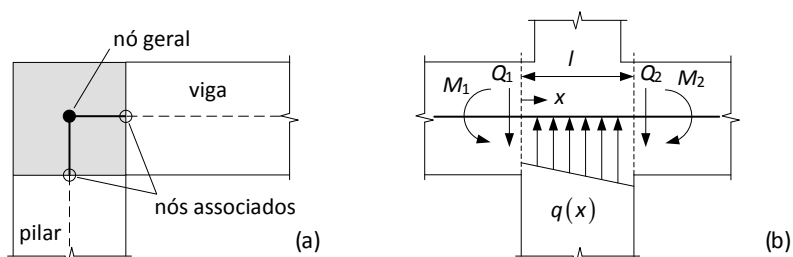


Figura 2.15 – Ligação viga-pilar no Cypecad (a) modelação da ligação viga-pilar, (b) equilíbrio de esforços na ligação viga-pilar (adaptado de CYPE Ingenieros S.A. [2012b]).

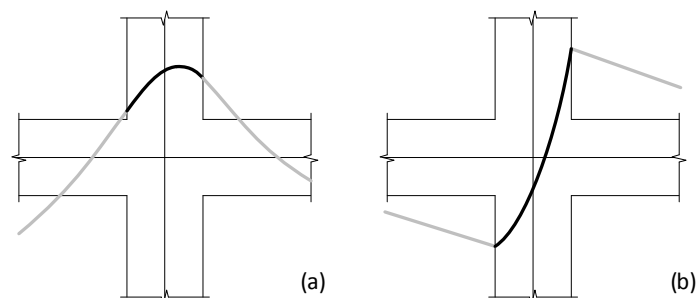


Figura 2.16 – Diagramas de esforços no interior da ligação, (a) momentos flectores e (b) esforço transverso (adaptado de CYPE Ingenieros S.A. [2012b]).

O momento de dimensionamento na extremidade de cada elemento 1D é o máximo (em valor absoluto) entre o valor que o elemento apresenta na periferia da ligação viga-pilar e o valor máximo deste esforço no interior da ligação, determinado por equilíbrio, prolongando os elementos 1D para o interior da ligação e assumindo que o elemento linear que lhes é transversal introduz uma carga linearmente distribuída sobre estes prolongamentos (Figura 2.15(b)). Como consequência, a distribuição de momentos flectores nos prolongamentos das vigas e pilares no interior da ligação é definida por um polinómio de terceiro grau cujos coeficientes são determinados pelos esforços nas extremidades dos dois elementos lineares adjacentes ( $M[0]=M_1, M[l]=M_2, Q[0]=Q_1, Q[l]=Q_2$ ). Para o caso apresentado na Figura 2.15(b) este procedimento conduz a diagramas de esforços com o andamento qualitativo apresentado na Figura 2.16.

## 2.4. Estudos experimentais

A esmagadora maioria dos trabalhos publicados, relativos a estudos experimentais de ligações viga-pilar de estruturas de betão armado, visam avaliar a performance de pormenorizações de ligações viga-pilar em termos de capacidade resistente, ductilidade e capacidade de dissipação de energia para acções cíclicas de elevada amplitude. São por isso estudos que normalmente não fornecem informação relevante para a modelação do comportamento das ligações quando submetidas a acções quase-estáticas e monotónicas. Além disso, na maioria dos estudos relativos a acções quase-estáticas e monotónicas, apenas é avaliada a capacidade resistente das ligações e não o seu comportamento.

Na revisão bibliográfica que em seguida se apresenta apenas são referenciados estudos experimentais relativos a ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado submetidas a cargas gravíticas e a cargas laterais aplicadas de forma quase-estáticas e monotónica.



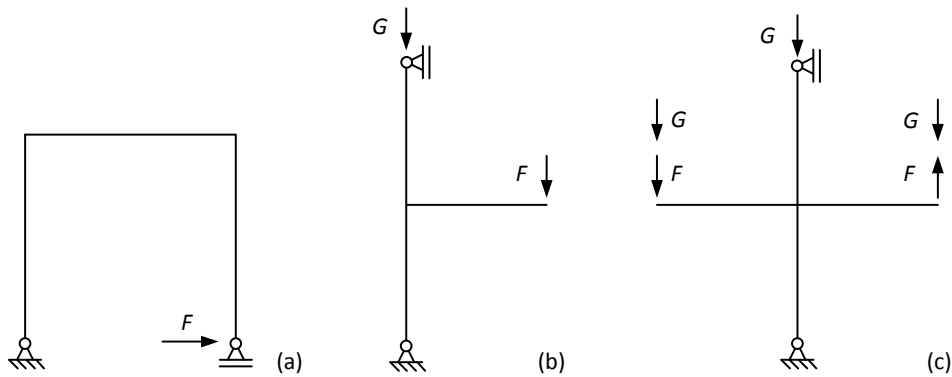


Figura 2.17 – Configurações de ensaios experimentais, (a) ligações de cobertura de extremidade submetidas a momento de abertura, (b) ligação de extremidade, (c) ligação interior.

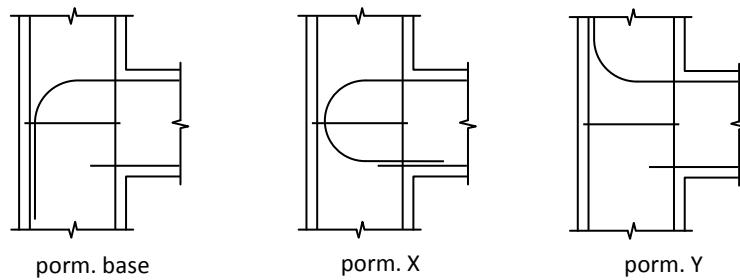


Figura 2.18 – Pormenorização da armadura das ligações viga-pilar (Taylor [1974]).

De uma forma geral, os ensaios experimentais recorrem a ensaios de subestruturas do tipo representado na Figura 2.17, em que  $G$  e  $F$  simulam o efeito das cargas gravíticas e laterais, respectivamente. Estas subestruturas representam partes de estruturas completas delimitadas por secções de momento flector nulo.

Balint e Taylor [1972], num estudo realizado sobre subestruturas que incorporavam ligações de cobertura de extremidade, verificaram que a rotura destas subestruturas se iniciava, geralmente, pela ligação, quando o desejável é que os elementos lineares adjacentes à ligação rompam primeiro (por flexão). Mais tarde, Taylor [1974] ensaiou 26 ligações viga-pilar de extremidade (2D) de betão armado submetidas a cargas gravíticas e laterais para averiguar se este tipo de ligação também apresentava aquela tendência. Na Figura 2.18 estão esquematicamente representadas as pormenorizações estudadas por Taylor [1974].

Taylor [1974] concluiu que, para as pormenorizações estudadas, a capacidade resistente da ligação era, na maioria dos casos, demasiado baixa e insuficiente para permitir o desenvolvimento do momento resistente na viga adjacente, em particular quando o valor da percentagem de armadura longitudinal da viga era elevado. Concluiu ainda que, para as pormenorizações estudadas com maiores percentagens de armadura longitudinal da viga, é espectável a formação de fendas diagonais visíveis a olho nu na ligação em situação de serviço.

Nilsson e Losberg [1976] estudaram a pormenorização da armadura dum conjunto alargado de ligações viga-pilar de cobertura de extremidade (2D) submetidas a momentos de abertura, ou seja, que tendem a fazer aumentar o ângulo entre os eixos da viga e pilar. Estes autores concluíram que, na maioria dos casos estudados, a ligação viga-pilar apresentava uma capacidade resistente inferior à necessária para que a viga adjacente desenvolvesse a sua resistência última à flexão.

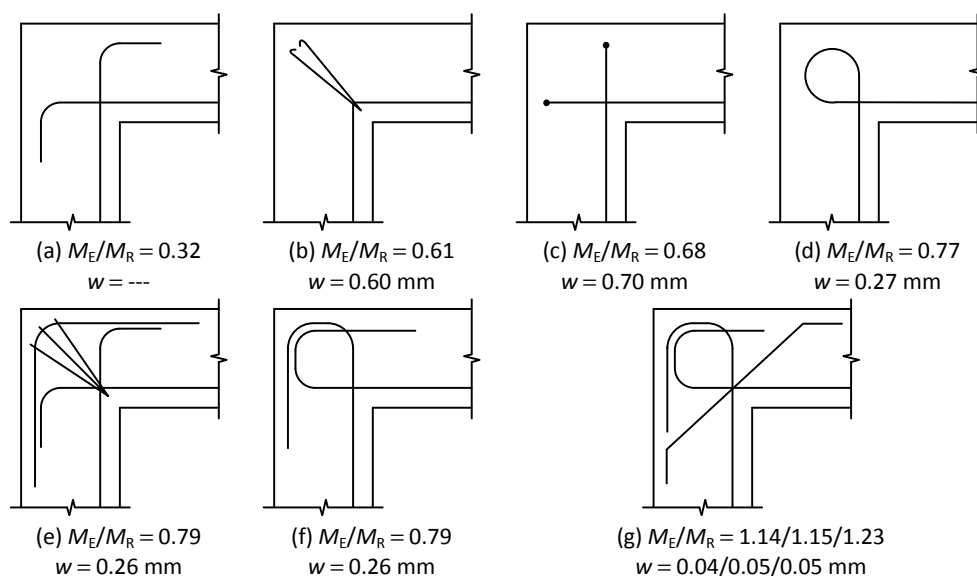


Figura 2.19 – Resultados experimentais das ligações viga-pilar de cobertura de extremidade reportados por Nilsson e Losberg [1976].

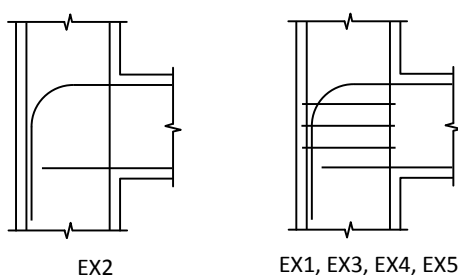


Figura 2.20 – Pormenorizações da armadura das ligações viga-pilar (Sarsam [1983]).

A Figura 2.19 resume as pormenorizações da armadura estudadas. Esta figura apresenta ainda a *eficiência da ligação* (quociente entre o momento flector na extremidade efectiva da viga quando ocorreu o colapso do espécime,  $M_E$ , e o momento flector resistente calculado para a mesma secção,  $M_R$ ) e a largura das fendas diagonais na ligação ( $w$ ) para a situação de serviço (assumindo que esta corresponde a um momento flector na extremidade da viga  $M_R/1.8$  (Nilsson e Losberg [1976])). De acordo com estes autores, o parâmetro  $w$  proporciona uma medida da deformabilidade das ligações. No caso representado na Figura 2.19(a) o colapso da ligação ocorreu para uma carga inferior à correspondente ao momento  $M_R/1.8$  e no caso representado na Figura 2.19(g) são apresentados os resultados relativos a três espécimes com a mesma pormenorização mas com diferentes propriedades mecânicas dos materiais constituintes.

A Figura 2.19 mostra que uma pormenorização adequada deste tipo de ligações é fundamental para um desempenho satisfatório. Em particular, verifica-se que muitas das configurações apresentam uma capacidade resistente muito aquém do desejável. De notar ainda que, para a situação de serviço definida por Nilsson e Losberg [1976], foram identificadas fendas diagonais em todas as ligações viga-pilar.

Sarsam [1983] ensaiou 5 ligações viga-pilar de extremidade (2D) submetidas a cargas gravíticas e laterais para avaliar de que forma (i) as cintas, (ii) o esforço axial no pilar e (iii) o quociente entre o esforço transversal e o momento flector na extremidade da viga, influenciam o comportamento, incluindo a capacidade resistente, das ligações viga-pilar. Na Figura 2.20

apresentam-se as pormenorizações tipo das ligações viga-pilar estudadas por Sarsam [1983].

Com excepção do espécime EX2, que não possuía cintas na ligação viga-pilar, todos os espécimes colapsaram por esgotamento da capacidade resistente de flexão das vigas. Sarsam [1983] concluiu que as cintas nas ligações viga-pilar de extremidade (i) limitam significativamente a penetração da cedência nos varões da armadura longitudinal da viga para o interior da ligação, (ii) reduzem o escorregamento dos varões verticais no interior da ligação, (iii) aumentam a rigidez à distorção da ligação e (iv) evitam a ocorrência de *spalling* na face do pilar oposta à viga. Sarsam concluiu ainda que, para um dado nível de carga, quando aumenta a razão entre o esforço transversal e o momento flector, embora não diminua a capacidade de carga das ligações viga-pilar, aumenta a distorção das ligações.

Ortiz [1993] ensaiou 7 ligações viga-pilar de extremidade (2D), com uma pormenorização do mesmo tipo da adoptada por Sarsam [1983] (Figura 2.20), sob acções quase estáticas e monotónicas tendo em vista o desenvolvimento de um modelo de resistência para esta tipologia de ligação baseado num modelo de escoras e tirantes. As variáveis estudadas foram (i) a quantidade de armadura transversal na ligação, (ii) o diâmetro de dobragem dos varões da armadura longitudinal da viga e (iii) o esforço axial nos pilares. Com excepção de um espécime (BCJ7) que colapsou por esgotamento da capacidade resistente da viga, todos os espécimes colapsaram por esgotamento da capacidade resistente das ligações viga-pilar. O modelo de resistência proposto apresenta uma boa correlação com os resultados experimentais efectuados pela autora e com os resultados publicados por Kordina [1984] e Taylor [1974].

Hamil [2000] ensaiou 49 ligações viga-pilar de extremidade (2D) sob acções quase-estáticas e monotónicas, para complementar os resultados de uma extensa revisão bibliográfica, onde foram analisados os resultados publicados por Taylor [1974], Ryan [1977], Meinheit e Jirsa [1977], Kordina [1984], Sarsam e Phipps [1985], Scott [1992], Scott, Feltham *et al.* [1994], Ortiz [1993], Parker [1997] e Vollum e Newman [1999a]. Pretendia-se avaliar quais os parâmetros relevantes para o início da fendilhação diagonal das ligações viga-pilar de extremidade e para a sua capacidade resistente.

Hamil [2000] definiu tensão tangencial normalizada na ligação como o quociente entre a força de corte horizontal a meia altura da ligação e o produto da altura útil da secção transversal do pilar ( $d_c$ ) pela média das larguras da secção transversal do pilar ( $b_c$ ) e da viga ( $b_b$ ) e pela resistência à compressão do betão num ensaio de compressão uniaxial normalizado ( $f_c'$ ). Hamil [2000] concluiu que a tensão tangencial normalizada na ligação correspondente ao início da fendilhação diagonal em ligações viga-pilar de extremidade é maior quando (i) é utilizado betão com fibras, (ii) são dispostas chapas metálicas no plano médio da ligação, (iii) se agrava o esforço axial no pilar (compressão) ou (iv) se aumenta a percentagem de armadura longitudinal no pilar. Hamil [2000] concluiu também que a tensão tangencial normalizada na ligação correspondente ao início da fendilhação diagonal não é influenciada (i) pelo número ou posição das cintas, (ii) pela resistência à compressão do betão nem, (iii) pela esbelteza da ligação.

Hamil [2000] concluiu ainda que a tensão tangencial resistente normalizada em ligações viga-pilar de extremidade (i) é proporcional à raiz quadrada da resistência à compressão uniaxial do betão, (ii) não é significativamente afectada pelo valor do esforço axial nos pilares, (iii) é maior

quando se usa betão com fibras ou (iv) chapas metálicas no plano médio da ligação e (v) é fortemente dependente da pormenorização utilizada. Hamil [2000] concluiu que (i) a ancoragem da armadura longitudinal da viga em L para o pilar (L5, §2.2.2.3) e a disposição em U (L6, §2.2.2.3) podem reduzir a capacidade resistente da ligação em 40% e 20%, respectivamente, relativamente à ancoragem em L para o interior da ligação (L4, §2.2.2.3), (ii) a utilização de cintas aumenta significativamente a capacidade resistente das ligações viga-pilar e (iii) as cintas são mais efectivas se forem dispostas na zona central das ligações e na zona compreendida entre a meia altura destas e a cota dos varões de tracção da armadura longitudinal da viga.

Roeser [2002] ensaiou 8 ligações viga-pilar de extremidade (série RK) e 7 ligações viga-pilar interiores (série RA) submetidas a cargas gravíticas e laterais com pormenorizações dos tipos representados na Figura 2.21. A maioria das subestruturas ensaiadas por Roeser [2002] romperam pelas ligações viga-pilar – só as subestruturas com ligações de extremidade menos esbeltas ( $h_b/h_c = 1.25$ ) romperam pelas vigas (RK1, RK2 e RK3).

A Figura 2.22, apresentada por Roeser [2002], quantifica as contribuições relativas para o deslocamento do ponto de aplicação da carga num modelo de subestrutura com ligação viga-pilar de extremidade (RK4, Figura 2.17(a)) e num modelo de subestrutura com ligação viga-pilar interior (RA 2, Figura 2.17(b)). A única contribuição para a deformação da ligação viga-pilar considerada na modelação por Roeser [2002] foi a distorção.

A Figura 2.22 mostra que, para valores reduzidos da carga, as deformações por flexão das vigas e dos pilares são predominantes e pode-se desprezar a distorção da ligação. No entanto, após a fendilhação diagonal da ligação (correspondente ao instante em que a parcela da deformação da ligação passa a ser maior que zero) a contribuição relativa da distorção para a deformação global da subestrutura aumenta, atingindo cerca de 60% (antes do colapso da ligação).

A análise dos resultados dos ensaios apresentados permite concluir que (i) em algumas situações, as ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado podem ser

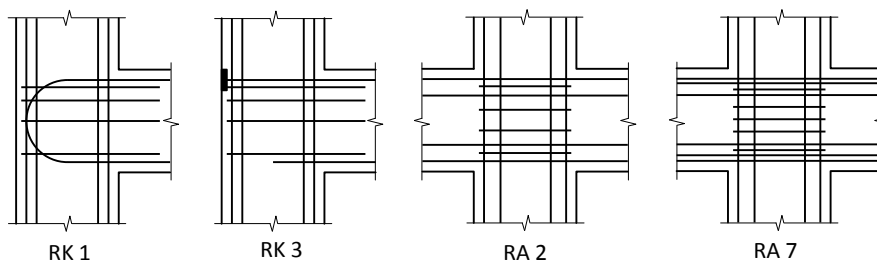


Figura 2.21 – Pormenorizações tipo utilizadas por Roeser [2002].

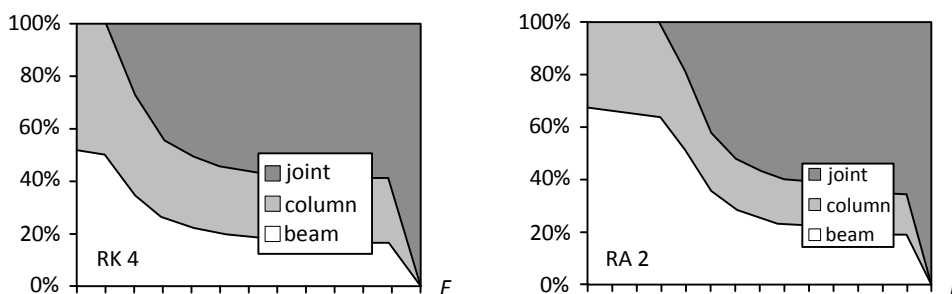


Figura 2.22 – Contribuições relativas para o deslocamento das subestruturas RK4 (ligação viga-pilar de extremidade) e RA2 (ligação viga-pilar interior) (Roeser [2002]).

classificadas como ligações de resistência parcial (§2.2.2.4.1) e (ii) a contribuição da deformação das ligações viga-pilar para a deformação global das estruturas pode ser significativa.

Como nota final, refira-se que os ensaios experimentais são, naturalmente, a forma mais fidedigna de análise do comportamento das ligações viga-pilar de betão armado. No entanto, o estudo experimental de ligações viga-pilar apresenta algumas desvantagens, nomeadamente

- (i) é dispendioso (fabrico, instrumentação, ensaio, análise de dados);
- (ii) dada a variabilidade de tipologias de ligações viga-pilar (§2.2.2.2), pormenorizações (§2.2.2.3) e combinações de esforços na interface da ligação seria extremamente morosa a aplicação exaustiva desta metodologia;
- (iii) a complexidade dos mecanismos intervenientes no comportamento das ligações viga-pilar exige ensaios com condições muito controladas, o que conduziu a que, na maioria dos ensaios, os espécimes fossem estaticamente determinados, não reflectindo as condições de fronteira das estruturas reais;
- (iv) dado que apenas é exequível o ensaio de pequenas partes de estruturas completas contendo as ligações viga-pilar, os ensaios experimentais não permitem identificar a interacção entre as ligações e o resto da estrutura e, desta forma, avaliar o efeito da ligação em termos de comportamento global.

## 2.5. Normas e outras especificações técnicas

Apenas recentemente foram introduzidas nas especificações técnicas disposições relativas a ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado (Fib [2003]). No caso particular das acções não cíclicas, a maioria das especificações não exige qualquer verificação das ligações viga-pilar. De acordo com Uma e Jain [2006], esta inexistência de disposições específicas deve-se ao facto da resistência das ligações viga-pilar em estruturas porticadas correntes não ser na maioria dos casos um aspecto crítico para cargas gravíticas.

Nos casos em que existem disposições técnicas relativas a ligações viga-pilar, de uma forma geral, visam estabelecer dimensões mínimas da ligação e quantidades de armadura transversal que (i) permitam uma amarração adequada da armadura longitudinal das vigas e pilares adjacentes e (ii) limitem a tensão de corte na ligação por forma a garantir que esta está abaixo do nível correspondente à rotura.

Embora a avaliação das disposições regulamentares aplicáveis a ligações viga-pilar de betão armado esteja fora do âmbito desta tese, nesta secção é apresentada uma revisão sumária das disposições mais relevantes relativas à forma como estes elementos são caracterizados, evidenciando a inexistência de consenso entre as diferentes abordagens, ilustrando a falta de ênfase das especificações na modelação destes elementos e identificando os parâmetros em função dos quais é habitual caracterizar as ligações viga-pilar.

No resumo das disposições das especificações técnicas em seguida apresentado, procurou-se manter a simbologia original e só se alterou nos casos em que se julgou que o seu uso pudesse originar ambiguidades na interpretação deste documento.

### 2.5.1. NP EN 1992-1-1

A norma EN NP 1992-1-1 (IPQ [2010a]) não se refere de forma explícita à modelação das ligações viga-pilar na análise e dimensionamento de estruturas. As únicas referências a ligações viga-pilar são as disposições genéricas relativas a regiões de descontinuidade da geometria ou acção (§9.9 e Anexo J da EN NP 1992-1-1), onde são sugeridos modelos de escoras e tirantes para ligações viga-pilar de cobertura de extremidade.

O §5.3.2.2 da EN NP 1992-1-1 apresenta um conjunto de disposições para definir vãos efectivos de vigas e lajes em edifícios que conduzem invariavelmente a vãos efectivos superiores aos vãos livres. Estas disposições são aplicáveis à análise de elementos isolados e é referido que na análise de sistemas estruturais podem-se aplicar algumas das simplificações apresentadas quando tal for apropriado.

Além disso, o §5.3.2.2(3) da EN NP 1992-1-1, no caso particular de vigas e lajes, permite que se considere para momento flector de cálculo nos apoios,  $M_{Ed}$ , o momento à face do apoio, quando a viga ou laje é betonada monoliticamente com os apoios. É ainda indicado, numa nota, que para o valor do momento flector à face do apoio não deve ser considerado um valor inferior a 65% do valor que se teria num encastramento à face do apoio, ou seja

$$M_{Ed} \geq 0.65 M_{Ed,enc} = 0.65 \frac{q(L_e - h)^2}{\beta} \quad (2.3)$$

em que  $\beta = 12$  (8) para vãos intermédios (extremos),  $L_e$  é o vão entre eixos,  $h$  é a largura do apoio e  $q$  a intensidade da carga uniformemente distribuída. De acordo com Figueiras [1999], este limite visa evitar que o dimensionamento seja efectuado com base num valor muito baixo do momento flector, ou mesmo de sinal contrário, quando é reduzida a razão entre o vão do elemento e a altura da sua secção transversal.

A generalização dos procedimentos do §5.3.2.2 da EN NP 1992-1-1 a sistemas estruturais, ou seja, a definição de vãos efectivos para vigas e pilares superiores aos vãos livres sugere que a NP EN 1992-1-1 preconiza uma modelação implícita das ligações viga-pilar recorrendo a um modelo de eixos. No entanto o §5.3.2.2(3) da EN NP 1992-1-1 sugere que o dimensionamento destes elementos com base nos esforços nas extremidades destes elementos junto ao ponto de intersecção dos respectivos eixos pode ser excessivamente gravoso. Existe por isso a necessidade da clarificação destes procedimentos na medida em que estas extrapolações não são consensuais e, conseqüentemente, a sua validade requer uma avaliação cuidada.

### 2.5.2. NP EN 1998-1

A norma NP EN 1998-1 (IPQ [2010d]) requer explicitamente no seu §4.3.1 que o modelo de cálculo utilizado para efeito de análise estrutural tenha em consideração a contribuição das ligações para a deformabilidade da estrutura. Esta norma apresenta ainda requisitos mínimos para ligações viga-pilar em edifícios de classe de ductilidade média (DCM) e alta (DCH), de forma a assegurar que as ligações possuem uma adequada capacidade de dissipação de energia sem redução substancial da respectiva resistência.

### 2.5.2.1. Edifícios de classe de ductilidade média (DCM)

Relativamente a edifícios de DCM, de acordo com o §5.4.3.3(1) da NP EN 1998-1, as ligações viga-pilar dos elementos sísmicos primários devem ser confinadas com armadura horizontal (transversal) superior ou igual à armadura adoptada para as zonas críticas dos pilares (§§ 5.4.3.2.2(8)-(11) da NP EN 1998-1). Além disso, de acordo com o §5.4.3.2.2(2) desta especificação, deve ser colocado ao longo de cada face do pilar pelo menos um varão intermédio entre os varões de canto de forma a assegurar a integridade das ligações viga-pilar.

Porém, o §5.4.3.3(2) da NP EN 1998-1 indica que, no caso de ligações viga-pilar interiores 3D (Tabela 2.1) em que a largura das secções transversais das vigas for pelo menos 3/4 da dimensão da secção transversal do pilar que lhe é paralela, o espaçamento da armadura de confinamento horizontal (transversal) na ligação poderá ser aumentado para o dobro do valor das zonas críticas dos pilares (§§ 5.4.3.2.2(8)-(11) da NP EN 1998-1) mas não deverá ser superior a 150 mm.

### 2.5.2.2. Edifícios de classe de ductilidade elevada (DCH)

Para edifícios de DCH de uma forma geral aplicam-se as disposições para edifícios de DCM acrescidas dos requisitos que em seguida se enumeram.

Para edifícios de DCH, esta norma prevê uma verificação explícita da capacidade resistente das ligações viga-pilar. De acordo com o §5.5.2.3 da NP EN 1998-1, as ligações devem ser verificadas em termos de força de corte horizontal máxima, considerando as condições mais desfavoráveis devidas às acções sísmicas, ou seja, considerando a capacidade real para as vigas e os mais baixos níveis de esforço transversal compatíveis nos pilares. A força de corte horizontal máxima de cálculo ( $V_{jhd}$ ) é calculada pelas expressões

$$V_{jhd} = \gamma_{Rd} (A_{s1} + A_{s2}) f_{yd} - V_{c2} \quad (2.4)$$

e

$$V_{jhd} = \gamma_{Rd} A_{s1} f_{yd} - V_{c2} \quad (2.5)$$

para ligações viga-pilar interiores e de extremidade, respectivamente, em que  $A_{s1}$  e  $A_{s2}$  representam a área da secção transversal da armadura longitudinal superior e inferior da viga, respectivamente,  $f_{yd}$  é o valor de cálculo da tensão de cedência correspondente,  $V_{c2}$  é o esforço transversal no pilar na secção situada acima da ligação, determinado na análise da estrutura para a situação de projecto sísmica e  $\gamma_{Rd}$  é um coeficiente que contabiliza a sobrerresistência da viga devida ao endurecimento do aço e que não deverá ser inferior a 1.2.

De acordo com Masi, Santarsiero *et al.* [2009], esta estimativa para o esforço de corte na ligação pode ser insegura tendo em consideração que (i) o valor característico real da tensão de cedência das armaduras habitualmente excede o valor nominal, num valor que, de acordo com o §5.5.1.1(3)P da NP EN 1998-1 pode chegar aos 25% e (ii) o quociente entre a resistência última das armaduras e a respectiva tensão de cedência deve estar no intervalo 1.15-1.35 (armaduras da classe C de acordo com o §5.5.1.1(3)P da NP EN 1998-1 e com o Anexo B da NP EN 1992-1-1) pelo que, em média,  $f_{tm} = 1.45 f_{yk}$  enquanto que o valor implícito na NP EN 1998-1 é  $f_{tm} = 1.04 f_{yk}$  (valor calculado multiplicando  $f_{yk}$  por  $\gamma_{Rd} = 1.2$  e dividindo pelo

coeficiente parcial de segurança relativo ao aço para armaduras de betão armado  $\gamma_s = 1.15$ ).

De acordo com o §5.5.3.3(2)a da NP EN 1998-1, a capacidade resistente de ligações viga-pilar interiores é limitada pelo valor

$$V_{jhd} \leq \eta f_{cd} \sqrt{1 - \frac{V_d}{\eta}} b_j h_{jc} \quad (2.6)$$

em que  $v_d$  é o esforço axial reduzido na secção transversal do pilar acima da ligação,  $h_{jc}$  é a distância entre o eixo das camadas exteriores da armadura longitudinal do pilar,  $b_j$  é a largura efectiva da ligação dada por  $\min(b_c; b_w + 0.5h_c)$  se  $b_c > b_w$  e por  $\min(b_w; b_c + 0.5h_c)$  se  $b_c < b_w$  ( $b_c$  e  $b_w$  são a largura da secção transversal do pilar e da viga, respectivamente) e  $\eta$  é um factor que contabiliza a redução da capacidade resistente à compressão do betão na ligação viga-pilar, provocada pela extensão transversal de tracção, que é dado por

$$\eta = 0.6 \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right). \quad (2.7)$$

De acordo com o §5.5.3.3(2)b da NP EN 1998-1, em ligações viga-pilar de extremidade o limite para capacidade resistente da ligação é igual a 80% do valor dado pela expressão (2.6).

A condição (2.6) corresponde ao esmagamento do betão. Este valor foi estabelecido numa análise bidimensional da ligação viga-pilar, assumindo um estado plano de tensão, e pode ser determinado tendo em conta que nestas condições a tensão principal mínima é

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_h + \sigma_v}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_h + \sigma_v}{2} \right)^2 + \tau_{hv}^2} \quad (2.8)$$

em que  $\sigma_v$  ( $\sigma_h$ ) é a tensão normal vertical (horizontal) resultante do esforço axial no pilar (viga) e  $\tau_{hv}$  é a tensão tangencial no referencial definido pelas direcções horizontal e vertical. Resolvendo a expressão (2.8) em ordem a  $\tau_{hv}$  para a situação de esmagamento do betão ( $\sigma_2 = \eta f_{cd}$ ) e assumindo  $\sigma_h = 0$  (esforço axial nulo na viga), obtém-se

$$\tau_{hv} = \sigma_2 \sqrt{1 - \frac{\sigma_v}{\sigma_2}} \rightarrow \frac{V_{jhd}}{b_j h_{jc}} = \eta f_{cd} \sqrt{1 - \frac{V_d f_{cd}}{\eta f_{cd}}} = \eta f_{cd} \sqrt{1 - \frac{V_d}{\eta}}. \quad (2.9)$$

De acordo com o §5.5.3.3(3) da NP EN 1998-1, para limitar a tensão de tracção máxima no betão na ligação viga-pilar a um valor inferior ao valor de cálculo da resistência à tracção do betão,  $f_{ctd}$ , a ligação deve ser confinada recorrendo a cintas horizontais com um diâmetro não inferior a 6 mm tais que

$$\frac{A_{sh} f_{ywd}}{b_j h_{jw}} \geq \frac{(V_{jhd}/b_j h_{jc})^2}{f_{ctd} + V_d f_{cd}} - f_{ctd} \quad (2.10)$$

em que  $A_{sh}$  é a área total das cintas horizontais,  $h_{jw}$  é a distância entre armaduras superiores e inferiores da viga e  $v_d$  é o esforço axial na secção transversal do pilar acima da ligação.

De acordo com o §5.5.3.3(4) da NP EN 1998-1, em alternativa a estas disposições, poderá ser assegurada a integridade das ligações viga-pilar após fendilhação diagonal dispondo armadura horizontal de confinamento que respeite as condições



$$A_{sh} f_{ywd} \geq \gamma_{Rd} (A_{s1} + A_{s2}) f_{yd} (1 - 0.8 \nu_d) \quad (2.11)$$

e

$$A_{sh} f_{ywd} \geq \gamma_{Rd} A_{s2} f_{yd} (1 - 0.8 \nu_d) \quad (2.12)$$

para ligações viga-pilar interiores e de extremidade, respectivamente, em que o esforço axial reduzido de cálculo  $\nu_d$  no caso de ligações viga-pilar interiores (exteriores) se refere à secção do pilar acima (abaixo) da ligação.

De acordo com o §5.5.3.3(5) da NP EN 1998-1, a armadura transversal de confinamento deve ser uniformemente distribuída na altura  $h_{jw}$ . No caso das ligações de extremidade, a armadura de confinamento deve envolver as extremidades dos varões longitudinais das vigas dobrados para o interior da ligação.

De acordo com o §5.5.3.3(6) da NP EN 1998-1, devem ainda ser colocados varões verticais no pilar que atravessem a ligação e respeitem a condição

$$A_{sv,i} \geq \frac{2}{3} A_{sh} \frac{h_{jc}}{h_{jw}} \quad (2.13)$$

em que  $A_{sv,i}$  é a área total dos varões verticais intermédios colocados entre os varões de canto nas faces interessadas do pilar e inclui os varões que constituem a armadura longitudinal dos pilares.

### 2.5.2.3. Disposições relativas a amarrações

De acordo com o §5.6.1(1)P da NP EN 1998-1, relativo a amarrações e emendas, aplicam-se as disposições do §8 da NP EN 1992-1-1 com as regras adicionais que sem seguida se apresentam.

De acordo com o §5.6.1(3)P da NP EN 1998-1, em estruturas de DCH, o comprimento de amarração dos varões da armadura longitudinal das vigas ou pilares amarrados no interior de ligações viga-pilar deve ser medido a partir de um ponto a uma distância  $5\phi$  da face da ligação (para o interior desta) por forma a contabilizar a extensão da zona plastificada por deformações cíclicas pós-elásticas, em que  $\phi$  é o diâmetro dos varões longitudinais.

Também de acordo com o §5.6.2.2 desta especificação, para impedir a rotura por aderência dos varões da armadura longitudinal das vigas que atravessam as ligações viga-pilar, o diâmetro destes varões deve ser limitado de acordo com as expressões

$$\frac{\phi}{h_c} \leq \frac{7.5 f_{ctm}}{\gamma_{Rd} f_{yd}} \frac{1 + 0.8 \nu_d}{1 + 0.75 k_D \rho' / \rho_{max}} \quad (2.14)$$

e

$$\frac{\phi}{h_c} \leq \frac{7.5 f_{ctm}}{\gamma_{Rd} f_{yd}} (1 + 0.8 \nu_d) \quad (2.15)$$

em ligações viga-pilar interiores e de extremidade, respectivamente, em que  $k_D$  é um coeficiente dependente da classe de ductilidade que toma o valor 1 (2/3) para estruturas de DCH (DCM),  $\rho'$  é a taxa de armadura longitudinal de compressão da viga que atravessa a ligação,  $\rho_{max}$  é a taxa máxima admissível de armadura de tracção,  $\gamma_{Rd}$  é o coeficiente que

acautela a sobrerresistência por endurecimento dos varões da armadura longitudinal da viga e deve ser tomado igual a 1.2 (1.0) para estruturas de DCH (DCM).

Os limites anteriores não se aplicam aos varões diagonais que atravessam a ligação. Além disso, se não for possível satisfazer o limite (2.15) para ligações viga-pilar de extremidade porque a dimensão  $h_c$  do pilar é demasiado pequena, de acordo com o §5.6.2.2(3) da NP EN 1998-1, pode-se, alternativamente, (i) prolongar a viga ou laje horizontalmente sob a forma de tocos exteriores para além da ligação, (ii) utilizar varões longitudinais na viga com cabeça ou chapas de amarração soldadas à respectiva extremidade ou (iii) utilizar varões longitudinais na viga dobrados a  $90^\circ$  para o interior das ligações, com um comprimento mínimo da parte vertical da amarração de  $10\phi$  e dispendo varões transversais no interior da dobra.

De acordo com o §5.6.2.2(4)P da NP EN 1998-1, os varões que atravessam ligações viga-pilar interiores devem terminar num elemento linear adjacente à ligação a uma distância não inferior ao comprimento da zona crítica desse elemento, contada a partir da face da ligação.

#### 2.5.2.4. Outras disposições relevantes

De acordo com o §5.4.1.2.2(1) da NP EN 1998-1, a menos que os efeitos de segunda ordem possam ser desprezados, as dimensões da secção transversal de pilares sísmicos primários não deverão ser inferiores a um décimo da maior distância entre o ponto de inflexão e as extremidades do pilar, para a flexão num plano paralelo à dimensão considerada do pilar. Esta condição, na situação limite do ponto de inflexão corresponder a uma das extremidades, conduz a

$$L_c/h_c < 10 \quad \text{e} \quad L_c/b_c < 10 \quad (2.16)$$

e na situação limite do ponto de inflexão se situar a meia altura do pilar corresponde a

$$L_c/h_c < 20 \quad \text{e} \quad L_c/b_c < 20. \quad (2.17)$$

Além disso, em estruturas de DCH, a dimensão mínima da secção transversal do pilar não deve ser inferior a 250 mm (§5.5.1.2.2(1) da NP EN 1998-1).

O esforço axial reduzido nos pilares sísmicos primários não deve ser superior a 0.65 e a 0.55 em estruturas DCM e DCH respectivamente (§§ 5.4.3.2.1(3)P e 5.3.2(3)P da NP EN 1998-1).

#### 2.5.3. ACI-ASCE 352

As recomendações da ACI-ASCE 352 (ACI-ASCE Committee 352 [2002]) e a ACI 318-08 (ACI Committee 318 [2008]) tratam a ligação como um troço de pilar cuja particularidade é o elevado esforço transversal associado ao elevado gradiente do momento flector. Em seguida, são apresentadas as disposições mais relevantes propostas na ACI-ASCE 352 que visam complementar ou modificar o §7.10 da ACI 318-08 relativo a armadura transversal em elementos comprimidos e que, em muitos casos, se limitam a replicar estas mesmas disposições.

A ACI-ASCE 352 define *joint* como a porção do pilar ao longo da altura da viga com maior altura

de secção transversal que lhe está ligada na zona em causa. Já *connection* é o termo adoptado para designar a *joint* mais os troços de viga, pilar e laje adjacentes. Em seguida será adoptado indiscriminadamente o termo ligação para *joint* e *connection* na medida em que as recomendações da ACI-ASCE 352 são todas relativas à *joint* e o termo *connection* só é introduzido para descrever a configuração da ligação (ver §2.2.2.2).

A ACI-ASCE 352 preconiza duas tipologias de armadura transversal para as ligações viga-pilar: varões em espiral e cintas.

De acordo com o §4.2.1.1 desta especificação, no caso das ligações viga-pilar do Tipo 1 (ver §2.2.2.3) com armadura transversal constituída por varões em espiral, deve ser adoptada uma taxa volumétrica mínima (quociente entre o volume da armadura transversal e o volume de betão que ela envolve, medido pelo seu exterior) dada por

$$\rho_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_{yh}} \quad (2.18)$$

em que  $f_{yh}$  é a tensão de cedência da armadura transversal, com um máximo de 420 MPa,  $A_g$  é a área da secção transversal do pilar e  $A_c$  é a área do núcleo do pilar medida pelo contorno exterior da armadura transversal.

De acordo com os §§ 4.2.1.2-3 da ACI-ASCE 352, em ligações do Tipo 1 devem ser dispostas pelo menos duas camadas de armadura transversal entre os varões da armadura longitudinal da viga adjacente com maior altura de secção transversal. No caso mais geral, o afastamento máximo entre eixos das camadas de armadura transversal não deve ser superior a 300 mm. Caso a ligação integre o sistema resistente primário para cargas laterais não sísmicas, o afastamento entre eixos de camadas não deve exceder os 150 mm. De acordo com o §4.2.1.4 da ACI-ASCE 352, caso exista mais que uma viga adjacente à ligação é possível aliviar as restrições anteriores. De acordo com o §4.2.1.5 desta especificação, em ligações de cobertura de extremidade devem ainda ser colocados varões verticais (normalmente em U invertido) ao longo de toda a altura da ligação entre os varões extremos da armadura longitudinal do pilar.

De acordo com o §4.2.2.1 da ACI-ASCE 352, para ligações do Tipo 2 com armadura transversal em espiral, a taxa volumétrica mínima também é dada por (2.18), mas com o mínimo  $0.12 f'_c / f_{yh}$ .

Em ligações do Tipo 2 com armadura transversal constituída por cintas ou ganchos, de acordo com o §4.2.2.2 da ACI-ASCE 352, a área total da secção transversal desta armadura em cada uma das direcções em cada camada deve ser no mínimo

$$A_{sh} = 0.3 \frac{s_h b_c'' f'_c}{f_{yh}} \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \geq 0.09 \frac{s_h b_c'' f'_c}{f_{yh}} \quad (2.19)$$

em que  $f_{yh}$  conserva a definição anterior,  $s_h$  é o espaçamento entre eixos das camadas de armadura transversal e  $b_c''$  é a largura do núcleo do pilar medida pelo contorno exterior da armadura transversal.

De acordo com o §4.2.2.3 da ACI-ASCE 352, caso a ligação do Tipo 2 faça parte do sistema primário resistente a cargas laterais sísmicas, a distância vertical entre os eixos das camadas de

armadura transversal na ligação deve respeitar  $s_h \leq \min\{1/4 \min\{b_c, h_c\}, 6\phi_{\text{arm. pilar}}, 150\text{mm}\}$ . Além disso, quando são colocados ganchos, estes devem ser dispostos em todas as camadas de armadura transversal. A distância máxima entre eixos de ramos de armadura transversal não deve exceder 300 mm e cada extremidade do gancho deve envolver um varão de armadura longitudinal periférico do pilar. Caso a ligação não faça parte do sistema primário resistente a cargas laterais sísmicas (§4.2.2.4 da ACI-ASCE 352), a distância vertical entre os eixos das camadas de armadura transversal na ligação deve respeitar a condição  $s_h \leq \min\{1/3 \min\{b_c, h_c\}, 300\text{mm}\}$  e, quando são colocados ganchos, estes também devem ser dispostos em todas as camadas de armadura transversal.

De acordo com o §4.2.2.5 da ACI-ASCE 352, caso a ligação apresente elementos lineares adjacentes em todas as faces, os limites (2.18), (2.19) e  $0.12 f'_c / f_{yh}$  podem passar a metade.

De acordo com o §4.2.2.8 da ACI-ASCE 352, em ligações do Tipo 2 em coberturas devem ser dispostos estribos verticais.

Relativamente à verificação da capacidade resistente das ligações viga-pilar, de acordo com o §4.3.1 da ACI-ASCE 352, em ligações com vigas em duas direcções ortogonais a resistência da ligação deve ser verificada independentemente em cada uma das direcções. O esforço de corte refere-se a um plano horizontal a meia altura da ligação, equilibrando os esforços na periferia da ligação, nomeadamente, as resultantes de tensão e compressão associadas ao momento flector e esforço axial e o esforço transversal na extremidade dos elementos adjacentes. A resistência da ligação pode ser determinada pela expressão

$$\frac{V_n}{\text{MN}} = 0.083 \gamma \sqrt{\frac{f'_c}{\text{MPa}}} \frac{b_j h_c}{\text{m}^2} \quad (2.20)$$

onde  $b_j$  é a largura efectiva da ligação dada por  $\min\{(b_b + b_c)/2; b_b + \Sigma(mh_c/2); b_c\}$  com  $m = 0.3$  nos casos em que a excentricidade entre os eixos do pilar e da viga excede  $b_c/8$  e  $m = 0.5$  nos restantes casos. O somatório  $\Sigma(mh_c/2)$  deve ser aplicado aos lados onde o bordo do pilar se estende para além do bordo da viga e cada parcela  $mh_c/2$  não deve ser tomada superior à extensão do bordo do pilar em relação ao bordo da viga. Caso só exista uma viga adjacente numa direcção,  $b_b$  deve ser tomado igual à respectiva largura, caso contrário deve ser assumido igual à média da largura das duas vigas. O parâmetro  $\gamma$  depende da configuração da ligação e é definido na Tabela 2.4. Note-se que, em virtude de algumas expressões propostas pela ACI-ASCE 352 não serem homogéneas, estas devem ser utilizadas com as unidades apresentadas nesta especificação técnica.

De acordo com o §4.5.1 da ACI-ASCE 352, a secção a partir da qual se desenvolve o comprimento de amarração da armadura longitudinal das vigas é a face do pilar e a face exterior das cintas, para ligações dos Tipos 1 e 2, respectivamente. O comprimento de amarração da armadura longitudinal dos pilares desenvolve-se a partir da face exterior da armadura de flexão da viga.

De acordo com o §4.5.2.1 da ACI-ASCE 352, no caso de amarração em gancho de varões que terminam na ligação, a face exterior do gancho deve estar afastada mais de 50 mm da face exterior do núcleo oposta à secção crítica e a extremidade do gancho deve estar projectada em direcção à meia altura da ligação. No caso de viga com mais de uma camada de armadura,

Tabela 2.4 – Valores do parâmetro  $\gamma$  (ACI-ASCE Committee 352 [2002]).

disposição dos elementos lineares adjacentes à ligação	tipo de ligação	
	tipo 1	tipo 2
ligação com pilar contínuo		
elementos nas 4 faces verticais	24	20
elementos em 3 faces verticais ou 2 faces verticais opostas	20	15
outros casos	15	12
ligação com pilar descontínuo (cobertura)		
elementos nas 4 faces verticais	20	15
elementos em 3 faces verticais ou nas 2 faces verticais opostas	15	12
outros casos	12	8

a extremidade dos varões da camada seguinte (no sentido descendente) deve estar a uma distância superior a  $3\phi$  da extremidade dos varões da camada anterior.

De acordo com o §4.5.2.3 da ACI-ASCE 352, o comprimento de amarração para ligações Tipo do 1 em *gancho standard* deve ser determinado pela expressão

$$l_{dh} = \frac{\phi f_y / \text{MPa}}{4.2 \sqrt{f'_c / \text{MPa}}} \geq \max\{8\phi, 150\text{mm}\}. \quad (2.21)$$

Para ligações do Tipo 2 em *gancho standard* o comprimento mínimo de amarração deve ser determinado pela expressão (§4.5.2.4 da ACI-ASCE 352)

$$l_{dh} = \frac{\alpha \phi f_y / \text{MPa}}{6.2 \sqrt{f'_c / \text{MPa}}} \geq \max\{8\phi, 150\text{mm}\} \quad (2.22)$$

em que  $\alpha$  é o factor multiplicativo da tensão de cedência da armadura longitudinal para acautelar a sobrerresistência associada ao endurecimento. No §4.5.2 da ACI-ASCE 352 são ainda propostas pormenorizações alternativas que permitem reduzir o comprimento de amarração dado pelas expressões (2.21) e (2.22).

O §4.5.3.2 da ACI-ASCE 352 permite a adopção de dispositivos mecânicos de amarração (*headed bar*) desde que estes se localizem no interior do núcleo da ligação a pelo menos 50 mm da sua periferia. De acordo com o §4.5.3.3 desta especificação, o comprimento de amarrações com dispositivos mecânicos de amarração para ligações do Tipo 1 e 2 deve ser igual a 3/4 do valor da expressão (2.22) com um mínimo  $l_{dt} \geq \max\{8\phi, 150\text{mm}\}$ . Na §4.5.3.3 da ACI-ASCE 352 são ainda propostas disposições para impedir a formação de potenciais planos de rotura quando os dispositivos mecânicos de amarração estão próximas das faces da ligação.

Para amarrações rectilíneas dos varões da armadura longitudinal das vigas ou pilares que terminam na ligação, o §4.5.4 da ACI-ASCE 352, no caso de ligações do Tipo 1, remete para os §§ 12.2.1-4 da ACI 318-02 (ACI Committee 318 [2002]) e refere que a parte do comprimento de amarração exterior ao núcleo da ligação deve ser majorada em 30% para compensar o menor confinamento. Para ligações do Tipo 2, se largura do pilar é maior que a largura da viga deve verificar-se

$$\frac{h_c}{\phi_{\text{arm. viga}}} \geq \frac{20 f_y / \text{MPa}}{420} \geq 20, \quad \frac{h_b}{\phi_{\text{arm. pilar}}} \geq \frac{20 f_y / \text{MPa}}{420} \geq 20 \quad (2.23)$$

e se a largura da viga é maior que a largura do pilar, os varões da armadura longitudinal da viga

que passam pelo exterior do núcleo da ligação devem verificar

$$\frac{h_c}{\phi_{\text{arm. viga}}} \geq \frac{24 f_y / \text{MPa}}{420} \geq 24. \quad (2.24)$$

De acordo com os comentários ao §4.5.5 da ACI-ASCE 352, o valor recomendado para  $h/\phi$  visa limitar o escorregamento dos varões da armadura longitudinal das vigas e dos pilares que atravessam a ligação. O valor definido por estas recomendações para o comprimento de amarração ( $20\phi f_y / \text{MPa} / 420 \geq 20\phi$ ) é aproximadamente metade do indicado no §12 da ACI 318-08 em condições quase-estáticas. Por esse motivo, é provável que ocorra escorregamento dos varões da armadura longitudinal das vigas e pilares no interior da ligação mesmo para uma amarração com comprimento  $20\phi$ .

#### 2.5.4. ACI 318-08

De acordo com o §11.10 da ACI 318-08 (ACI Committee 318 [2008]), as ligações viga-pilar devem ser dimensionadas para o esforço de corte que equilibra os esforços nas secções extremas dos elementos adjacentes. Ainda de acordo com esta secção, somente as ligações viga-pilar que não façam parte do sistema principal resistente a acções sísmicas e que estejam restringidas nas 4 faces verticais por vigas/lajes com alturas aproximadamente iguais é que dispensam a armadura transversal mínima preconizada pela expressão

$$A_{v,\min} = 0.062 \sqrt{f'_c / \text{MPa}} \frac{b_w s}{f_{yt} / \text{MPa}} \geq 0.035 \frac{b_w s}{f_{yt} / \text{MPa}} \quad (2.25)$$

em que  $s$  é o espaçamento entre cintas,  $b_w$  a largura da alma do pilar e  $f_{yt}$  a tensão de cedência da armadura transversal. Esta armadura deve ser disposta ao longo de uma altura do pilar não inferior à altura da secção transversal da viga com maior altura de secção transversal.

O §21.7 da ACI 318-08 contém disposições adicionais para ligações viga-pilar integrantes do sistema sismo-resistente. Esta secção contém os seguintes requisitos gerais: (i) as acções nas ligações viga-pilar devem ser determinadas assumindo uma resistência à tracção para as armadura longitudinal das vigas e pilares igual a  $1.25f_y$ , (ii) as amarrações da armadura longitudinal da viga devem ser prolongadas até à face mais afastada do núcleo do pilar e (iii) caso as armadura longitudinal da viga atravesse a ligação, o quociente  $h_c/\phi$  deve valer pelo menos 20.

De acordo com o §21.7.3 da ACI 318-08, a armadura transversal das ligações viga-pilar deve respeitar os requisitos definidos para armadura transversal de zonas de elementos lineares sujeitos a flexão composta onde é expectável que ocorra a cedência da armadura longitudinal (rótulas plásticas), por forma a confinar o betão e a conferir apoio lateral aos varões da armadura longitudinal (§§ 21.6.4.2-4 e 21.6.4.7 da ACI 318-08). No entanto é permitido reduzir esta armadura bem como aumentar o seu espaçamento máximo nos casos em que existem quatro vigas adjacentes à ligação, todas com largura superior a 3/4 da largura da face do pilar. É ainda requerido que, nos casos em que a armadura longitudinal das vigas atravessa a ligação fora do núcleo do pilar e não existam vigas transversais que confinem esta armadura, seja disposta armadura transversal para esse efeito que respeite as disposições dos §§ 21.5.3.2-3 e 21.5.3.6 da ACI 318-08.

Tabela 2.5 – Resistência das ligações viga-pilar ( $f'_c$  em MPa e  $A_j$  em  $\text{mm}^2$ , ACI Committee 318 [2008]).

tipo de ligação viga-pilar	$V_n$ [N]
ligações com elementos adjacentes nas quatro faces verticais	$1.7 (f'_c)^{1/2} A_j$
ligações com elementos adjacentes em 3 faces verticais ou duas opostas	$1.2 (f'_c)^{1/2} A_j$
outros casos	$1.0 (f'_c)^{1/2} A_j$

De acordo com o §21.7.4 desta especificação técnica, a resistência das ligações viga-pilar, definida em termos de esforço de corte horizontal a meia altura da ligação ( $V_n$ ) não deve ser tomada superior aos valores apresentados na Tabela 2.5. Nesta tabela,  $A_j$  é a secção transversal horizontal efectiva da ligação definida pelo produto de  $h_c$  pela largura efectiva da ligação (dada pelo mínimo de:  $b_c$ ,  $b_b + h_c$  e o dobro da menor distância entre o eixo da viga e as faces laterais do pilar).

De acordo com o §21.7.5 da ACI 318-08, o comprimento de amarração de varões traccionados com diâmetros compreendidos entre 9.5 e 35.8 mm e com um gancho standard em betão normal deve ser superior a

$$l_{dh} = \frac{\phi f_y / \text{MPa}}{5.4 \sqrt{f'_c} / \text{MPa}} \geq \{8\phi, 150\text{mm}\} \quad (2.26)$$

e o gancho deve estar localizado no núcleo confinado do pilar ou de um elemento adjacente.

Ainda de acordo com o §21.7.5 da ACI 318-08, no caso de amarrações rectilíneas de varões traccionados com diâmetros compreendidos entre 9.5 e 35.8 mm, o comprimento de amarração ( $l_d$ ) deve ser 2.5 ou 3.25 vezes superior ao valor da expressão (2.26), consoante a altura da camada de betão sob a armadura, betonada de uma só vez, seja inferior ou superior a 300 mm, respectivamente. Os varões rectilíneos que terminam na ligação devem passar pelo núcleo confinado do pilar ou de um elemento adjacente. Qualquer porção de  $l_d$  que não esteja no interior de um núcleo confinado deve ser majorada por um factor 1.6.

### 2.5.5. ASCE/SEI 41-06

As recomendações da ASCE/SEI 41-06 (ASCE [2007a]), da ASCE/SEI 41-06-S1 (ASCE [2007b]) e do documento que as precedeu (FEMA 356 (FEMA 356 [2000])), apresentam disposições para modelar as ligações viga-pilar para os casos de análise materialmente linear e não linear.

De acordo com o §6.3.1.2 da ASCE/SEI 41-06, no caso da análise linear, deve-se considerar para as vigas e pilares a rigidez secante num estado de pré-cedência. Desta forma, se a resposta da estrutura à acção sísmica se encontra no domínio elástico, ela será razoavelmente aproximada. De acordo com o §6.4.2.2.1 da ASCE/SEI 41-06, nestes casos as ligações viga-pilar devem ser modeladas como rígidas.

No caso de análise estática não linear, a ASCE/SEI 41-06 no §6.4.2.2.2 requer a modelação explícita das ligações viga-pilar, mas apenas refere a contabilização da distorção por corte do núcleo da ligação recorrendo a uma relação força-deslocamento normalizada (Figura 6.1 da ASCE/SEI 41-06).

De acordo com Elwood e Eberhard [2006], a ASCE/SEI 41-06 conduz a uma sobrestimação significativa da rigidez de estruturas reticuladas com baixos níveis de esforço axial, em virtude

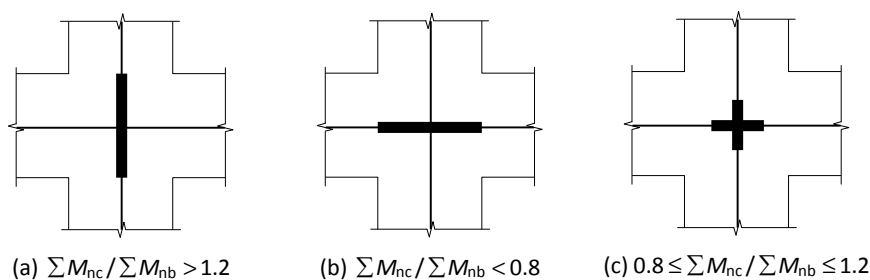


Figura 2.23 – Modelação da flexibilidade da ligação ao corte (ASCE [2007b]).

do escorregamento dos varões da armadura longitudinal das vigas e pilares no interior das ligações viga-pilar e nas fundações. No seguimento dos estudos elaborados por Elwood e Eberhard [2006] foi proposta na ASCE/SEI 41-06-S1 uma redução da rigidez efectiva dos elementos lineares para contabilizar o efeito do escorregamento da armadura longitudinal destes elementos nas ligações viga-pilar e nas fundações. Para  $N/(A_g f'_c) \leq 0.1$  é proposta a alteração de  $EI_{\text{eff}} = 0.5EI_g$  (ASCE/SEI 41-06) para  $EI_{\text{eff}} = 0.3EI_g$  (ASCE/SEI 41-06-S1). De acordo com a ASCE/SEI 41-06-S1, para  $N/(A_g f'_c) \geq 0.5$  o efeito do escorregamento da armadura longitudinal não se faz sentir e é proposto  $EI_{\text{eff}} = 0.7EI_g$ . Para  $0.1 < N/(A_g f'_c) < 0.5$  é proposta a interpolação linear entre os valores anteriores, ou de forma conservadora  $EI_{\text{eff}} = 0.3EI_g$ . Nas expressões anteriores  $E$  é o módulo de elasticidade do betão,  $I_g$  o momento de inércia da secção total de betão,  $A_g$  a área da secção transversal da secção de betão,  $f'_c$  é a resistência à compressão do betão e  $N$  o esforço axial de compressão no elemento.

A ASCE/SEI 41-06-S1 refere ainda que ensaios experimentais demonstraram que as ligações viga-pilar podem sofrer deformações por corte significativas mesmo antes da cedência dos varões da armadura longitudinal das vigas e pilares no seu interior. Consequentemente, caso as ligações não sejam explicitamente modeladas, este documento preconiza que a sua flexibilidade decorrente da distorção seja implicitamente modelada ajustando o modelo de eixos.

Assim, no decorrer do estudo de Elwood, Matamoros *et al.* [2007], que concluíram que a rigidez das ligações viga-pilar depende da rigidez de flexão relativa das vigas e dos pilares, a ASCE/SEI 41-06-S1 propõe que o modelo de eixos seja ajustado da seguinte forma:

- (i) para  $\sum M_{nc} / \sum M_{nb} > 1.2$ , os troços dos pilares no interior da ligação devem ser considerados rígidos e os troços das vigas dentro da ligação devem ser considerados flexíveis – Figura 2.23(a);
- (ii) para  $\sum M_{nc} / \sum M_{nb} < 0.8$ , os troços das vigas no interior da ligação devem ser considerados rígidos e os troços dos pilares dentro da ligação devem ser considerados flexíveis – Figura 2.23(b);
- (iii) para  $0.8 \leq \sum M_{nc} / \sum M_{nb} \leq 1.2$ , metade do prolongamento das vigas e pilares no interior da ligação deve ser considerada rígida – Figura 2.23(c).

Nestas expressões,  $\sum M_{nc} (\sum M_{nb})$  é a soma da resistência à flexão dos pilares (vigas) adjacentes à ligação.

De acordo com a ASCE/SEI 41-06-S1 e Elwood e Eberhard [2006], para níveis reduzidos de esforço axial o efeito do escorregamento da armadura longitudinal das vigas e pilares no



interior das ligações viga-pilar e nas fundações pode corresponder a 50% da deformação transversal apresentada pelo elemento no instante em que a sua armadura longitudinal entra em cedência. Neste sentido, de acordo com Elwood e Eberhard [2006], a rigidez efectiva a adoptar que conduz a melhor concordância com os resultados experimentais para níveis reduzidos de esforço axial é  $0.2EI_g$ . Apesar disso, na ASCE/SEI 41-06-S1 foi adoptado o valor  $0.3EI_g$  devido à elevada dispersão dos resultados experimentais e como forma de evitar subestimar os esforços actuantes em pilares com reduzidos níveis de esforço axial.

Esta técnica de modelação da flexibilidade das ligações viga-pilar recorrendo ao ajuste da flexibilidade seccional de flexão dos elementos lineares juntamente com o ajuste do comprimento dos troços de viga e pilar flexíveis no interior da ligação foi adoptada devido à sua simplicidade e facilidade de implementação nos programas de análise de estruturas correntes. No entanto, de acordo com Elwood, Matamoros *et al.* [2007], apesar da abordagem preconizada na ASCE/SEI 41-06-S1 conduzir a muito melhores estimativas para a deformabilidade lateral de estrutura que a abordagem proposta na ASCE/SEI 41-06, ambas apresentam uma dispersão considerável.

## 2.6. Notas finais

Mostrou-se que as ligações viga-pilar em pórticos de betão-armado apresentam uma grande diversidade, tanto em termos de configuração (disposição dos elementos adjacentes) como da pormenorização da armadura. Esta diversidade conduz a diferenças de comportamento que, parcialmente, podem justificar a inexistência de modelos de comportamento universalmente aceites, contrariamente ao que se passa com outros elementos estruturais.

Mostrou-se também que a maioria dos modelos de ligações viga-pilar publicados não concilia um comportamento mecanicamente sã e rigoroso com a modelação e dimensionamento correntes de estruturas. De facto, de uma maneira geral, os modelos publicados visam ou uma modelação simplista implementável em programas de análise correntes com as ferramentas colocadas à disposição do projectista (*e.g.*, modelos de molas concentradas nas extremidades das vigas) ou, pelo contrário, constituir-se como ferramentas que permitam uma melhor compreensão do comportamento da ligação (modelos de EF 2D e 3D) mas cuja utilização na actividade quotidiana num gabinete de projecto é inviável.

A esmagadora maioria dos estudos experimentais publicados visa o comportamento cíclico de ligações viga-pilar. Infelizmente, a informação proporcionada por estes ensaios tem um interesse bastante limitado para a formulação de um modelo de ligação viga-pilar baseado nos princípios da mecânica, porque (i) esses ensaios, na maioria dos casos, visaram avaliar a resistência, ductilidade e capacidade de dissipação de energia de ligações viga-pilar submetidas a ciclos de carga/deformações de elevada amplitude e (ii) apresentam mecanismos resistentes que vão evoluindo em função dos elevados danos que as ligações vão sofrendo e, conseqüentemente, apresentam uma grande dispersão. Em contrapartida, os ensaios experimentais que visam o estudo do comportamento quase-estático e monotónico das ligações viga-pilar são escassos.

De igual forma, a esmagadora maioria das disposições relativas a ligações viga-pilar incluídas

em especificações técnicas de estruturas de betão armado são relativas a acções cíclicas. Além disso, estas especificações reflectem uma clara falta de consenso quanto ao modelo físico de resistência mais adequado para ligações viga-pilar. De uma forma geral, a regulamentação norte americana (ACI-ASCE Committee 352 [2002], ACI Committee 318 [2008]) trata a ligação como um troço do pilar, cuja particularidade consiste num valor muito elevado do esforço transversal, e adopta o modelo resistente de escora diagonal. Tacitamente, esta abordagem reconhece que a armadura transversal, por si só não aumenta a capacidade resistente da ligação (Restrepo e Lin [2000]) e apenas serve para confinar a escora diagonal. Já a regulamentação europeia (IPQ [2010d]), trata as ligações como uma placa de betão armado em estado plano de tensão com um campo de tensões uniforme. De acordo com Uma e Jain [2006], estas divergências devem-se ao facto de esta ser uma área que só sofreu um impulso de investigação relevante a partir da década de 1970.

A ASCE/SEI 41-06-S1 é a única das especificações técnicas analisadas que propõe uma abordagem efectiva para modelar o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar na análise de estruturas porticadas planas, ainda que apenas sugira um modelo implícito. Esta abordagem, apesar de adaptada aos programas de elementos finitos correntes, é claramente pouco transparente e objectiva. As restantes especificações técnicas analisadas só contêm disposições relativas à capacidade resistente e ductilidade da ligação.

Da análise efectuada também se pode concluir que (i) o parâmetro mais frequentemente utilizado para caracterizar o estado de tensão nas ligações viga-pilar é a força de corte horizontal a meia altura da ligação viga-pilar e (ii) as fontes de deformação relevantes nas ligações são o escorregamento da armadura longitudinal dos elementos adjacentes no interior da ligação e a distorção da ligação viga-pilar.

---

# Capítulo 3

## Importância de um modelo mecânico consistente para ligações viga-pilar

### 3.1. Introdução

Apresenta-se neste capítulo um estudo simplificado que visa demonstrar a relevância de uma modelação adequada das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado. São sumariamente abordadas (i) a importância da contabilização da dimensão das ligações viga-pilar na análise e dimensionamento e (ii) a relevância da deformabilidade das ligações viga-pilar para a capacidade resistente de estruturas porticadas de betão armado.

A dimensão das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado é um aspecto que, por simplicidade de cálculo, é habitualmente negligenciado nos modelos de análise e no dimensionamento. No §3.2 avalia-se simplificada qual o impacto desta simplificação nos esforços de dimensionamento das vigas e pilares adjacentes à ligação.

Tal como já foi referido no Capítulo 2, a descrição completa do comportamento mecânico das ligações viga-pilar envolve a sua caracterização em termos de (i) resistência, (ii) rigidez e (iii) ductilidade. Serão por isso estas as propriedades mecânicas com maior relevância para o comportamento das estruturas onde as ligações se inserem e que, por isso, devem ser abordadas com vista a uma modelação adequada do seu comportamento mecânico.

A função primordial das ligações é garantir a continuidade entre os elementos confinantes para que seja possível a transmissão de esforços. Neste contexto, a sua resistência assume uma importância óbvia. Tal como referido no Capítulo 2, a resistência das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado tem vindo a ser alvo de diversos estudos nas últimas décadas – ainda que maioritariamente experimentais e no contexto das acções cíclicas (Hanson e Conner [1967], Viwathanatepa, Popov *et al.* [1979b], Paulay e Park [1984], Walker [2001], Mitra e Lowes [2007], Sagbas, Vecchio *et al.* [2011]). Por estes motivos a capacidade resistente de ligações viga-pilar não será abordada neste capítulo.

A ductilidade da ligação viga-pilar é um aspecto que também tem merecido atenção por (i) ser fundamental para a capacidade das estruturas dissiparem energia no contexto de acções cíclicas e (ii) desempenhar um papel crucial para efeitos da robustez estrutural. Este último aspecto tem ganho relevância (Bao, Kunnath *et al.* [2008], Choi e Kim [2011], Yap e Li [2011]) com a cobertura mediática de algumas estruturas que sofreram colapso progressivo (edifício *Alfred P. Murrah* em *Oklahoma City*, 1995; *World Trade Center* em *New York*, 2001; *Windsor Tower* em *Madrid*, 2005). Por esse motivo também não será alvo de grande atenção neste estudo.

Pelo contrário, o efeito da flexibilidade/rigidez das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado, contrariamente ao que ocorre para outros materiais (*e.g.*, estruturas metálicas), ainda não foi alvo de um estudo aprofundado. Pretendendo preencher esta lacuna, o §3.3 foca-se essencialmente na análise da influência da rigidez/flexibilidade das ligações no comportamento de estruturas porticadas de betão armado submetidas a acções quase estáticas monotónicas.

### 3.2. Influência da dimensão da ligação na grandeza dos esforços utilizados no dimensionamento das vigas e pilares

#### 3.2.1. Relação entre esforços na interface da ligação e na intersecção dos eixos dos elementos

Considere-se uma estrutura porticada. Admita-se que os eixos das suas vigas coincidem em todos os tramos e que os eixos dos pilares coincidem em todos os andares. Considere-se a intersecção genérica de uma viga com um pilar, numa ligação viga-pilar, e designe-se por  $e$  (de eixo) o ponto de intersecção dos eixos e por  $p$  (de periferia) os pontos definidos pela intersecção do eixo da viga com a envolvente do pilar e do eixo do pilar com a envolvente da viga, ver Figura 3.1. Na análise e dimensionamento de estruturas porticadas os esforços são em certas circunstâncias referidos às secções que passam por  $e$ , sendo nesse caso denotados  $M_{bj}$  e  $M_{cj}$ , e noutras às secções que passam pelos pontos  $p$ , sendo nesses casos denotados simplesmente  $M_b$  e  $M_c$ .

Considerem-se o carregamento e as condições de apoio simplificadas representadas na Figura 3.2 como representativas do carregamento e das condições fronteira de uma viga e/ou pilar genéricos de uma estrutura porticada. O caso I (Figura 3.2(a)) é relativo a uma viga

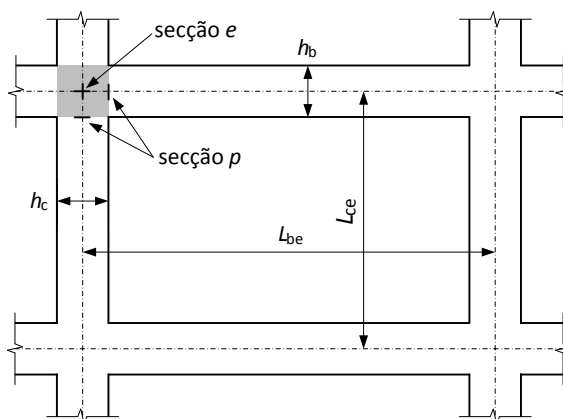


Figura 3.1 – Alçado lateral (parcial) de uma estrutura porticada plana.

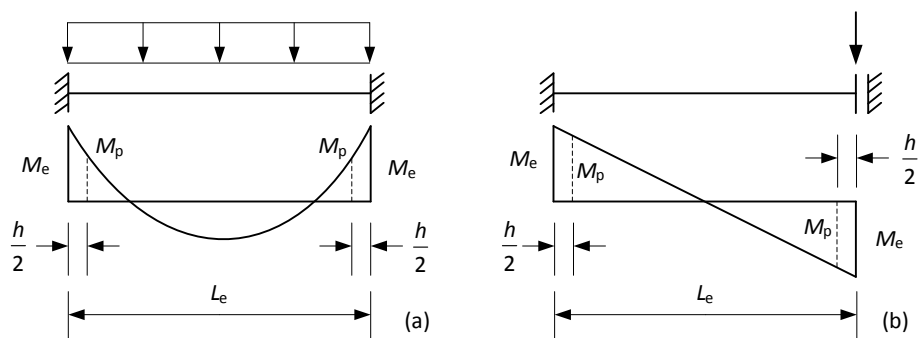


Figura 3.2 – Carregamento e condições de apoio simplificadas, (a) caso I, (b) caso II.

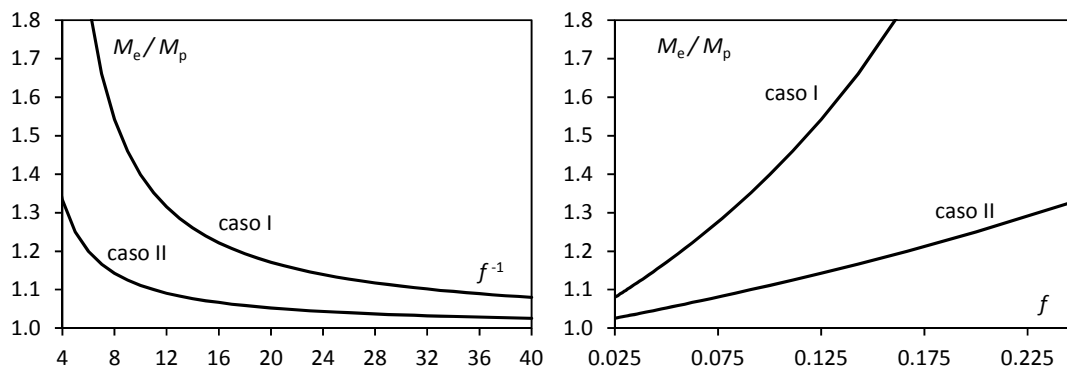


Figura 3.3 – Evolução do quociente  $M_e/M_p$  com o parâmetro  $f$ .

elemento submetido a momentos iguais nas extremidades e que tanto pode corresponder a uma viga como a um pilar. Denotem-se por  $f$  as dimensões adimensionalizadas da ligação, definidas por  $f_b = h_c/L_{be}$  e  $f_c = h_b/L_{ce}$ . Nestes casos, o quociente entre os esforços na secção  $e$  e na secção  $p$  ( $M_{bj}/M_b$  e  $M_{cj}/M_c$ ) é dado por

$$\left( \frac{M_e}{M_p} \right)_I = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}f^2 - 3f} \quad (3.1)$$

e

$$\left( \frac{M_e}{M_p} \right)_{II} = \frac{1}{1 - f} \quad (3.2)$$

Na Figura 3.3 está representada a evolução do quociente  $M_e/M_p$  com o parâmetro  $f$ . A sua análise revela que a diferença entre os esforços de flexão relativos às secções  $e$  e  $p$  aumenta com as dimensões adimensionalizadas  $f$  da ligação.

Considerem-se os seguintes exemplos de estruturas porticadas de betão armado e estruturas porticadas metálicas, retirados da bibliografia:

- (i) estrutura porticada de betão armado com 2 pisos e 2 tramos (Appleton [1982]):  $L_{be}/h_c = 6/0.4 = 15$ ,  $L_{ce}/h_b = 3/0.6 = 5$ ;
- (ii) estrutura porticada de betão armado com 20 pisos e 4 tramos (Viwathanatepa, Popov *et al.* [1979b]):  $L_{be}/h_c = 7.32/0.85 = 8.51$ ,  $L_{ce}/h_b = 3.66/0.81 = 4.5$ ;
- (iii) estrutura porticada metálica de 2 pisos e 3 tramos (Maquoui e Jaspart [1992]):  $L_{be}/h_c = 5/0.16 = 31.3$ ,  $L_{ce}/h_b = 4/0.3 = 13.3$ ;

- (iv) estrutura porticada metálica de 3 pisos e 1 tramo (Maquoi e Jaspart [1992]):  
 $L_{be} / h_c = 5 / 0.2 = 25$ ,  $L_{ce} / h_b = 4 / 0.3 = 13.3$ .

A Tabela 3.1 reúne os valores do quociente  $M_e/M_p$  para estes exemplos. Esta tabela permite constatar que no caso de estruturas metálicas, sendo a relação  $L_e/h$  mais elevada, os quocientes  $M_e/M_p$  são mais reduzidos. Note-se que, de acordo com Bijlaard e Steenhuis [1992], para perfis laminados a quente, o quociente entre o vão das vigas e a altura da respectiva secção transversal apresenta habitualmente valores no intervalo  $L_{be}/h_b \in [20,50]$  pelo que as estruturas metálicas a que se refere a Tabela 3.1 são relativamente pouco esbeltas ( $L_{be}/h_b = 16.7$ ) e, conseqüentemente, os erros na avaliação dos esforços em estruturas metálicas serão geralmente inferiores aos indicados na Tabela 3.1.

Já no caso das estruturas de betão-armado os resultados da Tabela 3.1 mostram que o quociente  $M_e/M_p$  é significativo, tanto nas vigas como nos pilares. Este resultado indica que as vigas e pilares de estruturas porticadas de betão armado serão significativamente sobredimensionadas se o dimensionamento for efectuado com base nos esforços na secção  $e$ .

Note-se que nas expressões (3.1) e (3.2) a amplificação dos esforços não está a ser exacerbada na medida em que, mesmo tendo em conta a dimensão da ligação viga-pilar, no caso I, a carga distribuída está a ser contabilizada ao longo do vão  $L_e$  (Figura 3.2) – a partir da secção  $p$  a viga transmite as cargas verticais directamente ao pilar – e, no caso II, a carga está a ser considerada aplicada na secção  $e$  – considerando a carga transversal à face do pilar/viga (secção  $p$ ) o momento máximo no elemento será menor do que considerando a carga aplicada na secção  $e$ .

O sobredimensionamento identificado é relevante em estruturas de betão armado e sugere que é possível reduzir significativamente o custo da estrutura, se o dimensionamento das vigas e pilares for efectuado com os esforços nas secções  $p$ , ou seja, nas extremidades efectivas, em vez dos esforços nas secções  $e$ . Porém, para que este procedimento alternativo seja seguro, é necessário garantir que, no interior da ligação viga-pilar, as tensões nas armaduras longitudinais das vigas e pilares não são superiores às que ocorrem na periferia da ligação.

### 3.2.2. Relação entre esforços nas extremidades efectivas da viga e do pilar

A análise e dimensionamento das vigas e pilares com base em modelos em que não é tida em consideração a dimensão efectiva das ligações viga-pilar, pode conduzir a conclusões erradas quanto ao mecanismo de colapso que efectivamente se formará na iminência do colapso da estrutura. Nomeadamente pode conduzir a que, contrariamente ao desejável, as secções

Tabela 3.1 – Quociente  $M_e/M_p$  para os cenários considerados.

estrutura	exemplo	viga		pilar	
		$L_{be}/h_c$	$(M_e/M_p)_I$	$L_{ce}/h_b$	$(M_e/M_p)_{II}$
betão-armado	(i)	15	1.24	5	1.25
	(ii)	8.51	1.50	4.5	1.29
metálica	(iii)	31.3	1.10	13.3	1.08
	(iv)	25	1.13	13.3	1.08

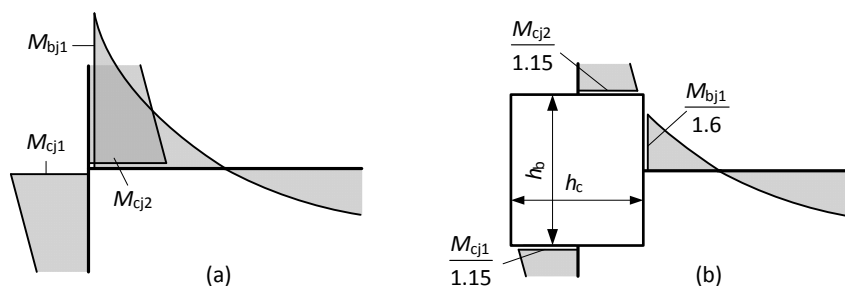


Figura 3.4 – Ligação viga-pilar de extremidade de estrutura com  $L_{ce}/h_c = L_{be}/h_b = 7.5$  sujeita a acções gravíticas. Momento flector (a) nas secções *e*, (b) nas secções *p*.

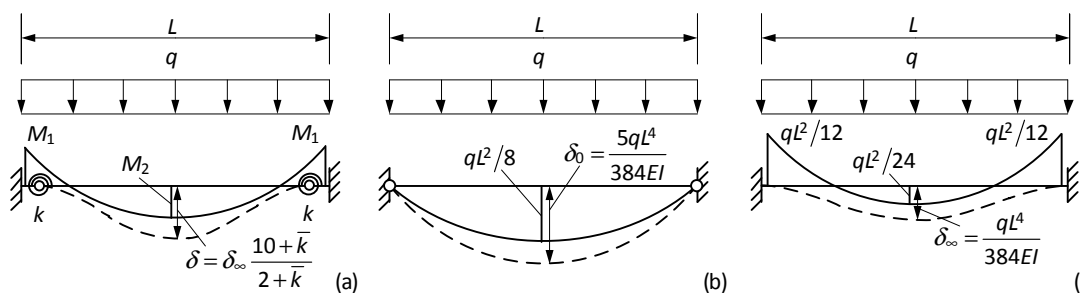


Figura 3.5 – Efeito da rigidez da ligação na distribuição de esforços em vigas submetidas a cargas uniformemente distribuídas, (a) caso geral, (b)  $k = 0$ , (c)  $k = \infty$ .

transversais onde primeiro se esgota a capacidade resistente sejam as das extremidades dos pilares e não das vigas.

Para ilustrar este aspecto, considere-se uma estrutura porticada, solicitada por cargas uniformemente distribuídas nas vigas, para a qual foi efectuada uma análise elástica linear recorrendo a um modelo em que as vigas e pilares são modeladas eixo-a-eixo. De acordo com o princípio estático da análise plástica limite, os elementos lineares desta estrutura foram seguidamente dimensionados utilizando-se os esforços nas secções *e*. Considere-se uma ligação viga-pilar de extremidade *e*, simplificada, despreze-se o efeito da rotação da ligação viga-pilar – Figura 3.4(a). Assumindo  $L_{ce}/h_b = L_{be}/h_c = 7.5$ , então, de acordo com as expressões (3.1) e (3.2), o momento flector nas extremidades efectivas da viga e pilares apresenta os valores representados na Figura 3.4(b).

A análise dos valores apresentados na Figura 3.4 permite concluir que a não consideração explícita no modelo estrutural da dimensão finita da ligação viga-pilar, pode ter como consequência, não só o sobredimensionamento das vigas e dos pilares mas também um sobredimensionamento distinto destes elementos. Nestes casos o modo de colapso efectivo da estrutura pode ser diferente do antecipado pela análise estrutural.

### 3.3. Efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar no comportamento de estruturas porticadas de betão armado

#### 3.3.1. Generalidades

Para exemplificar o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar na distribuição de esforços de estruturas reticuladas considere-se o caso particular da viga representada na Figura 3.5(a) em que simplificada se considera que (i) a dimensão da ligação é nula e (ii) a flexibilidade da ligação pode ser adequadamente modelada recorrendo a uma mola angular de rigidez *k* nas

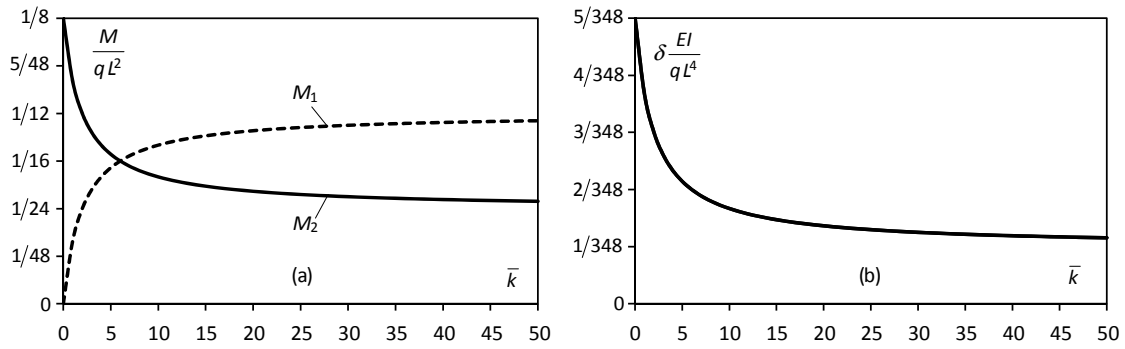


Figura 3.6 – Efeito da rigidez da ligação no valor (a) dos momentos flectores  $M_1$  e  $M_2$  e (b) da flecha  $\delta$

extremidades da viga (tal com sugerido na NP EN 1993-1-8 (IPQ [2010c]), §2.2.2.4).

Sejam  $M_1$  e  $M_2$  o momento flector na viga nas secções de extremidade e meio vão, respectivamente, e  $\delta$  a flecha a meio vão. Assuma-se que a viga apresenta uma rigidez à flexão  $EI$  constante. Os momentos  $M_1$  e  $M_2$  podem ser expressos por

$$M_1 = \frac{qL^2}{12} \frac{\bar{k}}{2+\bar{k}}, \quad M_2 = \frac{qL^2}{24} \frac{6+\bar{k}}{2+\bar{k}} \quad (3.3)$$

com  $\bar{k} = k/(EI/L)$ . Na Figura 3.6 está representada a evolução dos momentos  $M_1$  e  $M_2$  e da flecha  $\delta$  com a rigidez  $\bar{k}$ , e na Figura 3.5(b) e (c) estão representados os casos limite  $k=0$  e  $k=\infty$ , respectivamente.

A Figura 3.6(a) mostra que a flexibilidade das ligações tem uma influência muito significativa sobre a distribuição de momentos flectores na viga. De facto, a variação da rigidez  $k$  pode conduzir à alteração da secção onde o momento flector é máximo e pode alterar o seu valor absoluto. No entanto, tendo em conta o princípio estático da análise da análise plástica limite, desde que os elementos estruturais possuam ductilidade suficiente, a flexibilidade das ligações viga-pilar não precisa de ser explicitamente considerada para efeito de dimensionamento estrutural quando o efeito da configuração deformada da estrutura for desprezável.

A Figura 3.6(b) mostra que a variação da flexibilidade das ligações tem um efeito pronunciado na flecha a meio vão da viga. No caso particular representado na Figura 3.5, o aumento da flexibilidade das ligações só se traduz no agravamento das condições de serviço, no entanto, no caso mais geral de uma estrutura porticada completa, o aumento da flexibilidade das ligações viga-pilar, ao conduzir a uma estrutura globalmente mais flexível pode provocar a redução da respectiva capacidade de carga por agravamento da sua sensibilidade aos efeitos de segunda ordem. Sendo este último aspecto potencialmente mais gravoso, nas seguintes secções será efectuado um estudo simplificado por forma a avaliar a influência da flexibilidade de ligações viga-pilar sobre os deslocamentos e a capacidade de carga de estruturas porticadas de betão armado.

### 3.3.2. Critérios simplificados para avaliação da relevância da flexibilidade das ligações viga-pilar

A principal causa da deformabilidade de estruturas porticadas de betão armado pode ser a flexibilidade das ligações viga-pilar (Campana, Ruiz *et al.* [2013], Birely, Lowes *et al.* [2012]). De acordo com a ASCE/SEI 41-06-S1 (ASCE [2007b]) e Elwood e Eberhard [2006], mesmo sem



fendilhar, as ligações viga-pilar podem ser responsáveis por metade da flexibilidade das estruturas. Apesar disso, não existem estudos sobre o impacto da flexibilidade da ligação no comportamento estrutural nem critérios simplificados que permitam avaliar as situações em que a flexibilidade das ligações pode, ou não, ser desprezada.

Os princípios subjacentes à classificação das ligações viga-pilar quanto à rigidez devem ser independentes do material da estrutura, tal como acontece para a classificação em termos e resistência ou ductilidade. Com base neste pressuposto, em seguida aplicaram-se a estruturas de betão armado os critérios simplificados, estabelecidos no §5.2.2 da NP EN 1993-1-8 (IPQ [2010c]), para a classificação das juntas viga-pilar de estruturas porticadas metálicas de acordo com a sua flexibilidade/rigidez.

Tal como referido no §2.2.2.4, a NP EN 1993-1-8 classifica as juntas segundo a sua rigidez, por intermédio da respectiva rigidez inicial  $S_{j,ini}$ . A junta poderá ser considerada rígida na análise da estrutura, denominando-se então *nominalmente rígida*, caso a sua rigidez inicial adimensionalizada  $k_{jb,ini} = S_{j,ini}/K_b$  satisfaça o critério

$$k_{jb,ini} > \begin{cases} 25, & \text{para estruturas não contraventadas com } (E_b/L_{be}) \geq 0.1(E_c/L_{ce}), \\ 8, & \text{para estruturas contraventadas,} \end{cases} \quad (3.4)$$

com  $K_b = E_b/L_{be}$ , rigidez à flexão da viga,  $E$  módulo de elasticidade,  $I_b$  o momento de inércia da secção transversal da viga,  $L_{be}$  o comprimento da viga medido entre eixos dos pilares,  $I_c$  o momento de inércia da secção transversal do pilar e  $L_{ce}$  o comprimento dos pilares medido entre eixos das vigas.

A expressão (3.4) mostra que a fronteira entre juntas nominalmente rígidas e semi-rígidas também é função da rigidez de flexão das vigas adjacentes à ligação. Mais especificamente, quanto menor o comprimento da viga maior a correspondente rigidez à flexão  $K_b$ , e desta forma, maior o valor de  $S_{j,ini}$  requerido para classificar uma dada junta como nominalmente rígida. Ou seja, os critérios estabelecidos na NP EN 1993-1-8 não permitem classificar a junta de forma isolada da estrutura onde esta será incorporada, podendo qualquer junta ser classificada como nominalmente rígida desde que o comprimento da viga seja suficientemente grande para garantir que a condição (3.4) é satisfeita. Este resultado é intuitivo na medida em que quanto mais flexível for a estrutura menor é a contribuição relativa da flexibilidade da ligação para a flexibilidade global da estrutura. Este resultado também mostra que não basta que seja conhecida a relação momento-rotação de uma junta para avaliar a sua influência sobre o comportamento de uma dada estrutura (Gomes [2002]).

A abordagem proposta no ECCS-TC8 [1992] difere da da NP EN 1993-1-8. De acordo com o ECCS-TC8 [1992], caso a junta esteja solicitada somente na zona quase linear da relação momento-rotação, esta pode ser completamente caracterizada pela sua rigidez inicial  $S_{j,ini}$ . Pelo contrário, se a junta funcionar na fase não linear, toda a curva de comportamento é relevante para determinar a influência da flexibilidade da junta no comportamento da estrutura. Para ter em consideração este aspecto, dada a natureza não linear do comportamento de estruturas de betão armado, no estudo simplificado que em seguida é apresentado, foi adoptada como termo de comparação a rigidez secante da ligação  $S_{j,sec}$  (inclinação da recta, que no referencial  $M_j-\phi$  (Figura 2.6) passa pela origem e pelo ponto

caracterizador do esforço e deformação da junta) e não a sua rigidez inicial  $S_{j,ini}$ . Efectuando esta alteração e fazendo  $k_{jb,sec} = S_{j,sec}/K_b$ , o critério (3.4) toma a forma

$$k_{jb,sec} > \begin{cases} 25, & \text{para estruturas não contraventadas com } (E I_b / L_{be}) \geq 0.1 (E I_c / L_{ce}), \\ 8, & \text{para estruturas contraventadas,} \end{cases} \quad (3.5)$$

Para exemplificar a aplicação deste critério a ligações viga-pilar de betão armado utilizaram-se os resultados experimentais publicados por Sarsam (Sarsam [1983], Sarsam e Phipps [1985]) para ligações viga-pilar de extremidade.

Sarsam (Sarsam [1983], Sarsam e Phipps [1985]) ensaiou cinco subestruturas constituídas por dois troços de pilar, um troço de viga e uma ligação viga-pilar de extremidade – sem vigas transversais nem laje. Este tipo de subestrutura visa representar a parte de uma estrutura reticulada delimitada pelas secções onde o momento flector é nulo. As condições de apoio, as cargas aplicadas e a pormenorização adoptadas nos ensaios estão representadas na Figura 3.7.

As Tabelas 3.2 e 3.3 apresentam as propriedades geométricas dos espécimes ensaiados por Sarsam juntamente com as propriedades mecânicas dos materiais e as cargas axiais aplicadas nos pilares. Foram usadas armaduras nervuradas laminadas a quente. Os varões de cada diâmetro foram todos retiradas do mesmo lote, de forma a minimizar a variabilidade das propriedades mecânicas, e todos exibiram patamar de cedência em ensaio de tracção uniaxial.

A carga foi aplicada em duas fases. Numa primeira fase a carga axial  $P$  foi aplicada aos pilares.

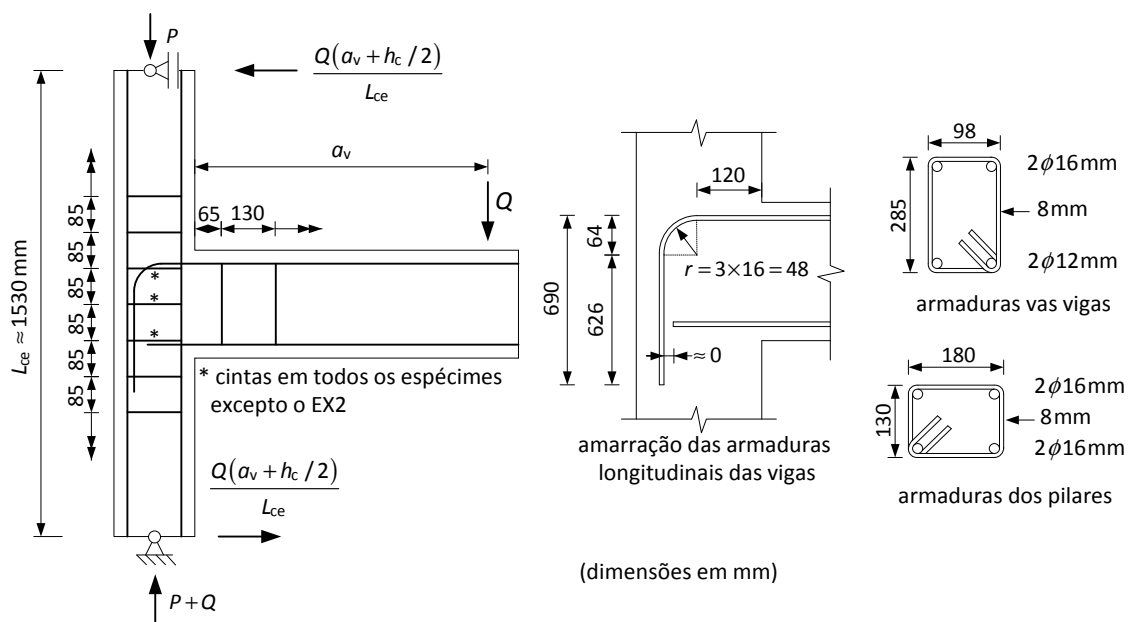


Figura 3.7 – Ligações viga-pilar de betão armado de extremidade ensaiadas por Sarsam [1983].

Tabela 3.2 – Propriedades geométricas dos espécimes e propriedades mecânicas do betão (Sarsam [1983]).

espécime	$a_v$ [mm]	$L_{ce}$ [mm]	$b_b$ [mm]	$h_b$ [mm]	$d_b$ [mm]	$b_c$ [mm]	$h_c$ [mm]	$d_c$ [mm]	$f'_c$ [MPa]	$P/A_g$ [MPa]
EX1	1422	1531	152	303	270	155	205	173	56.3	9.39
EX2	1422	1536	152	305	272	157	204	172	53.9	9.52
EX3	661	1532	152	305	272	157	204	172	41.3	9.47
EX4	883	1537	152	305	274	157	204	173	49.3	9.72
EX5	1419	1535	152	305	279	155	206	172	48.5	27.64

Tabela 3.3 – Propriedades mecânicas das armaduras (Sarsam [1983]).

$\phi$ [mm]	$f_y$ [MPa]	$E_s$ [GPa]
8	517	197
12	507	198
16	504	208

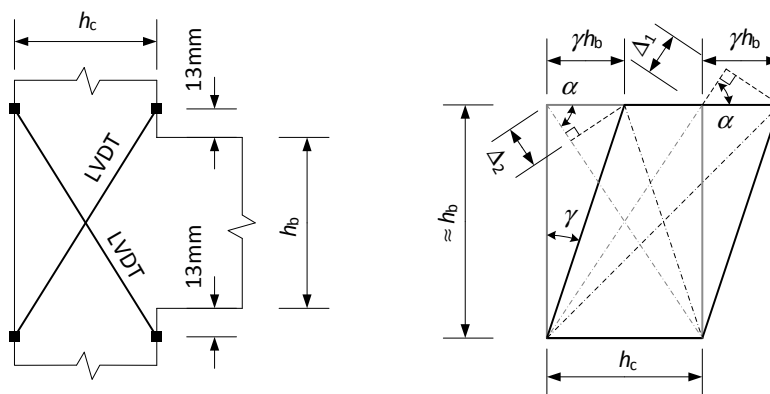


Figura 3.8 – Determinação experimental da distorção da ligação viga-pilar (Sarsam [1983]).

Numa segunda fase, mantendo a carga  $P$  constante, aumentou-se progressivamente a carga  $Q$  aplicada na extremidade livre da viga.

A Figura 3.9(a) apresenta as relações  $M_b - \gamma$  experimentais obtidas por Sarsam [1983], em que  $M_b$  é o momento flector na extremidade da viga à face do pilar e  $\gamma$  é a distorção do núcleo da ligação. Esta distorção foi calculada por Sarsam [1983] a partir da relação de compatibilidade

$$\gamma = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \frac{\sqrt{h_b^2 + h_c^2}}{h_b h_c} \quad (3.6)$$

onde  $h_b$  e  $h_c$  são as alturas das secções transversais das vigas e dos pilares e  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  são os valores absolutos do alongamento e do encurtamento das diagonais da ligação (Figura 3.8). Estas deformações lineares foram obtidas recorrendo a LVDT's dispostos ao longo das diagonais de ambas as faces da ligação (Figura 3.8).

A distorção  $\gamma$  corresponde a uma rotação relativa entre a extremidade da viga e os pilares pelo que, admitido  $M_b \approx M_{j_b}$ , e na ausência de outras fontes de deformação na ligação, as curvas  $M_b - \gamma$  indicadas na Figura 3.9 correspondem às curvas  $M_j - \phi$  que seriam adoptadas para o modelo de junta numa modelação recorrendo a molas nas extremidades das vigas, tal como é proposto na NP EN 1993-1-8. Desta forma, os critérios simplificados de classificação (3.5) são directamente aplicáveis ao comportamento das ligações viga-pilar expresso neste formato. Recorde-se no entanto que, tal como referido no Capítulo 2, a rotação relativa entre as extremidades das vigas e pilares, resulta essencialmente (i) da distorção da ligação e (ii) do escorregamento das armaduras longitudinais das vigas e dos pilares no interior da ligação, pelo que, nesta análise, ao só se contabilizar o efeito da distorção da ligação, a flexibilidade da ligação viga-pilar é subestimada.

Tal como foi referido no §2.4, com excepção do espécime EX2, o único em que não foram dispostas cintas na ligação e que rompeu nesse elemento por corte, todos os espécimes ensaiados por Sarsam romperam por esgotamento da capacidade resistente à flexão das vigas.

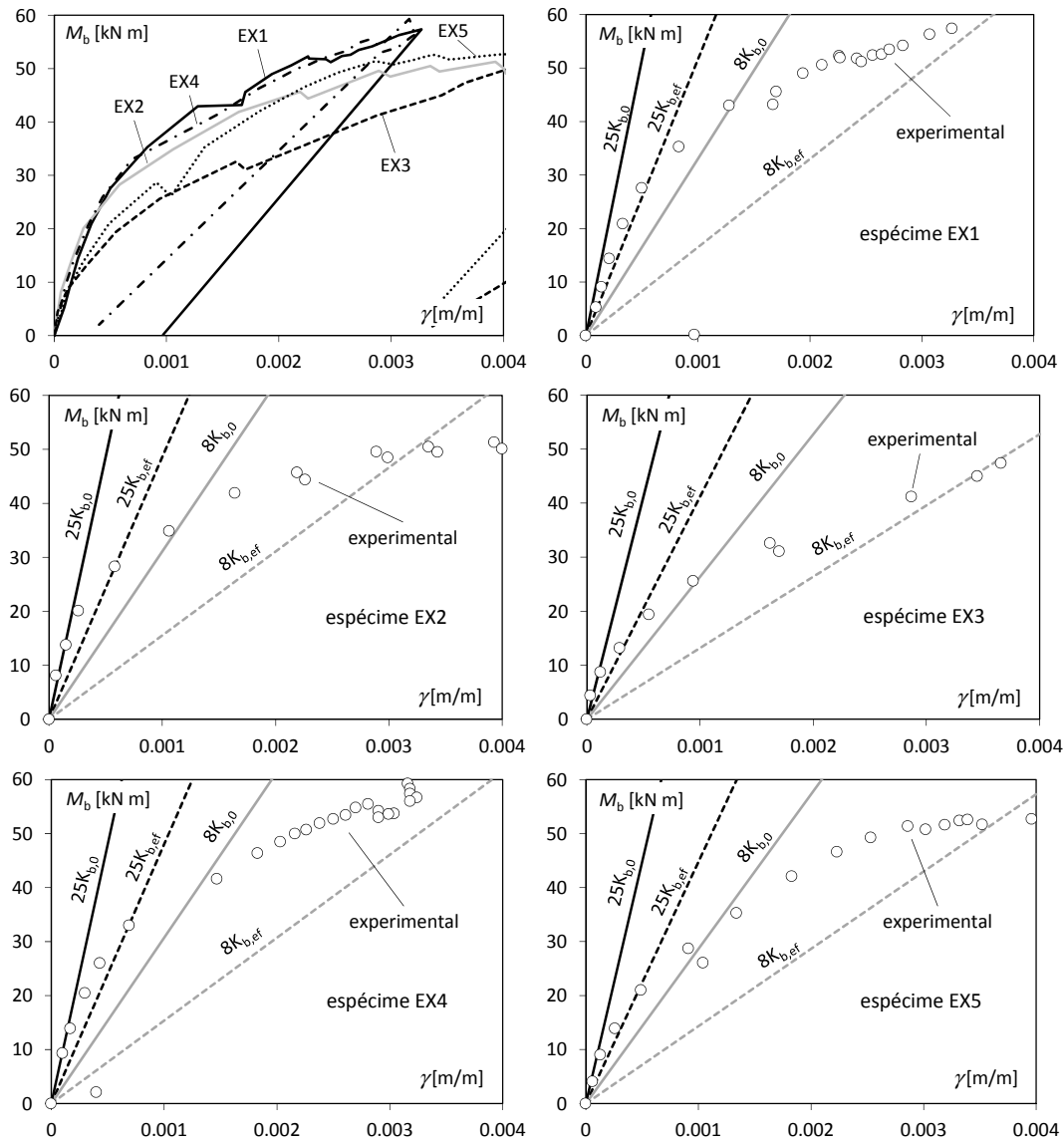


Figura 3.9 – Relações experimentais  $M_b$ - $\gamma$  segundo Sarsam [1983] e rigidez mínima requerida pela NP EN 1993-1-8 para classificação das ligações como nominalmente rígidas.

Consequentemente, o valor máximo de  $M_b$  obtido experimentalmente e representado na Figura 3.9 só define a capacidade resistente da ligação no espécime EX2. Assim, as relações constitutivas para as ligações viga-pilar apresentadas por Sarsam [1983] são incompletas ou melhor, truncadas. No entanto, o facto dos registos apresentados por Sarsam [1983] estarem incompletos, para o propósito desta análise, não tem relevância nem compromete a validade das conclusões. De facto, a utilização de leis de comportamento das ligações completas, caso estivessem disponíveis, e pressupondo que, tal como sugere a Figura 3.9, estas traduziriam uma menor rigidez com o agravamento dos esforços nas ligações, teria como consequência uma relevância maior do efeito flexibilidade das ligações quando comparada com o pressuposto de ligações rígidas.

Na Figura 3.9(b) a (f) os limites de rigidez definidos pela expressão (3.5) estão sobrepostos aos resultados experimentais apresentados por Sarsam [1983]. Para a determinação dos limites de rigidez apresentados assumiu-se uma esbelteza para as vigas  $L_{be}/h_b = 10$ , ou seja  $L_{be} \approx 3\text{ m}$ , e adoptou-se para a rigidez à flexão das vigas a rigidez tangente inicial  $(EI_b)_0$  em que não foram

consideradas as armaduras, ou seja, assumiu-se  $K_b = K_{b,0} = (EI_b)_0 / L_{be}$ .

Aplicando o critério definido pela expressão (3.5) às curvas de comportamento das ligações viga-pilar ensaiadas por Sarsam [1983] (Figura 3.9(b) a (f)) conclui-se que, se for adoptado  $EI_b = (EI_b)_0$  como o parâmetro caracterizador da rigidez de flexão da viga de betão armado, estas ligações viga-pilar devem ser classificadas como semi-rígidas.

No entanto a generalização directa dos critérios (3.5) para ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado, adoptando como referência a rigidez tangente inicial das vigas  $(EI_b)_0$ , pode não ser razoável. Da mesma forma que as ligações viga-pilar de betão armado apresentam um comportamento marcadamente não linear, o comportamento à flexão das vigas e pilares de betão armado também se afasta consideravelmente da forma elástica linear, mesmo em serviço, devido essencialmente ao efeito combinado da fendilhação do betão, não linearidade do betão em compressão e cedência das armaduras. Fazendo um paralelismo, tal como, de acordo com a ECCS-TC8 [1992], a rigidez inicial da ligação não é suficiente para avaliar a influência da ligação sobre o comportamento estrutural se esta apresentar um comportamento marcadamente não linear, a rigidez elástica inicial das vigas também pode não ser representativa do comportamento da viga nem em serviço nem nas imediações do colapso.

Tendo em consideração este aspecto, foi considerada uma rigidez efectiva da viga à flexão  $(EI_b)_{ef}$  para ter em consideração o seu comportamento não linear material. Seguiram-se as recomendações do §4.3.1(7) da NP EN 1998-1 (IPQ [2010d]), ou seja assumiu-se  $EI_b = (EI_b)_{ef} = 0.5(EI_b)_0$ , o que corresponde a  $K_b = K_{b,ef} = (EI_b)_{ef} / L_{be}$ .

Aplicando novamente o critério (3.5) às curvas de comportamento das ligações viga-pilar ensaiadas por Sarsam [1983] (Figura 3.9(b) a (f)) mas adoptando agora  $EI_b = (EI_b)_{ef}$ , conclui-se que estas ligações viga-pilar, quando incorporadas em estruturas não contraventadas, devem ser consideradas semi-rígidas e, quando incorporadas em estruturas contraventadas, podem ser consideradas nominalmente rígidas.

Note-se que assumindo  $L_{be}/h_b < 10$  seria mais evidente que as ligações viga-pilar ensaiadas por Sarsam [1983] devem ser consideradas semi-rígidas. Adoptou-se o valor  $L_{be}/h_b = 10$  como referência porque corresponde aproximadamente ao maior valor dos espécimes ensaiados por Sarsam [1983] caso se admita que a secção de momento nulo nos espécimes ensaiados corresponde à secção de meio vão da viga numa estrutura completa, na medida em que, neste caso,  $L_{be} = 2a_v + h_c$ .

A comparação dos limites de rigidez associados a  $(EI_b)_0$  e  $(EI_b)_{ef}$  (expressão (3.5) e Figura 3.9) mostra uma grande sensibilidade dos resultados da aplicação do critério de classificação adaptado da NP EN 1993-1-8 em relação a  $EI_b$ . Dado que a rigidez à flexão de uma viga depende (i) da sua geometria, (ii) das propriedades mecânicas dos materiais que a constituem, (iii) do modo de deformação da viga e (iv) do nível de carga, as conclusões obtidas assumindo  $EI_b = (EI_b)_{ef} = 0.5(EI_b)_0$  carecem de uma validação mais rigorosa. Assim, propõe-se seguidamente um procedimento mais rigoroso, estabelecido a partir da alteração do critério (3.5) de modo a ter estes aspectos em consideração, aplicável a estruturas porticadas não contraventadas – as quais, de acordo com a expressão (3.5), são as mais influenciadas pela flexibilidade da ligação.

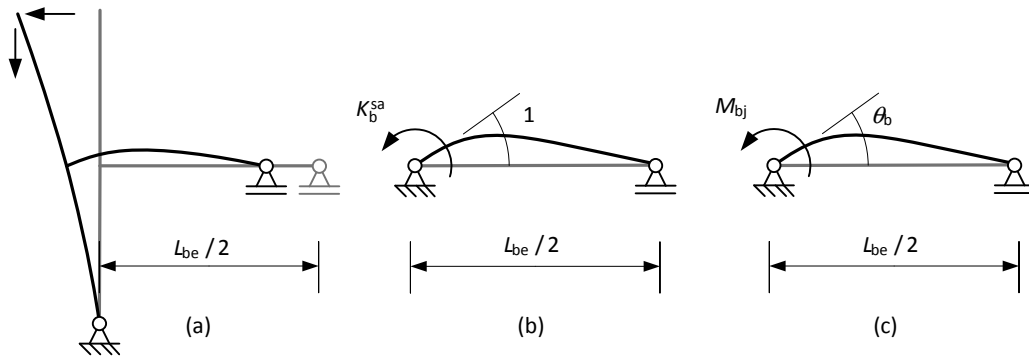


Figura 3.10 – (a) Configuração deformada da subestrutura, (b) rigidez de flexão de uma viga simplesmente apoiada  $K_b^{sa}$ , (c) cálculo da relação linear  $M_{bj}$ - $\theta_b$ .

A Figura 3.10(a) representa a configuração deformada da estrutura ensaiada por Sarsam [1983] para condições de apoio e carga que simulam uma estrutura porticada não contraventada submetida a cargas horizontais e verticais. Apesar de mais realista, a implementação em laboratório desta configuração levanta mais dificuldades, motivo pelo qual não é habitualmente adoptada (Hanson e Conner [1967]). A configuração deformada da viga desta subestrutura é similar à de uma viga simplesmente apoiada submetida a igual rotação da extremidade esquerda,  $\theta_b$  – Figura 3.10(c).

Os limites de rigidez definidos pela expressão (3.4) para estruturas metálicas correspondem ao quociente entre a rigidez angular inicial da junta e a rigidez elástica linear à flexão da viga. Tendo em atenção que a rigidez de flexão da viga representada na Figura 3.10(b) para comportamento elástico linear é  $K_b^{sa} = 3EI_b / (L_{be}/2)$ , o limite apresentado na expressão (3.4) para estruturas não contraventadas pode ser posto na forma

$$S_{j,ini} > k_{jb,ini} K_b = \frac{k_{jb,ini}}{6} \frac{3EI_b}{L_{be}/2} = k_{jb,ini}^{sa} K_b^{sa} \quad \text{com} \quad k_{jb,ini}^{sa} = \frac{k_{jb,ini}}{6} = \frac{25}{6}. \quad (3.7)$$

Ao dar à expressão (3.4) a forma da expressão (3.7), incorpora-se de forma explícita no critério de classificação das ligações não só a rigidez à flexão da secção transversal da viga (traduzida por  $EI_b$ ) mas também o modo de deformação da viga (traduzida por  $K_b^{sa}$ ). Em elementos caracterizados por secções com comportamento elástico linear, a individualização da rigidez de flexão da viga não é necessária na medida em que esta está devidamente caracterizada pela rigidez à flexão da secção transversal e pelo comprimento da viga, ambos constantes. No entanto, contrariamente às vigas de aço em fase elástica, a rigidez à flexão de uma viga de betão armado, para um dado modo de deformação, varia com o campo de esforços, ou seja, não é constante, o que inviabiliza a utilização de expressões do tipo (3.4) sem uma adequada calibração do parâmetro  $EI_b$ .

Reescrevendo a expressão (3.7) em termos da rigidez secante da viga e da ligação, obtém-se um critério para um material estrutural arbitrário. Desta forma, no caso de estruturas não contraventadas, uma ligação viga-pilar pode ser classificada como nominalmente rígida quando a sua rigidez de rotação secante satisfaz a condição

$$S_{j,sec} > k_{jb,sec}^{sa} K_{b,sec}^{sa} \quad (3.8)$$

com  $k_{jb,sec}^{sa} = 25/6$  e rigidez secante da viga função do momento flector na extremidade da viga e na ligação,  $K_{b,sec}^{sa} = K_{b,sec}^{sa} [M_{bj}]$ . Em seguida, será aplicada esta interpretação da expressão

(3.7) à classificação de ligações viga-pilar de betão armado em termos de rigidez.

No estudo que se apresenta, dos cinco espécimes analisados por Sarsam, seleccionou-se o que apresentou comportamento mais rígido (EX1) e o que apresentou comportamento mais flexível (EX3) – Figura 3.9 – de forma a balizar os resultados. Estes espécimes diferem um do outro na resistência do betão e na distância  $a_v$  entre o ponto de aplicação da carga e a face do pilar.

Para o cálculo da relação  $M_{bj}-\theta_b$  para as vigas foi necessário determinar previamente a relação momento curvatura para a secção de betão armado. Com tal fim em vista, foi desenvolvido um modelo de fibras simplificado para secções rectangulares duplamente armadas no qual, apesar de se contabilizar o comportamento não linear dos materiais, foi ignorado o *tension stiffening*. Foi assumindo (i) comportamento elástico-perfeitamente plástico para as armaduras, (ii) comportamento não linear para o betão em compressão de acordo com o modelo proposto no §2.1.4.4.1 do MC90 (MC90 [1990]), e (iii) comportamento elástico até à fendilhação para o betão traccionado, seguido de perda total de capacidade resistente em tracção. Para cada valor do momento flector  $M_{bj}$ , calculou-se a rotação  $\theta_b$  utilizando o seguinte procedimento: (i) selecção de um conjunto de secções igualmente espaçadas ao longo do eixo da viga; (ii) determinação do campo de momento flector na viga que equilibra  $M_{bj}$ , e, seguidamente, do momento flector em cada uma dessas secções; (iii) determinação da curvatura em cada uma dessas secções recorrendo à relação momento curvatura, (iv) determinação da rotação  $\theta_b$  correspondente a  $M_{bj}$  por integração da curvatura, assumindo variação linear da curvatura entre essas secções, recorrendo ao método da carga unitária.

A Figura 3.11 apresenta as relações  $M_{bj}-\theta_b$  para alguns valores de esbelteza das vigas juntamente com as relações  $M_{bj}-\gamma$  experimentais (Sarsam [1983]) para os espécimes EX1 e EX3 .

Apresenta-se na Figura 3.12 a evolução das quantidades  $S_{j,sec}$  e  $k_{jb,sec}^{sa} K_{b,sec}^{sa}$  com  $M_{bj}$ , ambas determinadas a partir das relações  $M_{bj}-\gamma$  e  $M_{bj}-\theta_b$  representadas na Figura 3.11. Por aplicação da expressão (3.8), esta figura permite identificar os casos em que as ligações vigas pilar em causa podem ser classificadas como nominalmente rígidas.

Admitindo  $S_{j,sec} \neq 0$ , a condição para que a ligação possa ser considerada nominalmente rígida, traduzida pela inequação (3.8), também pode ser expressa na forma

$$\left(k_{jb,sec}^{sa} K_{b,sec}^{sa}\right) / S_{j,sec} < 1 . \quad (3.9)$$

Esta transformação consiste em normalizar ambos os termos da expressão (3.8) relativamente

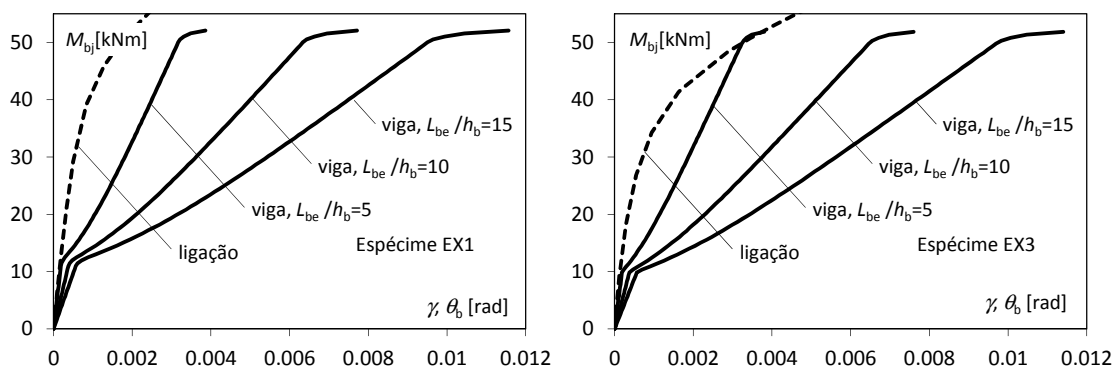


Figura 3.11 – Relação  $M_{bj}-\theta_b$  para o modo de deformação da viga representado na Figura 3.10(c) e relação  $M_{bj}-\gamma$  experimental (Sarsam [1983]).

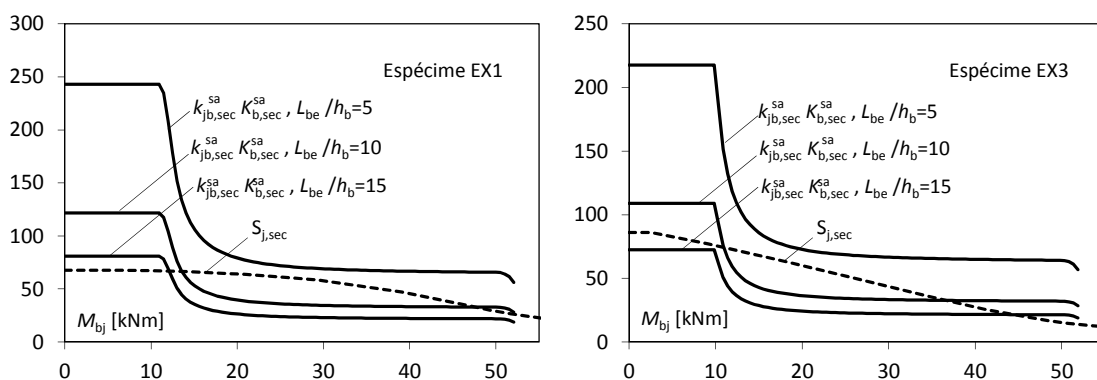


Figura 3.12 – Situações em que a ligação viga-pilar pode ser considerada nominalmente rígida de acordo com a expressão (3.8): porções das curvas a cheio abaixo da curva a tracejado (para os espécimes EX1 e EX3 ensaiados por Sarsam [1983]).

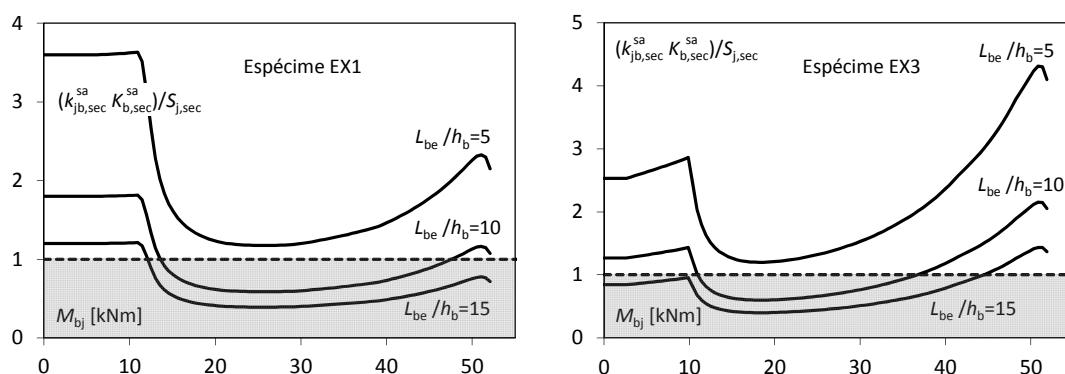


Figura 3.13 – Situações em que a ligação viga-pilar pode ser considerada nominalmente rígida de acordo com a expressão (3.9): porções das curvas na zona a sombreado (para os espécimes EX1 e EX3 ensaiados por Sarsam [1983]).

a  $S_{j,sec}$ , a rigidez secante da ligação, e oferece uma representação gráfica, Figura 3.13, onde mais facilmente são identificáveis os casos que satisfazem a condição que permite considerar a ligação nominalmente rígida.

A Figura 3.13 mostra que para diversas combinações do campo de esforços e da geometria da estrutura, em particular nas imediações do colapso e para vigas pouco esbeltas, a aplicação do critério proposto na NP EN 1993-1-8, ajustado para estruturas de betão armado da forma indicada anteriormente, permite concluir que a deformabilidade das ligações viga-pilar de betão armado deve ser contabilizada na análise de estruturas porticadas regulares não contraventadas. Note-se que esta conclusão seria reforçada caso se tivesse contabilizado todas as fontes de deformação da ligação e/ou o *tension stiffening* na viga.

É no entanto importante salientar que estas conclusões são obtidas a partir (i) da combinação dos pressupostos simplificativos apresentados anteriormente, (ii) apenas dos resultados experimentais relativos a uma campanha com ligações viga-pilar de extremidade (Sarsam [1983]) e (iii) do pressuposto de validade de aplicação dos critérios apresentados na NP EN 1993-1-8, com as alterações propostas nesta análise para estruturas não metálicas.

### 3.3.3. Avaliação do efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar sobre a capacidade de carga das estruturas de betão armado

O critério para classificação de ligações em função da sua rigidez definido pela expressão (3.4), ou a sua adaptação sugerida no §3.3.2, permite identificar os casos em que a flexibilidade das



ligações viga-pilar pode ser relevante para o comportamento de estruturas porticadas. Porém esse critério não quantifica esse efeito.

Um dos efeitos da flexibilidade da ligação, provavelmente o mais relevante, é a redução da capacidade de carga da estrutura como consequência da amplificação dos esforços. No seguimento do estudo realizado por Gomes [2002], apresenta-se, em seguida, uma análise com o objectivo de quantificar a variação dos efeitos de segunda ordem e a redução da capacidade de carga das estruturas causadas pela distorção das ligações viga-pilar. Serão utilizados novamente os resultados experimentais publicados por Sarsam [1983] relativos aos espécimes EX1 e EX3.

### 3.3.3.1. Conversão dos resultados experimentais

As irregularidades locais características de resultados experimentais, quando usados como *input* para relações constitutivas de elementos estruturais numa análise material e geometricamente não linear, podem produzir resultados enganadores, pelo que é conveniente proceder à sua prévia regularização. Uma das curvas passíveis de usar para regularizar a curvas experimentais  $M_b - \gamma$  publicadas por Sarsam [1983], é a curva proposta por Richard e Abbott [1975] que pode ser traduzida pela expressão

$$M_b[\gamma] = \frac{(k_{ini} - k_{max})\gamma}{\left(1 + \left(\frac{(k_{ini} - k_{max})\gamma}{M_0}\right)^\eta\right)^{1/\eta}} + k_{max}\gamma \quad (3.10)$$

onde  $k_{ini}$  é a rigidez tangente inicial da curva no referencial  $M_b - \gamma$ ,  $k_{max}$  e  $M_0$  são, respectivamente, o declive e o traço no eixo dos momentos da tangente à curva para  $M_b = M_{max}$ , e  $\eta$  é um factor de forma, Figura 3.14(a).

A curva proposta por Richard e Abbott [1975] é particularmente apelativa para este efeito na medida em que (i) com excepção do parâmetro  $\eta$  todos os parâmetros têm um significado físico claro e (ii) permite modelar qualquer tipo de resposta estrutural, nomeadamente endurecimento, amaciamento e plasticidade perfeita. Note-se no entanto que, apesar de uma das curvas experimentais apresentadas por Sarsam [1983] exibir um ponto limite, para este estudo só é relevante a porção das curvas desde o início do carregamento até ao momento máximo registado,  $M_{b,max}$ , – o ponto limite corresponde ao colapso da viga – e por isso não foram considerados os registos experimentais correspondentes à fase de descarga.

Para determinar a curva que melhor se ajusta aos resultados experimentais no referencial

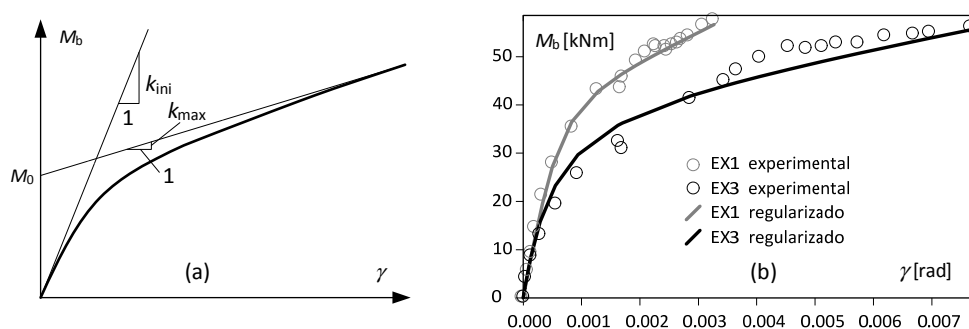


Figura 3.14 – Regularização dos resultados experimentais, (a) representação esquemática da curva proposta por Richard e Abbott [1975], (b) resultados experimentais e aproximação analítica contínua.

Tabela 3.4 – Parâmetros da curva de Richard e Abbott [1975].

espécime	$k_{ini}$ [kNm]	$k_{max}$ [kNm]	$M_0$ [kNm]	$\eta$
EX1	63213.0	5785.7	38.0	2.5
EX3	76862.7	2248.1	40.0	1.1

$M_b-\gamma$ , minimizou-se a soma dos quadrados das diferenças entre valores experimentais e valores ajustados em três sub-intervalos:  $k_{ini}$  é a inclinação da recta que passa pela origem do referencial e que melhor se ajusta aos pares de valores experimentais  $(M_b, \gamma)$  tais que  $M_b \leq 0.25M_{b,max}$ ,  $k_{max}$  e  $M_0$  são a rigidez e a ordenada na origem da recta que melhor se ajusta aos pares de valores experimentais  $(M_b, \gamma)$  tais que  $M_b \geq 0.75M_{b,max}$ , e  $\eta$  é o parâmetro que melhor se ajusta à totalidade dos resultados experimentais tendo em atenção os dois parâmetros já determinados.

Na Figura 3.14(b) estão representadas as curvas de ajuste correspondentes aos parâmetros indicados na Tabela 3.4.

Nas ligações viga-pilar em que a deformação ocorre ou se manifesta exclusivamente na interface entre a extremidade da viga e a face do pilar (na ligação, de acordo com a definição da NP EN 1993-1-8), o comportamento da ligação pode ser adequadamente modelado por uma mola angular disposta nessa interface. No entanto, se a deformação da ligação inclui, por exemplo, uma parcela por distorção, este procedimento para caracterizar a ligação é inadequado na medida em que o momento flector na extremidade da viga e a distorção da ligação não constituem um par de variáveis energeticamente conjugado (Borkowski [1988]), ou seja, o momento flector na extremidade da viga não é o único esforço associável à distorção da ligação. Por este motivo, as curvas experimentais apresentadas por Sarsam [1983] não devem ser usadas directamente em sistemas com outra geometria, condições de apoio e/ou carregamento. Tendo em atenção este aspecto, em seguida identificam-se pares de variáveis energeticamente conjugados adequados para caracterizar de forma independente o comportamento das ligações viga-pilar.

O modelo de ligação proposto por Mitra e Lowes [2007] condensa numa variável estática a força de corte na ligação correspondente ao conjunto de esforços na sua periferia. Será por este motivo usado como ponto de partida neste estudo. Tal como referido no §2.3.2.2, o modelo de ligação viga-pilar desenvolvido por estes autores é composto por quatro barras rígidas dispostas ao longo da periferia da ligação com ligações rotuladas entre si. Uma destas rótulas é elástica e o seu comportamento é caracterizado por uma relação momento-rotação,  $M_\gamma-\gamma$ , entre a distorção angular da ligação  $\gamma$  e o momento distorcional  $M_\gamma$ , Figura 3.15(a).

Adoptando o sistema esforços representado na Figura 3.15(b) para expressar o equilíbrio na configuração indeformada da ligação, para o caso mais geral de uma ligação com dois pilares e duas vigas, obtém-se a aproximação de primeira ordem para  $M_\gamma$  dada por uma das expressões alternativas

$$M_\gamma^{1st} = h_c \left( \frac{F_3 + F_9}{h_c} + F_5 + \frac{1}{2}(F_2 + F_8) \right) \text{ e } M_\gamma^{1st} = h_b \left( -\frac{F_6 + F_{12}}{h_b} + F_7 + \frac{1}{2}(F_4 + F_{10}) \right) \quad (3.11)$$

que, no caso particular dos espécimes ensaiados por Sarsam [1983] (Figura 3.7), se reduz a

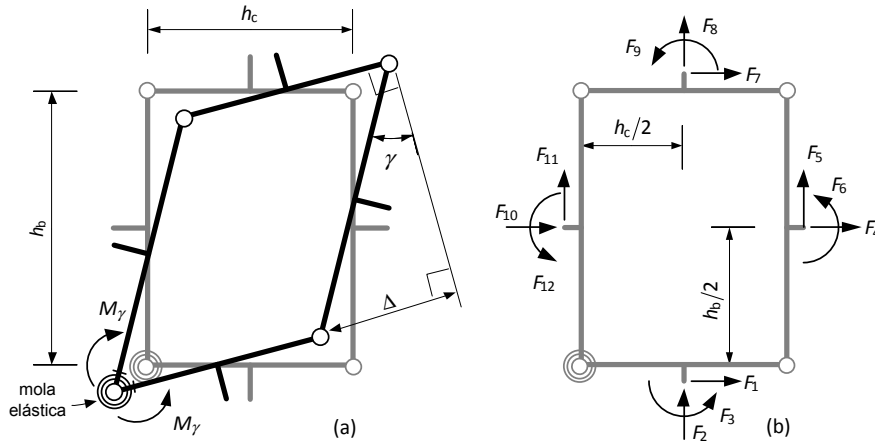


Figura 3.15 – Modelo de ligação viga-pilar (Mitra e Lowes [2007]), (a) momento distorçional  $M_\gamma$  e distorção  $\gamma$ , (b) sistema de esforços na periferia da ligação.

$$M_\gamma^{1st,exp} = -Q a_v \left[ -1 + \frac{h_b}{L_{ce}} \left( 1 + \frac{h_c}{2a_v} \right) \right] = M_b \left( 1 - \frac{h_b/L_{ce}}{1 - h_c/L_{be}} \right) \quad (3.12)$$

em que  $L_{be} = 2a_v + h_c$ . A expressão (3.12) mostra que a relação entre  $M_b$  e o momento distorçional  $M_\gamma$  não é unívoca. Tal como já foi referido, isto significa que a utilização directa da relação  $M_b - \gamma$  não constitui uma abordagem objectiva para modelar o comportamento da ligação. A conversão da relação  $M_b - \gamma$  para  $M_\gamma - \gamma$  usando a expressão (3.12) permite uma caracterização e uma modelação do comportamento das ligações viga-pilar ensaiadas por Sarsam [1983] independente da estrutura.

O trabalho interno da ligação associado ao par de variáveis  $(M_\gamma, \gamma)$  é

$$W \equiv M_\gamma \gamma. \quad (3.13)$$

Esta expressão pode ser reescrita na forma

$$W \equiv \left( \frac{M_\gamma}{h_b} \right) (\gamma h_b) = V_{jh,m} \Delta \quad (3.14)$$

em que  $\Delta$  é o deslocamento relativo dos elementos do topo e da base da ligação na respectiva direcção (Figura 3.15(a)) e  $V_{jh,m}$  é uma medida do esforço de corte horizontal na ligação dada por

$$V_{jh,m} \equiv \frac{M_\gamma}{h_b} = -\frac{F_6 + F_{12}}{h_b} + F_7 + \frac{1}{2}(F_4 + F_{10}). \quad (3.15)$$

Conclui-se, portanto, que o par de variáveis  $(V_{jh,m}, \Delta)$  também pode ser usado para caracterizar o comportamento da ligação em alternativa a  $(M_\gamma, \gamma)$ .

Dividindo e multiplicando o termo do lado direito da expressão (3.14) pela área da secção transversal horizontal da ligação viga-pilar, é possível identificar outro par de variáveis passível de ser adoptado para caracterizar o comportamento da ligação, já usado por outros autores (Kato, Chen *et al.* [1988]),

$$W \equiv M_\gamma \gamma = \frac{M_\gamma}{h_b} \frac{1}{h_c b_j} \gamma (h_b h_c b_j) = \frac{V_{jh,m}}{h_c b_j} \gamma \text{Vol}_j = \tau_{jh,m} \gamma \text{Vol}_j \quad (3.16)$$

em que  $\tau_{jh,m} \equiv M_\gamma / \text{Vol}_j$  é uma tensão tangencial e  $\text{Vol}_j = h_b h_c b_j$  é o volume do paralelepípedo que constitui a ligação, sendo  $b_j$  a sua profundidade.

Para além das variáveis estáticas  $M_\gamma$ ,  $V_{jh,m}$  e  $\tau_{jh,m}$ , o campo de esforços na periferia da ligação pode ser caracterizado pela força de corte horizontal a meia altura da ligação. Este esforço é a força de corte horizontal máxima na ligação e é denotado por  $V_{jh}$ .

Tendo em consideração que os momentos nodais  $F_6$  e  $F_{12}$  são estaticamente equivalentes a dois binários definidos por pares de forças horizontais de grandeza  $F_6/z_b$  e  $F_{12}/z_b$  afastados de  $z_b$ , o equilíbrio do diagrama de corpo livre de metade da ligação conduz a (ver §5.3.2.2)

$$V_{jh} = -\frac{F_6 + F_{12}}{z_b} + F_7 + \frac{1}{2}(F_4 + F_{10}). \quad (3.17)$$

$V_{jh}$  é um parâmetro mais intuitivo que  $M_\gamma$  (ou  $V_{jh,m}$  ou  $\tau_{jh,m}$ ) e, por isso, é a escolha mais comum na literatura para caracterizar a resistência e o comportamento de ligações viga-pilar (IPQ [2010d], ACI Committee 318 [2008], IPQ [2010c]).

A relação entre  $V_{jh}$  e  $M_\gamma$  (ou  $V_{jh,m}$  ou  $\tau_{jh,m}$ ) não é unívoca na medida em que depende da distribuição de forças internas na periferia da ligação, ou seja, varia com a geometria da estrutura e/ou com as condições de apoio e carregamento. Desta forma, só se a distribuição de esforços for conhecida *a priori* é que as relações  $V_{jh}-\gamma$  propostas na bibliografia (ver §5.5.2) podem ser usadas no modelo proposto por Mitra e Lowes [2007].

No caso particular dos espécimes ensaiados por Sarsam [1983], dado que estes são estaticamente determinados, a relação entre  $V_{jh}$  e  $M_\gamma$  (ou  $V_{jh,m}$  ou  $\tau_{jh,m}$ ) é facilmente calculada. De acordo com a Figura 3.7, para o caso dos espécimes ensaiados por Sarsam [1983], a expressão (3.17) toma a forma

$$z_b V_{jh} = M_b \left( 1 - \frac{z_b/L_{ce}}{1 - h_c/L_{be}} \right). \quad (3.18)$$

Resolvendo a expressão (3.12) em ordem a  $M_b$  e introduzindo o resultado na expressão (3.18), obtém-se

$$V_{jh} = \frac{M_\gamma \frac{1 - (h_c/L_{be}) - (z_b/L_{ce})}{z_b} - (h_c/L_{be}) - (z_b/L_{ce})}{1 - (h_c/L_{be}) - (h_b/L_{ce})} = V_{jh,m} \frac{h_b \frac{1 - (h_c/L_{be}) - (z_b/L_{ce})}{z_b} - (h_c/L_{be}) - (z_b/L_{ce})}{1 - (h_c/L_{be}) - (h_b/L_{ce})} \quad (3.19)$$

que, de acordo com a Figura 3.7, para os espécimes EX1 e EX3 ensaiados por Sarsam [1983] corresponde a  $V_{jh}/V_{jh,m} \approx 1.4$  (para  $z_b/d_b = 0.85$  e  $z_c/d_c = 0.75$ ).

### 3.3.3.2. Validação dos resultados experimentais

Para a distorção de ligações de betão armado, a literatura apresenta vários modelos de resistência mas poucos modelos de comportamento. Dos modelos de comportamento propostos na bibliografia, os mais frequentemente referidos são a *Modified Compression Field Theory* (MCFT) proposta por Vecchio e Collins [1986] e o *Softened Truss Model* (STM) proposto por Hsu [1988]. Em ambos os modelos a ligação é modelada como uma placa de betão armado submetida a um estado plano de tensão provocado por forças uniformemente distribuídas ao longo dos bordos com componentes normal e transversal ao bordo. Apesar de existirem

relatos de bons resultados na aplicação da MCFT e da STM a ligações viga-pilar (Biddah e Ghobarah [1999] e Lowes e Altoontash [2003]), estes modelos são complexos, exigem cálculo iterativo e alguns dos pressupostos em que se baseiam não são adequados a ligações viga-pilar. Além disso, de acordo com Kitayama, Otani *et al.* [1991], a contribuição do mecanismo de treliça (em que ambos os modelos se baseiam, §5.5) só é relevante enquanto prevalecerem na ligação boas condições de aderência para as armaduras longitudinais das vigas e pilares. Desta forma, é expectável que as estimativas de comportamento determinadas pela MCFT e pelo STM diverjam do comportamento determinado experimentalmente quando as forças transmitidas à ligação aumentam.

Mais recentemente Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011] (§5.5.2.3) propuseram modelos de comportamento simples que estabelecem o comportamento da ligação em termos da relação  $\tau_{jh} - \gamma$ , em que  $\tau_{jh} = V_{jh} / (h_c b_j)$ . O modelo proposto por Roeser [2002] é baseado nos resultados experimentais de ligações viga-pilar submetidas a carregamentos quase-estáticos e monotónicos enquanto que o modelo proposto Kim e LaFave [2009] resultou de uma inferência estatística bayesiana aplicada a uma grande base de dados de envolventes de comportamento de ensaios de ligações viga-pilar submetidas a solicitações quase-estáticas cíclicas.

Para comparar os resultados de Sarsam [1983], publicados no formato  $M_b - \gamma$ , com os modelos de comportamento propostos por Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011], Figura 3.16, os primeiros foram convertidos para o formato  $\tau_{jh} - \gamma$  utilizando a expressão (3.18).

No modelo proposto por Roeser [2002] só são contabilizadas duas cintas como efectivas enquanto que no modelo proposto por LaFave e Kim [2011] todas as cintas (três) são contabilizadas como efectivas para efeitos de modelação de comportamento da ligação. O pressuposto assumido por Roeser [2002] vem no seguimento do trabalho realizado por Hamil [2000], que recomendou que em ligações viga-pilar de extremidade as armaduras transversais da ligação na zona de compressão da viga não sejam consideradas efectivas para efeitos de modelação do mecanismo resistente. Na análise apresentada seguidamente, a relação constitutiva proposta por Roeser [2002] foi modificada por forma a incluir a deformação por corte na fase não fendilhada da ligação, assumindo-se um comportamento elástico e linear.

A Figura 3.16 mostra que as estimativas de ambos os modelos acompanham razoavelmente os resultados experimentais – as diferenças estão dentro do que seria espectável nesta fase embrionária de desenvolvimento de modelos de comportamento para ligações viga-pilar de betão armado (LaFave e Kim [2011]).

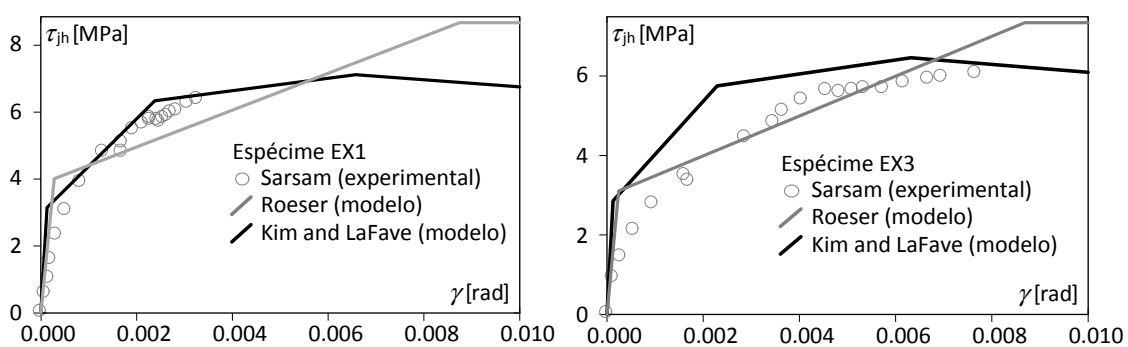


Figura 3.16 – Comparação dos resultados experimentais (Sarsam [1983]) com modelos de comportamento (Roeser [2002], LaFave e Kim [2011]).

Tal como foi referido no §2.5.1, com excepção das referências genéricas do Anexo J a modelos de escoras e tirantes, a NP EN 1992-1-1 (IPQ [2010a]) não inclui nenhuma disposição que permita avaliar se as ligações viga-pilar apresentam capacidade resistente suficiente para garantir a segurança estrutural. Por esse motivo, para avaliar a resistência das ligações EX1 e EX3., foram seguidas as disposições propostas na ACI 318-08 (ACI Committee 318 [2008]) e na ACI-ASCE 352-02 (ACI-ASCE Committee 352 [2002])

A ACI 318-08 recomenda a colocação na ligação de uma área mínima de armadura transversal para acções quase-estáticas não-cíclicas dada pela expressão (2.25), que corresponde a  $A_{v,min}/s = 0.139 \text{ mm}^2/\text{m}$  para o espécime EX1 e a  $0.121 \text{ mm}^2/\text{m}$  para o espécime EX3. Ambos os espécimes apresentam  $A_v/s = 1.188 \text{ mm}^2/\text{m}$ , valor superior aos mínimos indicados. Os espécimes ensaiados por Sarsam [1983] também cumprem o requisito relativo à distância máxima entre armaduras transversais prescrito pela ACI-ASCE 352-02. Nestas condições, a resistência da ligação ao corte pode ser estimada pela expressão (2.20), em que, para as ligações ensaiadas por Sarsam [1983],  $C = 15$ . Esta expressão conduz a  $V_{jh,R} = 297 \text{ kN}$  para o espécime EX1 e  $256 \text{ kN}$  para o espécime EX3.

De acordo com as relações momento-curvatura (§3.3.2), a resistência à flexão das secções transversais vigas das subestruturas ensaiadas por Sarsam [1983] é  $M_R = 52.1 \text{ kNm}$  para o espécime EX1 e  $M_R = 51.9 \text{ kNm}$  para EX3. Assumindo  $z_b = 0.85 d_b$  e desprezando o efeito benéfico do esforço transversal do pilar, o valor do esforço de corte  $V_{jh}$  correspondente à rotura da viga é  $227 \text{ kN}$  para o espécime EX1 e  $226 \text{ kN}$  para o espécime EX3, ambos valores menores que os das resistências ao corte determinados acima. Estes resultados permitem concluir que as ligações viga-pilar ensaiadas por Sarsam [1983] satisfazem os requisitos regulamentares actuais e foram dimensionadas por forma a garantir que o colapso da subestrutura se iniciaria na viga. Ou seja, as ligações viga-pilar têm uma reserva de resistência para além da carga máxima suportada pela viga adjacente e não estão por esse motivo subdimensionadas.

Note-se que as recomendações da ACI-ASCE 352-02 relativas ao comprimento de amarração  $l_{dh}$  das armaduras longitudinais da viga não são satisfeitas pelas subestruturas usadas nos ensaios para acções quase-estáticas e monotónicas disponíveis na bibliografia (Sarsam [1983], Roeser [2002]). No entanto, o comprimento da extensão vertical dos varões da armadura longitudinal das vigas após a dobra na ligação excede significativamente os  $12\phi$  indicados no §7.1 da ACI 318-08 para *standard hooks*. Além disso, dado que (i) nem a resistência da ligação foi condicionante para o colapso das subestruturas, (ii) nem a deformação das amarrações das vigas e pilares foi tida em consideração na análise (só foi contabilizada a distorção da ligação), e (iii) o comportamento obtido experimentalmente para a ligação foi semelhante ao que seria espectável de acordo com os modelos propostos por Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011], conclui-se que os resultados experimentais publicados por Sarsam [1983] são representativos de estruturas porticadas regulares correntes de betão armado.

### 3.3.3.3. Análise estrutural não linear

Tradicionalmente, as estruturas porticadas de betão armado são pouco esbeltas e por isso são pouco sensíveis a efeitos de segunda ordem. No entanto, (i) a banalização de betões e armaduras de alta resistência, em virtude da redução relativa de custo desses materiais e dos

maiores requisitos de durabilidade para o betão, e (ii) alguns requisitos de ordem arquitectónica e funcional, têm conduzido a estruturas com vãos cada vez maiores e a pilares com menores secções transversais. Consequentemente, os efeitos de segunda ordem em estruturas porticadas de betão armado são cada vez mais relevantes.

Se se admitir que a estrutura é dúctil e que os efeitos de segunda ordem não são significativos, o *Teorema Estático da Análise Plástica Limite* permite concluir que a capacidade de carga da estrutura não é afectada pelo valor da rigidez das ligações viga-pilar, desde que a sua resistência seja superior à das vigas e pilares adjacentes. No entanto, a legitimidade para aplicar este resultado na análise de estruturas com comportamento dúctil elástico-plástico depende da grandeza dos deslocamentos que essas estruturas efectivamente apresentam. Mais especificamente, uma análise linear de estruturas porticadas de betão armado baseada neste teorema não é aceitável na presença de elevados esforços de compressão em simultâneo com elementos esbeltos, na medida em que o efeito dos deslocamentos pode não ser desprezável nas equações de equilíbrio (Horne [1971]). A flexibilidade das ligações viga-pilar pode aumentar a deformabilidade global da estrutura e, consequentemente, reduzir a sua capacidade de carga na presença de esforços axiais elevados.

Assim, em seguida, apresenta-se uma análise que visa avaliar duas consequências distintas, mas, como foi referido, interligadas, da flexibilidade das ligações viga-pilar de extremidade em estruturas porticadas de betão armado, nomeadamente (i) a amplificação dos deslocamentos laterais e (ii) a redução da capacidade de carga da estrutura.

Quando a regularidade das estruturas porticadas se verifica tanto ao nível geométrico como das propriedades mecânicas e do carregamento, existe um nível semelhante de regularidade no comportamento estrutural, nomeadamente na distribuição de esforços e deslocamentos. Nestes casos, é possível aproximar o comportamento da estrutura porticada pelo comportamento de uma subestrutura representativa (Kollár [1999]). Variando um conjunto reduzido de características geométricas desta subestrutura é ainda possível obter conclusões relativas a um âmbito bastante alargado de estruturas porticadas regulares não contraventadas.

Tendo em consideração este resultado, o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar será em seguida estudado recorrendo a uma subestrutura representativa (estrutura arquétipo) e incorporando no modelo numérico as relações constitutivas obtidas experimentalmente por Sarsam [1983] para as ligações viga-pilar (EX1 e EX3). Apesar de a utilização de relações constitutivas definidas analiticamente poder conduzir a resultados mais abrangentes, nesta fase do trabalho esta generalização foi sacrificada por forma a obter uma descrição mais rigorosa e representativa do comportamento da ligação.

#### 3.3.3.3.1. Estrutura arquétipo

A Figura 3.17(b) apresenta a estrutura arquétipo utilizada, a solicitação considerada e uma configuração deformada típica. Esta subestrutura representa parte de uma estrutura porticada regular não contraventada corrente, doravante denominada estrutura porticada original (Figura 3.17(a)).

A estrutura arquétipo inclui uma ligação viga-pilar que liga uma viga, cujo comprimento é

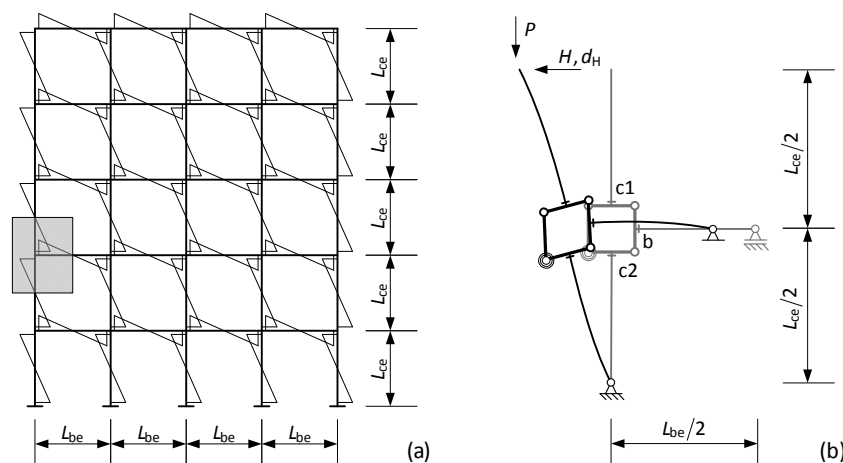


Figura 3.17 – (a) Estrutura porticada regular não contraventada (estrutura original), (b) estrutura arquétipo e sua configuração deformada.

metade do comprimento das vigas na estrutura porticada original, e dois pilares, cujo comprimento é metade do comprimento dos pilares na estrutura porticada original. A subestrutura tem impedidas as translações na extremidade inferior do pilar inferior e a translação vertical na extremidade direita da viga (Figura 3.17(a)). Na extremidade livre do pilar está aplicado uma par de cargas pontuais ( $H$  e  $P$ ) que simulam as acções exercidas sobre a subestrutura modelada pela parte da estrutura porticada original acima dela. As cargas e as condições de apoio da subestrutura dão origem a campos de esforços e de deformações similares aos da estrutura porticada original. Em particular, o deslocamento horizontal da extremidade livre do pilar superior,  $d_H$ , é idêntico ao deslocamento transversal relativo entre pisos (*drift*) da estrutura porticada original.

Se se assumir que não existe transferência de carga horizontal relevante entre os pilares de extremidade e os pilares interiores na estrutura porticada original (Figura 3.17(a)), então o esforço axial nas vigas é desprezável, podendo-se concluir que o comportamento da subestrutura arquétipo se aproxima do da estrutura porticada original.

As secções transversais das vigas e dos pilares são simétricas relativamente ao plano definido pelos eixos das vigas e pilares e as suas dimensões são pequenas quando comparadas com o comprimento dos elementos, pelo que se assume válida a hipótese de *Bernoulli-Euler-Navier*, ou seja, as secções transversais planas e normais ao eixo recto do elemento na configuração inicial, permanecem planas e normais ao eixo do elemento na configuração deformada, desprezando-se pois a deformação por corte nas vigas e pilares.

Assume-se que é pequena a grandeza das deformações e rotações, ou seja, conserva-se a projecção ortogonal das dimensões das peças segundo as direcções iniciais. Desta forma, o campo de extensões nos elementos lineares é definido por pequenas extensões normais paralelas ao eixo dos elementos. As tensões normais são determinadas a partir destas extensões por intermédio (i) da relação tensão extensão para o betão definida no §2.1.4.4.1 do MC90 – análoga à proposta no §3.1.5 da NP EN 1992-1-1 – e (ii) do diagrama tensão-extensão elástico-perfeitamente plástico para armaduras proposto no §3.2.7 da NP EN 1992-1-1.

### 3.3.3.3.2. Caracterização dos modos de colapso

As zonas críticas da estrutura arquétipo são as três secções transversais na periferia da ligação



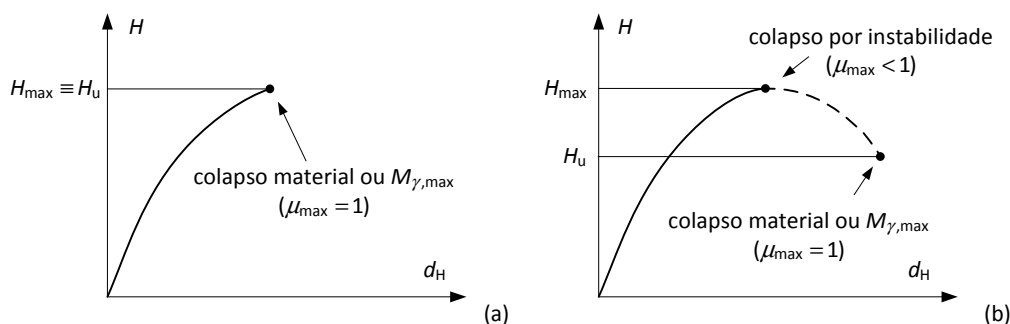


Figura 3.18 – Curvas de comportamento características para  $P$  constante, (a) rotura material ou foi atingido  $M_{\gamma,max}$ , (b) rotura por instabilidade.

e a ligação em si. Consequentemente, no decorrer do processo iterativo, para cada combinação de cargas ( $P, H$ ) aplicadas à estrutura foi necessário monitorizar (i) os momentos flectores  $M_{E,c1} = M_{E,c1}[P, H]$ ,  $M_{E,c2} = M_{E,c2}[P, H]$  e  $M_{E,b} = M_{E,b}[P, H]$ , que não podem exceder as resistências à flexão das secções transversais correspondentes  $M_{R,c1} = M_{R,c1}[P]$ ,  $M_{R,c2} = M_{R,c2}[P]$  e  $M_{R,b}$ , e (ii) o momento distorcional  $M_{E,\gamma} = M_{E,\gamma}[P, H]$  que não pode exceder o valor máximo registado experimentalmente por Sarsam [1983],  $M_{\gamma,max}$  – note-se a diferenciação efectuada com a adopção do subscrito “E” e “R” para indicar efeito e resistência, respectivamente, de acordo com o formalismo dos Eurocódigos, e do subscrito “max” na ligação para evidenciar que os ensaios realizados por Sarsam [1983] não permitiram atingir o momento distorcional da ligação correspondente ao colapso desta. Doravante, sempre que estes subscritos sejam óbvios, serão omitidos.

Para avaliar o risco de colapso material ou de ultrapassar o valor máximo registado do momento distorcional, foram definidos os seguintes parâmetros não negativos

$$\mu_1 = \mu_{c1} = \frac{M_{E,c1}}{M_{R,c1}}, \quad \mu_2 = \mu_{c2} = \frac{M_{E,c2}}{M_{R,c2}}, \quad \mu_3 = \mu_b = \frac{M_{E,b}}{M_{R,b}} \quad \text{e} \quad \mu_4 = \mu_\gamma = \frac{M_{E,\gamma}}{M_{\gamma,max}}. \quad (3.20)$$

Se a combinação de forças ( $P, H_{max}$ ) em análise conduzir ao colapso material de um dos elementos ou a ligação atingir  $M_{\gamma,max}$ , (pelo menos) um dos parâmetros (3.20) terá valor unitário, ou seja,  $\mu_{max} = \max[\mu_e] = 1$  para  $e = 1, \dots, 4$  (Figura 3.18(a)). Pelo contrário, no caso de colapso por instabilidade,  $\mu_{max}$  é inferior a um, Figura 3.18(b). Os colapsos por instabilidade identificados neste estudo estão associados a um ponto limite da curva  $H-d_H$  e resultam da redução de rigidez à flexão da viga, pilares e da ligação.

O valor de  $\mu_{max}$  bem como o elemento onde é atingido é uma informação útil para análise dos resultados e por isso será incorporada na representação gráfica dos resultados no §3.3.4.

### 3.3.3.3. Algoritmo utilizado na análise não linear

A avaliação do efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar em estruturas de betão armado requer uma análise não linear material e geométrica. O procedimento iterativo implementado baseou-se no *Método Geral* do §5.8.6 da NP EN 1992-1-1, previamente proposto no manual CEB 103 (CEB [1974]). No entanto, dado que as acções sobre estruturas porticadas com componente transversal mais relevante (sismo e vento) não possuem carácter permanente, foram considerados apenas os efeitos de curta-duração e as disposições relativas à fluência não foram tidas em consideração.

De uma forma geral, para cada valor de  $P$ , foi efectuada uma análise com controlo de carga em que a força horizontal  $H$  foi progressivamente aumentada (com incrementos  $\Delta H$ ) até a subestrutura atingir a força horizontal máxima,  $H_{\max}$ . Quando o colapso está iminente o incremento da força horizontal  $\Delta H$  é tornado sucessivamente mais pequeno até atingir um valor inferior a  $\Delta H_{\min}$ . A força horizontal máxima correspondente a uma dada força vertical  $P$ , ou seja  $H_{\max} = H_{\max}[P]$ , é definida como a força horizontal máxima para a qual não há uma configuração de equilíbrio estável para incrementos de carga  $\Delta H > \Delta H_{\min}$ . Para cada combinação de cargas  $(P, H)$ , são calculados e guardados os valores dos parâmetros  $\mu$  (expressões (3.20)) e do deslocamento transversal da extremidade livre do pilar superior e outras secções das vigas e pilares por forma a descrever a configuração deformada aproximada da estrutura.

As relações momento-curvatura das vigas e momento-curvatura-esforço axial dos pilares dos espécimes EX1 e EX3 ensaiados por Sarsam [1983] foram determinadas recorrendo ao modelo de fibras referido no §3.3.2, tendo em consideração as características geométricas das secções transversais e as propriedades mecânicas dos materiais constituintes (Figura 3.7, Tabela 3.3).

O algoritmo implementado baseou-se na metodologia proposta por Westerberg [2004] para aplicação do Método Geral da NP EN 1992-1-1 e o procedimento de análise de cada subestrutura pode ser resumido no seguinte conjunto de passos:

- i. cálculo da relação momento-curvatura ( $M-\chi$ ) para a viga;
- ii. ciclo incremental em  $P$ , tomando como valor inicial  $P = P_0 = n_0 A_g f'_c$ :
  - ii.i. cálculo da relação  $M-\chi-N$  para os pilares para  $N = -P$ ;
  - ii.ii. ciclo incremental em  $H$  tomando como valor inicial  $H = H_0$ , e como última configuração deformada guardada, a configuração indeformada:
    - ii.ii.i.  $\Delta H = \Delta H_0$ ;
    - ii.ii.ii.  $d^{lss} = d_0$  (última configuração guardada é a configuração indeformada);
    - ii.ii.iii. ciclo iterativo para determinação da configuração deformada  $d$  correspondente ao par de cargas  $(P, H)$ :
      - A.  $i = 1$ ;
      - B.  $d^0 = d^{lss}$ ;
      - C. determinar, por equilíbrio na configuração deformada  $d^{i-1}$ , o momento flector nas secções transversais previamente definidas e  $M_\gamma$ ;
      - D. calcular  $\mu_e$  com  $e = 1, \dots, 4$ ,  $\mu_{\max} = \max(\mu_e)$ ;
      - E. se  $\mu_{\max} > 1$ , foi excedida a resistência de uma secção transversal ou foi excedido  $M_{\gamma, \max}$  na ligação:
        - E.1. se  $\Delta H > \Delta H_{\min}$  ir para o passo ii.ii.iv.;
        - E.2. se  $\Delta H \leq \Delta H_{\min}$  atribuir capacidade de carga  $H_{\max}[P] = H^{lss}$ :
          - se  $\mu_{\max}^{lss} > 99.9\%$ : colapso material ou foi atingido  $M_{\gamma, \max}$  na ligação;
          - se  $\mu_{\max}^{lss} \leq 99.9\%$ : colapso por instabilidade;
        - E.3. ir para o passo ii.ii.iii.;
      - F. determinar a curvatura nas secções transversais das vigas e pilares

- previamente definidas a partir das relações  $M-\chi-N$  e  $M-\chi$ ;
- G. determinar a distorção  $\gamma^i$  da ligação a partir da relação  $M_{\gamma}-\gamma$ ;
- H. calcular a nova configuração deformada da estrutura  $d^i$  e o incremento de deslocamento da extremidade livre do pilar  $\Delta d_H^i = d_H^i - d_H^{i-1}$ ;
- I. se  $|\Delta d_H^i / d_H^i| < \varepsilon_d$  (ou a análise for de primeira ordem) foi atingida configuração de equilíbrio estável:
- I.1. adicionar a solução à curva  $H[P]$ ;
  - I.2. definir a solução actual como a última solução guardada ( $H^{lss}$ ,  $\mu_e^{lss}$  com  $e = 1, \dots, 4$ ,  $d^{lss} = d^i$ );
  - I.3. ir para o passo ii.ii.v.;
- J. se  $|\Delta d_H^i| \leq |\Delta d_H^{i-1}|$  ou  $i < i_{max}$  nova iteração:  $i = i + 1$ , voltar ao passo C;
- K. se  $|\Delta d_H^i / d_H^i| \geq \varepsilon_d$ ,  $|\Delta d_H^i| > |\Delta d_H^{i-1}|$  e  $i \geq i_{max}$ : os deslocamentos estão a divergir:
- K.1. se  $\Delta H > \Delta H_{min}$  ir para o passo ii.ii.iv.;
  - K.2. se  $\Delta H \leq \Delta H_{min}$  atribuir capacidade de carga  $H_{max}[P] = H^{lss}$ :
    - colapso por instabilidade;
    - ir para o passo ii.iii.;
- ii.ii.iv. reduzir a força horizontal aplicada ( $H = H - \Delta H$ ) e redefinir o incremento de carga horizontal ( $\Delta H = \Delta H / 5$ );
- ii.ii.v. actualizar a força horizontal aplicada ( $H = H + \Delta H$ ) e ir para o passo ii.ii.iii.;
- ii.iii. incrementar a carga vertical aplicada  $n = n + \Delta n$ ,  $P = n A_g f_c'$ :
- ii.iii.i. se  $n \leq n_{max}$  voltar ao passo ii.i.;
  - ii.iii.ii. stop.

A tolerância adoptada para os deslocamentos foi  $\varepsilon_d = 10^{-6}$ , a carga horizontal inicial foi  $H_0 = 10^{-5}$  kN, o incremento inicial de carga horizontal foi  $\Delta H_0 = 5$  kN e o incremento mínimo de carga horizontal foi  $\Delta H_{min} = 10^{-4}$  kN.  $H_{max}[P]$  é a força horizontal correspondente ao último incremento de força horizontal  $H$  para a força vertical  $P$ . Apesar de numa análise não linear dever garantir-se a convergência tanto em termos de deslocamentos como em termos de esforços, esta última verificação é supérflua dado o comportamento regular do sistema estrutural em causa.

### 3.3.3.4. Estudo paramétrico

O objectivo do estudo paramétrico é avaliar o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar de extremidade no comportamento de estruturas porticadas regulares não contraventadas de betão armado, para um intervalo de esbeltezas e de cargas aplicadas representativo da construção corrente e espectável num futuro próximo. Este objectivo é conseguido por intermédio da variação (i) da carga vertical  $P$  aplicada na extremidade livre do pilar e (ii) da esbelteza simplificada da viga  $L_{be}/h_b$  e dos pilares  $L_{ce}/h_c$  da estrutura arquétipo (§3.3.3.3.1). A carga vertical  $P$  foi definida por intermédio do esforço axial reduzido que esta induz no pilar superior,  $n = P/N_c = P/(A_g f_c')$ , para o qual foi assumido relevante o intervalo [0.1, 0.6] (valores positivos correspondem a compressão). Para as esbeltezas  $L_{be}/h_b$  e  $L_{ce}/h_c$  foram assumidos

os valores discretos {5,10,15} e {5,7.5,10}, respectivamente.

O efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado foi determinado comparando a capacidade de carga e a deformação lateral apresentadas pela estrutura arquétipo em análises geometricamente não lineares com ligações viga-pilar flexíveis (identificadas com o sobrescrito “NRig”) e com ligações viga-pilar rígidas (identificadas com o sobrescrito “Rig”). Assume-se em ambos os casos comportamento materialmente não linear para as vigas e pilares definido pelas relações  $M-\chi$  e  $M-\chi-N$ , respectivamente, e é adoptado para as ligações flexíveis o comportamento  $M_\gamma-\gamma$  obtido experimentalmente por Sarsam [1983] para os espécimes EX1 e EX3.

Para um determinado nível de carga, a solução correspondente a ligações viga-pilar rígidas pode ser vista como uma aproximação da solução mais exacta correspondente a ligações viga-pilar flexíveis, sendo a sua diferença o erro absoluto associado à aproximação. O erro relativo  $\alpha$  foi definido como o quociente entre o erro absoluto e uma solução correspondente a ligações viga-pilar rígidas (§3.3.3.4.1) ou flexíveis (§3.3.3.4.2). Valores elevados de  $|\alpha|$  indicam erros excessivos ao assumir a ligação viga-pilar rígida e significam que esta simplificação não deve ser adoptada na medida em que o efeito da flexibilidade da ligação é muito relevante.

Para avaliar a sensibilidade da estrutura arquétipo aos efeitos de segunda ordem apresenta-se na Tabela 3.5 a esbelteza  $\lambda$  dos pilares para os intervalos de variação de  $n$ ,  $L_{be}/h_b$  e  $L_{ce}/h_c$  definidos anteriormente e para o caso teórico de vigas rígidas ( $L_{be}/h_b = 0$ ).

A esbelteza  $\lambda$  foi calculada de acordo com o §5.8.3.2(3) da NP EN 1992-1-1, assumindo ligações rígidas e ignorando a resistência à tracção do betão aquando do cálculo da relação  $M-\chi$  para as vigas (§5.8.3.3(5) da NP EN 1992-1-1). Adoptou-se para o cálculo de  $\lambda$  a rigidez de flexão secante da viga para uma distribuição linear do momento flector com o valor  $M_{E,b} = M_{R,b}/2$  na extremidade junto ao eixo do pilar. Como simplificação adicional, consistente com a regularidade imposta para a estrutura porticada original (§5.8.3.2(4) da NP EN 1992-1-1), assumiu-se que a carga crítica dos pilares acima e abaixo da ligação é idêntica. Neste caso, de acordo com esta especificação, a rigidez conferida pela viga tem que ser partilhada por ambos os pilares, pelo que na determinação da esbelteza  $\lambda$  de cada um dos pilares, só se pode contabilizar metade da rigidez da viga.

A Figura 3.19 apresenta o valor limite da esbelteza  $\lambda_{min}$  a partir do qual os efeitos de segunda ordem não devem ser desprezados (§5.8.3.1(1) da NP EN 1992-1-1). Comparando os limites de esbelteza da Figura 3.19 com os valores da Tabela 3.5 conclui-se que as estruturas porticadas

Tabela 3.5 – Esbelteza  $\lambda$  dos pilares.

$L_{ce}/h_c$	EX1			EX3		
	5	7.5	10	5	7.5	10
0	17.3	26.0	34.6	17.3	26.0	34.6
$L_{be}/h_b$ 5	25.9	36.4	46.2	23.7	33.8	43.3
10	34.5	47.1	58.2	31.3	43.1	53.7
15	41.4	55.7	68.2	37.3	50.7	62.4

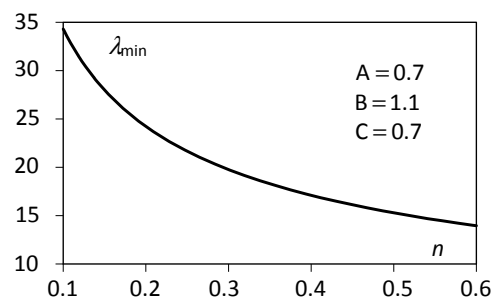


Figura 3.19 – Limite de esbelteza  $\lambda_{min}$  (§5.8.3.1(1) da NP EN 1992-1-1).

de betão armado não contraventadas são muito sensíveis a efeitos de segunda ordem. Em particular, para níveis de esforço axial superiores ao que maximiza a resistência à flexão dos pilares ( $n \approx 0.4$ ) os efeitos de segunda ordem devem ser sempre considerados na análise deste tipo de estruturas. Esta sensibilidade aos efeitos de segunda ordem das estruturas porticadas de betão armado não contraventadas justifica, em parte, o presente estudo.

### 3.3.3.4.1. Efeito da flexibilidade da ligação na carga horizontal máxima

Nesta secção é calculado o valor máximo da força horizontal  $H$  para o qual a estrutura arquétipo apresenta, numa análise geometricamente não linear mantendo fixo o valor da carga vertical  $P$ , uma configuração de equilíbrio. Mais especificamente, avalia-se o modo como varia este valor máximo da carga  $H$  quando é considerada a distorção da ligação,  $H_{\max}^{\text{NRig}}$ , e quando a ligação é assumida rígida,  $H_{\max}^{\text{Rig}}$ .

A Figura 3.20 apresenta a carga horizontal máxima admissível  $H$  assumindo ligações viga-pilar rígidas e flexíveis, com a indicação do valor de  $\mu_{\max} (\times 100)$  e identifica o elemento crítico correspondente (“b” para viga e “j” para ligação viga-pilar).

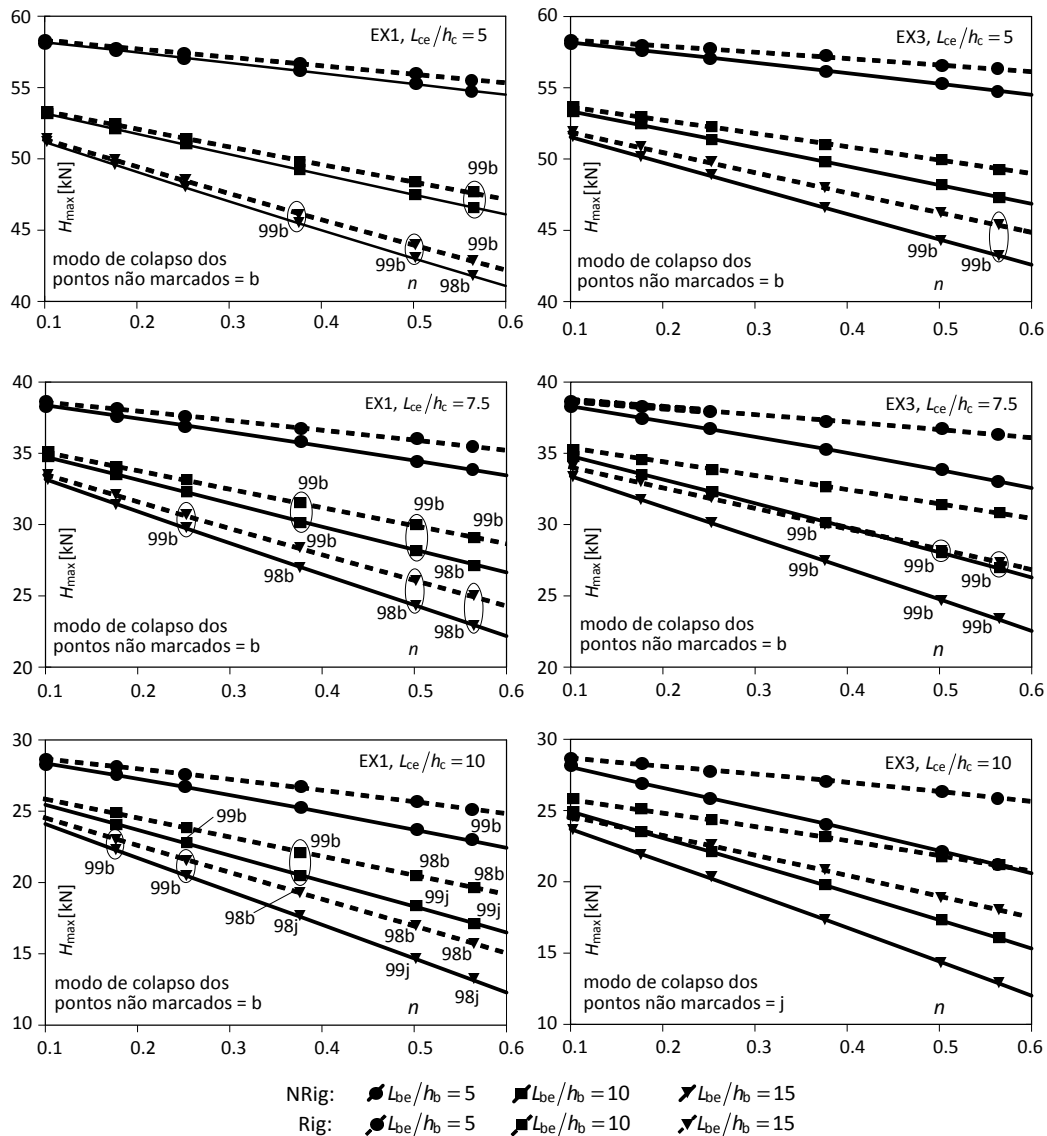


Figura 3.20 – Variação de  $H_{\max}$  com o esforço axial no pilar superior.

Esta figura mostra que a carga horizontal máxima admissível diminui quando (i) aumenta a esbelteza da estrutura, (ii) aumenta a carga vertical  $P$  (ou seja, o esforço axial nos pilares), e (iii) é considerada a flexibilidade da ligação viga-pilar, ou seja,  $H_{\max}^{\text{NRig}} < H_{\max}^{\text{Rig}}$ . Além disso, com o aumento de  $P$ ,  $H_{\max}$  reduz-se quase linearmente e aumenta a diferença absoluta entre  $H_{\max}^{\text{NRig}}$  e  $H_{\max}^{\text{Rig}}$ .

Seja  $\alpha_H$  a redução relativa de  $H_{\max}$  provocada pela deformabilidade da ligação para valores fixos da carga vertical  $P$ , dada pela expressão

$$\alpha_H = \alpha_H [P] = \frac{H_{\max}^{\text{NRig}} - H_{\max}^{\text{Rig}}}{H_{\max}^{\text{Rig}}} \quad (3.21)$$

Na Figura 3.21 está representada a variação do parâmetro  $\alpha_H$  para os espécimes EX1 e EX3 Sarsam [1983] e para os intervalos de variação dos parâmetros referidos anteriormente.

Esta figura confirma que  $\alpha_H$  é sempre negativo, ou seja, a distorção da ligação viga-pilar reduz  $H_{\max}$ . Na figura está assinalado o valor 5% para a redução de capacidade de carga. Se este valor for ultrapassado, de acordo com os critérios adoptados para estruturas metálicas (CEN [1992], Gomes, Kulhmann *et al.* [1998]), a flexibilidade da ligação é relevante, não podendo ser ignorada na análise (§2.2.2.4.2). A Figura 3.21 mostra que a flexibilidade das ligações viga-pilar

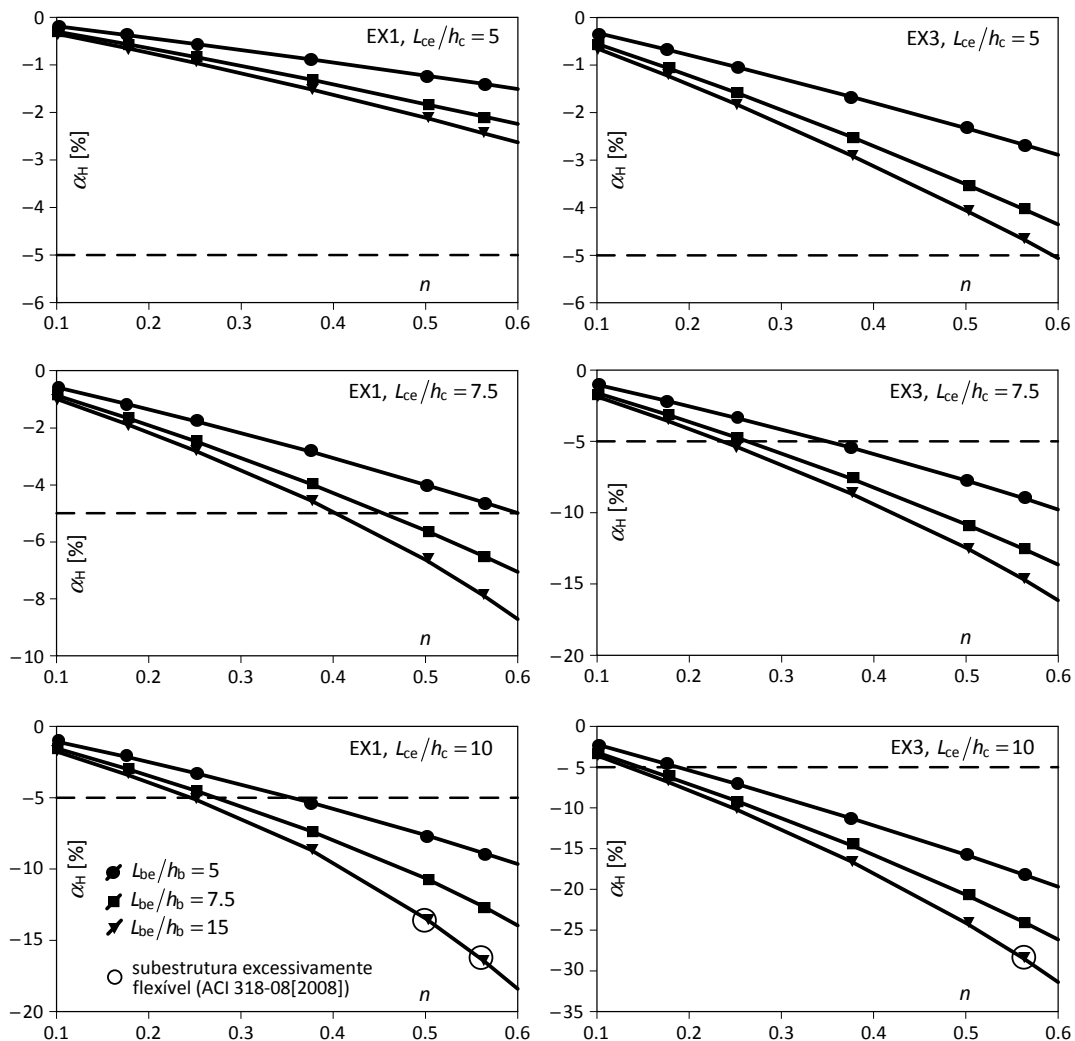


Figura 3.21 – Redução relativa de  $H_{\max}$  associada à distorção da ligação viga-pilar.

é relevante e fornece a evidência objectiva da necessidade (i) de contabilizar a flexibilidade das ligações viga-pilar na análise de algumas estruturas porticadas de betão armado não contraventadas e (ii) de estabelecer um critério simplificado e adaptado a estruturas de betão armado que permita identificar os casos em que a flexibilidade da ligação viga-pilar tem um efeito desprezável sobre o comportamento estrutural.

De facto, muitas das combinações  $(n, L_{ce}/h_c, L_{be}/h_b)$  conduzem a reduções relativas das cargas horizontais máximas admissíveis superiores a 5%. Mais precisamente, de acordo com estes resultados e para o intervalo de esforço axial reduzido considerado

- (i) para  $L_{ce}/h_c \leq 5$  a flexibilidade das ligações viga-pilar pode ser desprezada;
- (ii) para  $L_{ce}/h_c \geq 10$  a flexibilidade das ligações viga-pilar não deve ser desprezada;
- (iii) para valores intermédios de  $L_{ce}/h_c$  a necessidade de considerar na análise a flexibilidade das ligações viga-pilar depende da flexibilidade que estas apresentam, do nível de esforço axial nos pilares e da esbelteza da estrutura.

Na Figura 3.21 estão também indicados os casos em que as subestruturas são excessivamente flexíveis e por isso não são representativos de estruturas correntes (§10.10.2.1 da ACI 318-08). Mesmo ignorando estes casos, a validade das conclusões anteriores permanece inalterada.

A análise apresentada foi efectuada avaliando a redução de  $H_{max}$  provocada pelo efeito da flexibilidade da ligação viga-pilar para valores de  $P$  fixos. Avaliando a redução de  $P_{max}$  devido ao efeito da flexibilidade da ligação viga-pilar mantendo  $H$  fixo, obtiveram-se valores idênticos para a redução relativa da capacidade de carga da estrutura.

#### 3.3.3.4.2. Efeito da flexibilidade da ligação nos deslocamentos transversais

Considere-se agora o efeito da distorção da ligação viga-pilar sobre o deslocamento transversal do ponto de aplicação de cargas da subestrutura,  $d_H$ , que é equivalente ao deslocamento entre pisos numa estrutura completa (*drift*). A Figura 3.22 apresenta os deslocamentos transversais  $d_H$  (i) para os pares de cargas  $(P, H_{max}^{NRig})$  para a análise com ligações viga-pilar rígidas ( $d_H^{Rig}$ ) e flexíveis ( $d_H^{NRig}$ ) e (ii) para os pares de cargas  $(P, H_{max}^{Rig})$  apenas para análises com ligações viga-pilar rígidas, uma vez que  $d_H^{NRig}$  não está definido para  $H_{max}^{Rig}$ , §3.3.3.4.1.

A Figura 3.22 mostra que o deslocamento transversal aumenta com (i) a esbelteza das subestruturas, ou seja com  $L_{ce}/h_c$  e  $L_{be}/h_b$ , e com (ii) a contabilização da flexibilidade da ligação.

Esta figura mostra também que  $d_H^{NRig}$  e  $d_H^{Rig}$  apresentam uma variação pouco significativa com  $P$ . Esta insensibilidade está relacionada com o facto de  $M_{R,b}$  e  $M_{\gamma,max}$  serem independentes de  $P$  e o colapso por instabilidade ocorrer para valores de  $\mu_{max}$  muito próximos na unidade. Este comportamento pode ser facilmente explicado analisando separadamente as duas fontes de deformação consideradas, ou seja, a deformação por flexão das vigas e pilares ( $d_H^f$ ) e a distorção na ligação viga-pilar ( $d_H^y$ ), em que  $d_H = d_H^f + d_H^y$ . Admitindo, por exemplo, que o aspecto condicionante para a capacidade de carga da subestrutura é a resistência à flexão da viga  $M_{R,b}$  (que, recorde-se, não varia com  $P$ ), a distribuição de momentos flectores na subestrutura no colapso não é significativamente alterada com  $P$ .

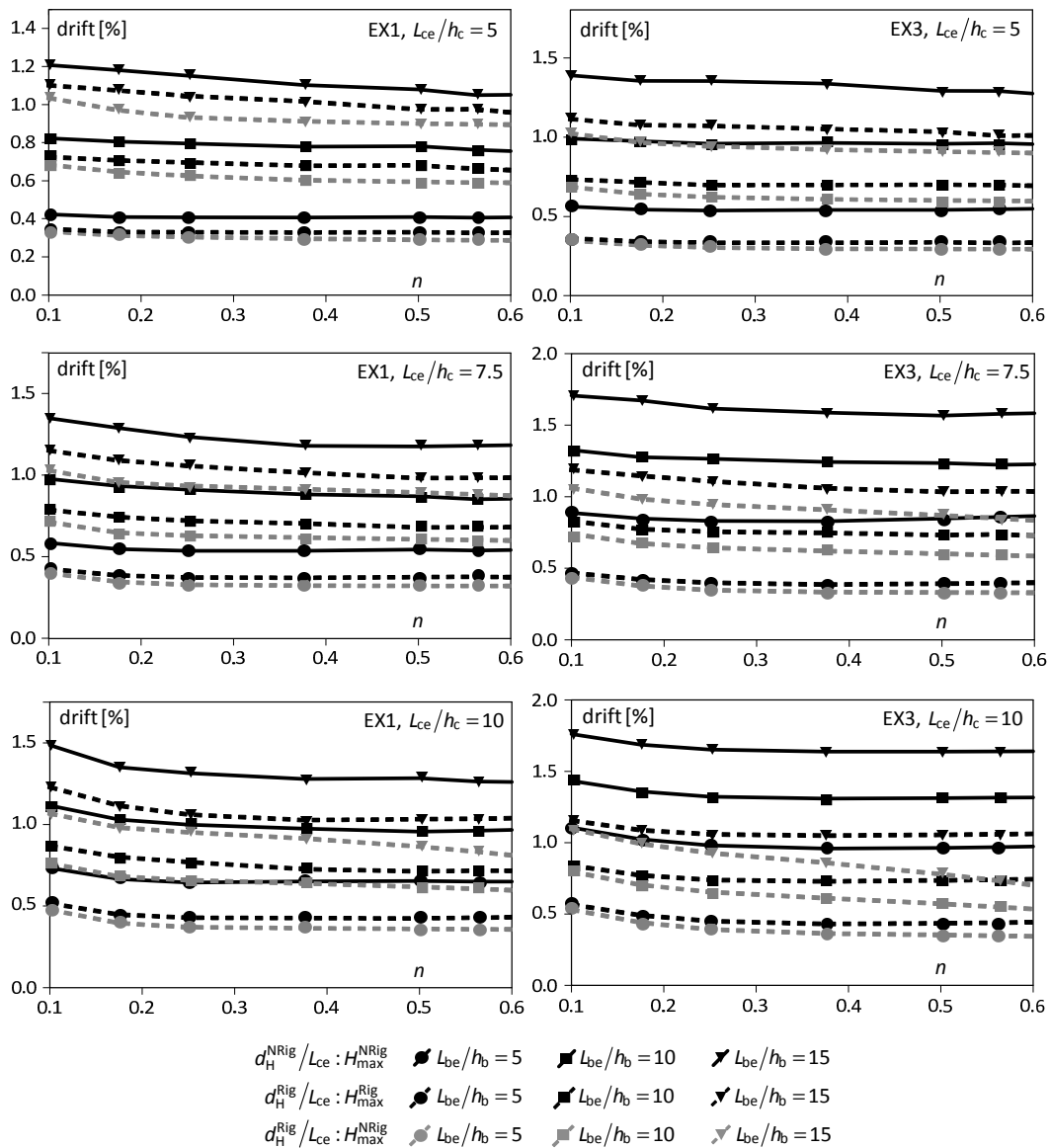


Figura 3.22 – Deslocamento da extremidade livre do pilar superior para  $H = H_{max}$ .

Consequentemente,  $d_H^f$  apenas se reduz ligeiramente com o aumento de  $P$  como consequência do comportamento mais rígido dos pilares na presença de maior esforço axial. Relativamente à invariância de  $d_H^f$  com  $P$  quando  $d_H = d_H^{NRig}$  ou  $d_H = d_H^{Rig}$ , é expectável no caso em que  $M_{\gamma,max}$  é o aspecto condicionante para a capacidade resistente da subestrutura porque se assumiu que a distorção correspondente a  $M_{\gamma,max}$  não varia com  $P$ . Já quando o aspecto condicionante para a capacidade resistente da subestrutura é  $M_{R,b}$ , a invariância  $d_H^f$  com  $P$  quando  $d_H = d_H^{NRig}$  ou  $d_H = d_H^{Rig}$  deve-se ao facto do agravamento da distorção na ligação com o aumento de  $P$  ser pouco significativo para o agravamento de  $d_H$ , pois, para o mesmo  $M_{R,b}$ , quanto maior o  $P$  menor  $H_{max}$  e maior o  $V_{jh}$ , mas como  $M_{R,b}/z_b \gg \Delta H_{max}$ , em que  $\Delta H_{max}$  é a redução de  $H_{max}$  provocada pelo aumento de  $P$ , o agravamento de  $V_{jh}$  com o aumento de  $P$  é pouco significativo para efeitos de variação de  $d_H$ .

Consequentemente, a diferença ( $d_H^{NRig}[H_{max}^{NRig}] - d_H^{Rig}[H_{max}^{Rig}]$ ) também é quase independente de  $P$ . Esta independência justifica a variação quase linear de  $H_{max}$  com  $P$  ilustrada na Figura 3.20, porque o aumento dos momentos flectores devido ao aumento de  $P$  é compensado pela redução da carga  $H_{max}$  de forma a obter-se o mesmo valor para a grandeza condicionante para



efeitos de capacidade de carga ( $M_{R,b}$  ou  $M_{\gamma,max}$ ). Exemplificando para o caso em que o aspecto condicionante para a capacidade de carga da subestrutura é a resistência à flexão da viga  $M_{R,b}$ , o momento flector na extremidade da viga na eminência do colapso é

$$M_{R,b} = C_1 \approx (H_{max} L_{ce} + P d_H) \frac{L_{be}}{L_{be} + 2d_H} \quad (3.22)$$

em que  $C_1$  é uma constante, ou seja

$$H_{max} \approx C_1 \frac{L_{be} + 2d_H}{L_{be} L_c} - P \frac{d_H}{L_{ce}}. \quad (3.23)$$

Como  $d_H$  é aproximadamente constante com  $P$  (Figura 3.22), a expressão (3.23) justifica a evolução aproximadamente linear de  $H_{max}$  com  $P$  observável na Figura 3.20.

A variação relativa do deslocamento transversal da extremidade livre do pilar superior devido à flexibilidade da ligação viga-pilar, para  $H_{max}^{NRig}$  (Figura 3.23) é dada por

$$\alpha_{dH} = \frac{d_H^{NRig} - d_H^{Rig}}{d_H^{NRig}} \quad (\text{para } H_{max}^{NRig}). \quad (3.24)$$

A Figura 3.23 mostra que a variação relativa do *drift* provocada pela flexibilidade da ligação

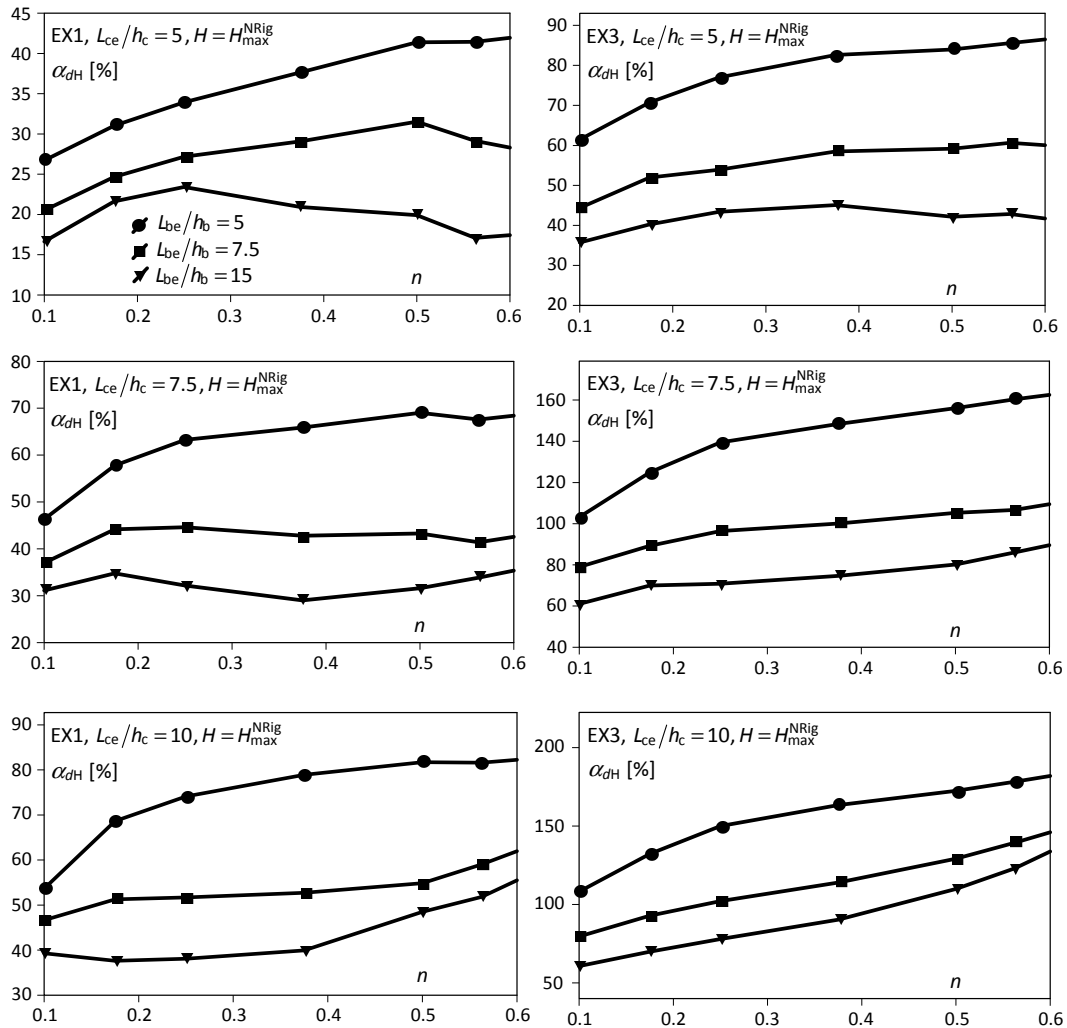


Figura 3.23 – Variação relativa de  $d_H$  provocado pelo efeito da deformabilidade da ligação.

para  $H_{\max}^{\text{NRig}}$  é surpreendentemente alta. Esta elevada variação deve-se ao facto de para  $H = H_{\max}^{\text{NRig}}$  a subestrutura com ligação flexível estar na iminência do colapso e a subestrutura com ligação rígida não.

Esta figura mostra ainda que quanto menos esbelta for a viga, maior é  $\alpha_{dH}$ , ou seja, maior é a relevância da flexibilidade da ligação – o que vai ao encontro da expressão (3.4) proposta na NP EN 1993-1-8. No entanto, a tendência para a variação de  $\alpha_{dH}$  é oposta à verificada para a variação de  $|\alpha_H|$  (Figura 3.21), ou seja, quanto menor  $L_{be}$ , menor  $|\alpha_H|$ . No §3.3.3.4.3 estes resultados são analisados e mostra-se que as tendências opostas não se devem a qualquer particularidade das estruturas de betão armado.

A Figura 3.23 também mostra que  $\alpha_{dH}$ , de uma forma geral, aumenta com  $L_{ce}/h_c$  e  $P$ . No entanto, quando, simultaneamente com o aumento de  $P$ , o tipo de colapso da subestrutura se altera de colapso material para colapso por instabilidade (passagem de  $\mu_{\max} = 1$  para  $\mu_{\max} < 1$  para valores consecutivos de  $n$  na Figura 3.20), constata-se por vezes uma diminuição de  $\alpha_{dH}$ . O motivo para estas tendências opostas é o seguinte: quando a capacidade e carga é condicionada pela resistência à flexão da viga, os deslocamentos  $d_H^{\text{NRig}}$  são muito elevados como consequência do modo de colapso ser dúctil, por cedência das armaduras. Pelo contrário, o colapso por instabilidade, não tira partido da ductilidade por flexão da viga e, conseqüentemente, a diferença ( $d_H^{\text{NRig}} - d_H^{\text{Rig}}$ ) para  $H = H_{\max}^{\text{NRig}}$  é menor. Note-se que em alguns casos, apesar dos valores de  $\mu_{\max}$  não indicarem uma alteração do tipo de colapso, é observável uma diminuição de  $\alpha_{dH}$  com  $P$ . Esta anomalia deve-se à tolerância numérica adoptada para  $\mu_{\max}$  na identificação do tipo de colapso (se  $\mu_{\max} > 99.9\% \rightarrow$  colapso material, §3.3.3.3.3).

Os valores de  $d_H$  apresentados são relativos a cargas próximas do colapso e, por isso, não são comparáveis com os limites referidos no §2.2.2.4.2 para classificação das ligações viga-pilar metálicas quanto à sua rigidez – estes critérios são para estruturas em serviço. Nesta primeira abordagem não é apresentada a análise relativa a condições de serviço, porque o modelo de fibras utilizado não contabiliza o *tension stiffening*. A análise em termos de capacidade de carga é menos afectada por este aspecto porque, na iminência do colapso, o efeito do *tension stiffening* é pouco relevante. No Capítulo 6 este aspecto será retomado.

### 3.3.3.4.3. Justificação das tendências observadas

A avaliação expedita da relevância da flexibilidade das ligações viga-pilar baseada na generalização para estruturas de betão armado do critério simplificado de classificação proposto na NP EN 1993-1-8 (§3.3.2) conduziu à conclusão que a flexibilidade de ligações viga-pilar de betão armado pode ser significativa, e os casos mais relevantes são os correspondentes a vigas menos esbeltas. Esta conclusão é corroborada pela análise dos valores do parâmetro  $\alpha_{dH}$  efectuada no §3.3.3.4.2 (Figura 3.23). No entanto, obteve-se uma tendência oposta a esta no §3.3.3.4.1 para o parâmetro  $\alpha_H$  (Figura 3.21). Sendo os esforços de segunda ordem e, portanto, a redução da capacidade de carga da subestrutura, função dos deslocamentos transversais, estas tendências podem parecer paradoxais. De facto, estas tendências podem coexistir, como se demonstra seguidamente com auxílio de uma análise simplificada da subestrutura representada na Figura 3.17, assumindo comportamento elástico linear dos seus constituintes (viga, pilares e ligação viga-pilar).

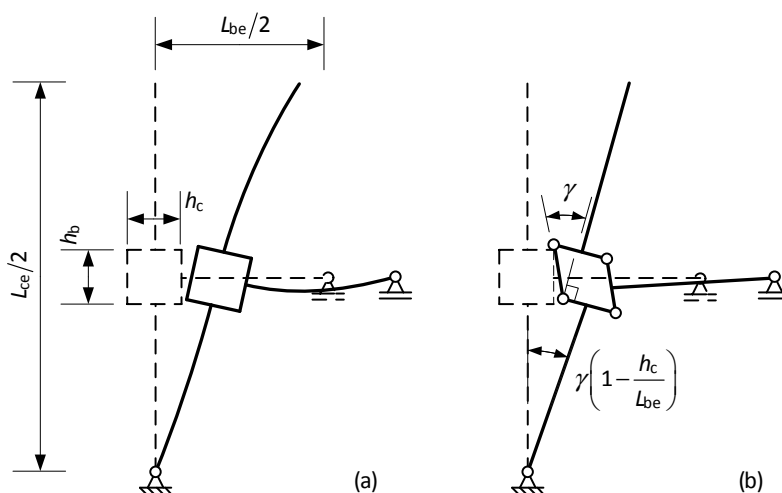


Figura 3.24 – Componentes da deformabilidade da subestrutura representada na Figura 3.17, (a) flexão da viga e dos pilares, (b) distorção da ligação viga-pilar.

Nestas condições, esta subestrutura pode ser concebida como duas componentes com comportamento elástico linear dispostas série: (i) a subestrutura com a ligação rígida (Figura 3.24(a)) e (ii) a subestrutura com a ligação flexível e com viga e pilares rígidos (Figura 3.24(b)).

A flexibilidade da subestrutura associada ao deslocamento horizontal na extremidade livre do pilar é dada, para cada uma destas componentes, pelo valor de  $d_H$  para uma carga  $H = 1$ . Nestas condições, o deslocamento  $d_H$  de primeira ordem assumindo a ligação flexível é

$$d_H^{1st, NRig} = f^{NRig} H = (f_{bend} + f_j) H \quad (3.25)$$

e assumindo a ligação rígida

$$d_H^{1st, Rig} = f^{Rig} H = f_{bend} H \quad (3.26)$$

em que  $f_{bend}$  e  $f_j$  são a flexibilidade ao deslocamento horizontal na extremidade livre do pilar das subestruturas representadas na Figura 3.24(a) e (b), respectivamente.

A Figura 3.24(b) apresenta a configuração deformada da subestrutura assumindo que a viga e os pilares são rígidos, de onde se conclui que

$$d_H = \gamma L_{ce} \left( 1 - \frac{h_c}{L_{be}} - \frac{h_b}{L_{ce}} \right) \quad (3.27)$$

pelo que, de acordo com a dualidade estático-cinemática, a flexibilidade linear para este caso é dada por

$$f_j = \frac{1}{S_j} \left( \frac{d_H}{\gamma} \right)^2 = \frac{L_{ce}^2}{S_j} \left( 1 - \frac{h_c}{L_{be}} - \frac{h_b}{L_{ce}} \right)^2 \quad (3.28)$$

onde  $S_j = M_\gamma / \gamma$  é a rigidez da ligação viga-pilar.

Por outro lado, a flexibilidade da subestrutura representada na Figura 3.24(a) é

$$f_{bend} = \frac{(L_{ce} - h_b)^3}{12EI_c} + \frac{(L_{be} - h_c)L_{ce}^2}{6EI_b} \left( 1 - \frac{h_c}{L_{be}} \right)^2. \quad (3.29)$$

Efectuando uma análise  $P-\Delta$  (Wilson [1999]), em que o efeito de segunda ordem da carga  $P$  é substituído por pares de forças transversais equivalentes dados por

$$H_{eq}^{2nd} = P \frac{d_H^{2nd}}{L_{ce}}, \quad (3.30)$$

o deslocamento horizontal total na extremidade livre do pilar superior, ou seja, incluindo a contribuição de segunda ordem, no caso de a ligação ser flexível é

$$d_H^{2nd, NRig} = f^{NRig} \left( H + H_{eq}^{2nd, NRig} \right) = d_H^{1st, NRig} \left( 1 + \frac{H_{eq}^{2nd, NRig}}{H} \right) \quad (3.31)$$

e, de forma semelhante, assumindo a ligação rígida,

$$d_H^{2nd, Rig} = f^{Rig} \left( H + H_{eq}^{2nd, Rig} \right) = d_H^{1st, Rig} \left( 1 + \frac{H_{eq}^{2nd, Rig}}{H} \right). \quad (3.32)$$

As expressões (3.31) e (3.30) podem ser resolvidas em ordem a  $d_H^{2nd}$ , de onde se obtém

$$d_H^{2nd, NRig} = \frac{H f^{NRig}}{1 - \frac{P f^{NRig}}{L_{ce}}} = \frac{d_H^{1st, NRig}}{1 - \psi^{NRig}} = \beta_{dH}^{NRig} d_H^{1st, NRig} \quad (3.33)$$

em que  $\beta_{dH}^{NRig} = 1/(1 - \psi^{NRig}) > 1$  é um factor de amplificação que incorpora o efeito de segunda ordem e  $\psi^{NRig} = P f^{NRig} / L_{ce}$ . De forma semelhante, mas agora com as expressões (3.32) e (3.30), obtém-se

$$d_H^{2nd, Rig} = \frac{H f^{Rig}}{1 - \frac{P f^{Rig}}{L_{ce}}} = \frac{d_H^{1st, Rig}}{1 - \psi^{Rig}} = \beta_{dH}^{Rig} d_H^{1st, Rig} \quad (3.34)$$

em que  $\beta_{dH}^{Rig} = 1/(1 - \psi^{Rig})$  e  $\psi^{Rig} = P f^{Rig} / L_{ce}$ . Note-se que  $P f^{Rig} \ll L_{ce}$  e consequentemente  $\beta_{dH}^{Rig} > 1$ . Além disso,

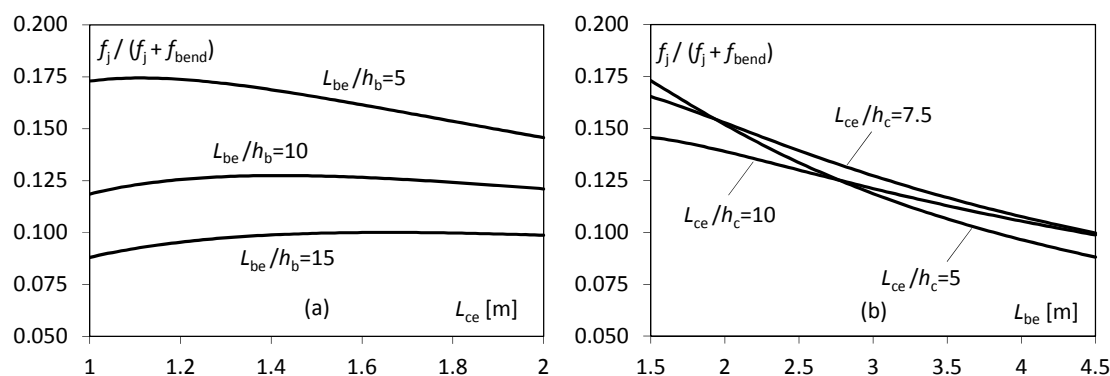
$$\psi = \frac{P f}{L_{ce}} = \frac{P H f}{H L_{ce}} = \frac{1}{H} \frac{P d_H^{1st}}{L_{ce}} = \frac{H_{eq}^{1st}}{H} \quad (3.35)$$

em que  $H_{eq}^{1st}$  é a carga transversal equivalente  $P-\Delta$  calculada a partir dos deslocamentos transversais de primeira ordem, de modo que  $\psi$  corresponde ao parâmetro  $1/\alpha_{cr}$  definido no §5.2.1 da NP EN 1993-1-1 (IPQ [2010b]).

O incremento relativo  $\alpha_{dH}$  pode ser determinado recorrendo às expressões (3.33) e (3.34)

$$\alpha_{dH} = \frac{d_H^{2nd, NRig} - d_H^{2nd, Rig}}{d_H^{2nd, NRig}} = \frac{f_j}{f_{bend} + f_j} \beta_{dH}^{Rig}. \quad (3.36)$$

Esta expressão revela que  $\alpha_{dH}$  resulta do produto de dois factores:  $f_j/(f_{bend} + f_j)$  e  $\beta_{dH}^{Rig}$ .  $\beta_{dH}^{Rig}$  é um factor de segunda ordem que aumenta quando  $L_{ce}$  ou  $L_{be}$  aumentam.  $f_j/(f_{bend} + f_j)$  é um factor de primeira ordem que, de acordo com as definições (3.28) e (3.29), apresenta um sentido de variação que depende da grandeza relativa da rigidez das vigas, pilares e ligação bem como da gama de valores de  $L_{ce}$ ,  $L_{be}$ ,  $h_b$  e  $h_c$  relevantes. Na Figura 3.25 apresenta-se a


 Figura 3.25 – Evolução de  $f_j / (f_j + f_{bend})$  com  $L_{ce}$  (esq.) e  $L_{be}$  (dir.)

evolução de  $f_j / (f_{bend} + f_j)$  para um conjunto de dados representativo das subestruturas analisadas adoptadas no estudo paramétrico. Assumiu-se simplificadamente  $El_b = 0.5(El_b)_0$ ,  $El_c = 0.5(El_c)_0$ ,  $S_j = 30000 \text{ kNm}$ ,  $E = 30 \text{ GPa}$ ,  $h_b = 0.3 \text{ m}$ ,  $h_c = 0.2 \text{ m}$  e  $b_c = b_b = 0.15 \text{ m}$ . Foram novamente considerados os intervalos  $L_{be}/h_b \in [5, 15]$  e  $L_{ce}/h_c \in [5, 10]$ . Fazendo variar os valores da rigidez da viga, pilar e ligação dentro do intervalo que estes parâmetros experimentaram no estudo paramétrico efectuado, não produz um efeito significativo nas curvas apresentadas na Figura 3.25.

As tendências apresentadas na Figura 3.23 podem ser interpretadas com base na análise da expressão (3.36) e da Figura 3.25. Desta análise conclui-se que (i) quando varia  $L_{be}$  o termo dominante é o primeiro (o de primeira ordem), ou seja  $f_j / (f_{bend} + f_j)$ , pelo que para  $L_{ce}$  constante quanto maior for  $L_{be}$  menor será  $\alpha_{dH}$  e (ii) quando varia  $L_{ce}$  o termo dominante na expressão (3.36) é o segundo (o de segunda ordem), ou seja  $\beta_{dH}^{Rig}$ , pelo que para  $L_{be}$  constante, quanto maior for o  $L_{ce}$  também maior será  $\alpha_{dH}$ . Note-se além disso que, para um valor constante do momento na extremidade da viga, um aumento de  $L_{ce}$  conduz, a menos do efeito do agravamento de  $d_H$ , a um agravamento de  $M_\gamma$  devido ao menor valor de  $H$  (expressões (3.22) e (3.11)) e, conseqüentemente, a um aumento de  $f_j$ , se for tido em consideração o comportamento não linear apresentado pelos espécimes EX1 e EX3.

O efeito da flexibilidade da ligação traduz-se num agravamento dos esforços que por sua vez conduz a que a capacidade de carga da estrutura se reduza, sendo esta redução tanto maior quanto maior a amplificação dos esforços. Conseqüentemente, o efeito da flexibilidade da ligação sobre a capacidade de carga da estrutura pode ser avaliado recorrendo à avaliação da amplificação dos esforços em alternativa à avaliação da redução da capacidade de carga. Nesse sentido, considere-se a amplificação do momento flector na extremidade da viga adjacente à ligação definida pelo parâmetro

$$\alpha_M [H, P] = \frac{M_b^{NRig} - M_b^{Rig}}{M_b^{Rig}}. \quad (3.37)$$

O momento na extremidade efectiva da viga é  $M_b = V_b(L_{be} - h_b)/2$  e este esforço é directamente proporcional a  $M_{jb} = V_b L_{be}/2$ , em que  $V_b$  é a reacção vertical na extremidade direita da viga. Conseqüentemente,  $\alpha_M$  pode ser calculado alternativamente por

$$\alpha_M [H, P] = \frac{M_{jb}^{NRig} - M_{jb}^{Rig}}{M_{jb}^{Rig}}. \quad (3.38)$$

Escrevendo as relações de equilíbrio para a configuração deformada da subestrutura, o momento flector na extremidade esquerda da viga é

$$M_{jb}^{2nd} = V_b \frac{L_{be}}{2} = HL_c + Pd_H^{2nd} = M_b^{1st} + Pd_H^{2nd}. \quad (3.39)$$

Introduzindo as expressões (3.33) e (3.34) em (3.39) chega-se às expressões

$$M_{jb}^{NRig} = \frac{HL_{ce}}{1 - \psi^{NRig}} = \beta_M^{NRig} M_{jb}^{1st, NRig} \quad (3.40)$$

e

$$M_{jb}^{Rig} = \frac{HL_{ce}}{1 - \psi^{Rig}} = \beta_M^{Rig} M_{jb}^{1st, Rig} \quad (3.41)$$

de onde também se conclui que  $\beta_M = \beta_{dH}$ , pelo que é desnecessário o índice em subscripto nos factores de amplificação  $\beta$ .

O incremento relativo  $\alpha_M$  pode agora ser calculado recorrendo à expressão

$$\alpha_M = \frac{M_{jb}^{NRig} - M_{jb}^{Rig}}{M_{jb}^{Rig}} = \frac{\psi^{NRig} - \psi^{Rig}}{1 - \psi^{NRig}} = \beta^{NRig} \frac{P f_j}{L_{ce}}. \quad (3.42)$$

Para  $L_{ce}$  constante, de acordo com a definição (3.28), o segundo factor do membro direito da expressão (3.42) aumenta com  $L_{be}$ . Como além disso, para  $L_{ce}$  constante,  $\beta^{NRig}$  também aumenta com  $L_{be}$ , conclui-se que  $\alpha_M$  aumenta com  $L_{be}$ .

Quanto à variação de  $\alpha_M$  com  $L_{ce}$  para  $L_{be}$  constante, como  $f_j$  é proporcional ao quadrado de  $L_{ce}$ , o segundo factor do membro direito da expressão (3.42) aumenta com  $L_{ce}$ . Como  $\beta^{NRig}$  aumenta com  $L_{ce}$ , ambos os factores do termo da direita da expressão (3.42) aumentam com  $L_{ce}$ . Conclui-se, por isso, que  $\alpha_M$  aumenta com  $L_{ce}$ .

### 3.4. Notas finais

Da análise efectuada conclui-se que a não contabilização da dimensão das ligações viga-pilar na análise estrutural de estruturas porticadas de betão armado e o consequente dimensionamento das vigas e pilares com base nos esforços na intersecção dos respectivos eixos, dada a reduzida esbelteza habitual destas estruturas, conduz ao sobredimensionamento das vigas e dos pilares e pode conduzir a modos de colapso não previstos. Consequentemente, a análise rigorosa de estruturas porticadas de betão armado requer a consideração da dimensão das ligações viga-pilar nos modelos de análise e dimensionamento. Note-se no entanto que estas conclusões foram obtidas partindo do pressuposto de que as secções críticas para o dimensionamento das vigas e pilares são as secções da periferia da ligação viga-pilar. Este pressuposto implica que as tensões nas armaduras longitudinais destes elementos que se prolongam para o interior da ligação não sofrem agravamentos relativamente ao valor que apresentam na periferia da ligação (secção crítica) – este aspecto é abordado no Capítulo 4.

A partir da aplicação e adaptação dos critérios simplificados de classificação de ligações viga-

pilar segundo a rigidez propostos na NP EN 1993-1-8 a estruturas porticadas de betão armado, concluiu-se que existem diversas situações em que as ligações viga-pilar devem ser classificadas como semi-rígidas quando incorporadas em estruturas porticadas de betão armado não contraventadas.

Para quantificar o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar sobre o comportamento de estruturas porticadas de betão armado, foi efectuado um estudo paramétrico baseado numa estrutura arquetípica, adoptando resultados experimentais para descrever o comportamento da ligação viga-pilar. Este estudo mostrou que a distorção das ligações viga-pilar de extremidade em estruturas porticadas não contraventadas de betão armado pode ter impacto significativo no comportamento quase-estático a curto prazo, particularmente na sua capacidade de carga, e deve por isso ser contabilizada na análise e dimensionamento deste tipo de estruturas.

Em estruturas metálicas (CEN [1994], Gomes, Kulhmann *et al.* [1998], Faella, Piluso *et al.* [2000], Gomes [2002]) a flexibilidade da ligação é considerada relevante para o comportamento global de uma estrutura quando conduz a uma redução da capacidade de carga superior a 5% (§2.2.2.4.2). Neste estudo simplificado adoptou-se também este critério para estruturas de betão armado.

Considerando primeiro o intervalo de valores de esforço axial que maximiza a resistência à flexão dos pilares,  $n \in [0.2, 0.5]$ , pode-se concluir que (i) para valores reduzidos de  $L_{ce}/h_c$ , ou seja para  $L_{ce}/h_c \leq 5$ , a distorção não tem um impacto relevante no comportamento estrutural, (ii) para valores moderados deste parâmetro, ou seja  $L_{ce}/h_c \approx 7.5$ , a distorção da ligação é relevante, particularmente para ligações mais flexíveis, e (iii) para valores mais elevados de  $L_{ce}/h_c$  a flexibilidade da ligação é particularmente relevante. Para pilares submetidos a elevados níveis de esforço axial,  $n > 0.5$ , a contabilização da flexibilidade da ligação na análise é incontornável e é espectável o colapso por instabilidade das estruturas (ponto limite). Se o esforço axial for baixo, ou seja  $n < 0.2$ , a flexibilidade da ligação só precisa de ser contabilizada na análise de estruturas esbeltas, ou seja com  $L_{ce}/h_c \geq 10$ .

A análise apresentada é bastante geral na medida em que foram considerados para os parâmetros valores num intervalo que cobre as estruturas porticadas não contraventadas correntes e espectáveis num futuro próximo. Como limitação para as conclusões obtidas deve ser apontado que só foi utilizado um conjunto de resultados experimentais pertinentes, ou seja, os resultados apresentados por Sarsam [1983] relativos a ligações viga-pilar de extremidade sem vigas transversais nem laje. Note-se no entanto que, nesta análise – que tem um âmbito exploratório e justifica a análise mais elaborada apresentada nos próximos capítulos – (i) não foram consideradas outras fontes de deformação relevantes para a flexibilidade da ligação viga-pilar, nomeadamente a decorrente do escorregamento das armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior da ligação (ii) nem foi avaliado o impacto da flexibilidade da ligação viga-pilar sobre os estados limite de serviço.

Além dos aspectos já referidos, a modelação adequada da deformabilidade das ligações viga-pilar é importante sempre que for necessário estimar de forma rigorosa o comportamento estrutural. Em particular os métodos de análise sísmica baseados em análises não lineares (*e.g.*, análises *pushover*) requerem uma estimativa rigorosa do comportamento da estrutura

(curva de capacidade) para a qual o comportamento das ligações será certamente relevante.

Por fim, deve ainda salientar-se que a modelação e o dimensionamento de ligações viga-pilar deve revestir-se de particular importância dadas as dificuldades e os custos associados à reparação/reforço destes elementos estruturais. A reparação/reforço de uma ligação viga-pilar é extremamente complexa e dispendiosa em virtude das condições de difícil acesso. Dada a impossibilidade de colocação de armaduras no interior da ligação, a reposição/aumento da resistência tipicamente é feita à custa de um maior confinamento exterior do betão. No entanto, dada a habitual presença de vigas, pilares, lajes e paredes contíguas à ligação, na prática, esta operação torna-se difícil. Desta forma, numa intervenção típica de reconversão/reforço de uma estrutura de betão armado, as vigas e/ou os pilares são reforçados e as ligações ficam como estão (Calvi, Magenes *et al.* [2002]). Assim, a análise estrutural deve excluir a possibilidade de colapso da ligação, o que requer a modelação e verificação explícita da sua capacidade resistente.



---

# Capítulo 4

## Análise dos campos de tensões nas armaduras em ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado

### 4.1. Introdução

Os estudos referidos no Capítulo 2 bem como a análise simplificada efectuada no Capítulo 3 sugerem que (i) ligações viga-pilar inadequadamente dimensionadas podem conduzir ao colapso precoce de estruturas, (ii) a não contabilização da dimensão efectiva das ligações viga-pilar conduz a um sobredimensionamento significativo dos elementos lineares adjacentes e, eventualmente, a um mecanismo de colapso diferente do antecipado numa análise simplificada e (iii) a flexibilidade das ligações viga-pilar pode conduzir a uma deformabilidade excessiva da estrutura em situação de serviço e a uma redução significativa da sua capacidade resistente. Existe, por isso, a necessidade de rigor não só no dimensionamento das ligações viga-pilar tendo em vista assegurar a sua resistência mas também na modelação do seu comportamento de forma a incorporar a sua deformabilidade no modelo de análise global das estruturas. Esta modelação, desejavelmente, deve (i) incorporar os principais mecanismos resistentes e fontes de deformação das ligações viga-pilar, (ii) ter em consideração a dimensão efectiva das ligações viga-pilar e (iii) conduzir a um dimensionamento mais transparente e racional não só das ligações viga-pilar mas também dos elementos lineares adjacentes.

O dimensionamento das vigas e pilares com base nos esforços nas secções junto à intersecção dos seus eixos (modelo implícito de eixos, §2.3.1) conduz a que estes elementos sejam dimensionados para esforços significativamente superiores aos que ocorrem nas respectivas extremidades efectivas (§3.2). Embora não tenham sido encontrados estudos que fundamentem este procedimento, há trabalhos experimentais (§4.2) que relatam um agravamento das extensões nas armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior da ligação por comparação com o seu valor nas secções na periferia. Este agravamento pode

reflectir o campo de tensões efectivo no interior da ligação, com uma forte participação das armaduras no mecanismo resistente da ligação, ou, simplesmente, valores sem significado resultantes da forma como a instrumentação utilizada para monitorizar as extensões nas armaduras foi concebida ou executada.

A utilização de um modelo de ligação viga-pilar (§2.3.2) que considere a dimensão real das ligações viga-pilar conduz a que as vigas e os pilares sejam dimensionados para os valores dos esforços nas suas extremidades efectivas. Consequentemente, é pertinente avaliar se, dimensionando as vigas e pilares com base nestes esforços, a área da secção transversal das armaduras longitudinais é suficiente para resistir às tensões no interior da ligação, ou seja, se nos varões longitudinais o valor absoluto da tensão na periferia da ligação é superior ao valor no seu interior. Esta questão é pertinente na medida em que o eventual conservadorismo dos esforços utilizados no dimensionamento das vigas e pilares recorrendo a um modelo de eixos pode funcionar como factor de segurança para acautelar o eventual agravamento das tensões nas armaduras no interior da ligação.

Neste capítulo, apresenta-se uma análise pormenorizada das tensões nas ligações viga-pilar e nas extremidades dos elementos lineares adjacentes. Mais particularmente, averigua-se se o valor da tensão normal nas armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior da ligação é superior ao que ocorre nas secções na sua periferia. Desta forma, avalia-se se o dimensionamento destas armaduras com base nos esforços nas extremidades efectivas das vigas e pilares pode por em causa a resistência das ligações viga-pilar.

Esta análise é efectuada para diversas tipologias de ligação, pormenorizações de armadura e combinações de esforços instalados na periferia das ligações, correspondentes a acções tanto gravíticas como laterais.

Em estruturas de betão armado, a metodologia usada por excelência para análises similares é a via experimental. No entanto esta abordagem (i) acarreta custos elevados, (ii) apresenta limitações relativamente à dimensão das estruturas a ensaiar, como consequência da grandeza das cargas a aplicar e/ou instalação disponível para realizar o ensaio, e (iii) apenas permite observações pontuais das grandezas em estudo. Além disso, a própria presença da instrumentação pode afectar os valores medidos (*e.g.*, extensão nas armaduras).

De acordo com o §7.11.1 do MC2010 (Fib [2010b]), a simulação numérica pode ser uma alternativa aos ensaios experimentais no que respeita à avaliação da performance estrutural. Além disso, foram recentemente publicados estudos que demonstram que o MEF pode ser utilizado para simular com rigor o comportamento de ligações viga-pilar de betão armado (Eligehausen e Pampanin [2009], Sasmal, Novák *et al.* [2010b], Sagbas, Vecchio *et al.* [2011]).

Tendo em atenção estas considerações, neste estudo adoptou-se o MEF para efectuar a análise das tensões nas armaduras no interior das ligações. Utilizou-se para esse efeito o programa ATENA 3D (*Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis*, Červenka Consulting [2009]).

## 4.2. Resultados experimentais relevantes

Paulay e Priestley [1992], assumindo que as ligações viga-pilar interiores podem ser analisadas

como um prolongamento fictício dos elementos viga e pilar adjacentes, mostraram que a força de tracção nas armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior das ligações é subestimada se só for considerada a flexão. De acordo com estes autores, quando o momento flector nas extremidades efectivas das duas vigas (e, portanto, dos pilares) adjacentes à ligação tem sinal oposto, o elevado valor do esforço de corte no interior da ligação conduz a tensões de tracção nas armaduras longitudinais das vigas e pilares ao longo de toda a da ligação.

A verificação experimental da evolução das tensões no interior da ligação é um procedimento dispendioso, habitualmente efectuado com extensómetros de resistência colados na superfície das armaduras, o que acarreta o risco da eventual alteração dos resultados e conduz a resultados que apresentam sensibilidade relativamente à posição do extensómetro ao longo do perímetro da armadura. Como alternativa, as armaduras podem ser instrumentadas interiormente. No entanto, este procedimento onera ainda mais os ensaios e implica manipulações pouco usuais das armaduras – é necessário rasgar longitudinalmente as armaduras de forma a formar dois semicilindros, remover um volume de aço suficientemente grande para alojar os extensómetros e os fios e, finalmente, voltar a soldar os semicilindros.

Em virtude, talvez, da complexidade destes procedimentos experimentais, os resultados publicados sobre ensaios de ligações viga-pilar quase-estáticos e monotónicos são contraditórios:

- (i) Rungrojsaratis e Ueda [1987] analisaram ligações viga-pilar de cobertura de extremidade e relatam valores da tensão normal nas armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior da ligação claramente superiores aos valores nas secções da periferia;
- (ii) tanto Ortiz [1993], que analisou ligações viga-pilar de extremidade, como Luo, Durrani *et al.* [1994], que estudaram ligações de cobertura de extremidade, relatam casos com valores da tensão nas armaduras longitudinais das vigas (e também dos pilares no segundo caso) no interior da ligação superiores aos valores nas secções da periferia, mas também casos em que tal não se verifica;
- (iii) Baglin e Scott [2000], analisaram ligações viga-pilar de extremidade e relatam valores da tensão normal nas armaduras longitudinais das vigas no interior da ligação superiores aos valores nas secções da periferia, mas com variações abruptas que indiciam efeitos muito localizados;
- (iv) Hegger, Sherif *et al.* [2004] analisaram ligações viga-pilar interiores e de extremidade e relatam valores da tensão normal nas armaduras longitudinais das vigas e dos pilares no interior da ligação sempre inferiores aos valores nas secções da periferia.

### 4.3. O programa ATENA 3D

#### 4.3.1. Selecção do programa informático de análise por elementos finitos

Na selecção do *software* para efectuar a modelação privilegiaram-se (i) os programas que disponibilizam modelos materiais especificamente orientados para a modelação do comportamento do betão – por oposição a modelos materiais genéricos ou desenvolvidos para outro tipo de comportamentos que foram posteriormente adaptados ao betão – e (ii) os

programas já utilizados para estabelecer modelos de regiões de descontinuidade de betão armado (*zonas D*, Schlaich, Schafer *et al.* [1987]) satisfatórios e publicados.

O *software* ATENA 3D (Červenka Consulting [2009]) é o que melhor cumpre os requisitos anteriores na medida em que (i) foi especificamente desenvolvido para modelação de elementos de betão armado e (ii) foram publicadas várias modelações bem-sucedidas de elementos de betão armado efectuadas com este programa ou os seus antecessores (SBETA (Červenka Consulting [2000b]), ATENA 2D (Červenka Consulting [2000a])).

O ATENA 3D tem implementadas relações constitutivas desenvolvidas para modelar betão que conjugam a teoria da plasticidade com a teoria da fractura, permite utilizar modelos de fendas fixas, rotacionais ou múltiplas e possibilita a modelação da armadura e da aderência aço-betão de forma discreta. Por outro lado, não possibilita a modelação da flexão das armaduras nem o efeito de ferrolho nas fendas.

Como exemplos de estudos relevantes para o comportamento de ligações viga-pilar de betão armado efectuados com o apoio do ATENA 3D, ou dum dos seus antecessores, podem-se referir:

- (i) SBETA – Hamil [2000], Baglin e Scott [2000];
- (ii) ATENA 2D – Roeser [2002], Hegger, Sherif *et al.* [2004], Li [2003];
- (iii) ATENA 3D – Sasmal [2009]; Sasmal, Novák *et al.* [2010b]; Sasmal, Novák *et al.* [2010a], Ibrahim [2011].

O ATENA 3D disponibiliza diversos modelos materiais. Em seguida apresentam-se sumariamente os modelos materiais recomendados nos manuais de utilizador (Červenka, Jendele *et al.* [2010], Červenka e Jendele [2009] e Červenka e Červenka [2006]) para uma análise 3D materialmente não linear, que foram posteriormente adoptados neste estudo, bem como os tipos de elementos finitos, a dimensão dos elementos nas malhas e os métodos usados para resolução dos sistemas de equações não lineares.

## 4.3.2. Modelos constitutivos

### 4.3.2.1. Betão

O modelo material recomendado para o betão para análises 3D é o *CC3NonLinCementitious2* (Červenka e Červenka [2010]) que combina um modelo de plasticidade não associada e um modelo de fractura. À semelhança da abordagem proposta por Borst [1986], os modelos implementados no ATENA 3D baseiam-se na decomposição das extensões totais em extensões elásticas ( $\epsilon^e$ ), extensões plásticas ( $\epsilon^p$ ) e extensões de fractura ( $\epsilon^f$ )

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p + \epsilon^f. \quad (4.1)$$

Cada novo estado de tensão é determinado incrementalmente pela forma

$$\sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijkl} \left( \Delta \epsilon_{kl} - \Delta \epsilon_{kl}^p - \Delta \epsilon_{kl}^f \right) \quad (4.2)$$

em que  $\Delta \epsilon_{kl}$  é uma componente do tensor das extensões,  $\Delta \epsilon_{kl}^p$  e  $\Delta \epsilon_{kl}^f$  são componentes dos tensores das extensões plásticas e de fractura, respectivamente, obtidas com base nos

modelos materiais correspondentes,  $E_{ijkl}$  é uma componente do tensor de elasticidade instantâneo do betão e  $\sigma_{ij}$  é uma componente do tensor das tensões.

O modelo para a plasticidade utiliza a formulação da teoria da plasticidade clássica (Lubliner [2006]), e o modelo para a fractura generaliza esta formulação definindo grandezas análogas às adoptadas para a plasticidade. Assim o incremento de deformação segundo cada um dos modelos é dado por

(i) plasticidade

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda^p \frac{\partial G^p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.3)$$

(ii) fractura

$$\Delta \varepsilon_{ij}^f = \Delta \lambda^f \frac{\partial G^f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.4)$$

onde  $\Delta \lambda^p$  é o incremento do multiplicador plástico,  $G^p$  é a função potencial plástico, e analogamente,  $\Delta \lambda^f$  é o incremento do multiplicador de fractura e  $G^f$  é a função que define a direcção das extensões de fractura.

Os modelos de plasticidade e fractura são implementados com algoritmos de *return mapping* (Bonet e Wood [2008]).

#### 4.3.2.1.1. Modelo de fractura para fendilhação

Para a fractura é usado o modelo de fendas distribuídas e ortogonais baseado no critério de cedência de *Rankine* expresso por

$$F_k^f = \sigma_{kk}^{rt} - f_{t,k} \leq 0 \quad (4.5)$$

onde  $f_{t,k}$  é a resistência à tracção corrente do betão na direcção  $k$  e  $\sigma_{kk}^{rt}$  é uma estimativa elástica da tensão normal no betão na direcção  $k$ , sendo as componentes do tensor das tensões dadas por

$$\sigma_{ij}^{rt} = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijmn} \Delta \varepsilon'_{mn} \quad (4.6)$$

indicando a plica as direcções de ortotropia  $k$  do material (o traço sobre índices repetidos suspende a convenção de Einstein para a denotação implícita de somatório), que correspondem às direcções principais do estado de tensão, caso se adopte um modelo de fendas rotacionais, ou às direcções principais do estado de tensão no início da fendilhação, caso se adopte um modelo de fendas fixas. Este critério pode ser representado no espaço das tensões principais por três planos ortogonais, Figura 4.1(a).

Caso não seja respeitado o critério de rotura de *Rankine*, expressão (4.5), ocorrem extensões de fractura e a estimativa elástica tem que ser corrigida. Sendo  $\Delta \varepsilon'_{ij} = \Delta \varepsilon'_{ij}^e + \Delta \varepsilon'_{ij}^f$ , o estado de tensão corrigido é

$$\sigma_{ij}^{rn} = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijmn} (\Delta \varepsilon'_{mn} - \Delta \varepsilon'_{mn}^f) = \sigma_{ij}^{rt} - E_{ijmn} \Delta \varepsilon'_{mn}^f \quad (4.7)$$

e a extensão de fractura pode ser obtida impondo a condição (4.5)

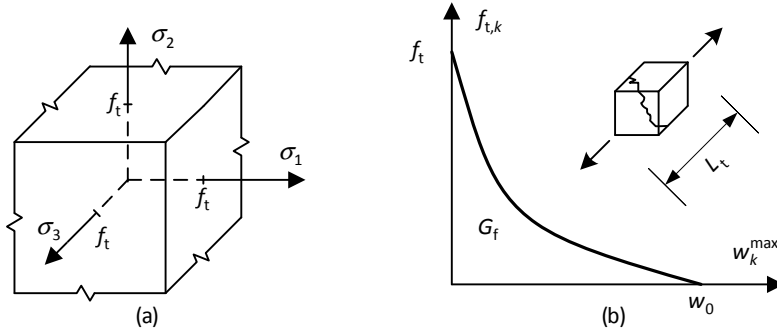


Figura 4.1 – Modelo de comportamento para betão em tracção: (a) critério de cedência de *Rankine*, (b) comprimento característico e resistência à tracção corrente (Červenka e Papanikolaou [2008]).

$$F_k^f = 0 \rightarrow \sigma_{kk}^{\prime n} - f_{t,k} = 0 \rightarrow \sigma_{kk}^{\prime t} - E_{kkmn} \Delta \varepsilon_{mn}^f - f_{t,k} = 0. \quad (4.8)$$

Assumindo que o incremento de deformação de fractura é normal à superfície de rotura ( $F^f \equiv G^f$ ), para cada superfície, verificada à vez, o incremento de extensão de fractura é

$$\Delta \varepsilon_{mn}^{f,k} = \Delta \lambda^{f,k} \frac{\partial F_k^f}{\partial \sigma_{mn}} = \Delta \lambda^{f,k} \delta_{m\bar{k}} \delta_{n\bar{k}} \quad (4.9)$$

em que  $\delta$  é o delta de *Kronecker*. Substituindo (4.9) em (4.8) e resolvendo em ordem a  $\Delta \lambda^{f,k}$ , obtém-se

$$\Delta \lambda^{f,k} = \frac{\sigma_{kk}^{\prime t} - f_{t,k}}{E_{kkkk}}. \quad (4.10)$$

Nas expressões anteriores,  $f_{t,k}$  é função da abertura máxima ( $w_k^{\max}$ ) que a fenda ortogonal à direcção  $k$  já experimentou. No contexto da nomenclatura habitualmente adoptada para a teoria da plasticidade, a superfície de cedência vai sofrer amaciamento, sendo a lei de amaciamento para a direcção  $k$  expressa por

$$f_{t,k} = f_t \left[ w_k^{\max} \right] \quad (4.11)$$

com

$$w_k^{\max} = L_t \left( \hat{\varepsilon}_{kk}^{\prime f} + \Delta \lambda^{f,k} \right) \quad (4.12)$$

em que  $\hat{\varepsilon}_{kk}^{\prime f}$  é a extensão máxima de fractura já experimentada na direcção  $k$ ,  $\Delta \lambda^{f,k}$  é o incremento actual dessa extensão e  $L_t$  é comprimento característico (Bažant e Oh [1983]), ao longo do qual devem ser integradas as extensões para obter a abertura da fenda de forma a garantir a objectividade do modelo face à localização das deformações. No modelo implementado no ATENA 3D,  $L_t$  é definido pela projecção do elemento finito na direcção  $k$ , Figura 4.1(b).

No ATENA 3D é adoptada a relação  $f_{t,k} - w_k^{\max}$  proposta por Hordijk [1991]

$$\frac{f_{t,k}}{f_t} = \left[ 1 + \left( c_1 \frac{w_k^{\max}}{w_0} \right)^3 \right] e^{-c_2 \frac{w_k^{\max}}{w_0}} - \frac{w_k^{\max}}{w_0} (1 + c_1^3) e^{-c_2}, \quad w_0 = 5,14 \frac{G_f}{f_t} \quad (4.13)$$

onde  $f_t$  é a resistência à tracção efectiva do betão,  $c_1 = 3$ ,  $c_2 = 6,93$ ,  $w_0$  é a abertura da fenda correspondente ao anulamento da tensão  $f_{t,k}$  e  $G_f$  é a energia da fractura.

No modelo de fractura do *CC3NonLinCementitious2* do ATENA 3D é assumida descarga-recarga secante e inexistência de interacção entre as componentes normal e de corte. Desta forma, as componentes do tensor de quarta ordem  $E_{ijkl}^{cr}$  que relaciona os tensores de tensões e extensões de fractura, num referencial associado às direcções de ortotropia do material, são dadas por

$$E_{kkkk}^{cr} = \frac{f_t [w_k^{\max}]}{\hat{\epsilon}_{kk}^f} \quad (4.14)$$

para o modo I e por

$$E_{ijij}^f = s_f \min(E_{iiii}^{cr}, E_{jjjj}^{cr}) \quad \text{com } i \neq j \quad (4.15)$$

para os modos II e III (modelos de fendas fixas), em que o quociente entre a rigidez normal e de corte das fendas  $s_f$  assume por defeito o valor 20 no ATENA 3D. A resistência ao corte nas fendas é determinada recorrendo à *Modified Compression Field Theory* (Vecchio e Collins [1986]). As restantes componentes são todas nulas, ou seja

$$E_{ijkl}^{cr} = 0 \quad \text{para } i \neq k \text{ ou } j \neq l. \quad (4.16)$$

#### 4.3.2.1.2. Modelo de plasticidade para o esmagamento do betão

Tal como no modelo de fractura, em cada passo a tensão no novo estado é estimada assumindo comportamento elástico linear

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijmn} \Delta \epsilon_{mn}. \quad (4.17)$$

Caso esta estimativa para o estado de tensão viole o critério de cedência expresso pela condição  $F^p \leq 0$ , ocorreram deformações plásticas e o estado de tensão tem que ser corrigido decompondo a extensão total numa parcela elástica e numa parcela plástica, ou seja,  $\Delta \epsilon_{mn} = \Delta \epsilon_{mn}^e + \Delta \epsilon_{mn}^p$ , de onde resulta

$$\sigma_{ij}^n = \sigma_{ij}^{n-1} + E_{ijmn} (\Delta \epsilon_{mn} - \Delta \epsilon_{mn}^p) = \sigma_{ij}^t - E_{ijmn} \Delta \epsilon_{mn}^p = \sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^p \quad (4.18)$$

em que  $\sigma_{ij}^p$  é o corrector plástico.

As componentes da deformação plástica são dadas por

$$\Delta \epsilon_{mn}^p = \Delta \lambda^p \frac{\partial G^p}{\partial \sigma_{mn}} \quad (4.19)$$

pelo que impondo que o novo estado de tensão esteja sobre a superfície de cedência, obtém-se a equação

$$F^p [\sigma_{ij}^t - \sigma_{ij}^p] = F^p [\sigma_{ij}^t - \Delta \lambda^p l_{ij}^p] \quad (4.20)$$

em que  $l_{ij}^p$  é a direcção de retorno plástico definida por

$$l_{ij}^p = E_{ijmn} \frac{\partial G^p [\sigma_{ij}^t]}{\partial \sigma_{mn}}. \quad (4.21)$$

As derivadas parciais da função potencial plástico  $G^p$  são calculadas para o estado de tensão  $\sigma_{ij}^t$

e não para o estado de tensão correspondente à fronteira da zona de comportamento elástico.

O escoamento é não associado e a função potencial plástico adoptada no ATENA 3D é

$$G^p = \beta \frac{l_1}{\sqrt{3}} + \sqrt{2l_2} = \beta \xi + \rho \quad (4.22)$$

em que  $\xi$  e  $\rho$  são invariantes do estado de tensão definidos por

$$\xi = \frac{l_1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \rho = \sqrt{2l_2} \quad (4.23)$$

sendo  $l_1$  o primeiro invariante do estado de tensão e  $l_2$  é o segundo invariante da componente desviatória do estado de tensão. Na Figura 4.2 está ilustrado, no plano  $\xi$ - $\rho$ , a forma como o parâmetro  $\beta$  define a direcção do retorno

Definindo a *variação da extensão volumétrica plástica* como  $\Delta \varepsilon_v^p = \Delta \varepsilon_{ii}^p = \Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{yy}^p + \Delta \varepsilon_{zz}^p$ , obtém-se da expressão (4.19)

$$\Delta \varepsilon_v^p = \Delta \lambda^p \sqrt{3} \beta. \quad (4.24)$$

Como por definição  $\Delta \lambda^p \geq 0$ , caso  $\beta < 0$  o material está a ser compactado quando esmaga, caso  $\beta = 0$  o volume do material é preservado e caso  $\beta > 0$  o material dilata. Por defeito, no modelo *CC3NonLinCementitious2* assume-se  $\beta = 0$ .

A superfície de cedência adoptada no modelo *CC3NonLinCementitious2* é a proposta por Menétrey e William [1995]. Trata-se de uma superfície de cedência para materiais com comportamento isotrópico, convexa no espaço das tensões principais, caracterizada por dois meridianos parabólicos e por um traço no plano desviatório que evolui de uma forma triangular para uma forma circular com o aumento do confinamento, que pode ser apresentada na forma

$$F^p[\xi, \rho, \theta] = \left( \sqrt{1.5} \frac{\rho}{f'_c} \right)^2 + m \left( \frac{\rho}{\sqrt{6} f'_c} r[\theta, e] + \frac{\xi}{\sqrt{3} f'_c} \right) - c = 0 \quad (4.25)$$

com

$$m = 3 \frac{f'_c{}^2 - f_t}{f'_c{}^2 f_t} \frac{e}{e+1}, \quad (4.26)$$

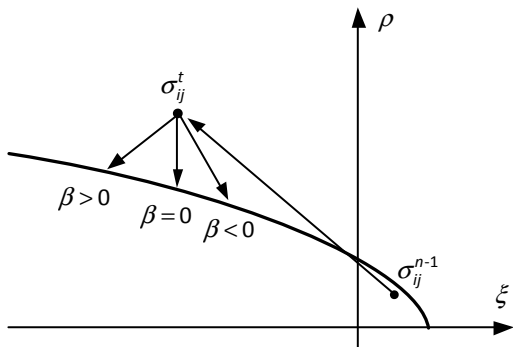


Figura 4.2 – Superfície de cedência e direcção de retorno plástico.

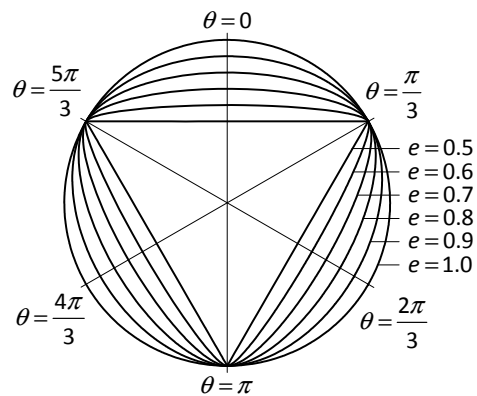


Figura 4.3 – Função  $1/r(\theta, e)$  para  $1.0 \geq e \geq 0.5$ .



$$r[\theta, e] = \frac{4(1-e^2)(\cos\theta)^2 + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos\theta + (2e-1)\left[4(1-e^2)(\cos\theta)^2 + 5e^2 - 4e\right]^{1/2}} \quad (4.27)$$

e

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{I'_3}{I'_2{}^{3/2}}, \quad (4.28)$$

em que  $c$  é um parâmetro de endurecimento denominado coesão (assume o valor 1 quando o material atinge a tensão máxima a que resiste, ou seja, na superfície de rotura),  $m$  é o atrito interno,  $f'_c$  a resistência à compressão uniaxial,  $f'_t$  a resistência à tracção uniaxial,  $e$  é um parâmetro denominado *excentricidade* que, por intermédio da função  $r$ , define o grau de semelhança da secção no plano desviatório relativamente a uma circunferência, Figura 4.3, e  $I'_3$  é o terceiro invariante da componente desviatória do estado de tensão. A expressão (4.27) só está definida para o intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi/3$  sendo que para a restante gama de valores de  $\theta$  é usada a simetria em relação aos eixos representados.

Para que a superfície de cedência seja convexa e suave, o parâmetro excentricidade tem que estar no intervalo  $1.0 \geq e > 0.5$ , em que o limite superior corresponde a um traço circular no plano desviatório e o limite inferior corresponde a um traço triangular.

A influência da excentricidade está representada na Figura 4.4 onde se têm os traços em vários planos desviatórios para diferentes excentricidades e para diferentes valores de confinamento. A partir desta figura confirma-se que o traço é tanto mais arredondado quanto maior a excentricidade e quanto maior o confinamento.

De acordo com Menétrey e William [1995], o valor da excentricidade que melhor se ajusta aos resultados experimentais do betão é  $e = 0.52$  para estados planos de tensão e  $e = 0.6$  para estados triaxiais de tensão.

Na formulação implementada no ATENA 3D, a posição da superfície de cedência definida pela expressão (4.25) movimenta-se a partir do instante em que ocorrem deformações plásticas, de forma a modelar o endurecimento e/ou o amaciamento. O endurecimento/amaciamento do material é função da extensão plástica equivalente cuja variação é

$$\Delta \varepsilon_{\text{eq}}^p = \min(\Delta \varepsilon_{ij}^p). \quad (4.29)$$

$$A: \zeta = f'_t/\sqrt{3}, \quad B: \zeta = -f'_c/\sqrt{3}, \quad C: \zeta = -\sqrt{3}f'_c$$

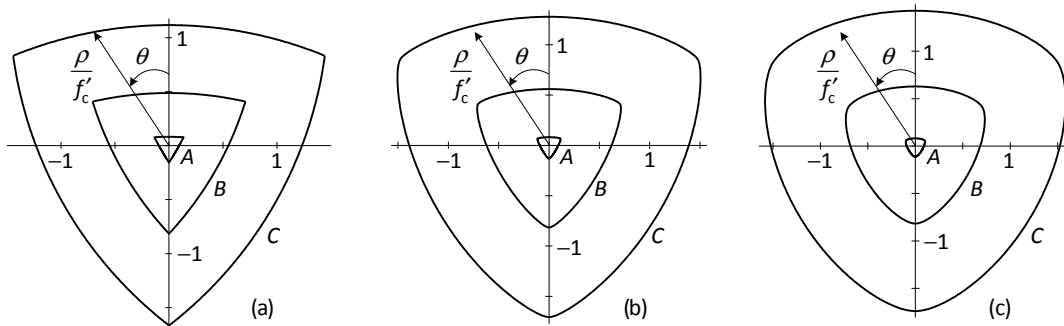


Figura 4.4 – Traços da superfície definida pela expressão (4.25) no plano desviatório para  $f'_t = f'_c/10$ : (a)  $e = 0.5$ , (b)  $e = 0.6$ , (c)  $e = 0.7$ .

O parâmetro de endurecimento  $c$  evolui com a deformação plástica equivalente segundo a expressão

$$c = \left( \frac{\sigma[\varepsilon_{ep}^p]}{f'_c} \right). \quad (4.30)$$

A lei de endurecimento  $\sigma[\varepsilon_{ep}^p]$  é baseada em ensaios de compressão uniaxial. Na fase de endurecimento  $\sigma$  admite-se ser uma função elíptica de  $\varepsilon_{ep}^p$  dada por (Figura 4.5(a))

$$\sigma[\varepsilon_{eq}^p] = \sigma_{c0} + (f'_c - \sigma_{c0}) \sqrt{1 - \left( \frac{\varepsilon_c^p - \varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_c^p} \right)^2} \quad (4.31)$$

sendo  $\sigma_{c0}$  a tensão correspondente ao início da deformação plástica e  $\varepsilon_c^p$  a extensão plástica equivalente correspondente à resistência à compressão uniaxial do betão, ou seja, à envolvente de rotura. Por defeito, no ATENA 3D são propostos os seguintes valores

$$\sigma_{c0} = 2 f_t, \quad \varepsilon_c^p = \frac{f'_c}{E} \quad (4.32)$$

Na fase de amaciamento é adoptada uma relação tensão-extensão não local por forma a garantir a objectividade, Figura 4.5(b). É adoptada uma relação tensão-encurtamento baseada nas observações reportadas por Van Mier [1986]. De acordo com este autor, o betão em compressão uniaxial apresenta localização das deformações, sendo, no entanto, a energia de fractura constante, independentemente da altura do espécime. Van Mier [1986] constatou experimentalmente que eliminando o efeito do atrito nas faces dos elementos de betão, os espécimes de alturas diferentes (50 mm, 100 mm, 200 mm) apresentam relações tensão-extensão diferentes em compressão uniaxial na fase de amaciamento mas apresentam relações tensão-encurtamento e capacidades resistentes iguais. A localização em compressão é um fenómeno que apesar de constatado experimentalmente em ensaios de compressão uniaxial apresenta características diferentes da localização em tracção: em compressão a localização dá-se ao longo de fendas oblíquas em relação à direcção de aplicação de carga cuja inclinação depende das condições fronteira.

O modelo material *CC3NonLinCementitious2* assume por defeito o encurtamento correspondente à anulação da tensão  $w_d = 0.5\text{mm}$  (valor médio obtido por Van Mier [1986] nos ensaios de compressão uniaxial). A relação tensão-encurtamento é transformada numa relação tensão-extensão por intermédio do parâmetro  $L_c$  análogo à largura de banda de

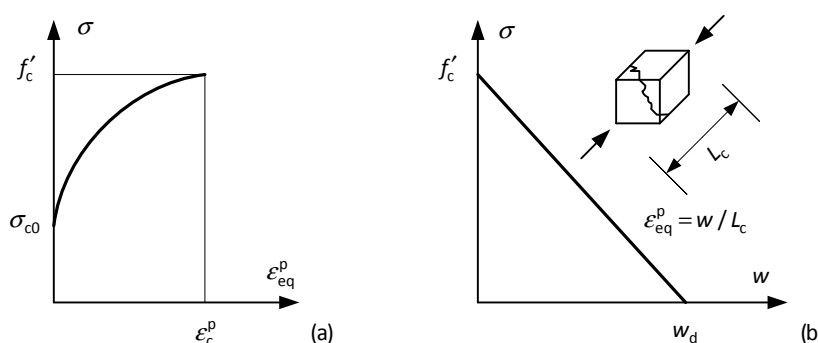


Figura 4.5 – Evolução de  $\sigma$  com a extensão plástica equivalente (Červenka, Jendele *et al.* [2010]), (a) endurecimento, (b) amaciamento.

fendas definido para o comportamento em tracção (comprimento característico  $L_t$ ).

O ATENA 3D simula o efeito da fendilhação na resistência à compressão do betão, utilizando a expressão proposta por Vecchio e Collins [1986] em que a resistência à compressão uniaxial do betão ( $f'_c$ ) é minorada recorrendo ao factor

$$r_c = \frac{1}{0.8 + 170 \varepsilon_1}, \quad r_c^{\text{lim}} \leq r_c \leq 1 \quad (4.33)$$

onde  $\varepsilon_1$  é a extensão principal máxima e, por defeito,  $r_c^{\text{lim}} = 0.2$ .

Para modelar o facto do esmagamento do betão numa direcção conduzir à redução da capacidade resistente à tracção das outras direcções, o algoritmo utilizado para combinar os dois modelos (fractura e plasticidade) reduz a resistência à tracção corrente nas direcções de ortotropia aumentando o dano por imposição da condição

$$\varepsilon_{kk}^{rf} \geq \frac{f_{t,k}}{f'_c} \varepsilon_{eq}^p. \quad (4.34)$$

#### 4.3.2.2. Armaduras

O ATENA 3D permite modelar as armaduras de forma (i) discreta, em que as armaduras são modeladas individualmente com o elemento finito barra biarticulada, e (ii) distribuída, em que as armaduras são modeladas como uma componente de um material compósito numa ou mais camadas. Ambas as abordagens assumem um estado de tensão uniaxial uniforme nas armaduras, não possibilitando a modelação da flexão nos varões.

O modelo distribuído das armaduras está vocacionado para elementos com distribuição uniforme de armaduras e variação suave do campo de tensões, habitualmente designados de *zonas B* em estruturas reticuladas (Schlaich, Schafer *et al.* [1987]).

A modelação discreta visa captar a influência de varões individuais ou geometrias particulares de armaduras no comportamento de elementos estruturais. É uma abordagem adequada a zonas de descontinuidade estrutural, ou seja, *zonas D* das estruturas reticuladas (Schlaich, Schafer *et al.* [1987]), como por exemplo ligações viga-pilar.

No ATENA 3D as armaduras discretas são modeladas de forma independente dos elementos sólidos envolventes e a malha de EF para cada varão é definida pelos pontos onde o seu eixo muda de direcção ou intersecta a fronteira dos elementos sólidos envolventes.

Estão disponíveis os seguintes modelos materiais para armaduras: (i) elástico linear, (ii) bilinear, (iii) tetralinear (fase elástica linear, patamar de cedência, endurecimento e segundo patamar) e (iv) modelo não linear vocacionado para acções cíclicas desenvolvido com base no modelo proposto por Menegotto e Pinto [1973]. Com excepção do modelo (iv), a descarga é sempre assumida paralela ao troço elástico inicial.

#### 4.3.2.3. Aderência aço-betão

A modelação rigorosa do escorregamento entre o betão e as armaduras requer uma modelação 3D da interface entre o betão e as armaduras e modelos de comportamento não

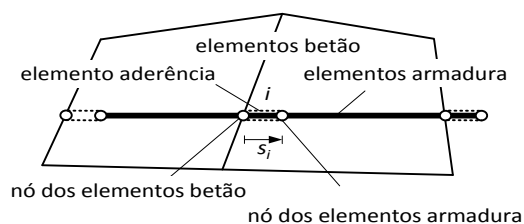


Figura 4.6 – Movimento relativo das armaduras e do betão envolvente (Červenka, Červenka *et al.* [2003]).

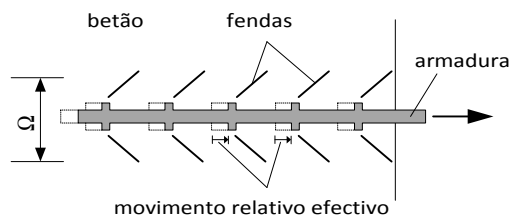


Figura 4.7 – Componentes do escorregamento identificável a nível macroscópico.

linear para o betão, armaduras e atrito/aderência (Lundgren [1999]). Só desta forma é possível ter em consideração o efeito do estado triaxial de tensão no betão bem como a geometria efectiva da superfície das armaduras. No entanto, esta abordagem exige um elevado esforço computacional, que só se coaduna com a modelação de pequenos troços de armaduras, e malhas de elementos finitos cuja dimensão característica é muito inferior à dimensão dos agregados, e cuja utilização é discutível no contexto da modelação de um material heterogéneo recorrendo a um modelo de material homogéneo.

O escorregamento das armaduras pode ser contabilizado de forma simplificada recorrendo à modelação das armaduras da forma discreta, tal como é proposto no ATENA 3D, considerando um grau de liberdade adicional  $s$  nos nós das armaduras, para descrever o seu movimento axial relativamente ao betão envolvente, Figura 4.6. Este procedimento corresponde a considerar uma duplicação dos nós (nós de elementos betão e nós de elementos armadura) relativamente à situação de *aderência perfeita* e à introdução de um elemento adicional, o elemento aderência, cujo comportamento é definido pela relação entre a tensão de aderência e o escorregamento.

Como esta abordagem simplificada não considera de forma directa o efeito do confinamento do betão, porque ignora a componente radial das forças aplicadas nas armaduras, deve ser utilizada uma relação tensão de aderência-escorregamento que reflecta o confinamento espectável.

De acordo com Jendele e Červenka [2006], o escorregamento das armaduras em relação ao betão, identificável a nível macroscópico, é o resultado de dois efeitos:

- (i) esmagamento e fendilhação do betão na zona envolvente da armadura (deformação local do betão), danificado devido à aderência, zona  $\Omega$ , Figura 4.7;
- (ii) movimento relativo efectivo entre as armaduras e o betão envolvente que, no caso de armaduras nervuradas, também envolve esmagamento localizado do betão adjacente às nervuras, Figura 4.7.

A parcela (i) do escorregamento tem origem no meio sólido (betão) envolvente das armaduras enquanto a parcela (ii) ocorre na interface entre as armaduras e o betão.

De acordo com Jendele e Červenka [2006] o resultado conjunto de ambos os efeitos pode ser razoavelmente simulado sem que seja necessário incorporar no modelo graus de liberdade correspondentes ao movimento relativo entre as armaduras e o betão, desde que se adoptem malhas de elementos finitos de dimensão muito reduzida. No entanto, de acordo com estes autores, (i) a adopção de malhas de elementos finitos de dimensão muito reduzida é discutível,

(ii) a incorporação explícita do movimento relativo das armaduras em relação ao betão envolvente conduz sempre a resultados mais rigorosos e (iii) as soluções revelam falta de objectividade quando o escorregamento das armaduras é relevante e o movimento relativo entre armaduras e betão não é explicitamente modelado.

O ATENA 3D disponibiliza as seguintes relações constitutivas para a aderência armadura-betão: (i) proposta do MC90 (MC90 [1990]), (ii) proposta por Bigaj [1999] e (iii) multi-linear definida pelo utilizador.

Nas relações constitutivas propostas no MC90 e por Bigaj [1999], o comportamento tensão-escorregamento é definido com base na resistência do betão à compressão, no diâmetro das armaduras, geometria da sua superfície, confinamento transversal e condições de betonagem.

### 4.3.3. Elementos finitos, geração da malha e resolução do sistema de equações

Para modelações 3D, o ATENA 3D disponibiliza elementos tetraédricos com 4 a 10 nós e elementos hexaédricos com 8 a 20 nós. Todos os elementos são isoparamétricos e é adoptado um esquema de integração de *Gauss*.

A geração da malha é efectuada automaticamente pelo ATENA 3D recorrendo ao gerador *T3D* (Ryp [2006]), mediante algumas indicações por parte do utilizador, como o tipo de elemento finito e a dimensão máxima dos seus lados. É ainda possível estabelecer malhas não uniformes, associando valores limites para a dimensão dos elementos na vizinhança de um ponto, linha ou superfície.

Para a resolução do sistema de equações lineares o ATENA 3D apresenta abordagens directas e abordagens iterativas. De acordo com Červenka, Jendele *et al.* [2010], as abordagens directas são recomendadas para pequenos problemas ou problemas mal condicionados enquanto as abordagens iterativas são mais eficientes para problemas 3D de grande dimensão e bem condicionados.

Para a abordagem iterativa, o ATENA 3D disponibiliza o método de *Newton Raphson* (completo e modificado) e o método *Arc-Length*.

Para avaliar a convergência do processo iterativo, o ATENA 3D adopta como critérios (i) a variação relativa da norma euclidiana dos deslocamentos nodais, (ii) o valor relativo da norma euclidiana das forças desequilibradas, (iii) o valor relativo do trabalho realizado pelas forças desequilibradas no incremento e (iv) o valor relativo das componentes máximas das forças desequilibradas. O utilizador estabelece a tolerância que cada um destes parâmetros terá de satisfazer para que se possa considerar que o processo iterativo convergiu.

## 4.4. Validação do programa ATENA 3D para modelação de ligações viga-pilar de betão armado

### 4.4.1. Introdução

De acordo com o §7.11.2.4 do MC2010, os procedimentos e modelos materiais adoptados nas

simulações numéricas tendo em vista a estimativa do comportamento de estruturas de betão armado devem ser validados recorrendo a ensaios experimentais *benchmark*. O processo de validação consiste em:

- (i) modelação de ensaios básicos de materiais para validar relações constitutivas, que são efectuados em estruturas simples por forma a minimizar a influência da geometria e das condições fronteira sobre campos de tensões e deformações bem definidas (*e.g.*, ensaio à compressão de cilindros, ensaios à flexão de prismas com entalhe, ensaios à tracção de tirantes de betão armado);
- (ii) modelação de ensaios estruturais para validar a capacidade de um programa reproduzir objectivamente determinado comportamento estrutural; estes ensaios são a forma racional de seleccionar os modelos materiais, os respectivos parâmetros ou o programa para modelar uma determinada estrutura;
- (iii) testes de sensibilidade da malha para validar a malha de elementos finitos do modelo numérico; devem ser testadas pelo menos três malhas; existe uma significativa sensibilidade à malha quando pelo menos duas malhas de dimensão diferente não fornecem resultados suficientemente semelhantes, caso em que, o modelo numérico é considerado não objectivo.

Kabele, Červenka *et al.* [2010] apresentam resultados de modelações de ensaios básicos recorrendo ao programa ATENA 2D e ATENA 3D que validam os modelos materiais adoptados. São ainda apresentadas diversas modelações de elementos estruturais e um estudo de malhas que validam de uma forma genérica a utilização deste programa para modelação de elementos estruturais de betão armado.

O programa ATENA 2D e o programa ATENA 3D já foram utilizados na modelação de ligações viga-pilar de betão armado (*e.g.*, Roeser [2002], Hegger, Sherif *et al.* [2004], Li [2003], Sasmal, Novák *et al.* [2010b], Ibrahim [2011]). Todos estes estudos concluíram que este programa permite modelar rigorosamente o comportamento de ligações viga-pilar de betão armado tanto para acções quase-estáticas não cíclicas como para acções quase-estáticas e cíclicas. Os resultados publicados naqueles trabalhos relativos à modelação de ligações viga-pilar de betão armado, serviram de base para definir os parâmetros caracterizadores dos modelos materiais efectuada nesta tese.

Nos §§ 4.4.2 e 4.4.3 apresentam-se uma descrição sumária dos critérios e estudos tidos como referência na definição das malhas e dos parâmetros intervenientes nos modelos de materiais adoptados.

#### 4.4.2. Malhas e tipos de elementos finitos adoptados

De uma forma geral, no âmbito do métodos dos elementos finitos, a qualidade da modelação é tanto melhor quanto menor a dimensão dos elementos da malha (refinamento-h) e/ou quanto maior a ordem dos elementos (refinamento-p).

Desta forma, o limite inferior da dimensão dos elementos da malha foi estabelecido tendo em consideração os seguintes aspectos:

- (i) para um dado problema, à medida que se vai reduzindo a dimensão dos elementos finitos, aumenta o número de graus de liberdade, tornando-se necessários mais recursos computacionais;
- (ii) dada a natureza heterogénea do betão, não faz sentido, de acordo com Bažant e Oh [1983], utilizar elementos finitos (i) de dimensão muito inferior à dos agregados nem (ii) com funções de aproximação de ordem elevada, na medida em que o modelo material deixa de ser representativo do material betão – os modelos constitutivos do betão baseiam-se em leituras efectuadas com extensómetros cuja dimensão é, tipicamente, duas a três vezes superior à dos agregados, o que constitui, por isso, um limite inferior para a dimensão abaixo da qual o pressuposto habitual de análise de homogeneidade deixa de ser válido;
- (iii) a relação entre as várias dimensões dos elementos tem que estar entre limites razoáveis – procurar não ultrapassar a relação 1:2 (Kabele, Červenka *et al.* [2010]).

O limite superior da dimensão dos elementos finitos foi estabelecido tendo em conta o estudo efectuado por Kabele, Červenka *et al.* [2010], segundo o qual, a modelação razoável de um elemento flectido em termos da distribuição da tensão na secção transversal, deve apresentar um mínimo de quatro elementos ao longo da altura.

Relativamente ao tipo de elementos, de acordo com Červenka e Procházková [2010], sempre que possível, deve usar-se apenas o elemento hexaédrico (*brick*). O elemento tetraédrico linear não deve ser utilizado para a análise das tensões, apresentando ainda a desvantagem de, para a mesma dimensão do lado do elemento, implicar aproximadamente o dobro do número de elementos que se obteria com o elemento hexaédrico.

Neste trabalho, utilizou-se como referência a discretização e os elementos usados por Sasmal [2009] para modelar o comportamento de ligações viga-pilar de extremidade em estruturas porticadas de betão armado submetidas a acções quase-estáticas cíclicas. Desta forma, os elementos de betão, numa primeira fase, foram modelados com uma malha de elementos hexaédricos quadráticos com uma dimensão máxima do lado de 40 mm. Os dispositivos metálicos de transmissão de carga ao betão foram modelados recorrendo a elementos tetraédricos lineares com dimensão máxima de 100 mm.

Nas modelações efectuadas por Roeser (Roeser [2002], Hegger, Sherif *et al.* [2004]), a dimensão dos elementos finitos adoptados na discretização dos elementos de betão (10 mm) foi significativamente inferior ao valor adoptado por Sasmal [2009]. Roeser teve necessidade de adoptar elementos de dimensão muito reduzida para modelar o escorregamento das armaduras, na medida em que a versão do ATENA que utilizou (ATENA 2D) não permitia a modelação explícita do movimento relativo entre as armaduras e o betão.

Sempre que possível, com base em considerações de simetria, simplificou-se o modelo de forma a reduzir o número de elementos e consequentemente o esforço computacional.

No §4.4.5 é efectuada uma avaliação da sensibilidade dos resultados ao tipo de malha adoptado, ou seja, é avaliada a objectividade da malha e no §4.4.6 é avaliado o efeito das condições de aderência nos resultados da simulação.

#### 4.4.3. Modelos materiais adoptados e respectivos parâmetros

Para a maioria dos parâmetros caracterizadores do modelo material *CC3NonLinCementitious2* foram adoptados os valores propostos por defeito pelo programa ATENA 3D. As excepções foram o parâmetro  $w_d$ , necessário para modelar o amaciamento do betão em compressão, o parâmetro  $r_c^{\min}$ , necessário para limitar o efeito das fendas transversais na resistência do betão em compressão e o parâmetro  $c_{ts}$ , necessário para contabilizar o *tension stiffening*. Apresentam-se, em seguida, os motivos que justificam a não utilização dos valores propostos por defeito no ATENA 3D.

O modelo material *CC3NonLinCementitious2* incorpora o efeito da tensão no betão na direcção transversal às fendas por intermédio de uma superfície de cedência com desenvolvimento em torno do eixo hidrostático (§4.3.2.1.2) e o efeito da abertura das fendas sobre a resistência à compressão uniaxial na direcção paralela às fendas por intermédio do parâmetro  $r_c$  proposto por Vecchio e Collins [1986]. À primeira vista, pode parecer que a tensão/extensão na direcção transversal às fendas é contabilizada por duas vezes, ou seja, de forma redundante. De facto, numa primeira fase, anterior à fendilhação, embora o parâmetro  $r_c$  seja irrelevante por ser reduzida ou nula a extensão transversal  $\varepsilon_1^f$  que resulta da abertura das fendas, a resistência à compressão do betão numa dada direcção é reduzida se existir tracção numa direcção ortogonal, de acordo com a superfície de cedência. No entanto, numa fase posterior, quando o betão fendilha na direcção ortogonal à direcção de compressão, a correspondente tensão de tracção reduz-se, podendo mesmo anular-se, sendo pois necessário considerar o parâmetro  $r_c$  de modo a impedir a recuperação integral da resistência do betão.

No entanto, o parâmetro  $r_c$  (Vecchio e Collins [1986]), foi calibrado com base em resultados de ensaios experimentais de placas de betão armado submetidas a estados planos de tensão em que a redução da resistência à compressão do betão por efeito da tensão de tracção transversal não foi contabilizada. Desta forma, apesar do parâmetro proposto por Vecchio e Collins [1986], na implementação efectuado no ATENA 3D, em virtude da decomposição das extensões (expressão (4.1)), incorporar somente a parcela das extensões nas fendas, o modelo *CC3NonLinCementitious2* pode incorporar, de facto, alguma sobreposição na redução da resistência à compressão do betão por efeito da conjugação deste parâmetro com o modelo de comportamento do betão.

Como já foi referido, o valor mínimo do parâmetro  $r_c$  adoptado no ATENA 3D por defeito é  $r_c^{\min} = 0.2$ . No entanto, Dyngeland [1989] (citado por Červenka, Jendele *et al.* [2010]) recomenda que em elementos com malhas de armadura apertadas o factor redutor de resistência à compressão provocada pela extensão transversal mínimo seja  $r_c^{\min} = 0.45$  e Kolleger e Mehlhorn [1990] (citado por Hegger, Sherif *et al.* [2004]) propõem que o factor redutor mínimo a adoptar devido ao efeito das fendas seja  $r_c^{\min} = 0.8$ . Dada a disparidade de valores, avaliou-se por intermédio de um estudo paramétrico (§4.4.4) a adequabilidade do limite proposto por defeito no ATENA 3D.

Hegger, Sherif *et al.* [2004] estudaram modelos de ligações viga-pilar interiores e de extremidade com o programa ATENA 2D, utilizando o modelo material *CCSbetaMaterial* para o betão. Estes autores concluíram que a adopção de  $w_d = 0.5\text{mm}$  (valor também proposto por



defeito no modelo *CC3NonLinCementitious2*) conduz a roturas prematuras frágeis e localizadas nas zonas submetidas a estados multiaxiais de compressão. Tal como já foi referido (§4.3.2.1.2), o parâmetro  $w_d = 0.5\text{mm}$  foi definido com base nos resultados dos ensaios conduzidos por Van Mier [1986] sobre prismas de betão submetidos a compressão uniaxial. No entanto, Van Mier [1986] também mostrou que o comportamento do betão em compressão multiaxial é muito mais dúctil do que em compressão uniaxial. Com base nestes resultados, Hegger, Sherif *et al.* [2004] propuseram que, com vista a modelar correctamente a ductilidade em ligações viga-pilar, fosse assumido  $w_d = 5\text{mm}$  para ligações viga-pilar sem chapas de ancoragem e  $w_d = 8\text{mm}$  para ligações viga-pilar exteriores com chapa de ancoragem.

O modelo *CC3NonLinCementitious2* baseia-se na teoria da plasticidade e, conseqüentemente, permite contabilizar o efeito do estado de tensão na capacidade resistente do betão em compressão. Como já se referiu no §4.3.2.1.2, este modelo incorpora uma lei de  $\sigma[\epsilon_{eq}^p]$  baseada em ensaios de compressão uniaxial em que o parâmetro  $\sigma[\epsilon_{eq}^p]$  na fase de amaciamento é função de  $w_d$ . Como  $w_d$  é fixo, o modelo *CC3NonLinCementitious2*, apesar de reflectir o efeito do confinamento do betão na sua resistência, não permite dar o mesmo tratamento à ductilidade. Com vista a ultrapassar esta limitação Sasmal [2009] propôs que também seja adoptado  $w_d = 5\text{mm}$  para o modelo material *CC3NonLinCementitious2* na modelação de ligações viga pilar de estruturas de betão armado.

Tendo em consideração os resultados reportados por Sasmal [2009], Hegger, Sherif *et al.* [2004] e Van Mier [1986], no §4.4.4 apresenta-se um estudo paramétrico com vista à definição do parâmetro  $w_d$  que conduz ao melhor ajuste aos resultados tomados como referência para calibração do modelo.

De acordo com a abordagem simplificada adoptada no ATENA 3D para modelar as armaduras, estas só apresentam resistência na direcção axial – não apresentam rigidez à flexão nem ao corte. Conseqüentemente, quando ocorre esmagamento e/ou fendilhação diagonal de um elemento de betão armado, para que ocorra a transferência das forças do betão para as armaduras, é necessário que as armaduras sofram um alongamento simultaneamente com o amaciamento do betão. Esta transferência de tensões do betão para as armaduras conduz frequentemente a instabilidades no processo numérico. Uma forma de estabilizar o comportamento numérico é contabilizar o *tension stiffening* por intermédio de um limite inferior à tensão de tracção no betão (Figura 4.8). O ATENA 3D utiliza, por defeito,  $c_{ts} = 0$ , sendo porém proposto no seu manual (Červenka, Jendele *et al.* [2010]), de acordo com o MC90, o valor  $c_{ts} = 0.4$  para elementos fortemente armados. Nas simulações efectuadas, somente com o objectivo de estabilizar o comportamento numérico, foi adoptado o valor residual  $c_{ts} = 0.02$ .

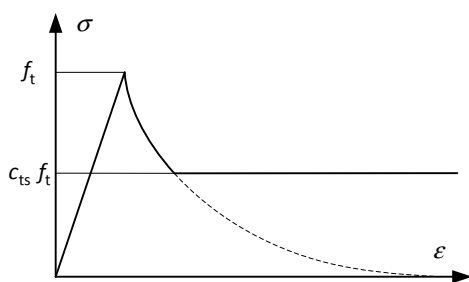


Figura 4.8 – *Tension stiffening* (Červenka, Jendele *et al.* [2010]).

#### 4.4.4. Calibração dos parâmetros da lei constitutiva do betão

Para a calibração dos parâmetros  $r_c^{\min}$  e  $w_d$ , avaliação da objectividade da malha e estudo do efeito das condições aderência, foi utilizado como referência o espécime RA2 ensaiado por Roeser [2002]. Foi escolhido este espécime, porque se constatou experimentalmente a ocorrência de movimento de corpo rígido das armaduras longitudinais da viga no interior da ligação (*pull-out*), em virtude do reduzido valor da relação  $h_c/\phi$ . Sendo este um fenómeno complexo, pretende-se avaliar a capacidade do ATENA 3D o reproduzir. As dimensões da envolvente exterior e a pormenorização da armadura adoptadas por Roeser [2002] estão representadas na Figura 4.9.

Na modelação do espécime RA2 foi assumido um recobrimento e um espaçamento de 25 mm para as armaduras longitudinais das vigas e dos pilares.

Ainda para as armaduras, foi assumido um comportamento bilinear elástico perfeitamente plástico e tensão de cedência de 382.8, 562.3 e 550.2 MPa para armaduras com 6, 14 e 20 mm de diâmetro, respectivamente. Foi assumido para resistência à compressão uniaxial do betão o valor 66.1 MPa obtido à data de ensaio (42 dias) com provetes cilíndricos com 30 cm de altura e de 15 cm de diâmetro. O módulo de elasticidade inicial considerado para o betão foi 34.56 GPa. O modelo material considerado para o betão foi o *CC3NonLinCementitious2* (Červenka, Jendele *et al.* [2010]). A aderência entre as armaduras e o betão foi modelada recorrendo aos modelos de comportamento propostos no MC90 para *betão confinado e boas condições de aderência* (ver Anexo).

Os dispositivos de transmissão de carga ao modelo foram modelados assumindo um metal com comportamento isotrópico elástico linear,  $E = 200$  GPa e  $\nu = 0.25$ .

A aplicação de carga ao modelo procurou reproduzir o ensaio experimental. Assim, num primeiro passo foi aplicada a carga axial no pilar  $N_{col} = 458$  kN. Posteriormente, foram impostos incrementos de deslocamento  $w$  nas extremidades das vigas iguais por forma a captar a carga

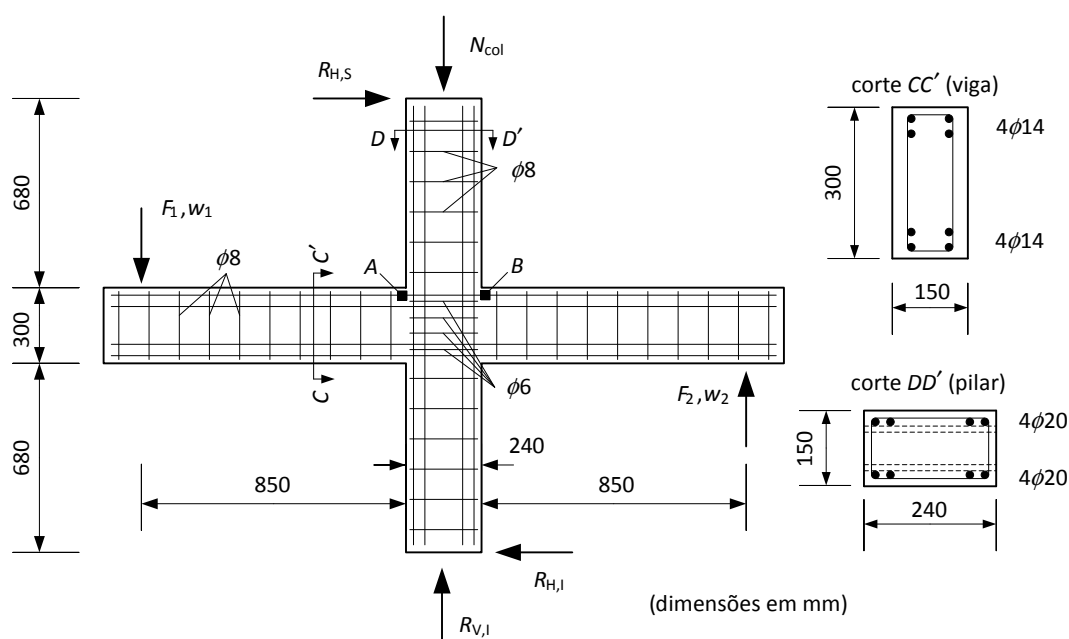


Figura 4.9 – Representação simplificada do ensaio experimental realizado por Roeser [2002].

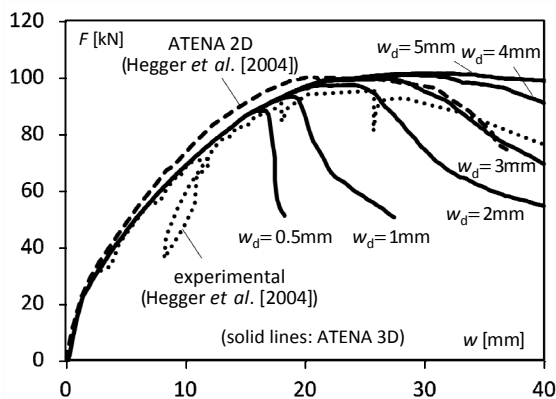


Figura 4.10 – Efeito do parâmetro  $w_d$  na relação  $F_1-w_1$  para  $r_c^{\min} = 0.8$ .

Tabela 4.1 – Carga máxima suportada pelos modelos para  $r_c^{\min} = 0.8$ .

$w_d$ [mm]	$F_{1,ATENA\ 3D}$ [kN]	$\frac{F_{1,ATENA\ 3D}}{F_{1,TEST}}$
0.5	88.3	0.92
1.0	93.2	0.97
2.0	97.2	1.01
3.0	99.5	1.04
4.0	100.8	1.05
5.0	101.5	1.06

máxima suportada pelo espécime e ainda o trecho descendente da relação  $F-w$ . Foram utilizados os parâmetros definidos por defeito no programa ATENA 3D para os critérios de convergência.

Numa primeira fase foi avaliado o efeito do parâmetro  $w_d$  e do parâmetro  $r_c^{\min}$  na estimativa de comportamento do espécime RA2.

Na Figura 4.10 está representado o comportamento experimental do espécime RA2, o resultado da simulação obtida por Hegger, Sherif *et al.* [2004] recorrendo ao ATENA 2D para  $w_d = 5\text{mm}$  e  $r_c^{\min} = 0.8$  e os resultados de simulações numéricas efectuadas no ATENA 3D para diversos valores de  $w_d$  assumindo  $r_c^{\min} = 0.8$ . Na Tabela 4.1 estão indicadas as cargas máximas suportadas pelos modelos.

Na Figura 4.11 estão representadas os resultados da simulação numérica para  $w_d = 5\text{mm}$  e para diversos valores de  $r_c^{\min}$  e na Tabela 4.2 estão indicadas as cargas máximas suportadas pelos modelos.

Da análise das figuras e tabelas anteriores conclui-se que, como era espectável, a adopção do parâmetro proposto por defeito no ATENA 3D para  $w_d (=0.5\text{mm})$  e  $r_c^{\min} (=0.2)$  conduz a um colapso frágil e prematuro dos modelos. Além disso, a adopção de  $w_d = 5\text{mm}$  e  $r_c^{\min} = 0.8$  conduz a uma estimativa por excesso tanto da capacidade resistente como da ductilidade do espécime RA2.

Para  $w_d \geq 3\text{mm}$ , embora a Tabela 4.1 mostre que a carga máxima pouco varia com  $w_d$ , a Figura 4.10 revela uma variação significativa da inclinação do trecho pós-pico das curvas. Já a Figura 4.11 e a Tabela 4.2 mostram que a capacidade resistente do modelo apresenta uma variação significativa com o parâmetro  $r_c^{\min}$  enquanto a inclinação do trecho pós-pico das curvas  $F-w$  é pouco sensível a este parâmetro.

Perante estes resultados, conclui-se que, para a gama de valores em estudo que melhor aproximam os resultados experimentais, o critério a adoptar na identificação do parâmetro  $r_c^{\min}$  óptimo é a minimização dos desvios da carga de colapso do modelo relativamente à carga de colapso experimental e o critério a adoptar na identificação do parâmetro  $w_d$  óptimo é a minimização dos desvio da relação  $F-w$  do modelo relativamente à experimental no trecho pós-pico.

Com base nestes pressupostos, conclui-se que, de entre os valores avaliados para o parâmetro

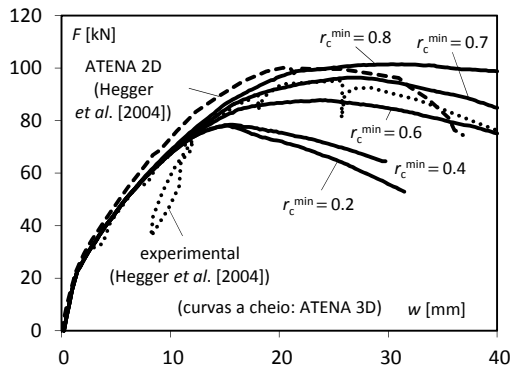


Figura 4.11 – Efeito do parâmetro  $r_c^{\min}$  na relação  $F_1-w_1$  para  $w_d = 5$  mm.

Tabela 4.2 – Carga máxima suportada pelos modelos para  $w_d = 5$  mm.

$r_c^{\min}$	$F_{1,ATENA\ 3D}$ [kN]	$\frac{F_{1,ATENA\ 3D}}{F_{1,TEST}}$
0.2	78.0	0.81
0.4	78.5	0.82
0.6	87.8	0.92
0.7	96.4	1.01
0.8	101.5	1.06

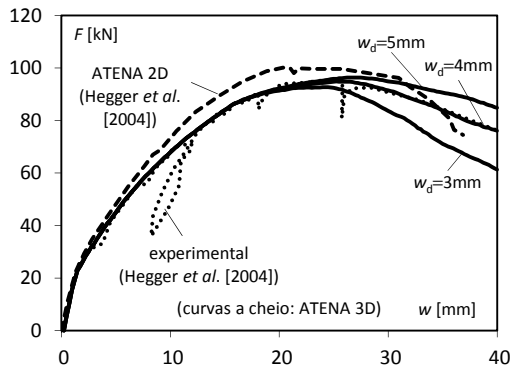


Figura 4.12 – Efeito do parâmetro  $w_d$  na relação  $F_1-w_1$  para  $r_c^{\min} = 0.7$ .

Tabela 4.3 – Carga máxima suportada pelos modelos para  $r_c^{\min} = 0.7$ .

$w_d$ [mm]	$F_{1,ATENA\ 3D}$ [kN]	$\frac{F_{1,ATENA\ 3D}}{F_{1,TEST}}$
3	92.7	0.97
4	94.8	0.99
5	96.2	1.00

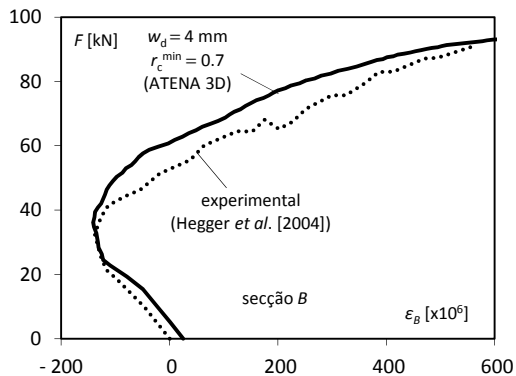
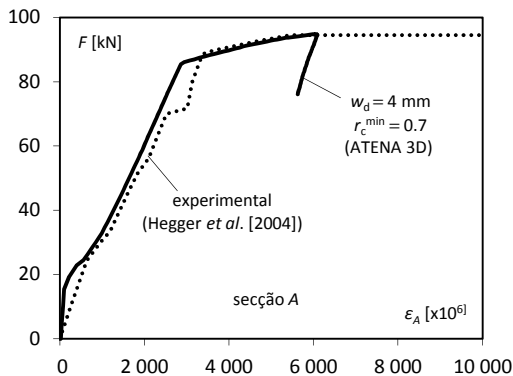


Figura 4.13 – Extensão nas armaduras longitudinais das vigas (secções A e B).

$r_c^{\min}$ , o valor óptimo será  $r_c^{\min} = 0.7$ . Na Figura 4.12 e na Tabela 4.3 estão representados os resultados das simulações para  $r_c^{\min} = 0.7$  e para  $w_d = 5$  mm, 4 mm e 3 mm.

Da análise destes resultados conclui-se que, de entre os valores estudados, os parâmetros que permitem uma melhor simulação do espécime RA2 são  $w_d = 4$  mm e  $r_c^{\min} = 0.7$ . Estes valores têm a mesma ordem de grandeza que os adoptados por Hegger, Sherif *et al.* [2004] e Sasmal [2009].

Na Figura 4.13 apresenta-se a evolução da extensão nas armaduras longitudinais das vigas nas secções A e B dos varões, assinaladas na Figura 4.9, para  $w_d = 4$  mm e  $r_c^{\min} = 0.7$ .

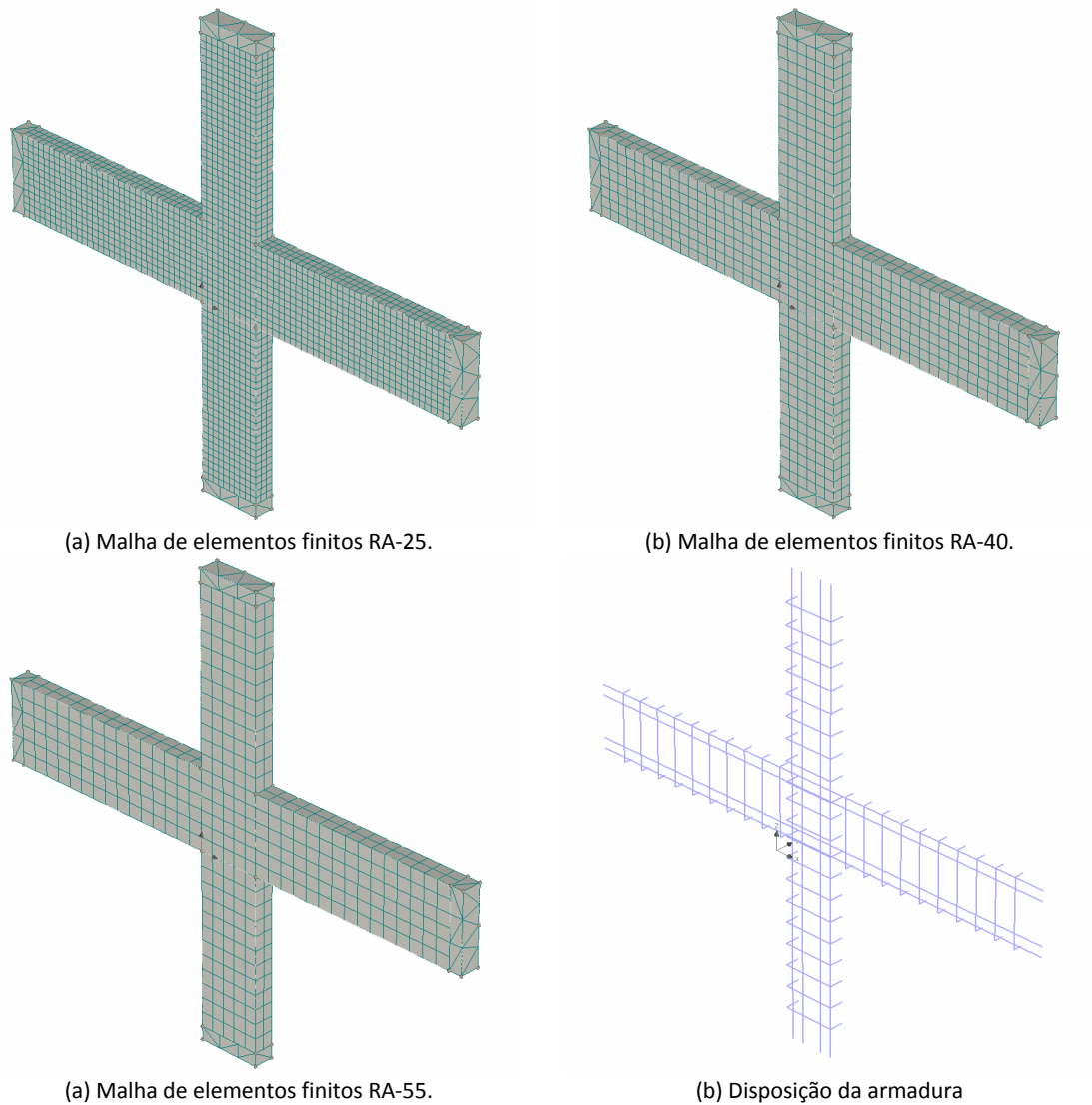
Esta figura mostra que as modelações numéricas recorrendo ao ATENA 3D captam adequadamente o efeito de *pull-out* das armaduras longitudinais da viga ao longo da ligação viga-pilar e conduzem a boas estimativas das extensões nestas armaduras.

Como resultado da análise anterior, nas restantes simulações numéricas efectuadas no decorrer deste trabalho adoptaram-se os parâmetros  $w_d = 4 \text{ mm}$  e  $r_c^{\min} = 0.7$ .

#### 4.4.5. Objectividade da malha

Para o estudo da objectividade da malha, de acordo com as recomendações do MC2010, foram adoptadas as três discretizações representadas na Figura 4.14. Na mesma figura está também representada a disposição das armaduras do modelo de EF.

Utilizaram-se para o estudo da objectividade da malha modelos com iguais (i) geometria, (ii) condições de apoio, (iii) cargas, (iv) propriedades mecânicas e (v) modelos materiais (no caso do modelo de betão com  $w_d = 4 \text{ mm}$  e  $r_c^{\min} = 0.7$ ).



(a) Malha de elementos finitos RA-25.

(b) Malha de elementos finitos RA-40.

(a) Malha de elementos finitos RA-55.

(b) Disposição da armadura

Figura 4.14 – Representação do modelo de EF.

Tabela 4.4 – Modelos usados na avaliação da objectividade da malha.

nomenclatura	dimensão aproximada de cada elemento [mm]	número de elementos	$F_{1,\max}$ [kN]
RA2-25	25	4380	95.1
RA2-40	40	1204	94.8
RA2-55	55	744	96.1

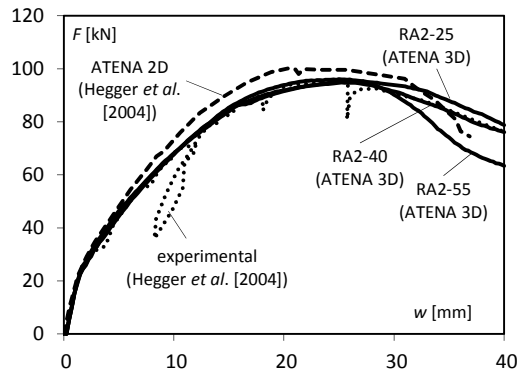


Figura 4.15 – Relação  $F_1-w_1$  dos modelos adoptados na avaliação da objectividade da malha.

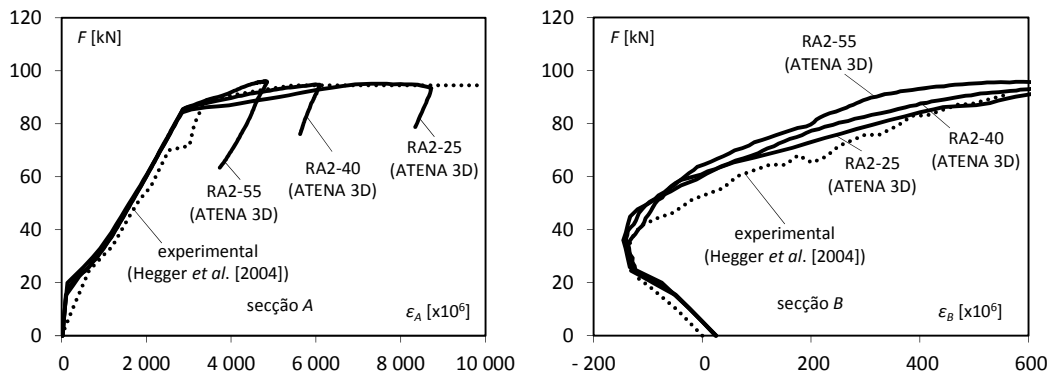


Figura 4.16 – Extensão nas armaduras longitudinais das vigas nos modelos adoptados na avaliação da objectividade da malha.

Para as discretizações representadas na Figura 4.14, a Tabela 4.4 indica as dimensões de referência dos elementos finitos, o número de elementos e a carga máxima suportada.

A análise da Tabela 4.4 revela que a carga de colapso não é significativamente afectada pela geometria da malha de elementos finitos, sendo pouco relevante a variação máxima relativa (inferior a 1.4%). A Figura 4.15 representa a relação  $F-w$  para os três modelos.

Da análise da Figura 4.15 pode-se concluir que o efeito da malha adoptada não é significativo na fase ascendente da relação  $F_1-w_1$ . Por outro lado, na fase descendente, o comportamento do modelo RA2-55 apresenta um declive mais acentuado que o observado experimentalmente, mas os espécimes RA2-25 e RA2-40, que diferem pouco entre si, apresentam uma boa concordância com os resultados experimentais. Note-se que são expectáveis desvios relativamente aos resultados experimentais mais significativos no troço descendente das curvas de comportamento, na medida em que a localização das deformações é dependente de parâmetros não contabilizados no modelo, tais como a forma e dimensão dos agregados.

Na Figura 4.16 apresenta-se a evolução das extensões nas armaduras nas secções A e B. Esta figura mostra que o efeito da malha adoptada não é significativo para as extensões nas armaduras.

Da análise efectuada nesta secção pode-se concluir que a malha de 40 mm de lado adoptada por Sasmal [2009] conduz a um compromisso aceitável entre o custo computacional e a qualidade dos resultados da simulação. Nas restantes simulações efectuadas ao longo deste estudo serão, por isso, utilizadas malhas com elementos finitos com dimensão de referência de cerca de 40 mm.

#### 4.4.6. Efeito das condições de aderência

Numa ligação viga-pilar, desde que provida de cintas e as armaduras longitudinais das vigas passem no espaço interior limitado pelas armaduras longitudinais dos pilares, não é espectável que ocorra *splitting* do betão. Desta forma, de acordo com o §3.1 do MC90, as armaduras podem-se considerar envolvidas por *betão confinado*. Já relativamente às condições de aderência, tendo em atenção as disposições do §6.9.3 do MC90, algumas armaduras podem ser consideradas com *boas condições de aderência* e outras com *outras condições de aderência* (ver Anexo).

Apesar das Figuras 4.15 e 4.16 mostrarem que o ATENA 3D conduz a bons resultados assumindo boas condições de aderência, foi avaliado o comportamento do espécime RA2 recorrendo ao modelo RA2-40 para três condições de aderência distintas: (i) *aderência perfeita* (AP), (ii) betão confinado e boas condições de aderência (BCA), (iii) betão confinado e outras condições de aderência (OCA).

Na Figura 4.17 apresenta-se a relação  $F-w$  para as três situações bem como o comportamento experimental reportado por Hegger, Sherif *et al.* [2004]. Esta figura mostra que o comportamento global do espécime RA2 é pouco sensível às condições de aderência assumidas para as armaduras, na medida em que, em termos de relação  $F-w$ , qualquer um dos modelos apresenta uma boa correspondência com os resultados experimentais.

Na Figura 4.18 está representada a evolução das extensões nas armaduras longitudinais das vigas nas secções A e B. Esta figura mostra que, assumindo, no modelo de elementos finitos, boas condições de aderência ou aderência perfeita, os valores das extensões são similares e

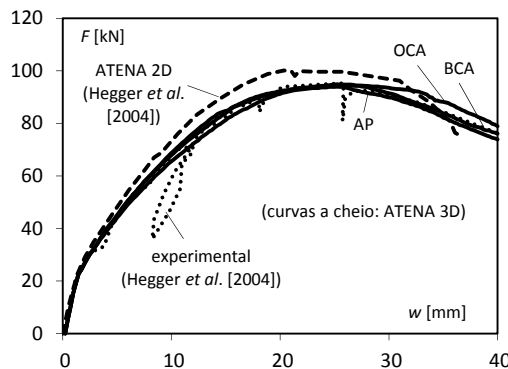


Figura 4.17 – Relação  $F_1-w_1$  dos modelos adoptados na avaliação do efeito das condições de aderência.

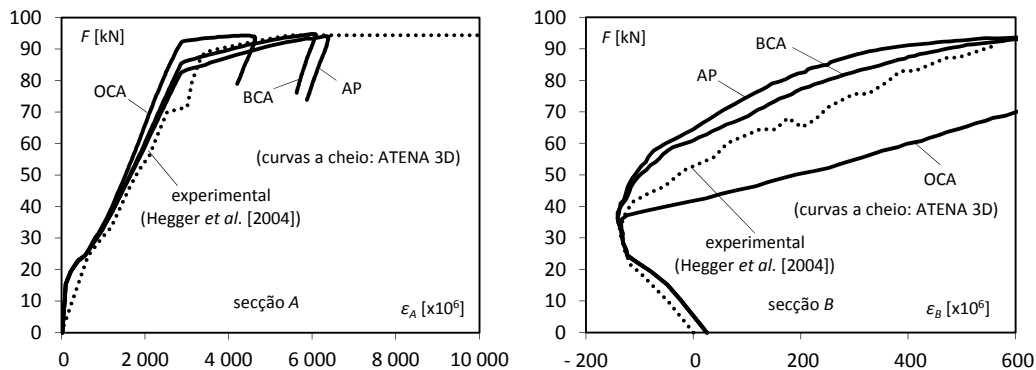


Figura 4.18 – Extensão nas armaduras longitudinais das vigas dos modelos adoptados na avaliação do efeito das condições de aderência.

próximos dos resultados experimentais, tanto na secção *A* como na *B*. Por outro lado, assumindo outras condições de aderência, os resultados numéricos afastam-se dos experimentais.

A similaridade entre os resultados numéricos para boas condições de aderência e para aderência perfeita poderá dever-se ao elevado nível de fendilhação na zona da ligação. De acordo com Jendele e Červenka [2006], nos casos em que a dimensão característica dos elementos finitos na vizinhança das armaduras se aproxima do diâmetro destas, o escorregamento das armaduras pode ser camuflado, em parte, pela fendilhação do betão envolvente, acabando por não se manifestar na interface armadura-betão. No modelo adoptado, apesar da dimensão característica da malha não ser idêntica ao diâmetro das armaduras ( $40\text{ mm}/\phi=1.6$  para as armaduras longitudinais dos pilares e 2.8 para as armaduras longitudinais das vigas), as armaduras na zona da ligação estão envolvidas em betão fendilhado diagonalmente devido ao corte na ligação viga-pilar e com um padrão idêntico ao das fendas de aderência. Consequentemente, parte do escorregamento aço-betão pode ocorrer no betão envolvente das armaduras (zona  $\Omega$ , Figura 4.7) e não na interface, tornando supérflua a modelação explícita da aderência armaduras-betão por intermédio da relação constitutiva.

Tendo em atenção, que a utilização de um modelo não perfeito para a aderência armaduras-betão (BCA), não só conduz a melhores resultados que um modelo de aderência perfeita, como ainda minimiza o efeito da dimensão dos elementos finitos (Jendele e Červenka [2006]), nas restantes simulações com o método dos elementos finitos (ATENA 3D) efectuadas neste estudo serão adoptadas boas condições de aderência e betão confinado em todas as armaduras.

## 4.5. Estudo do estado de tensão nas armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior da ligação viga-pilar

### 4.5.1. Introdução

Para determinar os campos de tensões nas armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior das ligações viga-pilar, foram estudadas ligações viga-pilar submetidas a carregamentos quase-estáticos e monotónicos. Os casos estudados foram (i) ligações viga-pilar interiores, (ii) ligações viga-pilar de extremidade e (iii) ligações viga-pilar de cobertura de extremidade.

No caso de ligações viga-pilar interiores foram considerados duas tipologias de carga para simular as situações com acções predominantemente gravíticas (doravante denominado carregamento gravítico – CG) e situações com acções predominantemente laterais (doravante denominado carregamento lateral – CL). No caso de ligações viga-pilar de cobertura de extremidade, estas duas situações também são tidas em consideração simulando a ligação submetida a momentos flectores de abertura (CL) e de fecho (CG). No caso de ligações viga-pilar de extremidade, a diferença entre tipos de carregamento não é relevante caso a ligação seja pormenorizada para momentos transmitidos pela viga com os dois sentidos.

Em cada uma destas tipologias foram consideradas pormenorizações comuns para as



armaduras e foi avaliado o efeito da existência ou não de cintas na zona da ligação.

Para efeitos de modelação numérica, seleccionaram-se espécimes cuja pormenorização da armadura reflecte as especificações técnicas recentes e foram excluídos espécimes manufacturados com armaduras lisas.

### 4.5.2. Ligações interiores

Para as ligações viga-pilar interiores, utilizou-se neste estudo como referência o espécime RA2 (Roeser [2002]), já considerado no §4.4 para efeitos de avaliação e calibração do modelo material do betão, do estudo da objectividade da malha e do efeito das condições de aderência.

Na Figura 4.19 está representada a numeração adoptada pelo ATENA 3D para as armaduras longitudinais das vigas e pilares e para as cintas na zona da ligação, a indicação da coordenada  $s$  adoptada como referência nas armaduras e a identificação dos ramos das cintas da ligação. A Figura 4.20 apresenta os sistemas de carga e as condições de apoio utilizados para simular o carregamento predominantemente gravítico (CG) e o carregamento predominantemente lateral (CL). As simulações numéricas foram conduzidas impondo deslocamentos  $w$  crescentes até atingir  $F_{max}$ .

Tendo em conta as simplificações decorrentes da simetria, no caso do carregamento lateral só foi modelado  $\frac{1}{2}$  do espécime completo e no caso do carregamento gravítico só foi modelado  $\frac{1}{4}$  do espécime completo.

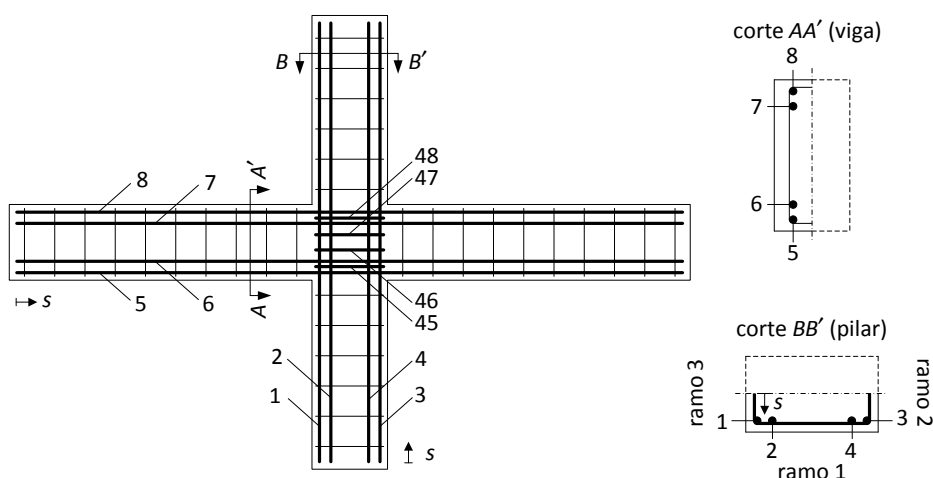


Figura 4.19 – Numeração das armaduras longitudinais das vigas/pilares e das cintas da ligação do espécime RA2 (Roeser [2002]).

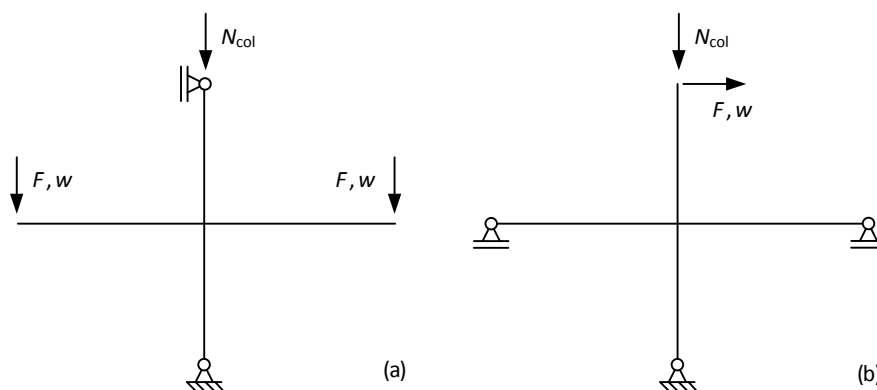


Figura 4.20 – Cargas aplicadas e condições de apoio: (a) carregamento gravítico (CG), (b) carregamento lateral (CL).

#### 4.5.2.1. Carregamento gravítico (CG)

A carga máxima suportada pelo espécime representado na Figura 4.9, no decorrer da simulação numérica, quando submetido às condições de apoio e carregamento representado na Figura 4.20(a) – modelo RA2-CG-Ref – foi  $F_{max} = 107.3$  kN para  $N_{col} = 458$  kN.

A Figura 4.21 representa a evolução das tensões ao longo dos varões da armadura longitudinal da viga. Para uma maior clareza, os varões são representados na sua totalidade.

Na Figura 4.21(a) observa-se a plastificação da armadura superior da viga (varão 8), iniciada para um valor da força aplicada ligeiramente acima de 80% do seu máximo, acompanhada pelo surgimento de elevadas tensões de tracção no varão 6 em resultado da migração do eixo neutro para baixo. É ainda possível observar que a carga máxima é atingida quando a segunda camada de armadura (varão 7) entra em cedência.

Nesta figura observa-se ainda que, na armadura longitudinal da viga, a tensão normal no interior da ligação é inferior, em valor absoluto, à tensão na periferia da ligação. Este resultado mostra, para este caso em particular, que é seguro o dimensionamento da armadura longitudinal da viga para a força de tracção instalada nos varões desta armadura na secção da extremidade efectiva deste elemento.

O facto do valor absoluto da tensão na armadura longitudinal da viga ser mais baixo no interior da ligação que na sua periferia, levantou a seguinte questão: será este resultado uma consequência da existência de cintas na ligação ou, mais precisamente, da transferência de forças das armaduras longitudinais das vigas para estas cintas? Para responder a esta questão, foi desenvolvido um novo modelo do espécime RA2, em tudo similar ao anterior mas sem cintas no interior da ligação. A este novo modelo foi atribuída a designação RA2-CG-SC.

A carga máxima suportada pelo modelo RA2-CG-SC foi idêntica à carga suportada pelo modelo RA2-CG-Ref. A Figura 4.21(b) representa a evolução das tensões ao longo dos varões longitudinais da viga.

Tal como para o modelo RA2-CG-Ref, a análise da Figura 4.21(b) permite concluir que a carga máxima suportada pelo modelo RA2-CG-SC é atingida quando a segunda camada superior da armadura longitudinal da viga (varão 7) entra em cedência e que a armadura longitudinal da viga apresenta valores absolutos da tensão no interior da ligação menores que na sua periferia. Consequentemente, conclui-se que não é a presença das cintas na zona da ligação viga-pilar que justifica a redução das tensões, em valor absoluto, nas armaduras longitudinais da viga no interior da ligação (relativamente às secções da periferia da ligação viga-pilar).

Na Figura 4.22 apresenta-se em pormenor a evolução das tensões ao longo de cada varão da armadura longitudinal das vigas na ligação para os modelos RA2-CG-Ref e RA2-CG-SC, para os mesmos níveis de carga (20, 30, 40, 60, 80 e 100% de  $F_{max}$  suportada pelo modelo RA2-CG-SC). Esta figura mostra que a eliminação das cintas da ligação viga-pilar conduz a um agravamento da tensão na armadura longitudinal da viga no interior da ligação no modelo RA2-CG-SC relativamente ao modelo RA-CG-Ref, mas o valor absoluto da tensão na armadura longitudinal da viga no interior da ligação é sempre menor que na sua periferia.

A redução, em valor absoluto, das tensões nas armaduras longitudinais da viga, no interior da

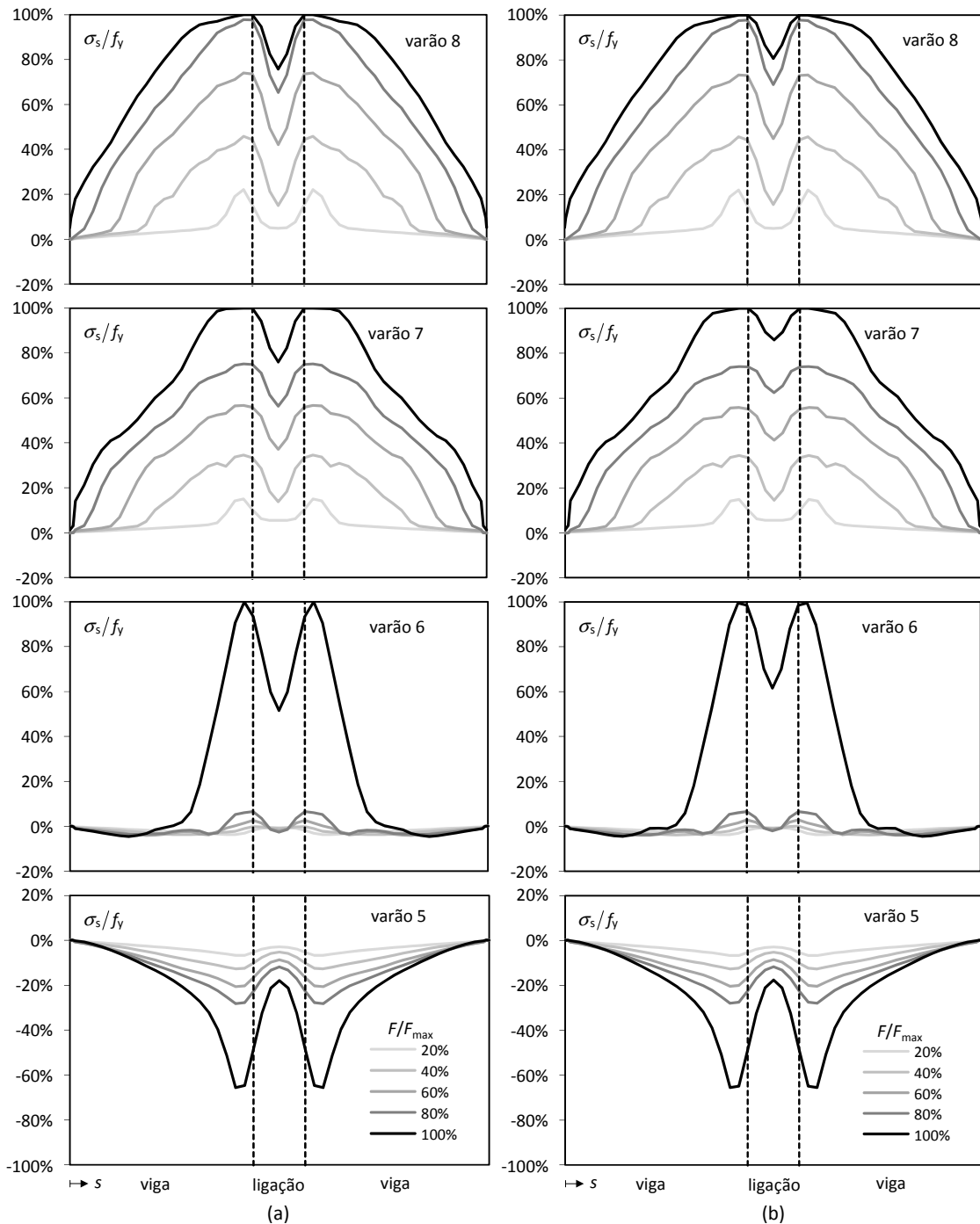


Figura 4.21 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal das vigas dos modelos (a) RA2-CG-Ref e (b) RA2-CG-SC.

ligaçao viga-pilar, para cargas simétricas, pode ser compreendida com base no equilíbrio estático das resultantes das forças aplicadas na ligação. Na Figura 4.23(a) está representada uma ligação viga-pilar interior submetida a um campo de esforços simétrico simplificado.

O equilíbrio estático da zona demarcada a tracejado na Figura 4.23(b) permite concluir que

$$\frac{T_e}{T_p} = \frac{z_p}{z_e} + \frac{V_p}{T_p} \frac{a}{z_e} \quad (4.35)$$

Uma vez que todas as quantidades representadas são positivas, então, se  $z_e = z_p$ , no interior da ligação a tensão na armadura longitudinal da viga seria maior que na periferia, por efeito da

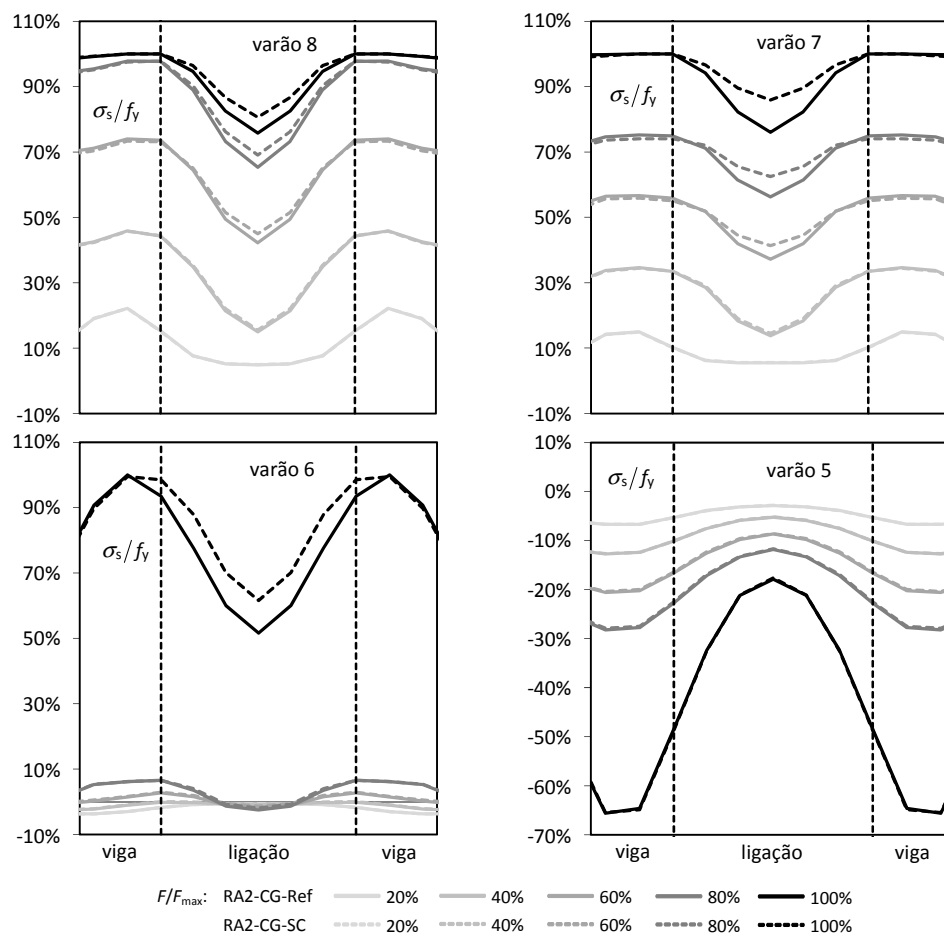


Figura 4.22 – Tensão normal na armadura longitudinal das vigas na ligação viga-pilar.

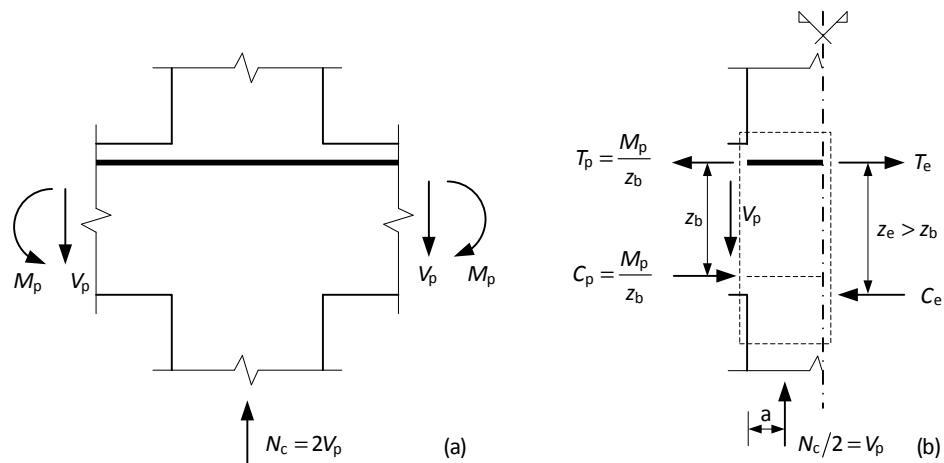


Figura 4.23 – Tensão normal na armadura longitudinal das vigas no interior da ligação (campo de esforços simétricos na ligação): (a) esforços na periferia da ligação, (b) representação simplificada das resultantes em metade da ligação.

força vertical  $V_p$  à face da ligação. Conclui-se, pois, que a redução da tensão nesta armadura no interior da ligação se deve ao aumento do braço interno  $z_e$ , associado à *dispersão das tensões de compressão* na zona da ligação. Esta dispersão resulta do aumento da altura efectiva de betão no interior da ligação por comparação com a da secção da viga.

Da análise efectuada nesta secção pode concluir-se que em ligações viga-pilar interiores com pormenorizações correntes, submetidas a acções predominantemente gravíticas, não é espectável o agravamento das tensões nas armaduras no interior da ligação relativamente às

secções da periferia. Desta forma, conclui-se que é seguro o dimensionamento das armaduras longitudinais das vigas e pilares com base no valor dos esforços nas suas extremidades efectivas (nas condições representadas na Figura 4.20(a)).

#### 4.5.2.2. Carregamento lateral (CL)

A carga máxima suportada pelo modelo representado na Figura 4.9, no decorrer da simulação numérica, quando submetido às condições de apoio e carregamento representado na Figura 4.20(b) – modelo RA2-CL-Ref – foi  $F_{\max} = 99.0$  kN para  $N_{\text{col}} = 458$  kN.

A Figura 4.24(a) representa a evolução das tensões ao longo da armadura longitudinal da viga do modelo RA2-CL-Ref.

Esta figura mostra que, contrariamente ao que se observou para os modelos RA2-CG-Ref e RA2-CG-SC,  $F_{\max}$  é atingida sem que os varões das camadas intermédias da armadura longitudinal da viga (varões 6 e 7) entrem em cedência, ficando a tensão abaixo de  $0.95f_y$ . Este resultado implica que não foi esgotada a capacidade resistente das vigas e que, conseqüentemente, foi a ligação viga-pilar que colapsou.

Na Figura 4.25 está representada a distribuição da extensão principal plástica mínima ( $\epsilon_3^p$ ) para  $F_{\max}$  e para a fase pós-pico. Verifica-se que a redução da carga aplicada na fase pós-pico conduz a um agravamento de  $\epsilon_3^p$  na zona da diagonal principal da ligação viga-pilar apesar de no restante modelo esta extensão pouco se alterar. Este agravamento sugere que o colapso ocorreu nesta zona específica do modelo por esmagamento do betão. A descontinuidade do campo de extensões na periferia da ligação representada nesta figura, é inexistente nos resultados da análise por elementos finitos, não reflectindo pois qualquer descontinuidade do modelo. De facto, resulta da extrapolação independente das extensões em diferentes macro-elementos (neste caso, vigas, pilares e ligação), efectuada na fase de pós-processamento pelo ATENA 3D.

A Figura 4.24(a) mostra também que a armadura longitudinal da viga apresenta tensões de tracção ao longo de todo o comprimento da ligação, o que confirma as conclusões de Paulay e Priestley [1992] estabelecidas a partir de uma analogia com um modelo de treliça plana (§5.5.2). Este resultado permite ainda concluir que a ligação viga-pilar sofre uma expansão na direcção horizontal no plano do pórtico quando o momento flector em faces opostas da sua periferia tem sinal oposto.

A Figura 4.24(a) também mostra que, nas camadas exteriores da armadura longitudinal da viga (varões 5 e 8), o valor absoluto da tensão no interior da ligação é aproximadamente definido pela interpolação linear dos valores na sua periferia, ou seja, o valor da tensão nestes varões no interior da ligação é balizado pela tensão na sua periferia. Já nas camadas interiores da armadura longitudinal da viga (varões 6 e 7), o valor absoluto da tensão no interior da ligação excede os valores da sua periferia, no máximo em 3% de  $f_y$ .

Por fim, a Figura 4.24(a) também mostra que a armadura longitudinal da viga, em particular as camadas exteriores (varões 5 e 8), apresentam tensões de tracção na periferia da ligação mesmo quando estão envolvidas por betão com tensão de compressão segundo a direcção dessa armadura. Esta distribuição de tensões indica que ocorre escorregamento da armadura

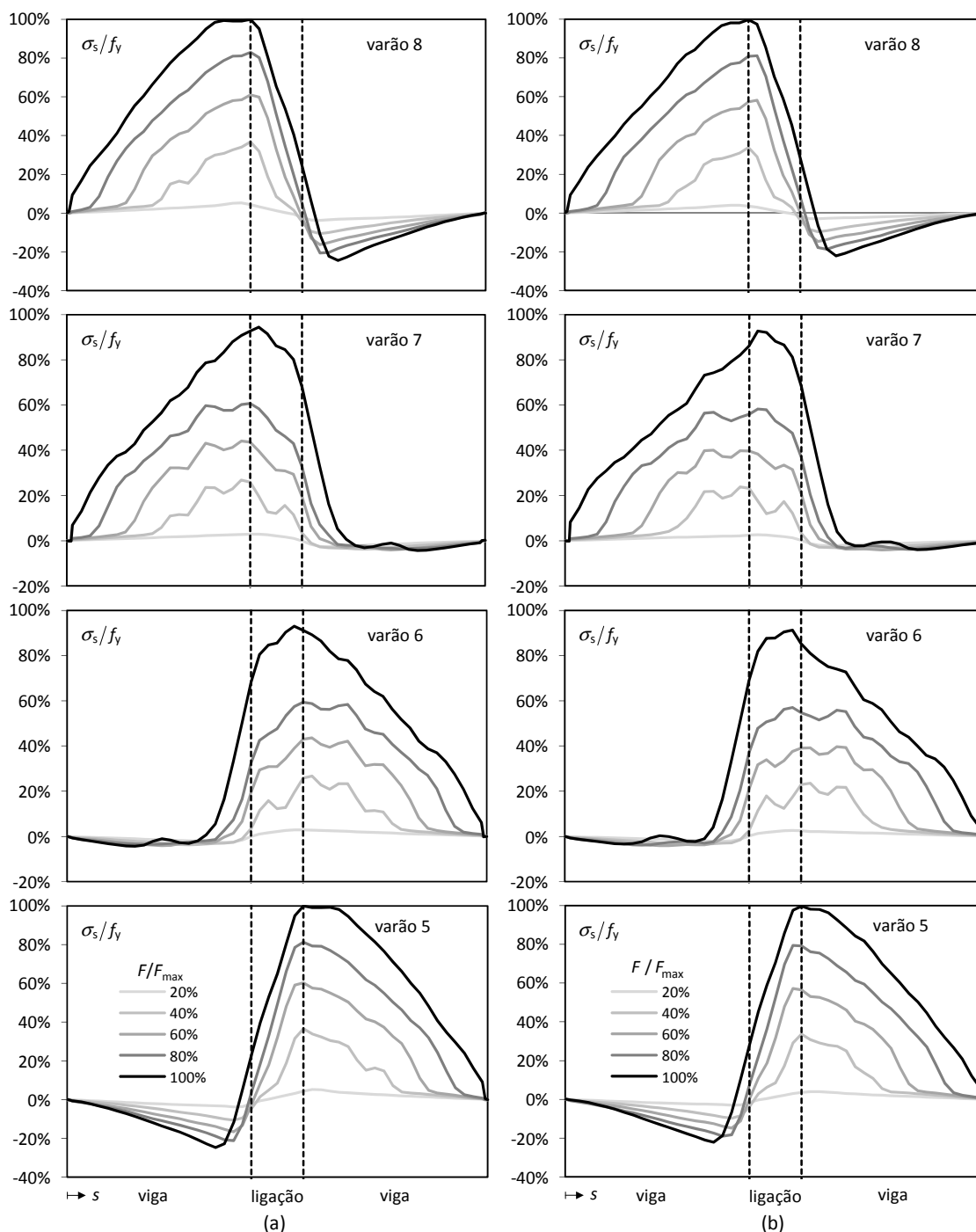


Figura 4.24 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal das vigas dos modelos (a) RA2-CL-Ref e (b) RA2-CL-SC.

nesta zona provocado pela tensão de tracção introduzida pela viga na face oposta da ligação. Esta distribuição de tensões revela assim que, mesmo para níveis reduzidos de carga, em ligações viga-pilar interiores de estruturas porticadas de betão armado, pode existir alguma influência da viga situada num dos lados da ligação sobre a distribuição de tensões na armadura longitudinal da viga oposta junto à interface ligação-viga.

A Figura 4.26(a) representa a evolução da tensão normal ao longo da armadura longitudinal do pilar do modelo RA2-CL-Ref.

A Figura 4.26(a) mostra que, para valores reduzidos de  $F / F_{\max}$ , a armadura longitudinal do pilar na ligação está toda comprimida em resultado da carga axial  $N_{\text{col}}$  aplicada ao pilar. Em

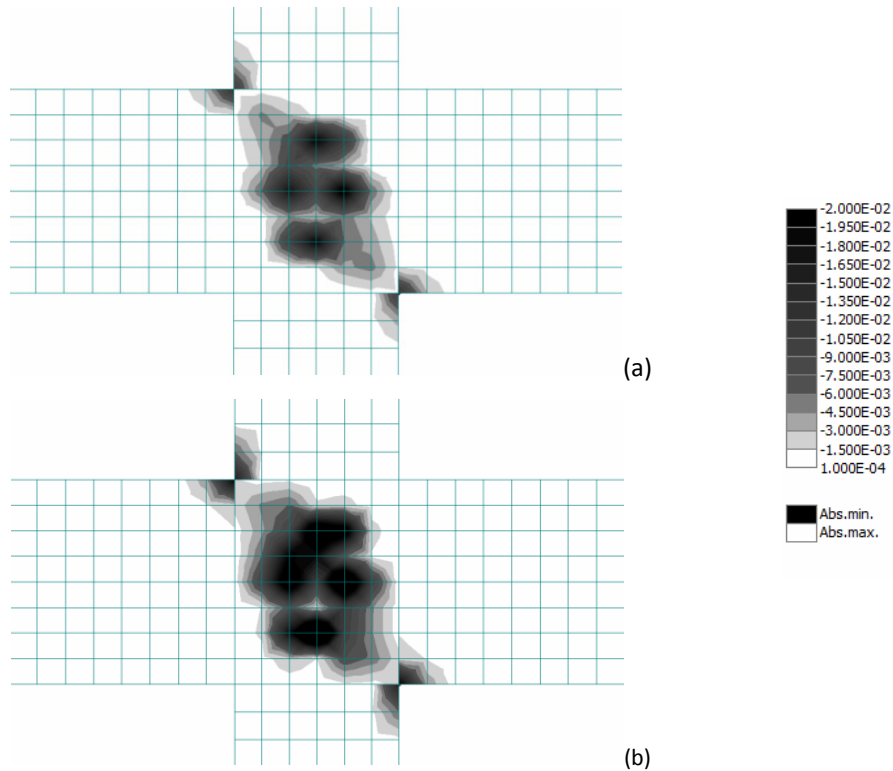


Figura 4.25 – Distribuição de  $\varepsilon_3^D$  no plano médio do modelo RA2-CL-Ref: (a)  $F = F_{\max} = 99.0$  kN, (b)  $F = 93.2$  kN (pós-pico).

contrapartida, para valores mais elevados de  $F$ , a armadura longitudinal dos pilares está traccionada ao longo de todo o comprimento da ligação (Paulay e Priestley [1992]) o que permite concluir que a ligação sofre um alongamento na direcção vertical. Como anteriormente já se tinha concluído que, nesta situação, a ligação também sofre um alongamento na direcção horizontal do plano de carga, pode-se afirmar que a ligação sofre uma expansão (dilatação) bidireccional no seu próprio plano (plano do pórtico).

A Figura 4.26(a) mostra que, nas camadas exteriores da armadura do pilar (varões 1 e 3), o valor da tensão normal no interior da ligação é aproximadamente definido pela interpolação linear dos valores na sua periferia. Já nas camadas interiores da armadura do pilar (varões 2 e 4), o valor da tensão normal no interior da ligação excede, em alguns casos em mais de 20% de  $f_y$ , os valores na sua periferia.

A Figura 4.27 representa a evolução da tensão normal ao longo das cintas da ligação. Esta figura revela que, para  $F_{\max}$ , as cintas no ramo 1 apresentam níveis de tensão semelhantes e próximos de  $f_y$ , o que sugere que o colapso da ligação ocorre simultaneamente com a cedência das cintas.

A Figura 4.28 apresenta, de forma esquemática, o andamento da tensão normal nas cintas na zona da ligação representada na Figura 4.27, podendo-se constatar que o seu valor é máximo junto à escora diagonal de compressão, o que confirma o importante papel das cintas, de confinamento transversal do betão.

É ainda possível observar na Figura 4.27 o efeito da expansão lateral do betão junto ao banzo de compressão das vigas: sob efeito da compressão introduzida pelas vigas na periferia da ligação, o betão tende a expandir na direcção ortogonal ao plano do pórtico. Este efeito é contrariado pelos ramos das cintas perpendiculares a este plano (ramo 3 da cinta 45 e ramo 2 da cinta 48).

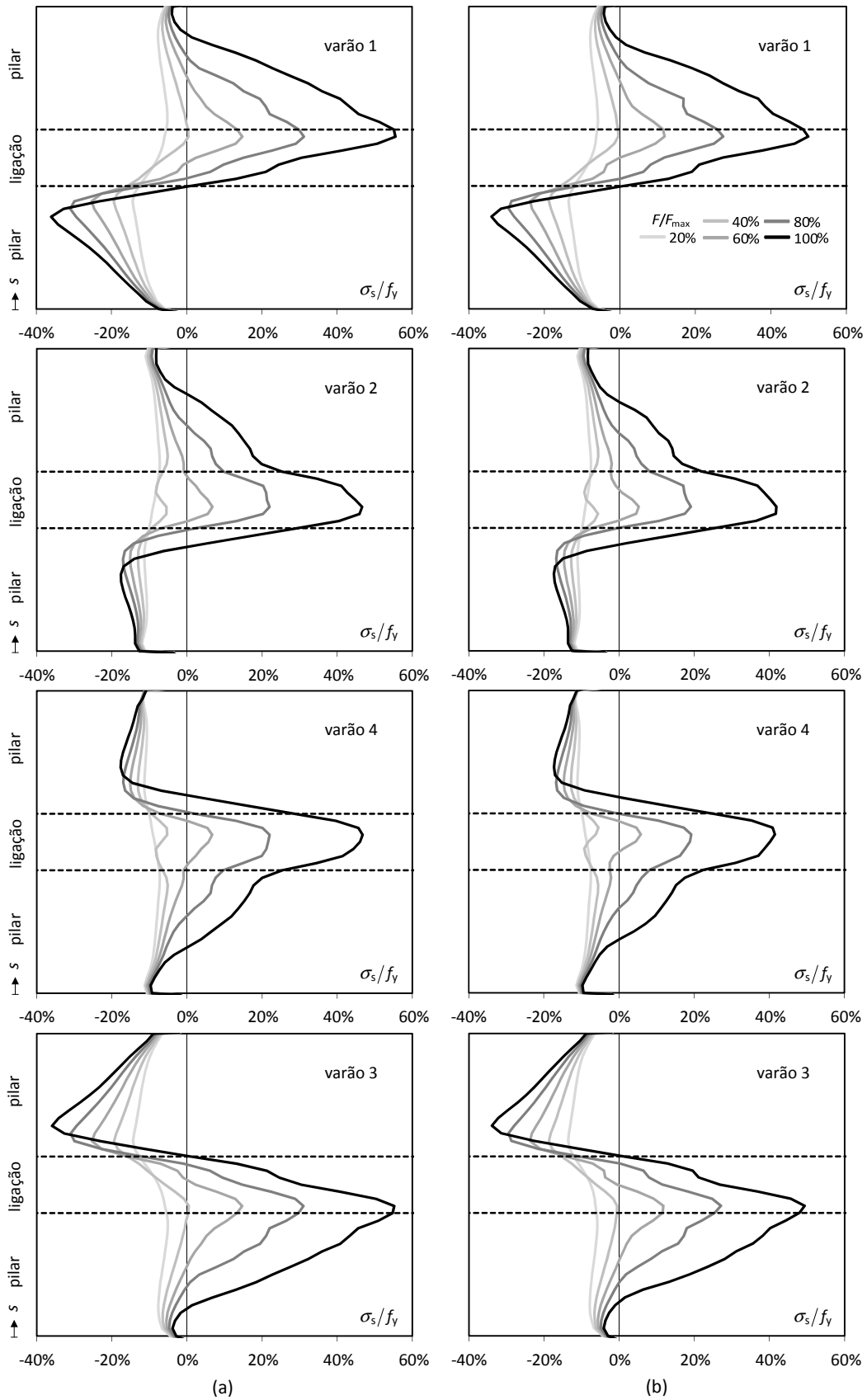


Figura 4.26 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal dos pilares dos modelos (a) RA2-CL-Ref, (b) e RA2-CL-SC.

Tal como já foi referido, contrariamente ao observado nas camadas interiores da armadura longitudinal do pilar (varões 2 e 4 da Figura 4.26), nas camadas interiores da armadura



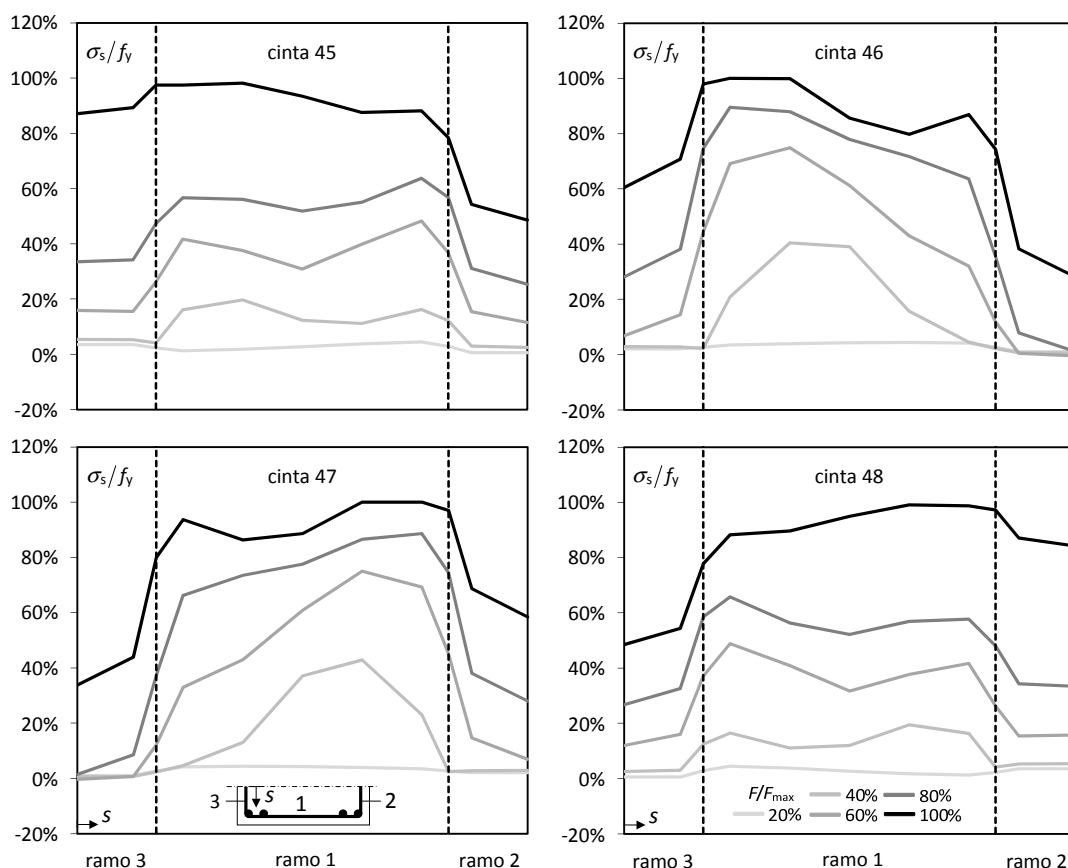


Figura 4.27 – Evolução da tensão normal nas cintas na ligação do modelo RA2-CL-Ref.

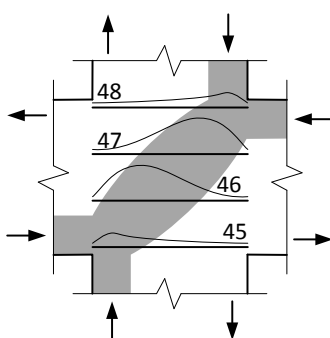


Figura 4.28 – Representação esquemática da evolução da tensão nas cintas da ligação do modelo RA2-CL-Ref.

longitudinal da viga (varões 6 e 7 da Figura 4.26) o valor da tensão normal no interior da ligação não ultrapassa significativamente os valores na sua periferia. Para esclarecer se esta diferença é consequência da presença das cintas, ou, mais precisamente, dos seus ramos paralelos à armadura longitudinal da viga, foi desenvolvido um novo modelo, denominado RA2-CL-SC, em tudo similar ao modelo RA2-CL-Ref, mas sem as cintas no interior da ligação.

O modelo RA2-CL-SC apresentou  $F_{max} = 93.1\text{kN}$  para  $N_{col} = 458\text{ kN}$ , correspondendo aproximadamente a 94% da carga máxima suportada pelo modelo com cintas (RA2-CL-Ref).

As Figuras 4.24(b) e 4.26(b) representam a evolução da tensão normal ao longo da armadura longitudinal da viga e do pilar do modelo RA2-CL-SC, respectivamente. As Figuras 4.29 e 4.30 apresentam em pormenor a evolução das tensões ao longo de cada varão longitudinal das vigas e pilares na ligação para os modelos RA2-CL-Ref e RA2-CL-SC para os mesmos níveis de carga (20, 40, 60, 80 e 100% de  $F_{max}$  do modelo RA2-CL-SC).

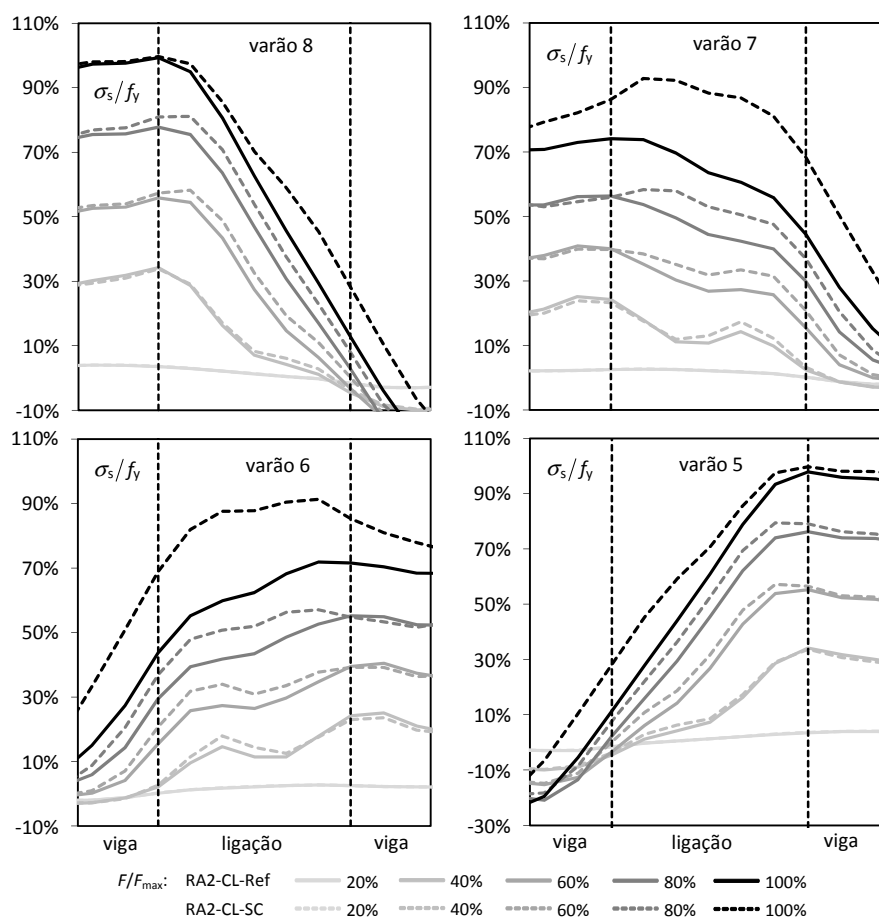


Figura 4.29 – Tensão normal na armadura longitudinal das vigas na ligação viga-pilar.

A análise das Figuras 4.29 e 4.30 revela que a eliminação das cintas na ligação aumenta o valor da tensão nas camadas internas da armadura longitudinal da viga (varões 6 e 7) no interior da ligação tanto em termos absolutos como em termos relativos, tomando como referência os limites definidos pelos valores nas secções da periferia da ligação (agravamento de 7% de  $f_y$ ). Já a tensão nas camadas exteriores de armadura longitudinal da viga (varões 5 e 8) no interior da ligação está balizada pela tensão nas secções da periferia, independentemente da existência ou não de cintas na zona de ligação. Estes resultados permitem concluir que a redução da capacidade de carga do modelo RA2-CL-SC relativamente ao modelo RA2-CL-Ref é pouco significativa devido à reserva de capacidade das camadas interiores de armadura longitudinal da viga que, no modelo RA2-CL-SC, suportaram os esforços que eram suportados pelas cintas no modelo RA2-CL-Ref.

A Figura 4.30 revela que a supressão das cintas na ligação no modelo RA2-CL-SC não conduz a um agravamento relativo significativo das tensões na armadura longitudinal do pilar no interior da ligação relativamente à sua periferia (por comparação com o verificado no modelo RA2-CL-Ref). No entanto, esta figura revela um agravamento generalizado da tensão na armadura longitudinal do pilar na ligação no modelo RA2-CL-SC relativamente ao modelo RA2-CL-Ref.

Os resultados apresentados para a ligação viga-pilar interior submetida a carga lateral mostram que, de uma maneira geral, se a ligação tiver armadura transversal, só será expectável que a tensão na armadura longitudinal no interior da ligação ultrapasse os valores definidos pela tensão na periferia da ligação no caso das camadas interiores do pilar.

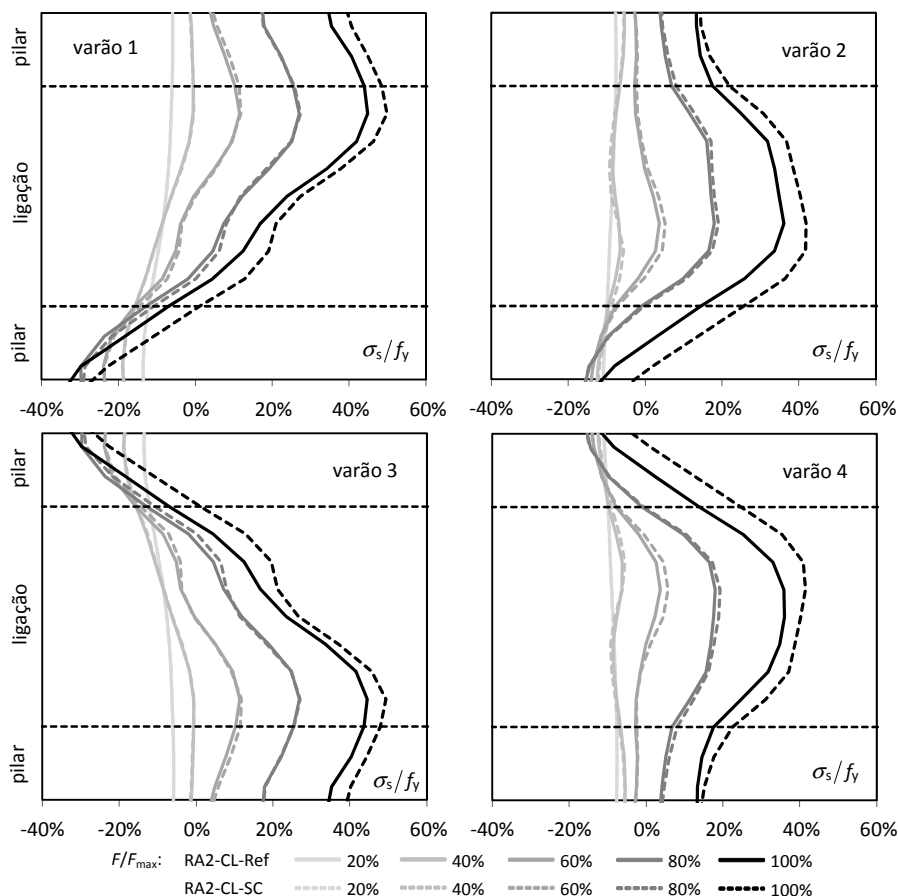


Figura 4.30 – Tensão normal na armadura longitudinal dos pilares na ligação viga-pilar.

Para avaliar se o dimensionamento da armadura longitudinal dos pilares e das vigas a partir dos esforços nas extremidades efectivas conduz a uma redução da capacidade resistente da ligação viga-pilar (nos casos em que se observou um agravamento das tensões nestas armaduras no interior da ligação relativamente ao valor da tensão na periferia da ligação) foram desenvolvidos dois novos modelos:

- (i) RA2-CL-CC-ASC-LFY que difere do modelo RA2-CL-Ref na tensão de cedência dos varões interiores da armadura longitudinal dos pilares: foi limitada a 20% da tensão de cedência correspondente no modelo RA2-CL-Ref, ou seja, à tensão instalada nestes varões na periferia da ligação na Figura 4.30;
- (ii) RA2-CL-SC-ASV-LFY que difere do modelo RA2-CL-SC na tensão de cedência dos varões interiores da armadura longitudinal das vigas: foi limitada a 85% da tensão de cedência correspondente no modelo RA2-CL-SC, ou seja, à tensão instalada nestes varões na periferia da ligação na Figura 4.29.

A capacidade de carga do modelo RA2-CL-CC-ASC-LFY foi  $F_{max} = 96.6\text{kN}$ , o que corresponde a uma redução de 2.5% relativamente ao modelo RA2-CL-Ref, pelo que se pode concluir que a redução é pouco relevante.

O modelo RA2-CL-CC-ASC-LFY apresenta distribuições da tensão normal (i) nas cintas e na armadura longitudinal das vigas similares às do modelo RA2-CL-Ref e (ii) nos varões da armadura longitudinal dos pilares com algumas diferenças relativamente à do modelo RA-CL-Ref (Figura 4.31).

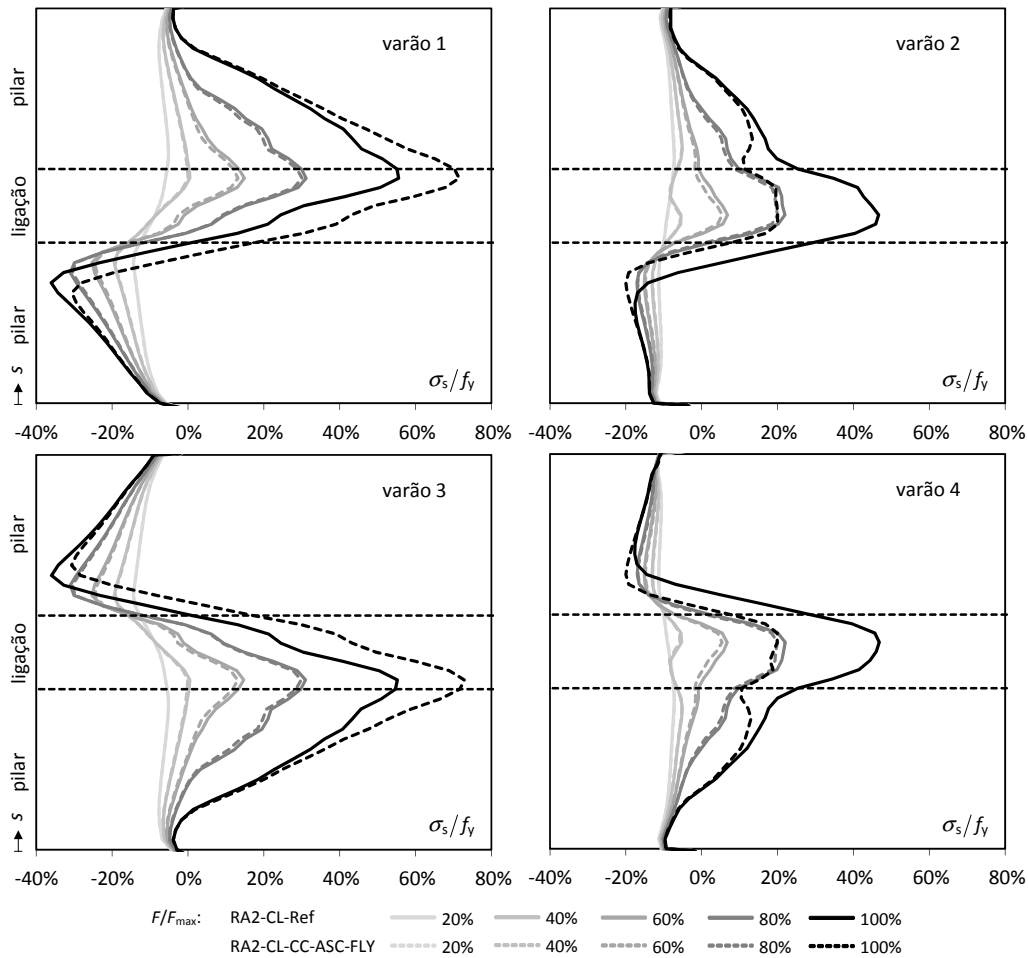


Figura 4.31 – Tensão normal na armadura longitudinal dos pilares nos modelos RA2-CL-Ref e RA2-CL-CC-ASC-FY.

A Figura 4.31 mostra que limitando a tensão nos varões interiores da armadura longitudinal dos pilares (varões 2 e 4 do modelo RA-CL-CC-ASC-LFY) ocorre um agravamento generalizado da tensão nos varões externos da mesma armadura no interior da ligação (varões 1 e 3) relativamente ao modelo RA2-CL-Ref. Este agravamento conduz a uma distribuição de tensões nos varões 1 e 3 mais linearizada ao longo do pilar (mais em consonância com a distribuição de momento flector) mas não aumenta significativamente o valor da tensão no interior da ligação relativamente aos valores da periferia. Consequentemente, pode-se concluir que o dimensionamento dos pilares com base nos valores dos esforços nas suas extremidades efectivas não afecta a capacidade resistente das ligações interiores.

A capacidade de carga do modelo RA2-CL-SC-ASV-LFY foi  $F_{max} = 92.1\text{kN}$ , o que corresponde a uma redução de 1% relativamente ao modelo RA2-CL-SC, pelo que se pode concluir que a redução é pouco relevante. Além disso, a distribuição de tensão nas armaduras longitudinais dos pilares e das vigas no modelo RA2-CL-SC-ASV-LFY não apresenta diferenças significativas relativamente ao modelo RA2-CL-SC – com excepção dos varões interiores da armadura longitudinal das vigas (varões 6 e 7) em que o limite de  $85\% f_y$  impossibilita o agravamento da tensão no interior da ligação relativamente à periferia, Figura 4.32.

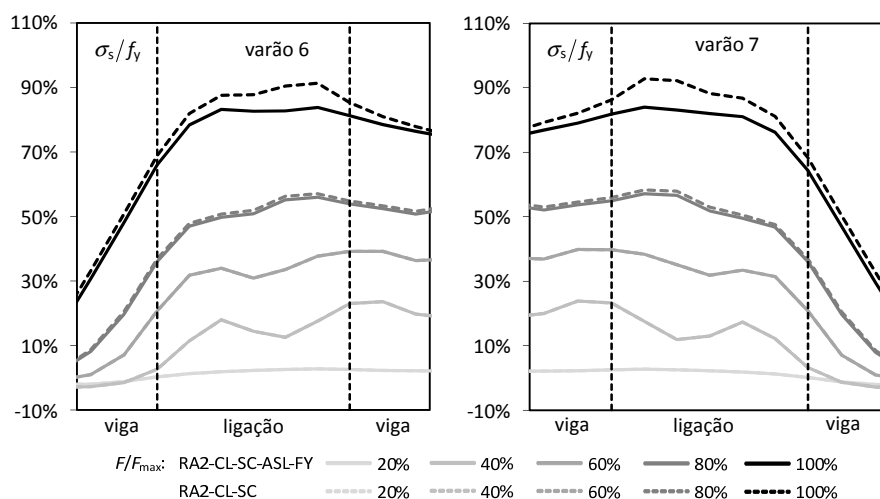


Figura 4.32 – Tensão normal na armadura longitudinal das vigas nos modelos RA2-CL-SC e RA2-CL-SC-ASV-FY.

### 4.5.3. Ligações de extremidade

Apesar de Hegger, Sherif *et al.* [2003] apresentarem resultados experimentais relativos a ligações viga-pilar de extremidade, os espécimes ensaiados por estes autores apresentam pormenorizações pouco comuns da armadura na ligação, por exemplo, armadura transversal em U horizontal (laços, tipologia N6 de acordo com a Tabela 2.2). Além disso, estes autores não relataram qualquer agravamento da tensão na armadura longitudinal das vigas e dos pilares no interior da ligação relativamente ao seu valor nas extremidades efectivas.

Assim, os ensaios reportados por estes autores foram preteridos a favor dos realizados por Ortiz [1993]. Ortiz [1993] ensaiou sete subestruturas com ligação viga-pilar de extremidade submetidas a carregamento quase-estático e monotónico, tendo em vista o desenvolvimento de modelos de escoras e tirantes para o dimensionamento desta tipologia de ligação viga-pilar. Ortiz [1993] focou-se no estudo do efeito do diâmetro de dobragem da armadura longitudinal da viga, do esforço axial nos pilares e da quantidade de cintas na ligação.

Os resultados publicados por Ortiz [1993] mostram que a armadura longitudinal da viga do espécimes BCJ1 e BCJ3 apresentam valores de extensão no interior da ligação maiores que na sua periferia. Nestes espécimes não foi aplicado esforço axial no pilar superior, não foram dispostas cintas na ligação, e os varões das armaduras longitudinais das vigas apresentam diferentes raios internos de dobragem.

Para procurar avaliar se a distribuição de extensões reportada por Ortiz [1993] resulta de um efectivo agravamento das tensões nas armaduras longitudinais nas vigas no interior das ligações viga-pilar ou é o resultado de algum fenómeno localizado (*e.g.*, fendas potenciadas pela instrumentação – a instrumentação elimina a aderência aço-betão –, extensómetro colado na face mais traccionada da armadura – em varões curvilíneos é expectável flexão nos varões) foram desenvolvidos modelos numéricos baseados nos espécimes de Ortiz [1993]. Assim, além de um modelo numérico correspondente ao espécime BCJ4 de Ortiz [1993], foram desenvolvidos outros com a mesma geometria mas com diferentes pormenorizações da armadura na ligação para simular aproximadamente os espécimes BCJ1 e BCJ3. A Figura 4.33 representa a configuração genérica deste modelos, sendo  $F$  a força aplicada e  $R_{V,b}$ ,  $R_{H,c}$  e  $R_{V,c}$  as reacções de apoio.

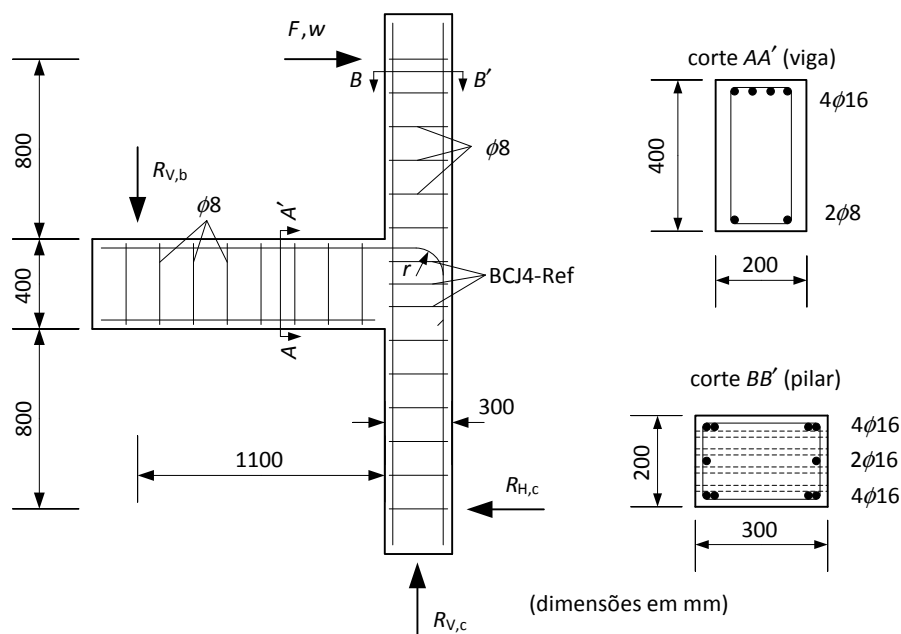


Figura 4.33 – Configuração genérica dos modelos numéricos estudados.

O modelo BCJ4-Ref corresponde ao espécime BCJ4 (Ortiz [1993]) e apresenta três cintas de 8 mm na ligação e um raio interno de dobra das armaduras longitudinais da viga de 65 mm.

O segundo modelo desenvolvido, BCJ4-SC-R65, é semelhante ao modelo BCJ4-Ref mas sem cintas na zona da ligação e corresponde aproximadamente ao espécime BCJ1. O terceiro modelo estudado, BCJ4-SC-R130, é semelhante ao segundo, mas tem maior raio interno da dobra da armadura longitudinal (130mm), correspondendo aproximadamente ao espécime BCJ3. Estes últimos modelos de EF não correspondem exactamente aos espécimes BCJ1 e BCJ3, e são adaptações do modelos BCJ4-Ref, para isolar o efeito das variáveis estudadas.

A carga máxima suportada pelo modelo BCJ4-Ref foi  $F_{\max} = 88.2$  kN enquanto o valor experimental correspondente reportado por Ortiz [1993] foi  $F_{\max} = 81.3$  kN, correspondendo a um desvio de cerca de 7.8%. Este desvio é pouco expressivo tendo em consideração a dispersão habitual dos valores de resistência à compressão do betão em ensaios de compressão uniaxial (foram ensaiados 3 cubos de betão, com 15 cm de lado, e, simplificada, assumiu-se que a resistência à compressão do provete cilíndrico com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura é 80% da resistência à compressão do provete cúbico) e, além disso, não é relevante para o objectivo desta análise.

Na Figura 4.34 está representada, a título exemplificativo, a discretização utilizada no modelo da subestrutura BCJ4-Ref, bem como a disposição da armadura. Na modelação das ligações viga-pilar de extremidade foram utilizados os mesmos parâmetros que nos modelos de ligações viga-pilar interiores (§4.4) para a relação constitutiva do betão, os mesmos tipos de elementos finitos e a mesma dimensão para os elementos resultantes da discretização. Por forma a reduzir o volume de cálculo, simplificou-se o modelo tendo em consideração a simetria em relação ao plano do pórtico da ligação e só se modelou metade da subestrutura.

A Figura 4.35 identifica os varões da armadura de acordo com a numeração do ATENA 3D e a Figura 4.36 representa esquematicamente as condições de apoio e cargas aplicadas.

As Figuras 4.37 e 4.38 representam a evolução da tensão normal na armadura longitudinal da

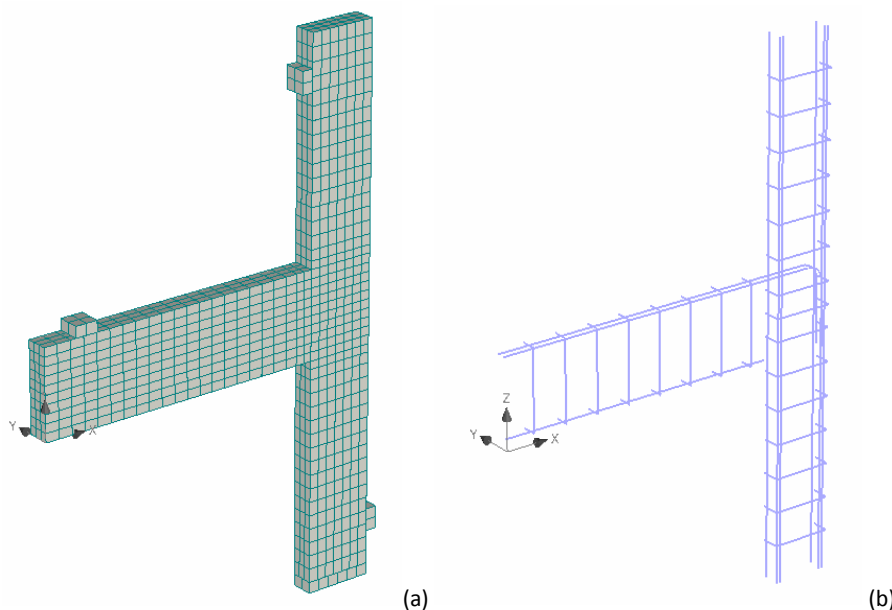


Figura 4.34 – Modelo BCJ4-Ref no ATENA 3D: (a) malha de elementos finitos, (b) disposição da armadura.

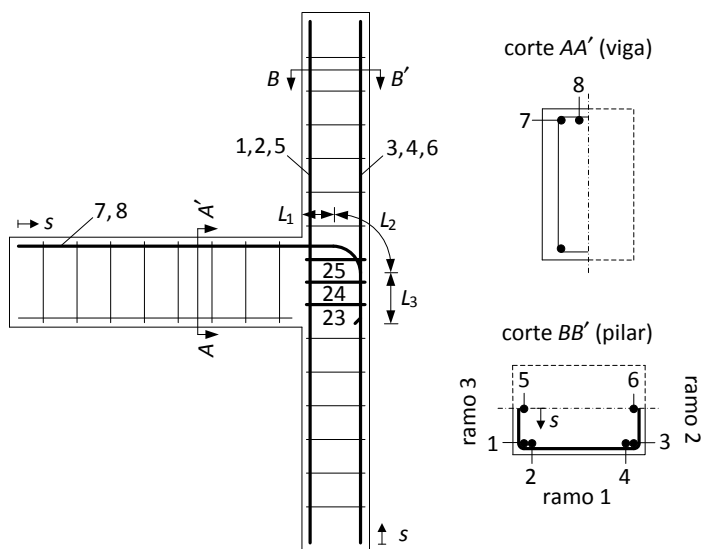


Figura 4.35 – Numeração dos elementos da armadura da viga, pilares e ligação dos modelos BCJ4/BCJ3.

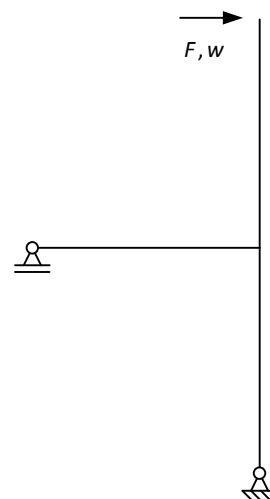


Figura 4.36 – Cargas aplicadas e condições de apoio.

viga e dos pilares do modelo BCJ4-Ref. Estas figuras revelam que, no modelo BCJ4-Ref, a tensão na armadura longitudinal da viga e dos pilares no interior da ligação apresenta valores que não excedem significativamente os limites do intervalo definido pelo valor da tensão nas secções da periferia da ligação. Verifica-se ainda que, quando  $F_{max}$  é atingida, o valor da tensão na armadura longitudinal da viga e pilares ainda dista significativamente de  $f_y$ , pelo que se conclui que o colapso do modelo ocorre por colapso da ligação.

A Figura 4.39 representa a evolução da tensão normal ao longo das cintas da ligação. A análise desta figura permite concluir que (i) o colapso da ligação ocorre quando a cinta intermédia (varão 24) entra em cedência, (ii) em cada cinta, o valor máximo da tensão normal ocorre na zona da escora diagonal (tal como em ligações interiores, Figura 4.28) e (iii) as cintas confinam o betão na direcção perpendicular ao plano de carga, junto à extremidade superior da escora (ramo 2 das cintas 24 e 25).

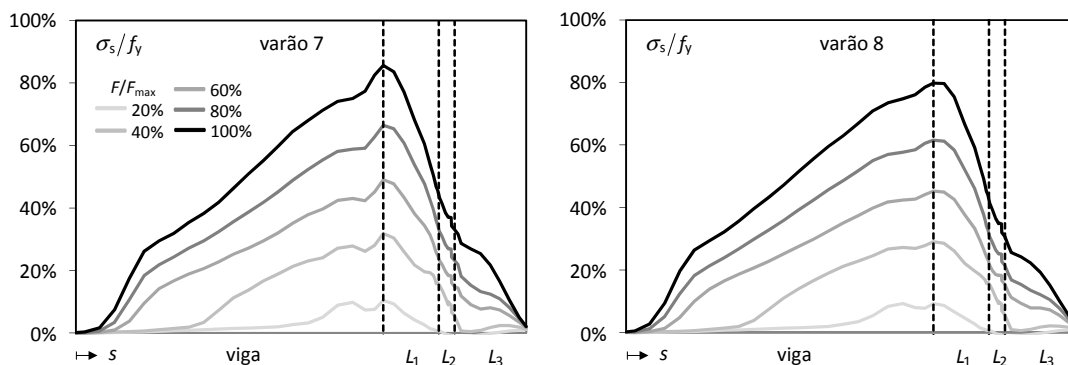


Figura 4.37 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga do modelo BCJ4-Ref.

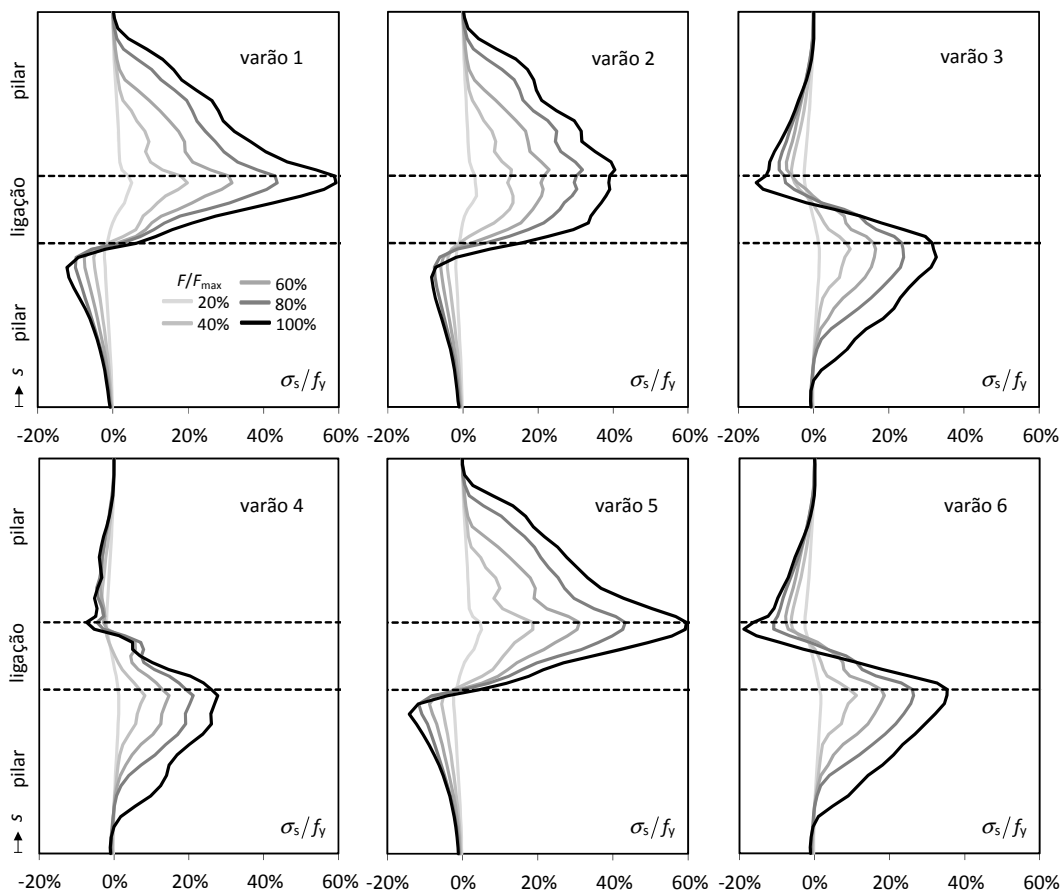


Figura 4.38 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal dos pilares no modelo BCJ4-Ref.

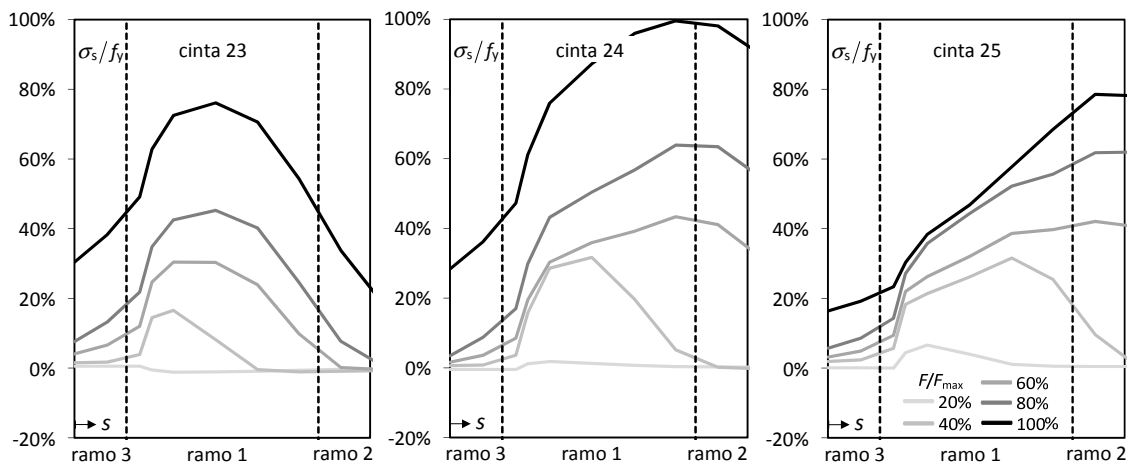


Figura 4.39 – Evolução da tensão normal nas cintas na ligação do modelo BCJ4-Ref.



Na Figura 4.40 representa a distribuição de  $\varepsilon_3^p$  no betão na ligação e nas extremidades dos elementos lineares adjacentes à ligação no plano médio do modelo BCJ4-Ref para  $F = F_{max}$  e, no troço pós-pico, para  $F = 0.64 F_{max}$ . Observa-se que, apesar da redução da carga aplicada, ocorre um agravamento de  $\varepsilon_3^p$  que se restringe quase exclusivamente à zona da diagonal da ligação viga-pilar, indicando que o colapso do modelo ocorre na ligação por esmagamento do betão.

Este resultado mostra que uma ligação viga-pilar de betão armado, mesmo possuindo uma quantidade de armadura transversal idêntica à requerida nos pilares adjacentes, pode condicionar a capacidade de carga da estrutura, por colapsar antes de se esgotar a capacidade resistente nas extremidades efectivas das vigas e pilares adjacentes.

As Figuras 4.41 e 4.42 representam a tensão na armadura longitudinal da viga e dos pilares do modelo BCJ4-SC-R65, em que  $F_{max} = 73.5 \text{ kN}$ . Apesar da quantidade de armadura transversal na ligação do modelo BCJ4-Ref não ser muito elevada (3 cintas com 8 mm de diâmetro), a introdução destas armaduras correspondeu a um aumento de aproximadamente 20% da capacidade de carga da ligação relativamente ao modelo BCJ4-SC-R65. Esta variação indica que o efeito da armadura transversal em ligações viga-pilar de extremidade é muito mais relevante que em ligações viga-pilar interiores.

As Figuras 4.41 e 4.42 mostram que, no modelo BCJ4-SC-R65, a tensão na armadura longitudinal da viga e dos pilares no interior da ligação apresenta valores que não excedem significativamente os limites do intervalo definido pelo valor da tensão nas secções da periferia da ligação.

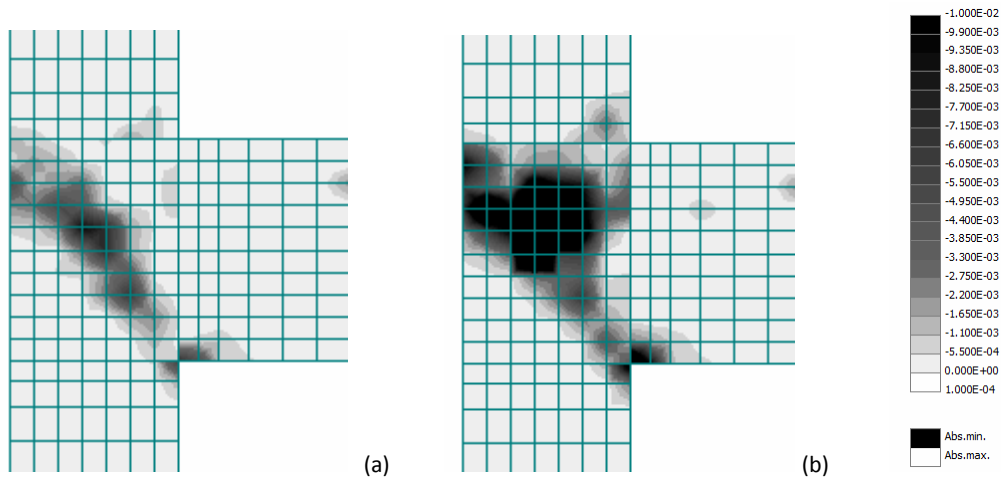


Figura 4.40 – Distribuição de  $\varepsilon_3^p$  no plano médio do modelo BCJ4-Ref para: (a)  $F = F_{max} = 88.2 \text{ kN}$ , (b)  $F = 56.5 \text{ kN}$  (pós-pico).

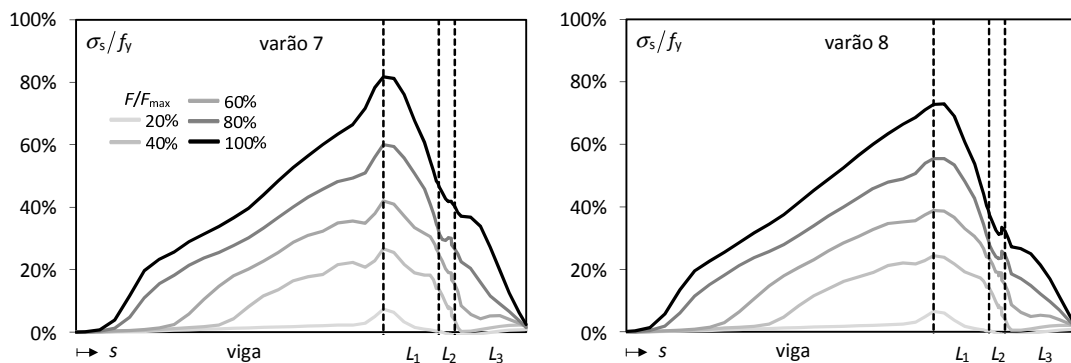


Figura 4.41 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga do modelo BCJ4-SC-R65.

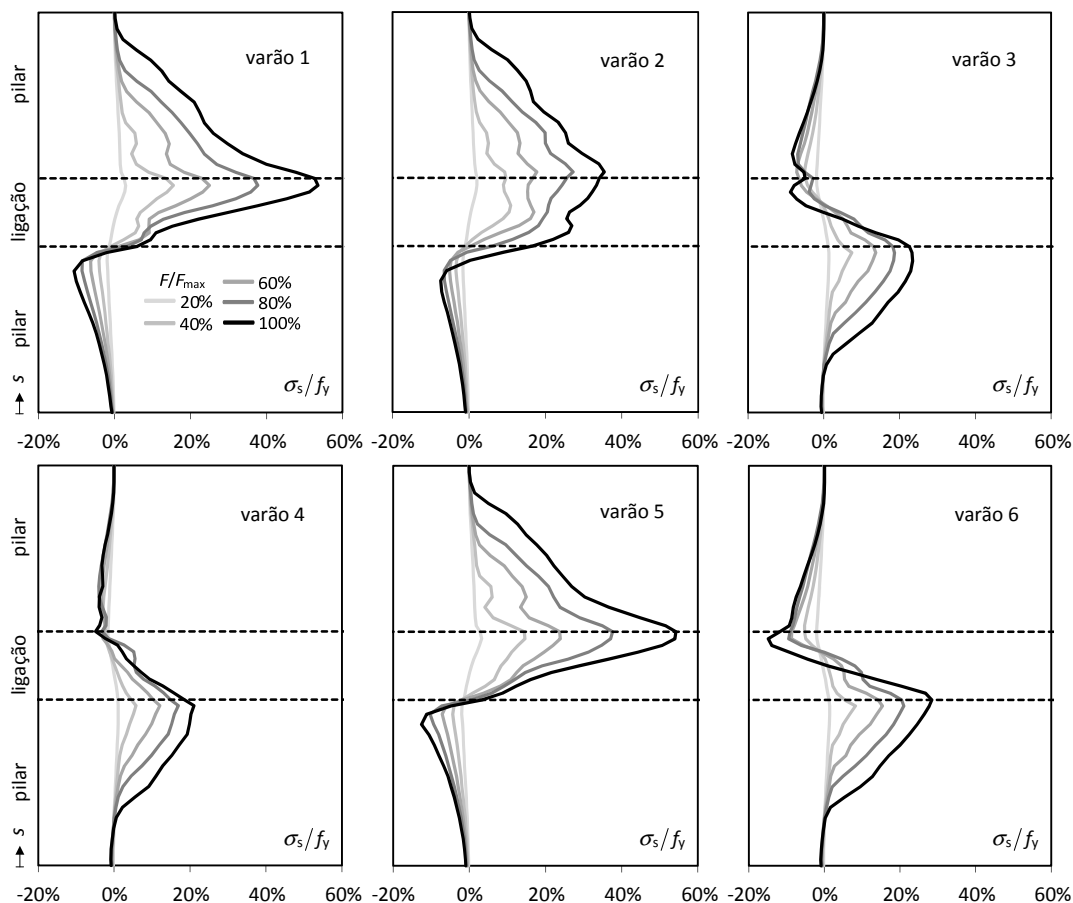


Figura 4.42 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal dos pilares no modelo BCJ4-SC-R65.

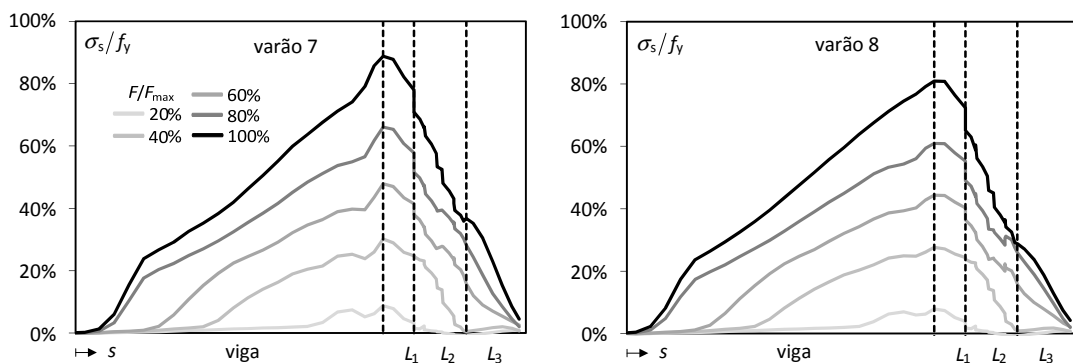


Figura 4.43 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga do modelo BCJ4-SC-R130.

As Figuras 4.43 e 4.44 representam a tensão na armadura longitudinal da viga e dos pilares do modelo BCJ4-SC-R130, em que  $F_{max} = 82.2$  kN. A carga do colapso deste modelo é 12% superior à do modelo MCJ4-SC-R65, indicando por isso que o valor do raio da dobra da armadura longitudinal da viga no interior da ligação viga-pilar pode afectar a resistência da ligação.

As Figuras 4.43 e 4.44 mostram que, no modelo BCJ4-SC-R130, a tensão na armadura longitudinal da viga e dos pilares no interior da ligação apresenta valores que não excedem significativamente os limites do intervalo definido pelo valor da tensão nas secções da periferia da ligação – a Figura 4.44 revela um pequeno agravamento da tensão em alguns varões da armadura longitudinal comprimida do pilar (varões 1 e 6) no interior da ligação relativamente à periferia, o qual é pouco relevante dado o valor reduzido da tensão nesta armadura.

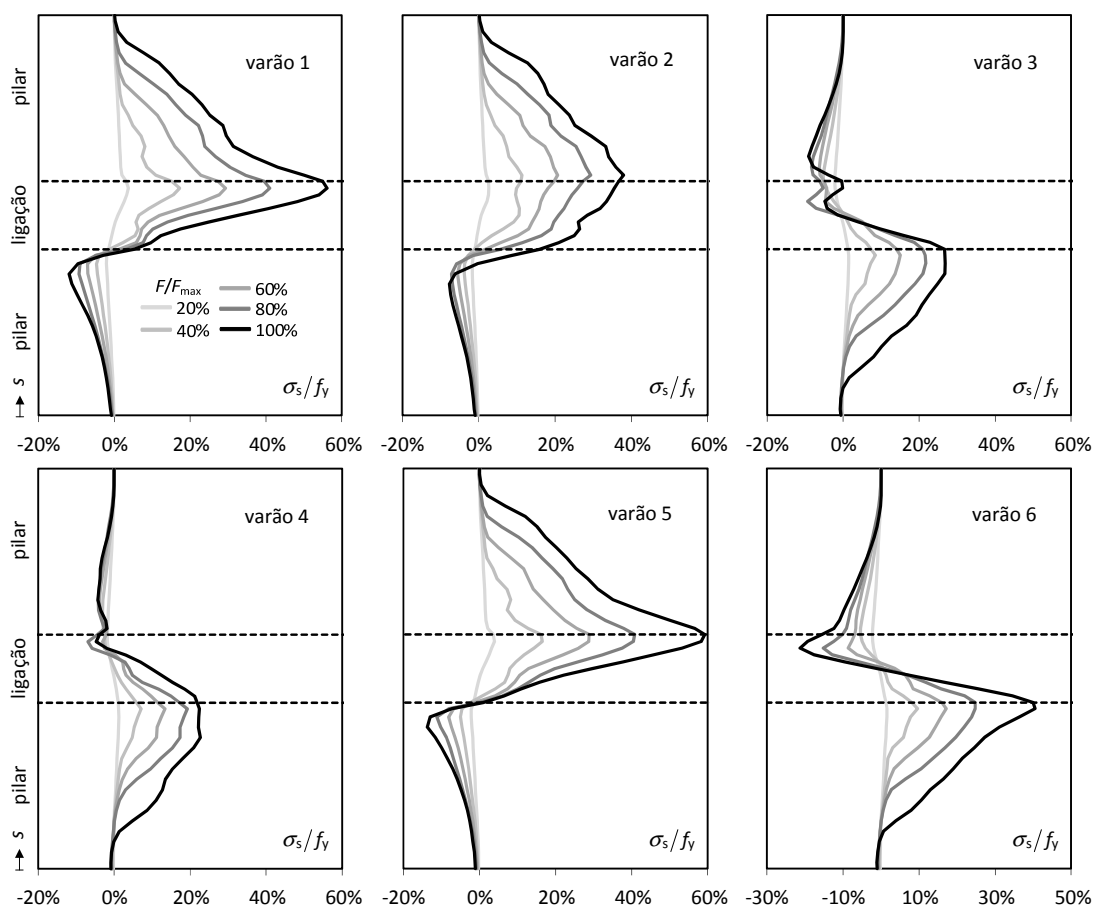


Figura 4.44 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal dos pilares no modelo BCJ4-SC-R130.

Tendo em consideração os resultados da análise dos modelos BCJ4-Ref, BCJ4-SC-R65 e BCJ4-SC-R130, pode-se concluir que, em ligações viga-pilar de betão armado de extremidade, a tensão na armadura longitudinal das vigas e dos pilares no interior da ligação não excede de forma relevante os limites do intervalo definidos pelos valores da tensão na periferia da ligação. Consequentemente, não é espectável que o dimensionamento das vigas e pilares com base no valor dos esforços nas suas extremidades efectivas conduza à redução da capacidade resistente da ligação ou destes elementos.

É expectável que os resultados obtidos para ligações viga-pilar de extremidade sejam extensíveis a ligações viga-pilar de cobertura na medida em que a pormenorização da armadura destas ligações é, em muitos casos, idêntica.

#### 4.5.4. Ligações de cobertura de extremidade

Rungrojsaratis e Ueda [1987] publicaram resultados experimentais de ligações de cobertura de extremidade em que a tensão na armadura longitudinal da viga e pilar no interior da ligação (no início da dobra) é superior à das secções da periferia em todos os espécimes ensaiados. Os ensaios realizados por estes autores impunham momentos com tendência a reduzir o ângulo inicialmente recto formado pela viga e pilar (momentos negativos ou de fecho). Com excepção de leituras pontuais reportadas por Luo, Durrani *et al.* [1994], não foram encontradas publicações que confirmem os resultados de Rungrojsaratis e Ueda [1987].

Para averiguar se os resultados publicados por Rungrojsaratis e Ueda [1987] traduzem

efectivamente uma distribuição de tensão passível de ocorrer neste tipo de ligações viga-pilar, foram modeladas ligações de cobertura de extremidade submetidas a momentos de abertura (MA) e de fecho (MF).

Não se modelou nenhum dos espécimes de ligações de cobertura de extremidade encontrados na bibliografia porque a maioria destes espécimes são ligações parede-parede ou parede-laje (Johansson [2001], Moretti e Tassios [2011]) e não viga-pilar. Além disso, os estudos experimentais encontrados sobre ligações viga-pilar de cobertura de extremidade habitualmente utilizaram modelos produzidos numa escala muito reduzida (Rungrojsaratis e Ueda [1987]).

Os modelos numéricos desenvolvidos nesta secção apresentam igual secção transversal para viga e pilar e quantidades de armadura moderadas ( $A_{st}/(bh) \leq 2\%$ , de acordo com o Anexo J da NP EN 1992-1-1). A Figura 4.45 representa os modelos utilizados para estudar o campo de tensões nas armaduras em ligações viga-pilar submetidos a momentos de fecho e de abertura.

A armadura foi pormenorizada de acordo com as recomendações do Anexo J da NP EN 1992-1-1. O diâmetro interno da dobra das armaduras é de  $10\phi$ , satisfazendo o §8.3 da NP EN 1992-1-1. Não foram modeladas juntas de betonagem nem emendas de armaduras.

Nos modelos desenvolvidos foram consideradas armaduras nervuradas comerciais com comportamento elástico-perfeitamente plástico, com  $f_y = 500\text{MPa}$  e  $E_s = 200\text{GPa}$ . Admitiu-se para o betão uma resistência à compressão média de 35 MPa, referida a provetes cilíndricos com 30 cm de altura e 15 cm de diâmetro, tendo-se utilizado, tal como nos estudos relativos às outras tipologias, (§§ 4.5.2 e 4.5.3) o modelo material *CC3NonLinCementitious2* com os parâmetros identificados no §4.4 bem como os mesmos tipos de elementos finitos e a mesma dimensão dos elementos resultantes da discretização que nos §§ 4.5.2 e 4.5.3. O recobrimento das armaduras longitudinais das vigas e pilares é de 3 cm.

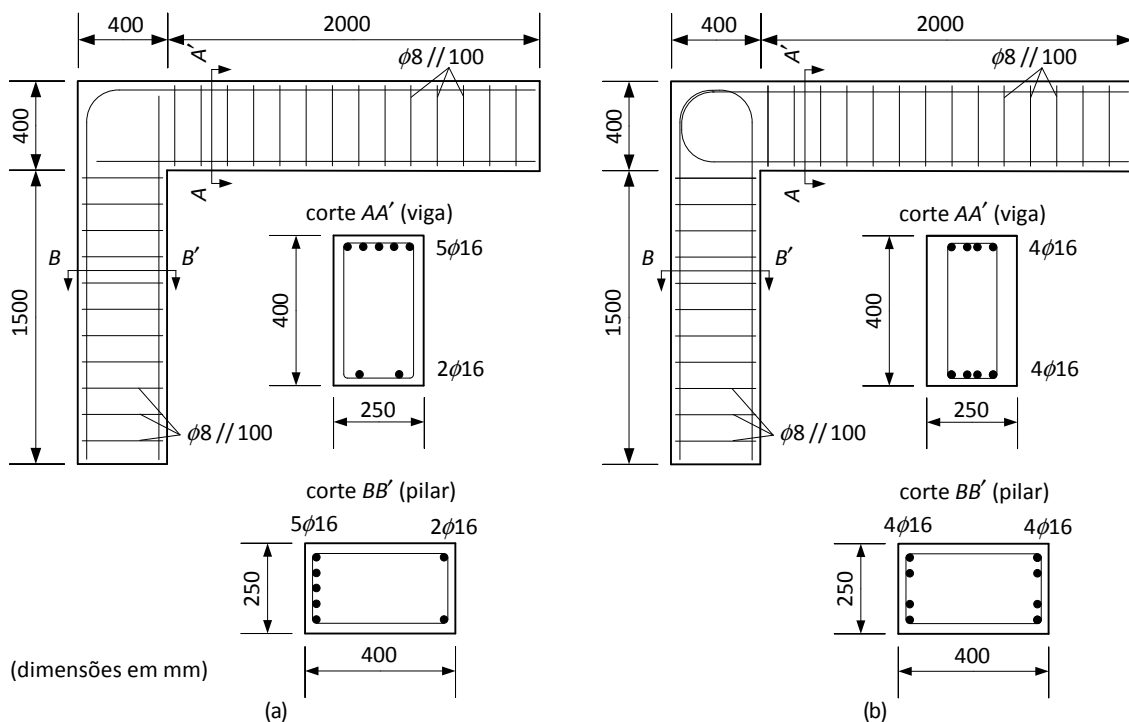


Figura 4.45 – Ligações de cobertura de extremidade submetidas a (a) momentos de fecho (MF) e (b) momentos de abertura (MA).

As vigas e pilares apresentam uma percentagem geométrica de armadura de tracção aproximadamente igual a 1% no caso de momentos de fecho e igual a 0.8% no caso de momentos de abertura. Optou-se por um valor inferior para o caso de momentos de abertura não só para garantir a exequibilidade da pormenorização da armadura representada na Figura 4.45(b) mas também porque, de acordo com Nilsson e Losberg [1976], para armaduras com tensão de cedência elevada é recomendável utilizar uma percentagem geométrica de armadura de tracção inferior a 0.8%, de modo a garantir uma elevada eficiência da ligação quando submetida a momentos de abertura.

Na Figura 4.46 estão esquematicamente representadas as cargas aplicadas e as condições de apoio considerados nos modelos representados na Figura 4.45.

A Figura 4.47 identifica os varões da armadura de cada um dos modelos, de acordo com a numeração definida pelo ATENA 3D. Atendendo à simetria do problema, os modelos desenvolvidos só representam metade da estrutura.

#### 4.5.4.1. Momentos de fecho (MF)

A Figura 4.48 representa a evolução da tensão normal dos varões 1, 2 e 3 (Figura 4.47(a)) para os momentos de fecho.

A carga máxima suportada pela subestrutura foi  $F_{max} = 124.7$  kN e o colapso deu-se por cedência da armadura longitudinal, tanto na periferia da ligação viga-pilar como ao longo dos troços rectilíneos no seu interior. O modo de rotura atesta a validade da pormenorização da armadura proposta na NP EN 1992-1-1 para esta situação.

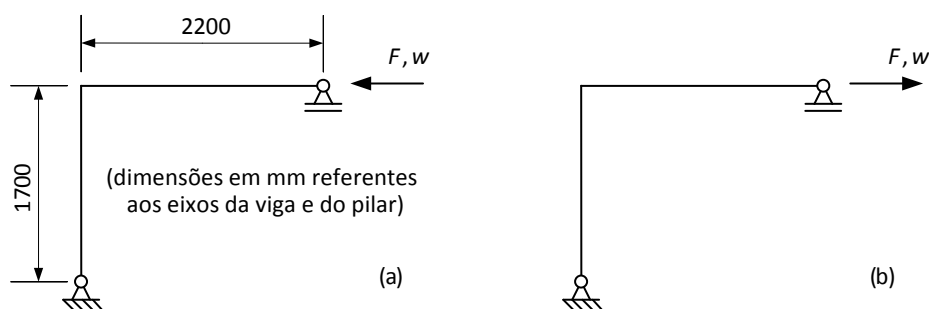


Figura 4.46 – Sistema de cargas aplicadas: (a) momentos de fecho e (b) momentos de abertura.

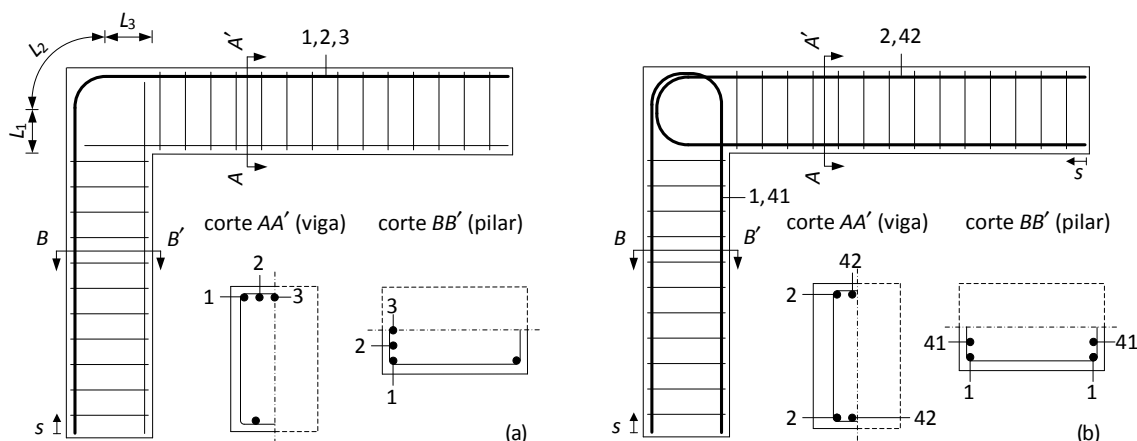


Figura 4.47 – Identificação dos varões: (a) momentos de fecho e (b) momentos de abertura.

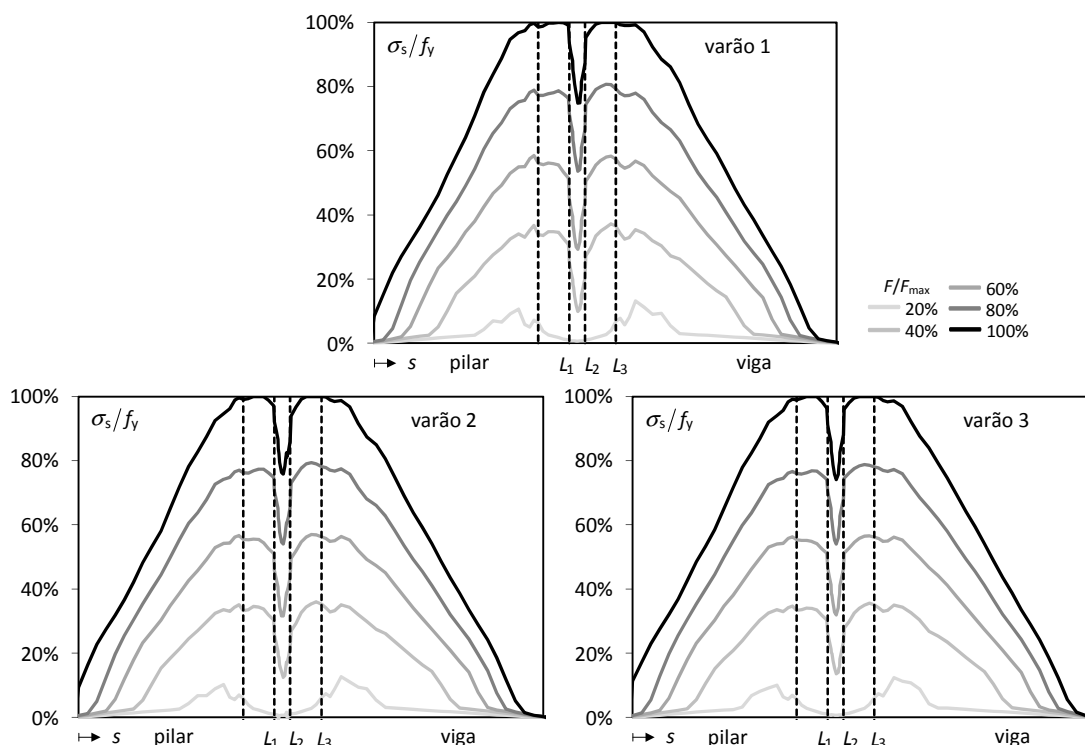


Figura 4.48 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga e do pilar na ligação viga-pilar de cobertura de extremidade submetida a momento de fecho.

A Figura 4.48 mostra que, na armadura longitudinal, a tensão normal no interior da ligação não é significativamente maior que na sua periferia, apesar das pequenas oscilações associadas à localização das fendas. Mais particularmente, os troços rectilíneos da armadura longitudinal no interior da ligação apresentam valor da tensão similar ao valor na sua periferia. Consequentemente, pode-se concluir que o dimensionamento da armadura longitudinal da viga e pilar com base no valor dos esforços na periferia da ligação é um procedimento seguro em ligações viga-pilar de extremidade de cobertura submetidas a momentos de fecho.

#### 4.5.4.2. Momentos de abertura (MA)

As Figuras 4.49 e 4.50 representam a evolução da tensão normal nas armaduras longitudinais da viga e do pilar, respectivamente, para o modelo submetido a momentos de abertura.

A carga máxima suportada pelo modelo de ligação viga-pilar de cobertura de extremidade submetido a momento de abertura foi  $F_{\text{max}} = 84.1 \text{ kN}$  e o colapso deu-se por cedência da armadura longitudinal da viga. O modo de rotura atesta também a validade da pormenorização proposta na NP EN 1992-1-1 para esta situação.

As Figuras 4.49 e 4.50 revelam que a tensão na armadura longitudinal do pilar e da viga no interior da ligação está balizada pelos valores das secções da periferia – apenas são identificáveis violações destes limites nos varões 2 e 42 da viga na zona de compressão mas que, no entanto, são pouco relevantes. Consequentemente, pode-se concluir que o dimensionamento da armadura longitudinal da viga e do pilar com base no valor dos esforços na periferia da ligação é um procedimento seguro também em ligações viga-pilar de extremidade de cobertura submetidas a momentos de abertura.

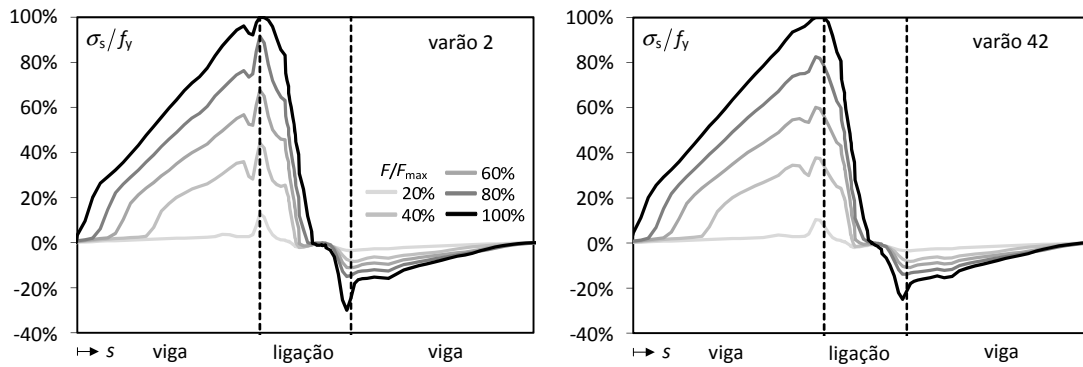


Figura 4.49 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal da viga para a ligação viga-pilar de cobertura de extremidade submetida a momento de abertura.

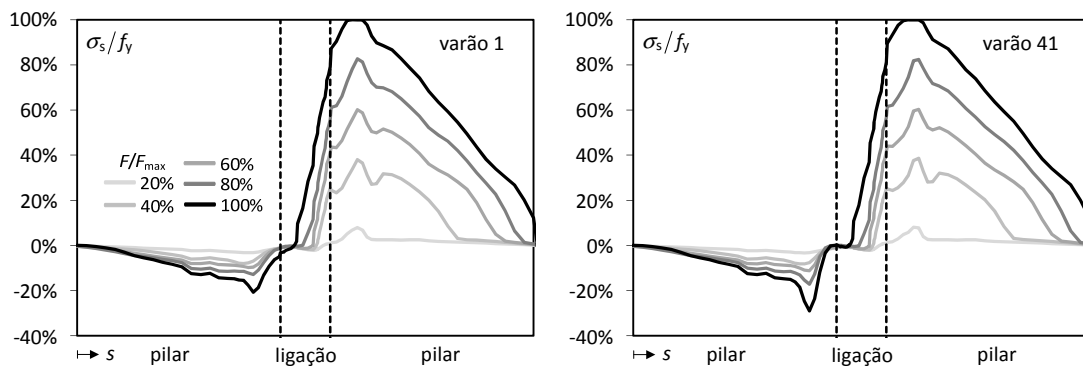


Figura 4.50 – Evolução da tensão normal na armadura longitudinal do pilar para a ligação viga-pilar de cobertura de extremidade submetida a momento de abertura.

## 4.6. Notas finais

Alguns programas informáticos de cálculo de estruturas reticuladas de betão armado utilizam procedimentos de dimensionamento de vigas e pilares baseados em valores dos esforços superiores aos das extremidades efectivas daqueles elementos (Capítulo 2). Além disso, diversos ensaios experimentais revelaram que a armadura longitudinal das vigas e pilares apresenta valores absolutos das extensões e tensões no interior das ligações maiores que na sua periferia. Estes procedimentos e estes resultados experimentais sugerem que o dimensionamento das vigas e pilares com base no valor dos esforços nas suas extremidades efectivas pode ser um procedimento inseguro.

Neste capítulo, efectuou-se um estudo numérico com um programa de elementos finitos para avaliar se a tensão na armadura longitudinal das vigas e dos pilares no interior das ligações viga-pilar está compreendida no intervalo balizado pelos valores da tensão nas secções da periferia da ligação, ou se, pelo contrário, excede esses limites.

Assim, numa primeira, fase foi efectuada uma revisão bibliográfica relativa aos modelos materiais disponíveis para efectuar o estudo numérico, foi seleccionado um programa de elementos finitos que apresentava características adequadas ao estudo pretendido (ATENA 3D, Červenka Consulting [2009]), e foram efectuados estudos com vista à validação desse programa, de acordo com os critérios enunciados no MC2010.

O estudo numérico efectuado permitiu concluir que em ligações viga-pilar interiores com pormenorizações de armadura correntes, submetidas a acções predominantemente gravíticas,

não se observa qualquer agravamento da tensão na armadura longitudinal das vigas e pilares no interior da ligação relativamente às secções da periferia. Para acções predominantemente laterais, as simulações numéricas efectuadas sobre subestruturas com ligações viga-pilar interiores com pormenorizações de armadura correntes mostraram que (i) se for disposta armadura transversal nas ligações, a tensão máxima na armadura longitudinal das vigas no interior da ligação é, no máximo, idêntica à que esta apresenta nas secções da periferia e (ii) a tensão nos varões interiores da armadura longitudinal dos pilares no interior da ligação pode exceder significativamente os limites do intervalo definido pela tensão nas secções da periferia da ligação. Constatou-se ainda que, caso não seja disposta armadura transversal na ligação viga-pilar, a tensão nos varões interiores da armadura longitudinal das vigas no interior da ligação apresenta um agravamento ligeiro em relação às secções da periferia. No entanto, também se constatou que limitando o valor da tensão nos varões interiores da armadura longitudinal das vigas e dos pilares ao valor que estas apresenta na periferia da ligação não se reduz significativamente a capacidade de carga da ligação viga-pilar, ocorrendo apenas um agravamento global da tensão nos varões exteriores da armadura longitudinal dos pilares. No entanto, este agravamento corresponde apenas a uma maior linearização da distribuição de tensão ao longo dos pilares, não conduzindo a um agravamento relevante do valor da tensão no interior da ligação relativamente ao valor da periferia. Assim, pode-se concluir que o agravamento da tensão na armadura longitudinal das vigas e dos pilares no interior de ligações viga-pilar interiores é negligenciável.

Nas simulações numéricas efectuadas sobre modelos de subestruturas com ligações viga-pilar de extremidade e de cobertura de extremidade com pormenorização corrente da armadura, observou-se que a tensão na armadura longitudinal das vigas e dos pilares no interior da ligação viga-pilar está no intervalo delimitado pela tensão nas secções da periferia.

Como resultado deste estudo, pode concluir-se que, para acções quase estáticas e monotónicas, o dimensionamento das vigas e dos pilares com base nos esforços nas suas extremidades efectivas é um procedimento seguro que, de uma forma geral, não colocará em causa a resistência das ligações viga-pilar e, conseqüentemente, das estruturas porticadas de betão armado.

Por fim recorde-se que os resultados apresentados foram obtidos com recurso a modelos numéricos de elementos finitos e que, apesar de ser reconhecido por especificações técnicas recentes que, em determinadas condições, esta técnica permite simular adequadamente o comportamento de estruturas de betão armado (§4.4), sempre que possível, e tendo em atenção que qualquer modelo é uma simplificação mais ou menos abusiva da realidade, os resultados obtidos por esta via devem ser confirmados com recurso a campanhas experimentais.



---

# Capítulo 5

## Modelo para ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado

### 5.1. Introdução

A análise e dimensionamento correntes de estruturas porticadas de betão é efectuada recorrendo a modelos de ligação viga-pilar implícitos (§2.3). A principal vantagem deste tipo de modelos, para além da sua simplicidade, é a sua facilidade de implementação em programas informáticos de cálculo estrutural de estruturas reticuladas.

No domínio dos modelos implícitos, as abordagens mais comuns para modelar as ligações viga-pilar prolongam artificialmente as vigas e os pilares até ao ponto de intersecção dos respectivos eixos e/ou alteraram a rigidez de flexão das vigas e pilares (§2.3). No entanto estas abordagens, tanto individualmente como em conjunto, são conceptualmente incorrectas para modelar o comportamento não linear das ligações viga-pilar (Charney e Marshal [2006]). Os modelos de ligação viga-pilar implícitos (i) são mecanicamente inconsistentes, na medida em que não têm em consideração os modos de deformação nem o estado de tensão dominantes no interior da ligação, (ii) não permitem simular adequadamente a variação de rigidez da ligação viga-pilar com a sollicitação aplicada, (iii) não permitem detectar adequadamente o colapso da ligação viga-pilar, (iv) conduzem ao sobredimensionamento das vigas e pilares quando estes são dimensionados com base nos esforços em secções que não as da periferia da ligação (Capítulo 3 e 4) e (v) podem conduzir a um dimensionamento pouco rigoroso caso os deslocamentos laterais da estrutura sejam relevantes (análise geométrica não linear, Capítulo 3 e 6 e análise dinâmica não linear, Capítulo 6).

É desta forma evidente que uma modelação rigorosa do comportamento das ligações viga-pilar tem que passar por um modelo de ligação viga-pilar explícito. Com base nesta premissa, apresenta-se em seguida a fundamentação e o desenvolvimento de um modelo de ligação viga-pilar baseado no método das componentes, vocacionado para estruturas porticadas de

betão armado betonadas *in situ*.

## 5.2. O método das componentes

### 5.2.1. Enquadramento do método das componentes

O método das componentes surgiu associado às estruturas metálicas e mistas, tendo resultado da necessidade de desenvolver modelos que permitissem avaliar não só a resistência das ligações viga-pilar, tal como os modelos tradicionais, mas também a sua deformabilidade. De facto, no âmbito da análise e dimensionamento de estruturas metálicas e mistas, concluiu-se que a contabilização da deformabilidade das ligações na análise estrutural pode ser relevante não só em termos de segurança estrutural mas também em termos económicos. Relativamente ao aspecto da segurança estrutural, já se mostrou no Capítulo 3 que, independentemente do material, as simplificações associadas à consideração de ligações contínuas e/ou articuladas podem ser não conservadoras tanto para efeitos de estados limites de serviço como para estados limites últimos. Relativamente ao aspecto económico, de acordo com Huber, Kronenberger *et al.* [1998], é possível a redução de custos se na análise estrutural for considerado o comportamento semi-contínuo da ligação, ou seja, é mais dispendiosa uma pormenorização das ligações viga-pilar compatível com os modelos simplificados contínuo ou articulado tradicionalmente utilizados na análise do que o desenvolvimento de ligações eficientes e de modelos estruturais que considerem o seu comportamento de forma suficientemente rigorosa.

A evolução dos modelos que foram sendo desenvolvidos para ligações viga-pilar em estruturas de betão armado, apresenta um paralelismo com a que ocorreu para os modelos de ligação viga-pilar em estruturas metálicas, ou seja, existem modelos de resistência relativamente simples e consensuais, na sua maioria modelos de escoras e tirantes, e têm vindo a ser desenvolvidos e propostos alguns modelos de comportamento. No entanto, tal como demonstra a falta de consenso relativamente aos modelos de comportamento propostos para ligações viga-pilar em estruturas de betão armado, estes ainda não permitem descrever o comportamento da ligação de forma suficientemente fiável, em função da sua pormenorização e das propriedades mecânicas dos materiais constituintes.

O método das componentes estabelece modelos mecânicos constituídos por elementos deformáveis unimodais (molas) e elementos rígidos, interligados de modo a simular o comportamento mecânico da ligação. Este método simplificado foi aplicado com sucesso à modelação do comportamento de ligações viga-pilar em estruturas metálicas e mistas, não havendo qualquer motivo para que não possa ser aplicado com níveis similares de simplicidade e rigor a ligações viga-pilar de betão armado. No Capítulo 2 (§2.3.2.2) foram referidos alguns modelos mecânicos (macro-elementos) construídos acoplando molas e elementos rígidos (Youssef e Ghobarah [2001], Lowes, Mitra *et al.* [2004], Tajiri, Shiohara *et al.* [2006]) que apresentam semelhanças com os modelos estabelecidos pelo método das componentes (§5.2.2).

A aplicação do método das componentes a estruturas de betão armado, além de conduzir a uma harmonização entre disposições regulamentares, pode ser vista como uma generalização dos tradicionais modelos de resistência de escoras e tirantes a modelos de comportamento.

### 5.2.2. Fundamentos do método das componentes

O método das componentes baseia-se na identificação e decomposição da ligação em subsistemas, designados por *componentes básicas* (designadas no texto subsequente como *componentes*). Cada componente é caracterizada tanto em termos intrínsecos como de interligação com as restantes. O comportamento intrínseco de cada componente é explicitado no modelo por intermédio de uma mola translacional com comportamento força-deformação não linear. A interligação entre as componentes é explicitada no modelo por intermédio de uma adequada disposição topológica das componentes e da utilização de elementos rígidos tais que o sistema de componentes possa constituir um modelo mecânico capaz de simular o comportamento da ligação original em termos de rigidez, resistência e ductilidade (Steenhuis, Jaspert *et al.* [1998]).

Desta forma, a modelação de uma ligação pelo método das componentes incorpora três passos (SSEDTA [2003b]): (i) identificação das componentes básicas, (ii) caracterização das componentes e (iii) montagem das componentes.

De acordo com a NP EN 1993-1-8 (IPQ [2010c]), uma componente básica de uma ligação é uma parcela da ligação que contribui para uma ou mais propriedades estruturais, nomeadamente, resistência, rigidez e ductilidade. Neste contexto *contribuir* significa ter relevância, sendo que, por exemplo, uma componente com elevada resistência colocada em série com uma segunda componente menos resistente é imprescindível para que exista transmissão de carga entre elementos ligados mas não é relevante na medida em que não precisa de ser contabilizada no modelo para aferir a resistência da ligação viga-pilar. Note-se ainda que cada componente pode ser constituída por várias partes da ligação e podem ser consideradas diferentes componentes na mesma zona ligação de forma a simular os diferentes modos de deformação dessa zona. Além disso, a cada componente está associada uma única combinação de um esforço (*e.g.*, tracção, corte, flexão e compressão) e o correspondente modo de deformação, numa zona específica da ligação.

Dado que cada elemento deformável do modelo (mola) está inequivocamente associado a uma parcela física da própria ligação e a um modo de deformação, neste documento é indiscriminadamente utilizado o termo *componente* para designar a entidade física (e o modo de deformação associado) e a sua representação ao nível do modelo (a mola).

O comportamento de cada componente poderá ser determinado analiticamente, numericamente ou experimentalmente (SSEDTA [2003b]).

Como o nome indica, a montagem das componentes, consiste em dispor, orientar e conectar as componentes individuais, ficando o comportamento da ligação determinado pelo comportamento das componentes e pela forma como estas se encontram interligadas, ou seja, pela topologia e geometria do modelo. A relação entre as propriedades elementares das componentes e as propriedades globais da ligação é desta forma determinada (i) pela relação de equilíbrio entre esforços nas componentes e esforços aplicados à ligação e (ii) pela relação de compatibilidade entre as deformações nas componentes e modos de deformação da ligação.

Assim, a determinação dos esforços nas componentes da ligação que equilibram os esforços

nas extremidades dos seus elementos adjacentes (vigas e pilares), é um problema estrutural que envolve relações de equilíbrio, compatibilidade de deformações e constitutivas. Em particular, os requisitos a respeitar pela distribuição de esforços nas componentes são (SSEDTA [2003a]): (i) equilíbrio, os esforços nas componentes equilibram os esforços na periferia da ligação, (ii) compatibilidade, as várias componentes deformam-se de maneira compatível entre si e também compatível com os deslocamentos da periferia da ligação, (iii) capacidade resistente, o esforço em cada componente não excede a sua capacidade resistente, e (iv) ductilidade, a deformação de cada componente não excede a sua ductilidade.

Na prática, de forma a simplificar o modelo, pode-se ignorar um ou mais destes requisitos, se isso não redundar num modelo inseguro. Em ligações viga-pilar de estruturas metálicas, por exemplo, para efeito da determinação da capacidade resistente das ligações viga-pilar, é frequente não satisfazer a condição de compatibilidade de deformações, o que não é mais do que a aplicação do princípio estático da análise plástica limite.

A caracterização do comportamento das ligações no contexto do método das componentes permite (i) a redução de custos de ensaios experimentais, na medida em que o custo associado ao ensaio experimental de uma componente é significativamente inferior ao custo do ensaio de uma ligação completa, (ii) o desenvolvimento de modelos de cálculo claros e intuitivos onde são repercutidos de forma transparente os fenómenos físicos e (iii) maior flexibilidade para o projectista, que pode otimizar a combinação e disposição das componentes.

### 5.2.3. Aplicação do método das componentes às estruturas metálicas e mistas

A NP EN 1993-1-8 apresenta disposições para determinar a relação momento-rotação da junta para ligações de perfis em I ou H baseadas no método das componentes, recorrendo a modelos do tipo representado na Figura 5.1. Estes modelos permitem determinar a rigidez inicial e o momento resistente da junta. A estes parâmetros pode ser posteriormente ajustada uma curva momento-rotação simplificada.

A NP EN 1993-1-8 indica, para cada tipo de ligação (soldada, aparafusada, etc.) e para cada propriedade mecânica (rigidez inicial, momento resistente), quais as componentes relevantes e fornece expressões para caracterizar as respectivas propriedades mecânicas a partir de parâmetros geométricos e das propriedades mecânicas do aço.

No modelo representado na Figura 5.1, a montagem e caracterização das componentes que constituem a ligação<sup>3</sup> (cwc, cwt, cfb, bfc) é intuitiva. No entanto, a montagem e caracterização

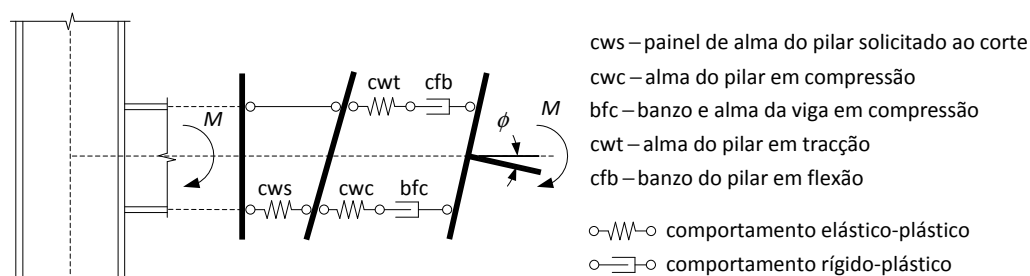


Figura 5.1 – Exemplo de modelo das componentes para uma junta (Faella, Piluso *et al.* [2000]).

<sup>3</sup> Nomenclatura da NP EN 1993-1-8.

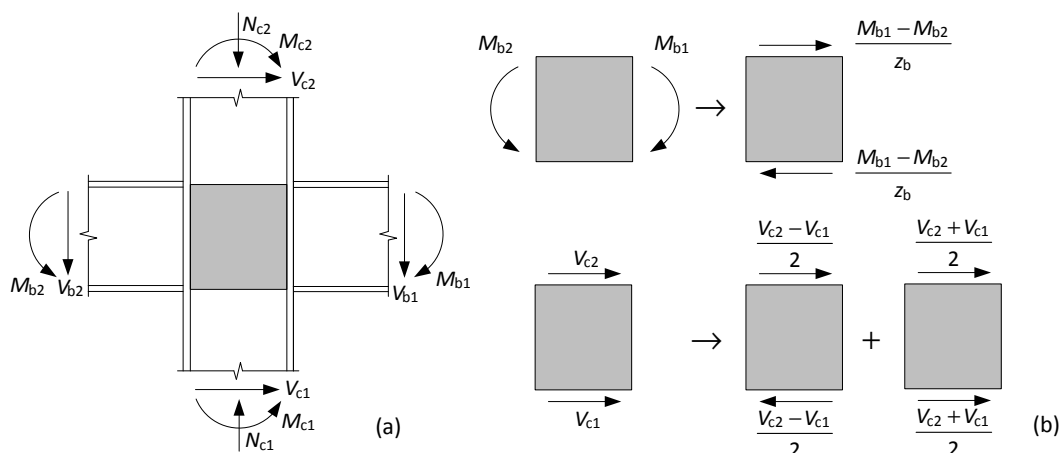


Figura 5.2 – (a) Campo de esforços na periferia da ligação, (b) parcelas do esforço de corte horizontal a meia altura da ligação (Faella, Piluso *et al.* [2000]).

do painel de alma do pilar solicitado ao corte (cws) no formato apresentado na NP EN 1993-1-8 requer algumas simplificações. Para avaliar estas simplificações, considere-se o campo de esforços na periferia da ligação representada na Figura 5.2(a) em que, simplificada, foi desprezado o esforço axial nas vigas. Considere-se ainda o esforço de corte a meia altura da ligação (corte na alma do pilar) associado a este campo de esforços (Figura 5.2(b)).

De acordo com a Figura 5.2(b), o esforço de corte horizontal a meia altura da ligação,  $V_{cws}$ , é dado por qualquer uma das seguintes expressões (Faella, Piluso *et al.* [2000])

$$V_{cws} = \frac{M_{b1}}{z_b} \left[ \left( 1 - \frac{M_{b2}}{M_{b1}} \right) - \frac{z_b}{2 M_{b1}} (V_{c1} - V_{c2}) \right] = \frac{M_{b1}}{z_b} \beta_1 \rightarrow M_{b1} = \frac{V_{cws} z_b}{\beta_1} \quad (5.1)$$

$$V_{cws} = \frac{M_{b2}}{z_b} \left[ \left( 1 - \frac{M_{b1}}{M_{b2}} \right) - \frac{z_b}{2 M_{b2}} (V_{c1} - V_{c2}) \right] = \frac{M_{b2}}{z_b} \beta_2 \rightarrow M_{b2} = \frac{V_{cws} z_b}{\beta_2}$$

onde  $z_b$  é o braço interno do momento flector na extremidade das vigas e os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  correspondem aos termos dentro dos parênteses rectos.

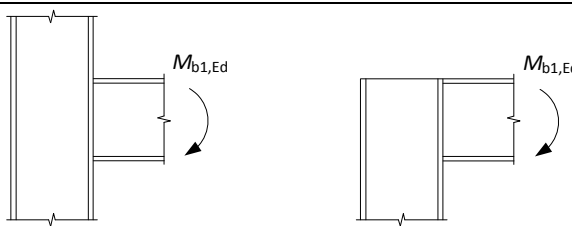
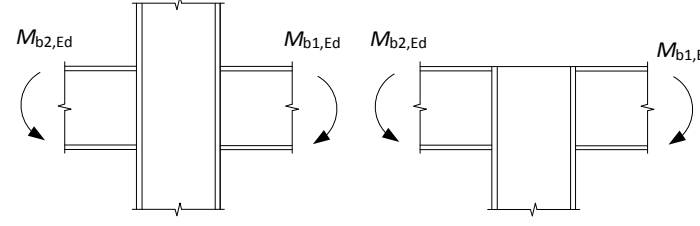
De acordo com o modelo representado na Figura 5.1, a relação entre o esforço na mola correspondente à componente painel de alma do pilar solicitado ao corte (cws) e o momento flector na extremidade da viga é dada pela expressão

$$F_{cws} = \frac{M_b}{z_b} = \frac{V_{cws}}{\beta} \quad (5.2)$$

onde  $M_b$  pode assumir o valor  $M_{b1}$  ou  $M_{b2}$  e  $\beta$  pode assumir o valor  $\beta_1$  ou  $\beta_2$  mediante a junta em análise.

Tal como já foi referido no §2.2.2.4, a NP EN 1993-1-8, no §5.3(5), preconiza uma modelação simplificada da ligação em que uma configuração com viga apenas num lado pode ser modelada como uma única junta e uma configuração com vigas nos dois lados pode ser modelada como duas juntas separadas. No caso da ligação viga-pilar com viga de ambos os lados, cada junta é modelada como uma mola angular cuja relação momento-rotação considera o comportamento do painel de alma do pilar solicitado ao corte e, por isso, tem que considerar a interacção das juntas.

Tabela 5.1 – Valores aproximados do parâmetro  $\beta$  (CEN [2005a]).

tipo de configuração da junta	acção	valor de $\beta$
	$M_{b1,Ed}$	$\beta \approx 1$
	$M_{b1,Ed} = M_{b2,Ed}$	$\beta = 0^*$
	$M_{b1,Ed} / M_{b2,Ed} > 0$	$\beta \approx 1$
	$M_{b1,Ed} / M_{b2,Ed} < 0$	$\beta \approx 2$
	$M_{b1,Ed} + M_{b2,Ed} = 0$	$\beta \approx 2$

\* neste caso, o valor de  $\beta$  é exacto.

Para contabilizar a interacção das juntas, a rigidez e a resistência da componente painel de alma de pilar solicitado ao corte (cws) são minoradas recorrendo ao parâmetro  $\beta$  que reflecte o campo de esforços na periferia da ligação. A NP EN 1993-1-8 propõe valores aproximados de  $\beta$  que desprezam o efeito benéfico do esforço transversal dos pilares. No §5.3(9) da NP EN 1993-1-8 são propostas as expressões

$$\beta_1 = \left| 1 - \frac{M_{bj2}}{M_{bj1}} \right| \leq 2, \quad \beta_2 = \left| 1 - \frac{M_{bj1}}{M_{bj2}} \right| \leq 2. \quad (5.3)$$

Estas expressões utilizam os valores dos esforços junto à intersecção dos eixos dos elementos, contrariamente às expressões (5.1) que usam os esforços na periferia da ligação. Alternativamente, no §5.3(8) da NP EN 1993-1-8, é proposta a Tabela 5.1 com valores aproximados para  $\beta$ .

### 5.3. Modelação de ligações viga-pilar de betão armado

Os princípios do método das componentes são aplicáveis a qualquer elemento estrutural independentemente dos materiais que o constituem. É necessário, porém, que a aplicação reflecta as especificidades desse elemento estrutural, dos materiais que o constituem e da solicitação a que é submetido. Consequentemente, algumas simplificações aceitáveis numas situações podem revelar-se inadequadas noutras.

O objectivo dos modelos a desenvolver também é relevante para a definição do grau de complexidade mais adequado à abordagem a adoptar. Mais concretamente, se o objectivo for a caracterização do comportamento das ligações por intermédio de cálculo manual, como é alegadamente o caso da abordagem da NP EN 1993-1-8 para ligações viga-pilar, admitem-se simplificações muito maiores do que para uma caracterização vocacionada para o cálculo automático.

Tendo em consideração os aspectos anteriores, chegou-se à conclusão que a aplicação do método das componentes no formato proposto na NP EN 1993-1-8 não é adequada a ligações

viga-pilar de estruturas de betão armado.

Assim, neste capítulo desenvolve-se um modelo de ligação viga-pilar de acordo com os seguintes critérios: deve (i) simular as dimensões reais da ligação (Capítulo 3), (ii) ser transparente e verosímil, ou seja, incorporar de forma clara e articulada os principais mecanismos responsáveis pela resposta da ligação, e (iii) ser facilmente estabelecido, ou seja, tal que a entrada de dados requerida ao projectista apresente um nível de complexidade idêntico ao das vigas e pilares.

Este modelo será posteriormente integrado num programa de elementos finitos (Capítulo 6), individualizando a ligação viga-pilar como um elemento estrutural *per se*. De acordo com a classificação apresentada no (§2.3), o modelo que em seguida se apresenta é um macro-elemento.

### 5.3.1. Porquê um macro-elemento?

Em seguida, são apresentadas as razões que conduziram à abordagem proposta em detrimento de uma abordagem do tipo da da NP EN 1993-1-8.

#### 5.3.1.1. Continuidade do pilar na zona da ligação

Em ligações viga-pilar de estruturas metálicas a continuidade do pilar na zona da ligação é um pressuposto que justifica a não consideração de componentes na interface ligação-pilar. Consequentemente, a NP EN 1998-1-8 considera uma ou duas ligações<sup>4</sup>/juntas consoante exista uma ou duas vigas adjacentes à ligação. No caso de estruturas de betão armado, as componentes relevantes na interface ligação-viga são igualmente identificáveis na interface ligação-pilar. Consequentemente, adoptando uma abordagem semelhante à da NP EN 1993-1-8, para a situação mais geral de ligações viga-pilar em pórticos planos de betão armado (ligação viga-pilar interior) é necessário considerar quatro ligações<sup>4</sup>/juntas em cada ligação viga-pilar. Assim sendo, haveria uma duplicação de componentes (e das correspondentes relações constitutivas), o que aumentaria excessivamente a complexidade dos modelos das ligações com molas angulares na extremidade das vigas e pilares adjacentes.

#### 5.3.1.2. Contabilização rigorosa dos esforços

Na implementação do método das componentes proposta na NP EN 1993-1-8, o esforço nas componentes da junta depende unicamente dos esforços na interface viga-junta. Ou seja, não é considerado o esforço transversal na interface pilar-ligação. Dada a esbelteza típica das estruturas metálicas (Capítulo 3), o erro devido a esta simplificação é pouco relevante. No entanto, no caso de estruturas de betão armado, o reduzido valor da relação  $L_c/h_b$  torna o efeito do esforço transversal dos pilares relevante para o corte da ligação viga-pilar (Capítulo 3) – como comprova o facto deste efeito não ser desprezado nas especificações técnicas relativas a estruturas de betão armado que incorporam disposições para avaliar a capacidade resistente das ligações viga-pilar (ACI-ASCE Committee 352 [2002], IPQ [2010d]).

---

<sup>4</sup> Nomenclatura da NP EN 1993-1-8.

Note-se que, mesmo nos casos em que o esforço transversal dos pilares não é relevante, caso se pretenda efectuar uma análise rigorosa de uma estrutura recorrendo aos procedimentos propostos na NP EN 1993-1-8, não é possível utilizar os programas correntes de cálculo de estruturas reticuladas de forma expedita, na medida em que o parâmetro  $\beta$  em cada junta é determinado iterativamente, mesmo numa análise elástica linear. Além disso, os limites impostos ao parâmetro  $\beta$  na NP EN 1993-1-8 – expressões (5.3) – conduzem a erros significativos na análise da estrutura e, possivelmente, a processos iterativos divergentes (Bayo, Cabrero *et al.* [2006]).

Note-se ainda que a simulação do comportamento da ligação recorrendo a molas angulares nas extremidades das vigas e pilares não permite incorporar a interacção entre esforços, em particular, entre o esforço axial e o momento flector nas componentes das juntas.

### 5.3.1.3. Dimensão relativa da ligação viga-pilar

A abordagem proposta na NP EN 1992-1-8 para modelar e dimensionar as ligações viga-pilar preconiza a aproximação dos esforços na periferia da ligação pelos esforços nas secções junto à intersecção dos eixos dos elementos lineares. Ora a dimensão relativa das ligações em estruturas de betão armado é significativa e a modelação de ligações recorrendo a molas angulares pontuais localizadas junto ao ponto de intersecção dos eixos das vigas e pilares, sem de ter em consideração essa dimensão, pode conduzir a um sobredimensionamento excessivo das vigas e pilares (§3.2). No Capítulo 4 mostrou-se que não existe fundamentação para o dimensionamento das vigas e pilares com base nos esforços nas secções junto à intersecção dos seus eixos. Além disso, a consideração da dimensão efectiva das ligações viga-pilar nos modelos de cálculo é a única forma racional de contabilizar o efeito da distorção global da ligação na interacção entre os diversos elementos lineares adjacentes.

### 5.3.1.4. O cálculo manual

Um dos objectivos da abordagem proposta na NP EN 1993-1-8 é a possibilidade de caracterizar a ligação a partir de um cálculo manual. No entanto, a necessidade de modelos rigorosos para as componentes e o elevado número de componentes a que se é conduzido (mesmo para uma ligação simples) inviabilizam o cálculo manual. Desta forma, acaba por ser necessário recorrer ao cálculo automático para caracterizar as ligações<sup>5</sup> e a utilização de um programa de cálculo de estruturas reticuladas sem ferramentas que permitam caracterizar o comportamento a ligação requer a utilização, a montante, de outro programa para caracterização do comportamento das ligações<sup>5</sup>. Ou seja, a simplificação na fase de análise é conseguida à custa de um maior volume de cálculo prévio para caracterizar as ligações<sup>5</sup>. Conseguir-se-iam ganhos de eficiência e rigor com abordagens que tratassem as ligações de forma integrada.

### 5.3.1.5. Adequação da simplificação da modelação da componente alma do pilar ao corte

No modelo de ligação viga-pilar de estruturas metálicas a maioria das componentes localiza-se

---

<sup>5</sup> Nomenclatura da NP EN 1993-1-8.



na interface ligação-viga e por isso é justificável o tratamento da componente alma do pilar solicitada ao corte de forma análoga ao das componentes das ligações<sup>6</sup>. No caso das estruturas de betão armado, não existindo elementos de ligação (parafusos, soldas, chapas de topo, etc.), somente as componentes (i) alma do pilar solicitada ao corte e (ii) amarração da armadura longitudinal em tracção/compressão são relevantes (ver §5.3.2.1), pelo que não se justifica a simplificação implementada na NP EN 1993-1-8.

Por fim, note-se que, mesmo para ligações viga-pilar de estruturas metálicas e mistas, já existem trabalhos que defendem a adopção de modelos explícitos de análise local (§2.3.2) para ligações viga-pilar, ou seja, macro-elementos (Bayo, Cabrero *et al.* [2006], Silva [2008]).

### 5.3.2. Modelo de ligação viga-pilar proposto

Um modelo de ligação viga-pilar, além de reflectir o comportamento deste elemento e, em particular, o seu efeito sobre a restante estrutura, deve apresentar as seguintes características

- (i) compatibilidade – o modelo deve ser compatível com os elementos lineares tradicionais; no caso em estudo (2D) este requisito impõe a existência de 3 graus de liberdade por nó externo (2 translações e uma rotação);
- (ii) versatilidade – o modelo deve poder ser aplicado a diversas configurações em termos de conectividade (ver §2.2.2.2: ligação interior, ligação de extremidade, ligação de cobertura e ligação de extremidade de cobertura);
- (iii) verosimilhança – o modelo deve incorporar de forma clara e articulada os principais mecanismos que determinam a resposta da ligação viga-pilar;
- (iv) objectividade – o modelo deve permitir caracterizar o comportamento da ligação de forma independente da estrutura onde esta se encontra incorporada;
- (v) eficiência computacional – o acréscimo de esforço computacional necessário para modelar explicitamente as ligações viga-pilar não deve ser tão grande que inviabilize a sua utilização;
- (vi) robustez numérica – o modelo não deve comprometer a convergência do procedimento numérico utilizado na análise estrutural.

Uma abordagem baseada no método das componentes permite satisfazer estes requisitos, motivo pelo qual foi adoptada neste trabalho. Nos seguintes parágrafos é apresentado o modelo proposto bem como a fundamentação para as simplificações assumidas.

#### 5.3.2.1. Componentes relevantes em ligações viga-pilar de betão armado

A análise crítica dos resultados de ensaios experimentais publicados permitiu identificar como componentes relevantes para o modelo de ligação viga-pilar de betão armado (Biddah e Ghobarah [1999], Altoontash [2004]) (i) a amarração das armaduras longitudinais dos elementos adjacentes e (ii) o núcleo da ligação ao corte.

---

<sup>6</sup> Nomenclatura da NP EN 1993-1-8.

No presente contexto, define-se *amarração* como sendo os segmentos de armadura rectilíneos e/ou curvilíneos localizados total ou parcialmente no interior da ligação e o betão envolvente por intermédio dos quais se processa a *transferência* das resultantes de tracção e compressão das extremidades das vigas e pilares para a ligação, quer por compressão directa no betão na interface da ligação quer por aderência entre as armaduras e o betão.

As amarrações das armaduras longitudinais das vigas e pilares adjacentes à ligação podem condicionar a rigidez, resistência e ductilidade da ligação. No modelo desenvolvido, as componentes amarração garantem o equilíbrio entre as resultantes das tensões normais nas extremidades efectivas dos elementos adjacentes à ligação e os esforços no interior da ligação, sendo fundamental a forma como se processa a aderência entre as armaduras e o betão envolvente. Note-se que apesar de, genericamente, o comportamento compósito do betão armado se basear na aderência entre as armaduras e o betão envolvente, na transferência de esforços das vigas e pilares para as ligações viga-pilar este fenómeno é particularmente relevante. De facto, num segmento de uma armadura envolvida em betão, a força transferida por aderência entre a armadura traccionada e o betão envolvente é igual à variação do esforço na armadura entre as duas secções extremas. Ora, num segmento de viga ou pilar a força transferida deve-se à variação do momento flector entre as extremidades do segmento, Figura 5.3(a), habitualmente muito reduzida se o comprimento do segmento for da ordem de grandeza da altura da sua secção transversal. Já numa ligação viga-pilar, a força a transferir entre a armadura e o betão envolvente corresponde em muitos casos à totalidade da força de tracção na armadura na secção extrema do pilar ou viga adjacente, a qual é muito elevada se se tratar de uma zona de momentos máximos. Noutros casos ainda, como nas ligações interiores em que os momentos flectores nas extremidades efectivas das vigas (ou pilares) adjacentes têm sinal oposto (o momento tem o mesmo sentido), as forças na armadura das duas vigas (pilares) têm o mesmo sentido, agravando o valor da resultante a ser transferida por aderência – Figura 5.3(b). Desta forma facilmente se conclui que, nestes casos, as tensões de aderência nas ligações viga-pilar podem ser significativamente superiores às que se verificam nas vigas e pilares, ou seja

$$\int_0^{h_c} \tau_j dx = \frac{M_{b1} + \varphi M_{b2}}{z_b} \gg \int_0^{h_c} \tau_b dx = \frac{\Delta M}{z_b}, \text{ com } 0 < \varphi < 1 \quad (5.4)$$

em que  $\varphi$  é o factor de repartição da resultante de compressão entre a armadura e o betão.

A habitual continuidade dos pilares nas ligações viga-pilar de estruturas porticadas metálicas, e a conseqüente interrupção das vigas, faz com que seja coerente designar a zona de

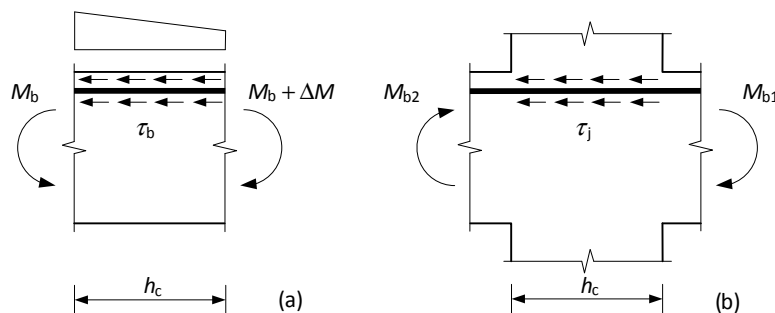


Figura 5.3 – Tensão de aderência na armadura na interface armadura-betão: (a) segmento de viga com comprimento igual à altura da secção transversal do pilar, (b) ligação viga-pilar.

intersecção entre os pilares e as vigas onde se verifica uma elevada tensão tangencial por *alma do pilar solicitada ao corte*. No caso de estruturas de betão armado, na zona da ligação é preservada não só a secção dos pilares mas também a da viga e, por isso, é preferível a denominação *núcleo da ligação solicitado ao corte* ou, mais abreviadamente, *núcleo da ligação ao corte*. É utilizado o termo *núcleo* para enfatizar que o corte na ligação é função do braço interno  $z_b$  ( $z_c$ ) das resultantes de tracção e compressão transmitidas pelas vigas (pilares) adjacentes à ligação, braço este que é inferior à altura das respectivas secções transversais  $h_b$  ( $h_c$ ).

O núcleo da ligação, sendo uma zona de transmissão de esforços entre dois ou mais elementos lineares adjacentes à ligação, está submetido a um campo de tensões complexo. Para uma avaliação da relevância dos campos de tensões genéricos e dos correspondentes modos de deformação do núcleo da ligação, considere-se a distribuição genérica de esforços na periferia de uma ligação viga-pilar em equilíbrio representada na Figura 5.4(a).

De modo a simplificar a análise, a distribuição genérica de esforços na periferia da ligação foi decomposta em seis distribuições auto-equilibradas apresentando diversas simetrias, Figura 5.4 (b) a (f). Estas distribuições foram seguidamente avaliadas de modo a identificar as mais relevantes para o comportamento do núcleo da ligação. Os modos de deformação foram simplificadamente obtidos assumindo configurações deformadas em que as secções planas horizontais e verticais da ligação antes da deformação permanecem planas depois da deformação.

A Figura 5.4 mostra que, com excepção do caso (b), todos os sub-campos de esforços representados têm grandeza idêntica a campos de esforços num qualquer segmento de viga ou pilar de igual dimensão. Note-se ainda que, apresentando a pormenorização da zona da ligação viga-pilar cintas pouco espaçadas e varões verticais intermédios adicionais nas faces dos pilares, tanto a capacidade resistente como a rigidez axial e de flexão da ligação são maiores que as das vigas e pilares adjacentes. Além disso, a dimensão da ligação é pequena quando comparada com o comprimento das vigas e pilares adjacentes. Estes dois motivos, explicam porque motivo é pouco significativa a contribuição dos modos de deformação e campos de esforços (c) a (f) para a deformação ou colapso das ligações ou mesmo para a deformação global da estrutura, justificando a não consideração destes modos no modelo de ligação viga-pilar desenvolvido.

Por outro lado, em estruturas porticadas de betão armado correntes, o campo de esforços representado na Figura 5.4(b) apresenta esforço de corte com valor várias vezes superior ao esforço transversal dos elementos lineares adjacentes - quatro a seis vezes superior ao esforço transversal nos pilares, de acordo com Paulay e Priestley [1992]. Por esse motivo, este campo de esforços pode estar associado a deformações significativas ou ao colapso da ligação, sendo portanto necessário incorporá-lo no modelo de ligação viga-pilar. Note-se também que o campo de esforços representado na Figura 5.4(b) é mais geral que o da Figura 5.2(b).

### 5.3.2.2. Caracterização do comportamento das componentes

O comportamento da amarração em tracção é definido pela relação entre a resultante de

tracção na armadura longitudinal de tracção da viga ou pilar na periferia da ligação e o deslocamento relativo entre a armadura e o betão envolvente na mesma secção (escorregamento). Por outro lado, o comportamento da amarração em compressão é definido pela relação entre a força resultante na armadura longitudinal da viga ou pilar e no betão envolvente na periferia da ligação e o seu encurtamento. No modelo de ligação viga-pilar desenvolvido, o comportamento das amarrações é simulado com recurso a componentes (molas) lineares cuja relação constitutiva é definida por relações entre estas variáveis estáticas e cinemáticas.

O comportamento do núcleo da ligação viga-pilar de betão armado, de acordo com Kim e LaFave [2009] pode ser definido pela relação entre o esforço de corte horizontal a meia altura da ligação e a distorção do núcleo da ligação. De acordo com estes autores, desde que Hanson e Conner [1967] propuseram a quantificação da resistência da ligação viga-pilar de betão armado por intermédio deste esforço, este é considerado pela maioria das publicações e especificações técnicas o que melhor traduz o estado de tensão na ligação. O modo de deformação por distorção é, como se explicou acima (Figura 5.4) e de acordo com evidências experimentais, o modo de deformação potencialmente mais significativo no núcleo das ligações.

Se o momento flector nas extremidades das vigas e pilares representado na Figura 5.4(a) for substituído pelas suas resultantes de compressão e tracção e o esforço axial decomposto em duas parcelas iguais obtêm-se os esforços representados na Figura 5.5(a).

Tal como já foi referido no §3.3.3.1, o equilíbrio estático dos diagramas de corpo livre representados na Figura 5.5(b) permite concluir que o esforço de corte horizontal a meia altura da ligação ( $V_{jh}$ ) pode ser expresso por qualquer das expressões

$$V_{jh} = -\frac{F_6 + F_{12}}{z_b} + F_7 + \frac{F_4 + F_{10}}{2} \quad \text{e} \quad V_{jh} = -\frac{F_6 + F_{12}}{z_b} + \frac{F_7 - F_1}{2}. \quad (5.5)$$

### 5.3.2.3. Montagem das componentes

A componente amarração em compressão (tracção) é disposta na linha de acção da resultante de compressão (tracção) associada ao momento flector e esforço axial na extremidade efectiva da viga ou pilar adjacente. Assim, estas componentes (molas) lineares são paralelas ao eixo do elemento linear adjacente, apresentam uma distância entre si igual ao braço interno da secção transversal desse elemento linear e são dispostas simetricamente em relação ao eixo da viga ou pilar adjacente. Note-se que, implicitamente, se assume que o braço interno das vigas (pilares) na extremidade efectiva é constante e, simultaneamente, que as linhas de acção das componentes em vigas (pilares) dispostas (dispostos) em lados opostos da ligação são colineares. Assumiu-se ainda como, hipótese simplificativa, que as extremidades efectivas das vigas e pilares adjacentes à ligação permanecem planas após deformação.

Os dois modelos mais comuns para a componente núcleo da ligação ao corte são o modelo de *scissors* e o modelo de *Krawinkler*.

No modelo de *scissors*, assim denominado em virtude do seu movimento ser análogo ao duma tesoura, a flexibilidade do núcleo da ligação ao corte traduz-se na rotação relativa entre vigas e pilares na forma representada na Figura 5.6(a).

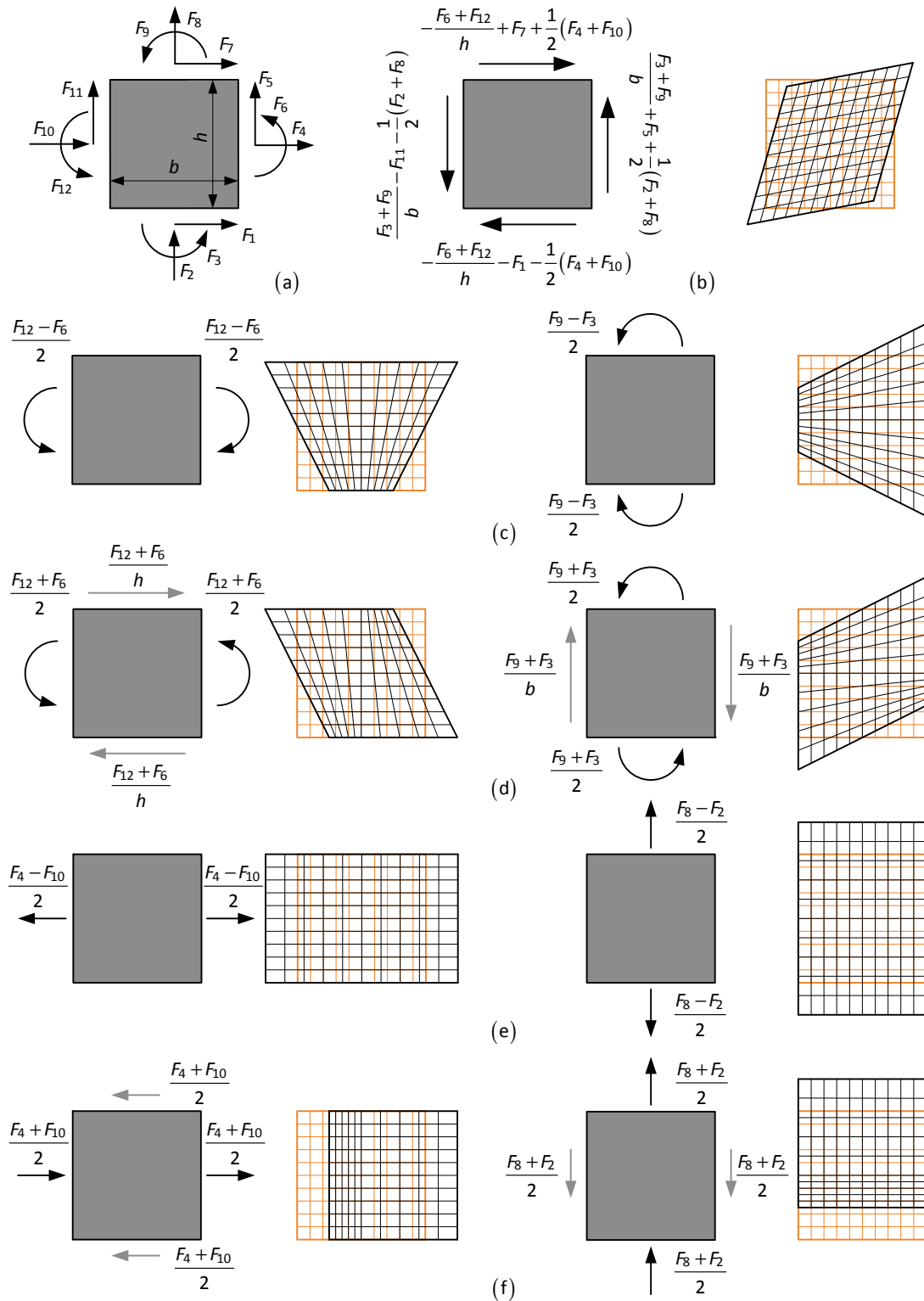


Figura 5.4 – Subcampos de esforços auto equilibrados e modos de deformação correspondentes: (a) campo de esforços genérico, (b) modo de corte puro, (c) modos de flexão simétricos, (d) modos de flexão anti-simétricos, (e) modos axiais simétricos, (f) modos axiais anti-simétricos.

O modelo de *Krawinkler* original (Krawinkler [1978]) para ligações metálicas (Figura 5.6(b)), é constituído por um elemento placa, que simula a rigidez ao corte da alma do pilar, e por quatro elementos (molas angulares) dispostos nos cantos da moldura articulada rectangular formada por elementos rígidos (bielas) que envolve a placa, para simular a rigidez à flexão dos banzos do pilar. Em programas informáticos de cálculo automático de estruturas reticuladas é

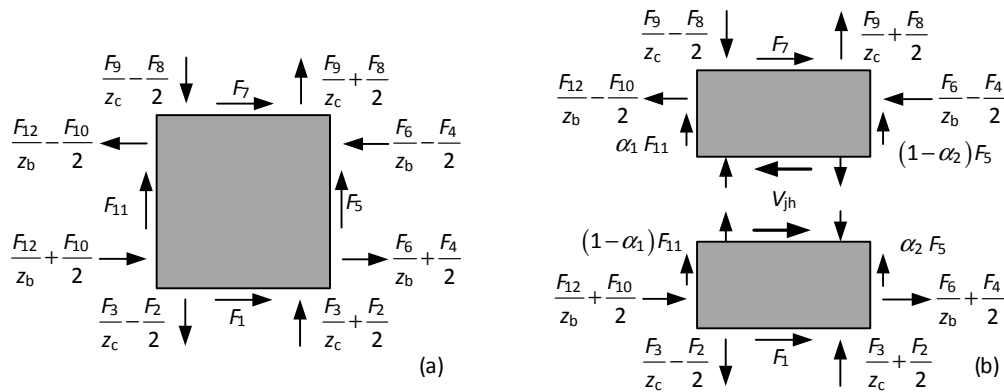


Figura 5.5 – Esforço de corte no plano horizontal a meia altura da ligação, (a) decomposição dos momentos flectores em binários, (b) secionamento da ligação e correspondentes diagramas de corpo livre ( $0 \leq \alpha_1 \leq 1$ ,  $0 \leq \alpha_2 \leq 1$ ).

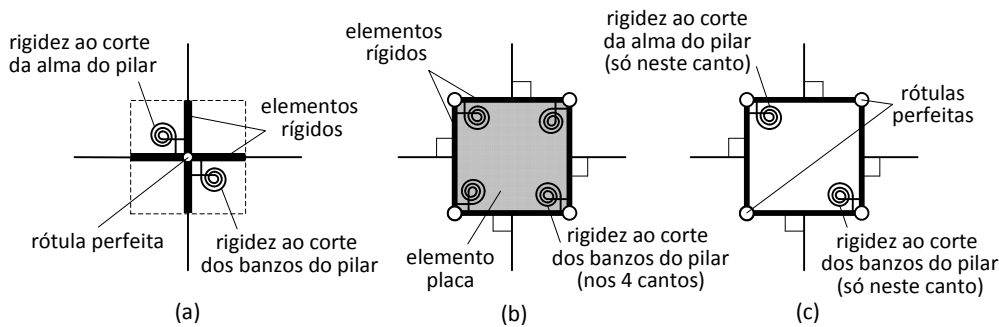


Figura 5.6 – Modelos para o núcleo da ligação ao corte (Charney e Marshal [2006]): (a) modelo de *scissors*, (b) modelo de *Krawinkler* original, (c) modelo de *Krawinkler* modificado.

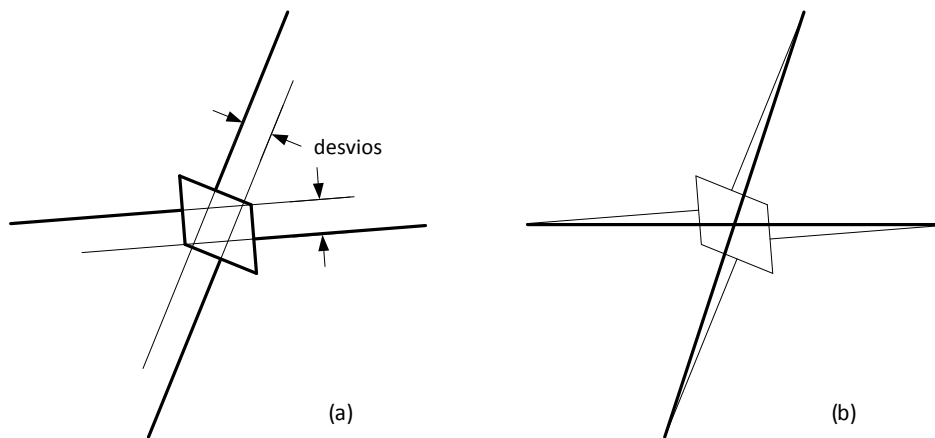


Figura 5.7 – Representação (traço cheio grosso) da configuração deformada da estrutura nas imediações da ligação (Charney e Marshal [2006]): (a) modelo de *Krawinkler* e (b) modelo de *scissors*.

mais comum a versão alternativa do modelo de *Krawinkler* representada na Figura 5.6(c), que apresenta um elemento (mola angular) num canto, para simular a rigidez da alma do pilar ao corte, e um outro elemento (mola angular) também num canto, que simula a rigidez à flexão dos banzos do pilar.

Charney e Marshal [2006] efectuaram uma análise comparativa do modelo de *scissors* e do modelo de *Krawinkler* e concluíram que, apesar de mais complexo, o modelo de *Krawinkler* é preferível ao modelo de *scissors*. Estes autores mostraram que (i) a cinemática do modelo de *Krawinkler* representa muito melhor o comportamento da ligação que o modelo de *scissors* – o modelo de *scissors* não apresenta o desvio entre as tangentes ao eixo das vigas (pilares) devido à deformação por corte da alma do pilar (Figura 5.7) e (ii) as propriedades mecânicas do

modelo de *Krawinkler* dependem apenas das propriedades da ligação enquanto que as do modelo de *scissors* dependem também do comprimento das vigas e dos pilares, tornando o modelo de *scissors* não objectivo, ou seja, este modelo tem de ser calibrado de acordo com os comprimentos das vigas e pilares adjacentes para cada estrutura e cada ligação.

Seguindo a recomendação de Charney e Marshal [2006] e tendo em consideração os objectivos enunciados na página 143, optou-se por utilizar a configuração da componente núcleo da ligação ao corte estabelecida pelo modelo de Krawinkler [1978].

De um modo geral, a dimensão da moldura articulada do modelo de *Krawinkler* não coincide com a totalidade da ligação. As Figuras 5.8(a) e (b) representam modelos com altura da moldura superior e inferior, respectivamente, à altura da ligação. A altura da moldura habitualmente corresponde ao braço interno do binário do momento flector na secção da viga junto ao eixo do pilar. No caso da Figura 5.8(a) essa altura é superior a  $h_b$  devido ao esforço transverso na secção da viga junto ao pilar (Figura 5.8(c)). No caso Figura 5.8(b) essa altura é inferior a  $h_b$  porque o modelo corresponde a uma ligação que só possui linhas de parafusos entre os banzos da viga.

Nos modelos mecânicos de ligações viga-pilar do tipo *Krawinkler* propostos na bibliografia para ligações viga-pilar de estruturas de betão armado (*e.g.*, Lowes, Mitra *et al.* [2004] e Youssef e Ghobarah [2001]) a altura da moldura é  $h_b$ . Este procedimento, além de não corresponder ao adoptado em estruturas metálicas, dificulta a caracterização do estado de tensão no núcleo da ligação viga-pilar em termos do esforço de corte horizontal a meia altura da ligação pois não existe uma relação unívoca entre este esforço e as variáveis estáticas intervenientes na relação constitutiva da componente usada para caracterizar o núcleo da ligação viga-pilar (ver §3.3.3.1), ou seja, pode conduzir a modelos com falta de objectividade caso a relação constitutiva da ligação não for adequadamente modificada por forma a reflectir o campo de esforços em cada instante na periferia da ligação viga-pilar.

Para exemplificar esta potencial falta de objectividade, considerem-se, para uma ligação viga-pilar com dimensões fixas, os três modelos com molduras com dimensões diferentes esquematizados na Figura 5.9. Nestes modelos, a deformação linear  $\Delta_j$  da componente núcleo da ligação ao corte e a distorção  $\gamma$  estão relacionadas pelas seguintes expressões

$$\Delta_{j,M1} = h_b \gamma, \quad \Delta_{j,M2} = z_b \gamma \quad \text{e} \quad \Delta_{j,M3} = z_b \gamma \quad (5.6)$$

que dependem exclusivamente da geometria da ligação.

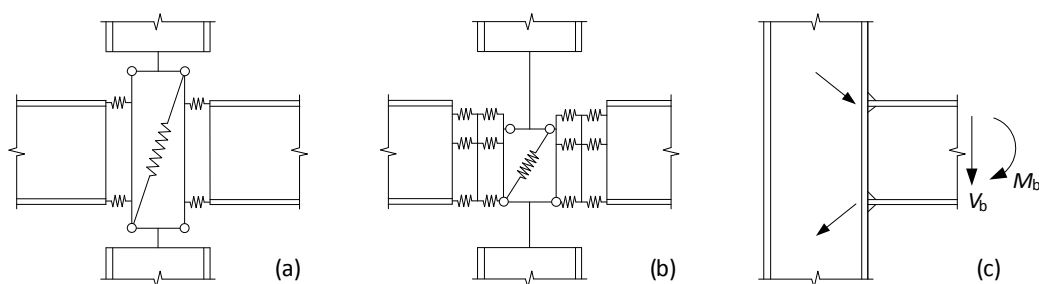


Figura 5.8 – Modelos de ligação viga-pilar com perfis em I ou H, com molduras cuja altura é diferente de  $h_c$ : (a) ligação soldada (Tschemmernegg e Humer [1988]), (b) ligação aparafusada (Tschemmernegg, Rubin *et al.* [1998]), (c) efeito do esforço transverso da viga (Alves [2008]).

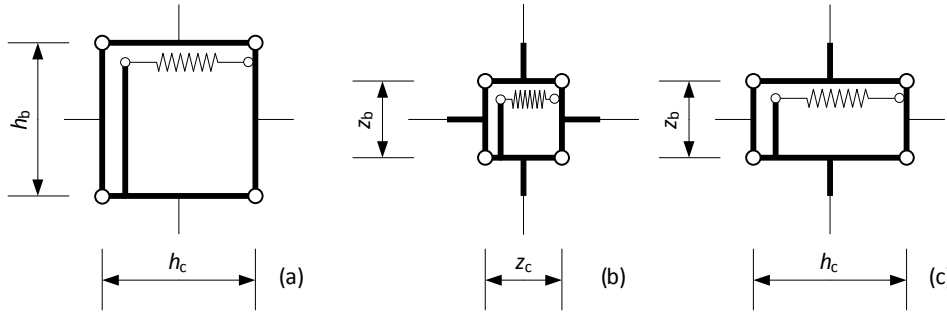


Figura 5.9 – Modelação do núcleo da ligação ao corte, (a) M1, (b) M2, (c) M3.

Tomando como referência os esforços na interface da ligação viga-pilar representados na Figura 5.4(a), o esforço na componente núcleo da ligação ao corte é determinado pelas condições de equilíbrio estático para cada um dos três modelos, de onde se conclui que

$$N_{j,M1} = -\frac{F_6 + F_{12}}{h_b} + F_7 + \frac{F_4 + F_{10}}{2} = V_{jh} + \left( \frac{1}{z_b} - \frac{1}{h_b} \right) (F_6 + F_{12}), \quad (5.7)$$

$$N_{j,M2} = -\frac{F_6 + F_{12}}{z_b} + F_7 + \frac{F_4 + F_{10}}{2} - \frac{F_5 - F_{11}}{z_b} \left( \frac{h_c - z_c}{2} \right) = V_{jh} - \left( \frac{h_c - z_c}{2z_b} \right) (F_5 - F_{11}) \quad (5.8)$$

e

$$N_{j,M3} = -\frac{F_6 + F_{12}}{z_b} + F_7 + \frac{F_4 + F_{10}}{2} = V_{jh}. \quad (5.9)$$

Estas expressões revelam que o modelo de ligação M3 é o único em que a deformação depende exclusivamente do esforço de corte a meia altura da ligação.

Os modelos M1 e M2 também permitem reflectir no comportamento estrutural uma determinada relação  $V_{jh} - \gamma$ , mas, para isso, é necessário ajustar a relação constitutiva do modelo mecânico  $N_j - \Delta_j$ , para ter em consideração que os valores  $N_{j,M1}$  e  $N_{j,M2}$  dependem de outros esforços para além de  $V_{jh}$ . Para proceder a este ajuste é necessário conhecer, de antemão, a relação entre os esforços na periferia da ligação, o que, no caso das estruturas estaticamente indeterminadas, requer um cálculo iterativo.

Assim, uma aplicação rigorosa dos modelos M1 e M2 exige uma abordagem iterativa semelhante à do modelo proposto na NP EN 1993-1-8, em que, em cada iteração, um parâmetro  $\beta$  definido pela razão entre  $V_{jh}$  e  $N_j$ , permite ajustar as propriedades da componente ao campo de esforços na periferia da ligação. Para os modelos acima, este parâmetro é dado por

$$\beta_{M1} = \frac{V_{jh}}{N_{j,M1}} = \frac{h_b z_b (F_4 + 2F_7 + F_{10}) - 2h_b (F_6 + F_{12})}{h_b z_b (F_4 + 2F_7 + F_{10}) - 2z_b (F_6 + F_{12})}, \quad (5.10)$$

$$\beta_{M2} = \frac{V_{jh}}{N_{j,M2}} = \frac{z_b (F_4 + 2F_7 + F_{10}) - 2(F_6 + F_{12})}{z_b (F_4 + 2F_7 + F_{10}) - (h_c - z_c)(F_5 - F_{11}) - 2(F_6 + F_{12})} \quad (5.11)$$

e

$$\beta_{M3} = \frac{V_{jh}}{N_{j,M3}} = 1. \quad (5.12)$$



Perante esta condicionante, neste trabalho adoptou-se para o núcleo da ligação ao corte o modelo M3 (Figura 5.9(c)).

Na Figura 5.10 (a) apresenta-se o modelo desenvolvido para o caso mais geral de ligações viga-pilar interiores, sendo as relações constitutivas das componentes definidas de modo a reflectir a geometria da ligação, a pormenorização da armadura e as relações constitutivas dos materiais constituintes. Este modelo mantém naturalmente a sua validade para outras configurações de ligação viga-pilar (ligação de extremidade, ligação de cobertura, ligação de cobertura de extremidade).

A mola linear no interior da moldura (Figura 5.10(a)) simula o comportamento da componente núcleo da ligação ao corte. Alternativamente, pode ser utilizada uma mola angular num canto da moldura (Figura 5.10(b)). Neste caso as relações entre  $M_j$  (momento flector na mola angular) e  $V_{jh}$  e entre  $\theta_j$  (deformação da mola angular) e  $\gamma$  (variação do ângulo inicialmente recto entre os elementos rígidos da moldura) seriam

$$M_j = z_b V_{jh} \text{ e } \theta_j = \gamma. \quad (5.13)$$

### 5.3.2.4. Análise crítica do modelo desenvolvido

Quando comparado com os modelos propostos por Tschemmerneegg e Humer [1988] para estruturas metálicas e mistas e por Mitra e Lowes [2007] para estruturas de betão armado, o modelo para ligações viga-pilar desenvolvido apresenta semelhanças e diferenças, as quais serão analisadas e justificadas em seguida.

O modelo proposto por Mitra e Lowes [2007], analisado à luz do método das componentes, tem, relativamente ao modelo desenvolvido neste trabalho, as componentes adicionais referentes à deformação por corte na interface viga-ligação e pilar-ligação. Estas componentes simulam os eventuais movimentos transversais das extremidades efectivas das vigas e pilares em relação à periferia da ligação, associados à formação e alargamento progressivo das fendas de flexão e à deformação plástica da armadura longitudinal, por efeito de acções cíclicas. No entanto, (i) de acordo com Celik e Ellingwood [2008], este mecanismo de transferência de carga apresenta uma resposta muito rígida e resistente pelo que não é uma componente

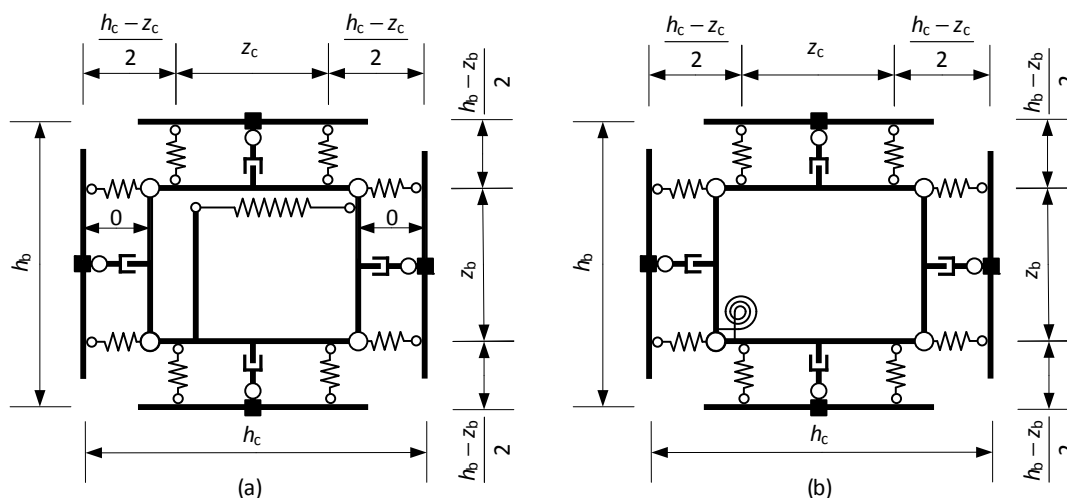


Figura 5.10 – Modelo desenvolvido. Versões alternativas para a componente núcleo da ligação ao corte: (a) mola linear, (b) mola angular.

relevante, (ii) Paulay e Priestley [1992] mostraram que o núcleo da ligação sofre expansão nas duas direcções do plano do pórtico, por efeito do esforço de corte (ver §5.5.2 e Capítulo 4), o que contraria a abertura de fendas na interface da ligação em estruturas estaticamente indeterminadas e (iii) as vigas e pilares quando submetidas a esforço de flexão (cíclico ou monotónico) sofrem alongamento (*beam growth*, Capítulo 6), pelo que, quando incorporadas em estruturas hiperstáticas, também tendem a minimizar a abertura destas fendas. Além disso, se se admitir que estas componentes não tornam o modelo mais rigoroso, há vantagens em não as considerar de todo, pois assim se dispensam os graus de liberdade internos ao modelo de ligação viga-pilar, o que simplifica tanto o modelo como a sua implementação numérica, evitando os ciclos iterativos internos do modelo de Mitra e Lowes [2007].

No modelo de Mitra e Lowes [2007], a altura da moldura é igual a  $h_b$ , o que, como se mostrou nos §§ 3.3.3.1 e 5.3.2.3, conduz a modelos potencialmente não objectivos caso se pretenda estabelecer a relação constitutiva da componente que simula o comportamento do núcleo da ligação a partir do esforço de corte horizontal a meia altura da ligação.

Como o comportamento das amarrações dos varões da armadura longitudinal das vigas (pilares) que terminam na ligação (rectilíneas ou em gancho, Figura 5.11 (a)) só depende dos esforços da viga (pilar) adjacente, elas podem ser modeladas com uma componente (mola linear) na interface ligação-viga (ligação-pilar) sem simplificações adicionais.

Já a modelação da amarração das armaduras longitudinais contínuas das vigas (pilares), deve considerar a interacção entre as duas vigas (pilares) opostas (Figura 5.11 (b)). Esta interacção apresenta algumas analogias com a que ocorre na laje do modelo proposto por Tschammernegg, Rubin *et al.* [1998] para ligações viga-pilar de estruturas mistas – este modelo varia em função da grandeza relativa do momento flector na extremidade das vigas, requerendo pois, no caso das estruturas estaticamente indeterminadas, um processo iterativo para a definição do modelo.

Optando por uma abordagem não iterativa na definição do modelo, a modelação desta amarração de continuidade requer (i) uma discretização fina que introduz graus de liberdade adicionais (Elmorsi, Kianoush *et al.* [2000]) e (ii) a individualização da componente betão de forma a garantir a consistência do modelo (Figura 5.11(c)). Trata-se de um modelo complexo, cuja qualidade aumenta com o número de graus de liberdade internos – ver, por exemplo, o modelo proposto por Tajiri, Shiohara *et al.* [2006] ilustrado na Figura 2.14.

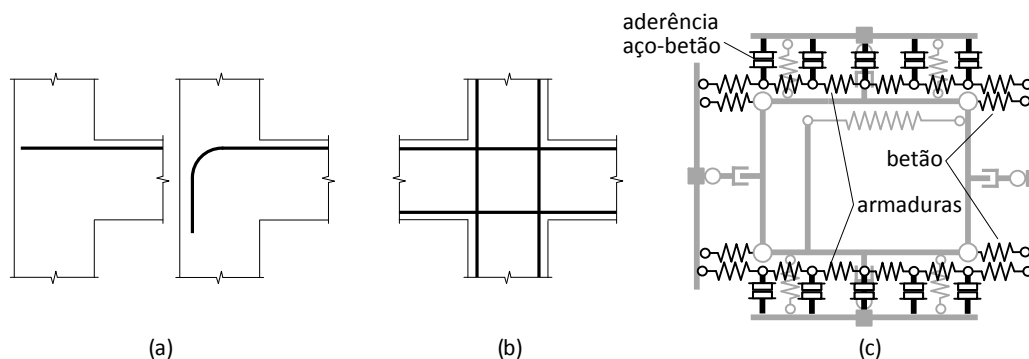


Figura 5.11 – Modelação de amarrações em tracção: (a) ligações de extremidade com amarração rectilínea ou em cotovelo, (b) ligação interior com armadura rectilínea contínua, (c) modelação da armadura longitudinal contínua da viga em ligação interior.

O modelo desenvolvido neste documento utiliza a abordagem simplificada de Mitra e Lowes [2007], ou seja, no caso de armaduras longitudinais contínuas na ligação, assume-se que as amarrações em faces opostas da ligação não interagem, o que implica a existência duma secção da armadura onde a tensão se anula, e conseqüentemente, não permite simular, nesta situação, o colapso por *pull-out* não ocorre. Em termos experimentais, confirmou-se esta inexistência de *pull-out* (devido à continuidade das armaduras para a viga/pilar oposto) mas, contrariamente ao modelo desenvolvido, detectou-se a interacção entre amarrações opostas (§5.4). Esta simplificação pode ser enquadrada examinando dois cenários extremos:

- (i) momento flector com igual sinal em faces opostas da ligação (sentidos opostos) – a abordagem simplificada sobrestima a deformação, na medida em que o comprimento de amarração que contribui para o escorregamento de cada um dos lados da amarração se sobrepõe, reduzindo as tensões tangenciais na interface varão-betão (Figura 5.12(a)), ou seja, a haver erro no cálculo da resultante das deformações, será por excesso;
- (ii) momento flector com sinal oposto em faces opostas da ligação (o mesmo sentido) – a estes momentos corresponde um campo de tensões tangenciais na interface varão-betão sempre com um mesmo sentido, de modo que a abordagem simplificada (Figura 5.12(b)) subestima a deformação, ou seja, a haver erro no cálculo da resultante das deformações, será por defeito.

Apesar da abordagem simplificada determinar erros por defeito no caso de momento flector com o mesmo sentido em faces opostas da ligação (Figura 5.12(b)), Viwathanatapa, Popov *et al.* [1979a] constataram que o comportamento de amarrações com comprimento igual a  $25\phi$  num ensaio de arrancamento (*pull*) monotónico não difere significativamente do seu comportamento num ensaio *push-pull*, até se dar a cedência dos varões. No regime pós-cedência, porém, o comportamento pode ser diferente na medida em que no ensaio *push-pull*

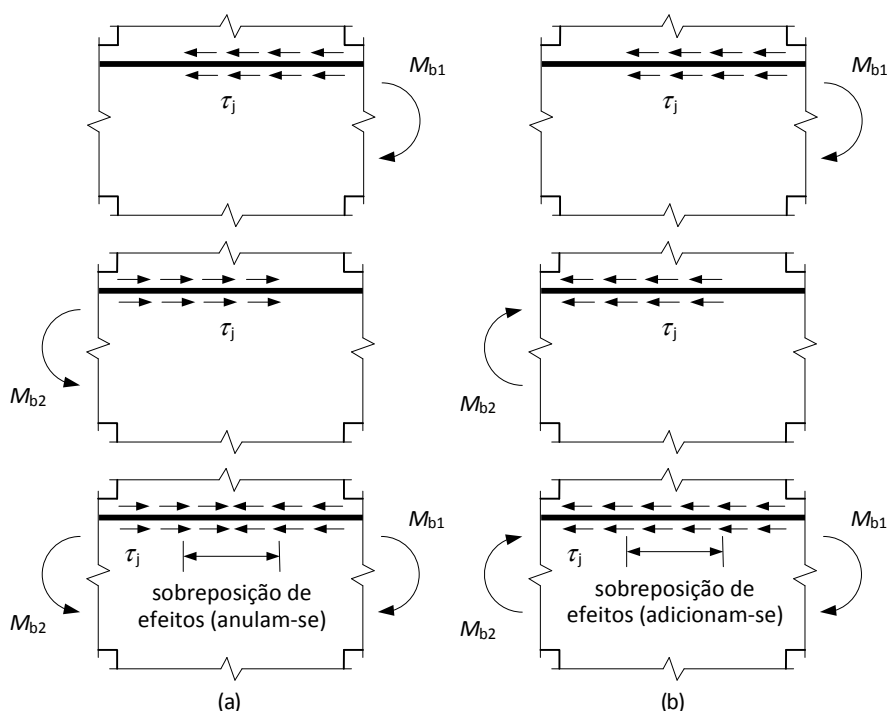


Figura 5.12 – Distribuição das tensões de aderência na armadura longitudinal quando as faces opostas da ligação apresentam momento flector com sentido (a) simétrico e (b) igual.

se verifica a rotura por arrancamento (*pull-out*) para níveis de carga inferiores. Note-se, no entanto, que a forma como Viwathanatepa, Popov *et al.* [1979a] realizaram os ensaios não traduz a amarração da ligação, na medida em que (i) a força de compressão transmitida à ligação viga-pilar por uma viga ou pilar adjacente é apenas parcialmente aplicada na armadura sendo a parte remanescente aplicada directamente no betão envolvente (Viwathanatepa, Popov *et al.* [1979a] aplicaram-na totalmente na armadura) e (ii) não foi modelada a continuidade da armadura para a viga adjacente. Relativamente ao ponto (i), dada a reduzida resistência à tracção do betão, a resultante de tracção da viga (pilar) é integralmente transmitida à ligação pela armadura longitudinal, no entanto, a resultante de compressão da viga (pilar) só é parcialmente transmitida pela armadura à ligação, reduzindo a força a transmitir da armadura ao betão por aderência e, conseqüentemente, o efeito de sobreposição das tensões de aderência ilustrado na (Figura 5.12(b)). Além disso, de acordo com Filippou, D'Ambrisi *et al.* [1992], a interacção entre esforços em faces opostas da ligação é pequena até à eliminação total da aderência entre os varões e o betão envolvente no interior da ligação. Ainda de acordo com Filippou, D'Ambrisi *et al.* [1992], a deterioração da aderência entre varões e betão só se tornará pronunciada após vários ciclos de carga com inversões de deformação de elevada amplitude, as quais não são espectáveis em elementos adequadamente proporcionados. Relativamente ao ponto (ii), havendo continuidade da armadura, não é espectável a ocorrência de colapso por *pull-out*. Desta forma, concluiu-se que o erro associado à modelação simplificada da amarração não é significativo para acções quase-estáticas não cíclicas.

## 5.4. Componentes amarração em tracção e compressão

### 5.4.1. Introdução

No modelo de ligação viga-pilar, a componente amarração em tracção simula o comportamento da zona de transferência da resultante das tensões normais de tracção longitudinais da extremidade efectiva da viga (ou pilar) para a ligação. Dada a reduzida capacidade resistente do betão em tracção, considera-se que esta transferência é efectuada exclusivamente pelos varões traccionados da armadura longitudinal da viga (ou pilar) que se prolongam para o interior da ligação.

No modelo de ligação viga-pilar, a componente amarração em compressão simula o comportamento da zona de transferência da resultante das tensões normais de compressão longitudinais da extremidade efectiva da viga (ou pilar) para a ligação. Esta transferência é efectuada simultaneamente pelos varões comprimidos da armadura longitudinal da viga (ou pilar) que se prolongam para o interior da ligação e pelo betão envolvente, também comprimido. A contribuição do betão comprimido justifica que a rigidez e a resistência da componente de amarração em compressão sejam muito superiores e, portanto, a deformação muito inferior, às da componente de amarração em tracção. Compreende-se pois que o comportamento da amarração em tracção seja crítico para a deformabilidade e resistência das ligações e que, no contexto do método das componentes, seja muito mais relevante que a componente amarração em compressão. Por isso, muitas das características apresentadas seguidamente referem-se exclusivamente à componente amarração traccionada.

De acordo com Bigaj [1999], os modos de rotura típicos de amarrações são (i) o arrancamento (*pull-out*), (ii) a fendilhação do betão num plano que contém o varão (*splitting*) e (iii) o destacamento do betão (*spalling*). Neste trabalho, admite-se que as amarrações estão devidamente confinadas e, conseqüentemente, que o único modo de rotura relevante é o arrancamento, e apenas no caso em que os varões da armadura da amarração terminam no interior da ligação. Nas ligações viga-pilar, dado o reduzido recobrimento das armaduras, este confinamento terá que ser garantido (i) por cintas, (ii) pela disposição dos varões longitudinais das vigas no interior da envolvente definida pelos varões longitudinais dos pilares ou (iii) por vigas transversais na zona da ligação.

De modo a representar o comportamento do betão na direcção do eixo dos varões é necessário distinguir o que está nas imediações das nervuras dos varões do restante. Deste modo, são ainda consideradas as seguintes hipóteses simplificativas: (i) a deformação longitudinal do betão nas imediações das nervuras dos varões (esmagamento e fendilhação, ou seja, a deformação local) é totalmente contabilizada de forma indirecta através da relação  $\tau$ - $s$  (tensão tangencial na superfície das armaduras vs. escorregamento relativo entre as armaduras e o betão envolvente, ver Anexo) e (ii) a deformação longitudinal do restante betão, designada por  $\varepsilon_c$ , é desprezada por comparação com a do betão nas imediações das nervuras dos varões, ou seja,  $\varepsilon_c = 0$ . Assume-se ainda que o confinamento e as condições de aderência são uniformes nos segmentos rectilíneos e/ou curvilíneos da amarração, excepto na zona de formação do cone de *pull-out* em amarrações traccionadas.

## 5.4.2. Amarrações rectilíneas

### 5.4.2.1. Formulação do problema

No caso de uma amarração rectilínea, o equilíbrio estático na direcção do seu eixo, para um segmento de varão de comprimento infinitesimal  $dx$  embebido em betão, pode ser expresso pela expressão

$$A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = \tau u \quad (5.14)$$

em que  $A_s$  é a área da secção transversal do varão,  $\sigma_s$  a tensão longitudinal no varão,  $\tau$  a tensão de aderência entre o varão e o betão e  $u$  o perímetro da secção transversal do varão.

A condição de compatibilidade na direcção do eixo do varão, entre extensões no varão ( $\varepsilon_s$ ) e no betão envolvente localizado para além da zona onde se dá a deformação local ( $\varepsilon_c$ ) e o deslocamento relativo entre ambos ( $s$ ), é definida pela expressão

$$\varepsilon_s - \varepsilon_c = \frac{ds}{dx} \quad (5.15)$$

ou ainda, de acordo com a hipótese (ii) mais acima, por

$$\varepsilon_s = \frac{ds}{dx} \quad (5.16)$$

Relativamente às relações constitutivas, dado o pressuposto de indeformabilidade do betão localizado para além da zona onde se dá a deformação local, é relevante para o problema o

comportamento nessa direcção (i) do varão e (ii) da interface varão-betão.

O comportamento axial dos varões é definido pela relação  $\sigma_s - \varepsilon_s$ . Habitualmente esta relação é assumida elástica linear para tensões  $\sigma_s$  inferiores à tensão de cedência  $f_y$ . Para tensões nos varões superiores à tensão de cedência, um modelo suficientemente rigoroso deve considerar o endurecimento das armaduras.

O comportamento da interface varão-betão na direcção longitudinal é definido em termos da relação  $\tau - s$ , habitualmente considerada (i) constante por troços ou (ii) análoga à proposta no §3.1 do MC90 (MC90 [1990]). No Anexo é apresentada uma explicação sucinta do fenómeno de aderência e estas relações constitutivas são sumariamente expostas.

### 5.4.2.2. Modelo simplificado

De uma forma geral, os modelos simplificados da amarração são 1D, e como consequência da modelação simplificada da aderência varão-betão e da não modelação explícita da deformação do betão na direcção do eixo do varão, apresentam um custo computacional relativamente reduzido.

Existem na bibliografia modelos simplificados que permitem simular o comportamento de amarrações para casos particulares de relações constitutivas ( $\sigma_s - \varepsilon_s$  e  $\tau - s$ ) e condições fronteira. Estes modelos têm tido bastante aceitação devido à sua simplicidade e por determinarem soluções analíticas. No Anexo apresenta-se um modelo deste tipo para amarrações rectilíneas (§A.3.1). Como facilmente se conclui do exposto no Anexo, estes modelos são muito específicos e requerem que, para além das relações constitutivas  $\sigma_s - \varepsilon_s$  e  $\tau - s$ , sejam definidos parâmetros que, num modelo completo, deveriam ser um resultado do próprio modelo (e.g., resistência da amarração).

Russo, Zingone *et al.* [1990] propuseram um modelo analítico para a solução do problema de amarrações rectilíneas para uma relação  $\sigma_s - \varepsilon_s$  bilinear e relações  $\tau - s$  expressas por um ou mais monómios (em zonas distintas da amarração). O procedimento é normalmente iterativo e apresenta uma implementação computacional complexa no caso de diversos monómios ou monómios de ordem elevada.

Alternativamente aos modelos anteriores, pode sempre efectuar-se uma análise por

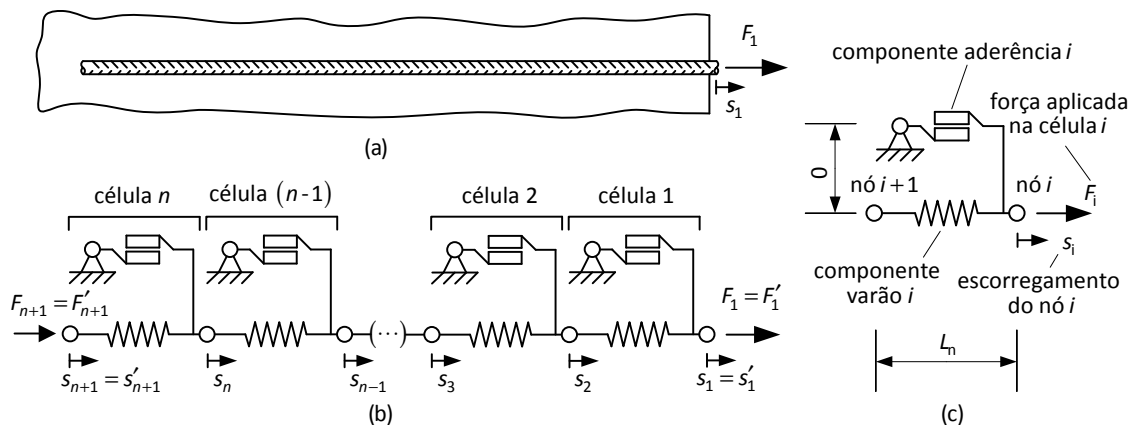


Figura 5.13 – Modelação da amarração rectilínea: (a) amarração rectilínea, (b) modelo proposto e (c) célula genérica  $i$ .

elementos finitos, normalmente com um procedimento iterativo em virtude da não linearidade material.

Em seguida é apresentado um modelo simplificado para amarrações rectilíneas, que tanto permite determinar a solução analítica para uma relação  $\tau$ - $s$  constante por troços (exemplificado no Anexo) como estabelecer um procedimento de resolução numérica simples para uma relação constitutiva  $\tau$ - $s$  genérica. No §5.4.3 este modelo é generalizado para amarrações curvilíneas de grande diâmetro interno de dobra.

Considere-se a amarração rectilínea de comprimento  $L_t$  representada da Figura 5.13(a) e o correspondente modelo representado na Figura 5.13(b), com um número finito  $n$  de células iguais dispostas em série, correspondendo cada uma delas a um troço da amarração de comprimento  $L_n = L_t/n$ . Cada uma destas células é constituída por duas componentes dispostas paralelamente, uma para modelar o varão (componente varão) e outra para modelar a aderência varão-betão (componente aderência), às quais é atribuído o mesmo número de série – Figura 5.13(c). Recorde-se que, apesar da deformação do betão na direcção do eixo do varão não ter sido explicitamente considerada neste modelo, o esmagamento e a fendilhação local do betão na vizinhança das nervuras da armadura é implicitamente considerado na relação  $\tau$ - $s$  (Anexo).

Neste modelo assume-se que a relação constitutiva da componente varão é elástica (linear ou não linear) e que a relação constitutiva para a componente aderência é genérica (elástica linear, elástica não linear, rígido-plástica, etc.).

A rigidez tangente da componente varão de cada célula vale

$$k = \frac{E_T A_s}{L_n} = \frac{n E_T A_s}{L_t} = \frac{n E_T \pi \phi^2}{4 L_t} \quad (5.17)$$

em que  $E_T$  é o módulo de elasticidade tangente do aço do varão de diâmetro  $\phi$ .

O esforço  $F_{ad}$  na componente aderência de cada célula é dado pela resultante longitudinal das tensões de aderência na superfície do troço de varão correspondente. Admitindo que este troço apresenta tensões de aderência com valor constante  $\tau$ , o esforço na componente aderência é

$$F_{ad} = L_n \pi \phi \tau = \frac{\bar{F}_{ad} L_t}{n} \quad (5.18)$$

em que  $\bar{F}_{ad} = \pi \phi \tau$  é o esforço na componente aderência por unidade de comprimento da amarração.

Seja ainda  $F_i$  o esforço aplicado na célula  $i$  pela célula imediatamente a montante (células com índice menor que a célula em causa),  $F_{m,i}$  o esforço na componente varão, isto é, a resultante das tensões normais longitudinais numa secção do varão,  $\Delta_{m,i}$  a deformação da componente varão da célula e  $s_i$  o escorregamento do nó, ou seja, o deslocamento longitudinal relativo médio na interface varão-betão (o subscripto  $i$  indica a célula  $i$  ou o nó  $i$ ),  $F'_1$  e  $F'_{n+1}$  as condições fronteira estáticas e  $s'_1$  e  $s'_{n+1}$  as condições fronteira cinemáticas do problema.

Este modelo discreto da amarração substitui a distribuição contínua das tensões de aderência

por um conjunto de esforços de aderência concentrados nos nós ( $F_{ad}$ ). Assim, a tensão normal nas secções transversais no varão ( $F_m$ ) é constante entre nós, sofrendo em cada nó um salto de valor absoluto igual ao do esforço de aderência na componente aderência correspondente a esse nó. Em termos práticos, é como se a aderência efectiva na interface cilíndrica correspondente a uma célula estivesse a ser eliminada e substituída pela sua resultante numa circunferência localizada na sua extremidade de montante. Ou seja,  $F_{i+1} = F_{ad,i} + F_{m,i} = F_{ad,i} + F_i$ . Ou seja ainda, em termos estáticos este modelo apresenta um campo de esforço axial na armadura que é constante por troços e um campo de esforço de corte de aderência discreto longitudinalmente, ou seja, sempre nulo, excepto nos nós. Em termos cinemáticos, o campo de deslocamentos é contínuo, com deformação, e portanto com incremento de escorregamento  $\Delta_m$  em cada célula.

Resumindo, a condição de equilíbrio nodal é dada por

$$F_{i+1} = F_i - F_{ad,i} = F_{m,i} \quad (5.19)$$

e a condição de compatibilidade

$$s_{i+1} = s_i - \Delta_{m,i} \quad (5.20)$$

O esforço na célula  $i$  ( $F_i$ ) pode ser determinado considerando a condição de fronteira conjuntamente com as relações de equilíbrio nas células a montante, ou seja, aplicando de forma recursiva as relações (5.19)

$$F_i = F_{m,i} + F_{ad,i} = F_{i+1} + F_{ad,i} = F_{m,i+1} + F_{ad,i+1} + F_{ad,i} = F_{n+1} + \sum_{c=i}^n F_{ad,c} \quad (5.21)$$

De modo semelhante, o escorregamento do nó  $i$  ( $s_i$ ) pode ser determinado considerando a condição de fronteira conjuntamente com as relações de compatibilidade nas células a jusante da célula em causa (células com índice maior que a célula em causa), ou seja, aplicando a relação (5.20) de forma recursiva,

$$s_i = s_{i+1} + \Delta_{m,i} = s_{i+2} + \Delta_{m,i+1} + \Delta_{m,i} = s_{n+1} + \sum_{c=1}^n \Delta_{m,c} \quad (5.22)$$

O modelo apresentado na Figura 5.13, e posteriormente desenvolvido nesta secção, visa modelar a componente amarração em tracção. Tendo em conta as considerações apresentadas na §5.3.2.4, assume-se que não existe interacção entre as amarrações das vigas e dos pilares em faces opostas da ligação viga-pilar e, conseqüentemente, a componente amarração pode ser idealizada como um ensaio de arrancamento do varão (*pull*). Nesta situação as condições de fronteira estáticas são  $F_1 = F'_1$ , em que  $F'_1$  é a resultante transmitida pela viga ou pilar na periferia da ligação à amarração e  $F'_{n+1} = 0$ . O comprimento da amarração considerado no modelo corresponderá ao comprimento dos varões da armadura longitudinal da viga/pilar no interior da ligação, no caso destes terminarem na ligação, e será  $L_t = \infty$  no caso destes serem contínuos ao longo da ligação. A relação  $N-\Delta$  da componente amarração corresponderá à relação  $F_1-s_1$  do modelo apresentado na Figura 5.13.

### 5.4.3. Amarrações curvilíneas

Em ligações viga-pilar de extremidade e em ligações de cobertura de extremidade, os varões



longitudinais traccionados das vigas apresentam habitualmente amarrações com configuração geométrica em laço (L4, Tabela 2.2) ou em cotovelo a 90° para o interior da ligação (L6, Tabela 2.2), as quais serão genericamente designadas amarrações curvilíneas.

Apesar das amarrações curvilíneas serem comuns e de haver trabalhos experimentais já da década de 1970 demonstrando que o seu comportamento é significativamente diferente do das amarrações rectilíneas (Minor [1970], Minor e Jirsa [1975]), são poucos os modelos de comportamento publicados para este tipo de amarração, além de que esses poucos são bastante simplistas e com uma forte componente empírica (Soroushian, Obaseki et al. [1988], Ueda, Lin et al. [1986], Monti, Filippou et al. [1997], Eligehausen, Bertero et al. [1982]).

Os ensaios realizados por Minor e Jirsa [1975] com varões curvilíneos embebidos em blocos de betão simples, indicam que quanto maior o ângulo de dobragem, maior o escorregamento da amarração para o mesmo nível de carga, ou seja, de uma forma geral, as amarrações curvilíneas são mais flexíveis que as amarrações rectilíneas. De acordo com estes autores, esta diferença de comportamento decorre (i) do movimento radial dos varões associado às tensões normais de compressão no intradorso da dobragem, Figura 5.14(a), e (ii) da perda de contacto entre o betão e o extradorso da dobragem, reduzindo acentuadamente as tensões de aderência, Figura 5.14(b).

Minor e Jirsa [1975] constataram experimentalmente que, de uma forma geral, a resistência de amarrações rectilíneas e curvilíneas é semelhante, excepto nos casos com raio de dobragem excepcionalmente pequeno, para os quais a amarração curvilínea é mais resistente devido à formação de um mecanismo do tipo ferrolho. Ainda de acordo com estes autores, o efeito da flexão dos varões não é significativo nos casos em que o comprimento de amarração é suficientemente grande para que ocorra a cedência da armadura (amarração longa).

A semelhança entre a resistência de amarrações rectilíneas e curvilíneas em amarrações longas indica que, nas amarrações curvilíneas, a perda de aderência em parte da superfície da amarração (extradorso da dobragem) é compensada, na zona de maior confinamento (intradorso da dobragem), pelos valores maiores das tensões de aderência.

Minor e Jirsa [1975] concluíram ainda que o comprimento da amarração não influencia a rigidez inicial da relação entre o esforço na amarração e o escorregamento da secção inicial (relação  $F_1-s_1$ , Figura 5.13), na medida em que, para cargas reduzidas, as tensões de aderência são elevadas junto à extremidade traccionada e negligenciáveis no resto da amarração.

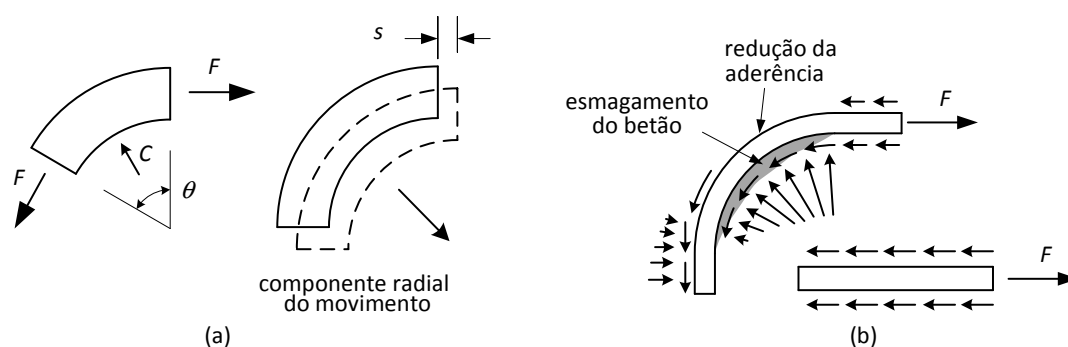


Figura 5.14 – Amarração curvilínea (Minor e Jirsa [1975]): (a) escorregamento associado à deformação radial do betão, (b) tensões de aderência para varões rectilíneos e curvilíneos.

### 5.4.3.1. Formulação do problema

Considere-se um varão, envolvido em betão, com eixo em arco de circunferência de raio  $r$ . As tensões na interface varão-betão apresentam uma componente radial e uma componente tangencial. Seja  $p$  a resultante por unidade de comprimento das tensões radiais na armadura e  $\tau$  a tensão tangencial na armadura.

No caso 2D mais geral, um elemento infinitesimal da viga nestas condições estará submetido a um campo de esforços com componente axial ( $N$ ), corte ( $V$ ) e de flexão ( $M$ ), Figura 5.15(a). Dadas as relações constitutivas não lineares da armadura, betão e interface, torna-se complexo definir um procedimento simplificado para resolver este problema. No entanto, tendo em consideração os resultados de Minor e Jirsa [1975] apresentadas na secção anterior, conclui-se que, limitando o âmbito de aplicação do modelo de amarração a amarrações curvilíneas com um raio interno de dobragem elevado e comprimento de amarração suficiente para possibilitar a cedência da armadura (amarração longa), pode ser desprezada a rigidez à flexão e ao corte da armadura. Neste caso, basta a componente axial ( $N$ ) para caracterizar o campo de esforços no varão, o qual pode ser imaginado como um fio que desliza, com atrito, sobre uma superfície deformável, Figura 5.15(b).

Para o segmento infinitesimal de varão representado na Figura 5.15(b), o equilíbrio estático na direcção radial pode ser expresso pela expressão

$$pr = \sigma_s A_s \quad (5.23)$$

e na direcção tangencial pela expressão

$$A_s \frac{d\sigma_s}{d\theta} = \tau ur . \quad (5.24)$$

O movimento do varão relativamente ao betão envolvente na direcção tangencial  $ds_t$ , tem uma componente  $y d\theta$  devida ao movimento de corpo rígido do varão na direcção radial, Figura 5.15(c), e outra devida à deformação pura de ambos na direcção tangencial  $r(\varepsilon_s - \varepsilon_c) d\theta$ , ou seja,

$$\frac{ds_t}{d\theta} = r(\varepsilon_s - \varepsilon_c) + y \quad (5.25)$$

ou, desprezando a deformação do betão para lá das nervuras (deformação não local) na direcção tangencial,

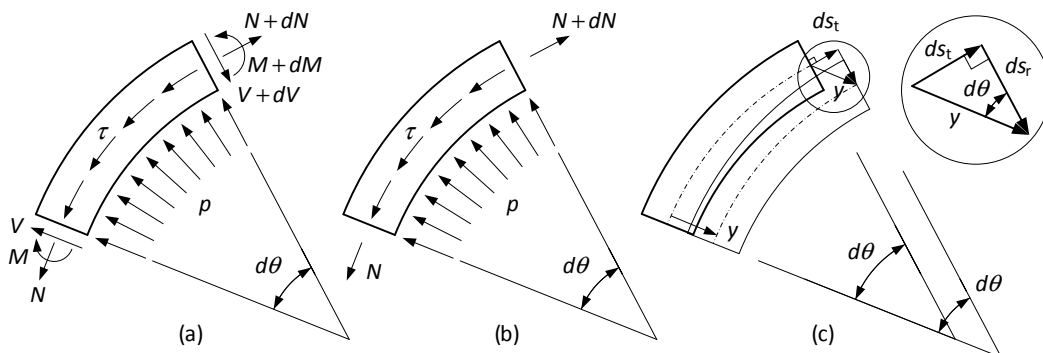


Figura 5.15 – Segmento infinitesimal de varão de amarração curvilínea: (a) esforços, (b) esforços simplificados, (c) movimento de corpo rígido na direcção radial.

$$\frac{ds_t}{d\theta} = r \varepsilon_s + y . \quad (5.26)$$

Relativamente às relações constitutivas, dado o pressuposto de indeformabilidade do betão na direcção tangencial dos varões para lá das nervuras na direcção tangencial (deformação não local, são relevantes para o problema (i) o comportamento dos varões na direcção tangencial, (ii) o comportamento ao corte da interface entre os varões e o betão envolvente na direcção tangencial e (iii) o comportamento do betão comprimido no interior da dobra na direcção radial.

À semelhança das amarrações rectilíneas, o comportamento dos varões na direcção tangencial é novamente definido em termos da relação  $\sigma_s - \varepsilon_s$  e o comportamento da interface na direcção tangencial em termos da relação  $\tau - s_t$ . O comportamento do betão no interior da dobra na direcção radial habitualmente é definido em termos da relação  $p - s_r$ .

### 5.4.3.2. Modelo simplificado

Seja uma amarração com eixo do varão em arco de circunferência de raio  $r$  e amplitude  $\theta$ . A Figura 5.16(a) apresenta um modelo simplificado desta amarração com  $n$  células para as condições da Figura 5.15(b), ou seja, desprezando as rigidezes de flexão e transversal do varão. Este modelo difere do modelo proposto no §5.4.2.2 pelo facto dos nós das células estarem dispostos ao longo de um arco de circunferência e pela componente adicional nas células, a componente betão na direcção radial, Figura 5.16(b). Esta componente simula no modelo a deformação do betão por compressão radial num comprimento de influência correspondente a metade da célula  $i$  e metade da célula  $i-1$ .

Assumindo uma discretização em elementos iguais, a cada célula corresponde o ângulo ao centro  $\theta_n = \theta/n$ .

Como consequência da disposição dos nós ao longo do arco de circunferência, cada componente varão ocupa o lugar geométrico da corda do arco de circunferência correspondente ao ângulo  $\theta_n$  e consequentemente tem um comprimento

$$L'_n = 2r \sin(\theta_n/2) . \quad (5.27)$$

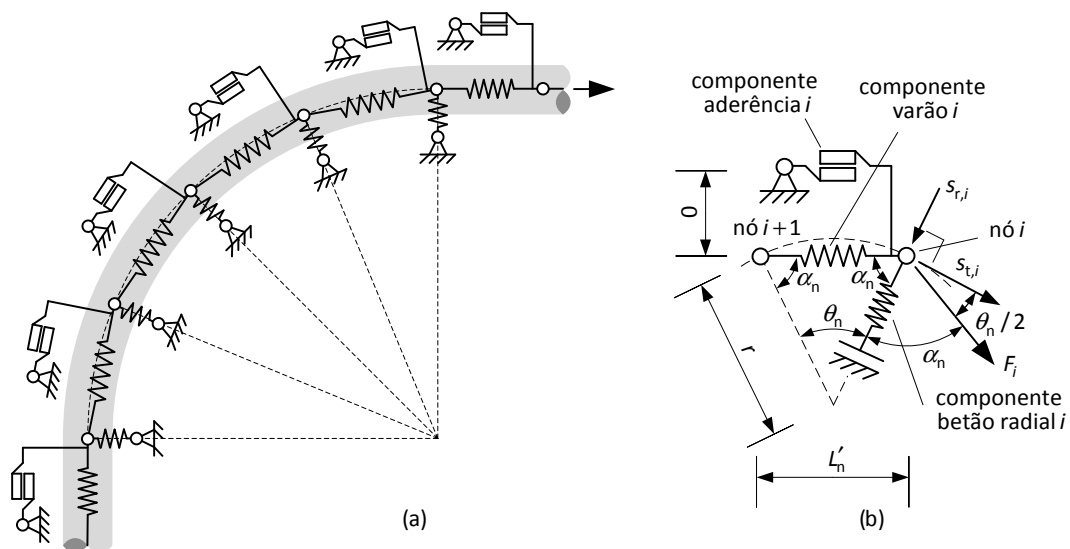


Figura 5.16 – Amarração curvilínea, (a) modelo proposto, (b) célula genérica  $i$ .

Se fosse utilizado este valor para comprimento da componente amarração da célula, a soma destes comprimentos seria inferior ao comprimento da amarração, o que afectaria a rigidez da armadura e a resultante das tensões de aderência. Por isso, é necessário admitir que o comprimento da componente varão é igual ao comprimento do arco de circunferência de raio  $r$  e ângulo ao centro  $\theta_n$ , ou seja,

$$L_n = r \theta_n. \quad (5.28)$$

O nó  $i$  sofre um deslocamento  $s_i$  com uma componente tangencial  $s_{t,i}$  e radial  $s_{r,i}$ . A componente  $s_{t,i}$  faz um ângulo  $\theta_n/2$  com o eixo da componente varão e o ângulo entre a componente varão e a componente betão radial de uma mesma célula é

$$\alpha_n = \frac{\pi - \theta_n}{2}. \quad (5.29)$$

Sendo  $F_{c,i}$  o esforço na componente betão da célula  $i$ , o equilíbrio entre forças nodais e esforços nas componentes de cada célula pode escrever-se na forma

$$\mathbf{F}_{tr} = \mathbf{A}^T \mathbf{F}_{cmp} \rightarrow \begin{bmatrix} F_{t,i} \\ F_{r,i} \\ F_{t,i+1} \\ F_{r,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n/2) & \cos(\theta_n/2) & 0 \\ -\sin(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) & -1 \\ -\cos(\theta_n/2) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_n/2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{m,i} \\ F_{ad,i} \\ F_{c,i} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

e as relações de compatibilidade entre os deslocamentos nodais e as deformações das componentes na forma

$$\mathbf{\Delta}_{cmp} = \mathbf{A} \mathbf{s}_{tr} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta_{m,i} \\ \Delta_{ad,i} \\ \Delta_{c,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) & -\cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) \\ \cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t,i} \\ s_{r,i} \\ s_{t,i+1} \\ s_{r,i+1} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Tendo ainda em consideração que

$$F_i = \frac{F_{t,i}}{\cos(\theta_n/2)} \quad (5.32)$$

pela primeira e terceira relações da expressão (5.30), obtém-se, respectivamente,

$$F_i = F_{m,i} + F_{ad,i} \quad (5.33)$$

e

$$F_i = F_{m,i-1}. \quad (5.34)$$

No modelo representado na Figura 5.16(b), a componente aderência foi disposta paralelamente à componente varão. Desta forma, a deformação da componente aderência corresponde à parcela do deslocamento do nó paralela ao eixo da componente varão (recorde-se que, para efeitos do deslocamento do varão na direcção tangencial, considera-se o betão indeformável para além da deformação indirectamente contabilizada na relação  $\tau$ - $s$ ). No entanto, numa primeira fase, a componente aderência foi idealizada com direcção tangencial (Figura 5.17). Posteriormente, este modelo foi abandonada porque o modelo

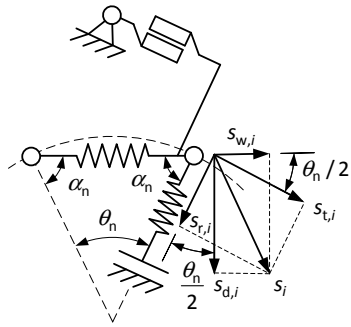


Figura 5.17 – Célula curvilínea genérica  $i$  (versão alternativa).

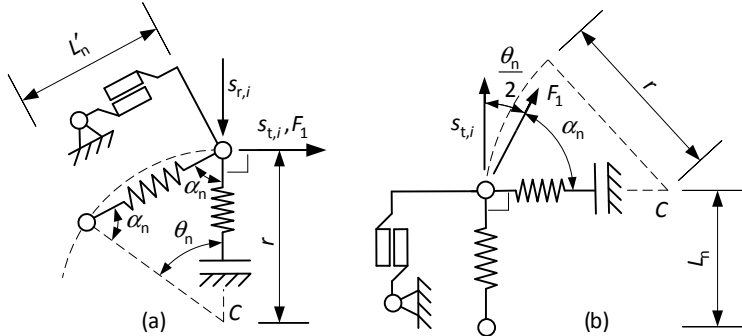


Figura 5.18 – Células de extremidade numa amarração com troços curvilíneos e rectilíneos: (a) troço curvilíneo e (b) troço rectilíneo.

representado na Figura 5.16(b), ao permitir determinar de forma sequencial os esforços e as componentes do deslocamento na célula  $i$ , conhecendo os deslocamentos e forças instaladas na célula  $i+1$ , tem uma implementação numérica mais simples (§5.4.5). De facto, adoptando o modelo representado na Figura 5.17, para obter as componentes do deslocamento no nó  $i$  a partir dos deslocamentos do nó  $i+1$  seria necessário a resolução de um sistema de duas equações não lineares tendo como incógnitas a componente do deslocamento do nó perpendicular à direcção da componente varão e o esforço na componente varão.

Para ilustrar esta particularidade, assume-se que se conhecem as parcelas do deslocamento do nó  $i+1$  e que o esforço na componente varão da célula  $i$  é  $F_{m,i}$ , à qual corresponde uma deformação  $\Delta_{m,i} = \Delta_m[F_{m,i}]$ . Considere-se a decomposição do movimento do nó  $i$  no referencial  $(w,d)$  em que  $w$  tem a direcção da componente varão da célula  $i$  e  $d$  tem a correspondente direcção normal, Figura 5.17.

A relação entre as componentes do deslocamento do nó de uma célula interna da amarração curvilínea nos dois sistemas de coordenadas é

$$\mathbf{s}_{tr,i} = \mathbf{T}_i \mathbf{s}_{cd,i} \rightarrow \begin{bmatrix} s_{t,i} \\ s_{r,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_n/2) & \cos(\theta_n/2) \\ \cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{d,i} \\ s_{w,i} \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

O deslocamento  $s_{w,i}$  pode ser relacionado com  $\Delta_{m,i}$  e com os deslocamentos do nó  $i+1$  a partir da primeira das relações (5.31) tendo em conta (5.35). Resolvendo esta equação em ordem a  $s_{w,i}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta_{m,i} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t,i} \\ s_{r,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t,i+1} \\ s_{r,i+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) \end{bmatrix} \mathbf{T} \begin{bmatrix} s_{d,i} \\ s_{w,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\cos(\theta_n/2) & -\sin(\theta_n/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{t,i+1} \\ s_{r,i+1} \end{bmatrix} \\ &= s_{w,i} - s_{t,i+1} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) - s_{r,i+1} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \rightarrow s_{w,i} = \Delta_{m,i} + s_{t,i+1} \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) + s_{r,i+1} \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Estabelecendo o equilíbrio estático no nó  $i$ , obtém-se as incógnitas  $F_{ad,i}$ ,  $F_{c,i}$  e  $F_i$ . Como  $F_{ad,i} = F_{ad}[s_{t,i}]$  e  $F_{c,i} = F_c[s_{r,i}]$ , estabelecendo os deslocamentos no referencial  $(t,r)$  em função dos deslocamentos no referencial  $(w,d)$ , resulta um sistema de duas equações a duas incógnitas  $(s_{d,i}$  e  $F_i)$ .

No modelo proposto assume-se que os troços rectilíneos da amarração são tangentes ao arco

dos troços curvilíneos nos pontos de concordância. Desta forma, a primeira célula do troço curvilíneo (a de menor índice) e a primeira célula do troço rectilíneo a jusante do troço curvilíneo apresentam a configuração apresentada na Figura 5.18.

Como já foi referido, devido ao movimento radial do varão curvilíneo, o extradorso do varão tende a perder contacto com o betão envolvente reduzindo a capacidade de transferência de tensões por aderência (Minor e Jirsa [1975], Marques e Jirsa [1975]). De acordo com Minor e Jirsa [1975] e Marques e Jirsa [1975], também a extremidade rectilínea subsequente ao troço curvilíneo tende a perder contacto com o betão, mas agora do lado do intradorso da dobra, devido à flexão a que o varão está submetido (num ensaio de arrancamento – *pull*). A relação  $\tau$ - $s$  deve incorporar as diferenças de condições de transferência de carga entre as armaduras e o betão envolvente ao longo do perímetro do varão. Uma forma simples de incorporar estas diferenças seria considerar o betão envolvente no intradorso como betão confinado e o betão envolvente no extradorso como betão não confinado ou mesmo assumir que este perdeu contacto com o varão. No entanto, de forma a preservar a capacidade resistente da amarração curvilínea relativamente à amarração rectilínea (Minor e Jirsa [1975]) – para indirectamente contabilizar a maior capacidade resistente por aderência no intradorso do varão – no modelo simplificado proposto optou-se por assumir uma relação  $\tau$ - $s$  uniforme em todo o perímetro do varão curvilíneo à semelhança do modelo para a amarração rectilínea.

De acordo com o §9.1.1.2 do MC90, as especificações técnicas estipulam diâmetros mínimos dos mandris com vista a evitar o aparecimento de fendas nos varões aquando da dobragem e o esmagamento do betão no intradorso do varão em situação de serviço. Nestas condições, o efeito da compressão radial no intradorso da parte curvilínea da amarração poderia ser modelado a partir da Teoria da Elasticidade. No entanto, quando o valor da tensão longitudinal no varão se aproxima da tensão de cedência, de acordo com Thompson, Jirsa *et al.* [2002], mesmo respeitando os diâmetros mínimos regulamentares de dobragem, tipicamente o betão no intradorso do varão sofre esmagamento.

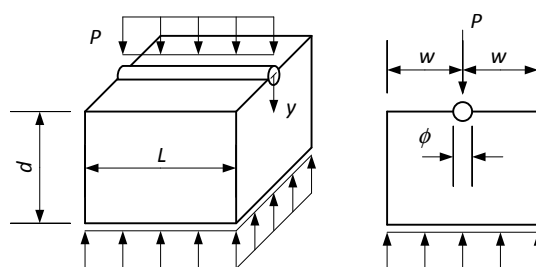
Dada a complexidade na modelação do comportamento do betão no intradorso do varão (resultado da conjugação de tensões radiais e tangenciais no betão no domínio não-elástico), optou-se por uma modelação simplificada deste comportamento com base em resultados experimentais.

O comportamento de um varão imerso em betão e sujeito a deslocamentos na direcção perpendicular ao seu eixo é relevante para o estudo do efeito ferrolho (*dowel action*), tendo sido alvo de estudos experimentais. Estes estudos permitiram concluir que a tensão de rotura à compressão do betão sob a armadura pode exceder várias vezes a tensão de rotura à compressão uniaxial, devido ao confinamento proporcionado pelo betão envolvente.

Defina-se a tensão transversal exercida pelo varão ( $\sigma_b$ ) como

$$\sigma_b = \frac{P}{\phi L} \quad (5.37)$$

em que  $P$  é a força uniformemente distribuída exercida transversalmente ao eixo do varão de comprimento  $L$  (Figura 5.19). Seja  $k_f$  a rigidez relativa à relação  $\sigma_b$ - $y$  em que  $y$  é o deslocamento do varão na direcção perpendicular ao seu eixo. De acordo com Mirzaei [2010],


 Figura 5.19 – Ensaio realizados por Soroushian, Obaseki *et al.* [1987].

os resultados experimentais reportados na bibliografia relativos à resistência à compressão lateral ( $f_b$ ) e à rigidez  $k_f$  apresentam uma elevada dispersão, com valores para  $f_b$  habitualmente no intervalo  $[1.8, 6.5]f'_c$ , mas que podem chegar a  $20f'_c$ , e de 200 a  $1250 \text{ N/mm}^3$  para  $k_f$ . De acordo com Poli, Prisco *et al.* [1992], esta dispersão dos valores medidos para  $f_b$  e  $k_f$  deve-se à variação do confinamento lateral exercido sobre o betão em diferentes ensaios e à rotura, por vezes prematura, por fendilhação longitudinal do betão (*splitting*) devido à concentração de tensões.

Um dos modelos mais frequentemente referidos na bibliografia para determinar  $f_b$  e  $k_f$  no âmbito da modelação do efeito ferrolho é o modelo desenvolvido por Soroushian, Obaseki *et al.* [1987] com base em observações experimentais (Figura 5.19). De acordo estes autores, o betão comprimido transversalmente por varões tende a apresentar um comportamento linear até ao colapso. Após atingir a carga de colapso, caso não exista confinamento transversal, ocorre uma redução abrupta de carga e, caso exista confinamento transversal (armaduras transversais que limitam a abertura das fendas de *splitting*), a redução de carga é gradual, o que corresponde a uma rotura mais dúctil.

De acordo com Soroushian, Obaseki *et al.* [1987], (i)  $f_b$  pode ser várias vezes superior a  $f'_c$ , (ii)  $f_b$  e  $k_f$  aumentam com a redução de  $\phi$  e com o aumento de  $f'_c$ , (iii) nem  $f_b$  nem  $k_f$  são sensíveis à variação da altura  $d$  dos espécimes, o que indica que a deformação é localizada, (iv) o confinamento do betão não tem uma influência significativa em  $f_b$  nem em  $k_f$ . Estes autores propuseram, para a resistência e rigidez do betão sob a armadura, as expressões

$$f_b = 8 \sqrt{\left(\frac{f'_c}{\text{MPa}}\right) \frac{L}{L_1} \left(\frac{w}{\phi}\right)^{1/3}} \quad [\text{MPa}] \quad (5.38)$$

e

$$k_f = 127 c_1 \sqrt{\left(\frac{f'_c}{\text{MPa}}\right) \left(\frac{\text{mm}}{\phi}\right)^{2/3}} \quad \left[\frac{\text{MPa}}{\text{mm}}\right] \quad (5.39)$$

em que  $c_1$  é um coeficiente que contabiliza o efeito da proximidade transversal entre varões que varia entre 0.6, para um espaçamento livre entre varões de 25.4 mm, e 1, para grandes espaçamentos entre varões.

Todos os espécimes ensaiados por Soroushian, Obaseki *et al.* [1987] romperam por fendilhação longitudinal do betão (*splitting*) o que pode justificar o andamento linear da relação  $f_b$ - $y$ , ou seja, a rotura pode ter ocorrido sem que se verificasse esmagamento significativo do betão. Dado o confinamento transversal conferido às ligações viga-pilar pelas armaduras transversais e mesmo pelas armaduras longitudinais dos elementos transversais

adjacentes à ligação, é expectável que não ocorra colapso por *splitting* e, conseqüentemente, a aplicação da expressão (5.38) a ligações viga-pilar constitui uma estimativa por defeito de  $f_b$ . Assim, de forma simplificada, no modelo proposto para amarrações curvilíneas, o comportamento adoptado para a componente betão radial ( $p$ - $y$ ) é elástico linear (sem limite de resistência) e a rigidez é definida pela expressão (5.39).

#### 5.4.4. A localização das deformações

A relação  $\tau$ - $s$  proposta no §3.1 do MC90 (ver Anexo) incorpora um troço com amaciamento, ou seja, com rigidez tangente negativa. Nesta secção avalia-se em que condições o amaciamento da relação  $\tau$ - $s$  pode conduzir à localização das deformações.

A localização das deformações numa estrutura ocorre para uma redução progressiva da carga aplicada, consistindo no incremento de deformação numa zona localizada, ou seja, apresentando rigidez tangente negativa, acompanhado da redução de deformação no resto da estrutura, que portanto descarrega com rigidez tangente positiva.

A localização das deformações é um fenómeno físico e como tal deve ser reproduzido pelos modelos. O problema é que a localização pode tornar a solução dependente da discretização adoptada no modelo, o que torna problemática a interpretação dos resultados do modelo se não mesmo o próprio modelo. Em termos práticos, como o grau de refinamento da malha de elementos finitos é uma opção do analista, diz-se que os problemas que apresentam esta particularidade têm falta de objectividade ou dependência de malha.

Isto significa que o ramo de amaciamento pós-pico das relações constitutivas obtidas experimentalmente para materiais quase-frágeis como o betão e as rochas não pode ser considerado uma característica intrínseca do material, passível, portanto, de ser reproduzida por uma relação constitutiva formulada em termos de tensões e extensões locais. Na verdade, este ramo é uma característica estrutural do espécime ensaiado.

No entanto, o facto de um troço de varão apresentar escorregamento na zona de amaciamento da relação  $\tau$ - $s$ , pode não implicar rigidez negativa da amarração, ou seja, do conjunto varão, betão e interface, e, conseqüentemente, localização das deformações. De facto, nos modelos desenvolvidos (Figuras 5.13 e 5.14), a rigidez da amarração resulta da rigidez da armadura, da rigidez da interface e da rigidez do betão. Por exemplo, para a amarração rectilínea (o raciocínio é semelhante para a amarração curvilínea), como as componentes varão e aderência que constituem cada célula estão dispostas em paralelo, a rigidez tangente da célula é dada pela soma das respectivas rigidezes, ou seja

$$k_g = k_m + k_{ad} = \frac{E_T A_s}{L_n} + k_r u L_n \quad (5.40)$$

em que  $k_g$  é a rigidez tangente da célula,  $k_m$  é a rigidez tangente da componente varão,  $k_{ad}$  é a rigidez tangente da componente aderência e  $k_r$  é a rigidez tangente da relação  $\tau$ - $s$ . Conclui-se que a rigidez tangente global da célula pode ser positiva apesar da rigidez tangente da componente aderência ser negativa.

Adoptando a relação  $\tau$ - $s$  proposta no §3.1 do MC90 (Anexo) para a componente aderência e



um comportamento bilinear para a componente varão, a rigidez mínima da célula ocorrerá quando a componente varão estiver na fase de endurecimento e a componente aderência estiver na fase de amaciamento

$$k_{g,\min} = E_{sh} \pi \frac{\phi^2}{4L_n} + \frac{\tau_f^{mc} - \tau_{\max}^{mc}}{s_3^{mc} - s_2^{mc}} \pi \phi L_n \quad (5.41)$$

em que  $E_{sh}$  é módulo de endurecimento da armadura e  $\tau_f^{mc}$ ,  $\tau_{\max}^{mc}$ ,  $s_2^{mc}$  e  $s_3^{mc}$  são parâmetros caracterizadores da relação  $\tau$ - $s$  proposta no §3.1 do MC90 (Anexo). Esta expressão permite concluir que, mantendo todos os outros parâmetros fixos, a rigidez global da célula pode ser positiva ou negativa consoante o número de células em que for discretizada a amarração.

Desta forma, para que uma célula não apresente rigidez negativa, basta que se verifique a relação

$$k_{g,\min} > 0 \rightarrow \frac{\tau_{\max}^{mc} - \tau_f^{mc}}{s_3^{mc} - s_2^{mc}} \frac{4L_n^2}{E_{sh} \phi} < 1. \quad (5.42)$$

Este resultado decorre das grandezas distintas consideradas nas relações constitutivas das componentes varão e aderência. Enquanto na componente varão o esforço é função da extensão, ou seja, da derivada do deslocamento longitudinal do varão, na componente aderência o esforço é função do escorregamento, ou seja, do deslocamento longitudinal relativo entre varão e betão envolvente. Esta diferença torna a rigidez da célula, quando definida em termos da relação tensão-extensão, dependente do seu comprimento. Isto significa que, sendo a rigidez tangente do varão positiva ( $E_T > 0$ ), a rigidez tangente negativa da célula, e conseqüentemente a localização de deformações na amarração, resulta da utilização de malhas de elementos finitos excessivamente grosseiras.

Na Figura 5.20 está representado o valor mínimo de  $L_n$  que satisfaz a condição (5.42) para  $f_{ck} \in [0, 100\text{MPa}]$ , em função do diâmetro do varão e para cada um dos cenários indicado na Tabela 3.1.1 do MC90 (Anexo). Foi utilizado um valor corrente para a rigidez de endurecimento do aço,  $E_{sh} = 0.01E \approx 2\text{GPa}$ . Para a distância livre entre nervuras dos varões (necessária para a relação  $\tau$ - $s$  proposta no MC90 – Anexo), utilizaram-se os valores definidos para varões A500NR SD da MEGAFER (LNEC [2008]).

Analisando a Figura 5.20 constata-se que a situação mais gravosa ocorre para betão não confinado e outras condições de aderência, verificando-se que se o comprimento das células for inferior a 8 mm, a sua rigidez global tangente é positiva.

## 5.4.5. Implementação dos modelos

### 5.4.5.1. Justificação da abordagem adoptada

A determinação do comportamento da amarração (relação  $F_1$ - $s_1$ ) recorrendo aos modelos simplificados propostos (§§ 5.4.2.2 e 5.4.3.2) pode passar pela resolução de um sistema de equações não lineares para o modelo da amarração. No entanto, esta abordagem é potencialmente problemática tendo em atenção as relações constitutivas para a aderência habitualmente adoptadas. Por um lado, as relações constantes por troços são obviamente

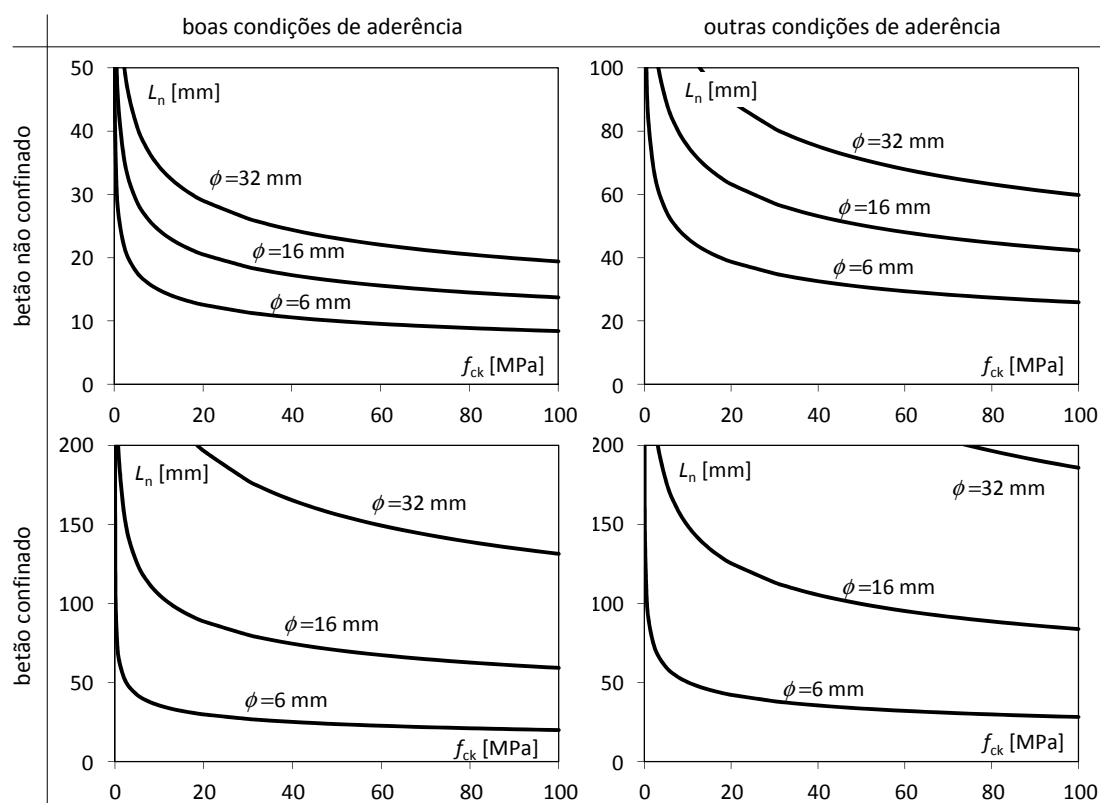


Figura 5.20 – Comprimento máximo da célula do modelo da amarração que garante rigidez positiva.

descontínuas e têm rigidez nula. Por outro lado, as relações do tipo da proposta no §3.1 do MC90 (Anexo), não são diferenciáveis para  $s = 0$  quando  $\alpha^{mc} < 1$ . De facto para este tipo de relação constitutiva, para  $\alpha^{mc} < 1$  tem-se

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau[s] - \tau[0]}{s - 0} = \infty. \quad (5.43)$$

Para ultrapassar estas limitações foi desenvolvida uma abordagem alternativa que resulta da constatação de que os modelos simplificados propostos (§§ 5.4.2.2 e 5.4.3.2) permitem a determinação sequencial das grandezas estáticas e cinemáticas em cada célula a partir de uma extremidade da amarração, desde que estejam definidas as condições de fronteira nessa extremidade ( $F'$  e  $s'$ ).

No caso mais geral de uma amarração, é definida em cada uma das suas extremidades uma única condição fronteira, ou seja, é conhecido *a priori* o esforço  $F'$  (condição estática) ou o escorregamento  $s'$  (condição cinemática), mas não ambos, o que inviabiliza a aplicação directa do procedimento anterior para determinação da relação constitutiva da amarração. Pode então utilizar-se o método de tiro (*shooting method*). De acordo com este método, numa das extremidades arbitra-se um valor inicial para a variável livre (ou seja, sem condição de fronteira definida) e calculam-se de forma sequencial as forças e escorregamentos em todas as células do modelo até se chegar à outra extremidade, concluindo o primeiro ciclo. Se o valor calculado para a variável com condição de fronteira conhecida *a priori* satisfizer esta condição, a menos de uma dada tolerância, a solução procurada foi encontrada. Porém geralmente tal condição não é satisfeita. Neste caso, com base no erro cometido, corrige-se a estimativa anteriormente utilizada para a variável livre na primeira extremidade e faz-se novo ciclo. Estes

ciclos serão repetidos até que a tolerância referida seja satisfeita. A determinação das estimativas para o valor da variável livre na primeira extremidade, constitui um problema não-linear que pode ser resolvido por um processo iterativo clássico (*Newton-Raphson, bissecção, comprimento de arco*).

Este procedimento iterativo é vantajoso porque envolve a resolução de apenas uma equação não linear (problema de valor inicial), em alternativa à resolução de um sistema de  $n$  equações não lineares (problema de valores na fronteira). Porém, embora este procedimento seja eficaz para a maioria das relações constitutivas para a aderência testadas, para relações do tipo da do §3.1 do MC90 (Anexo) diverge para valores reduzidos do escorregamento. Esta dificuldade resulta da tangente a  $\tau(s)$  na origem ser paralela ao eixo das ordenadas, de modo que a variação de  $\tau$  nas imediações de  $s=0$  é muito rápida. Assim, no modelo da amarração a variação do esforço na componente aderência em células contíguas é muito acentuada quando os valores do escorregamento são próximos de zero, ou seja, junto da extremidade livre da amarração. Portanto a tensão longitudinal no varão pode sofrer uma redução muito acentuada num troço de comprimento reduzido, podendo praticamente anular-se numa secção interior do varão. Um campo de tensões deste tipo significa que se pode assumir que em parte do varão são nulas as tensões, extensões e escorregamentos.

Para ilustrar a conclusão anterior considere-se uma relação  $\tau$ - $s$

$$\tau[s] = C_0 s^\alpha \quad \text{com } \alpha < 1. \quad (5.44)$$

Nestas condições o esforço na componente aderência de uma célula genérica de uma amarração rectilínea será

$$F_{ad,i}[s_i] = C_1 s_i^\alpha \quad (5.45)$$

em que  $C_1$  é uma constante. Assumindo que o varão se encontra em regime elástico linear, o esforço na componente varão será

$$F_{m,i}[\Delta_{m,i}] = C_2 \Delta_{m,i} \quad (5.46)$$

em que  $C_2$  também é uma constante. Seja ainda a constante  $C_3 = C_1/C_2$ , que para o caso particular da relação  $\tau$ - $s$  proposta no MC90 assume a forma

$$C_3 = \frac{C_1}{C_2} = \frac{4 \tau_{\max}^{mc} l_n^2}{E \phi (s_1^{mc})^\alpha}. \quad (5.47)$$

Considere-se a determinação da relação constitutiva da componente amarração  $F_1$ - $s_1$  a partir de um procedimento com controlo do deslocamento  $s_n$  na extremidade livre da amarração. De acordo com a explicação anterior, o escorregamento  $s_n$  é a variável livre nesta extremidade. Este procedimento deve ser iniciado arbitrando um valor inicial  $s_{\min}$  para o escorregamento  $s_n$  extremamente baixo, por forma a captar, na outra extremidade da amarração, valores do escorregamento  $s_1$  e esforço  $F_1$  próximos de zero. Desta forma, admita-se que o escorregamento  $s_{\min}$  é dado pela expressão  $s_{\min} = C_3 \times 10^{-a}$ , sendo  $a$  um inteiro positivo, podendo-se dizer que a ordem de grandeza de  $s_{\min}$  é  $a$  vezes inferior à de  $C_3$ .

Escolhendo  $a \gg (-\alpha/(1-\alpha)) \log C_3$ , tem-se que

$$C_3 s_n^\alpha \gg s_n. \quad (5.48)$$

Esta hipótese permite ilustrar facilmente a evolução do escorregamento na extremidade da amarração para valores de  $s_n$  muito reduzidos. Note-se que para valores  $x > 0$  a função  $y = x^\alpha$  é sempre crescente para  $\alpha > 0$ , ou seja, se  $a > b > 0$  então  $a^\alpha > b^\alpha$ .

Determine-se em seguida a evolução das grandezas que caracterizam cada célula em função do valor de escorregamento imposto  $s_n$  tendo em atenção os pressupostos anteriores:

(i) célula n-0

$$\begin{aligned} s_n &= s_{\min}, \\ F_{ad,n} &= C_1 s_n^\alpha, \\ F_n &= F_{ad,n} = C_1 s_n^\alpha; \end{aligned} \quad (5.49)$$

(ii) célula n-1

$$\begin{aligned} F_{m,n-1} &= F_n = C_1 s_n^\alpha, \\ \Delta_{m,n-1} &= \frac{F_{m,n-1}}{C_2} = C_3 s_n^\alpha, \\ s_{n-1} &= s_n + \Delta_{m,n-1} = s_n + C_3 s_n^\alpha \approx C_3 s_n^\alpha, \\ F_{ad,n-1} &= C_1 s_{n-1}^\alpha = C_1 (C_3 s_n^\alpha)^\alpha = C_1 C_3^\alpha s_n^{\alpha^2}, \\ F_{n-1} &= F_{m,n-1} + F_{ad,n-1} = C_1 s_n^\alpha + C_1 C_3^\alpha s_n^{\alpha^2} = C_1 \left( s_n^\alpha + (C_3 s_n^\alpha)^\alpha \right) \approx C_1 C_3^\alpha s_n^{\alpha^2}; \end{aligned} \quad (5.50)$$

(iii) célula n-2

$$\begin{aligned} F_{m,n-2} &= F_{n-2} = C_1 C_3^\alpha s_n^{\alpha^2}, \\ \Delta_{m,n-2} &= \frac{F_{m,n-2}}{C_2} = C_3^{1+\alpha} s_n^{\alpha^2}, \\ s_{n-2} &= s_{n-1} + \Delta_{m,n-2} = C_3 s_n^\alpha + C_3^{1+\alpha} s_n^{\alpha^2} = C_3 \left( s_n^\alpha + (C_3 s_n^\alpha)^\alpha \right) \approx C_3^{1+\alpha} s_n^{\alpha^2}, \\ F_{ad,n-2} &= C_1 s_{n-2}^\alpha = C_1 C_3^{\alpha+\alpha^2} s_n^{\alpha^3}, \\ F_{n-2} &= F_{m,n-2} + F_{ad,n-2} = C_1 C_3^\alpha s_n^{\alpha^2} + C_1 C_3^{\alpha+\alpha^2} s_n^{\alpha^3} = C_1 C_3^\alpha \left( s_n^{\alpha^2} + (C_3 s_n^\alpha)^\alpha \right) \approx C_1 C_3^{\alpha+\alpha^2} s_n^{\alpha^3}; \end{aligned} \quad (5.51)$$

(iv) célula n-i

$$\begin{aligned} F_{m,n-i} &= F_{n-i+1} = C_1 C_3^{\sum_{j=2}^i \alpha^{j-1}} s_n^{\alpha^i} = C_1 C_3^{\frac{\alpha^i - \alpha}{\alpha - 1}} s_n^{\alpha^i}, \\ \Delta_{m,n-i} &= C_3^{\sum_{j=1}^i \alpha^{j-1}} s_n^{\alpha^i} = C_3^{\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1}} s_n^{\alpha^i}, \\ s_{n-i} &\approx C_3^{\frac{\alpha^i - 1}{\alpha - 1}} s_n^{\alpha^i}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Considere-se o exemplo de uma amarração rectilínea com betão confinado em boas condições de aderência de acordo com o §3.1 do MC90,  $f_{ck} = 30\text{MPa}$ ,  $\phi = 16\text{mm}$ ,  $L_n = 1\text{mm}$ . Nestas condições, adoptando a relação  $\tau$ - $s$  proposta no MC90 tem-se

$$s_{n-i} = \left(2.7 \times 10^{-7}\right)^{\frac{1-0.4^i}{0.6}} s_n^{0.4^i} . \quad (5.53)$$

Na Figura 5.21 está representada a evolução de  $s$  ao longo das últimas células da extremidade da amarração. Como se pode concluir por esta figura, dentro do intervalo de valores considerados para  $s_n = s_{\min}$ , por muito reduzido que seja o deslocamento inicial  $s_{\min}$ , o escorregamento a uma distância muito curta da extremidade da amarração, ou seja, da célula  $n$ , aumenta de forma acentuada para um valor várias ordens de grandeza acima de  $s_{\min}$  ( $1.128E-11$ ) e independente do valor de  $s_{\min}$ .

Note-se que para valores de  $x$  elevados continua a verificar-se  $C_3 \alpha^i s^{\alpha^{i+1}} > s^{\alpha^i}$ . No entanto, dado que ambos os termos desta expressão tendem para 1, o termo no membro direito deixa de ser desprezável em relação ao termo no membro esquerdo e as simplificações acima efectuadas deixam de ser admissíveis. Este aspecto não altera as conclusões anteriores mas está na origem dos os patamares apresentados na Figura 5.21: estes patamares decorrerem das simplificações acima referidas e não ocorrem aplicando as relações constitutivas originais.

Tendo em atenção, por um lado, que, em termos práticos, uma parte do varão pode estar isenta de deformações, e, por outro lado, as dimensões características das amarrações, desenvolveu-se e implementou-se um procedimento não iterativo que permite calcular a relação  $F_1-s_1$  para as amarrações rectilínea e curvilínea com interesse prático para estruturas de betão armado.

Em termos práticos, as configurações mais correntes de amarração dos varões da armadura longitudinal das vigas e pilares que terminam na ligação viga-pilar são rectilíneas (L1 e K2, Tabela 2.2) ou em cotovelo (L4 e K4, Tabela 2.2). Por outro lado, as amarrações que atravessam a ligação costumam ser rectilíneas, ligando pois duas vigas ou dois pilares. Neste caso, tal como se referiu no §5.3.2.4, a interacção entre as extremidades do varão não é significativa, podendo-se considerar, para efeitos de determinação da relação constitutiva da amarração  $F_1-s_1$ , que a condição de fronteira na extremidade oposta à extremidade em estudo não é relevante, admitindo-se então que é livre, ou seja,  $F'_{n+1} = 0$ , de modo a simplificar o procedimento numérico. Esta hipótese permite utilizar um procedimento não iterativo simples para solucionar o problema para uma relação constitutiva arbitrária para o contacto e holonómica para o varão. Nos §§ 5.4.5.2 e 5.4.5.3 são apresentados os procedimentos numéricos para os modelos de amarração rectilínea e curvilínea, respectivamente.

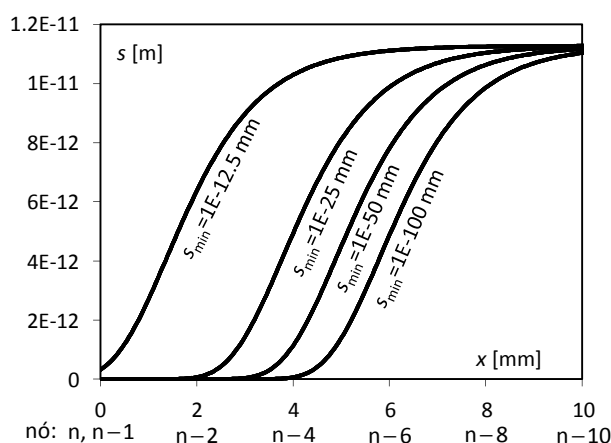


Figura 5.21 – Escorregamento ao longo da extremidade da amarração para diferentes valores de  $s_{\min}$ .

### 5.4.5.2. Modelo de amarração rectilínea

Para calcular a relação  $F_1-s_1$  é utilizado um procedimento com controlo de deslocamento com duas fases: (i) varão parcialmente solicitado, em que parte do varão da amarração longitudinal apresenta tensão nula, e (ii) varão totalmente solicitado, em que a tensão longitudinal é diferente de zero em todas as secções do varão da amarração.

Na fase em que o varão se encontra parcialmente solicitado, admite-se que o número de células com esforço não nulo aumenta gradualmente com  $s_1$ . Assim, no passo  $i$  assume-se que somente  $i$  células estão solicitadas e impõe-se  $s_j = s_{\min}$  com  $s_k = 0$  e  $F_k = 0$  para  $k > i$ . O procedimento implementado em cada passo para  $i = 1$  até  $n$  foi:

- i. assumir para  $k > i$ ,  $F_k = s_k = 0$ ;
- ii. assumir  $F_{m,i} = 0$ ;
- iii. definir o escorregamento na célula  $i$ ,  $s_i = s_{\min}$ ;
- iv. calcular o escorregamento na componente aderência  $i$ ,  $F_{ad,i}[s_i]$ ;
- v. calcular o esforço na célula  $i$ ,  $F_i = F_{ad,i}$ ;
- vi. para  $j = i - 1$  até 1:
  - vi.i. calcular o esforço na componente varão  $j$ ,  $F_{m,j} = F_{j+1}$ ;
  - vi.ii. calcular a deformação da componente varão  $j$ ,  $\Delta_{m,j} = \Delta_m[F_{m,j}]$ ;
  - vi.iii. calcular o escorregamento da célula  $j$ ,  $s_j = s_{j+1} + \Delta_{m,j}$ ;
  - vi.iv. calcular o esforço na componente aderência  $j$ ,  $F_{ad,j}[s_j]$ ;
  - vi.v. calcular o esforço na célula  $j$ ,  $F_j = F_{ad,j} + F_{m,j}$ .

Na fase em que o varão se encontra totalmente solicitado, o escorregamento na célula  $n$  é sucessivamente incrementado de um valor  $\Delta s$  até se obter o escorregamento  $s_1$  pretendido. O procedimento implementado em cada passo foi:

- i. incrementar o escorregamento na célula  $n$ ,  $s_n = s_n + \Delta s$ ;
- ii. calcular o esforço na componente aderência  $n$ ,  $F_{ad,n}[s_n]$ ;
- iii. calcular o esforço na célula  $n$ ,  $F_n = F_{ad,n}$ ;
- iv. para  $i = n - 1$  até 1:
  - iv.i. calcular o esforço na componente varão  $i$ ,  $F_{m,i} = F_{i+1}$ ;
  - iv.ii. calcular a deformação da componente varão  $i$ ,  $\Delta_{m,i} = \Delta_m[F_{m,i}]$ ;
  - iv.iii. calcular o escorregamento da célula  $i$ ,  $s_i = s_{i+1} + \Delta_{m,i}$ ;
  - iv.iv. calcular o esforço na componente aderência  $i$ ,  $F_{ad,i}[s_i]$ ;
  - iv.v. calcular o esforço na célula  $i$ ,  $F_i = F_{ad,i} + F_{m,i}$ .

### 5.4.5.3. Modelo de amarração curvilínea

Para obter as relações  $F_1-s_1$  de amarrações curvilíneas, à semelhança do que foi proposto para amarrações rectilíneas, o procedimento tem duas fases: (i) varão parcialmente solicitado e (ii) a varão totalmente solicitado.

Tal como para amarrações rectilíneas, na fase de varão parcialmente solicitado assume-se que o número de células solicitadas aumenta gradualmente com o aumento de  $s_1$ . Assim, no

passo  $i$  assume-se que  $i$  células estão solicitadas e arbitra-se  $s_{w,i} = s_{\min}$ , com  $s_{d,k} = s_{t,k} = s_{r,k} = 0$  e  $F_k = F_{ad,k} = F_{m,k} = F_{c,k} = 0$  para  $k > i$ . O procedimento implementado em cada passo para  $i = 1$  até  $n$  foi:

- i. assumir para  $k > i$ ,  $F_k = F_{ad,k} = F_{m,k} = F_{c,k} = s_{t,k} = s_{r,k} = s_{d,k} = 0$ ;
- ii. assumir  $F_{m,i} = 0$ ;
- iii. definir a componente segundo  $w$  do escorregamento na célula  $i$ ,  $s_{w,i} = s_{\min}$ ;
- iv. calcular o esforço na componente aderência  $i$ ,  $F_{ad,i}[s_{w,i}]$ ;
- v. calcular o esforço na célula  $i$ ,  $F_i = F_{ad,i}$ ;
- vi. calcular o esforço na componente betão radial  $i$

$$F_{c,i} = \begin{cases} 2 F_i \cos \alpha_n, & \text{se } i > 1, \\ F_i \cos \alpha_n, & \text{se } i = 1; \end{cases} \quad (5.54)$$

- vii. calcular a componente segundo  $r$  do deslocamento na célula  $i$ ,  $s_{r,i}[F_{c,i}]$ ;
- viii. calcular a componente segundo  $t$  do deslocamento na célula  $i$ ,

$$s_{t,i} = (s_{r,i} \sin(\theta_n/2) + s_{w,i}) / \cos(\theta_n/2); \quad (5.55)$$

- ix. para  $j = i - 1$  até 1:

- ix.i. calcular o esforço na componente varão  $j$ ,  $F_{m,j} = F_{j+1}$ ;
- ix.ii. calcular a deformação da componente varão  $j$ ,  $\Delta_{m,j} = \Delta_m[F_{m,j}]$ ;
- ix.iii. calcular a componente segundo  $w$  do escorregamento da célula  $j$ ,

$$s_{w,j} = \Delta_{m,j} + (s_{t,j+1} + s_{r,j+1}) \cos(\theta_n/2); \quad (5.56)$$

- ix.iv. calcular o esforço na componente aderência  $j$ ,  $F_{ad,j}[s_{w,j}]$ ;
- ix.v. calcular o esforço na célula  $j$ ,

$$F_j = \begin{cases} F_{m,j} + F_{ad,j}, & \text{para } j = i - 1, \dots, 2, \\ (F_{m,j} + F_{ad,j}) \sin \alpha_n, & \text{se } j = 1; \end{cases} \quad (5.57)$$

- ix.vi. calcular o esforço na componente betão radial  $j$ ,

$$F_{w,j} = \begin{cases} 2 F_j \cos \alpha_n, & \text{para } j = i - 1, \dots, 2, \\ F_j \cos \alpha_n, & \text{se } j = 1; \end{cases} \quad (5.58)$$

- ix.vii. calcular a componente segundo  $r$  do deslocamento da célula  $j$ ,  $s_{r,j}[F_{c,j}]$ ;
- ix.viii. calcular a componente segundo  $t$  do deslocamento da célula  $j$ ,

$$s_{t,j} = (s_{r,j} \sin(\theta_n/2) + s_{w,j}) / \cos(\theta_n/2). \quad (5.59)$$

Na fase em que o varão se encontra totalmente solicitada o escorregamento na célula  $n$  é sucessivamente incrementado até se obter  $s_1$ . O procedimento implementado foi:

- i. incrementar a componente segundo  $w$  do escorregamento na célula  $n$ ,  $s_{w,n} = s_{w,n} + \Delta s$ ;
- ii. assumir  $F_{m,n} = 0$ ;
- iii. calcular o esforço na componente aderência  $n$ ,  $F_{ad,n}[s_{w,n}]$ ;
- iv. calcular o esforço na célula  $n$ ,  $F_n = F_{ad,n}$ ;
- v. calcular o esforço na componente betão  $n$ ,

$$F_{c,n} = \begin{cases} 2F_n \cos \alpha_n, & \text{se } n > 1, \\ F_n \cos \alpha_n, & \text{se } n = 1; \end{cases} \quad (5.60)$$

vi. calcular a componente segundo r do deslocamento na célula n,  $s_{r,n}[F_{c,n}]$ ;

vii. calcular a componente segundo t do deslocamento na célula n,

$$s_{t,j} = (s_{r,j} \sin(\theta_n/2) + s_{w,j}) / \cos(\theta_n/2); \quad (5.61)$$

x. para  $j = n-1$  até 1:

x.i. calcular o esforço na componente varão j,  $F_{m,j} = F_{j+1}$ ;

x.ii. calcular a deformação da componente varão j,  $\Delta_{m,j} = \Delta_m[F_{m,j}]$ ;

x.iii. calcular a componente segundo w do escorregamento da célula j,

$$s_{w,j} = \Delta_{m,j} + s_{t,j+1} \cos(\theta_n/2) + s_{r,j+1} \cos(\theta_n/2); \quad (5.62)$$

x.iv. calcular o esforço na componente aderência j,  $F_{ad,j}[s_{w,j}]$ ;

x.v. calcular o esforço na célula j,

$$F_j = \begin{cases} F_{m,j} + F_{ad,j}, & \text{para } j = n-1, \dots, 2, \\ (F_{m,j} + F_{ad,j}) \sin \alpha_n, & \text{se } j = 1; \end{cases} \quad (5.63)$$

x.vi. calcular o esforço na componente betão radial j,

$$F_{c,j} = \begin{cases} 2F_j \cos \alpha_n, & \text{para } j = n-1, \dots, 2, \\ F_j \cos \alpha_n, & \text{se } j = 1; \end{cases} \quad (5.64)$$

x.vii. calcular a componente segundo r do deslocamento da célula j,  $s_{r,j}[F_{c,j}]$ ;

x.viii. calcular a componente segundo t do deslocamento da célula j,

$$s_{t,j} = (s_{r,j} \sin(\theta_n/2) + s_{w,j}) / \cos(\theta_n/2). \quad (5.65)$$

No caso de uma amarração constituída por troços rectilíneos e troços curvilíneos, admite-se, de forma simplificativa, que os troços rectilíneos são tangentes aos troços curvilíneos no ponto de contacto (Figura 5.18) e aplicam-se sucessivamente os dois procedimentos anteriores.

#### 5.4.6. Validação dos modelos simplificados

O modelo proposto foi validado recorrendo às relações  $\tau$ -s do §3.1 do MC90. De acordo com as alterações propostas no Fib [2010a] e de acordo com as recomendações de Eligehausen, Popov *et al.* [1983] foi adoptado um troço inicial com comprimento  $2\phi$  (e não  $5\phi$  como sugere o MC90) para simular a formação do cone de arrancamento (*pull-out*). Neste troço, de comprimento  $2\phi$  medidos a partir da superfície do betão, admite-se que os parâmetros  $\tau_{\max}^{mc}$ ,  $\tau_f^{mc}$ ,  $s_1^{mc}$ ,  $s_2^{mc}$  e  $s_3^{mc}$  variam de forma linear (com  $\tau_{\max}^{mc}$  e  $\tau_f^{mc}$  nulos à superfície do betão e tomando os valores propostos no §3.1 do MC90 na outra extremidade deste troço de comprimento  $2\phi$ ).

Assumiu-se ainda que os varões utilizados nos ensaios experimentais simulados apresentam uma área relativa das nervuras bem como uma distância livre entre nervuras iguais aos valores apresentados pelos varões A500NR SD da MEGAFER (LNEC [2008]). De forma simplificada assumiu-se ainda  $f_{ck} = f_{cm} + 8 \text{ MPa}$ .



A avaliação experimental do comportamento das amarrações por intermédio de ensaios de ligações viga-pilar é complexa dada a dificuldade em (i) definir rigorosamente o campo de tensões no interior das ligações viga-pilar, (ii) avaliar os esforços na amarração e (iii) avaliar o seu escorregamento. Por esse motivo, a avaliação do comportamento de amarrações é habitualmente efectuada sobre espécimes de betão prismáticos isolados com condições fronteira facilmente definidas e não sobre ligações viga-pilar. Em seguida, serão comparados os resultados do modelo proposto com os resultados de ensaios sobre espécimes laboratoriais desenvolvidos para avaliar isoladamente o comportamento de amarrações de armaduras.

O objectivo do presente estudo é a modelação de ligações viga-pilar por forma a avaliar o seu efeito sobre o comportamento de estruturas porticadas de betão armado. Tendo em atenção que uma ligação viga-pilar bem pormenorizada não apresenta risco de rotura por *splitting*, de acordo com o MC90 pode-se considerar o betão no seu interior confinado. Desta forma, para que os ensaios experimentais adoptados para validação fossem representativos de amarrações em ligações viga-pilar correntes, procuraram-se na bibliografia resultados experimentais de ensaios de arrancamento (*pull-out*) com espécimes em que, de acordo com o MC90, o betão pudesse ser considerado confinado. Foi considerado um espécime ensaiado por Viwathanatepa, Popov *et al.* [1979a], bem como alguns espécimes reportados por Ueda, Lin *et al.* [1986] e por Marques e Jirsa [1975]. Nos ensaios simulados, também de acordo com o MC90, e de uma forma geral, a armadura pode-se considerar em boas condições de aderência.

Das amarrações ensaiadas por Viwathanatepa, Popov *et al.* [1979a], apenas o Espécime 3 foi solicitado monotonicamente com carga aplicada exclusivamente numa extremidade do varão (tracção). Todos os restantes foram solicitados ciclicamente com cargas iguais aplicadas em ambas as extremidades do varão (*push-pull*). Por este motivo aqui apenas se apresenta a simulação numérica do Espécime 3.

No modelo do Espécime 3 considerou-se a relação  $\sigma_s$ - $\varepsilon_s$  experimental, com  $f'_c = 32.54 \text{ MPa}$ , e corrigiu-se a área e o perímetro do varão para contabilizar as ranhuras efectuadas para instalar a instrumentação ( $A_s = 451.6 \text{ mm}^2$  e  $u = 63.5 \text{ mm}$ ).

Na Figura 5.22(a) está representada a relação  $\sigma_s$ - $s$  da extremidade solicitada do varão registada experimentalmente e a relação correspondente obtida recorrendo ao modelo proposto. Nas Figuras 5.22(b) e 5.23 estão representadas as distribuições experimentais e as distribuições numéricas de  $\tau$ ,  $\sigma_s$  e  $s$  no varão ao longo da amarração para o instante em que a tensão na extremidade da amarração é  $\sigma_s = 413.7 \text{ MPa}$ . Estas figuras mostram que o modelo proposto proporciona uma boa estimativa do comportamento da amarração rectilínea, na medida em que tanto a relação  $\sigma_s$ - $s$  na extremidade do varão como a distribuição de  $\sigma_s$  e de  $s$  ao longo da armadura apresentam uma boa concordância.

A distribuição experimental de  $\tau$  ao longo da armadura difere da estimativa obtida com o modelo proposto. Tal discrepância é natural, quanto mais não seja porque o modelo proposto ignora o efeito local da fendilhação do betão.

Ueda, Lin *et al.* [1986] efectuaram uma campanha de ensaios experimentais em amarrações rectilíneas (L1 e K2, Tabela 2.2) e curvilíneas em cotovelo (L4 e K4, Tabela 2.2) para avaliar o comportamento das amarrações dos varões da armadura longitudinal das vigas em pilares

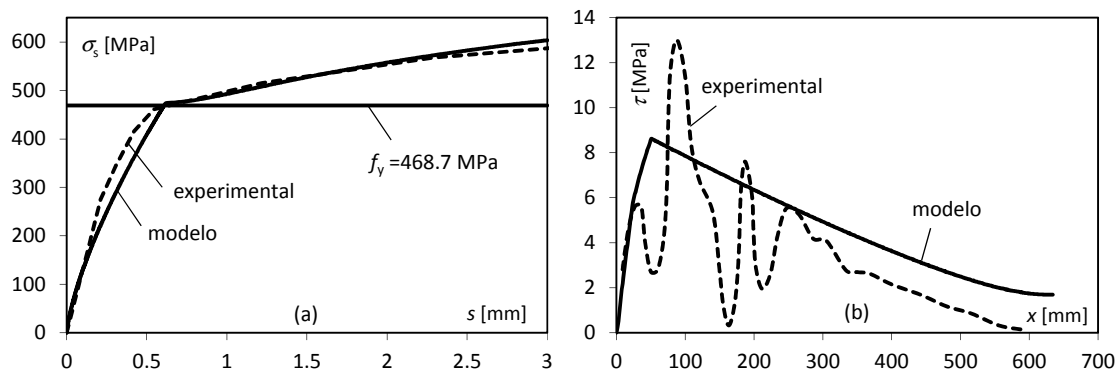


Figura 5.22 – Espécime 3 (Vivathanatepa, Popov *et al.* [1979a]): (a) relação  $\sigma_s$ - $s$  da extremidade solicitada, (b) distribuição de  $\tau$  ao longo da amarração.

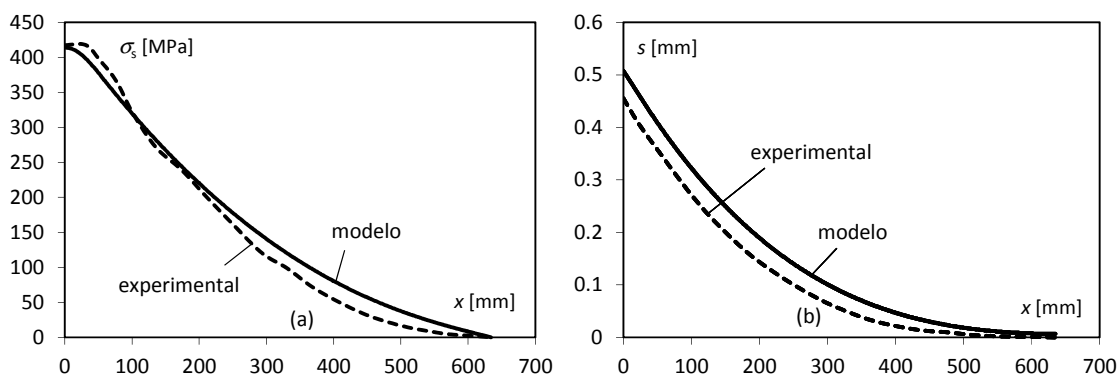


Figura 5.23 – Espécime EX3 (Vivathanatepa, Popov *et al.* [1979a]): (a) distribuição de  $\sigma_s$  ao longo da amarração, (b) distribuição de  $s$  ao longo da amarração.

Tabela 5.2 – Características geométricas e mecânicas dos espécimes ensaiados por Ueda, Lin *et al.* [1986].

espécime	tipo de amarração	$\phi$ [mm]	$r_i/\phi$	$L_1/\phi$	$f'_c$ [MPa]	$f_y$ [MPa]
S61	rectilínea	19.05	–	–	23.8	437.8
S64	rectilínea	19.05	–	–	28.8	437.8
S101	rectilínea	32.26	–	–	19.9	414.4
S107	rectilínea	32.26	–	–	18.2	331.6
B81	90°	25.40	3.00	18.00	22.6	468.9
B103	90°	32.26	3.94	11.61	20.5	414.4
B104	90°	32.26	3.94	11.61	28.3	414.4

exteriores de pórticos. Na Tabela 5.2 estão indicadas as principais características geométricas e mecânicas de alguns espécimes ensaiados por Ueda, Lin *et al.* [1986], sendo  $L_1$  o comprimento do troço rectilíneo horizontal que precede o troço curvilíneo e  $r_i$  o raio interno de dobragem. As amarrações em cotovelo possuem um troço rectilíneo vertical, com comprimento 381 mm, após o troço curvilíneo.

Na Figura 5.24 é apresentado o comportamento  $\sigma_s$ - $s$  da extremidade do varão solicitada para o caso de amarrações rectilíneas. Utilizaram-se as relações  $\sigma_s$ - $\epsilon_s$  experimentais, o que é particularmente importante quando se procura estudar o escorregamento entre as armaduras e o betão (Elmorsi, Kianoush *et al.* [2000]).

Na Figura 5.25 é apresentado o comportamento  $\sigma_s$ - $s$  da extremidade do varão solicitada para o caso de amarrações curvilíneas. É ainda apresentado, para avaliar o efeito do troço curvilíneo, o comportamento de uma amarração rectilínea com igual comprimento.

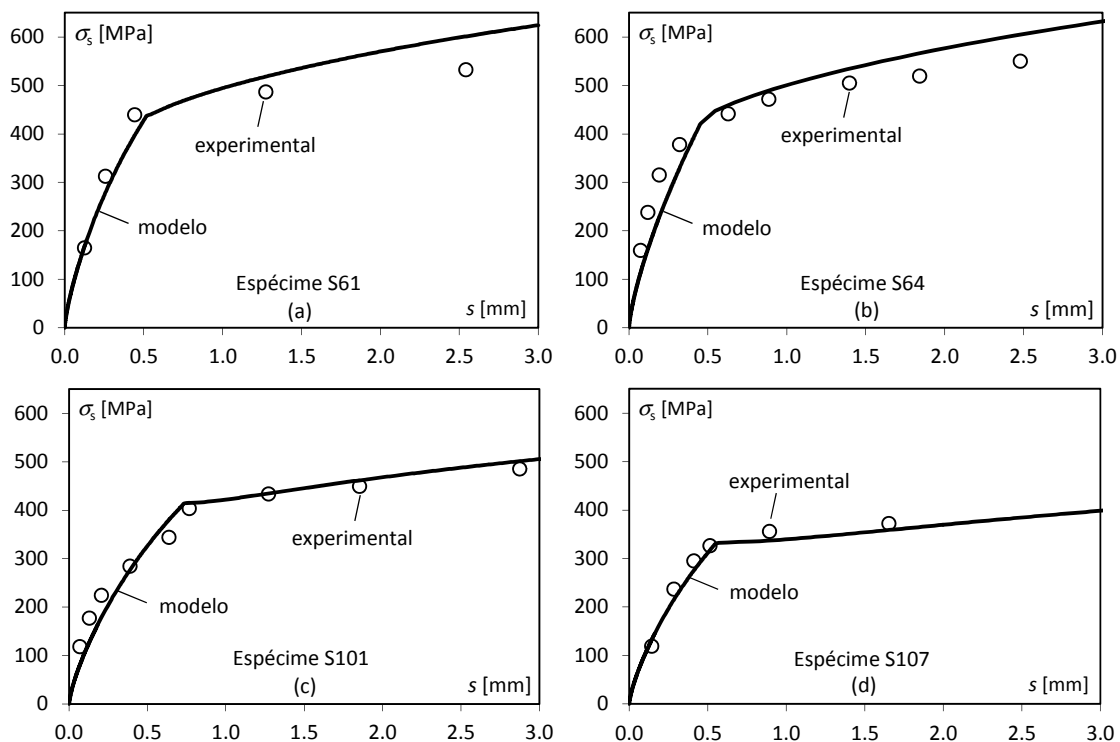


Figura 5.24 – Relação  $\sigma_s$ - $s$  da extremidade solicitada (Ueda, Lin *et al.* [1986]): (a) espécime S61, (b) espécime S64, (c) espécime S101, (d) espécime S107.

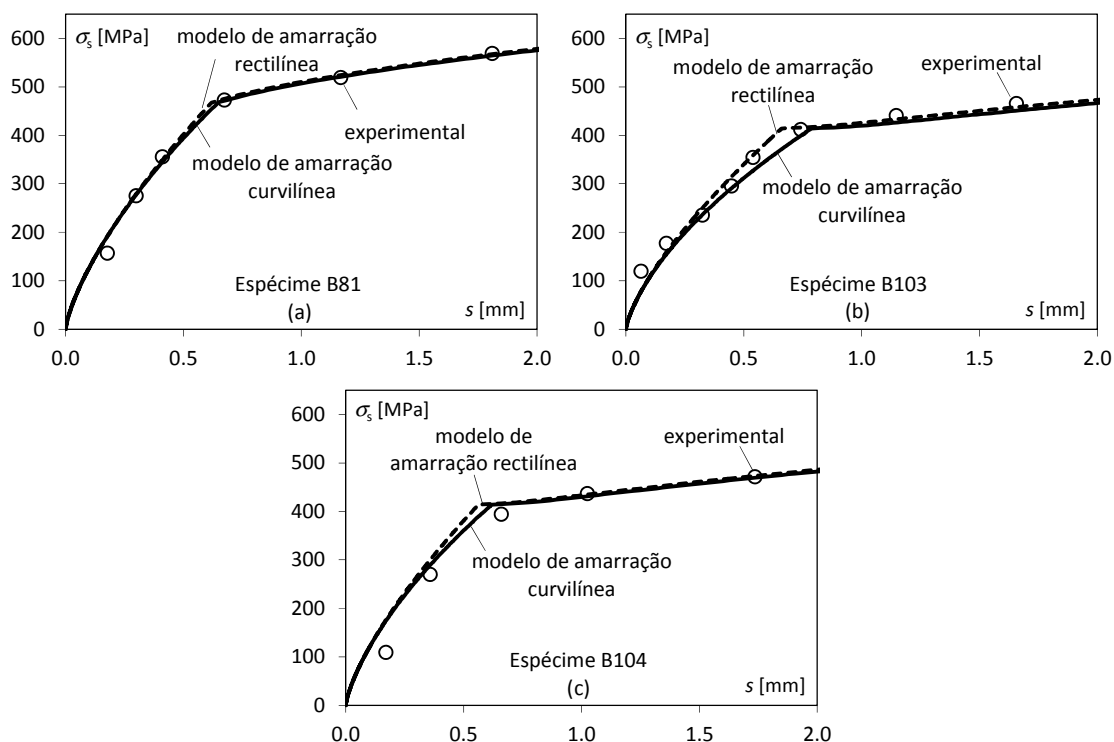


Figura 5.25 – Relação  $\sigma_s$ - $s$  da extremidade solicitada (Ueda, Lin *et al.* [1986]): (a) espécime B81, (b) espécime B103, (c) espécime B104.

Da análise das figuras anteriores pode-se concluir que o modelo proposto permite simular com rigor o comportamento de amarrações rectilíneas e curvilíneas. No entanto, constata-se que o efeito da curvatura da armadura é pouco significativo em qualquer um dos espécimes representados na Figura 5.25. De facto, para  $\sigma_{s1} = f_y$  a consideração do troço curvilíneo conduz a um agravamento do escorregamento no intervalo 3.6% (espécime B81) a 19.2%

(espécime B103) relativamente a uma amarração rectilínea com o mesmo comprimento. A justificação para este resultado está no comprimento do troço rectilíneo de armadura que precede o troço curvilíneo.

Na Figura 5.26 está representada a evolução de  $\sigma_s$  ao longo do comprimento da amarração quando  $\sigma_{s1} = f_y$  para o Espécime B81, onde o comprimento do troço rectilíneo inicial corresponde a  $18\phi$  e o raio interno da dobra é  $4.3\phi$ , e para o Espécime B103 onde o comprimento do troço rectilíneo inicial corresponde a  $11.6\phi$  e o raio interno da dobra é  $3.9\phi$ .

A Figura 5.26(a) revela que no Espécime B81 a solicitação no varão no início do troço curvilíneo é baixa ( $0.10 f_y$ ) o que justifica o efeito reduzido do troço curvilíneo na deformabilidade. Já o Espécime B103 (Figura 5.26(b)) apresenta um maior nível de tensão no início do troço curvilíneo ( $0.27 f_y$ ) o que justifica o maior efeito do troço na deformabilidade da amarração.

Desta forma, para validar o modelo proposto para amarrações curvilíneas, simulou-se o comportamento de uma amarração com o troço rectilíneo inicial mais curto que as anteriormente estudadas. Foi escolhida uma amarração ensaiada por Marques e Jirsa [1975] (Espécime J11-90-15-5-L).

O Espécime J11-90-15-5-L é constituído por dois varões amarrados com  $\phi = 38.8 \text{ mm}$ , dobrados em cotovelo (L4 e K4, Tabela 2.2) com raio de dobragem do eixo  $r = 4.76\phi$  e um troço rectilíneo inicial com  $L_1 = 4.26\phi$ . O betão apresenta  $f'_c \approx 35 \text{ MPa}$  e as armaduras  $f_y = 432.6 \text{ MPa}$ .

Na Figura 5.27(a) é apresentado o comportamento  $\sigma_s$ - $s$  da extremidade do varão solicitado para o Espécime J11-90-15-5-L. É ainda apresentado, para avaliar o efeito do troço curvilíneo, o comportamento que a amarração apresentaria no caso de uma amarração rectilínea com o mesmo comprimento. Utilizou-se a relação  $\sigma_s$ - $\varepsilon_s$  experimental.

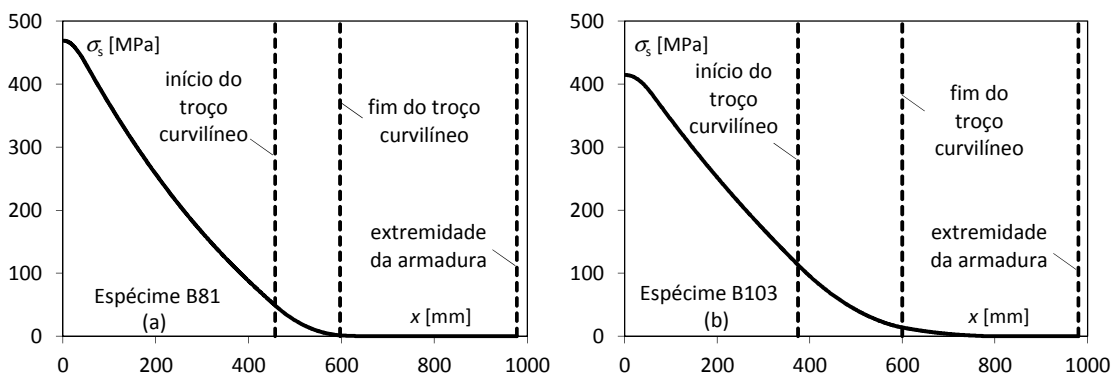


Figura 5.26 – Distribuição de  $\sigma_s$  para  $\sigma_{s1} = f_y$ : (a) espécime B81, (b) espécime B103.

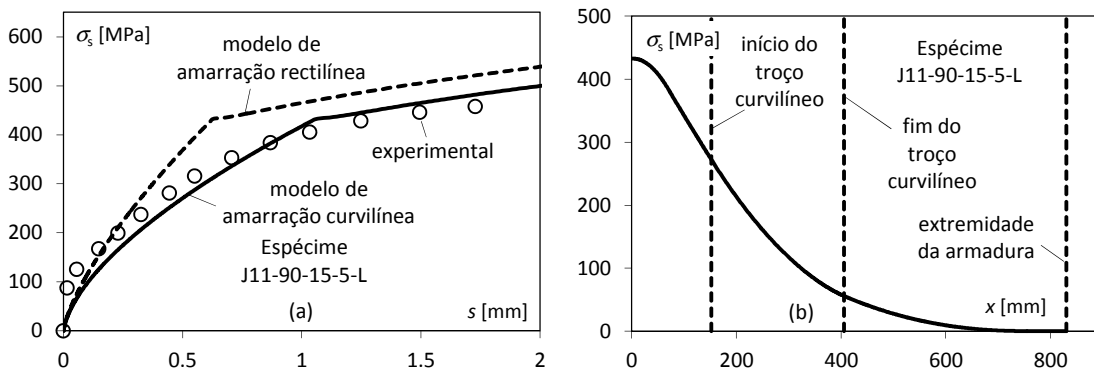


Figura 5.27 – Espécime J11-90-15-5-L (Marques e Jirsa [1975]): (a) relação  $\sigma_s$ - $s$  da extremidade solicitada, (b) distribuição de  $\sigma_s$  para  $\sigma_{s1} = f_y$

A Figura 5.27(a) revela que o modelo proposto permite obter uma boa estimativa do comportamento da amarração. Neste caso, o efeito do troço curvilíneo é significativo, pois para  $\sigma_{s1} = f_y$ , a consideração do troço curvilíneo conduz a um agravamento de aproximadamente 70% de  $s_1$  relativamente ao escorregamento que se obteria para uma amarração rectilínea com o mesmo comprimento. Da observação da Figura 5.27(b) comprova-se que este facto se deve ao maior valor da tensão na extremidade do troço curvilíneo (para  $\sigma_{s1} = f_y$  a tensão na extremidade do troço curvilíneo é  $0.63 f_y$ ).

Da análise das simulações numéricas apresentadas conclui-se que os modelos simplificados propostos permitem obter uma boa estimativa para o comportamento de amarrações das armaduras longitudinais das vigas e pilares.

A maior discrepância entre os resultados experimentais e as simulações efectuadas verifica-se para níveis reduzidos de carga. A explicação para esta discrepância está no troço inicial de comprimento  $2\phi$  correspondente ao cone de arrancamento (*pull-out*). O modelo simplificado proposto considera este cone independentemente do nível de carga aplicado. No entanto, verifica-se experimentalmente que o cone só se forma para níveis de carga superiores ao que conduz a tensão de tracção na sua superfície cónica igual à tensão resistente do betão à tracção. Consequentemente, o modelo proposto sobrestima o efeito da formação do cone de arrancamento na deformação da amarração para níveis de carga reduzidos.

O modelo proposto permite ainda simular o efeito dos troços curvilíneos do varão. Consta-se que a existência de troços curvilíneos na amarração, apesar de não conduzir a uma redução da capacidade resistente relativamente a uma amarração rectilínea com o mesmo comprimento (Minor e Jirsa [1975]), pode conduzir a uma redução significativa da rigidez da amarração nos casos em que uma parte significativa da transferência de tensões da armadura para o betão envolvente ocorre no troço curvilíneo.

#### 5.4.7. Tendências experimentais em amarrações com troços curvilíneos

Nesta secção, é avaliado se o modelo desenvolvido reflecte as tendências observadas por Minor e Jirsa [1975] para amarrações com troços curvilíneos. De acordo com estes autores, para o mesmo quociente  $L_t/\phi$ , (i) as amarrações com troços curvilíneos apresentam maior escorregamento que as amarrações rectilíneas, (ii) as amarrações com troços curvilíneos com maiores ângulos ao centro  $\theta$  apresentam maior escorregamento e (iii) as amarrações com troços curvilíneos com menores  $r/\phi$  apresentam maior escorregamento.

Os ensaios reportados por Minor e Jirsa [1975] foram realizados em espécimes com comprimento reduzido ( $2.4\phi$  a  $9.6\phi$ ) e raio de dobragem relativo ao eixo dos varões também reduzido ( $2.1\phi$  a  $4.5\phi$ ), pelo que o efeito da flexão do varão é importante para o comportamento das amarrações. Assim, as estimativas de comportamento das amarrações curvilíneas obtidas com o modelo proposto são significativamente mais flexíveis que os comportamentos verificados experimentalmente. Além disso, nem os comprimentos de amarração nem os raios internos de dobra referidos são representativos de amarrações correntes porque estão muito abaixo dos valores mínimos das especificações técnicas actuais.

Consequentemente, dada a inexistência resultados experimentais que possibilitem uma

avaliação objectiva do modelo desenvolvido, decidiu-se avaliar se, pelo menos, ele é consistente com as três tendências relatadas por Minor e Jirsa [1975] acima apresentadas. Assim, foi concebida uma série de amarrações com geometria e propriedades materiais idealizadas mas correntes, as quais foram seguidamente simuladas com o modelo proposto.

No conjunto de simulações apresentadas assumiu-se para a relação  $\tau$ - $s$  o modelo proposto no MC90 para betão confinado com boas condições de aderência. Para a relação tensão-extensão da armadura assumiu-se um diagrama bilinear com módulo de endurecimento igual a 1% do módulo de elasticidade que se assumiu igual 200 GPa. Para a componente betão em compressão no interior da amarração curvilínea assumiu-se a relação constitutiva linear proposta por Soroushian, Obaseki *et al.* [1987].

As simulações foram efectuadas para uma amarração com  $L_t = 400$  mm, adoptando uma armadura com tensão de cedência  $f_y = 500$  MPa e betão com resistência à compressão uniaxial  $f'_c = 25$  MPa (relativo a provetes cilíndricos com 30 cm de altura de 15 cm de diâmetro). Considerou-se que o varão da amarração apresenta um troço rectilíneo precedido por um troço curvilíneo em arco de circunferência.

A Figura 5.28(a) ilustra o efeito da variação do ângulo ao centro  $\theta$  do troço curvilíneo sobre o comportamento da amarração para  $r = 6\phi$  ( $r$  é o raio de dobragem em relação ao eixo do varão) e  $\phi = 20$  mm. Na Figura 5.28(b) apresenta-se o efeito da variação do raio interno de dobragem  $r_i$  sobre o comportamento da ligação para  $\theta = 90^\circ$  e  $\phi = 16$  mm – os valores de  $r_i$  indicados correspondentes ao raio dos mandris habitualmente usados para dobrar varões.

A Figura 5.28 revela que as amarrações idealizadas reflectem as tendências constatadas experimentalmente por Minor e Jirsa [1975], nomeadamente, para a mesma relação  $L_t/\phi$  (i) as amarrações rectilíneas apresentam um comportamento mais rígido, (ii) as amarrações com troços curvilíneos apresentam um comportamento tanto mais rígido quanto menor o ângulo de dobragem  $\theta$  e (iii) quanto maior a relação  $r_i/\phi$ .

#### 5.4.8. Componente amarração traccionada e componente amarração comprimida

Tal como referido no §5.4.1, no caso da componente amarração traccionada, a reduzida resistência à tracção do betão torna apropriado assumir que os varões da armadura longitudinal das vigas e pilares são responsáveis pela transmissão de toda a força de tracção destes

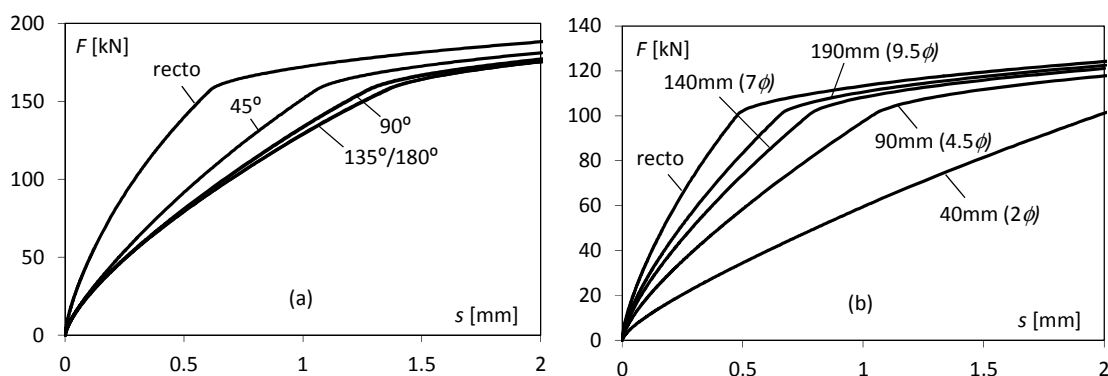


Figura 5.28 – Comportamento da amarração: efeito do (a) do ângulo de dobragem  $\theta$ , (b) raio de dobragem interno  $r_i$ .

elementos para as ligações viga-pilar. Consequentemente, o esforço na primeira célula da componente amarração ( $F_1$ ) é igual a esta força e a relação constitutiva da componente amarração traccionada é dada pela relação  $F_1-s_1$ .

No caso da componente amarração comprimida só parte da força de compressão transmitida ao núcleo da ligação viga-pilar pelas vigas e pilares adjacentes é transmitida por intermédio dos varões das respectivas armaduras longitudinais, sendo a parte remanescente transmitida à ligação por intermédio do betão envolvente dos varões. Sendo  $C_s(=F_1)$  o esforço de compressão nos varões e  $C_c$  o esforço de compressão no betão envolvente, o esforço na componente amarração comprimida é dado por  $C_s + C_c$ .

A parcela do esforço de compressão  $C_s$  transmitida pelos varões varia com os esforços na extremidade da viga e pilar, devido à variação relativa da rigidez dos varões e do betão envolvente, no entanto neste estudo adoptou-se a abordagem simplificada proposta por Lowes, Mitra *et al.* [2004], na qual se assume que, independentemente do valor dos esforços nas extremidades da viga ou pilar, o quociente  $C_s/C_c$  é constante.

Considere-se a representação simplificada da interface ligação-viga na zona de compressão da secção transversal da viga adjacente à ligação, representada na Figura 5.29(a). Admitindo novamente que as secções planas da extremidade efectiva das vigas e pilares permanecem planas após deformação, esta zona apresentará a configuração deformada simplificada representada na Figura 5.29(c), em que, como resultado da maior rigidez das armaduras relativamente ao betão, o escorregamento das armaduras em relação ao betão é nulo na interface das ligações viga-pilar e aumenta para o interior da ligação. No modelo que em seguida se apresenta, numa primeira fase é calculado o comportamento do varão comprimido assumindo indeformabilidade do betão na direcção axial (para além da deformabilidade indirectamente considerada na relação  $\tau-s$ ) (Figura 5.29(b)) sendo, posteriormente, alterada a relação  $F_1(=C_s)-s_1$  adicionando, para cada valor de  $s_1$ , o valor de  $C_c$  a  $C_s$ , ou seja, a relação constitutiva assumida para a componente amarração comprimida é  $(C_s+C_c)-s_1$ . Esta simplificação corresponde a desprezar o efeito da deformabilidade do betão envolvente da armadura na direcção axial (com excepção da deformação nas imediações das nervura). Dada a reduzida relevância da componente amarração comprimida considerou-se a simplificação aceitável.

A resultante das tensões de compressão numa secção rectangular de betão armado quando a secção atinge a correspondente resistência à flexão pode ser calculada de forma aproximada

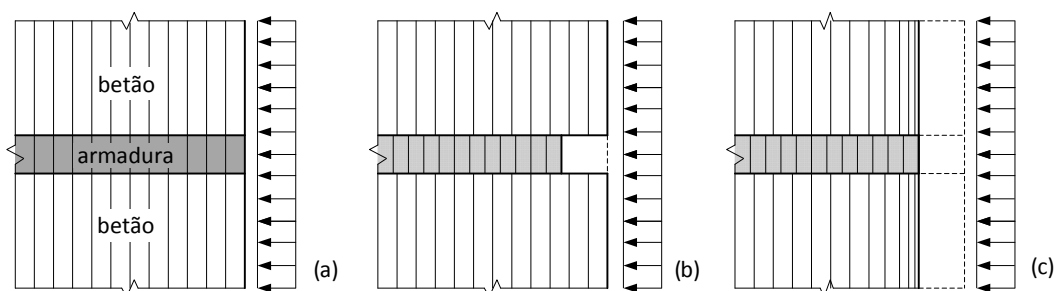


Figura 5.29 – Representação em corte horizontal da deformação na ligação viga-pilar provocada pela resultante de compressão transmitida pela viga: (a) configuração indeformada, (b) configuração deformada com betão indeformável, (c) configuração deformada com deslocamento do betão na periferia da ligação igual ao do varão.

recorrendo ao bloco rectangular de tensões no betão. A resultante das tensões de compressão no betão é

$$C_c = (\beta_1 f'_c)(\beta_2 c)b \quad (5.66)$$

e a resultante das tensões de compressão nos varões é

$$C_s = \sigma'_s A'_s = \varepsilon_{cu} \frac{c-d'}{c} E_s A'_s \quad (5.67)$$

em que  $\beta_1$  é o factor de redução da resistência à compressão do betão,  $\beta_2$  é o factor de redução da altura comprimida da secção,  $c$  é profundidade da linha neutra,  $b$  é a largura da secção transversal,  $E_s$  é o módulo de elasticidade dos varões,  $A'_s$  é a área da secção transversal dos varões comprimidos,  $\sigma'_s$  é a tensão nos varões comprimidos e  $\varepsilon_{cu}$  a extensão última do betão à compressão. Os restantes símbolos estão definidos na Figura 5.30.

A força total de compressão (esforço na componente amarração comprimida) é dada por

$$C_s + C_c = \sigma'_s A'_s + \beta_1 f'_c \beta_2 c b = \sigma'_s A'_s \left( 1 + \frac{\beta_1 A'_s d b}{E_s A_s} \frac{\beta_2 c E_s}{d \sigma'_s} \right). \quad (5.68)$$

Assumindo como hipótese simplificativa adicional que o centro de gravidade da resultante das tensões de compressão coincide com o centro de gravidade da resultante das tensões de compressão no betão tem-se

$$j d = d - \frac{\beta_2 c}{2} \rightarrow c = \frac{2d}{\beta_2} (1-j). \quad (5.69)$$

Substituindo as expressões (5.69) e (5.67) (resolvida em ordem a  $\sigma'_s$ ) na expressão (5.68), obtém-se a seguinte expressão para o esforço na componente amarração comprimida em função da tensão nos varões da armadura longitudinal de compressão

$$C_s + C_c = \sigma'_s A'_s + \beta_1 f'_c \beta_2 c b = \sigma'_s A'_s \left( 1 + \frac{\beta_1 f'_c d b}{E_s A'_s} \frac{2(1-j)}{\varepsilon_{cu} \beta_2 \left( 1 - \frac{d'}{d} \frac{\beta_2}{2(1-j)} \right)} \right). \quad (5.70)$$

De acordo com Lowes, Mitra *et al.* [2004], é aceitável utilizar como hipótese simplificativa ao longo de toda a história de carga  $j = 0.85$  para vigas e  $j = 0.75$  para pilares.

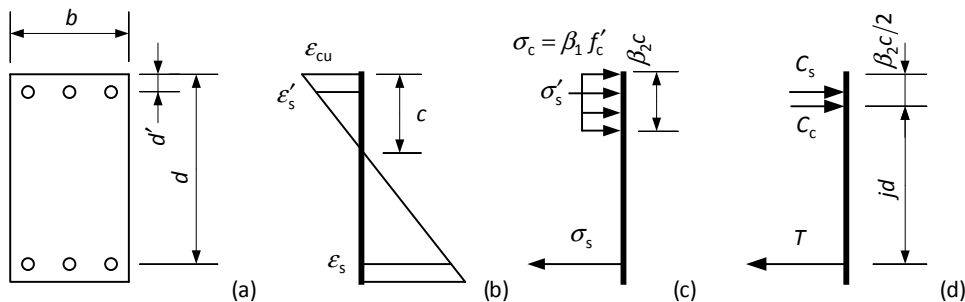


Figura 5.30 – Análise da secção transversal da viga/pilar na interface da ligação viga-pilar: (a) geometria da secção transversal, (b) distribuição de extensões, (c) distribuição de tensões, (c) resultantes de tracção e compressão.



## 5.5. Componente núcleo da ligação ao corte

### 5.5.1. Introdução

O núcleo da ligação viga-pilar é um elemento estrutural submetido a esforços de corte elevados quando a estrutura é sujeita a acções laterais (Figura 5.4(b)). Consequentemente, há um número elevado de estudos dedicados à avaliação da sua capacidade resistente. O resultado de alguns desses estudos já foi considerado em algumas especificações técnicas sob a forma de esforços de corte máximos resistentes e de requisitos relativos à quantidade e à pormenorização da armadura transversal na ligação viga-pilar. Paradoxalmente, existem poucos estudos disponíveis relativos a modelos constitutivos para este elemento.

Do ponto de vista conceptual, de acordo com Paulay, Park *et al.* [1979], o núcleo de uma ligação viga-pilar de betão armado resiste aos esforços de corte que lhe são aplicados pelas vigas e pilares adjacentes recorrendo essencialmente a dois mecanismos: (i) o mecanismo de escora diagonal e (ii) o mecanismo de painel (Figura 5.31). Apesar de existirem diversos estudos a defender a preponderância de um ou do outro modelo (essencialmente para acções cíclicas), actualmente não existe consenso acerca de qual destes mecanismos deve ser adoptado como base para modelar o comportamento do núcleo da ligação. De acordo com Kitayama, Otani *et al.* [1991] esta falta de consenso decorre do facto de ambos os mecanismos serem relevantes mas em fases distintas da história de carga. De acordo com estes autores, o mecanismo de painel é preponderante antes da deterioração da aderência dos varões da armadura longitudinal das vigas e pilares na ligação e o mecanismo de escora diagonal é preponderante após a deterioração da aderência.

Em seguida, faz-se uma apresentação sumária dos principais modelos de comportamento ao corte do núcleo de ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado submetidas a carregamentos quase-estáticos não cíclicos. Posteriormente, estes modelos são confrontados com dados experimentais publicados para avaliar qual apresenta melhor correlação. O modelo assim seleccionado, será considerado no modelo de ligação viga-pilar em desenvolvimento.

De uma forma geral os modelos para comportamento cíclico de elementos de betão armado requerem uma estimativa para a envolvente do comportamento (*backbone*). Esta envolvente, no caso limite de uma solicitação constituída apenas por meio ciclo, corresponde ao comportamento quase-estático e monotónico. Dado o reduzido número de modelos desenvolvido especificamente para o comportamento quase-estático e monotónico do núcleo

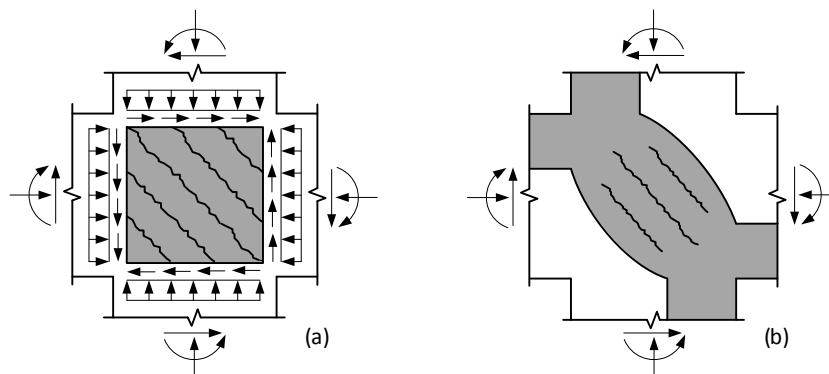


Figura 5.31 – Modelos físicos de comportamento da ligação viga-pilar: (a) painel, (b) escora diagonal.

das ligações viga-pilar, neste estudo foi também avaliada a aplicação ao comportamento quase-estático não cíclico de modelos da envolvente do comportamento cíclico.

### 5.5.2. Modelos de comportamento para o núcleo da ligação ao corte

Os modelos de comportamento para o núcleo da ligação ao corte encontrados na bibliografia podem ser enquadrados em três categorias: (i) modelos que idealizam o núcleo da ligação como um painel submetido a um estado plano de tensão, com comportamento similar ao de um painel de betão armado uniforme (Figura 5.31(a)), (ii) modelos que idealizam o núcleo da ligação como um sistema composto por uma escora diagonal e tirantes ao longo da periferia do núcleo (Figura 5.31(b)), e (iii) modelos que não se fundamentam em nenhuma analogia física e são baseados em tratamento estatístico de resultados experimentais.

Dada a reduzida capacidade de deformação do betão por compressão, pode parecer pouco provável a ocorrência duma distorção significativa do núcleo da ligação viga-pilar de betão armado. Esta conclusão decorre da idealização do modo de deformação da ligação por distorção da forma representada na Figura 5.32(a), o qual pressupõe uma deformação significativa da escora diagonal de compressão do betão.

No entanto, de acordo com Paulay e Priestley [1992], constatou-se experimentalmente que o núcleo da ligação sofre expansão em direcções ortogonais quando solicitado por corte. Esta expansão possibilita a distorção da ligação sem que se verifique um encurtamento da escora diagonal, Figura 5.32(b). Por outro lado, caso a ligação viga-pilar seja bem pormenorizada, o betão constituinte da escora diagonal de betão encontra-se confinado por cintas, o que proporciona maiores valores tanto da resistência como da ductilidade e, conseqüentemente, uma maior capacidade de deformação da escora sem redução da carga instalada.

A expansão do núcleo da ligação quando submetido ao corte já foi demonstrada no Capítulo 4 recorrendo a análises de EF 3D. No entanto, também pode ser simplificada explicada com recurso à analogia com um segmento de viga fendilhada submetida a momento flector linear (*i.e.*, esforço transversal constante) representado na Figura 5.33 (Paulay e Priestley [1992]).

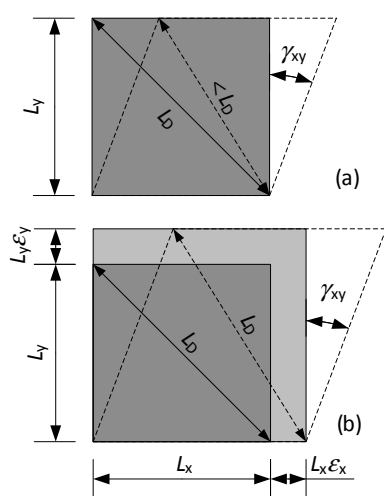


Figura 5.32 – Distorção do núcleo da ligação: (a) com encurtamento da diagonal, (b) sem encurtamento da diagonal.

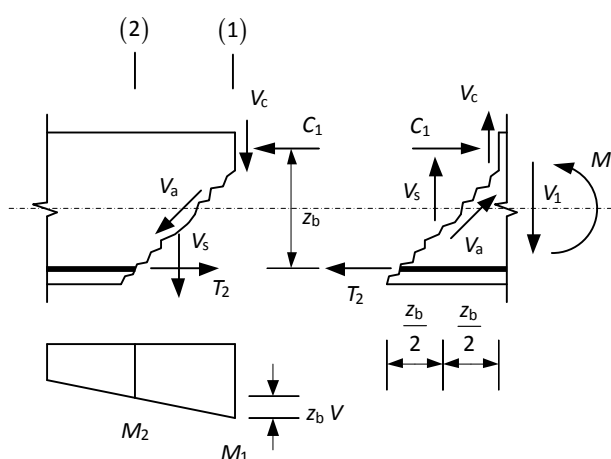


Figura 5.33 – Forças internas num elemento de betão armado com fendilhação diagonal (Paulay e Priestley [1992]).

Admita-se simplificadamente que as fendas fazem um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo longitudinal da viga. Considerem-se duas secções transversais (1 e 2) à distância  $z_b$  uma da outra, em que  $z_b$  é o braço interno da viga, em que a parte superior de uma fenda termina na secção 1. Sejam  $V_i$ ,  $M_i$ ,  $C_i$  e  $T_i$  o esforço transverso, o momento flector e as resultantes de compressão e tracção na secção  $i$ ,  $V_s$  a força de corte vertical transmitida ao longo da fenda pelos estribos,  $V_c$  o esforço transverso na parte da secção 1 acima da linha neutra e  $V_a$  a resultante de atrito ao longo da fenda.

A faceta direita da secção 1, a fenda anteriormente referida e a parte da faceta esquerda desta secção acima da linha neutra delimitam uma parte irregular da viga. O equilíbrio de momentos nesta parte de viga relativamente ao ponto de aplicação da resultante de compressão escreve-se

$$M_1 = z_b T_2 + 0.5 z_b V_s . \quad (5.71)$$

Por outro lado, o equilíbrio de momentos do segmento de viga delimitado pelas secções 1 e 2 dá

$$M_1 = M_2 + z_b V \quad (5.72)$$

concluindo-se que

$$T_2 = \frac{1}{z_b} (M_2 + z_b V_1 - 0.5 z_b V_s) = \frac{M_2}{z_b} + \frac{(1 - 0.5\eta) z_b V_1}{z_b} \quad (5.73)$$

onde  $\eta = V_s / V$ . Uma vez que o esforço transverso é constante, este resultado revela que  $T_2$  é proporcional ao momento flector  $[M_2 + (1 - 0.5\eta) z_b V]$  que ocorre numa secção à distância  $e_v = (1 - 0.5\eta) z_b$  (à direita) da secção 2. É esta a distância que habitualmente se designa por *translação do diagrama de momentos* e que é usada para efeitos de interrupção da armadura. De acordo com Paulay e Priestley [1992], a expansão do núcleo da ligação, tanto na direcção vertical como na direcção horizontal, deve-se à fendilhação do betão: tal como nas vigas, a fendilhação diagonal conduz à translação do diagrama de resultantes de tracção nas armaduras que atravessam a ligação em ambas as direcções, o que tem como consequência que os correspondentes varões longitudinais das vigas e pilares estejam em tracção em toda a largura/altura da ligação e, conseqüentemente, a ligação viga-pilar sofre uma expansão em ambas as direcções.

### 5.5.2.1. Modelos de painel

Na bibliografia são referidos essencialmente dois modelos de painel para modelação do núcleo de ligações viga-pilar: a *Modified Compression Field Theory* (MCFT) originalmente proposta por Vecchio e Collins [1986] e o *Softened Truss Model* (STM) originalmente proposto por Hsu [1988]. A MCFT é o modelo do tipo painel mais frequentemente adoptado para modelar o comportamento do núcleo das ligações viga-pilar de betão armado solicitadas ao corte (Lowes e Altoontash [2003], Altoontash [2004], Kim [2007]).

A MCFT descreve o comportamento de elementos laminares de betão armado submetidos a um sistema de forças paralelas ao plano médio do elemento. Para tal, incorpora relações constitutivas calibradas experimentalmente para os materiais constituintes (betão, aço para armadura ordinária e cabos de pré-esforço) e as tensões e extensões nos materiais satisfazem as relações de equilíbrio e compatibilidade, assumindo que o elemento laminar está

submetido a um estado plano de tensão.

Apesar da MCFT ter sido desenvolvida para solicitações quase-estáticas e monotónicas, não foram encontrados estudos que avaliassem a qualidade das estimativas do comportamento do núcleo da ligação resultantes desta teoria nestas condições. As aplicações da MCFT à modelação do núcleo da ligação encontradas na bibliografia visam obter estimativas para a envolvente da resposta cíclica (*backbone*). Esta envolvente é usada em conjunto com as leis que determinam a degradação da rigidez e resistência do núcleo da ligação com a história de carga, para simular o comportamento cíclico do núcleo da ligação.

A MCFT considera várias hipóteses simplificativas, nomeadamente, (i) os varões só resistem, de forma explícita, a esforços axiais, (ii) o betão fendilhado nas peças de betão armado apresenta relações constitutivas próprias diferentes das de um cilindro ou cubo de betão sujeitos a ensaio uniaxial, (iii) as extensões usadas nas relações constitutivas para o aço e o betão são definidas como valores médios medidos ao longo de um comprimento suficientemente grande para albergar várias fendas (*smearred approach*), de modo que as extensões usadas nas leis constitutivas dos materiais englobam o efeito combinado da abertura das fendas, extensões entre as fendas, escorregamento dos varões e do escorregamento ao longo das fendas entre as faces em contacto, (iv) as tensões também são definidas como valores médios pelo que, implicitamente, têm em consideração as tensões nas fendas, as tensões entre fendas, tensões de interface nas faces das fendas e efeito de ferrolho, ou seja, são valores nominais e (v) os varões estão distribuídos de forma uniforme por todo o painel. A simplicidade decorrente de não ter que considerar os fenómenos localizados de forma explícita, sem com isso comprometer a qualidade das soluções, é a razão da popularidade desta teoria.

Tendo em atenção que o comportamento dos varões nas fendas pode ser condicionante para o comportamento do painel (a tensão nos varões é agravada pela anulação da tensão de tracção no betão), a MCFT preconiza em cada passo uma verificação explícita do nível de tensão nos varões nas fendas para assegurar que o seu valor nominal (valor médio) é compatível com o estado de tensão efectivo (local). Em termos práticos, esta verificação consiste em limitar a tensão principal máxima nominal (valor médio) que se pode desenvolver no betão a um valor condicionado pela tensão local nos varões nas fendas e pelas tensões tangenciais locais nas interfaces de betão também ao longo das fendas. Para uma análise mais aprofundada aos fundamentos da MCFT consulte-se Vecchio e Collins [1986] ou Bentz [2000].

Para aplicar a MCFT à modelação do núcleo de ligações viga-pilar existem simplificações adicionais que têm que ser adoptadas tanto ao nível das forças aplicadas no núcleo da ligação como em termos de varões considerados efectivos.

Em termos de forças aplicadas ao núcleo da ligação, assume-se que o momento flector nas extremidades das vigas e pilares é materializado na ligação por intermédio da tensão tangencial uniformemente distribuída ao longo dos bordos do núcleo. Em alguns estudos, o esforço axial nas extremidades das vigas e pilares adjacentes à ligação não é tido em consideração na aplicação da MCFT. Noutros estudos, assume-se que o esforço axial nas extremidades das vigas e pilares adjacentes à ligação é representado no núcleo da ligação sob

a forma de tensões normais longitudinais uniformemente distribuídas. O valor destas tensões é determinado pelo quociente entre o esforço axial e a área da secção transversal da viga e do pilar, respectivamente.

Para efeitos de aplicação da MCFT, não existe consenso quanto aos varões a considerar como efectivos no núcleo das ligações viga-pilar, ou seja, como contribuindo para o seu mecanismo resistente ao corte. A abordagem mais comum (*e.g.*, adoptada por Kim [2007]) não contabiliza os varões da armadura longitudinal das vigas, mas contabiliza os varões da armadura longitudinal dos pilares. Neste caso, a percentagem da armadura na direcção horizontal é definida pelo quociente entre a área de secção transversal dos varões da armadura transversal da ligação localizados entre os varões da armadura longitudinal das vigas e o produto entre a largura da ligação e a distância entre os varões da armadura longitudinal de tracção e de compressão das vigas. A percentagem de armadura na direcção vertical é definida como o quociente entre a área total da secção transversal dos varões da armadura longitudinal dos pilares que atravessam a ligação e a área da secção transversal do pilar.

De acordo com Kim [2007], a MCFT fornece uma estimativa conservadora para a resistência do núcleo da ligação e subestima as respectivas deformações. Este autor constatou ainda que a direcção horizontal (direcção X) condiciona habitualmente os resultados porque, de acordo com a MCFT, é menos resistente que a direcção vertical. Desta forma, os resultados da aplicação da MCFT são habitualmente condicionados pela armadura na direcção horizontal.

No caso particular de ligações viga-pilar sem armaduras transversais, de acordo com a MCFT e com os pressupostos anteriores, o colapso da ligação ocorrerá assim que se atinja a tensão de fendilhação no betão. No entanto, os resultados experimentais não confirmam este resultado e mostram que a capacidade resistente da ligação é significativamente superior à estimada pela MCFT. De acordo com Altoontash [2004], esta discrepância deve-se às armaduras longitudinais das vigas e dos pilares que garantem alguma integridade ao núcleo da ligação e desta forma desempenham o papel da armadura transversal. Altoontash [2004] propôs que em espécimes sem armadura transversal nas ligações viga-pilar, para efeitos de aplicação da MCFT, as armaduras longitudinais das vigas e dos pilares também sejam contabilizadas como armaduras transversais. Este autor propõe que só 45% da secção transversal dos varões que compõem estas armaduras seja considerada efectiva.

#### 5.5.2.2. Modelos de escora diagonal

A esmagadora maioria dos modelos de escoras e tirantes desenvolvidos para o núcleo das ligações viga-pilar apenas permite estimar a sua capacidade resistente. Para o presente estudo os modelos de resistência têm interesse limitado e por isso só são referidos modelos de escoras e tirantes que permitem estimar o comportamento do núcleo das ligações viga-pilar.

Como exemplos de modelos que cumprem este requisito pode-se referir os modelos de Parra-Montesinos e Wight [2002] e de Mitra [2007] – ambos propostos para o estudo da envolvente da resposta cíclica. O modelo de Parra-Montesinos e Wight [2002] foi recentemente revisto por Kim e LaFave [2009] e é por isso apresentado e posteriormente avaliado neste estudo.

Parra-Montesinos e Wight [2002] propuseram um modelo do tipo escora diagonal como

ferramenta para identificar o limite de tensão tangencial nominal a impor a uma ligação viga-pilar para limitar a sua contribuição para o *drift* da estrutura. Estes autores assumiram que o mecanismo resistente preponderante na ligação é uma escora diagonal equivalente em estado plano de deformação, que resulta do efeito conjunto dos banzos de compressão das vigas e pilares e da transferência de tensão por aderência das armaduras longitudinais das vigas e pilares para a ligação, Figura 5.34. Neste modelo, o eixo da escora coincide com a hipotenusa do triângulo rectângulo com catetos  $h_c$  e  $d_j = d - d'$ , ou seja, forma um ângulo  $\theta_{\text{strut}} = \arctan(d_j/h_c)$  com o eixo da viga, e a sua largura é dada pela expressão

$$d_{\text{strut}} = \frac{h_c (d - d')}{\sqrt{(d - d')^2 + h_c^2}} \quad (5.74)$$

em que  $d$  e  $d'$  são a distância na secção transversal da viga da fibra extrema mais comprimida à resultante de tracção e compressão transmitidas pela viga à ligação, respectivamente.

Conhecidas as extensões na direcção horizontal ( $\varepsilon_x$ ) e vertical ( $\varepsilon_y$ ) bem como a distorção entre estas direcções ( $\gamma \equiv \gamma_{xy}$ ) no plano de deformação de um elemento em estado plano de deformação, a direcção principal de extensão máxima faz um ângulo  $\theta_1$  com o eixo OX no sentido directo dado pela expressão

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{\gamma/2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_y}\right) \quad (5.75)$$

e as extensões principais máxima ( $\varepsilon_1$ ) e mínima ( $\varepsilon_2$ ) são dadas por

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta_1) + \frac{\gamma}{2} \sin(2\theta_1) \quad (5.76)$$

e

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\theta_1 + \pi) + \frac{\gamma}{2} \sin(2\theta_1 + \pi). \quad (5.77)$$

Assumindo que a escora representada na Figura 5.34 está em estado plano de deformação uniforme em que a direcção principal de tensão mínima coincide com a direcção da escora e também com a direcção principal de extensão mínima, ou seja,  $\theta_2 = \theta_{\text{strut}} = \theta_1 + \pi/2$ , é possível determinar o estado de deformação da escora para cada valor de distorção  $\gamma$  (determinar  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ ) adicionando uma quarta condição às anteriores.

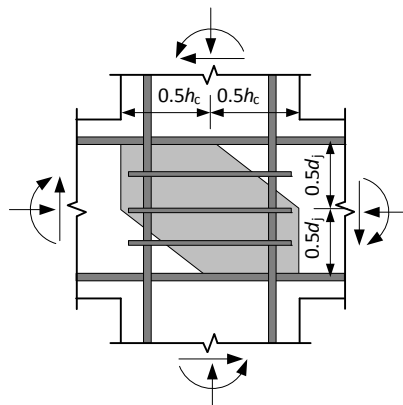


Figura 5.34 – Mecanismo de escora diagonal equivalente (Parra-Montesinos e Wight [2002]).

Esta condição, estabelecida por Parra-Montesinos e Wight [2002], corresponde à relação empírica entre  $\gamma$  e o quociente  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$  dada pela expressão (válida para  $\gamma < 1\%$ )

$$k_{tc} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 2 + k_s \gamma, \text{ com } k_s = 500 + 2000 \frac{e}{b_c} \quad (5.78)$$

em que  $e$  é a excentricidade do eixo da viga em relação ao eixo do pilar.

Conhecido o valor de  $\varepsilon_2$  é possível determinar o esforço na escora ( $C_{strut}$ ) recorrendo à relação constitutiva do betão

$$C_{strut} = \sigma_c [\varepsilon_2] A_{strut} \quad (5.79)$$

com  $A_{strut} = d_{strut} b_j$  em que  $b_j$  é a largura do núcleo confinado da ligação (distância entre os eixos dos ramos exteriores das cintas paralelos ao plano do pórtico – nos casos em que a largura da ligação é muito superior à largura do núcleo confinado, como por exemplo em modelos reduzidos, é habitual assumir  $b_j = b_c$ ).

Para definir o comportamento do núcleo da ligação viga-pilar, admite-se que a distorção da escora diagonal é representativa da distorção global do núcleo da ligação e que o esforço de corte horizontal no plano médio da ligação é determinado pela expressão

$$V_{jh} = C_{strut} \cos \theta_{strut} \quad (5.80)$$

Parra-Montesinos e Wight [2002] determinaram a relação  $k_{tc} - \gamma$  com base nos resultados de apenas nove ensaios experimentais de ligações viga-pilar. A partir de uma base de dados mais extensa Kim e LaFave [2009] propuseram uma nova relação

$$k_{tc} = k_{tc,i} + k_{tc,s} \gamma \quad (5.81)$$

em que o quociente inicial entre extensões principais é

$$k_{tc,i} = \alpha_i \beta_i \eta_i \lambda_i JI^{0.062} BI^{0.362} \quad (5.82)$$

sendo  $\alpha_i$  um parâmetro que reflecte o efeito da configuração da ligação no plano do pórtico (1 para ligações interiores, 1.23 para ligações de extremidade e 1.64 para ligações de cobertura de extremidade),  $\beta_i$  é um parâmetro que reflecte o efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico (1 para 0 ou 1 viga transversal e 0.47 para duas vigas transversais),  $\eta_i$  é um parâmetro que reflecte o efeito da excentricidade  $e$  dado por

$$\eta_i = \left( 1 - \frac{e}{b_c} \right)^{-2.38} \quad (5.83)$$

e  $\lambda_i$  é um parâmetro de ajuste dos resultados experimentais igual a 2.958.  $BI$  e  $JI$  são o índice de armadura longitudinal da viga e o índice de armadura transversal da ligação, respectivamente, e serão definidos no §5.5.2.3.2.

O declive da relação entre o quociente das extensões principais e a distorção é dado por

$$k_{tc,s} = \alpha_s \beta_s \eta_s \lambda_s JI^{-0.235} BI^{-0.678} \quad (5.84)$$

em que  $\alpha_s$  é um parâmetro que reflecte o efeito da configuração da ligação no plano do pórtico (1 para ligações interiores, 1.72 para ligações exteriores e 3.68 para ligações de canto),

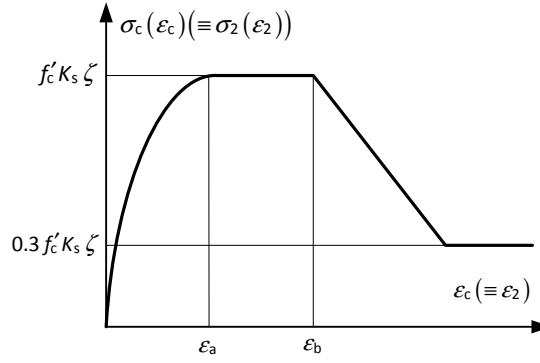


Figura 5.35 – Comportamento de betão confinado em compressão (Sheikh e Uzumeri [1982]).

$\beta_s$  é um parâmetro que reflecte o efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico (1 para 0 ou 1 viga transversal e 0.93 para duas vigas transversais),  $\eta_s$  é um parâmetro que reflecte o efeito da excentricidade  $e$  e é dado por

$$\eta_s = \left(1 - \frac{e}{b_c}\right)^{0.0846} \quad (5.85)$$

e  $\lambda_s$  é o parâmetro de ajuste dos resultados experimentais igual a 42.4.

Para a relação constitutiva do betão em compressão ( $\sigma_2 - \epsilon_2$ ) Parra-Montesinos e Wight [2002] adoptaram a expressão proposta por Sheikh e Uzumeri [1982] desenvolvida para betão confinado (Figura 5.35). Esta relação constitutiva é composta por quatro troços:

(i) OA ( $\epsilon_2 < \epsilon_a$ ):

$$\sigma_2 = \zeta f'_c K_s \left[ 2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_a} - \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_a} \right)^2 \right] \quad (5.86)$$

em que  $\zeta$  é o *softening coefficient* (Vecchio e Collins [1993]) dado por

$$\zeta = \frac{1}{0.85 + 0.27 k_{tc}} \quad (5.87)$$

e  $K_s$  é um factor que contabiliza o efeito do confinamento do betão dado por

$$K_s = 1.0 + \frac{(B/\text{mm})^2}{140 P_{occ}} \left(1 - \frac{n C^2}{5.5 B^2}\right) \left(1 - \frac{s}{2 B}\right)^2 \sqrt{\rho_s \frac{f_{y,t}}{\text{MPa}}} \quad (5.88)$$

em que  $B$  é a largura do núcleo do pilar assumida como a distância horizontal entre os eixos das cintas no perímetro do pilar,  $n$  é o número de varões longitudinais do pilar,  $C$  é a distância entre eixos das armaduras longitudinais dos pilares,  $s$  é a distância vertical entre cintas,  $\rho_s$  é a taxa volumétrica de cintas na ligação dada por

$$\rho_s = \frac{\text{volume de cintas}}{HB(d-d')} \quad (5.89)$$

em que  $H$  é a altura do núcleo do pilar assumida como a distância horizontal entre os eixos das cintas no perímetro do pilar,  $f_{y,t}$  é a tensão de cedência das cintas e  $P_{occ}$  é dado por



$$P_{occ} = \frac{0.85 f'_c}{1000 \text{ MPa}} \left( \frac{A_c - \Sigma A_s}{\text{m}^2} \right) \quad (5.90)$$

em que  $A_c$  é a área da secção transversal do pilar e  $\Sigma A_s$  é a área da secção transversal das armaduras longitudinais do pilar. O fim do troço parabólico ascendente termina para uma extensão

$$\varepsilon_a = 80 K_s \frac{f'_c}{\text{MPa}} 10^{-6}; \quad (5.91)$$

(ii) AB ( $\varepsilon_a < \varepsilon_2 < \varepsilon_b$ ):

$$\sigma_2 = \zeta f'_c K_s \quad (5.92)$$

em que o patamar termina na extensão

$$\varepsilon_b = 0.0022 \left[ 1 + \frac{248}{C/\text{mm}} \left( 1 - 5 \left( \frac{s}{B} \right)^2 \right) \frac{\rho_s f_{y,t}/\text{MPa}}{\sqrt{f'_c}/\text{MPa}} \right]; \quad (5.93)$$

(iii) BC ( $\varepsilon_2 > \varepsilon_b$ ):

$$\sigma_2 = \zeta f'_c K_s [1 - Z(\varepsilon_2 - \varepsilon_b)] \quad (5.94)$$

em que o declive do troço descendente é dado por

$$Z = \frac{2}{3} \frac{1}{\rho_s \sqrt{B/s}}; \quad (5.95)$$

(iv) CD (tensão residual):

$$f_2 = 0.3 \zeta f'_c K_s. \quad (5.96)$$

O procedimento para o cálculo do comportamento do núcleo da ligação é:

- i. calcular  $\theta_{strut} = \arctan(d_j/h_c)$ ,  $d_{strut}$  (expressão (5.74)) e  $b_j$ ;
- ii. para cada  $\gamma$  calcular:
  - ii.i.  $k_{tc}$  (expressão (5.81));
  - ii.ii.  $\varepsilon_2$  a partir das expressões (5.76) a (5.75), de onde resulta

$$\varepsilon_2 = \frac{\gamma}{\sin(2\theta)(k_{tc} + 1)}; \quad (5.97)$$

- ii.iii.  $\zeta$  (expressão (5.87));
- ii.iv.  $\sigma_2$  (expressões (5.86) a (5.96));
- ii.v.  $C_{strut}$  (expressão (5.79));
- ii.vi.  $V_{jh}$  (expressão (5.80)).

### 5.5.2.3. Modelos não fundamentados em analogias físicas

Apresentam-se em seguida dois modelos para o comportamento do núcleo das ligações viga-pilar que não se fundamentam em nenhuma analogia física: o modelo proposto por Roeser [2002] e o modelo proposto por Lafave e Kim (Kim [2007], Kim, LaFave *et al.* [2009], LaFave e Kim [2011]). Optou-se por avaliar dois modelos desta categoria devido (i) à sua simplicidade,

(ii) ao facto do modelo proposto por Roeser [2002] ter sido desenvolvido para solicitações quase-estáticas e monotónicas e (iii) a que o modelo proposto por Lafave e Kim, apesar de ter sido desenvolvido para modelar a envolvente cíclica, permite contabilizar diversos parâmetros geométricos não incorporados por nenhum dos outros modelos.

Ambos os modelos são formulados em termos da relação  $\tau_{jh}-\gamma$ , em que  $\tau_{jh} = V_{jh} / (h_c b_j)$  é a tensão tangencial nominal no plano horizontal a meia altura da ligação e  $b_j$  é a largura efectiva da ligação viga-pilar.

### 5.5.2.3.1. Modelo de Roeser

Roeser [2002] propôs um modelo trilinear simplificado para a relação  $\tau_{jh}-\gamma$  do núcleo da ligação viga-pilar de betão armado submetido a acções quase-estáticas e monotónicas. Os três estados considerados no modelo são (i) fase não fendilhada (estado I), (ii) fase fendilhada (estado II) e (iii) fase plástica (estado III).

De acordo com Roeser [2002], a fendilhação diagonal do núcleo da ligação viga-pilar dá-se para uma tensão tangencial  $\tau_{jh}$  aproximadamente igual à tensão de rotura do betão à tracção ( $f_{ct}$ ). Além disso, a fendilhação da ligação por corte conduz a uma elevada redução de rigidez, o que torna a distorção em fase não fendilhada (estado I) desprezável quando comparada com a distorção em fase fendilhada (estado II).

Em consonância com este pressuposto, Roeser [2002] assumiu como hipótese simplificativa que o betão não fendilhado tem um comportamento rígido e só incluiu no modelo as distorções em estado II e III. A relação constitutiva para o estado II é

$$\tau_{jh} = f_{ct} + G^{\text{II}} \gamma \quad (5.98)$$

em que  $G^{\text{II}}$  é a rigidez ao corte em estado II, dada por

$$G^{\text{II}} = \eta G \quad (5.99)$$

sendo  $\eta$  o factor de retenção de corte, que contabiliza o efeito da armadura transversal efectiva na ligação e o tipo de ligação, e  $G$  é o módulo de distorção elástico dado por

$$G = \frac{E_c}{2(1+\nu_c)} \quad (5.100)$$

sendo  $E_c$  e  $\nu_c$  o módulo de elasticidade e o coeficiente de *Poisson* do betão, respectivamente.

Roeser [2002] constatou experimentalmente que as ligações viga-pilar interiores em estado fendilhado apresentam um comportamento substancialmente mais rígido que as ligações de extremidade. Essa tendência foi considerada no modelo proposto pelo factor  $\eta$  dado por

$$\eta = \frac{1}{\varphi} + 3\rho_{j,ef} \quad (5.101)$$

em que  $\varphi = 100$  para ligações de extremidade e  $\varphi = 10$  para ligações interiores e

$$\rho_{j,ef} = \frac{A_{sj,ef}}{b_{ef} h_c} \quad (5.102)$$

em que  $A_{sj,ef}$  é a área de armadura transversal efectiva, definida para ligações exteriores como

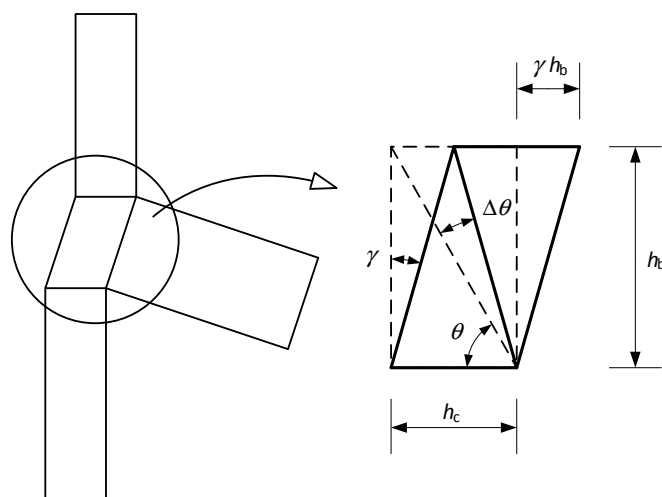


Figura 5.36 – Relação entre a distorção e a rotação da diagonal (Roeser [2002]).

a área de armadura transversal da ligação fora da zona de compressão das vigas (fora do banzo de compressão). No caso de ligações interiores,  $A_{s_j,ef}$  é tomado igual à área da secção transversal de todas as cintas compreendidas entre os varões da armadura longitudinal das vigas.

O estado III apresenta rigidez de corte nula e tem início logo que se verifique

$$\tau_{jh} = 0.25 f'_c \quad (5.103)$$

ou

$$\gamma = \gamma_{\max} \cdot \quad (5.104)$$

A distorção  $\gamma_{\max}$  é função da rotação máxima que a diagonal da ligação pode acomodar  $\Delta\theta_{\max}$ . De acordo com a Figura 5.36

$$\theta = \arctan\left(\frac{h_b}{h_c}\right) \quad (5.105)$$

e

$$\Delta\theta = \frac{h_b \gamma \sin\theta}{\frac{h_b}{\sin\theta}} = \gamma (\sin\theta)^2 \rightarrow \gamma_{\max} = \frac{\Delta\theta_{\max}}{(\sin\theta)^2} \quad (5.106)$$

De acordo com Roeser [2002], constatou-se experimentalmente que para ligações de extremidade  $\Delta\theta_{\max} = 0.6\%$ . Este limite foi adoptado no decorrer deste estudo para todas as tipologias de ligação viga-pilar.

### 5.5.2.3.2. Modelo de Kim e LaFave

Kim e LaFave (Kim [2007], Kim, LaFave *et al.* [2009], LaFave e Kim [2011]) propuseram um modelo para a envolvente cíclica (*backbone*) da relação  $\tau_{jh}-\gamma$  do núcleo das ligações viga-pilar de betão armado. Este modelo foi desenvolvido a partir de uma extensa base de dados de ligações viga-pilar (341 espécimes) submetidas a cargas laterais cíclicas aplicadas de forma quase-estática. Todas as ligações apresentaram rotura por corte (em alguns casos simultaneamente com a cedência dos varões da armadura longitudinal das vigas).

No modelo proposto por Kim, LaFave *et al.* [2009], a relação  $\tau_{jh}-\gamma$  é definida por quatro

eventos notáveis correspondentes a acentuadas reduções de rigidez da ligação. Com base nestes eventos são identificados quatro pontos na relação  $\tau_{jh}-\gamma$  que posteriormente é aproximada por troços rectos. Para estimar os parâmetros relevantes para esses eventos utilizou-se a estatística *Bayesiana*. Os eventos considerados foram: (i) a fendilhação do núcleo da ligação (ponto A), (ii) a cedência dos varões da armadura transversal da ligação ou da armadura longitudinal das vigas (ponto B), (iii) a resistência última (ponto C) e (iv) o “amaciamento” (ponto D). O ponto D não corresponde a nenhum evento nem a nenhuma variação de rigidez no comportamento da ligação mas permite definir a rigidez na fase de amaciamento.

O estudo realizado por estes autores permitiu concluir que os parâmetros mais relevantes para o comportamento do núcleo da ligação são (i) a resistência à compressão do betão, (ii) a configuração da ligação no plano do pórtico, (iii) a configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico, (iv) a excentricidade entre os eixos da viga e do pilar, (v) a armadura longitudinal da viga e (vi) a armadura transversal da ligação.

Para a resistência da ligação os autores propõem a expressão

$$\tau_{jh}^C = \alpha_t \beta_t \eta_t \lambda_t JI^{0.15} BI^{0.30} f_c'^{0.75} \quad (5.107)$$

em que  $BI$  é o índice de armadura longitudinal da viga dado por

$$BI = \frac{\rho_b f_{yb}}{f_c'}, \text{ com } \rho_b = \frac{A_{s,b}}{h_b b_b} \quad (5.108)$$

sendo  $f_{yb}$  e  $A_{s,b}$  a tensão de cedência e a área da secção transversal da armadura longitudinal da viga, respectivamente,  $JI$  é o índice de armadura transversal da ligação dado por

$$JI = \frac{\rho_s f_{y,t}}{f_c'}, \text{ com } \rho_s = \frac{v}{h_c b_c (d_b - d_b')} \quad (5.109)$$

em que  $v$  é o volume de armadura transversal disposta entre a armadura longitudinal superior e inferior da viga,  $f_{y,t}$  é a tensão de cedência da armadura transversal da ligação,  $\alpha_t$  é o parâmetro que contabiliza a influência da configuração da ligação no plano do pórtico (1.0 para ligações interiores, 0.7 para ligações de extremidade e 0.4 para ligações de cobertura de extremidade),  $\beta_t$  é o parâmetro que contabiliza a influência da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico (1.0 para ligações com 0 ou 1 viga transversal e 1.18 para ligações com duas vigas transversais),  $\eta_t$  é parâmetro que contabiliza a influência da excentricidade do eixo das vigas em relação ao eixo dos pilares, dado por

$$\eta_t = \left(1 - \frac{e}{b_c}\right)^{-0.67} \quad (5.110)$$

e  $\lambda_t = 1.31$  é um parâmetro de ajuste aos resultados experimentais.

A distorção correspondente a  $\tau_{jh}^C$  é dada por

$$\gamma^C = \alpha_{\gamma t} \beta_{\gamma t} \eta_{\gamma t} \lambda_{\gamma t} JI^{0.1} BI \left(\tau_{jh}^C / f_c'\right)^{-1.75}. \quad (5.111)$$

Nesta expressão  $\alpha_{\gamma t}$  é o parâmetro que contabiliza a influência da configuração da ligação no plano do pórtico e pode ser obtido a partir da Tabela 5.3. Nesta tabela estão indicados os

valores do parâmetro  $\alpha_{\gamma t}$  que melhor se ajustam à totalidade da amostra e a subamostras usando como critério a área de armadura transversal mínima a dispor na ligação de acordo com a ACI-ASCE Committee 352 [2002].

A Tabela 5.3 mostra que a influência da configuração da ligação no plano do pórtico é mais significativa nos casos em que a armadura transversal da ligação cumpre os requisitos da ACI-ASCE Committee 352 [2002].  $\beta_{\gamma t}$  é um parâmetro que contabiliza a influência da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico (1.0 para ligações com 0 ou 1 viga transversal e 1.4 para ligações com duas vigas transversais),  $\eta_{\gamma t}$  é um parâmetro que contabiliza a influência da excentricidade do eixo das vigas em relação ao eixo dos pilares, dado por

$$\eta_{\gamma t} = \left(1 - \frac{e}{b_c}\right)^{-0.6} \quad (5.112)$$

e  $\lambda_{\gamma t} = 0.00549$  é um parâmetro de ajuste aos resultados experimentais.

Para os restantes 3 pontos, e por uma questão de simplificação, Kim e LaFave [2009] propõem uma relação constante entre os valores da tensão tangencial e da distorção apresentados na Tabela 5.4 e na Figura 5.37(a).

As Figuras 5.37(b) e (c) representam o efeito qualitativo dos parâmetros relevantes para o comportamento do núcleo da ligação (pontos A, B, C e D).

Para ligações viga-pilar sem armaduras transversais, Kim e LaFave [2009], apesar de baseados num reduzido número de ensaios experimentais, propõem a mesma relação  $\tau_{jh} - \gamma$  que para

Tabela 5.3 – Parâmetro  $\alpha_{\gamma t}$ .

$\alpha_{\gamma t}$	todos os casos	$A_{sh} \geq 0.7$	$A_{sh} < 0.7$
interior	1.000	1.000	0.682
extremidade	0.328	0.328	0.224
extremidade de cobertura	0.093	0.093	0.269

Tabela 5.4 – Modelo proposto por Kim e LaFave [2009].

ponto	fenómeno físico	$\tau_{jh}$	$\gamma$
A	fendilhação diagonal da ligação	$0.442 \tau_{jh}^C$	$0.0197 \gamma^C$
B	cedência das armaduras	$0.890 \tau_{jh}^C$	$0.3620 \gamma^C$
C	resistência última	$1.000 \tau_{jh}^C$	$1.0000 \gamma^C$
D	fim do troço de amaciamento	$0.900 \tau_{jh}^C$	$2.0200 \gamma^C$

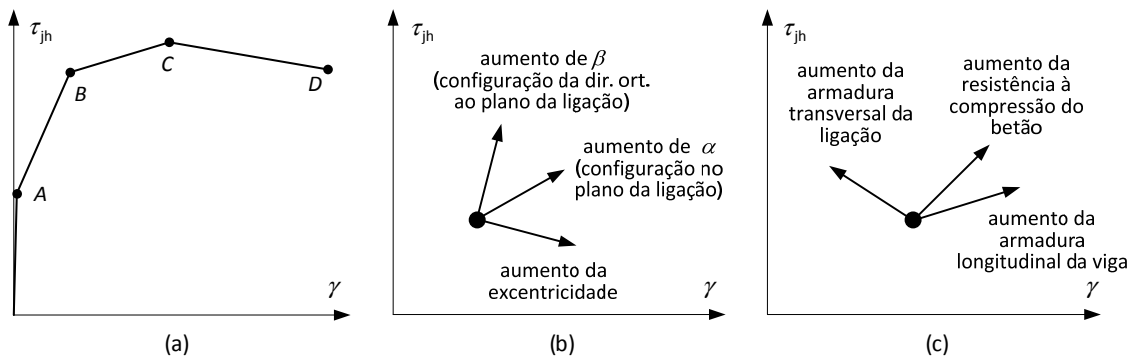


Figura 5.37 – Modelo proposto por Kim e LaFave [2009]: (a) relação  $\tau_{jh} - \gamma$ ; (b) efeito dos parâmetros não geométricos, (c) efeito dos parâmetros geométricos.

ligações viga-pilar com armaduras transversais, mas com um índice de armadura transversal da ligação  $Jl = 0.0139$  em vez de  $Jl = 0$  e um parâmetro de ajuste a resultados experimentais  $\lambda_{\gamma t} = 0.00761$  em vez de  $\lambda_{\gamma t} = 0.00549$ .

### 5.5.3. Análise comparativa dos modelos de comportamento para o núcleo da ligação ao corte

Na bibliografia só foram encontradas duas séries de ensaios experimentais com dados suficientes para avaliar o comportamento do núcleo da ligação ao corte sob acções quase-estáticas não cíclicas: os ensaios realizados por Sarsam [1983] e os ensaios realizados por Roeser [2002].

No entanto, mesmo os dados apresentados por estas referências são limitados. Os espécimes ensaiados por Sarsam [1983] romperam pelas vigas e como tal não foi possível obter a totalidade do comportamento das ligações. Por outro lado, nos ensaios realizados por Roeser [2002], apesar de na maioria dos ensaios se ter verificado a rotura nas ligações, não foi registada a totalidade do comportamento  $\tau_{jh}-\gamma$  da ligação. Como limitação adicional só se encontraram na bibliografia curvas de comportamento para ligações viga-pilar interiores e de extremidade e sem elementos transversais.

Os modelos avaliados foram (i) a MCFT, originalmente proposta por Vecchio e Collins [1986] (§5.5.2.1), (ii) o modelo de escora diagonal proposto por Parra-Montesinos e Wight [2002] com as alterações propostas por Kim e LaFave [2009] (§5.5.2.2), (iii) o modelo proposto por Roeser [2002] (§5.5.2.3.1) e (iv) o modelo proposto por Kim e LaFave [2009] (§5.5.2.3.2).

Para aplicação do modelo proposto por Roeser [2002], a área de armadura transversal efectiva, no caso das ligações viga-pilar de extremidade, foi determinada de forma simplificada, nomeadamente, a profundidade do eixo neutro das vigas corresponde a um bloco rectangular de tensões de compressão equivalente para o instante em que as armaduras de tracção entram em cedência desprezando o efeito das armaduras de compressão. Para este modelo foram ainda consideradas as deformações em regime elástico assumindo  $G^l = G$  em que  $G$  é determinado pela expressão (5.100).

Para modelar o comportamento do núcleo da ligação viga-pilar recorrendo à MCFT utilizou-se o programa Membrane-2000 [2000], desenvolvido por Bentz [2000]. Foram adoptados os pressupostos assumidos por Kim [2007] com excepção da forma como é contabilizada a armadura longitudinal das vigas e pilares: por forma a ultrapassar as deficiências apresentadas por este autor, as armaduras longitudinais dos pilares foram consideradas parcialmente efectivas de acordo com a sugestão de Altoontash [2004]. Assumiu-se para as armaduras um comportamento bilinear com endurecimento parabólico com  $f_u = 1.2f_y$ ,  $E_s = 200$  GPa,  $\varepsilon_{sh} = 0.05$  e  $\varepsilon_u = 0.1$  em que  $f_u$  é a resistência à tracção das armaduras,  $\varepsilon_{sh}$  é a extensão correspondente ao fim do patamar de cedência e  $\varepsilon_u$  é a extensão correspondente a  $f_u$ . Para o betão, admitiu-se que a dimensão máxima dos agregados é 19 mm, a curva base para modelar o comportamento do betão em compressão foi a curva proposta por Vecchio e Collins [1993] com o *softening coefficient* proposto por Vecchio e Collins [1986]. O comportamento para o betão em tracção foi assumido elástico linear até se atingir a extensão de fendilhação e foi modelado

recorrendo ao modelo proposto por Bentz [2000] para extensões superiores à de fendilhação.

Roeser [2002] ensaiou sete espécimes à escala 1:2 com ligações viga-pilar interiores, com a pormenorização da armadura esquematicamente representada na Figura 5.38 e cujas principais características estão indicadas na Tabela 5.5. Apenas são modelados os seis espécimes que continham armaduras transversais na zona da ligação (não foi publicado o comportamento do espécime RA1).

A largura da secção transversal das vigas e pilares dos espécimes ensaiados por Roeser [2002] é  $b_b = b_c = 0.15\text{m}$  e a altura da secção transversal das vigas é  $h_b = 0.3\text{m}$ . A altura da secção transversal dos pilares é  $h_c = 0.24\text{m}$  para todos os espécimes com excepção do RA6 onde  $h_c = 0.30\text{m}$ . Sempre que não foi disponibilizada informação assumiu-se que o recobrimento e o espaçamento entre armaduras longitudinais nas vigas e nos pilares é 2.5 cm.

Os espécimes ensaiados apresentam elevadas percentagens de armadura longitudinal nos pilares (aproximadamente 7%) que não cumprem os limites estabelecidos nas especificações técnicas actuais. Além disso, a tensão de rotura à compressão do betão utilizado também é significativamente elevada.

A Figura 5.39 contrapõe os resultados experimentais de Roeser [2002] às estimativas de comportamento determinadas pelos modelos de comportamento apresentados anteriormente. Como já foi referido, as curvas de comportamento experimental apresentadas por Roeser [2002] são incompletas na medida em que não apresentam a relação  $\tau_{jh} - \gamma$  até à rotura. No entanto, permitem avaliar a rigidez da ligação em serviço. Todos os espécimes com ligações viga-pilar interiores romperam pelo núcleo das ligações viga-pilar.

A tensão de corte experimental  $\tau_{jh}$  foi determinada em cada instante recorrendo à expressão

$$\tau_{jh} = \frac{V_{jh}}{b_c h_c}, \text{ com } V_{jh} = T - V_{col} \quad (5.113)$$

em que  $T$  é o esforço de tracção nos varões longitudinais das vigas à face do pilar e  $V_{col}$  é o esforço transversal no pilar à face da viga.

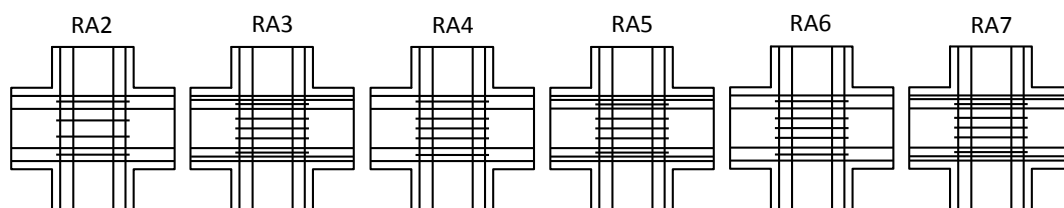


Figura 5.38 – Representação esquemática das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002].

Tabela 5.5 – Principais características das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002].

	$f'_c$ [MPa]	armadura long. da viga	armadura long. do pilar	cintas na ligação	$N_c / (A_c f'_c)$
RA2	66.1	8 $\phi$ 14	8 $\phi$ 20	4 $\phi$ 6	0.19
RA3	43.6	8 $\phi$ 14 + 2 $\phi$ 12	8 $\phi$ 20	5 $\phi$ 8	0.32
RA4	66.1	4 $\phi$ 20 + 4 $\phi$ 16	4 $\phi$ 20 + 6 $\phi$ 16	5 $\phi$ 8	0.14
RA5	56.2	10 $\phi$ 12	8 $\phi$ 20	5 $\phi$ 6	0.25
RA6	56.2	8 $\phi$ 14	8 $\phi$ 20	5 $\phi$ 6	0.25
RA7	79.7	8 $\phi$ 16 + 2 $\phi$ 12	8 $\phi$ 20	5 $\phi$ 10	0.16

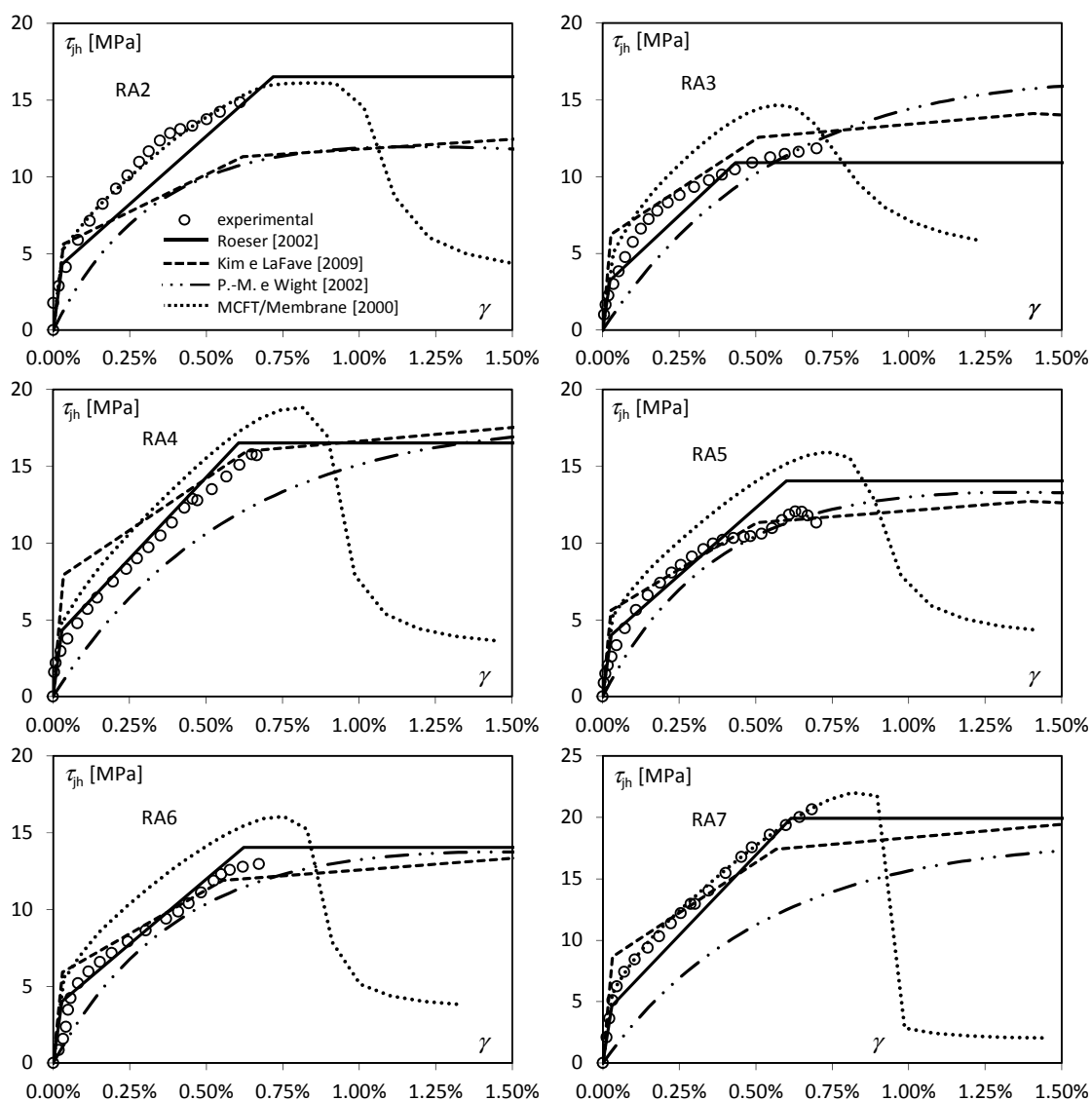


Figura 5.39 – Resultados experimentais as ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002], confrontados com estimativas teóricas.

Uma análise qualitativa da Figura 5.39 permite concluir que, dentro do intervalo de distorções  $\gamma$  para o qual foram disponibilizados resultados experimentais, tanto o modelo de Roeser [2002] como o modelo de Kim e LaFave [2009] fornecem uma boa estimativa de comportamento do núcleo da ligação. Além disso, constata-se que o modelo de Parra-Montesinos e Wight [2002] tende a sobrestimar e a MCFT tende a subestimar a flexibilidade da ligação viga-pilar.

Na Tabela 5.6 apresentam-se os valores da resistência das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002] estimados de acordo com os modelos apresentados anteriormente ( $\tau_m$ ) juntamente com os resultados experimentais ( $\tau_{exp}$ ).

Na Tabela 5.7 estão representadas os valores da média e do desvio padrão dos quocientes  $\tau_m/\tau_{exp}$  para os espécimes da Tabela 5.6. Esta tabela mostra que a resistência das ligações viga-pilar interiores é subestimada por todos os modelos estudados, com excepção da MCFT.

O modelo de Parra-Montesinos e Wight [2002] modificado por Kim e LaFave [2009] apresenta estimativas idênticas ao modelo de Kim e LaFave [2009] para a  $\gamma$  e  $\tau$  correspondentes ao colapso do núcleo das ligações interiores. Esta coincidência era espectável na medida em que



Tabela 5.6 – Colapso das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002]

modelo	RA2			RA3			RA4		
	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]
experimental	–	16.6	–	–	14.0	–	–	21.4	–
Roeser	0.7	16.5	100	0.4	10.9	78	0.6	16.5	77
Kim e LaFave (C)	1.7	12.7	77	1.4	14.1	101	1.7	18.0	84
Kim e LaFave (B)	0.6	11.5	69	0.5	12.6	90	0.6	16.0	75
P.-M. e Wight	1.2	12.0	72	1.9	16.1	115	2.1	17.4	81
MCFT/Membrane	0.8	16.1	97	0.6	14.7	105	0.8	18.8	88

modelo	RA5			RA6			RA7		
	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]
experimental	–	13.7	–	–	14.7	–	–	21.3	–
Roeser	0.6	14.1	102	0.6	14.1	95	0.6	19.9	93
Kim e LaFave (C)	1.4	12.7	93	1.5	13.4	91	1.6	19.6	92
Kim e LaFave (B)	0.5	11.3	83	0.6	11.9	81	0.6	17.4	82
P.-M. e Wight	1.4	13.3	97	1.5	13.8	93	2.0	17.7	83
MCFT/Membrane	0.7	15.9	116	0.8	16.1	109	0.8	22.0	103

Tabela 5.7 – Média e desvio padrão da carga de colapso das ligações viga-pilar interiores ensaiadas por Roeser [2002].

modelo	média [%]	desvio padrão [%]
Roeser	91	10
Kim e LaFave (C)	89	7.5
Kim e LaFave (B)	78	6.5
P.-M. e Wight	90	13.8
MCFT/Membrane	103	8.9

foram modelos calibrados com a mesma base de dados. No entanto, a estimativa de comportamento inicial do modelo de Parra-Montesinos e Wight [2002] modificado por Kim e LaFave [2009], dado que parte do pressuposto de um modelo de escora desde o início do carregamento, tende a ser mais flexível que o comportamento observado experimentalmente.

O modelo de Roeser [2002] também fornece estimativas idênticas ao modelo de Kim e LaFave [2009] para a resistência do núcleo das ligações interiores. No entanto, o modelo de Roeser [2002] apresenta maior sensibilidade à resistência à compressão do betão que o modelo de Kim e LaFave [2009] – ver espécime RA2 – e o modelo de Kim e LaFave [2009] é mais sensível à quantidade de armadura transversal da ligação e longitudinal da viga – ver espécime RA3. Assim, nos casos em que o  $Jl$  é mais reduzido, verifica-se que a estimativa da resistência fornecida pelo modelo de Kim e LaFave [2009] é significativamente inferior à determinada pelo modelo de Roeser [2002] (e vice versa). Já nos casos em que a resistência à compressão do betão é mais reduzida, o modelo de Roeser [2002] determina resistências tendencialmente inferiores às do modelo de Kim e LaFave [2009].

A deformação correspondente ao colapso da ligação segundo o modelo de Roeser [2002] corresponde aproximadamente à deformação do ponto C do modelo de Kim e LaFave [2009] e

simultaneamente aos pontos onde terminam as leituras experimentais. Isto sugere que o modelo de Roeser [2002] é incompleto por falta de dados relativos à totalidade da curva de comportamento (a calibração do modelo de Roeser [2002] incorporou os ensaios RA2 a RA7 enquanto a calibração do modelo de Kim e LaFave [2009] não).

Roeser [2002] ensaiou também oito espécimes com ligações viga-pilar de extremidade à escala 1:2, com armadura pormenorizada da forma representada na Figura 5.40 e cujas principais características estão indicadas na Tabela 5.8.

A largura da secção transversal das vigas e pilares dos espécimes com ligações viga-pilar interiores ensaiados por Roeser [2002] é  $b_b = b_c = 0.15\text{m}$  e a altura da secção transversal das vigas é  $h_b = 0.3\text{m}$  para todos os espécimes com excepção do espécime RK7 onde  $h_b = 0.4\text{m}$ . A altura da secção transversal dos pilares dos espécimes RK1, RK2 e RK3 é  $h_c = 0.24\text{m}$  e dos restantes espécimes é  $h_c = 0.2\text{m}$ .

Os espécimes RK1, RK2 e RK3 romperam pela viga enquanto os espécimes RK4 a RK8 romperam pela ligação viga-pilar.

A Figura 5.41 confronta as estimativas de comportamento determinadas pelos modelos de comportamento referidos com os resultados experimentais reportados por Roeser [2002].

Uma análise qualitativa da Figura 5.41 sugere que, dentro do intervalo de distorções  $\gamma$  para o qual foram disponibilizados resultados experimentais, o modelo de Roeser [2002] fornece uma boa estimativa do comportamento do núcleo da ligação, enquanto que o modelo de Kim e LaFave [2009] tende a fornecer uma estimativa de comportamento excessivamente rígida numa fase inicial do carregamento. A MCFT subestima muito a flexibilidade da ligação e o modelo de Parra-Montesinos e Wight [2002] tende a sobrestimar a flexibilidade da ligação.

No entanto, tendo em consideração (i) que o modelo de Roeser [2002] foi calibrado com base nestes resultados experimentais e (ii) que o cálculo do esforço de corte no núcleo ignora a tensão nos laços dos varões que se prolongam para a viga (N6, Tabela 2.2), os quais chegam a

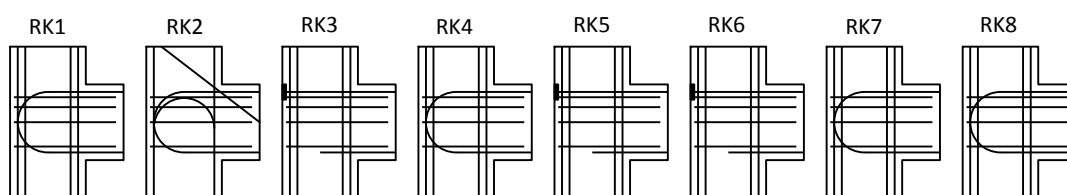


Figura 5.40 – Representação esquemática das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002].

Tabela 5.8 – Principais características das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002].

	$f'_c$ [MPa]	armadura long. da viga	armadura long. do pilar	U's na ligação	$N_c/(A_c f'_c)$
RK1	57.9	(T) 2 $\phi$ 20, (C) 2 $\phi$ 20	6 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10	0.24
RK2	57.4	(T) 2 $\phi$ 20, (C) 2 $\phi$ 20	4 $\phi$ 16 + 1 $\phi$ 20 em U	4 $\phi$ 8 + 1 $\phi$ 20 diag.	0.24
RK3	57.2	(T) 2 $\phi$ 20, (C) 2 $\phi$ 20	6 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10	0.24
RK4	51.7	(T) 2 $\phi$ 20, (C) 2 $\phi$ 20	6 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10	0.32
RK5	54.9	(T) 2 $\phi$ 25, (C) 2 $\phi$ 20	6 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10	0.30
RK6	86.5	(T) 2 $\phi$ 25, (C) 2 $\phi$ 20	6 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10	0.19
RK7	54.7	(T) 2 $\phi$ 20, (C) 2 $\phi$ 20	6 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10	0.29
RK8	38.6	(T) 2 $\phi$ 20, (C) 2 $\phi$ 20	6 $\phi$ 16	4 $\phi$ 10	0.43

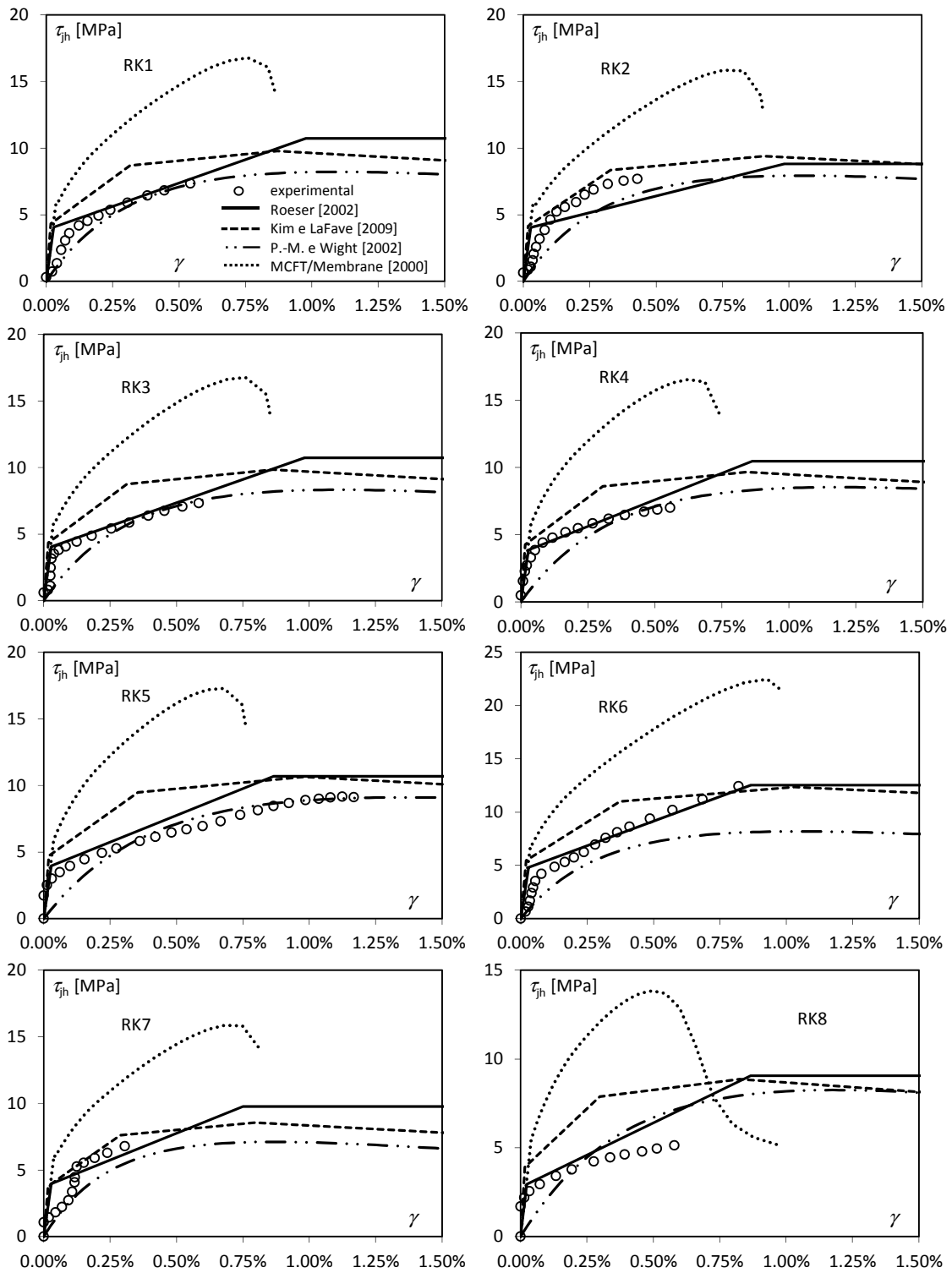


Figura 5.41 – Comportamento das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002].

ter secção transversal com área igual à dos varões longitudinais de tracção da viga, é espectável que uma estimativa mais rigorosa do esforço de corte na ligação conduzisse a respostas mais rígidas e, conseqüentemente, à conclusão de que o modelo de Roeser [2002] apresenta uma menor correspondência com os resultados experimentais e que o de Kim e LaFave [2009] uma maior correspondência com esses resultados. Como se verá, a análise das curvas de comportamento globais das subestruturas apresentada no Capítulo 6 (§6.5.2.2) confirma esta expectativa.

Tal como já foi referido no Capítulo 3, Sarsam [1983] efectuou cinco ensaios experimentais de subestruturas com ligações viga-pilar de extremidade sob condições quase-estáticas e monotónicas, em que só quatro possuíam armadura transversal na ligação. As principais características dos espécimes ensaiados por Sarsam [1983] foram indicadas na Tabela 3.

Os resultados experimentais publicados por Sarsam [1983] relativos à caracterização do comportamento da ligação viga-pilar estão no formato  $M_b - \gamma$  (Capítulo 3). Desta forma, foi necessário substituir o momento flector na extremidade da viga por um binário equivalente e posteriormente calcular  $V_{jh}$ . Para tal, assumiu-se que  $z_b/d_b = 0.85$  ao longo de toda a história de carga (§5.4.8). Optou-se por esta abordagem simplificada porque, em alguns casos, a estimativa do momento flector resistente, calculada por análise da secção transversal da viga, é significativamente inferior ao valor registado experimentalmente, inviabilizando a decomposição do momento flector no binário correspondente para toda a gama de valores de  $M_b$  registada experimentalmente com recurso a um valor mais rigoroso de  $z_b$ .

Na Figura 5.42 está representado o comportamento experimental das ligações juntamente com as estimativas de comportamento determinadas pelos modelos referidos anteriormente. Note-se que o colapso dos espécimes no decorrer do ensaio experimental deu-se sempre pela viga, pelo que não foi possível determinar nem a totalidade da curva de comportamento da ligação viga-pilar nem a respectiva capacidade resistente.

A análise qualitativa da Figura 5.42 mostra que os modelos que melhor se ajustam aos resultados experimentais publicados por Sarsam [1983] são novamente os modelos propostos por Kim e LaFave [2009] e Roeser [2002].

As Tabelas 5.9 a 5.11 indicam o valor da resistência das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002] e por Sarsam [1983], determinados pelos modelos apresentados

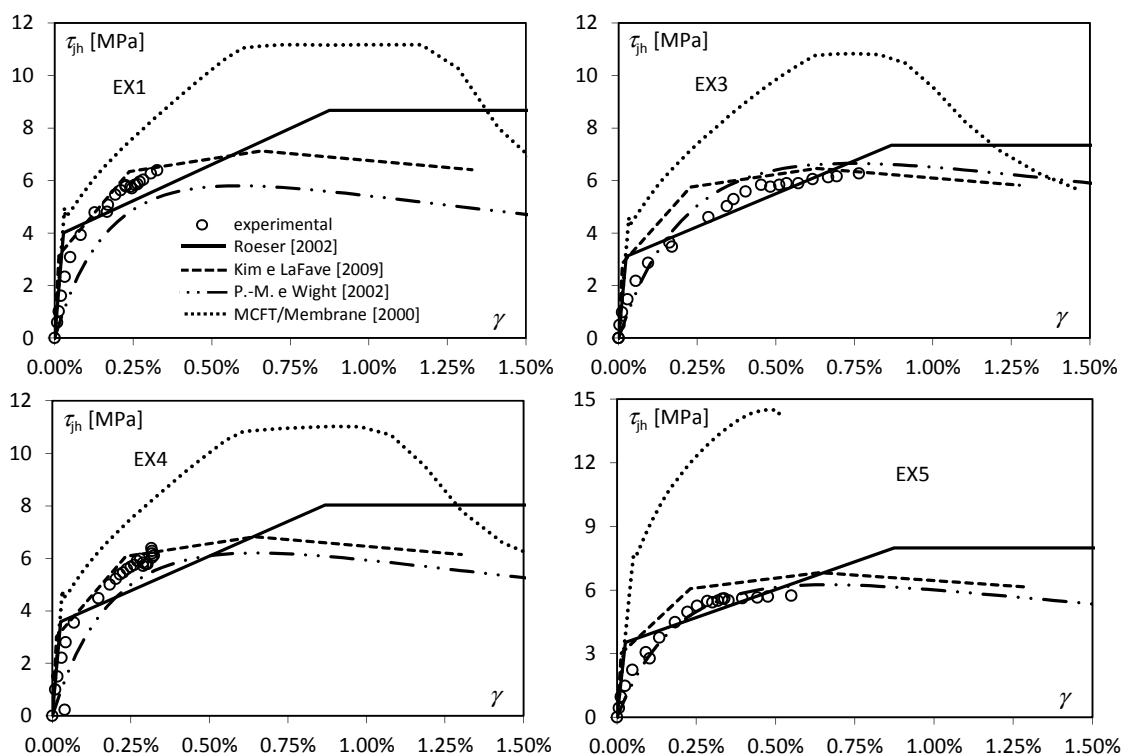


Figura 5.42 – Comportamento das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Sarsam [1983].

Tabela 5.9 – Colapso das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002].

modelo	RK1			RK2			RK3		
	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]
experimental	–	10.4	–	–	11.6	–	–	11.2	–
Roeser	1.0	10.7	103	1.0	8.8	76	1.0	10.7	96
Kim e LaFave (C)	0.9	9.8	94	1.0	9.0	78	0.9	9.8	88
Kim e LaFave (B)	0.3	8.7	84	0.3	8.0	69	0.3	8.8	78
P.-M. e Wight	1.1	8.2	79	1.0	7.6	66	1.1	8.3	75
MCFT/Membrane	0.8	16.8	162	0.8	15.9	137	0.8	16.8	150

modelo	RK4			RK5			RK6		
	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]
experimental	–	11.9	–	–	14.1	–	–	18.5	–
Roeser	0.9	10.5	88	0.9	10.7	76	0.9	12.5	68
Kim e LaFave (C)	0.8	9.7	81	1.0	10.6	76	1.0	12.4	67
Kim e LaFave (B)	0.3	8.6	72	0.4	9.5	67	0.4	11.0	59
P.-M. e Wight	1.2	8.5	72	1.4	9.1	65	1.1	8.2	44
MCFT/Membrane	0.6	16.5	139	0.7	17.3	123	0.9	22.5	121

modelo	RK7			RK8		
	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\tau_m/\tau_{exp}$ [%]
experimental	–	9.2	–	–	9.1	–
Roeser	0.8	9.8	106	0.9	9.1	100
Kim e LaFave (C)	0.8	8.6	93	0.8	8.9	97
Kim e LaFave (B)	0.3	7.6	82	0.3	7.9	87
P.-M. e Wight	0.9	7.1	77	1.2	8.3	91
MCFT/Membrane	0.7	15.9	172	0.5	13.8	152

Tabela 5.10 – Média e desvio padrão da carga de colapso das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002].

modelo	média [%]	desvio padrão [%]
Roeser	89	13
Kim e LaFave (C)	84	10
Kim e LaFave (B)	75	9
P.-M. e Wight	71	13
MCFT/Membrane	144	17

anteriormente. No caso das estruturas ensaiadas por Roeser [2002] é também apresentada a resistência medida experimentalmente.

A Tabela 5.10 mostra que a MCFT sobrestima significativamente a capacidade resistente das ligações viga-pilar de extremidade. Tendo em atenção que as Figuras 5.41 e 5.42 mostram que este modelo também subestima significativamente a flexibilidade do núcleo da ligação, pode-se concluir que a MCFT não é adequada para modelar o comportamento ou mesmo estimar a

Tabela 5.11 – Colapso das ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Sarsam [1983].

modelo	EX1		EX3		EX4		EX5	
	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]	$\gamma$ [%]	$\tau_m$ [MPa]
Roeser	0.9	8.7	0.9	7.3	0.9	8.0	0.9	8.0
Kim e LaFave (C)	0.7	7.1	0.6	6.5	0.6	6.8	0.6	6.8
Kim e LaFave (B)	0.2	6.3	0.2	5.8	0.2	6.1	0.2	6.1
P.-M. e Wight	0.6	5.8	0.8	6.6	0.7	6.2	0.7	6.2
MCFT/Membrane	1.3	10.3	0.8	10.8	0.8	11.0	0.5	14.5

capacidade resistente de ligações viga-pilar de extremidade. Mesmo para as ligações ensaiadas por Sarsam [1983] (Tabela 5.11), constata-se que a MCFT determina um valor para a capacidade resistente da ligação significativamente superior ao dos outros modelos. Estes resultados sugerem que as ligações de extremidade apresentam um mecanismo resistente significativamente diferente do das ligações interiores.

O modelo de Parra-Montesinos e Wight [2002] modificado por Kim e LaFave [2009] subestima a capacidade resistente das ligações de extremidade e apresenta estimativas para a deformação correspondente ao esgotamento dessa capacidade resistente ligeiramente superiores às dos restantes modelos (Tabelas 5.9, 5.10 e 5.11).

Tanto o modelo de Roeser [2002] como o modelo de Kim e LaFave [2009] subestimam a capacidade resistente da ligação (Tabela 5.10). O modelo de Kim e LaFave [2009] conduz a uma rigidez para a ligação na fase de comportamento intermédia superior à verificada experimentalmente. O espécime RK2 é o único, dos ensaiados por Roeser [2002], para o qual esta sobrestimação não se verifica, possivelmente porque tem varões diagonais e laços invertidos na ligação (K5, Tabela 2.2) que são ignorados por todos os modelos. Note-se no entanto que, tal como já foi referido, o esforço de corte no núcleo da ligação calculado com base nos registos experimentais despreza os esforços nos laços dos varões que se prolongam para a viga (N6, Tabela 2.2), pelo que a sobrestimação apresentada pelo modelo de Kim e LaFave [2009], como se verá no Capítulo 6, é aparente.

Os resultados das ligações ensaiadas por Sarsam [1983] apresentam uma variabilidade que não era expectável. Estes espécimes apenas diferem uns dos outros no parâmetro  $\alpha_v = M_b/V_b$  e no esforço axial reduzido (espécime EX5). No entanto, o efeito do parâmetro  $\alpha_v$  é tido em consideração na conversão da relação  $M_b-\gamma$  em  $\tau_{jh}-\gamma$ . Consequentemente, a menos do efeito da resistência à compressão do betão, não eram esperadas diferenças significativas no comportamento dos espécimes EX1, EX3 e EX4. Apesar disso, constatou-se que os espécimes EX3 e EX5 apresentam um comportamento mais próximo da estimativa obtida recorrendo ao modelo de Roeser [2002], enquanto que os espécimes EX1 e EX4 apresentam um comportamento mais rígido e por isso melhor descrito pelo modelo de Kim e LaFave [2009]. O facto do momento resistente da secção transversal das vigas obtido experimentalmente ser significativamente superior ao determinado na análise da secção transversal apresentada por Sarsam [1983], sugere uma grande variabilidade das propriedades mecânicas dos materiais, comum em materiais como o betão, que pode estar na origem da inesperada variabilidade do comportamento das ligações.

## 5.6. Notas finais

Iniciou-se este capítulo com uma apresentação sumária dos fundamentos do método das componentes e da sua implementação na NP EN 1993-1-8 com vista à modelação de ligações viga-pilar de estruturas metálicas.

Foi efectuada uma análise com vista a identificar as especificidades das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado, por comparação com as ligações viga-pilar de estruturas porticadas metálicas, as quais foram consideradas no desenvolvimento de um modelo para as primeiras baseado no método das componentes.

Relativamente a outros modelos mecânicos (ou macro-elementos) propostos na bibliografia para modelar ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado, o modelo desenvolvido diferencia-se por (i) constituir uma representação intuitiva e sustentada na mecânica do comportamento da ligação, determinada por agregação de um sistema de elementos pontuais elásticos, ou molas, e elementos rígidos, (ii) incorporar somente componentes relevantes, de modo a reduzir a sua complexidade, e (iii) possibilitar uma modelação objectiva e independente do núcleo da ligação viga-pilar a partir da relação  $\tau_{jh}-\gamma$ , actualmente aceite como a forma mais rigorosa de caracterizar o comportamento deste elemento estrutural.

Foram estabelecidos modelos simplificados para determinar as relações constitutivas das componentes amarração e foram avaliados os modelos disponíveis na bibliografia para determinar a relação constitutiva das componentes núcleo da ligação ao corte.

Foi definida uma estratégia para implementação dos modelos simplificados para as componentes amarração, tendo em consideração as particularidades das relações constitutivas para a aderência entre o betão e varões. Os resultados baseados nestes modelos foram seguidamente confrontados com os resultados experimentais, considerando-se, face à boa concordância observada, que foi alcançado um bom compromisso entre o rigor e a simplicidade dos modelos.

Relativamente ao comportamento ao corte do núcleo de ligações viga-pilar, verificou-se que as estimativas calculadas com os modelos disponíveis na bibliografia apresentam grande disparidade.

A MCFT (Vecchio e Collins [1986]) permite determinar boas estimativas da capacidade resistente do núcleo de ligações viga-pilar interiores. Porém, não oferece boas estimativas nem para a capacidade resistente no caso de ligações exteriores nem para a flexibilidade em situação de serviço para nenhuma das tipologias de ligações estudadas (interior e de extremidade).

O modelo de Parra-Montesinos e Wight [2002] modificado por Kim e LaFave [2009] fornece uma estimativa excessivamente conservadora para a resistência do núcleo da ligação ao corte no caso de ligações de extremidade e uma estimativa para a rigidez inicial do núcleo da ligação inferior aos valores constatados experimentalmente em ambas as tipologias de ligação estudadas.

O modelo de Roeser [2002], no caso de ligações interiores, aparenta estar incompleto porque a curva de comportamento dos ensaios com base nos quais foi calibrado também o estava. Esta conclusão é reforçada pelo facto de, apesar de Hegger, Sherif *et al.* [2003] reportarem que as ligações viga-pilar, para níveis de carga elevados, apresentam deformações plásticas significativas, o modelo de Roeser [2002] não reflecte essa observação experimental, na medida em que conduz a uma estimativa de comportamento mais rígida que o comportamento experimental antes de entrar na fase plástica (estado III).

O modelo de Kim e LaFave [2009], no caso de ligações de extremidade, apesar de conduzir a estimativas para a capacidade de carga e correspondentes deformações semelhante ao modelo de Roeser [2002], aparenta sobrestimar a rigidez do núcleo da ligação para níveis intermédios de carga. No entanto (Capítulo 8), esta sobrestimação decorre da abordagem adoptada por Roeser [2002] para calcular o esforço de corte na ligação. Note-se que o modelo de Kim e LaFave [2009], contrariamente ao modelo de Roeser [2002], incorpora um agravamento muito significativo da flexibilidade do núcleo da ligação para níveis de esforço de corte elevados (o que está em consonância com as observações reportadas por Hegger, Sherif *et al.* [2003]).

Desta forma, conclui-se que os modelos para o comportamento do núcleo das ligações baseados na mecânica dos corpos deformáveis, apesar de serem mais complexos, não conduzem a ganhos significativos em termos de resultados. Além disso, estes modelos não permitem reflectir por si os efeitos da configuração da ligação no plano e na direcção ortogonal ao plano do pórtico. Este aspecto é evidente quando se tenta aplicar a MCFT (Vecchio e Collins [1986]) a ligações de extremidade e só não ocorre de forma mais vincada com o modelo de Parra-Montesinos e Wight [2002] porque este foi modificado por Kim e LaFave [2009] com recurso a parâmetros calibradores obtidos estatisticamente, desvirtuando desta forma o modelo mecânico original.

Do exposto pode concluir-se que, dos modelos estudados para o comportamento do núcleo das ligações viga-pilar, o de Kim e LaFave [2009], apesar de desenvolvido para modelar a envolvente cíclica do comportamento do núcleo da ligação, é o que determina estimativas que melhor se correlacionam com os resultados experimentais para ligações viga-pilar submetidas a solicitações quase-estáticas e monotónicas.



---

# Capítulo 6

## Análise estrutural com modelação explícita das ligações viga-pilar

### 6.1. Introdução

O dimensionamento das ligações viga-pilar de betão armado de acordo com a maioria as especificações técnicas actuais inclui a verificação da resistência última tanto do corte do núcleo da ligação como da aderência das armaduras longitudinais das vigas e pilares (Capítulo 2). Constitui uma lacuna o facto desta abordagem se apoiar numa análise que não contabiliza as deformações das ligações para efeitos de (i) redistribuição de esforços, (ii) esforços de segunda ordem e (iii) estados limites de serviço.

Por outro lado, foram recentemente propostas abordagens ao dimensionamento para acções sísmicas com base na performance (*performance-based design*) que estabelecem que o desempenho sísmico para uma dada acção é adequado se determinado nível de deformação dos elementos estruturais não for excedido. Neste contexto, versões recentes de algumas especificações técnicas incluem procedimentos de verificação de segurança e dimensionamento sustentados na avaliação de deslocamentos e deformações calculados por análises não lineares (*e.g.*, análise *pushover*). Este tipo de procedimentos necessita de modelos que possibilitem a quantificação rigorosa dos deslocamentos e deformações das estruturas e, conseqüentemente, requer que a deformabilidade das ligações viga-pilar seja contabilizada.

A influência da deformabilidade das ligações viga-pilar sobre o comportamento das estruturas porticadas depende da relação entre a rigidez da ligação e a rigidez à flexão dos elementos lineares que constituem a estrutura (Gomes [2002]). Desta forma, uma correcta quantificação desta influência implica a modelação rigorosa não apenas da ligação mas também dos elementos lineares.

Neste capítulo é apresentada a implementação no EvalS (Ferreira [2011]) do modelo de ligação viga-pilar proposto no Capítulo 5 na forma de um novo elemento. O EvalS é um programa

informático de análise de estruturas reticuladas planas baseado no método dos elementos finitos (MEF). As rotinas de análise não linear do EvalS utilizam o Método das Forças Fictícias (MFF, Gala, Providência *et al.* [2008]).

A análise materialmente não linear das peças lineares utiliza um modelo seccional de fibras, simples de conjugar com o MFF, cuja implementação no EvalS é igualmente apresentada (Ferreira [2011]). Este modelo aproxima adequadamente o comportamento materialmente não linear das vigas e pilares de estruturas porticadas de betão armado, dada a forma como é considerada a interação entre, por um lado, as deformações axiais e as de flexão e, por outro, o esforço axial e o momento flector. Representa, por isso, de forma natural, aspectos relevantes do comportamento de elementos lineares de betão armado em flexão, como a extensão axial decorrente da variação da posição da linha neutra (*beam growth/elongation*, Kim, Stanton *et al.* [2004] e Sasani, Kazemi *et al.* [2011]).

De acordo com o CEB [1996], a avaliação da influência do comportamento das ligações sobre o comportamento de estruturas, quando determinada a partir de ensaios laboratoriais, pode conduzir a resultados irrealistas, na medida em que os modelos laboratoriais frequentemente são isostáticos, contrariamente às edificações correntes. Este aspecto é relevante não só devido à influência do *beam growth* sobre o comportamento estrutural, mas também porque uma rotura na região da ligação viga-pilar envolve alterações importantes na geometria da estrutura. Ora o maior número de ligações presentes nas estruturas completas, quando estas são comparadas com espécimes laboratoriais, torna-as menos propícias à formação de mecanismos, possibilitando pois uma maior redistribuição de tensões. Ainda de acordo com o CEB [1996], nas ligações viga-pilar de estruturas reais bem pormenorizadas, e para um dado deslocamento transversal entre pisos, é pouco provável a ocorrência de certos tipos de rotura possíveis em sistemas estaticamente determinados. O modelo de fibras proposto, em virtude das características já referidas, apresenta de forma mais adequada que outros modelos a restrição imposta pelas vigas e pilares à deformação das ligações.

Neste capítulo, a uma primeira fase onde se apresenta a implementação e a validação com exemplos do modelo de ligação e do modelo de fibras, segue-se um estudo do efeito do comportamento das ligações viga-pilar sobre o comportamento de estruturas porticadas de betão armado submetidas a cargas gravíticas e laterais.

## 6.2. Implementação do modelo de ligação viga-pilar no EvalS

No Capítulo 5 foi proposto um modelo mecânico para ligações viga-pilar em pórticos de betão armado, Figura 5.10. Em seguida é apresentada a implementação no EvalS do elemento que materializa no este modelo.

A Figura 6.1(a) representa a numeração das componentes do modelo. A componente 9 (C9) representa a distorção por corte do núcleo da ligação e as componentes 1 a 8 (C1 a C8) representam o comportamento das amarrações das armaduras longitudinais das vigas e pilares.

Na Figura 6.1(b) está representado o sistema de coordenadas locais, apresentando três graus de liberdade por nó num total de 12 graus de liberdade, aos quais correspondem os deslocamentos nodais  $u_i$  e as forças nodais  $F_i$  representadas ( $i=1,\dots,12$ ).

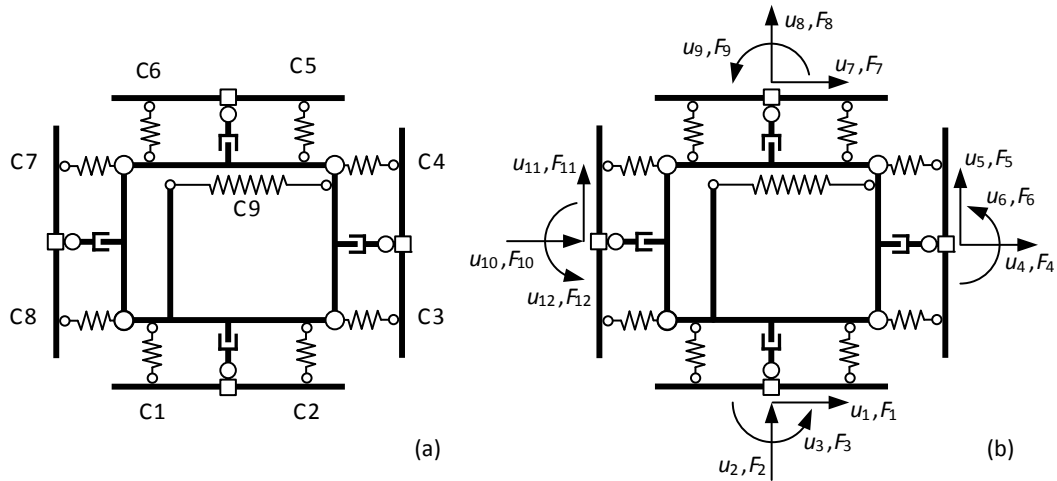


Figura 6.1 – Elemento de ligação viga-pilar, (a) numeração das componentes, (b) graus de liberdade e forças nodais.

### 6.2.1. Relações de equilíbrio e compatibilidade

Adoptando a nomenclatura estabelecida por Lowes, Mitra *et al.* [2004],  $\mathbf{u}$  é vector dos deslocamentos nodais,  $\mathbf{F}$  é o vector das forças nodais,  $\mathbf{f}$  é o vector dos esforços nas componentes e  $\mathbf{\Delta}$  é o vector das deformações nas componentes, ou seja,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \\ f_9 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_i \\ \dots \\ \Delta_9 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

O equilíbrio entre forças nodais e esforços nas componentes na configuração inicial é dado por

$$\mathbf{f} = \mathbf{B} \mathbf{F} \quad (6.2)$$

em que a matriz de equilíbrio  $\mathbf{B}$  é dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/z_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/z_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/z_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/z_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/z_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/z_c & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/z_b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/z_b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/z_b & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/z_b \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

A relação linearizada entre as deformações das componentes e os deslocamentos nodais é

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (6.4)$$

em que a matriz de compatibilidade  $\mathbf{A}$  é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 0 & -1 & \frac{z_c}{2} & 0 & -\frac{z_c - h_c}{2h_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_c + h_c}{2h_c} & 0 \\
 0 & -1 & -\frac{z_c}{2} & 0 & \frac{z_c + h_c}{2h_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{z_c - h_c}{2h_c} & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{z_b - h_b}{2h_c} & \frac{z_b}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_b - h_b}{2h_c} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{z_b - h_b}{2h_c} & -\frac{z_b}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{z_b - h_b}{2h_c} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{z_c + h_c}{2h_c} & 0 & 0 & 1 & \frac{z_c}{2} & 0 & \frac{z_c - h_c}{2h_c} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_c - h_c}{2h_c} & 0 & 0 & 1 & -\frac{z_c}{2} & 0 & -\frac{z_c + h_c}{2h_c} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{z_b - h_b}{2h_c} & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{z_b - h_b}{2h_c} & \frac{z_b}{2} \\
 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{z_b - h_b}{2h_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{z_b - h_b}{2h_c} & -\frac{z_b}{2} \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & h_b/h_c & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -h_b/h_c & 0
 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Os termos da matriz  $\mathbf{A}$  são calculados a partir dos modos de deformação unitários. Estes modos são determinados atribuindo sucessivamente um valor unitário ao deslocamento nodal segundo um grau de liberdade (dito activo) e o valor zero aos restantes. Este procedimento está exemplificado na Figura 6.2 para alguns modos de deformação unitários.

Nem sempre a determinação do modo de deformação unitário é trivial, em particular a atribuição do valor zero aos deslocamentos nodais segundo os graus de liberdade não activos. O procedimento aqui proposto consiste na correcção sucessiva de um modo inicial, que apresenta valores não nulos para alguns destes deslocamentos nodais, sobrepondo-lhe sucessivamente modos simples de modo a anulá-los. A Figura 6.3 exemplifica a aplicação deste procedimento para determinar o modo de deformação unitário associado ao grau de liberdade 5 ( $u_5$ ) apresentado na Figura 6.2(d).

### 6.2.2. Matriz de rigidez do elemento ligação viga-pilar

A relação constitutiva incremental das componentes do elemento de ligação viga-pilar é dada por

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{k} \dot{\Delta} \quad (6.6)$$

em que o ponto sobre os símbolos significa um incremento,  $\mathbf{k}$  é uma matriz quadrada diagonal de ordem 9 cujo elemento  $k_{ii}$  (ou, simplificadaamente,  $k_i$ ) é a rigidez tangente da componente  $i$ , ou seja

$$k_i = k_{ii} = \frac{df_i}{d\Delta_i} \quad \text{para } i=1, \dots, 9. \quad (6.7)$$

No domínio das pequenas deformações, a dualidade entre as relações de compatibilidade da cinemática e as relações de equilíbrio entre as forças nodais e os esforços nas componentes, permite afirmar que o vector das forças nodais é dado por

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{f}. \quad (6.8)$$

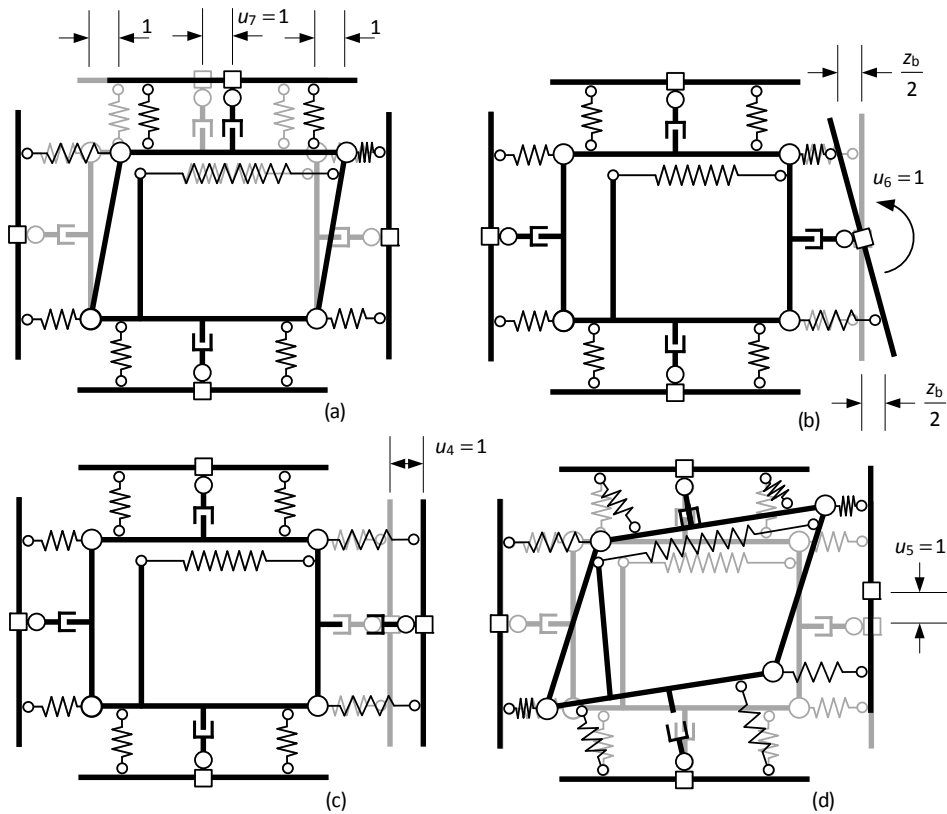


Figura 6.2 – Exemplos de modos de deformação unitários correspondentes aos graus de liberdade (a)  $u_7$ , (b)  $u_6$ , (c)  $u_4$  e (d)  $u_5$ .

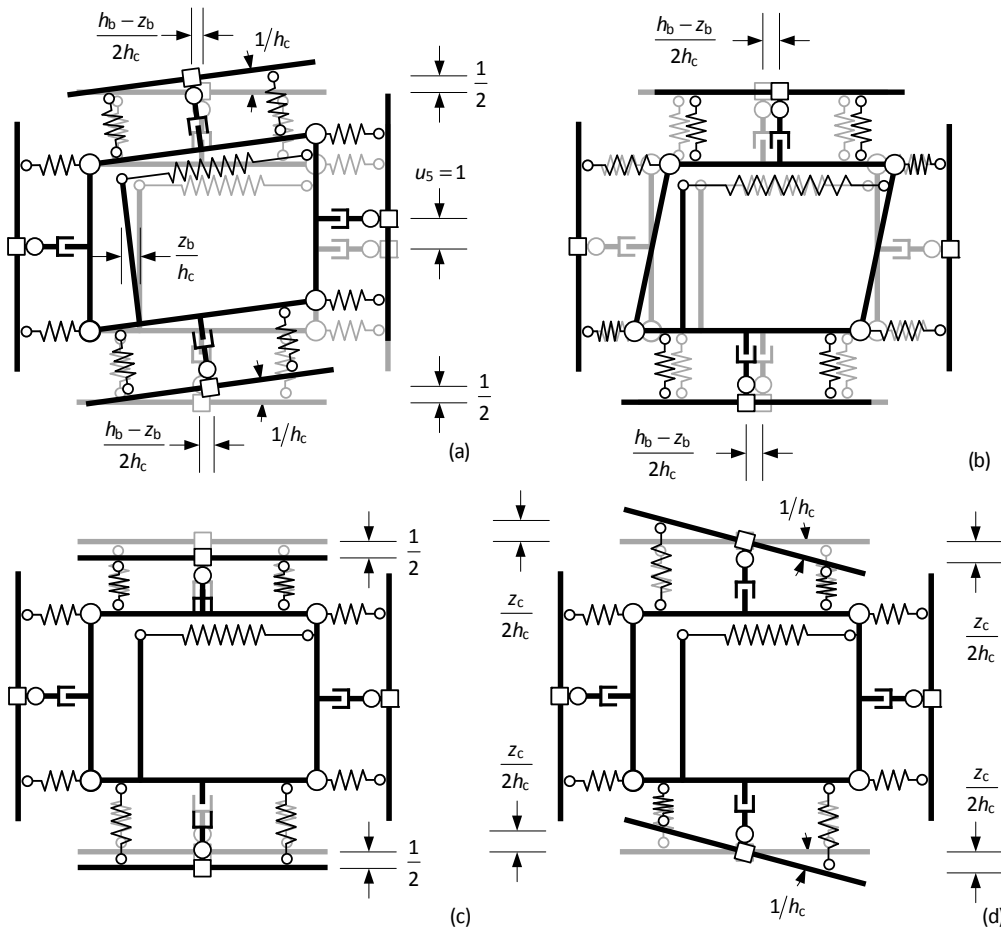


Figura 6.3 – Modo de deformação associado a  $u_5$ , (a) Modo inicial com  $u_5 = 1$  e  $u_4 = u_6 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = 0$ , modos correctivos para impor (b)  $u_1 = u_7 = 0$ , (c)  $u_2 = u_8 = 0$  e (d)  $u_3 = u_9 = 0$ .

Substituindo (6.4) e (6.6) em (6.8), obtém-se

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{A}^T \mathbf{k} \mathbf{A} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} \quad (6.9)$$

concluindo-se que a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  do elemento viga-pilar é dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{k} \mathbf{A} . \quad (6.10)$$

A matriz de rigidez (6.10) está definida no referencial local da ligação, sendo necessária a sua transformação para coordenadas globais. Seja  $\mathbf{T}_c^{JG}$  a matriz de transformação da ligação que converte as variáveis do referencial local para o referencial global. Passando a usar o índice  $(\cdot)^J$  para designar o referencial local e  $(\cdot)^G$  para designar o referencial global, ter-se-á

$$\mathbf{u}^G = \mathbf{T}_c^{JG} \mathbf{u}^J \quad (6.11)$$

$$\mathbf{F}^G = \mathbf{T}_c^{JG} \mathbf{F}^J . \quad (6.12)$$

A matriz de transformação  $\mathbf{T}_c^{JG}$  é uma matriz ortogonal diagonal por blocos dada por

$$\mathbf{T}_c^{JG} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_n \end{bmatrix} \text{ com } \mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

em que  $\theta$  é o ângulo, positivo no sentido directo, que o sistema de eixos local da ligação faz com o sistema de eixos globais. Multiplicando à esquerda ambos os membros da equação (6.9) por  $\mathbf{T}_c^{JG}$ , vem

$$\mathbf{T}_c^{JG} \dot{\mathbf{F}}^J = \mathbf{T}_c^{JG} \mathbf{K}^J \dot{\mathbf{u}}^J . \quad (6.14)$$

Sendo  $\mathbf{T}_c^{JG}$  ortogonal então  $(\mathbf{T}_c^{JG})^{-1} = (\mathbf{T}_c^{JG})^T$  e substituindo (6.11) e (6.12) em (6.14), obtém-se

$$\dot{\mathbf{F}}^G = \mathbf{T}_c^{JG} \mathbf{K}^J (\mathbf{T}_c^{JG})^T \dot{\mathbf{u}}^G = \mathbf{K}^G \dot{\mathbf{u}}^G \quad (6.15)$$

ou seja

$$\mathbf{K}^G = (\mathbf{T}_c^{JG})^T \mathbf{K}^J \mathbf{T}_c^{JG} . \quad (6.16)$$

### 6.2.3. Relação de equilíbrio na configuração deformada da ligação

Atendendo à grandeza das rotações e da dimensão das ligações viga-pilar, uma análise geometricamente linear deste elemento estrutural pode ser inadequada. Assim, foi desenvolvido um procedimento de análise geometricamente não linear para as ligações viga-pilar similar ao Método das Forças Laterais Equivalentes (análise  $P-\Delta$ , Reis e Camotim [2000], Wilson [1999]) usado na análise de estruturas reticuladas.

Considerando o equilíbrio de um elemento coluna-viga na configuração deformada, Figura 6.4(a), a conjugação do esforço axial (segundo a direcção inicial do eixo) com o deslocamento transversal (também à direcção inicial do eixo) relativo ao longo do seu eixo resulta numa variação do momento de primeira ordem, variação essa designada momento de segunda ordem.

Se numa peça prismática de eixo rectilíneo (parte de uma estrutura reticulada) não existirem forças de vão aplicadas com a direcção do eixo da peça, o esforço normal  $N$  nas extremidades é igual ( $F_3 = F_6 = N$ , Figura 6.4). Nestas condições, o momento destas forças em relação a um ponto arbitrário do plano é nulo se se considerar a configuração inicial da peça, mas valerá, em termos absolutos,  $|N\Delta|$ , se se considerar a configuração deformada, em que  $\Delta$  é o deslocamento relativo das secções de extremidade na direcção perpendicular à direcção inicial do eixo do elemento. Esta quantidade é um momento de segunda ordem.

Considere-se agora um problema auxiliar semelhante ao original mas em que ao carregamento aplicado à estrutura se adiciona um carregamento, dito equivalente, definido em cada barra por um par de forças transversais de sentido oposto e valor  $|N\Delta/L|$ , aplicadas nas suas extremidades e originando um binário que tende a impor uma rotação ao eixo da barra no sentido da sua corda quando a barra apresenta a deformação transversal  $\Delta$ . Este problema auxiliar goza da particularidade de apresentar equações de equilíbrio na configuração inicial idênticas às do problema original na configuração deformada. Este resultado oferece uma forma simples de resolver problemas em que os efeitos de segunda ordem são relevantes: a solução deste problema pode ser determinada com uma análise de “primeira ordem” se ao carregamento aplicado for adicionado o carregamento equivalente referido. Nesta abordagem há um pequeno senão: as forças equivalentes são definidas em função dos deslocamentos que são desconhecidos *a priori*. Uma forma de resolver esta dificuldade consiste em utilizar uma formulação iterativa, que se demonstra ser convergente em certas situações.

Assim, no método iterativo das forças transversais equivalentes, considera-se a configuração inicial da estrutura, mas adiciona-se às acções aplicadas, um conjunto de forças nodais transversais por elemento, ditas *forças nodais equivalentes* (FNE) e que constituem um carregamento equivalente, que simulam, na configuração inicial, o efeito da rotação da corda da coluna-viga.

De acordo com a explicação acima, as forças nodais equivalentes num elemento viga-coluna podem ser determinadas pela diferença entre as forças nodais dependentes que garantem o equilíbrio do elemento na configuração inicial e na configuração deformada. Considere-se para o efeito as forças nodais independentes representadas na Figura 6.4(b) e as forças nodais

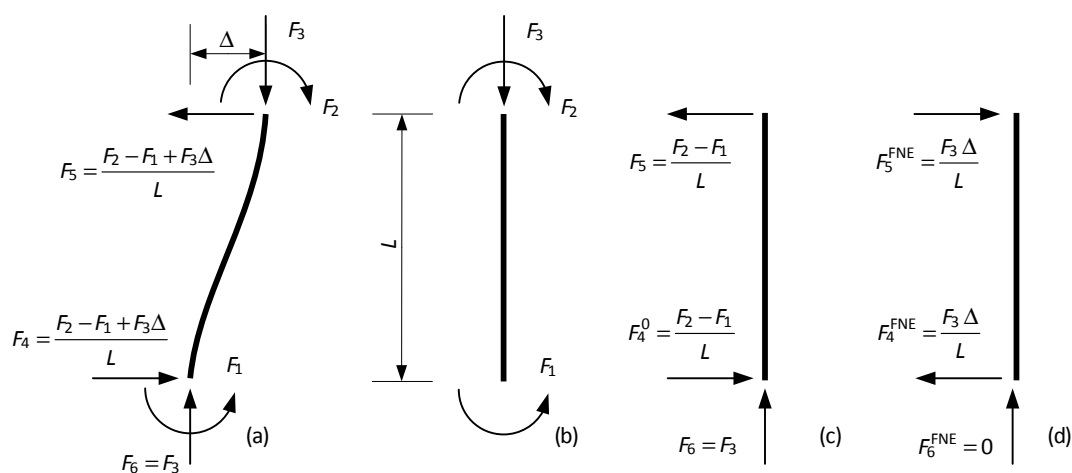


Figura 6.4 – Forças nodais equivalentes em elementos lineares, (a) equilíbrio das forças nodais na configuração deformada, (b) forças nodais independentes consideradas, (c) forças nodais dependentes obtidas por equilíbrio na configuração inicial e (d) carregamento equivalente.

dependentes correspondentes, obtidas por equilíbrio na configuração inicial, representadas na Figura 6.4(c). As FNE, representadas na Figura 6.4(d), correspondem ao simétrico da diferença entre as forças nodais dependentes obtidas por equilíbrio na configuração deformada (Figura 6.4(a)) e inicial (Figura 6.4(c)).

O carregamento equivalente constituído pelas forças representadas na Figura 6.4(d) – que em termos de equilíbrio global é estaticamente equivalente a um momento  $M^{2nd} = F_5^{FNE}L$  – adequa-se a elementos lineares na medida em que também aproxima razoavelmente bem a variação do campo de momentos flectores ao longo do próprio elemento, ou seja, em termos de equilíbrio local, garantindo pois uma satisfatória consideração da variação das deformações de flexão no elemento.

Para aplicar a mesma metodologia ao modelo de ligação viga-pilar definam-se como forças nodais dependentes as forças  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  (Figura 6.1(b)). Calculando a diferença entre as forças nodais  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  que garantem o equilíbrio estático da ligação numa configuração deformada arbitrária e na configuração inicial, para um conjunto de forças nodais independentes  $F_i$  com  $i = 4, \dots, 12$ , obtém-se  $F_1 = F_2 = 0$  e

$$M^{2nd} = F_3^{FNE} = -F_8(u_7 - u_1) - F_5(u_4 - u_1) - F_{11}(u_{10} - u_1) + F_4(u_5 - u_2) + F_{10}(u_{11} - u_2) + F_7(u_8 - u_2). \quad (6.17)$$

No entanto, a introdução deste momento adicional no modelo ligação viga-pilar por intermédio da força nodal  $F_3$  não é adequada. De facto, recorde-se que em elementos lineares o sistema de forças equivalentes escolhido para simular a variação de esforços de segunda ordem é um binário a que corresponde uma variação do campo de momentos flectores ao longo do elemento que aproxima razoavelmente a variação do campo de momentos flectores de segunda ordem e, conseqüentemente, as correspondentes deformações de flexão. De forma semelhante, no elemento de ligação viga-pilar o sistema de forças equivalente utilizado para modelar a variação de esforços de segunda ordem deverá proporcionar uma variação dos esforços no interior do elemento, ou seja, do esforço na componente C9, semelhante à produzida pelos esforços de segunda ordem.

Escrevendo as condições de equilíbrio na ligação representada na Figura 6.1, para uma configuração deformada arbitrária, conclui-se que o esforço na componente C9 é

$$f_9 = f_9^{1st} + f_9^{2nd} = -\underbrace{\frac{F_6 + F_{12}}{z_b} + \frac{F_4 + F_{10}}{2} + F_7 + F_{11}}_{f_9^{1st}} \underbrace{\frac{u_1 - u_{10}}{z_b} + \frac{u_1 - u_4}{z_b}}_{f_9^{2nd}} + F_8 \theta_b \quad (6.18)$$

em que as rotações das arestas horizontais ( $\theta_c$ ) e verticais ( $\theta_b$ ) do modelo de ligação são

$$\theta_b = \frac{(u_1 - u_7) - \theta_c(h_b - z_b)}{z_b} \quad \text{e} \quad \theta_c = \frac{u_5 - u_{11}}{h_c}. \quad (6.19)$$

Escolhendo para forças nodais equivalentes no elemento de ligação viga-pilar as forças aplicadas segundo as coordenadas 1, 5, 7 e 11 (Figura 6.5), estas podem ser determinadas resolvendo o sistema de equações formado pelas seguintes condições:

- (i) o acréscimo do esforço na C9 associado às forças equivalentes (configuração inicial)



corresponde a  $f_9^{2nd}$  – recorde-se que  $f_9^{2nd}$  (expressão (6.18)) é a variação de esforço na componente C9 associada aos efeitos de segunda ordem, determinada numa análise considerando a configuração deformada da ligação; de acordo com a expressão (6.18), numa análise estática linear de primeira ordem o esforço na C9 ( $f_9^{1st}$ ) pode ser definido exclusivamente em função das forças nodais  $F_4$ ,  $F_6$ ,  $F_7$ ,  $F_{10}$  e  $F_{12}$ , no entanto, como foram apenas consideradas forças equivalentes segundo as coordenadas 1, 5, 7 e 11, vem

$$f_9^{2nd} = -\frac{F_6^{FNE} + F_{12}^{FNE}}{z_b} + \frac{F_4^{FNE} + F_{10}^{FNE}}{2} + F_7^{FNE} = F_7^{FNE}; \quad (6.20)$$

(ii) o momento associado às forças nodais equivalentes tem que ser igual ao momento adicional dado pela expressão (6.17), ou seja

$$F_7^{FNE} h_b + F_{11}^{FNE} h_c = M^{2nd}; \quad (6.21)$$

(iii) como os efeitos globais de segunda ordem apenas se traduzem num momento, as forças nodais equivalentes devem estar em equilíbrio estático tanto na direcção horizontal como vertical, ou seja

$$F_1^{FNE} + F_7^{FNE} = 0, \quad F_5^{FNE} + F_{11}^{FNE} = 0. \quad (6.22)$$

Daqui resulta que as forças nodais equivalentes a considerar no elemento viga-pilar são  $F_i^{FNE} = 0$  para  $i = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12$  e

$$\begin{aligned} F_7^{FNE} &= -\frac{F_5}{z_b}(u_4 - u_1) - \frac{F_{11}}{z_b}(u_{10} - u_1) - \frac{F_8}{z_b} \left( (u_7 - u_1) - \frac{h_b - z_b}{h_c}(u_{11} - u_5) \right), \\ F_5^{FNE} &= \frac{1}{h_c} \left[ -F_4(u_5 - u_2) - F_{10}(u_{11} - u_2) - F_7(u_8 - u_2) + \right. \\ &\left. + F_5 \frac{h_b - z_b}{z_b}(u_4 - u_1) + F_{11} \frac{h_b - z_b}{z_b}(u_{10} - u_1) + F_8 \frac{z_b - h_b}{z_b} \left( (u_7 - u_1) - \frac{h_b}{h_c}(u_{11} - u_5) \right) \right], \\ F_{11}^{FNE} &= -F_5^{FNE} \quad \text{e} \quad F_1^{FNE} = -F_7^{FNE}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Apresentam-se em seguida alguns exemplos que visam validar o procedimento proposto.

Considere-se como Exemplo 1 a estrutura representada na Figura 6.6(a) (simplicadamente não foram representadas as componentes C1 a C8) sob o efeito das cargas  $F_8 = -P$ ,  $F_7 = H$  e  $F_i = 0$  para  $i = 1, \dots, 6, 9, \dots, 12$ . Admita-se que os deslocamentos nodais apresentam os

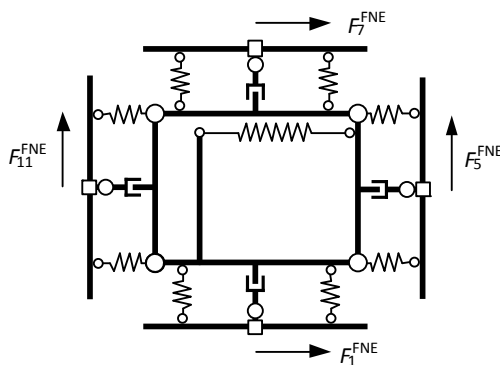


Figura 6.5 – Forças nodais equivalentes em ligações viga-pilar.

seguintes valores:  $u_7 = u_h$ ,  $u_8 = -u_v$ ,  $u_4 = u_{10} = u_h/2$ ,  $u_6 = u_{12} = -u_h/z_b$  e  $u_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 5, 9, 11$ .

Na Figura 6.6(b) estão representadas a cinzento as FNE, determinadas por (6.23), correspondentes à situação representada na Figura 6.6(a). Tanto as reacções de apoio como o esforço na componente C9, dado por

$$f_9 = H + \frac{P u_h}{z_b} \quad (6.24)$$

são iguais para as duas situações representadas na Figura 6.6.

Para o Exemplo 2 considere-se a estrutura representada na Figura 6.7(a) sob o efeito das cargas  $F_5 = -P$ ,  $F_4 = H$  e  $F_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 6, \dots, 12$ . Admita-se que os deslocamentos nodais apresentam os seguintes valores:  $u_7 = u_h$ ,  $u_4 = u_{10} = u_h/2$ ,  $u_5 = u_8 = u_{11} = -u_v$ ,  $u_6 = u_{12} = -u_h/z_b$  e  $u_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 9$ .

Na Figura 6.7(b) estão representadas a cinzento as FNE, determinadas por (6.23), correspondentes à situação representada na Figura 6.7(a). Tanto as reacções de apoio como o esforço na componente C9, dado por

$$f_9 = \frac{P(h_c + u_h) + H(h_b - 2u_v)}{2} \quad (6.25)$$

são iguais para as duas situações representadas na Figura 6.7.

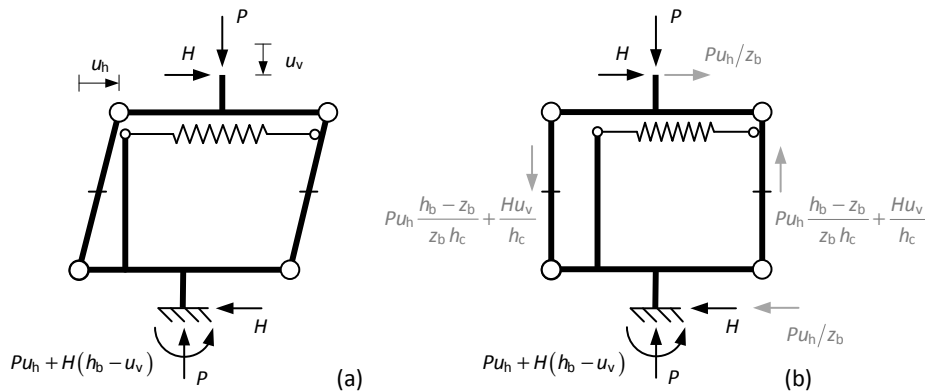


Figura 6.6 – Exemplo 1, (a) equilíbrio na configuração deformada, (b) equilíbrio na configuração indeformada com forças nodais equivalentes.

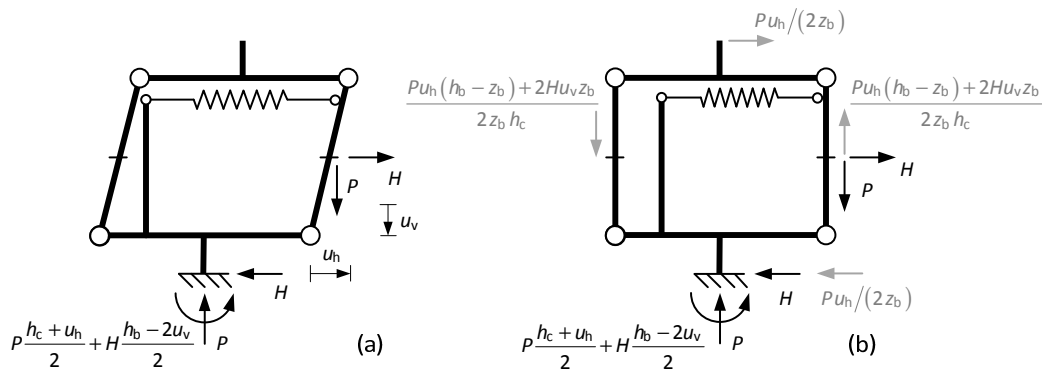


Figura 6.7 – Exemplo 2, (a) equilíbrio na configuração deformada, (b) equilíbrio na configuração indeformada com forças nodais equivalentes.

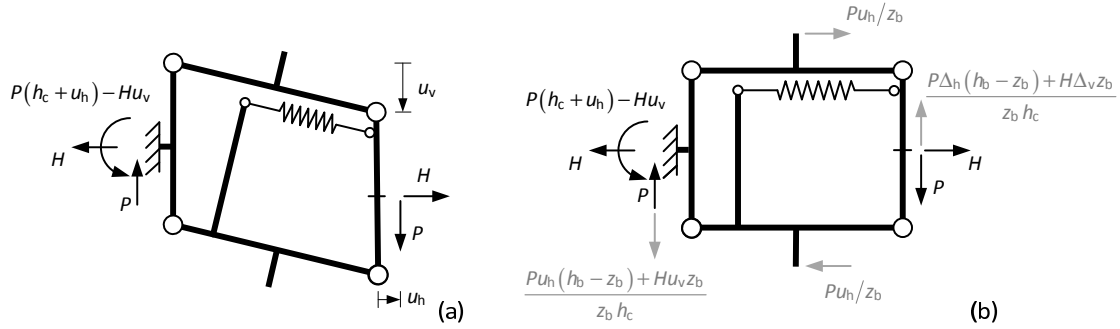


Figura 6.8 – Exemplo 3, (a) equilíbrio na configuração deformada, (b) equilíbrio na configuração indeformada com forças nodais equivalentes.

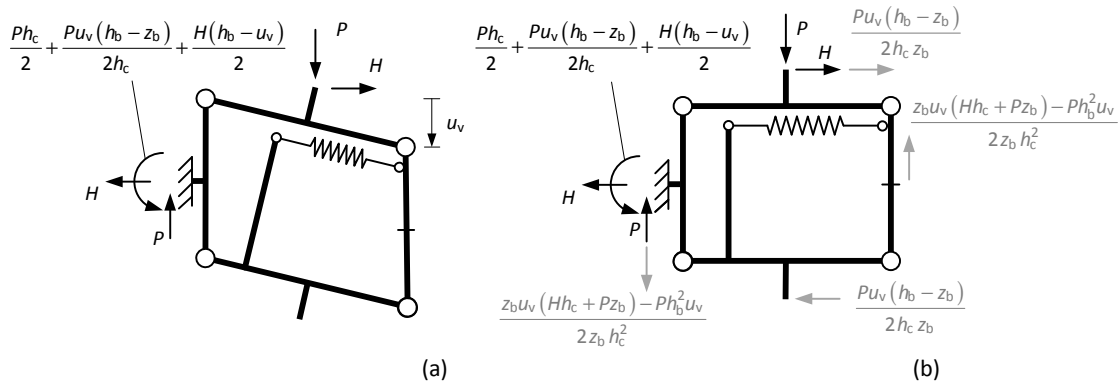


Figura 6.9 – Exemplo 4, (a) equilíbrio na configuração deformada, (b) equilíbrio na configuração indeformada com forças nodais equivalentes.

Para o Exemplo 3 considere-se a estrutura representada na Figura 6.8(a) sob o efeito das cargas  $F_5 = -P$ ,  $F_4 = H$  e  $F_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3, 6, \dots, 12$ . Admita-se que os deslocamentos nodais apresentam os seguintes valores:  $u_1 = -u_7 = -u_v(h_b - z_b)/(2h_c)$ ,  $u_2 = u_8 = u_5/2 = -u_v/2$ ,  $u_3 = u_9 = -u_v/h_c$ ,  $u_4 = -u_h$  e  $u_i = 0$  para  $i = 10, 11, 12$ .

Na Figura 6.8(b) estão representadas a cinzento as FNE, determinadas por (6.23), correspondentes à situação representada na Figura 6.8(a). Tanto as reacções de apoio como o esforço na componente C9, dado por

$$f_9 = \frac{Hu_v}{z_b} - \frac{P(h_c - 2u_h + u_v)}{2z_b} \quad (6.26)$$

são iguais para as duas situações representadas na Figura 6.8.

Como último exemplo (Exemplo 4), considere-se a estrutura representada na Figura 6.9(a) sob o efeito das cargas  $F_8 = -P$ ,  $F_7 = H$  e  $F_i = 0$  para  $i = 1, \dots, 6, 9, \dots, 12$ . Admita-se que os deslocamentos nodais apresentam os seguintes valores:  $u_1 = -u_7 = -u_v(h_b - z_b)/(2h_c)$ ,  $u_2 = u_8 = u_5/2 = -u_v/2$ ,  $u_3 = u_9 = -u_v/h_c$ , e  $u_i = 0$  para  $i = 4, 10, 11, 12$ .

Na Figura 6.9(b) estão representadas a cinzento as FNE, determinadas por (6.23), correspondentes à situação representada na Figura 6.9(a). Tanto as reacções de apoio como o esforço na componente C9, dado por

$$f_9 = \frac{Hh_c(z_b - h_b + u_v) - P(h_c^2 + 2(h_b - z_b)u_v)}{2h_c z_b} \quad (6.27)$$

são iguais para as duas situações representadas na Figura 6.9.

Os exemplos anteriores demonstram que o procedimento proposto permite ter em consideração a configuração deformada da ligação (assumindo pequenas deformações) efectuando a análise na configuração inicial e simulando o efeito da configuração deformada por efeito de forças adicionais recorrendo a um processo análogo ao método  $P-\Delta$ .

#### 6.2.4. Interface gráfico do EvalS para ligações viga-pilar

A forma como foi efectuada a implementação dos elementos de ligação viga-pilar e o desenvolvimento do interface gráfico do EvalS visou uma modelação intuitiva e sistemática das estruturas. Para a entrada de dados relativos a ligações viga-pilar foram implementados dois procedimentos alternativos no EvalS: (i) por edição dos ficheiros de dados Excel (Microsoft Corporation [2010]) e (ii) através de janelas dedicadas desenvolvidas para o efeito. No texto que se segue apenas serão referidos os aspectos do interface gráfico do EvalS relevantes para a modelação de ligações viga-pilar.

Na Figura 6.10 está representado a janela principal do EvalS onde, para além da geometria da estrutura, é possível visualizar as acções consideradas bem como os resultados da análise.

Por forma a sistematizar a caracterização das ligações viga-pilar, foi necessário definir uma biblioteca de componentes tipo. Estas componentes serão posteriormente usadas para definir a biblioteca de ligações viga-pilar tipo que serão incorporadas na estrutura. Este procedimento permite tornar a modelação estrutural mais expedita na medida em que a mesma componente tipo pode ser usada em diversas ligações viga-pilar tipo e a mesma ligação viga-pilar tipo pode ser usada para modelar diversas ligações viga-pilar do modelo.

A janela para definição das componentes tipo e das ligações viga-pilar tipo é acedido a partir do menu principal do EvalS recorrendo ao comando *Connections* do menu *Define*, Figura 6.11.

Para cada componente tipo, esta janela permite definir a rigidez inicial das componentes

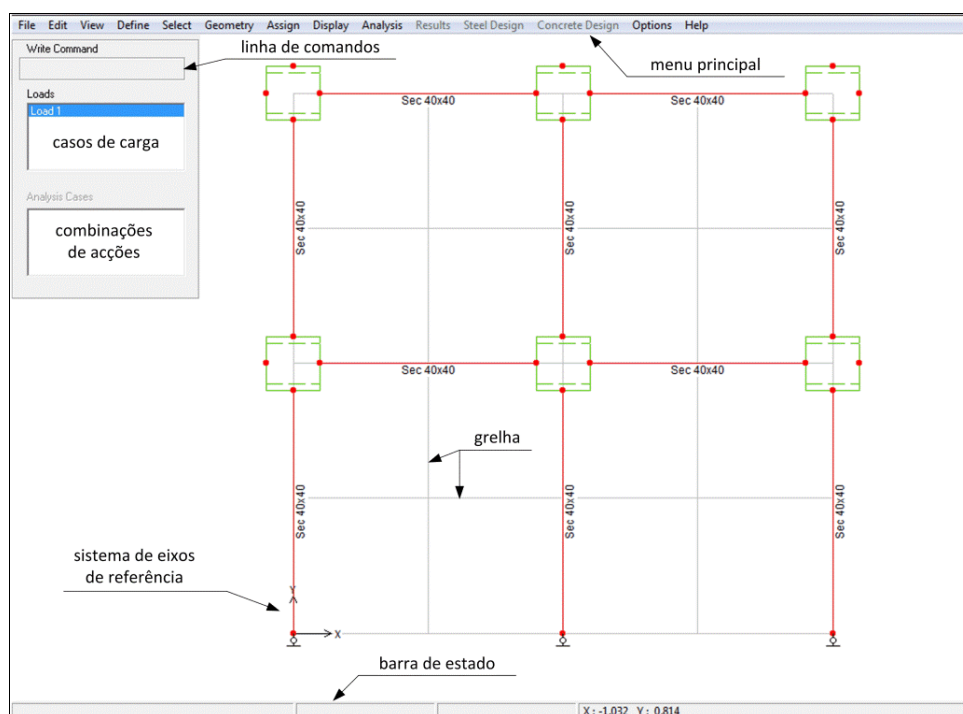


Figura 6.10 – Janela principal do EvalS.

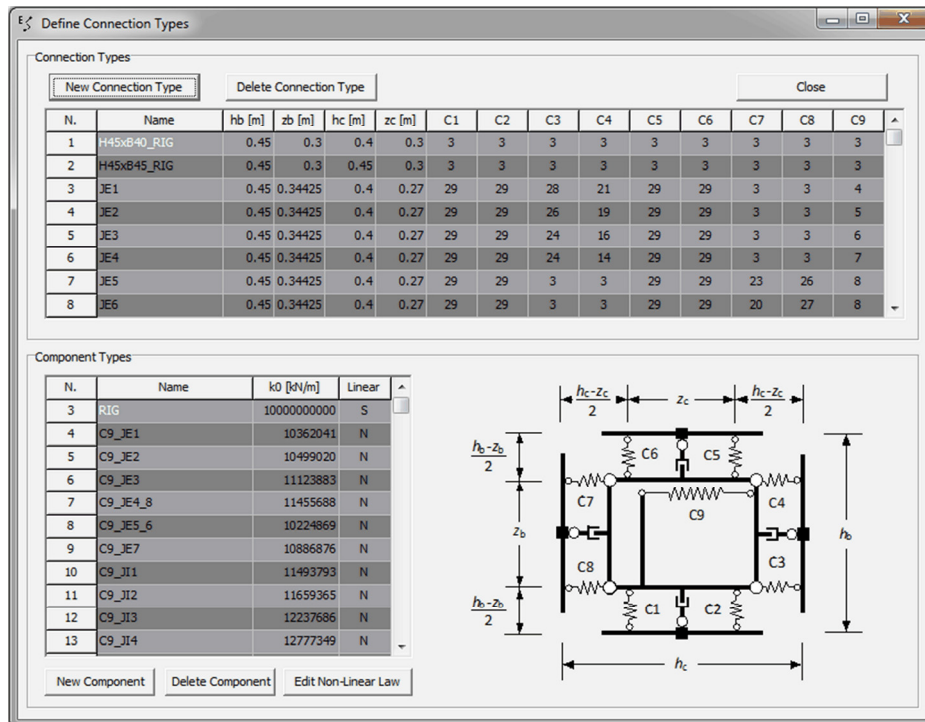


Figura 6.11 – Janela para definição da biblioteca de componentes tipo e de ligações viga-pilar tipo.

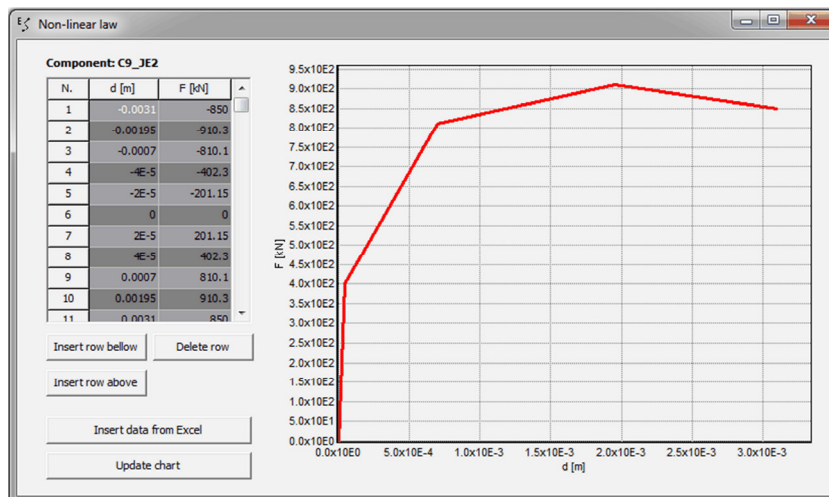


Figura 6.12 – Janela para definição da lei de comportamento não linear de cada componente tipo.

da ligação, suficiente para a análise elástica linear, bem como aceder à janela onde se caracterizam relações constitutivas mais gerais das componentes, necessárias para a análise não linear, Figura 6.12.

A janela representada na Figura 6.11 permite ainda definir para cada ligação viga-pilar tipo a geometria a considerar bem como qual o comportamento (componente tipo) a atribuir a cada componente – é usado o número de série de cada componente (*tag*) para a identificar univocamente.

A definição das ligações viga-pilar no modelo numérico pode ser efectuada recorrendo ao comando *Draw Connection* do menu *Geometry* do menu principal do EvalS ou editando directamente na linha de comandos o comando *CON*. Ambos os procedimentos activam a janela representada na Figura 6.13, onde é possível escolher uma ligação viga-pilar tipo armazenada na biblioteca e o ângulo que as faces da ligação fazem com os eixos de referência.

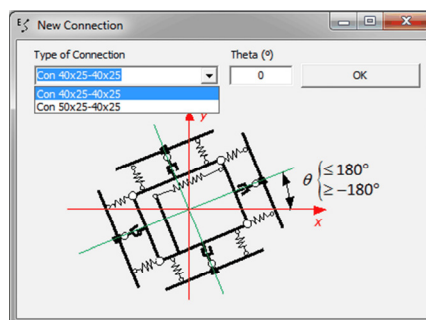


Figura 6.13 – Janela para selecção da tipologia de ligação viga-pilar e do ângulo dos seus lados com o sistema de eixos de referência da estrutura.

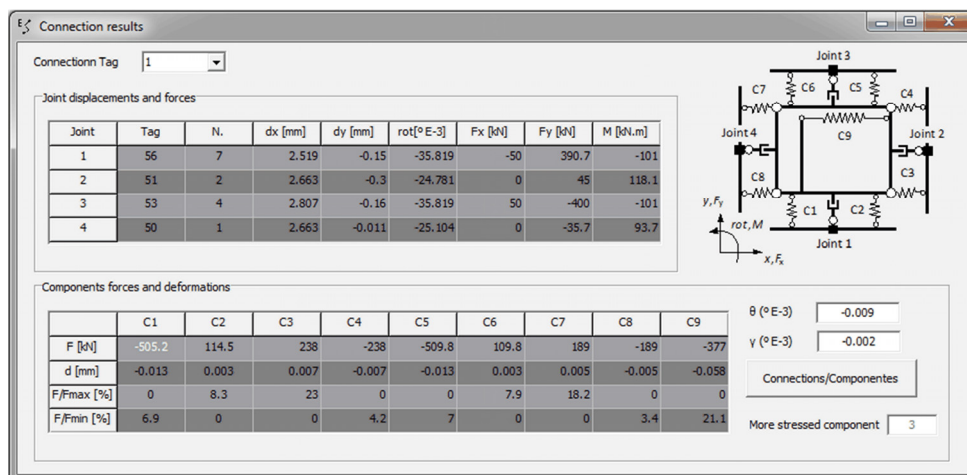


Figura 6.14 – Visualização dos esforços na ligação viga-pilar e nas componentes.

Finalmente a incorporação da ligação viga-pilar seleccionada no modelo é efectuada indicando com o apontador o centro da ligação viga-pilar. Este procedimento cria a ligação e 0 a 4 nós, consoante já existam ou não nós no lugar geométrico correspondente aos pontos centrais dos bordos da ligação viga-pilar.

A Figura 6.10 exemplifica a representação gráfica de algumas tipologias de ligações viga-pilar bem como os eixos das vigas e pilares. Por uma questão de simplicidade optou-se por representar apenas a periferia da ligação viga-pilar e a direcção em que  $V_{jh}$  (esforço na componente C9) é considerada em cada ligação viga-pilar (direcção das linhas a tracejado).

Após a análise estrutural, os esforços na ligação, tanto nas suas componentes como na interface com as peças lineares, podem ser apresentados em Excel ou graficamente numa janela do EvalS, chamada através da opção *Connection* do Menu *Results* do menu principal do EvalS, Figura 6.14.

### 6.3. Modelo seccional de fibras para elementos lineares – implementação no EvalS

Uma correcta avaliação da influência do comportamento das ligações viga-pilar no comportamento de estruturas porticadas de betão armado exige uma modelação rigorosa não só das ligações viga-pilar mas também dos elementos viga/pilar.

A modelação rigorosa do comportamento dos elementos lineares torna-se ainda mais importante caso se pretenda contabilizar os efeitos de segunda ordem. De acordo com Westerberg [2004], dos métodos propostos na NP EN 1992-1-1 (IPQ [2010a]) para efectuar

uma análise de segunda ordem, o denominado *Método Geral* é o mais rigoroso.

O Método Geral (§5.8.6 da NP EN 1992-1-1) é um método de análise não linear material de segunda ordem que se baseia no pressuposto da (i) distribuição linear de extensões axiais na secção transversal e na (ii) utilização das relações tensão-extensão dos §§ 3.1.5 e 3.2.3 da NP EN 1992-1-1 para o betão e para o aço, respectivamente, ou equivalentes. De acordo com Westerberg [2004], no âmbito da aplicação do Método Geral, (i) o efeito do *tension stiffening* pode ser modelado modificando a relação constitutiva do betão em tracção ou das armaduras e (ii) o efeito da fluência pode ser modelado de forma simplificada multiplicando as extensões axiais no betão por um factor  $(1 + \varphi_{ef})$  em que  $\varphi_{ef}$  é um coeficiente de fluência efectivo.

Para efectuar a análise não linear de estruturas porticadas de betão armado foi desenvolvido e implementado no EvalS (Ferreira [2011]) um modelo seccional de fibras para estabelecer o comportamento de elementos de betão armado, de acordo com os princípios anteriores. Nesta secção é apresentado o modelo seccional de fibras implementado e a integração deste modelo para a modelação do comportamento de elementos viga-pilar com não linearidade distribuída no âmbito do MFF.

### 6.3.1. Modelo de fibras

Os denominados modelos de fibras ou modelos de camadas são modelos desenvolvidos para a análise não linear de secções de elementos viga-coluna e que potenciam a consideração da não linearidade distribuída nestes elementos (Taucer, Spacone *et al.* [1991], Guedes [1997], Iturribizia [2007]). São modelos que apresentam um bom compromisso entre simplicidade e rigor na medida em que, ao invés de adoptar leis globais caracterizadoras do comportamento compósito da secção transversal e/ou do elemento coluna-viga completo (definidas numa fase prévia à análise estrutural), permitem incorporar em tempo real na análise global da estrutura a pormenorização ao nível da secção transversal (bem como a sua variação de troço para troço) e a interacção entre esforços e extensões generalizadas, nomeadamente entre esforço axial, momento flector, extensão axial e curvatura.

A ideia basilar dos modelos seccionais de fibras/camadas é decompor a secção transversal dos elementos coluna-viga em subdomínios de forma geométrica simples cujo material constituinte se possa considerar homogéneo em termos de relações constitutivas. A cada subdomínio é associada uma ou mais fibras longitudinais, em que cada fibra é caracterizada (i) pelas coordenadas do seu centro geométrico na secção transversal, (ii) pela sua área de influência e (iii) pela relação constitutiva do material do subdomínio em que está inserida.

Os esforços na secção transversal são determinados pela resultante dos esforços axiais nas fibras, sendo o esforço axial na secção em cada fibra dado pelo produto da tensão axial na fibra pela sua área de influência.

Neste estudo adoptou-se um único ponto de amostragem (uma fibra) por subdomínio, mais especificamente com as coordenadas do centro geométrico do subdomínio. A secção transversal é particionada decompondo a secção de betão em subdomínios correspondentes a camadas paralelas ao eixo de flexão e fazendo corresponder a cada armadura ou agrupamento de armadura também um subdomínio. A área de influência das fibras de betão inclui a área

dos subdomínios correspondentes às armaduras e agrupamentos de armaduras envolvidas pelo betão. O erro associado a esta área adicional é irrelevante.

### 6.3.1.1. Propriedades geométricas da secção transversal

O procedimento implementado para determinar as propriedades geométricas da secção transversal baseia-se no *Teorema de Green*. Este teorema relaciona o integral duplo numa região da secção transversal com o integral de linha ao longo da curva fechada correspondente à sua fronteira, e desta forma facilita a determinação das propriedades geométricas da secção transversal tais como a área, momento estático e momento de inércia (Miles e Tough [1983], Al-Gahtani [2005]).

O Teorema de Green é estritamente aplicável a secções cheias (formas simplesmente conexas). As secções vazadas definem formas não simplesmente conexas, e consequentemente a sua fronteira é decomponível em fronteira exterior e interior (Wrede e Spiegel [2010]). No entanto pode-se estender a aplicação do procedimento baseado na aplicação do Teorema de Green a formas correspondentes a secções vazadas, bastando para tal substituí-las por formas simplesmente conexas equivalentes, ou seja formas delimitadas por uma cadeia poligonal fechada. Para tal, é suficiente adicionar, por cada fronteira interior, um par de arestas fictícias e coincidentes que a conecte à fronteira exterior, de acordo com o representado na Figura 6.15(a). A forma assim obtida já é simplesmente conexa (Wrede e Spiegel [2010]).

Considere-se um referencial ortonormado directo  $(x, y)$  no plano da posição inicial da secção transversal de um elemento linear de betão armado composta por  $m$  formas poligonais cheias e/ou vazadas. A aplicação do Teorema de Green à determinação das propriedades geométricas desta secção transversal tem uma interpretação geométrica simples que se passa a apresentar.

As propriedades geométricas de cada forma poligonal podem ser determinados recorrendo a um conjunto de trapézios auxiliares gerados a partir dos lados da fronteira do polígono. Cada trapézio é formado por um dos lados desse polígono e pela respectiva projecção ortogonal sobre um dos eixos do referencial. Na Figura 6.15(b) está representado o trapézio constituído pelo lado definido pelos vértices 7 e 8 (lado 7) da forma poligonal e a projecção desse lado sobre o eixo  $y$  do referencial (região com preenchimento a cinzento mais escuro) e o trapézio constituído pelo mesmo lado da forma poligonal a projecção desse lado sobre o eixo  $x$  do referencial (região com preenchimento a cinzento mais claro).

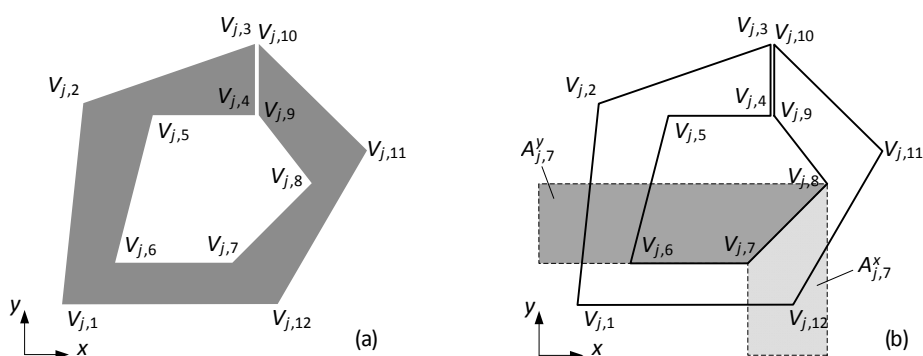


Figura 6.15 – Forma poligonal  $j$  vazada, (a) numeração dos vértices, (b) trapézios auxiliares.



Para efeitos de clarificação de nomenclatura,  $Z_{j,i}^x$  é relativo à propriedade Z de um trapézio formado pelo lado  $i$  da fronteira da forma  $j$  e pela respectiva projecção sobre o eixo  $x$  enquanto  $Z_{j,i}^y$  é relativo à propriedade Z de um trapézio formado pelo lado  $i$  da forma  $j$  e pela respectiva projecção sobre o eixo  $y$ .

Numa forma poligonal com fronteira definida por  $nvf$  vértices, estes são ordenados de 1 até  $nvf$ , de modo a que a forma fique sempre á direita de um observador que percorra a fronteira no sentido da ordenação Figura 6.15(a). Designa-se por aresta  $i$  a que liga os vértices  $i$  e  $\text{mod}(i, nvf) + 1$ .

Seja uma secção constituída por  $m$  formas poligonais e seja  $n$  o número de vértices que constitui a fronteira de cada forma. Aplicando o procedimento descrito, a área da secção transversal é calculada recorrendo à expressão

$$A = \sum_{j=1}^m A_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n A_{j,i} \quad (6.28)$$

em que  $A_{j,i}$  é calculado recorrendo a

$$A_{j,i}^x = \frac{y_{j,i+1} + y_{j,i}}{2} (x_{j,i+1} - x_{j,i}) \quad \text{ou} \quad A_{j,i}^y = \frac{x_{j,i+1} + x_{j,i}}{2} (y_{j,i} - y_{j,i+1}) \quad (6.29)$$

O momento estático de cada trapézio em relação ao eixo sobre o qual o lado do trapézio é projectado, é determinado recorrendo às expressões

$$S_{x,j,i}^x = \frac{1}{6} (x_{j,i+1} - x_{j,i}) (y_{j,i+1}^2 + y_{j,i+1}y_{j,i} + y_{j,i}^2) \quad (6.30)$$

e

$$S_{y,j,i}^y = \frac{1}{6} (y_{j,i} - y_{j,i+1}) (x_{j,i+1}^2 + x_{j,i+1}x_{j,i} + x_{j,i}^2) \quad (6.31)$$

e o centro geométrico da secção transversal é calculado recorrendo às expressões

$$x_{CG} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n S_{y,j,i}^y \quad \text{e} \quad y_{CG} = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n S_{x,j,i}^x \quad (6.32)$$

O momento de inércia de cada trapézio em relação ao eixo sobre o qual o lado do trapézio é projectado, é determinado pelas expressões

$$I_{x,j,i}^x = \frac{1}{12} (x_{j,i+1} - x_{j,i}) (y_{j,i+1} + y_{j,i}) (y_{j,i+1}^2 - y_{j,i}^2) \quad (6.33)$$

e

$$I_{y,j,i}^y = \frac{1}{12} (y_{j,i} - y_{j,i+1}) (x_{j,i+1} + x_{j,i}) (x_{j,i+1}^2 - x_{j,i}^2) \quad (6.34)$$

Os momentos de inércia da secção transversal relativamente aos eixos que passam pelo seu centro de geométrico e são paralelos ao sistema de eixos  $(x, y)$  são calculados recorrendo às expressões

$$I_x = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n I_{x,j,i}^x - A y_{CG}^2 \quad \text{e} \quad I_y = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n I_{y,j,i}^y - A x_{CG}^2 \quad (6.35)$$

Se a fronteira da secção apresentar troços curvilíneos, o procedimento exposto continua válido, ainda que de forma aproximada, substituindo os troços curvilíneos por segmentos de recta. Note-se no entanto que, de acordo com Al-Gahtani [2005], são facilmente dedutíveis expressões analíticas exactas para tratar o caso de fronteiras polinomiais.

### 6.3.1.2. Cálculo dos esforços na secção recorrendo ao modelo de fibras

A análise de uma estrutura reticulada recorrendo ao modelo de fibras pressupõe a definição de uma partição em segmentos lineares prismáticos com secção transversal constante. A cada segmento é atribuída uma secção genérica à qual se associa um referencial ortonormado directo  $(x, y)$  local com origem no centro geométrico da secção transversal do elemento, em que o eixo  $x$  coincide com a direcção e sentido do momento flector positivo na secção.

Numa primeira fase, a secção transversal é dividida em subdomínios rectangulares de espessura constante (dimensão na direcção  $y$ ) e largura  $b_{LM}$  da linha média da camada (dimensão na direcção  $x$ ) ignorando-se as armaduras (Figura 6.16(b)). Posteriormente, a cada subdomínio e a cada armadura, ou agrupamento de armaduras, é associada uma fibra referenciada pelas coordenadas do respectivo centro geométrico (Figura 6.16(c)).

A partição da secção de betão em camadas em vez de subdomínios quadrados ou triangulares reduz o número de fibras a considerar na análise. Esta abordagem só é possível no estudo de estruturas porticadas planas, constituídas por elementos com secção transversal simétrica, sujeitas a carregamento segundo o plano definido pelos eixos dos elementos. Nestes casos a tensão axial num dado ponto da secção é independente da coordenada  $x$ . Com este procedimento, é possível modelar o confinamento transversal do núcleo da secção transversal de betão dividindo a secção de betão em duas formas, ou mais no caso de geometrias complexas, às quais se associarão dois materiais distintos: betão confinado e betão não confinado.

O procedimento para determinar  $b_{LM}$  é: (i) identificar quais as arestas da forma poligonal intersectadas pela recta  $y = y_{LM}$ , (ii) determinar os respectivos pontos de intersecção, em número par  $k$ , (iii) ordenar os pontos de intersecção por ordem de coordenadas  $x$  crescentes  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ , e (iv) aplicar a expressão

$$b_{LM} = \sum_{i=1}^{k/2} (x_{2i} - x_{2i-1}). \quad (6.36)$$

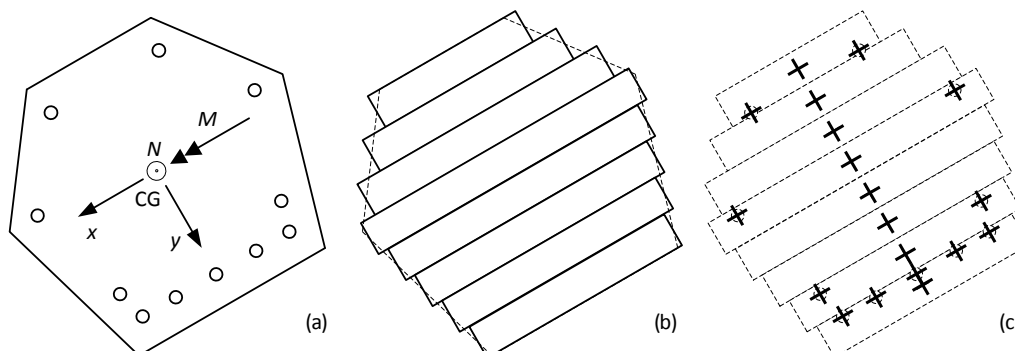


Figura 6.16 – Discretização da secção transversal, (a) secção transversal original e o sentido positivo dos esforços, (b) decomposição em subdomínios, (c) fibras referenciadas pelo centro geométrico do subdomínio.

Os esforços na secção transversal são definidos em relação ao seu centro geométrico, ao qual corresponde a extensão axial  $\varepsilon_0$ . Assim, a extensão normal à secção transversal num ponto arbitrário desta secção, de acordo com a hipótese de Euler-Bernoulli, é dada por

$$\varepsilon[y, \chi, \varepsilon_0] = \varepsilon_0 + \chi y \quad (6.37)$$

sendo  $\chi$  a curvatura.

Os esforços numa secção transversal genérica, para o par de deformações  $(\chi, \varepsilon_0)$ , são calculados por equilíbrio, com as expressões

$$M = f_1[\chi, \varepsilon_0] = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\sigma_c y_c A_c)_{j,i} + \sum_{i=1}^p (\sigma_s y_s A_s)_i \quad (6.38)$$

e

$$N = f_2[\chi, \varepsilon_0] = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\sigma_c A_c)_{j,i} + \sum_{i=1}^p (\sigma_s A_s)_i \quad (6.39)$$

em que  $M$  é o momento flector,  $N$  é o esforço axial,  $p$  é o número de varões (e/ou agrupamentos de varões),  $A_c$  é a área do subdomínio de betão,  $A_s$  é a área da secção transversal do varão (e/ou agrupamento de varões),  $\sigma_c$  é a tensão normal no centro geométrico do subdomínio de betão,  $\sigma_s$  é a tensão normal no centro geométrico do varão (e/ou agrupamento de varões),  $y_c$  é a ordenada do centro geométrico do subdomínio de betão e  $y_s$  é a ordenada do centro geométrico do varão (e/ou agrupamento de varões).  $\sigma_c$  e  $\sigma_s$  são calculadas com a relação constitutiva do betão e das armaduras, respectivamente, para a extensão dada pela expressão (6.37).

### 6.3.1.3. Relação momento-curvatura-esforço axial

Para determinar a extensão axial  $\varepsilon_0$  e o momento flector  $M$  numa dada secção, para valores fixos da curvatura  $\chi$  e esforço axial  $N$  (as relações momento-curvatura-esforço axial), resolve-se o sistema de duas equações de equilíbrio na secção (6.38) e (6.39), de forma iterativa. Resolvendo este sistema para valores sucessivos da curvatura obtém-se a relação  $M$ - $\chi$  para um valor fixo do esforço axial. A solução dos sistema foi calculada com um algoritmo de *path following* de modo a reduzir o número de iterações. Para isso, o sistema de equações formado pelas expressões (6.38) e (6.39) pode ser posto na forma

$$\begin{cases} h_1[M, \varepsilon_0] = f_1[\chi, \varepsilon_0] - M = 0, \\ h_2[\varepsilon_0] = f_2[\chi, \varepsilon_0] - N = 0. \end{cases} \quad (6.40)$$

Desenvolvendo as equações anteriores em série de Taylor em torno da aproximação  $(M^i, \varepsilon_0^i)$ , e truncando após o termo de primeira ordem (método de *Newton-Raphson*), obtém-se

$$\begin{cases} h_1[M^i, \varepsilon_0^i] + (M^{i+1} - M^i) \frac{\partial h_1}{\partial M}[M^i, \varepsilon_0^i] + (\varepsilon_0^{i+1} - \varepsilon_0^i) \frac{\partial h_1}{\partial \varepsilon_0}[M^i, \varepsilon_0^i] = 0, \\ h_2[\varepsilon_0^i] + (\varepsilon_0^{i+1} - \varepsilon_0^i) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon_0}[\varepsilon_0^i] = 0. \end{cases} \quad (6.41)$$

Representando este sistema em formato matricial, obtém-se

$$\mathbf{b}^i + \mathbf{A}^i \boldsymbol{\delta}^{i+1} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\delta}^{i+1} = -(\mathbf{A}^i)^{-1} \mathbf{b}^i \quad (6.42)$$

com

$$\mathbf{b}^i = \begin{bmatrix} f_1[\chi, \varepsilon_0^i] - M^i \\ f_2[\chi, \varepsilon_0^i] - N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial M} [M^i, \varepsilon_0^i] & \frac{\partial h_1}{\partial \varepsilon_0} [M^i, \varepsilon_0^i] \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon_0} [\varepsilon_0^i] \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\delta}^{i+1} = \begin{bmatrix} M^{i+1} - M^i \\ \varepsilon_0^{i+1} - \varepsilon_0^i \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

A matriz *Jacobiana*  $\mathbf{A}$  pode ser aproximada numericamente em cada iteração recorrendo à expressão

$$\mathbf{A}^i = \begin{bmatrix} -1 & \frac{f_1[\chi, \varepsilon_0^i + \delta\varepsilon_0] - f_1[\chi, \varepsilon_0^i]}{\delta\varepsilon_0} \\ 0 & \frac{f_2[\chi, \varepsilon_0^i + \delta\varepsilon_0] - f_2[\chi, \varepsilon_0^i]}{\delta\varepsilon_0} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

em que  $\delta\varepsilon_0 = 10^{-10}$ .

O processo iterativo termina quando as variações relativas do momento flector e da deformação axial, em duas iterações sucessivas, são inferiores, em valor absoluto, às tolerâncias pré-definidas.

Foi ainda implementado um procedimento para determinação da relação  $N$ - $\varepsilon_0$  para um momento flector  $M$  constante. Dado que este procedimento é similar ao exposto nesta secção dispensou-se a sua apresentação.

### 6.3.2. Modelação do *tension-stiffening*

Sendo a contribuição do betão traccionado relevante para o comportamento de elementos de betão armado, nomeadamente como consequência do *tension stiffening*, apresenta-se em seguida a abordagem adoptada para contabilizar este efeito. Neste estudo, o efeito combinado da localização das deformações do betão após a fendilhação e da aderência armaduras-betão é simplifadamente tido em conta substituindo a relação constitutiva local do betão traccionado por uma relação constitutiva não local (*smearred approach*).

Num elemento linear de betão armado fendilhado, o betão traccionado nos segmentos entre fendas apresenta tensões que, apesar de não alterarem a resistência do elemento, afectam a sua rigidez. Isto porque, apesar de nas fendas de flexão a rigidez seccional relativa à deformação longitudinal ser proporcionada unicamente pela armadura e pelo betão na região comprimida (o betão na região traccionada apresenta tensão normal à secção nula), de modo a satisfazer a condição de equilíbrio, a existência de tensões tangenciais de aderência na interface armadura-betão permite concluir que o campo de tensões no betão envolvente das armaduras ao longo dos troços entre fendas apresenta uma componente longitudinal de tracção. Deste modo, nos segmentos entre fendas adjacentes, a armadura e o betão envolvente opõem-se em paralelo à deformação longitudinal, proporcionando uma rigidez longitudinal superior à observada nas fendas. Dá-se o nome de *tension stiffening* a este acréscimo de rigidez à tracção por comparação com a rigidez seccional longitudinal nas fendas.

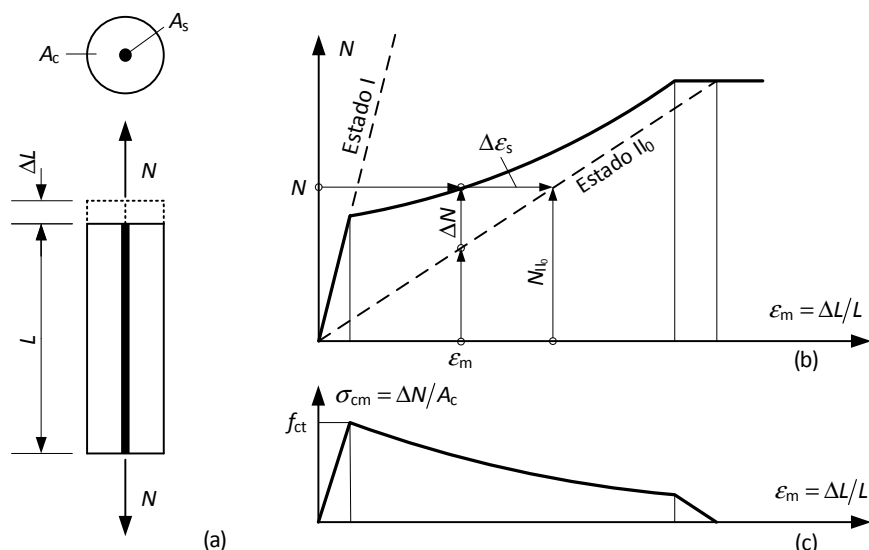


Figura 6.17 – Comportamento de um tirante de betão armado, (a) geometria do tirante, (b) diagrama carga-extensão média do tirante, (c) diagrama de tensões de tracção do betão (*smeared*).

Se esta última rigidez seccional for utilizada de forma simplificada na análise estrutural, por exemplo no cálculo de deslocamentos, determina soluções erradas por excesso.

Comece-se por analisar o comportamento global do tirante de betão armado representado na Figura 6.17(a). A relação  $N-\Delta L/L$  apresentada por este tirante situa-se entre as situações limite correspondentes a (Figura 6.17(b)):

- (i) Estado I: secção não fendilhada – assume-se que tanto as armaduras como o betão estão activos em compressão e em tracção;
- (ii) Estado II-*naked* (II<sub>0</sub>): secção fendilhada – assume-se que as armaduras são efectivas em tracção e compressão e que o betão só é efectivo em compressão.

De acordo com a Figura 6.17(b), quando a tensão na armadura nas fendas vale  $\sigma_{s,II_0} = N/A_s$  a extensão média no tirante, inferior à que se observaria caso este estivesse em estado II<sub>0</sub>, é  $\varepsilon_m = \Delta L/L = \varepsilon_{s,II_0} - \Delta\varepsilon_s$  em que  $\Delta\varepsilon_s$  resulta do incremento da rigidez do tirante por efeito do betão entre fendas e  $\varepsilon_{s,II_0} = \sigma_{s,II_0}/E_s$ .

Para modelar de forma simplificada o efeito do betão entre fendas num tirante de betão armado, pode utilizar-se uma relação constitutiva equivalente para o betão traccionado que represente o seu comportamento global num comprimento que inclua várias fendas, ou seja, uma relação tensão-extensão média (*smeared*, não local).

Quando o tirante representado na Figura 6.17(a) é submetido a uma extensão média  $\varepsilon_m$  (Figura 6.17(b)),  $\Delta N = \Delta\varepsilon_s E_s A_s$  é a contribuição do betão entre fendas para o seu comportamento global. Esta parcela da força permite definir uma tensão média no betão associada ao *tension stiffening*, a tensão  $\sigma_{cm} = \Delta N/A_c$ , que em conjunto com a extensão média  $\varepsilon_m$ , define uma relação constitutiva não local para o betão traccionado, a relação  $\sigma_{cm}-\varepsilon_m$ , Figura 6.17(c).

A fase inicial do diagrama  $\sigma_{cm}-\varepsilon_m$ , que antecede a fendilhação do betão, corresponde ao comportamento elástico linear local do betão – na fase prévia à fendilhação não ocorre localização das deformações no betão. Na segunda fase, que se segue ao início da fendilhação,

o efeito combinado da localização das deformações no betão e da aderência armadura-betão sobre o comportamento global do tirante depende de vários factores, como a percentagem de armadura, a relação entre módulos de elasticidade do betão e armaduras e as condições de aderência entre betão e aço. Nesta segunda fase a grandeza relativa e absoluta das tensões instaladas no betão entre fendas diminui à medida que a extensão nas armaduras aumenta, tornando-se desprezável quando as armaduras entram em cedência.

A adopção de uma relação constitutiva não local para o betão traccionado de forma a contabilizar o *tension stiffening* pode ser estendida à análise de elementos de betão armado em flexão, tendo em atenção os seguintes aspectos/pressupostos:

- (i) o betão na vizinhança das armaduras, em virtude do maior gradiente das tensões, tem um comportamento distinto do betão fora desta zona;
- (ii) a relação constitutiva não local do betão traccionada na vizinhança das armaduras reproduz um comportamento global e não o comportamento local e efectivo do betão; para um troço característico cobrindo várias fendas, isto corresponde a substituir o campo de deformações local efectivo, muito irregular, por um campo uniforme, equivalente em termos médios;
- (iii) como consequência da regularização das deformações no betão em tracção, também a extensão nas armaduras é regularizada, ou seja, substituída por uma extensão média (global); isto implica que a utilização da relação tensão-extensão local para as armaduras é um procedimento aproximado.

Esta abordagem, apesar de simples, permite ter em consideração os parâmetros que, de acordo com Stramandinoli e Rovere [2008], são os mais relevantes para o *stiffening effect*, ou seja, a percentagem geométrica de armadura  $\rho$  e o quociente entre o módulo de elasticidade inicial das armaduras e o do betão  $\alpha_e$ . Esta abordagem permite também avaliar de forma imediata a largura média de fendas de um elemento de betão armado, pelo que se adequa a uma utilização corrente para efeitos de dimensionamento de estruturas, nomeadamente para verificação das condições de serviço. Deve porém notar-se que esta metodologia apenas é aplicável a elementos com comportamento dominado por flexão e/ou esforço axial, na medida em que não considera o efeito de fendas não ortogonais ao eixo do elemento.

Dado o consenso que, de uma forma geral, os modelos de comportamento patentes no MC78 [1978] e no MC90 [1990] reuniram à data da sua publicação, neste estudo adoptou-se a relação simplificada  $\sigma_{cm} - \varepsilon_m$  incluída no modelo de comportamento para tirantes proposta no §7.6.4.4 na actual versão provisória do futuro MC2010 (Fib [2010b]), Figura 6.18(a) e (b). Nesta figura  $\alpha_e = E_s/E_c$ ,  $\rho = A_s/A_c$ ,  $\bar{\varepsilon}_y$  é a extensão no betão quando a extensão da armadura atinge  $\varepsilon_y$  e  $N_r$  é esforço axial de fendilhação dado por

$$N_r = f_{ctm} A_c (1 + \alpha_e \rho). \quad (6.45)$$

Este modelo foi comparado com outros modelos propostos na bibliografia, desenvolvidos para o mesmo efeito, por forma a permitir a sua avaliação. Foram considerados os modelos propostos por Gupta e Maestrini [1990], Stramandinoli e Rovere [2008], Vecchio e Collins [1986].

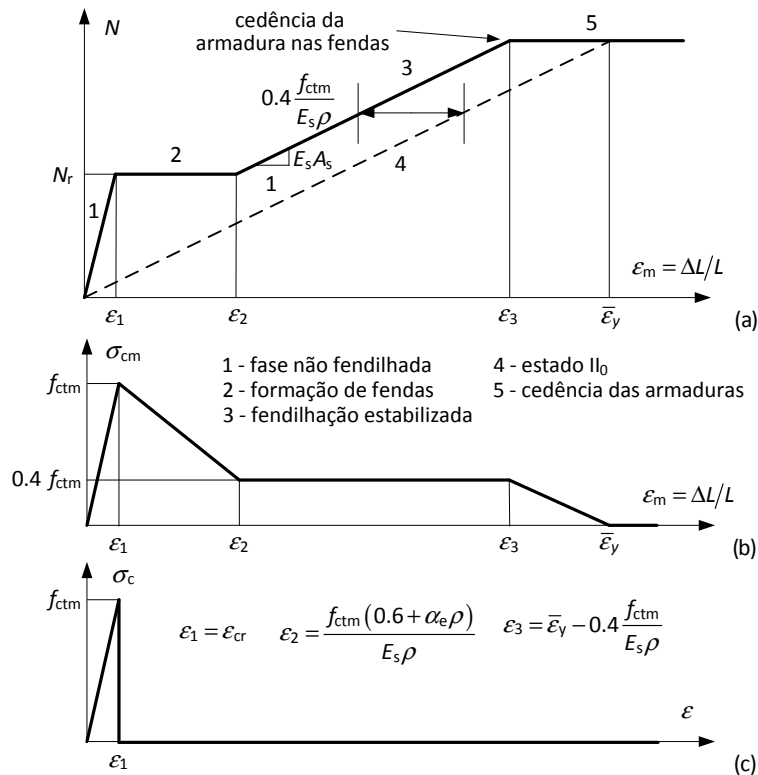


Figura 6.18 – Comportamento do betão em tracção (a) relação  $N$ - $\varepsilon_m$  no tirante (Fib [2010b]), (b) relação  $\sigma_{cm}$ - $\varepsilon_m$  (betão efectivo), (c) relação constitutiva local do betão em tracção (betão não efectivo).

Tabela 6.1 – Pontos notáveis da relação constitutiva proposta por Gupta e Maestrini [1990]

ponto	0	A	B	C	D
$\sigma_{cm}/f_t$	0	1	$1 - \frac{1 + \alpha_e \rho}{10}$	1/2	0
$\varepsilon_m$	0	$\frac{f_t}{E_c}$	$\frac{f_t}{E_c} \left( 1 + \frac{1 + \alpha_e \rho}{10 \alpha_e \rho} \right)$	$\varepsilon_y \left( 1 - \frac{1}{2 \alpha_e \rho} \frac{f_t}{E_c} \right)$	$\varepsilon_y$

Gupta e Maestrini [1990], com base na análise dos resultados de ensaios experimentais de tirantes de betão armado traccionados, propuseram uma relação tensão-extensão para o betão em tracção que contabiliza o *tension stiffening* desenvolvida a partir de uma lei bilinear para a aderência aço betão. A lei é seccionalmente linear sendo definida por intermédio dos 5 pontos notáveis auxiliares indicados na Tabela 6.1, em função de  $f_t$ , uma resistência à tracção dependente do nível de dano no betão, dada por

$$f_t = f_{ctm} e^{-550 \left( \varepsilon_m - \frac{f_{ctm}}{E_c} \right)} \quad (6.46)$$

As coordenadas dos pontos notáveis indicadas na Tabela 6.1 dependem de  $f_t$ , cujo valor depende de  $\varepsilon_m$ . Para determinar os valores definitivos das coordenadas que definem a relação constitutiva, assume-se numa primeira fase  $f_t = f_{ctm}$  e com base neste valor calculam-se os valores provisórios de  $\varepsilon_m$  em cada ponto notável. O valor de  $f_t$  é seguidamente recalculado por aplicação de (6.46) para cada um dos valores provisórios de  $\varepsilon_m$ , determinando o valor definitivo das coordenadas dos pontos notáveis da relação constitutiva (Gupta e Maestrini [1990]).

Stramandinoli e Rovere [2008] propuseram uma relação tensão-extensão calibrada a partir das

disposições do CEB [1985] dada pela expressão

$$\sigma_{cm} = \begin{cases} f_{ctm} e^{-\alpha \left( \frac{\epsilon_m}{f_{ctm}/E_c} \right)}, & \text{se } \epsilon_s < \epsilon_y, \\ 0, & \text{se } \epsilon_s \geq \epsilon_y, \end{cases} \quad (6.47)$$

em que

$$\alpha = 0.017 + 0.255\alpha_e\rho - 0.106(\alpha_e\rho)^2 + 0.016(\alpha_e\rho)^3. \quad (6.48)$$

Vecchio e Collins [1986] propuseram uma relação tensão-extensão calibrada a partir da análise dos resultados experimentais de placas de betão armado submetidas a um estado plano de tensão, dada por

$$\sigma_{cm} = \begin{cases} E_c \epsilon_{cm}, & \text{se } \epsilon_{cm} \leq \frac{f_{ctm}}{E_c}, \\ \frac{f_{ctm}}{1 + \sqrt{500\epsilon_{cm}}}, & \text{se } \epsilon_{cm} > \frac{f_{ctm}}{E_c}. \end{cases} \quad (6.49)$$

De acordo com Gupta e Maestrini [1990] o intervalo relevante de valores  $\alpha_e\rho$  é 0.02 a 0.5. A Figura 6.19 representa a relação  $\sigma_{cm}-\epsilon_m$  para os modelos referidos para  $f_{ctm}=2.5\text{MPa}$ ,  $E_c=30\text{GPa}$ ,  $f_y=500\text{MPa}$  e  $E_s=200\text{GPa}$  para valores de  $\alpha_e\rho$  dentro do intervalo referido.

Esta figura revela que, para valores mais elevados de  $\alpha_e\rho$ , a relação constitutiva baseada no modelo de comportamento para tirantes do MC2010 (Fib [2010b]) apresenta uma redução da tensão de tracção no betão após fendilhação mais acentuada que os outros modelos. Tal desfaseamento deve-se a que o modelo de comportamento para tirantes do MC2010 despreza o efeito da variação da capacidade resistente do betão à tracção na fase de formação de

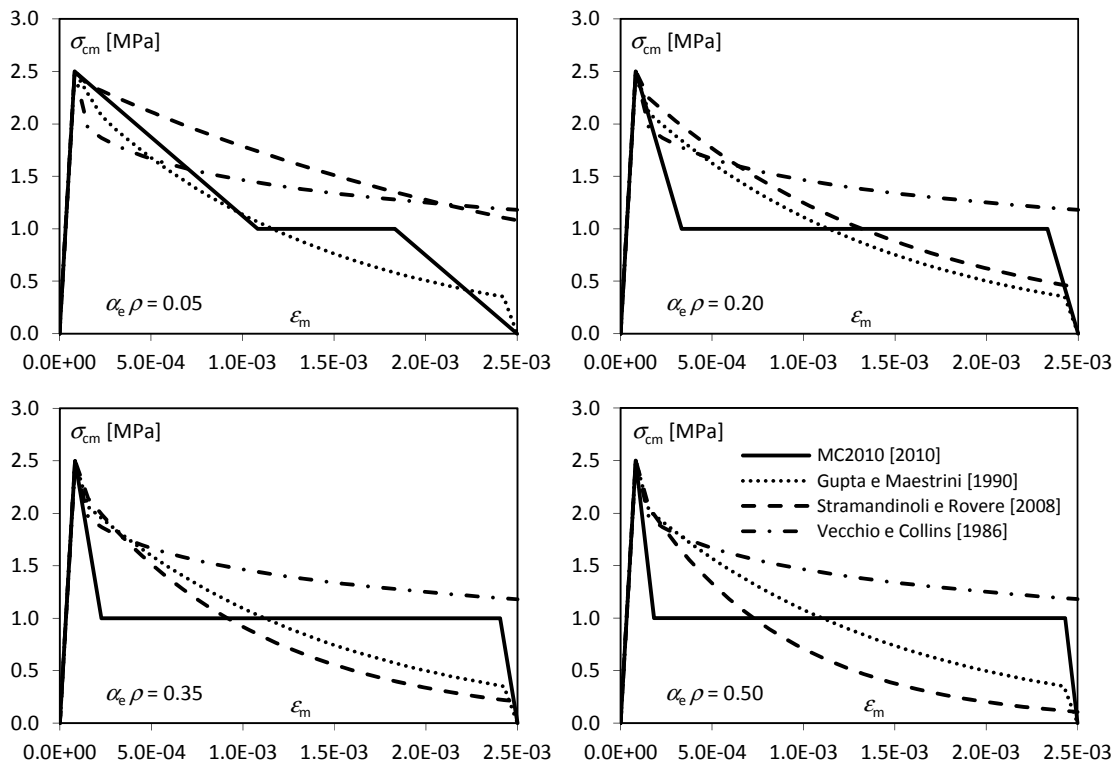


Figura 6.19 – Relação constitutiva não local para o betão em tracção.



fendas, com base na justificação de que a sua ordem de grandeza é semelhante à das restantes variáveis não contabilizadas. De resto, a relação constitutiva baseada no modelo de comportamento para tirantes do MC2010 conduz a valores dentro do intervalo de variação das outras relações, mas, para extensões elevadas, tende a apresentar tensões mais elevadas que as dos modelos propostos por Gupta e Maestrini [1990] e por Stramandinoli e Rovere [2008], que também incorporam o parâmetro  $\alpha_e \rho$ , em virtude de assumir um valor constante para a tensão no betão até à proximidade da cedência das armaduras.

Tal como referido anteriormente, a modelação do *tension stiffening* em elementos submetidos a flexão, adoptando o procedimento exposto, requer que a secção transversal de betão com extensões longitudinais positivas seja dividida numa parte em que o betão é considerado efectivo, onde o seu comportamento é descrito por uma relação tensão-extensão não local (Figura 6.18(b)), e numa outra em que o betão é não efectivo e o seu comportamento é descrito por uma relação constitutiva local (Figura 6.18(c)).

Na aplicação da relação constitutiva apresentada na Figura 6.18(b) a uma secção de betão armado submetido a flexão,  $\bar{\varepsilon}_y$  é a extensão na fibra de betão efectivo quando o baricentro da armadura com maior alongamento atinge  $\varepsilon_y$ . Desta forma, a materialização computacional do último troço da relação constitutiva apresentada na Figura 6.18(b), apesar de simples num elemento traccionado (em que  $\bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_y$ ), é problemática num elemento com flexão na medida em que  $\bar{\varepsilon}_y$  é desconhecido à partida – este parâmetro depende do quociente entre a extensão na fibra de betão e na armadura, que vai variando com a variação da posição do eixo neutro. Para programar o troço de transição de  $\sigma_{cm} = 0.4 f_{ctm}$  para  $\sigma_{cm} = 0$  (Figura 6.18(b)) e evitar uma descontinuidade na relação  $\sigma_{cm} - \varepsilon_m$  do betão efectivo, a relação  $\sigma_{cm} - \varepsilon_m$  para  $\varepsilon_m > \varepsilon_2$  é definida pela expressão

$$\sigma_{cm} = \min(0.4 f_{ctm}, E_s \rho (\varepsilon_y - \varepsilon_s)) \geq 0 \quad (6.50)$$

em que  $\varepsilon_s$  é a extensão na secção ao nível do centro geométrico da armadura (ou agrupamento de armaduras) mais traccionada.

A região de betão na zona de influência da armadura (zona de betão efectivo) é determinada de acordo com o §7.6.4.4.1 do MC2010 ignorando a dependência relativamente à posição do eixo neutro caso este intersecte a secção transversal – sendo então a zona de betão definida de acordo com a Figura 6.20(a) e (b). Caso o eixo neutro não intersecta a secção transversal, todo o betão é efectivo, Figura 6.20(c).

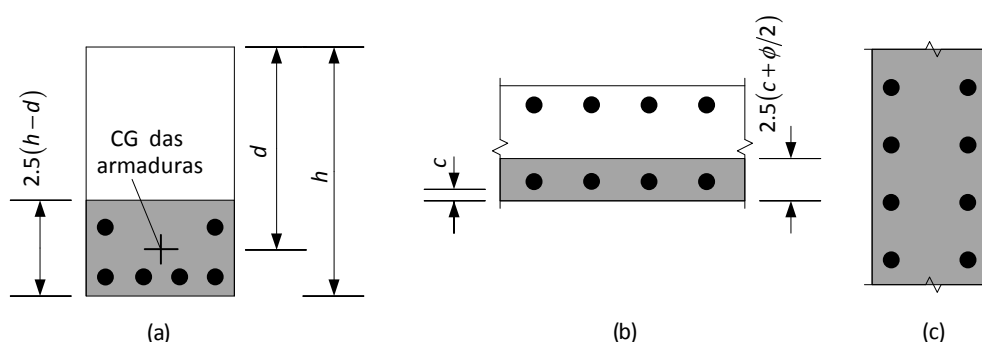


Figura 6.20 – Área efectiva de betão em tracção, (a) viga com secção parcialmente comprimida, (b) laje com secção parcialmente comprimida e (c) elemento com secção transversal toda em tracção.

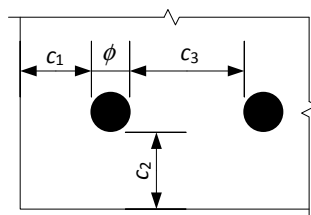


Figura 6.21 – Raio da área de betão efectivo para cada tirante.

A área de armadura contabilizada no cálculo da relação constitutiva do betão efectivo em tracção ( $A_{st}$ ) é a da armadura situada na zona não comprimida da secção.

Alternativamente ao procedimento anterior, em que se estabelece uma relação constitutiva equivalente para o betão à tracção, pode-se estabelecer uma relação constitutiva equivalente para a armadura imersa em betão, tratando cada varão, ou agrupamento de varões, como um tirante de betão armado com a relação constitutiva da Figura 6.18(a). Este procedimento alternativo, tal como o anterior, também foi implementado no EvalS, e torna-se interessante no caso de secções não rectangulares, dada a inexistência, nesse caso, de indicações expressas sobre a forma de definir a zona de betão efectivo em tracção. Nestas situações, para cada varão, ou agrupamento de varões, por analogia com os critérios estabelecidos para secções rectangulares na Figura 6.20, é estabelecida de forma simplificada e conservadora uma região de betão cilíndrica coaxial com o eixo do varão, ou agrupamento, de raio  $1.25 r$ , em que  $r$ , de acordo com a Figura 6.21, é dado por

$$r = \min\left(c_1 + \frac{\phi}{2}, c_2 + \frac{\phi}{2}, \frac{c_3 + \phi}{2}\right). \quad (6.51)$$

### 6.3.3. Interface gráfico do EvalS para modelos de fibras

O modelo de fibras, tal como o modelo de ligação viga-pilar (§6.2.4), foi implementado no EvalS de forma a permitir uma modelação estrutural intuitiva e sistemática. Assim, os dados dos modelos de fibras podem ser introduzidos no EvalS por dois procedimentos alternativos: (i) por edição dos ficheiros de dados em Excel (Microsoft Corporation [2010]) e (ii) através de janelas dedicadas desenvolvidas para o efeito.

Para sistematizar a caracterização das secções transversais dos elementos viga/pilar foi definida uma biblioteca onde podem ser estabelecidas secções transversais tipo que posteriormente serão atribuídas aos elementos lineares que constituem a estrutura analisada.

Na Figura 6.22 está representado a janela onde é possível caracterizar os materiais constituintes da secção transversal. Esta janela é acedida através do menu principal do EvalS recorrendo ao comando *Materials* do menu *Define*.

Além dos tipos de materiais disponíveis por defeito no EvalS, o utilizador pode definir materiais novos por intermédio de uma relação  $\sigma$ - $\varepsilon$  seccionalmente linear, definida por pontos, recorrendo à janela representado na Figura 6.23.

Depois de definir as relações constitutivas dos materiais que constituem a secção transversal, a secção transversal tipo é criada recorrendo à janela representada na Figura 6.24 e acedida a partir do menu principal do EvalS recorrendo ao comando *Beam sections* do menu *Define*. Esta

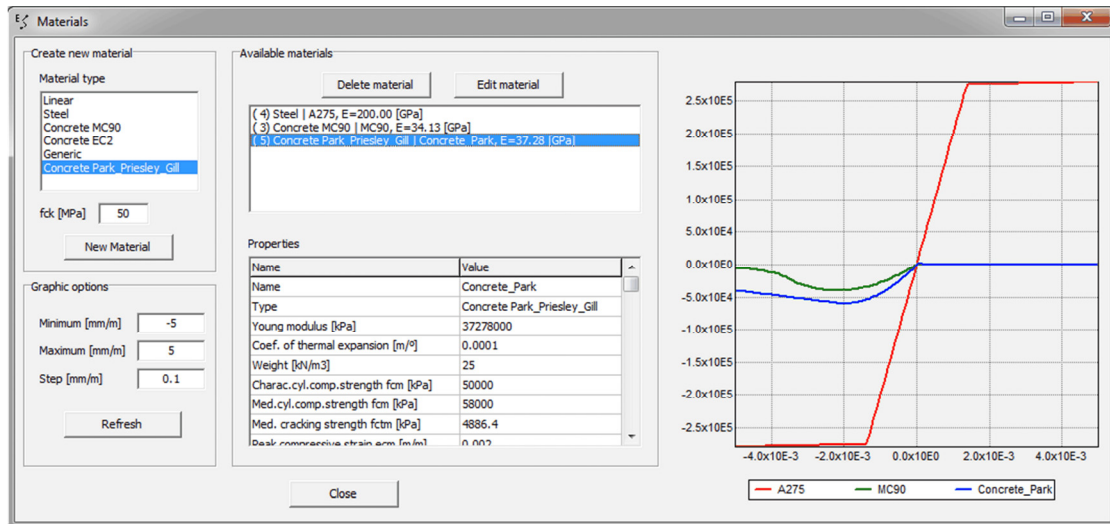


Figura 6.22 – Janela para caracterização dos materiais.

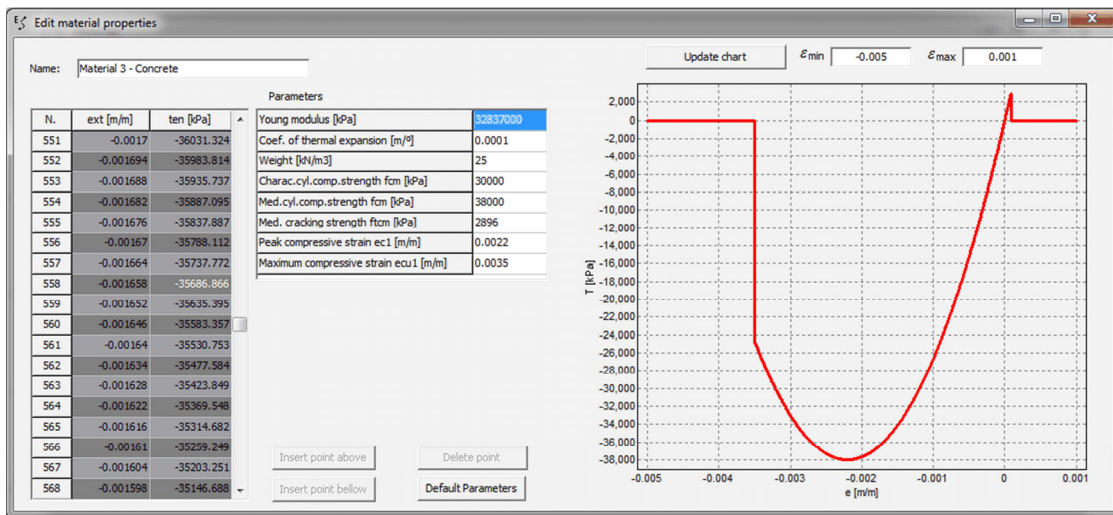


Figura 6.23 – Janela para definição de relações  $\sigma$ - $\epsilon$  por pontos.

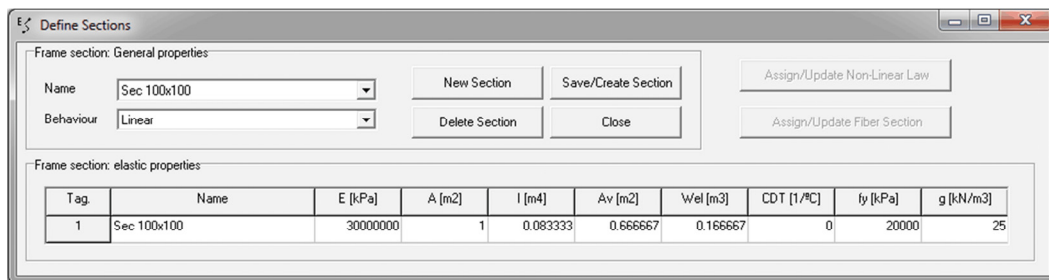


Figura 6.24 – Janela para criar a secção transversal tipo.

janela permite definir as propriedades genéricas da secção transversal para análise elástica linear e permite aceder à janela onde é definida a secção transversal para efeitos do modelo de fibras, Figura 6.25.

Para efeito dos modelos de fibras, cada secção transversal é constituída por formas com material de comportamento homogéneo e armaduras. A janela representada na Figura 6.25 permite (i) definir a geometria de cada forma, (ii) atribuir a cada forma um material da biblioteca previamente constituída, (iii) definir as coordenadas do centro geométrico de cada armadura na secção transversal e a área da sua secção transversal, (iv) atribuir a cada armadura um material da biblioteca previamente constituída, (v) visualizar a secção

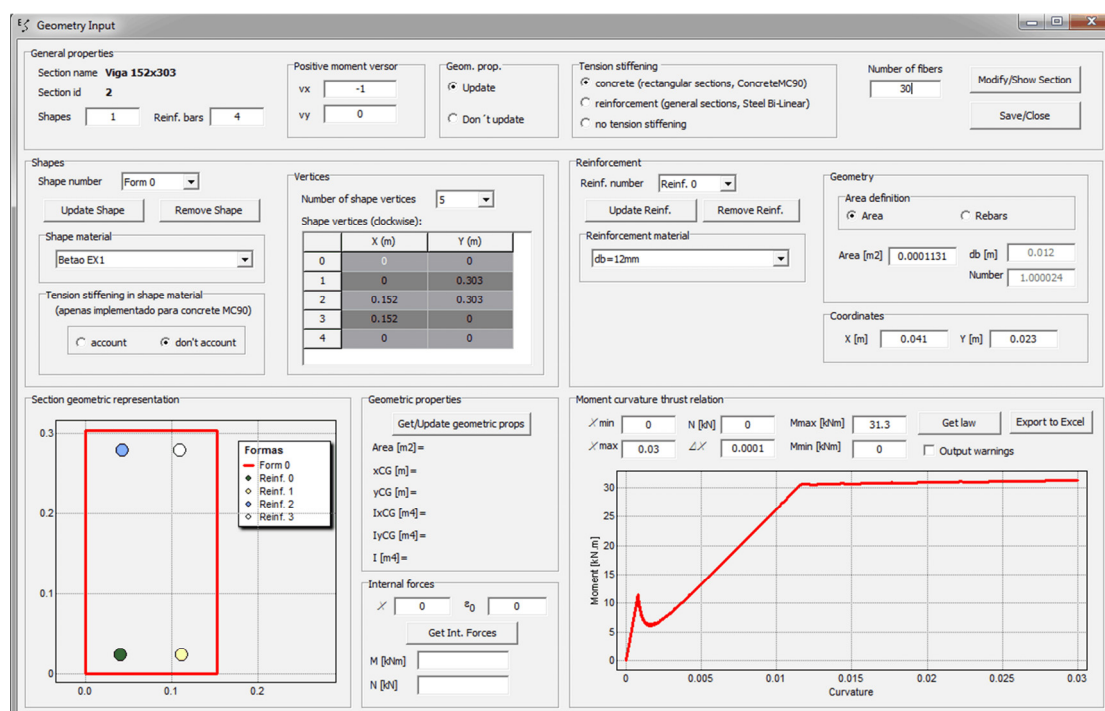


Figura 6.25 – Janela para definição dos modelo de fibras.

transversal e as propriedades geométricas desta, (vi) definir o número de fibras a considerar em cada modelo e (vii) avaliar a relação momento-curvatura-esforço axial da secção resultante.

A atribuição a cada elemento linear de uma secção transversal tipo é efectuada recorrendo a um menu de contexto (*pop-up menu*).

Para avaliar visualmente a reserva de resistência e/ou ductilidade de cada secção em cada caso de análise, foi desenvolvida a janela apresentada na Figura 6.26. Esta janela sobrepõe o esforço e deformação em cada secção às relações momento-curvatura, para um esforço axial constante, e esforço axial-extensão axial, para um momento flector constante, bem como alguns pontos notáveis destas relações.

#### 6.4. O método das forças fictícias (MFF)

O Método das Forças Fictícias (MFF) é um procedimento numérico para análise não linear de estruturas reticuladas. Na sua versão original (Gala [2007]; Gala, Providência *et al.* [2010]), este método pode ser encarado como uma aplicação do Método das Forças Iniciais (Argyris e Sharpf [1972]) a modelos 1D. O MFF opera com uma rigidez constante em cada elemento e modela a não linearidade ao nível do elemento – a não linearidade material por meio de um carregamento fictício e a não linearidade geométrica por meio do carregamento equivalente. Ambos estes carregamentos, embora virtuais, possuem significado físico intuitivo: o carregamento equivalente do método  $P-\Delta$  é estaticamente equivalente ao efeito de segunda ordem associado a forças que, na configuração inicial, apresentam direcção axial; o carregamento fictício do MFF equilibra a parcela do campo de esforços associada a uma componente de deformações dita não linear. O carácter simples e intuitivo do MFF e a sua adaptabilidade a programas desenvolvidos tendo em vista a análise elástica linear de

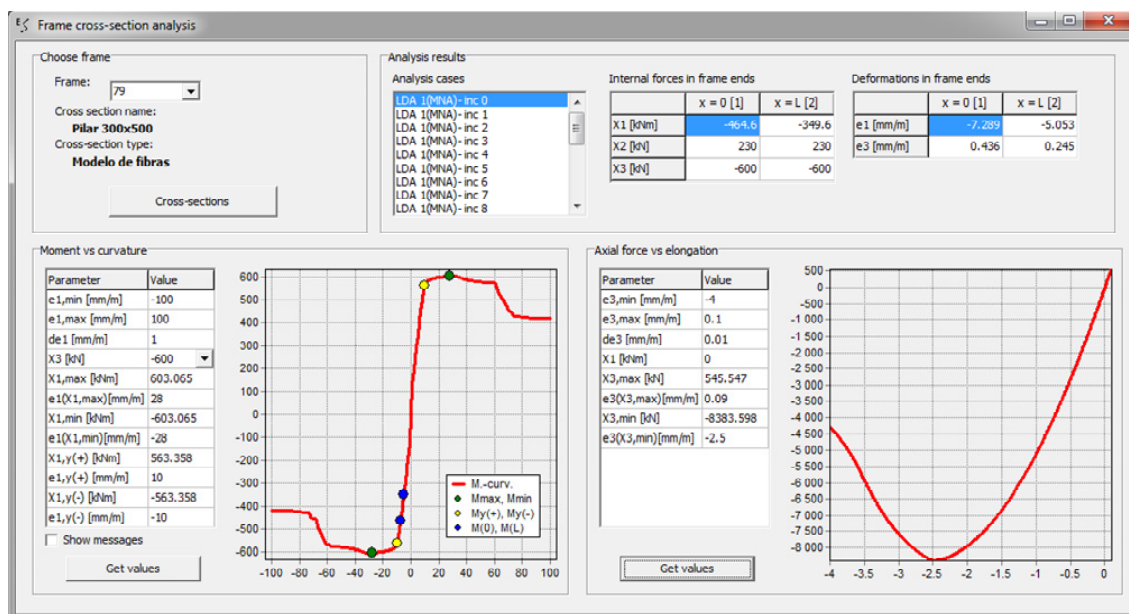


Figura 6.26 – Janela para avaliação de reserva de resistência e ductilidade.

estruturas constitui um incentivo à sua implementação em programas de análise linear de estruturas *standard*.

O modelo seccional de fibras e o modelo de ligação viga-pilar de betão armado descritos nas secções anteriores foram implementados no programa informático de análise de estruturas reticuladas planas EvalS (Ferreira [2011]), que permite a análise geométrica e materialmente não linear recorrendo ao MFF (Gala [2007]). Nos seguintes parágrafos será brevemente apresentada a forma como estes modelos foram integrados no MFF (Costa, Providência *et al.* [2010], Ferreira, Costa *et al.* [2011]).

### 6.4.1. Integração do modelo seccional de fibras no MFF

O Método das Forças Fictícias é um método de análise não linear desenvolvido originalmente para estruturas reticuladas, em que a não linearidade material é simulada por um carregamento suplementar elementar auto-equilibrado, designado fictício. Este carregamento fictício ( $F_F$ ) define, conjuntamente com o carregamento equivalente ( $F_E$ ) e o carregamento efectivo  $F$ , o carregamento total ( $F_T$ ).

Na aplicação do MFF a elementos 1D com vista à modelação da não linearidade de forma distribuída o problema original é definido por uma estrutura com comportamento não linear e um carregamento efectivo  $F$  – corresponde-lhe a solução original, constituída pelas deformações efectivas ( $\chi, \epsilon_0$ ) e pelos esforços efectivos ( $M, N$ ), estando estas variáveis relacionadas entre si de forma não linear – por exemplo,  $M = M[\chi, \epsilon_0]$ .

No MFF é estabelecido um problema equivalente ao problema original, designado de problema auxiliar. O problema auxiliar considera (i) o carregamento total  $F_T$ , (ii) uma relação constitutiva auxiliar linear em cada secção transversal da estrutura definida pelas rigidezes  $(EA)_A$  e  $(EI)_A$  e (iii) comportamento geometricamente linear. Este problema auxiliar é linear em cada iteração, sendo a sua solução, designada solução auxiliar, constituída pela deformação efectiva e pelos esforços auxiliares linearmente inter-relacionados

$$M_A = (EI)_A \chi, \quad N_A = (EA)_A \varepsilon_0. \quad (6.52)$$

No MFF, a não linearidade geométrica é modelada pelo carregamento equivalente  $F_E$  do método  $P-\Delta$ . Este carregamento equivalente, tal como se viu no §6.2.3, no caso de elementos lineares, é constituído por um binário com forças aplicadas nas extremidades de cada elemento com direcção transversal à direcção inicial do eixo do elemento, e é tal que a sua contribuição de primeira ordem para o equilíbrio de momentos aproxima a contribuição de segunda ordem das forças cuja direcção inicial é paralela ao eixo do elemento. No EvalS, o esforço axial  $P$  de referência no elemento é definido como a média do esforço axial nas suas extremidades. Tal como a Figura 6.4 ilustra, o carregamento equivalente é calculado tomando por referência a corda do elemento, não a sua deformada, pelo que o erro correspondente diminui com o refinamento da malha. Ou seja, o carregamento equivalente é estaticamente equivalente ao efeito de segunda ordem das forças axiais na configuração deformada apenas ao nível do elemento, não ao nível seccional.

A não linearidade material, definida pela relação constitutiva, é simulada no MFF por meio de um carregamento fictício  $F_F$ . Por definição, o carregamento fictício equilibra um campo de esforços fictício  $(M_F, N_F)$ . Para uma relação constitutiva descrita por relações entre os esforços e deformações generalizadas, um dado esforço fictício é definido pela diferença entre o esforço auxiliar  $(M_A, N_A)$  e o esforço efectivo  $(M, N)$  (Figura 6.27)

$$M_F = M_A - M, \quad N_F = N_A - N. \quad (6.53)$$

Sublinhe-se que é especialmente útil e interessante o facto de tanto o carregamento fictício como o equivalente apresentarem uma interpretação física intuitiva.

Na formulação discreta do MFF, o carregamento elementar fictício relativo à flexão é formado por momentos pontuais estaticamente independentes e pelas forças transversais pontuais que os equilibram, ver Figura 6.28. De modo semelhante, o carregamento elementar fictício axial é

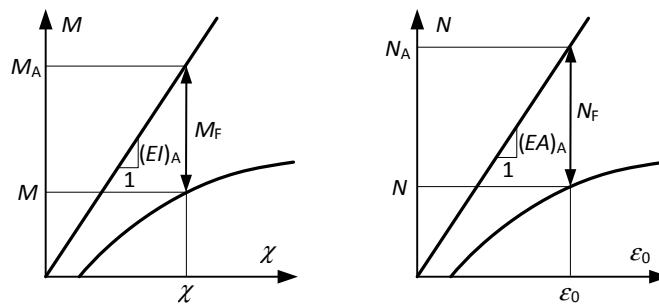


Figura 6.27 – Esforços fictícios do MFF.

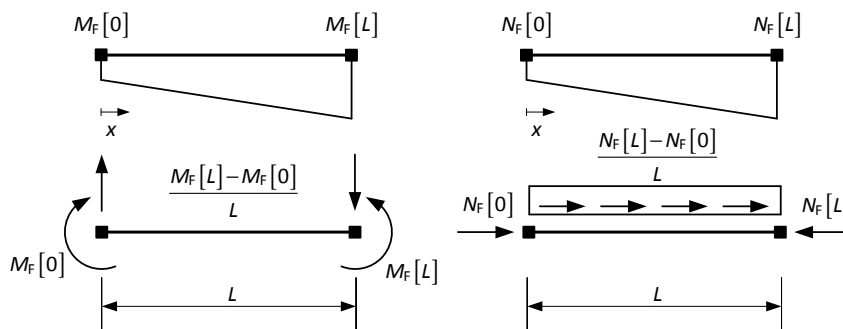


Figura 6.28 – Carregamento fictício num elemento linear.

formado por forças axiais pontuais estaticamente independentes e por forças axiais suplementares uniformemente distribuídas que equilibram as primeiras – Figura 6.28. Tal como em seguida se mostrará, um carregamento fictício adequado permite não só simular a não linearidade material mas também aumentar o grau da aproximação do campo de deslocamentos do problema real. Note-se a semelhança entre as expressões das forças transversais para a flexão e da força distribuída axial. Tal como no método  $P-\Delta$ , o erro de discretização tenderá a diminuir com o refinamento da malha de elementos finitos.

O formato do MFF adequa-se ao estabelecimento de fórmulas recursivas, em que a convergência da solução é acompanhada da convergência dos carregamentos equivalente e fictício. Ou seja, a convergência no MFF é atingida quando a análise linear com os carregamentos efectivo, fictício e equivalente, os últimos calculados com base num dado campo de deformações efectivas  $(\chi, \varepsilon_0)$ , tem como solução esse mesmo campo de deformações efectivas. Assim, no método  $P-\Delta$ , o carregamento equivalente é calculado para aproximações sucessivas do esforço axial e do deslocamento transversal. Por sua vez, o carregamento fictício do MFF é calculado para aproximações sucessivas da deformação efectiva  $(\chi, \varepsilon_0)$ , num procedimento que traduz a aplicação do *Initial Stress Method* proposto por Zienkiewicz, Valliappan *et al.* [1969] e desenvolvido por Argyris e Sharpf [1972] no contexto da análise 3D por elementos finitos.

Sendo conhecida a  $k$ -ésima aproximação do campo esforços auxiliares,  $(M, N)_A^k$ , a  $k$ -ésima iteração do MFF para uma estrutura submetida a um carregamento efectivo  $F$ , ilustrada na Figura 6.29, consta dos seguintes passos:

- i. cálculo dos esforços efectivos  $(M, N)^k$ ;
  - i.i. cálculo das deformações efectivas  $(\chi, \varepsilon_0)^k$  a partir dos esforços auxiliares e das rigidezes auxiliares (expressão (6.52));
  - i.ii. cálculo das extensões nas fibras  $\varepsilon_{j,i}^k$  compatíveis com as deformações efectivas, de acordo com a hipótese de Euler-Bernoulli (expressão (6.37));
  - i.iii. cálculo das tensões normais nas fibras  $\sigma_{j,i}^k$ , utilizando as relações constitutivas unidimensionais dos materiais constituintes da secção transversal;
  - i.iv. cálculo dos esforços efectivos  $(M, N)^k$  integrando as tensões normais na secção transversal (expressões (6.38) e (6.39));
- ii. cálculo dos esforços fictícios  $(M, N)_F^k$  subtraindo aos esforços auxiliares os esforços efectivos (expressão (6.53));
- iii. cálculo do carregamento fictício  $F_F^k$  que equilibra os esforços fictícios (Figura 6.28);
- iv. cálculo do carregamento equivalente  $F_E^k$  (Figura 6.4(d)) e do carregamento total  $F_T^k$  dado por
 
$$F_T^k = F + F_F^k + F_E^k; \quad (6.54)$$
- v. cálculo dos esforços auxiliares  $(M, N)_A^k$  com uma análise elástica linear por elementos finitos (rigidezes  $(EI)_A$  e  $(EA)_A$ ), para o carregamento total  $F_T^k$ .

O procedimento iterativo prossegue, com nova iteração, até que as variações relativas das normas dos deslocamentos nodais e dos esforços satisfaçam as tolerâncias pré-definidas.

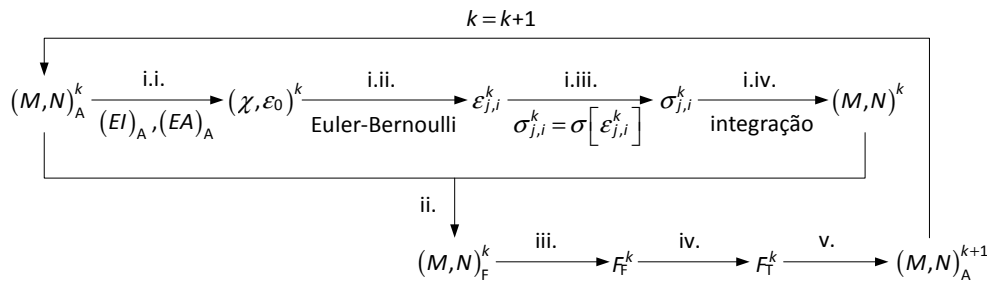


Figura 6.29 – Integração do modelo de fibras no procedimento iterativo do MFF.

Na prática, considera-se que o procedimento iterativo convergiu quando o quociente entre a norma euclidiana da diferença entre o campo de deslocamentos nodais efectivos em duas iterações sucessivas e a norma euclidiana do campo de deslocamentos nodais na última iteração em causa for inferior a uma tolerância pré-definida.

Do exposto fica claro que o MFF conduz a uma aproximação do campo de deformações no problema real igual ao campo de deformações no problema auxiliar. Neste estudo utilizou-se o elemento de viga Euler-Bernoulli plano de dois nós e três graus de liberdade por nó para modelar os elementos 1D no problema auxiliar, pelo que, na ausência de acções de vão, o problema auxiliar conduziria a um campo de deslocamentos transversais cúbico (as funções de forma são os polinómios cúbicos de *Hermite*) e a um campo de deslocamentos axiais linear no interior de cada elemento 1D. No entanto, tal como Blaauwendraad [1972] mostrou, caso o comportamento à flexão e axial dos elementos seja modelado de forma acoplada, a variação da posição do eixo neutro na secção transversal de elementos 1D de betão armado ao longo do respectivo eixo torna a variação do campo de momentos incompatível com um campo de extensões axiais constante – segundo Blaauwendraad [1972] este campo terá que ser pelo menos linear. O MFF permite ter em consideração esta interdependência na definição do carregamento fictício: o formato adoptado para o carregamento fictício axial (carga uniformemente distribuída, Figura 6.28) conduz a que, mesmo na ausência de acções de vão, o campo de deslocamentos axiais seja parabólico e, conseqüentemente, o campo de extensões axiais no interior do elemento seja linear por forma a garantir o equilíbrio no elemento. O carregamento auxiliar pode assim ser encarado como um grau de liberdade adicional.

Por fim, note-se que esta abordagem para modelar elementos 1D ignora o efeito do esforço transversal dos elementos lineares para efeitos tanto da deformabilidade dos elementos como para a sua capacidade resistente. No entanto, tal como se mostrará no §6.5.1.3, este efeito é limitado na maioria das estruturas porticadas correntes e pode, por isso, ser desprezado.

#### 6.4.2. Integração de modelo de ligação viga-pilar no MFF

A integração do modelo de ligação viga-pilar apresentado no Capítulo 5 no MFF, dado o carácter pontual (0D) tanto do modelo como das suas componentes, é bastante intuitiva. Antes de apresentar o procedimento geral, para demonstrar a aplicação do MFF a elementos 0D genéricos, considere-se a aplicação do MFF à estrutura constituída somente por uma componente de comportamento materialmente não linear, representada na Figura 6.30.

Na iteração inicial do procedimento iterativo o carregamento total toma o valor do carregamento efectivo, ou seja,  $F_T^0 = F$ . É frequente tomar para valor da rigidez do problema



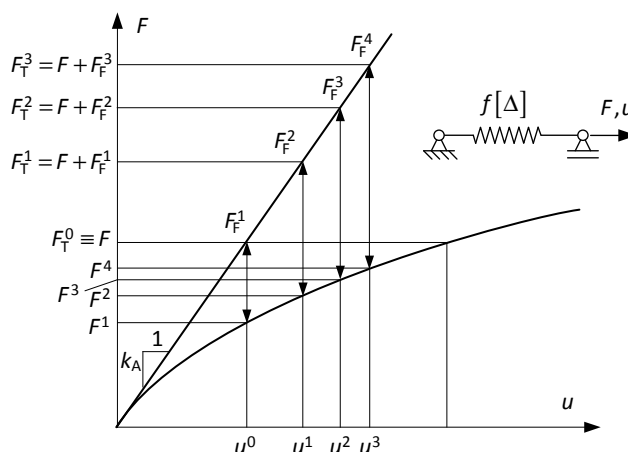


Figura 6.30 – Procedimento iterativo do MFF aplicado a uma estrutura constituída por uma componente.

auxiliar o valor da rigidez tangente inicial da relação constitutiva da componente  $f-\Delta$ , ou seja,  $k_A = df/d\Delta$  para  $\Delta=0$ . O resultado da primeira iteração é  $u^0 = F/k_A$ .

A aplicação do MFF para a determinação da deformação que a componente apresenta quando submetida à solicitação efectiva  $F$  consiste no procedimento ilustrado na Figura 6.30 constituído pelos passos que em seguida se apresentam para a  $k$ -ésima iteração:

- (i) cálculo do esforço efectivo na componente correspondente à deformação  $\Delta^{k-1} (\equiv u^{k-1})$  recorrendo à relação constitutiva não linear da componente  $f^k = f[\Delta^{k-1}]$ ;
- (ii) cálculo do esforço fictício na componente  $f_F^k = f_A^{k-1} - f^k$  com  $f_A^{k-1} = F_T^{k-1}$ ;
- (iii) cálculo do carregamento fictício  $F_F^k = f_F^k$ ;
- (iv) cálculo do carregamento total  $F_T^k = F + F_F^k$ ;
- (v) resolução do problema auxiliar constituído pela componente de rigidez  $k_A$  submetida à solicitação total  $F_T^k$ , ou seja, determinação da aproximação  $k$  do deslocamento efectivo  $u^k = F_T^k/k_A$  e do esforço axial do problema auxiliar  $f_A^k = F_T^k$ .

A integração do modelo de ligação viga-pilar proposto no Capítulo 5 no MFF, cuja implementação no EvalS foi apresentada no §6.2, é efectuada na forma que em seguida se apresenta.

Antes de dar início ao procedimento iterativo é estabelecido o problema auxiliar, elástico linear, para cada ligação viga-pilar do pórtico, definindo uma rigidez auxiliar constante para cada uma das suas componentes, por exemplo a sua rigidez tangente inicial, ou seja,  $k_{A,i} = k_{0,i} = k_i |_{\Delta_i=0}$  para  $i=1, \dots, 9$ . Em seguida o processo iterativo é iniciado, tendo-se na primeira iteração a acção exclusiva das forças nodais efectivas, ou seja  $F_T^0 = F$ . A solução correspondente do problema auxiliar constitui a primeira aproximação dos deslocamentos nodais efectivos  $u^0$ . A  $k$ -ésima iteração consiste nos seguintes passos:

- (i) cálculo do vector de deformações efectivas das componentes  $\Delta^k$

$$\Delta^k = \mathbf{A} u^{k-1}; \quad (6.55)$$

- (ii) cálculo dos esforços efectivos nas componentes da ligação  $f_i^k$  recorrendo às relações constitutivas não lineares  $f_i-\Delta_i$  para  $i=1, \dots, 9$ ;

(iii) cálculo do vector das forças nodais efectivas

$$\mathbf{F}^k = \mathbf{A}^T \mathbf{f}^k ; \quad (6.56)$$

(iv) cálculo do esforço fictício em cada componente por subtracção do esforço efectivo ao esforço auxiliar, ou seja

$$f_{F,i}^k = k_{A,i} \Delta^k - f_i^k \quad \text{para } i=1, \dots, 9 ; \quad (6.57)$$

(v) cálculo do vector de forças nodais fictícias

$$\mathbf{F}_F^k = \mathbf{A}^T \mathbf{f}_F^k ; \quad (6.58)$$

(vi) cálculo do vector de forças nodais equivalentes  $\mathbf{F}_E^k$  – expressões (6.23);

(vii) cálculo do vector de forças nodais totais

$$\mathbf{F}_T^k = \mathbf{F}^k + \mathbf{F}_F^k + \mathbf{F}_E^k ; \quad (6.59)$$

(viii) resolução do problema auxiliar para as forças nodais  $\mathbf{F}_T^k$ , determinando uma nova aproximação para o vector dos deslocamentos nodais efectivos  $\mathbf{u}^k$ .

### 6.4.3. Formula recursiva para as formulações total e incremental do MFF

A *formulação total* do MFF, consiste em resolver em cada iteração  $k$  um problema auxiliar elástico linear que fornece uma aproximação para o campo de deslocamentos da estrutura. Esta aproximação é obtida por intermédio da resolução do sistema de equações

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^k = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}\mathbf{F}_{\text{total}}^{k-1} \quad (6.60)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez auxiliar da estrutura,  $\mathbf{u}$  é o vector de deslocamentos nodais da estrutura,  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  é o vector das forças nodais exteriores da estrutura e  $\mathbf{F}\mathbf{F}_{\text{total}}$  é o vector das forças de fixação da estrutura dado por

$$\mathbf{F}\mathbf{F}_{\text{total}}^{k-1} = \mathbf{K} \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{F}_{\text{int}} \left[ \mathbf{u}^{k-1} \right] \quad (6.61)$$

em que  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  é o vector das forças nodais transmitidas pelos elementos da estrutura aos nós – por uma questão de clareza não foram incluídas as forças equivalentes.

O MFF também pode ser implementado tendo em vista um procedimento do tipo *path-follow*. Esta abordagem constitui uma formulação incremental e é apresentada em seguida.

Na iteração  $k$  do incremento  $j$  do MFF da *formulação incremental*, a variação dos deslocamentos nodais efectivos segundo os graus de liberdade da estrutura é (Figura 6.31)

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_j^k = (\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}})_j + \mathbf{F}\mathbf{F}_{\text{inc}}^{k-1} \quad (6.62)$$

em que

$$\Delta \mathbf{u}_j^{k-1} = \mathbf{u}_j^{k-1} - \mathbf{u}_{j-1}, \quad (6.63)$$

$$(\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}})_j = (\mathbf{F}_{\text{ext}})_j - (\mathbf{F}_{\text{ext}})_{j-1} \quad (6.64)$$

e

$$\mathbf{F}\mathbf{F}_{\text{inc}}^{k-1} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_j^{k-1} - \Delta \mathbf{F}_{\text{int}} \left[ \mathbf{u}_j^{k-1} \right] \quad (6.65)$$

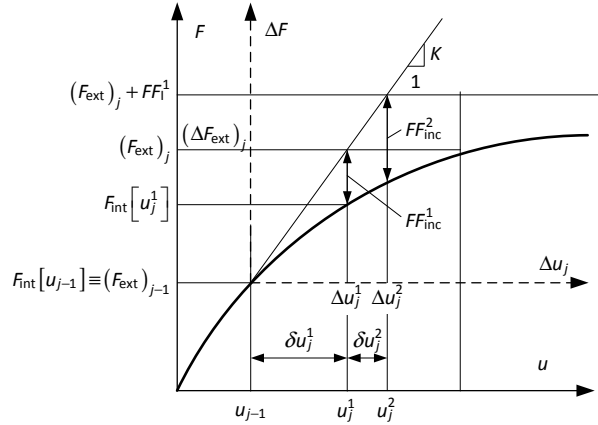


Figura 6.31 – Ilustração da formulação incremental do MFF para o caso OD.

com

$$\Delta \mathbf{F}_{\text{int}} [\mathbf{u}_j^{k-1}] = \mathbf{F}_{\text{int}} [\mathbf{u}_j^{k-1}] - \mathbf{F}_{\text{int}} [\mathbf{u}_{j-1}]. \quad (6.66)$$

Substituindo sucessivamente (6.66) e (6.63) em (6.65) chega-se a

$$\mathbf{F}\mathbf{F}_{\text{inc}}^{k-1} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_j^{k-1} - (\mathbf{F}_{\text{int}} [\mathbf{u}_j^{k-1}] - \mathbf{F}_{\text{int}} [\mathbf{u}_{j-1}]) = \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_j^{k-1} - (\mathbf{F}_{\text{int}} [\Delta \mathbf{u}_j^{k-1} + \mathbf{u}_{j-1}] - \mathbf{F}_{\text{int}} [\mathbf{u}_{j-1}]). \quad (6.67)$$

A comparação das expressões (6.60) e (6.61) com as expressões (6.62) e (6.67), respectivamente, evidencia a relação entre a formulação incremental do MFF e a formulação total, mostrando que a formulação total pode ser vista como o caso particular da formulação incremental com  $\mathbf{u}_{j-1} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{F}_{\text{int}}[\mathbf{0}] = \mathbf{0}$  e  $(\mathbf{F}_{\text{ext}})_{j-1} = (\mathbf{F}_{\text{ext}})_0 = \mathbf{0}$ , de onde resulta  $\Delta \mathbf{u}_j^{k-1} = \mathbf{u}_j^{k-1}$ ,  $\Delta \mathbf{F}_{\text{int}}[\mathbf{u}_j^{k-1}] = \mathbf{F}_{\text{int}}[\mathbf{u}_j^{k-1}]$  e  $\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}}$ , ou seja, a diferença na aplicação da formulação incremental e total reside na forma como são calculadas as forças fictícias.

À expressão (6.62) pode ser dada outra forma tendo em consideração que

$$\Delta \mathbf{u}_j^k = \Delta \mathbf{u}_j^{k-1} + \delta \mathbf{u}_j^k \quad (6.68)$$

de onde resulta

$$\mathbf{K}(\Delta \mathbf{u}_j^{k-1} + \delta \mathbf{u}_j^k) = (\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}})_j + \mathbf{F}\mathbf{F}_{\text{inc}}^{k-1} \rightarrow \delta \mathbf{u}_j^k = \mathbf{K}^{-1}(\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}})_j + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}\mathbf{F}_{\text{inc}}^{k-1} - \Delta \mathbf{u}_j^{k-1} \quad (6.69)$$

ou ainda, substituindo (6.67) em (6.69)

$$\delta \mathbf{u}_j^k = -\mathbf{K}^{-1}(\Delta \mathbf{F}_{\text{int}} [\mathbf{u}_j^{k-1}] - (\Delta \mathbf{F}_{\text{ext}})_j) \quad (6.70)$$

que não é mais que a forma genérica do método de *Newton-Raphson* modificado.

As forças equivalentes (forças  $P-\Delta$ ) a serem aplicadas em cada incremento podem ser estabelecidas por análise da estrutura representada na Figura 6.32(a), constituída por um elemento vertical rígido e por uma mola angular na extremidade inferior.

Para  $(H,P)$  o equilíbrio na configuração deformada  $M_{\text{int}} = M_{\text{ext}}$  no nó A (Figura 6.32(b)) escreve-se

$$M_{\text{int}} = M_{\text{ext}} \rightarrow f[\theta] = HL + P\theta L \quad (6.71)$$

em que  $M_{\text{ext}}$  é o momento provocado pelas acções exteriores e  $M_{\text{int}}$  é o momento na mola.

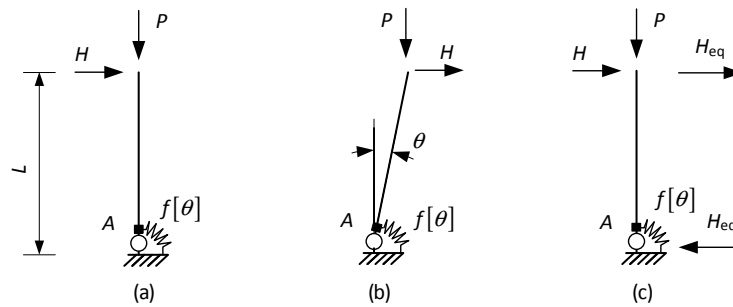


Figura 6.32 – Exemplo simplificado para avaliação do incremento de forças equivalentes: (a) problema original, (b) equilíbrio na configuração deformada, (c) equilíbrio na configuração indeformada com forças equivalentes.

Por definição de carregamento equivalente, o momento associado a  $P$  tem que ser modelado por forças equivalentes, pelo que para esta carga é dado por (Figura 6.32(c))

$$H_{eq} = P \theta . \quad (6.72)$$

Para  $(H + \Delta H, P + \Delta P)$ , a mesma relação de equilíbrio escreve-se

$$f[\theta + \Delta\theta] = (H + \Delta H)L + (P + \Delta P)(\theta + \Delta\theta)L \quad (6.73)$$

com

$$M_{ext} = HL + \Delta HL + H_{eq}L + \Delta H_{eq}L \quad (6.74)$$

em que

$$\Delta H_{eq} = P \Delta\theta + \Delta P \theta + \Delta P \Delta\theta . \quad (6.75)$$

Subtraindo a expressão (6.71) a (6.73), obtém-se

$$f[\theta + \Delta\theta] - f[\theta] = \Delta HL + \Delta H_{eq}L . \quad (6.76)$$

A comparação de (6.71) com (6.76) permite concluir que as forças  $P-\Delta$  a considerar em cada incremento são definidas pela expressão (6.75). Este resultado foi obtido de forma independente da lei de comportamento da mola angular e por isso foi generalizado para elementos viga-pilar e para ligações viga-pilar com comportamento materialmente não linear. Assim, as forças  $P-\Delta$  a aplicar nos elementos 1D e nas ligações viga-pilar em cada iteração na formulação incremental são determinadas como a soma de três parcelas:

- (i) forças  $P-\Delta$  obtidas assumindo as forças nodais nas extremidades de cada elemento no final do incremento anterior e a variação de deslocamentos nodais no incremento actual (parcela  $P \Delta\theta$  da expressão (6.75));
- (ii) forças  $P-\Delta$  obtidas assumindo a variação das forças nodais nas extremidades de cada elemento no incremento actual e os deslocamentos nodais no final do incremento anterior (parcela  $\Delta P \theta$  da expressão (6.75));
- (iii) forças  $P-\Delta$  obtidas assumindo a variação das forças nodais nas extremidades de cada elemento e a variação de deslocamentos nodais no incremento actual (parcela  $\Delta P \Delta\theta$  da expressão (6.75)), que será normalmente um termo de ordem inferior a qualquer um dos outros.

## 6.5. Validação dos modelos

### 6.5.1. Elementos 1D

#### 6.5.1.1. Estruturas com solução analítica

Para validar a abordagem proposta para a modelação de elementos 1D, foram considerados dois problemas com solução analítica conhecida e material caracterizado por leis de comportamento  $\sigma$ - $\varepsilon$  uniaxial com rigidez tangente sempre positiva. Considere-se primeiro o problema representado na Figura 6.33(a), consistindo numa viga em consola, de secção rectangular e constituída por um material homogéneo cuja relação tensão-extensão uniaxial é (Figura 6.33(c))

$$\sigma[\varepsilon] = E\varepsilon^3. \quad (6.77)$$

A relação momento-curvatura da secção transversal da viga correspondente a esta relação constitutiva é

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma[y]bydy = b \int_{-h/2}^{h/2} E\varepsilon^3ydy = Eb \int_{-h/2}^{h/2} (\chi y)^3 ydy = E\chi^3 \frac{bh^5}{80} \rightarrow \chi = \left( \frac{80M}{Eb h^5} \right)^{1/3}. \quad (6.78)$$

Admitindo que estamos na presença de pequenas deformações, o deslocamento transversal ao longo do elemento linear é

$$\delta(x) = \int_0^x \int_0^x \chi dx dx = \frac{\chi x^2}{2}. \quad (6.79)$$

Na Figura 6.34 está representada a configuração deformada definida pela expressão (6.79) – solução analítica – para  $E=200$  GPa,  $b=0.3$  m,  $h=0.4$  m,  $L=3$  m e  $M=1$  kNm. Estão também representadas as configurações deformadas determinadas pelo EvalS para 5, 10, 20 e 40 camadas (fibras) de igual espessura.

De acordo com Calabrese, Almeida *et al.* [2010], no caso de rigidez tangente seccional de flexão positiva, o comportamento global de um elemento em consola não é significativamente afectado desde que se adopte uma discretização em pelo menos quatro elementos. Apesar dos resultados reportados por Calabrese, Almeida *et al.* [2010] serem relativos a elementos com funções de forma polinomiais de grau três para os deslocamentos transversais (polinómios de *Hermite*) e lineares para os deslocamentos axiais, integrados recorrendo a dois pontos de *Gauss-Legendre*, adoptou-se como ponto de partida o trabalho realizado por estes autores, e foi utilizada neste exemplo uma discretização do pilar em cinco elementos.

O erro relativo do deslocamento é independente de  $x$ , Tabela 6.2. Da análise desta tabela

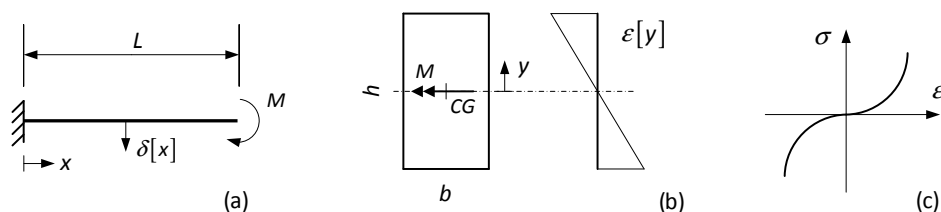


Figura 6.33 – Primeiro problema utilizado na validação do modelo de fibras.

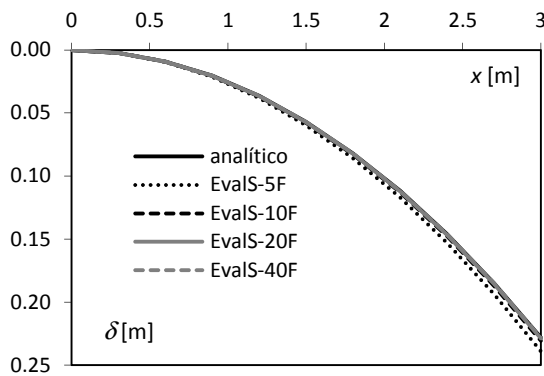


Figura 6.34 – Configuração deformada da estrutura.

Tabela 6.2 – Erro relativo do deslocamento transversal.

modelo	$\frac{\delta_{\text{analítico}} - \delta_{\text{EvalS}}}{\delta_{\text{analítico}}} [\%]$
EvalS-5F	4.73
EvalS-10F	1.12
EvalS-20F	0.27
EvalS-40F	0.06

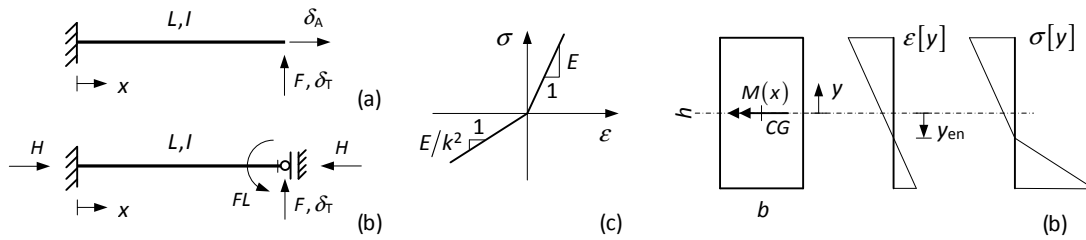


Figura 6.35 – Segundo e terceiro problema utilizado na validação do modelo de fibras.

pode-se concluir que o modelo de fibras implementado no EvalS reproduz correctamente o comportamento materialmente não linear para este problema em particular e ainda que a discretização da secção em 20 camadas (fibras) conduz a erros desprezáveis.

Com o segundo problema considerado, representado na Figura 6.35(a), pretende-se avaliar a capacidade do modelo de fibras simular o comportamento de elementos constituídos por materiais com rigidez diferente em compressão e em tracção (como é o caso do betão), nomeadamente em modelar correctamente a deformação axial sofrida por estes elementos.

A extensão longitudinal num ponto de ordenada  $y$  da secção transversal, de acordo com a hipótese de Euler-Bernoulli, é

$$\varepsilon[y] = \varepsilon_0 - \chi y. \quad (6.80)$$

Os esforços na secção transversal representada na Figura 6.35(d), para a relação constitutiva representada na Figura 6.35(c) de acordo com a equação de compatibilidade (6.80) e para  $|y_{\text{en}}| < h/2$ , podem ser escritos na forma

$$M = \frac{E b}{2k^2} \left[ -\frac{(k^2 - 1)}{3} \frac{\varepsilon_0^3}{\chi^2} + \frac{h^2 (k^2 - 1)}{4} \varepsilon_0 + \frac{h^3 (k^2 + 1)}{12} \chi \right] \quad (6.81)$$

e

$$N = \frac{E b}{2k^2} \left[ (k^2 - 1) \frac{\varepsilon_0^2}{\chi} + h (k^2 + 1) \varepsilon_0 + \frac{h^2 (k^2 - 1)}{4} \chi \right]. \quad (6.82)$$

No caso particular da estrutura representada na Figura 6.35(a)  $N=0$  pelo que a expressão (6.82) permite concluir

$$\varepsilon_0 = \frac{-\chi h (k - 1)}{2(k + 1)} \quad (6.83)$$

que substituída em (6.81) e tendo em consideração que  $M[x]=F(L-x)$  conduz a

$$\chi = \frac{3(1+k)^2}{Ebh^3} F(L-x). \quad (6.84)$$

Os deslocamentos na extremidade da consola são

$$\delta_A = \int_0^L \varepsilon_0 dx = -\frac{h}{16EI} FL^2 (1-k^2), \quad \delta_T = \int_0^L \int_0^x \chi[s] ds dx = \frac{FL^3}{12EI} (1+k)^2. \quad (6.85)$$

Considerando o caso particular de  $L=4\text{m}$ ,  $E=30\text{GPa}$ ,  $b=h=0.5\text{m}$ ,  $k^2=10$  e  $F=10\text{kN}$  e comparando a solução analítica com a solução aproximada determinada pelo EvalS, obtiveram-se os erros apresentados na Tabela 6.3 para uma discretização do pilar em 5 elementos.

Analisando os valores constantes da Tabela 6.3, conclui-se que, também para este segundo problema materialmente não linear, o modelo de fibras implementado no EvalS produz resultados muito bons. Verifica-se ainda que a discretização da secção em 20 camadas conduz a valores desprezáveis para o erro relativo.

Considere-se agora a estrutura e o carregamento aplicados representados na Figura 6.35(b). Esta estrutura difere da representada na Figura 6.35(b) nas condições de apoio da extremidade direita – deslocamento horizontal impedido – e no carregamento – para além da força transversal foi aplicado um momento cujo valor é tal que ao longo de todo o vão se verifica  $|y_{en}| < h/2$  e conseqüentemente as expressões (6.81) e (6.82) permanecem válidas.

A extensão axial e a curvatura em cada secção também são dadas pela solução do sistema de equações (6.81) e (6.82). A estrutura é axialmente indeterminada e o esforço axial pode ser obtido impondo  $\delta_A = 0$ . Este problema, apesar de simples e de ser expresso de forma analítica, não tem solução analítica. Desta forma programaram-se as equações no programa *Mathematica*, e utilizaram-se as suas rotinas para determinar soluções numéricas

Considere-se novamente o caso particular de  $L=4\text{m}$ ,  $E=30\text{GPa}$ ,  $b=h=0.5\text{m}$ ,  $k^2=10$ ,  $F=10\text{kN}$ , a viga discretizada em cinco elementos e a secção transversal discretizada em 20 camadas.

Embora o sistema de equações não lineares apresente várias soluções, só uma tem significado físico. O valor do esforço axial calculado numericamente no *Mathematica* foi  $N=302.48\text{kN}$  e no EvalS  $N=303.67\text{kN}$ , o que representa um erro de 0.4%. Os campos de momento flector determinados por estes dois programas apresentam uma correspondência quase exacta. Na Figura 6.36 apresenta-se ainda a evolução da curvatura  $\chi$  e da extensão axial  $\varepsilon_0$  ao longo do

Tabela 6.3 – Erros no cálculo do deslocamento transversal e axial da estrutura.

modelo	$\frac{\delta_{A,\text{analítico}} - \delta_{A,\text{EvalS}}}{\delta_{A,\text{analítico}}} [\%]$	$\frac{\delta_{T,\text{analítico}} - \delta_{T,\text{EvalS}}}{\delta_{T,\text{analítico}}} [\%]$
EvalS-5F	-5.22	-4.17
EvalS-10F	-1.35	-0.35
EvalS-20F	-0.35	-0.35
EvalS-30F	-0.14	0.00

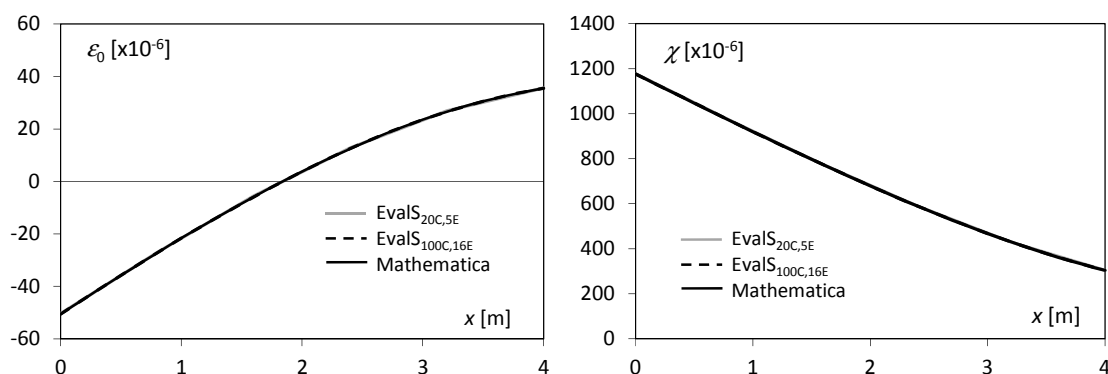


Figura 6.36 – Evolução da curvatura e da extensão axial.

eixo do elemento para o caso considerado ( $\text{EvalS}_{20\text{C},5\text{E}}$ ) e para uma discretização mais fina de 16 elementos e 100 camadas ( $\text{EvalS}_{100\text{C},16\text{E}}$ ).

A Figura 6.36 revela que o modelo de fibras implementado no EvalS, quando integrado no MFF, conduz a distribuições de curvatura e extensão axial semelhantes às distribuições calculadas numericamente a partir da representação analítica do problema. Esta figura mostra ainda que os resultados obtidos para a discretização da secção transversal em 20 camadas e do elemento linear em 5 elementos são muito semelhantes aos obtidos para uma discretização da secção transversal em 100 camadas e do elemento linear em 16 elementos. O exemplo apresentado permite concluir que a abordagem implementada no EvalS para modelar elementos 1D, permite modelar explicitamente a interacção entre o esforço axial, o momento flector, a extensão axial e a curvatura em elementos constituídos por materiais com comportamento distinto em compressão e tracção e rigidez tangente positiva.

### 6.5.1.2. Tirantes de betão armado

Para validar a incorporação do *tension stiffening* no modelo por intermédio do modelo de comportamento de tirantes do MC2010 (Fib [2010b]) foram simulados ensaios experimentais de tirantes de betão armado recorrendo ao EvalS e compararam-se os resultados com o próprio modelo de comportamento de tirantes do MC2010 (Figura 6.18(a)). Foram considerados dois tirantes ensaiados experimentalmente e adoptados também por Stramandinoli e Rovere [2008] para avaliar o modelo de *tension stiffening*:

- (i) espécime 7 ensaiado por Hwang e Rizkalla [1983], citado por Gupta e Maestrini [1990], com dimensões  $76.2 \times 30.5 \times 17.8 \text{ cm}^3$ , taxa de armadura longitudinal  $\rho = 1.476\%$ ,  $f_{\text{ctm}} = 2.62 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 27.6 \text{ GPa}$ ,  $f_y = 469 \text{ MPa}$  e  $E_s = 199 \text{ GPa}$ ;
- (ii) espécime V3 ensaiado por Rostásy, Koch *et al.* [1976], citado por Massicotte, Elwi *et al.* [1990], com dimensões  $600 \times 30 \times 50 \text{ cm}^3$ , taxa de armadura longitudinal  $\rho = 0.67\%$ ,  $f_{\text{ctm}} = 1.17 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 10 \text{ GPa}$ ,  $f_y = 526 \text{ MPa}$  e  $E_s = 197 \text{ GPa}$ .

A Figura 6.37 representa o modelo de comportamento para tirantes do MC2010, a solução obtida com o EvalS, que implementa uma relação constitutiva para betão em tracção baseada no MC2010, e o comportamento registado experimentalmente.

Como seria de esperar, o modelo de fibras usado pelo EvalS reproduz fielmente o modelo de *tension stiffening* proposto pelo MC2010 para um tirante de betão armado. A comparação



deste modelo com os resultados experimentais revela algum desfasamento, expectável em resultado das simplificações do modelo, particularmente na transição entre a fase de formação de fendas e a fase de fendilhação estabilizada bem como na proximidade da cedência das armaduras.

### 6.5.1.3. Vigas de betão armado em flexão simples

Para avaliar se a abordagem proposta é adequada à modelação de elementos estruturais de betão armado submetidos a esforços predominantemente de flexão, foram seleccionados ensaios laboratoriais de vigas de betão armado simplesmente apoiadas com resultados publicados, utilizou-se o EvalS para simular estes ensaios, e procedeu-se à comparação dos resultados experimentais com os resultados numéricos. Seleccionaram-se para este efeito os ensaios também seleccionados por Stramandinoli e Rovere [2008] relativos à (i) viga VRE ensaiada por Ferrari [2002], (ii) vigas VT1 e VT2 ensaiadas por Beber [1999] e (iii) viga VB6 ensaiada por Juvandes [1999]. As características geométricas e mecânicas destas vigas são apresentadas na Figura 6.38 e nas tabelas subsequentes.

O módulo de elasticidade inicial do betão foi estimado a partir resistência média à compressão do betão recorrendo-se à expressão 2.1-16 do MC90 [1990]. Além disso, assumiu-se simplificada na Tabela 6.5  $h_{ef} = h/4$ . Atendendo aos valores de  $\alpha_e \rho_{ef}$  é espectável que

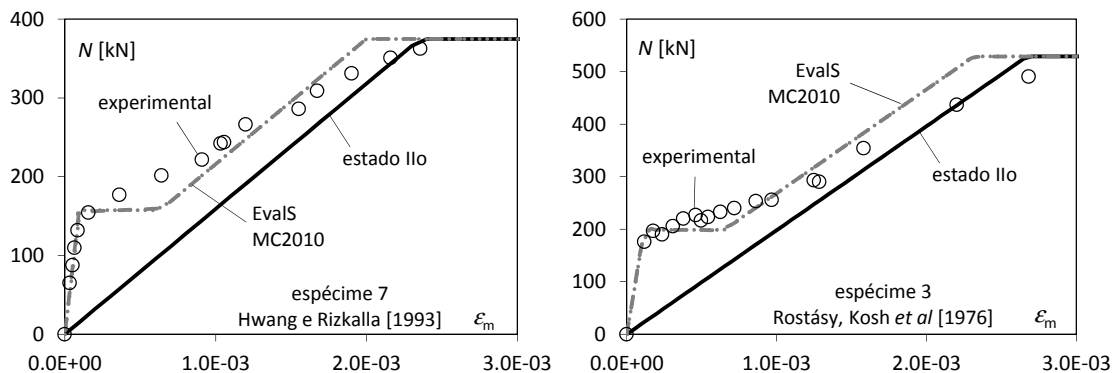


Figura 6.37 – Validação da implementação do modelo de *tension stiffening* no EvalS.

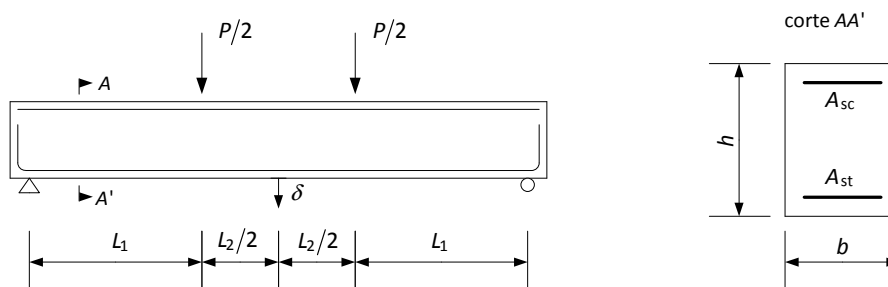


Figura 6.38 – Geometria das vigas modeladas, carregamento e condições e apoio.

Tabela 6.4 – Propriedades geométricas das vigas.

espécime	$L_1$ [mm]	$L_2$ [mm]	$b$ [mm]	$h$ [mm]
VRE	550	550	150	200
VT1/VT2	783	784	120	250
VB6	650	200	150	75

Tabela 6.5 – Propriedades mecânicas e geométricas das vigas.

espécime	$E_c$ [GPa]	$\alpha_e$	$\rho$ [%]	$h_{ef}$ [mm]	$\rho_{ef}$ [%]	$\alpha_e \rho$	$\alpha_e \rho_{ef}$
RE	31.2	6.7	0.34	50.00	1.34	0.023	0.090
VT1/VT2	32.2	6.7	0.52	62.50	2.09	0.035	0.140
VB6	33.5	5.2	0.89	18.75	3.57	0.046	0.186

Tabela 6.6 – Propriedades mecânicas e geométricas das vigas (continuação).

espécime	$A_{st}$							$A_{sc}$					
	$f_{cm}$ [MPa]	$n$	$\phi$ [mm]	$f_y$ [MPa]	$E_s$ [MPa]	$E_{st}/E_s$ [%]	$\varepsilon_u$ [%]	$n$	$\phi$ [mm]	$f_y$ [MPa]	$E_s$ [MPa]	$E_{st}/E_s$ [%]	$\varepsilon_u$ [%]
VRE	30.7	2	8	545.8	210.0	1.00	2.0	2	6	767.5	210.0	1.60	2.0
VT1/VT2	33.5	2	10	565.0	214.8	0.00	2.0	2	6	738.0	214.8	1.60	2.0
VB6	37.9	2	8	497.0	195.0	0.42	52.0	2	3	192.0	174.0	0.10	22.0

o *tension stiffening* seja menos relevante no espécime VB6 que nos espécimes VT1/VT2 e seja menos relevante nestes que no espécime VRE. Dada a ausência de informação relativa ao recobrimento das armaduras longitudinais adoptou-se nas simulações das vigas VT1, VT2 e VRE o valor 20 mm e na da viga VB6 o valor 10 mm.

De acordo com Fardis [2005] e Priestley, Calvi *et al.* [2007] (citados por Calabrese [2008]), em elementos que verifiquem a condição

$$\frac{M}{Vh} = \frac{L}{h} > \begin{cases} 2.5 & \text{(Fardis [2005])}, \\ 3 & \text{(Priestley, Calvi et al. [2007])}, \end{cases} \quad (6.86)$$

em que  $M$  e  $V$  são o momento flector e o esforço transversal na secção crítica,  $h$  é a altura da secção transversal do elemento e  $L$  é a distância da secção crítica ao ponto de inflexão, pode-se considerar que (i) a hipótese de Euler-Bernoulli é válida, (ii) os mecanismos resistentes de flexão e de esforço transversal são praticamente independentes e (iii) a deformação devida ao esforço transversal é limitada. Os espécimes apresentados nas Tabelas 6.4 a 6.6 (Figura 6.38) cumprem a condição (6.86) e por isso desprezou-se neste estudo o efeito do esforço transversal – só o espécime VRE ensaiado por Ferrari [2002] ( $L_1/h=2.75$ ) viola o limite mais estrito proposto por Priestley, Calvi *et al.* [2007], devendo, no entanto, notar-se que este limite não contabiliza a parcela da deformação de flexão da viga de comprimento  $L_2$  com momento flector constante e esforço transversal nulo.

Note-se ainda que, simplificadamente, neste estudo não foram monitorizadas as extensões axiais por forma a verificar limites de validade das relações constitutivas dos materiais associados a fenómenos tais como *spalling*, perda de efectividade do confinamento do betão, encurvadura das armaduras longitudinais ou abertura de fendas (Priestley, Calvi *et al.* [2007]).

Para avaliar o efeito de alguns parâmetros na modelação do comportamento das vigas foi efectuado um estudo paramétrico recorrendo aos modelos para as vigas VT1 e VT2. Na análise numérica efectuada, cujos resultados são apresentados seguidamente, estudou-se a variação do deslocamento a meio vão com a carga total, tendo sido consideradas como variáveis (i) a modelação do *tension stiffening* (CTS) ou não (STS), (ii) o número de elementos finitos em cada troço da viga (1E, 3E, 5E ou 10E) e (iii) o número de camadas (fibras) de betão na secção (5F, 10F, 20F, 30F ou 60F).

No cálculo das curvas carga-deslocamento utilizou-se como critério de paragem do procedimento iterativo do MFF uma tolerância de  $10^{-6}$  para a variação relativa da norma euclidiana dos deslocamentos nodais em iterações sucessivas. Para valores das cargas inferiores aos correspondentes à cedência das armaduras longitudinais o número de iterações requerido foi muito reduzido. No entanto, na fase pós-cedência das armaduras foi necessário

um número de iterações elevado, dada a diferença entre o valor definido no MFF para a rigidez de flexão auxiliar e a rigidez de flexão tangente efectiva. Empregou-se um procedimento de controlo de carga com incrementos de 250 N numa fase inicial, sucessivamente reduzidos para 25 N e 2.5 N.

Para o estudo do efeito do refinamento da malha foram consideradas as malhas de elementos finitos não uniformes representadas na Figura 6.39 e discretizou-se a secção transversal das vigas em 30 camadas (fibras). Note-se que, dado que o campo de momentos no troço de comprimento  $L_2$  é constante, a discretização neste troço não tem influência nos resultados da análise e, conseqüentemente, apenas a discretização dos troços de comprimento  $L_1$  é relevante.

A Figura 6.40 apresenta o efeito da variação do refinamento da malha de elementos finitos, verificando-se que é pouco relevante em todos os aspectos, com excepção da flecha máxima. Ou seja, constata-se que a diferença de resultados para as malhas de 3, 5 ou 10 elementos finitos por troço é reduzida e só é perceptível graficamente no valor da deformação última.

A Figura 6.41 apresenta o efeito da variação do número de camadas para uma discretização em 5 elementos por troço. Constata-se que, para a gama de fibras consideradas, o efeito da variação deste parâmetro também é pouco significativo em todos os aspectos com excepção da flecha máxima. Assim, os modelos de 20, 30 e 60 camadas apresentam diferenças de comportamento pouco significativas, tanto na fase anterior à cedência das armaduras como em termos de flecha máxima. Já o modelo de 5 camadas não apresenta patamar pós-cedência e o modelo de 10 camadas apresenta um patamar pós cedência significativamente superior aos restantes. Em consonância com estes resultados, nos restantes modelos ao longo deste estudo considerou-se a partição da secção em 30 camadas e de cada metade da viga em cinco elementos finitos.

A Figura 6.42 apresenta os resultados da simulação dos ensaios das vigas recorrendo ao modelo apresentado considerando ou não o *tension stiffening*. Os resultados nestas figuras

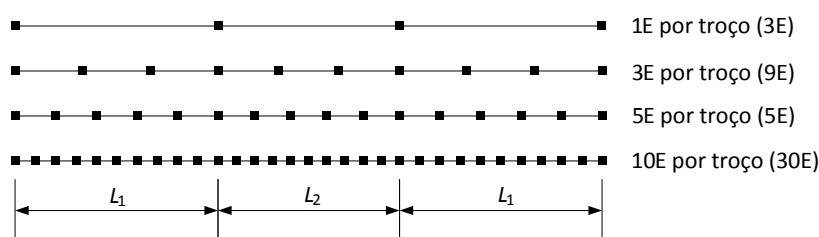


Figura 6.39 – Malhas de elementos finitos utilizadas na análise das vigas VT1/VT2.

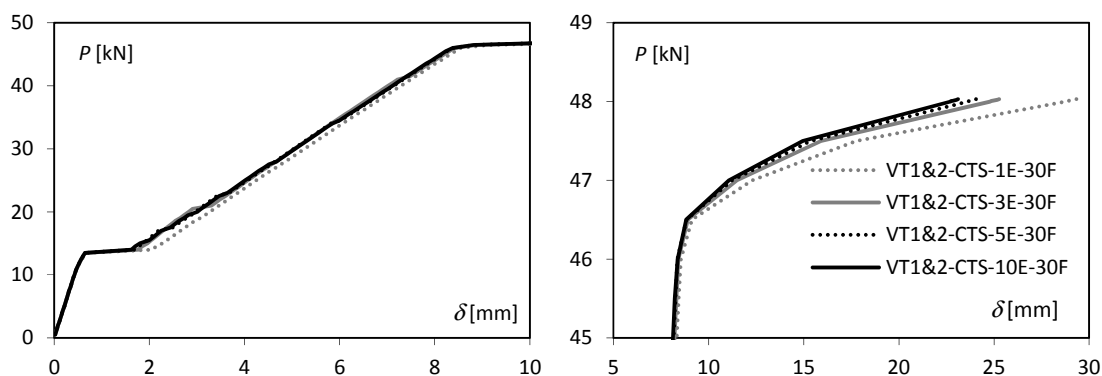


Figura 6.40 – Influência da malha de elementos finitos utilizada na simulação do comportamento das vigas VT1/VT2.

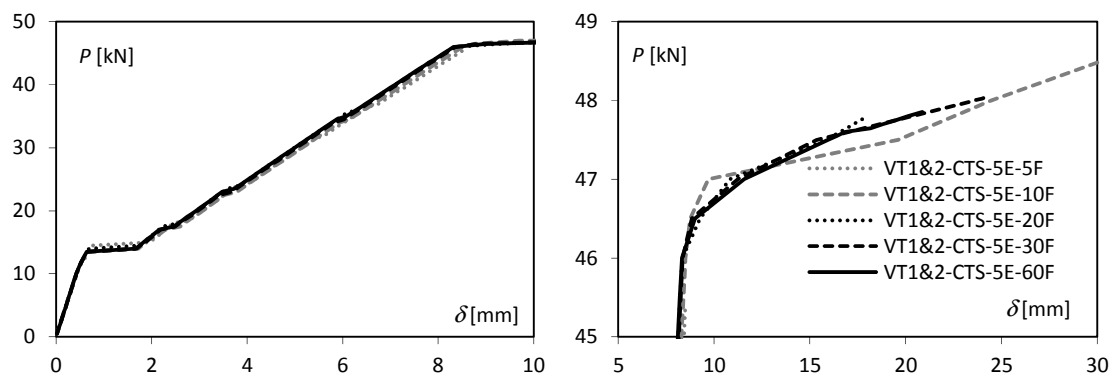


Figura 6.41 – Influência do número de fibras na simulação do comportamento das vigas VT1/VT2.

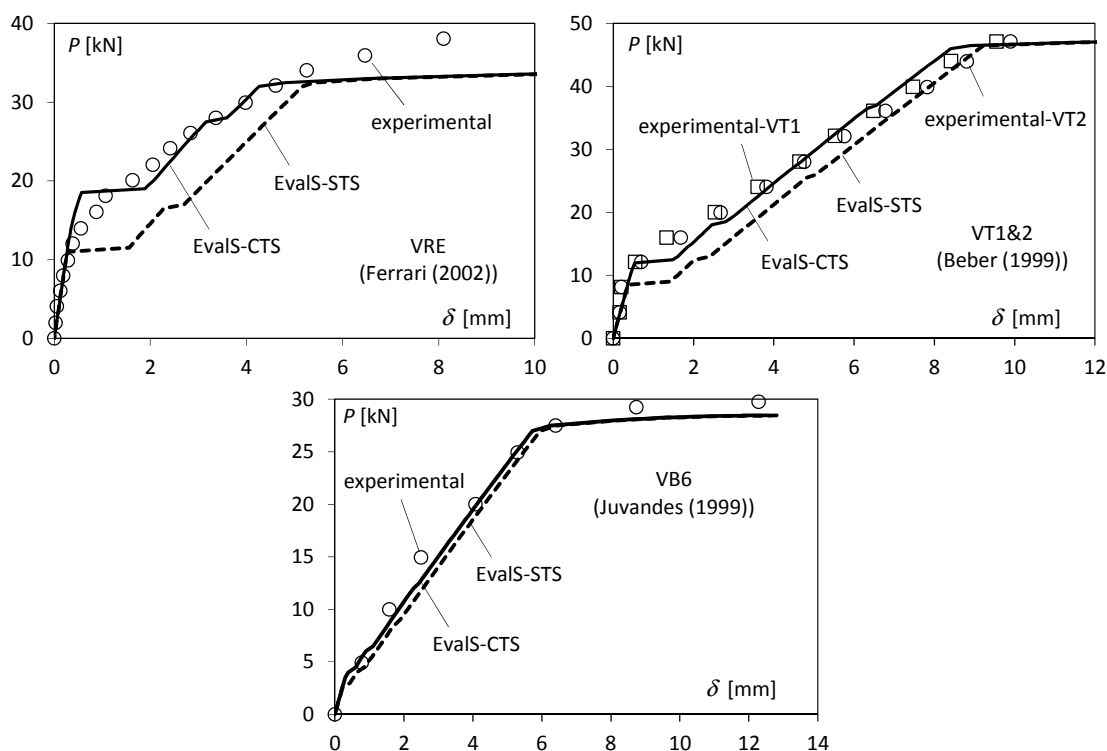


Figura 6.42 – Simulação numérica e resultados experimentais das vigas em flexão simples.

permitem concluir que o modelo proposto possibilita uma boa simulação do comportamento das vigas até a armadura longitudinal de tracção entrar em cedência. Após esta armadura entrar em cedência, a correspondência com os resultados experimentais é menor, provavelmente devido à modelação simplificada da relação tensão-extensão das armaduras para tensões superiores a  $f_y$  (apenas com um único troço rectilíneo). Os resultados apresentados nas figuras evidenciam igualmente que uma modelação adequada do efeito do *tension stiffening* conduz sempre a uma melhor estimativa para o comportamento das vigas, sendo este efeito tanto mais pronunciado quanto menor for  $\alpha_e \rho_{ef}$ , tal como espectável.

#### 6.5.1.4. Ocorrência de localização das deformações em elementos viga-pilar de betão armado

Os elementos das estruturas analisadas nos §§ 6.5.1.1 a 6.5.1.3 apresentam rigidez seccional tangente positiva. Por esse motivo, a utilização do elemento de não linearidade distribuída apresentado nos §§ 6.3 e 6.4 garante objectividade da resposta. No entanto, caso

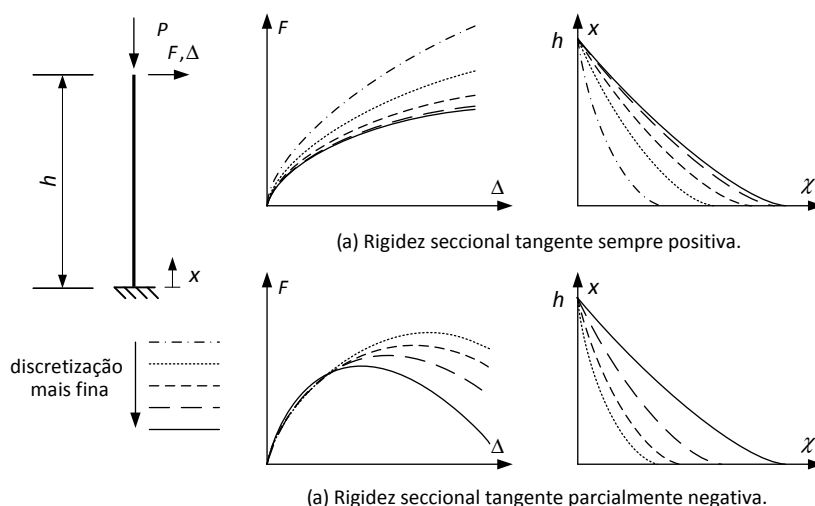


Figura 6.43 – Representação esquemática de respostas (a) objectiva e (b) não objectiva (adaptado de Calabrese, Almeida *et al.* [2010]).

a rigidez seccional tangente dos elementos seja negativa (amacramento), a modelação de elementos viga-pilar recorrendo a elementos de não linearidade distribuída conduz a perda de objectividade como consequência da *localização das deformações* (Légeron e Paultre [2005], Coleman e Spacone [2005], Calabrese, Almeida *et al.* [2010]). Este fenómeno caracteriza-se pela não unicidade das soluções, que dependem da dimensão dos elementos da malha de elementos finitos como consequência da localização da deformação num único elemento (o elemento mais solicitado), não se verificando a convergência da solução com o refinamento da malha de elementos finitos – ver Figura 6.43.

Para precaver a ocorrência de elementos com rigidez seccional tangente negativa, a localização das deformações tem que ser considerada neste estudo.

De modo a garantir a objectividade e a relevância das soluções na análise estrutural de elementos com não linearidade distribuída e com secções transversais com rigidez seccional negativa, são utilizados procedimentos denominados *técnicas de regularização*. De acordo com Légeron e Paultre [2005], as duas técnicas de regularização mais comuns são (i) adaptar as relações  $\sigma$ - $\varepsilon$  tendo em consideração a dimensão dos elementos finitos e (ii) utilizar malhas em que o comprimento  $L_{reg}$  do elemento mais solicitado, onde ocorrerá a localização das deformações, é pré-determinada e independente da dimensão dos restantes elementos finitos. A segunda estratégia é mais facilmente implementável, motivo pelo qual foi adoptada neste estudo.

É habitual atribuir a  $L_{reg}$  o comprimento da *rótula plástica equivalente* (ou comprimento da *rótula plástica*,  $L_p$ ) (Légeron e Paultre [2005], Coleman e Spacone [2005], Calabrese, Almeida *et al.* [2010]). Define-se  $L_p$  como o comprimento que terá um elemento localizado na extremidade da viga-pilar que, assumindo que apresenta curvatura uniforme com valor igual à curvatura inelástica efectiva na secção extrema da viga-pilar e que as restantes secções da viga-pilar apresentam comportamento elástico linear, conduz ao mesmo deslocamento transversal relativo entre essa extremidade e a secção de momento flector nulo que a distribuição de curvatura inelástica efectiva ao longo da viga-pilar.

Como exemplos de expressões empíricas propostas para a determinação de  $L_p$  pode-se referir

a de Paulay e Priestley [1992]

$$L_p = 0.08L + 0.022 f_y \phi \quad (6.87)$$

ou, de forma simplificada,  $L_p \approx 0.5h$ . Em termos de disposições técnicas pode-se também referir a expressão proposta pela EN 1998-2 (CEN [2005b]) para pilares de pontes

$$L_p = 0.10L + 0.015 f_y \phi. \quad (6.88)$$

Nas expressões (6.87) e (6.88)  $f_y$  é a tensão de cedência em MPa,  $\phi$  o diâmetro, nos dois casos dos varões da armadura longitudinal de flexão traccionada, e  $L$  é a distância entre a secção extrema e a secção de momento nulo. Trabalhos mais recentes sobre rótulas plásticas, levaram ao estabelecimento de outras expressões por Priestley, Calvi *et al.* [2007] e Berry e Eberhard [2008].

A aplicação das expressões habitualmente propostas para  $L_p$  conduz a resultados que variam entre  $L_p = 0.5h$  e  $L_p = h$  (Calabrese [2008]), sendo o valor de  $L_p$  tanto maior quanto maior o nível de esforço axial de compressão: Aycardi, Mander *et al.* [1994] constataram experimentalmente que para colunas com esforço axial reduzido ( $n$ ) elevado (30 e 39%) o quociente  $L_p/h$  varia entre 0.74 e 1.25 e para colunas com  $n$  mais baixo (10 e 13%) o quociente  $L_p/h$  varia entre 0.47 e 0.6 enquanto que Tanaka e Park [1990] constataram que  $L_p/h$  para  $n$  igual a 10, 20 e 30% atinge valores médios de 0.46, 0.59 e 0.75, respectivamente. Tanaka e Park [1990] também concluíram que para elementos com  $n$  baixo é adequado assumir  $L_p/h = 0.5$ .

Calabrese, Almeida *et al.* [2010] mostraram que a localização numérica não ocorre por todo o elemento mais solicitado mas apenas no ponto de integração com maior esforço, pelo que propuseram que a dimensão deste elemento seja função do esquema de integração adoptado e tal que a área de influência (o peso) do ponto de integração com maior esforço corresponda a  $L_p$ .

#### 6.5.1.5. Flexão composta e *beam growth* em elementos viga-pilar de betão armado

O fenómeno designado por *beam growth* na literatura anglo-saxónica, tem merecido pouca atenção por parte dos investigadores, provavelmente porque só é relevante em estruturas estaticamente indeterminadas, que raramente são estudadas experimentalmente devido aos custos associados (Fenwick e Megget [1993]). Este fenómeno deve ser considerado na análise rigorosa do comportamento de estruturas estaticamente indeterminadas, de modo a evitar a subestimação do valor dos esforços em alguns elementos estruturais, em particular nas ligações viga-pilar, e consequentes danos locais. De facto, Kim, Stanton *et al.* [2004] avaliaram o efeito do *beam growth* nos resultados da análise *pushover* da estrutura porticada corrente representada na Figura 6.44 e concluíram que, modelando este fenómeno, o esforço de corte nos pilares na base do alinhamento  $E$  e nas ligações viga-pilar são agravados em 52% e 29%, respectivamente. Estes autores concluíram ainda que o efeito do *beam growth* é tanto mais relevante quanto (i) maior o número de vãos, (ii) a altura da secção transversal das vigas e (iii) o *drift*. Sasani, Kazemi *et al.* [2011] concluíram também que a contabilização do efeito do *beam growth* é fundamental na simulação do comportamento de estruturas de betão armado

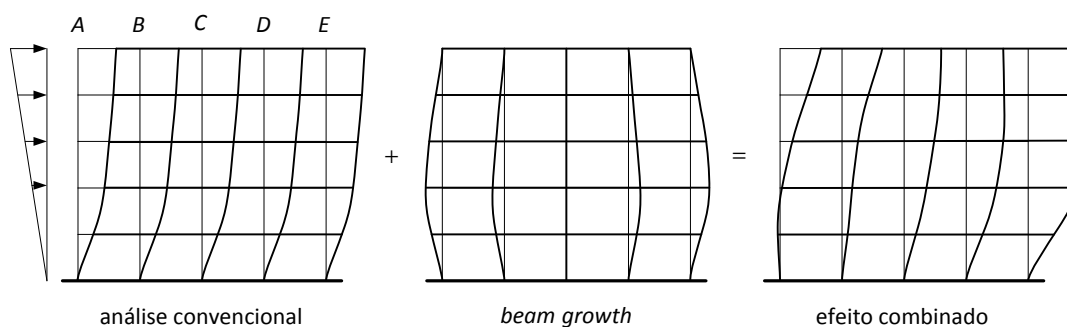


Figura 6.44 – Efeito do *beam growth* (Kim, Stanton *et al.* [2004]).

para efeito de avaliação da respectiva robustez (*robustness*), ou seja, para avaliação da sensibilidade da estrutura ao colapso progressivo.

Para (i) ilustrar o efeito da deformabilidade axial e do esforço axial no comportamento de elementos lineares de betão armado flectidos, (ii) avaliar a capacidade do modelo simular o *beam-growth* e, simultaneamente, (iii) avaliar se a técnica de regularização utilizada conduz a simulações com significado físico, simulou-se o comportamento de uma viga similar à VT1/VT2 (Figura 6.38) mas com uma carga vertical aplicada a meio vão (Figura 6.45(a)). Foram consideradas duas condições de apoio distintas: (i) deslocamento axial livre (AL) e (ii) deslocamento das secções extremas impedido na direcção longitudinal ao nível dos respectivos centros geométricos (AR). Relativamente aos modelos de comportamento foram assumidos os mesmo que no §6.5.1.3, com excepção do betão na zona delimitada pelos estribos: tendo em atenção que se pretende modelar a fase de amaciamento, o confinamento do betão no interior dos estribos foi tido em consideração adoptando para este material o modelo proposto por Park, Priestley *et al.* [1982], assumindo que os estribos conferem o mesmo grau de confinamento que cintas com a idêntica percentagem volumétrica de armadura.

Por forma a captar o comportamento pós-pico da estrutura, e na ausência de procedimentos de controlo de deslocamento no EvalS, este controlo foi mimetizado por intermédio de um elemento biarticulado vertical com os deslocamentos impedidos na extremidade superior e com a extremidade inferior ligada à secção II, o qual foi sujeito a um campo de temperatura uniforme ( $\Delta T_u$ ), tanto ao longo do seu comprimento como na sua secção transversal, cujo valor foi sucessivamente aumentado (Figura 6.45(b)) – nestas condições, a menos do sinal, a força  $F$  corresponde ao esforço axial neste elemento.

Está fora do âmbito deste trabalho avaliar o comprimento  $L_{reg}$  mais adequado para o elemento apresentado nos §§ 6.3 e 6.4, pelo que se adoptou uma definição simplificada tomando como referências os trabalhos já referidos. Assim, apesar da transposição dos resultados de Calabrese, Almeida *et al.* [2010] para o elemento apresentado nos §§ 6.3 e 6.4 não imediata, assumiu-se simplificada  $L_{reg} = 2L_p$ . Tendo em consideração que habitualmente os elementos críticos em estruturas porticadas de betão armado são as vigas e que estas normalmente apresentam  $n$  baixo, assumiu-se genericamente neste estudo  $L_p = 0.5h$ , ou seja  $L_{reg} = h$ . No exemplo que em seguida se apresenta, constatou-se, como era espectável, que impedindo o deslocamento das extremidades do elemento na direcção do seu eixo (AR), se desenvolve, por acção do *beam-growth*, um esforço axial de compressão elevado,

pelo que, apenas neste exemplo, se assumiu que  $L_p = h$  e, conseqüentemente,  $L_{reg} = 2h$ .

Por forma a validar os resultados obtidos recorrendo ao EvalS, as mesmas vigas foram modeladas no programa de elementos finitos ATENA 3D (Červenka Consulting [2009]). Foram utilizados os mesmos critérios para definir a discretização e os mesmos modelos materiais usados na simulação das estruturas cruciformes no Capítulo 4. Atendendo à simetria do problema só foi modelado um quarto da viga (Figura 6.45(c)), tendo os pontos situados sobre os planos de simetria sido impedidos de se deslocar perpendicularmente a estes. A modelação no ATENA 3D foi efectuada por controlo de deslocamento, impondo deslocamentos progressivamente maiores, e iguais entre si, nos pontos do plano de simetria ortogonal ao eixo da viga (secção II), o que confere confinamento ao betão nessa direcção.

Na Figura 6.46 estão representadas as curvas de comportamento  $F-\delta$  para alongamento axial livre (AL) e para alongamento axial impedido (AR). Está ainda representado o esforço axial  $N$  na viga (atente-se ao seu valor relativo) e o seu alongamento axial  $\delta_A$  em ambos os casos.

A Figura 6.46 revela que o modelo 1D implementado no EvalS capta a diferença de comportamento entre as vigas AL e AR, ou seja, capta o aumento de rigidez e de resistência no modelo AR associadas à restrição ao alongamento axial da viga decorrente do *beam growth*. O esforço axial de compressão daí resultante, similar a um pré-esforço progressivo que surge quando a viga se deforma por flexão, é igualmente responsável por uma grande perda de

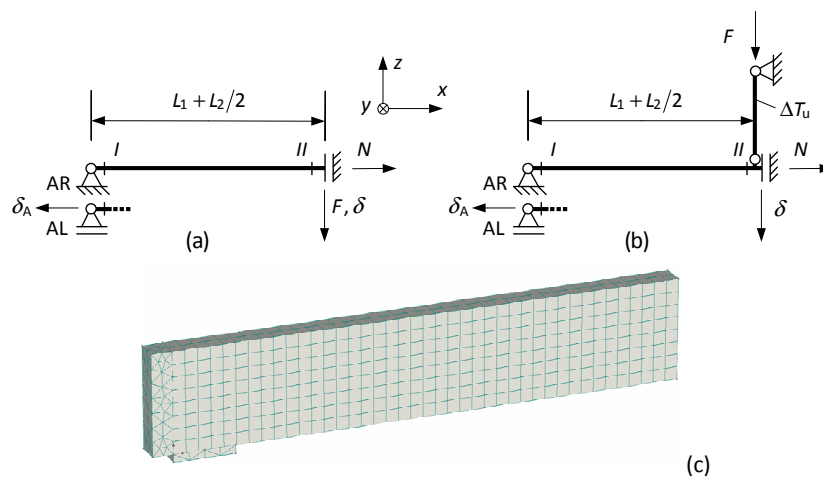


Figura 6.45 – Modelação da viga VT1/VT2, (a) modelo 1D original, (b) modelo 1D com “controlo de deslocamento” e (c) discretização no ATENA 3D.

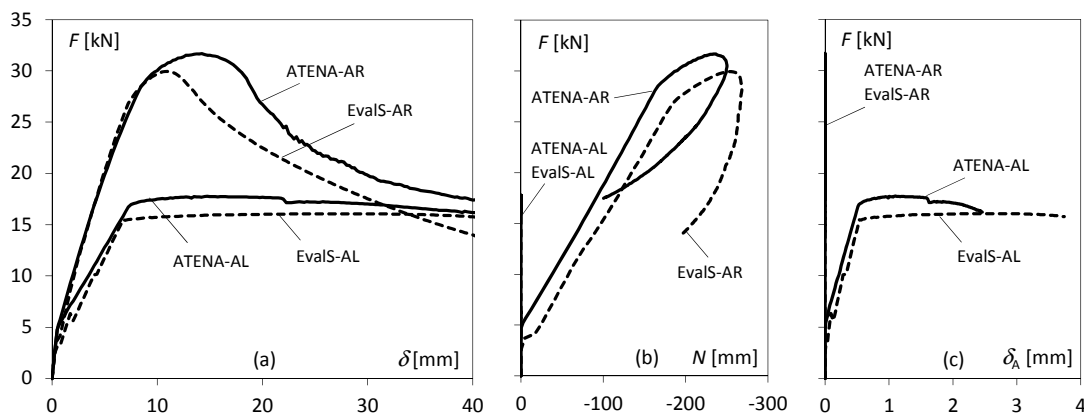


Figura 6.46 – Efeito da restrição ao alongamento axial na viga VT1/VT2. Variação com a carga da (a) flecha máxima, (b) esforço axial, (c) alongamento axial.



ductilidade do modelo AR relativamente ao AL. Esta figura também permite constatar que os resultados do EvalS e do ATENA 3D apresentam uma elevada correspondência nos troços ascendentes da relação  $P-\delta$  e algumas discrepâncias na carga de colapso, na fase descendente da relação  $P-\delta$  e no nível de esforço axial desenvolvido por efeito do *beam growth* dos modelos AR. Também é visível alguma discrepância na carga correspondente ao patamar de cedência dos modelos AL.

As diferenças apresentadas pelo ATENA 3D e pelo EvalS têm origem em efeitos locais na zona de meio vão da viga decorrentes do efeito conjunto da forma como a carga é materializada e das condições de fronteira no ATENA 3D, que induzem um confinamento adicional ao betão nesta zona e que, por serem efeitos locais, não podem ser adequadamente simulados pelo modelo 1D implementado no EvalS. Para ilustrar este aspecto foram desenvolvidos mais dois modelos no ATENA 3D: o ATENA-AR-TC, que difere do ATENA-AR na medida em que os deslocamentos na direcção  $y$  dos nós no plano de simetria que passa pela secção II estão impedidos, e consequentemente o betão está completamente confinado nesta secção, e o ATENA-AR-SS, que difere do ATENA-AR pelo facto da carga a meio vão ser aplicada indirectamente na superfície superior da viga por intermédio de uma chapa de aço de dimensões  $75 \times 60 \times 20$  mm ( $x,y,z$ ), conferindo apenas confinamento transversal ao betão nas direcções  $y$  e  $z$  junto à superfície superior da viga. Foram ainda desenvolvidos mais dois modelos no EvalS: o EvalS-AR-TC, que difere do EvalS-AR na medida em que todo o betão da secção transversal do elemento junto à secção II é considerado confinado (com um grau de confinamento idêntico ao do núcleo), e o EvalS-AR-NC, que difere do EvalS-AR na medida em que não foi considerado o efeito do confinamento do betão. O comportamento destes modelos está representado na Figura 6.47.

A Figura 6.47 revela que o comportamento na fase descendente da relação  $P-\delta$  e a carga de colapso são fortemente condicionados pela forma como a introdução de carga e as condições fronteira são materializadas, na medida em que alteram o confinamento no betão na zona crítica da viga. Este aspecto é evidente tanto pela comparação dos modelos 1D (EvalS) entre si como dos modelos 3D (ATENA 3D) entre si. Além disso, a comparação dos modelos 1D e 3D em que existe um confinamento efectivo do betão na secção II, ou seja, os modelos ATENA-AR-TC e EvalS-AR-TC, revela uma maior correspondência em toda a relação  $P-\delta$ , o que demonstra que em condições idênticas o modelo implementado no EvalS conduz a resultados semelhantes ao ATENA 3D. Note-se, no entanto, que esta mesma comparação também revela alguma discordância na relação  $P-N$ .

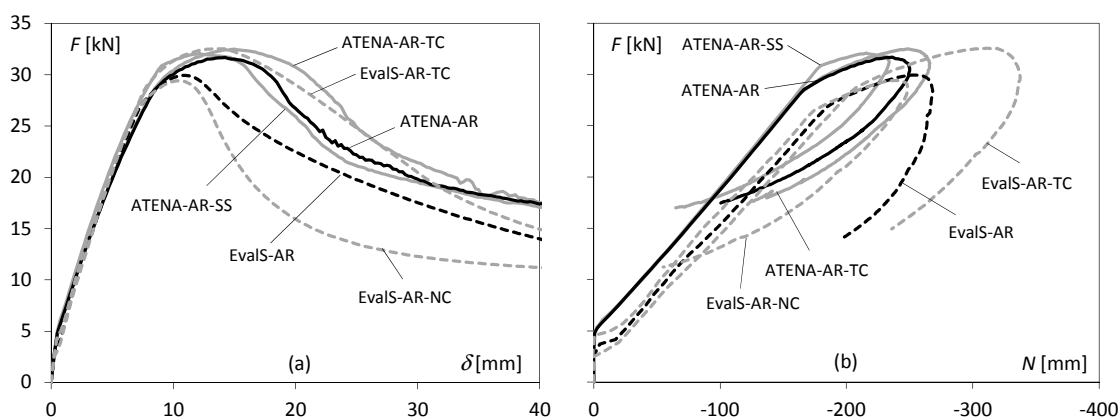


Figura 6.47 – Efeito das condições fronteira e do confinamento do betão sobre a variação da carga máxima com (a) a flecha vertical e (b) o esforço axial.

O exemplo apresentado ilustra o efeito significativo que o *beam growth* pode ter no comportamento de elementos de betão armado flectidos. Apesar da correspondência entre os modelos do ATENA 3D e do EvalS não ser perfeita, à falta de dados experimentais que permitam uma calibração de ambos os modelos e de um estudo mais aprofundado das técnicas de regularização, considerou-se que a correspondência alcançada é satisfatória e que os fenómenos que o modelo 1D visa modelar são adequadamente simulados e serão devidamente contabilizados na análise de uma estrutura porticada completa.

#### 6.5.1.6. Notas finais relativas à modelação de elementos lineares

Nesta secção (§6.5.1) foi apresentada a abordagem que, neste estudo, foi utilizada para modelar os elementos lineares de betão armado. Esta abordagem incorpora todos os aspectos identificados como necessários para garantir o rigor da análise, tendo-se mostrado que é suficientemente simples e robusta para poder ser usada na simulação do comportamento de elementos lineares de betão armado caso se verifique ser necessária uma análise mais rigorosa do comportamento da estrutura em serviço ou uma estimativa mais precisa da respectiva carga última.

#### 6.5.2. Subestruturas com ligações viga-pilar

Para avaliar a aptidão dos modelos propostos para simular o comportamento de estruturas porticadas de betão armado foram modelados ensaios de subestruturas simples de betão armado que incorporam ligações viga-pilar.

As subestruturas analisadas visam representar troços de estruturas porticadas completas compreendidos entre as secções de momento flector nulo quando a estrutura é submetida a cargas laterais – secções de meio vão das vigas e meia altura dos pilares.

Foram adoptados os espécimes ensaiados por Roeser [2002] porque são ensaios recentes que cumprem as disposições normativas em vigor para ligações viga-pilar de betão armado submetidas a acções não cíclicas (Hegger, Sherif *et al.* [2003]). De acordo com Hegger, Sherif *et al.* [2003] as dimensões das subestruturas ensaiadas por Roeser [2002] foram estabelecidas de forma a corresponderem a estruturas comuns à escala 1:2.

A geometria das secções transversais das vigas e pilares bem como as armaduras adoptadas em cada espécime foram apresentadas no §5.5.3.

Nas subestruturas ensaiadas por Roeser [2002], as cargas aplicadas foram materializadas recorrendo aos sistemas de forças auto-equilibrados esquematicamente representados na Figura 6.48, em que as extremidades dos pilares têm os deslocamentos horizontais restringidos. As acções exercidas sobre os espécimes resultam do alongamento dos actuadores hidráulicos, que além de aplicarem cargas directamente sobre as vigas e pilares, conduzem, por equilíbrio ao desenvolvimento de forças nos perfis e varões de pré-esforço. Seguindo a abordagem adoptada por Hegger, Sherif *et al.* [2004], para simular condições de apoio e cargas idênticas às experimentais, adoptaram-se as condições de apoio e cargas representadas na Figura 6.49.

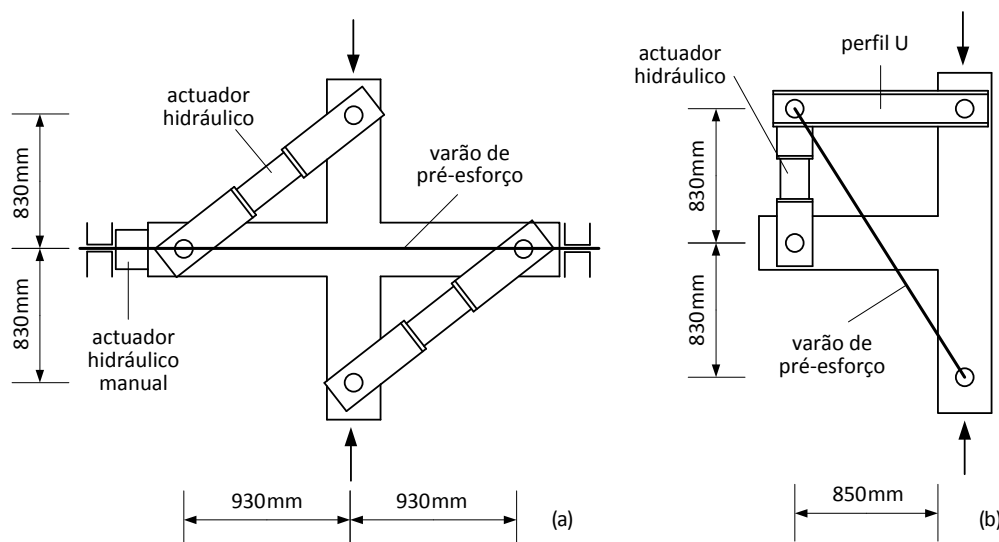


Figura 6.48 – Sistema de aplicação de cargas adoptado por Roeser [2002], (a) ligação viga-pilar interior, (b) ligação viga-pilar de extremidade.

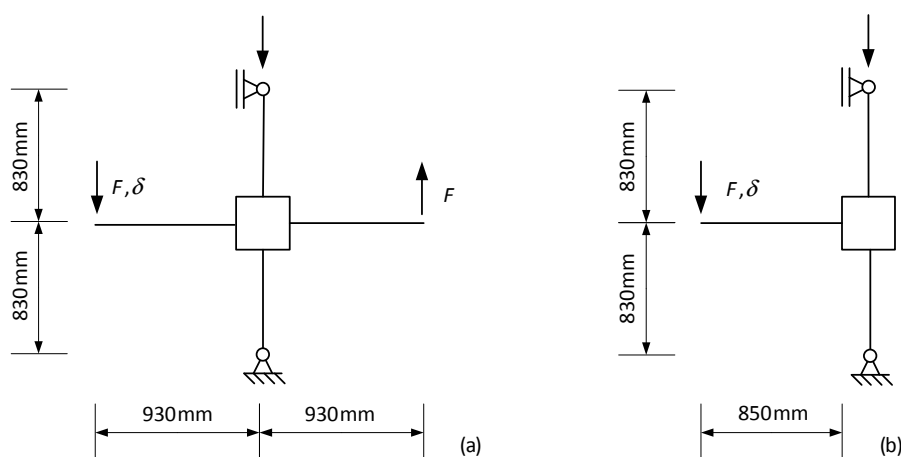


Figura 6.49 – Condições de apoio e aplicação de carga nas simulações numéricas efectuadas, (a) ligação viga-pilar interior, (b) ligação viga-pilar de extremidade.

### 6.5.2.1. Ligações viga-pilar interiores

Para o núcleo da ligação viga-pilar foram utilizados os modelos propostos por Roeser [2002] (EvalS-Roeser) e por LaFave e Kim [2011] (EvalS-Kim) descritos no §5.5.2.3. Estes dois modelos, embora relativamente simples, são os que apresentam uma melhor correspondência com os resultados experimentais (§5.5.3). Para comparação foram ainda efectuadas modelações em que se assumiu a ligação viga-pilar rígida e de com resistência ilimitada (EvalS-Rig).

Utilizou-se o modelo apresentado no §5.4 para simular o comportamento das componentes amarração (C1-8). Para modelar a aderência armaduras-betão foi adoptada a relação constitutiva proposta no §3.1 do MC90 [1990] para betão confinado com outras condições de aderência.

Utilizou-se o modelo apresentado nos §§ 6.3 e 6.4 para simular o comportamento dos elementos viga-pilar. As metades de vigas e pilares modeladas foram discretizadas em três elementos cada, e aos elementos de extremidade foi atribuído um comprimento  $L_{reg} = h$ . Cada secção transversal foi discretizada em 30 camadas. Dado o carácter de curta duração do ensaio foi considerado um coeficiente de fluência efectivo nulo.

Para as armaduras foi assumido um comportamento bilinear definido pelas propriedades obtidas experimentalmente. Para o betão em compressão assumiu-se a relação constitutiva proposta no §2.1.4.4 do MC90 [1990]. Nos casos em que não havia informação disponível foi assumido um recobrimento e um espaçamento de 25 mm para os varões das armaduras longitudinais.

Para o betão em tracção fora da zona de influência das armaduras de tracção, o comportamento é elástico linear se a extensão apresenta valor inferior à extensão de fendilhação ( $\epsilon_{cr}$ ) e a tensão normal é nula se a extensão apresenta valor superior a  $\epsilon_{cr}$ . Para o betão em tracção na zona de influência das armaduras de tracção foi adoptado o modelo de *tension stiffening* apresentado no §6.3.2.

Por forma a captar os troços descendentes das relações  $F-\delta$ , na ausência de procedimentos de controlo de deslocamento no EvalS, foram novamente considerados elementos com comportamento elástico linear dispostos de acordo com a Figura 6.50 aos quais foi imposta uma variação de temperatura uniforme  $\Delta T_u$  com valores progressivamente crescentes. A força  $F$  apresentada nas Tabela 6.7 e na Figura 6.51 é a média aritmética simples do esforço axial nos elementos nos quais é imposta a variação de temperatura.

Na Tabela 6.7 são apresentadas as cargas máximas suportadas pelas subestruturas no decorrer dos ensaios experimentais e nas simulações numéricas recorrendo a cada um dos modelos de comportamento referidos.

A Tabela 6.7 revela que o quociente  $F_{max, EvalS} / F_{max, exp}$  apresenta valor médio e desvio padrão de 91% e 7%, respectivamente, no caso do modelo proposto por Roeser [2002] e 91% e 8% no caso do modelo proposto por LaFave e Kim [2011].

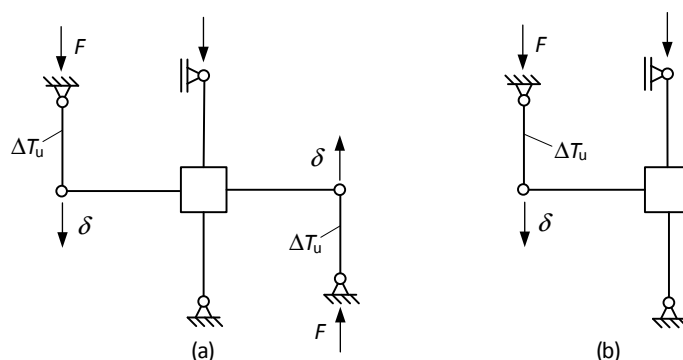


Figura 6.50 – Procedimento adoptado para mimetizar o procedimento de controlo de deslocamento em subestruturas com ligação viga-pilar (a) interior e (b) exterior.

Tabela 6.7 – Cargas máximas aplicadas em subestruturas com ligações viga-pilar interiores.

espécime	$N_{col}$ [kN]	$F_{max}$ [kN]			
		Exp.	EvalS-Rig	EvalS-Roeser	EvalS-Kim
RA2	458	95.8	95.4	95.4	73.3
RA3	502	77.9	105.9	62.9	81.4
RA4	336	114.4	149.7	95.4	103.6
RA5	499	80.8	82.9	81.1	73.4
RA6	641	109.2	98.8	98.5	98.5
RA7	547	123.0	137.7	115.0	112.9

Tal como já tinha sido concluído no §5.5.3, estes resultados mostram que estes modelos de comportamento do núcleo da ligação conduzem uma precisão idêntica em termos de capacidade de resistente e que ambos tendem a subestimar-la, o que por sua vez também conduz a uma subestimação da capacidade resistente das subestruturas.

A aptidão dos modelos propostos para modelar correctamente o comportamento das subestruturas, e não somente a carga de colapso, foi avaliado por intermédio da relação entre a força  $F$  aplicada nas vigas e o deslocamento vertical  $\delta$  de um dos pontos de aplicação de carga (Figura 6.49).

Na Figura 6.51 apresenta-se a evolução das relações  $F-\delta$ , para os valores constantes da carga axial nos pilares apresentados na Tabela 6.7, para as subestruturas RA2 a RA7 ensaiadas por Roeser [2002]. Não se apresenta a modelação da subestrutura RA1 porque esta apenas apresenta como armadura transversal na zona da ligação um varão diagonal, o que não é possível de modelar por qualquer dos modelos utilizados.

O colapso de todas as subestruturas com ligações viga-pilar interiores ensaiados por Roeser [2002] ficou a dever-se ao esgotamento da capacidade resistente das ligações viga-pilar.

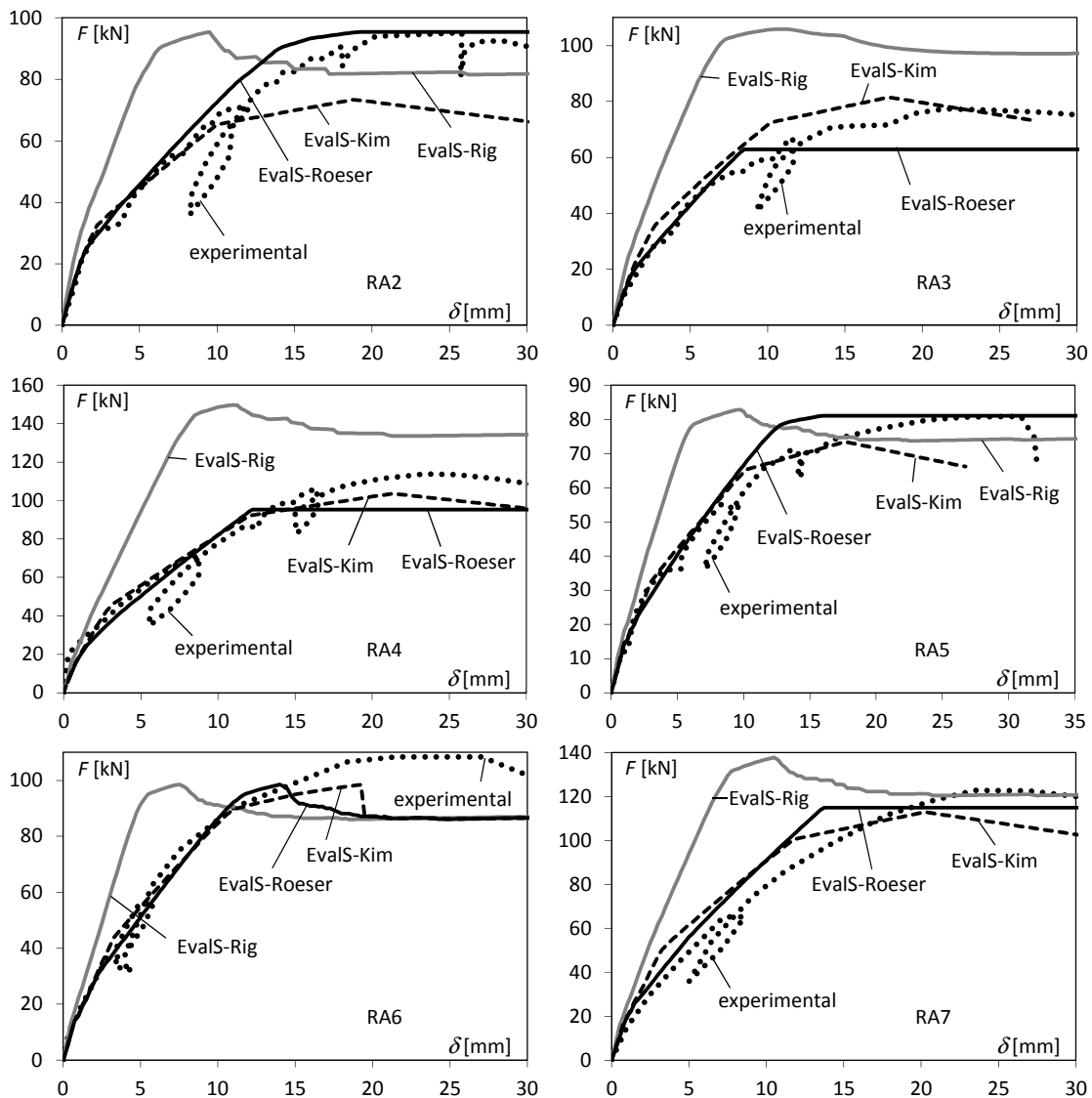


Figura 6.51 – Relação  $F-\delta$  para as subestruturas com ligação viga-pilar interior.

As modelações efectuadas recorrendo ao EvalS apresentaram o mesmo modo de colapso que o verificado experimentalmente em todas as subestruturas com excepção do espécime RA6. Na simulação do comportamento do espécime RA6 o colapso da subestrutura deu-se por esgotamento da capacidade resistente das vigas. Esta diferença de modos de colapso neste espécime deve-se ao facto do momento resistente para as vigas obtido recorrendo ao modelo de fibras ser anormalmente muito inferior ao momento que estas suportaram no ensaio experimental.

Note-se que, como consequência da continuidade das armaduras longitudinais da viga e do pilar no interior da ligação e do carregamento aplicado à subestrutura, o esgotamento da capacidade resistente das componentes amarração ocorre simultaneamente com o esgotamento da capacidade resistente à flexão da viga/pilar adjacente. Desta forma o esgotamento da capacidade resistente referido no parágrafo anterior é relativo à componente núcleo da ligação viga-pilar em corte (C9).

A Figura 6.51 revela que o modelo proposto conduz a uma boa simulação do efeito da flexibilidade da ligação viga-pilar nas deformações apresentadas pela subestrutura independentemente do modelo adoptado para a componente núcleo da ligação em corte (C9). É ainda evidente da Figura 6.51 que o agravamento acentuado da deformabilidade da ligação nas imediações da carga última preconizado pelo modelo proposto por LaFave e Kim [2011] tem correspondência experimental.

Além disso, dentro do intervalo em que são disponibilizados valores experimentais para o comportamento do núcleo da ligação ao corte (§5.5.3), a relação  $F-\delta$  mostra-se coerente com a relação  $\tau_{jh}-\gamma$ , pois a posição relativa das curvas experimentais e das curvas resultantes das simulações para ambas as relações é idêntica.

A subestimação da capacidade resistente do núcleo da ligação por parte dos modelos utilizados para a componente C9 é particularmente evidente na comparação do comportamento experimental exibido pelo espécime RA2 com a estimativa de comportamento adoptando o modelo proposto por LaFave e Kim [2011]. A capacidade de carga do núcleo da ligação só não é estimada por defeito no caso do modelo proposto por Roeser [2002] para o espécime RA5 e no caso do modelo proposto por LaFave e Kim [2011] para o espécime RA3.

### 6.5.2.2. Ligações viga-pilar de extremidade

Como se mostrou no §5.5.3, as subestruturas com ligações viga-pilar de extremidade ensaiadas por Roeser [2002], apresentavam uma pormenorização da ligação com elementos em U dispostos em plano horizontal que se prolongavam para a viga (N5, §2.2.2.3). Este tipo de pormenorização, à semelhança das cintas na zona da ligação viga-pilar, visa aumentar a resistência da ligação ao corte. No entanto, o prolongamento destas armaduras para a viga também conduz ao (i) aumento da resistência à flexão da viga nas imediações da ligação viga-pilar e ao (ii) aumento da rigidez das componentes do tipo amarração da viga em tracção.

O aspecto (i) foi contabilizado nas simulações efectuadas considerando estas armaduras efectivas para efeitos do modelo de fibras ao longo de troço de viga para onde estas são

prolongadas (30 cm). Esta simplificação conduz a uma estimativa por excesso da capacidade resistente da viga na medida em que estes reforços não são efectivos ao longo de todo o seu comprimento em virtude de ser necessário um comprimento mínimo para transferência das tensões das restantes armaduras longitudinais da viga para estas armaduras.

O aspecto (ii) foi simplificadamente contabilizado assumindo as componentes amarração da viga rígidas. Apesar da percentagem de armadura dos U's chegar a ser superior à percentagem de armadura longitudinal de tracção da viga, e além disso, a configuração destes reforços conduzir a mecanismos de transferência de forças das armaduras para o betão distintos do mecanismo de aderência (Figura 6.52(a)), seria de esperar que uma simulação tão simplista conduzisse a curvas  $F-\delta$  mais rígidas que as determinadas experimentalmente, o que não se verificou, como em seguida se mostra. Note-se ainda que as armaduras longitudinais dos espécimes RK3, RK5 e RK6 são amarradas recorrendo a chapas de aço na face oposta do pilar (Figura 6.52(b)) e por isso apresentam também um mecanismo resistente distinto do de aderência.

Optou-se por esta simplificação (componentes amarração das vigas rígidas) dada a dificuldade em identificar quais as armaduras a serem contabilizadas para efeitos de amarração bem como devido à inexistência de um modelo para os mecanismos resistentes envolvidos na amarração.

O nível de carga axial aplicada aos pilares (500 kN) conjugado com o facto destas subestruturas incorporarem ligações viga-pilar de extremidade, e consequentemente, o momento flector na extremidade efectiva dos pilares ser aproximadamente metade do da extremidade efectiva das vigas, conduz a que as componentes amarração dos pilares estejam sempre em compressão. Desta forma a influência da sua flexibilidade para a deformação global da subestrutura é pouco relevante. Por este motivo, e à semelhança do que foi assumido para as componentes amarração das vigas, as componentes amarração dos pilares também foram assumidas rígidas.

Tal como foi referido no §5.5.3, o espécime RK2 apresenta um varão de 20 mm de diâmetro colocado diagonalmente na ligação, e além disso, as armaduras de reforço do pilar inferior estão dispostas em U invertido. Esta pormenorização não é passível de ser contabilizada por intermédio dos modelos existentes na bibliografia para o núcleo da ligação e é espectável que conduza a uma resposta significativamente mais rígida que a observada para outros espécimes com pormenorizações padrão e níveis idênticos de armadura transversal e longitudinal.

A Tabela 6.8 apresenta as cargas máximas suportadas pelas subestruturas nos ensaios experimentais e nas simulações numéricas, para os modelos de comportamento do núcleo de ligação viga-pilar propostos por Roeser [2002] (EvalS-Roeser), LaFave e Kim [2011] (EvalS-Kim) e rígido de resistência infinita (EvalS-Rig).

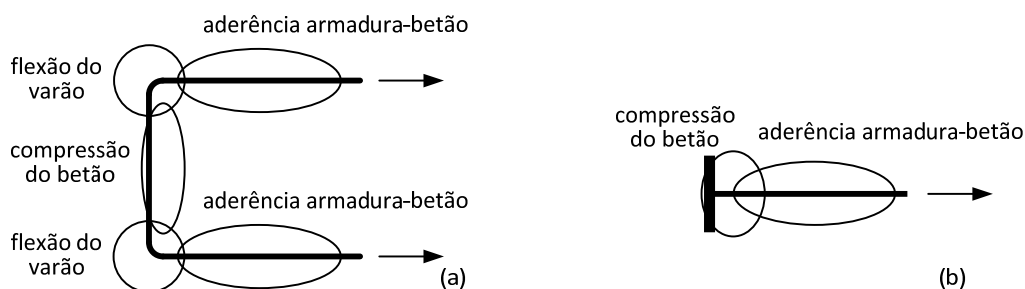


Figura 6.52 – Mecanismos de transferência de tensões dos varões para o betão, (a) reforços em U, (b) chapas de ancoragem.

Tabela 6.8 – Cargas máximas aplicadas em subestruturas com ligações viga-pilar de extremidade.

espécime	$N_{col}$ [kN]	$F_{max}$ [kN]			
		Exp.	EvalS-Rig	EvalS-Roeser	EvalS-Kim
RK1	500	131.7	159.5	124.4	113.1
RK2	500	146.1	144.2	102.5	109.1
RK3	500	137.4	152.9	124.3	114.1
RK4	500	118.5	150.0	100.3	92.5
RK5	500	131.5	175.7	102.9	102.3
RK6	500	181.9	201.0	120.1	118.1
RK7	500	144.4	185.5	132.9	116.0
RK8	500	86.9	153.3	86.8	84.7

A análise dos valores da Tabela 6.8 permite concluir que o quociente  $F_{max, EvalS} / F_{max, exp}$  apresenta valor médio e desvio padrão de 84% e 11%, respectivamente, no caso do modelo proposto por Roeser [2002] e de 80% e 9%, respectivamente, no caso do modelo proposto por LaFave e Kim [2011]. Estes resultados mostram novamente que os modelos de comportamento do núcleo da ligação utilizados conduzem uma precisão similar em termos de capacidade de carga e, em consonância com os resultados apresentados no §5.5.3, ambos tendem a subestimar a capacidade resistente das subestruturas. Note-se no entanto que em ligações viga-pilar de extremidade o erro é significativamente maior que nas ligações viga-pilar interiores.

Este erro pode dever-se à pormenorização da armadura transversal da ligação de extremidade. De facto, uma vez que as armaduras em U (N5, §2.2.2.3) contribuem igualmente para a resistência à flexão da viga, estão sujeitas a tensões significativas desde o início do carregamento e, conseqüentemente, contribuem mais activamente para o confinamento do núcleo da ligação. As armaduras em U podem assim tornar-se globalmente mais eficazes que as cintas, que funcionam como meras armaduras passivas cujo efeito só se faz sentir quando ocorre expansão/fendilhação diagonal do núcleo da ligação. Na Figura 6.53 apresenta-se a evolução das relações  $F-\delta$  para  $N_{col} = 500\text{kN}$ .

Nos ensaios realizados por Roeser [2002], o colapso dos espécimes com ligações viga-pilar de extremidade deu-se em alguns casos por esgotamento da capacidade resistente das vigas (RK1, RK2 e RK3) e noutros por esgotamento da capacidade resistente do núcleo da ligação viga-pilar ao corte (RK4, RK5, RK6, RK7, RK8). Nas simulações numéricas em que o comportamento da ligação foi explicitamente modelado, o colapso deve-se sempre ao esgotamento da capacidade resistente do núcleo da ligação viga-pilar (C9). A divergência nos casos RK1, RK2 e RK3 é provavelmente devida à sobrestimação, nas simulações numéricas, da contribuição do prolongamento das armaduras em U para a resistência à flexão das vigas. Nos casos em que se admitiu que a ligação é rígida e com resistência ilimitada, o colapso deu-se por esgotamento da capacidade resistente das vigas (casos RK1 a RK4) e por esgotamento da capacidade resistente dos pilares (casos RK5 a RK8). Nestes últimos espécimes, é identificável um fenómeno de *snap-back* provocado pela reduzida rigidez seccional negativa de flexão dos pilares.

Tendo em conta que na simulação numérica foi ignorada a deformação das amarrações e que o modelo para o comportamento  $\tau_{jh}-\gamma$  proposto por Roeser [2002] (§5.5.3) apresenta um



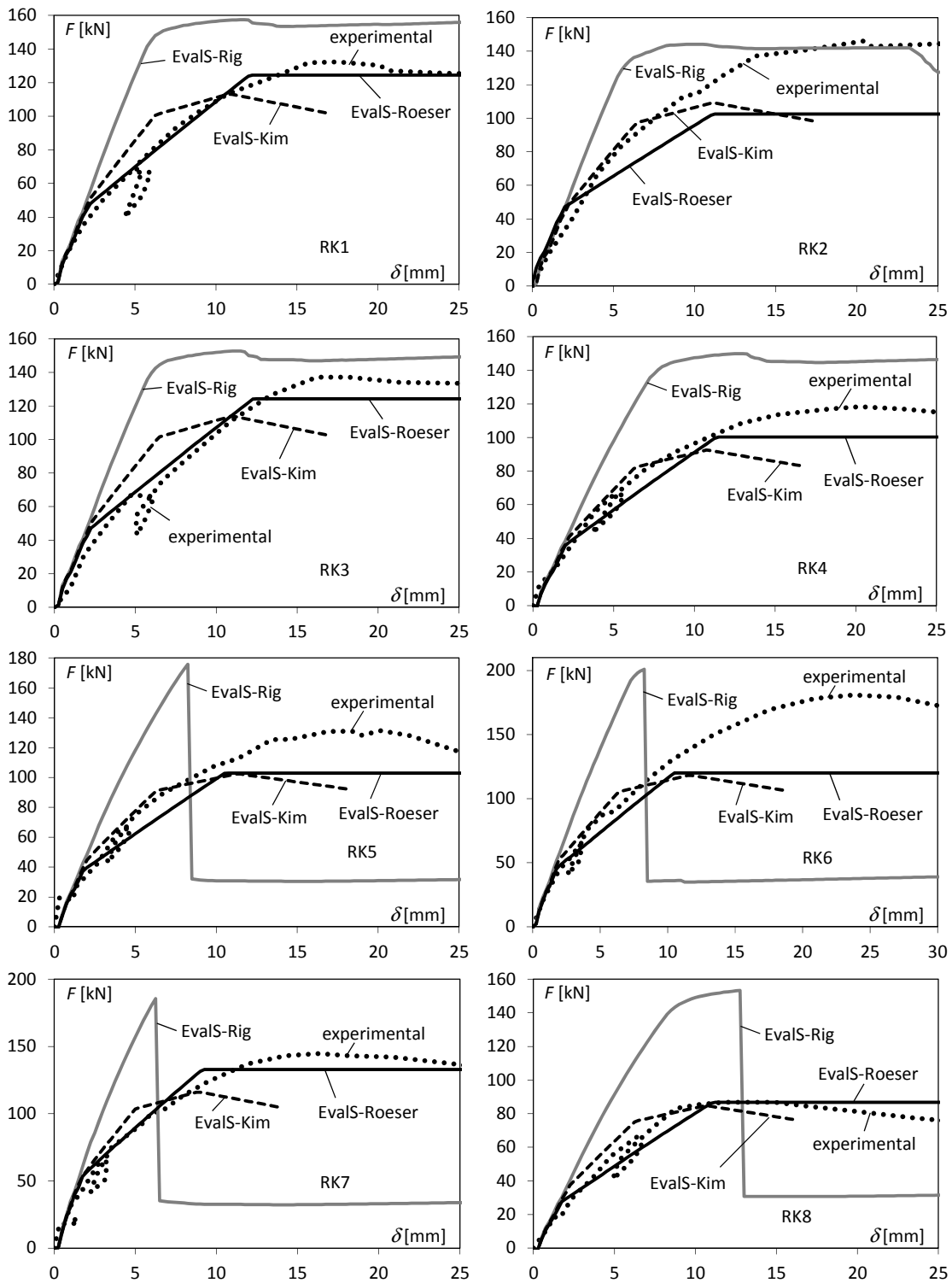


Figura 6.53 – Relação  $F-\delta$  para as subestruturas com ligação viga-pilar de extremidade.

bom ajuste com os resultados experimentais do mesmo autor, seria expectável que a simulação numérica do comportamento das subestruturas com ligação de extremidade baseadas nesta relação  $\tau_{jh}-\gamma$  determinasse uma curva  $F-\delta$  mais rígida que a experimental. No entanto, a análise da Figura 6.53 revela que as curvas  $F-\delta$  calculadas usando o modelo  $\tau_{jh}-\gamma$  de Roeser [2002] são, para a maioria das subestruturas, mais flexíveis que as correspondentes curvas experimentais. Além disso, apesar de nos espécimes RK1 e RK7 a resistência do núcleo da ligação obtida experimentalmente e reportada por Roeser [2002]

( $V_{jh,max}^{RK1,exp} = 374\text{kN}$ ,  $V_{jh,max}^{RK7,exp} = 277\text{kN}$ ) ser inferior à resistência determinada pelo modelo  $\tau_{jh}-\gamma$  proposto pelo mesmo autor ( $V_{jh,max}^{RK1,Roeser} = 388\text{kN}$ ,  $V_{jh,max}^{RK7,Roeser} = 293\text{kN}$ ), nos espécimes RK1 e RK7 a capacidade de carga da subestrutura no ensaio experimental é superior à calculada nas simulações numéricas (Figura 6.52 – Mecanismos de transferência de tensões dos varões para o betão, (a) reforços em U, (b) chapas de ancoragem).

Tabela 6.8).

A justificação para este aparente paradoxo, como já foi referido na secção §5.5.3, pode estar no facto da curva experimental  $\tau_{jh}-\gamma$  apresentada por Roeser [2002] não incluir a totalidade das forças de corte na ligação e, conseqüentemente, o modelo proposto por este autor para a relação  $\tau_{jh}-\gamma$  fazer corresponder a cada valor de  $\gamma$  um valor de  $\tau_{jh}$  inferior ao real. No Capítulo 8 será novamente abordada a forma de calcular  $\tau_{jh}$ .

A análise da Figura 6.53 mostra ainda que o modelo proposto por LaFave e Kim [2011] conduz a resultados mais coerentes com as simplificações efectuadas, ou seja, a adopção deste modelo conjuntamente com um modelo rígido para as amarrações conduz a um comportamento tendencialmente mais rígido que o determinado experimentalmente.

### 6.5.2.3. Notas finais relativas à modelação de subestruturas

Comparando as curvas de comportamento  $F-\delta$  experimentais com as que resultam do modelo em que se assume a ligação viga-pilar rígida (EvalS-Rig) constata-se que a flexibilidade da ligação viga-pilar conduz a um agravamento significativo da flexibilidade de estruturas porticadas submetidas a cargas laterais. Este aspecto é tanto mais significativo quanto maior a carga aplicada à estrutura. Tomando como referência um nível de carga de cerca de 2/3 da carga última da subestrutura, o deslocamento lateral  $\delta$  resultante da flexibilidade da ligação corresponde a mais que 50% do valor total do deslocamento lateral. Conclui-se por isso que a modelação explícita das ligações viga-pilar é imprescindível para a análise rigorosa das subestruturas estudadas.

Independentemente do modelo assumido para a componente núcleo da ligação submetido ao corte (C9), o modelo explícito de ligação viga-pilar proposto permite simular o agravamento do deslocamento  $\delta$  com rigor até aproximadamente 80 a 90% da capacidade de carga da componente núcleo da ligação viga-pilar submetido ao corte (C9). Para níveis de carga mais elevados o modelo proposto por LaFave e Kim [2011], ao preconizar uma redução significativa da rigidez tangente da relação  $\tau_{jh}-\gamma$ , conduz a curvas  $F-\delta$  que apresentam maior correspondência com as curvas experimentais. Já o modelo proposto por Roeser [2002], como preconiza uma rigidez tangente pós-fendilhação constante até ao esgotamento da capacidade de carga desta componente, conduz a um comportamento mais rígido da subestrutura nesta fase de carga.

A análise anterior permite igualmente concluir que, nos espécimes estudados, a componente que mais condiciona o comportamento da ligação viga-pilar, tanto em termos de flexibilidade como em termos de resistência, é o núcleo da ligação submetido ao corte (C9).

A análise efectuada torna evidente a necessidade de desenvolver modelos de comportamento mais rigorosos para o núcleo da ligação submetido ao corte que permitam não só uma mais

rigorosa modelação da flexibilidade da ligação mas também uma estimativa mais realista e menos conservadora da sua capacidade resistente.

De uma forma geral, os modelos para a componente núcleo da ligação submetido ao corte conduzem a melhores estimativas para o comportamento das subestruturas com ligações interiores do que das subestruturas com ligações exteriores. A pior performance em subestruturas com ligações exteriores com qualquer um dos modelos adoptados para o comportamento do núcleo da ligação pode dever-se aos seguintes aspectos:

- (i) no caso do modelo proposto por Roeser [2002], a forma como foram obtidas as curvas experimentais  $\tau_{jh}-\gamma$  adoptadas para calibrar o modelo não contabiliza a totalidade da força de corte na ligação;
- (ii) o modelo proposto por LaFave e Kim [2011] foi calibrado recorrendo exclusivamente a pormenorizações convencionais, ou seja, as armaduras longitudinais das vigas e pilares ou eram contínuas ao longo da ligação ou terminavam em gancho na ligação e as armaduras transversais da ligação viga-pilar eram constituídas por cintas e ganchos.

## 6.6. Influência da ligação viga-pilar sobre a capacidade de carga da estrutura

Foi apresentada no Capítulo 3 uma análise simplificada que sugere que o comportamento das ligações viga-pilar comuns pode influenciar significativamente o comportamento global de estruturas porticadas de betão armado não contraventadas submetidas a cargas laterais. Nesta secção aprofunda-se este estudo, utilizando o programa de elementos finitos EvalS (Ferreira [2011]) para analisar o exemplo pormenorizado de uma estrutura porticada, usando para as ligações viga-pilar o modelo estabelecido no Capítulo 5, cuja implementação foi apresentada no §6.2, e para os elementos lineares o modelo 1D desenvolvido no §6.3.

A conjugação do comportamento materialmente não linear do betão armado com as não linearidades geométricas e com o elevado grau de indeterminação estática comum em estruturas porticadas completas, torna a análise destas estruturas relativamente complexa. Por este motivo, optou-se por estudar, numa primeira fase, estruturas mais simples – subestruturas ou estruturas arquétipo –, numa segunda fase, uma estrutura completa, e, por último, avaliar comparativamente os resultados.

À semelhança das estruturas estudadas no §3.3.3 e no §6.6, a estrutura arquétipo utilizada é idêntica à utilizada na maioria dos trabalhos experimentais e numéricos sobre ligações viga-pilar de betão armado (Hegger, Sherif *et al.* [2004], Mitra e Lowes [2007]) para aproximar o comportamento de estruturas porticadas completas submetidas ao efeito simultâneo de cargas verticais e laterais, e é constituída pela porção de estrutura porticada regular compreendida entre pontos de momento flector nulo, que se admite estarem localizados a meio vão dos elementos.

A análise numérica foi efectuada mantendo a carga vertical  $V$  constante e aumentando a carga lateral  $F$  até se atingir o colapso ( $F_{max}$ ).  $V$  e  $F$ , no caso da estrutura arquétipo (§6.6.1), correspondem às cargas pontuais  $N$  e  $H$  aplicadas na extremidade livre do pilar (Figura 6.55), e

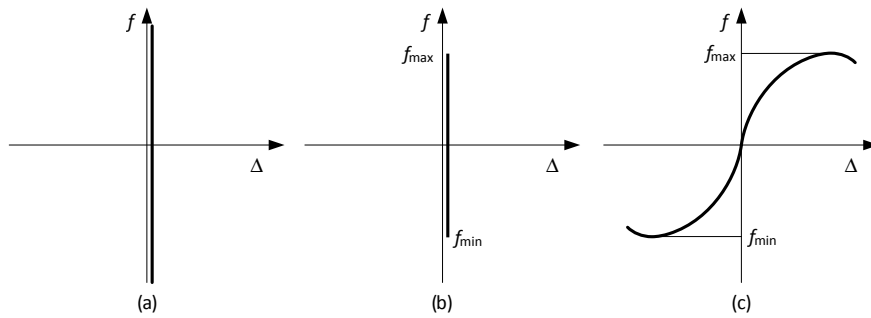


Figura 6.54 – Comportamento das componentes, (a) rígido com resistência ilimitada (R, US), (b) rígido com resistência limitada (R,LS), (c) comportamento não linear (F).

no caso da estrutura porticada completa (§6.6.2), correspondem às cargas distribuídas  $q_v$  e  $q_h$  aplicadas nas vigas (Figura 6.61), respectivamente.

Para avaliar o efeito da flexibilidade e da resistência das ligações viga-pilar sobre o comportamento das estruturas porticadas, a análise estrutural foi repetida para diferentes hipóteses simplificativas. Assim admitiu-se primeiro que as componentes da ligação são rígidas e com uma capacidade resistente ilimitada (Figura 6.54(a)), seguidamente que as componentes são rígidas mas com capacidade resistente limitada (Figura 6.54(b)), por fim, o comportamento não linear de acordo com os modelos constitutivos descritos nas próximas secções (Figura 6.54(c)). Foram efectuadas quatro tipos de análise materialmente não linear para cada caso:

- 1st,R,US – análise de 1ª ordem (1st) com ligação rígida (R) e resistência ilimitada da ligação (US);
- 1st,R,LS – análise de 1ª ordem (1st) com ligação rígida (R) e resistência limitada da ligação limitada (LS);
- 2nd,R,US – análise de 2ª ordem (2nd) com ligação rígida (R) e resistência ilimitada da ligação (US);
- 2nd,F – análise de 2ª ordem (2nd) com ligação flexível (F).

O efeito do comportamento das ligações viga-pilar sobre a capacidade de carga das estruturas é quantificado por intermédio dos seguintes parâmetros:

$\alpha_1$  – redução da capacidade de carga da estrutura por esgotamento da resistência da ligação viga-pilar

$$\alpha_1 = \frac{F_{\max}^{1st,R,LS} - F_{\max}^{1st,R,US}}{F_{\max}^{1st,R,US}}; \quad (6.89)$$

$\alpha_2$  – redução da capacidade de carga da estrutura por efeito da flexibilidade das vigas e dos pilares

$$\alpha_2 = \frac{F_{\max}^{2st,R,US} - F_{\max}^{1st,R,US}}{F_{\max}^{1st,R,US}}; \quad (6.90)$$

$\alpha_3$  – redução da capacidade de carga da estrutura por efeito da flexibilidade das vigas, pilares e ligação viga-pilar

$$\alpha_3 = \frac{F_{\max}^{2st,F} - F_{\max}^{1st,R,US}}{F_{\max}^{1st,R,US}}; \quad (6.91)$$

$\alpha_4$  – redução da capacidade de carga da estrutura por efeito exclusivo da ligação viga-pilar

$$\alpha_4 = \frac{F_{\max}^{2st,F} - F_{\max}^{2nd,R,US}}{F_{\max}^{2nd,R,US}}; \quad (6.92)$$

$\alpha_5$  – relevância relativa da flexibilidade da ligação viga-pilar para os efeitos de segunda ordem

$$\alpha_5 = \frac{F_{\max}^{2st,F} - F_{\max}^{2st,R,US}}{F_{\max}^{2st,F} - F_{\max}^{1st,R,US}} = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_3}. \quad (6.93)$$

O parâmetro  $\alpha_1$  quantifica a influência da resistência da ligação viga-pilar sobre a capacidade resistente da estrutura, os parâmetros  $\alpha_4$  e  $\alpha_5$  quantificam a relevância absoluta e relativa, respectivamente, do comportamento da ligação também para a capacidade resistente da estrutura e os parâmetros  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  quantificam a grandeza dos efeitos de segunda ordem totais desprezando e contabilizando a flexibilidade das ligações, respectivamente.

De forma análoga, o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar sobre a deformação lateral das estruturas é avaliado pelo parâmetro

$$\alpha_\delta = \frac{\delta^{2nd,F} - \delta^{2nd,R,US}}{\delta^{2nd,R,US}} \quad (6.94)$$

em que  $\delta$  no caso das estruturas arquétipo (§6.6.1) corresponde ao deslocamento horizontal do ponto de aplicação das cargas e, no caso das estruturas porticadas completas (§6.6.2), corresponde ao deslocamento horizontal ao nível da cobertura.

### 6.6.1. Análise de subestruturas (estruturas arquétipo)

Foram utilizados como referência os espécimes relativos a ligações viga-pilar interiores ensaiados por Roeser [2002] na medida em que são representativos de estruturas porticadas correntes (Figura 6.55). No entanto, não se modelou o espécime à escala 1:2 porque, de modo a garantir simultaneamente momentos reduzidos ( $\mu = M_{\max} / (bd^2 f'_c)$ ) nas vigas da ordem de grandeza dos assumidos por Roeser [2002] e uma resistência da secção transversal dos pilares superior à das vigas, a percentagem geométrica de armadura longitudinal das vigas e pilares seria superior ao valor máximo habitualmente permitido pelas especificações técnicas recentes.

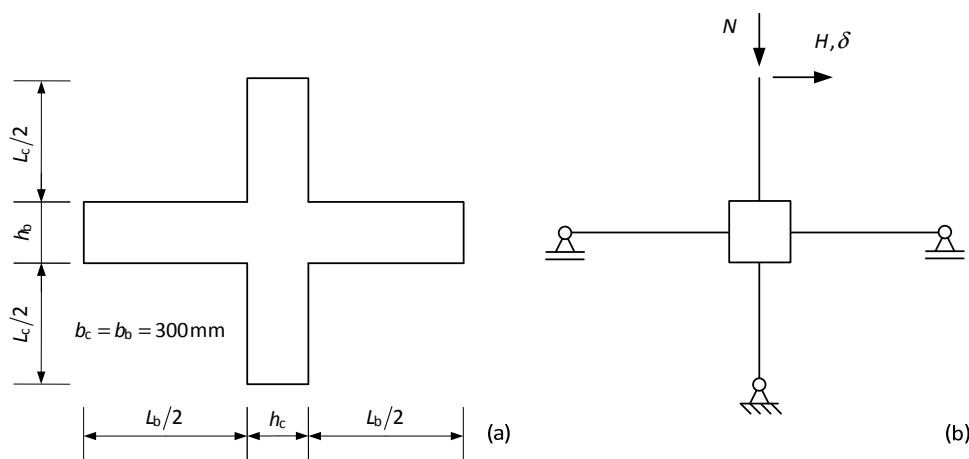


Figura 6.55 – Estrutura arquétipo, (a) dimensões dos espécimes, (b) condições de apoio e carregamento.

O estudo paramétrico teve como objectivo avaliar de que modo a capacidade resistente da estrutura e os seus deslocamentos transversais relativos (*drift*) variam com (i) a esbelteza das vigas e dos pilares, (ii) o nível de esforço axial nos pilares e (iii) a quantidade de armadura transversal na ligação viga-pilar.

#### 6.6.1.1. Subestruturas utilizadas

A estrutura arquétipo foi analisada para três graus crescentes de esbelteza, considerados representativos da construção corrente ou de um futuro próximo:

- (i) Subestrutura 1 (SE1) – estrutura de referência adoptada por Roeser [2002], mas à escala real ( $L_c = 2.7\text{m}$  e  $L_b = 3.5\text{m}$ );
- (ii) Subestrutura 2 (SE2) – estrutura com comprimento das vigas e pilares 50% superior ao da estrutura de referência ( $L_c = 4.05\text{m}$  e  $L_b = 5.25\text{m}$ );
- (iii) Subestrutura 3 (SE3) – estrutura com comprimento das vigas e pilares 100% superior ao da estrutura de referência ( $L_c = 5.4\text{m}$  e  $L_b = 7\text{m}$ ).

As dimensões da estrutura mais esbelta (SE3) foram estabelecidas com base em estruturas porticadas de betão armado consideradas noutros estudos referentes a análises de segunda ordem (Castro [1998]).

Pretende-se que a análise efectuada seja representativa dos pisos inferiores de estruturas porticadas regulares pois é nessa zona que são espectáveis maiores níveis de esforço axial nos pilares. Optou-se por não contabilizar as cargas exteriores aplicadas no piso ao nível da ligação, assumindo-se que nos pisos inferiores é reduzida a relação entre estas cargas e a carga total aplicada nos pisos superiores. No Capítulo 7 estas considerações serão avaliadas.

#### 6.6.1.2. Propriedades mecânicas e geométricas das vigas, pilares e ligação viga-pilar

As armaduras longitudinais foram dispostas simetricamente nas secções transversais das vigas e dos pilares, em virtude da simetria dos esforços de flexão nestes elementos, ver Figura 6.55.

As vigas dos espécimes ensaiados por Roeser [2002] apresentam momentos reduzidos referidos à resistência última das secções transversais (calculados recorrendo ao modelo de fibras apresentado no §6.3) no intervalo  $\mu \in [0.09, 0.19]$ , em que  $\mu = M_{\max} / (b_b d_b^2 f'_c)$ , pelo que foi adoptado como valor de referência para as vigas na estrutura arquétipo um valor aproximadamente a meio deste intervalo.

Além disso, nos espécimes ensaiados por Roeser [2002], a resistência à compressão do betão à data dos ensaios dos espécimes (referida a provetes cilíndricos com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura) apresentou valores no intervalo  $f'_c \in [38.6\text{MPa}, 86.5\text{MPa}]$ . Estes valores foram considerados excessivamente elevados, por comparação com os observados na construção corrente actual, pelo que se tomou como referência uma resistência à compressão referida ao mesmo tipo de provetes igual a 40 MPa, ou seja, o limite inferior do intervalo anterior. Foi adoptada a relação constitutiva para o betão proposta no MC90, foi ignorado o efeito do

confinamento proporcionado pelas cintas nos pilares e pelos estribos nas vigas e foi considerado o efeito do *tension stiffening*.

Para as armaduras assumiu-se um comportamento bilinear e tomou-se como referência a classe de ductilidade B da NP EN 1992-1-1 (Anexo C). Desta forma, assumiu-se uma tensão de cedência a meio do intervalo médio estabelecido no §3.2.2(3) da NP EN 1992-1-1, ou seja,  $f_y = 500\text{MPa}$ . Assumiu-se ainda  $E_s = 200\text{GPa}$  (§3.2.7(4) da NP EN 1992-1-1 e  $\varepsilon_u = 0.05$  com  $f_t/f_y = 1.1$  (Anexo C, NP EN 1992-1-1), em que  $f_t$  é a resistência à tracção das armaduras.

As armaduras dos pilares foram definidas de forma a garantir que o quociente entre a resistência da secção transversal dos pilares e das vigas é pelo menos 1.2 para valores do esforço axial reduzido nos pilares  $n \in [0.1, 0.6]$  em que  $n = N/(b_c h_c f'_c)$ .

Foi adoptado um recobrimento para as armaduras longitudinais de 25 mm, um espaçamento entre armaduras longitudinais mínimo de 25 mm e cintas de 8 e 10 mm de diâmetro na ligação viga-pilar.

As secções transversais dos elementos nas condições anteriormente enunciadas estão representadas na Figura 6.56, juntamente com as relações momento-curvatura para as secções transversais das vigas e pilares para diversos níveis do esforço axial constante.

Para a componente núcleo da ligação ao corte (C9) foi utilizado o modelo de LaFave e Kim [2011], assumindo-se a existência de duas vigas transversais na ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico considerado (o caso mais favorável em termos resistência e rigidez da ligação). Para as componentes amarração (C1-C8) foi utilizado o modelo apresentado no §5.4, adoptando as relações tensão de aderência-escorregamento propostas no MC90 [1990] para betão confinado e outras condições de aderência. Não foi tido em consideração o efeito do agrupamento das armaduras na modelação destas componentes (pressuposto não conservador na medida em que não se desenvolvem tensões de aderência ao longo de todo o perímetro dos varões).

Numa estrutura de betão armado corrente é desejável que o colapso tenha origem nas vigas e, preferencialmente, por esgotamento da capacidade de deformação plástica dos varões traccionados da armadura longitudinal. Na estrutura arquétipo estudada, dada a modelação explícita da ligação viga-pilar, o colapso também pode ter origem na ligação. No caso de colapso com origem na ligação, este dever-se-á ao corte do núcleo da ligação ou ao esgotamento da capacidade de deformação plástica dos varões traccionados da amarração

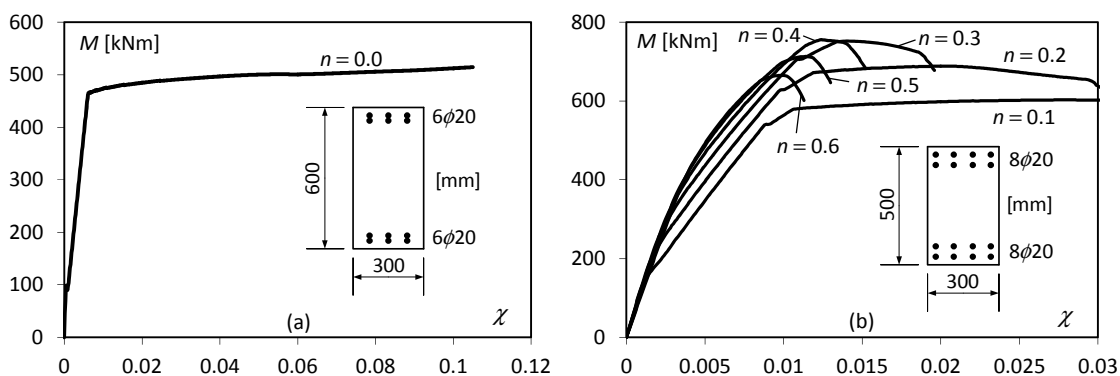


Figura 6.56 – Relação momento curvatura para (a) vigas e (b) pilares.

da armadura longitudinal das vigas. Neste segundo caso, o colapso ocorre simultaneamente na ligação e na viga porque (i) o valor do momento resistente do pilar é superior ao da viga e (ii) a continuidade das armaduras longitudinais, que atravessam a ligação, impede a ocorrência de colapso por *pull-out*.

Como o estudo paramétrico que em seguida se apresenta visa a análise da carga de colapso da estrutura, para eliminar desfazamentos entre o colapso da amarração e o colapso da secção transversal da viga adjacente (resultantes das simplificações efectuadas no decorrer da modelação da ligação viga-pilar), optou-se por impor a simultaneidade destes dois modos de colapso ajustando a distância entre eixos das componentes amarração. Assim, ao longo de toda a história de carga, admite-se que a distância entre eixos das componentes de amarração das vigas (braço interno) é dada por  $M_{b,max}/F_{max}$  em que  $M_{b,max}$  é o momento resistente da secção transversal da viga e  $F_{max}$  é a resistência à tracção da componente amarração traccionada da viga. Esta hipótese simplificativa só é exacta no instante do colapso e nos casos em que este se dá nesta secção.

No caso da análise da estrutura completa, o momento resistente das secções transversais das vigas e pilares é desconhecido à partida, porque depende do valor do esforço axial. Consequentemente, assume-se no modelo de ligação viga-pilar proposto, uma distância entre componentes de amarração igual  $0.85d_b$  e  $0.75d_c$  para amarrações das vigas e pilares, respectivamente, tal como referido no §5.4.8.

A Figura 6.57(a) representa as curvas de comportamento utilizadas para as amarrações das vigas e dos pilares.

A quantidade de armadura transversal na ligação foi quantificada pelo parâmetro

$$\rho_j = \frac{A_{sh}}{b_j h_b} \quad (6.95)$$

em que  $A_{sh}$  é a área da secção transversal dos ramos das cintas paralelos ao eixo da viga e compreendidos entre as camadas exteriores da armadura longitudinal das vigas,  $b_j$  é a profundidade da ligação viga-pilar e  $h_b$  é a altura da secção transversal da viga.

Admitiu-se que são relevantes valores da percentagem geométrica de armaduras transversal na ligação no intervalo  $\rho_j \in [0, 1.75\%]$ . A Tabela 6.9 indica os valores seleccionados.

O limite superior de armadura transversal considerado (AT6 – 20 cintas com 2 ramos ou 10 cintas com 4 ramos) corresponde a uma quantidade de armadura elevada e a um

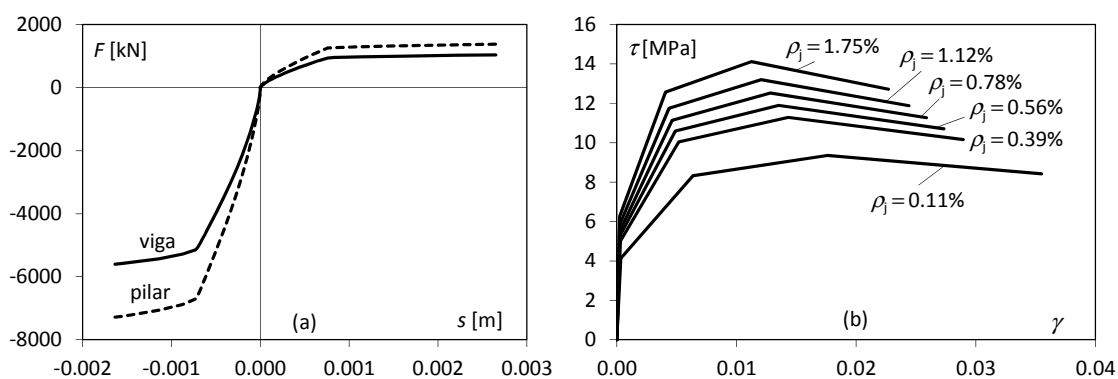


Figura 6.57 – Comportamento das componentes (a) C1 a C8 e (b) C9 das ligações viga-pilar.



Tabela 6.9 – Armaduras transversais na ligação (assumindo 2 ramos por cinta).

	AT1	AT2	AT3	AT4	AT5	AT6
n.º de cintas	2	7	10	14	20	20
$\phi$ [mm]	8	8	8	8	8	10
$A_{sh}$ [cm <sup>2</sup> ]	2.01	7.04	10.05	14.07	20.11	31.42
$\rho_j$ [%]	0.11	0.39	0.56	0.78	1.12	1.75
$\omega_j$ [%]	1.60	5.59	7.98	11.17	15.96	24.93

congestionamento de armaduras que dificilmente permitirá uma betonagem em boas condições da zona da ligação viga-pilar. Pode, por isso, ser visto como já estando acima do limite praticável na estrutura considerada.

O caso AT1 apresenta a quantidade de armadura mínima para ligações Tipo 1 na ACI-ASCE Committee 352 [1997], ou seja, duas camadas de armadura transversal em cada ligação. Optou-se por introduzir percentagens de armaduras baixas para avaliar o efeito da pormenorização simplificada preconizada em alguns documentos normativos, *e.g.*, §5.4.3.3 da NP EN 1998-1 (IPQ [2010d]), segundo os quais, a quantidade de armadura transversal da ligação não pode ser inferior à dos troços adjacentes dos pilares.

O parâmetro  $\rho_j$ , sendo um parâmetro geométrico, permite avaliar se a quantidade de armadura transversal na ligação viga-pilar possibilita condições de betonagem adequadas. No entanto, em termos da capacidade resistente conferida pela armadura transversal, assumindo a analogia com o comportamento de uma treliça plana em corte puro, constitui um parâmetro mais interessante a percentagem mecânica de armadura transversal definida por

$$\omega_j = \frac{A_{sh}}{b_j h_{jw}} \frac{f_{yw}}{f'_c} \quad (6.96)$$

em que  $f_{yw}$  é a tensão de cedência das cintas e  $h_{jw}$  é a distância entre as armaduras inferiores e superiores da viga. Na Tabela 6.9 são apresentados os valores de  $\omega_j$  correspondentes aos casos estudados. Na Figura 6.57(b) estão representadas as curvas de comportamento para o núcleo da ligação em corte (C9) de acordo com o modelo proposto por LaFave e Kim [2011] para ligações viga-pilar interiores.

### 6.6.1.3. Efeito da resistência da ligação viga-pilar sobre a capacidade de carga da subestrutura

No caso de uma estrutura porticada estaticamente determinada, a carga máxima suportada é alcançada quando (i) se esgota a capacidade resistente de um elemento ou (ii) quando se atinge um ponto limite de estabilidade (IF) (Figura 3.18). No caso (i) o colapso pode ser causado por esgotamento da capacidade resistente de um pilar (CF), de uma viga (BF) ou de uma componente de uma ligação (JF).

Apesar das subestruturas estudadas (Figura 6.55(b)) apresentarem um grau de hiperstaticidade unitário, quando se esgota a capacidade resistente da componente C9 da ligação viga-pilar ou das duas vigas simultaneamente, forma-se um mecanismo na estrutura arquétipo (Figura 6.58). Esta particularidade da estrutura é uma consequência da sua simetria relativamente ao eixo do pilar. Desta forma, logo que algum destes elementos esgote a sua

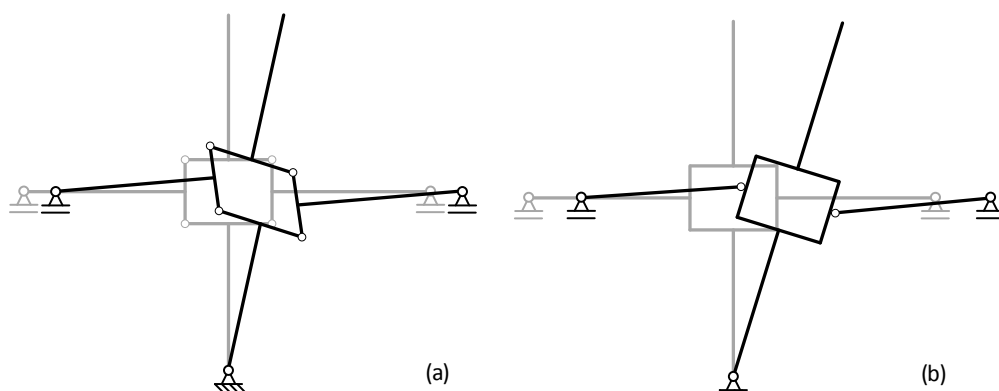


Figura 6.58 – Mecanismo de colapso da estrutura arquétipo, (a) C9, (b) vigas.

 Tabela 6.10 – Variação do parâmetro  $\alpha_1$  com a quantidade de armadura transversal na ligação.

$\rho_j$ [%]	SE1	SE2	SE3
0.11	-18.3	-23.4	-25.8
0.39	-1.4	-7.5	-10.4
0.56	0.0	-2.4	-5.5
0.78	0.0	0.0	-0.6
1.12	0.0	0.0	0.0
1.75	0.0	0.0	0.0

capacidade resistente, a estrutura entra em colapso, não sendo pois possível o incremento de carga e conseqüente redistribuição de esforços – comportando-se como se fosse isostática.

Como nas subestruturas estudadas o modo CF não é expectável porque a resistência à flexão dos pilares é significativamente superior à das vigas, nas análises 1st,R,US a carga máxima suportada pela estrutura foi sempre condicionada pelas vigas (BF).

A Tabela 6.10 apresenta a variação do parâmetro  $\alpha_1$ , que traduz o efeito da resistência da ligação viga-pilar na capacidade de carga da subestrutura. Se  $\alpha_1 < 0$ , a capacidade de carga da subestrutura é condicionada pela ligação viga-pilar (JF), se  $\alpha_1 = 0$ , é condicionada pelas vigas (BF). As ligações viga-pilar que numa análise 1st,R,LS condicionaram a capacidade de carga da estrutura arquétipo ( $\alpha_1 < 0$ ), de acordo com a classificação apresentada no §2.2.2.4.1, são ligações de resistência parcial e as restantes ( $\alpha_1 = 0$ ) ligações de resistência total.

A análise da Tabela 6.10 permite inferir que a capacidade de carga de estruturas porticadas regulares submetidas a cargas laterais pode ser significativamente condicionada pela resistência das ligações viga-pilar, caso estas não sejam convenientemente dimensionadas (ligações de resistência parcial). Conclui-se que, de acordo com o modelo de LaFave e Kim [2011], a mera adopção de 2 cintas na zona da ligação pode não ser suficiente para proporcionar às ligações viga-pilar uma resistência que não condicione a capacidade de carga da estrutura. Conseqüentemente, as disposições regulamentares simplificadas para dimensionamento de ligações viga-pilar submetidas a acções estáticas (IPQ [2010a]), ou mesmo a acções sísmicas em estruturas DCL ou DCM (IPQ [2010d]), podem revelar-se insuficientes e, portanto, este aspecto é ainda mais pertinente no caso de ligações viga-pilar com viga transversal apenas numa das faces ou sem vigas transversais, na medida em que o menor confinamento lateral conduz também a uma menor capacidade resistente.

A Tabela 6.10 revela duas tendências:

- (i) a resistência da ligação pode ser tanto mais condicionante para a capacidade de carga de uma estrutura quanto mais esbelta for a estrutura: esta tendência constata-se pelo agravamento do parâmetro  $\alpha_1$  (em valor absoluto) da SE1 para a SE2 e desta para a SE3; esta variação resulta, não dos efeitos de segunda ordem, pois que a análise é de primeira ordem, mas do incremento da força de corte na ligação com o aumento do comprimento do pilar, para valores fixos do momento flector nas extremidades das vigas adjacentes à ligação;
- (ii) a resistência da ligação viga-pilar é tanto menos condicionante para a capacidade resistente da estrutura quanto maior a quantidade de armadura transversal da ligação; esta tendência é revelada pela redução do parâmetro  $\alpha_1$  (em valor absoluto) à medida que o parâmetro  $\rho_j$  aumenta, independentemente da esbelteza da estrutura.

O efeito da (insuficiente) resistência da ligação viga-pilar na capacidade resistente da estrutura arquétipo pode ser corrigido dispondo uma quantidade de armadura transversal suficiente na ligação viga-pilar. Este resultado sugere que, se os requisitos para ligações exigidos às ligações viga-pilar submetidas a acções sísmicas forem estendidos a todas as ligações, a resistência ao corte destas não será condicionante para efeitos da capacidade de carga da estrutura.

#### 6.6.1.4. Efeito conjunto da resistência e da flexibilidade da ligação viga-pilar na capacidade de carga da estrutura arquétipo

Tal como já foi referido (Capítulos 2 e 3), contrariamente ao que ocorre para estruturas metálicas, não foram encontrados estudos relativos à influência da flexibilidade da ligação viga-pilar na capacidade resistente de estruturas porticadas de betão armado. Consequentemente não existem critérios objectivos para este tipo de estruturas que permitam avaliar a relevância da flexibilidade das ligações viga-pilar.

Na óptica da uniformização de critérios de segurança subjacente aos Eurocódigos, neste estudo adoptam-se os critérios estabelecidos para estruturas metálicas, já apresentados no §2.2.2.4.2 (Briquet, Guisse *et al.* [1994], Gomes, Kulhmann *et al.* [1998], Gomes, Providência *et al.* [2011]).

Na Figura 6.59 apresenta-se (i) a variação dos parâmetros  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  e  $\alpha_5$  para os casos estudados, (ii) o limite de redução de capacidade de carga  $\alpha_4 = -5\%$  acima do qual o efeito da flexibilidade da ligação pode ser desprezado e (iii) os limites de redução da capacidade de carga  $\alpha_2 = -10\%$  e  $\alpha_3 = -10\%$  acima dos quais a NP EN 1992-1-1 permite desprezar os efeitos de segunda ordem (Westerberg [2004]).

Na Figura 6.59 são assinalados a preto os casos em que, na análise de primeira ordem, o elemento condicionante em termos de resistência é a viga (ligação de resistência total,  $\alpha_1 = 0$ ) e a cinzento se é a ligação viga-pilar (ligação de resistência parcial,  $\alpha_1 < 0$ ), estando estes últimos também sombreados na Tabela 6.10.

A estrutura arquétipo apresentou como modo de colapso predominante, nas análises de segunda ordem, o colapso por instabilidade (IF). Ou seja, a carga máxima suportada pela

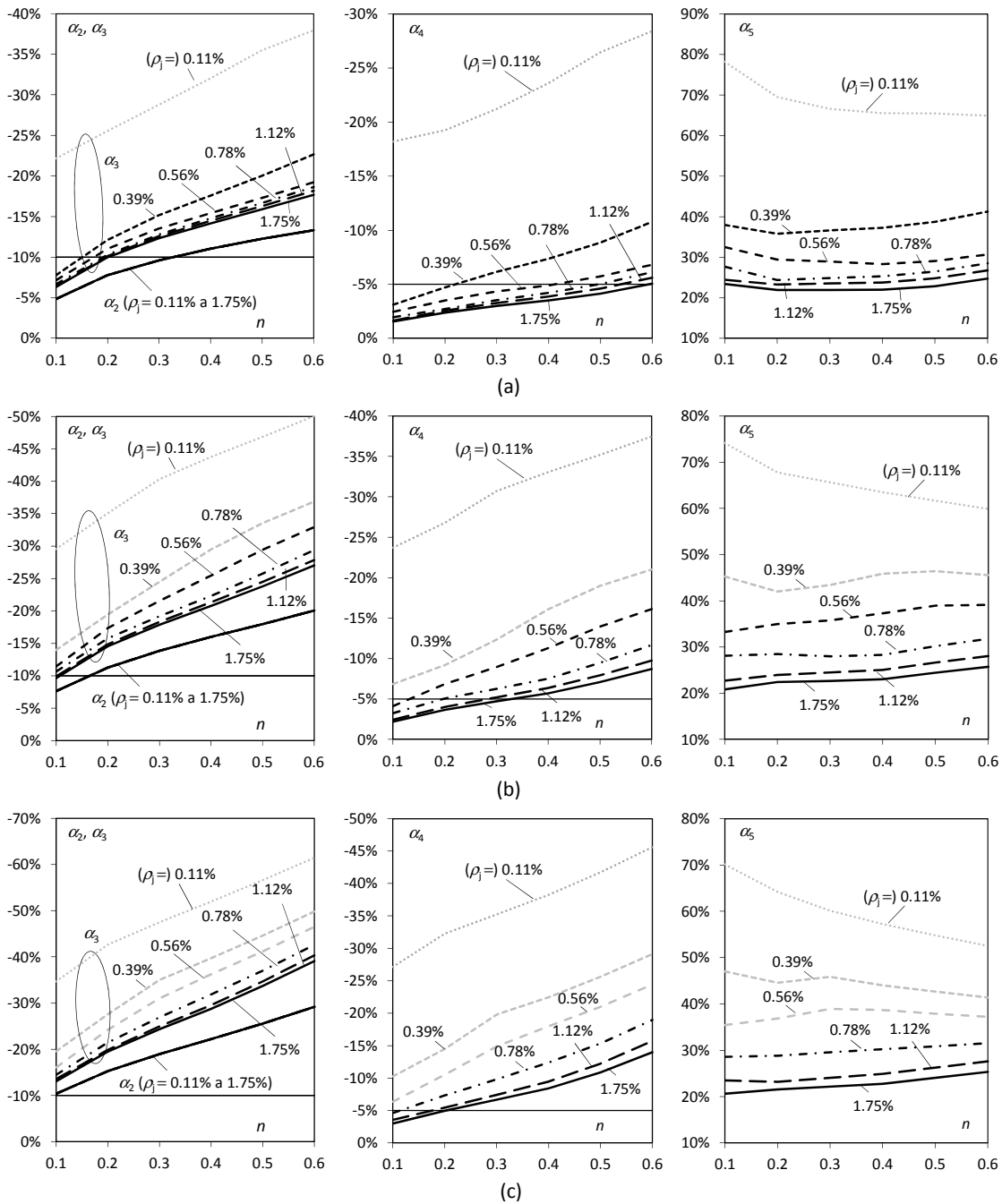


Figura 6.59 – Evolução dos parâmetros  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  e  $\alpha_5$ , (a) SE1, (b) SE2, (c) SE3.

estrutura arquétipo foi atingida sem que se tivesse esgotado a capacidade resistente de qualquer dos componentes constituintes. Como foi referido no Capítulo 3, este comportamento é uma consequência do efeito conjunto da redução da rigidez tangente das relações constitutivas das vigas/pilares e das componentes das ligações viga-pilar. Assim, dado que não é possível individualizar um elemento responsável pelo colapso da subestrutura, para evitar ambiguidades, a referência ao elemento condicionante para a capacidade de carga da estrutura é doravante respeitante à análise de primeira ordem 1st,R,LS.

A análise da Figura 6.59 permite concluir que o comportamento das ligações viga-pilar pode conduzir a uma redução da capacidade de carga da estrutura arquétipo superior a 5% ( $\alpha_4$ ) mesmo nos casos de ligações viga-pilar de resistência total (curvas a preto).

Além disso, constata-se que, para as estruturas arquétipo estudadas, a flexibilidade da ligação é responsável por mais de 20% dos efeitos de segunda ordem, independentemente no nível de esforço axial ou da esbelteza da estrutura ( $\alpha_5$ ). Consequentemente, há casos em que a análise da estrutura com o modelo rígido das ligações viga-pilar, conduz à conclusão que os efeitos de segunda ordem são desprezáveis à luz da regulamentação actual ( $\alpha_2 > -10\%$ ), mas que uma análise mais rigorosa adoptando um modelo deformável para as ligações, revela que os efeitos de segunda ordem devem ser tidos em consideração ( $\alpha_3 < -10\%$ ).

A Figura 6.59 permite ainda concluir que o efeito da flexibilidade da ligação ( $\alpha_4$ ) aumenta com (i) o agravamento do nível de esforço axial na estrutura, (ii) a redução da percentagem de armadura transversal da ligação e (iii) o aumento da esbelteza da subestrutura. Já a relevância relativa da flexibilidade da ligação ( $\alpha_5$ ) aumenta (i) com a diminuição da percentagem de armadura transversal da ligação e (ii) com a diminuição da esbelteza da estrutura arquétipo.

O efeito do nível de esforço axial sobre a relevância relativa da flexibilidade da ligação ( $\alpha_5$ ) não apresenta uma tendência clara em virtude da alteração do aspecto condicionante para o colapso da estrutura arquétipo (JF, BF, IF). No entanto, de uma forma geral, nos casos de ligações de resistência total, a relevância relativa da flexibilidade da ligação ( $\alpha_5$ ) tende a aumentar com o nível de esforço axial aplicado aos pilares.

Por fim, note-se que, no caso de ligações de resistência parcial (JF), o efeito da flexibilidade da ligação ( $\alpha_4$ ) é muito significativo em consequência tanto da capacidade resistente da ligação como da elevada deformabilidade que esta apresenta nas imediações do colapso. Nestes casos, a relevância relativa da flexibilidade da ligação ( $\alpha_5$ ) é tipicamente superior a 50%.

#### 6.6.1.5. Efeito da flexibilidade da ligação viga-pilar sobre a deformabilidade lateral da subestrutura

Para ilustrar o efeito da flexibilidade da ligação viga-pilar na deformabilidade lateral da estrutura arquétipo (*drift*) apresenta-se na Figura 6.60 a evolução do deslocamento lateral  $\delta$  do ponto de aplicação da carga em função da carga horizontal  $H$ , para as três estruturas estudadas. Adoptou-se  $n=0.3$ ,  $\rho_j=1.12\%$  (20 cintas de 8mm com dois ramos ou 10 cintas de 8 mm com 4 ramos) e  $\rho_j=0.11\%$  (2 cintas de 8 mm com dois ramos) para ilustrar os casos de ligações de resistência total e resistência parcial, respectivamente. Na Figura 6.60 estão também representados os pontos notáveis indicados na Figura 5.37 e na Tabela 5.4.

A análise da Figura 6.60 permite concluir que, independentemente da percentagem de armadura transversal da ligação viga-pilar, a flexibilidade da ligação agrava de forma não desprezável a deformabilidade lateral da estrutura arquétipo. Constata-se ainda que, para valores de  $H$  inferiores aos que produzem a fendilhação diagonal do núcleo da ligação viga-pilar (ponto A – ver Figura 5.37 e Tabela 5.4), a flexibilidade da ligação é responsável por um incremento da deformabilidade lateral da estrutura  $\alpha_6$  que varia entre aproximadamente 25% e 60%. Já para valores de  $H$  superiores aos que produzem a fendilhação diagonal do núcleo da ligação viga-pilar, a flexibilidade da ligação pode conduzir facilmente a um agravamento da deformabilidade da estrutura da ordem dos 100%. Pode-se por isso concluir que é desejável que as ligações viga-pilar permaneçam em regime não fendilhado por forma a limitar a sua contribuição para a deformabilidade global das estruturas.

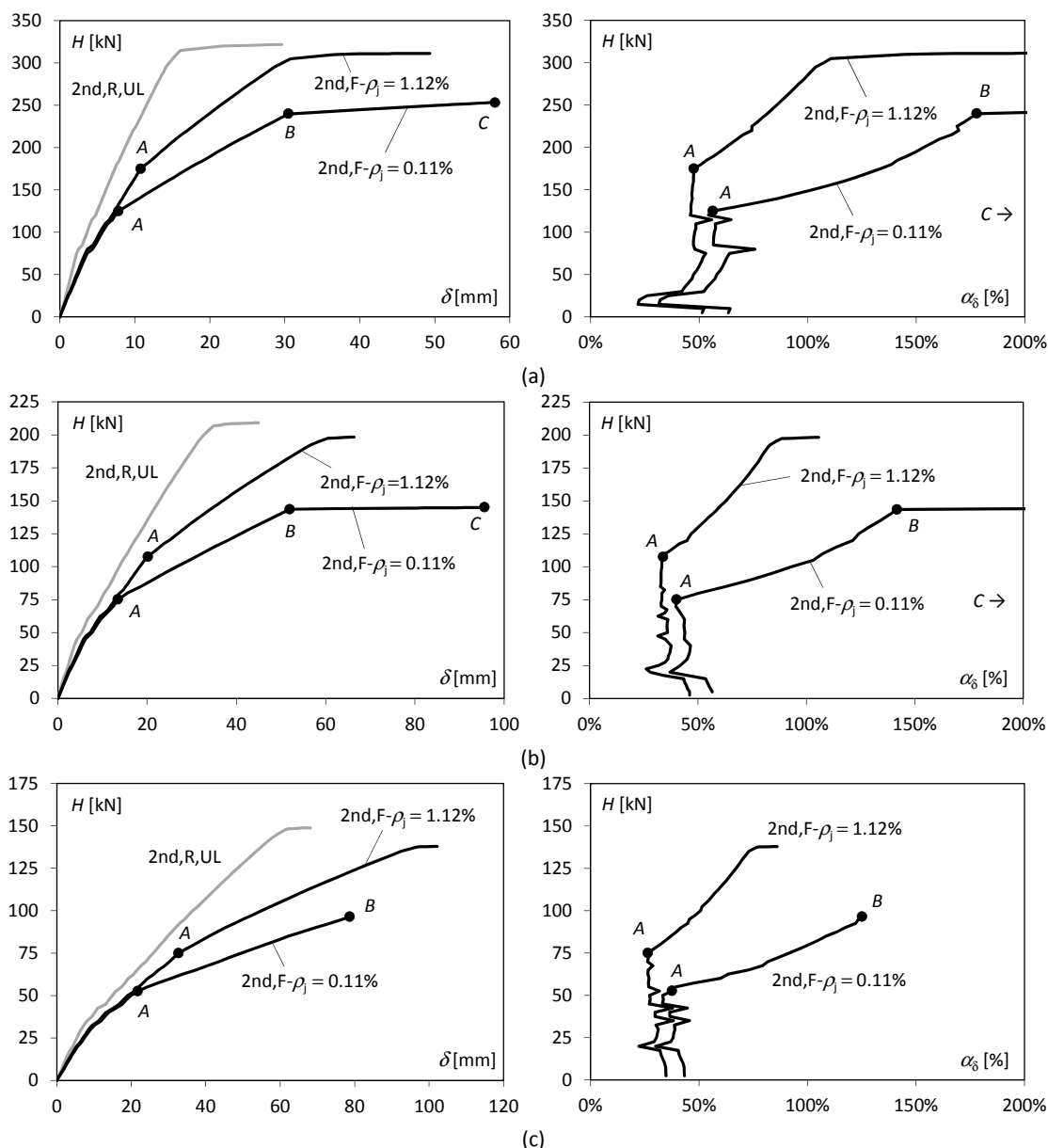


Figura 6.60 – Relação  $H-\delta$  para  $n = 0.3$ , (a) SE1, (b) SE2, (c) SE3.

Os resultados anteriores também mostram que, contrariamente ao que se verificou no §6.6.1.4 com a redução da capacidade de carga, o agravamento da deformabilidade lateral é mais pronunciado nas estruturas menos esbeltas. Além disso, o agravamento da deformabilidade lateral da estrutura arquétipo é significativamente mais relevante no caso de ligações de resistência parcial do que de ligações de resistência total.

A análise apresentada também revela que, independentemente do nível de carga aplicado à estrutura arquétipo, à luz dos critérios adoptados para estruturas metálicas no quadro dos Eurocódigos (§2.2.2.4.2), as ligações viga-pilar de betão armado devem ser classificadas como semi-rígidas, e conseqüentemente as estruturas devem ser modeladas como semi-contínuas.

### 6.6.2. Análise de estruturas porticadas completas

Numa estrutura porticada completa, dado o elevado grau de indeterminação estática, existe possibilidade de redistribuição de esforços e, conseqüentemente, o esgotamento da

capacidade resistente duma ligação viga-pilar não implica obrigatoriamente o colapso da estrutura. Desta forma, caso a ligação viga-pilar possua ductilidade suficiente, pode ocorrer uma redistribuição de esforços decorrente da redundância estrutural e, conseqüentemente, os resultados obtidos com a estrutura arquétipo podem não se reflectir numa estrutura porticada completa.

Por outro lado, os constrangimentos impostos à deformação das ligações viga-pilar, são maiores numa estrutura completa, em que a deformação axial das vigas está restringida, que nas estruturas arquétipo estudadas no §6.6.1 e, segundo o CEB [1996], estes constrangimentos podem mesmo conduzir a que numa estrutura completa não sejam espectáveis os mesmos modos de rotura que ocorrem em espécimes laboratoriais estaticamente determinados (§6.6.1).

Para avaliar em que medida as conclusões obtidas através da estrutura arquétipo e do estudo paramétrico efectuado no §6.6.1 podem ser estendidas a estruturas porticadas completas, nesta secção será avaliado o efeito da modelação explícita da ligação viga-pilar numa estrutura porticada completa de betão armado.

### 6.6.2.1. Caracterização da estrutura

Como exemplo representativo de uma estrutura porticada completa, considerou-se a estrutura representada na Figura 6.61. Trata-se de um pórtico com 8 pisos e 4 vãos e com secções transversais das vigas/pilares e distância entre respectivos eixos que replicam a subestrutura SE2 (§6.6.1.1). No entanto, de modo a evitar uma regularidade excessiva, o comprimento do segundo tramo é metade do comprimento dos restantes. Em termos de condições de apoio da base dos pilares, foram considerados dois cenários alternativos: encastramento (ENC) e articulação perfeita (ART).

Adoptou-se uma estrutura com pilares significativamente esbeltos, e eventualmente pouco correntes, por forma a evidenciar os efeitos de segunda ordem e desta forma permitir uma melhor comparação dos resultados da análise da estrutura completa com os resultados da análise da estrutura arquétipo (§6.6.1).

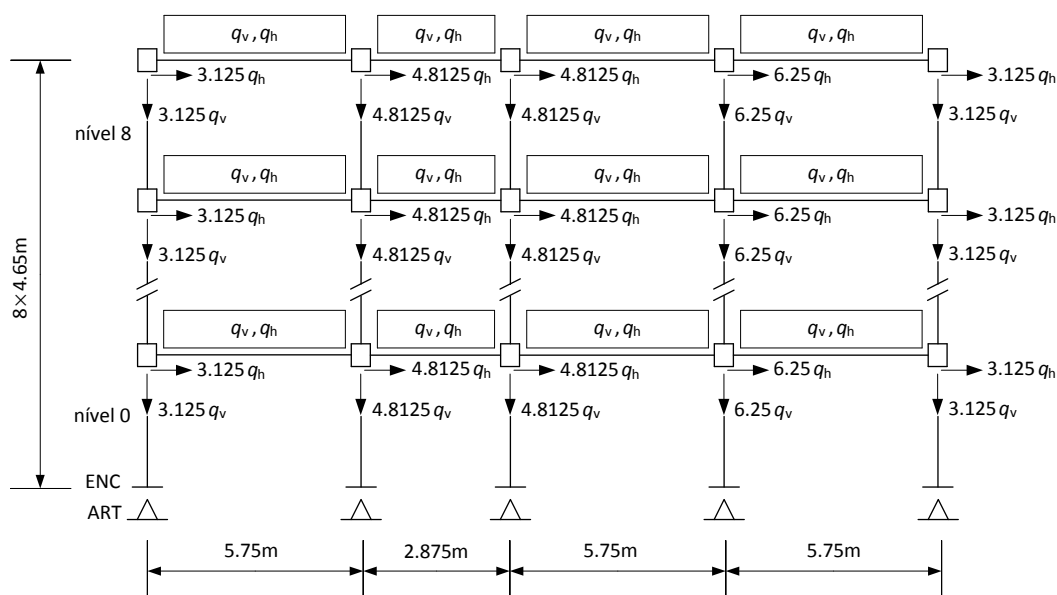


Figura 6.61 – Estrutura porticada completa.

Para efeito de caracterização do comportamento do núcleo da ligação e de definição das cargas aplicadas, admite-se que o pórtico é interior, ou seja, em cada ligação viga-pilar existem duas vigas ortogonais ao plano do pórtico considerado que confinam a ligação e transmitem carga ao pilar (o caso mais favorável em termos resistência e rigidez da ligação). Admitiu-se ainda que os pórticos paralelos ao estudado distam deste 5.75 m.

O pórtico foi submetido a um sistema de cargas uniformemente distribuídas nas vigas com componente gravítica ( $q_v$ ) e lateral ( $q_h$ ). As cargas transmitidas à ligação viga-pilar pelas vigas dispostas na direcção ortogonal ao pórtico foram aplicadas como cargas concentradas no nó imediatamente abaixo da ligação viga-pilar, por forma a não sobrestimar o seu efeito sobre o comportamento das ligações viga-pilar.

A intensidade da carga vertical foi definida de modo a que o esforço axial reduzido no nível 1 seja igual a 0.3 em todos os pilares (assumindo que a carga vertical se distribui igualmente pelos cinco pilares). Este nível de esforço axial corresponde a uma carga uniformemente distribuída nas lajes de  $11.11 \text{ kN/m}^2$ , que equivale a uma carga uniformemente distribuída nas vigas  $q_v = 32 \text{ kN/m}$  (para uma repartição de cargas uniforme e igual em ambas as direcções dos painéis de laje).

### 6.6.2.2. Propriedades mecânicas e geométricas das vigas, pilares e ligações viga-pilar

As armaduras longitudinais das vigas nas ligações viga-pilar de extremidade e de cobertura de extremidade (denominadas doravante como amarrações de vigas exteriores) e as armaduras longitudinais dos pilares nas ligações viga-pilar de cobertura de extremidade e de cobertura interior (denominadas doravante como amarrações de pilares exteriores) apresentam uma amarração em L (tipo L4, Tabela 2.2) com a geometria simplificada representada na Figura 6.62 (localização aproximada do centro geométrico do conjunto total de armaduras em tracção ou compressão).

A Figura 6.63 representa a relação constitutiva para as componentes do tipo amarração (C1 a C8). Estas leis de comportamento foram determinadas pelo modelo apresentado no Capítulo 5 para as mesmas condições assumidas no §6.6.1.

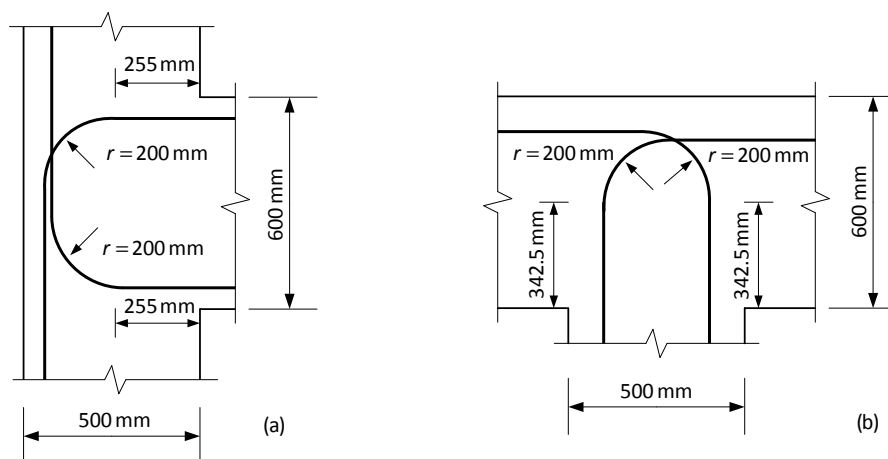


Figura 6.62 – Geometria do eixo das armaduras longitudinais utilizada no modelo de comportamento da amarração, (a) ligações viga-pilar de extremidade e de cobertura exterior, (b) ligações viga-pilar de cobertura exterior e interior.



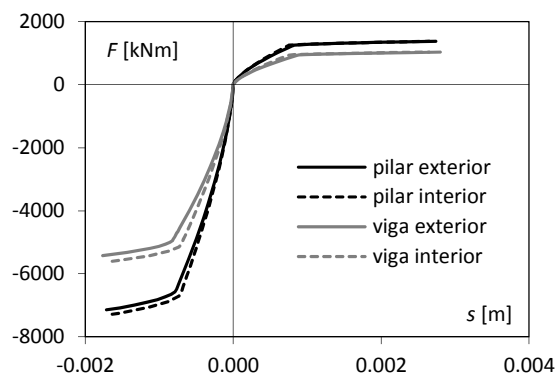


Figura 6.63 – Relação constitutiva para as componentes amarração.

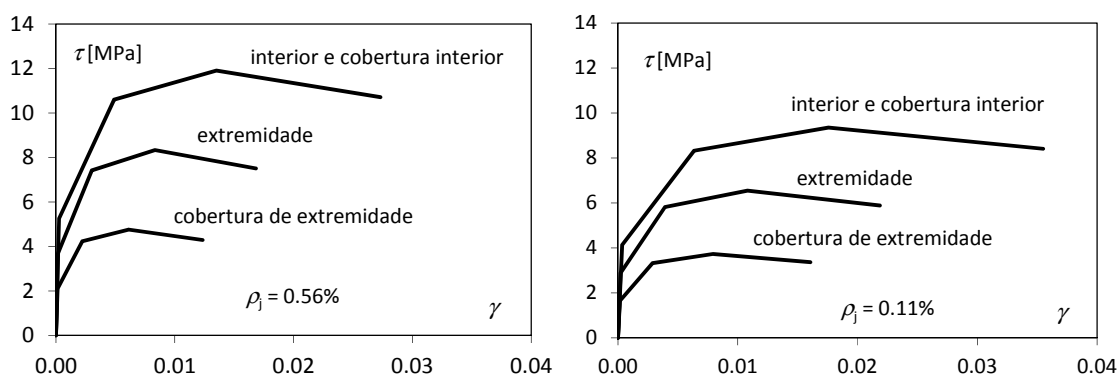


Figura 6.64 – Relação constitutiva para o núcleo da ligação ao corte.

A Figura 6.63 representa ainda a relação constitutiva para as amarrações rectilíneas em vigas e pilares interiores, anteriormente apresentadas na Figura 6.57. A Figura 6.63 revela que, dadas as características da secção transversal das vigas e pilares e do raio de dobragem usados, o efeito da pormenorização da amarração é pouco significativo. De acordo com a análise efectuada no §5.4.6, esta situação é consequência do troço rectilíneo que antecede o troço curvilíneo ser tão longo que a tensão na armadura no troço curvilíneo é pouco significativa.

A relação constitutiva da componente núcleo da ligação ao corte (C9) foi determinada pelo modelo de LaFave e Kim [2011], para as percentagens de armadura transversal (Figura 6.64):

- (i)  $\rho_j = 0.56\%$  – ligação viga-pilar de resistência total (§6.6.1.3) com uma quantidade de armadura transversal que não congestiona excessivamente na zona da ligação;
- (ii)  $\rho_j = 0.11\%$  – ligação viga-pilar de resistência parcial (§6.6.1.3).

Note-se que, apesar das ligações viga-pilar de extremidade apresentarem menor capacidade resistente ao corte que as ligações viga-pilar interiores, a solicitação espectável para as primeiras quando incorporadas numa estrutura porticada regular submetida a cargas laterais também é cerca de metade do que é espectável para as segundas. Já as ligações viga-pilar de cobertura de extremidade, para além do aspecto anterior, estão submetidas a um nível de corte particularmente reduzido em consequência dos reduzidos valores dos momentos flectores nas extremidades das vigas adjacentes a cada ligação viga-pilar. Assim, não é expectável que estas últimas ligações influenciem significativamente o comportamento da estrutura.

### 6.6.2.3. Efeito do comportamento da ligação viga-pilar na capacidade de carga da estrutura completa

Dado o elevado grau de indeterminação estática da estrutura completa, a carga associada ao esgotamento da capacidade resistente de uma dada ligação não apresenta a mesma relevância que nas estruturas estaticamente determinadas. Por esse motivo, e diferentemente do procedimento para a estrutura arquétipo, só foram efectuados três tipos de análise da estrutura completa: (i) 1st,R,US, (ii) 2nd,R,US e (iii) 2nd,F.

A Tabela 6.11 apresenta o valor máximo da carga uniformemente distribuída suportada pela estrutura, em função do tipo de análise.

A título exemplificativo, nas Figuras 6.65 e 6.66 estão representadas as configurações deformadas e os diagramas de momentos flectores da estrutura completa, respectivamente, calculados com o programa EvalS, para as para as cargas  $q_v = 32 \text{ kN/m}$  e  $q_h = 1 \text{ kN/m}$ . Estas figuras permitem constatar que a configuração deformada e a distribuição de momentos flectores nos níveis inferiores da estrutura completa são qualitativamente semelhantes aos da estrutura arquétipo estudada no §6.6.1.

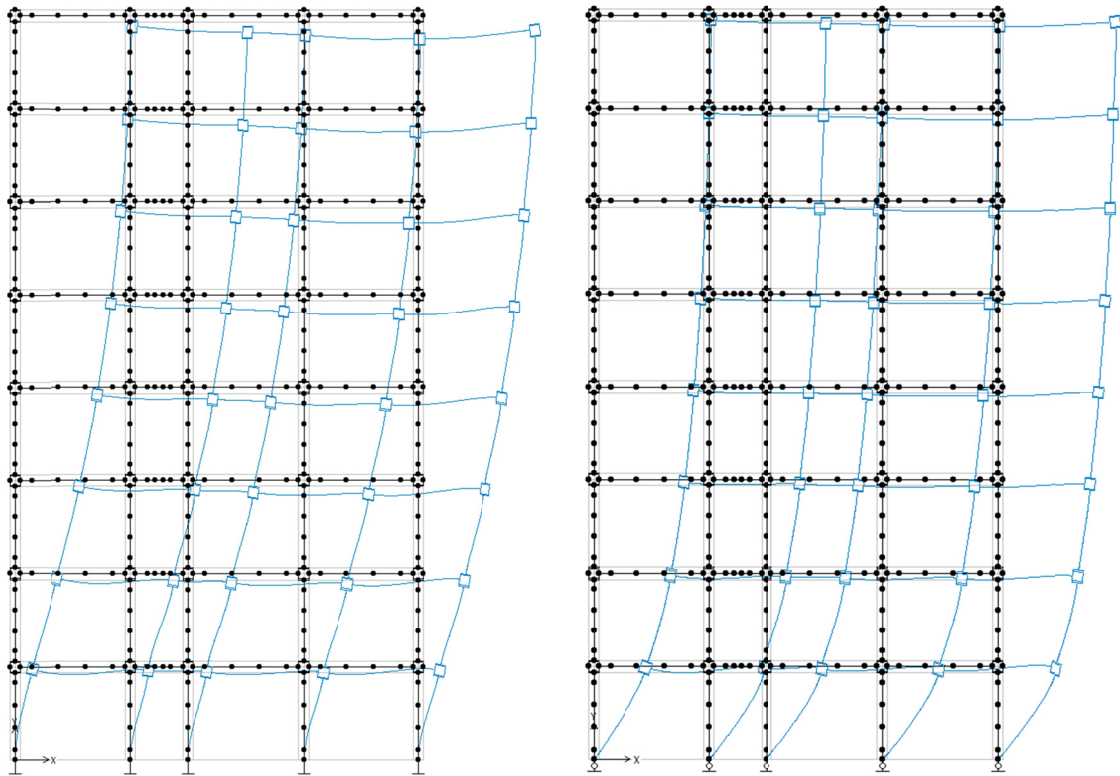
Na Figura 6.67 estão representados os quocientes  $\Delta_g/\Delta_{g,f_{\max}}$  e  $f_g/f_{g,\max}$  correspondentes ao instante imediatamente anterior ao colapso das estruturas completas estudadas (para o caso 2nd,F), em que  $f_{g,\max}$  é a carga máxima suportada pela componente C9 e  $\Delta_{g,f_{\max}}$  a deformação correspondente. Dado que em todos os casos se obtém  $f_g/f_{g,\max} < 1$  e  $\Delta_g/\Delta_{g,f_{\max}} < 1$ , conclui-se que, independentemente da percentagem de armadura transversal das ligações viga-pilar, para a estrutura completa estudada, a reduzida rigidez tangente das componentes das ligações viga-pilar nas imediações de  $f_{g,\max}$  origina uma redistribuição de esforços que evita o esgotamento da capacidade resistente da ligação. Esta constatação vai ao encontro das observações apresentadas pelo CEB [1996] relativamente às diferenças de comportamento entre espécimes laboratoriais e espécimes reais.

A Figura 6.67 revela ainda que as estruturas com as bases dos pilares articuladas tendem a apresentar maiores esforços nas ligações viga-pilar do primeiro nível e uma redução acentuada nos esforços das ligações viga-pilar nos seguintes níveis. Já as estruturas com as bases dos pilares encastradas apresentam esforços com valores da mesma ordem de grandeza nas ligações viga-pilar nos níveis inferiores e uma redução gradual nos níveis superiores.

A Tabela 6.12 apresenta os valores dos parâmetros  $\alpha_2$  a  $\alpha_5$  calculados para a estrutura completa. Dada a uniformidade da secção transversal das vigas e pilares em toda a estrutura completa, os níveis condicionantes para a capacidade de carga da estrutura são os níveis 0 e 1.

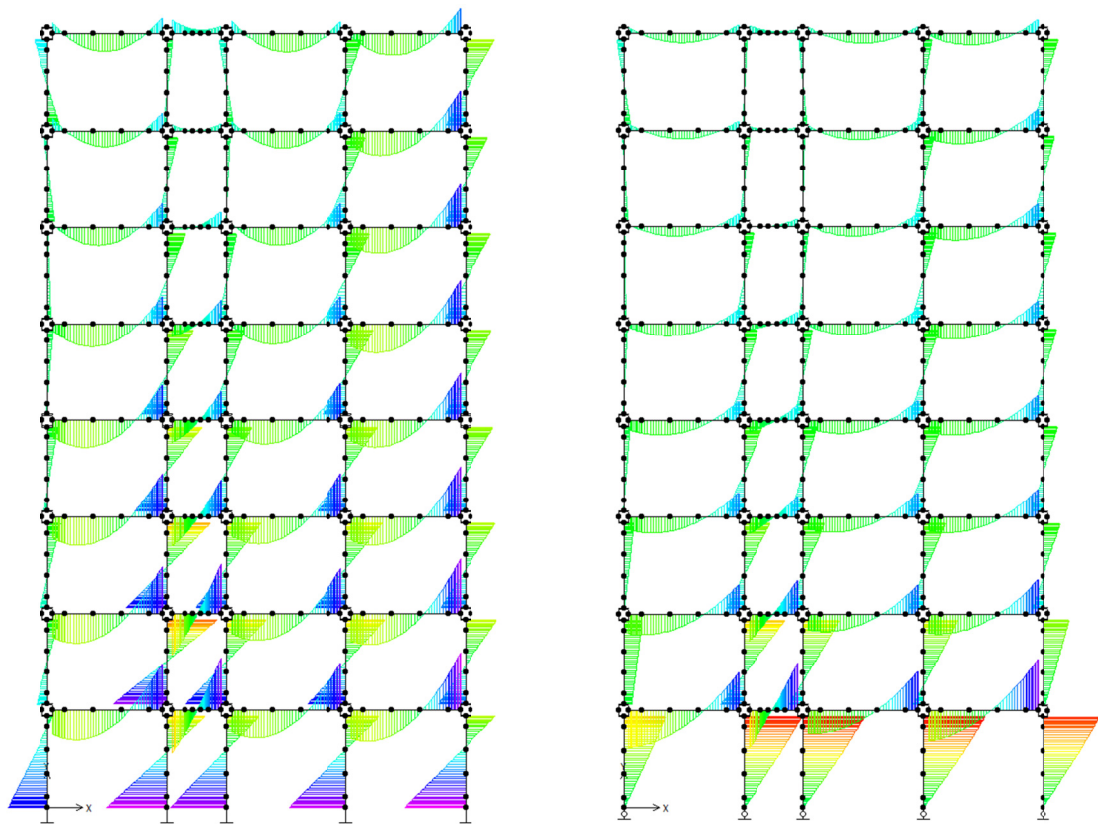
Tabela 6.11 – Carga (uniformemente distribuída nas vigas) máxima suportada pela estrutura.

análise	$q_v$ [kN/m]	$q_h$ [kN/m]			
		$\rho_1 = 0.56\%$		$\rho_1 = 0.11\%$	
		ENC	ART	ENC	ART
1st,R,US	32	3.6162	2.2596	3.6162	2.2596
2nd,R,US	32	3.3409	1.7354	3.3409	1.7354
2nd,F	32	3.0745	1.5475	2.8129	1.3756



(Nota: escalas distintas para deslocamentos.)

Figura 6.65 – Configuração deformada da estrutura para as cargas  $q_v = 32 \text{ kN/m}$  e  $q_h = 1 \text{ kN/m}$  para 2nd,F e  $\rho_1 = 0.11\%$  para pilares encastrados (esq.) e articulados (dir.) na base.



(Nota: escalas distintas para diagramas de esforços.)

Figura 6.66 – Diagrama de momentos flectores para as cargas  $q_v = 32 \text{ kN/m}$  e  $q_h = 1 \text{ kN/m}$  para 2nd,F e  $\rho_1 = 0.11\%$  para pilares encastrados (esq.) e articulados (dir.) na base.

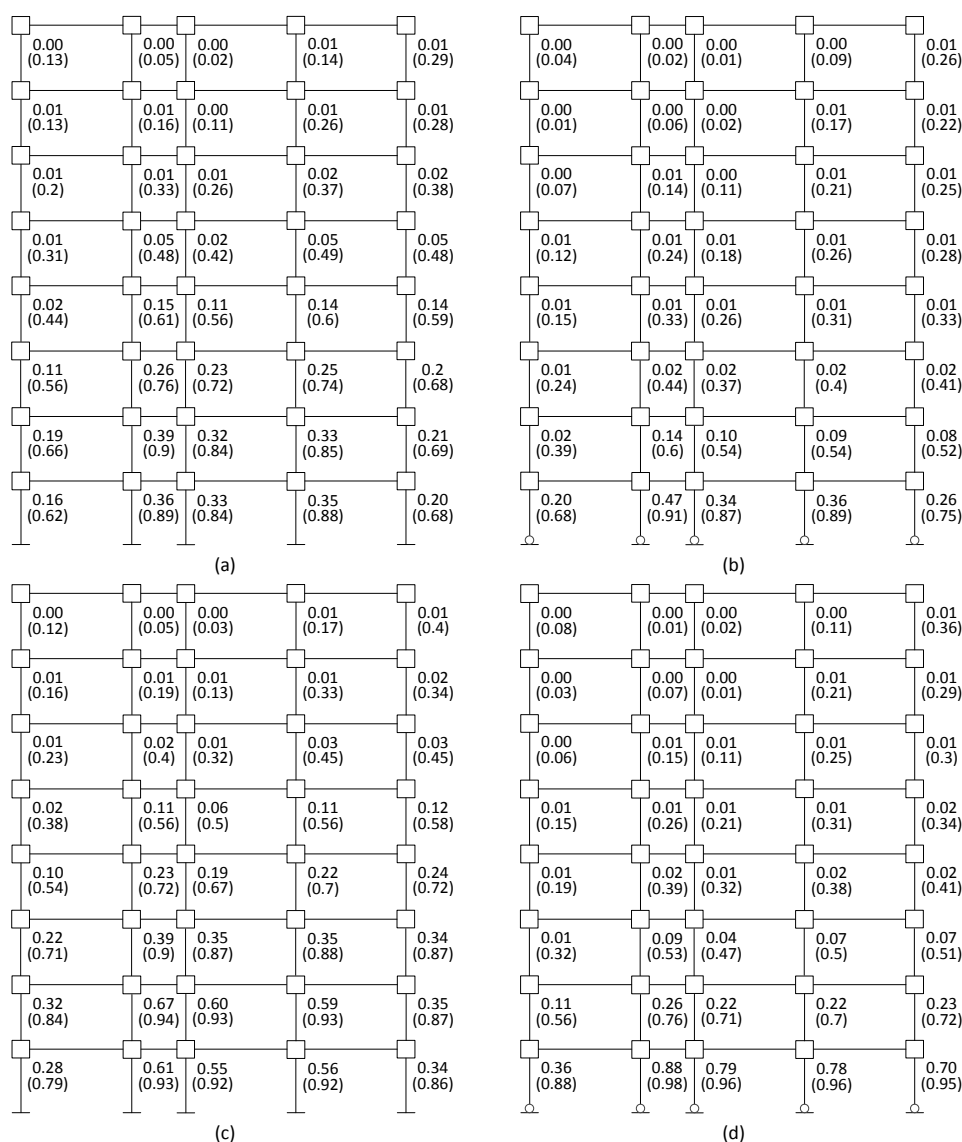


Figura 6.67 – Quocientes  $\Delta_9/\Delta_{9,fmax}$  (não delimitado por parêntesis) e  $f_9/f_{9,max}$  (entre parêntesis) para  $q_v = 32 \text{ kN/m}$  e  $q_h = q_{h,max}$  (2nd,F), (a) ENC e  $\rho_j = 0.56\%$ , (b) ART e  $\rho_j = 0.56\%$ , (c) ENC e  $\rho_j = 0.11\%$ , (d) ART e  $\rho_j = 0.11\%$ .

Tabela 6.12 – Valores dos parâmetros  $\alpha_2$  a  $\alpha_5$ , para o exemplo analisado.

	$\rho_j = 0.56\%$			$\rho_j = 0.11\%$		
	ENC	ART	SE2	ENC	ART	SE2
$\alpha_2$ [%]	-7.6	-23.2	-13.6	-7.6	-23.2	-13.6
$\alpha_3$ [%]	-15.0	-31.5	-21.4	-22.2	-39.1	-40.0
$\alpha_4$ [%]	-8.0	-10.8	-9.0	-15.8	-20.7	-30.6
$\alpha_5$ [%]	49.2	26.4	36.3	65.7	40.7	65.9

Consequentemente, a estrutura arquétipo de referência adoptada para comparação foi a SE2 com  $\rho_j = 0.56\% / 11\%$  e  $n = 0.3$  (§6.6.1). Por este motivo, também constam da Tabela 6.12 os resultados correspondentes a esta estrutura arquétipo.

A Tabela 6.12 mostra que o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar na amplificação dos efeitos de segunda ordem da estrutura porticada completa com ligações viga-pilar de resistência total ( $\rho_j = 0.56\%$ ) são inferiores, ou superiores, aos da estrutura arquétipo, consoante a extremidade inferior dos pilares do nível 0 é encastrada (ENC) ou articulada (ART).

Já a estrutura arquétipo de resistência parcial ( $\rho_j = 0.11\%$ ) fornece uma estimativa excessivamente conservadora para o efeito da ligação viga-pilar em estruturas porticadas completas, independentemente das condições de apoio.

Este resultado sugere que o efeito do comportamento das ligações viga-pilar pode ser estimado por intermédio de estruturas arquétipo no caso de ligações viga-pilar de resistência total. Por outro lado, para ligações viga-pilar de resistência parcial, a estimativa do efeito do comportamento da ligação recorrendo a uma estrutura arquétipo pode conduzir a resultados excessivamente conservadores por não contabilizar a redundância estrutural.

Verifica-se ainda que, tanto para ligações de resistência total como para ligações de resistência parcial, a relevância relativa ( $\alpha_5$ ) da flexibilidade da ligação viga-pilar para a capacidade de carga da estrutura arquétipo é idêntica ou inferior à da estrutura porticada completa se os pilares desta têm a base encastrada, mas superior se têm a base rotulada. Este resultado é coerente com a maior sensibilidade aos efeitos de segunda ordem globais da estrutura completa no caso de pilares com base articulada.

A Tabela 6.12 também mostra que, apesar da menor relevância em termos absolutos ( $\alpha_4$ ) da flexibilidade das ligações viga-pilar para a capacidade de carga da estrutura porticada completa com os pilares encastrados na base (ENC), de acordo com os critérios estabelecidos para estruturas metálicas (Briquet, Guisse *et al.* [1994]), as ligações viga-pilar não devem ser consideradas rígidas para efeitos de análise estrutural, em virtude do incremento da capacidade de carga que tal hipótese acarreta.

#### 6.6.2.4. Efeito do comportamento da ligação viga-pilar na deformabilidade lateral da estrutura completa

Na Figura 6.68 estão representadas as curvas que relacionam o deslocamento horizontal ao nível da cobertura com o corte basal ( $F_b$ ) para a análise de segunda ordem. No contexto da análise estática não linear para efeitos de análise sísmica, estas curvas são denominadas curvas de capacidade. Esta figura revela que a amplificação da deformação lateral da estrutura completa devida à flexibilidade da ligação viga-pilar segue uma tendência idêntica à constatada para a estrutura arquétipo. Assim, para valores da carga horizontal até, aproximadamente, 50% da carga de colapso da estrutura, o efeito da flexibilidade da ligação é aproximadamente constante e, para valores superiores dessa carga, aumenta gradualmente. É igualmente observável na Figura 6.68 que a amplificação das deformações laterais aumenta com a redução da percentagem de armadura transversal da ligação.

Por fim, conclui-se que, tendo em consideração os critérios estabelecidos para estruturas metálicas, a flexibilidade da ligação conduz a um agravamento significativo da deformabilidade lateral da estrutura, independentemente das condições de apoio (ENC ou ART). Consequentemente, as ligações viga-pilar de betão armado devem ser classificadas como semi-rígidas e as estruturas porticadas devem ser modeladas como semi-contínuas, tal como se concluiu do estudo paramétrico efectuado para a estrutura arquétipo.

Este resultado vai ao encontro do §4.3.1(2) da NP EN 1998-1, segundo o qual a contribuição das ligações viga-pilar para a deformabilidade lateral da estrutura deve ser contabilizada na análise estrutural.

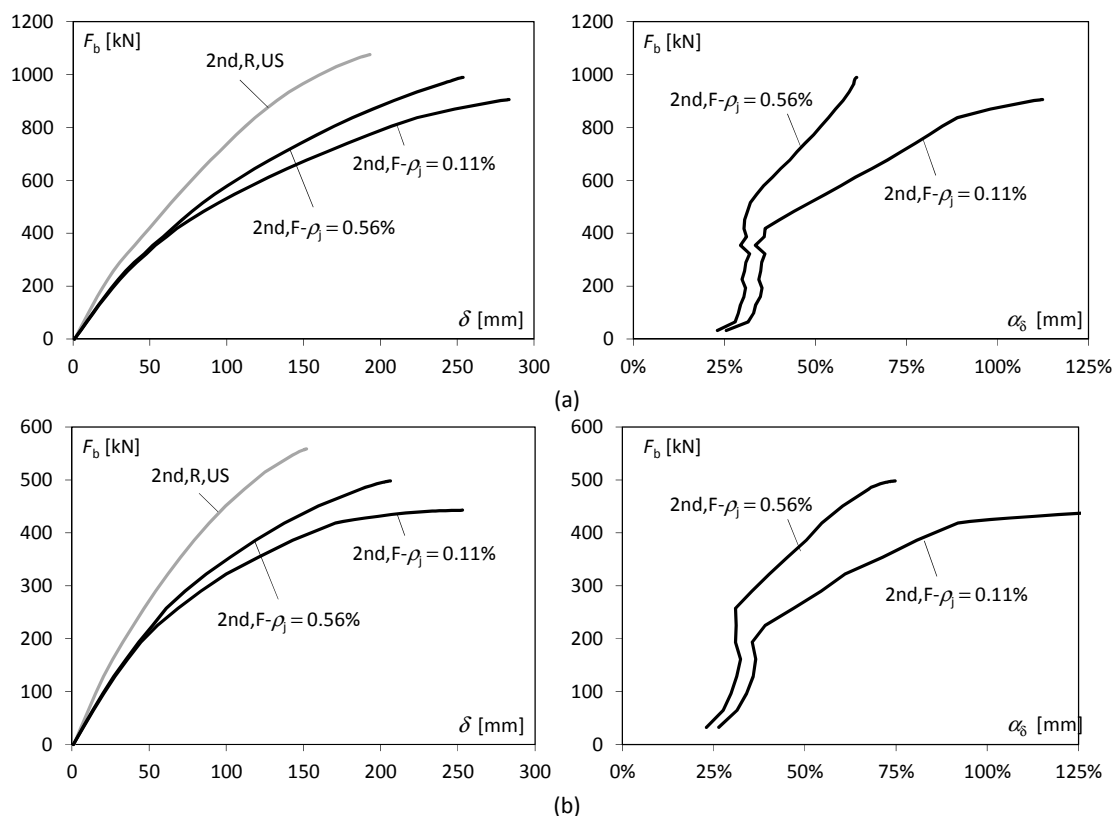


Figura 6.68 – Curvas de capacidade para pilares com base, (a) encastrada, (b) articulada.

## 6.7. Influência da deformação da ligação viga-pilar nos resultados da análise *pushover*

### 6.7.1. Considerações gerais

Para efeito de análise e dimensionamento sísmico de estruturas porticadas de betão armado é prática corrente assumir que as ligações viga-pilar dimensionadas de acordo com as especificações técnicas actuais são rígidas e de resistência total (Favvata, Izzuddin *et al.* [2008], Guner e Vecchio [2011], Sharma, Reddy *et al.* [2013]). No entanto, de acordo com Birely, Lowes *et al.* [2012], a contribuição da deformação das ligações viga-pilar é frequentemente predominante na deformabilidade total da estrutura, e não é geralmente considerada na prática corrente, devido à inexistência de modelos de comportamento fiáveis para as ligações. Em todo o caso, de acordo o §4.3.1(2) da NP EN 1998-1 a contribuição das ligações para a deformação das estruturas deve ser tida em consideração.

Além disso, são poucos e de âmbito limitado os estudos com vista à quantificação do efeito do comportamento das ligações viga-pilar sobre o comportamento sísmico das estruturas completas em que estão inseridas. De facto, os estudos encontrados na bibliografia (Calvi, Magenes *et al.* [2002], Favvata, Izzuddin *et al.* [2008]), (i) são maioritariamente vocacionados para estruturas concebidas anteriormente à década de 1980, dimensionadas apenas para acções gravíticas e sem cintas nas ligações, (ii) em alguns casos tratam unicamente ligações exteriores, (iii) na maioria dos casos não contabilizam todos os modos de deformação relevantes das ligações ou (iv) empregam modelos de ligação viga-pilar mecanicamente insatisfatórios, em consequência da utilização dos elementos disponibilizados pelos programas

de análise estrutural comuns, nomeadamente “molas” angulares nas extremidades das vigas com relação momento-rotação não linear.

Correntemente, a análise de uma estrutura submetida a acções sísmicas é efectuada em dois passos: a análise elástica linear da estrutura determina campos de esforços e deformações, os quais são seguidamente ajustados por meio de coeficientes de comportamento, que minoram os esforços e amplificam as deformações. De acordo com Elnashai [2001], elevado valor dos coeficientes parciais de segurança para as propriedades mecânicas dos materiais conduz a que a determinação rigorosa dos esforços não seja um aspecto crítico, no entanto, a inexactidão na avaliação das deformações da estrutura conduz a erros na estimativa dos danos que esta apresentará, podendo a sua subestimação revelar-se desastrosa. Por outro lado, a mudança de requisitos ao nível das especificações técnicas de cálculo, de apenas um estado limite abrangente, correspondente a um cenário para uma única combinação de acções, para procedimentos orientados para múltiplos estados limites, requer a definição de vários coeficientes de comportamento adequados aos diferentes estados limites para aplicação da abordagem elástica linear corrente. O aumento da complexidade desta abordagem e a tendência recente para um dimensionamento das estruturas mecanicamente mais ajustado, com vista a cumprir objectivos específicos de performance para além da garantia de integridade (*performance based design*) tornam clara a necessidade de análises mais rigorosa que incorporem de forma explícita o comportamento não linear de todas as componentes das estruturas. A análise *pushover* é uma alternativa viável à análise quase-estática elástica linear e à análise dinâmica não linear, na medida em que, com um grau de complexidade intermédio e de forma objectiva, permite ter em consideração o comportamento não linear das estruturas e as características da acção sísmica. Além disso, permite avaliar de forma transparente o modo como o comportamento global da estrutura é afectado pelo comportamento de cada uma das suas componentes.

Neste estudo é utilizado o modelo de ligação viga-pilar apresentado no Capítulo 5 para demonstrar, com base numa análise *pushover*, o efeito do comportamento destes elementos nos resultados da análise sísmica de estruturas porticadas de betão armado correntes. Mostra-se que a não contabilização da deformabilidade das ligações viga-pilar pode conduzir a estimativas de comportamento significativamente diferentes das obtidas assumindo que as ligações viga-pilar são rígidas. É analisado um pórtico plano que faz parte de uma estrutura porticada completa dimensionada de acordo com as especificações técnicas de cálculo actuais.

### 6.7.2. Caracterização da estrutura analisada

Adoptou-se como referência a estrutura porticada de betão armado ensaiada no *European Laboratory for Structural Assessment (ELSA)* do *Joint Research Centre (JRC)* (Negro, Verzeletti *et al.* [1994], Arêde [1997]). Trata-se de uma estrutura à escala real de quatro níveis e dois vãos em cada direcção, dimensionada de acordo com versões preliminares da EN 1992-1 (CEN [1984]) e da EN 1998-1 (CEN [1988]). No dimensionamento e pormenorização foram aplicadas as disposições com vista a garantir uma estrutura de elevada ductilidade, de acordo com a classificação da EN 1998-1 (CEN [1988]). Para efeito de quantificação das acções, assumiu-se uma zona de elevada sismicidade com  $a_g = 0.3g$ , solo tipo B, um factor de importância 1 e um

coeficiente de comportamento 5 (Negro, Verzeletti *et al.* [1994]).

A estrutura porticada analisada apresenta disposição simétrica em planta numa única direcção, sendo composta por dois pórticos laterais idênticos e um terceiro, central, mais rígido, Figura 6.69. Durante o ensaio foram aplicadas forças horizontais paralelas ao plano de simetria da estrutura.

O pilar central tem secção transversal de 45 cm × 45 cm, os pilares da periferia da estrutura têm secção transversal de 40 cm × 40 cm, as vigas apresentam 30 cm de largura e 45 cm de altura e a laje maciça possui 15 cm de espessura. A descrição pormenorizada das armaduras pode ser consultada em Negro, Verzeletti *et al.* [1994] e Arêde [1997]. Na análise efectuada que em seguida se apresenta foi considerado, simplificadamente, apenas o pórtico interior.

### 6.7.3. Modelação do comportamento da estrutura

De acordo com o §4.3.3.4.1(4) da NP EN 1998-1, na modelação e análise foram considerados os valores médios das propriedades mecânicas das armaduras e betão – neste estudo utilizaram-se os valores médios assumidos na fase de dimensionamento da estrutura.

Para a resistência à compressão média do betão referida a provetes cilíndricos de 30 cm de altura e 15 cm de diâmetro foi usado o valor  $f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa} = 33 \text{ MPa}$ . Para o betão em compressão foi usada a relação constitutiva proposta por Park, Priestley *et al.* [1982], por forma a contabilizar o efeito do confinamento proporcionado pelas cintas e estribos. Assumiu-se que o betão na zona delimitada pela superfície que contem os eixos das cintas/estribos se encontra confinado e que esta superfície dista 2.5 cm da face das vigas/pilares. À semelhança de Arêde [1997], assumiu-se que o betão da laje que dista mais de 2.5 cm das suas faces superior e inferior apresenta um grau de confinamento idêntico ao do núcleo das vigas.

Assumiu-se um comportamento bilinear para as armaduras (nervuradas) com tensão de cedência  $f_y = 500 \text{ MPa}$ , módulo de elasticidade  $E_s = 200 \text{ GPa}$ , módulo de endurecimento  $E_{sh} = 1 \text{ GPa}$  e extensão correspondente à tensão máxima  $\varepsilon_{su} = 10\%$ .

As vigas e pilares foram modeladas recorrendo ao modelo de fibras apresentado nos §§ 6.3 e 6.4. A laje foi contabilizada no modelo por intermédio de vigas em T com largura efectiva do banzo  $b_{ef} = b_w + 2(4h_s) = 1.5 \text{ m}$ , como proposto por Arêde [1997], em que  $b_w$  é a largura da viga

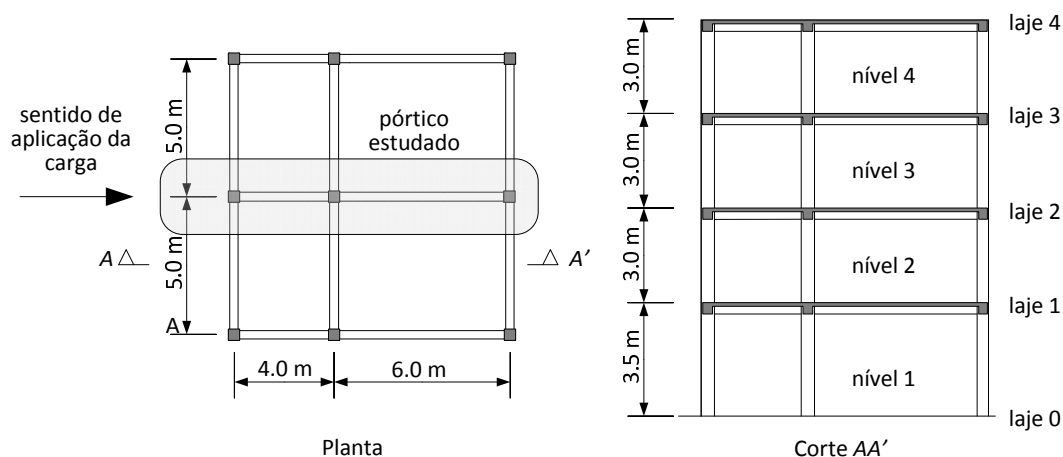


Figura 6.69 – Dimensões gerais da estrutura porticada de 4 níveis (Arêde [1997]).



e  $h_s$  a espessura da laje. As vigas e os pilares foram discretizados em pelo menos cinco elementos finitos tendo em consideração a técnica de regularização referida no §6.5.1.4.

Para a modelação do comportamento das ligações viga-pilar foi adoptado o modelo apresentado nos §§ 6.2 e 6.4. O comportamento da componente de distorção do núcleo C9 é definido pelo modelo proposto por LaFave e Kim [2011]. O comportamento das componentes C1 a C8 foi determinado considerando o modelo apresentado no §5.4 com a lei de aderência betão-armadura proposta no MC90 assumindo betão confinado e outras condições de aderência (ver Anexo).

Como o modelo de amarração proposto no §5.4 pressupõe que o comprimento da armadura é suficientemente grande para impedir o arrancamento do varão (*pull-out failure*), o esgotamento da capacidade resistente da amarração à tracção só ocorre quando esta atinge a resistência à tracção, ou seja, simultaneamente com o esgotamento da capacidade resistente das armaduras longitudinais na extremidade da viga (ou pilar) contígua(o). A possibilidade das amarrações romperem antes das vigas e pilares, devido à estimativa simplificada dos braços internos  $z_b$  e  $z_c$  destes elementos para efeito da modelação das ligações viga-pilar, foi excluída atribuindo às armaduras das amarrações um valor para a extensão última duplo do das vigas e pilares, aumentando artificialmente a resistência das amarrações. Assumiu-se ainda que todas as armaduras do banzo consideradas para efeitos de resistência à flexão da viga em T contribuem também para a amarração na ligação viga-pilar. A Figura 6.70 ilustra, para uma lei de comportamento bilinear simplificada da amarração, distinta da decorrente da aplicação das leis de aderência betão-armadura propostas no MC90, o procedimento utilizado para definir o comportamento da amarração com varões de diferentes diâmetros.

#### 6.7.4. Análise *pushover*

##### 6.7.4.1. Generalidades

De acordo com o §3.2.4(2) da NP EN 1998-1, a avaliação do efeito da acção sísmica deve considerar a presença simultânea de cargas gravíticas. Para este efeito, de acordo com Arêde [1997], foram consideradas cargas uniformemente distribuídas de 34 kN/m nas vigas das lajes 1 a 3 e de 35 kN/m nas vigas da laje 4. Foi simplificada considerado que a massa do pórtico em estudo corresponde a 40% da massa total de cada laje, ou seja, 44.7 t para a laje 1, 44.25 t para as lajes 2 e 3 e 42.3 t para a laje 4.

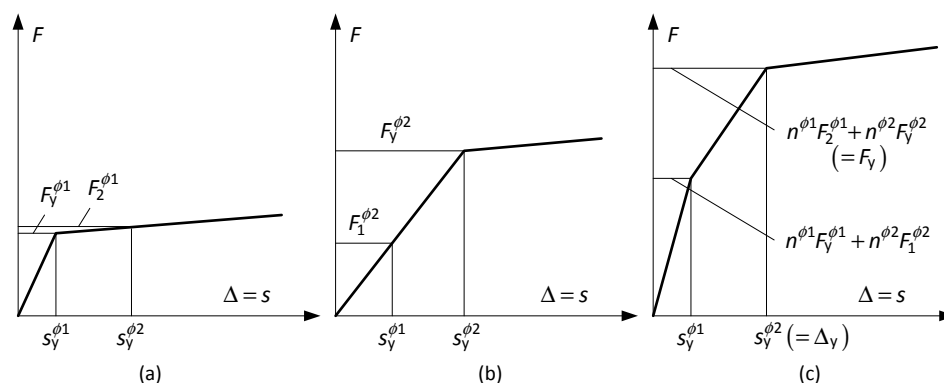


Figura 6.70 – Comportamento da amarração para: (a) um varão de diâmetro  $\phi 1$ , (b) um varão de diâmetro  $\phi 2 > \phi 1$ , (c)  $n^{\phi 1} + n^{\phi 2}$  varões de diâmetro  $\phi 1$  e  $\phi 2$ .

De acordo com o §4.3.3.4.2.2 da NP EN 1998-1, foram adoptadas duas distribuições de forças laterais para simular as forças de inércia devidas à acção sísmica ao nível de cada laje: (i) uma distribuição uniforme (U) com forças laterais proporcionais à massa e independentes da altura e (ii) uma distribuição modal (M) com forças laterais proporcionais às determinadas por uma análise elástica linear de acordo com o §4.3.3.2 da NP EN 1998-1. As acções horizontais foram aplicadas de forma distribuída ao longo das vigas, para simular a distribuição das forças de inércia de forma proporcional à distribuição de massa e desta forma contabilizar de forma mais rigorosa o efeito do esforço axial nas vigas, pilares e ligações viga-pilar.

### 6.7.4.2. Curvas de capacidade

Na Figura 6.71 estão representadas as curvas de capacidade correspondentes a cada uma das distribuições de forças laterais, para o sentido de aplicação de forças representado na Figura 6.69. O deslocamento representado refere-se a um nó da viga de cobertura do vão maior situado a meio do pórtico. Foram calculadas as curvas de capacidade para o mesmo modelo estrutural modelando inicialmente as ligações viga-pilar como rígidas (R) e posteriormente como deformáveis/flexíveis (F).

A comparação das curvas de capacidade para ligações viga-pilar rígidas e deformáveis em termos do parâmetro  $\alpha_\delta$  (expressão (6.94), Figura 6.72) revela que, para o mesmo nível de carga, a flexibilidade das ligações viga-pilar é responsável por um aumento médio da deformação lateral da estrutura de 30 a 50%.

Embora a análise efectuada se restrinja a um pórtico, estes resultados estão de acordo com a evidência experimental. De facto, de acordo com Geradin e Negro [2000], em vez do esperado

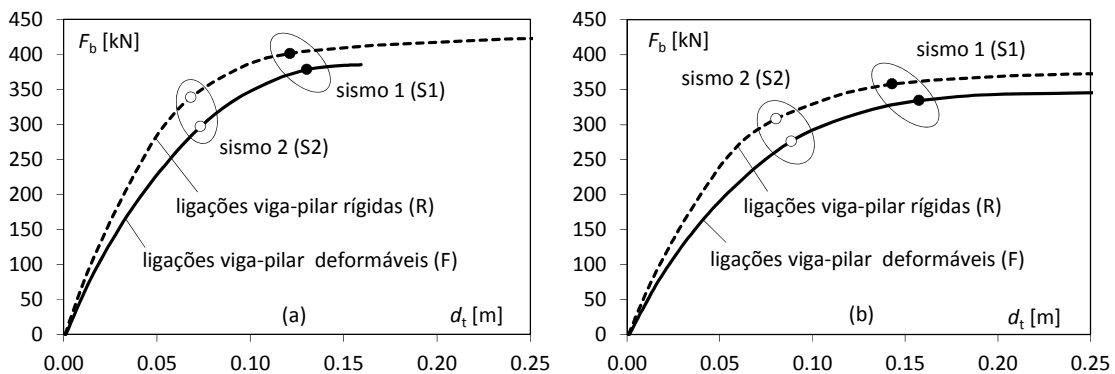


Figura 6.71 – Curvas de capacidade do pórtico interior para distribuição de forças laterais (a) uniforme e (b) modal.

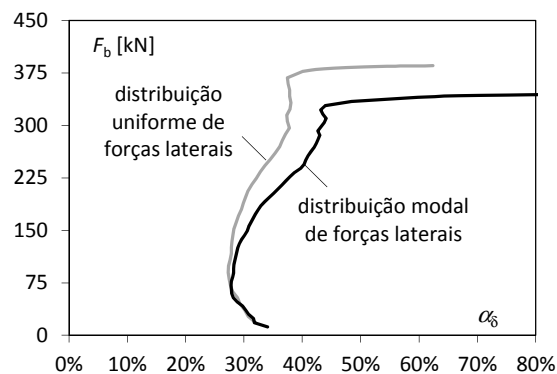


Figura 6.72 – Aumento da deformação lateral da estrutura.

Tabela 6.13 – Deslocamento alvo e corte basal correspondente.

	U				M			
	S1-R	S1-F	S2-R	S2-F	S1-R	S1-F	S2-R	S2-F
$d_t$ [m]	0.121	0.130	0.068	0.073	0.143	0.158	0.080	0.089
$F_b$ [kN]	401.2	378.2	338.5	296.8	358.1	334.5	308.4	276.2

mecanismo de colapso baseado em rótulas de flexão nas extremidades das vigas e pilares, o comportamento da estrutura foi condicionado pela rotura prematura da aderência entre as armaduras que atravessavam a ligação e o betão envolvente, ou seja, o escorregamento das armaduras no interior das ligações teve um efeito significativo no comportamento da estrutura.

Nesta estrutura, dadas as elevadas dimensões relativas da secção transversal dos pilares e as elevadas percentagens de armadura transversal na ligação, a contribuição do núcleo da ligação (C9) para a deformação global da estrutura é pouco relevante por comparação com as outras componentes das ligações viga-pilar. No entanto, em estruturas com secções transversais dos pilares com dimensões menores (idênticas às secções transversais das vigas) e percentagens de armaduras longitudinais das vigas e pilares mais elevadas (ver estruturas analisadas no §6.6), é expectável uma contribuição relevante da deformação por corte da ligação viga-pilar mesmo para valores elevados da percentagem de armadura transversal nas ligações.

#### 6.7.4.3. Pontos de desempenho

Na Figura 6.71 também estão representados os pontos de desempenho determinados de acordo com o Anexo B da NP EN 1998-1 (análise *pushover*) para ambas as distribuições laterais de carga (U e M) e para o Sismo 1 (S1) e 2 (S2) preconizados no §3.2.2.2 da NP EN 1998-1. Na Tabela 6.13 apresentam-se os valores do deslocamento alvo e do corte basal correspondentes aos pontos de desempenho.

A Figura 6.72 e a Tabela 6.13 revelam que, apesar de, para um dado nível de carga, a deformabilidade das ligações viga-pilar conduzir a um aumento significativo das deformações laterais da estrutura, em termos de deslocamento alvo e corte basal correspondente, o efeito da flexibilidade da ligação é reduzido, ou seja, em termos de comportamento global o efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar é pouco relevante para o desempenho da estrutura.

Por uma questão de brevidade, apenas se analisará o efeito da flexibilidade da ligação em termos de grandezas locais nos casos que apresentam maior deslocamento alvo, sombreados na Tabela 6.13, ou seja, o Sismo 1 (S1) para uma distribuição modal de cargas (M) e para ambos os cenários de ligações: rígidas (R) e deformáveis (F).

#### 6.7.4.4. Deslocamento relativo entre lajes

A Figura 6.73 apresenta a evolução dos deslocamentos laterais das lajes, tanto absolutos como relativos (*drift*), mostrando que, embora o deslocamento alvo seja pouco sensível à consideração da deformabilidade das ligações viga-pilar, a contribuição dos diversos níveis para esse deslocamento pode ser afectada pela deformabilidade das ligações. Ou seja, com excepção do nível 1, esta deformação agrava sempre o *drift* em pelo menos cerca de 15% (14% no nível 2, 18% no nível 3 e 19% no nível 4).

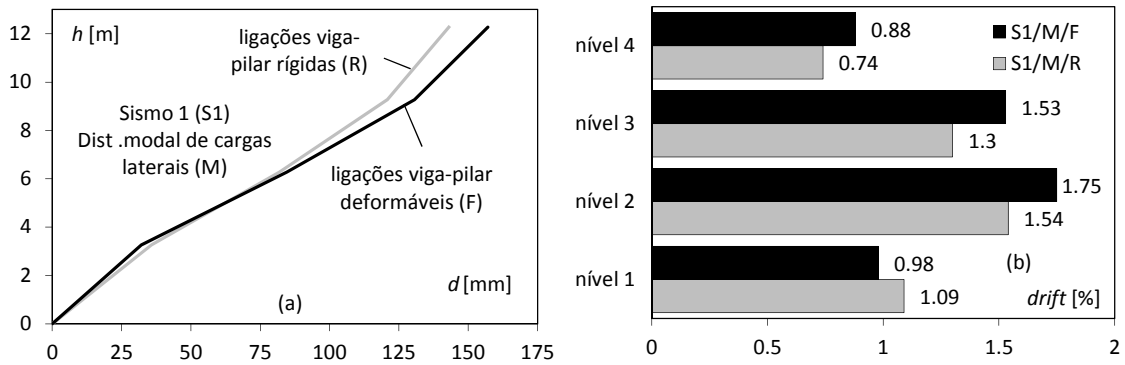


Figura 6.73 – Análise *pushover* para o Sismo 1 assumindo uma distribuição modal de forças laterais. Deslocamento lateral das lajes: (a) absoluto e (b) relativo (*drift*).

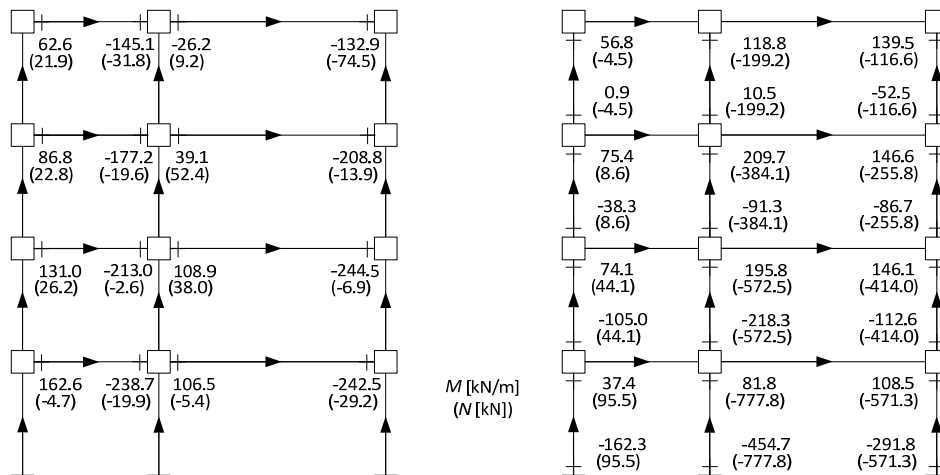


Figura 6.74 – Momento flector e esforço axial nas extremidades das vigas e pilares correspondentes ao ponto de desempenho com ligações viga-pilar rígidas (S1/M/R).

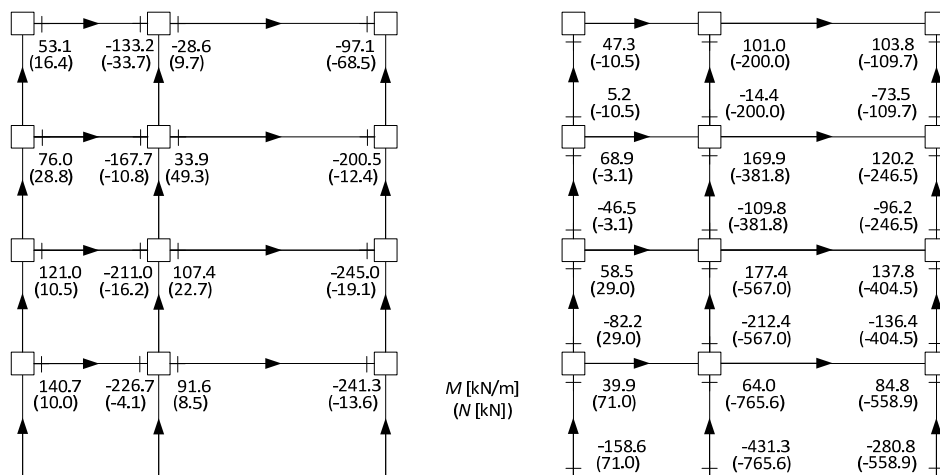


Figura 6.75 – Momento flector e esforço axial nas extremidades das vigas e pilares correspondentes ao ponto de desempenho com ligações viga-pilar deformáveis (S1/M/F).

### 6.7.4.5. Esforços e deformações locais

As Figuras 6.74 e 6.75 apresentam o momento flector e esforço axial nas extremidades das vigas e pilares para os pontos de desempenho relativos ao Sismo 1 e à distribuição modal de forças laterais para o modelo com ligações viga-pilar rígidas e deformáveis, respectivamente. Comparando estas figuras conclui-se que, de uma forma geral, os esforços nas secções de extremidade dos elementos lineares correspondentes aos pontos de desempenho da estrutura

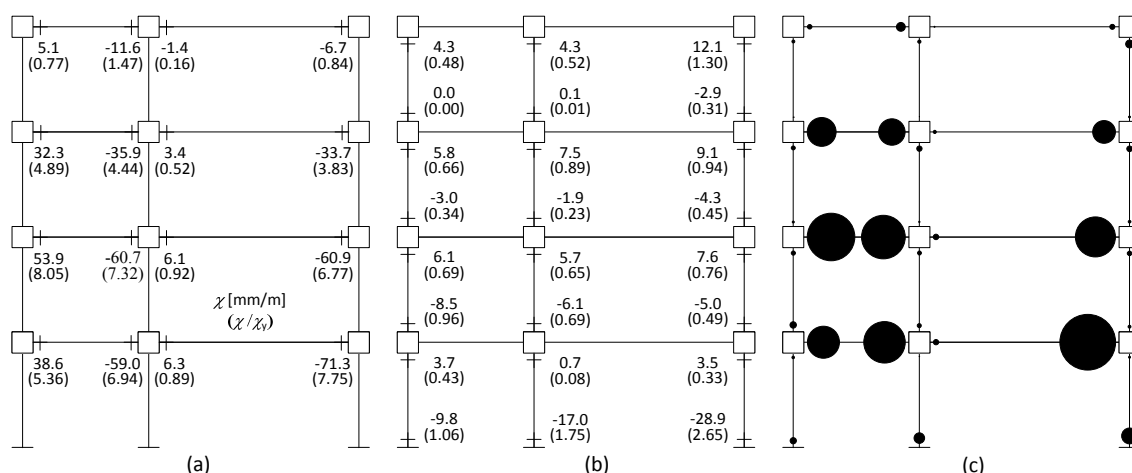


Figura 6.76 – Curvatura para o ponto de desempenho com ligações viga-pilar rígidas (S1/M/R), (a) extremidades das vigas, (b) extremidades dos pilares, (c) representação gráfica de  $\chi/\chi_y$  nas extremidades das vigas/pilares.

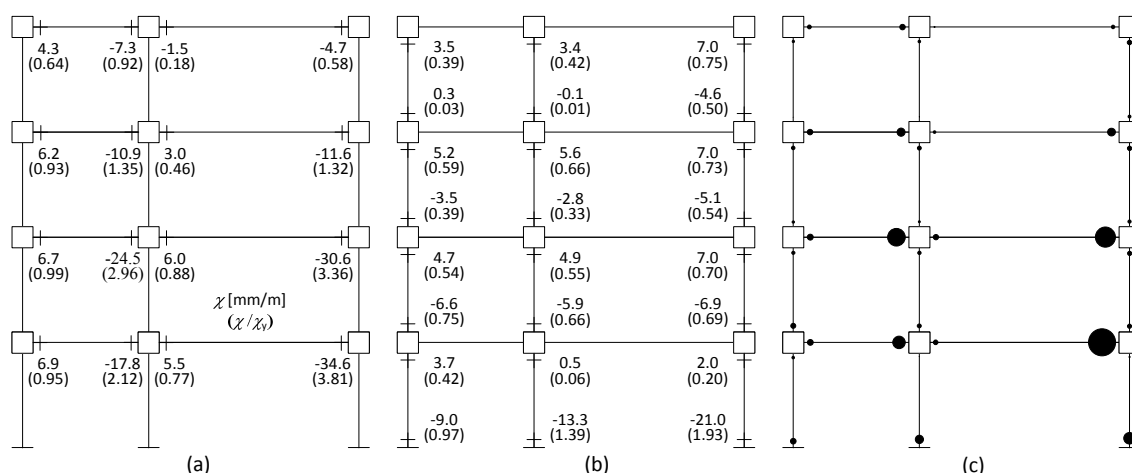


Figura 6.77 – Curvatura para o ponto de desempenho com ligações viga-pilar flexíveis (S1/M/F), (a) extremidades das vigas, (b) extremidades dos pilares, (c) representação gráfica de  $\chi/\chi_y$  nas extremidades das vigas/pilares.

com ligações viga-pilar rígidas e flexíveis diferem pouco entre si, ainda que sejam ligeiramente menores na estrutura com ligações flexíveis. Este resultado deve-se tanto à reduzida diferença das forças (Tabela 6.13), como ao facto do ponto de desempenho S1/M/F corresponder a maiores deslocamentos laterais na estrutura que o ponto de desempenho S1/M/R, o que, devido à diferença dos efeitos de segunda ordem, compensa parcialmente a diferença de forças aplicadas à estrutura.

As Figuras 6.76 e 6.77 apresentam a curvatura  $\chi$  nas secções de extremidade das vigas e pilares, e o quociente entre esta e a curvatura no início da cedência das armaduras  $\chi/\chi_y$  para o mesmo nível de esforço axial. A análise comparativa destas figuras revela que, de uma forma geral, a deformabilidade das ligações viga-pilar reduz significativamente as deformações nas extremidades dos elementos lineares. Ou seja, se a flexibilidade das ligações viga-pilar for ignorada, o dano nos elementos lineares é excessivamente sobrestimado, subestimando-se o desempenho sísmico da estrutura. Recorde-se que, embora o valor da curvatura seja representado apenas nas extremidades dos elementos viga/pilar junto à ligações, a formulação do MFF utilizada considera a não linearidade distribuída ao longo de cada elemento, correspondendo-lhe uma componente não linear da curvatura com andamento linear.

A Figura 6.78 representa o quociente  $\Delta/\Delta_y$  para as componentes das ligações viga-pilar.

Verifica-se que não existe uma correspondência exacta entre as secções com maior  $\chi/\chi_y$  e as componentes das ligações viga-pilar também com maiores  $\Delta/\Delta_y$ . Por exemplo, embora o momento flector e o quociente  $\chi/\chi_y$  na extremidade direita das vigas do maior vão sejam superiores aos da extremidade direita das vigas do menor vão no mesmo nível (com excepção da laje 4), o quociente  $\Delta/\Delta_y$  das componentes amarração das ligações adjacentes apresentam uma relação inversa. Esta falta de correspondência deve-se à interacção do momento flector com o esforço axial transmitido pelas vigas às ligações viga-pilar. Esta interacção só é captada com recurso a um modelo explícito de ligações viga-pilar na medida em que a modelação simplificada da flexibilidade das ligações viga-pilar com recurso a molas angulares é ineficaz também para este efeito.

A diferença nos valores do quociente  $\chi/\chi_y$  no contexto do dimensionamento sísmico com base em análises estáticas não lineares é particularmente relevante na medida em que o desempenho estrutural pode ser directamente avaliado em termos deste parâmetro, como acontece, por exemplo, no caso dos estados limite definidos no FEMA 356 (*immediate occupancy, life safety e collapse prevention*).

#### 6.7.4.6. Sensibilidade aos efeitos de segunda ordem

De acordo com o §4.4.2.2 da NP EN 1998-1, não é necessário considerar os efeitos de segunda ordem para verificação do Estado Limite Último caso seja satisfeita a condição

$$\theta = \frac{P_{tot} d_r}{V_{tot} h} \leq 0.10 \tag{6.97}$$

em que  $\theta$  é o coeficiente de sensibilidade ao deslocamento relativo entre lajes,  $P_{tot}$  é a carga gravítica total nas lajes acima do nível considerado, na situação de projecto sísmico,  $d_r$  é o valor de cálculo do deslocamento entre lajes, avaliado como a diferença entre os deslocamentos laterais médios no topo e na base do nível considerado,  $V_{tot}$  é a força de corte sísmica total no nível considerado e  $h$  é a altura entre lajes. O parâmetro  $\theta$  pode ser visto como uma medida da sensibilidade da estrutura aos efeitos de segunda ordem. A Tabela 6.14 apresenta os valores deste parâmetro, revelando que, como seria espectável, (i) dadas as

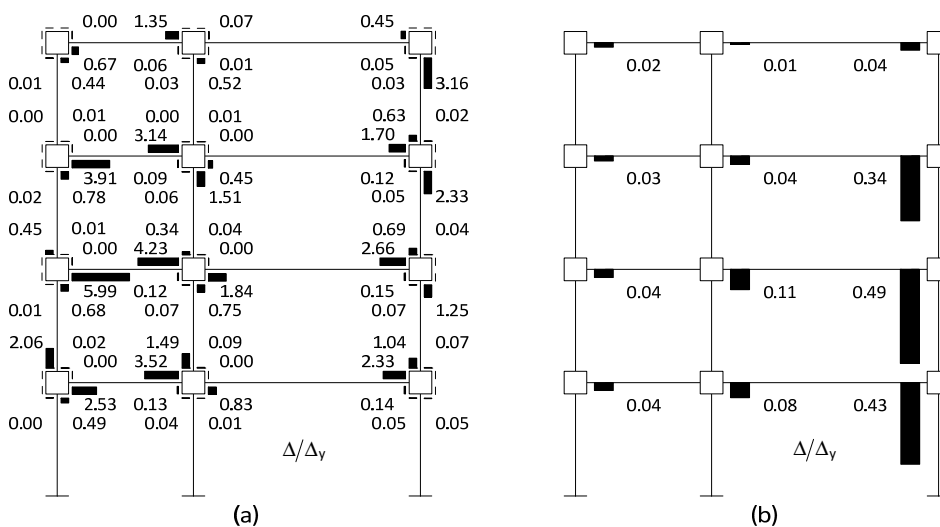


Figura 6.78 – Deformação das componentes para o ponto de desempenho com ligações viga-pilar flexíveis (ST1/M/F), (a) componentes 1 a 8, (b) componente 9.

Tabela 6.14 – Valores do coeficiente  $\theta$  para pontos de desempenho dos casos ST1/M/R ( $\theta_R$ ) e ST1/M/F ( $\theta_F$ ).

nível	$\theta_R$	$\theta_F$	$(\theta_F - \theta_R)/\theta_R$
1	0.038	0.036	-5%
2	0.043	0.053	23%
3	0.032	0.040	25%
4	0.017	0.021	24%

reduzidas cargas gravíticas consideradas e a reduzida esbelteza dos pilares, os efeitos de segunda ordem não são relevantes neste caso, e (ii) a deformabilidade das ligações viga-pilar aumenta a sensibilidade da estrutura aos efeitos de segunda ordem (§6.6).

A variação percentual do parâmetro  $\theta$  nos níveis 2 a 4 devido ao efeito da flexibilidade das ligações viga-pilar é superior ao dobro do agravamento percentual constatado para o deslocamento alvo (aproximadamente 10%) e superior também ao aumento relativo do *drift*. Esta diferença resulta do ponto de desempenho na estrutura em que é contabilizada a deformabilidade das ligações viga-pilar (F) corresponder, nos níveis 2 a 4, simultaneamente a maiores *drifts* e a menores forças de corte totais que na situação em que as ligações viga-pilar são assumidas rígidas (R), ou seja,  $d_r^F > d_r^R$  e  $V_r^F < V_r^R$ .

## 6.8. Notas finais

Apresentou-se neste capítulo a implementação de um modelo de ligação viga-pilar num programa de análise estrutural de estruturas reticuladas por elementos finitos (EvalS). Desta implementação resultou um novo elemento vocacionado para a modelação do comportamento das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado em análises material e geometricamente não lineares pelo método das forças fictícias (MFF).

Apresentou-se o desenvolvimento e implementação de um modelo seccional de fibras para modelar o comportamento quase-estático e monotónico de elementos lineares de betão armado no âmbito do MFF. Mostrou-se que a abordagem adoptada para modelar o comportamento dos elementos lineares, resultante da conjugação do modelo de fibras com o MFF, permite contabilizar a interacção entre o esforço axial, momento flector, deformação axial e curvatura de forma natural bem como o *tension-stiffening* e o *beam-growth* em elementos 1D.

Os modelos para elementos lineares e para ligações viga-pilar foram validados por intermédio da simulação numérica de problemas com solução analítica conhecida e de ensaios laboratoriais de (i) tirantes de betão armado, (ii) vigas de betão armado e (iii) estruturas cruciformes de betão armado.

Foi efectuado um estudo paramétrico com uma estrutura arquétipo para avaliar a influência das ligações viga-pilar sobre o comportamento de estruturas porticadas regulares de betão armado. Posteriormente, os resultados do estudo paramétrico efectuado com recurso à estrutura arquétipo foram validados por meio da análise de uma estrutura porticada regular completa.

A análise efectuada com recurso à estrutura arquétipo e à estrutura completa permitiu concluir que as ligações viga-pilar podem condicionar significativamente a capacidade resistente de estruturas porticadas de betão armado. Este condicionamento pode dever-se tanto à capacidade resistente da ligação viga-pilar como à sua deformabilidade e é

particularmente penalizador nos casos de ligações viga-pilar de resistência parcial. Conclui-se, por isso, que deve procurar garantir-se que as ligações viga-pilar apresentam resistência total.

Verificou-se também que a deformabilidade lateral de estruturas porticadas de betão armado submetidas a cargas laterais é significativamente afectada pelas ligações viga-pilar, e que, caso seja necessário determinar rigorosamente a deformação lateral de uma estrutura porticada de betão armado, independentemente das ligações serem de resistência total ou parcial, estas não devem ser modeladas como rígidas. Assim, o efeito da flexibilidade da ligação viga-pilar deve ser sempre avaliado e, nos casos em que se justifique, deve ser incorporado na análise estrutural. Para tal, devem ser desenvolvidos procedimentos simplificados que permitam identificar os casos em que os efeitos da flexibilidade da ligação não podem ser desprezados.

Constatou-se ainda que o efeito das ligações viga-pilar sobre o comportamento da estrutura pode ser adequadamente captado recorrendo a uma estrutura arquétipo no caso de ligações viga-pilar de resistência total. No caso de ligações viga-pilar de resistência parcial, a estrutura arquétipo pode conduzir a conclusões excessivamente conservadoras na medida em que a ductilidade das ligações viga-pilar permite uma redistribuição de esforços significativa em estruturas com elevado grau de indeterminação estática que não é contabilizada pela estrutura arquétipo.

Por fim, foi efectuada uma análise *pushover* sobre uma estrutura dimensionada de acordo com a regulamentação anti-sísmica recente que mostrou que, apesar da deformabilidade das ligações viga-pilar ser responsável por uma parcela significativa dos deslocamentos transversais da estrutura para um dado nível de carga, o seu efeito sobre o deslocamento alvo e a carga lateral correspondentes ao ponto de desempenho pode ser pouco significativo. Este resultado significa que o comportamento sísmico da estrutura, quando é avaliado em termos de parâmetros globais, mostra-se pouco sensível ao efeito das ligações viga-pilar. No entanto, a análise das deformações ao nível local mostrou que o comportamento das ligações viga-pilar pode conduzir a diferenças muito significativas de comportamento da estrutura. De facto, constatou-se que ignorar a deformabilidade das ligações viga-pilar conduz (i) a uma subavaliação tanto do *drift* máximo como dos efeitos de segunda ordem e (ii) à sobreavaliação das deformações nas vigas e pilares e, portanto, também dos danos expectáveis nestes elementos.

Desta forma, concluiu-se que, mesmo em estruturas porticadas de betão armado dimensionadas de acordo com especificações técnicas de projecto sismo-resistente actuais, as ligações viga-pilar não devem ser consideradas rígidas caso se pretenda efectuar uma avaliação rigorosa do comportamento estrutural e dos danos espectáveis nos elementos constituintes da estrutura.

Os resultados apresentados são relativos ao comportamento monotónico quase-estático. No entanto tendo em conta a redução de rigidez característica das ligações viga-pilar submetidas a acções cíclicas, é espectável que nestas condições o efeito da flexibilidade da ligação sobre a capacidade resistente das estruturas seja significativamente mais relevante.



---

# Capítulo 7

## Avaliação simplificada da necessidade de modelação explícita de ligações viga-pilar

### 7.1. Introdução

Neste capítulo estabelecem-se procedimentos que permitem avaliar de forma expedita a necessidade de modelar explicitamente as ligações viga-pilar em estruturas porticadas não contraventadas de betão armado submetidas a cargas quase-estáticas e monotónicas com componentes verticais e laterais.

As ligações viga-pilar são elementos que têm como função primordial transmitir os esforços entre os elementos viga e pilar adjacentes. A rotura das ligações viga-pilar (i) pode dar origem a mecanismos de rotura não evidentes, (ii) em alguns casos é frágil e, (iii) se ocorrer antes da rotura de elementos adjacentes (ligações de resistência parcial), pode limitar drasticamente a capacidade de carga, tanto de estruturas estaticamente determinadas como de estruturas com um elevado nível de redundância estrutural (Capítulo 6). Deste modo, algumas especificações técnicas recentes requerem que a capacidade resistente das ligações viga-pilar seja superior à das vigas e pilares adjacentes, ou seja, proíbe que a rotura da ligação preceda a dos elementos adjacentes (Capítulo 2). Nestas condições, a ductilidade das ligações viga-pilar, para efeitos de comportamento quase-estático, é um aspecto secundário para o comportamento estrutural – tal como referido no Capítulo 3, estão fora do âmbito deste estudo considerações relativas à prevenção de colapso progressivo. No entanto, independentemente das ligações viga-pilar serem mais ou menos resistentes que as vigas e pilares adjacentes, a sua rigidez é um aspecto que não pode ser descurado (Capítulo 6).

Tal como foi referido no Capítulo 2, de acordo com a NP EN 1993-1-8 (IPQ [2010d]), uma junta de uma estrutura metálica pode ser classificada como nominalmente rígida se verificar as condições indicadas na Figura 2.6. No contexto desta especificação, uma junta viga-pilar diz-se nominalmente rígida se a modelação simplificada do seu comportamento recorrendo a um

modelo implícito de eixos for suficientemente rigorosa. Assim, as condições indicadas na Figura 2.6 são critérios simplificados de classificação (CSC) na medida em que, apesar de garantirem implicitamente requisitos de comportamento global da estrutura do tipo (2.1) ou (2.2) (Gomes [2002]), não requerem a determinação explícita do efeito da flexibilidade das juntas. No seguimento dos CSC's desenvolvidos para estruturas metálicas e do trabalho desenvolvido por Gomes, Providência *et al.* [2011], apresenta-se neste capítulo CSC's vocacionados para estruturas porticadas de betão armado, tendo em consideração as especificidades destas estruturas e tendo em consideração o efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar sobre os deslocamentos laterais e sobre a capacidade resistente das estruturas porticadas.

Os motivos para o estabelecimento destes critérios foram: (i) a constatação (Capítulo 6) de que a deformabilidade de ligações viga-pilar pode ter um efeito significativo sobre a capacidade de carga de estruturas porticadas de betão armado não contraventadas quando os efeitos de segunda ordem são relevantes, (ii) o reconhecimento, em algumas especificações técnicas, da necessidade dos modelos globais da estrutura incorporarem a contribuição da deformabilidade das ligações viga-pilar (IPQ [2010d], ASCE [2007a]) e (iii) não serem satisfatoriamente aplicáveis a estruturas de betão armado os critérios estabelecidos para estruturas de outros materiais (Capítulos 2 e 3).

A necessidade da modelação explícita das ligações viga-pilar é avaliada tendo como ponto de referência as abordagens mais correntes para modelação implícita de ligações viga-pilar, ou seja, (i) a modelação das ligações viga-pilar como rígidas (§7.5) e (ii) a modelação ligações viga-pilar recorrendo a modelos de eixos (§7.6). Assim, os procedimentos desenvolvidos visam identificar os casos em que as ligações viga-pilar podem ser consideradas nominalmente rígidas (§7.5) ou, não podendo ser consideradas rígidas, são adequadamente modeladas por um modelo de eixos (§7.6).

Numa primeira fase é ainda analisada a representatividade da estrutura arquétipo adoptada para estabelecer os critérios de classificação e é clarificado o conceito de rigidez efectiva.

## 7.2. Análise crítica do critério de classificação de acordo com a rigidez da NP EN 1993-1-8

Tal como já foi referido nos Capítulos 2 e 3, a NP EN 1993-1-8 inclui disposições para a classificação das juntas viga-pilar de acordo com a sua rigidez. No entanto, estas disposições não são satisfatórias para aplicação a estruturas de betão armado porque:

- (i) adoptam como parâmetro caracterizador da rigidez das vigas e dos pilares a rigidez à flexão em regime elástico linear – dada a fendilhação em tracção e o comportamento não linear do betão em compressão, esta medida não é adequada para estruturas de betão armado mesmo na fase anterior à cedência das armaduras;
- (ii) adoptam como parâmetro caracterizador da rigidez da junta a sua rigidez tangente inicial – porém, constatou-se no Capítulo 5 que o comportamento das componentes da ligação viga-pilar é marcadamente não linear mesmo em situação de serviço;

- (iii) não contabilizam a dimensão efectiva das ligações viga-pilar, ou seja, pressupõem modelação com recurso a modelos de eixos – no entanto, constatou-se no Capítulo 3 que a dimensão relativa da ligação viga-pilar em estruturas de betão armado não é desprezável;
- (iv) a distorção das ligações viga-pilar é um modo de deformação relevante em estruturas porticadas de betão armado (em alguns casos o mais relevante) e, conseqüentemente, a conversão deste modo em dois modos de deformação de flexão nas extremidades das vigas adjacentes à ligação viga-pilar é pouco rigorosa – pode ser aceitável em estruturas metálicas na medida em que as principais fontes de deformação efectivamente ocorrem na ligação<sup>7</sup> e a distorção do núcleo da ligação tem, normalmente, uma contribuição reduzida para a deformabilidade global da junta;
- (v) a aplicação do procedimento preconizado na NP EN 1993-1-8 pode conduzir a inconsistências se o comprimento ou a rigidez à flexão das vigas adjacentes à ligação for diferente, na medida em que uma ligação viga-pilar, mesmo que só a deformação por distorção seja relevante, pode ser classificada como rígida ou semi-rígida consoante se considere a mola angular equivalente numa das vigas adjacentes à ligação ou na outra;
- (vi) de acordo com Gomes [2002], o critério estabelecido no §5.2.2.5(1) da NP EN 1993-1-8 assume conservadoramente  $\rho = (EI_b / L_{be}) / (EI_c / L_{ce}) = 0$ , o que constitui um pressuposto excessivamente gravoso para estruturas de betão armado.

### 7.3. Avaliação da representatividade da estrutura arquétipo

Para avaliar a representatividade da estrutura arquétipo desenvolvida para este estudo considere-se a estrutura porticada plana, não contraventada, regular e com muitos tramos e pisos representada na Figura 7.1(a). Assuma-se que a estrutura está submetida a cargas gravíticas uniformemente distribuídas nas vigas, com densidade  $q$  e resultante  $Q$  em cada piso, e a cargas horizontais com resultante  $\zeta Q$  também aplicadas uniformemente nas vigas. Admita-se, ainda, que as cargas referidas são iguais em todos os pisos.

Por uma questão de simplicidade, nesta análise simplificada assume-se o modelo implícito de eixos (Capítulo 2) para as ligações viga-pilar, comportamento elástico linear para as vigas e pilares e desprezam-se os efeitos de segunda ordem.

Nestas condições, os esforços e deslocamentos da subestrutura evidenciada a cinzento na Figura 7.1(a) podem ser determinados de forma aproximada por sobreposição de esforços e deslocamentos dos modelos simplificados representados na Figura 7.1(b) e (c) em que  $n_p$  é o número de pisos acima da subestrutura evidenciada e  $H$  (esforço transversal no pilar superior) é a carga horizontal transmitida ao pilar superior da subestrutura pela restante estrutura – assumiu-se que esta parcela de carga lateral é proporcional à carga lateral directamente aplicada à subestrutura ao nível das vigas e ao número de pisos acima do nível da subestrutura. Na Figura 7.1(b) está representado o modelo de cálculo simplificado utilizado para determinar

<sup>7</sup> Nomenclatura da NP EN 1993-1-8.

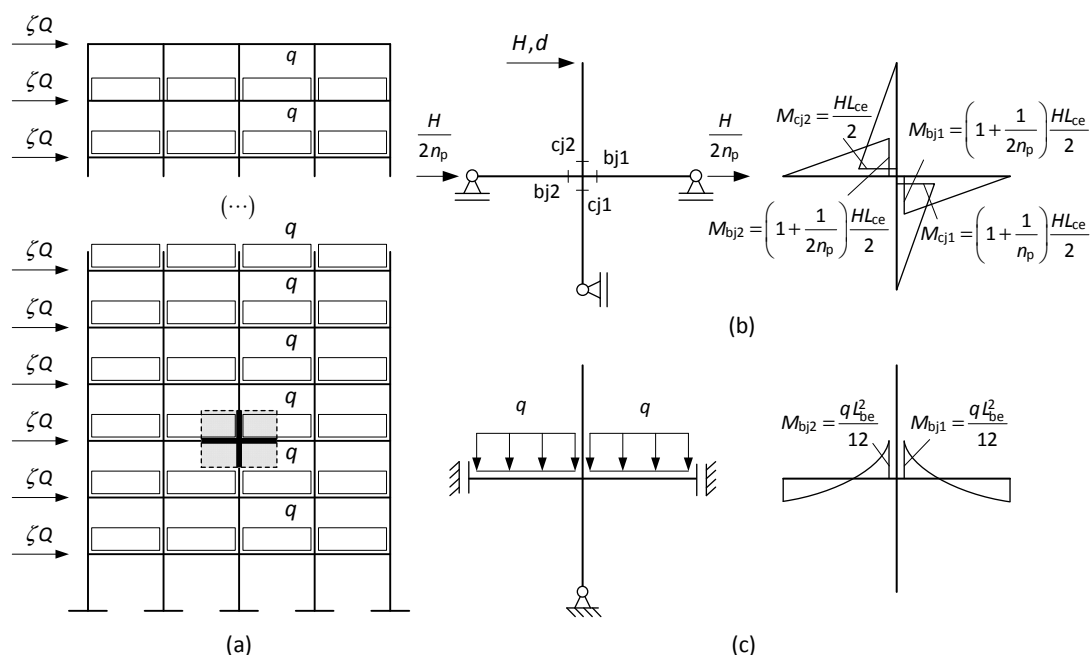


Figura 7.1 – Modelos simplificados da estrutura porticada: (a) modelo completo, (b) modelo simplificado para cargas laterais, (c) modelo simplificado para cargas verticais.

o efeito das cargas laterais. Este modelo foi estabelecido partindo do pressuposto de que, sob cargas horizontais, os pontos de inflexão das vigas e pilares se localizam aproximadamente a meio vão, ou seja, admite-se que a subestrutura se encontra suficientemente afastada dos vãos e pisos exteriores para que o seu efeito sobre os campos de esforços e deslocamentos seja desprezável. Na Figura 7.1(c) está representado o modelo de cálculo simplificado adoptado para determinar o efeito das cargas verticais. Este modelo foi estabelecido com base na simetria topológica e de carregamento associada a cargas verticais uniformemente distribuídas.

Tendo em vista a realização de análises estruturais simplificadas a partir de apenas uma estrutura arquétipo, despreze-se o efeito das diferenças das condições de fronteira estáticas e cinemáticas das vigas e pilar inferior dos modelos apresentados na Figura 7.1(b) e (c) e considerem-se as estruturas arquétipo simplificadas representadas na Figura 7.2. Em seguida apresenta-se uma avaliação dos erros cometidos com estas simplificações, ou seja, quando se determina uma estimativa do efeito conjunto das cargas gravíticas e laterais com cada uma das estruturas apresentadas na Figura 7.2.

### 7.3.1. Condições de fronteira das estruturas arquétipo

Numa primeira fase vai ser avaliado o erro decorrente de se considerar a secção com momento flector nulo a meio vão das vigas. Seja  $x$  a coordenada axial com origem na extremidade esquerda de uma viga interior (ponto de intersecção do eixo da viga e do pilar, ou seja secção  $bj1$ ) da estrutura representada na Figura 7.1(a). As parcelas do diagrama de momento flector nessa viga, resultante da soma das contribuições das Figura 7.1(b) e (c) são

$$M_H(x) = \left(1 + \frac{1}{2n_p}\right) \left(1 - \frac{2x}{L_{be}}\right) \frac{HL_{ce}}{2} \quad (7.1)$$

e

$$M_q(x) = -\frac{q L_{be}^2}{12} + \frac{q L_{be}}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \quad (7.2)$$

em que  $H = n_p \zeta q L_{be}$ .

A coordenada  $x_0$  da secção onde o momento flector se anula é determinada pela equação

$$M_H(x_0) + M_q(x_0) = 0. \quad (7.3)$$

Definindo o erro relativo da coordenada da secção onde o momento se anula como

$$\varepsilon_x = \frac{x_0 - L_{be}/2}{L_{be}} \quad (7.4)$$

e resolvendo a equação (7.3) em ordem a  $n_p$ , obtém-se

$$n_p = \frac{L_{be}}{L_{ce}} \frac{1 - 12\varepsilon_x^2 - 12\varepsilon_x \zeta}{24\varepsilon_x \zeta} = \kappa \frac{1 - 12\varepsilon_x^2}{24\varepsilon_x} - \frac{1}{2} \quad (7.5)$$

em que  $\kappa = (L_{be}/L_{ce})/\zeta$ .

Tendo em consideração que, das duas soluções da equação (7.3), apenas  $x_{01}$  é relevante (Figura 7.3), na Figura 7.4 está representada a evolução de  $\varepsilon_x$  para a solução relevante da expressão (7.3), em função de  $n_p$  para diversos valores do parâmetro  $\kappa$ .

Assumindo uma estrutura de betão armado comum com  $L_{be}/L_{ce} = 2$  e  $\zeta = 0.05$  obtém-se  $\kappa = 40$  o que, para  $\varepsilon_x = 10\%$ , corresponde a  $n_p = 14.1$ . Este resultado significa que, uma estrutura com a relação  $L_{be}/L_{ce} = 2$ , quando solicitada por uma carga horizontal igual a 5% da carga vertical, só apresentará erros  $\varepsilon_x$  inferiores a 10% nos pisos da base de estruturas com mais que 14 pisos.

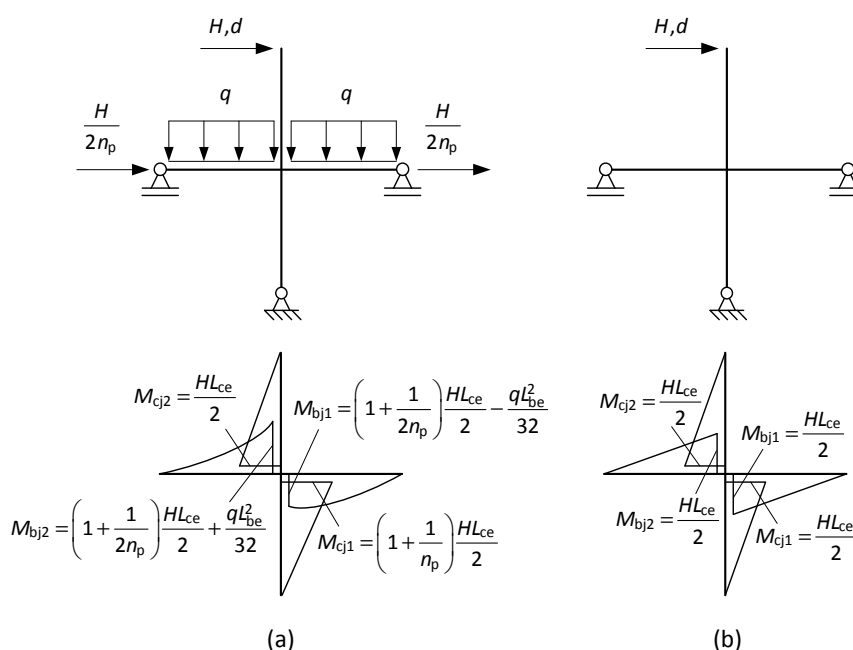


Figura 7.2 – Estruturas arquétipo: (a) com cargas ao nível do piso – Estrutura 1 (E1), (b) sem cargas ao nível do piso – Estrutura 2 (E2).

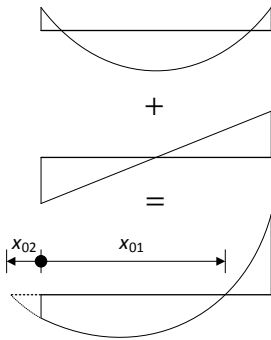


Figura 7.3 – Soluções da equação (7.3).

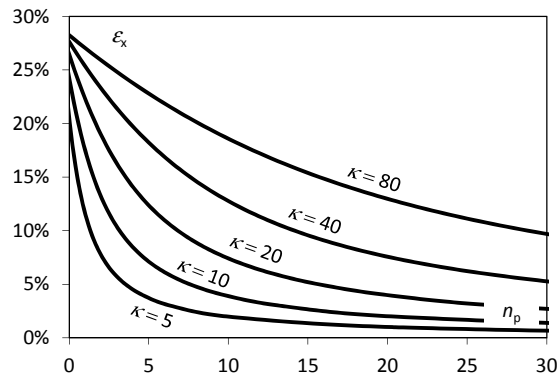


Figura 7.4 – Desvio da secção de momento nulo relativamente à secção de meio vão.

### 7.3.2. Esforços nas secções extremas das vigas e pilares

Em seguida avaliam-se os erros na estimativa dos campos esforços nas vigas e pilares com recurso às estruturas arquétipo representadas na Figura 7.2. Para tal, avaliam-se os erros nos valores dos esforços nas extremidades das vigas e dos pilares. Os esforços resultantes da sobreposição dos diagramas da Figura 7.1(b) e (c) serão denominados como exactos (EX) enquanto os esforços nas estruturas representadas na Figura 7.2 serão denominados como aproximados (AP).

No caso do momento flector nas extremidades dos pilares, a estrutura E1 (Figura 7.2(a)) é exacta, ou seja o momento nas extremidades dos pilares da estrutura E1 é igual ao que se obtém sobrepondo os diagramas representados na Figura 7.1(b) e (c). No caso da estrutura E2 (Figura 7.2(b)) o momento nas extremidades dos pilares só difere do que resulta da sobreposição dos diagramas da Figura 7.1(b) e (c) na secção cj1. Definindo o erro relativo nesta secção como

$$\varepsilon_{E2,Mcj1} = \frac{M_{cj1}^{EX} - M_{E2,cj1}^{AP}}{M_{E2,cj1}^{EX}} = \frac{1}{n_p + 1} \quad (7.6)$$

conclui-se que o erro no momento flector na secção cj1 ao adoptar a estrutura arquétipo E2 só é inferior a 10% nos pisos da base para edifícios com mais de 10 pisos e só é inferior a 5% no piso da base de edifícios com mais de 19 pisos.

No caso do momento flector nas extremidades das vigas, os erros relativos da estrutura E1 (Figura 7.2(a)) são dados por

$$\varepsilon_{E1,Mbj1} = \left| \frac{M_{bj1}^{EX} - M_{E1,bj1}^{AP}}{M_{bj1}^{EX}} \right| = \frac{5\kappa}{8|\kappa - 3(1 + 2n_p)|} \quad (7.7)$$

e

$$\varepsilon_{E1,Mbj2} = \left| \frac{M_{bj2}^{EX} - M_{E1,bj2}^{AP}}{M_{bj2}^{EX}} \right| = \frac{5\kappa}{8[\kappa + 3(1 + 2n_p)]} \quad (7.8)$$

Na Figura 7.5 está representada a evolução de  $\varepsilon_{E1,Mbj1}$  e  $\varepsilon_{E1,Mbj2}$  em função de  $n_p$  para diversos de valores de  $\kappa$ .

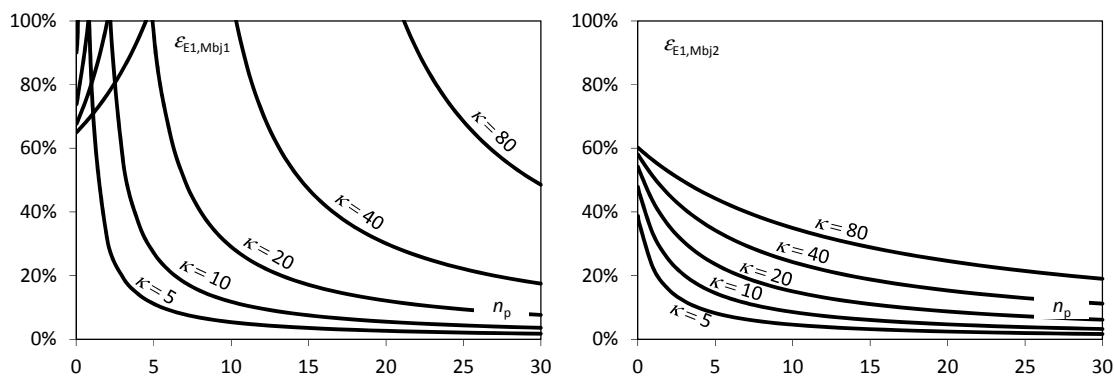


Figura 7.5 – Erro relativo nos momentos nas extremidades das vigas da estrutura E1 (Figura 7.2(a)).

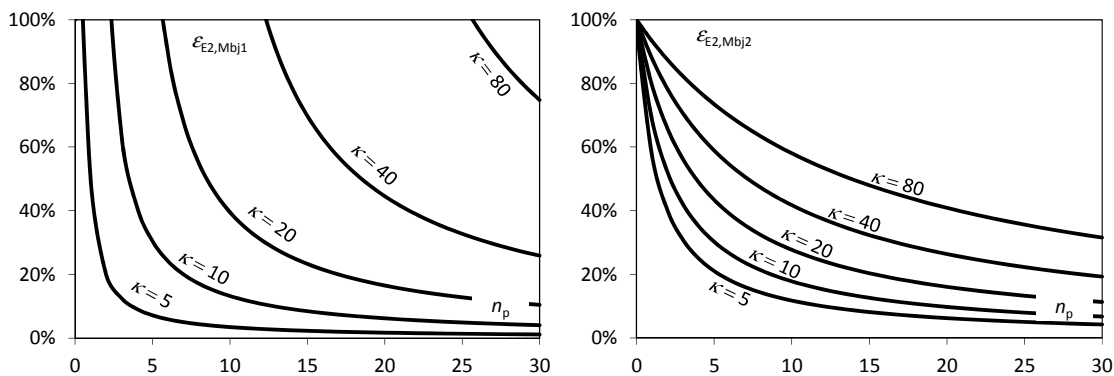


Figura 7.6 – Erro relativo nos momentos nas extremidades das vigas da estrutura E2 (Figura 7.2(b)).

A estrutura E2 (Figura 7.2(b)) apresenta uma simplificação adicional relativamente à estrutura E1 (Figura 7.2(a)) por não considerar o efeito da carga aplicada ao nível do piso. Para esta estrutura (E2, Figura 7.2(b)) tem-se

$$\varepsilon_{E2,Mbj1} = \frac{|M_{bj1}^{EX} - M_{E2,bj1}^{AP}|}{M_{bj1}^{EX}} = \frac{|\kappa - 3|}{|\kappa - 3(1 + 2n_p)|} \quad (7.9)$$

e

$$\varepsilon_{E2,Mbj2} = \frac{|M_{bj2}^{EX} - M_{E2,bj2}^{AP}|}{M_{bj2}^{EX}} = \frac{\kappa + 3}{\kappa + 3(1 + 2n_p)} \quad (7.10)$$

Na Figura 7.6 está representada a evolução de  $\varepsilon_{E2,Mbj1}$  e  $\varepsilon_{E2,Mbj2}$  em função de  $n_p$  para diversos valores de  $\kappa$ .

Para balizar os resultados relevantes nas Figuras 7.5 e 7.6 considerem-se os valores apresentados na Tabela 7.1, obtidos por aplicação das expressões (7.7) a (7.10) para um erro máximo de 10%, considerando: (i)  $\zeta = 0.25$  (acções horizontais significativas) e  $L_{be}/L_{ce} = 1$ , correspondente a  $\kappa = 4$ , (ii) um caso menos severo mas mais corrente, ou seja,  $\zeta = 0.1$  e  $L_{be}/L_{ce} = 1.25$ , correspondente a  $\kappa = 12.5$  e (iii) um caso em que as acções horizontais são pouco relevantes, ou seja,  $\zeta = 0.05$  e  $L_{be}/L_{ce} = 1.5$ , correspondente a  $\kappa = 30$ .

A Tabela 7.1 revela que a qualidade da aproximação degrada-se quando (i) a razão entre as acções horizontais e verticais decresce e (ii) maiores quocientes  $L_{be}/L_{ce}$ . Além disso, verifica-se que a estrutura E1 (Figura 7.2(a)) é a que se mostra mais representativa da estrutura representada na Figura 7.1. No entanto, os resultados da Tabela 7.1 mostram que os erros são da mesma ordem de grandeza para E1 e E2 e são elevados para valores baixos de  $n_p$ .

Tabela 7.1 – Número mínimo de pisos para  $\varepsilon < 10\%$ .

$L_{be}/L_{ce}$	$\zeta$	$\kappa$	$x_0$ (7.6)	estrutura E1		estrutura E2	
				$M_{b1}$ (7.7)	$M_{b2}$ (7.8)	$M_{b1}$ (7.9)	$M_{b2}$ (7.10)
1	0.25	5.0	1.3	4.3	3.0	1.8	10.5
1.25	0.10	12.5	4.1	14.6	10.4	17.4	23.3
1.5	0.05	30.0	10.5	35.8	30.1	49.5	49.5

### 7.3.3. Deslocamento lateral relativo

Dado o carácter parabólico do campo do momento flector, o seu valor nas extremidades da viga pode não ser o melhor parâmetro para averiguar o rigor da aproximação ao longo de todo o vão. Um parâmetro mais adequado para avaliar o erro associado à adopção das estruturas representadas na Figura 7.2 deve incorporar o campo de esforços em toda a estrutura (em particular o diagrama de momentos) e não só num conjunto discreto de secções.

Além disso, como um dos objectos deste estudo é avaliar o efeito da deformabilidade das ligações nos esforços de segunda ordem, as estruturas arquétipo devem permitir avaliar com um bom grau de aproximação os deslocamentos laterais do pórtico.

Um parâmetro que permite avaliar a representatividade das estruturas representadas na Figura 7.2 tendo em atenção estes dois aspectos é o deslocamento lateral relativo entre pisos (*drift*). Este deslocamento é aproximadamente igual ao deslocamento  $d$  do ponto de aplicação da carga  $H$  (Figura 7.1).

Note-se que é fundamental que os modelos representados na Figura 7.2 forneçam uma boa estimativa do *drift* (primeira ordem) na medida em que uma forma aproximada de calcular os efeitos de segunda ordem é majorar os esforços de primeira ordem a partir de um factor de amplificação. Este factor de amplificação é função da carga crítica de instabilidade elástica da estrutura que pode ser relacionada de forma aproximada com o *drift* linear.

O deslocamento  $d$  na estrutura representada na Figura 7.1(b) (a parcela associada à acção aplicada na estrutura representada na Figura 7.1(c) é nula) é dado por

$$d^{1st,EX} = \frac{H L_{ce}^2 (E_c L_{be} + E_b L_{ce}) (1 + 2 n_p)}{24 E_b E_c n_p} \quad (7.11)$$

e nas estruturas E1 e E2 (Figura 7.2) é

$$d_{E1}^{1st,AP} = d^{1st,EX} = \frac{H L_{ce}^2 (E_c L_{be} + E_b L_{ce}) (1 + 2 n_p)}{24 E_b E_c n_p} \quad (7.12)$$

e

$$d_{E2}^{1st,AP} = \frac{H L_{ce}^2 (E_c L_{be} + E_b L_{ce})}{12 E_b E_c} \quad (7.13)$$

O erro relativo de  $d$  nas estruturas E1 e E2 (Figura 7.2) é dado por

$$\varepsilon_{d,E1} = \frac{d^{1st,EX} - d_{E1}^{1st,AP}}{d^{1st,EX}} = 0 \quad (7.14)$$



e

$$\varepsilon_{d,E2} = \frac{d^{1st,EX} - d_{E2}^{1st,AP}}{d^{1st,EX}} = \frac{1}{1 + 2n_p} \quad (7.15)$$

ou seja, o erro é nulo para a estrutura arquétipo E1 (Figura 7.2(a)) e bastante baixo para a estrutura arquétipo E2 (Figura 7.2(b)), mesmo para valores reduzidos de  $n_p$ .

### 7.3.4. Notas finais relativas à representatividade das estruturas arquétipo

Os resultados anteriores mostram que, mesmo considerando uma estrutura regular, as estruturas arquétipo conduzem a erros significativos na estimativa dos esforços das secções mais solicitadas de estruturas correntes. Conclui-se por isso que o efeito da deformabilidade da ligação não pode ser avaliado a partir dos esforços nestas secções.

No entanto, os resultados anteriores mostram que as estruturas arquétipo representadas na Figura 7.2 fornecem uma boa aproximação para o *drift* de estruturas completas com  $n_p > 5$  ( $\varepsilon_d^{\max} = 9\%$ ). Deste modo, admitindo que a modelação mais rigorosa da deformabilidade da ligação viga-pilar não aumenta o erro da aproximação dos deslocamentos laterais, pode ser adequada a avaliação dos esforços de segunda ordem fazendo uso de estimativas do *drift* linear determinadas com base em estruturas arquétipo.

Este resultado valida os estudos efectuados nos Capítulos 3 e 6 e está na base dos critérios simplificados de classificação (CSC) propostos nos §§ 7.5 e 7.6.

## 7.4. Estrutura arquétipo com ligação viga-pilar explícita

### 7.4.1. Simplificações na estrutura arquétipo

As estruturas arquétipo representadas na Figura 7.2 incorporam uma ligação viga-pilar implicitamente deformável (modelo de eixos, Capítulo 2). Considere-se uma nova estrutura arquétipo (E3) que, ao invés do modelo implícito de eixos, incorpora o modelo de ligação viga-pilar explícito desenvolvido no Capítulo 5, tal como se representa na Figura 7.7, e tem em consideração eventuais diferenças de rigidez entre as duas vigas e os dois pilares. Nesta estrutura  $S_{XY}$  é a rigidez das componentes amarração dos pilares e das vigas da ligação, respectivamente,  $X$  identifica a secção da extremidade efectiva da viga ou pilar adjacente à amarração ( $b1$ ,  $b2$ ,  $c1$ ,  $c2$ ) e  $Y$  identifica o tipo de amarração pelo sinal do esforço que a componente amarração terá instalada se se desprezar o efeito das acções aplicadas ao nível das vigas (tracção (T) ou compressão (C)),  $S_{j\gamma}$  é a rigidez da componente núcleo da ligação ao corte,  $\eta_{jbT} = S_{jb1T}/S_{jb2T}$ ,  $\eta_{jbC} = S_{jb1C}/S_{jb2C}$ ,  $\eta_{jCT} = S_{jc1T}/S_{jc2T}$  e  $\eta_{jCC} = S_{jc1C}/S_{jc2C}$ .

A estrutura arquétipo E3 é complexa na medida em que incorpora um elevado número de parâmetros geométricos e materiais. Para estabelecer um critério simplificado que permita avaliar de forma expedita a influência da deformabilidade da ligação optou-se por simplificar esta estrutura. Considere-se a estrutura arquétipo (E4) representada na Figura 7.8(a) em que  $S_{jb1}$ ,  $S_{jb2}$ ,  $S_{jc1}$  e  $S_{jc2}$  são as rigidezes das molas angulares nas extremidades das vigas e pilares adjacentes à ligação,  $\eta_{jb} = S_{jb1}/S_{jb2}$  e  $\eta_b = EI_{b1}/EI_{b2}$ .

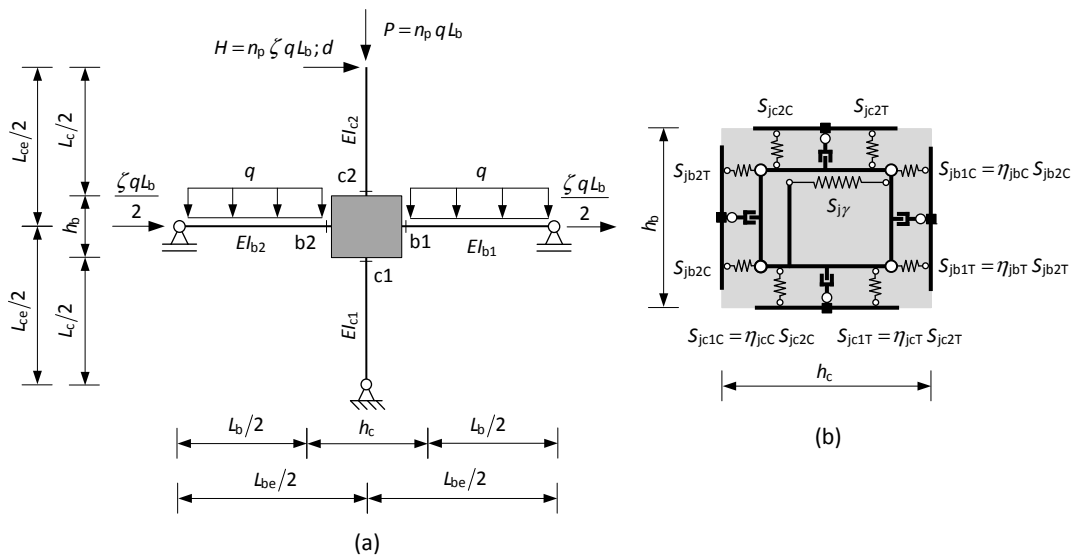


Figura 7.7 – Estrutura arquétipo com modelação explícita da ligação viga-pilar (E3): (a) modelo completo, (b) pormenor da ligação.

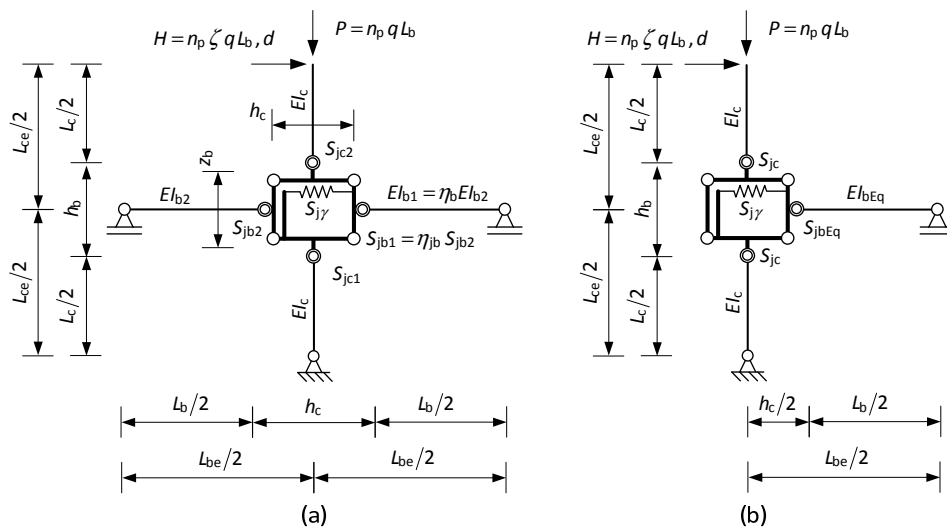


Figura 7.8 – Estruturas arquétipo com modelação explícita da ligação viga-pilar: (a) E4, (b) E5.

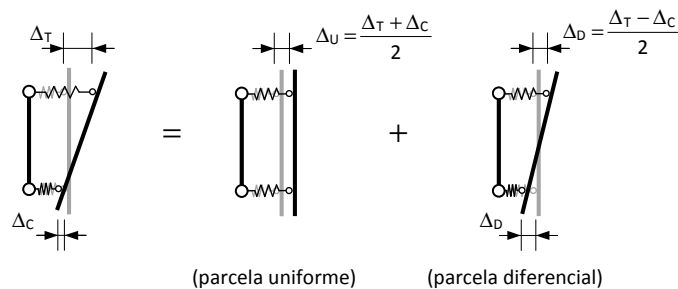


Figura 7.9 – Parcelas da deformação do par de componentes amarração em compressão e tracção.

Implicitamente na estrutura E4 (Figura 7.8(a)) assumiu-se que (i) a rigidez à flexão é igual em ambos os pilares, (ii) a rigidez das componentes amarração é igual em ambos os pilares e (iii) não se contabiliza o efeito da parcela uniforme da deformação nas componentes amarração (Figura 7.9).

As hipóteses (i) e (ii) decorrem de ser prática habitual, em pilares de betão armado com secção rectangular, utilizar armaduras simétricas, por forma a evitar erros de colocação da armadura na fase de construção. No entanto, caso a rigidez dos pilares ou das componentes amarração

apresentem diferenças significativas, este modelo dará resultados conservadores, em termos da determinação da influência da deformabilidade da ligação viga-pilar, se se utilizarem os maiores valores destas rigidezes.

Em termos práticos, a hipótese (iii) visa a substituição das duas molas lineares na extremidade de cada viga/pilar da estrutura E3 por uma mola angular na estrutura E4. Se também for desprezada a deformação da amarração em compressão (como se mostrou no Capítulo 5 a rigidez da amarração em compressão é significativamente superior à da amarração em tracção), a rigidez da mola de angular nas vigas é dada por

$$S_{jb1} = \eta_{jb} S_{jb2} = \frac{z_b^2}{\frac{1}{S_{jb1T}} + \frac{1}{S_{jb1C}}} = \frac{z_b^2}{\frac{1}{\eta_{jbC} S_{jb2T}} + \frac{1}{\eta_{jbT} S_{jb2C}}} \approx \eta_{jbT} S_{jb2T} z_b^2 \quad (7.16)$$

e

$$S_{jb2} = \frac{z_b^2}{\frac{1}{S_{jb2T}} + \frac{1}{S_{jb2C}}} \approx S_{jb2T} z_b^2 \quad (7.17)$$

e, nos pilares, por

$$S_{jc1} = S_{jc2} = \frac{z_c^2}{\frac{1}{S_{jc1T}} + \frac{1}{S_{jc1C}}} = \frac{z_c^2}{\frac{1}{S_{jc2T}} + \frac{1}{S_{jc2C}}} \approx S_{jc1T} z_c^2 = S_{jc2T} z_c^2. \quad (7.18)$$

Tendo as vigas (ou os pilares) comprimento diferente, para determinar a influência da deformabilidade da ligação, de forma conservadora, pode-se utilizar no modelo o menor dos comprimentos.

Caso a rigidez das vigas seja igual ( $\eta_b = 1$ ) e a rigidez da amarração das vigas também ( $\eta_{jb} = 1$ ), a estrutura E4 (hiperestática) é equivalente à estrutura E5 representada na Figura 7.8(b) (isostática) se, nesta última, o elemento viga e as molas angulares que materializam as componentes amarração, apresentarem rigidezes duplas das da estrutura E4. Nestas condições, e para o mesmo nível de carga, os esforços na viga (e na correspondente amarração) na estrutura E5 serão duplos dos esforços em cada uma das vigas (e correspondente amarrações) da estrutura E4. Relativamente ao núcleo da ligação, dado que nem o momento flector total transmitido pelas vigas à ligação nem o esforço transversal no pilar se alteram, o esforço na componente núcleo da ligação ao corte é igual nos dois modelos (E4 e E5). Caso a rigidez das viga ou das amarrações não sejam iguais ( $\eta_b \neq 1 \vee \eta_{jb} \neq 1$ ), a simplificação anterior continua a ser válida a menos do esforço axial no pilar inferior, desde que a rigidez da viga e da correspondente amarração na estrutura E5 (Figura 7.8(b)) correspondam à soma da rigidez das vigas e amarrações da estrutura E4 (Figura 7.8(a)). Neste caso a rigidez da viga ( $E_{l_{bEq}}$ ) e da mola angular que materializa a amarração ( $S_{jbEq}$ ) são

$$E_{l_{bEq}} = E_{l_{b2}} + \eta_b E_{l_{b2}} = (1 + \eta_b) E_{l_{b2}} \quad (7.19)$$

e

$$S_{jbEq} = S_{jb2} + \eta_{jb} S_{jb2} = (1 + \eta_{jb}) S_{jb2}. \quad (7.20)$$

Note-se que, devido às acções gravíticas, o pressuposto de simetria de rigidez das vigas e correspondentes amarrações habitualmente não se verifica.

#### 7.4.2. Rigidez efectiva ou equivalente

No estudo que em seguida se apresenta as rigidezes utilizadas para os elementos 0D e 1D são *rigidezes efectivas* ou *equivalentes*. Rigidez efectiva ou equivalente de um elemento, é aquela que, para um dado nível de carga, determina deslocamentos nodais nesse elemento iguais aos observados na estrutura real. Desta forma, as análises apresentadas nos §§ 7.3 e 7.4.1 permanecem válidas substituindo as rigidezes elásticas pelas rigidezes efectivas.

A rigidez efectiva de um elemento pontual corresponde, para o esforço considerado, à rigidez secante da componente correspondente. É, por isso, uma quantidade facilmente determinável a partir da lei de comportamento da componente. Para efeito da avaliação da influência da deformabilidade das ligações viga-pilar sobre a deformabilidade da estrutura é conservador utilizar estimativas por defeito da rigidez equivalente das componentes (§§ 7.5 e 7.6).

A rigidez de flexão efectiva de um elemento linear é uma quantidade fictícia considerada constante ao longo do elemento, e o seu valor é tal que, para uma dada distribuição de esforços, determina deslocamentos transversais e rotações nas extremidades do elemento iguais aos da peça real com comportamento materialmente não linear. Ou seja, esta definição considera não só a relação momento curvatura em cada secção transversal do elemento mas também a forma do campo de momento flector ao longo do elemento, sendo por isso uma propriedade elementar e não seccional.

Assim, nesta secção, a expressão  $EI$  tem um carácter unicamente simbólico, quando utilizada para indicar a rigidez à flexão elementar de uma peça linear. Ou seja não se subentende o carácter operatório habitual de produto da inércia da secção transversal pelo módulo de elasticidade do betão ou do aço. A utilização da expressão ou símbolo  $EI$  para designar genericamente a rigidez efectiva à flexão elementar, facilita a compreensão das expressões em que entra, por analogia com a análise elástica linear.

Para efeitos de avaliação do efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar, uma estimativa das rigidezes efectivas das vigas e pilares por defeito conduz a resultados não conservadores (§§ 7.5 e 7.6). Desta forma, no caso geral de uma distribuição de momentos não constante, a rigidez secante da secção transversal do elemento linear com momento flector máximo, usada habitualmente de forma simplificada para obter uma estimativa por excesso dos deslocamentos transversais das vigas e pilares, pode não ser uma estimativa adequada da rigidez efectiva elementar.

Além disso, os valores adoptados para a rigidez efectiva das vigas e pilares devem ser expurgados do efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar, ou seja, devem incorporar somente a deformabilidade associada às vigas e pilares e não a deformabilidade da ligação viga-pilar. Desta forma, por exemplo, os valores de rigidez de flexão para vigas e pilares propostos na ASCE [2007b] não devem ser adoptados neste tipo de análise na medida em que já incorporam o efeito do escorregamento das armaduras longitudinais das vigas e pilares no interior das ligações viga-pilar e fundações.

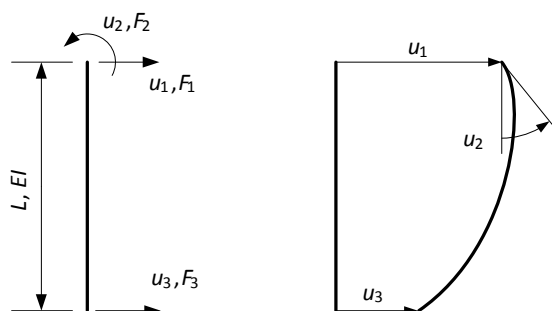


Figura 7.10 – Sistema de coordenadas nodais para um elemento linear com rotação livre numa extremidade. Configuração inicial e configuração deformada genérica.

No remanescente desta secção  $S_j$ ,  $EI_b$  e  $EI_c$  devem ser entendidas como rigidezes efectivas.

Para avaliar a rigidez efectiva de um elemento linear, considere-se o elemento representado na Figura 7.10 e respectiva configuração deformada genérica. Trata-se de um elemento com a rotação livre numa das extremidades, por forma a replicar as condições de fronteira dos elementos lineares das estruturas arquétipo E4 e E5.

A relação entre as forças nodais e os deslocamentos nodais representados na Figura 7.10 assumindo pequenas deformações, comportamento elástico linear ( $EI^e$ ) e a inexistência de acções de vão, pode ser expressa por

$$F_1^e = \frac{3EI^e}{L^3}(u_1^e - u_3^e) + \frac{3EI^e}{L^2}u_2^e = -F_3^e \quad (7.21)$$

e

$$F_2^e = \frac{3EI^e}{L^2}(u_1^e - u_3^e) + \frac{3EI^e}{L}u_2^e = F_1^e L. \quad (7.22)$$

Efectuando uma análise materialmente não linear recorrendo ao modelo linear implementado no EvalS (Capítulo 6) podem ser determinadas, para um determinado modo de deformação e campo de esforços, as forças nodais  $F_i^{nl}$  e os deslocamentos nodais  $u_i^{nl}$  correspondentes com  $i=1,2$  e 3.

A rigidez efectiva elementar de flexão do elemento linear é a rigidez  $EI$  que satisfaz as igualdades (7.21) e (7.22) quando as forças e deslocamentos nodais considerados correspondem aos de uma análise materialmente não linear, ou seja, quando se substitui nas expressões (7.21) e (7.22),  $F_i^e$  por  $F_i^{nl}$  e  $u_i^e$  por  $u_i^{nl}$  com  $i=1,2$ .

Desta forma, a satisfação das igualdades (7.21) a (7.22) para um determinado campo de esforços, conduz a dois valores de  $EI$  dados por

$$EI_1 = \frac{F_1^{nl} L^3}{3(u_1^{nl} + u_2^{nl} L - u_3^{nl})} \quad (7.23)$$

e

$$EI_2 = \frac{F_2^{nl} L^2}{3(u_1^{nl} + u_2^{nl} L - u_3^{nl})}. \quad (7.24)$$

Sendo o quociente entre os dois valores de rigidez

$$\frac{EI_1}{EI_2} = \frac{F_1^{nl}}{F_2^{nl}} L. \quad (7.25)$$

Por equilíbrio estático do elemento linear com a rotação livre numa extremidade, conclui-se que o membro direito da expressão (7.25) é sempre unitário e, conseqüentemente,  $EI_1 = EI_2$ .

O modo de deformação relevante das vigas e pilares das estruturas E4 e E5 (Figura 7.8) resulta da combinação dos modos de deformação representados na Figura 7.11(a) e (b). A Figura 7.11(c) representa a distribuição de momento flector correspondente a ambos os modos de deformação. Dada a igualdade  $EI_1 = EI_2$ , apenas foi avaliada a rigidez efectiva correspondente ao modo de deformação representado na Figura 7.11(a).

Em seguida apresenta-se um estudo paramétrico para avaliar o efeito da (i) percentagem geométrica de armadura de tracção, (ii) percentagem geométrica da armadura de compressão, (iii) comprimento do elemento linear, (iv) resistência à compressão do betão, (v) tensão de cedência das armaduras e (vi) nível de esforço axial de compressão, sobre a rigidez efectiva  $EI$ .

Considere-se a determinação de  $EI$  para uma peça linear de betão armado, uniforme e de secção rectangular, em função do nível de carga  $Q$ . Adoptaram-se como referência os pilares das subestruturas estudadas no §6.6.1 com  $L=2.5m$ ,  $b \times h=300 \times 500mm^2$ ,  $d=450mm$ ,  $d'=50mm$ ,  $f'_c=35MPa$  e  $f_y=400MPa$ . Para os varões da armadura longitudinal adoptou-se um comportamento bilinear com  $E_s=210GPa$ ,  $E_{sh}=0.01E_s$  e  $\epsilon_u=0.05$ . Para o betão foi utilizada a relação tensão-extensão proposta no MC90 (MC90 [1990]) e foi incorporado o *tension stiffening* recorrendo ao modelo proposto no Capítulo 6.

Na Tabela 7.2 são indicadas as quantidades de armadura consideradas. Os casos indicados visam representar secções transversais pouco armadas, moderadamente armadas e fortemente armadas. Foram assumidas secções transversais simplesmente armadas e duplamente armadas. Note-se que o caso com maior percentagem de armadura excede os limites permitidos pelo §9.5.2(3) da NP EN 1992-1-1 (IPQ [2010a]).

A Figura 7.12(a) representa a evolução do quociente entre rigidez efectiva elementar  $EI$  e a rigidez elástica  $EI^{e,c}$  da secção bruta de betão para os casos apresentados na Tabela 7.2 (identificados pelo par  $\rho - \rho'$ ) em função de  $Q/Q_u$  para  $n=0$ . A Figura 7.12(b) apresenta o quociente entre a rigidez elementar efectiva e a rigidez elástica da secção no caso 1.86-0.00 em função do comprimento do pilar também para  $n=0$ .

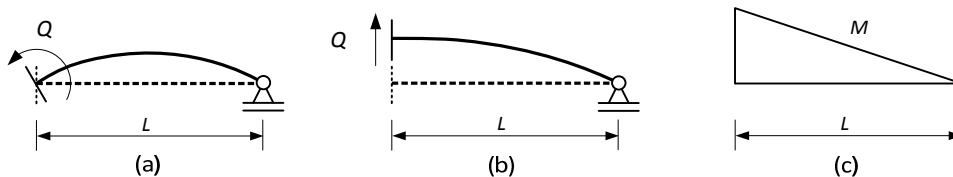


Figura 7.11 – Modos de deformação e distribuição de momentos flectores para o elemento encastrado-articulado.

Tabela 7.2 – Armadura longitudinal nas secções transversais.

armadura de tracção	armadura de compressão	$\rho = A_s/(bd)$ [%]	$\rho' = A'_s/(bd)$ [%]	$\mu = M_y/(bd^2f'_c)$ ( $n=0$ ) [%]
4 $\phi$ 20	-	0.93	0.00	9.2
4 $\phi$ 20	4 $\phi$ 20		0.93	9.4
8 $\phi$ 20	-	1.86	0.00	17.2
8 $\phi$ 20	8 $\phi$ 20		1.86	18.1
8 $\phi$ 25	-	2.91	0.00	25.6
8 $\phi$ 25	8 $\phi$ 25		2.91	28.7

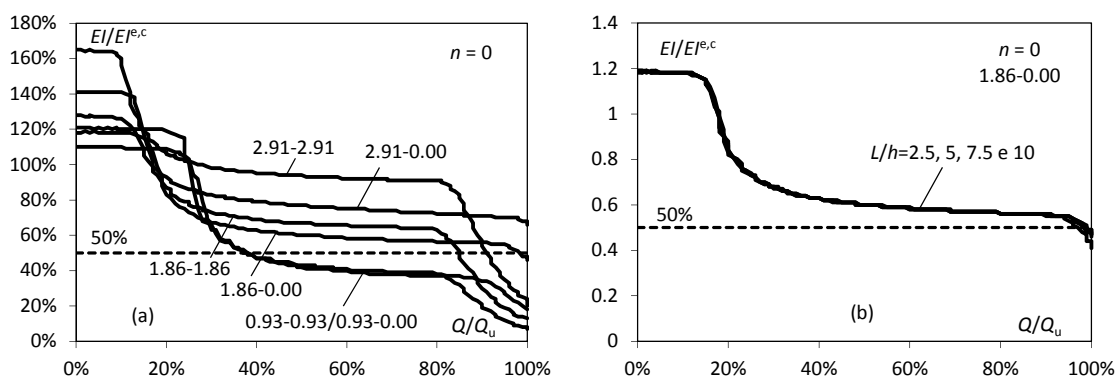


Figura 7.12 – Variação da rigidez elementar efectiva com o nível de carga para diferentes: (a) percentagens geométricas armadura longitudinal e (b) comprimentos do pilar.

A Figura 7.12(a) revela que a rigidez elementar efectiva (i) aumenta com a quantidade de armadura longitudinal, (ii) apresenta grande sensibilidade à quantidade de armadura de tracção e (iii) é sensível à quantidade de armadura compressão em secções muito armadas. Além disso, a rigidez efectiva é aproximadamente constante no intervalo de carga que se vai considerar corresponder às condições de serviço neste estudo – excluem-se deste intervalo a fase não fendilhada (0 a 20-30% da carga de colapso) e a fase pós-cedência (cargas superiores a 80-90% da carga de colapso). Esta figura permite ainda concluir que, para elementos moderadamente armados e fortemente armados, a estimativa para a rigidez em secção fendilhada proposta no §4.3.1(7) da NP EN 1998-1 para os elementos lineares ( $50\%EI^{e,c}$ ) é uma estimativa por defeito de  $EI$  em condições de serviço.

A Figura 7.12(b) revela que a rigidez elementar efectiva é pouco sensível ao comprimento dos elementos lineares.

De modo a referenciar os valores calculados para a rigidez efectiva elementar, calcularam-se também os valores da rigidez elástica linear em secção fendilhada ( $EI^{e,cr}$ ) e a rigidez da secção transversal correspondente ao início da cedência das armaduras ( $EI^N$ ). A rigidez  $EI^N$  foi calculada recorrendo ao modelo de fibras apresentado no Capítulo 6 e a rigidez  $EI^{e,cr}$  foi calculada por análise da secção transversal fendilhada (i) assumindo a hipótese de Euler-Bernoulli, (ii) admitindo comportamento elástico linear para as armaduras e o betão e (iii) desprezando a resistência à tracção do betão. Para esforço axial nulo, definindo

$$\rho = \frac{A_s}{bd}, \rho' = \frac{A'_s}{bd}, \alpha = \frac{E_s}{E_c} \text{ e } \beta = \frac{\rho'}{\rho} \quad (7.26)$$

a profundidade do eixo neutro da secção fendilhada é dada por

$$k = \frac{c}{d} = -\alpha\rho(1+\beta) + \sqrt{(\alpha\rho(1+\beta))^2 + 2\alpha\rho\left(1+\beta\frac{d'}{d}\right)} \quad (7.27)$$

e a inércia equivalente é dada por

$$I^{e,cr} = bd^3 \left[ \frac{k^3}{3} + \alpha\rho \left( (1-k)^2 + \beta \left( k - \frac{d'}{d} \right)^2 \right) \right] \quad (7.28)$$

Deste modo o quociente entre a rigidez elástica linear em secção fendilhada e a rigidez elástica linear da secção de betão é dado por

$$\left(\frac{EI^{e,cr}}{EI^{e,c}}\right)_{n=0} = 12\left(\frac{d}{h}\right)^3 \left[ \frac{k^3}{3} + \alpha\rho \left( (1-k)^2 + \beta \left( k - \frac{d'}{d} \right)^2 \right) \right]. \quad (7.29)$$

Para  $n > 0$  (compressão) a profundidade do eixo neutro da secção fendilhada é obtida pela resolução da equação

$$k^3 - 3k^2A - 6k\alpha\rho \left[ (A-1) + \beta \left( A - \frac{d'}{d} \right) \right] + 6\alpha\rho \left[ (A-1) + \beta \left( A - \frac{d'}{d} \right) \frac{d'}{d} \right] = 0 \quad (7.30)$$

em que

$$A = \frac{h}{2d} + \frac{M}{Nd} \quad (7.31)$$

e o quociente entre a rigidez elástica linear em secção fendilhada e a rigidez elástica linear da secção de betão é dado por

$$\left(\frac{EI^{e,cr}}{EI^{e,c}}\right)_{n \neq 0} = 12 \frac{d^2}{h^3} \frac{M}{N} \left[ -\frac{k^2}{2} + \alpha\rho \left( (1-k) - \beta \left( k - \frac{d'}{d} \right) \right) \right]. \quad (7.32)$$

Alternativamente, o quociente  $EI^{e,cr}/EI^{e,c}$  pode ser determinado recorrendo ao modelo de fibras apresentado no Capítulo 6.

A Tabela 7.3 apresenta o valor da rigidez efectiva para 60% da carga de colapso e confronta-o com o da rigidez elástica linear em secção fendilhada ( $EI^{e,cr}$ ) e com o da rigidez da secção transversal correspondente ao início da cedência das armaduras ( $EI^y$ ). Esta tabela revela que, de uma forma geral, tanto  $EI^{e,cr}$  como  $EI^y$  constituem estimativas por defeito de  $EI$ , em particular para baixas percentagens de armadura longitudinal. Note-se, no entanto, que  $EI^{e,cr}$  constitui uma boa estimativa de  $EI$  para maiores percentagens de armadura.

A Figura 7.13 representa a variação da rigidez elementar efectiva no caso 1.86-0.00 para diferentes valores da tensão de rotura à compressão do betão e da tensão de cedência do aço. A Tabela 7.4 apresenta o valor da rigidez efectiva para 60% da carga de colapso dos casos da Figura 7.13 e confronta-o com o da rigidez elástica linear em secção fendilhada ( $EI^{e,cr}$ ) e com o da rigidez da secção transversal correspondente ao início da cedência das armaduras ( $EI^y$ ). Esta tabela, apresenta na coluna esquerda a sigla indicativa do caso.

A Figura 7.13 e a Tabela 7.4 revelam que para  $Q = 0.6 Q_u$  a  $EI$  apresenta pouca sensibilidade à resistência à compressão do betão e à tensão de cedência das armaduras. A Tabela 7.4 também mostra que os valores de  $EI^{e,cr}$  constituem boas estimativas de  $EI$  para  $Q = 0.6 Q_u$ .

Tabela 7.3 – Rigidez elementar efectiva em função da quantidade de armadura longitudinal para  $n = 0$  e  $Q = 0.6 Q_u$ .

$\rho - \rho'$	$EI/EI^{e,c}$ (0.6 $Q_u$ ) [%]	$EI^{e,cr}/EI$ [%]	$EI^y/EI$ [%]
0.93-0.00	40	85	82
0.93-0.93	41	85	73
1.86-0.00	59	96	87
1.86-1.86	66	95	92
2.91-0.00	75	101	85
2.91-2.91	92	98	94



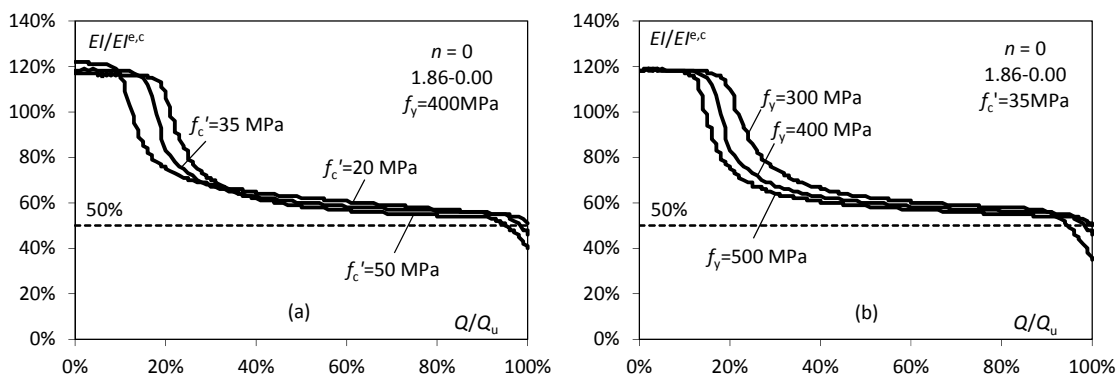


Figura 7.13 – Variação da rigidez elementar efectiva com o nível de carga (no caso 1.86-0.00) para vários valores: (a) da tensão de rotura à compressão do betão e (b) da tensão de cedência do aço.

Tabela 7.4 – Rigidez elementar efectiva em função da tensão de rotura à compressão do betão e da tensão de cedência do aço.

$\rho - \rho': f'_c - f_y$	$EI/EI^{e,c}$ (0.6 $Q_u$ ) [%]	$EI^{e,cr}/EI$ [%]	$EI^y/EI$ [%]
1.86-0.00: 20-400	61	106	79
1.86-0.00: 35-400	59	96	87
1.86-0.00: 50-400	57	91	88
1.86-0.00: 35-300	61	93	87
1.86-0.00: 35-400	59	96	87
1.86-0.00: 35-500	57	98	86

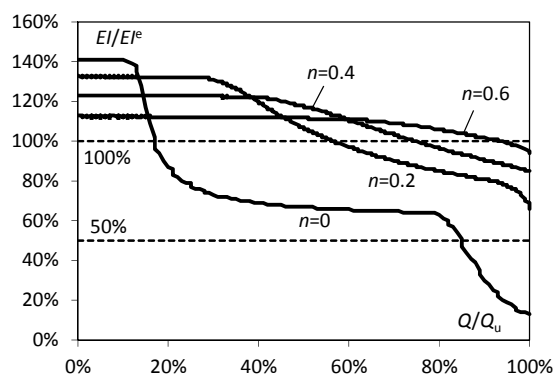


Figura 7.14 – Efeito do esforço axial sobre a rigidez elementar efectiva.

O caso 1.86-1.86 foi analisado para valores crescentes do valor absoluto do esforço axial de compressão, representando a Figura 7.14 as correspondentes variações da rigidez elementar efectiva com o nível de carga. Note-se que se optou por um elemento com armaduras longitudinais simétricas em relação ao eixo de flexão da secção transversal por forma a eliminar a curvatura associada ao esforço axial puro e desta forma facilitar a interpretação dos resultados. Além disso, a análise efectuada foi materialmente não linear mas geometricamente linear.

A Tabela 7.5 apresenta novamente o valor da rigidez efectiva para 60% da carga de colapso e confronta-o com o da rigidez elástica linear em secção fendilhada ( $EI^{e,cr}$ ) e com o da rigidez da secção transversal correspondente ao início da cedência das armaduras ( $EI^y$ ).

A Figura 7.14 mostra que a rigidez elementar efectiva apresenta forte sensibilidade ao nível de esforço axial, sendo quase sempre tanto maior quanto maior o nível de esforço axial. Além disso, esta figura também mostra que, contrariamente ao que ocorre para  $n = 0$ , para  $n > 0$

Tabela 7.5 – Efeito do esforço axial sobre a rigidez elementar efectiva.

$\rho - \rho'$ : $n$	$EI/EI^{e,c}$ (0.6 $Q_u$ ) [%]	$EI^{e,cr}/EI$ (0.6 $Q_u$ ) [%]	$EI^y/EI$ [%]
1.86-1.86: 0.0	66	95	92
1.86-1.86: 0.2	97	101	71
1.86-1.86: 0.4	111	113	67
1.86-1.86: 0.6	111	127	79

(compressão) a rigidez  $EI$  não permanece aproximadamente constante para os níveis de carga entre aproximadamente 20 e 80% da carga de colapso.

A Tabela 7.5 confirma o aumento da rigidez efectiva do elemento para  $n > 0$ , mostra que essa tendência também se verifica para  $EI^{e,cr}$  e que  $EI^y$  tende a subestimar  $EI$ .

Tendo em consideração que  $EI^y$ , apesar de apresentar um cálculo mais complexo, não constitui uma melhor estimativa de  $EI$  que  $EI^{e,cr}$ , conclui-se que a rigidez elementar efectiva para elementos viga-pilar com esforços correspondentes a condições de serviço (fora do domínio elástico linear do betão mas dentro do domínio elástico linear das armaduras) é razoavelmente estimada pela rigidez  $EI^{e,cr}$  desde que  $EI^{e,cr}/EI^{e,c} > 50\%$ . Se esta condição não for satisfeita  $EI$  pode ser estimada por  $0.5EI^{e,c}$ . Ou seja, de uma forma geral,  $EI$  pode ser estimado por  $\max\{0.5EI^{e,c}, EI^{e,cr}\}$ . Note-se que no caso de  $n > 0$  (compressão) a rigidez elementar efectiva é, em alguns casos, superior à rigidez elástica da secção bruta de betão ( $EI^{e,c}$ ), mesmo em elementos viga-coluna em condições de serviço.

No caso de um elemento viga-coluna em regime pós cedência,  $EI^{e,cr}$  constitui uma estimativa conservadora para  $EI$ . Já em regime elástico linear  $EI^{e,cr}$  é uma estimativa não conservadora para  $EI$  (ver figuras anteriores para valores reduzidos de  $Q/Q_u$ ). Note-se no entanto que a deformabilidade das ligações viga-pilar em regime elástico linear é pouco significativa pelo que este caso não é relevante.

## 7.5. Comparação dos modelos rígido e explícito para ligação viga-pilar

### 7.5.1. Erro relativo dos deslocamentos laterais

A componente horizontal do deslocamento primeira ordem ( $d^{1st}$ ) na extremidade superior do pilar da estrutura arquétipo E5, representada na Figura 7.8(b), pode ser dividida nas parcelas resultantes da deformabilidade (i) das vigas ( $d_b^{1st}$ ), (ii) dos pilares ( $d_c^{1st}$ ) e (iii) da ligação viga-pilar ( $d_j^{1st}$ ). A parcela resultante da deformabilidade da ligação por sua vez pode ser decomposta nas sub-parcelas resultantes da (i) distorção da ligação ( $d_{j\gamma}^{1st}$ ), (ii) deformabilidade da amarração das vigas ( $d_{jb}^{1st}$ ) e (iii) deformabilidade da amarração dos pilares ( $d_{jc}^{1st}$ ). Utilizando o método da carga unitária, desprezando as deformações associadas aos esforços transversos e axial, vem

$$d_b^{1st} = \frac{HL_b^3}{6EI_{bEq}} \frac{L_{ce}^2}{L_{be}^2}, \quad (7.33)$$

$$d_c^{1st} = \frac{HL_c^3}{12EI_c}, \quad (7.34)$$

$$d_{jb}^{1st} = \frac{H}{S_{jbEq}} \left( \frac{L_b L_{ce}}{L_{be}} \right)^2, \quad (7.35)$$

$$d_{jc}^{1st} = 2 \frac{H}{S_{jc}} \left( \frac{L_c}{2} \right)^2 = \frac{H L_c^2}{2 S_{jc}}, \quad (7.36)$$

e

$$d_{j\gamma}^{1st} = \frac{H}{S_{j\gamma}} \left( 1 - \frac{L_b L_{ce}}{z_b L_{be}} \right)^2, \quad (7.37)$$

em que os parâmetros de rigidez intervenientes são rigidezes efectivas (§7.4.2).

Definindo  $z_b = \beta_b h_b$  e  $z_c = \beta_c h_c$  e substituindo este resultado em (7.37), obtém-se

$$d_{j\gamma}^{1st} = \frac{H}{S_{j\gamma}} \left( 1 - \frac{L_b L_{ce}}{\beta_b h_b L_{be}} \right)^2. \quad (7.38)$$

Tal como foi referido no §5.4.8, Lowes, Mitra *et al.* [2004] e Birely, Lowes *et al.* [2012] propõe como valor adequado para vigas  $z_b/d_b \approx 0.85$ , que conjugado com  $d/h \approx 0.9$  conduz a  $\beta_b = z_b/h_b \approx 0.765$ , e para pilares  $z_c/d_c \approx 0.75$  que para  $d/h \approx 0.9$  dá  $\beta_c = z_c/h_c \approx 0.675$ .

Considerem-se as rigidezes normalizadas das componentes da ligação definidas por

$$k_{j\gamma} = \frac{S_{j\gamma}}{El_{bEq} / (z_b^2 L_b)} = \frac{S_{j\gamma}}{El_{bEq} / (\beta_b^2 h_b^2 L_b)}, \quad (7.39)$$

$$k_{jb} = \frac{S_{jbEq}}{El_{bEq} / L_b} \quad (7.40)$$

e

$$k_{jc} = \frac{S_{jc}}{El_{bEq} / L_b}. \quad (7.41)$$

Note-se que  $k_{jc}$  e  $k_{j\gamma}$  são definidas de forma distinta de  $k_{jb}$ , o que, não sendo acutelado, pode conduzir a conclusões erradas:  $k_{jc}$  e  $k_{j\gamma}$  são dadas pelo quociente entre a rigidez de uma componente e a soma da rigidez de flexão das vigas enquanto  $k_{jb}$  é dada pelo quociente entre a soma da rigidez das amarrações das duas vigas (duas componentes) e a soma da rigidez de flexão das vigas.

A diferença relativa entre os deslocamentos laterais de primeira ordem na estrutura com ligação rígida (Rig) e com a ligação modelada explicitamente (NRig), doravante designada por *erro relativo dos deslocamentos laterais*, é dada por

$$\varepsilon_d^{1st} = \frac{d^{1st, NRig} - d^{1st, Rig}}{d^{1st, Rig}} = \frac{d_j^{1st}}{d_b^{1st} + d_c^{1st}} = \varepsilon_{d, j\gamma}^{1st} + \varepsilon_{d, jb}^{1st} + \varepsilon_{d, jc}^{1st}, \quad (7.42)$$

em que

$$\varepsilon_{d, j\gamma}^{1st} = \frac{12 \left( 1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1} - \lambda_j \lambda_c^{-1} \beta_b \right)^2}{k_{j\gamma} \left[ 2 \left( 1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1} \right)^2 + \rho \left( 1 - \lambda_j \lambda_c^{-1} \right)^2 \right]}, \quad (7.43)$$

$$\varepsilon_{d,jb}^{1st} = \frac{12(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^2}{k_{jb} \left[ 2(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^2 + \rho(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^2 \right]} \quad (7.44)$$

e

$$\varepsilon_{d,jc}^{1st} = \frac{6(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^2}{k_{jc} \left[ 2(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^2 + \rho(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^2 \right]}. \quad (7.45)$$

$\lambda_b$ ,  $\lambda_c$  e  $\lambda_j$  são esbeltezas simplificadas definidas por

$$\lambda_b = \frac{L_{be}}{h_b}, \quad \lambda_c = \frac{L_{ce}}{h_c} \quad \text{e} \quad \lambda_j = \frac{h_b}{h_c}, \quad (7.46)$$

e  $\rho$  é o quociente entre rigidez das vigas e pilares dado por

$$\rho = \frac{E I_{bEq} / L_b}{E I_c / L_c}. \quad (7.47)$$

Alternativamente, os termos da expressão (7.42) podem ser reescritos em função de apenas dois parâmetros geométricos para além de  $\rho$ . De facto, considere-se

$$\lambda_{j,b} = \lambda_j \lambda_b = \frac{L_{be}}{h_c} \quad \text{e} \quad \lambda_{j,c} = \frac{\lambda_c}{\lambda_j} = \frac{L_{ce}}{h_b}. \quad (7.48)$$

Tendo em conta estes parâmetros, os termos da expressão (7.42) podem ser expressos por

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st} = \frac{12(1 - \lambda_{j,b}^{-1} - \lambda_{j,c}^{-1} \beta_b)^2}{k_{j\gamma} \left[ 2(1 - \lambda_{j,b}^{-1})^2 + \rho(1 - \lambda_{j,c}^{-1})^2 \right]}, \quad (7.49)$$

$$\varepsilon_{d,jb}^{1st} = \frac{12(1 - \lambda_{j,b}^{-1})^2}{k_{jb} \left[ 2(1 - \lambda_{j,b}^{-1})^2 + \rho(1 - \lambda_{j,c}^{-1})^2 \right]} \quad (7.50)$$

e

$$\varepsilon_{d,jc}^{1st} = \frac{6(1 - \lambda_{j,c}^{-1})^2}{k_{jc} \left[ 2(1 - \lambda_{j,b}^{-1})^2 + \rho(1 - \lambda_{j,c}^{-1})^2 \right]}. \quad (7.51)$$

No caso particular de uma estrutura formada por elementos lineares de secção rectangular com  $b_b = b_c$  e com comportamento elástico linear tem-se ainda

$$\rho = \frac{E I_{bEq} / L_b}{E I_c / L_c} = (1 + \eta_b) \frac{h_b^3}{h_c^3} \frac{L_c}{L_b} = (1 + \eta_b) \lambda_j^3 \frac{L_{ce} - h_b}{L_{be} - h_c} = (1 + \eta_b) \frac{\lambda_j^3 \lambda_c - \lambda_j^4}{\lambda_j \lambda_b - 1}. \quad (7.52)$$

### 7.5.2. Incremento dos esforços e redução de capacidade de carga

Seja uma estrutura porticada com comportamento elástico linear, sujeita a um carregamento constituído por uma componente horizontal e outra vertical. Considere-se também a mesma

estrutura mas submetida a um carregamento que apenas induza nos elementos um nível de esforço axial proporcional ao carregamento inicial, sendo  $\alpha$  o coeficiente de proporcionalidade. Sendo, como se disse, elástica, a estrutura encurva para vários valores de  $\alpha$ . Seja  $\alpha_{cr}$  o mais baixo deles. Como é óbvio, deve-se ter  $\alpha_{cr} \gg 1$ . A relevância dos efeitos de segunda ordem para o comportamento da estrutura inicial é relacionável com  $\alpha_{cr}$ , e é com base neste resultado que diversas especificações técnicas (IPQ [2010a], IPQ [2010d], IPQ [2010b]) estabelecem as disposições que permitem identificar os casos em que os efeitos de segunda ordem são relevantes. Em particular, se uma estrutura porticada com comportamento elástico linear apresentar um quociente entre a carga vertical actuante e a respectiva carga crítica de encurvadura  $\alpha_{cr} = P_{cr}/P < 10$ , os efeitos de segunda ordem são considerados relevantes e devem ser contabilizados na análise estrutural.

Além disso, quando  $\alpha_{cr} > 3$ , a carga crítica de encurvadura por varejamento de uma estrutura porticada não contraventada pode ser determinada com erro reduzido aplicando a metodologia proposta por Horne [1975] (ver também §5.2.1(4) da NP EN 1993-1-1(IPQ [2010b])), em que

$$\alpha_{cr} \approx \frac{HL}{Pd}, \quad (7.53)$$

em que  $P$  é a carga vertical total transmitida pelos pisos acima de um nível de pilares em análise,  $H$  é a força de corte horizontal total nos pilares do nível em análise,  $L$  é a altura entre pisos e  $d$  é o deslocamento relativo de primeira ordem entre pisos, no nível em análise.

Analisando uma mesma estrutura assumindo primeiro que as ligações viga-pilar são rígidas (Rig) e, seguidamente, que são deformáveis (NRig), obtém-se, de acordo com (7.53)

$$\frac{\alpha_{cr}^{NRig}}{\alpha_{cr}^{Rig}} \approx \frac{d^{Rig}}{d^{NRig}}, \quad (7.54)$$

o que implica que o erro na avaliação da carga crítica quando se assume que as ligações viga-pilar são rígidas é dado por

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\alpha_{cr}^{Rig} - \alpha_{cr}^{NRig}}{\alpha_{cr}^{NRig}} \approx \varepsilon_d^{1st} \quad (7.55)$$

concluindo-se que

$$\alpha_{cr}^{NRig} \approx \frac{\alpha_{cr}^{Rig}}{1 + \varepsilon_d^{1st}}. \quad (7.56)$$

Os esforços totais (incluindo os efeitos de segunda ordem) podem ser obtidos de forma simplificada quando  $3 < \alpha_{cr} < 10$  no caso da NP EN 1993-1-1,  $5 < \alpha_{cr} < 10$  no caso da NP EN 1998-1 e  $\alpha_{cr} < 10$  no caso da NP EN 1992-1-1, através de um factor de amplificação a ser usado conjuntamente com uma análise elástica linear de primeira ordem assumindo uma rigidez efectiva para os elementos estruturais. Este factor tanto pode ser aplicado directamente às cargas laterais  $H$  como aos esforços de primeira ordem. Esta abordagem consiste em assumir que os esforços totais são dados por

$$M^{2nd} = \frac{M^{1st}}{1 - 1/\alpha_{cr}}. \quad (7.57)$$

O erro nos esforços totais quando não se considera a deformabilidade das ligações é, de acordo com a expressão anterior

$$\varepsilon_M = \frac{M^{2nd,NRig} - M^{2nd,Rig}}{M^{2nd,Rig}} = \frac{M^{1st,NRig}}{M^{1st,Rig}} \frac{\varepsilon_{cr}}{\alpha_{cr}^{Rig} - \varepsilon_{cr} - 1} \approx \frac{\varepsilon_d^{1st}}{\alpha_{cr}^{Rig} - \varepsilon_d^{1st} - 1} \quad (7.58)$$

Ou seja, para um valor de  $\alpha_{cr}^{Rig}$  constante o erro nos esforços totais é tanto maior quanto maior o erro nos deslocamentos  $\varepsilon_d^{1st}$  – Figura 7.15(a). A expressão (7.58) envolve duas aproximações: (i) o resultado (7.55) e (ii)  $M^{1st,NRig} = M^{1st,Rig}$ . Este último resultado só é estritamente válido em estruturas estaticamente determinadas, como é o caso da E5, e constitui uma aproximação em estruturas estaticamente indeterminadas.

Da expressão (7.58) pode-se ainda concluir

$$\varepsilon_d^{1st} \approx \frac{\varepsilon_M (\alpha_{cr}^{Rig} - 1)}{1 + \varepsilon_M} \quad (7.59)$$

De acordo com a expressão (7.58), ao admitir-se que as ligações viga-pilar são rígidas, comete-se um erro relativo nos esforços totais ( $\varepsilon_M$ ) que depende (i) da relação entre a carga vertical actuante e a carga vertical crítica para ligações rígidas  $\alpha_{cr}^{Rig}$  e (ii) do erro relativo nos deslocamentos laterais de primeira ordem  $\varepsilon_d^{1st}$ , expressão (7.42).

Nas estruturas porticadas metálicas, dada a habitual elevada esbelteza das vigas e pilares e a reduzida dimensão relativa das ligações viga-pilar,  $\alpha_{cr}^{Rig}$  será um parâmetro tendencialmente mais relevante para o valor do erro relativo nos esforços totais ( $\varepsilon_M$ ) que nas estruturas porticadas de betão armado. Nestas últimas, dada a habitual reduzida esbelteza das vigas e pilares e, em particular, a elevada dimensão relativa das ligações viga-pilar, é expectável que o parâmetro  $\varepsilon_d^{1st}$  tenha mais relevância para  $\varepsilon_M$  que nas estruturas metálicas.

Note-se ainda que a variação expressa pela expressão (7.58) é relativa a uma parcela adicional aos efeitos de segunda ordem decorrentes da deformabilidade das vigas e pilares, ou seja, a Figura 7.15(a) representa o acréscimo relativo de esforços totais decorrentes exclusivamente da deformabilidade das ligações viga-pilar.

O efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar sobre a capacidade de carga da estrutura também pode ser directamente estimado pela abordagem desenvolvida por Gomes, Providência *et al.* [2011]. De acordo com a fórmula empírica proposta por Merchant [1954], o

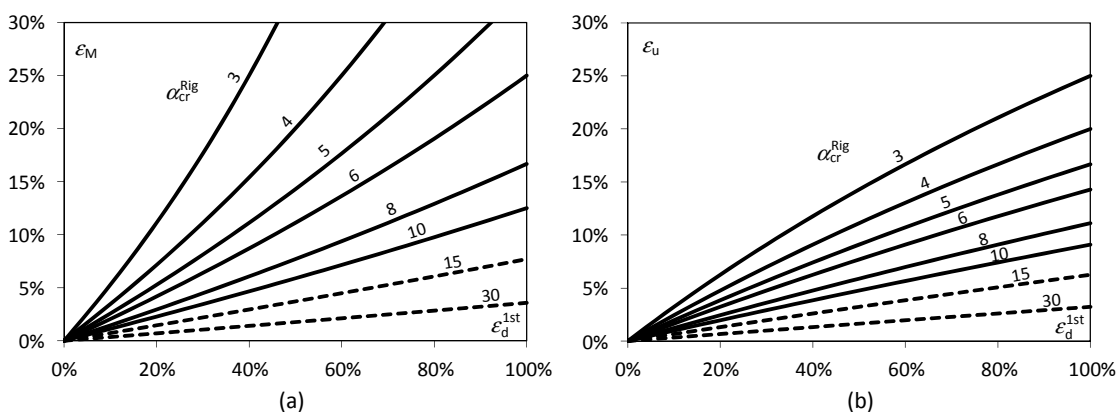


Figura 7.15 – Efeito de  $\varepsilon_d^{1st}$  e  $\alpha_{cr}^{Rig}$  em (a)  $\varepsilon_M$  e (b)  $\varepsilon_u$ .

multiplicador de carga última  $\alpha_u$  de uma estrutura com comportamento elástico-plástico pode ser obtido a partir do multiplicador de carga crítica de encurvadura  $\alpha_{cr}$  e do multiplicador de carga plástico correspondente uma análise rígida-plástica de primeira ordem  $\alpha_{pl}$ . Aplicando esta fórmula tendo em consideração o comportamento material não linear novamente por intermédio da adopção de uma rigidez efectiva para as vigas e pilares na determinação de  $\alpha_{cr}$ , para ligações viga-pilar deformáveis, obtém-se

$$\frac{1}{\alpha_u^{NRig}} = \frac{1}{\alpha_{pl}} + \frac{1}{\alpha_{cr}^{NRig}} \quad (7.60)$$

e para ligações viga-pilar rígidas, obtém-se

$$\frac{1}{\alpha_u^{Rig}} = \frac{1}{\alpha_{pl}} + \frac{1}{\alpha_{cr}^{Rig}} \quad (7.61)$$

Subtraindo as expressões (7.60) e (7.61) chega-se a

$$\frac{\varepsilon_u}{\alpha_u^{NRig}} = \frac{\varepsilon_{cr}}{\alpha_{cr}^{Rig}}, \quad (7.62)$$

em que o erro na determinação da carga última ao assumir ligações viga-pilar rígidas é

$$\varepsilon_u = \frac{\alpha_u^{Rig} - \alpha_u^{NRig}}{\alpha_u^{Rig}} \quad (7.63)$$

Substituindo (7.55) em (7.62)  $\varepsilon_u$  pode ser aproximado pela expressão

$$\varepsilon_u \approx \frac{\varepsilon_d^{1st} \alpha_u^{NRig}}{\alpha_{cr}^{Rig}} \quad (7.64)$$

Assumindo, de forma conservadora, que está instalada na estrutura a solicitação mais gravosa que pode ser aplicada na situação de ligações rígidas, tem-se  $\alpha_u^{Rig} = 1$ . Substituindo  $\alpha_u^{Rig} = 1$  na expressão (7.63), resolvendo-a em ordem a  $\alpha_u^{NRig}$  e substituindo o resultado na expressão (7.64), obtém-se

$$\varepsilon_d^{1st} \approx \frac{\varepsilon_u \alpha_{cr}^{Rig}}{1 - \varepsilon_u} \quad (7.65)$$

A Figura 7.15(b) apresenta a variação de  $\varepsilon_u$  com  $\alpha_{cr}^{Rig}$  e  $\varepsilon_d^{1st}$ . A comparação da Figura 7.15(b) com a Figura 7.15(a) revela que, no âmbito das simplificações adoptadas nesta análise, o efeito da deformabilidade da ligação é menos pronunciado na redução relativa da carga última da estrutura que no incremento relativo dos esforços, ou seja, para iguais valores de  $\varepsilon_d^{1st}$  e  $\alpha_{cr}^{Rig}$ , tem-se  $\varepsilon_u < \varepsilon_M$ .

### 7.5.3. Evolução das parcelas do erro relativo dos deslocamentos laterais

As expressões (7.49) a (7.51) revelam que  $\varepsilon_d^{1st}$  decresce quanto  $\rho$  aumenta, ou seja, quando decresce a razão entre as rigidezes à flexão dos pilares e das vigas. Já a variação de  $\varepsilon_d^{1st}$  com as esbeltezas simplificadas  $\lambda_c$ ,  $\lambda_b$  e  $\lambda_j$  não é tão evidente. Por esse motivo, as Figuras 7.16 a 7.18 apresentam a variação de cada uma das parcelas de  $\varepsilon_d^{1st}$  com estes parâmetros. Definiram-se os seguintes intervalos de esbelteza representativos da gama de geometrias das

estruturas porticadas de betão armado considerada relevante:  $\lambda_c \in [5, 10]$ ,  $\lambda_b \in [5, 15]$  e  $\lambda_j \in [0.5, 2]$ .

Na análise que se segue, para avaliar a influência de cada um dos parâmetros  $\lambda$  sobre  $\varepsilon_d^{1st}$ , fixa-se o valor dos restantes parâmetros  $\lambda$  na média dos correspondentes intervalos de variação (definidos acima).

A Figura 7.16 mostra que na situação mais gravosa ( $\rho=0$ ),  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st}$  é tanto maior quanto maior a esbelteza simplificada do pilar ( $\lambda_c$ ) e da viga ( $\lambda_b$ ) e quanto menor a esbelteza da ligação ( $\lambda_j$ ).

Já a Figura 7.17 mostra que, para  $\rho=0$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st} = 6/k_{jb}$  independentemente da esbelteza da viga, pilar ou ligação. Este valor confirma o resultado de Gomes [2002], segundo o qual o incremento máximo do *drift* é devido à flexibilidade da ligação é 24% para

$$S_{jb} = 25 \frac{E_b}{L_b} \tag{7.66}$$

independentemente da esbelteza da viga, pilar ou ligação. De facto, se se considerar que tanto as vigas como as respectivas amarrações têm rigidez idêntica ( $\eta_b = \eta_{jb} = 1$ ) – as condições assumidas por Gomes [2002] –, ou seja,  $S_{jbEq} = 2S_{jb}$  e  $E_{bEq} = 2E_b$ , substituindo estes valores juntamente com (7.66) em (7.40) e resolvendo em ordem a  $k_{jb}$ , chega-se a  $k_{jb} = 25$ , que, de acordo com a Figura 7.17 conduz a

$$\left( \varepsilon_{d,jb}^{1st} k_{jb} \right)_{\max} = 6 \rightarrow \left( \varepsilon_{d,jb}^{1st} \right)_{\max} = \frac{6}{25} = 0.24 \tag{7.67}$$

Finalmente, a Figura 7.18 mostra que na situação mais gravosa ( $\rho=0$ ),  $\varepsilon_{d,jc}^{1st}$  é tanto maior quanto maior a esbelteza simplificada do pilar ( $\lambda_c$ ) e quanto menor a esbelteza simplificada da viga ( $\lambda_b$ ) e da ligação ( $\lambda_j$ ).

A análise anterior permite concluir que (i) o incremento do *drift* associado à deformabilidade de cada uma três componentes da ligação é máximo para valores extremos dos intervalos de variação das esbeltezas e (ii) que os valores extremos que maximizam o incremento associado a uma dada componente não são os que maximizam o incremento associado às outras componentes. Nomeadamente, dentro dos intervalos considerados para as esbeltezas e para  $\rho=0$ ,  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st}$  é máximo para  $\{\lambda_c, \lambda_b, \lambda_j\} = \{10, 15, 0.5\}$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st}$  é máximo para  $\{\lambda_c, \lambda_b, \lambda_j\} = \{5, 15, 2\}$  e  $\varepsilon_{d,jc}^{1st}$  é máximo para  $\{\lambda_c, \lambda_b, \lambda_j\} = \{10, 5, 0.5\}$ .

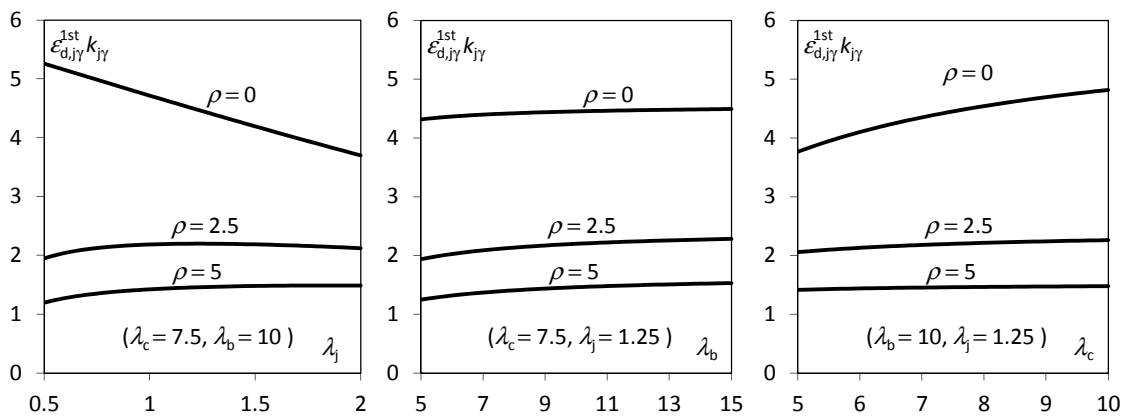


Figura 7.16 – Variação de  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st} k_{j\gamma}$



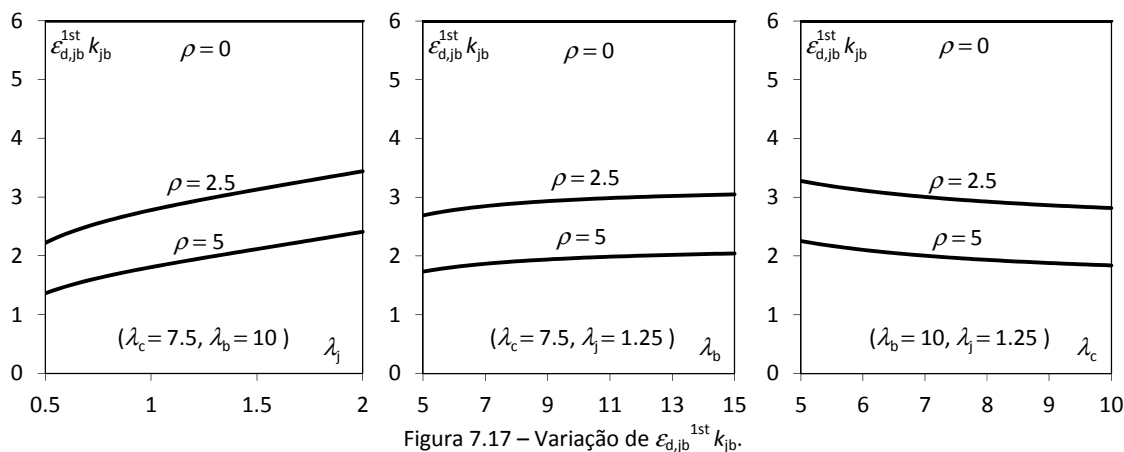


Figura 7.17 – Variação de  $\varepsilon_{d,jb}^{1st} k_{jb}$ .

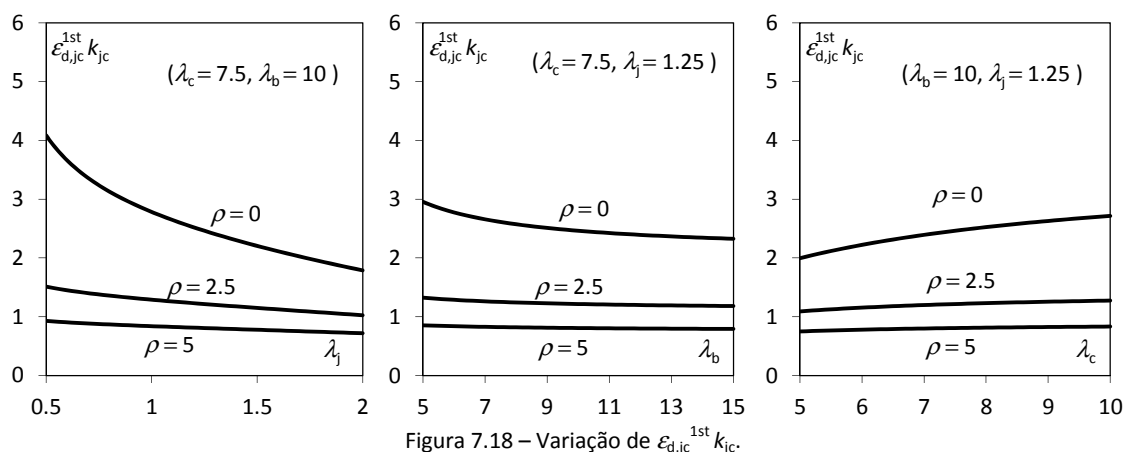


Figura 7.18 – Variação de  $\varepsilon_{d,jc}^{1st} k_{jc}$ .

#### 7.5.4. Classificação das ligações viga-pilar

Tendo como referência as disposições da NP EN 1993-1-8 para classificação de juntas pela sua rigidez (Figura 2.6) e, tendo em atenção as considerações anteriores, desenvolveram-se critérios simplificados de classificação para ligações viga-pilar de acordo com a sua rigidez, tendo em consideração o seu efeito sobre os campos de esforços e de deslocamentos laterais da estrutura.

##### 7.5.4.1. Efeito da deformação das ligações sobre os campos de esforços

No §7.5.2, relativo a estruturas porticadas não contraventadas, o erro relativo dos deslocamentos laterais devido à deformabilidade da ligação, foi relacionado de forma aproximada tanto com o incremento relativo dos esforços totais como com a redução da capacidade de carga. Em seguida, as relações estabelecidas serão particularizadas para a estrutura arquetipo E5 (Figura 7.8(b)), representativa de estruturas porticadas regulares não contraventadas de grande desenvolvimento em planta e altura, por forma a estabelecer critérios de classificação da ligação de acordo com a sua deformabilidade.

Os critérios que em seguida se apresentam têm por base a primeira destas relações, ou seja, o incremento dos esforços totais, embora a utilização da segunda destas relações pudesse ser conduzida exactamente do mesmo modo. Os motivos para esta escolha são os seguintes: (i) a expressão (7.59) envolve menos simplificações que a expressão (7.65) e, por isso, menos propicia a generalizações abusivas, (ii) como o efeito de  $\varepsilon_d^{1st}$  sobre  $\varepsilon_M$  é mais significativo que

o efeito de  $\varepsilon_d^{1st}$  sobre  $\varepsilon_u$  (Figura 7.15), é conservador admitir  $\varepsilon_u \approx \varepsilon_M$  e utilizar para  $\varepsilon_M$  os limites propostos na bibliografia para efeitos de classificação de acordo com  $\varepsilon_u$  (§2.2.2.4.2), e (iii) as disposições nas especificações técnicas relativas aos efeitos de segunda ordem são habitualmente estabelecidas em termos de incremento de esforços e não directamente em termos de redução de capacidade de carga.

São apresentados três critérios que permitem avaliar de forma simplificada o efeito da deformabilidade da ligação viga-pilar, estimando os erros nos esforços que decorreriam de se admitir que a ligação viga-pilar é rígida (ER). O nível de informação requerido para cada critério vai aumentando à medida que o grau de aproximação também é refinado. De uma forma geral, o Critério Simplificado de Classificação 1 (CSC1-ER) é o mais expedito e mais conservador, na medida em que assume a situação mais desfavorável em termos de solitação e geometria da estrutura. O Critério Simplificado de Classificação 2 (CSC2-ER) contabiliza de forma aproximada a solitação e a geometria da estrutura e o Critério Simplificado de Classificação 3 (CSC3-ER) contabiliza de forma mais rigorosa a solitação e a geometria da estrutura – Figura 7.19.

#### 7.5.4.1.1. Interpretação gráfica

No presente estudo, utilizou-se o procedimento para classificação de ligações desenvolvido por Gomes [2002]. Porém, este procedimento teve de ser generalizado, porque o modelo de ligação viga-pilar considerado por Gomes [2002], também com carácter OD, utiliza um único parâmetro para caracterizar a rigidez da ligação, enquanto o modelo aqui desenvolvido requer três parâmetros para o mesmo efeito. Para esse efeito, reescreva-se a expressão (7.59) na forma

$$\left(\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st} k_{j\gamma}\right) k_{j\gamma}^{-1} + \left(\varepsilon_{d,jb}^{1st} k_{jb}\right) k_{jb}^{-1} + \left(\varepsilon_{d,jc}^{1st} k_{jc}\right) k_{jc}^{-1} = \frac{\varepsilon_M \left(\alpha_{cr}^{Rig} - 1\right)}{1 + \varepsilon_M}. \quad (7.68)$$

Esta expressão, para valores constantes de  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st} k_{j\gamma}$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st} k_{jb}$ ,  $\varepsilon_{d,jc}^{1st} k_{jc}$ ,  $\varepsilon_M$  e  $\alpha_{cr}^{Rig}$ , representa um plano no espaço  $\{k_{j\gamma}^{-1}, k_{jb}^{-1}, k_{jc}^{-1}\}$ , Figura 7.20, em que, se se admitir que as rigidezes  $k_{j\gamma}$ ,  $k_{jb}$  e  $k_{jc}$  são positivas, apenas o primeiro quadrante tem significado físico.

Os pontos fora da região tetraédrica limitada pelo plano (7.68) e pelos planos definidos pelos eixos do referencial, correspondem a todas as possíveis combinações de coeficientes  $\{k_{j\gamma}^{-1}, k_{jb}^{-1}, k_{jc}^{-1}\}$  caracterizadores da deformabilidade da ligação viga-pilar, cuja não contabilização para efeitos de análise estrutural conduz, para um dado  $\alpha_{cr}^{Rig}$ , a um erro relativo dos esforços totais superior a  $\varepsilon_M$ .

Na Figura 7.20,  $k_{j\gamma, min}$  representa a rigidez normalizada da componente núcleo da ligação ao corte correspondente a um incremento de momento flector igual a  $\varepsilon_M$  quando as outras

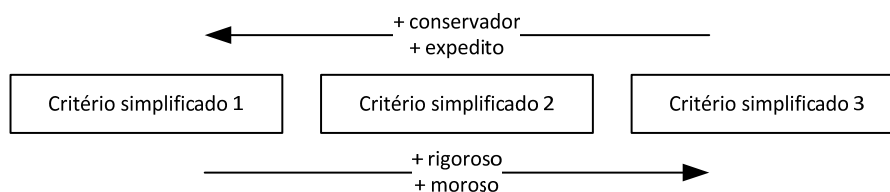


Figura 7.19 – Critérios simplificados de classificação de ligações viga-pilar de acordo com a sua deformabilidade tendo em consideração o incremento de esforços totais.

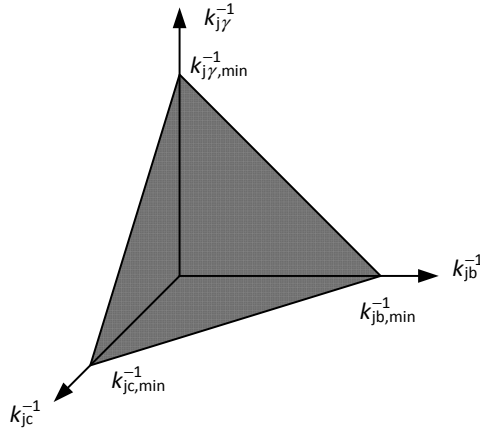


Figura 7.20 – Superfície definida pela expressão (7.68).

componentes são rígidas. Os parâmetros  $k_{jb, \min}$  e  $k_{jc, \min}$  têm um significado análogo a  $k_{j\gamma, \min}$ , pelo que

$$k_{j\gamma, \min}^{-1} = \frac{\varepsilon_M (\alpha_{cr}^{Rig} - 1)}{\varepsilon_{d, j\gamma}^{1st} k_{j\gamma} (1 + \varepsilon_M)}, \quad (7.69)$$

$$k_{jb, \min}^{-1} = \frac{\varepsilon_M (\alpha_{cr}^{Rig} - 1)}{\varepsilon_{d, jb}^{1st} k_{jb} (1 + \varepsilon_M)} \quad (7.70)$$

e

$$k_{jc, \min}^{-1} = \frac{\varepsilon_M (\alpha_{cr}^{Rig} - 1)}{\varepsilon_{d, jc}^{1st} k_{jc} (1 + \varepsilon_M)} \quad (7.71)$$

em que os factores  $\varepsilon_{d, j\gamma}^{1st} k_{j\gamma}$ ,  $\varepsilon_{d, jb}^{1st} k_{jb}$  e  $\varepsilon_{d, jc}^{1st} k_{jc}$  dependem apenas das esbeltezas simplificadas  $\lambda_b$ ,  $\lambda_c$  e  $\lambda_j$  e do parâmetro  $\rho$  – expressões (7.43) a (7.45).

#### 7.5.4.1.2. Critério simplificado 1 (CSC1-ER)

Para estabelecer um critério simplificado e conservador que permita identificar quais os casos em que a ligação pode ser classificada, e conseqüentemente modelada, como rígida, é necessário determinar qual a situação mais gravosa que pode ocorrer e, para essa situação, calcular qual a rigidez mínima da ligação que permite garantir que o erro nos esforços é inferior a uma tolerância pré-definida  $\varepsilon_{M, tol}$ .

A análise efectuada no §7.5.1 (expressões (7.43) a (7.45)) permite concluir que o erro no deslocamento de primeira ordem  $\varepsilon_d^{1st}$  é tanto maior quanto menor o parâmetro  $\rho$ . Além disso, de acordo com a expressão (7.58), o erro nos esforços é tanto maior quanto maior  $\varepsilon_d^{1st}$ .

Já no que diz respeito à esbelteza simplificada, de acordo com a análise efectuada no §7.5.3, a situação mais gravosa depende da parcela de  $\varepsilon_d^{1st}$  considerada. A forma mais simples e conservadora de ter em conta esta particularidade, passa por determinar os valores  $k_{j\gamma, \min}$ ,  $k_{jb, \min}$  e  $k_{jc, \min}$  para a situação mais gravosa (que não corresponde aos mesmos  $\lambda$ ) e considerar como limite dos casos em que se pode admitir que a ligação é rígida, o plano definido pelos pontos  $(0, 0, k_{j\gamma, \min}^{-1})$ ,  $(k_{jb, \min}^{-1}, 0, 0)$  e  $(0, k_{jc, \min}^{-1}, 0)$ .

Desta forma, tendo em atenção os intervalos adoptados para as esbeltezas  $\lambda$ , os casos

considerados na determinação das rigidezes  $k_{j\gamma,\min}$ ,  $k_{jb,\min}$  e  $k_{jc,\min}$  estão indicados na Tabela 7.6.

A título de exemplo, apresenta-se na Figura 7.21 uma interpretação geométrica do procedimento adoptado para o caso  $k_{jc} = \infty$ . Nesta figura, as combinações de rigidezes  $\{k_{jb}, k_{j\gamma}\}$  na zona sombreada, correspondem a casos em que a deformabilidade da ligação determina um incremento de esforços inferior a  $\varepsilon_{M,\text{tol}}$ .

A Tabela 7.6 apresenta também, a sombreado, os valores dos coeficientes  $k_{j\gamma,\min}$ ,  $k_{jb,\min}$  e  $k_{jc,\min}$  para as combinações de esbeltezas indicadas,  $\rho = 0$ ,  $\alpha_{cr}^{\text{Rig}} = 3$  e valores da tolerância  $\varepsilon_{M,\text{tol}}$  entre 5 e 20% – cada um destes valores define um plano dado pela expressão (7.68).

A condição para que uma ligação viga-pilar possa ser considerada rígida será então dada pela expressão

$$\frac{k_{jb,\min}}{k_{jb}} + \frac{k_{jc,\min}}{k_{jc}} + \frac{k_{j\gamma,\min}}{k_{j\gamma}} \leq 1 \quad (7.72)$$

que, particularizada para os valores da Tabela 7.6 com  $\varepsilon_{M,\text{tol}} = 13.6\%$  (valor implícito na NP EN 1993-1-8 de acordo com Gomes [2002]), conduz a

$$\frac{25}{k_{jb}} + \frac{31}{k_{jc}} + \frac{23}{k_{j\gamma}} \leq 1. \quad (7.73)$$

Recorde-se que o critério referido no §2.2.2.4.2, subjacente aos critérios simplificados da NP EN 1993-1-8, propõe que a ligação seja considerada semi-rígida caso a sua deformabilidade determine uma redução de capacidade de carga da estrutura superior a 5%. Na expressão (7.73), é utilizado um valor da tolerância  $\varepsilon_{M,\text{tol}} > 5\%$  de forma a balancear o conservadorismo

Tabela 7.6 – Valores da esbelteza simplificada e correspondentes rigidezes normalizadas mínimas.

	combinação de $\lambda$	$\lambda_c$	$\lambda_b$	$\lambda_j$	$\varepsilon_{M,\text{tol}} [\%]$				
					5	10	13.6	15	20
$k_{j\gamma,\min}$	1	10	15	0.5	57.6	30.2	22.9	21.0	16.4
$k_{jb,\min}$	2	5	15	2	63.0	33.0	25.1	23.0	18.0
$k_{jc,\min}$	3	10	5	0.5	79.0	41.4	31.4	28.8	22.6

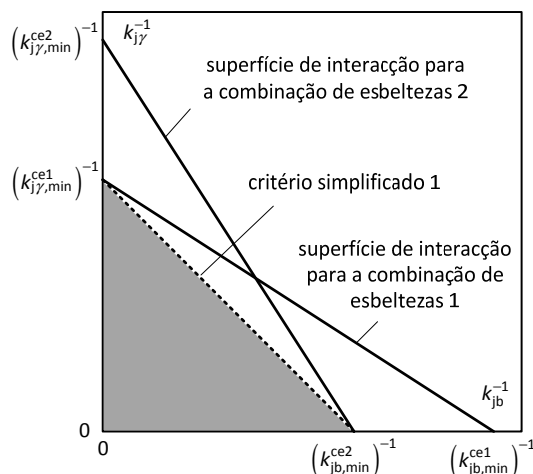


Figura 7.21 – Interpretação geométrica do procedimento adoptado.

dos valores considerados para  $\rho$  e  $\lambda$ . Para a definição dos restantes critérios, com simplificações sucessivamente menos conservadoras e mais rigorosas, a tolerância  $\varepsilon_{M,tol}$  foi progressivamente reduzida.

### 7.5.4.1.3. Critério simplificado 2 (CSC2-ER)

O  $\alpha_{cr}^{Rig} = 3$  fixado por Gomes [2002], para ligações viga-pilar de estruturas porticadas metálicas, poderá ser excessivamente conservador para estruturas porticadas de betão armado na medida em que estas são geralmente menos esbeltas que as primeiras. Justifica-se, desta forma, o desenvolvimento de critérios um pouco mais minuciosos que o critério simplificado 1 (CSC1-ER), que considerem explicitamente a sensibilidade da estrutura aos efeitos de segunda ordem.

Considerando de novo a expressão (7.59) a ligação pode ser considerada rígida se

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st} + \varepsilon_{d,jb}^{1st} + \varepsilon_{d,jc}^{1st} \leq \frac{\varepsilon_{M,tol} (\alpha_{cr}^{Rig} - 1)}{1 + \varepsilon_{M,tol}} \quad (7.74)$$

De modo que, continuando a admitir de forma conservadora  $\rho = 0$  e as combinações mais desfavoráveis dos valores das esbeltezas simplificadas, vem

$$\frac{6.0}{k_{jb}} + \frac{7.5}{k_{jc}} + \frac{5.5}{k_{j\gamma}} \leq \frac{\varepsilon_{M,tol} (\alpha_{cr}^{Rig} - 1)}{1 + \varepsilon_{M,tol}}, \quad (7.75)$$

ou ainda, caso se considere uma tolerância  $\varepsilon_{M,tol} = 10\%$

$$\frac{66}{k_{jb}} + \frac{83}{k_{jc}} + \frac{60}{k_{j\gamma}} \leq \alpha_{cr}^{Rig} - 1 \quad (7.76)$$

em que  $\alpha_{cr}^{Rig}$  pode ser estimado pela expressão (7.53) que, para uma razão entre as resultantes horizontal e vertical acima do piso em estudo  $\zeta$ , assume a forma

$$\alpha_{cr}^{Rig} \approx \frac{H L_{ce}}{P d} = \frac{\zeta}{\theta} \quad (7.77)$$

com  $\theta = d/L_{ce}$  (o *drift*). Note-se que mesmo valores correntes de  $\theta$  (1-2%) podem corresponder a estruturas sensíveis aos efeitos de segunda ordem ( $\alpha_{cr}^{Rig} < 10$ ), Figura 7.22.

O critério simplificado (7.76) é provavelmente o mais interessante, na medida em que assenta num compromisso entre a simplicidade de aplicação e rigor, além de que os dados necessários

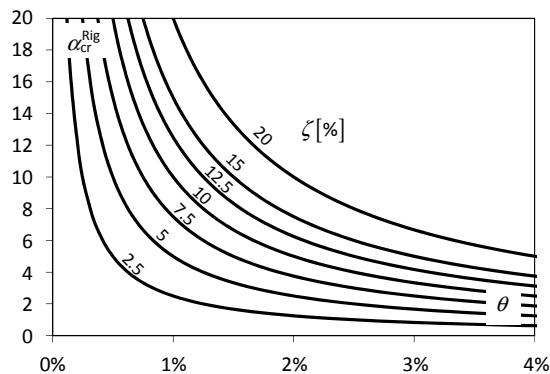


Figura 7.22 – Variação de  $\alpha_{cr}^{Rig}$  com  $\zeta$  e  $\theta$  de acordo com a expressão (7.77).

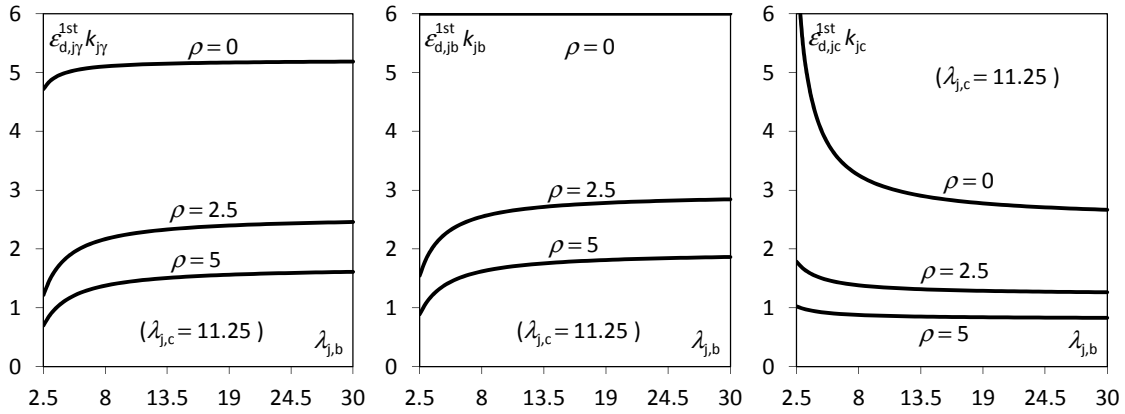


Figura 7.23 – Efeito da variação de  $\lambda_{j,b}$ .

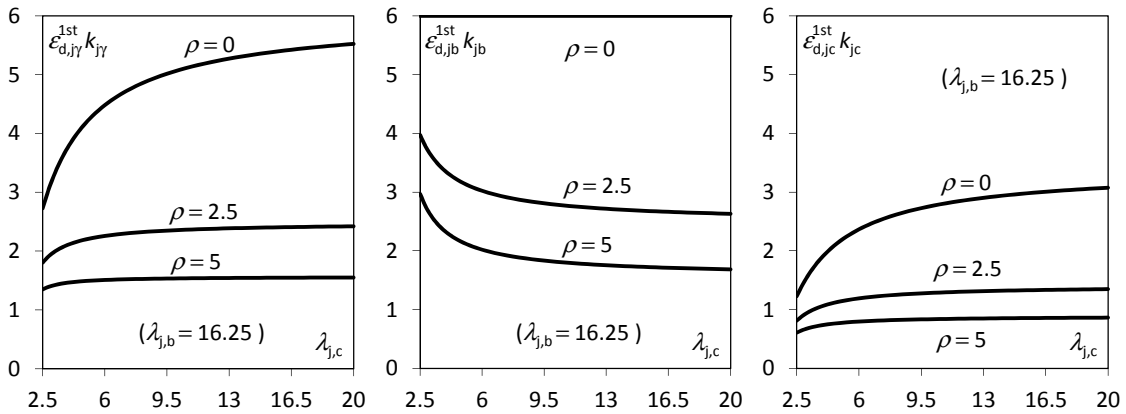


Figura 7.24 – Efeito da variação de  $\lambda_{j,c}$ .

para estimar  $\alpha_{cr}^{Rig}$  são determináveis por uma análise estrutural linear usando estimativas para a rigidez efectiva das dos elementos lineares.

Caso se pretenda uma estimativa conservadora de  $\epsilon_{d,j\gamma}^{1st}$ ,  $\epsilon_{d,jb}^{1st}$  e  $\epsilon_{d,jc}^{1st}$  sem no entanto assumir  $\rho = 0$ , podem-se considerar os valores das esbeltezas simplificadas mais gravosos para cada uma destas parcelas para cada valor de  $\rho$  (§7.5.3, Figuras 7.16 a 7.18).

Note-se, no entanto que, para  $\rho > 0$ , o parâmetro  $\lambda_j$  mais penalizador para  $\epsilon_{d,j\gamma}^{1st}$  deixa de ser  $\lambda_j = 0.5$  e é função de  $\rho$  (Figura 7.16). Esta dependência pode ser ultrapassada tendo em conta que os valores dos parâmetros  $\lambda_{j,b}$  e  $\lambda_{j,c}$  mais penalizadores, dentro do intervalo considerado para os  $\lambda$ , não dependem de  $\rho$  – Figuras 7.23 e 7.24. Por estas figuras, conclui-se que  $\epsilon_{d,j\gamma}^{1st}$  é máximo para  $\{\lambda_{j,c}, \lambda_{j,b}\} = \{20, 30\}$ ,  $\epsilon_{d,jb}^{1st}$  é máximo para  $\{\lambda_{j,c}, \lambda_{j,b}\} = \{2.5, 30\}$  e  $\epsilon_{d,jc}^{1st}$  é máximo para  $\{\lambda_{j,c}, \lambda_{j,b}\} = \{20, 2.5\}$ . Os intervalos de variação de  $\lambda_{j,b}$  e  $\lambda_{j,c}$  foram estabelecidos de acordo com os intervalos de variação de  $\lambda_j$ ,  $\lambda_b$  e  $\lambda_c$ .

Procedendo desta forma, obtém-se, para os intervalos de esbelteza considerados relevantes, as parcelas do erro relativo do deslocamento lateral

$$\epsilon_{d,j\gamma,max}^{1st} = \frac{10.3}{k_{j\gamma}(1.87 + 0.90\rho)}, \quad (7.78)$$

$$\epsilon_{d,jb,max}^{1st} = \frac{11.2}{k_{jb}(1.87 + 0.36\rho)} \quad (7.79)$$

e

$$\varepsilon_{d,jc,max}^{1st} = \frac{5.4}{k_{jc}(0.72 + 0.90\rho)} \quad (7.80)$$

e o critério (7.74), para  $\varepsilon_{M,tol} = 7.5\%$ , toma a forma

$$\frac{148}{k_{j\gamma}(1.87 + 0.90\rho)} + \frac{161}{k_{jb}(1.87 + 0.36\rho)} + \frac{78}{k_{jc}(0.72 + 0.90\rho)} \leq \alpha_{cr}^{Rig} - 1 \quad (7.81)$$

#### 7.5.4.1.4. Critério simplificado 3 (CSC3-ER)

Na Figura 7.21, as combinações de parâmetros  $\{k_{jb}, k_{j\gamma}\}$  na zona compreendida entre a linha a tracejado e pelo menos uma das linhas a cheio podem corresponder também a casos em que o erro na avaliação dos esforços decorrente da modelação da ligação viga-pilar como rígida é inferior ao erro máximo admissível  $\varepsilon_{M,tol}$ . Além de que, tal como já foi referido, assumir  $\rho = 0$  pode ser excessivamente conservador.

Um procedimento mais minucioso, mas mais rigoroso, para avaliar o efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar é a aplicação directa da expressão (7.59). Assim, as ligações viga-pilar podem ser consideradas rígidas caso se verifique a condição

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st} + \varepsilon_{d,jb}^{1st} + \varepsilon_{d,jc}^{1st} \leq \frac{\alpha_{cr}^{Rig} - 1}{21} \quad (7.82)$$

em que  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st}$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st}$  e  $\varepsilon_{d,jc}^{1st}$  são dados pela expressões (7.43) a (7.45) ou (7.49) a (7.51), o parâmetro  $\alpha_{cr}^{Rig}$  pode ser estimado recorrendo ao procedimento referido na secção anterior e, onde se sugere assumir  $\varepsilon_{M,tol} = 5\%$  de acordo com o §2.2.2.4.2.

#### 7.5.4.1.5. Comparação do critério simplificado 1 com a NP EN 1993-1-8

Fazendo  $k_{j\gamma,min} = k_{jc,min} = \infty$ ,  $\rho = 0$ ,  $\alpha_{cr}^{Rig} = 3$  e  $\varepsilon_{M,tol} = 13.6\%$  a expressão (7.72) (ou (7.73)) reduz-se a

$$\frac{25}{k_{jb}} \leq 1 \quad (7.83)$$

Como seria de esperar, ao considerar apenas fontes de deformação na interface entre a viga e a ligação, este critério simplificado corresponde ao estabelecido na NP EN 1993-1-8<sup>8</sup> para juntas viga-pilar.

O critério simplificado de classificação estabelecido na NP EN 1993-1-8 pode ser compreendido como um limite mínimo de rigidez  $S_{Eq,min}$  imposto a um conjunto de molas dispostas em série. Considere-se o conjunto de três molas em série representado na Figura 7.25 e as respectivas rigidezes  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ .

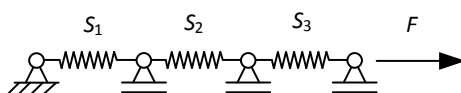


Figura 7.25 – Associação de três molas em série.

<sup>8</sup> Na verdade este critério é ligeiramente diferente do estabelecido na NP EN 1993-1-8 em resultado do primeiro ser estabelecido em termos de  $L_b$  e o segundo  $L_{be}$ .

Impondo uma rigidez mínima equivalente temos a condição

$$S_{Eq} \geq S_{Eq,min} \rightarrow \frac{1}{S_{Eq}} \leq \frac{1}{S_{Eq,min}}, \quad (7.84)$$

ou ainda, se tivermos em consideração que as molas estão associadas em série

$$\frac{1}{S_{Eq}} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \leq \frac{1}{S_{Eq,min}}. \quad (7.85)$$

Considerando as rigidezes normalizadas

$$k_1 = \frac{S_1}{S_{Ref}}, \quad k_2 = \frac{S_2}{S_{Ref}}, \quad k_3 = \frac{S_3}{S_{Ref}}, \quad k_{Eq} = \frac{S_{Eq}}{S_{Ref}} \quad \text{e} \quad k_{Eq,min} = \frac{S_{Eq,min}}{S_{Ref}}, \quad (7.86)$$

obtém-se a o critério

$$\frac{k_{Eq,min}}{k_{Eq}} = \frac{k_{Eq,min}}{k_1} + \frac{k_{Eq,min}}{k_2} + \frac{k_{Eq,min}}{k_3} \leq 1. \quad (7.87)$$

O critério (7.73) difere do critério (7.87) na medida em que o numerador das parcelas do membro esquerdo do critério (7.73) são diferentes entre si. A justificação para esta diferença reside no facto de, no modelo de ligação viga-pilar proposto, não estando as componentes dispostas em série, não apresentam esforço igual. Já a implementação do método das componentes da NP EN 1993-1-8 estabelece um modelo de ligação simplificado, não incorporando as ligações<sup>9</sup> do pilar e incorporando o painel da alma do pilar ao corte nas juntas na forma de uma mola em série, o que conduz a um critério do tipo (7.87).

#### 7.5.4.2. Efeito da deformação da ligação viga-pilar sobre o *drift* (CSC4-DR)

De acordo com Briquet, Guisse *et al.* [1994], os critérios de classificação de ligações viga-pilar devem garantir que não seja considerada como rígida uma ligação cuja deformabilidade determine uma redução acentuada da capacidade de carga da estrutura ou um incremento excessivo dos deslocamentos em condições de serviço.

Por outro lado, tal como se mostrou no Capítulo 6, a não contabilização da deformabilidade das ligações viga-pilar pode comprometer o rigor de uma análise sísmica não linear, independentemente da influência da sua deformabilidade sobre os efeitos de segunda ordem.

Para ter em consideração estes aspectos, assumindo que a parcela dos deslocamentos associada aos efeitos de segunda ordem é desprezável, pode ser estabelecido um critério de classificação das ligações viga-pilar que vise limitar directamente o erro na avaliação dos deslocamentos laterais do pórtico, o critério de classificação 4 (CSC4-DR). Este critério pode ser estabelecido a partir de uma condição do tipo

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st} + \varepsilon_{d,jb}^{1st} + \varepsilon_{d,jc}^{1st} \leq \varepsilon_{d,tol} \quad (7.88)$$

em que  $\varepsilon_{d,tol}$  é a tolerância admissível para o erro nos deslocamentos laterais resultante de se admitir que as ligações viga-pilar são rígidas.

<sup>9</sup> Nomenclatura da NP EN 1993-1-8.



Definindo como tolerância admissível  $\varepsilon_{d, \text{tol}} = 20\%$  (Gomes [2002]) e usando as simplificações conservadoras definidas pelas expressões (7.78) a (7.80), obtém-se

$$\frac{52}{k_{j\gamma}(1.9+0.9\rho)} + \frac{56}{k_{jb}(1.9+0.4\rho)} + \frac{27}{k_{jc}(0.7+0.9\rho)} < 1. \quad (7.89)$$

## 7.6. Comparação dos modelos de eixos e explícito para ligação viga-pilar

Nas secções anteriores deste capítulo foi estudado o efeito da deformabilidade da ligação viga-pilar adoptando como referência uma estrutura arquétipo em que as ligações viga-pilar foram modeladas como rígidas. Esta abordagem vai ao encontro da necessidade de uma modelação mais realista das estruturas de betão armado, tendo em atenção a significativa dimensão das ligações viga-pilar (Capítulo 3). No entanto, na modelação corrente de estruturas de betão armado, a deformabilidade da ligação viga-pilar é frequentemente contabilizada de forma implícita recorrendo a modelos de eixos.

Nas seguintes secções estabelecem-se critérios que, à semelhança do que foi efectuado para o modelo de ligação viga-pilar rígido no §7.5, permitem identificar os casos em que a modelação implícita recorrendo a modelos de eixos conduz a erros excessivos do deslocamento lateral e/ou a reduções significativas da capacidade de carga da estrutura. Ou seja, desenvolvem-se critérios que permitem identificar os casos em que a deformabilidade dos troços das vigas e pilares no interior da ligação permitem modelar a contribuição da deformabilidade desta para o comportamento da estrutura.

### 7.6.1. Variação relativa dos deslocamentos

Considerem-se as estruturas E5 e E6 representadas nas Figuras 7.8(b) e 7.26, respectivamente.

Na estrutura arquétipo E6 (Figura 7.26), o deslocamento lateral na extremidade superior do pilar  $d_b^{1st,e}$  pode ser decomposto nas parcelas decorrente da deformação das vigas ( $d_b^{1st,e}$ ) e dos pilares ( $d_c^{1st,e}$ ). Cada uma destas parcelas pode ser decomposta numa sub-parcela comum à estrutura E5 ( $d_b^{1st}, d_c^{1st}$ ), Figura 7.8(b), e numa sub-parcela decorrente da deformação dos troços de vigas e pilares no interior da ligação ( $d_{hc}^{1st}, d_{hb}^{1st}$ ), ou seja,

$$d_b^{1st,e} = \frac{HL_{be}L_{ce}^2}{6E_{lbeq}} = \frac{HL_b^3}{6E_{lbeq}} \frac{L_{ce}^2}{L_{be}^2} + \frac{H(L_{be}^3 - L_b^3)}{6E_{lbeq}} \frac{L_{ce}^2}{L_{be}^2} = d_b^{1st} + d_{hc}^{1st} \quad (7.90)$$

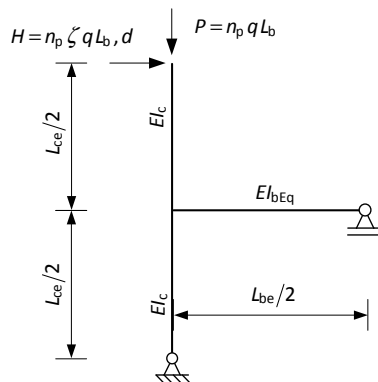


Figura 7.26 – Subestrutura arquétipo E6 com modelação implícita da ligação viga-pilar (modelo de eixos).

com

$$d_{hc}^{1st} = \frac{H(L_{be}^3 - L_b^3) L_{ce}^2}{6E I_{bEq} L_{be}^2} \quad (7.91)$$

e

$$d_c^{1st,e} = \frac{H L_{ce}^3}{12E I_c} = \frac{H L_c^3}{12E I_c} + \frac{H(L_{ce}^3 - L_c^3)}{12E I_c} = d_c^{1st} + d_{hb}^{1st} \quad (7.92)$$

com

$$d_{hb}^{1st} = \frac{H(L_{ce}^3 - L_c^3)}{12E I_c} \quad (7.93)$$

O erro relativo na avaliação do deslocamento lateral na estrutura E6, Figura 7.26, comparativamente à estrutura E5, Figura 7.8(b), é

$$\varepsilon_d^{1st,e} = \frac{d^{1st,NRig} - d^{1st,e}}{d^{1st,e}} = \frac{d_j^{1st} - d_{hc}^{1st} - d_{hb}^{1st}}{d_b^{1st,e} + d_c^{1st,e}} = \varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} + \varepsilon_{d,jb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,jc}^{1st,e} - \varepsilon_{d,hc}^{1st,e} - \varepsilon_{d,hb}^{1st,e} \quad (7.94)$$

em que

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} = \frac{d_{j\gamma}^{1st}}{d_b^{1st,e} + d_c^{1st,e}} = \frac{12(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1} - \lambda_j \lambda_c^{-1} \beta_b)^2}{k_{j\gamma} \left[ 2(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^{-1} + \rho(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^{-1} \right]}, \quad (7.95)$$

$$\varepsilon_{d,jb}^{1st,e} = \frac{d_{jb}^{1st}}{d_b^{1st,e} + d_c^{1st,e}} = \frac{12(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^2}{k_{jb} \left[ 2(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^{-1} + \rho(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^{-1} \right]}, \quad (7.96)$$

$$\varepsilon_{d,jc}^{1st,e} = \frac{d_{jc}^{1st}}{d_b^{1st,e} + d_c^{1st,e}} = \frac{6(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^2}{k_{jc} \left[ 2(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^{-1} + \rho(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^{-1} \right]}, \quad (7.97)$$

$$\varepsilon_{d,hb}^{1st,e} = \frac{d_{hb}^{1st}}{d_b^{1st,e} + d_c^{1st,e}} = \rho \frac{(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^{-1} - (1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^2}{2(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^{-1} + \rho(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^{-1}} \quad (7.98)$$

e

$$\varepsilon_{d,hc}^{1st,e} = \frac{d_{hc}^{1st}}{d_b^{1st,e} + d_c^{1st,e}} = 2 \frac{(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^{-1} - (1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^2}{2(1 - \lambda_j^{-1} \lambda_b^{-1})^{-1} + \rho(1 - \lambda_j \lambda_c^{-1})^{-1}}, \quad (7.99)$$

ou ainda

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} = \frac{12(1 - \lambda_{j,b}^{-1} - \lambda_{j,c}^{-1} \beta_b)^2}{k_{j\gamma} \left[ 2(1 - \lambda_{j,b}^{-1})^{-1} + \rho(1 - \lambda_{j,c}^{-1})^{-1} \right]}, \quad (7.100)$$

$$\varepsilon_{d,jb}^{1st,e} = \frac{12(1-\lambda_{j,b}^{-1})^2}{k_{jb} \left[ 2(1-\lambda_{j,b}^{-1})^{-1} + \rho(1-\lambda_{j,c}^{-1})^{-1} \right]}, \quad (7.101)$$

$$\varepsilon_{d,jc}^{1st,e} = \frac{6(1-\lambda_{j,c}^{-1})^2}{k_{jc} \left[ 2(1-\lambda_{j,b}^{-1})^{-1} + \rho(1-\lambda_{j,c}^{-1})^{-1} \right]}, \quad (7.102)$$

$$\varepsilon_{d,hb}^{1st,e} = \rho \frac{(1-\lambda_{j,c}^{-1})^{-1} - (1-\lambda_{j,c}^{-1})^2}{2(1-\lambda_{j,b}^{-1})^{-1} + \rho(1-\lambda_{j,c}^{-1})^{-1}} \quad (7.103)$$

e

$$\varepsilon_{d,hc}^{1st,e} = 2 \frac{(1-\lambda_{j,b}^{-1})^{-1} - (1-\lambda_{j,b}^{-1})^2}{2(1-\lambda_{j,b}^{-1})^{-1} + \rho(1-\lambda_{j,c}^{-1})^{-1}}. \quad (7.104)$$

### 7.6.2. Evolução das parcelas do erro relativo dos deslocamentos laterais

A análise das expressões (7.95) a (7.97) ou (7.100) a (7.102) revela que  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e}$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st,e}$  e  $\varepsilon_{d,jc}^{1st,e}$  são tanto maiores quanto menores o parâmetro  $\rho$ . A evolução de  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e}$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st,e}$  e  $\varepsilon_{d,jc}^{1st,e}$  com os parâmetros  $\lambda_j$ ,  $\lambda_b$  e  $\lambda_c$  está representada nas Figuras 7.27 a 7.29.

A análise destas figuras permite concluir que os valores mais desfavoráveis das esbeltezas  $\lambda_j$  para efeitos do cálculo de  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e}$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st,e}$  e  $\varepsilon_{d,jc}^{1st,e}$  dependem do valor de  $\rho$  e tanto podem corresponder a uma fronteira do intervalo de variação considerado para  $\lambda_j$  como podem corresponder a um valor no seu interior. Isto significa que não é possível identificar o parâmetro  $\lambda_j$  mais desfavorável, independente de  $\rho$ , para cada uma das parcelas  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e}$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st,e}$  e  $\varepsilon_{d,jc}^{1st,e}$ . Já a evolução de  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e}$ ,  $\varepsilon_{d,jb}^{1st,e}$  e  $\varepsilon_{d,jc}^{1st,e}$  com  $\lambda_{j,b}$  e  $\lambda_{j,c}$  mostra que as esbeltezas mais desfavoráveis, dentro dos intervalos considerados relevantes, são  $\{\lambda_{j,b}, \lambda_{j,c}\} = \{30, 20\}$ , independentemente do valor de  $\rho$  (Figuras 7.30 e 7.31).

A Figura 7.32 representa a evolução de  $\varepsilon_{d,hb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e}$  com os parâmetros  $\lambda_j$ ,  $\lambda_b$  e  $\lambda_c$ . A análise desta figura mostra que o valor mais desfavorável de  $\lambda_j$ , ou seja, que minimiza  $\varepsilon_{d,hb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e}$ , depende de  $\rho$ . Já de acordo com a Figura 7.33, os valores de  $\lambda_{j,b}$  e  $\lambda_{j,c}$  mais

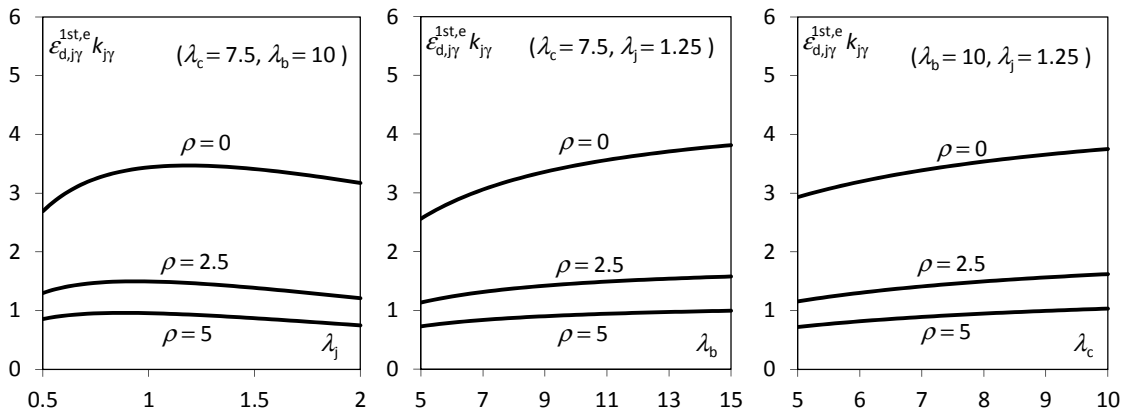


Figura 7.27 – Variação de  $\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} k_{j\gamma}$ .

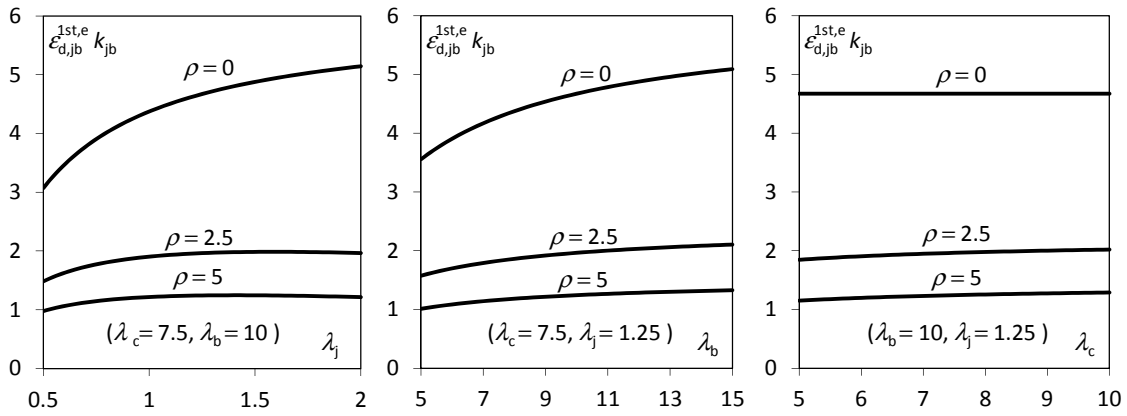


Figura 7.28 – Variação de  $\varepsilon_{d,jb}^{1st,e} k_{jb}$ .

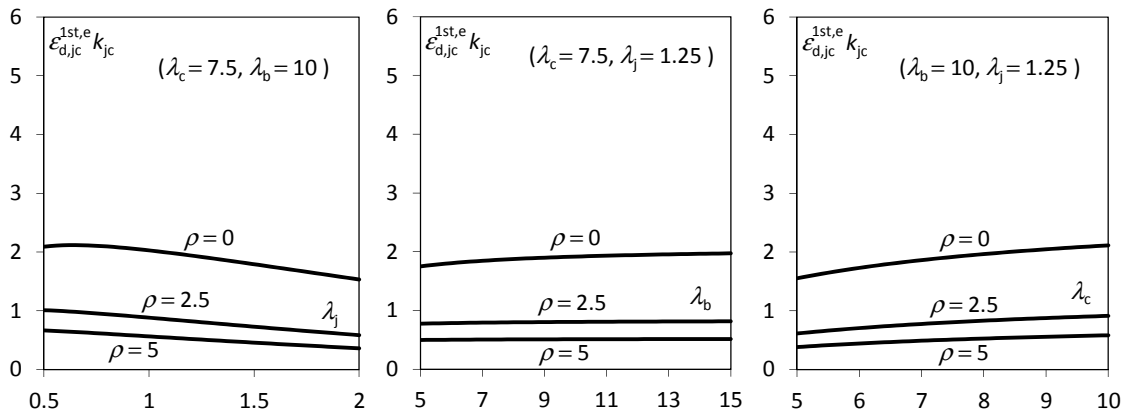


Figura 7.29 – Variação de  $\varepsilon_{d,jc}^{1st,e} k_{jc}$ .

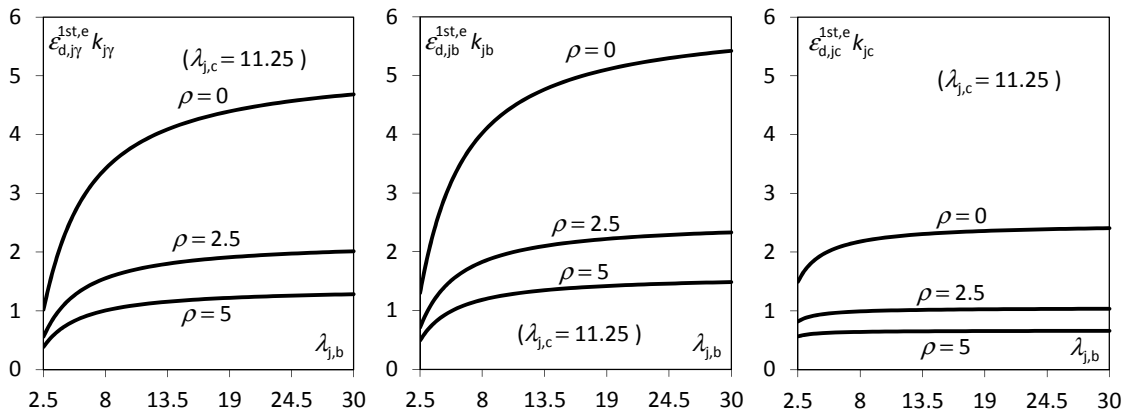


Figura 7.30 – Efeito da variação de  $\lambda_{j,b}$ .

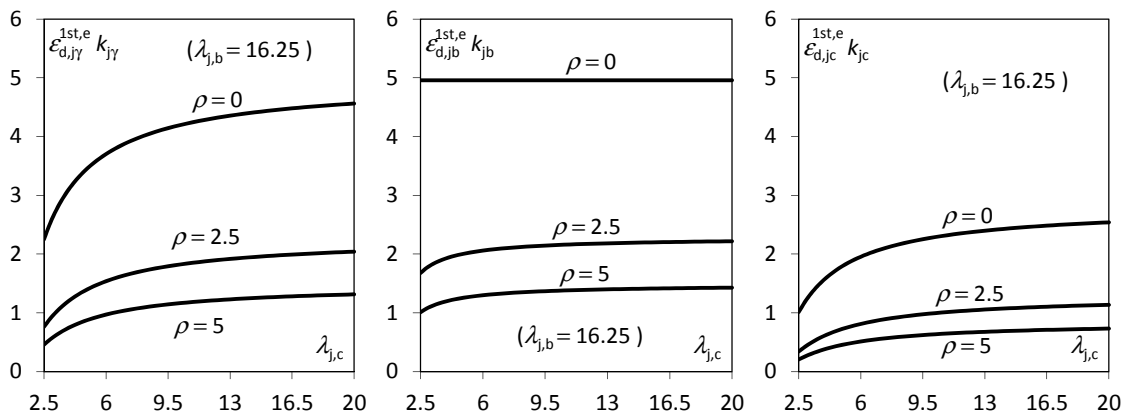


Figura 7.31 – Efeito da variação de  $\lambda_{j,c}$ .

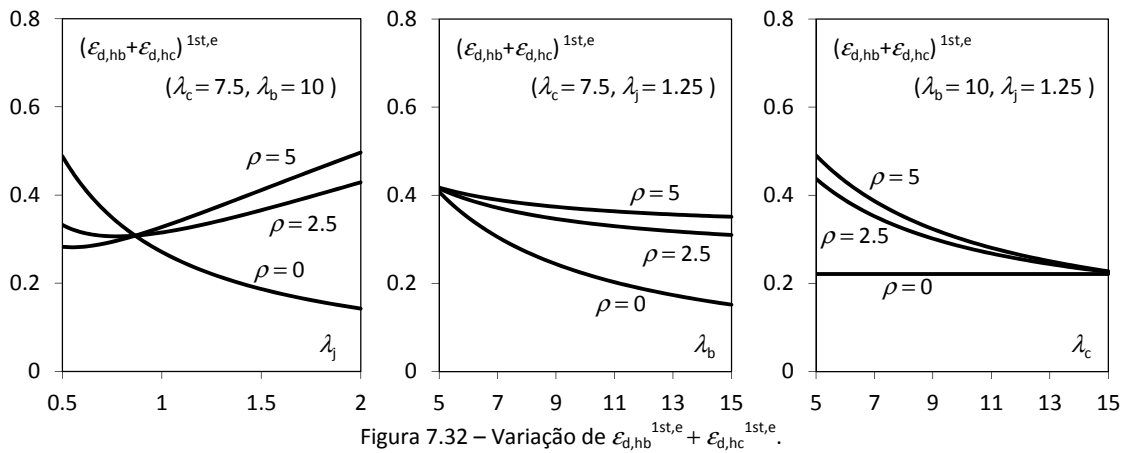


Figura 7.32 – Variação de  $\varepsilon_{d,hb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e}$ .

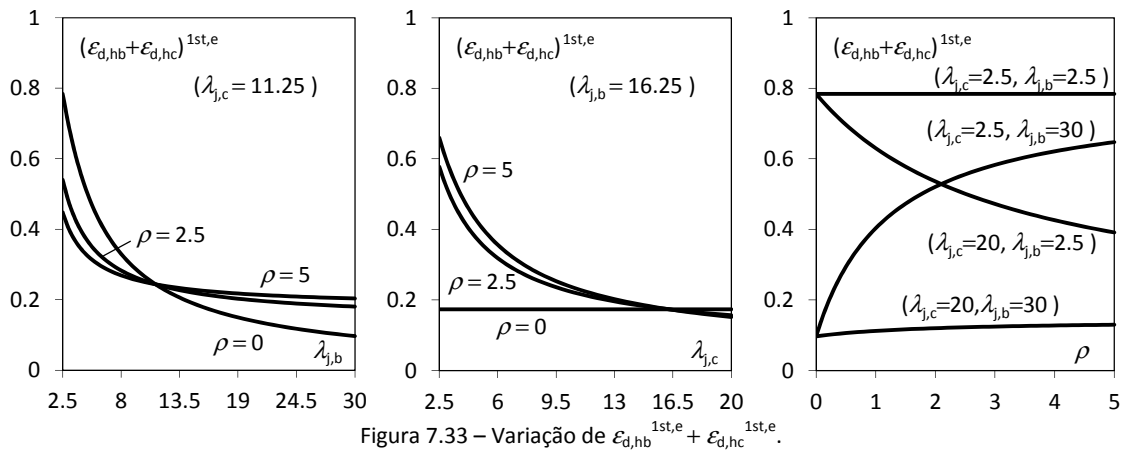


Figura 7.33 – Variação de  $\varepsilon_{d,hb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e}$ .

desfavoráveis, para os intervalos de  $\lambda_j$ ,  $\lambda_b$  e  $\lambda_c$  considerados, são 30 e 20, respectivamente, independentemente do valor de  $\rho$ . Além disso, esta figura também revela que, para estes valores de  $\lambda_{j,b}$  e  $\lambda_{j,c}$ , o valor mais desfavorável de  $\rho$  é 0.

### 7.6.3. Incremento dos esforços

Efectuando uma análise análoga à apresentada no §7.5.2, concluiu-se que o erro na determinação dos esforços  $\varepsilon_M^e$  obtidos para a estrutura E6 (Figura 7.26) pode ser estimado pela expressão

$$\varepsilon_M^e \approx \frac{\varepsilon_d^{1st,e}}{\alpha_{cr}^e - \varepsilon_d^{1st,e} - 1} \quad (7.105)$$

em que  $\alpha_{cr}^e$  é o quociente entre a carga crítica de encurvadura da estrutura E6 e a carga vertical actuante.

### 7.6.4. Classificação das ligações viga-pilar

#### 7.6.4.1. Efeito da deformação da ligação sobre os campos de esforços

À semelhança do efectuado no §7.5.4, são apresentados três critérios que permitem avaliar simplificada o efeito da deformabilidade da ligação viga-pilar, estimando os erros nos esforços associados à modelação implícita da ligação viga-pilar recorrendo a um modelo de eixos (EE).

### 7.6.4.1.1. Interpretação gráfica

Efectuando uma análise similar à apresentada no §7.5.4.1.1, é possível identificar as combinações dos valores das rigidezes que satisfazem a condição (7.105), recorrendo a um plano no espaço  $((k_{j\gamma}^e)^{-1}, (k_{jb}^e)^{-1}, (k_{jc}^e)^{-1})$  cujos traços nos eixos de coordenadas são

$$(k_{j\gamma,\min}^e)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} k_{j\gamma}} \left( \frac{\varepsilon_M^e (\alpha_{cr}^e - 1)}{1 + \varepsilon_M^e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hb}^{1st,e} \right), \quad (7.106)$$

$$(k_{jb,\min}^e)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_{d,jb}^{1st,e} k_{jb}} \left( \frac{\varepsilon_M^e (\alpha_{cr}^e - 1)}{1 + \varepsilon_M^e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hb}^{1st,e} \right) \quad (7.107)$$

e

$$(k_{jc,\min}^e)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_{d,jc}^{1st,e} k_{jc}} \left( \frac{\varepsilon_M^e (\alpha_{cr}^e - 1)}{1 + \varepsilon_M^e} + \varepsilon_{d,hc}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hb}^{1st,e} \right). \quad (7.108)$$

### 7.6.4.1.2. Critério simplificado 1 (CSC1-EE)

Tal como no §7.5.4, podem-se estabelecer critérios simplificados para classificar as ligações viga-pilar de acordo com a sua deformabilidade, considerando os casos mais desfavoráveis em termos de esbelteza simplificada e de sollicitação.

A Tabela 7.7 apresenta a sombreado os coeficientes mínimos de rigidez normalizada de cada uma das componentes para as combinações de esbeltezas mais desfavoráveis e para vários valores da tolerância do erro nos esforços  $\varepsilon_{M,tol}^e$ , de acordo com as expressões (7.106) a (7.108). Foi considerada a situação mais desfavorável para  $\varepsilon_{d,hc}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hb}^{1st,e}$ , ou seja,  $(\varepsilon_{d,hc}^{1st,e} + \varepsilon_{d,hb}^{1st,e})_{\min} = 0.097$ , e  $\alpha_{cr}^e = 3$ .

De acordo com a Tabela 7.7, considerando novamente  $\alpha_{cr}^e = 3$  e a tolerância  $\varepsilon_{M,tol}^e = 13.6\%$ , a deformabilidade das ligações viga-pilar não conduz a amplificações de esforços significativas relativamente ao modelo implícito de eixos caso

$$\frac{16}{k_{jb}} + \frac{8}{k_{jc}} + \frac{15}{k_{j\gamma}} \leq 1. \quad (7.109)$$

Comparando as expressões (7.73) e (7.109) conclui-se que, nos respectivos cenários mais conservadores, a deformação dos troços de viga e pilar no interior da ligação, compensa cerca de 35% da deformação das componentes núcleo ao corte e amarração das vigas bem como 75% da deformação da amarração dos pilares.

Tabela 7.7 – Esbelteza simplificada considerada e correspondente coeficientes mínimos de rigidez normalizada.

	combinação de $\lambda$	$\lambda_{i,c}$	$\lambda_{i,b}$	$\varepsilon_{M,tol}^e$ [%]				
				5	10	13.6	15	20
$k_{j\gamma,\min}^e$	1	20	30	26.0	17.9	14.9	14.0	11.6
$k_{jb,\min}^e$	2	20	30	28.2	19.5	16.1	15.2	12.6
$k_{jc,\min}^e$	3	20	30	13.6	9.4	7.8	7.3	6.1

### 7.6.4.1.3. Critério simplificado 2 (CSC2-EE)

Estabelecendo um paralelismo com o §7.5.4.1.3, de acordo com a expressão (7.105), a deformabilidade das ligações viga-pilar é adequadamente contabilizada com recurso a um modelo de eixos se

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} + \varepsilon_{d,jb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,jc}^{1st,e} - \varepsilon_{d,hc}^{1st,e} - \varepsilon_{d,hb}^{1st,e} \leq \frac{\varepsilon_{M,tol}^e (\alpha_{cr}^e - 1)}{1 + \varepsilon_{M,tol}^e}. \quad (7.110)$$

Considerando conservadoramente que  $\rho = 0$ ,  $\lambda_{j,c} = 20$  e  $\lambda_{j,b} = 30$  para cada uma das parcelas do membro esquerdo desta expressão, obtém-se

$$\frac{5.4}{k_{jb}} + \frac{2.6}{k_{jc}} + \frac{5.0}{k_{j\gamma}} - 0.097 \leq \frac{\varepsilon_{M,tol}^e (\alpha_{cr}^e - 1)}{1 + \varepsilon_{M,tol}^e} \quad (7.111)$$

ou ainda, para  $\varepsilon_{M,tol}^e = 10\%$

$$\frac{59}{k_{jb}} + \frac{29}{k_{jc}} + \frac{55}{k_{j\gamma}} \leq \alpha_{cr}^e + 1. \quad (7.112)$$

Como, independentemente do valor de  $\rho$ ,  $\{\lambda_{j,b}, \lambda_{j,c}\} = \{30, 20\}$  são as esbeltezas simplificadas mais desfavoráveis para todas as parcelas, o critério (7.112) pode ser estabelecido em função de  $\rho$  assumindo  $\{\lambda_{j,b}, \lambda_{j,c}\} = \{30, 20\}$  na expressão (7.110). Neste caso, tem-se

$$\varepsilon_{d,j\gamma,max}^{1st,e} = \frac{10.34}{k_{j\gamma} (2.07 + 1.05\rho)}, \quad (7.113)$$

$$\varepsilon_{d,jb,max}^{1st,e} = \frac{11.21}{k_{jb} (2.07 + 1.05\rho)}, \quad (7.114)$$

$$\varepsilon_{d,jc,max}^{1st,e} = \frac{5.42}{k_{jc} (2.07 + 1.05\rho)}, \quad (7.115)$$

$$\varepsilon_{d,hc,min}^{1st,e} = \frac{0.15\rho}{k_{jc} (2.07 + 1.05\rho)} \quad (7.116)$$

e

$$\varepsilon_{d,hb,min}^{1st,e} = \frac{0.07}{k_{jc} (2.07 + 1.05\rho)}. \quad (7.117)$$

De onde, para  $\varepsilon_{M,tol}^e = 7.5\%$ , se obtém o critério

$$\frac{148}{k_{j\gamma}} + \frac{161}{k_{jb}} + \frac{78}{k_{jc}} \leq \alpha_{cr}^e (2 + \rho) + 2.2\rho - 1. \quad (7.118)$$

### 7.6.4.1.4. Critério simplificado 3 (CSC3-EE)

Por fim, fazendo um paralelismo com o §7.5.4.1.4, pode-se considerar que o efeito da deformação das ligações viga-pilar é adequadamente captado por um modelo de eixos se

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} + \varepsilon_{d,jb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,jc}^{1st,e} - \varepsilon_{d,hc}^{1st,e} - \varepsilon_{d,hb}^{1st,e} \leq \frac{\alpha_{cr}^e - 1}{21}. \quad (7.119)$$

Na expressão anterior, à semelhança da abordagem adoptada no §7.5.4.1.4, assumiu-se  $\varepsilon_{M,tol}^e = 5\%$ .

#### 7.6.4.2. Efeito da deformação da ligação viga-pilar sobre o drift (CSC4-DE)

Procedendo de forma análoga à do §7.5.4.2, a limitação do erro no deslocamento lateral de primeira ordem implica que se cumpra a condição

$$\varepsilon_{d,j\gamma}^{1st,e} + \varepsilon_{d,jb}^{1st,e} + \varepsilon_{d,jc}^{1st,e} - \varepsilon_{d,hc}^{1st,e} - \varepsilon_{d,hb}^{1st,e} \leq \varepsilon_{d,tol}^e \quad (7.120)$$

em que  $\varepsilon_{d,tol}^e$  é a tolerância para o incremento relativo dos deslocamentos laterais.

Assumindo  $\varepsilon_{d,tol}^e = 20\%$  (Gomes [2002]) e as aproximações conservadoras dadas pelas expressões (7.113) a (7.117), a expressão (7.120) conduz a

$$\frac{52}{k_{j\gamma}} + \frac{56}{k_{jb}} + \frac{27}{k_{jc}} \leq 1.6 + 1.8\rho \quad (7.121)$$

### 7.7. Avaliação e exemplificação dos critérios simplificados de classificação

Os critérios simplificados de classificação propostos podem ser utilizados, com diferentes graus de aproximação, em dois estágios do processo de análise e dimensionamento estrutural: (i) na fase prévia à análise estrutural e (ii) na fase posterior ao dimensionamento. No caso (i), a rigidez efectiva das vigas, pilares e componentes da ligação é apenas uma mera estimativa que terá que ser validada após o dimensionamento da estrutura. A classificação na fase anterior à análise e dimensionamento visa minimizar a possibilidade de, após o dimensionamento, se chegar à conclusão de que a modelação simplificada é insegura e que todo o processo de análise e dimensionamento deve ser repetido com um modelo mais rigoroso para as ligações viga-pilar. No caso (ii), a rigidez efectiva das vigas, pilares e componentes da ligação é determinada de forma mais rigorosa e visa confirmar que o modelo simplificado adoptado para modelar as ligações conduziu a um dimensionamento suficientemente preciso.

De modo a ilustrar a aplicação dos critérios simplificados de classificação relativos ao incremento relativo de esforços totais, estabelecidos nos §§ 7.5 e 7.6, considerou-se um exemplo, que consiste no pórtico de betão armado de três vãos e quatro pisos, não contraventado, cuja geometria se representa na Figura 7.34. Trata-se de um pórtico interior de um estrutura regular, com as cargas transmitidas pelas vigas transversais ao plano do pórtico representadas por forças aplicadas directamente nas ligações viga-pilar. O módulo de elasticidade do betão é  $E_c = 30\text{GPa}$ . As cargas verticais uniformemente distribuídas estão aplicadas apenas no vão livre das vigas, ou seja, entre as faces dos pilares. A carga horizontal corresponde a 10% da carga vertical, ou seja  $\zeta = 0.1$ .

Foram consideradas três hipóteses distintas de modelação das ligações viga-pilar: (i) rígidas, (ii) modelo de eixos (deformáveis) e (iii) modelo explícito (deformáveis) desenvolvido no Capítulo 5.

Os valores das esbeltezas simplificadas são  $\lambda_b = 12$ ,  $\lambda_c = 8$  e  $\lambda_j = 1.25$ . De acordo com o §7.4.2, admitiu-se que a rigidez efectiva dos pilares é dada pela rigidez elástica linear de flexão



da secção de betão e a das vigas por metade deste valor. Para o caso do modelo explícito da ligação, admitiram-se os valores da rigidez para as componentes apresentados na Tabela 7.8.

Os valores da Tabela 7.8 foram calculados fazendo  $z_b = 382.4 \text{ mm}$ ,  $z_c = 270 \text{ mm}$  e arbitrando os coeficientes de rigidez normalizada  $k_{jb} = k_{jc} = k_{j\gamma} = 10$ . A deformabilidade das componentes amarração em compressão foi desprezada.

Dado que o objectivo dos critérios simplificados de classificação é a avaliação expedita da necessidade, ou não, de considerar de forma explícita a deformabilidade das ligações viga-pilar, calculou-se o valor dos parâmetros necessários à determinação de  $\alpha_{cr}^{Rig}$  e  $\alpha_{cr}^e$  sem recorrer aos resultados da análise global da estrutura. Desta forma, o esforço axial no pilar foi estimado simplifadamente por intermédio de zonas de influência e a força horizontal foi calculada afectando esse esforço axial do factor  $\zeta$ . O *drift* e os parâmetros  $\alpha_{cr}^{Rig}$  e  $\alpha_{cr}^e$  foram calculados recorrendo às estruturas simplificadas com base nas quais foram estabelecidos os critérios simplificados.

A deformabilidade das ligações viga-pilar, além de conduzir a um incremento dos deslocamentos laterais, que se traduz em esforços de segunda ordem adicionais, também conduz (em estruturas hiperstáticas) a uma redistribuição dos esforços. Consequentemente, a avaliação dos esforços de segunda ordem adicionais em estruturas hiperstáticas tem que ter em consideração esta redistribuição.

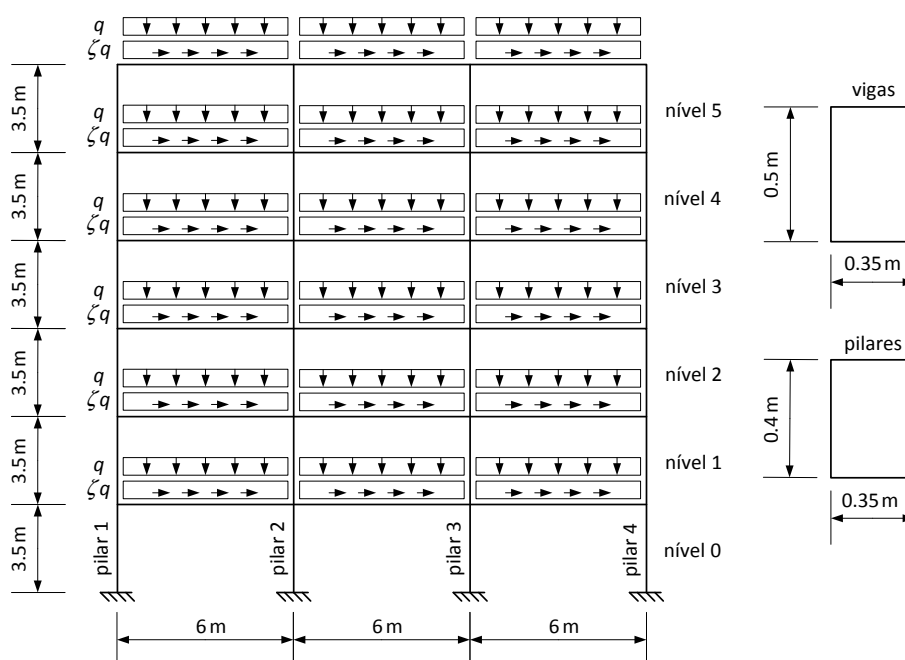


Figura 7.34 – Exemplo de aplicação: geometria do pórtico e forças aplicadas.

Tabela 7.8 – Exemplo de aplicação: rigidez das componentes da ligação viga-pilar [ $10^3 \text{ kN/m}$ ].

	ligações interiores	ligações de extremidade
$S_{jbc}$	$\infty$	$\infty$
$S_{jbt}$	667	667
$S_{jcc}$	$\infty$	$\infty$
$S_{jct}$	2 679	1 340
$S_{j\gamma}$	1 335	667

Um processo para avaliar o incremento dos esforços de segunda ordem associado à deformação das ligações viga-pilar numa estrutura porticada não contraventada, independente da eventual redistribuição de esforços, consiste em avaliar, para o conjunto de pilares de cada piso, a variação do somatório das amplitudes dos momentos flectores em cada pilar provocada pela deformação da ligação. Seja  $i$  o nível (Figura 7.34) e  $j$  o número de pilares nesse nível. A soma das amplitudes dos momentos flectores nos pilares no nível  $i$  é dada por

$$\sum \Delta M_i = \sum_{k=1}^j (M_{k,i}^t - M_{k,i}^b) \quad (7.122)$$

em que  $M_{k,i}^t$  e  $M_{k,i}^b$  são o momento flector no topo e na base do pilar  $k$  do nível  $i$ .

O incremento global dos esforços nos pilares do nível  $i$  provocado pela deformação da ligação viga-pilar é dado por

$$\varepsilon_{MG,i}^{Rig} = \frac{\sum \Delta M_i^{NRig} - \sum \Delta M_i^{Rig}}{\sum \Delta M_i^{Rig}} \quad (7.123)$$

e

$$\varepsilon_{MG,i}^e = \frac{\sum \Delta M_i^{NRig} - \sum \Delta M_i^e}{\sum \Delta M_i^e} \quad (7.124)$$

para os casos em que as ligações são assumidas rígidas e modeladas com o modelo de eixos, respectivamente, em que  $\sum \Delta M_i^{Rig}$  é relativo ao modelo rígido das ligações viga-pilar,  $\sum \Delta M_i^e$  é relativo ao modelo implícito de eixos das ligações viga-pilar e  $\sum \Delta M_i^{NRig}$  é relativo ao modelo explícito das ligações viga-pilar desenvolvido no Capítulo 5.

Este procedimento pressupõe que a redistribuição associada à deformação das ligações viga-pilar não conduz a variações significativas nos campos de esforço axial da estrutura.

Para efeitos de aplicação das expressões correspondentes aos critérios simplificados de classificação foram analisadas as ligações viga-pilar do primeiro piso na medida em que os pilares adjacentes são os que apresentam um maior nível de esforço axial, potenciando, portanto, o efeito da deformação das ligações. Para estimar os deslocamentos transversais da subestrutura recorrendo às estruturas arquétipo, as cargas aplicadas ao nível do piso 1 foram conservadoramente contabilizadas no pilar superior.

A análise da estrutura foi efectuada recorrendo ao programa EvalS (Ferreira [2011]) apresentado no Capítulo 6.

### 7.7.1. Modelo rígido vs. modelo explícito

As Tabelas 7.9 e 7.10 apresentam, para cada nível de carga, o valor do membro esquerdo (esq.) e direito (dir.) das expressões dos critérios simplificados de classificação estabelecidos no §7.5.3, bem como o resultado da classificação: “E” nos casos em que é requerida uma modelação explícita e “S” nos casos em que uma modelação simplificada é adequada. No caso do CSC3-ER é indicado o incremento dos esforços  $\varepsilon_M$  provocado pela deformação da ligação viga-pilar. Este valor foi obtido convertendo a inequação (7.74) numa equação e resolvendo-a em ordem a  $\varepsilon_M$ .

Tabela 7.9 – Exemplo de aplicação: resultado da aplicação dos critérios simplificados de classificação a ligações viga-pilar interiores.

$q$ [kN/m]	CSC1-ER (7.73)			CSC2-ER (7.76)			CSC2-ER (7.81)			CSC3-ER (7.82)			
	esq.	dir.	C	esq.	dir.	C	esq.	dir.	C	esq.	dir.	$\varepsilon_M$ [%]	C
10	7.90	1.00	E	20.90	38.69	S	17.12	38.69	S	0.92	1.84	2.4	S
15	7.90	1.00	E	20.90	25.46	S	17.12	25.46	S	0.92	1.21	3.7	S
20	7.90	1.00	E	20.90	18.84	E	17.12	18.84	S	0.92	0.90	5.1	E
25	7.90	1.00	E	20.9	14.87	E	17.12	14.87	E	0.92	0.71	6.6	E
30	7.90	1.00	E	20.9	12.23	E	17.12	12.23	E	0.92	0.58	8.1	E

Tabela 7.10 – Exemplo de aplicação: resultado da aplicação dos critérios simplificados de classificação a ligações viga-pilar de extremidade.

$q$ [kN/m]	CSC1-ER (7.73)			CSC2-ER (7.76)			CSC2-ER (7.81)			CSC3-ER (7.82)			
	esq.	dir.	C	esq.	dir.	C	esq.	dir.	C	esq.	dir.	$\varepsilon_M$ [%]	C
10	7.90	1.00	E	20.90	61.48	S	20.69	61.48	S	1.08	2.93	1.8	S
15	7.90	1.00	E	20.90	40.65	S	20.69	40.65	S	1.08	1.94	2.7	S
20	7.90	1.00	E	20.90	30.24	S	20.69	30.24	S	1.08	1.44	3.7	S
25	7.90	1.00	E	20.90	23.99	S	20.69	23.99	S	1.08	1.14	4.7	S
30	7.90	1.00	E	20.90	19.83	E	20.69	19.83	E	1.08	0.94	5.8	E

 Tabela 7.11 – Exemplo de aplicação: incremento relativo dos esforços  $\varepsilon_{MG}^{Rig}$  nos pilares de cada piso [%].

nível	$q$ [kN/m]				
	10	15	20	25	30
5	0.2	0.5	1.2	1.5	1.8
4	1.1	1.6	2.2	2.7	3.3
3	1.6	2.4	3.2	4.1	5.0
2	2.0	3.1	4.2	5.4	6.6
1	2.3	3.5	4.7	6.0	7.4
0	1.1	1.7	2.3	3.0	3.7

A Tabela 7.11 apresenta o incremento relativo global dos esforços, expressão (7.123), em cada nível da estrutura com ligações viga-pilar modeladas explicitamente relativamente à estrutura com ligações viga-pilar rígidas.

A Tabela 7.11 revela que o maior agravamento dos esforços não se dá no nível 0, como seria de esperar, na medida em que é o que apresenta maior valor de esforço axial, mas sim no nível imediatamente superior (nível 1). Este resultado deve-se ao encastramento da base do pilar, o qual reduz o *drift* de tal modo que compensa o maior valor do esforço axial. Desta forma, os valores do incremento relativo de esforços que devem ser comparados com os resultados da aplicação do critério simplificado são os correspondentes ao nível 1 (a sombreado na Tabela 7.11).

Da análise destas tabelas conclui-se que (i) as ligações viga-pilar interiores são as condicionantes, (ii) o CSC1-ER é excessivamente conservador e (iii) ambas as versões do CSC2-ER conduzem a resultados semelhantes aos do CSC3-ER. Além disso, pode-se concluir que, de acordo com os critérios simplificados de classificação, a deformação das ligações viga-pilar deve ser explicitamente considerada na análise estrutural para  $q > 15$  kN/m.

Os resultados correspondentes ao piso 1 na Tabela 7.11 mostram que a deformação das ligações viga-pilar não deve ser ignorada quando  $q > 20\text{kN/m}$ . Isto significa que o CSC2-ER e o CSC3-ER, apesar de conduzirem a resultados ligeiramente mais conservadores, apresentam uma correlação elevada com os resultados da análise do pórtico completo. Note-se ainda que o carácter conservador é apenas aparente, dada a correspondência elevada entre  $\varepsilon_{MG}^{Rig}$  (nível 1 da Tabela 7.11) e  $\varepsilon_M$  para a ligação viga-pilar interior (Tabela 7.9), que é a condicionante. O carácter ligeiramente conservador dos resultados obtidos com os critérios simplificados de classificação deve-se ao facto de se ter utilizado conservadoramente como carga aplicada no pilar superior da subestrutura o esforço axial no nível 0.

### 7.7.2. Modelo de eixos vs. modelo explícito

As Tabelas 7.12 e 7.13 apresentam, para cada nível de carga, os membros esquerdo (esq.) e direito (dir.) de cada um dos critérios simplificados de classificação apresentados no §7.6.4 bem como o resultado da classificação. No caso do CSC3-EE é ainda indicado o incremento relativo dos esforços  $\varepsilon_M^e$  determinado por comparação dos resultados para o modelo explícito das ligações viga-pilar e para o modelo de eixos. Este parâmetro foi obtido convertendo a inequação (7.110) numa equação e resolvendo-a em ordem a  $\varepsilon_M^e$ .

A Tabela 7.14 apresenta o incremento relativo global dos esforços, expressão (7.124), em cada nível da estrutura com ligações viga pilar modeladas explicitamente relativamente à estrutura com ligações viga-pilar implicitamente modeladas com recurso ao modelo de eixos.

Da análise destas tabelas conclui-se novamente que o CSC1-EE é excessivamente conservador e que ambas as versões do CSC2-EE conduzem a resultados semelhantes aos do CS3-EE. De

Tabela 7.12 – Exemplo de aplicação: resultado da aplicação dos critérios simplificados de classificação a ligações viga-pilar interiores.

$q$ [kN/m]	CSC1-EE (7.109)			CSC2-EE (7.112)			CSC2-EE (7.118)			CSC3-EE (7.119)			
	esq.	dir.	C	esq.	dir.	C	esq.	dir.	C	esq.	dir.	$\varepsilon_M^e$ [%]	C
10	3.90	1.00	E	14.30	30.63	S	38.70	91.55	S	0.43	1.36	1.5	S
15	3.90	1.00	E	14.30	20.75	S	38.70	61.47	S	0.43	0.89	2.4	S
20	3.90	1.00	E	14.30	15.81	S	38.70	46.43	S	0.43	0.66	3.2	S
25	3.90	1.00	E	14.30	12.85	E	38.70	37.4	E	0.43	0.52	4.1	S
30	3.90	1.00	E	14.30	10.88	E	38.70	31.39	E	0.43	0.42	5.1	E

Tabela 7.13 – Exemplo de aplicação: resultado da aplicação dos critérios simplificados de classificação a ligações viga-pilar de extremidade.

$q$ [kN/m]	CSC1-EE (7.109)			CSC2-EE (7.112)			CSC2-EE (7.118)			CSC3-EE (7.119)			
	esq.	dir.	C	esq.	dir.	C	esq.	dir.	C	esq.	dir.	$\varepsilon_M^e$ [%]	C
10	3.90	1.00	E	14.30	49.26	S	38.70	121.9	S	0.61	2.25	1.3	S
15	3.90	1.00	E	14.30	33.17	S	38.70	81.33	S	0.61	1.48	2.0	S
20	3.90	1.00	E	14.30	25.13	S	38.70	61.03	S	0.61	1.10	2.7	S
25	3.90	1.00	E	14.30	20.30	S	38.70	48.86	S	0.61	0.87	3.4	S
30	3.90	1.00	E	14.30	17.09	S	38.70	40.75	S	0.61	0.72	4.2	S
35	3.90	1.00	E	14.30	14.79	S	38.70	34.94	E	0.61	0.61	5.0	E
40	3.90	1.00	E	14.30	13.06	E	38.70	30.59	E	0.61	0.53	5.8	E

Tabela 7.14 – Exemplo de aplicação: incremento relativo dos esforços  $\varepsilon_{MG}^e$  nos pilares de cada piso [%].

nível	$q$ [kN/m]						
	10	15	20	25	30	35	40
5	0.0	0.2	0.8	1.0	1.2	1.5	1.7
4	0.7	1.0	1.4	1.7	2.1	2.5	2.9
3	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.6	4.2
2	1.2	1.9	2.5	3.2	3.9	4.7	5.4
1	1.3	2.0	2.8	3.5	4.3	5.0	5.9
0	0.7	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0

acordo com os critérios simplificados de classificação, a deformação das ligações viga-pilar deve ser explicitamente contabilizada na análise estrutural para  $q > 20\text{kN/m}$ .

Os resultados correspondentes ao nível 1 na Tabela 7.14 mostram que as ligações viga-pilar deve ser explicitamente modeladas para  $q > 30\text{kN/m}$ . Isto significa que o CSC2-EE e o CSC3-EE conduzem a resultados conservadores. Note-se, no entanto, que as diferenças em termos de incrementos de esforços são pouco significativas, ou seja, as diferenças entre  $\varepsilon_M^e$  para a ligação viga-pilar interior (Tabela 7.12), que é a condicionante, e  $\varepsilon_{MG}^e$  (nível 1 da Tabela 7.14) são muito pouco relevantes. O carácter ligeiramente conservador dos critérios simplificados de classificação CSC2-EE e CSC3-EE deve-se novamente ao facto de se ter adoptado conservadoramente como carga aplicada no pilar superior da subestrutura o esforço axial no nível 0.

## 7.8. Notas finais

No seguimento dos resultados dos Capítulos 3 e 6, neste Capítulo foram analisados os critérios simplificados de classificação de juntas viga-pilar propostos na NP EN 1993-1-8 para ligações viga-pilar de estruturas porticadas metálicas. Esta análise visou avaliar a aplicabilidade destes critérios simplificados a estruturas porticadas de betão armado e permitiu concluir que a sua extensão para este tipo de estrutura não se revela adequada.

Foi avaliada a representatividade da estrutura arquétipo habitualmente utilizada para estudar ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado. Esta avaliação visou a identificar as grandezas representativas do comportamento da estrutura completa que a estrutura arquétipo permite avaliar com mais rigor. Conclui-se que a estimativa dos deslocamentos laterais de primeira ordem da estrutura completa, obtida a partir da estrutura arquétipo, é significativamente mais rigorosa do que a estimativa dos esforços nas extremidades das vigas e pilares.

Com base nesta constatação, foram desenvolvidos critérios simplificados, baseados na estimativa dos deslocamentos transversais de primeira ordem da estrutura completa obtidos por intermédio de estruturas arquétipo, para avaliar, de forma expedita, a necessidade de modelar explicitamente as ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado não contraventadas. Para estabelecer os critérios simplificados de classificação foram usados como referência o (i) modelo de ligação viga-pilar rígido e (ii) o modelo de eixos. Assim, os critérios permitem visam os casos em que a modelação implícita das ligações recorrendo a estes

modelos não conduz a erros significativos na análise da estrutura completa.

Foram estabelecidos critérios simplificados de classificação, que resultaram da identificação dos casos em que a deformabilidade das ligações viga-pilar é relevante para o comportamento estrutural e necessita de ser explicitamente modelada por conduzir (i) a esforços de segunda ordem relevantes, que podem limitar de forma significativa a capacidade de carga das estruturas, ou (ii) a deslocamentos laterais excessivos da estrutura.

Estes critérios, contrariamente ao critério estabelecido na NP EN 1993-1-8, avaliam o efeito da deformação das ligações viga-pilar recorrendo à rigidez efectiva das ligações, vigas e pilares e não recorrendo à rigidez inicial destes elementos.

Os critérios desenvolvidos apresentam a vantagem de incorporar de forma transparente o efeito de todas as componentes relevantes das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado para estruturas não contraventadas submetidas a cargas gravíticas e laterais. Dos critérios propostos para limitar o incremento de esforços associados à deformabilidade das ligações viga-pilar, os CSC2's (§§ 7.5.4.1.3 e 0) aparentam ser os que apresentam um melhor compromisso entre complexidade e hipóteses simplificativas.

Como nota final, deve ser enfatizado que os critérios propostos, apesar de desenvolvidos com uma base racional, e do exemplo apresentado sugerir que apresentam uma boa correlação com os resultados da análise da estrutura completa, requerem uma validação e calibração cuidadas com base num estudo paramétrico representativo.

---

# Capítulo 8

## Estudo paramétrico do comportamento de ligações viga-pilar recorrendo ao MEF

### 8.1. Introdução

Tal como referido no Capítulo 2, a maioria dos estudos publicados sobre ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado é relativa a acções cíclicas. Estes estudos, maioritariamente experimentais, visam essencialmente avaliar a capacidade resistente e a ductilidade de ligações viga-pilar sujeitas a ciclos de deslocamentos de elevada amplitude (Kotsovou e Mouzakis [2012]).

Para acções quase-estáticas e monotónicas, os trabalhos publicados focam-se quase exclusivamente na capacidade resistente das ligações viga-pilar (Taylor [1974], Ortiz [1993], Hamil [2000], Hegger, Sherif *et al.* [2003]). No entanto, como se mostrou nos Capítulos 3 e 6, além da resistência, a flexibilidade/rigidez das ligações viga-pilar é um aspecto relevante para o comportamento de estruturas porticadas regulares e não contraventadas de betão armado submetidas a acções quase-estáticas e monotónicas.

Neste capítulo, é apresentado um estudo paramétrico, efectuado com recurso ao MEF (ATENA 3D), com o objectivo de avaliar a influência (i) da pormenorização das armaduras nas ligações viga-pilar, (ii) da resistência à compressão do betão, (iii) do esforço axial nos pilares e (iv) da existência de elementos transversais nas ligações viga-pilar (vigas transversais e lajes), sobre a capacidade resistente e deformabilidade das ligações viga-pilar quando submetidas a acções quase estáticas e monotónicas.

A análise do comportamento das ligações viga-pilar efectuada nesta secção foca-se apenas no comportamento da componente núcleo da ligação em corte, em virtude (i) da elevada dispersão de resultados dos modelos para esta componente disponíveis na bibliografia e (ii) da complexidade da contabilização da deformação da componente amarração, tanto em ensaios experimentais como em modelos de EF da ligação.

De facto, no modelo de ligação viga-pilar desenvolvido (Capítulo 5), a componente amarração dos varões da armadura longitudinal das vigas e pilares incorpora o escorregamento relativo na interface armadura-betão (*bond-slip*) e a deformação local do betão envolvente. De forma semelhante, os modelos de EF no ATENA 3D consideram estes dois fenómenos, ou seja, incorporam explicitamente uma relação de *bond-slip* para essa interface e consideram a deformação local do betão envolvente da armadura. A contabilização destas duas fontes de deformação torna a caracterização do comportamento desta componente complexa recorrendo a ensaios/modelos de ligações viga-pilar pelo que o seu comportamento é mais adequadamente caracterizado recorrendo a ensaios ou modelos numéricos específicos.

Optou-se por limitar a análise a ligações viga-pilar interiores e de extremidade, na medida em que, dado o reduzido nível de carga a que as ligações de cobertura estão submetidas, não é expectável que estas apresentem problemas de resistência. Além disso, pelo mesmo motivo, a contribuição das ligações de cobertura para a deformabilidade global da estrutura é diminuta.

## 8.2. Caracterização do comportamento do núcleo da ligação viga-pilar

De acordo com Kim, LaFave *et al.* [2009], é consensual, desde os trabalhos de Hanson e Conner [1967], que a quantidade que mais adequadamente caracteriza o estado de tensão no núcleo de uma ligação viga-pilar é o esforço de corte horizontal a meia altura da ligação. Os diagramas de corpo livre na Figura 8.1 representam as forças na periferia de uma ligação viga-pilar interior de uma estrutura porticada submetida a cargas verticais e laterais. Estes diagramas mostram que, no caso mais geral, o valor do esforço de corte no plano horizontal a meia altura da ligação é

$$V_{jh} = T_{b2} + C_{b1} - V_{c1} \quad (8.1)$$

As componentes  $T_{b2}$  e  $C_{b1}$  resultam, na ausência de esforço axial nas vigas ( $N_{b1} = N_{b2} = 0$ ), do momento flector na extremidade efectiva das vigas. Para a determinação destas componentes adoptaram-se duas abordagens:

- (i)  $\tau_{jh,zb}$  : assumiu-se  $z_b = 0.85 d$  (Lowes, Mitra *et al.* [2004], Birely, Lowes *et al.* [2012]),  $T_{b2} = M_{b2}/z_{b2}$  e  $C_{b1} = M_{b1}/z_{b1}$ , ou seja, aplicou-se a expressão (5.5);
- (ii)  $\tau_{jh,es}$  : assumiu-se  $T_{b2} = A_{st2}\sigma_{st2}$  e  $C_{b1} = T_{b1} = A_{st1}\sigma_{st1}$  – obteve-se a tensão nos varões da armadura longitudinal das vigas na periferia da ligação viga-pilar directamente dos modelos de EF.

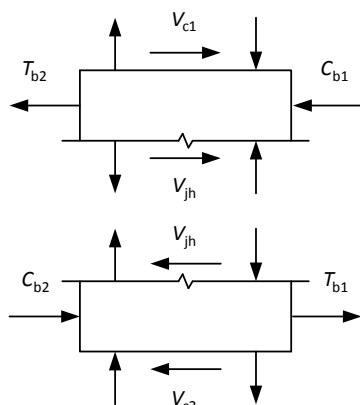


Figura 8.1 – Esforço de corte no plano horizontal a meia altura da ligação viga-pilar.

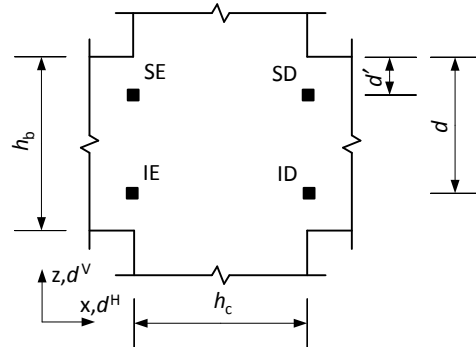


Figura 8.2 – Pontos de monitorização nos modelos de EF no plano do pórtico.



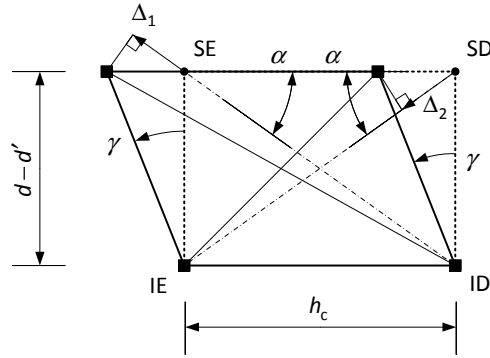


Figura 8.3 – Determinação da distorção da ligação viga-pilar (primeira abordagem).

No §8.4.2 mostra-se que estas abordagens não são equivalentes e podem conduzir a resultados significativamente divergentes.

Para determinar a distorção do núcleo da ligação viga-pilar foram monitorizadas as componentes dos deslocamentos de pontos localizados no plano do pórtico nos modelos de EF (Figura 8.2). De acordo com o modelo proposto no Capítulo 5, estes pontos foram considerados nas extremidades efectivas das vigas ao longo das linhas de acção horizontais das resultantes de compressão e tracção das respectivas secções transversais. Dado que a posição destas linhas de acção varia com o esforços instalados e ao facto de, em geral, as linhas de acção correspondentes às extremidades das duas vigas que se opõem na ligação não serem colineares, optou-se por monitorizar os deslocamentos dos pontos localizados no centro geométrico das armaduras longitudinais de tracção e compressão das secções transversais das vigas, ou seja, assumiu-se para efeito do cálculo da distorção  $\gamma$  que  $z_b \approx d - d'$ .

O valor da distorção foi calculado por dois métodos. O primeiro método ( $\gamma_1$ ) corresponde à abordagem habitualmente adoptada laboratorialmente e baseia-se nas deformações  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  das diagonais da zona onde se assume ocorrer a distorção – Figura 8.3.

De acordo com a Figura 8.3, onde se admite que a dilatação é nula,

$$\cos \alpha = \frac{\Delta_1}{\gamma_1 (d - d')} \rightarrow \Delta_1 = \gamma_1 (d - d') \cos \alpha \quad (8.2)$$

e

$$\cos \alpha = \frac{\Delta_2}{\gamma_1 (d - d')} \rightarrow \Delta_2 = \gamma_1 (d - d') \cos \alpha. \quad (8.3)$$

Como facilmente se verifica, uma deformação de dilatação arbitrária da ligação contribui para  $\Delta_1$  com um valor igual mas simétrico do da contribuição para  $\Delta_2$ . Para eliminar o efeito da dilatação basta pois fazer

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 2\gamma_1 (d - d') \cos \alpha \rightarrow \gamma_1 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} \frac{\sqrt{h_c^2 + (d - d')^2}}{h_c (d - d')}. \quad (8.4)$$

No caso dos modelos estudados, os valores de  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  são dados por

$$\Delta_1 = \sqrt{(h_c - d_{SE}^H + d_{ID}^H)^2 + ((d - d') + d_{SE}^V - d_{ID}^V)^2} - \sqrt{h_c^2 - (d - d')^2} \quad (8.5)$$

e

$$\Delta_2 = \sqrt{h_c^2 - (d - d')^2} - \sqrt{(h_c - d_{IE}^H + d_{SD}^H)^2 + ((d - d') - d_{IE}^V + d_{SD}^V)^2} \quad (8.6)$$

em que IE, ID, SE e SD designam os pontos do núcleo representados na Figura 8.2, e H e V designam as componentes horizontal e vertical dos deslocamentos, positivas para a direita e para cima, respectivamente.

Para avaliar se o modo de deformação dominante na ligação é a distorção e simultaneamente validar o valor de  $\gamma$ , foi utilizada uma segunda abordagem para a determinação da distorção ( $\gamma_{II}$ ), ilustrada na Figura 8.4.

De acordo com a Figura 8.4, se a distorção for uniforme no núcleo da ligação viga-pilar, esta pode ser determinada recorrendo a uma das expressões alternativas

$$\gamma_{II,SE} = \gamma_{II,SE}^V + \gamma_{II,SE}^H = \frac{d_{IE}^H - d_{SE}^H}{d - d'} + \frac{d_{SE}^V - d_{SD}^V}{h_c}, \quad (8.7)$$

$$\gamma_{II,IE} = \gamma_{II,IE}^V + \gamma_{II,IE}^H = \frac{d_{IE}^H - d_{SE}^H}{d - d'} + \frac{d_{IE}^V - d_{ID}^V}{h_c}, \quad (8.8)$$

$$\gamma_{II,SD} = \gamma_{II,SD}^V + \gamma_{II,SD}^H = \frac{d_{ID}^H - d_{SD}^H}{d - d'} + \frac{d_{SE}^V - d_{SD}^V}{h_c} \quad (8.9)$$

e

$$\gamma_{II,ID} = \gamma_{II,ID}^V + \gamma_{II,ID}^H = \frac{d_{ID}^H - d_{SD}^H}{d - d'} + \frac{d_{IE}^V - d_{ID}^V}{h_c}. \quad (8.10)$$

Caso o modo de deformação do núcleo da ligação seja não uniforme, as expressões anteriores conduzirão a resultados diferentes entre si e diferentes da expressão (8.4). Quanto maior a diferença entre os valores das expressões anteriores, maior a relevância de outros modos de deformação não uniformes no núcleo da ligação que não a distorção.

Para quantificar o comportamento do núcleo da ligação viga-pilar de cada modelo em termos de relação  $\tau_{jh} - \gamma$ , foram adoptados os seguintes parâmetros:

- (i) valor da tensão tangencial de rotura da ligação ( $\tau_{jh}$ )<sub>u</sub>;
- (ii) rigidez secante na rotura,  $G_u = (\tau_{jh} / \gamma)_u$ ;
- (iii) rigidez secante  $G_s$  para  $\tau_{jh} = 0.75 (\tau_{jh})_u$ .

Como a rigidez das ligações apresenta uma redução muito acentuada nas imediações do colapso,  $G_u$  não é um parâmetro representativo da rigidez das ligações em condições de serviço e, por isso, determinou-se a rigidez para um nível intermédio de tensões na ligação,  $G_s$ .

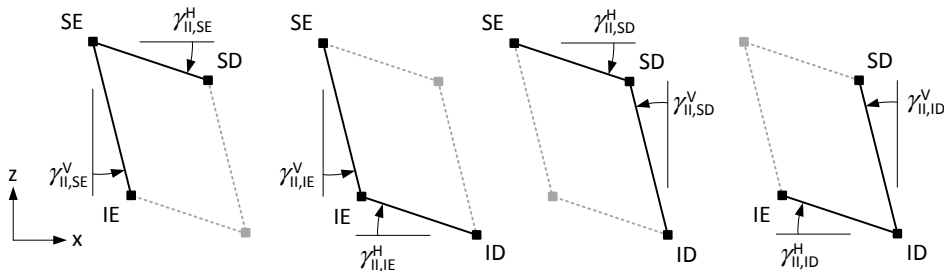


Figura 8.4 – Determinação da distorção da ligação viga-pilar (segunda abordagem).

### 8.3. Espécimes laboratoriais de referência

Os modelos numéricos desenvolvidos para a análise que se apresenta neste Capítulo, baseiam-se em espécimes concebidos para estudos experimentais e que são representativos de estruturas correntes. Para determinar a totalidade do comportamento do núcleo da ligação, nem as vigas nem os pilares podem entrar em rotura antes da ligação. Por esse motivo (i) foram escolhidos espécimes experimentais para os quais se verificou ser a resistência das vigas e pilares superior à das ligações viga-pilar e (ii) os modelos numéricos desenvolvidos foram dimensionados, sempre que possível, de modo a que as armaduras longitudinais das vigas e pilares permanecessem em regime elástico ao longo de toda a história de carga.

#### 8.3.1. Ligação viga-pilar interior (IJ)

Para o estudo de ligações viga-pilar interiores, utilizaram-se como referência os espécimes ensaiados por Roeser [2002], já referenciados nos Capítulos 2, 4 e 6, com as relações  $L_b/h_b$  e  $L_c/h_c$ , condições de apoio e de aplicação de carga da subestrutura SE2 estudada no Capítulo 6. Ou seja, foram modeladas, com recurso ao ATENA 3D, estruturas cruciformes constituídas por uma ligação viga-pilar e dois troços de viga e de pilar adjacentes à ligação, com a configuração representada Figura 6.55, em que as dimensões dos elementos correspondem às da subestrutura SE2 definida no §6.6.1.1.

Os modelos numéricos de EF desenvolvidos no ATENA 3D utilizam os mesmos (i) modelos materiais, (ii) tipos de elementos finitos e (iii) discretização que foram utilizados no estudo apresentado no Capítulo 4 (§§ 4.4 e 4.5.2).

Foram modeladas armaduras de aço nervurado com propriedades mecânicas idênticas às das armaduras utilizadas por Roeser [2002], ou seja, com comportamento bilinear com  $f_y = 600$  MPa,  $f_t/f_y = 1.1$ ,  $E_s = 200$  GPa e  $\epsilon_u = 5\%$ . O valor da tensão de cedência, ainda que elevado, está dentro dos limites de validade definidos no §3.2.2(3)P da NP EN 1992-1-1 (IPQ [2010a]).

As secções transversais das vigas e pilares dos modelos numéricos estão representadas na Figura 8.5.

A gama de valores do esforço axial considerada relevante para este estudo é  $n \in [0, 0.6]$ .

Adoptando como referência o modelo IJ-Ref, foi estudada a influência dos seguintes factores no comportamento da ligação viga-pilar:

- (i) quantidade de armadura transversal (cintas) na ligação viga-pilar (IJ-JTR, *interior beam-column joint - joint transverse reinforcement*);

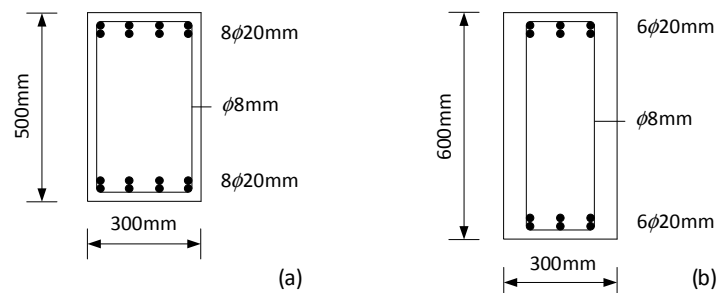


Figura 8.5 – Secções transversais: (a) pilares e (b) vigas.

- (ii) disposição de varões verticais nos pilares ao longo das faces paralelas ao plano do pórtico (IJ-ICR, *interior beam-column joint - intermediate column reinforcement bars*);
- (iii) disposição de parte dos varões da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação (IJ-DR, *interior beam-column joint - diagonal reinforcement*);
- (iv) resistência à compressão do betão (IJ-CS, *interior beam-column joint - concrete compressive strength*);
- (v) nível de esforço axial no pilar (IJ-N, *interior beam-column joint - column axial load*);
- (vi) configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano da subestrutura (IJ-CTD, *interior beam-column joint - configuration in transversal direction*).

Não foi estudada a influência das percentagens mecânica e geométrica de armadura longitudinal das vigas e dos pilares que constituem a subestrutura, na medida em que elas são habitualmente determinadas pelo dimensionamento das vigas e pilares e não das ligações. Além disso, tal como já foi referido, estes parâmetros estão fortemente condicionados pelo facto de se pretender determinar a totalidade da curva de comportamento das ligações e, conseqüentemente, as vigas e pilares terem que apresentar resistência elevada, ou seja, pelo facto de se pretender que as subestruturas entrem em rotura pela ligação viga-pilar. Desta forma, em termos de pormenorização de armaduras, só foi estudado o efeito das armaduras especificamente dispostas para melhorar o comportamento das ligações viga-pilar.

### 8.3.2. Ligação viga-pilar de extremidade (EJ)

Para o estudo de ligações de extremidade, utilizaram-se como referência os espécimes ensaiados por Ortiz [1993], já referidos nos Capítulos 2 e 4. Assim, foram modeladas estruturas em T “deitado” com dimensões e pormenorizações idênticas às ensaiadas por Ortiz [1993]. No entanto, tal como no estudo realizado no Capítulo 4, nos modelos de EF das estruturas modeladas no ATENA 3D, foram introduzidas alterações nas condições de apoio de modo a simular uma estrutura não contraventada. Assim, foram adoptadas as condições de apoio representadas na Figura 4.36. Além disso, a altura da secção transversal do pilar difere dos espécimes de Ortiz [1993]: passou de 30 cm para 25 cm, para garantir o colapso do modelo numérico de EF na ligação, com as armaduras longitudinais da viga e dos pilares em regime linear. As dimensões e a pormenorização do modelo adoptado como referência (EJ-Ref) estão representadas na Figura 8.6 (EJ-Ref).

Tal como para ligações viga-pilar interiores, os modelos numéricos do ATENA 3D para ligações viga-pilar de extremidade foram desenvolvidos utilizando os mesmos (i) modelos materiais, (ii) tipos de elementos finitos e (iii) discretização que foram utilizados no estudo apresentado no Capítulo 4 (§§ 4.4 e 4.5.3).

Assumiram-se para as armaduras propriedades mecânicas e geométricas idênticas às dos espécimes ensaiados por Ortiz [1993]. Foram adoptadas armaduras de aço nervurado com comportamento bilinear com  $f_t/f_y = 1.1$ ,  $E_s = 200$  GPa e  $\epsilon_u = 5\%$ . Para os varões com 16 mm de diâmetro assumiu-se  $f_y = 750$  MPa, que excede os limites definidos pelo §3.2.2(3)P da NP EN 1992-1-1, e para os varões com 8 mm de diâmetro assumiu-se  $f_y = 500$  MPa. Note-se

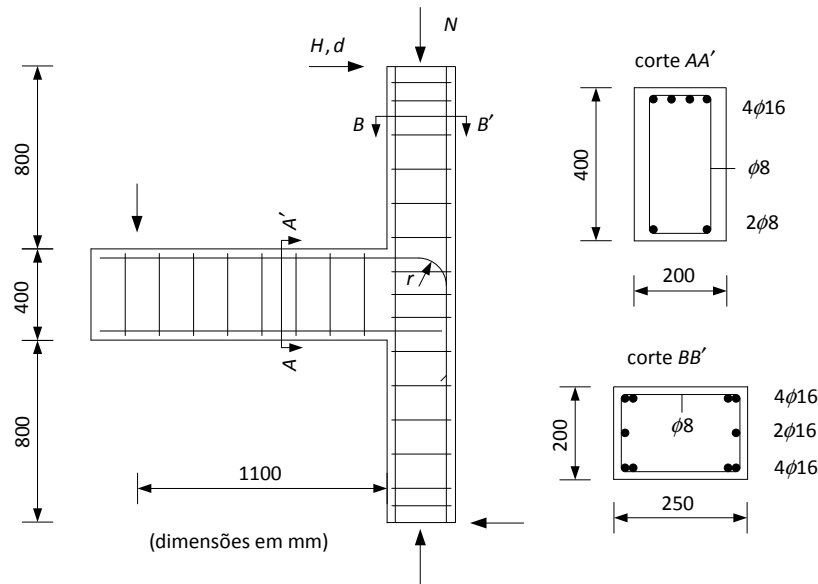


Figura 8.6 – Geometria das ligações viga-pilar de extremidade para o modelo EJ-Ref.

que, apesar da tensão de cedência dos varões com 16 mm de diâmetro estar fora do intervalo definido no §3.2.2(3)P da NP EN 1992-1-1, nas análises efectuadas a tensão instalada nestes varões normalmente é inferior a 600 MPa e nunca atinge a tensão de cedência, tendo-se por isso considerado que a validade dos resultados obtidos neste estudo não foi afectada pelo valor deste parâmetro.

À semelhança das ligações interiores, a gama de esforço axial considerada pertinente neste estudo é  $n \in [0, 0.6]$ .

Adoptando como referência o modelo EJ-Ref, foi estudada a influência dos seguintes aspectos no comportamento da ligação viga-pilar de extremidade:

- (i) quantidade de armadura transversal da ligação viga-pilar (EJ-JTR, *exterior beam-column joint - joint transverse reinforcement*);
- (ii) disposição de varões verticais nos pilares ao longo das faces paralelas ao plano do pórtico (IJ-ICR, *exterior beam-column joint - intermediate column reinforcement bars*);
- (iii) diâmetro interno da dobra dos varões da armadura longitudinal da viga (EJ-IBD, *exterior beam-column joint - internal bend diameter*);
- (iv) disposição de chapas de ancoragem para amarração da armadura longitudinal de flexão das vigas (EJ-BP, *exterior beam-column joint - bearing plate*);
- (v) disposição de parte dos varões da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação (EJ-DR, *exterior beam-column joint - diagonal reinforcement*);
- (vi) resistência à compressão do betão (EJ-CS, *exterior beam-column joint - concrete compressive strength*);
- (vii) nível de esforço axial no pilar (EJ-N, *exterior beam-column joint - column axial load*);
- (viii) configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano da subestrutura (EJ-CTD, *exterior beam-column joint - configuration in transversal direction*).

## 8.4. Ligação viga-pilar interior

### 8.4.1. Análise do modelo IJ-Ref

No modelo IJ-Ref o betão apresenta  $f'_c = 40\text{MPa}$  e a armadura transversal na zona da ligação é constituída por 9 cintas de 2 ramos de 8 mm de diâmetro – espaçamento entre eixos de 4.7 cm,  $A_{sh} = 9.05\text{cm}^2$  e  $\omega_j = 8.87\%$ . Esta quantidade de armadura transversal está a meio do intervalo de percentagens de armadura utilizadas por Roeser [2002] e cumpre os requisitos do §5.4.3.3(1) da NP EN 1998-1 (IPQ [2010d]) para estruturas DCM, ou seja, não é inferior à armadura transversal na zona crítica do pilar.

O valor da carga vertical utilizado neste modelo numérico correspondente a um esforço axial reduzido  $n = 0.1$  no pilar superior. Na Figura 8.7 estão identificadas as secções dos varões onde foi monitorizada a tensão ao longo da história de carga.

A Figura 8.8(a) representa a relação entre a força horizontal aplicada e o deslocamento do ponto de aplicação desta força para os modelos de elementos finitos IJ-Ref e IJ-RIG. Este dois modelos diferem entre si apenas no material da ligação viga-pilar, tendo o betão do primeiro sido substituído por um material homogéneo com comportamento isotrópico e elástico-linear caracterizado por  $E = 210\text{GPa}$  e  $\nu = 0.3$ . Considerou-se que a utilização de um material com estas características torna a ligação viga-pilar suficientemente rígida para se poder desprezar a sua distorção – note-se que, tal como se mostrou no §5.5.2, face à baixa deformabilidade do betão em compressão, só é expectável uma distorção elevada da ligação viga-pilar caso este elemento sofra expansão em resultado da fendilhação diagonal, a qual é obviamente inexistente no modelo IJ-RIG.

As Figuras 8.8(b) e 8.9 representam a evolução das tensões nas cintas no interior da ligação e nas armaduras longitudinais das vigas e dos pilares na periferia da ligação, respectivamente, no modelo IJ-Ref.

A capacidade de carga do modelo IJ-RIG é limitada pela resistência à flexão das vigas ou, mais precisamente, pela cedência da armadura longitudinal destas. Este resultado deve-se à resistência ilimitada da ligação neste modelo. Já o ponto limite apresentado pelo modelo IJ-Ref, resulta do colapso do núcleo da ligação viga-pilar pois, como o revela a Figura 8.9, as

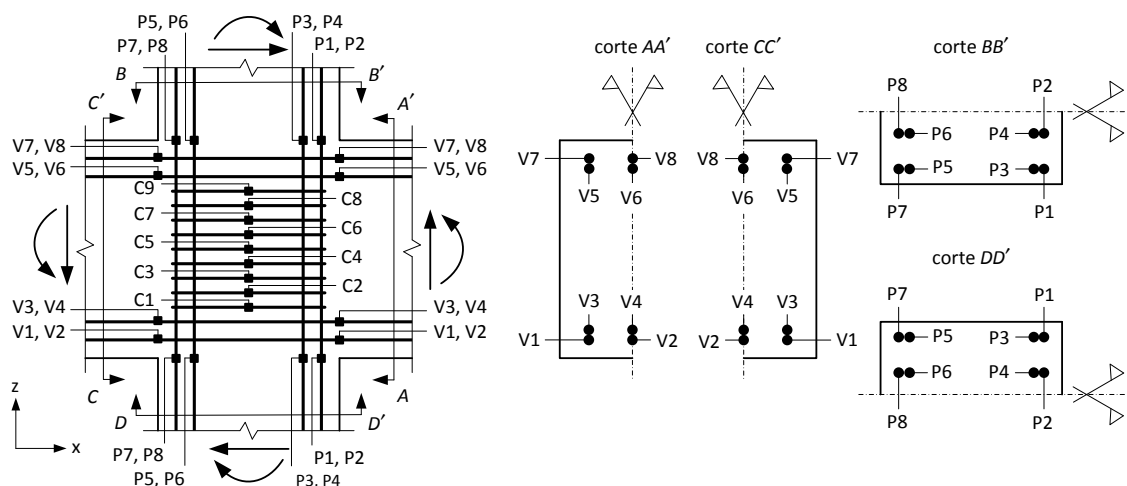


Figura 8.7 – Identificação dos pontos de monitorização de tensão nas armaduras do modelo IJ-Ref.

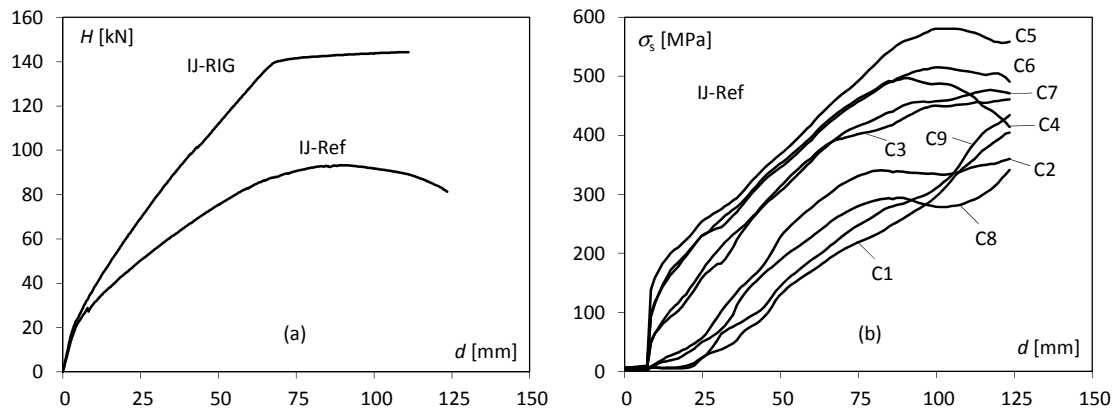


Figura 8.8 – Resultados dos modelos de EF: (a) relação  $H$ - $d$  dos modelos de EF IJ-Ref e IJ-RIG e (b) tensão nas cintas na ligação do modelo IJ-Ref.

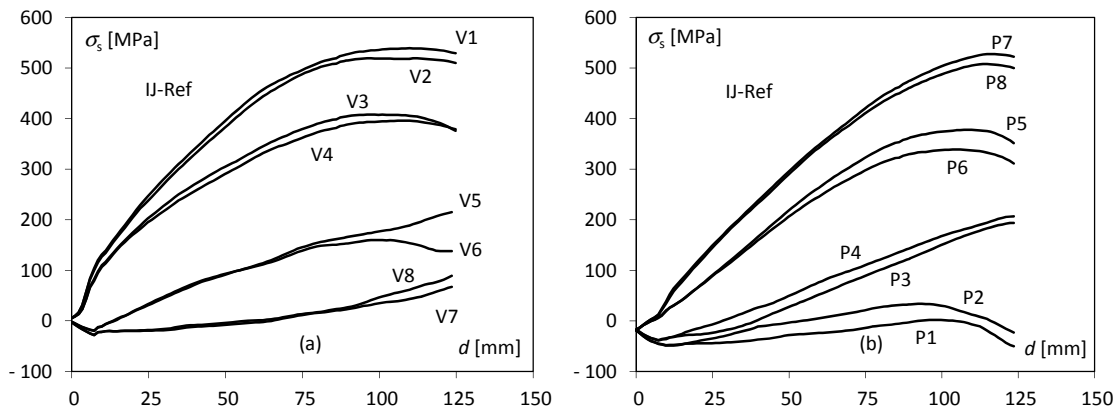


Figura 8.9 – Tensão nas armaduras longitudinais do modelo de EF IJ-Ref: (a) secção AA' e (b) secção BB'.

armaduras longitudinais das vigas e dos pilares não atingem a cedência.

A Figura 8.8(a) mostra que a resistência da ligação condiciona significativamente a capacidade de carga do modelo e que a deformabilidade da ligação é responsável por uma parcela significativa da deformação horizontal da subestrutura. Mais concretamente, a Figura 8.8(a) revela que a rotura das vigas, que é responsável pelo colapso do modelo IJ-RIG, ocorre para um valor da carga de colapso mais de 50% superior ao atingido pelo modelo IJ-Ref e, assumindo como valor de referência 75% da carga de colapso do modelo IJ-Ref, o modelo IJ-RIG apresenta uma rigidez secante  $G_s$  75% superior à do modelo IJ-Ref.

A Figura 8.8(b) mostra que o colapso do núcleo da ligação do modelo IJ-Ref ocorreu para elevados níveis de tensão nas cintas na zona da ligação. Além disso, a tensão é superior nas cintas da zona central (C3, C4, C6, C6 e C7) e menos relevante nas cintas do topo e da base da ligação (C1, C2, C8 e C9).

Na Figura 8.10(a) está representado o valor da distorção no núcleo da ligação determinado de acordo com os procedimentos apresentados no §8.2. A coincidência quase perfeita dos valores determinados com as várias expressões apresentadas, mostra que o modo de deformação do núcleo da ligação se deve quase exclusivamente à distorção e que é aproximadamente uniforme.

A Figura 8.10(b) apresenta a relação  $\tau_{jh}$ - $\gamma$  determinada pelo modelo numérico de EF IJ-Ref, em que  $\tau_{jh}$  foi calculada pelos métodos apresentados no §8.2 ( $\tau_{jh,zb}$ ,  $\tau_{jh,es}$ ), e confronta-a com

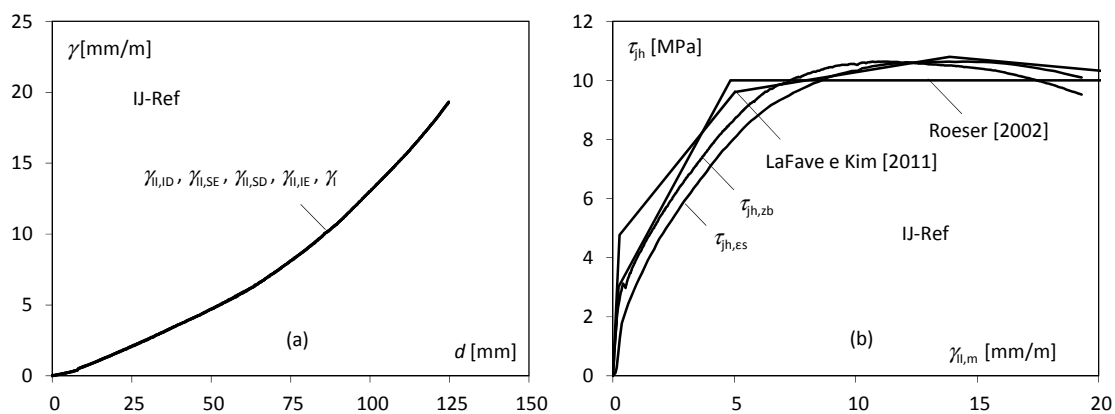


Figura 8.10 – Modelo de EF IJ-Ref: (a) distorção do núcleo da ligação e (b) tensão tangencial no plano médio do núcleo da ligação.

Tabela 8.1 – Modelos de EF utilizados para analisar efeito da percentagem mecânica de armadura transversal em ligações viga-pilar interiores.

modelo	armadura transversal na ligação - cintas		
	n.º de cintas	ramos por cinta	$\phi$ [mm]
IJ-JTR-0.0	0	–	–
IJ-JTR-4.9	5	2	8
IJ-JTR-8.9 (≡ IJ-Ref)	9	2	8
IJ-JTR-27.7	9	4	10

a mesma relação determinada, para as mesmas condições do modelo de EF IJ-Ref, pelos modelos de comportamento simplificados de Roeser e de LaFave e Kim (§§ 5.5.2.3.1 e 5.5.2.3.2). Nesta figura, apresenta-se no eixo das abcissas a distorção média dada por  $\gamma_{II,m} = (\gamma_{II,ID} + \gamma_{II,SE} + \gamma_{II,SD} + \gamma_{II,IE}) / 4$ . Os resultados mostram que (i) para valores baixos de  $\tau_{jh}$  os modelos simplificados tendem a sobrestimar a rigidez de distorção do núcleo da ligação viga-pilar e (ii) o modelo proposto por Roeser [2002] subestima ligeiramente a capacidade resistente do núcleo da ligação viga-pilar.

A Figura 8.10(b) revela ainda que a caracterização do comportamento da ligação IJ-Ref por intermédio de  $\tau_{jh,es}$  ou de  $\tau_{jh,zb}$  é equivalente. Note-se, no entanto, que  $\tau_{jh,es}$  tende a conduzir a menores valores para a tensão de corte para valores reduzidos de distorção, porque a tensão de tracção no betão na periferia da ligação não é considerada no cálculo do seu valor.

### 8.4.2. Efeito da quantidade de armadura transversal na ligação

Para avaliar o efeito da armadura transversal (cintas) sobre o comportamento de ligações viga-pilar interiores foram desenvolvidos e analisados três modelos de EF recorrendo ao ATENA 3D. Os modelos de EF desenvolvidos são adaptações do IJ-Ref e apenas diferem deste, e entre si, na armadura transversal disposta na ligação viga-pilar.

Na análise que se segue os modelos serão identificados pela sequência de símbolos IJ-JTR- $\omega_j$  em que IJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação interior), JTR identifica a variável em estudo (armadura transversal) e  $\omega_j$  é a percentagem mecânica de armadura transversal na ligação definida no §6.6.1.2. Na Tabela 8.1 estão identificados os modelos de EF desenvolvidos e estão caracterizadas as armaduras transversais dispostas na



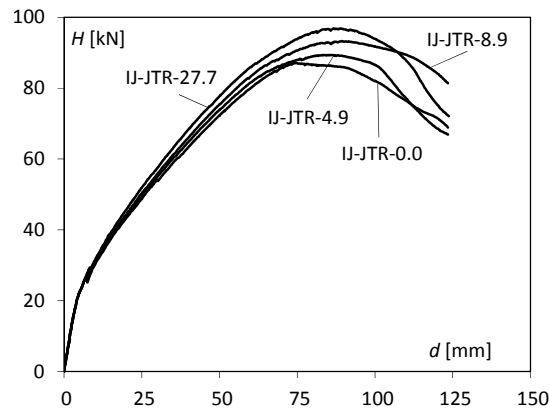


Figura 8.11 – Curvas  $H-d$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes percentagens mecânicas de armadura transversal.

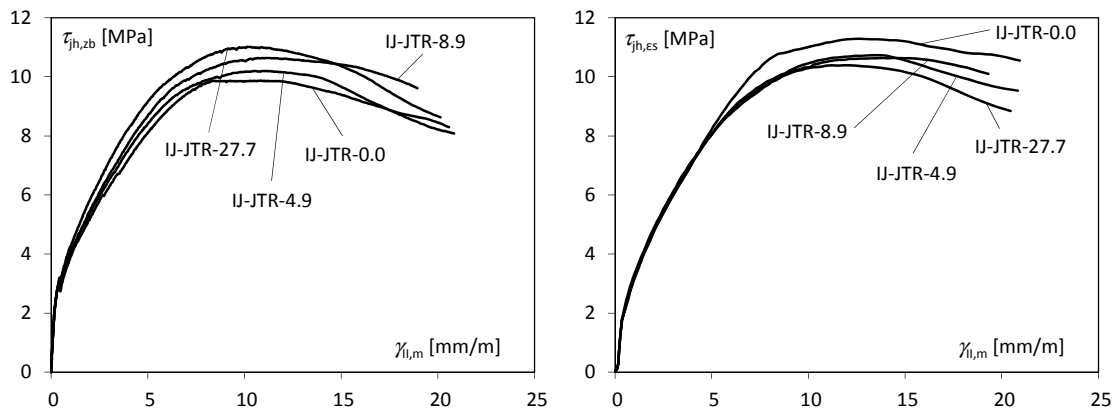


Figura 8.12 – Curvas  $\tau_{jh}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes percentagens mecânicas de armadura transversal.

ligação viga-pilar em cada um. O modelo IJ-JTR-8.9 corresponde ao IJ-Ref.

A Figura 8.11 representa as curvas que relacionam a força horizontal aplicada  $H$  com o deslocamento horizontal  $d$  do seu ponto de aplicação, para os modelos numéricos de EF da Tabela 8.1.

O valor máximo da força horizontal foi condicionado pela capacidade resistente ao corte das ligações viga-pilar em todos os modelos, tendo as armaduras longitudinais e transversais das vigas e dos pilares permanecido em regime elástico linear ao longo de toda a história de carga. Desta forma, a Figura 8.11 revela que, ainda que de forma ligeira, o aumento da percentagem mecânica de armadura transversal das ligações viga-pilar interiores aumenta a sua capacidade resistente e torna o seu comportamento mais rígido.

A Figura 8.12 representa as relações  $\tau_{jh}-\gamma$  para as ligações viga-pilar dos modelos da Tabela 8.1. Como a capacidade resistente destes modelos foi condicionada pela capacidade resistente das ligações viga-pilar, seria expectável que a relação entre a resistência das diversas ligações apresentadas na Figura 8.12 fosse idêntica à relação entre a capacidade de carga dos respectivos modelos. No entanto, apesar da Figura 8.12(a) mostrar que a relação  $\tau_{jh,zb}-\gamma_{l,m}$  está de acordo com esta expectativa, a Figura 8.12(b) mostra que as relações  $\tau_{jh,es}-\gamma_{l,m}$  conduzem a quocientes entre a resistência das várias ligações distintos dos quocientes entre a resistência dos modelos. De facto, numa primeira análise, as relações  $\tau_{jh,es}-\gamma_{l,m}$  mostram que as ligações viga-pilar com menor percentagem de armadura transversal apresentam maior resistência.

De um ponto de vista pragmático, as conclusões obtidas da análise das relações  $\tau_{jh,es} - \gamma_{ll,m}$  são de difícil aceitação, na medida em que (i) não existe quaisquer referência na bibliografia que as sustente (antes pelo contrário) e (ii) a eventual maior capacidade resistente das ligações viga-pilar com menor percentagem mecânica de armadura transversal não se traduz em maior capacidade de carga dos modelos. Consequentemente, em seguida serão apresentados os motivos que permitiram concluir que a sollicitação imposta à ligação deve ser caracterizada por  $\tau_{jh,zb}$  e não  $\tau_{jh,es}$ .

A Figura 8.13 apresenta as relações  $\tau_{jh,zb} - \gamma_{ll,m}$  e  $\tau_{jh,es} - \gamma_{ll,m}$  para o modelo com maior percentagem mecânica de armadura transversal (IJ-JTR-27.7) e para o modelo sem armadura transversal (IJ-JTR-0.0) na ligação. Esta figura revela que as relações  $\tau_{jh,zb} - \gamma_{ll,m}$  e  $\tau_{jh,es} - \gamma_{ll,m}$  apresentam um andamento relativo diferente nos dois casos: para  $d < d_{max}$  (i) o modelo IJ-JTR-27.7 apresenta  $\tau_{jh,es} < \tau_{jh,zb}$  enquanto (ii) o modelo IJ-JTR-0.0 apresenta  $\tau_{jh,es} < \tau_{jh,zb}$  para valores reduzidos da distorção e  $\tau_{jh,es} > \tau_{jh,zb}$  para valores maiores; para  $d > d_{max}$  (i) o modelo IJ-JTR-27.7 apresenta  $\tau_{jh,es} \approx \tau_{jh,zb}$  e o modelo IJ-JTR-0.0 apresenta  $\tau_{jh,es} \gg \tau_{jh,zb}$ . Além disso, no modelo IJ-JTR-0.0 após  $H$  atingir  $H_{max}$ , apesar da carga  $H$  sofrer uma redução com o aumento de  $d$ , o parâmetro  $\tau_{jh,es}$  continua a crescer. Ou seja, as relações  $\tau_{jh,zb} - \gamma_{ll,m}$  e  $\tau_{jh,es} - \gamma_{ll,m}$  no modelo IJ-JTR-27.7 apresentam um andamento idêntico às do IJ-Ref – o desfaseamento para  $d < d_{max}$  já foi justificado.

O valor de  $\tau_{jh,zb}$  é função do campo de esforços na periferia da ligação e de  $z_b$  (expressão (5.5)). Como a armadura longitudinal das vigas dos modelos IJ-JTR-0.0 e IJ-JTR-27.7 é igual, é razoável assumir o mesmo valor para  $z_b$ , o que conduz a praticamente ao mesmo valor de  $\tau_{jh,zb}$  para os dois modelos para o mesmo campo de esforços, como se exemplifica na Tabela 8.2 para  $z_b = 0.85 d_b$ . A caracterização do estado de tensão no núcleo da ligação por intermédio do parâmetro  $\tau_{jh,zb}$  mostra-se assim ser coerente na medida em que este parâmetro toma aproximadamente o mesmo valor nos dois modelos para o mesmo campo de esforços na periferia da ligação viga-pilar.

A Tabela 8.2 apresenta também o parâmetro  $\tau_{jh,es}$  evidenciando a diferença entre  $\tau_{jh,es}$  e  $\tau_{jh,zb}$  nos dois modelos para o mesmo nível de carga. Como em seguida se mostra recorrendo a algumas simplificações, esta diferença deve-se ao escorregamento da armadura longitudinal das vigas no interior da ligação.

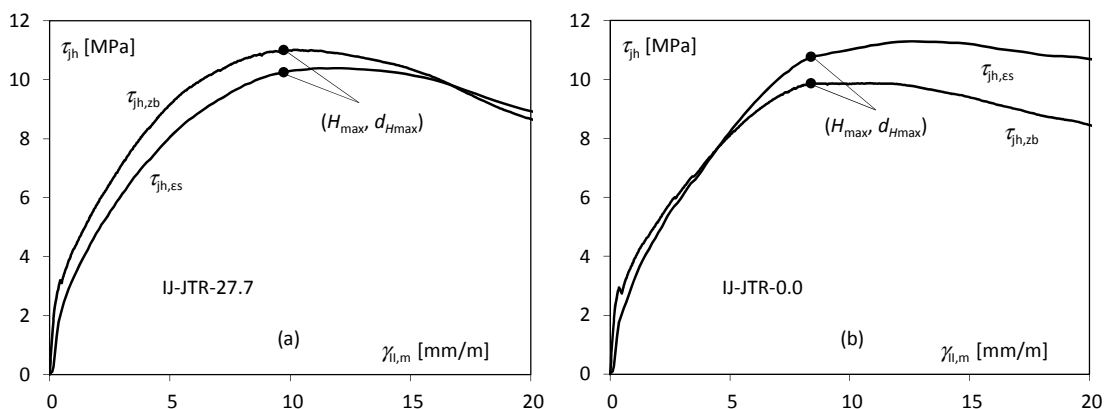


Figura 8.13 – Comportamento da ligação viga-pilar interior para os modelos com maior e menor percentagem mecânica de armadura transversal na ligação ( $H_{max}$  e  $d_{Hmax}$  são a força horizontal aplicada máxima e o correspondente deslocamento horizontal).

Tabela 8.2 – Tensão tangencial a meia altura da ligação viga-pilar para  $H \approx 84.5$  kN.

modelo	$\gamma_{ll,m}$ [mm/m]	$\tau_{jh,zb}$ [MPa]	$\tau_{jh,es}$ [MPa]
IJ-JTR-0.0	7.45	9.56	10.27
IJ-JTR-27.7	5.47	9.52	8.42

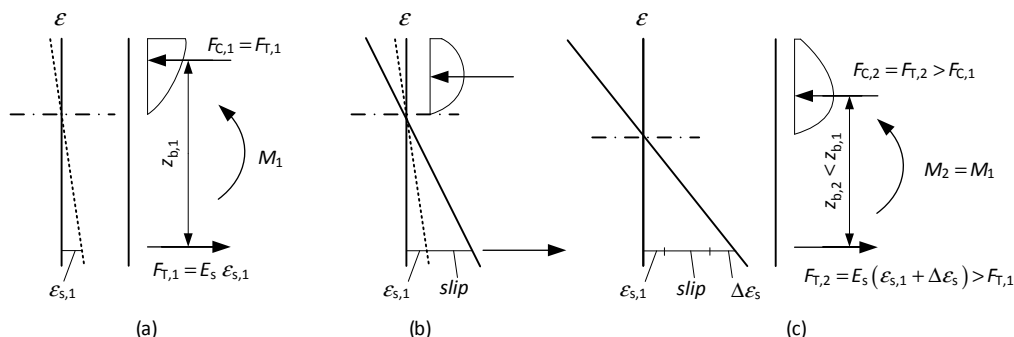


Figura 8.14 – Redução do braço interno provocado pelo escorregamento dos varões da armadura longitudinais das vigas no interior da ligação.

Considere-se que, na interface ligação-viga, as fibras de betão mais comprimidas na extremidade efectiva da viga estão no limiar da zona de amaciamento da relação constitutiva do betão. Para este caso, explica-se em seguida, e com o apoio da Figura 8.14, o motivo pelo qual, para um valor constante do momento flector na interface ligação viga, o escorregamento da armadura longitudinal das vigas no interior da ligação baixa a posição da linha neutra e aumenta o valor da tensão nessa armadura.

A Figura 8.14(a) representa uma idealização do campo de tensões na interface viga-ligação, baseada numa distribuição linear de extensões normais à secção transversal da viga.

Considere-se primeiro que o escorregamento da armadura longitudinal da viga na ligação se dá sem variação da posição da linha neutra. Neste caso, aumentam as extensões (em valor absoluto) nas fibras mais comprimidas da secção (Figura 8.14(b)). Como as fibras de betão mais comprimidas estão no limiar da zona de amaciamento da relação constitutiva, este aumento das extensões reduz a tensão nestas fibras devido ao amaciamento mas aumenta-a nas restantes fibras comprimidas. À medida que a extensão nas fibras superiores vai aumentando, a zona em que a tensão decresce vai alastrando reduzindo a outra e fazendo baixar a linha de acção da resultante de compressão. A partir de um certo valor daquela extensão, o efeito da redução das tensões de compressão na zona superior pode mesmo passar a ser superior ao do incremento das tensões de compressão na restante zona, ao que corresponde uma redução da resultante das tensões de compressão no betão. Tanto a redução da resultante de tensões de compressão no betão como o abaixamento da linha de acção da resultante de compressão impedem a conservação do momento flector. Conclui-se, por isso, que a hipótese inicial de conservação da posição da linha neutra não é válida: efectivamente esta desce, aumentando a altura da zona de betão comprimido e descendo também a posição da resultante de compressões, ou seja, reduzindo o braço  $z_b$ , aumentando o valor da resultante de compressão no betão, e portanto da resultante de tracção nas armaduras (Figura 8.14(c)), de modo a preservar o valor do momento flector.

A Figura 8.15, que representa a tensão nos varões da armadura longitudinal das vigas na periferia da ligação viga-pilar para ambos os modelos, permite constatar a ocorrência de

escorregamento desta armadura no modelo IJ-JTR-0.0 na medida em que mostra que:

- (i) a tensão nos varões da armadura longitudinal da secção  $CC'$  do modelo IJ-JTR-0.0 é superior à do modelo IJ-JTR-27.7 na mesma secção, apesar de, para o mesmo deslocamento horizontal  $d$ , ao modelo IJ-JTR-0.0 corresponder uma força horizontal  $H$  inferior à do modelo IJ-JTR-27.7 (Figura 8.11);
- (ii) no modelo IJ-JTR-0.0 a tensão nos varões V1 e V2 ultrapassa a tensão nos varões V3 e V4 na secção  $CC'$  apesar do momento flector nessa secção, de acordo com o princípio das secções planas e assumindo comportamento elástico linear para as armaduras, implicar a relação inversa – as tensões nos varões V1 e V2 são superiores às dos varões V3 e V4 porque os primeiros apresentam maior escorregamento no interior da ligação em resultado da maior tracção exercida sobre eles na extremidade efectiva da viga oposta na ligação.

Note-se também que o esforço de corte, ou a tensão tangencial, horizontal a meia altura da ligação viga-pilar, habitualmente adoptado na bibliografia para caracterizar o estado de tensão da ligação, é, por definição, um parâmetro nominal obtido a partir de uma idealização das resultantes de tensões na periferia da ligação assumindo válido o princípio das secções planas. Ora, nas imediações da ligação viga-pilar o campo de deformações afasta-se desta idealização na medida em que é uma *zona D* (Schlaich, Schafer *et al.* [1987]), não sendo, por isso, esta tensão um parâmetro que traduza o estado de tensão efectivo em nenhum ponto da ligação. Assim, a caracterização do estado de tensão na ligação por intermédio do parâmetro  $\tau_{jh,zb}$  é o procedimento mais coerente, na medida em que os valores adoptados para  $z_b$  decorrem dos mesmos pressupostos da idealização da distribuição de tensões na periferia das ligações.

A caracterização do estado de tensão na ligação viga-pilar por intermédio de  $\tau_{jh,es}$  pode aparentar ser um procedimento mais rigoroso, na medida em que não requer uma estimativa de  $z_b$ , mas não é. De facto, tal como em qualquer elemento, a caracterização das acções aplicadas nas ligações viga-pilar pode ser feita a várias escalas. Pode, por exemplo, ser feita ao nível da tensão em cada ponto ou, alternativamente, ao nível dos esforços. Assim,  $\tau_{jh,zb}$  corresponde à caracterização a uma escala macroscópica, ao nível dos esforços, enquanto  $\tau_{jh,es}$  é um parâmetro a um nível mais local. No entanto, o parâmetro  $\tau_{jh,es}$  apenas reflecte o estado de tensão nas armaduras na periferia da ligação, não traduz a tensão tangencial

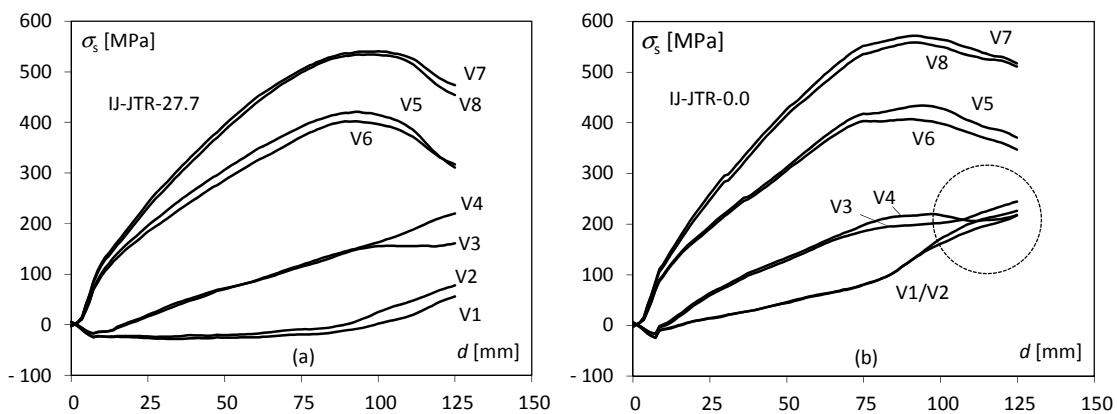


Figura 8.15 – Tensão na armadura longitudinal das vigas na periferia da ligação na secção  $CC'$ : (a) modelo de EF IJ-JTR-27.7 e (b) modelo de EF IJ-JTR-0.0.

Tabela 8.3 – Efeito da percentagem mecânica de armadura transversal em ligações viga-pilar interiores (valores em MPa).

modelo	ATENA 3D			Roeser [2002]			LaFave e Kim [2011]		
	$(\tau_{jh,zb})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$
IJ-JTR-0.0	9.88	910.9	1755.7	10.0	1762.1	2026.7	7.8	281.4	362.0
IJ-JTR-4.9	10.20	913.1	1855.5	10.0	1931.2	2176.9	9.9	648.2	1835.7
IJ-JTR-8.9	10.64	947.5	1891.0	10.0	2065.3	2274.1	10.8	778.8	2332.2
IJ-JTR-27.7	11.01	1081.4	2056.7	10.0	2695.4	2904.2	12.8	1114.3	4124.6

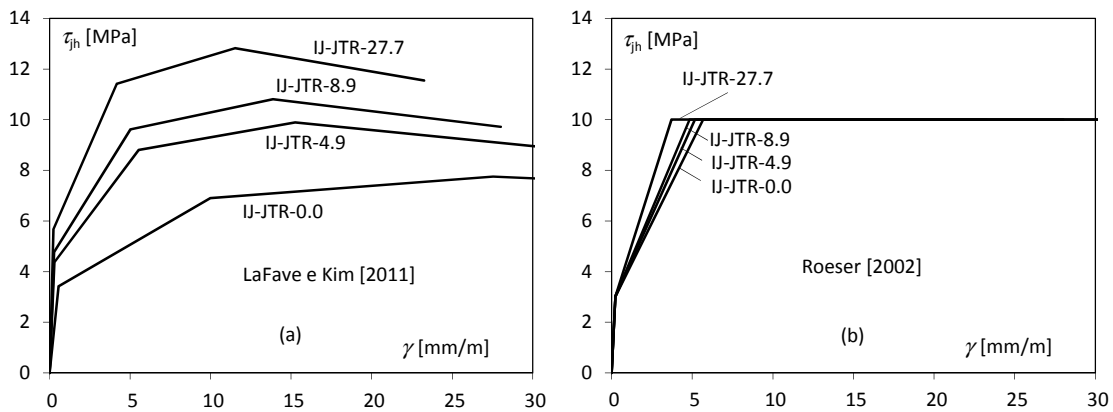


Figura 8.16 – Relação  $\tau_{jh}$ - $\gamma$  determinada pelos modelos de (a) LaFave e Kim [2011] e (b) Roeser [2002] para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados.

horizontal efectiva em nenhum ponto da ligação e não é por isso uma medida que possa ser considerada mais rigorosa do estado de tensão na ligação. Além disso, o modelo de ligação viga-pilar desenvolvido no Capítulo 5 está vocacionado para uma descrição do comportamento da estrutura ao nível dos esforços, pelo que  $\tau_{jh,zb}$  é, definitivamente, o parâmetro mais adequado para caracterizar o comportamento da ligação.

A Tabela 8.3 apresenta a tensão de rotura por corte  $(\tau_{jh,zb})_u$  e as rigidezes  $G_u = (\tau_{jh,zb} / \gamma_{l,m})_u$  e  $G_s$  das ligações viga-pilar constituintes dos quatro modelos numéricos de EF indicados na Tabela 8.1 e determinadas recorrendo ao ATENA 3D. Esta tabela apresenta ainda os mesmos parâmetros determinados pelos modelos de Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011] para as mesmas características geométricas e mecânicas das ligações constituintes dos modelos de EF. Nestes últimos casos,  $G_s$  foi determinado para  $\tau_{jh,zb} = 0.75(\tau_{jh,zb})_u$ , em que  $(\tau_{jh,zb})_u$  corresponde ao modelo numérico de EF.

À semelhança da Figura 8.11, a Tabela 8.3 revela que o efeito da percentagem mecânica de armadura transversal no núcleo da ligação tem um efeito pouco pronunciado na capacidade resistente da ligação e ligeiramente mais pronunciado na sua rigidez. Assim, esta tabela revela que a colocação de armadura transversal na ligação pode conduzir a um aumento da capacidade resistente, da rigidez última e da rigidez  $G_s$  do núcleo da ligação em 11%, 19% e 17%, respectivamente, relativamente ao caso da ligação sem armadura transversal. Esta tabela revela igualmente a redução acentuada de rigidez do núcleo da ligação nas imediações do colapso, verificando-se que  $G_s \approx 2G_u$ .

A Figura 8.16 representa o comportamento do núcleo da ligação de acordo com os modelos de Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011] determinado para as ligações viga-pilar constituintes dos modelos de EF indicados.

A comparação da Figura 8.12 com a Figura 8.16 e a análise da Tabela 8.3, permitem concluir que o efeito da armadura transversal sobre a capacidade resistente e sobre a rigidez da ligação nos modelos de EF não é tão diminuto como sugere o modelo de Roeser [2002], nem é tão vincado como sugere o modelo de LaFave e Kim [2011]. Além disso, com excepção do modelo de LaFave e Kim [2011] para baixas percentagens mecânicas de armadura transversal na ligação, os modelos propostos por Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011] conduzem a estimativas de comportamento mais rígidas que as calculadas pelo ATENA 3D para os modelos numéricos de EF.

Porém, note-se que o modelo material *CC3NonLinCementitious2* utilizado no ATENA 3D não reflecte o facto da ductilidade do betão aumentar com o confinamento transversal conferido pela maior percentagem mecânica de armadura transversal ( $w_d$  é assumido fixo, ver §§ 4.4.3 e 4.4.4). Além disso, a modelação simplificada das armaduras no ATENA 3D não permite modelar a capacidade resistente dos varões à flexão e, conseqüentemente, não capta o efeito de ferrolho. Desta forma, o efeito da armadura transversal pode não ser completamente traduzido pelos modelos de EF utilizados. Conseqüentemente, é expectável que, contabilizando estes aspectos, os modelos de EF conduzam a um efeito mais relevante da percentagem mecânica de armadura transversal da ligação, tal como sugere o modelo de comportamento de LaFave e Kim [2011].

### 8.4.3. Efeito de varões verticais intermédios nos pilares

Tal como referido no Capítulo 5, de acordo com Paulay e Priestley [1992], uma parcela do esforço de corte horizontal na ligação é transmitida por intermédio de uma escora diagonal, sendo a parcela remanescente transmitida por intermédio de uma treliça que se desenvolve por toda a ligação. De acordo com estes autores, esta treliça só se desenvolve se existir na ligação armadura horizontal distribuída, *e.g.*, cintas, e armadura vertical distribuída, *e.g.*, varões verticais dispostos entre os varões de canto nas faces do pilar paralelas ao plano do pórtico, simplifadamente designados como *varões verticais intermédios nos pilares*.

A influência da disposição de varões verticais intermédios nos pilares, sobre o comportamento de ligações viga-pilar interiores, foi avaliada recorrendo aos modelos de EF listados na Tabela 8.4. Três dos modelos utilizados são adaptações do IJ-Ref e apenas diferem deste, e entre si, no número de varões verticais intermédios nos pilares na zona da ligação viga-pilar. O modelo IJ-ICR-0.0 corresponde ao IJ-Ref.

Na análise que se segue os modelos são identificados pela sequência de símbolos IJ-ICR- $\rho_{sv,i}$  em que IJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação viga-pilar interior), ICR identifica a variável em estudo (varões verticais intermédios nos pilares) e  $\rho_{sv,i}$  é a razão

Tabela 8.4 – Modelos utilizados para analisar efeito dos varões verticais intermédios nos pilares em ligações viga-pilar interiores.

modelo	$\rho_{sv,i}$ [%]	$A_{sv,i}$ [cm <sup>2</sup> ]	$\phi$ [mm]	número de varões
IJ-ICR-0.0 ( $\equiv$ IJ-Ref)	0	0	12	0
IJ-ICR-0.64	64	4	12	4
IJ-ICR-0.95	95	6	12	6
IJ-ICR-1.59	159	10	12	10

entre as percentagens de armadura vertical e horizontal dada por

$$\rho_{sv,i} = \frac{A_{sv,i} h_{jw}}{A_{sh} h_{jc}} \quad (8.11)$$

em que  $A_{sv,i}$  é a área da secção transversal dos varões verticais intermédios nos pilares,  $A_{sh}$  é a área da secção transversal das cintas na ligação viga-pilar,  $h_{jw}$  e  $h_{jc}$  são a distância entre eixos dos varões exteriores da armadura longitudinal das vigas e dos pilares, respectivamente.

O §5.5.3.3(6) da NP EN 1998-1 utiliza implicitamente o parâmetro  $\rho_{sv,i}$  para definir valores mínimos desta armadura, motivo pelo qual é também usado neste estudo. As armaduras definidas na Tabela 8.4 foram prolongadas ao longo de um comprimento igual a  $50\phi$  para além das faces das vigas. Para estas armaduras assumiu-se também um comportamento bilinear com  $f_y = 600$  MPa,  $f_t/f_y = 1.1$ ,  $E_s = 200$  GPa e  $\epsilon_u = 5\%$ .

Para efeitos de quantificação de  $A_{sv,i}$ , não foram considerados os varões da armadura longitudinal de flexão dispostos nas faces dos pilares perpendiculares ao plano do pórtico, porque a posição destes varões torna a sua participação na treliça negligenciável.

Na Figura 8.17(a) está representada a relação  $H-d$  para os modelos numéricos de EF indicados na Tabela 8.4 e na Figura 8.17(b) está representado o comportamento das ligações viga-pilar correspondentes. A Tabela 8.5 apresenta a tensão de rotura por corte  $(\tau_{jh,zb})_u$  e as rigidezes  $G_u = (\tau_{jh,zb} / \gamma_{l,m})_u$  e  $G_s$  das ligações viga-pilar.

A Figura 8.17(a) revela que o efeito dos varões verticais intermédios nos pilares sobre o comportamento global da estrutura é pouco relevante e a Figura 8.17(b), juntamente com a Tabela 8.5, revela que os varões verticais intermédios nos pilares também não têm um efeito relevante sobre comportamento da ligação viga-pilar, sendo apenas de registar o acréscimo de  $G_u$  do modelo IJ-ICR-1.59 de aproximadamente 19% relativamente ao modelo IJ-ICR-0.0.

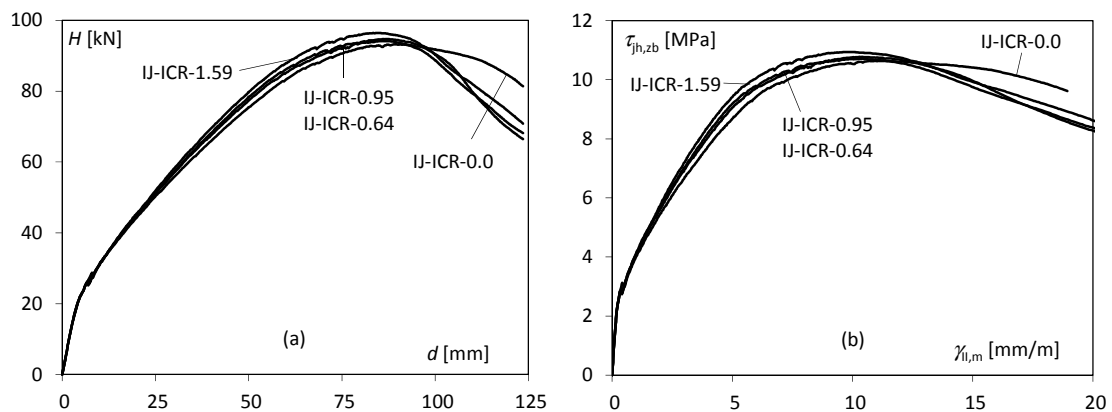


Figura 8.17 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes quantidades de varões verticais intermédios.

Tabela 8.5 – Efeito dos varões verticais intermédios nos pilares em ligações viga-pilar interiores (valores em MPa).

modelo	$(\tau_{jh,zb})_u$	$G_u$	$G_s$
IJ-ICR-0.0	10.64	947.5	1891.0
IJ-ICR-0.64	10.71	1039.4	2026.7
IJ-ICR-0.95	10.77	1046.5	2078.8
IJ-ICR-1.59	10.94	1125.1	2156.8

Os modelos de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011], não incorporam qualquer parâmetro que quantifique o efeito desta armadura, com o que corroboram, implicitamente, a sua reduzida influência sobre o comportamento das ligações viga-pilar.

Note-se que, tal como já foi referido no Capítulo 2, estas armaduras são requeridas pela NP EN 1998-1, talvez pelo seu contributo para o confinamento lateral do betão, que, como já foi referido, pode não ser adequadamente captado pelo modelo material do betão adoptado nos modelos numéricos de EF aqui utilizados. Este resultado pode também significar que o mecanismo de escora diagonal é o mecanismo preponderante para o comportamento da ligação, mesmo em situação de serviço.

#### 8.4.4. Efeito de varões diagonais na ligação

De acordo com os resultados publicados por Kotsovou e Mouzakis [2012], a colocação de parte dos varões da armadura longitudinal do pilar em diagonal na ligação (Figura 8.18(a)) conduz a um aumento da capacidade resistente da ligação e a uma redução significativa da degradação da sua rigidez ao longo da história de carga (acções cíclicas quase-estáticas). Esta configuração da armadura longitudinal dos pilares é racional na medida em que, como se verificou no Capítulo 4, a tensão de tracção nestes varões, quando rectilíneos, tende a reduzir-se ao longo da altura da ligação como resultado da inversão do sentido do momento flector na interface entre a ligação e os pilares.

Alternativamente à colocação de parte dos varões da armadura longitudinal do pilar em diagonal na ligação, alguns autores (Ibrahim [2011]) recomendam que se disponham varões adicionais na diagonal da ligação viga-pilar, providos ou não de dispositivos mecânicos de amarração nas extremidades (Figura 8.18(b)).

Esta segunda alternativa apresenta a desvantagem, relativamente à primeira alternativa, de conduzir a um maior congestionamento da armadura na ligação. Tendo em atenção este aspecto e dado que a representação simplificada das armaduras no modelo de EF desenvolvido não permite uma adequada simulação dos dispositivos mecânicos de amarração, optou-se por estudar apenas o efeito da disposição de parte da armadura longitudinal do pilar em diagonal na ligação. Alternativamente, podia também ser avaliado o efeito da colocação de varões adicionais dispostos ao longo da diagonal da ligação e prolongados para as vigas e/ou pilares adjacentes (Tsonos, Tegos *et al.* [1993], Bakir [2003]). No entanto, esta alternativa

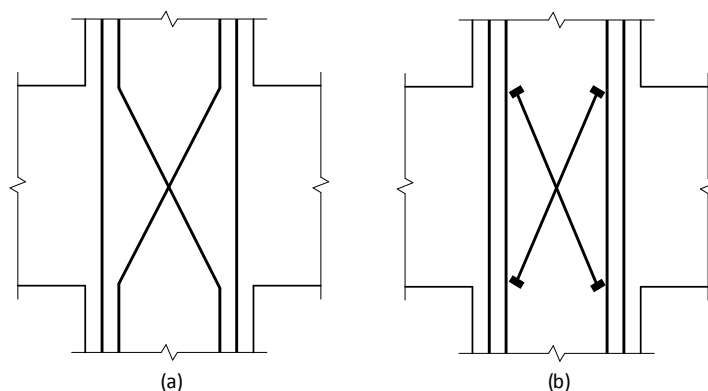


Figura 8.18 – Varões na diagonal em ligações viga-pilar interiores: (a) varões da armadura longitudinal dos pilares e (b) varões diagonais com dispositivos mecânicos de amarração.



também poderia conduzir a um congestionamento excessivo de armadura na ligação, pelo que se decidiu por não considerar estes casos nesta análise.

Para avaliar o efeito dos varões diagonais sobre o comportamento de ligações viga-pilar interiores foram desenvolvidos e analisados três modelos de EF recorrendo ao ATENA 3D utilizando o modelo IJ-Ref como referência. Os modelos de EF desenvolvidos são adaptações do IJ-Ref e apenas diferem deste, e entre si, apenas no valor do quociente entre a área da secção transversal dos varões dispostos na diagonal e a área da secção transversal da totalidade dos varões da armadura longitudinal dos pilares.

Os modelos de EF são identificados pela sequência de símbolos IJ-DR- $p$ , em que IJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação interior), DR identifica a variável em estudo (armadura longitudinal do pilar disposta diagonalmente) e  $p = A_{sc,d}/A_{sc}$  em que  $A_{sc,d}$  é a área da secção transversal dos varões dispostos na diagonal e  $A_{sc}$  é a área da secção transversal da totalidade dos varões da armadura longitudinal dos pilares. Na Tabela 8.6 estão indicados os modelos de EF desenvolvidos numa primeira fase.

Os varões de canto da armadura longitudinal dos pilares (P1, P7) não foram dispostos em diagonal em nenhum dos modelos desenvolvidos.

A Figura 8.19(a) representa as curvas  $H-d$  determinadas pelos modelos de EF indicados na Tabela 8.6 e revela que a disposição parcial dos varões da armadura longitudinal dos pilares em diagonal na ligação viga-pilar conduz a um aumento da capacidade resistente da estrutura. No entanto, o aumento da capacidade resistente entre os modelos IJ-DR-0.50 e IJ-DR-0.75 é pouco significativo.

A Figura 8.19(b) representa o comportamento do núcleo da ligação ao corte e a Tabela 8.7 apresenta a resistência e a rigidez da ligação determinados pelos modelos de EF referidos.

Tabela 8.6 – Modelos de EF utilizados para estudar o efeito da colocação de varões da armadura longitudinal dos pilares na diagonal na ligação em ligações viga-pilar interiores.

modelo	$A_{sc,d}/A_{sc}$ [%]	varões da arm. long. dos pilares colocados na diagonal
IJ-DR-0.00 ( $\equiv$ IJ-Ref)	0	–
IJ-DR-0.25	25	P4, P6
IJ-DR-0.50	50	P3, P4, P5, P6
IJ-DR-0.75	75	P2, P3, P4, P5, P6, P8

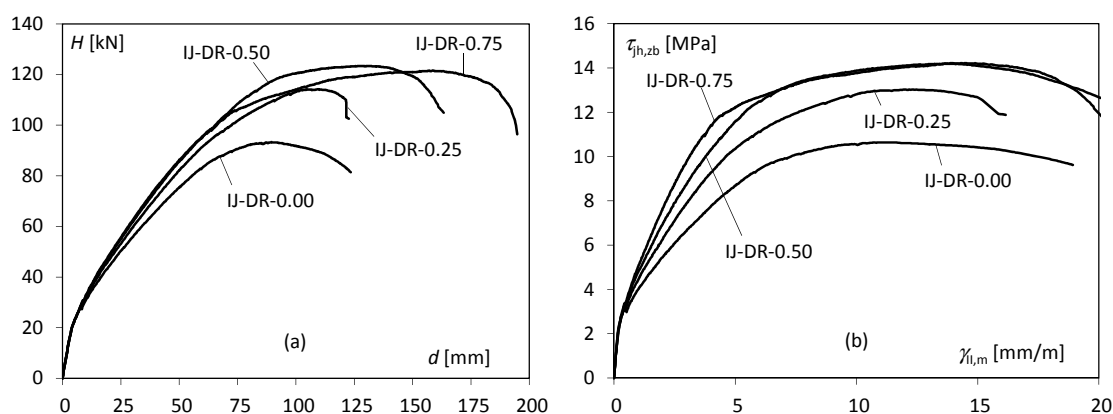
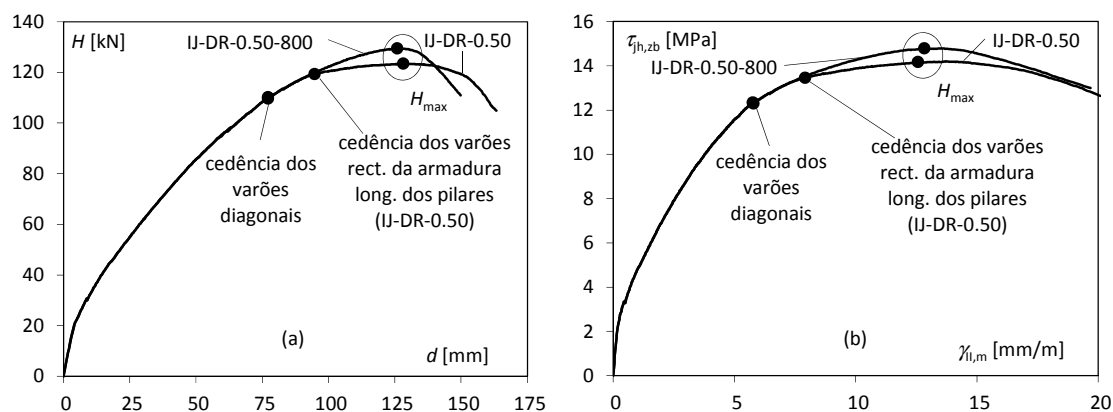


Figura 8.19 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{h,zb}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes quantidades de varões da armadura longitudinal dos pilares dispostos na diagonal da ligação.

Tabela 8.7 – Efeito da colocação de parte dos varões da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação viga-pilar interior sobre o comportamento da ligação viga-pilar (valores em MPa).

modelo	$(\tau_{jh,zb})_u$	$G_u$	$G_s$
IJ-DR-0.00	10.64	947.5	1891.0
IJ-DR-0.25	13.02	1058.5	2214.0
IJ-DR-0.50	14.19	1033.7	2495.6
IJ-DR-0.75	14.22	983.0	3036.2


 Figura 8.20 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh}-\gamma$  de modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes tensões de cedência nos varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares ( $\rho = 0.50$ ).

A Figura 8.19(b) e a Tabela 8.7 revelam que a colocação de alguns varões da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação viga-pilar conduz a um aumento da resistência da ligação – a ligação IJ-DR-0.50 apresenta uma capacidade resistente 34% superior à da ligação IJ-DR-0.00. No entanto, o aumento de  $\rho$  deixa de ser efectivo para maiores percentagens de varões dispostos na diagonal, pois o aumento da capacidade resistente da ligação IJ-DR-0.50 para a ligação IJ-DR-0.75 é insignificante. Observa-se igualmente que  $G_u$  é pouco sensível à variação de  $\rho$  e que  $G_s$  aumenta significativamente quando os varões da armadura longitudinal do pilar são dispostos na diagonal da ligação – o valor de  $G_s$  da ligação do modelo de EF IJ-DR-0.75 é 61% superior ao da ligação do modelo IJ-DR-0.00.

Os varões traccionados dispostos na diagonal e os varões da armadura longitudinal das vigas mais traccionados atingiram a cedência em todos os modelos, com excepção do IJ-DR-0.00. Além disso, nos modelos IJ-DR-0.50 e IJ-DR-0.75, os varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares também entraram em cedência. Note-se, no entanto, que os varões da armadura longitudinal dos pilares dispostos na diagonal da ligação apresentam, nas secções da periferia da ligação, tensão de tracção inferior à tensão de cedência.

Para avaliar se a diferença pouco expressiva da capacidade resistente das ligações IJ-DR-0.50 e IJ-DR-0.75 decorre da cedência das armaduras longitudinais das vigas e pilares (nos varões rectilíneos), foram desenvolvidos dois novos modelos de EF, réplicas dos primeiros, em que a tensão de cedência das armaduras longitudinais rectilíneas das vigas e pilares foi aumentado para  $f_y = 800$  MPa, denominados IJ-DR-0.50-800 e IJ-DR-0.75-800.

A Figura 8.20 apresenta o comportamento dos modelos de EF IJ-DR-0.50 e IJ-DR-0.50-800. Os varões das armaduras longitudinais das vigas e dos pilares (varões rectilíneos) do modelo IJ-DR-0.50-800 não atingiram a cedência e tanto a ligação como a estrutura apresentaram uma capacidade resistente apenas 4% superior à do modelo IJ-DR-0.50 – apesar do aumento de 33%

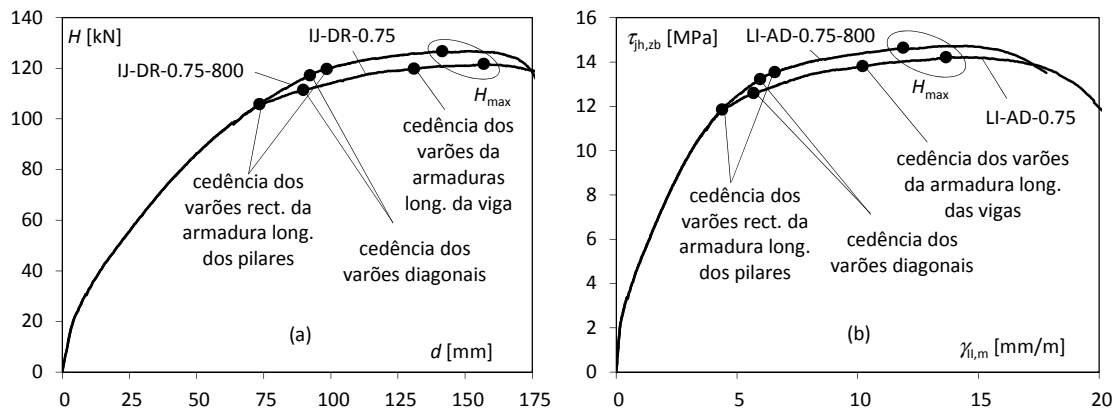


Figura 8.21 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh,zb}-\gamma$  de modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes tensões de cedência nos varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares ( $p = 0.75$ ).

da tensão de cedência dos varões rectilíneos das armaduras longitudinais das vigas e dos pilares. Por outro lado, a Figura 8.20 também mostra que o instante em que os varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares entram em cedência no modelo IJ-DR-0.50 é um ponto notável no comportamento da ligação viga-pilar, a partir do qual é observável uma redução da rigidez tangente das relações  $H-d$  e  $\tau_{jh,zb}-\gamma_{l,m}$ .

A Figura 8.21 apresenta o comportamento dos modelos de EF IJ-DR-0.75 e IJ-DR-0.75-800. À semelhança do que se verificou na Figura 8.20 para  $p=0.50$ , o aumento da tensão de cedência das armaduras longitudinais rectilíneas do pilar conduziu a um aumento de apenas 4% da capacidade resistente da ligação. Além disso, esta figura mostra novamente que a cedência dos varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares é responsável por uma redução significativa da rigidez tangente das relações  $H-d$  e  $\tau_{jh,zb}-\gamma_{l,m}$ .

O reduzido efeito que o aumento da tensão de cedência dos varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares tem sobre a capacidade resistente e sobre a rigidez tangente das ligações pode ser uma consequência do elevado valor da extensão nestas armaduras, com o consequente agravamento do escorregamento em relação ao betão envolvente: para escorregamentos elevados a aderência aço-betão reduz-se para valores residuais (Anexo) e o mecanismo de treliça deixa de apresentar capacidade de transmitir esforços de corte (Capítulo 5). Assim, para níveis de tensão longitudinal elevados nos varões rectilíneos da armadura longitudinal dos pilares, a contribuição do mecanismo de treliça para a resistência da ligação pode ser pouco relevante (Kitayama, Otani *et al.* [1991]) e o aumento da capacidade resistente e da rigidez da ligação com o aumento da tensão de cedência destas armaduras ser pouco significativa na medida em que esta capacidade resistente passa a só depender da resistência à compressão do betão na zona da escora diagonal.

Na Figura 8.22 está representada a evolução da tensão nas cintas das ligações viga-pilar dos modelos de EF IJ-DR-0.50, IJ-DR-0.50-800, IJ-DR-0.75 e IJ-DR-0.75-800, bem como os valores do deslocamento  $d$  correspondentes à cedência das armaduras e ao valor máximo da força  $H$  suportada pelos modelos.

A análise da Figura 8.22 revela que, após a cedência dos varões rectilíneos da armadura longitudinal do pilar, a tensão continua a crescer nas cintas interiores do modelo IJ-DR-50 mas ocorre uma redução/manutenção da tensão nas cintas mais exteriores deste modelo (C1, C2,

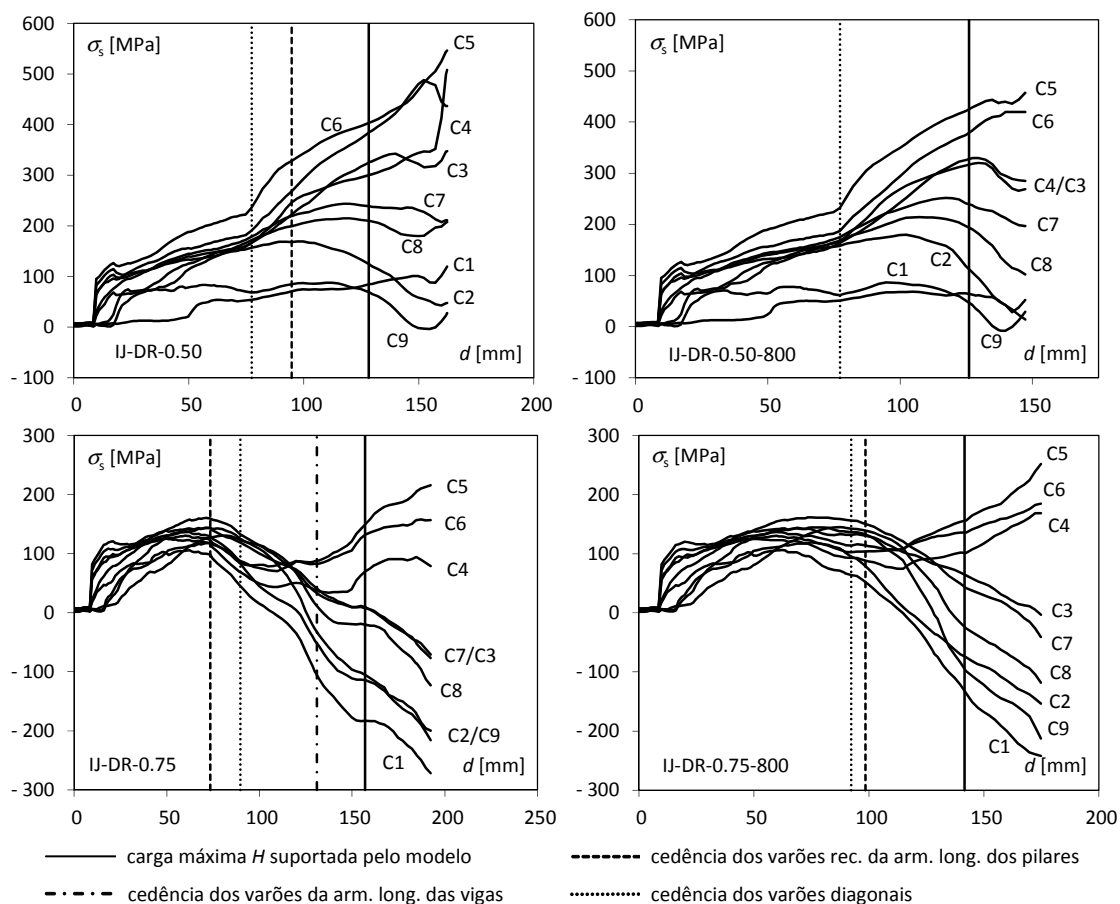


Figura 8.22 – Evolução da tensão nas cintas dos modelos IJ-DR-0.50, IJ-DR-0.50-800, IJ-DR-0.75 e IJ-DR-0.75-800.

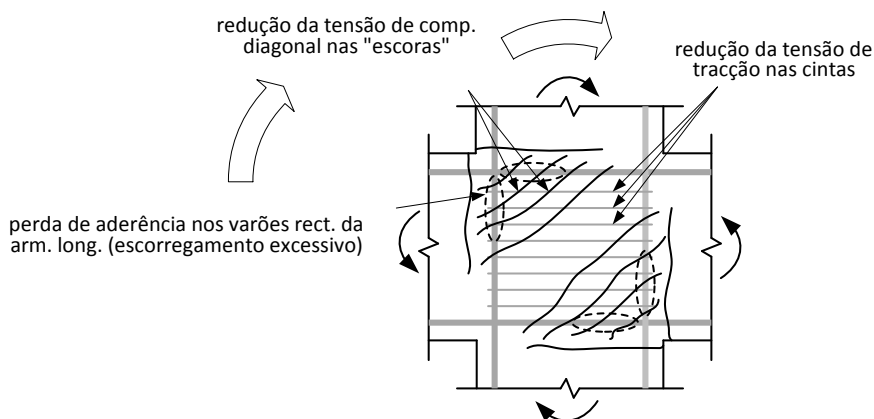


Figura 8.23 – Efeito da perda de aderência entre os varões das armaduras longitudinais rectilíneas do pilar e das vigas e o betão envolvente.

C8 e C9) e em todas as armaduras transversais da ligação no modelo IJ-DR-0.75. Além disso, posteriormente, a tensão nas cintas interiores (C4, C5 e C6) do modelo IJ-DR-0.75 volta a aumentar enquanto nas cintas exteriores a tendência de diminuição de tensão não se inverte. Como já foi referido, esta variação pode resultar da perda de aderência entre as armaduras e o betão. Na Figura 8.23 está ilustrado este fenómeno: a perda de aderência entre os varões rectilíneos das armaduras longitudinais das vigas e pilares e o betão na zona assinalada conduz à redução da tensão nas escoras de betão com origem nesta zona e, conseqüentemente, também da tensão nas cintas exteriores (em equilíbrio com a tensão nas escoras).

Nos modelos de EF IJ-DR-0.50 e IJ-DR-0.50-800 (IJ-DR-0.75 e IJ-DR-0.75-800) a tensão nas

cintas exteriores da ligação reduz-se quando a extensão nas armaduras longitudinais rectilíneas dos pilares apresenta um valor idêntico – inferior ao da cedência destes varões, que não chega a ocorrer no modelo IJ-DR-0.50-800. Estes resultados sugerem que a cedência das armaduras longitudinais das vigas e dos pilares não conduz, por si só, ao colapso da ligação nem à redução da sua rigidez. É o efeito do escorregamento excessivo das armaduras longitudinais das vigas e pilares que, ao conduzir à redução da capacidade de transmissão de carga na ligação por intermédio do mecanismo de treliça, justifica a correlação reportada experimentalmente em termos estatísticos (Kim [2007]), entre a capacidade de carga/rigidez do núcleo da ligação viga-pilar e a cedência das armaduras longitudinais das vigas e pilares.

Para determinar qual a disposição dos varões em diagonal mais eficiente em termos de capacidade resistente e rigidez da ligação, foram desenvolvidos dois modelos de EF com ligações viga-pilar interiores, por adaptação do modelo IJ-DR-0.50, em que apenas foram dispostos varões segundo a diagonal de tracção ou segundo a diagonal de compressão: (i) o modelo IJ-DR-0.50-AT, no qual os varões dispostos segundo a diagonal de compressão no modelo IJ-DR-0.50 são agora dispostos verticalmente e (ii) o modelo IJ-DR-0.50-DC, no qual os varões dispostos segundo a diagonal de tracção no modelo IJ-DR-0.50 são agora dispostos verticalmente. A diagonal de compressão e a diagonal de tracção estão esquematicamente identificadas na Figura 8.24(a). A Figura 8.24(b) apresenta o comportamento das ligações destes modelos de EF e revela que os varões dispostos segundo a diagonal de tracção são mais eficientes no que respeita a capacidade resistente e a rigidez da ligação: a disposição de varões diagonais segundo a direcção de tracção conduz a um aumento de 26% da capacidade resistente da ligação e a um aumento de 43% da rigidez  $G_s$  relativamente ao modelo IJ-DR-0.00, enquanto a disposição de varões apenas segundo a diagonal de compressão conduz a um aumento de 19% da capacidade resistente da ligação e a uma redução de 5% da rigidez  $G_s$  relativamente ao modelo IJ-DR-0.00.

Note-se ainda que não foi avaliado se, caso a ligação viga-pilar apresentasse uma capacidade resistente superior à das vigas e pilares adjacentes, a disposição de parte da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação viga-pilar conduziria ou não a uma fragilização da resistência do pilar. Esta verificação deve ser efectuada preferencialmente por via experimental e visa garantir que a maior capacidade resistente da ligação não é obtida à custa da redução da resistência dos pilares.

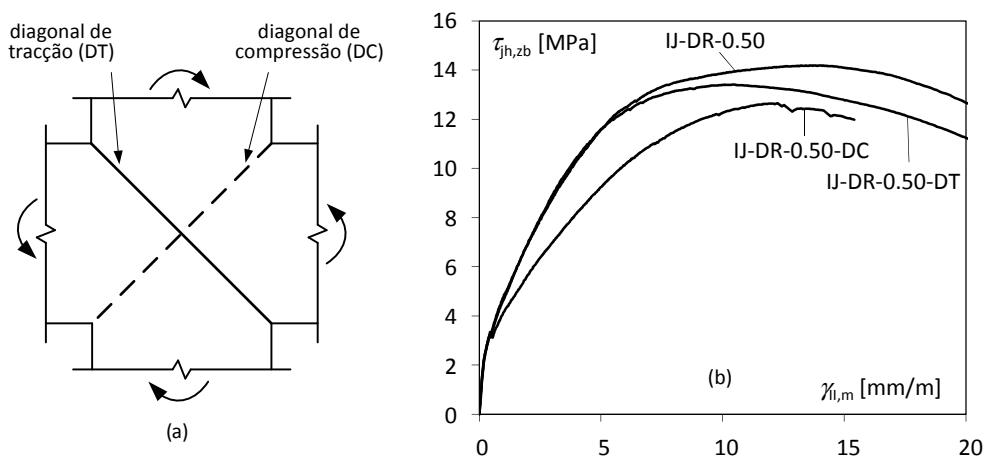


Figura 8.24 – Eficiência dos varões diagonais de tracção e compressão no comportamento de ligações viga-pilar interiores: (a) identificação das diagonais, (b) comportamento da ligação viga-pilar.

### 8.4.5. Efeito da resistência à compressão do betão

Para avaliar o efeito da resistência à compressão do betão no comportamento de ligações viga-pilar interiores, foram desenvolvidos três modelos de EF utilizando o modelo IJ-Ref como referência, os quais apenas diferem deste, e entre si, na tensão de rotura à compressão do betão e nas propriedades correlacionáveis da respectiva relação constitutiva.

Na análise que se segue os modelos estão identificados pela sequência de símbolos IJ-CS- $f'_c$ , em que IJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação interior), CS a variável em estudo, ou seja, a tensão de rotura do betão à compressão uniaxial referida a provetes cilíndricos de 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura, e  $f'_c$  é o valor dessa tensão. Na Tabela 8.8 estão indicados os modelos de EF desenvolvidos bem como a tensão de rotura do betão à compressão uniaxial utilizado em cada um. O modelo IJ-CS-40 corresponde ao IJ-Ref.

A Figura 8.25(a) apresenta a relação  $H-d$  para os modelos indicados na Tabela 8.8 e revela que a resistência à compressão do betão tem um efeito significativo no comportamento dos modelos. Mais concretamente, verifica-se que um acréscimo da resistência do betão à compressão conduz a um acréscimo significativo da capacidade resistente do modelo.

A Figura 8.25(b) apresenta o comportamento das ligações viga-pilar dos modelos de EF analisados e a Tabela 8.9 apresenta os valores dos parâmetros que permitem quantificar a resistência e a rigidez destas ligações viga-pilar.

No modelo IJ-CS-50 os varões mais traccionados da armadura longitudinal das vigas plastificaram. Para avaliar o efeito da plastificação desta armadura foi desenvolvido um novo modelo, idêntico ao IJ-CS-50, em que a tensão de cedência da armadura longitudinal das vigas é 800 MPa (modelo IJ-CS-50-800). A Figura 8.25 mostra que o efeito da plastificação da armadura longitudinal das vigas é pouco relevante para os aspectos em análise.

Tabela 8.8 – Modelos utilizados na análise do efeito da resistência à compressão do betão em ligações viga-pilar interiores.

modelo	$f'_c$ [MPa]
IJ-CS-20	20
IJ-CS-30	30
IJ-CS-40 ( $\equiv$ IJ-Ref)	40
IJ-CS-50	50

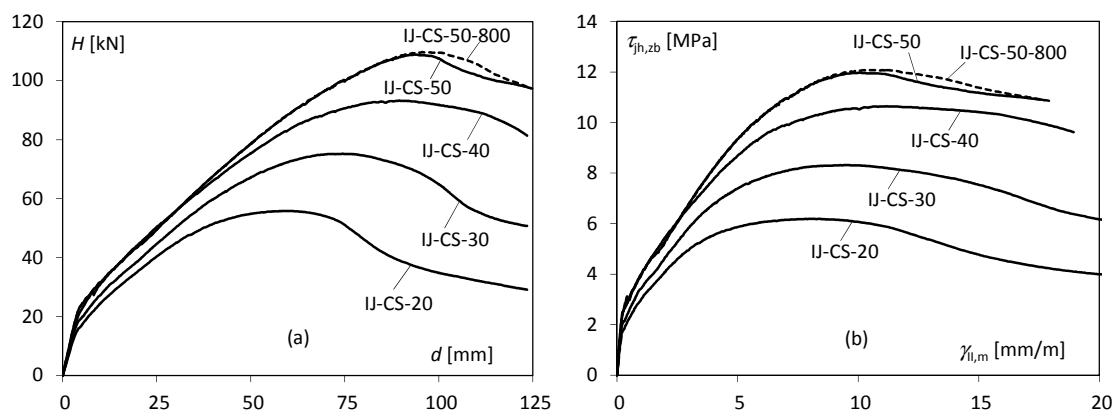


Figura 8.25 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh,zb}-\gamma_{lm}$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes valores da tensão de rotura do betão à compressão.

Tabela 8.9 – Efeito da resistência à compressão do betão em ligações viga-pilar interiores (valores em MPa).

modelo	ATENA 3D			Roeser [2002]			LaFave e Kim [2011]		
	$(\tau_{jh,zb})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$
IJ-CS-20	6.19	780.0	1815.0	5.00	1702.4	1754.5	8.77	689.6	4246.5
IJ-CS-30	8.31	871.5	1853.2	7.50	1921.6	2084.3	9.91	740.8	2864.7
IJ-CS-40	10.64	947.5	1891.0	10.00	2065.3	2274.1	10.80	778.8	2332.2
IJ-CS-50	11.97	1193.9	1915.5	12.50	2212.4	2584.0	11.55	810.0	2283.4

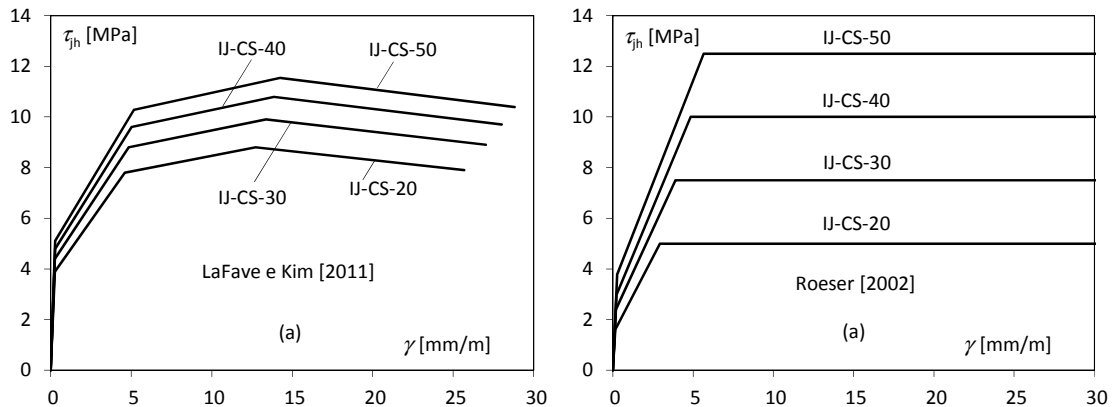


Figura 8.26 – Relação  $\tau_{jh}-\gamma$  determinadas pelos modelos de (a) LaFave e Kim [2011] e (b) Roeser [2002] para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.8.

A Tabela 8.9 revela que, de acordo com os modelos de EF, o efeito da resistência à compressão do betão é muito relevante para a capacidade resistente da ligação e para  $G_u$ , não sendo tão significativo para  $G_s$ . O aumento da resistência à compressão do betão de 20 para 50 MPa conduziu a um aumento da capacidade resistente da ligação de 93% e a um aumento de  $G_u$  de 53%. Além disso, para baixos valores da resistência à compressão do betão, o aumento da capacidade resistente do betão é mais efectivo para a resistência da ligação que para  $G_u$ : o aumento da resistência à compressão do betão de 20 para 30 MPa aumenta a resistência da ligação em 34% e  $G_u$  em 12%, enquanto que o aumento da resistência à compressão de 40 para 50 MPa aumenta a resistência da ligação em 13% e  $G_u$  em 26%.

A Figura 8.26 representa o comportamento espectável para a ligação viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.8 de acordo com os modelos de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011]. A Tabela 8.9 também apresenta os valores dos parâmetros que permitem quantificar a resistência e a rigidez destas ligações viga-pilar segundo este modelos simplificados.

A comparação das Figuras 8.25(b) e 8.26 e a Tabela 8.9 revelam que o modelo de Roeser [2002] subestima (sobrestima) ligeiramente a capacidade resistente da ligação para valores baixos (elevados) da resistência à compressão do betão. Para o modelo de LaFave e Kim [2011] a tendência observada é oposta. Em termos de rigidez, há a assinalar que o modelo de Roeser [2002], de uma forma geral, sobrestima a rigidez da ligação e que o modelo de LaFave e Kim [2011] sobrestima significativamente  $G_s$  para valores reduzidos da resistência à compressão do betão. Estas relações estão ilustradas na Figura 8.27 para os modelos IJ-CS-20 e IJ-CS-50.

#### 8.4.6. Efeito do esforço axial nos pilares

Para avaliar o efeito do valor do esforço axial nos pilares sobre o comportamento das ligações viga-pilar interiores, foram desenvolvidos e analisados quatro modelos de EF com o ATENA 3D.

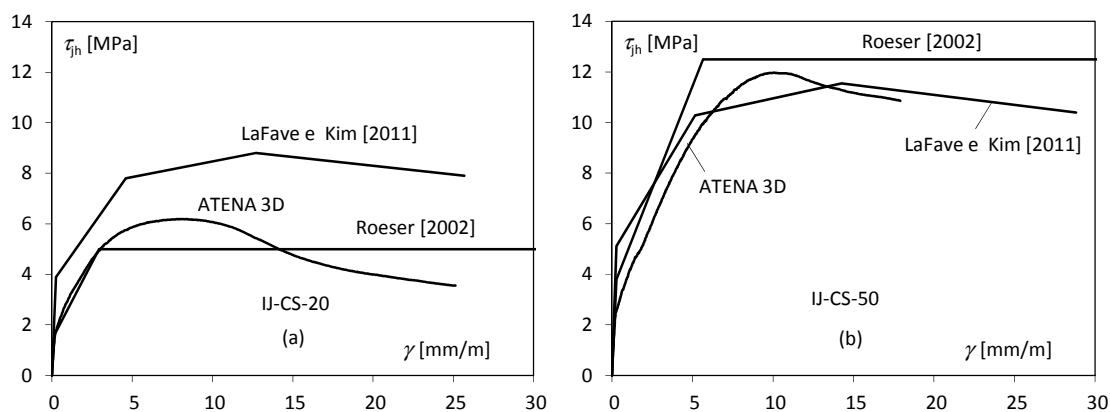


Figura 8.27 – Comparação das relações  $\tau_{jh}$ - $\gamma$  determinadas pelos modelos de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011] com as determinadas pelos modelos de EF (a) IJ-CS-20 e (b) IJ-CS-50.

Tabela 8.10 – Valores do esforço axial nos pilares, em ligações viga-pilar, nos modelos analisados.

modelo	esforço axial	
	$N$ [kN]	$n$
IJ-N-0.0	0	0.0
IJ-N-0.2	1200	0.2
IJ-N-0.4	2400	0.4
IJ-N-0.6	3600	0.6

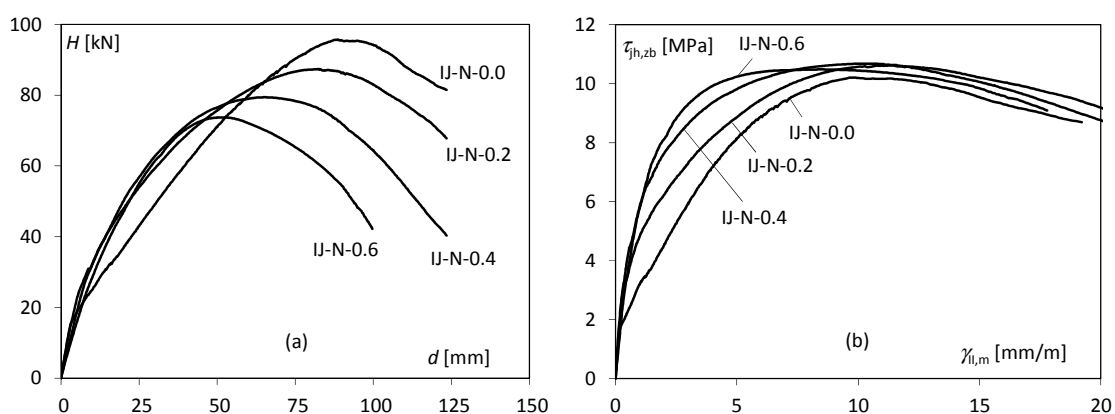


Figura 8.28 – Curvas (a)  $H$ - $d$  e (b)  $\tau_{jh,zb}$ - $\gamma$  para os modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes níveis de esforço axial nos pilares.

Estes modelos resultam da adaptação do modelo IJ-Ref, diferindo deste, e entre si, apenas no valor da carga vertical aplicada no pilar superior, ou seja, no esforço axial nos pilares.

Na análise que se segue, os modelos serão identificados pela sequência de símbolos IJ-N- $n$  em que IJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação interior), N identifica a variável em estudo, ou seja, o esforço axial nos pilares, e  $n$  é o valor adimensionalizado do esforço axial no pilar superior. Na Tabela 8.10 estão identificados os modelos de EF desenvolvidos bem como o valor do esforço axial reduzido no pilar superior de cada um dos modelos.

A Figura 8.28(a) apresenta a curva  $H$ - $d$  determinada pelos modelos de EF referidos. As armaduras longitudinais das vigas e dos pilares permaneceram em regime elástico em todos os modelos ao longo de toda a história de carga. Também as cintas da ligação permaneceram em regime elástico em todos os modelos de EF referidos com exceção do modelo IJ-N-0.0. No



Tabela 8.11 – Efeito do esforço axial nos pilares em ligações viga-pilar interiores (valores em MPa).

modelo	$(\tau_{h,zb})_u$	$G_u$	$G_s$
IJ-N-0.0	10.21	1040.7	1709.4
IJ-N-0.2	10.62	937.4	2142.4
IJ-N-0.4	10.68	1061.3	3398.2
IJ-N-0.6	10.48	1240.1	4352.0

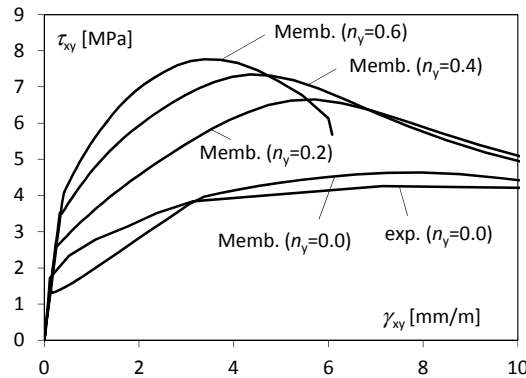


Figura 8.29 – Comportamento experimental e modelação numérica do painel PV20 (Vecchio e Collins [1986]).

entanto, dada a pouca influência da quantidade de armadura transversal da ligação sobre o comportamento deste modelo para  $n = 0.1$  (§8.4.3), não é expectável que este facto seja responsável por diferenças de comportamento significativas.

Dado que os modelos referidos estão submetidos a diferentes níveis de esforço axial no pilar superior, não deve ser extraída nenhuma conclusão relativa ao comportamento da ligação viga-pilar a partir das curvas  $H-d$  (Figura 8.28(a)). Para os modelos analisados, a Figura 8.28(b) apresenta as curvas de comportamento e a Tabela 8.11 indica a resistência e a rigidez do núcleo das ligações viga-pilar determinados pelo ATENA 3D.

A Figura 8.28(b) e a Tabela 8.11 revelam que esforço axial nos pilares tem um efeito pouco pronunciado na capacidade resistente da ligação para níveis de esforço axial  $n \leq 0.5$ , tal como já tinha sido observado por Hegger, Sherif *et al.* [2004]. Verifica-se também que o efeito do nível de esforço axial no pilar sobre  $G_u$  é pouco relevante, mas sobre  $G_s$  é significativo: o aumento do esforço axial para  $n = 0.6$  no pilar superior conduz a um aumento de 155% de  $G_s$  relativamente ao caso  $n = 0$ .

A Figura 8.29 apresenta o comportamento do painel PV20 ensaiado por Vecchio e Collins [1986] e submetido a corte puro, bem como a modelação do seu comportamento recorrendo à MCFT (programa Membrane-2000 [2000]). Apresenta-se ainda o resultado de modelações do mesmo painel com o mesmo programa, para esforço axial de compressão crescente numa das direcções (direcção  $y$ ).

A analogia entre os comportamentos do painel e da ligação viga-pilar levaria à conclusão que o maior esforço axial no pilar (compressão) se iria traduzir não só por um comportamento mais rígido da ligação mas também por uma maior resistência. Como mostra a Figura 8.28(b), apesar de se verificar numa primeira fase que maiores níveis de esforço axial no pilar conduzem a um comportamento mais rígido da ligação, a capacidade resistente do núcleo da ligação e a distorção correspondente não são significativamente afectadas pelo esforço axial

do pilar. Esta divergência de comportamento sugere que, tal como já foi reportado para ligações viga-pilar submetidas a acções cíclicas (Kitayama, Otani *et al.* [1991]), para acções quase-estáticas o comportamento da ligação, numa fase inicial apresenta as mesmas tendências que o painel, mas que, para cargas mais elevadas, as tendências são distintas.

#### 8.4.7. Efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico

Para avaliar o efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico em análise sobre o comportamento de ligações viga-pilar interiores, foram desenvolvidos e analisados quatro modelos de EF recorrendo ao ATENA 3D. Estes modelos estão indicados na Tabela 8.12 e representados na Figura 8.30, tendo resultado da adaptação do modelo IJ-Ref; diferem deste, e entre si, na configuração da ligação na direcção ortogonal ao pórtico.

Na análise que se segue, as vigas com eixos paralelos ao plano do pórtico serão denominadas *vigas longitudinais*, as vigas com eixos perpendiculares ao plano do pórtico serão denominadas *vigas transversais* e estas últimas, juntamente com as lajes, serão genericamente designados *elementos transversais*.

Foram utilizadas vigas transversais com um metro de comprimento ( $50\phi$ , em que  $\phi$  é o diâmetro dos varões da armadura longitudinal) para cada lado das vigas longitudinais, com percentagem geométrica de armadura longitudinal idêntica à das vigas longitudinais e com estribos do mesmo diâmetro, com o mesmo número de ramos e com a mesma distância entre si que nas vigas longitudinais.

A laje também foi modelada com um comprimento de um metro para cada lado das vigas longitudinais, com 200 mm de espessura e com uma malha constituída por varões com 16 mm de diâmetro afastados 200 mm entre eixos em ambas as faces.

Tabela 8.12 – Modelos utilizados na análise do efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico em ligações viga-pilar interiores.

modelo	elemento transversal
IJ-Ref	sem elementos transversais
IJ-CTD-2TB-F	vigas transversais com secção transversal $h_c \times h_b$
IJ-CTD-2TB-50C	vigas transversais com secção transversal $0.5 h_c \times h_b$ no centro da ligação viga-pilar
IJ-CTD-2TB-50L	vigas transversais com secção transversal $0.5 h_c \times h_b$ excêntrica na ligação viga-pilar
IJ-CTD-S	laje com 200 mm de espessura

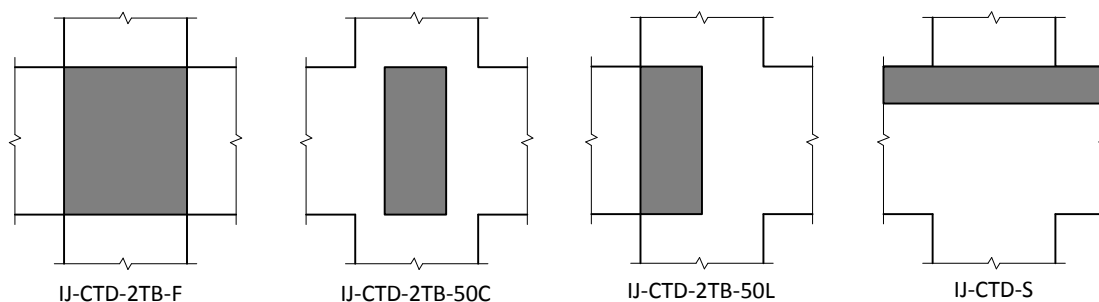


Figura 8.30 – Elementos transversais na ligação viga-pilar interior.

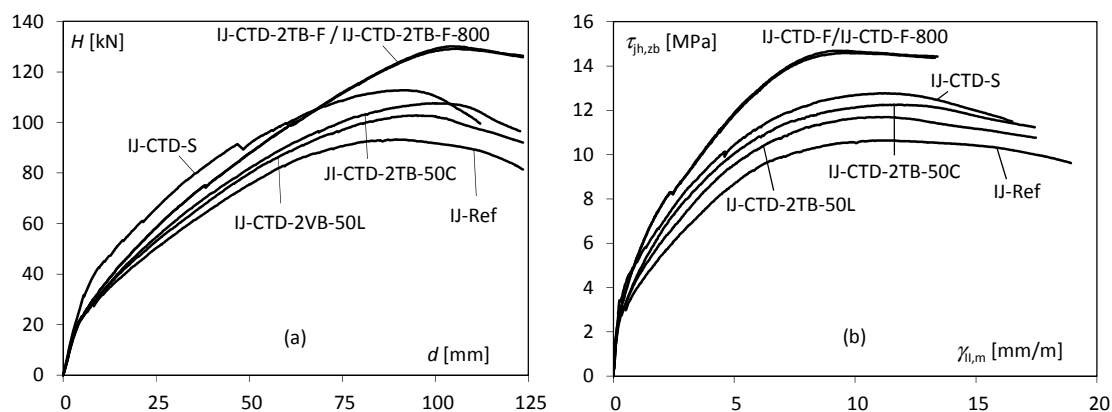

 Figura 8.31 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{h,zb}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar interiores com diferentes configurações na direcção ortogonal ao plano do pórtico.

Tabela 8.13 – Efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico sobre o comportamento da ligação viga-pilar interior (valores em MPa).

modelo	ATENA 3D			Roeser [2002]			LaFave e Kim [2011]		
	$(\tau_{h,zb})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_h)_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_h)_u$	$G_u$	$G_s$
IJ-Ref	10.64	947.5	1891.0	10.0	2065.3	2274.1	10.80	778.8	2332.2
IJ-CTD-2TB-F	14.59	1525.6	2527.5	–	–	–	12.80	880.8	2230.7
IJ-CTD-2TB-F-800	14.68	1529.7	2544.9	–	–	–	12.80	880.8	2235.0
IJ-CTD-2TB-50C	12.25	1057.4	2242.1	–	–	–	12.80	880.8	2731.8
IJ-CTD-2TB-50L	11.69	1037.3	2101.3	–	–	–	12.80	880.8	2918.6
IJ-CTD-S	12.77	1158.6	2366.9	–	–	–	–	–	–

Não foi aplicado carregamento nem na laje nem nas vigas transversais.

A Figura 8.31(a) apresenta o comportamento determinado pelos modelos de EF indicados na Tabela 8.12 e a Figura 8.31(b) apresenta o comportamento das respectivas ligações viga-pilar.

O modelo IJ-CTD-2TB-F atingiu a carga máxima após alguns varões da armadura longitudinal das vigas longitudinais entrarem em cedência. Para identificar qual o elemento estrutural responsável pelo limite de capacidade de carga do modelo, se as vigas ou a ligação viga-pilar, foi desenvolvido um novo modelo (IJ-CTD-2TB-F-800), em que foi atribuída às armaduras longitudinais das vigas e pilares uma tensão de cedência  $f_y = 800\text{MPa}$ .

A comparação das curvas de comportamento dos modelos IJ-CTD-2TB-F e IJ-CTD-2TB-F-800 representadas na Figura 8.31 e dos correspondentes parâmetros caracterizadores do comportamento da ligação indicados na Tabela 8.13, revelam que o elemento condicionante para capacidade de carga do modelo IJ-CTD-2TB-F foi a ligação viga-pilar, na medida em que, apesar das armaduras longitudinais das vigas e dos pilares no modelo IJ-CTD-2TB-F-800 não plastificarem, a capacidade de carga deste modelo é idêntica à do IJ-CTD-2TB-F.

Nos modelos IJ-CTD-S, IJ-CTD-2TB-50C e IJ-CTD-2TB-50L, atribuiu-se uma tensão de cedência  $f_y = 800\text{MPa}$  a todas as armaduras longitudinais das vigas e pilares para evitar ambiguidades na identificação do elemento responsável por limitar a capacidade de carga dos modelos. Desta forma, nestes modelos nenhuma armadura atingiu a tensão de cedência.

A Figura 8.31(b) e a Tabela 8.13 revelam que a existência de elementos transversais conduz a um aumento da capacidade resistente e da rigidez das ligações viga-pilar. A existência de vigas

transversais com secção transversal igual à ligação (IJ-CTD-2TB-F) pode conduziu a um aumento, relativamente ao modelo sem elementos transversais (EJ-Ref), de 38% da capacidade resistente da ligação viga-pilar, de 61% em  $G_u$  e de 35% em  $G_s$ . Já a existência de uma laje ou de vigas transversais cuja secção transversal é de apenas metade da largura da ligação, apesar de conduzirem a aumentos relevantes da capacidade resistente (20 e 15/10% para os modelos IJ-CTD-S e IJ-CTD-2TB-50C/50L, respectivamente) e da rigidez (22(25) e 12(19)/9(11)% para os modelos IJ-CTD-S e IJ-CTD-2TB-50C/50L, respectivamente, para  $G_u(G_s)$ ) têm um efeito menos pronunciado.

Além dos parâmetros caracterizadores do comportamento do núcleo da ligação viga-pilar determinados pelos modelos de EF, também são apresentados na Tabela 8.13 os correspondentes parâmetros determinados pelos modelos de Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011]. Como o modelo de Roeser [2002] não contabiliza o efeito de elementos transversais, na Tabela 8.13 só se apresentam os resultados determinados por este modelo para a ligação do modelo de IJ-Ref. LaFave e Kim [2011] não estudaram o efeito isolado da laje nem o efeito da área da secção transversal da viga transversal sobre o comportamento das ligações viga-pilar. Por esse motivo, na Tabela 8.13, não são apresentados resultados determinados por este modelo relativos à ligação viga-pilar do modelo de EF IJ-CTD-S. Note-se, no entanto, que LaFave e Kim [2011] referem que o efeito da laje sobre o comportamento da ligação nos casos em que existem uma ou duas vigas transversais é mínimo (Kim e LaFave [2009]).

Na Figura 8.32 a relação  $\tau_{jh}-\gamma$  da ligação viga-pilar para os modelos de EF analisados é confrontada com a determinada pelo modelo de LaFave e Kim [2011].

A Tabela 8.13 e a Figura 8.32 revelam que o modelo de LaFave e Kim [2011] subestima a capacidade resistente da ligação, caso a secção transversal das vigas transversais seja igual à dimensão da ligação (IJ-CTD-2TB-F) e sobrestima ligeiramente a capacidade resistente das ligações caso a secção transversal das vigas seja 50% da dimensão da ligação (IJ-CTD-2TB-50L/50C). Além disso, o modelo de LaFave e Kim [2011] subestima significativamente  $G_u$  sempre que existem elementos transversais. Já a rigidez  $G_s$  é ligeiramente subestimada pelo modelo de LaFave e Kim [2011] no modelo IJ-CTD-2TB-F e sobrestimada nos modelos IJ-CTD-2TB-50C/50L.

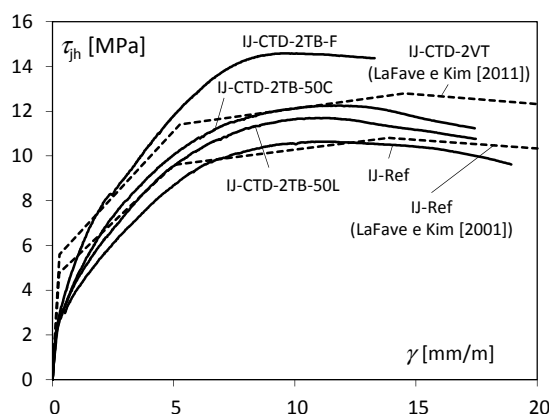


Figura 8.32 – Relação  $\tau_{jh}-\gamma$  para os modelos de EF analisados confrontada com a determinada pelo modelo de LaFave e Kim [2011] para as ligações viga-pilar desses modelos.

## 8.5. Ligação viga-pilar de extremidade

### 8.5.1. Análise do modelo EJ-Ref

No modelo de EF EJ-Ref, utilizou-se uma percentagem mecânica de armadura transversal na ligação idêntica à considerada no modelo representativo de ligações viga-pilar interiores (IJ-Ref). Desta forma, foi utilizada uma armadura transversal constituída por 4 cintas com varões de 8 mm de diâmetro, correspondente a um afastamento vertical de 6.5 cm entre eixos das cintas,  $A_{sh} = 4.02 \text{ cm}^2$  e  $\omega_j = 9.91\%$ . À semelhança do espécime BCJ4 ensaiado por Ortiz [1993], para a dobragem dos varões da armadura longitudinal da viga foi usado um mandril com raio  $r = 65 \text{ mm}$ , o que corresponde a  $4.1\phi$ . Foi considerado um betão com tensão de rotura à compressão de 30 MPa (provetes cilíndricos de 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura).

Foi considerada uma carga vertical correspondente a  $n = 0.1$  no pilar superior. A Figura 8.33 identifica as secções dos varões onde se monitorizou a tensão ao longo da história de carga.

Foi desenvolvido um outro modelo de EF, o modelo EJ-RIG, em tudo igual ao modelo IJ-Ref, excepto que na ligação viga-pilar, em substituição do betão, se utilizou um material homogéneo isotrópico elástico linear com módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ .

A Figura 8.34(a) representa a relação  $H-d$  determinada pelos modelos de EF EJ-Ref e EJ-RIG. A Figura 8.34(b) apresenta a evolução da tensão nas cintas da ligação do modelo de EF EJ-Ref e a Figura 8.35 apresenta a evolução da tensão nos varões da armadura longitudinal das vigas e dos pilares na periferia da ligação, também do modelo EJ-Ref. No modelo EJ-Ref a única armadura que atingiu a tensão de cedência foi a cinta C1 no troço descendente da relação  $H-d$ .

A capacidade de carga do modelo EJ-RIG, à semelhança do modelo IJ-RIG, é limitada pela resistência à flexão da viga (modo de rotura dúctil com cedência da armadura longitudinal) enquanto que o ponto limite apresentado pela curva  $H-d$  determinada pelo modelo IJ-Ref resulta do esgotamento da capacidade resistente da ligação viga-pilar. A identificação do modo de colapso do modelo EJ-Ref fez-se novamente por exclusão de partes: como o comprova a evolução do valor da tensão nos varões da armadura longitudinal das vigas e pilares ilustrada na Figura 8.35, não ocorre a cedência destas armaduras no modelo EJ-Ref.

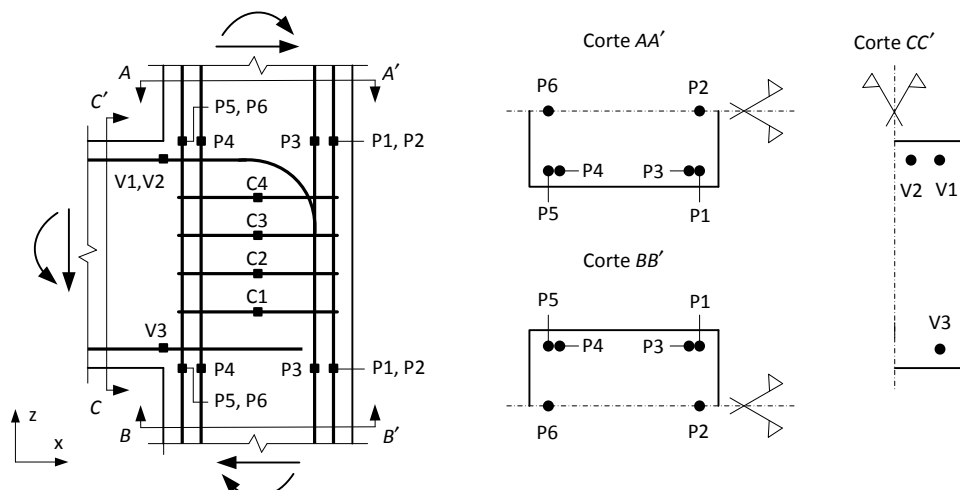


Figura 8.33 – Identificação dos pontos de monitorização de tensões nas armaduras do modelo EJ-Ref.

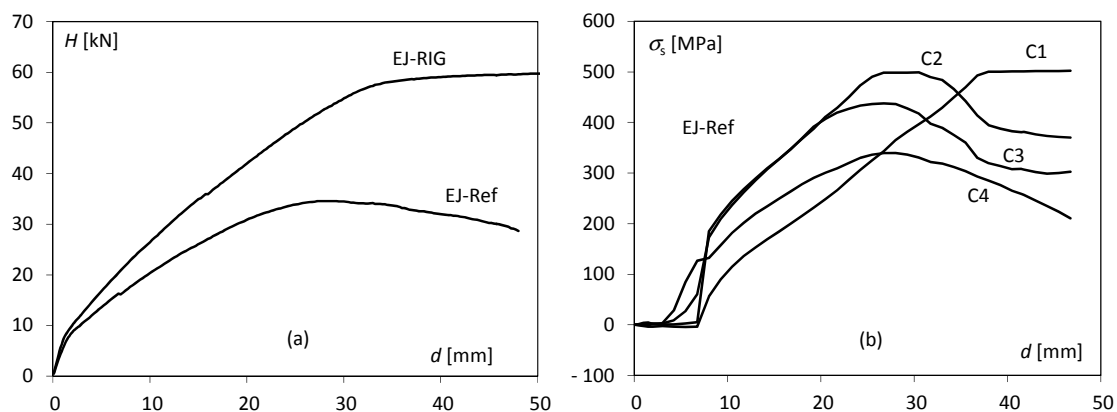


Figura 8.34 – Resultados dos modelos de EF: (a) relação  $H-d$  para os modelos EJ-Ref e EJ-RIG e (b) tensão nas cintas na ligação do modelo EJ-Ref.

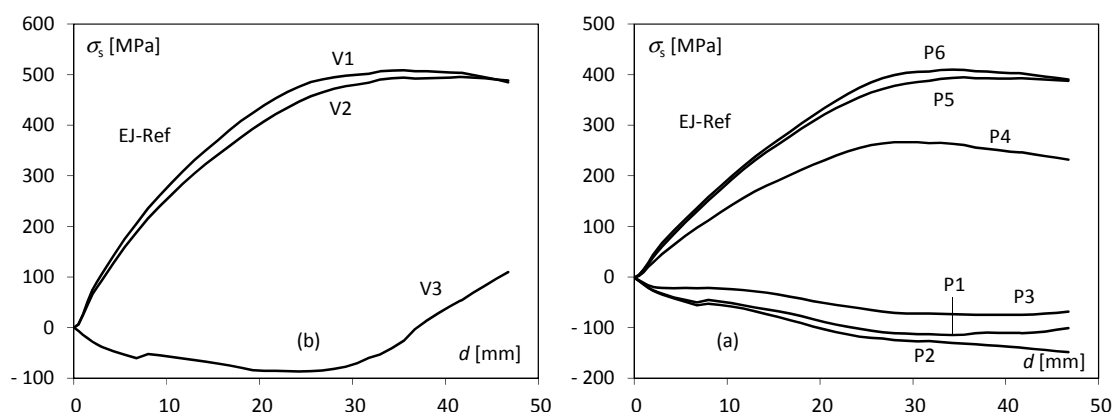


Figura 8.35 – Tensão nas armaduras longitudinais do modelo de EF EJ-Ref: (a) secção  $CC'$  e (b) secção  $AA'$ .

A Figura 8.34(a) revela que, à semelhança do que se verificou em ligações interiores, a resistência da ligação pode condicionar significativamente a capacidade de carga do modelo e que a flexibilidade da ligação é responsável por uma parcela significativa da deformação lateral da estrutura. Mais concretamente, o modelo EJ-RIG apresenta, relativamente ao modelo EJ-Ref, uma capacidade de carga 75% superior, uma rigidez  $G_u$  dupla e uma rigidez  $G_s$  54% superior (para uma carga correspondente a 3/4 da carga máxima suportada pelo modelo EJ-Ref).

A Figura 8.34(b) revela ainda que a armadura transversal na ligação está fortemente solicitada.

A Figura 8.36(a) representa o valor da distorção da ligação no modelo de EF EJ-Ref determinado pelos métodos apresentados no §8.2. Contrariamente ao que se constatou para o modelo IJ-Ref, apesar de no modelo EJ-Ref a tendência de evolução da distorção ser a mesma para todos os métodos, verifica-se algum desfasamento entre os resultados. A justificação para este desfasamento reside na expansão volumétrica local da ligação viga-pilar junto à extremidade da diagonal de compressão, habitualmente acompanhada pelo destacamento do betão. Este fenómeno está documentado em diversos estudos experimentais (*e.g.*, Scott [1996] e Ortiz [1993]) e está ilustrado na Figura 8.37.

Os efeitos locais representados na Figura 8.37 foram eliminados, tendo-se considerado como representativas da distorção da ligação apenas as abordagens que não fazem uso do deslocamento horizontal do ponto de amostragem na zona com expansão lateral (Figura 8.4), ou seja, assumiu-se simplificadamente  $\gamma_m = \gamma_{II,m} = (\gamma_{II,SE} + \gamma_{II,IE})/2$ .

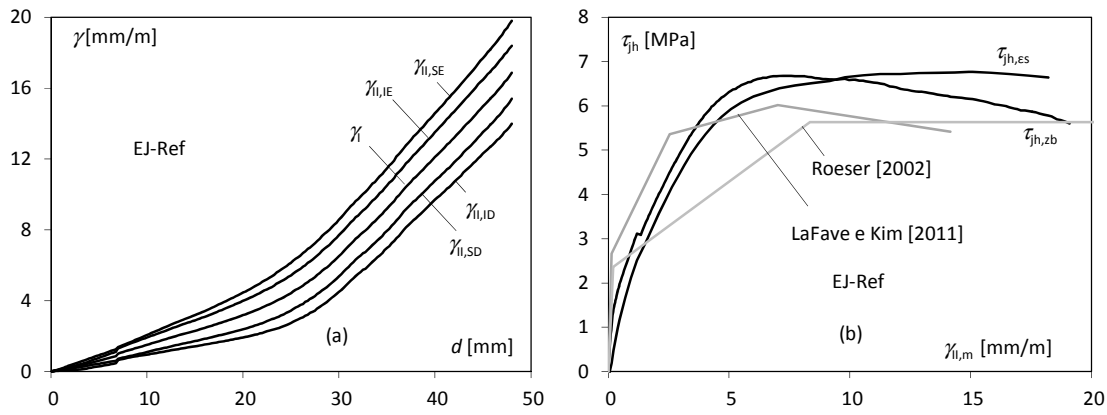


Figura 8.36 – Modelo de EF EJ-Ref: (a) distorção do núcleo da ligação e (b) tensão tangencial no plano médio do núcleo da ligação.

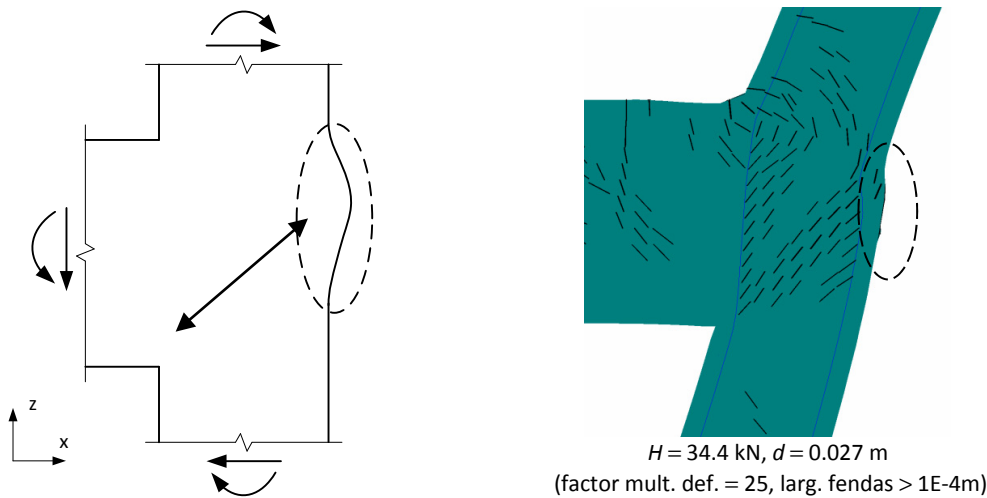


Figura 8.37 – Expansão lateral localizada da ligação viga-pilar: (a) representação esquemática e (b) padrão de fendilhação da ligação no modelo de EF EJ-Ref.

A Figura 8.36(b) apresenta o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade do modelo EJ-Ref determinado pelo ATENA 3D em termos das relações  $\tau_{jh,es}$  e  $\tau_{jh,zb}$  e o comportamento da mesma ligação determinado pelos modelos de LaFave e Kim [2011] e Roeser [2002]. Constata-se novamente um desfaseamento entre as relações  $\tau_{jh,zb} - \gamma_{II,m}$  e  $\tau_{jh,es} - \gamma_{II,m}$ . Pelos mesmos motivos apresentados no §8.4.2, a relação  $\tau_{jh,zb} - \gamma_{II,m}$  foi adoptada neste estudo como representativa do comportamento da ligação.

Comparando a relação  $\tau_{jh,zb} - \gamma_{II,m}$  determinada pelo modelo de EF para o espécime EJ-Ref com o comportamento do núcleo da ligação viga-pilar determinado pelos modelos de LaFave e Kim [2011] e Roeser [2002], constata-se que estes subestimam a capacidade resistente da ligação. Além disso, relativamente ao comportamento determinado com o ATENA 3D, o modelo de Roeser [2002] determina um comportamento mais flexível e o modelo de LaFave e Kim [2011] determina um comportamento ligeiramente mais rígido.

### 8.5.2. Efeito da quantidade de armadura transversal na ligação

Para avaliar o efeito da armadura transversal (cintas) sobre o comportamento de ligações viga-pilar de extremidade foram desenvolvidos e analisados três modelos de EF recorrendo ao ATENA 3D. Estes modelos resultaram da adaptação do EJ-Ref, apenas diferindo deste, e entre si, na armadura transversal disposta na ligação viga-pilar.

Na análise que se segue os modelos são identificadas pela sequência de símbolos EJ-JTR- $\omega_j$  em que EJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação de extremidade), JTR identifica a variável em estudo, ou seja, a percentagem mecânica de armadura transversal, tal como foi definida no Capítulo 6, e  $\omega_j$  é o valor deste parâmetro. A Tabela 8.14 identifica os modelos de EF desenvolvidos e caracteriza as armaduras transversais dispostas na ligação viga-pilar em cada um. O modelo EJ-JTR-9.9 corresponde ao EJ-Ref.

A Figura 8.38(a) representa a relação  $H-d$  determinada pelos modelos de EF indicados na Tabela 8.14 e a Figura 8.38(b) apresenta o comportamento dos núcleos das correspondentes ligações viga-pilar.

Na Tabela 8.15, os valores da resistência e rigidezes  $G_u$  e  $G_s$  dos núcleos das ligações viga-pilar para os modelos EF analisados são confrontados com os determinados para as respectivas ligações pelos modelos de comportamento de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011].

A Figura 8.38 e Tabela 8.15 revelam que o efeito da armadura transversal no comportamento das ligações viga-pilar de extremidade é mais significativo que em ligações viga-pilar interiores.

Tabela 8.14 – Modelos utilizados na análise do efeito da percentagem mecânica de armadura transversal em ligações viga-pilar de extremidade.

modelo	armadura transversal na ligação – cintas		
	número	ramos/cinta	$\phi$ [mm]
EJ-JTR-0.0	0	–	–
EJ-JTR-9.9 ( $\equiv$ EJ-Ref)	4	2	8
EJ-JTR-19.8	8	2	8
EJ-JTR-31.0	8	2	10

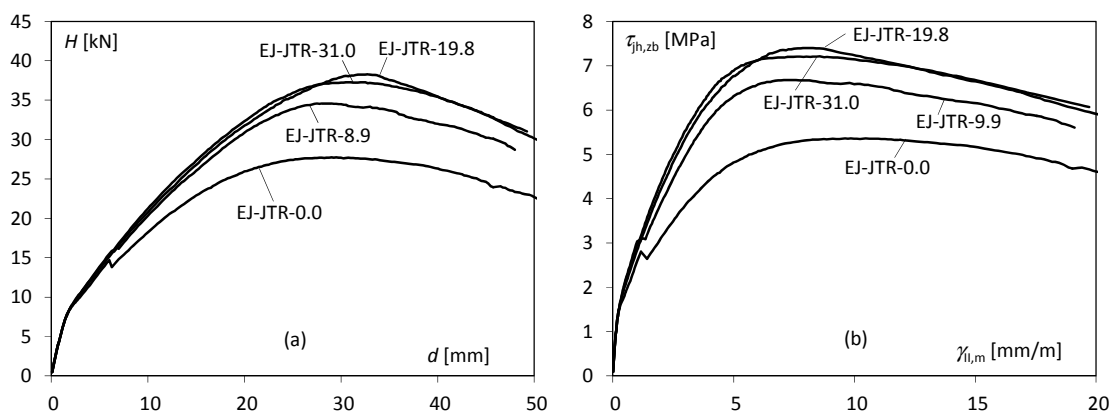


Figura 8.38 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidades com diferentes percentagens de armadura transversal.

Tabela 8.15 – Efeito da armadura transversal em ligações viga-pilar de extremidade sobre o comportamento da própria ligação (valores em MPa).

modelo	ATENA 3D			Roeser [2002]			LaFave e Kim [2011]		
	$(\tau_{jh,zb})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$
EJ-JTR-0.0	5.36	544.2	1222.2	3.31	396.7	–	4.24	298.0	402.5
EJ-JTR-9.9	6.68	896.9	1643.1	5.63	674.2	737.0	6.02	859.2	2250.5
EJ-JTR-19.8	7.40	907.9	1732.7	7.50	973.1	1142.0	6.68	1066.4	2799.4
EJ-JTR-31.0	7.21	841.7	1878.4	7.50	1409.5	1670.9	7.15	1227.3	3567.9



Verifica-se que a ligação viga-pilar de extremidade pode ver a sua capacidade resistente aumentada em 38% e as suas rigidezes  $G_u$  e  $G_s$  em 67% e 54%, respectivamente, por efeito das armaduras transversais. Recorde-se que no §8.4.2 se concluiu que, para taxas mecânicas de armadura transversal idênticas, a ligação viga-pilar interior apresentava um aumento de capacidade resistente e de rigidez significativamente inferior (11%, 19% e 17% para a resistência e para as rigidezes  $G_u$  e  $G_s$ , respectivamente). A justificação para esta diferença de comportamento reside no apoio horizontal da escora de compressão diagonal junto à periferia da ligação: no caso de ligações viga-pilar interiores a componente horizontal desta escora pode ser facilmente equilibrada na periferia da ligação pela escora de compressão na viga adjacente, associada ao momento flector, mesmo no caso de deterioração da aderência entre a armadura longitudinal das vigas e o betão envolvente no interior da ligação. Em ligações viga-pilar de extremidade, na ausência de cintas na ligação, os únicos mecanismos disponíveis para equilibrar a componente horizontal desta escora na face da ligação oposta à viga resultam da acção da armadura longitudinal dobrada, envolvendo a aderência aço-betão e a compressão no interior da dobra da armadura longitudinal da viga.

Em nenhum dos modelos foi atingida a cedência de qualquer armadura no troço ascendente da relação  $H-d$ .

Os modelos de EF EJ-JTR-19.8 e EJ-JTR-31.0 apresentam uma diferença de comportamento pouco significativa. Dado que nenhuma das cintas nestes modelos atingiu a tensão de cedência, conclui-se que o colapso da ligação em ambos os modelos teve origem no esmagamento do betão comprimido. Este resultado indica que o acréscimo de armadura transversal de  $\omega_j = 19.8$  para  $\omega_j = 31.0$  não conduziu a um incremento de confinamento do betão da ligação com implicações no comportamento da ligação.

A Figura 8.39 representa o comportamento do núcleo das ligações viga-pilar determinado pelos modelos de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011] para os espécimes da Tabela 8.14. No caso do modelo de Roeser [2002] assumiu-se que todas as cintas da ligação são efectivas.

A Tabela 8.15 e as Figuras 8.38(b) e 8.39 revelam que tanto o modelo de Roeser [2002] como o de LaFave e Kim [2011] subestimam a capacidade resistente do núcleo ligações viga-pilar para valores baixos da percentagem mecânica de armadura transversal na ligação, mas conduzem a boas estimativas da capacidade resistente para valores maiores deste parâmetro. Além disso,

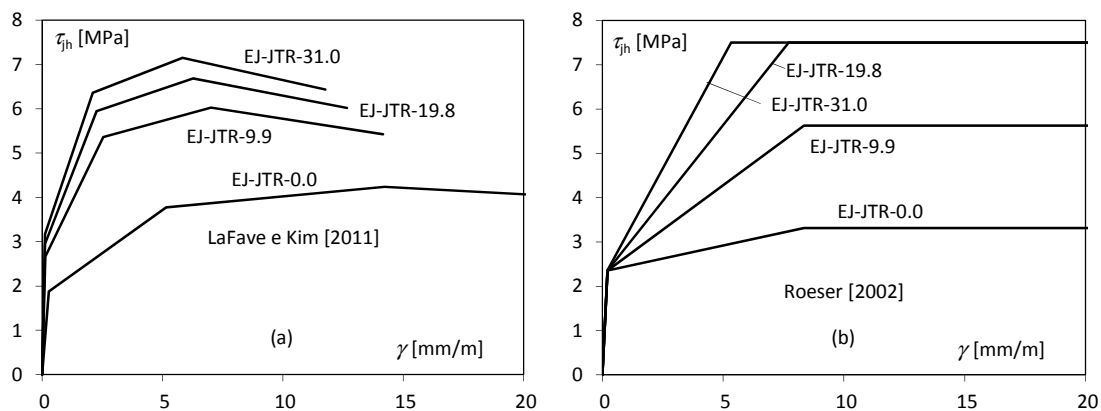


Figura 8.39 – Relação  $\tau_{jh}-\gamma$  determinadas pelos modelos de (a) LaFave e Kim [2011] e (b) Roeser [2002] para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.14.

o modelo de Roeser [2002] tende a subestimar a rigidez da ligação para menores valores de  $\omega_j$  e o modelo de LaFave e Kim [2011] tende a sobrestimar  $G_s$ .

Foi ainda desenvolvido um modelo similar ao EJ-Ref com as cintas substituídas por laços dispostos horizontalmente (tipologia N5 da Tabela 2.2), para validar a justificação avançada no §6.5.2.2 para a subestimação da capacidade resistente da ligação determinada pelos modelos de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011]. No entanto, não se encontraram diferenças significativas de comportamento do novo modelo relativamente ao EJ-Ref. Esta indiferença pode dever-se ao facto do modelo material *CC3NonLinCementitious2* não ter em linha de conta o confinamento para efeitos da definição do parâmetro  $w_d$  (§4.3.2.1.2, §8.4.2).

### 8.5.3. Efeito de varões verticais intermédios nos pilares

Para avaliar a influência da disposição de varões verticais intermédios nos pilares sobre o comportamento de ligações viga-pilar de extremidade foram desenvolvidos três modelos de EF recorrendo ao ATENA 3D. Os modelos de EF desenvolvidos são adaptações do EJ-Ref e apenas diferem deste, e entre si, no número de varões verticais intermédios nos pilares na zona da ligação viga-pilar. Os modelos analisados estão indicados na Tabela 8.16, em que o modelo EJ-ICR-0.0 corresponde ao EJ-Ref.

Os modelos são identificados pela sequência de símbolos EJ-ICR- $\rho_{sv,i}$ , em que EJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação de extremidade), ICR identifica a variável em estudo, ou seja, a colocação de varões verticais intermédios nos pilares) e  $\rho_{sv,i}$  é o quociente entre as percentagens de armaduras dispostas nas direcções vertical e horizontal (§8.4.3).

A Figura 8.40(a) representa o comportamento dos modelos de EF referidos determinado pelo ATENA 3D e a Figura 8.40(b) representa o dos núcleos das correspondentes ligações viga-pilar.

Tabela 8.16 – Modelos utilizados na análise do efeito de varões verticais intermédios nos pilares em ligações viga-pilar de extremidade.

modelo	$\rho_{sv,i}$ [%]	$A_{sv,i}$ [cm <sup>2</sup> ]	$\phi$ [mm]	número de varões
EJ-ICR-0.0 (≡ EJ-Ref)	0	0.00	8	0
EJ-ICR-0.50	50	1.01	8	2
EJ-ICR-1.01	101	2.01	8	4
EJ-ICR-1.57	157	3.14	10	4

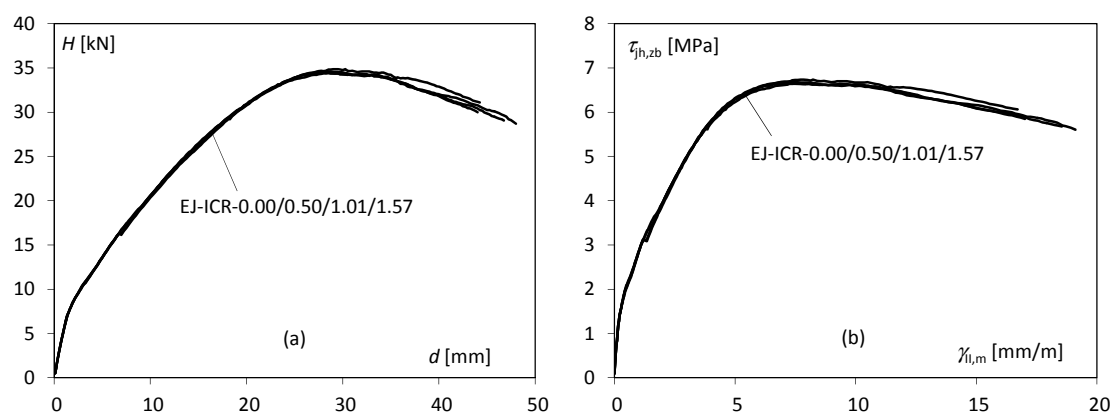


Figura 8.40 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{h,zb}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes quantidades de varões verticais intermédios.

Tabela 8.17 – Efeito de varões verticais intermédios nos pilares sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade (valores em MPa).

modelo	$(\tau_{h,zb})_u$	$G_u$	$G_s$
EJ-ICR-0.0	6.68	896.9	1643.1
EJ-ICR-0.50	6.64	917.5	1672.8
EJ-ICR-1.01	6.65	872.3	1662.5
EJ-ICR-1.57	6.73	872.0	1651.4

Tabela 8.18 – Modelos utilizados na análise do efeito da disposição dos varões da armadura longitudinal dos pilares na diagonal em ligações viga-pilar de extremidade.

modelo	$p = A_{sc,d}/A_{sc}$ [%]	arm. long. do pilar dispostas na diagonal na zona da ligação
EJ-DR-0.00 ( $\equiv$ EJ-Ref)	0	–
EJ-DR-0.20	20	P2, P6
EJ-DR-0.40	40	P3, P4
EJ-DR-0.60	60	P2, P3, P4, P6

A Tabela 8.17 apresenta os valores determinados pelo ATENA 3D para a tensão tangencial na rotura e rigidezes  $G_u$  e  $G_s$  do núcleo das ligações viga-pilar dos modelos de EF analisados.

A Figura 8.40 e Tabela 8.17 revelam que, à semelhança do que se verificou para ligações viga-pilar interiores, a disposição de varões verticais intermédios nos pilares não conduz a variações significativas no comportamento das ligações viga-pilar de extremidade.

#### 8.5.4. Efeito de varões diagonais na ligação

Para avaliar o efeito dos varões diagonais sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade foram desenvolvidos três modelos de EF recorrendo ao ATENA 3D utilizando o modelo EJ-Ref como referência. Os modelos de EF desenvolvidos resultaram da adaptação do modelo EJ-Ref, apenas diferindo deste, e entre si, no valor do quociente entre a área da secção transversal dos varões dispostos na diagonal e a área da secção transversal da totalidade dos varões da armadura longitudinal dos pilares.

Dada a forma como Ortiz [1993] pormenorizou a armadura nos pilares, não é possível avaliar o efeito da disposição parcial da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação, recorrendo aos mesmos quocientes entre a área da secção transversal dos varões dispostos na diagonal e rectilíneos que foram utilizados para as ligações viga-pilar interiores (§8.4.4).

Os modelos de EF analisados são identificados pela sequência de símbolos EJ-DR- $p$  em que EJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação de extremidade), DR identifica a variável em estudo, ou seja, a armadura longitudinal dos pilares disposta na diagonal da ligação, e  $p = A_{sc,d}/A_{sc}$ .

Tal como no §8.4.4, a disposição dos varões foi estabelecida por forma a respeitar a simetria do modelo em relação ao plano do pórtico e garantindo sempre a existência de varões verticais rectilíneos nos cantos das cintas. A Tabela 8.18 indica os modelos de EF utilizados (o modelo EJ-DR-0.00 corresponde ao EJ-Ref).

A Figura 8.41(a) apresenta as relações  $H-d$  determinadas pelos modelos de EF indicados na Tabela 8.18.

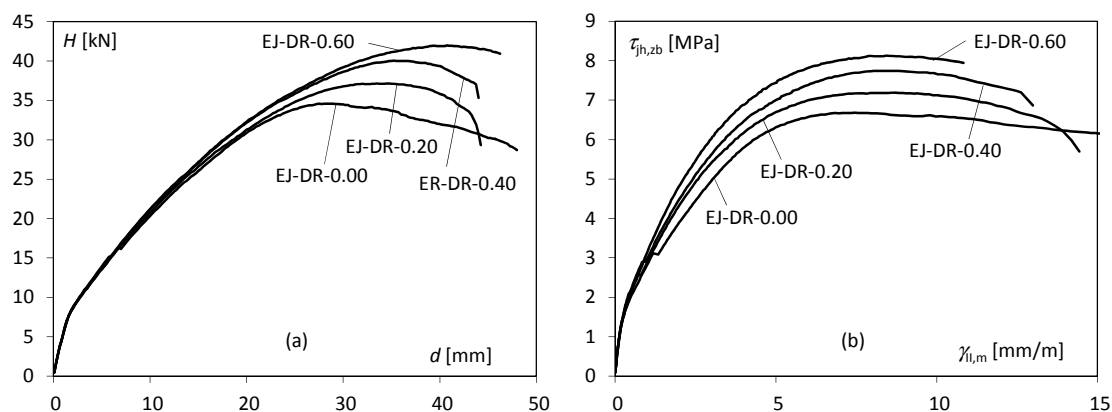


Figura 8.41 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh,zb}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes quantidades de varões da armadura longitudinal dos pilares dispostos na diagonal da ligação.

Tabela 8.19 – Efeito da disposição parcial da armadura longitudinal dos pilares na diagonal da ligação viga-pilar de extremidade sobre o seu comportamento (valores em MPa).

modelo	$(\tau_{jh,zb})_u$	$G_u$	$G_s$
EJ-DR-0.00	6.68	896.9	1643.1
EJ-DR-0.20	7.19	824.7	1815.2
EJ-DR-0.40	7.75	888.8	1826.2
EJ-DR-0.60	8.13	964.2	1989.5

A Figura 8.41(b) representa o comportamento, determinado pelo ATENA 3D, do núcleo das ligações viga-pilar dos modelos indicados na Tabela 8.18 e a Tabela 8.19 apresenta a sua resistência e rigidez.

Como já foi referido no §8.5.1, no modelo EJ-DR-0.00 (EJ-Ref) uma das cintas (C2) plastificou mas apenas na fase descendente da relação  $H-d$ . Nos restantes modelos, nenhuma das armaduras entrou em cedência ao longo de toda a história de carga. Desta forma, pode concluir-se que a variação dos parâmetros indicados na Tabela 8.19 decorre somente do efeito da disposição parcial da armadura longitudinal dos pilares na diagonal na ligação e que a capacidade resistente de todos os modelos de EF foi limitada pela capacidade resistente da ligação viga-pilar.

Assim, a Figura 8.41(b) e a Tabela 8.19 revelam que o quociente  $A_{sc,d}/A_{sc}$ , apesar de não ter um efeito significativo sobre  $G_u$ , tem um efeito pronunciado sobre a capacidade resistente da ligação e sobre  $G_s$  – a disposição de 60% da armadura longitudinal dos pilares na diagonal conduz a um acréscimo de 22% da capacidade resistente da ligação e a um acréscimo de 21% de  $G_s$  relativamente ao caso  $A_{sc,d}/A_{sc} = 0$ . Apesar destas variações serem menos pronunciadas que no caso de ligações viga-pilar interiores, são obtidas sem recorrer à colocação de varões adicionais na ligação, ou seja, são obtidas exclusivamente à custa da disposição da armadura longitudinal dos pilares de forma mais eficiente e, conseqüentemente, são assinaláveis.

### 8.5.5. Efeito do diâmetro interno da dobra dos varões da armadura longitudinal das vigas

O método tradicionalmente utilizado para amarrar a armadura longitudinal das vigas em ligações viga-pilar de extremidade consiste em dobrar os varões em direcção ao interior da ligação de forma a maximizar a resistência da ligação (Nilsson e Losberg [1976]). Para avaliar o efeito do diâmetro interno da dobra desta armadura foram desenvolvidos quatro modelos de

EF. Estes modelos resultam da adaptação do EJ-Ref, apenas diferindo deste, e entre si, no diâmetro interno da dobra dos varões da armadura longitudinal das vigas.

Os modelos de EF são identificados pela sequência de símbolos EJ-IBD- $D/\phi$  em que EJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação de extremidade), IBD identifica a variável em estudo, ou seja, o diâmetro interno da dobra, e  $D/\phi$  é o quociente entre o diâmetro interno da dobra do varão e o diâmetro nominal do varão dobrado.

Na Tabela 8.20 estão indicados os modelos de EF desenvolvidos bem como o parâmetro  $D/\phi$  utilizado em cada um. O modelo EJ-IBD-8 corresponde ao EJ-Ref.

A Figura 8.42(a) apresenta as relações  $H-d$  determinadas pelo ATENA 3D para os modelos de EF indicados na Tabela 8.20. Tanto as armaduras longitudinais das vigas e dos pilares como as cintas na ligação permaneceram em regime elástico ao longo de toda a história de carga em todos os modelos, sendo apenas de assinalar que uma das cintas no modelo EJ-IBD-24 e outra no modelo EJ-IBD-32 entraram em cedência, ambas no troço descendente da relação  $H-d$ .

A Figura 8.42(b) e a Tabela 8.21 apresentam a relação  $\tau_{jh,zb} - \gamma_{ll,m}$  e os parâmetros caracterizadores desta relação determinada pelo ATENA 3D para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.20.

A Figura 8.42(b) e a Tabela 8.21 revelam que o aumento do raio interno da dobra dos varões da armadura longitudinal da viga conduz a um aumento de 30% da capacidade resistente do núcleo da ligação viga-pilar de extremidade do modelo EJ-IBD-24 relativamente ao modelo EJ-IBD-4. Relativamente à rigidez, o aumento do diâmetro interno da dobra conduz a variações pouco expressivas de  $G_s$  (variação máxima de 15% entre dois modelos) e o efeito sobre  $G_u$  não é claro – devido ao reduzido valor da tangente da relação  $\tau_{jh,zb} - \gamma_{ll,m}$  nas imediações de  $(\tau_{jh,zb})_u$ , são identificáveis variações de  $G_u$  que, no entanto, não têm significado.

Tabela 8.20 – Modelos utilizados na análise do efeito do diâmetro interno da dobra dos varões da armadura longitudinal da viga no comportamento da ligação viga-pilar de extremidade.

modelo	$D$ [mm]	$D/\phi$
EJ-IBD-4	65	4.1
EJ-IBD-8 ( $\equiv$ EJ-Ref)	130	8.1
EJ-IBD-16	260	16.3
EJ-IBD-24	390	24.4
EJ-IBD-32	520	32.5

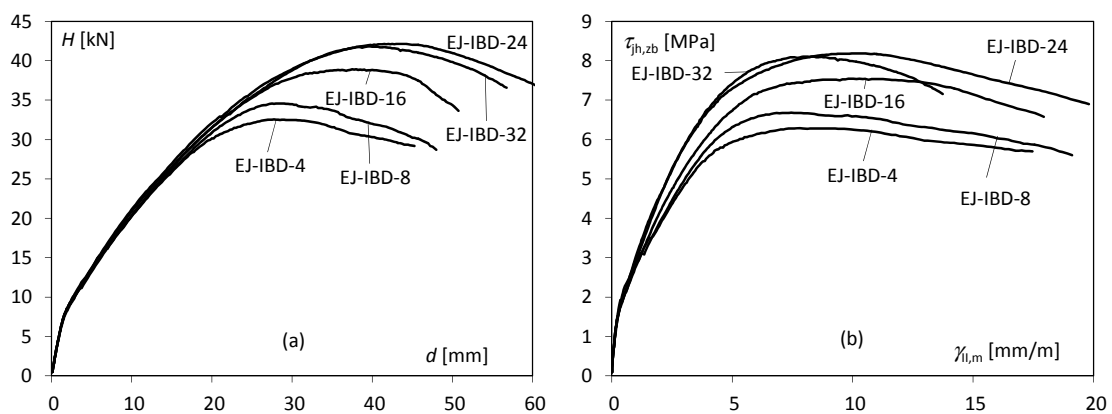


Figura 8.42 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh} - \gamma$  para os modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes raios internos de dobra dos varões da armadura longitudinal da viga no interior da ligação.

Tabela 8.21 – Efeito do raio interno da dobra dos varões da armadura longitudinal da viga sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade (valores em MPa).

modelo	$(\tau_{jh,zb})_u$	$G_u$	$G_s$
EJ-IBD-4	6.29	817.7	1636.3
EJ-IBD-8	6.68	896.9	1643.1
EJ-IBD-16	7.54	735.5	1643.7
EJ-IBD-24	8.19	782.6	1842.2
EJ-IBD-32	8.11	1008.6	1880.2

Tabela 8.22 – Diâmetro mínimo do mandril de acordo com a ACI 318-08 (ACI Committee 318 [2008]).

$\phi$ [mm]	diâmetro mínimo $D$ do mandril
10 a 25	$6\phi$
29, 32 e 36	$8\phi$
43 e 57	$10\phi$

O aumento do diâmetro interno da dobra  $D$  de  $24\phi$  para  $32\phi$  não produziu nenhum aumento da capacidade de carga do núcleo da ligação (pelo contrário), o que significa que não existem vantagens na adopção de maiores diâmetros internos de dobra. A redução de capacidade de carga do modelo EJ-IBD-24 para o modelo EJ-IBD-32 pode dever-se ao facto de, devido ao elevado diâmetro interno de dobra no modelo EJ-IBD-32, o início da parte curvilínea dos varões da armadura longitudinal da viga já se encontra na viga, a aproximadamente 5 cm da periferia da ligação.

Existem recomendações técnicas que estipulam valores mínimos para o quociente entre o raio (ou diâmetro) interno da dobra da armadura e o diâmetro desta. De acordo com o §9.1.1.2 do MC90 [1990], estas disposições visam garantir que não ocorrem fendas nos varões ao dobrar (evitando-se deformações plásticas excessivas na armadura) nem o esmagamento ou *splitting* do betão devido à tensão de compressão no interior da dobra.

Para o caso em avaliação, a Tabela 8.22 indica os valores do diâmetro mínimo interno da dobra (diâmetro mínimo do mandril) de acordo com o §7.2.1 da ACI 318-08.

A versão provisória do MC2011 (Fib [2010b]) sugere que no caso de ganchos (*end hooks*) o valor do diâmetro mínimo seja  $6\phi$  e em dobras de continuidade (*bends*)  $15\phi$ . Já o MC90, no §9.1.1.2, propõe um modelo simplificado baseado na capacidade resistente à compressão do betão sob forças concentradas, tal que

$$\left(\frac{D}{\phi}\right)_{\min} \approx \frac{\delta}{\sqrt{1+2\frac{c}{\phi}}} \frac{\sigma_{sd}}{f_{cd1}} \quad (8.12)$$

em que  $\delta=2.6$  para o caso em estudo,  $c=\min(\text{rec}, e/2)$ , sendo  $e$  a distância entre eixos de varões paralelos e  $\text{rec}$  o recobrimento da armadura em causa,  $\sigma_{sd}$  é a tensão na armadura no início da dobra em no estado limite último em causa e  $f_{cd1}$  (§6.2.2.2 do MC90) é dado por

$$f_{cd1} = 0.85 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250\text{MPa}}\right) f_{cd} \quad (8.13)$$

Por fim, a NP EN 1992-1-1 no §8.3(3) requer que, no caso mais geral, o diâmetro mínimo do

mandril respeite a condição

$$\left(\frac{D}{\phi}\right)_{\min} = \frac{F_{bt}}{\phi f_{cd}} \left(\frac{1}{a_b} + \frac{1}{2\phi}\right) \quad (8.14)$$

em que  $F_{bt}$  é a força de tracção devido às acções últimas no início da parte curvilínea do varão e  $a_b$  é metade da distância entre varões paralelos medida na perpendicular ao plano de dobragem no caso de um varão interior ou, no caso de um varão junto ao paramento do elemento, é igual ao recobrimento desse varão acrescido de metade do diâmetro do varão.

Na Tabela 8.23 estão representados os valores do diâmetro mínimo requeridos de acordo com as recomendações técnicas apresentadas, tomando como referência o modelo EJ-Ref. Assumiu-se, na aplicação das expressões anteriores  $F_{bt} = f_y \pi \phi^2 / 4$ ,  $f_{cd} = f_{ck} = f'_c = 30\text{MPa}$  e  $\sigma_{sd} = f_y = 750\text{MPa}$ .

Apesar das simplificações efectuadas poderem ser algo abusivas, o resultado mostra que existe alguma divergência nas recomendações técnicas aplicáveis que, como se viu na Figura 8.42 e na Tabela 8.21, tem influência significativa no comportamento da ligação viga-pilar.

A diferença entre as recomendações técnicas apresentadas pode ter origem nos seguintes aspectos:

- (i) a distância entre os varões medida na direcção perpendicular ao plano da dobra é relativamente reduzida (18 mm entre faces e 34 mm entre eixos) e as disposições da ACI 318-08 e do MC2011 podem estar calibradas pressupondo uma maior distância entre varões: caso fosse utilizada uma distância entre os eixos dos varões idêntica ao dobro do recobrimento ( $2 \times 25\text{mm}$ ), o diâmetro mínimo do mandril seria  $22.3\phi$  em resultado da aplicação das disposições da NP EN 1992-1-1 – comparável às disposições do MC2011 – e  $25.7\phi$  como resultado da aplicação das disposições do MC90;
- (ii) a NP EN 1992-1-1 estabelece como limite superior de validade para a tensão de cedência  $f_y = 600\text{MPa}$ ; assumindo este valor juntamente com as alterações indicadas no ponto (i), obtém-se, de acordo com esta especificação técnica, um diâmetro mínimo do mandril de  $17.9\phi$ .
- (iii) nas recomendações técnicas não é claro como deve ser classificada a dobra no caso da ancoragem da armadura numa ligação viga-pilar de extremidade: se como um gancho de extremidade, na medida em que visa somente garantir a amarração da armadura, ou se como uma dobra de continuidade, na medida em que o comprimento da armadura após a dobra pode ser significativo.

Tabela 8.23 – Diâmetro mínimo do mandril segundo diversas recomendações técnicas.

recomendação técnica	diâmetro mínimo $D$ do mandril
ACI-318-08	$6\phi$
MC2011	$6\phi - 15\phi$
MC90	$29.4\phi$
NP EN 1992-1-1	$28.3\phi$

Os resultados apresentados mostram que se obtêm ganhos de capacidade resistente da ligação adoptando diâmetros internos de dobra superiores aos valores mínimos das recomendações técnicas apresentados anteriormente. Esta conclusão sugere que poderá haver necessidade de adoptar disposições mais restritivas que as actualmente propostas pelas recomendações técnicas para as amarrações da armadura longitudinal da viga em ligações viga-pilar de extremidade.

### 8.5.6. Efeito das chapas de ancoragem na armadura longitudinal da viga

De acordo com Kotsovou e Mouzakis [2012] a ancoragem das armaduras longitudinais das vigas em ligações viga-pilar de extremidade (tipologia L3 da Tabela 2.2) submetidas a acções cíclicas conduz a uma melhoria de comportamento significativa em termos de capacidade resistente e rigidez da ligação. Além disso, também conduz a um menor congestionamento de armaduras nas ligações viga-pilar.

Em seguida, avalia-se o efeito da amarração dos varões traccionados da armadura longitudinal da viga em ligações viga-pilar de extremidade recorrendo a chapas de ancoragem sobre o comportamento de ligações viga-pilar de extremidade sob acções quase estáticas e monotónicas. Para isso, o comportamento do modelo de EF EJ-Ref (tipologia L4 da Tabela 2.2) foi comparado com um modelo desenvolvido por adaptação deste, em que a amarração dos varões traccionados da armadura longitudinal da viga foi efectuada com recurso a uma chapa de ancoragem (modelo EJ-BP).

Foi utilizada uma chapa de ancoragem rectangular com 200 mm de base (largura da secção transversal das vigas e pilares), 100 mm de altura e com 20 mm de espessura. Neste modelo de EF, admite-se que o material da chapa é homogéneo e elástico linear, com  $E = 200$  GPa e  $\nu = 0.3$ . A interface entre a chapa e o betão foi modelada assumindo uma ligação perfeita e a ligação das armaduras longitudinais à chapa foi garantida impondo escorregamento nulo na extremidade da armadura em contacto com a chapa.

A Figura 8.43 apresenta o comportamento dos modelos EJ-BP, EJ-BRD-8 (EJ-Ref) e EJ-BRD-16. Nenhuma das armaduras do modelo EJ-BP atingiu a tensão de cedência e, conseqüentemente, a sua capacidade de carga foi condicionada pela resistência da ligação viga-pilar.

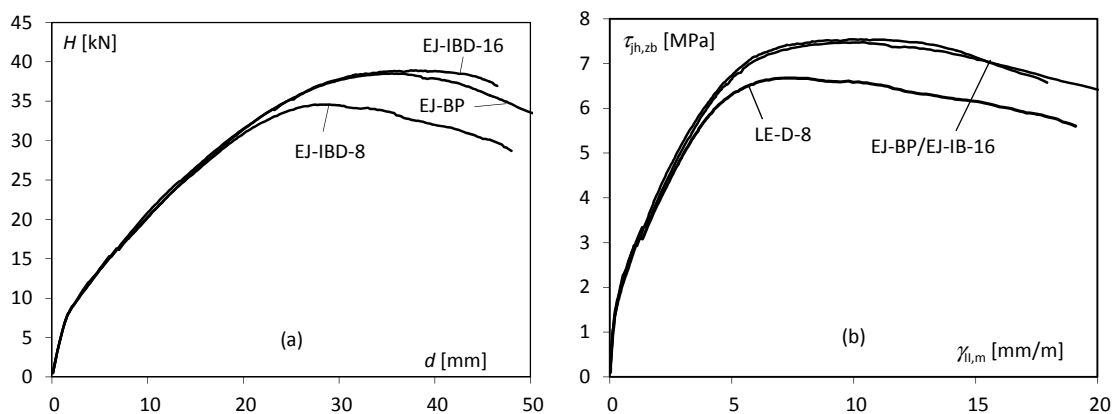


Figura 8.43 – Comparação das curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade em que a amarração da armadura longitudinal da viga é efectuada recorrendo a chapas de ancoragem e à dobragem para o interior da ligação.



A tensão tangencial de rotura da ligação viga-pilar do modelo de EF EJ-BP foi  $(\tau_{jh,zb})_u = 7.47$  MPa e a rigidez última e em serviço foram  $G_u = 720.8$  MPa e  $G_s = 1590.9$  MPa. Comparando estes valores com os da Tabela 8.21, conclui-se que, apesar da utilização de uma chapa de ancoragem para os varões traccionados da armadura longitudinal da viga conduzir a uma ligação viga-pilar com maior capacidade resistente que a ancoragem tradicional para  $D/\phi = 8$  (tipologia L4 da Tabela 2.2), obtêm-se capacidades resistentes e rigidezes idênticas às obtidas com a chapa de ancoragem se for utilizando  $D/\phi = 16$  (ver Figura 8.43).

Ou seja, os resultados conseguidos com uma chapa de ancoragem são facilmente alcançados recorrendo à pormenorização tradicional, pelo que a complexidade (e custo) adicional das chapas de ancoragem não se afigura necessária para solicitações quase-estáticas não cíclicas, caso não ocorram problemas de congestionamento de armaduras na ligação. No entanto, caso o número de varões da armadura longitudinal da viga seja significativo, uma amarração por aderência pode congestionar a zona da ligação, e, conseqüente, a amarração recorrendo a chapas de ancoragem pode revelar-se uma boa solução.

### 8.5.7. Efeito da resistência à compressão do betão

Para avaliar o efeito da resistência à compressão do betão no comportamento de ligações viga-pilar de extremidade, foram desenvolvidos três modelos de EF utilizando o modelo ao EJ-Ref como referência. Os modelos de EF desenvolvidos resultam da adaptação do EJ-Ref, diferindo deste, e entre si, apenas no valor da tensão de rotura do betão à compressão uniaxial e nas propriedades correlacionáveis da respectiva relação constitutiva.

Na análise que se segue os modelos estão identificados pela sequência de símbolos EJ-CS- $f'_c$ , em que EJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação de extremidade), CS identifica a variável em estudo, ou seja, a resistência à compressão uniaxial do betão referida a provetes cilíndricos de 15 de diâmetro e 30 cm de altura, e  $f'_c$  é o valor dessa resistência. Na Tabela 8.24 estão indicados os modelos de EF desenvolvidos e a respectiva tensão de rotura do betão à compressão uniaxial.

A Figura 8.44(a) representa as relações  $H-d$  determinadas pelos modelos de EF indicados na Tabela 8.24. A carga máxima em cada um dos modelos foi atingida sem que as armaduras longitudinais das vigas ou dos pilares entrassem em cedência. Desta forma, conclui-se que a capacidade de carga dos modelos foi condicionada pelas respectivas ligações viga-pilar e que, à semelhança do que ocorreu para os modelos com ligações viga-pilar interiores, um acréscimo de resistência do betão à compressão traduz-se num acréscimo significativo da capacidade resistente da ligação.

Tabela 8.24 – Modelos utilizados na análise do efeito da resistência à compressão do betão no comportamento da ligação viga-pilar de extremidade.

modelo	$f'_c$ [MPa]
EJ-CS-20	20
EJ-CS-30 ( $\equiv$ EJ-Ref)	30
EJ-CS-40	40
EJ-CS-50	50

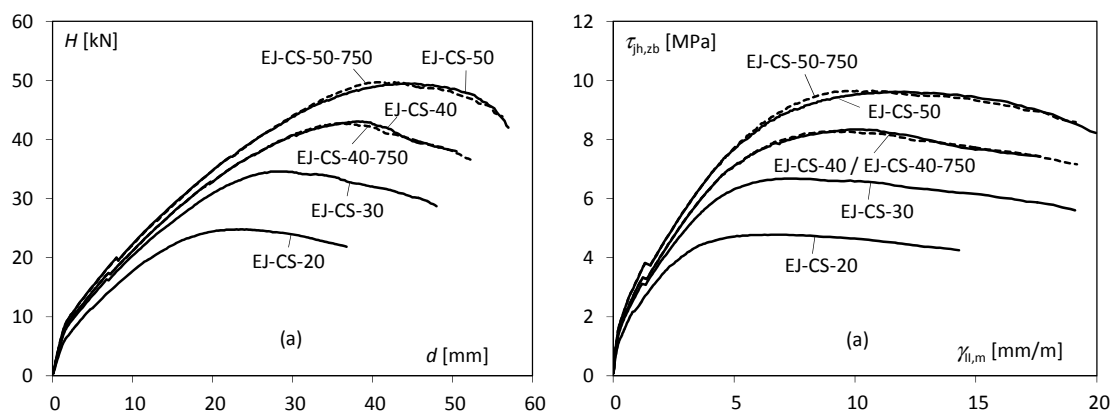


Figura 8.44 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{h,zb}-\gamma$  para modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade constituídas por betões com valor diferente da tensão de rotura à compressão.

Tabela 8.25 – Efeito da resistência à compressão do betão sobre o comportamento de ligações viga-pilar de extremidade (valores em MPa).

modelo	ATENA 3D			Roeser [2002]			LaFave e Kim [2011]		
	$(\tau_{h,zb})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$
EJ-CS-20	4.78	718.7	1627.9	4.49	538.1	617.5	5.33	799.7	2754.9
EJ-CS-30	6.68	896.9	1643.1	5.63	674.2	737.0	6.02	859.2	2250.5
EJ-CS-40	8.34	840.5	1599.2	6.57	787.4	820.1	6.57	904.0	1184.2
EJ-CS-40-750	8.27	931.6	1603.6	6.57	787.4	826.2	6.98	1025.7	2523.2
EJ-CS-50	9.62	799.5	1619.9	7.57	907.9	951.6	7.02	939.9	–
EJ-CS-50-750	9.65	957.9	1617.2	7.57	907.2	948.5	7.46	1066.2	1252.7

A análise da evolução da tensão nas cintas dos modelos de EF EJ-CS-40 e EJ-CS-50 revela que estas entraram em cedência antes do modelo atingir  $H_{max}$ . Dado que se concluiu no §8.5.2 que nas ligações viga-pilar de extremidade, contrariamente ao que ocorre nas ligações viga-pilar interiores, a capacidade resistente da ligação é fortemente condicionada pelas cintas, foram desenvolvidos dois modelos adicionais, denominados EJ-CS-40-750 e EJ-CS-50-750, em que a tensão de cedência das cintas passou de 500 para 750 MPa, por forma a isolar o efeito da resistência à compressão do betão no comportamento de ligações viga-pilar de extremidade.

A Figura 8.44(b) apresenta o comportamento determinado pelo ATENA 3D do núcleo das ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.24. A Tabela 8.25 apresenta os parâmetros utilizados para caracterizar esse comportamento.

A Figura 8.44(b) e a Tabela 8.25 revelam que o efeito da cedência das cintas é pouco significativo. A pouca relevância na diferença de comportamento entre os modelos em que as cintas plastificaram (EJ-CS-40, EJ-CS-50) e os modelos em que as cintas permaneceram em regime elástico (EJ-CS-40-750, EJ-CS-50-750) deve-se ao facto de só uma das cintas (C2) ter entrado em cedência antes do modelo atingir  $H_{max}$  e, conseqüentemente, existir a possibilidade de mobilização de caminhos de carga alternativos no interior da ligação com a reorientação do campo de tensões.

A Figura 8.44(b) e a Tabela 8.25 também revelam que o aumento da resistência à compressão uniaxial do betão de 20 para 50 MPa conduz a um aumento de 102% da resistência da ligação viga-pilar de extremidade. Este resultado é semelhante ao obtido no §8.4.5 para ligações viga-pilar interiores (aumento de 93%). Já o parâmetro  $G_s$  aparenta não sofrer variações

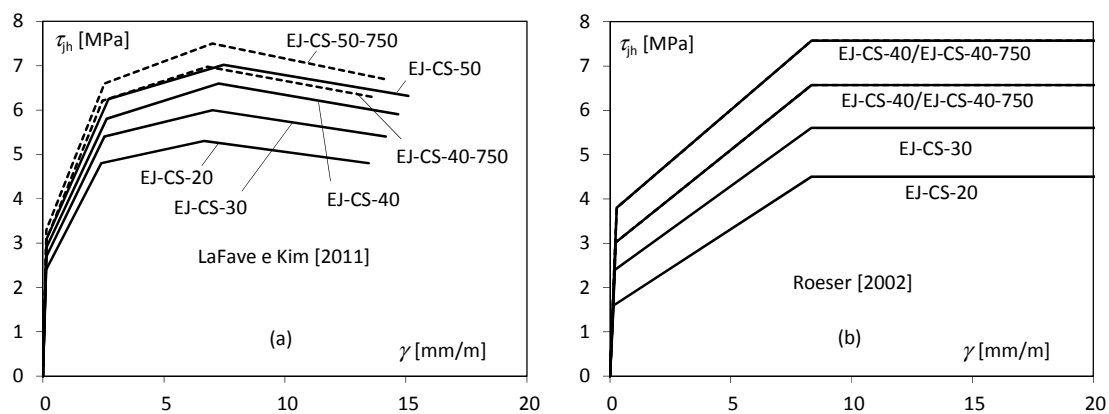


Figura 8.45 – Relação  $\tau_{jh}$ - $\gamma$  determinada pelos modelos de (a) LaFave e Kim [2011] e (b) Roeser [2002] para as ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.24.

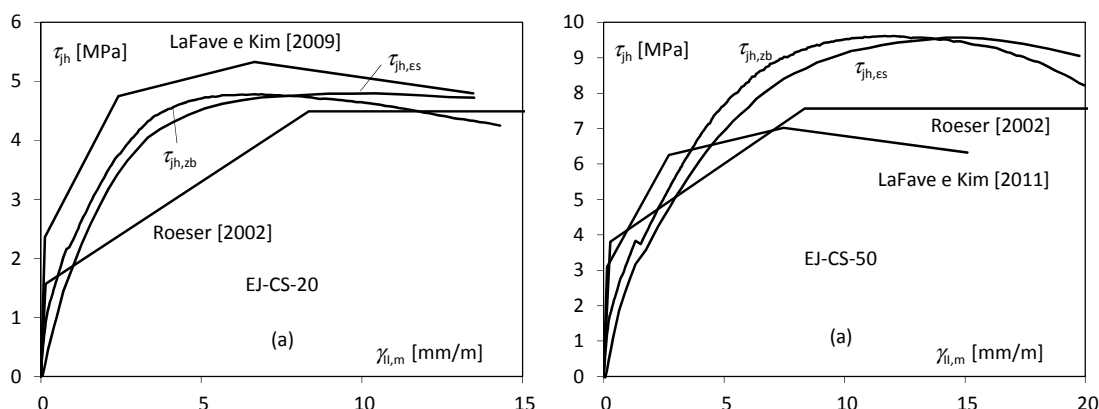


Figura 8.46 – Comparação das relações  $\tau_{jh}$ - $\gamma$  determinadas pelos modelos de Roeser [2002] e de LaFave e Kim [2011] com as determinadas pelos modelos de EF (a) EJ-CS-20 e (b) EJ-CS-50.

significativas com o aumento da resistência à compressão do betão, tal como em ligações viga-pilar interiores, e o parâmetro  $G_u$ , apesar de apresentar um acréscimo de 11% com o aumento da resistência à compressão do betão de 20 para 50 MPa, não se mostra tão sensível à resistência à compressão uniaxial do betão como em ligações viga-pilar interiores – no §8.4.5 observou-se um acréscimo de 53% neste parâmetro para a mesma variação da resistência à compressão do betão.

A Figura 8.45 apresenta o comportamento das ligações viga-pilar dos modelos de EF indicados na Tabela 8.24 determinado pelos modelos de Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011]. A Tabela 8.25 também apresenta os valores dos parâmetros que permitem quantificar a resistência e a rigidez destas ligações viga-pilar segundo este modelos simplificados.

A Tabela 8.25 e a Figura 8.45 revelam que os modelos de Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011] tendem a subestimar a capacidade resistente da ligação viga-pilar, quando a resistência à compressão uniaxial do betão é maior. Além disso, o modelo de Roeser [2002] tende a subestimar a rigidez da ligação. Na Tabela 8.25 não é apresentado o parâmetro  $G_s$  correspondente ao modelo de LaFave e Kim [2011] para a ligação EJ-CS-50 porque a resistência desta ligação, de acordo com este modelo, é inferior a 75% da resistência determinada no ATENA 3D e, conseqüentemente, não é possível definir este parâmetro. Apresenta-se na Figura 8.46, a título exemplificativo, a comparação das curvas de comportamento das ligações viga-pilar dos modelos de EF EJ-CS-20 e EJ-CS-50 determinadas pelo ATENA 3D e pelos modelos de Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011].

Note-se ainda que o modelo de LaFave e Kim [2011] preconiza um aumento de resistência da ligação com o aumento da tensão de cedência das cintas de 500 para 750 MPa nos modelos EJ-CS-40/EJ-CS-40-750 e EJ-CS-50/EJ-CS-50-750 apesar de, como se constatou na Figura 8.44 e na Tabela 8.25, esse aumento de resistência não ocorrer no modelo de EF.

### 8.5.8. Efeito do esforço axial nos pilares

Para avaliar o efeito do esforço axial nos pilares sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade, foram desenvolvidos e analisados quatro modelos de EF com o ATENA 3D. Os modelos desenvolvidos resultam da adaptação do modelo EJ-Ref, apenas diferindo deste, e entre si, no valor da carga vertical aplicada no pilar superior, ou seja, no esforço axial nos pilares.

Os modelos são identificados pela sequência de símbolos EJ-N-*n* em que EJ identifica a configuração da ligação no plano do pórtico (ligação de extremidade), N identifica a variável em estudo, ou seja, o esforço axial, e *n* é o valor do esforço axial adimensionalizado no pilar superior. Na Tabela 8.26 estão identificados os modelos de EF desenvolvidos bem como o valor do esforço axial reduzido no pilar superior de cada um dos modelos.

A Figura 8.47(a) representa as curvas *H-d* determinadas pelo ATENA 3D para modelos indicados na Tabela 8.26. Esta figura revela que a diferença de comportamento entre os diversos modelos é pouco significativa. Esta insensibilidade mostra não só que a estrutura modelada é pouco esbelta mas também que o esforço axial não produz efeitos significativos no comportamento da ligação viga-pilar de extremidade.

A Figura 8.47(b) e a Tabela 8.27 apresentam o comportamento determinado pelo ATENA 3D para o núcleo das ligações viga-pilar dos modelos de EF referidos e confirmam os resultados de

Tabela 8.26 – Modelos utilizados na análise do efeito do esforço axial nos pilares sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade.

modelo	esforço axial	
	<i>N</i> [kN]	<i>n</i>
EJ-N-0.0	0	0.0
EJ-N-0.2	300	0.2
EJ-N-0.4	600	0.4
EJ-N-0.6	900	0.6

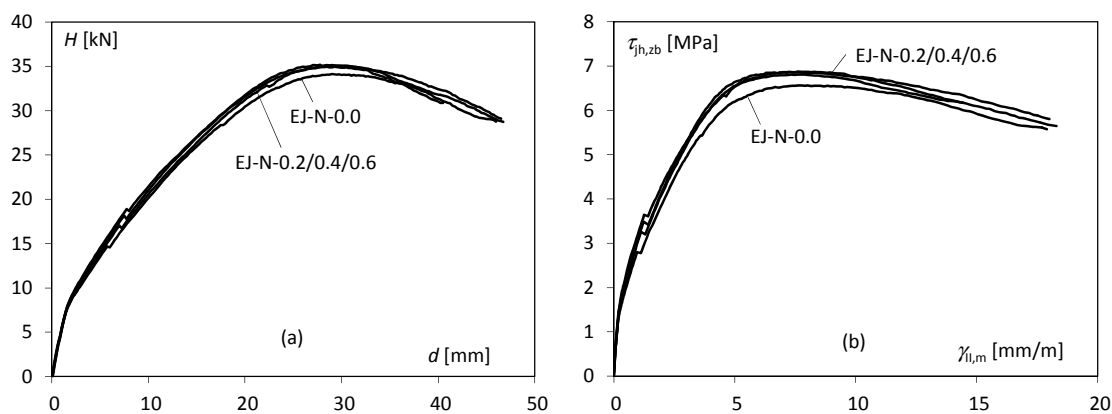


Figura 8.47 – Curvas (a) *H-d* e (b)  $\tau_{jh}-\gamma$  para os modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes níveis de esforço axial nos pilares.

Tabela 8.27 – Efeito do esforço axial nos pilares sobre o comportamento de ligações viga-pilar de extremidade (valores em MPa).

modelo	$(\tau_{h,zb})_u$	$G_u$	$G_s$
EJ-N-0.0	6.56	862.3	1660.5
EJ-N-0.2	6.80	879.0	1761.8
EJ-N-0.4	6.86	944.8	1804.9
EJ-N-0.6	6.88	902.3	1809.2

Tabela 8.28 – Modelos utilizados na análise do efeito da configuração da ligação viga-pilar de extremidade na direcção ortogonal ao plano do pórtico.

modelo	elemento transversal
EJ-Ref	sem elementos transversais
EJ-CTD-2TB-F	vigas transversais com secção transversal $h_c \times h_b$
EJ-CTD-2TB-50C	vigas transversais com secção transversal $0.5h_c \times h_b$ no centro da ligação viga-pilar
EJ-CTD-2TB-50EF	vigas transversais com secção transversal $0.5h_c \times h_b$ excêntricas na ligação viga-pilar junto à face da ligação sem viga longitudinal
EJ-CTD-2TB-50IF	vigas transversais com secção transversal $0.5h_c \times h_b$ excêntricas na ligação viga-pilar junto à face da ligação com viga longitudinal
EJ-CTD-S	laje com 130 mm de espessura

Hegger, Sherif *et al.* [2004] e Ortiz [1993], segundo os quais o esforço axial, para a gama de esforço axial considerada, tem um efeito pouco pronunciado sobre a capacidade resistente do núcleo das ligações. Além disso, também mostram que, contrariamente ao que ocorre para ligações viga-pilar interiores, o esforço axial nos pilares também tem um efeito pouco relevante para a rigidez  $G_s$  de ligações viga-pilar de extremidade.

As armaduras longitudinais das vigas e dos pilares permaneceram em regime elástico em todos os modelos indicados na Tabela 8.26 ao longo de toda a história de carga. Já o ponto de monitorização C2 (Figura 8.33), revela que a cinta correspondente atingiu a tensão de cedência nas imediações de  $H_{max}$  no modelo EJ-N-0.2 e, já no final do troço descendente da relação  $H-d$ , no modelo EJ-N-0.4. Conclui-se assim que a cedência das armaduras não teve influência relevante na fase ascendente das curvas apresentadas na Figura 8.47.

### 8.5.9. Efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico

Para estudar o efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico sobre o comportamento do núcleo de ligações viga-pilar de extremidade foram desenvolvidos e analisados quatro modelos de EF recorrendo ao ATENA 3D. Os modelos de EF desenvolvidos estão indicados na Tabela 8.28 e representados na Figura 8.48, e são adaptações do EJ-Ref, apenas diferindo deste, e entre si, na configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico.

Por forma a permitir uma comparação entre o efeito dos elementos transversais sobre o comportamento de ligações interiores e de extremidade adoptaram-se elementos transversais com dimensões relativas idênticas às adoptadas nos modelos com ligações viga-pilar interiores (§8.4.7). Desta forma, (i) foi considerada uma laje com 130 mm de espessura de modo a manter

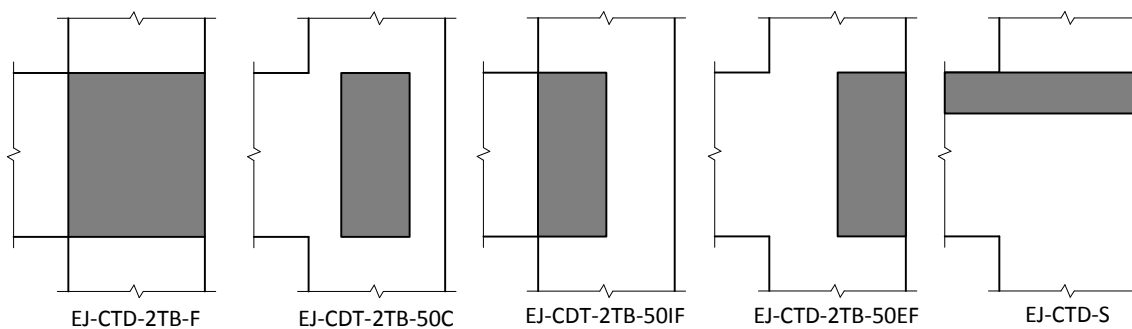


Figura 8.48 – Elementos transversais na ligação viga-pilar de extremidade.

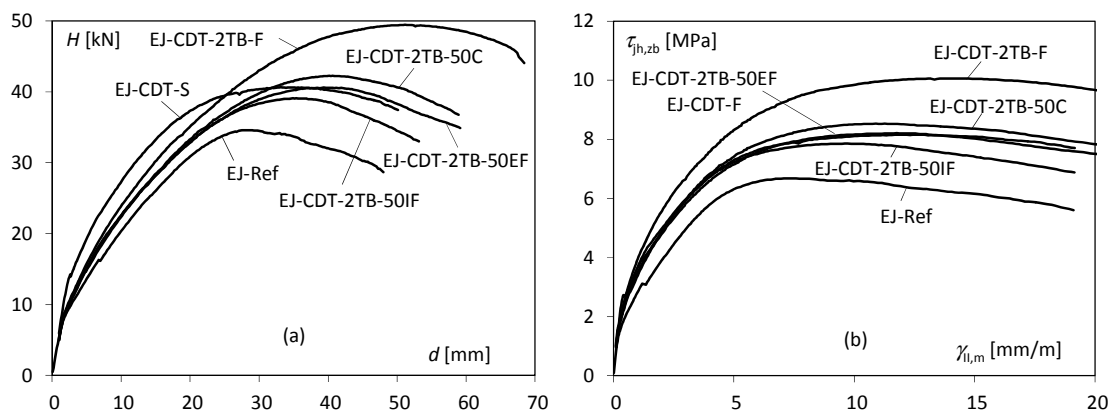


Figura 8.49 – Curvas (a)  $H-d$  e (b)  $\tau_{jh,zb}-\gamma$  para os modelos de EF de estruturas com ligações viga-pilar de extremidade com diferentes configurações na direcção ortogonal ao plano do pórtico.

Tabela 8.29 – Efeito da configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico sobre o comportamento da ligação viga-pilar de extremidade (valores em MPa).

modelo	ATENA 3D			Roesser [2002]			LaFave e Kim [2011]		
	$(\tau_{jh,zb})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$
EJ-Ref	6.68	896.9	1643.1	5.63	674.2	737.0	6.02	859.2	2250.5
EJ-CTD-2VT-F	10.06	724.0	1917.0	–	–	–	7.11	967.7	–
EJ-CTD-2TB-50C	8.53	757.2	1851.6	–	–	–	7.11	967.7	1979.1
EJ-CTD-2TB-50IF	7.86	808.3	1991.6	–	–	–	7.11	967.7	2545.1
EJ-CTD-2TB-50EF	8.21	697.5	1802.6	–	–	–	7.11	967.7	2439.1
EJ-CTD-S	8.16	670.6	1920.3	–	–	–	–	–	–

o mesmo quociente entre a espessura da laje e a altura da viga que o modelo EJ-CTD-S, (ii) foi modelada uma extensão de 650 mm de laje e de vigas transversais para cada lado das faces verticais da viga longitudinal, de forma a garantir um quociente entre a largura da viga e a dimensão modelada da laje e vigas transversais idêntico ao adoptado para o modelo EJ-CTD-S, (iii) foi adoptada uma malha de varões com 8 mm de diâmetro afastados 75 mm entre eixos, por forma obter uma percentagem geométrica de armadura na laje idêntica à do modelo EJ-CTD-S. A amarração das armaduras da laje junto ao bordo livre foi em U, com um diâmetro interno de dobra igual a  $6\phi$ .

A Figura 8.49(a) representa as curvas de comportamentos determinadas pelo ATENA 3D para os modelos de EF indicados na Tabela 8.28 e a Figura 8.49(b) apresenta as curvas de comportamento dos núcleos das respectivas ligações viga-pilar. A Tabela 8.29 apresenta os parâmetros caracterizadores do comportamento dos núcleos das ligações representados na Figura 8.49(b).

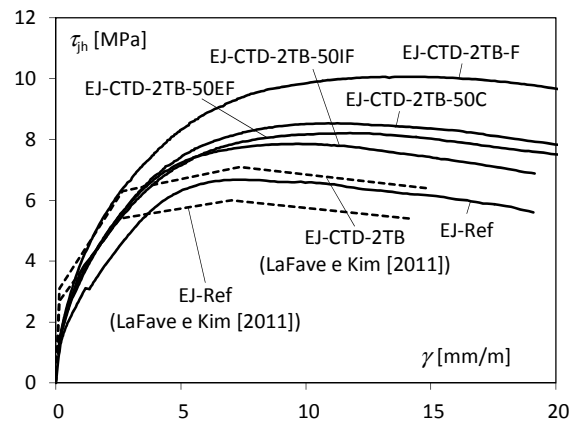


Figura 8.50 – Relação  $\tau_{jh}-\gamma$  determinada para os modelos de EF pelo ATENA 3D e para as respectivas ligações pelo modelo de LaFave e Kim [2011].

No modelo EJ-CTD-2TB-F, todas as armaduras longitudinais e transversais das vigas e dos pilares permaneceram em regime elástico e as cintas na zona central da ligação entraram em cedência no troço descendente da relação  $\tau_{jh}-\gamma$  (e  $H-d$ ). No modelo EJ-CTD-2TB-50C, nenhuma armadura entrou em cedência. Nos modelos EJ-CTD-2TB-50IF/EF e EJ-CTD-S, as armaduras longitudinais e transversais das vigas e pilares permaneceram em regime elástico e as armaduras transversais na ligação também permaneceram em regime elástico, com exceção (i) das cintas C1 e C2 no modelo EJ-CTD-2TB-50IF, que entraram em cedência pouco antes de ser atingida  $H_{max}$ , (ii) da cinta C3 no modelo EJ-CTD-2TB-50EF, que entrou em cedência bastante antes de ser atingida a carga  $H_{max}$  e (iii) da cinta C2 no modelo EJ-CTD-S, que também entrou em cedência bastante antes de ser atingida a carga  $H_{max}$ .

De uma forma geral, a Figura 8.49 e a Tabela 8.29 revelam que a existência de elementos transversais tem um efeito muito significativo sobre a capacidade resistente do núcleo de ligações viga-pilar de extremidade e um efeito menos pronunciado sobre a sua rigidez.

Em termos de capacidade resistente do núcleo da ligação viga-pilar, a colocação de duas vigas transversais de forma a ocupar a totalidade da zona de ligação conduz a um aumento de 51% da capacidade resistente da ligação relativamente ao modelo EJ-Ref. Já a disposição de duas vigas transversais de modo a ocupar somente metade da zona da ligação, ou a disposição de uma laje, reduz o ganho relativo de capacidade resistente da ligação para sensivelmente metade do caso anterior (18 a 28% de aumento de capacidade resistente). Relativamente à excentricidade da viga transversal em relação ao eixo pilar, a disposição da viga transversal centrada (EJ-CTD-2TB-50C) ou na zona exterior (EJ-CTD-2TB-50EF) conduz a uma maior capacidade resistente da ligação. De uma forma geral, a laje tem um efeito semelhante à disposição de duas vigas transversais a ocupar metade da zona da ligação junto à face da livre da ligação (EJ-CTD-2TB-50EF).

Relativamente a  $G_u$ , dada a baixa rigidez que caracteriza estes modelos nas imediações de colapso, as variações apresentadas não são significativas. Relativamente  $G_s$ , a Figura 8.49(b) revela que o modelo EJ-CTD-2TB-F apresenta uma rigidez algo superior à do EJ-Ref (17%). Os restantes modelos com elementos transversais apresentam um aumento de rigidez  $G_s$  relativamente ao EJ-Ref idêntico à do modelo EJ-CTD-2TB-F, mas que, recorde-se, decorre da menor carga de colapso destes modelos. Assim, a Figura 8.49(b) revela que, para o mesmo nível de carga, a rigidez de todos estes modelos é inferior à do EJ-CTD-2TB-F e superior à do EJ-Ref.

A Figura 8.50 compara o comportamento do núcleo das ligações viga-pilar dos modelos da Tabela 8.28 determinado pelo modelo de LaFave e Kim [2011] com o determinado pelo ATENA 3D. A Tabela 8.29 apresenta também os parâmetros caracterizadores do comportamento do núcleo das ligações viga-pilar para este modelo simplificado. Esta figura e esta tabela revelam que, de uma forma geral, o modelo de LaFave e Kim [2011] subestima (sobrestima) o efeito dos elementos transversais sobre a capacidade resistente (rigidez) das ligações.

## 8.6. Notas finais

Neste capítulo mostrou-se que o comportamento das ligações viga-pilar pode condicionar significativamente a capacidade de carga das estruturas bem como a respectiva deformabilidade lateral, comparando o comportamento de modelos de EF em que foi assumido um comportamento aproximadamente rígido para a ligação viga-pilar (IJ-RIG e EJ-RIG) com o de modelos em que se simulou o comportamento efectivo das ligações viga-pilar (IJ-Ref e EJ-Ref, respectivamente).

Foi apresentada uma análise crítica dos parâmetros caracterizadores da resistência e rigidez do núcleo das ligações viga-pilar, e dos procedimentos para determinar esses parâmetros, por forma a identificar quais os mais adequadas para quantificar de forma objectiva o comportamento destes elementos. Concluiu-se que:

- (i) a tensão tangencial média num plano horizontal a meia altura da ligação, calculada por intermédio da tensão na armadura longitudinal das vigas na periferia da ligação, pode não representar de forma satisfatória o estado de tensão do núcleo das ligações viga-pilar quando o escorregamento nas armaduras longitudinais da viga é significativo;
- (ii) a rigidez secante correspondente à carga de colapso da ligação ( $G_u$ ) não traduz de forma satisfatória a influência de alguns parâmetros na rigidez do núcleo da ligação para cargas inferiores a esta

As ligações viga-pilar apresentam uma redução acentuada da rigidez nas imediações da carga de colapso, pelo que se arbitrou um nível de carga correspondente a 75% da carga de colapso da ligação para avaliar a rigidez da ligação em serviço ( $G_s$ ). Além disso, algumas medidas, apesar de não conduzirem a um aumento da capacidade resistente do núcleo da ligação nem da sua rigidez  $G_u$ , conduzem a um aumento muito significativo da rigidez  $G_s$ , pelo que a influência de diversos parâmetros sobre a rigidez da ligação não deve ser avaliada com recurso a  $G_u$ . A conjugação destes dois aspectos permite concluir que o dimensionamento racional das ligações viga-pilar deve passar pela definição de uma carga máxima admissível, significativamente inferior à carga máxima de colapso, de forma a garantir uma rigidez significativamente mais elevada para a ligação. Esta abordagem permitiria não só ter em consideração o efeito benéfico de alguns aspectos tais como o esforço axial nos pilares mas também de uma pormenorização mais cuidada da armadura, cujos efeitos são mais evidentes para cargas significativamente inferiores às cargas de colapso das ligações.

A análise efectuada mostrou que as ligações viga-pilar interiores e de extremidade apresentam graus de sensibilidade significativamente diferentes à variação de alguns parâmetros. Esta



diferença de comportamento pode traduzir diferentes mecanismos resistentes e não deve, por isso, ser menosprezada sob pena dos modelos simplificados aplicados indiferentemente às duas tipologias serem inseguros. Em seguida, é apresentado um resumo dos aspectos considerados mais relevantes e são evidenciadas as diferenças de comportamento entre as duas tipologias de ligação.

Relativamente à pormenorização das ligações viga-pilar interiores e de extremidade, a análise de EF mostrou que:

- (i) o aumento da percentagem mecânica de armadura transversal na ligação conduz a um aumento da capacidade resistente da ligação bem como da sua rigidez; no entanto, o efeito deste parâmetro é significativamente mais pronunciado em ligações viga-pilar de extremidade do que em ligações viga-pilar interiores, tanto em termos de resistência como de rigidez;
- (ii) o efeito da disposição de armaduras verticais nas faces dos pilares entre os varões de canto não se mostrou relevante para o comportamento da ligação viga-pilar em nenhuma das tipologias de ligação estudadas;
- (iii) a disposição na diagonal da ligação de parte das armaduras longitudinais dos pilares conduziu a um aumento da capacidade resistente da ligação bem como a um aumento da rigidez  $G_s$  – não se verificou uma variação significativa de  $G_u$ ; o aumento da percentagem de armadura diagonal é menos eficaz para o aumento da resistência da ligação e de  $G_s$  para maiores quantidades relativas de armadura disposta na diagonal.

Relativamente à pormenorização da amarração da armadura longitudinal das vigas nas ligações viga-pilar de extremidade a análise de EF e a discussão de resultados mostraram que:

- (i) o diâmetro interno da dobra da amarração dos varões, apesar de não ter relevância em termos da rigidez da ligação, tem um efeito pronunciado na sua capacidade resistente;
- (ii) a amarração recorrendo a chapas de ancoragem, apesar de conduzir a uma maior capacidade de carga que a amarração em gancho para pequenos diâmetros internos de dobra, não traz vantagens adicionais para maiores diâmetros de dobra e, conseqüentemente, não apresenta vantagens significativas caso o congestionamento de armaduras não seja um problema.

A resistência à compressão do betão é provavelmente o parâmetro mais relevante para a capacidade resistente das ligações viga-pilar interiores e de extremidade. Constatou-se que o aumento da resistência à compressão uniaxial do betão conduziu a aumentos significativos da resistência das ligações e de  $G_u$ , em particular para ligações viga-pilar interiores, mas não conduz a variações relevantes de  $G_s$  em nenhuma das tipologias de ligações estudadas.

Relativamente ao efeito do esforço axial na capacidade resistente das ligações viga-pilar, a análise efectuada corrobora as conclusões de Hegger, Sherif *et al.* [2004], ou seja, para o intervalo de esforço axial nos pilares considerado relevante, este parâmetro não é importante para a resistência das ligações viga-pilar nem para  $G_u$ , em nenhuma das tipologias de modelos. No entanto, constatou-se que em ligações viga-pilar interiores, o aumento do esforço axial nos

pilares conduz a um comportamento significativamente mais rígido para as ligações até às imediações da carga de colapso, ou seja, o aumento do esforço axial nos pilares conduz a um aumento muito significativo de  $G_s$  em ligações viga-pilar interiores.

A existência de elementos transversais pode aumentar significativamente a capacidade resistente e a rigidez das ligações viga-pilar. Em particular, a existência de duas vigas transversais ocupando totalmente a ligação é muito efectiva em termos de aumento de capacidade resistente da ligação e de  $G_s$  em ambas as tipologias estudadas. Já a existência de laje ou de vigas transversais a ocupar parcialmente a ligação não são tão efectivas no aumento da capacidade resistente e rigidez. Consequentemente, deve ser efectuada uma distinção entre os dois casos.

Relativamente aos modelos de Roeser [2002] e LaFave e Kim [2011], salienta-se que o primeiro não inclui o efeito dos elementos transversais e que o segundo (i) não considera a dimensão da secção transversal do elemento transversal e (ii) ignora que algumas medidas conduzem a efeitos distintos sobre  $G_s$  e  $G_w$ , ou seja, alteram o comportamento da ligação para cargas inferiores às de colapso apesar de não produzirem nenhuma alteração notável na capacidade resistente e rigidez de colapso da ligação.

Na Tabela 8.30 apresenta-se um quadro resumo onde se sintetizam os resultados obtidos neste estudo paramétrico e se classificam a relevância de cada uma das variáveis estudadas sobre o comportamento das ligações viga-pilar. Assim, considerou-se que uma variável é pouco relevante (●), relevante (●●) ou muito relevante (●●●) para o comportamento das ligações viga-pilar, o que se reflecte nos parâmetros  $(\tau_{jh})_w$ ,  $G_s$  e  $G_w$ , quando a variação máxima de um destes parâmetros entre quaisquer dois modelos considerados para estudar o efeito dessa variável, é inferior a 25%, encontra-se entre 25 e 50% ou é superior a 50%, respectivamente.

Por fim saliente-se novamente que as conclusões apresentadas foram obtidos recorrendo a um conjunto limitado de simulações numéricas e devem ser devidamente validadas e generalizadas preferencialmente recorrendo a ensaios experimentais.

Tabela 8.30 – Síntese dos resultados do estudo paramétrico efectuado.

	“família” de modelos	parâmetro estudado	secção	$(\tau_{jh})_u$	$G_u$	$G_s$
ligações viga-pilar interiores	JTR	quantidade de armadura transversal na ligação	8.4.2	•	•	•
	ICR	colocação de varões verticais intermédios nos pilares	8.4.3	•	•	•
	DR	disposição de varões na diagonal das ligações	8.4.4	••	•	•••
	CS	resistência à compressão uniaxial do betão	8.4.5	•••	•••	•
	N	esforço axial nos pilares	8.4.6	•	••	•••
	CTD	configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico	8.4.7	••	•••	••
ligações viga-pilar de extremidade	JTR	quantidade de armadura transversal na ligação	8.5.2	••	•••	•••
	ICR	colocação de varões verticais intermédios nos pilares	8.5.3	•	•	•
	DR	disposição de varões na diagonal das ligações	8.5.4	•	•	•
	IBD	diâmetro interno da dobra dos varões da armadura longitudinal da viga	8.5.5	••	•	•
	BP	chapas de ancoragem na armadura longitudinal da viga	8.5.6	•	•	•
	CS	resistência à compressão uniaxial do betão	8.5.7	•••	••	•
	N	esforço axial nos pilares	8.5.8	•	•	•
	CTD	configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico	8.5.9	•••	•	•



---

# Capítulo 9

## Principais conclusões e propostas para estudos adicionais

### 9.1. Resumo do estudo efectuado

O estudo bibliográfico efectuado no decorrer deste trabalho permitiu constatar que, apesar da significativa dimensão relativa das ligações viga-pilar em estruturas porticadas de betão armado, na análise corrente destas estruturas estes elementos são representados por modelos de eixos ou modelos rígidos, ambos excessivamente simplistas. Além disso, constatou-se que as normas e especificações técnicas, quando apresentam disposições relativas a ligações viga-pilar, visam unicamente garantir que a sua capacidade resistente é adequada, ignorando a sua deformabilidade. No entanto, os resultados de diversos estudos experimentais, relativos ao comportamento de ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado, sugerem que a deformação das ligações viga-pilar afecta de forma significativa o comportamento global da estrutura e não deve ser desprezada.

Neste estudo foi efectuada uma análise, com o programa de elementos finitos ATENA 3D, com o objectivo de caracterizar o campo de tensões normais nas armaduras longitudinais das vigas e pilares que se prolongam para o interior da ligação e, desta forma, avaliar a validade da prática actual de dimensionar as vigas e pilares usando modelos implícitos de eixos, ou seja, para valores dos esforços superiores aos que ocorrem nas suas extremidades efectivas.

Foi desenvolvido um modelo de ligação viga-pilar, baseado no método das componentes, destinado à análise quase-estática corrente de estruturas porticadas de betão armado. Para tal foi necessário (i) estabelecer um modelo, e procedimento numérico de análise dedicado, para as componentes amarração e (ii) avaliar os modelos disponíveis na bibliografia para a componente núcleo da ligação sujeito a corte, de modo a seleccionar os mais adequados.

Implementou-se no EvalS, um programa de elementos finitos vocacionado para a análise de estruturas reticuladas, o modelo de ligação viga-pilar desenvolvido, na forma de um novo

elemento, conjuntamente com um modelo seccional de fibras estabelecido para a modelação de elementos lineares de betão armado. A implementação destes dois modelos teve em vista a análise material e geometricamente não linear no âmbito do método das forças fictícias (MFF). Para a validação destes modelos, e da sua implementação no EvalS, foram considerados os resultados (i) de problemas analíticos com solução conhecida e (ii) de ensaios experimentais de estruturas de betão armado de diversas tipologias (tirantes, vigas e estruturas cruciformes).

A implementação destes dois modelos no EvalS foi seguidamente utilizada para analisar a influência do comportamento das ligações viga-pilar (i) na capacidade resistente e na deformabilidade lateral de estruturas porticadas correntes de betão armado submetidas a cargas gravíticas e laterais e (ii) nos resultados de uma análise *pushover*.

Foram estabelecidos critérios simplificados, com níveis de complexidade progressivos, para a avaliação expedita da influência da flexibilidade das ligações viga-pilar no comportamento de estruturas porticadas de betão armado não contraventadas submetidas a cargas gravíticas e laterais. Estes critérios reflectem o efeito da deformação das ligações viga-pilar sobre a deformação lateral da estrutura e sobre os efeitos de segunda ordem. Estes critérios permitem distinguir os casos em que é válida a utilização de um modelo simplificado (implícito) para as ligações viga-pilar daqueles em que é necessário utilizar um modelo mais rigoroso (explícito).

Por fim, com o programa de elementos finitos ATENA 3D, foi efectuada uma análise detalhada do comportamento do núcleo das ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado, tendo em vista a clarificação deste comportamento e a quantificação da influência dos factores mais relevantes.

## 9.2. Principais conclusões

Ao longo deste documento, foram referidos os principais resultados e conclusões que iam sendo estabelecidos. Destacam-se nesta secção os mais significativos, atendendo à sua relevância para a prática da engenharia de estruturas e para o avanço do conhecimento neste campo específico.

- I. Os modelos para ligações viga-pilar implícitos e deformáveis são mecanicamente inconsistentes, na medida em que os modos de deformação e os campos de tensão predominantes nas ligações viga-pilar são distintos dos que ocorrem em elementos lineares. Além disso, a utilização destes modelos na análise das estruturas porticadas (i) não permite simular a variação de rigidez da ligação ao longo da história de carga, (ii) não permite detectar adequadamente o colapso das ligações viga-pilar, (iii) pode conduzir a um sobredimensionamento significativo das vigas e pilares adjacentes e (iv) não permite representar adequadamente o efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar sobre o comportamento da estrutura.
- II. Quando utilizado para efeitos de análise, um modelo para estruturas porticadas de betão armado em que a ligação seja considerada rígida e infinitamente resistente, conduz geralmente a uma sobrestimação da capacidade resistente da estrutura. Para este erro contribui a exclusão dos efeitos tanto da resistência como da deformabilidade da ligação.

- III. A análise minuciosa do campo de tensões normais no prolongamento das armaduras longitudinais das vigas e pilares para o interior das ligações viga-pilar, permitiu concluir que este apresenta valores máximos na periferia da ligação (com desvios irrelevantes), ou seja, nas extremidades efectivas das vigas e pilares. Este resultado permite afirmar que (i) o dimensionamento das vigas e pilares deve basear-se no valor dos esforços nas suas extremidades efectivas e, conseqüentemente, (ii) a ligação viga-pilar deve ser modelada como um elemento estrutural individualizado.
- IV. O elemento ligação viga-pilar desenvolvido com base no modelo de ligação apresentado, representa o comportamento da ligação de forma verosímil e objectiva e permite descrever o comportamento da ligação em termos das grandezas actualmente reconhecidas como mais adequadas para quantificar os campos de tensão e deformação nas ligações viga-pilar de estruturas porticadas de betão armado. Além disso, este elemento é adequado à actividade no gabinete de projecto, na medida em que é intuitivo, compatível com os elementos viga-pilar lineares correntes e facilmente implementável num programa de elementos finitos usual, sem implicar um acréscimo significativo da complexidade do modelo da estrutura e do tempo despendido na sua elaboração.
- V. À semelhança de alguns documentos relativos a acções sísmicas, as especificações técnicas utilizadas como referência no projecto de estruturas de betão armado, para acções quase-estáticas, deveriam incluir disposições com vista a orientar a modelação das ligações viga-pilar e a verificação da sua capacidade resistente, ou, pelo menos, incorporar critérios para a avaliação simplificada da relevância da sua flexibilidade.
- VI. Os critérios desenvolvidos no Capítulo 7 para a avaliação expedita do efeito da deformabilidade das ligações viga-pilar, permitem classificá-las de acordo com essa deformabilidade e determinar se na análise estrutural é adequada a utilização de um modelo implícito para as ligações (o modelo rígido ou o modelo de eixos), ou se, pelo contrário, é requerido um modelo explícito.
- VII. O estudo paramétrico realizado com base no programa de elementos finitos ATENA 3D permitiu concluir que a rigidez do núcleo da ligação ao corte se reduz significativamente nas imediações do colapso e que, por esse motivo, o dimensionamento deste elemento deve impedir que ele seja submetido a esforço de corte elevado, ainda que inferior ao de colapso. Nos modelos usados como referência, os factores com maior influência sobre a rigidez ao corte  $G_s$  do núcleo das ligações viga-pilar interiores são o (i) esforço axial nos pilares, (ii) a configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico e (iii) a disposição de varões na diagonal das ligações. Para a resistência ao corte do núcleo das ligações viga-pilar interiores, os factores com maior influência são (i) a tensão de rotura à compressão do betão, (ii) a disposição de varões em diagonal na ligação e (iii) a configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico. O factor com maior influência sobre a rigidez ao corte  $G_s$  do núcleo das ligações viga-pilar de extremidade é a quantidade de armadura transversal na ligação, e sobre a sua resistência são (i) a tensão de rotura à

compressão do betão, (ii) a configuração da ligação na direcção ortogonal ao plano do pórtico, (iii) a quantidade de armadura transversal na ligação e (iv) o diâmetro interno da dobra dos varões da armadura longitudinal das vigas. O impacto de um dado factor, tanto sobre a capacidade resistente como sobre a deformabilidade do núcleo das ligações viga-pilar, depende da configuração da ligação no plano do pórtico.

### 9.3. Propostas de estudos adicionais

O modelo de ligação viga-pilar desenvolvido neste estudo cobre diferentes configurações da ligação e esquemas de pormenorização da armadura. Porém, ignora alguns aspectos com eventual relevância para o comportamento das ligações, devido (i) à inexistência de modelos que permitam reflectir esses aspectos nas curvas de comportamento das componentes ou (ii) a limitações intrínsecas ao próprio modelo.

É pois necessária a realização de estudos adicionais com o intuito de averiguar, quantificar e incorporar nas leis de comportamento das componentes do modelo de ligação viga-pilar proposto, em particular da componente núcleo da ligação viga-pilar, o efeito (i) da presença das lajes, (ii) do valor do esforço axial nas vigas e pilares, (iii) da pormenorização efectiva da armadura, e não apenas da taxa de armadura transversal, e (iv) da incorporação de fibras, metálicas ou não, na composição do betão. Neste sentido, e tendo em consideração que os modelos fundamentados em analogias físicas disponíveis para o comportamento do núcleo da ligação (Capítulo 5) ainda não apresentam um desempenho adequado, julga-se que, no seguimento de trabalhos recentes (Lourenço e Almeida [2013]), o desenvolvimento e análise de modelos baseados em campos de tensões (Muttoni, Schwartz *et al.* [1996]) pode ser a abordagem ideal para a concretização destes estudos e assim conduzir a uma maior compreensão do comportamento das ligações viga-pilar.

Como limitações intrínsecas do modelo de ligação viga-pilar desenvolvido, e que devem ser alvo de uma análise mais aprofundada, podem-se referir (i) a não consideração de ligações em que as vigas à esquerda ou à direita (ou os pilares acima e abaixo) apresentam secção transversal diferente, (ii) a não consideração da interacção entre as amarrações da armadura longitudinal das vigas e pilares em faces opostas da ligação, e (iii) o estar restringido à análise de pórticos planos. Relativamente a este último aspecto, tendo em atenção que actualmente é corrente a análise 3D de estruturas reticuladas, é importante desenvolver modelos espaciais da ligação viga-pilar. Para esse efeito, pode, tal como neste estudo, usar-se o método das componentes. Alternativamente, pode ser aplicada uma abordagem talvez com maior potencial, mas para cujo teste nesta tese não houve disponibilidade de tempo, que consiste no desenvolvimento de um elemento finito associado a modos de deformação elementares uniformes como os representados na Figura 5.4. Esta segunda alternativa apresenta o potencial de permitir incorporar modos de deformação ignorados no modelo proposto neste estudo.

Relativamente aos procedimentos de análise não linear desenvolvidos para o método das forças fictícias e implementados no programa EvalS, é necessário desenvolver um procedimento robusto capaz de ultrapassar pontos limite, na linha dos algoritmos de *path-following* e *arc-length* (Crisfield [1991]).



No seguimento de trabalhos experimentais recentes (Yu e Tan [2012], Sadek, Main *et al.* [2011]), é importante avaliar a influência das ligações viga-pilar sobre a robustez de estruturas porticadas completas de betão armado. Para tal é necessário implementar no Evals procedimentos de análise geometricamente não linear exactos, por forma a modelar percursos de carga alternativos (*e.g.*, efeito de catenária).

Os critérios de classificação das ligações viga-pilar de acordo com o efeito da sua flexibilidade, estabelecidos no Capítulo 7, são definidos em função do valor da rigidez elementar efectiva das vigas e pilares e componentes das ligações viga-pilar. Apesar de algumas especificações técnicas indicarem expressões para quantificar a rigidez efectiva em vigas e pilares, os valores propostos apresentam uma grande dispersão. Por esse motivo, torna-se necessário desenvolver métodos que determinem o valor desta rigidez de forma mais rigorosa, os quais se devem basear exclusivamente na flexibilidade associada a cada elemento, o que, no caso das vigas e pilares, deve excluir outras parcelas da deformação, como a que ocorre na ligação viga-pilar ou nos elementos de fundação. É igualmente necessário realizar um estudo paramétrico abrangente que permita validar e calibrar os critérios propostos no Capítulo 7.

De uma forma geral, esta tese é um trabalho de investigação numérico, e todos os resultados aqui expressos foram determinados com base em programas numéricos, apoiaram-se em dados experimentais e foram sempre sujeitos a um escrutínio analítico minucioso. É também evidente que, dado o elevado custo inerente à investigação experimental, alguns assuntos da área da engenharia devem ser primeiro abordados com o auxílio de modelos numéricos, não só para avaliar se se justifica a realização posterior de uma investigação experimental, mas também para estabelecer as conjecturas que orientarão a campanha experimental, e sem as quais se comprometeria a sua eficácia. Ora o assunto investigado nesta tese apresenta essas características, como o provam o vasto conjunto de factores e as diferentes perspectivas que foi necessário considerar. Dito isto, é evidente que os resultados determinados nos Capítulos 4 e 8, com os modelos aí descritos e o programa de elementos finitos ATENA 3D, requerem validação experimental.

Por fim, dada a tendência crescente tanto para a reabilitação como para o reforço de estruturas, em detrimento da construção de edifícios novos, por motivos como a sustentabilidade, a salvaguarda do património arquitectónico, económicos, etc., seria interessante estender o modelo de ligação desenvolvido neste trabalho a ligações viga-pilar (i) com esquemas de pormenorização da armadura que não satisfazem as recomendações técnicas actuais ou (ii) sujeitas a medidas de reabilitação ou reforço (*e.g.*, encamizamentos), tendo em vista uma avaliação mais rigorosa do seu comportamento estrutural e, consequentemente, a minimização do custo dessas medidas.



---

# Anexo

## Modelação simplificada da componente amarração

### A.1. Introdução

O modelo proposto no Capítulo 5 para as componentes amarração é genérico, porque a relação constitutiva para a aderência na interface varão-betão é arbitrária.

Neste anexo, apresenta-se (i) uma descrição sumária dos mecanismos resistentes na interface varão-betão, (ii) a relação constitutiva do MC90 [1990], com as alterações da versão provisória do MC2010 (Fib [2010a]), e (iii) um modelo simplificado das componentes amarração, para uma relação constitutiva na interface varão-betão constante por troços.

### A.2. Relações tensão de aderência-escorregamento

A evolução do mecanismo de aderência entre armaduras nervuradas e o betão envolvente foi explicada por Eligehausen, Popov *et al.* [1983]. Num troço rectilíneo de um varão nervurado imerso em betão, considere-se uma secção  $I$  ortogonal ao eixo do varão, onde o deslocamento do betão na direcção do eixo do varão está impedido e onde é imposto um deslocamento longitudinal  $s = s_I$  no varão. Este deslocamento  $s$  corresponde ao movimento relativo entre betão e varão, na direcção longitudinal deste, denominado *escorregamento*. Considere-se ainda uma secção  $II$ , à distância  $L$  da secção  $I$ , sendo o comprimento  $L$  suficientemente grande para que várias nervuras estejam compreendidas entre  $I$  e  $II$ , mas suficientemente pequeno para que  $s_I - s_{II} \approx 0$ . Define-se tensão de aderência ( $\tau$ ) pela expressão

$$\tau(s) = \frac{F_I(s) - F_{II}(s)}{2\pi\phi L} \quad (\text{A.1})$$

em que  $F_I$  e  $F_{II}$  são as resultantes das tensões normais com a direcção longitudinal do varão nas secções  $I$  e  $II$ , respectivamente, e  $\phi$  é o diâmetro nominal do varão (Figura A.1).

De acordo com Eligehausen, Popov *et al.* [1983], para valores reduzidos de  $s$ , o escorregamento das armaduras em relação ao betão resulta essencialmente da formação de fendas inclinadas, relativamente ao eixo do varão, a partir da zona de contacto da extremidade das nervuras com o betão – Figura A.1(a). Para maiores valores do escorregamento, caso exista confinamento transversal suficiente, ocorre esmagamento progressivo do betão na zona frontal à nervura, acompanhado da formação de fendas de corte no betão entre nervuras. Este processo é acompanhado de uma redução acentuada da rigidez – Figura A.1(b). Quando a quase totalidade do betão entre fendas se encontra esmagada, verifica-se uma redução da aderência. Nesta fase, é ainda observável a formação de fendas de aderência secundárias – Figura A.1(c). De acordo com Viwathanatepa, Popov *et al.* [1979a], o troço descendente da curva  $\tau$ - $s$  deve-se à combinação de três efeitos: flexão dos dentes de betão, esmagamento do betão e redução da área de corte do betão entre as nervuras da armadura. Finalmente, para valores mais elevados do escorregamento das armaduras em relação ao betão, o único mecanismo resistente é o atrito entre o betão e as armaduras, que é tanto maior quanto maior o confinamento transversal.

O esmagamento completo do betão entre fendas e a formação de fendas de corte secundárias só são observáveis em betão com confinamento transversal suficiente, na medida em que este impede o aumento do comprimento e da largura das fendas de aderência iniciais. Caso não exista confinamento transversal suficiente, as fendas de corte secundárias entre nervuras serão pouco significativas e o mecanismo de colapso decorre da propagação e abertura das fendas de aderência iniciais, que formam um cone de betão que se destaca do restante e provoca uma diminuição abrupta da resistência.

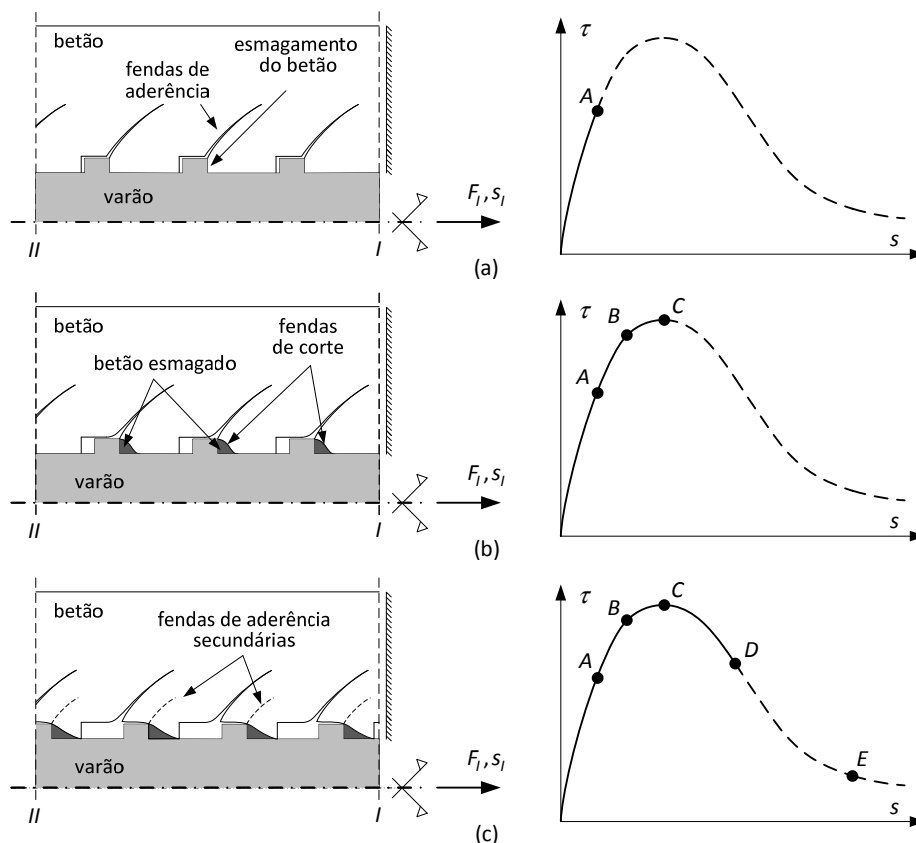


Figura A.1 – Mecanismo de resistência por aderência para armaduras nervuradas (Eligehausen, Popov *et al.* [1983]), (a) fase inicial, (b) fase intermédia, (c) fase final.

### A.2.1. MC90/MC2010

A relação constitutiva para a interface varão nervurado-betão mais habitualmente referida na bibliografia é a do §3.1 do MC90. Nesta secção, apresenta-se sucintamente esta relação e as alterações relevantes introduzidas na versão provisória do MC2010.

O MC90 prevê dois cenários em termos de confinamento (confinado e não confinado), dois cenários em termos de condições de aderência (boas condições de aderência e outras condições de aderência) e considera a classe de resistência do betão e as características da superfície dos varões.

A relação constitutiva do MC90 apresenta rigidez tangente inicial infinita, o que pode causar problemas numéricos. Foi recentemente proposta uma relação constitutiva (Eligehausen, Ozbolt *et al.* [2006]) que considera de forma explícita o estado de tensão radial no betão envolvente e que apresenta rigidez tangente inicial finita. No entanto, as relações tensão de aderência-escorregamento que contabilizam o estado de tensão no betão envolvente (i) são complexas, (ii) envolvem um elevado número de parâmetros de calibração sem significado físico aparente e (iii) exigem uma quantidade de informação significativa, normalmente só disponível mediante a realização de ensaios experimentais em condições muito controladas.

De acordo com o MC90, para carregamentos monotónicos, a tensão de aderência entre o betão e varões nervurados pode ser calculada em função do deslocamento relativo  $s$ , de acordo com a expressão (A.2), esquematicamente representada na Figura A.2. Para  $s < s_2^{mc}$ , o MC90 indica que se pode assumir que a descarga é linear com rigidez  $S = 200 \text{ N/mm}^3$  (Figura A.2).

$$\tau(s) = \begin{cases} \tau_{\max} \left( \frac{s}{s_1^{mc}} \right)^\alpha, & \text{se } 0 \leq s \leq s_1^{mc}, \\ \tau_{\max}, & \text{se } s_1^{mc} < s \leq s_2^{mc}, \\ \tau_{\max} - (\tau_{\max} - \tau_f) \frac{s - s_2^{mc}}{s_3^{mc} - s_2^{mc}}, & \text{se } s_2^{mc} < s \leq s_3^{mc}, \\ \tau_f, & \text{se } s > s_3^{mc}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A expressão (A.2) abarca todas as formas usuais da relação tensão de aderência-escorregamento, dependendo dos valores de  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) e  $s_1^{mc}$ , incluindo a relação inicialmente constante ( $\alpha = 0$ ) e a relação inicialmente linear ( $\alpha = 1$ ).

Os parâmetros da Tabela A.1 são válidos para armaduras nervuradas com valor da área de nervuras relativa  $A_{sr} \approx A_{sr, \min}$ , em que  $A_{sr, \min}$  é o valor mínimo indicado nas especificações técnicas relevantes. Para varões com  $A_{sr} > A_{sr, \min}$  a resistência da aderência  $\tau_{\max}$  aumenta e os

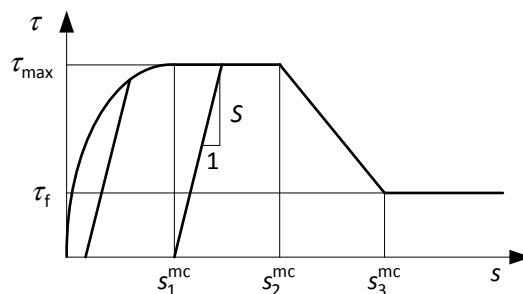


Figura A.2 – Relação tensão de aderência-escorregamento (MC90 [1990]).

Tabela A.1 – Parâmetros de aderência para armaduras nervuradas com  $A_{sr} \approx A_{sr,min}$  (MC90 [1990]).

parâmetro	betão não confinado <sup>a</sup>		betão confinado <sup>b</sup>	
	boas condições de aderência	outras condições de aderência	boas condições de aderência	outras condições de aderência
$s_1^{mc}$ [mm]	0.6	0.6	1.0	1.0
$s_2^{mc}$ [mm]	0.6	0.6	3.0	3.0
$s_3^{mc}$ [mm]	1.0	2.5	$s_L$	$s_L$
$\alpha$	0.4	0.4	0.4	0.4
$\tau_{max}/(f_{ck})^{1/2}$	2.0	1.0	2.5	1.25
$\tau_f/\tau_{max}$	0.15	0.15	0.40	0.40

<sup>a</sup> Rotura provocada por *splitting* do betão.

<sup>b</sup> Rotura por corte do betão entre nervuras (*pull-out*), sendo  $s_L$  a distância livre entre nervuras na direcção do eixo longitudinal.

valores característicos do escorregamento  $s$  diminuam. No entanto, este efeito é desprezado, tal como também o é a dependência da aderência em relação à compactação e cura do betão. Além disso, os valores indicados na Tabela A.1 são aplicáveis apenas nos casos em que o betão não está sujeito a tracção transversal.

Os valores dados na Tabela A.1 relativos a betão não confinado são válidos para um recobrimento mínimo  $c = \phi$  e uma armadura transversal mínima dada por  $A_{st,min} = 0.25nA_s$ , onde  $A_{st}$  é a área dos estribos (os dois ramos) ao longo do troço de armadura em estudo,  $n$  é o número de varões envolvidos pelos estribos e  $A_s$  é a área da secção transversal de um desses varões.

Os valores relativos a betão confinado são válidos para (i) recobrimento  $c \geq 5\phi$  e espaçamento livre entre varões superior a  $10\phi$  ou (ii) armaduras transversais (fechadas) pouco afastadas com uma área  $A_{st} > nA_s$  ou ainda (iii) valor médio da pressão transversal correspondente a valores de cálculo das cargas aplicadas elevado ( $p \geq 7.5$  MPa).

Se a área de armadura transversal  $A_{st}$  estiver contida no intervalo  $]A_{st,min}, nA_s[$  ou a pressão transversal  $p$  no intervalo  $]0, 7.5$  MPa[, os valores de  $s_1^{mc}$ ,  $s_3^{mc}$ ,  $\tau_{max}$  e  $\tau_f$  podem ser interpolados linearmente entre os valores de betão não confinado e confinado. Se está presente simultaneamente uma armadura transversal  $A_{st} > A_{st,min}$  e pressão transversal então os efeitos podem ser adicionados.

Os valores indicados na Tabela A.1 são válidos para os troços dos varões a uma distância  $x > 5\phi$  de uma fenda transversal. Nos troços dos varões a uma distância  $x \leq 5\phi$  de uma fenda transversal, os valores indicados na Tabela A.1 devem ser reduzidos multiplicando-os pelo factor  $\lambda$  dado por (A.3), que reflecte a formação do cone de *pull-out*.

$$\lambda = 0.2 \frac{x}{\phi} \leq 1. \quad (\text{A.3})$$

O MC90 também apresenta valores para armaduras lisas. No entanto, dado que a utilização destas armaduras não é corrente, não serão consideradas neste documento.

De acordo com o MC90, os resultados das séries de ensaios com base nas quais foi estabelecida a relação constitutiva  $\tau$ - $s$  anterior apresentam dispersão considerável, especialmente para valores reduzidos de  $s$ . Para um dado valor do escorregamento, o

coeficiente da variação de  $\tau$  pode atingir 30%. Esta dispersão é causada pela utilização de diferentes (i) tipologias de espécimes experimentais, que induzem diferentes estados de tensão no betão envolvente dos varões, (ii) técnicas de medição e (iii) velocidades de aplicação da força ou deslocamento e (iv) heterogeneidade do betão e das características das armaduras (área relativa de nervuras, diâmetros).

As amarrações das armaduras longitudinais das vigas e pilares nas ligações viga-pilar bem pormenorizadas podem tipicamente ser consideradas como confinadas: a compressão transversal decorrente do esforço axial dos pilares, o confinamento conferido pelas cintas da ligação bem como o confinamento das armaduras longitudinais das vigas pelas armaduras longitudinais dos pilares, são normalmente suficientes para garantir os critérios indicados anteriormente.

No que diz respeito às condições de aderência, de acordo com o §6.9.3 do MC90, os varões com inclinação superior a 45° relativamente à horizontal apresentam boas condições de aderência. Também apresentam boas condições de aderência os varões com inclinação inferior a 45° relativamente à horizontal caso distem menos de 250 mm da face inferior ou mais de 300 mm da face superior de uma camada de betão produzida numa única betonagem. Desta forma, no interior das ligações viga-pilar, pode-se admitir que as armaduras longitudinais dos pilares apresentam sempre boas condições de aderência e, para  $h_b < 250\text{mm}$ , as armaduras longitudinais das vigas também. Ainda no caso da armadura longitudinal das vigas, para  $h_b > 250\text{mm}$ , os varões superiores apresentam outras condições de aderência – assumindo que as vigas são betonadas totalmente numa fase – e os varões inferiores apresentam boas condições de aderência, caso exista uma junta de betonagem na interface entre o pilar inferior e a face inferior da viga, e outras condições de aderência, caso a viga seja betonada conjuntamente com o pilar inferior.

Tendo em conta estes aspectos, na modelação de ligações viga-pilar recorrendo ao ATENA 3D (Capítulo 4 e Capítulo 8), considerou-se que todas as armaduras estão confinadas e apresentam boas condições e aderência.

No entanto, para a simulação do comportamento de ligações viga-pilar com o modelo desenvolvido no Capítulo 5, continua-se a admitir que as armaduras estão confinadas mas apresentando outras condições de aderência (mais desfavorável), porque:

- (i) no modelo desenvolvido no Capítulo 5, contrariamente ao que ocorre na modelação de EF recorrendo ao ATENA 3D, não é contabilizado o escorregamento que resulta da fendilhação do betão envolvente dos varões (zona  $\Omega$  da Figura 4.7);
- (ii) os valores da Tabela A.1 só são aplicáveis nos casos em que o betão não está sujeito a tracção transversal; em ligações viga-pilar é provável que numa porção dos varões da armadura longitudinal das vigas e dos pilares esta condição não se verifique; este aspecto é parcialmente considerado no ATENA 3D, por intermédio da relação constitutiva do betão, mas é ignorado no modelo desenvolvido no Capítulo 5.

A versão provisória do novo MC2010 introduz algumas alterações aos valores dos parâmetros da expressão (A.2) bem como na quantificação do efeito da compressão transversal e do estado de tensão dos varões da armadura.

Dado que, de acordo com a bibliografia, o modo de *splitting* não é comum em ligações viga-pilar adequadamente pormenorizadas, só serão referidas as alterações às disposições do MC90 consideradas relevantes para os modos de rotura por *pull-out*:

- (i) para outras condições de aderência, tem-se  $s_1^{mc} = 1.8$  mm e  $s_2^{mc} = 36$  mm em (A.2);
- (ii) os valores indicados para os parâmetros da expressão (A.2) só são válidos para armaduras com tensão inferior à tensão de cedência;
- (iii) caso a tensão na armadura seja superior à tensão de cedência, é introduzido um factor  $\Omega_y$  para modificar a tensão definida pela expressão (A.2);
- (iv) caso existam tensões transversais de compressão, é introduzido um factor  $\Omega_{p,tr}$  para modificar a tensão definida pela expressão (A.2);
- (v) o comprimento da zona na vizinhança das secções fendilhadas em que os parâmetros  $\tau$  e  $s$  da expressão (A.2) sofrem uma redução linear passa a ser  $2\phi$ .

Relativamente aos pontos (i) a (iii), apesar destas disposições poderem ser relevantes para o estudo em causa, tendo em conta o carácter provisório da versão disponível do MC2010, assumiu-se simplificadamente que os parâmetros disponibilizados no MC90 são válidos independentemente do nível de tensão nas armaduras.

Relativamente ao ponto (iv), no caso das ligações viga-pilar, não é plausível que se possa garantir em todo o perímetro do varão uma determinada compressão transversal, pelo que, de acordo com o MC2010, deve considerar-se  $\Omega_{p,tr} = 1$ .

A variação linear dos parâmetros  $\tau$  e  $s$  nas imediações de uma fenda visa contabilizar a formação do cone de *pull-out* na face do betão. O comprimento  $2\phi$  proposto pelo MC2010, face aos resultados obtidos no §5.4, aparenta ser um valor com maior correspondência experimental que o comprimento  $5\phi$  indicado no MC90 e, por isso, foi utilizado neste estudo.

### A.2.2. Tensão de aderência constante por troços

De forma simplificada, alguns autores propõem uma relação  $\tau$ - $s$  em que a tensão de aderência é constante por troços. Em seguida, apresentam-se algumas dessas propostas.

Lowes, Mitra *et al.* [2004] analisaram os resultados de ensaios experimentais em condições cíclicas efectuados por diversos investigadores e concluíram que a tensão de aderência na interface varão-betão é função do estado de tensão no varão amarrado, no betão envolvente e na armadura transversal na vizinhança da amarração. A tensão tangencial de aderência é relativamente elevada caso exista tensão transversal de compressão e relativamente baixa caso exista tensão transversal de tracção. Além disso, a tensão de aderência diminui quando o valor da tensão nas armaduras é superior à tensão de cedência à tracção e aumenta quando este valor é superior (em valor absoluto) à tensão de cedência à compressão. Lowes, Mitra *et al.* [2004] propuseram os valores indicados na Tabela A.2.

Alsawat e Saatcioglu [1991] propuseram igualmente que o valor da tensão de aderência entre a armadura nervurada e o betão fosse definido em função do estado de tensão nos varões. Estes autores indicaram, quando os varões estão em regime elástico, a utilização do valor da tensão



Tabela A.2 – Tensão de aderência em função do estado de tensão na armadura (Lowe, Mitra *et al.* [2004]).

$\sigma_s$	$\tau / (f'_c/\text{MPa})^{1/2}$ [MPa]
tracção	
$\sigma_s < f_y$	1.8
$\sigma_s > f_y$	0.4 a 0.05
compressão	
$ \sigma_s  < f_y$	2.2
$ \sigma_s  > f_y$	3.6

de aderência considerado para o cálculo do valor do comprimento mínimo de amarração estabelecido pelo ACI Committe 408 [1979], de modo que se tem

$$\tau = \frac{f_y \phi}{4L_d} \quad (\text{A.4})$$

em que  $L_d$  é o comprimento mínimo de amarração recomendado pelo ACI Committe 408 [1979], que é dado por

$$\frac{L_d}{\text{mm}} = \frac{440 A_s / \text{mm}^2 f_y / \text{MPa}}{K \sqrt{f'_c / \text{MPa}}} \geq 300 \quad (\text{A.5})$$

sendo  $K$  um coeficiente que reflecte o efeito das armaduras de confinamento, do recobrimento e do espaçamento entre varões.

Após a entrada em cedência das armaduras, de acordo com Alsiwat e Saatcioglu [1991], é de esperar a ocorrência de grandes deslocamentos relativos entre o betão e as armaduras, como consequência do esmagamento do betão entre as nervuras dos varões. Por esse motivo, Alsiwat e Saatcioglu [1991] propuseram que o valor da tensão de aderência para varões com tensão superior à tensão de cedência seja função da geometria da superfície das armaduras, de acordo com a expressão estabelecida por Pochanart e Harmon [1989]

$$\frac{\tau}{\text{MPa}} = \left( 5.5 - 0.07 \frac{s_L}{h_L} \right) \sqrt{\frac{f'_c / \text{MPa}}{27.6}} \quad (\text{A.6})$$

em que  $s_L$  e  $h_L$  são a distância livre entre nervuras e a altura destas.

Sezen [2000] e Sezen e Moehle [2003], com base em ensaios realizados sobre pilares de betão armado para avaliação do escorregamento da armadura longitudinal traccionada nas amarrações, também propuseram que o estado de tensão das armaduras fosse tido em consideração na definição do valor da tensão de aderência: no troço de armadura com tensão inferior à tensão de cedência, a tensão de aderência é dada por  $1.0\sqrt{f'_c/\text{MPa}}$  e no troço de armadura com tensão superior à tensão de cedência, a tensão de aderência é dada por  $0.5\sqrt{f'_c/\text{MPa}}$ .

### A.3. Modelos simplificados para amarração rectilínea e relação constitutiva $\tau$ -s constante por troços

#### A.3.1. Modelo com aderência dependente da tensão longitudinal no varão

Apresenta-se em seguida um modelo para amarrações rectilíneas (i) com relação  $\tau$ -s definida

por dois troços com  $\tau$  constante, (ii) com armadura com comportamento bilinear, e (iii) em que a mudança de regime da relação  $\tau$ - $s$  ocorre quando  $\sigma_s = f_y$ . Assume-se ainda que (iv) o troço rectilíneo das armaduras tem um comprimento suficiente grande para que se dê a transmissão das forças ao betão, ou seja, não existe movimento de corpo rígido do varão, (v) para efeito de escorregamento das armaduras o betão é indeformável e (vi) na secção onde é nula a tensão longitudinal nos varões, estes não escorregam em relação ao betão.

### A.3.1.1. Relações estruturais

Considere-se um bloco de betão onde está imerso um varão de armadura rectilíneo. Admita-se que a armadura está solicitada numa das extremidades por uma força com a direcção do seu eixo e que se desenvolvem tensões tangenciais na superfície de contacto entre o varão e o betão que equilibram a força aplicada. Admita-se ainda que o comprimento do varão em contacto com o betão é suficientemente grande para que, em virtude da aderência varão-betão, a redução da tensão normal no varão seja tal que esta tensão acaba por se anular.

Considere-se ainda que a coordenada  $x$  correspondente a um referencial com origem no ponto onde se anula a tensão no varão e se refere a um eixo que coincide com o do varão.

#### A.3.1.1.1. Relações de equilíbrio

Seja  $F(x_1)$  a força axial numa secção do varão que dista  $x_1$  da origem do referencial. Por equilíbrio estático do troço do varão compreendido entre a origem do referencial e esta secção, obtém-se

$$F(x_1) = u \int_0^{x_1} \tau(x) dx = \pi \phi \int_0^{x_1} \tau(x) dx \quad (\text{A.7})$$

e

$$\sigma_s(x_1) = \frac{1}{A_s} F(x_1) = \frac{4}{\pi \phi^2} F(x_1) = \frac{4}{\phi} \int_0^{x_1} \tau(x) dx \quad (\text{A.8})$$

em que  $u$  e  $A_s$  são o perímetro e a área da secção transversal do varão.

#### A.3.1.1.2. Relações de compatibilidade

O movimento relativo entre o varão e o betão envolvente na secção de coordenada  $x_1$ , assumindo que o betão é indeformável, é dado por

$$s(x_1) = \int_0^{x_1} \varepsilon_s(x) dx \quad (\text{A.9})$$

em que  $\varepsilon_s$  é a extensão longitudinal no varão.

#### A.3.1.1.3. Relações constitutivas

A relação bilinear  $\sigma_s$ - $\varepsilon_s$  para o aço do varão na direcção axial pode ser expressa por

$$d\varepsilon_s(x) = \frac{1}{E_T(x)} d\sigma_s(x) \rightarrow \varepsilon_s(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_s(x)}{E}, & \text{se } \sigma_s(x) \leq f_y, \\ f_y \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_{sh}} \right) + \frac{\sigma_s(x)}{E_{sh}}, & \text{se } \sigma_s(x) > f_y, \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

em que  $E_T$  é o módulo de elasticidade tangente,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $E_{sh}$  é o módulo de endurecimento do aço.

Combinando as expressões (A.8), (A.9) e (A.10), chega-se à expressão (A.11) para o escorregamento na secção de coordenada  $x_1$

$$s(x_1) = \begin{cases} \frac{4}{E\phi} \int_0^{x_1} \int_0^x \tau(s) ds dx, & \text{se } \sigma_s(x_1) \leq f_y, \\ \frac{4}{E\phi} \int_0^{L_y} \int_0^x \tau(s) ds dx + f_y \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_h} \right) (x_1 - L_y) + \frac{4}{E_h \phi} \int_{L_y}^{x_1} \int_0^x \tau(s) ds dx, & \text{se } \sigma_s(x_1) > f_y, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

em que  $L_y < x_1$  é a abcissa da secção com valor da tensão normal no varão igual à tensão de cedência,  $\sigma_s(L_y) = f_y$ .

### A.3.1.2. Particularização das relações estruturais

#### A.3.1.2.1. Escorregamento correspondente ao início da cedência das armaduras

Admita-se que a tensão de aderência entre a armadura e o betão para  $\sigma_s < f_y$  é constante, ou seja, independente do valor do escorregamento  $s$ , e igual a  $\tau_E$ . O comprimento máximo do varão com tensão igual a  $\tau_E$  corresponde ao comprimento do varão com tensão não nula quando  $\sigma_s = f_y$  na extremidade do varão solicitada. Fazendo  $\tau = \tau_E$ ,  $x_1 = L_y$  e  $\sigma_s(x_1) = f_y$  na expressão (A.8), Figura A.3(a), e resolvendo-a em ordem a  $L_y$ , obtém-se

$$L_y = \frac{\phi f_y}{4 \tau_E}. \quad (\text{A.12})$$

Na situação representada na Figura A.3(a) a tensão no varão, numa secção de coordenada  $x_1$  é determinada substituindo  $\tau(x) = \tau_E$  na expressão (A.8)

$$\sigma_s(x_1) = \frac{4 \tau_E x_1}{\phi} = \frac{x_1}{L_y} f_y. \quad (\text{A.13})$$

Sendo  $L$  o comprimento do varão com tensão não nula,  $s_0 = s(L)$ ,  $\sigma_{s0} = \sigma_s(L)$  e sendo  $s_y$  o escorregamento  $s_0$  correspondente a  $\sigma_{s0} = f_y$ , então  $s_y$  pode ser determinado substituindo na primeira das expressões (A.11)  $x_1 = L_y$  e  $\tau(x) = \tau_E$ , de onde se obtém

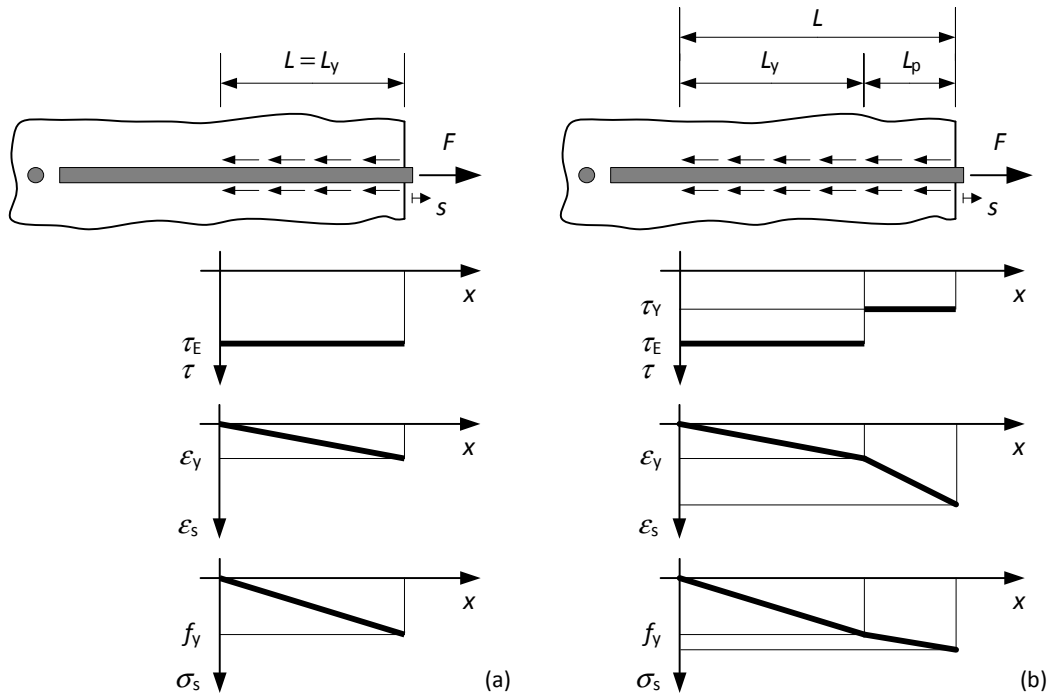
$$s_y = \frac{4 \tau_E L_y^2}{\phi E} = \frac{\phi f_y^2}{8 E \tau_E} = \frac{L_y f_y}{2 E}. \quad (\text{A.14})$$

A rigidez secante  $S_y$  correspondente a  $\sigma_{s0} = f_y$ , é pois dada por (ver Figura A.4)

$$S_y = \frac{f_y}{s_y} = \frac{2 E}{L_y}. \quad (\text{A.15})$$

#### A.3.1.2.2. Resistência da amarração à tracção

A hipótese de que a amarração é suficientemente longa para que não ocorra movimento de corpo rígido do varão conjugada com o comportamento bilinear das armaduras, conduz a um


 Figura A.3 – Amarração rectilínea, (a)  $\sigma_{s0} = f_y$ , (b)  $\sigma_{s0} > f_y$ .

modelo em que a capacidade resistente da amarração não está limitada. Por esse motivo é necessário complementar o modelo com disposições adicionais. Nesse sentido, Lowes, Mitra *et al.* [2004], seguindo as recomendações de Eligehausen, Popov *et al.* [1983], propuseram que, para acções cíclicas, se assuma que a amarração atinge a capacidade resistente quando  $s_0 = s_{max} = 3 \text{ mm}$ , valor que também será considerado para o comportamento quase-estático das amarrações.

Em armaduras correntes, o escorregamento  $s_0 = 3 \text{ mm}$  só é atingido para valores da tensão no varão superiores à tensão de cedência. A fim de determinar este valor, ou seja, da tensão de rotura da amarração  $f_{s,max}$ , estabelece-se, primeiro, a expressão que determina a tensão numa secção do varão com abcissa superior a  $L_y$ , a qual é superior à tensão de cedência.

O escorregamento na extremidade solicitada de um varão com  $\sigma_{s0} > f_y$  pode ser obtido recorrendo à expressão (A.9), tendo em consideração que existe um troço de armadura em que  $\sigma_s < f_y$  e outro em que  $\sigma_s = f_y$ . De acordo com a Figura A.3(b)

$$s_0 = \int_0^L \varepsilon_s(x) dx = \int_0^{L_y+L_p} \varepsilon_s(x) dx = \int_0^{L_y} \varepsilon_s(x) dx + \int_{L_y}^{L_y+L_p} \varepsilon_s(x) dx = s_y + \int_{L_y}^{L_y+L_p} \varepsilon_s(x) dx \text{ para } s_y < s_0 < s_{max} \quad (\text{A.16})$$

tendo-se decomposto o domínio de integração nos subdomínios correspondentes às zonas do varão que se encontram em regime elástico  $[0, L_y]$  e plástico  $[L_y, L_y + L_p]$ .

Por equilíbrio de forças no troço do varão determinado pelas secções de abcissa 0 e  $x_1$ , com  $x_1 > L_y$ , assumindo a distribuição de tensões de aderência representada na Figura A.3(b), obtém-se a tensão na armadura na secção de coordenada  $x_1$

$$F = \left( \frac{\pi \phi^2}{4} \right) \sigma_s(x_1) = \tau_E L_y (\pi \phi) + \tau_V (x_1 - L_y) (\pi \phi) \quad (\text{A.17})$$

ou seja

$$\sigma_s(x_1) = \frac{4L_y}{\phi}(\tau_E - \tau_Y) + \frac{4\tau_Y}{\phi}x_1. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.17) na segunda das relações (A.10), obtém-se

$$\varepsilon_s(x_1) = \frac{f_Y}{E} + \frac{\tau_Y(4\tau_E x_1 - d_b f_Y)}{\phi E_{sh} \tau_E} \text{ para } x_1 > L_y. \quad (\text{A.19})$$

Substituindo a expressão (A.19) na expressão (A.16), resolvendo em ordem a  $x_1$ , e fazendo  $s = s_{\max}$ , obtém-se a expressão que estabelece o valor do comprimento do varão em regime plástico ( $L_p$ ) em função do valor do escorregamento correspondente à capacidade resistente da amarração ( $s_{\max}$ ),

$$L_p = \frac{-\phi E_{sh} f_Y + \sqrt{\phi E_{sh} (\phi E_{sh} f_Y^2 + 8E^2 \tau_Y (s_{\max} - s_Y))}}{4E \tau_Y}. \quad (\text{A.20})$$

O valor da tensão de rotura da amarração ( $f_{s,\max}$ ), determinado por  $s_{\max}$ , é finalmente obtido calculando (A.18) para  $x_1 = L_y + L_p$  com  $L_p$  dado por (A.20), obtendo-se, após algumas manipulações,

$$f_{s,\max} = f_Y \left( 1 - \frac{E_{sh}}{E} + \sqrt{\left( \frac{E_{sh}}{E} \right)^2 - \frac{E_{sh} \tau_Y}{E \tau_E} \left( 1 - \frac{s_{\max}}{s_Y} \right)} \right). \quad (\text{A.21})$$

### A.3.1.2.3. Valor do escorregamento no início do patamar residual

De modo a que a relação constitutiva  $\tau$ - $s$  determine a fase de amaciamento do comportamento da amarração, ou seja, a redução de  $\sigma_0$  quando o valor do escorregamento ultrapassa  $s_{\max}$ , são necessárias disposições adicionais.

Lowes, Mitra *et al.* [2004] propuseram que, para  $s_0 > s_{\max}$ , se considere que  $\sigma_{s_0}$  decresce linearmente com  $s_0$ , correspondente a uma rigidez tangente negativa  $-S_r$ , com

$$S_r = 0.1 S_Y = 0.1 \frac{f_Y}{s_Y} = 0.2 \frac{E}{L_y}. \quad (\text{A.22})$$

De modo a estabelecer o final deste terceiro troço da relação constitutiva para a amarração, Lowes, Mitra *et al.* [2004] consideraram a resistência residual da amarração ( $f_r$ ). Esta resistência caracteriza o quarto e último troço da relação constitutiva para a amarração, definido por um valor constante da tensão,

$$\sigma_{s_0} = f_r, \text{ com } s_0 > s_r \quad (\text{A.23})$$

correspondendo  $s_r$  à transição entre o troço de rigidez negativa e este segundo troço horizontal, ou seja

$$s_r = s_{\max} + \frac{f_{s,\max} - f_r}{S_r}. \quad (\text{A.24})$$

Lowes, Mitra *et al.* [2004] admitiram que a resistência residual ( $f_r$ ) corresponde a 20% da resistência da amarração  $f_{s,\max}$ , de modo que a última expressão se pode escrever

$$s_r = 8 \frac{f_{s,\max}}{S_y} + s_{\max} . \quad (\text{A.25})$$

O terceiro troço da relação constitutiva para a amarração é portanto definido por

$$\sigma_{s_0} = f_{s,\max} - S_r (s_0 - s_{\max}), \text{ com } s_{\max} < s_0 < s_r . \quad (\text{A.26})$$

### A.3.1.3. Relação constitutiva para a amarração

Nesta secção procede-se à sistematização da relação constitutiva para a amarração estabelecida nos parágrafos anteriores. Para facilitar esta sistematização, divide-se o domínio de  $s_0$  em oito subdomínios: quatro para  $s_0 \geq 0$  e quatro para  $s_0 < 0$ . Para  $s_0 \geq 0$  têm-se (para  $s_0 < 0$  os subdomínio e as expressões seriam similares):

- (i)  $0 \leq s_0 \leq s_y$ : comportamento elástico das armaduras; substituindo (A.13) na relação  $\varepsilon_s = \sigma_s / E$ , o resultado em (A.9) e calculando o integral, obtém-se

$$s_0 = \frac{2 \tau_E L^2}{E \phi} ; \quad (\text{A.27})$$

Resolvendo (A.13) em ordem a  $x_1 = L$ , substituindo na relação anterior e resolvendo a expressão resultante em ordem a  $\sigma_{s_0}$ , obtém-se

$$\sigma_{s_0}(s_0) = \sqrt{\frac{8 \tau_E E}{\phi} s_0} ; \quad (\text{A.28})$$

- (ii)  $s_y < s_0 \leq s_{\max}$ : patamar correspondente ao comportamento plástico das armaduras;  $L > L_y$  pelo que o escorregamento é dado por

$$s_0 = \int_0^{L_y} \varepsilon_s(x) dx + \int_{L_y}^L \varepsilon_s(x) dx = s_y + \int_{L_y}^L \varepsilon_s(x) dx ; \quad (\text{A.29})$$

fazendo  $x_1 = L$  na expressão (A.17) e resolvendo-a em ordem a  $L$ , obtém-se

$$L = \frac{\phi (\sigma_{s_0} \tau_E - f_y \tau_E + f_y \tau_Y)}{4 \tau_E \tau_Y} ; \quad (\text{A.30})$$

substituindo (A.30) e (A.19) em (A.29) e resolvendo esta última expressão em ordem a  $\sigma_{s_0}$ , obtém-se

$$\sigma_{s_0}(s_0) = f_y \left( 1 - \frac{E_{sh}}{E} + \sqrt{\left( \frac{E_{sh}}{E} \right)^2 - \frac{E_{sh} \tau_Y}{E \tau_E} + 8 \frac{E_{sh} s_0 \tau_Y}{f_y^2 \phi}} \right) ; \quad (\text{A.31})$$

- (iii)  $s_{\max} \leq s_0 \leq s_r$ : troço de amaciamento pós-pico, expressão (A.26);

- (iv)  $s_0 > s_r$ : patamar de resistência residual, expressão (A.23).

A Figura A.4 representa qualitativamente a relação  $\sigma_{s_0} - s_0$ .

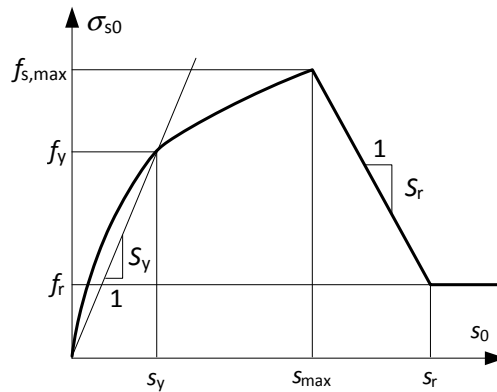


Figura A.4 – Relação constitutiva para a amarração.

#### A.3.1.4. Análise crítica do modelo

O modelo acabado de descrever apresenta como grande vantagem definir explicitamente  $\sigma_{s_0}$  em função de  $s_0$  por intermédio de expressões analíticas simples. No entanto, apresenta algumas inconsistências, em particular, (i) com base nos mecanismos envolvidos na aderência aço-betão é difícil de sustentar que a tensão de aderência seja função da tensão na armadura e não do movimento relativo entre a armadura e o betão envolvente, (ii) os valores para os parâmetros  $\tau_E$  e  $\tau_Y$  apresentados na bibliografia apresentam grande dispersão e (iii) a definição arbitrária do valor de  $s_{max}$  para determinar a resistência da amarração é discutível.

Uma forma simples de contornar a maioria destas inconsistências consiste em definir o valor da tensão tangencial (mesmo que constante por troços) como função do escorregamento e, desta forma, fazer depender a resistência da amarração das relações constitutivas para o aço e betão e do comprimento da amarração. Na próxima secção apresenta-se um modelo estabelecido de acordo com estes princípios.

#### A.3.2. Modelo com valor da tensão de aderência independente da tensão normal do varão

Nesta secção apresenta-se o desenvolvimento de uma relação constitutiva  $\sigma_{s_0}$ - $s_0$  semelhante à apresentada no §A.3.1, novamente para uma relação  $\tau$ - $s$  constante por troços, mas independente da tensão normal na armadura. Para esse efeito, foi utilizado o modelo de amarração rectilínea apresentado no §5.4.2, particularizado para uma amarração em tracção.

Note-se que a força aplicada na extremidade do varão ( $F_0 = \sigma_{s_0} A$ ) e o seu escorregamento ( $s_0$ ) correspondem, no modelo proposto no §5.4.2 à força aplicada na célula 1 ( $F_1$ ) e ao escorregamento do nó 1 ( $s_1$ ), respectivamente.

Para determinar expressões analíticas da relação  $F_1$ - $s_1$  ( $=F_0$ - $s_0$ ) assumindo uma relação  $\tau$ - $s$  constante por troços e recorrendo ao modelo proposto no §5.4.2, é recomendável visualizar esta relação como uma sucessão de passos em que cada um pode ser decomposto em dois sub-passos. Cada passo corresponde a um troço da relação  $F_1$ - $s_1$  em que a resultante das tensões de aderência é constante em todas as células do modelo. Desta forma, ocorre um incremento de passo sempre que a resultante das tensões de aderência numa das células se altera. Num mesmo passo é possível identificar uma fase em que, apesar das resultantes das tensões de aderência em todas as células não sofrerem alterações, as forças aplicadas nas

células variam e outra fase em que não variam. A primeira fase é referida como o sub-passo 1 e a segunda fase como o sub-passo 2. Considere-se  $X^{j,k}$  a quantidade  $X$  no final do sub-passo  $k$  do passo  $j$  bem como a nomenclatura definida no §5.4.2.

As condições de equilíbrio e compatibilidade apresentadas no §5.4.2 são agora dadas em cada sub-passo pelas expressões

$$\text{equilíbrio da célula: } F_i^{j,k} = F_{m,i}^{j,k} + F_{ad,i}^{j,k} \text{ com } i=1, \dots, n; \quad (\text{A.32})$$

$$\text{equilíbrio nodal: } F_i^{j,k} = F_{m,i-1}^{j,k} \text{ com } i=1, \dots, n; \quad (\text{A.33})$$

$$\text{compatibilidade: } \Delta_{m,i}^{j,k} = s_i^{j,k} - s_{i+1}^{j,k} \text{ com } i=1, \dots, n. \quad (\text{A.34})$$

### A.3.2.1. Relações constitutivas

Em seguida, mostra-se que, apesar da abordagem proposta (i) permitir desenvolver as expressões analíticas da relação  $\sigma_{s0}-s_0$  para uma relação  $\tau-s$  constante por troços e independente da tensão longitudinal na armadura e (ii) dispensar a definição de parâmetros adicionais, como  $s_{\max}$ ,  $S_r$  e  $f_r$  na relação anterior, este procedimento exige que seja considerado um número elevado de cenários, caso se pretenda incluir todas as combinações possíveis de geometrias da amarração, distribuições das tensões tangenciais e condições de fronteira. Por esse motivo, só se apresenta o procedimento para amarrações curtas solicitadas numa extremidade estando a outra livre.

Entende-se por *amarração curta* uma amarração em que o escorregamento relativo entre as duas extremidades da amarração é reduzido, de modo a que quando a extremidade solicitada entra em cedência, o varão está solicitado ao longo de todo o seu comprimento. Optou-se por apresentar este caso particular, por ser expectável que o varão permaneça em regime elástico, o que reduz o número de cenários a considerar.

Assim, o comportamento elástico linear para os varões, traduz-se pela seguinte relação para cada uma das células do modelo

$$\Delta_{m,i}^{j,k} = \frac{F_{m,i}^{j,k}}{k} \text{ com } i=1, \dots, n \quad (\text{A.35})$$

em que  $k$  é dado por (5.17).

Considere-se a relação  $\tau-s$  com três troços representada na Figura A.5. Apesar de se particularizar a análise que em seguida se apresenta para esta relação constitutiva, pode-se justificar um número de troços diferente e/ou diferentes valores relativos de  $\tau_a$ ,  $\tau_b$  e  $\tau_c$  –

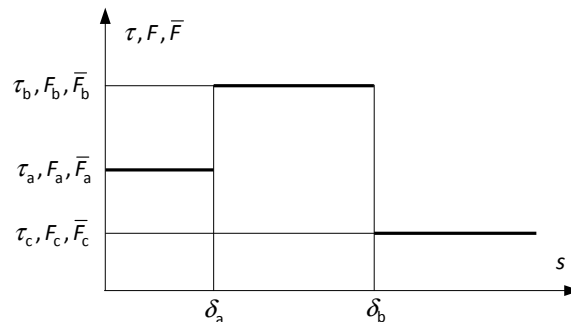


Figura A.5 – Relação constitutiva constante por troços para a componente aderência.



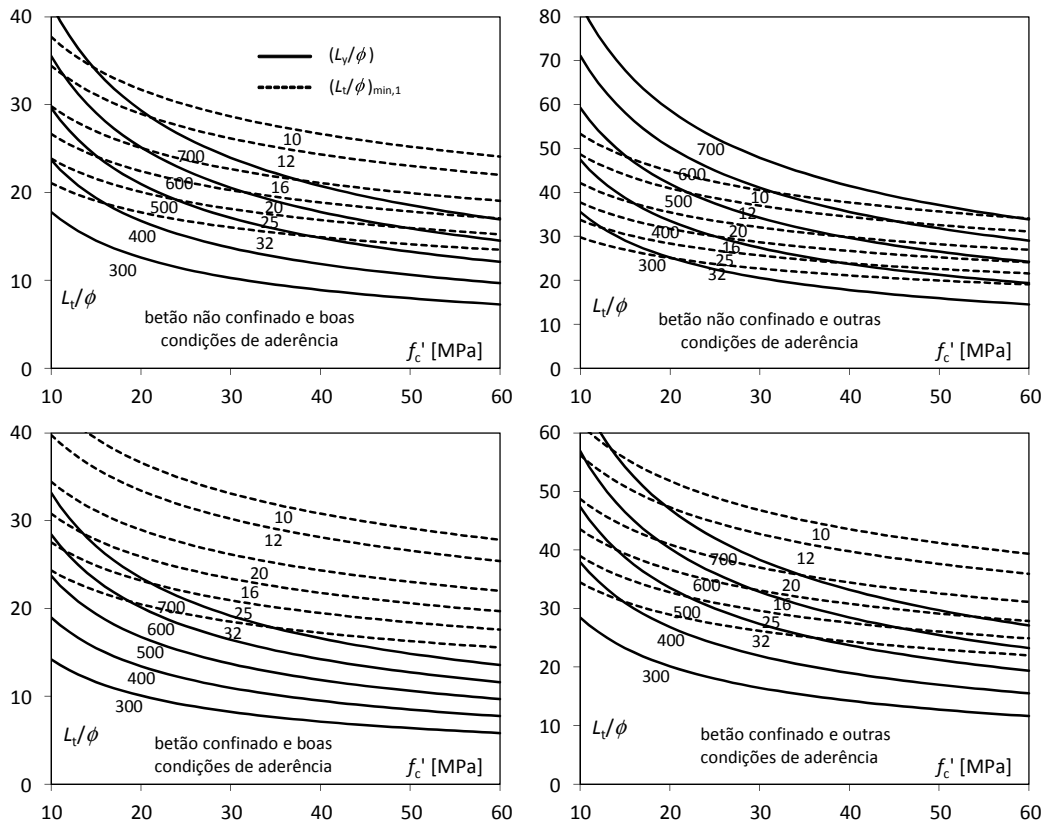


Figura A.6 – Comprimento da amarração.

pode-se justificar a utilização de mais ou menos patamares, ou seja, uma relação  $\tau$ - $s$  com maior ou menor correspondência com a experimental, consoante seja (i) mais ou menos relevante a evolução inicial do diagrama tensão de aderência-escorregamento e (ii) maior ou menor o valor do escorregamento máximo relevante.

Considere-se que um segmento, com comprimento  $x$ , de um varão de diâmetro  $\phi$ , apresenta um campo de tensões tangenciais de aderência de intensidade constante  $\tau_i$ . A resultante destas tensões tem a direcção do eixo do varão e vale  $F_i = x \pi \phi \tau_i$ , de modo que a resultante das tensões tangenciais de aderência por unidade de comprimento do varão vale  $\bar{F}_i = \pi \phi \tau_i$ , passando-se a usar o símbolo  $\bar{F}_i$  com este significado, ou seja,

$$\bar{F}_a = \tau_a \pi \phi, \quad \bar{F}_b = \tau_b \pi \phi \quad \text{e} \quad \bar{F}_c = \tau_c \pi \phi. \quad (\text{A.36})$$

O comprimento mínimo  $L_y$  de uma amarração no instante em que o varão atinge a tensão de cedência na extremidade solicitada para uma distribuição da tensão de aderência constante ao longo de todo esse comprimento, é definido pela expressão (A.12). Na Figura A.6 apresenta-se a evolução do quociente  $(L_y/\phi)$  para  $f_y \in \{300, 400, 500, 600, 700\}$  (curvas a traço cheio) e para os cenários da Tabela A.1 – assumiu-se um tensão de aderência  $\tau = (2/3)\tau_{\max}$ , ou seja, o valor médio de  $\tau$  para  $s \in [0, s_1^{mc}]$ . Para valores de  $L_t/\phi$  inferiores aos definidos por estas curvas, em que  $L_t$  é o comprimento total da amarração, não é espectável a ocorrência da cedência de varões nervurados.

### A.3.2.2. Determinação do comportamento da amarração

Aplicando de forma recursiva as relações de equilíbrio (5.19) e (A.33), obtém-se

$$F_i^{j,k} = F_{n+1}^{j,k} + \sum_{c=i}^n F_{ad,c}^{j,k} \text{ com } i=1, \dots, n, \quad (\text{A.37})$$

que, particularizada para uma amarração com uma extremidade livre (Figura A.3), ou seja, para  $F_{n+1}^{j,k} = 0$  (Figura 5.13), conduz a

$$F_i^{j,k} = \sum_{c=i}^n F_{ad,c}^{j,k} \text{ com } i=1, \dots, n \quad (\text{A.38})$$

e

$$F_{m,i}^{j,k} = \sum_{c=i+1}^n F_{ad,c}^{j,k} \text{ com } i=1, \dots, n. \quad (\text{A.39})$$

De forma semelhante, aplicando de forma recursiva a relação cinemática (5.20), obtém-se

$$s_i^{j,k} = s_{i+1}^{j,k} + \Delta_{m,i}^{j,k} = s_{i+2}^{j,k} + \Delta_{m,i+1}^{j,k} + \Delta_{m,i}^{j,k} = s_{n+1}^{j,k} + \sum_{c=i}^n \Delta_{m,c}^{j,k} \text{ com } i=1, \dots, n. \quad (\text{A.40})$$

Para caracterizar pormenorizadamente o comportamento da amarração do varão, devem ser conhecidas no final de cada sub-passo (i) o esforço em cada componente varão, (ii) o esforço em cada célula, (iii) o esforço em cada componente aderência, (iv) a deformação em cada componente varão (sub-passo 1) e o movimento de corpo rígido (sub-passo 2) e (v) o escorregamento de cada nó – uma vez que se admite que o betão é indeformável segundo a direcção do eixo do varão, a deformação da componente aderência de uma dada célula corresponde ao escorregamento do nó dessa célula. Em seguida, apresentam-se expressões para avaliar estas grandezas em cada passo.

#### A.3.2.2.1. Fase 0 – início da aplicação da força à amarração

Designa-se de Fase 0 aquela em que todas as células da amarração apresentam  $s < \delta_a$  e, portanto, tensão de aderência nula ou igual a  $\tau_a$  (Figura A.5).

Define-se o início de cada um dos passos do processo de aplicação da força à amarração, como o instante em que o esforço que numa dada célula  $i$  era nulo ( $F_i = 0$ ) passa a ser de tracção ( $F_i > 0$ ).

#### Fase 0 / Passo 1

Enquanto se tiver  $s_1 = 0$ , o escorregamento em todas as células é nulo, e, portanto, também o é o esforço em todas as componentes, com excepção de  $F_{ad,1}$  que satisfaz a condição  $0 \leq F_{ad,1} < F_a$ . Este estado caracteriza o Passo 1 da Fase 0. No final deste passo (e início do Passo 2) esforços nas componentes aderência são

$$F_{ad,i}^1 = \begin{cases} F_a, & \text{para } i=1, \\ 0, & \text{para } i=2, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.41})$$

e são nulos os esforços em todas as componentes varão, de acordo com (A.39). As expressões (A.35) e (5.22) indicam que o alongamento das componentes varão e o escorregamento de cada nó também são nulos.

Os esforços nas células, de acordo com (A.38), são

$$F_i^1 = \begin{cases} F_a, & \text{para } i=1, \\ 0, & \text{para } i=2, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

### Fase 0 / Passo 2

Se se continuar a aumentar o valor da força aplicada à amarração, o escorregamento  $s_1$  da secção de aplicação desta força deixa de ser nulo, o que corresponde ao alongamento da componente varão 1 e à sua correspondente tracção e, conseqüentemente, a igual esforço na célula 2. Porém, o valor do esforço nesta célula não é suficiente para fazer deslocar o seu nó direito ( $s_2 = 0^-$ ). No final deste passo os esforços nas componentes aderência são dados por

$$F_{ad,i}^2 = \begin{cases} F_a, & \text{para } i=1,2, \\ 0, & \text{para } i=3, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

os esforços nas componentes varão, de acordo com (A.39), são

$$F_{m,i}^2 = \begin{cases} F_a, & \text{para } i=1, \\ 0, & \text{para } i=2, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

e os esforços nas células, de acordo com (A.38), são

$$F_i^2 = \begin{cases} 2F_a, & \text{para } i=1, \\ F_a, & \text{para } i=2, \\ 0, & \text{para } i=3, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

A deformação nas componentes varão é

$$\Delta_{m,i}^2 = \begin{cases} F_{m,i}^2/k = F_a/k, & \text{para } i=1, \\ 0, & \text{para } i=2, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

e o escorregamento dos nós, de acordo com (5.22), é

$$s_i^2 = \begin{cases} \Delta_{m,i}^2 = F_a/k, & \text{para } i=1, \\ 0, & \text{para } i=2, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

### Fase 0 / Passo p

A análise apresentada para o Passo 2 da Fase 0 é agora facilmente generalizada para um passo genérico  $p$ , com  $2 \leq p < n$ . Se se continuar a aumentar o valor da força aplicada à amarração, o escorregamento  $s_1$  da secção de aplicação da carga volta a crescer, o que corresponde ao alongamento da componente varão  $p-1$  e à sua correspondente tracção e, conseqüentemente, a igual esforço na célula  $p$ . Porém, o valor do esforço nesta célula ainda não é o suficiente para deslocar o seu nó direito ( $s_p = 0$ ). No entanto, no final deste passo, este nó (nó  $p$ ) já se encontra na iminência de apresentar escorregamento, e os esforços nas componentes aderência são dados por

$$F_{ad,i}^p = \begin{cases} F_a, & \text{para } i=1, \dots, p, \\ 0, & \text{para } i=p+1, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.48})$$

os esforços nas componentes varão, de acordo com (5.19), são

$$F_{m,i}^p = \begin{cases} (p-i)F_a, & \text{para } i=1, \dots, p, \\ 0, & \text{para } i=p+1, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.49})$$

e os esforços nas células são

$$F_i^p = \begin{cases} (p+1-i)F_a, & \text{para } i=1, \dots, p, \\ 0, & \text{para } i=p+1, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

A deformação nas componentes varão é

$$\Delta_{m,i}^p = \begin{cases} F_{m,i}^p/k = (p-i)F_a/k, & \text{para } i=1, \dots, p, \\ 0, & \text{para } i=p+1, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

e o valor do escorregamento em cada nó é igual ao valor que apresentava no passo anterior, acrescido do incremento do alongamento das componentes varão

$$s_i^p = \begin{cases} \sum_{j=i}^p \frac{F_{m,j}^p}{k} = \sum_{j=i}^p \frac{(p-j)F_a}{k}, & \text{para } i=1, \dots, p, \\ 0, & \text{para } i=p+1, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

Para validar a expressão (A.52), determina-se o alongamento do varão para a situação em que a tensão de aderência em todo ele vale  $\tau_a$ , ou seja,  $p=n$ , e compara-se com o resultado da aplicação da expressão (A.9). Desta forma, de acordo com a expressão (A.9) tem-se

$$s_1 = s(L_t) = \int_0^{L_t} \varepsilon_s(x) dx = \int_0^{L_t} \frac{\sigma_s(x)}{E} dx = \int_0^{L_t} \frac{F_s(x)}{EA} dx = \int_0^{L_t} \frac{\bar{F}_a x}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{\bar{F}_a L_t^2}{EA} < \delta_a. \quad (\text{A.53})$$

Por outro lado, o escorregamento  $s_1$  da extremidade do varão é dado pelo seu alongamento. E, como se tem  $p=n$ , vem

$$s_1^n = \sum_{j=1}^n (n-j) \frac{F_a}{k} = n(n-1) \frac{F_a}{2k} = \frac{n(n-1)}{n^2} \frac{\bar{F}_a L_t^2}{2EA} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s_1 = \frac{1}{2} \frac{\bar{F}_a L_t^2}{EA} \quad (\text{A.54})$$

o que coincide com o resultado dado pela expressão (A.53) e valida o procedimento.

### Fase 0 / Relação $F_1$ - $s_1$

Resolvendo a expressão (A.50) em ordem a  $p$  para  $i=1$ , tem-se

$$F_1^p = p F_a \rightarrow p = \frac{F_1^p}{F_a}. \quad (\text{A.55})$$

Particularizando a expressão (A.52) para  $i=1$  e substituindo o resultado (A.55), obtém-se

$$s_1^p = \sum_{j=1}^p (p-j) \frac{F_a}{k} = \frac{p^2 - p F_a}{2k} = \frac{1}{2k} \left( \frac{(F_1^p)^2}{F_a} - F_1^p \right) = \frac{L_t}{2EA n} \left( \frac{n(F_1^p)^2}{\bar{F}_a L_t} - F_1^p \right), \quad (\text{A.56})$$

ou, fazendo  $n \rightarrow \infty$ ,

$$s_1 = \frac{F_1^2}{2EA \bar{F}_a}. \quad (\text{A.57})$$

#### A.3.2.2.2. Fase 1

A validade das expressões da Fase 0 expira no passo  $p$  em que primeiro se verificar (Figura A.7)

(i)  $s_1^p = \delta_a$  e  $L = pL_n < L_t$  (cenário 1), ou seja, embora parte do varão esteja ainda isenta de

tensões de aderência, o valor do deslocamento na extremidade deste onde está aplicada a força corresponde, na relação constitutiva, a uma variação do valor da tensão de aderência, ou (ii)  $L = \rho L_n = L_t$  e  $s_1^p < \delta_a$  (cenário 2), ou seja, o varão está, na sua totalidade, sujeito tensões de aderência, tendo-se que, na relação constitutiva, o valor do deslocamento na extremidade carregada é inferior a um valor para o qual ocorre variação do valor da tensão de aderência.

No primeiro destes casos (cenário 1), continuando a aumentar o valor da força aplicada, quando o valor de  $s_1^p$  ultrapassar o de  $\delta_a$ , a tensão de aderência passa a ter um dado valor na parte inicial do varão, outro valor na parte intermédia e é nula na parte restante. O comprimento mínimo que o varão deve ter para que se possa verificar este caso, pode ser determinado resolvendo a equação (A.53) em ordem a  $L_t$  e fazendo  $s_1 = s(L_t) = \delta_a$ , obtendo-se

$$(L_t)_{\min,1} = \sqrt{\frac{2\delta_a EA}{\bar{F}_a}} \rightarrow \left(\frac{L_t}{\phi}\right)_{\min,1} = \sqrt{\frac{\delta_a E}{2\tau_a \phi}}. \quad (A.58)$$

Na Figura A.6 está representada a evolução do quociente  $(L_t/\phi)_{\min,1}$  para que ocorra o cenário 1 para cada um dos diâmetros de armadura comerciais (curvas a tracejado). Para o traçado destas curvas assumiu-se novamente  $\tau_a = 2/3\tau_{\max}$ ,  $\delta_a = s_1^{mc}$  e  $E = 200$  GPa.

Como facilmente se constata na Figura A.6, por sobreposição das curvas correspondentes a  $L_y/\phi$  (curvas a traço cheio) e  $(L_t/\phi)_{\min,1}$  (curvas a tracejado), para a tensão  $\tau_a$  admitida (correspondente a aproximar toda a fase ascendente da relação (A.2) com um único patamar), o cenário mais plausível numa amarração curta será o cenário 2. Optou-se por isso por continuar a exemplificar o modelo para o cenário 2.

Continuando a aumentar o valor da força aplicada, dá-se início a um movimento de corpo livre do varão, visto que está todo ele sujeito a tensões de aderência  $\tau_a$  e que  $s_1$  no final da fase 1 é menor que  $\delta_a$ . Admitindo  $\tau_b > \tau_a$  (Figura A.7(b)), então, após este movimento de corpo rígido, o valor da tensão de aderência cresce para  $\tau_b$  em parte do varão ( $L_b$ ), mantendo na restante parte ( $L_a = L_t - L_b$ ) o valor  $\tau_a$ .

Designando por A o instante correspondente ao início do movimento de corpo rígido do varão (Figura A.8), a força  $F_1$  correspondente pode ser determinada por equilíbrio

$$F_{1,A} = \bar{F}_a L_t \quad (A.59)$$

que ocorre para o escorregamento

$$s_{1,A} = \frac{1}{2} \frac{\bar{F}_a L_t^2}{EA} < \delta_a. \quad (A.60)$$

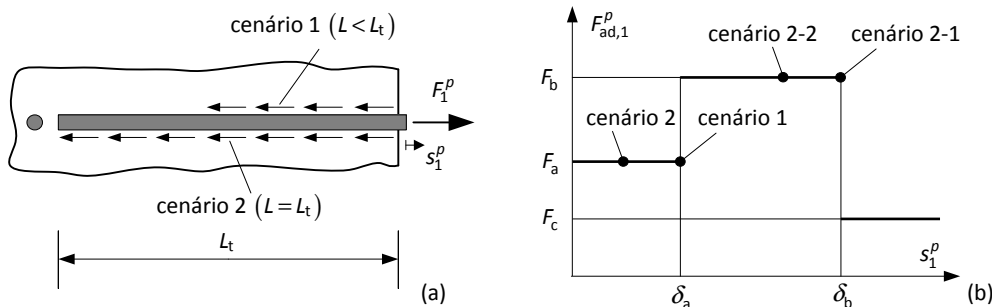
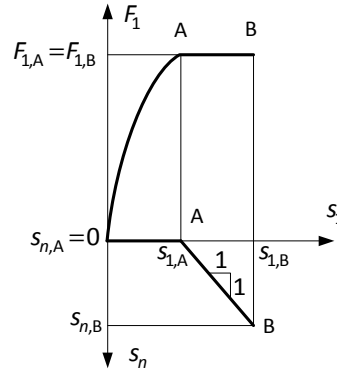


Figura A.7 – Cenário 1 e 2 no passo  $p$ , (a) distribuição de  $\tau_a$  ao longo do varão, (b) esforço na componente aderência da célula 1.


 Figura A.8 – Relação constitutiva  $F_1-s_1$  até ao instante B (fim do movimento de corpo rígido).

Designando por B o instante em que termina o movimento de corpo rígido tem-se  $s_{1,B} = \delta_a$ , o que implica que o valor do movimento de corpo rígido do varão é  $\delta_a - s_{1,A}$ .

No decorrer do movimento de corpo rígido, o deslocamento da célula  $n$  é  $s_n = s_1 - s_{1,A}$  e o seu deslocamento correspondente ao instante B é igual ao movimento de corpo rígido do varão, ou seja,  $s_{n,B} = \delta_a - s_{1,A}$ .

Continuando a aumentar o valor da força aplicada, o escorregamento  $s_1$  vai aumentar progressivamente para além de  $\delta_a$ , o mesmo acontecendo numa parte do varão, de comprimento  $L_b$ , junto ao ponto de aplicação da força.

De acordo com os valores relativos de  $\bar{F}_a$  e  $\bar{F}_b$  (Figura A.5), na Fase 1,  $\bar{F}_b L_t \geq F_1 \geq \bar{F}_a L_t$ , pelo que  $L_a$  e  $L_b$  podem ser obtidos em função da tensão  $F_1$ , por equilíbrio estático

$$F_1 = \bar{F}_b L_b + \bar{F}_a (L_t - L_b) \rightarrow L_b = \frac{F_1 - \bar{F}_a L_t}{\bar{F}_b - \bar{F}_a} \quad (\text{A.61})$$

e

$$L_a = L_t - L_b \rightarrow L_a = \frac{\bar{F}_b L_t - F_1}{\bar{F}_b - \bar{F}_a}. \quad (\text{A.62})$$

Na Fase 1, a relação  $F_1-s_1$  é dada pela soma da parcela do escorregamento  $s_1$  associada à extensão elástica do varão  $s_{1,el}$  com a parcela associada ao movimento de corpo rígido  $s_{1,mcr} = s_n$ . Estabelecendo o equilíbrio estático numa secção de coordenada  $x$  do varão tem-se

$$F_s(x) = \begin{cases} \bar{F}_a x, & \text{se } 0 \leq x < L_a, \\ \bar{F}_a L_a + \bar{F}_b (x - L_a), & \text{se } L_a \leq x \leq L_t. \end{cases} \quad (\text{A.63})$$

Pelo que a parcela de  $s_{1,el}$  associada à extensão das armaduras pode ser expressa por

$$s_{1,el} = \int_0^{L_t} \varepsilon_s(x) dx = \frac{1}{EA} \int_0^{L_t} F_s(x) dx = \frac{1}{2EA} \left[ \bar{F}_a (L_a^2 + 2L_a L_b) + \bar{F}_b (L_b^2 - 2L_a L_b) \right]. \quad (\text{A.64})$$

Se o valor  $\delta_b$  for suficientemente elevado para que, continuando a aumentar o valor da força aplicada, se tenha num dado instante um valor da tensão de aderência igual a  $\tau_b$  ao longo de todo o comprimento do varão, ou seja,  $L_a = 0$  e  $L_b = L_t$ , o valor da extensão elástica do varão correspondente será

$$s_{1,el} = \frac{\bar{F}_b L_t^2}{2EA}. \quad (\text{A.65})$$

Em seguida, apresenta-se o cálculo das parcelas dos deslocamentos nodais associadas ao movimento de corpo rígido que ocorre entre os instantes A e B. Note-se que este movimento de corpo rígido não reflecte o comportamento real mas decorre de se ter aproximado a relação contínua  $\tau$ - $s$  por uma relação constante por troços.

### Fase 1 / Passo 0

Assuma-se como ponto de partida o ponto A da Figura A.8, ou seja,  $s_1 = \delta_a^-$ , de modo que  $s_i^{0,0} < \delta_a$  para  $i \geq 1$ . Nesta situação, o esforço nas componentes aderência vale

$$F_{a,i}^{0,0} = F_a, \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.66})$$

Como  $F_{m,n}^{0,0} = 0$ , de acordo com a expressão (A.39), obtém-se

$$F_{m,i}^{0,0} = (n-i)F_a, \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.67})$$

e, de acordo com a expressão (A.33),

$$F_i^{0,0} = [n-(i-1)]F_a, \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.68})$$

A deformação das componentes varão é dada por (A.35) e (A.68), ou seja,

$$\Delta_{m,i}^{0,0} = \frac{F_{m,i}^{0,0}}{k} = (n-i)\frac{F_a}{k}, \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.69})$$

e o escorregamento dos nós, por aplicação de (5.22), é

$$s_i^{0,0} = s_{i-1}^{0,0} - \Delta_{m,i-1}^{0,0} = \delta_a - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_{m,j}^{0,0} = s_n^{0,0} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} \frac{F_a}{k}, \text{ para } i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.70})$$

em que

$$s_n^{0,0} = s_{n,B}. \quad (\text{A.71})$$

Decomponha-se agora cada passo em dois sub-passos (Sp). O sub-passo 1 (Sp 1) é relativo à fase do incremento de escorregamento associado ao crescimento do esforço numa célula, enquanto o sub-passo 2 (Sp 2) é relativo à fase do incremento de escorregamento que ocorre para valor constante do esforço em todas as células.

### Fase 1 / Passo 1 / Sp 1

Incrementando  $s_1$  para  $\delta_a^+$ , os demais escorregamentos  $s_i$  permanecem inalterados  $i = 2, \dots, n$ . Por esse motivo, os esforços nas células, nas componentes varão e nas componentes aderência também permanecem inalterados, com excepção do esforço na célula 1 e na componente aderência 1.

Desta forma, os esforços nas componentes aderência são

$$F_{ad,i}^{1,1} = \begin{cases} F_b = nF_a + (F_b - F_a), & \text{para } i = 1, \\ F_a, & \text{para } i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.72})$$

os esforços nas células são

$$F_i^{1,1} = \begin{cases} (n-1)F_a + F_b, & \text{para } i = 1, \\ [n-(i-1)]F_a, & \text{para } i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.73})$$

e os esforços nas componentes varão são

$$F_{m,i}^{1,1} = F_{m,i}^{0,0} = (n-i)F_a, \text{ com } i=1, \dots, n. \quad (\text{A.74})$$

Dado que os esforços nas componentes varão não sofrem alterações relativamente à configuração correspondente ao ponto A, as deformações destas componentes e os deslocamentos dos nós permanecem inalterados, ou seja,  $\Delta_{m,i}^{1,1} = \Delta_{m,i}^{0,0}$  e  $s_i^{1,1} = s_i^{0,0}$  para  $i=1, \dots, n$ .

### Fase 1 / Passo 1 / Sp 2

Continuando a aumentar a força aplicada, aumenta novamente  $s_1$ , e todo o conjunto de  $n$  células vai sofrer um movimento de corpo rígido em que se mantêm constantes os esforços nas células, nas componentes varão e nas componentes aderência. Esta fase termina quando  $s_2$  atingir  $\delta_a^-$ . O escorregamento de cada nó é igual ao do sub-passo anterior acrescido do movimento de corpo rígido que ocorreu neste sub-passo.

No final deste sub-passo os esforços são iguais aos obtidos no final do sub-passo anterior, ou seja,  $F_{ad,i}^{1,2} = F_{ad,i}^{1,1}$ ,  $F_i^{1,2} = F_i^{1,1}$ ,  $F_{m,i}^{1,2} = F_{m,i}^{1,1}$  para  $i=1, \dots, n$ . Também as deformações das componentes varão são iguais às obtidas no sub-passo anterior, ou seja,  $\Delta_{m,i}^{1,2} = \Delta_{m,i}^{1,1}$  para  $i=1, \dots, n$ .

O valor do movimento de corpo rígido é, neste caso, dado por

$$\Delta s_{mcr}^{1,2} = s_2^{1,2} - s_2^{1,1} = \delta_a^- - \left[ \delta_a - \frac{(2n-2)(2-1)F_a}{2k} \right] = (n-1)\frac{F_a}{k} \quad (\text{A.75})$$

ou seja, é igual à deformação da componente varão 1 no sub-passo anterior, como se poderia concluir da expressão (A.70), e o escorregamento dos nós é

$$s_i^{1,2} = s_i^{1,1} + \Delta s_{mcr}^{1,2} = \delta_a - \frac{(i-1)(2n-i)F_a}{2k} + (n-1)\frac{F_a}{k} \quad (\text{A.76})$$

que, no caso particular do nó 2, dá

$$s_2^{1,2} = s_2^{1,1} + \Delta s_{mcr}^{1,2} = \delta_a^-. \quad (\text{A.77})$$

### Fase 1 / Passo 2 / Sp 1

Continuando a aumentar o valor da força aplicada, aumenta  $s_1$  bem como a deformação e o esforço da componente varão 1, permanecendo  $s_2$  constante e igual a  $\delta_a^-$ , até o esforço na componente aderência 2 atingir  $F_b$ . Nesse instante,  $s_2$  passa a  $\delta_a^+$  e termina o sub-passo 1.

No final deste sub-passo o esforço nas componentes aderência é

$$F_{ad,i}^{2,1} = \begin{cases} F_b, & \text{para } i=1,2, \\ F_{ad,i}^{0,0} = F_a, & \text{para } i=3, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

o esforço nas células é

$$F_i^{2,1} = \begin{cases} [n-(3-i)]F_a + (3-i)F_b = nF_a + (3-i)(F_b - F_a), & \text{para } i=1,2, \\ F_i^{0,0} [n-(i-1)]F_a, & \text{para } i=3, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.79})$$



e o esforço nas componentes varão é

$$F_{m,i}^{2,1} = \begin{cases} (n-1)F_a + (F_b - F_a), & \text{para } i=1, \\ F_{m,i}^{0,0} = (n-i)F_a, & \text{para } i=2, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.80})$$

A deformação nas componentes varão é

$$\Delta_{m,i}^{2,1} = \begin{cases} \frac{F_{m,i}^{2,1}}{k} = \Delta_{m,i}^{1,2} + \frac{F_b - F_a}{k} = (n-1)\frac{F_a}{k} + \frac{F_b - F_a}{k}, & \text{para } i=1, \\ \Delta_{m,i}^{0,0} = (n-i)\frac{F_a}{k}, & \text{para } i=2, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.81})$$

e o valor do escorregamento em cada nó é igual ao apresentado no sub-passo anterior, com exceção dos nós 1 e 2,

$$s_i^{2,1} = \begin{cases} s_i^{1,2} + \frac{F_{m,i}^{2,1} - F_{m,i}^{1,2}}{k} = \delta_a + (n-1)\frac{F_a}{k} + \frac{F_b - F_a}{k}, & \text{para } i=1, \\ s_i^{2,1} = \delta_a^+, & \text{para } i=2, \\ s_i^{1,2} = \delta_a - \frac{(i-1)(2n-i)F_a}{2k} + (n-1)\frac{F_a}{k}, & \text{para } i=3, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

### Fase 1 / Passo 2 / Sp 2

Continuando a aumentar o valor da força aplicada, aumenta também  $s_1$ , e todo o conjunto de  $n$  células vai sofrer um movimento de corpo rígido em que os esforços nas células, nas componentes varão e nas componentes aderência, bem como a deformação das células, se mantêm constantes, ou seja,  $F_{a,i}^{2,2} = F_{a,i}^{2,1}$ ,  $F_i^{2,2} = F_i^{2,1}$ ,  $F_{m,i}^{2,2} = F_{m,i}^{2,1}$  e  $\Delta_{m,i}^{2,2} = \Delta_{m,i}^{2,1}$ , para  $i=1, \dots, n$ . Esta fase termina quando  $s_3$  atingir  $\delta_a^-$ .

O movimento de corpo rígido no final deste sub-passo é

$$\Delta s_{mcr}^{2,2} = s_3^{2,2} - s_3^{2,1} = \delta_a^- - \left[ \delta_a - \frac{(3-1)(2n-3)F_a}{2k} + (n-1)\frac{F_a}{k} \right] = (n-2)\frac{F_a}{k} \quad (\text{A.83})$$

o que corresponde à deformação da componente varão 2 no final do passo 0.

O escorregamento de cada nó no final deste sub-passo é igual ao escorregamento no final do sub-passo anterior incrementado do movimento de corpo rígido  $\Delta s_{mcr}^{2,2}$ , ou seja,

$$s_i^{2,2} = \begin{cases} s_i^{2,1} + \Delta s_{mcr}^{2,2} = \delta_a + (n-1)\frac{F_a}{k} + \frac{F_b - F_a}{k} + (n-2)\frac{F_a}{k}, & \text{para } i=1, \\ s_i^{2,1} + \Delta s_{mcr}^{2,2} = \delta_a + (n-2)\frac{F_a}{k}, & \text{para } i=2, \\ s_i^{2,1} + \Delta s_{mcr}^{2,2} = \delta_a^-, & \text{para } i=3, \\ s_i^{2,1} + \Delta s_{mcr}^{2,2} = \delta_a - \frac{(i-1)(2n-i)F_a}{2k} + (n-1)\frac{F_a}{k} + (n-2)\frac{F_a}{k}, & \text{para } i=4, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.84})$$

### Fase 1 / Passo p / Sp 1

Admita-se que  $s_1$  é incrementado até  $s_p$  igualar  $\delta_a^-$ . Continuando a incrementar  $s_1$ , as deformações nas componentes varão para  $i=1, \dots, p-1$ , bem como os correspondentes

esforços, vão aumentar, mantendo-se  $s_p$  constante e igual a  $\delta_a^-$ . Este aumento termina quando o esforço na componente aderência  $p$  atingir  $F_b$ . Nesse instante,  $s_p$  passa a  $\delta_a^+$  e termina o sub-passo 1.

No final deste sub-passo o esforço nas componentes aderência é

$$F_{ad,i}^{p,1} = \begin{cases} F_b, & \text{para } i=1,\dots,p, \\ F_{ad,i}^{0,0} = F_a, & \text{para } i=p+1,\dots,n, \end{cases} \quad (\text{A.85})$$

o esforço nas células é

$$F_i^{p,1} = \begin{cases} (n-p)F_a + (p-i)F_b, & \text{para } i=1,\dots,p, \\ F_i^{0,0} = [n-(i-1)]F_a, & \text{para } i=p+1,\dots,n, \end{cases} \quad (\text{A.86})$$

e o esforço nas componentes varão é

$$F_{m,i}^{p,1} = \begin{cases} (n-p)F_a + (p-i)F_b, & \text{para } i=1,\dots,p-1, \\ F_{m,i}^{0,0} = (n-i)F_a, & \text{para } i=p,\dots,n. \end{cases} \quad (\text{A.87})$$

A deformação das componentes componente varão é

$$\Delta_{m,i}^{p,1} = \begin{cases} \frac{F_{m,i}^{p,1}}{k} = \underbrace{(n-i)\frac{F_a}{k}}_{\text{ponto B}} + \underbrace{(p-i)\frac{F_b-F_a}{k}}_{\text{incrementos de deformação}}, & \text{para } i=1,\dots,p-1, \\ \Delta_{m,i}^{0,0} = (n-i)\frac{F_a}{k}, & \text{para } i=p,\dots,n. \end{cases} \quad (\text{A.88})$$

O escorregamento em cada nó é igual ao escorregamento que ele apresentava no ponto  $B$  acrescido do movimento de corpo rígido e do alongamento do varão entre a célula  $i$  em estudo e a célula  $p$

$$s_i^{p,1} = \begin{cases} \underbrace{\delta_a - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_{m,j}^{0,0}}_{\text{ponto B}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p-1} \Delta_{m,j}^{0,0}}_{\text{movimento de corpo rígido}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p-1} (p-j)\frac{F_b-F_a}{k}}_{\text{variação da deformação das componentes armadura}} = \underbrace{\delta_a - \frac{(2n-i)(i-1)F_a}{2k}}_{\text{ponto B}}, & \text{para } i=1,\dots,p-1, \\ \underbrace{\frac{(2n-p)(p-1)F_a}{2k}}_{\text{movimento de corpo rígido}} + \underbrace{\frac{(p-i+1)(p-i)(F_b-F_a)}{2k}}_{\text{variação da deformação das componentes armadura}}, & \\ \underbrace{\delta_a - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_{m,j}^{0,0}}_{\text{ponto B}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p-1} \Delta_{m,j}^{0,0}}_{\text{movimento de corpo rígido}} = \underbrace{\delta_a - \frac{(2n-i)(i-1)F_a}{2k}}_{\text{ponto B}} + \underbrace{\frac{(2n-p)(p-1)F_a}{2k}}_{\text{movimento de corpo rígido}}, & \text{para } i=p,\dots,n. \end{cases} \quad (\text{A.89})$$

### Fase 1 / Passo $p$ / $S_p$ 1 (abordagem alternativa)

As expressões anteriores podem ser estabelecidas pelo procedimento alternativo que em seguida se apresenta. Este procedimento baseia-se nas seguintes constatações:

- (i) no final do sub-passo 1 do passo  $p$  o escorregamento do nó da célula  $p$  é  $\delta_a^-$ ;

- (ii) o escorregamento dos nós das restantes células pode ser determinado em termos relativos;
- (iii) existem três parcelas de deslocamento a contabilizar em cada nó:
  - a. o escorregamento do nó da célula  $p$ ;
  - b. o movimento relativo entre as células  $p$  e  $i$  associado aos esforços nas componentes aderência no troço da amarração entre as duas células;
  - c. o movimento relativo entre a célula  $p$  e a célula  $i$  devido aos esforços nas componentes não compreendidas entre as duas células, isto é, nas células à esquerda da célula  $\max\{i, p\}$ .

A Figura A.9 representa a distribuição das resultantes de aderência ao longo da armadura no fim do sub-passo 1 do passo  $p$  e os esforços no troço de armadura entre as secções  $p$  e  $i$ .

O movimento relativo entre o nó  $i$  e o nó  $p$  para  $i \leq p$  pode ser determinado tendo em consideração a analogia e as deformações representadas na Figura A.10.

As parcelas do movimento relativo entre a célula  $p$  e a célula  $i$ , indicadas na Figura A.10, são

$$\Delta_1 = \frac{1}{EA} \underbrace{(n-p)F_a}_Q \underbrace{(p-i)\frac{EA}{k}}_L = (p-i)(n-p)\frac{F_a}{k} \quad (A.90)$$

e

$$\Delta_2 = \frac{1}{2EA} \underbrace{(p-i+1)F_b}_Q \underbrace{(p-i)\frac{EA}{k}}_L = (p-i+1)(p-i)\frac{F_b}{2k}. \quad (A.91)$$

Somando as três parcelas do deslocamento em cada nó anteriormente referidas, tem-se

$$s_i^{p,1} = \delta_a + \frac{p-i}{k} \left[ (p-i+1)\frac{F_b}{2} + (n-p)F_a \right], \text{ para } i = 1, \dots, p. \quad (A.92)$$

Para  $i > p$  as parcelas do movimento relativo podem ser determinadas por um procedimento análogo, tendo em atenção as forças representadas na Figura A.11

$$\Delta_1 = \frac{1}{EA} \underbrace{(n-p)F_a}_Q \underbrace{(i-p)\frac{EA}{k}}_L = (n-p)(i-p)\frac{F_a}{k} \quad (A.93)$$

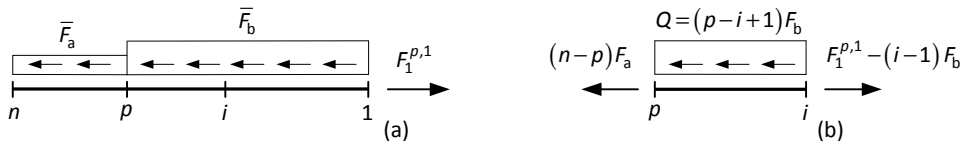


Figura A.9 – Escorregamento relativo da célula  $i$  em relação à célula  $n$  para  $i < n$ , (a) distribuição das resultantes de aderência, (b) esforços no troço compreendido entre as secções  $p$  e  $i$ .

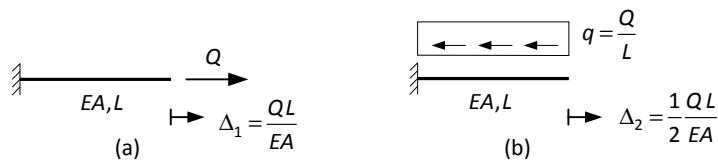


Figura A.10 – Deformação axial de um elemento linear homogêneo, (a) carga concentrada, (b) carga uniformemente distribuída.

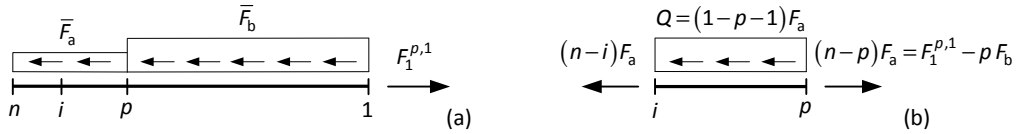


Figura A.11 – Escorregamento relativo da célula  $i$  em relação à célula  $n$  para  $i > n$ , (a) distribuição das resultantes de aderência, (b) esforços no troço compreendido entre as secções  $i$  e  $p$ .

e

$$\Delta_2 = -\frac{1}{2EA} \underbrace{(i-p-1)F_a}_Q \underbrace{(i-p)\frac{EA}{k}}_L = (i-p-1)(p-i)\frac{F_a}{2k}. \quad (\text{A.94})$$

Tendo em atenção que para  $i > p$  o alongamento do troço  $[i, p]$  corresponde a uma redução do escorregamento absoluto da secção  $i$  relativamente à secção  $p$ , as parcelas (A.93) e (A.94) devem ser subtraídas ao escorregamento da secção  $p$ , ou seja

$$s_i^{p,1} = \delta_a + \frac{p-i}{k} \left[ (p-i+1)\frac{F_a}{2} + (n-p)F_a \right], \text{ com } i = p, \dots, n. \quad (\text{A.95})$$

### Fase 1 / Passo p / Sp 2

Incrementando novamente  $s_1$ , todas as  $n$  células vão sofrer um movimento de corpo rígido em que os esforços nas células, nas componentes aderência se mantêm constantes. Esta fase termina quando  $s_{p+1}$  atingir  $\delta_a^-$ .

No final deste sub-passo, tem-se  $F_{ad,i}^{p,2} = F_{ad,i}^{p,1}$ ,  $F_i^{p,2} = F_i^{p,1}$ ,  $F_{m,i}^{p,2} = F_{m,i}^{p,1}$ ,  $\Delta_{m,i}^{p,2} = \Delta_{m,i}^{p,1}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

O movimento de corpo rígido no final deste sub-passo é igual à deformação da componente varão  $p$  no final do sub-passo anterior e também à deformação correspondente no final do Passo 0

$$\Delta s_{mcr}^{p,2} = s_{p+1}^{p,2} - s_{p+1}^{p,1} = (n-p)\frac{F_a}{k}. \quad (\text{A.96})$$

O escorregamento no final deste sub-passo é igual ao escorregamento no final do sub-passo anterior incrementado do movimento de corpo rígido  $\Delta s_{mcr}^{p,2}$

$$s_i^{p,2} = \begin{cases} \delta_a - \underbrace{\frac{(2n-i)(i-1)F_a}{2k}}_{\text{ponto B}} + \underbrace{\frac{(2n-p)(p-1)+2(n-p)F_a}{2k}}_{\text{movimento de corpo rígido}} + \\ \quad + \underbrace{\frac{(p-i+1)(p-i)(F_b - F_a)}{2k}}_{\text{variação da deformação das componentes armadura}}, & \text{para } i = 1, \dots, p-1, \\ \delta_a - \underbrace{\frac{(2n-i)(i-1)F_a}{2k}}_{\text{ponto B}} + \underbrace{\frac{(2n-p)(p-1)+2(n-p)F_a}{2k}}_{\text{movimento de corpo rígido}}, & \text{para } i = p, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{A.97})$$

ou, alternativamente, recorrendo às expressões (A.92) e (A.95)

$$s_i^{p,1} = \begin{cases} \delta_a + (n-p)\frac{F_a}{k} + \frac{p-i}{k} \left[ (p-i+1)\frac{F_b}{2} + (n-p)F_a \right], & \text{para } i = 1, \dots, p, \\ \delta_a + (n-p)\frac{F_a}{k} + \frac{p-i}{k} \left[ (p-i+1)\frac{F_a}{2} + (n-p)F_a \right], & \text{para } i = p, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{A.98})$$

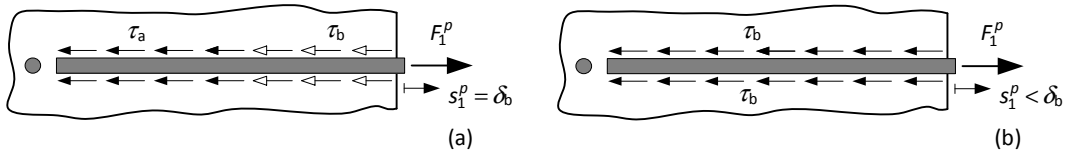


Figura A.12 – Distribuição de tensões tangenciais na armadura, (a) cenário 2-1, (b) cenário 2-2.

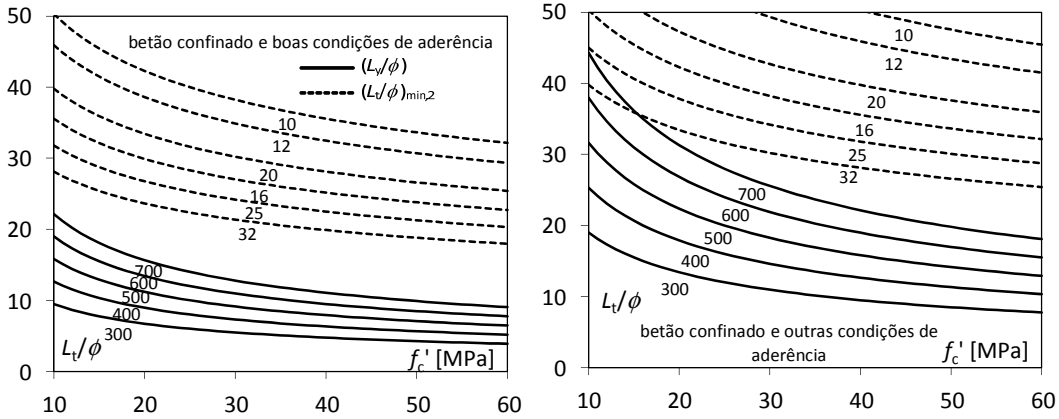


Figura A.13 – Valores limite para a cedência das armaduras.

A validade das expressões anteriores expira quando se verificar a primeira das condições (Figuras A.12 e A.7(b)) (i) cenário 2-1:  $s_1 = \delta_b$  e  $L_b < L_t$  ou (ii) cenário 2-2:  $L_b = L_t$  e  $s_1 < \delta_b$ .

Caso a célula 1 atinja  $\delta_b$  antes da célula  $n$  atingir o escorregamento  $\delta_a$  – cenário 2-1 – vai ocorrer uma fase em que o valor da tensão de aderência na porção da amarração  $L_a$  é  $\tau_a$ , noutra porção  $L_b$  é  $\tau_b$  e na restante  $L_c = L_t - L_a - L_b$  é  $\tau_c$ . Este cenário implica que quando a célula  $n$  atinge o escorregamento  $\delta_a$ , o escorregamento da célula 1 terá que ser, no mínimo,  $\delta_b$ , ou seja, a diferença do escorregamento entre as duas células (o alongamento total do varão) terá que ser superior a  $\delta_b - \delta_a$ .

Recorrendo à expressão (A.65), a existência destes três níveis de tensão implica que

$$\frac{\bar{F}_b L_t^2}{2EA} > \delta_b - \delta_a \rightarrow \left( \frac{L_t}{\phi} \right)_{\min,2} = \sqrt{\frac{(\delta_b - \delta_a) E}{2\tau_b \phi}}. \quad (A.99)$$

Admita-se  $\delta_a = s_1^{mc}$ ,  $\delta_b = s_2^{mc}$ ,  $\tau_a = 2/3 \tau_{\max}$  (valor médio de  $\tau$  para  $s \in [0, s_1^{mc}]$ ) e  $\tau_b = \tau_{\max}$ , de acordo com o MC90. Na Figura A.13 está representada a evolução do quociente  $(L_t/\phi)_{\min,2}$  para que o cenário descrito possa ocorrer para cada um dos diâmetros de armadura comerciais (curvas a tracejado). Está ainda representado o quociente  $L_v/\phi$  calculado admitindo uma distribuição uniforme de tensões de aderência ao longo do varão com  $\tau = \tau_b = \tau_{\max}$  e  $f_y \in \{300, 400, 500, 600, 700\}$  (apenas se representam os casos de betão confinado na medida em que para betão não confinado não existe patamar para  $\tau = \tau_{\max}$ ).

A Figura A.13 permite concluir que, para  $f_c' > 20$  MPa, o comprimento mínimo de amarração para que o cenário 2-1 possa ocorrer é sempre superior ao comprimento máximo de amarração para que a armadura não entre em cedência, ou seja, o cenário 2-1 é inverosímil para amarrações curtas.

### Fase 1 / Relação $s_1 - F_1$

Substituindo nas expressões (A.86) e (A.97)  $i$  por 1, obtém-se

$$F_1^{p,2} = F_0 = (n-p)F_a + pF_b \quad (\text{A.100})$$

e

$$\begin{aligned} s_1^{p,2} &= \delta_a + \frac{(2n-p)(p-1) + 2(n-p)\frac{F_a}{k} + \frac{p(p-1)(F_b - F_a)}{2k}}{2} = \\ &= \delta_a + \frac{2p(n-p)F_a + p(p-1)F_b}{2k}. \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

Resolvendo a expressão (A.100) em ordem a  $p$ , tem-se

$$p = \frac{nF_a - F_1}{F_a - F_b}. \quad (\text{A.102})$$

Substituindo este resultado na expressão (A.101), fica-se com a relação  $s_1 - F_1$

$$s_1 = \delta_a - \frac{L_t(nF_a - F_1)[F_b(F_1 - F_b) + F_a(F_b - 2F_1 + nF_b)]}{2nEA(F_a - F_b)^2}. \quad (\text{A.103})$$

Fazendo o comprimento de cada célula tender para zero ( $n \rightarrow \infty$ ) em (A.103), obtém-se

$$s_1 = \delta_a - \frac{(\bar{F}_a L_t - F_1)(\bar{F}_b F_1 + \bar{F}_a \bar{F}_b L_t - 2\bar{F}_a F_1)}{2EA(\bar{F}_a - \bar{F}_b)^2}. \quad (\text{A.104})$$

Desenvolvendo o termo do lado direito de (A.104) e agrupando novamente os termos do mesmo grau em  $F_1$ , obtém-se a equação de segundo grau  $aF_1^2 + bF_1 + c = 0$ , ou seja,

$$\frac{\bar{F}_b - 2\bar{F}_a}{2EA(\bar{F}_a - \bar{F}_b)^2} F_1^2 + \frac{\bar{F}_a^2 L_t}{EA(\bar{F}_a - \bar{F}_b)^2} F_1 + \left( \delta_a - \frac{\bar{F}_a^2 \bar{F}_b^2 L_t^2}{2EA(\bar{F}_a - \bar{F}_b)^2} - s_1 \right) = 0. \quad (\text{A.105})$$

Esta equação tem duas soluções, dadas por

$$F_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (\text{A.106})$$

Tendo em atenção que

$$aF_1^2 + bF_1 + c = 0 \rightarrow |2aF_1 + b| = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad (\text{A.107})$$

então, caso seja  $(2aF_1 + b) > 0$ , tem-se

$$2aF_1 + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \rightarrow F_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (\text{A.108})$$

Neste caso em particular

$$2aF_1 + b = 2 \left( \frac{\bar{F}_b - 2\bar{F}_a}{2EA(\bar{F}_a - \bar{F}_b)^2} \right) F_1 + \frac{\bar{F}_a^2 L_t}{EA(\bar{F}_a - \bar{F}_b)^2} = \frac{(\bar{F}_b - 2\bar{F}_a)F_1 + \bar{F}_a^2 L_t}{EA(\bar{F}_a - \bar{F}_b)^2}. \quad (\text{A.109})$$

Pelo que o sinal de  $(2aF_1 + b)$  corresponde ao sinal do numerador da expressão (A.109). O numerador desta expressão será positivo caso se verifique a condição

$$(\bar{F}_b - 2\bar{F}_a)F_1 + \bar{F}_a^2 L_t > 0 \rightarrow (\bar{F}_b - 2\bar{F}_a)F_1 > -\bar{F}_a^2 L_t. \quad (\text{A.110})$$

Na fase 1, o esforço mínimo na amarração corresponde ao ponto B (Figura A.8), onde se tem  $F_1 = \bar{F}_a L_t$ . Substituindo este valor mínimo em (A.110), obtém-se

$$(\bar{F}_b - 2\bar{F}_a)\bar{F}_a L_t > -\bar{F}_a^2 L_t \rightarrow \bar{F}_b > \bar{F}_a. \quad (\text{A.111})$$

Conclui-se que, nas condições de amarração curta assumidas nesta exemplificação, se verifica sempre  $(2aF_1 + b) > 0$ . Assim a solução da equação (A.105) é (A.108), ou seja

$$F_1 = \frac{\bar{F}_a^2 L_t + (\bar{F}_a - \bar{F}_b) \sqrt{\bar{F}_a^2 L_t^2 + 2EA(2\bar{F}_a - \bar{F}_b)(\delta_a - s_1)}}{2\bar{F}_a - \bar{F}_b}. \quad (\text{A.112})$$

### A.3.2.2.3. Fase 2

Seja o ponto C correspondente a  $s_n = \delta_a$ , ou seja, ao cenário 2-2. O escorregamento  $s_1$  na extremidade solicitada pode ser determinado recorrendo à expressão (A.98), tendo em conta que para o ponto C  $p = n$  e fazendo  $n$  tender para infinito

$$s_{1,C} = \delta_a + \frac{\bar{F}_b L_t^2}{2EA}. \quad (\text{A.113})$$

Incrementando novamente  $s_1$ , vai ocorrer movimento de corpo rígido até se obter  $s_1 = \delta_b$ . Seja o ponto D correspondente a  $s_1 = \delta_b$ . A partir do ponto D o valor da tensão de aderência na célula 1 passa a  $\tau_c < \tau_b$ , o que vai conduzir a uma redução da resultante das tensões de aderência na amarração.

### A.3.2.2.4. Resumo da relação constitutiva $s_1-F_1$

A relação  $F_0-s_0 (\equiv F_1-s_1)$  completa pode ser definida em função do escorregamento  $s_0$

$$F_0(s_0) = \begin{cases} \sqrt{2EA\bar{F}_a s_0}, & \text{se } s_0 \in \left[ 0, \frac{\bar{F}_a L_t^2}{2EA} \right] \text{ (troço OA),} \\ \bar{F}_a L_t, & \text{se } s_0 \in \left[ \frac{\bar{F}_a L_t^2}{2EA}, \delta_a \right] \text{ (troço AB),} \\ \frac{\bar{F}_a^2 L_t + (\bar{F}_a - \bar{F}_b) \sqrt{\bar{F}_a^2 L_t^2 + 2EA(2\bar{F}_a - \bar{F}_b)(\delta_a - s_0)}}{2\bar{F}_a - \bar{F}_b}, & \text{se } s_0 \in \left[ \delta_a, \delta_a + \frac{\bar{F}_b L_t^2}{2EA} \right] \text{ (troço BC),} \\ \bar{F}_b L_t, & \text{se } s_0 \in \left[ \delta_a + \frac{\bar{F}_b L_t^2}{2EA}, \delta_b \right] \text{ (troço CD).} \end{cases} \quad (\text{A.114})$$

Na Figura A.14(a) está esquematicamente representada a relação  $F_0-s_0$  até ao ponto D (início do ramo de amaciamento) para uma relação  $\tau-s$  constante por troços do tipo representado na Figura A.14(b), de acordo com a expressão (A.114). Nesta expressão, a concavidade do troço BC é a representada caso  $(2\bar{F}_a - \bar{F}_b) > 0$  e é a contrária caso  $(2\bar{F}_a - \bar{F}_b) < 0$ .

Na Figura A.14(a) está também esquematicamente representada a simulação do comportamento da mesma amarração de acordo com o modelo proposto no §5.4.2 adoptando a curva  $\tau-s$  do MC90 com base na qual é determinada a relação  $\tau-s$  constante por troços.

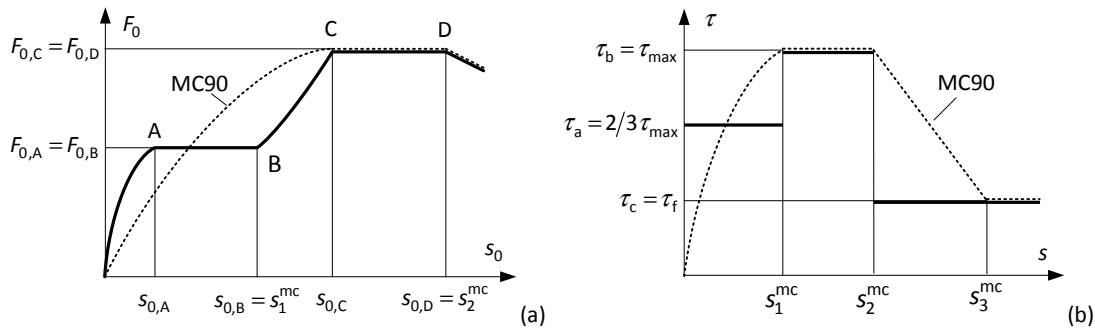


Figura A.14 – Comportamento de uma amarração curta, (a) relação  $F_0$ - $s_0$ , (b) relações  $\tau$ - $s$ .

Constata-se que as curvas  $F_0$ - $s_0$  esquematicamente representadas na Figura A.14(a) apresentam desfazamentos significativos para a aproximação de curvas  $\tau$ - $s$  representada na Figura A.14(b). Este desfazamento permite concluir que uma aproximação simplista como a adoptada não é aceitável.

#### A.4. Notas finais

A utilização de relações constitutivas  $\tau$ - $s$  com tensão de aderência constante por troços para a modelação do comportamento de amarrações de varões é potencialmente interessante dada a possibilidade de se obter soluções analíticas simples.

No caso particular, em que se faz coincidir o primeiro salto da relação constitutiva  $\tau$ - $s$  com a mudança de regime da relação constitutiva das armaduras (relação  $\sigma_s$ - $\varepsilon_s$ ), obtêm-se expressões analíticas bastante compactas (§A.3.1). No entanto, esta abordagem é pouco consistente, na medida em que (i) não permite contabilizar o comprimento do varão de forma explícita, (ii) não permite quantificar a capacidade resistente nem o troço de amaciamento do comportamento da amarração sem parâmetros adicionais e (iii) não é facilmente justificável a hipótese de que o comportamento da interface é função do regime em que as armaduras estão.

Por forma a contornar estas lacunas, foi aplicado o modelo simplificado proposto no §5.4.2 para determinar expressões analíticas que permitissem modelar o comportamento das amarrações para relações  $\tau$ - $s$  constantes por troços e independentes do regime da armadura.

Este procedimento foi aplicado no §A.3.2 a amarrações curtas. Mostrou-se que é possível o desenvolvimento de um modelo que ultrapasse a maioria das limitações identificadas no modelo com tensões de aderência constantes por troços e com mudança de regime coincidente com a cedência das armaduras – por exemplo, é possível determinar a capacidade resistente da amarração em função da relação  $\tau$ - $s$  e do comprimento do varão.

Constatou-se, no entanto, que a adopção de diversos troços na relação  $\tau$ - $s$  e na relação  $\sigma_s$ - $\varepsilon_s$  conduz ao estabelecimento de múltiplos cenários alternativos, que tornam a aplicação deste procedimento pouco interessante.

Além disso, não existe uma forma ideal para definir uma relação  $\tau$ - $s$  constante por troços que aproxime uma relação experimental contínua, nem existe consenso na bibliografia quanto aos valores  $\tau_i$  e  $s_i$  a adoptar (§A.2.2) para definir os patamares e os seus limites, respectivamente.

Perante estas condicionantes, conclui-se que a modelação do comportamento de amarrações



com base em expressões analíticas decorrentes de relações  $\tau$ - $s$  constantes por troços não constitui uma abordagem satisfatória para efeito de modelação de ligações viga-pilar.



---

## Referências bibliográficas

- ACI-ASCE Committee 352 [1997].** *ACI 352.1R-89: Recommendations for design of slab-column connections in monolithic reinforced concrete structures.* American Concrete Institute-American Society of Civil Engineers, Farmington Hills, MI: 26.
- ACI-ASCE Committee 352 [2002].** *ACI 352R-02: Recommendations for design of beam-column connections in monolithic reinforced concrete structures.* American Concrete Institute-American Society of Civil Engineers, Farmington Hills, MI: 37.
- ACI Committe 408 [1979].** *Suggested development, splice and standard hook provisions for deformed bars in tension.* Concrete International, 1(7): 44-46.
- ACI Committee 318 [2002].** *Building code requirements for structural concrete (ACI 318-02) and commentary (ACI 318R-02).* American Concrete Institute, Farmington Hills, MI: 443.
- ACI Committee 318 [2008].** *Building code requirements for structural concrete (ACI 318M-08) and commentary.* American Concrete Institute, Farmington Hills, MI: 479.
- Al-Gahtani, H. J. [2005].** *Geometric & inertial properties of areas enclosed by irregular boundaries.* Civil Eng. Dept., King Fahd University of Petroleum & Minerals Dhahran.
- Alath, S. e S. K. Kummath [1995].** *Modeling inelastic shear deformation in rc beam-column joint engineering mechanics.* 10th Conference: University of Colorado at Boulder, New York, ASCE: 822-825.
- Alsiwat, J. M. e M. Saatcioglu [1991].** *Reinforcement anchorage slip under monotonic loading.* Journal of Structural Engineering-ASCE, 118(9): 2421-2438.
- Altoontash, A. [2004].** *Simulation and damage models for performance assessment of reinforced concrete beam-column joints.* Stanford University. Ph.D. thesis: 246.
- Alva, G. M. S. [2004].** *Estudo teórico experimental do comportamento de nós de pórtico de concreto armado submetidos a ações cíclicas.* Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas. Ph.D. thesis: 232.
- Alves, S. F. S. J. [2008].** *Comportamento de juntas soldadas em nó interno com vigas de diferentes alturas e aço de alta resistência.* Universidade de Coimbra, Departamento de Engenharia Civil. Ph.D. thesis: 373.
- Anderson, J. C. e W. H. Townsend [1977].** *Models for rc frames with degrading stiffness* Journal of the Structural Division-ASCE, 103(ST12): 2361-2376.
- ANSYS Inc. [1998].** *ANSYS v5.3,* Houston.
- Appleton, J. [1982].** *Análise não-linear de pórticos planos de betão armado sujeitos à flexão* Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa: 130.
- Arêde, A. J. C. D. [1997].** *Seismic assessment of reinforced concrete frame structures with a new flexibility based element.* Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia. Ph.D. thesis: 477.
- Argyris, J. H. e D. W. Sharpf [1972].** *Methods of elastoplastic analysis.* Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 23: 517-552.
- ASCE [2007a].** *ASCE/SEI 41-06 - Seismic rehabilitation of existing buildings.* American Society of Civil Engineers, Reston: 427.
- ASCE [2007b].** *ASCE/SEI 41-06 - Seismic rehabilitation of existing buildings - Supplement 1.* American Society of Civil Engineers, Reston.
- Aycardi, L. E., J. B. Mander e A. M. Reinhorn [1994].** *Seismic resistance of reinforced concrete frame structures designed only for gravity loads experimental performance of subassemblages.* ACI Structural Journal, 91(5): 552-563.

- Baglin, P. S. e R. H. Scott [2000].** *Finite element modeling of reinforced concrete beam-column connections.* ACI Structural Journal, 97(6): 886-894.
- Bakir, P. G. [2003].** *Seismic resistance and mechanical behaviour of exterior beam-column joints with crossed inclined bars.* Structural Engineering and Mechanics, 16(4): 493-517.
- Balint, P. S. e H. P. J. Taylor [1972].** *Reinforcement detailing of frame corner joints with particular reference to opening corners.* Cement and Concrete Association, London: 16.
- Bao, Y., S. K. Kunnath, S. El-Tawil e H. S. Lew [2008].** *Macromodel-based simulation of progressive collapse: rc framed structures.* Journal of Structural Engineering - ASCE, 134(7): 1079-1091.
- Bayo, E., J. M. Cabrero e B. Gil [2006].** *An effective component-based method to model semi-rigid connections for the global analysis of steel and composite structures.* Engineering Structures, 28: 97-108.
- Bažant, Z. P. e B. H. Oh [1983].** *Crack band theory for fracture of concrete.* Materials and Structures, 16: 155-177.
- Beber, A. J. [1999].** *Avaliação do desempenho de vigas de concreto armado reforçadas com lâminas de fibra de carbono.* Universidade Federal de Rio Grande do Sul. M.Sc. thesis: 108.
- Bentz, E. C. [2000].** *Sectional analysis of reinforced concrete members.* University of Toronto, Graduate Department of Civil Engineering. Ph.D. thesis: 310.
- Berry, M. P. e M. O. Eberhard [2008].** *Performance modelling strategies for modern reinforced concrete bridge columns.* Pacific Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley: 210.
- Biddah, A. e A. Ghobarah [1999].** *Modeling of shear deformation and bond slip in reinforced concrete joints.* Structural Engineering and Mechanics, 7(4): 413-432.
- Bigaj, A. J. [1999].** *Structural dependence of rotation capacity of plastic hinges in rc beams and slabs.* Technische Universiteit Delft. Ph.D. thesis: 243.
- Bijlaard, F. S. K. e C. M. Steenhuis [1992].** *Prediction of the influence of connection behaviour on the strength, deformations and stability of frames, by classification of connections.* Connections in Steel Structures II. American Institute for Steel Structures Inc.: 307-318.
- Birely, A. C., L. N. Lowes e D. E. Lehman [2012].** *A model for the practical nonlinear analysis of reinforced-concrete frames including joint flexibility.* Engineering Structures, 34: 455-465.
- Blaauwendraad, J. [1972].** *Realistic analysis of reinforced concrete framed structures.* Heron, 18(4): 31.
- Bonet, J. e R. D. Wood [2008].** *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis.* Cambridge University Press, Cambridge: 340.
- Borkowski, A. [1988].** *Analysis of skeletal structural systems in the elastic and elastic-plastic range.* Elsevier, New York: 223.
- Borst, R. [1986].** *Nonlinear analysis of frictional materials.* Delft university of Technology. Ph.D. thesis: 141.
- Briquet, C., S. Guisse, J.-P. Jaspard, B. Lognard e R. Maquoi [1994].** *Research activities under COST C1 at the Department MSM of the University of Liège.* COST C1 : Semi-rigid behaviour of civil engineering structural connections: proceedings of the second state of the art workshop, Prague European Commission: 75-88.
- Calabrese, A. [2008].** *Numerical issues in distributed inelasticity modeling of rc frame elements for seismic analysis.* Istituto Universitario di Studi Superiori. M.Sc. thesis: 147.
- Calabrese, A., J. P. Almeida e R. Pinho [2010].** *Numerical issues in distributed inelasticity modeling of rc frame elements for seismic analysis.* Journal of Earthquake Engineering(14): 38-68.
- Calvi, G., G. Magenes e S. Pampanin [2002].** *Relevance of beam-column joint damage and*

*collapse in RC frame assessment*. Journal of Earthquake Engineering, 6: 75-100.

**Campana, S., M. F. Ruiz e A. Muttoni [2013]**. *Behaviour of nodal regions of reinforced concrete frames subjected to opening moments and proposals for their reinforcement*. Engineering Structures, 51: 200-210.

**Castro, P. M. R. P. d. [1998]**. *Modelos para análise da encurvadura em pórticos de betão armado*. Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia. Ph.D. thesis: 413.

**CEB [1974]**. *Bulletin d'Information nº 103: CEB - Buckling manual*. CEB, Paris: 234.

**CEB [1985]**. *CEB design manual on cracking and deformations*. EPFL, Lausanne: 243.

**CEB [1996]**. *RC frames under earthquake loading: state of the art report*. Thomas Telford, London: 308.

**Celik, O. C. e B. R. Ellingwood [2008]**. *Modeling beam-column joints in fragility assessment of gravity load designed reinforced concrete frames*. Journal of Earthquake Engineering, 12(3): 357-381.

**CEN [1984]**. *Eurocode 2, Common unified rules for concrete structures*. Commission of the European Communities.

**CEN [1988]**. *Eurocode 8, Structures in seismic regions - Design - Part 1, General and Bulding*. Commission of the European Communities.

**CEN [1992]**. *ENV 1993-1-1, Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1 General rules and rules for buildings*. European Committee for Standardisation, Brussels.

**CEN [1994]**. *ENV 1993-1-1, Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1 General rules and rules for buildings (Including revised Annex J - Joints in building frames) - document N419E*. European Committee for Standardisation, Brussels.

**CEN [2005a]**. *EN 1993-1-8, Eurocode 3: Design of steel structures, Part 1-8: Design of joints*. European Committee for Standardisation, Brussels: 133.

**CEN [2005b]**. *EN 1998-2, Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance. Part 2: Bridges*. European Committee for Standardisation, Brussels: 146.

**Červenka Consulting [2000a]**. *ATENA*, Prague.

**Červenka Consulting [2000b]**. *SBETA*, Prague.

**Červenka Consulting [2009]**. *ATENA 3D*, Prague.

**Červenka, J. e L. Jendele [2009]**. *ATENA program documentation, Part 6, ATENA input file format*. Červenka Consulting, Prague: 219.

**Červenka, J. e V. K. Papanikolaou [2008]**. *Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete*. International Journal of Plasticity, 24: 2192–2220.

**Červenka, J. e Z. Procházková [2010]**. *ATENA program documentation, Part 4-2, Tutorial for program ATENA 3D*. Červenka Consulting, Prague: 93.

**Červenka, V. e J. Červenka [2006]**. *ATENA program documentation, Part 2-1, User's Manual for ATENA 2D*. Červenka Consulting, Prague: 139.

**Červenka, V. e J. Červenka [2010]**. *ATENA program documentation, Part 2-1, User's Manual for ATENA 3D*. Červenka Consulting, Prague: 116.

**Červenka, V., J. Červenka e L. Jendele [2003]**. *Bond in finite element modelling of reinforced concrete*. EURO-C 2003 Computational Modelling of Concrete Structures, St. Johann im Pongau: 6.

**Červenka, V., L. Jendele e J. Červenka [2010]**. *ATENA program documentation, Part 1, Theory*. Červenka Consulting, Prague: 248.

**Charney, F. A. e J. Marshal [2006]**. *A comparison of the Krawinkler ans Scissors models for including beam-column joint deformations in the analysis of moment-resisting steel frames*.

AISC Engineering Journal, 43(1): 31-48.

**Choi, H. e J. Kim [2011].** *Progressive collapse-resisting capacity of RC beam-column sub-assembly.* Magazine of Concrete Research, 63(4): 297–231.

**Coleman, J. e E. Spacone [2005].** *Localization issues in force-based frame elements.* Journal of Structural Engineering, 127(11): 1257–1265.

**Computers & Structures Inc. [2009a].** *CSI analysis reference manual for SAP2000(R), ETABS(R) e SAFE(R),* Berkeley: 490.

**Computers & Structures Inc. [2009b].** *ETABS,* Berkeley.

**Computers & Structures Inc. [2009c].** *SAFE,* Berkeley.

**Computers & Structures Inc. [2009d].** *SAP2000,* Berkeley.

**Costa, R., P. Providência, M. Ferreira e A. Dias [2010].** *Influência da deformação da ligação viga-pilar no comportamento de estruturas porticadas de betão armado.* BE2010 - Encontro Nacional Betão Estrutural, Lisboa: 15.

**Crisfield, M. A. [1991].** *Non-linear finite element analysis of solids and structures, Volume 1 - Essentials.* John Wiley & Sons Ltd: 360.

**CYPE Ingenieros S.A. [2012a].** *Cypecad,* Braga.

**CYPE Ingenieros S.A. [2012b].** *Cypecad - Memória de cálculo,* Braga: 150.

**Dyngeland, T. [1989].** *Behavior of reinforced concrete panels.* Trondheim University. Ph.D. thesis.

**ECCS-TC8 [1992].** *ECCS - Technical Committee 8 - Structural Stability: Technical Working Group 8.1/8.2 Skeletal Structures, Analysis and design of steel frames with semi-rigid joints.* ECCS, Brussels: 293.

**El-Metwally, S. E. e W. F. Chen [1988].** *Moment-rotation modeling of reinforced-concrete beam-column connections.* ACI Structural Journal, 85(4): 384-394.

**Eligehausen, R., V. V. Bertero e E. P. Popov [1982].** *Hysteretic behavior of reinforcing deformed hooked bars in r/c joints.* 7th European Conference on Earthquake Engineering, Athens: 171-178.

**Eligehausen, R., J. Ozbolt, G. Genesio e M. S. Hoehler [2006].** *Three-dimensional modelling of poorly detailed RC frame joints.* 2006 NZSEE, Napier: 10.

**Eligehausen, R. e S. Pampanin [2009].** *3D analysis of seismic response of rc beam-column exterior joints before and after retrofit.* Concrete Repair, Rehabilitation and Retrofitting II, Cape Town: 1141-1147.

**Eligehausen, R., E. P. Popov e V. V. Bertero [1983].** *Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations.* Report EERC 83/23. Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley: 180.

**Elmorsi, M. [1998].** *Analytical modeling of reinforced concrete beam column connections for seismic loading.* McMaster University, School of Graduate Studies. Ph.D. thesis: 236.

**Elmorsi, M., M. R. Kianoush e W. K. Tso [2000].** *Modeling bond-slip deformations in reinforced concrete beam-column joints.* Canadian Journal of Civil Engineering, 27(3): 490-505.

**Elnashai, A. S. [2001].** *Advanced inelastic static (pushover) analysis for earthquake applications.* Structural Engineering and Mechanics, 12(1): 51-69.

**Elwood, K. J. e M. O. Eberhard [2006].** *Effective stiffness of reinforced concrete columns.* Research Digest, Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2006(1): 5.

**Elwood, K. J., A. Matamoros, J. W. Wallace, D. Lehman, J. Heintz, A. Mitchell, M. Moore, M. Valley, L. N. Lowes, C. Comartin e J. P. Moehle [2007].** *Update to ASCE/SEI 41 concrete provisions.* Earthquake Spectra, Earthquake Engineering Research Institute, 23(3): 493-523.

- Faella, C., V. Piluso e G. Rizzano [2000].** *Structural steel semirigid connections: theory, design and software*. CRC Press LLC, Boca Raton: 505.
- Fardis, M. N. [2005].** *Seismic design of reinforced concrete buildings (class notes)*. European School for Advanced Studies in Reduction of Seismic Risk (Rose School), IUSS, University of Pavia, Pavia.
- Favvata, M. J., B. A. Izzuddin e C. G. Karayannis [2008].** *Modelling exterior beam-column joints for seismic analysis of rc frame structures*. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*: 1527–1548.
- FEMA 356 [2000].** *Prestandard and commentary for the seismic rehabilitation of buildings*. Federal Emergency Management Agency. ASCE, Virginia: 519.
- Fenwick, R. C. e L. M. Megget [1993].** *Elongation and load deflection characteristics of reinforced concrete members containing plastic hinges*. *Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering*, 26(1): 28-41.
- Ferrari, V. J. [2002].** *Reforço à flexão em vigas de concreto armado com manta de fibras de carbono: mecanismos de incremento de ancoragem*. Universidade Deferal de Santa Catarina. M.Sc. thesis.
- Ferreira, M. [2011].** *EvalS 2.2*, Leiria.
- Ferreira, M., R. Costa, P. Gala e P. Providência [2011].** *O método das forças fictícias com modelo de fibras aplicado à análise de estruturas de betão armado*. Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia 2011, Coimbra: 18.
- Fib [2003].** *Bulletin No 24 - Seismic assessment and retrofit of reinforced concrete buildings*. The International Federation for Structural Concrete, Lausanne: 312.
- Fib [2010a].** *Model Code 2010 - First complete draft - Volume 1*. fib, Lausanne: 317.
- Fib [2010b].** *Model Code 2010 - First complete draft - Volume 2*. fib, Lausanne: 311.
- Figueiras, J. A. [1999].** *Curso: Nova regulamentação para o projecto de estruturas de betão - Módulo M1: Apresentação geral do Eurocódigo 2, Bases para o dimensionamento*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto: 64.
- Filippou, F. C., A. D'Ambrisi e A. Issa [1992].** *Nonlinear static and dynamic analysis of reinforced concrete sub assemblages*. Earthquake Engineering Research Center, Berkeley: 178.
- Filippou, F. C., E. P. Popov e V. V. Bertero [1983a].** *Effects of bond deterioration on hysteretic behaviour of reinforced concrete joints*. Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley: 212.
- Filippou, F. C., E. P. Popov e V. V. Bertero [1983b].** *Modeling of r/c joints under cyclic excitations*. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 109(11): 18.
- Fleury, F., J. M. Reynouard e O. Merabet [2000].** *Multicomponent model of reinforced concrete joints for cyclic loading*. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 126(8): 804-811.
- Gala, P. [2007].** *O método das forças fictícias na modelação da não linearidade material em estruturas reticuladas*. Universidade de Coimbra, Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra. M.Sc. thesis: 174.
- Gala, P., P. Providência, V. D. d. Silva e M. Ferreira [2008].** *Aplicação do método das forças fictícias à modelação 1D da não linearidade material em estruturas reticuladas de betão armado*. Encontro Nacional de Betão Estrutural 2008, Guimarães: 10.
- Gala, P., P. Providência, V. D. d. Silva e M. Ferreira [2010].** *O método das forças fictícias na modelação 1D da não linear material em estruturas porticadas e betão armado - "aplicação à análise push-over"*. Encontro Nacional de Betão Estrutural 2010, Lisboa: 10.
- Geradin, M. e P. Negro [2000].** *The European Laboratory for Structural Assessment (ELSA) and its role for the validation of european seismic codes*. Second EuroConference on Global Change and Catastrophe Risk Management: Earthquake Risks in Europe, Luxemburg: 10.

- Gomes, F. C. T. [2002].** *The EC3 classification of joints and alternative proposals*. Eurosteel Coimbra 2002 – 3rd European Conference on Steel Structures, Coimbra: 987-996.
- Gomes, F. C. T., U. Kulhmann, G. D. Matteis e A. Mandara [1998].** *Recent developments on classification of joints*. COST-C1 Int. Conf. - Control of the semi-rigid behaviour of civil engineering structural connections, Liège: 187-198.
- Gomes, F. C. T., P. Providência e R. Costa [2011].** *Classification of reinforced concrete beam-to-column joints*. CoRAN 2011 - International Conference on Recent Advances in Nonlinear Models - Structural Concrete Applications, Coimbra: 10.
- Guedes, J. M. [1997].** *Seismic behaviour of reinforced concrete bridges. Modelling, numerical analysis and experimental assessment*. Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Ph.D. thesis: 426.
- Guner, S. e F. J. Vecchio [2011].** *Analysis of shear-critical reinforced concrete plane frame elements under cyclic loading*. Journal of Structural Engineering - ASCE, 137(8): 834-843.
- Gupta, A. K. e S. R. Maestrini [1990].** *Tension-stiffness model for reinforced concrete bars*. Journal of Structural Engineering - ASCE, 116(3): 769-790.
- Hamil, S. J. [2000].** *Reinforced concrete beam-column connection behaviour*. University of Durham. Ph.D. thesis: 398.
- Hanson, N. W. e H. W. Conner [1967].** *Seismic resistance of reinforced concrete beam-column joints*. Journal of Structural Division-ASCE, 95(5): 533-560.
- Hegger, J., A. Sherif e W. Roeser [2003].** *Nonseismic design of beam-column joints*. ACI Structural Journal, 100(5): 654-664.
- Hegger, J., A. Sherif e W. Roeser [2004].** *Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete beam-column connections*. ACI Structural Journal, 101(5): 604-614.
- Hordijk, D. A. [1991].** *Local approach to fatigue of concrete*. Technische Universiteit Delft. Ph.D. thesis: 216.
- Horne, M. R. [1971].** *Plastic theory of structures*. Thomas Nelson and Sons Ltd, London: 173.
- Horne, M. R. [1975].** *An approximate method for calculating the elastic critical loads of multi-storey plane frames*. The Structural Engineer, 53(6): 242-248.
- Hsu, T. T. C. [1988].** *Softened truss model-theory for shear and torsion*. ACI Structural Journal, 85(6): 624-635.
- Huber, G., H. J. Kronenberger e K. Weynand [1998].** *Representation of joints in the analysis of structural systems*. Control of the semi-rigid behaviour of civil engineering structural connections, Liège, European Commission: 10.
- Hwang, L. S. e S. H. Rizkalla [1983].** *Behavior of reinforced concrete in tension at post-cracking range*. Engrg. Rept., Dept. of Civ. Engrg. University of Manitoba, Winnipeg.
- Ibrahim, H. H. A. [2011].** *Stud reinforcement in beam-column joints under seismic loads*. University of Calgary, Department of Civil Engineering. Ph.D. thesis: 358.
- IPQ [2010a].** *NP EN 1992-1-1, Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão, Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. Instituto Português da Qualidade, Caparica: 259.
- IPQ [2010b].** *NP EN 1993-1-1, Eurocódigo 3: Projecto de estruturas de aço, Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. Instituto Português da Qualidade, Caparica: 116.
- IPQ [2010c].** *NP EN 1993-1-8, Eurocódigo 3: Projecto de estruturas de aço, Parte 1-8: Projecto de ligações*. Instituto Português da Qualidade, Caparica: 146.
- IPQ [2010d].** *NP EN 1998-1, Eurocódigo 8: Projecto de estruturas para resistência aos sismos, Parte 1: Regras gerais, acções sísmicas e regras para edifícios*. Instituto Português da Qualidade, Caparica: 230.
- ISO [1997].** *ISO 3898: 1997 (E) Bases for design of structures - Notations - General symbols*.



International Organization for Standardization, Geneva: 13.

**Iturribizia, S. L. [2007].** *Análisis de secciones compuestas mediante modelos de fibras.* Iturribizia, S.L.: 7.

**Jaspart, J. P. [2000].** *General report: session on connections.* Journal of Constructional Steel Research, 55: 69–89.

**Jendele, L. e J. Červenka [2006].** *Finite element modelling of reinforced with bond.* Computers & Structures, 84: 1780-1791.

**Johansson, M. [2001].** *Reinforcement detailing in concrete frame corners.* ACI Structural Journal, 98(1): 105-115.

**Juandes, L. F. P. [1999].** *Reforço e reabilitação de estruturas de betão usando materiais compósitos de CFRP.* Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Ph.D. thesis: 400.

**Kabele, P., V. Červenka e J. Červenka [2010].** *ATENA program documentation, Part 3-1, Example Manual ATENA Engineering.* Červenka Consulting, Prague: 90.

**Kato, B., W. F. Chen e M. Nakao [1988].** *Effects of joint-panel shear deformation on frames.* J. Construct. Steel Research, 10: 269-320.

**Kim, J. [2007].** *Joint shear behaviour of reinforced concrete beam-column connections subjected to seismic lateral loading.* University of Illinois at Urbana-Champaign, Graduate College. Ph.D. thesis: 280.

**Kim, J. e J. M. LaFave [2009].** *Joint shear behavior of reinforced concrete beam-column connections subjected to seismic lateral loading.* University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana: 218.

**Kim, J., J. M. LaFave e J. Song [2009].** *Joint shear behaviour of reinforced concrete beam-column connections.* Magazine of Concrete Research, 61(2): 119–132.

**Kim, J., J. Stanton e G. MacRae [2004].** *Effect of beam growth on reinforced concrete frames.* Journal of Structural Engineering - ASCE, 130(9): 1333-1342.

**Kitayama, K., S. Otani e H. Aoyama [1991].** *Development of design criteria for rc interior beam-column joints.* ACI SP-123 Design of Beam-Column Joints for Seismic Resistance. American Concrete Institute, Michigan: 97-123.

**Kollár, L. [1999].** *Structural stability in engineering practice.* E & FN Spon, London: 467.

**Kolleger, J. e G. Mehlhorn [1990].** *Experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der Druckfestigkeit des gerissenen Stahlbetons bei einer Querkzugbeanspruchung.* Beuth Verlag, Berlin: 132.

**Kordina, K. [1984].** *Bewehrungsführung in Ecken und Rahmenknoten.* Deutscher Ausschuss für Stahlbeton(354): 5-93.

**Kordina, K., M. Teutsch e E. Wegener [1998].** *Trag- und Verformungsverhalten von Rahmenknoten.* Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 486, Beuth-Verlag.

**Kotsovou, G. e H. Mouzakis [2012].** *Seismic design of rc external beam-column joints.* Bulletin of Earthquake Engineering, 10(2): 645-677.

**Krawinkler, H. [1978].** *Shear in beam-column joints in seismic design of steel frames.* Engineering Journal AISC, 15(3): 82-90.

**LaFave, J. M. e J.-H. Kim [2011].** *Joint shear behavior prediction for rc beam-column connections.* International Journal of Concrete Structures and Materials, 5(1): 57-64.

**Lee, J.-Y., J.-Y. Kim e G.-J. Oh [2009].** *Strength deterioration of reinforced concrete beam-column joints subjected to cyclic loading.* Engineering Structures, 31(9): 2070-2085.

**Légeron, F. e P. Paultre [2005].** *Damage mechanics modeling of nonlinear seismic behaviour of concrete structures.* Journal of Structural Engineering, 131(6): 946–955.

- Li, J. [2003].** *Effects of diagonal steel bars on performance of interior beam-column joints constructed with high-strength concrete.* University of Hong Kong. Ph.D. thesis: 339.
- LNEC [2008].** *Documento de classificação, MEGAFER 500SD Seixal (A500 NR de Ductilidade especial).* Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa: 2.
- Lourenço, M. S. e J. F. Almeida [2013].** *Adaptive stress field models: formulation and validation.* ACI Structural Journal, 100(1): 71-81.
- Lowes, L. N. e A. Altoontash [2003].** *Modeling reinforced-concrete beam-column joints subjected to cyclic loading.* Journal of Structural Engineering-ASCE, 129(12): 1686-1697.
- Lowes, L. N., N. Mitra e A. Altoontash [2004].** *A beam-column joint model for simulating the earthquake response of reinforced concrete frames.* Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California: 66.
- Lubliner, J. [2006].** *Plasticity theory.* Pearson Education Inc., Berkeley: 540.
- Lundgren, K. [1999].** *Three-dimensional modelling of bond in reinforced concrete.* Chalmers University of Technology, Department of Structural Engineering. Ph.D. thesis: 143.
- Luo, Y. H., A. J. Durrani, S. Bai e J. Yuan [1994].** *Study of reinforcing detail of tension bars in frame corner connections.* ACI Structural Journal, 91(4): 486-496.
- Maquoi, R. e J. P. Jaspert [1992].** *Modeling of beam-column joints for the design of steel building frames.* Constructional steel design: world developments, Acapulco, Elsevier Applied Science: 196-205.
- Marques, J. L. G. e J. O. Jirsa [1975].** *A study of hooked bar anchorages in beam-column joints.* ACI Journal, 72(5): 198-209.
- Masi, A., G. Santarsiero, G. M. Verderame, G. Russo, E. Martinelli, M. Pauletta e A. Cortesia [2009].** *Capacity models of beam column joints: provisions of European and Italian seismic codes and possible improvements.* Eurocode 8 Perspectives from the Italian Standpoint Workshop, Napoli: 145-158.
- Massicotte, B., A. E. Elwi e J. G. MacGregor [1990].** *Tension-stiffening model for planar reinforced concrete members.* Journal of Structural Engineering - ASCE, 116(11): 3039-3058.
- MC78 [1978].** *CEB-FIP model code for concrete structures.* CEB-FIP, Paris: 348.
- MC90 [1990].** *Ceb-Fip model code 1990 - design code.* Comite Euro-International du Beton - The International Federation for Structural Concrete. Thomas Telford Services Ltd, London: 437.
- Meinheit, D. F. e J. O. Jirsa [1977].** *The shear strength of reinforced concrete beam-column joints.* Department of Civil Engineering, Structures Research Laboratory, The University of Texas at Austin, Austin: 290.
- Membrane-2000 [2000].** *Membrane-2000,* Toronto.
- Menegotto e P. E. Pinto [1973].** *Method of analysis for cyclically loaded r.c. plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending.* Resistance and ultimate deformability of structures acted on by well defined repeated loads. International Association for Bridge and Structural Engineering, Lisbon: 8.
- Menétrey, P. e K. J. William [1995].** *Triaxial failure criterion for concrete and its generalization.* ACI Structural Journal, 92(3): 311-318.
- Merchant, W. [1954].** *The failure load of rigid jointed frameworks as influenced by stability.* The Structural Engineer, 32(7): 185-190.
- Microsoft Corporation [2010].** *Microsoft Excel 2010,* Santa Rosa.
- Miles, R. e J. Tough [1983].** *A method for the computation of inertial properties for general areas.* Computer-Aided Design, 15(4): 196-200.

- Minor, J. [1970].** *A study of bent bar anchorages in concrete.* Rice University. Ph.D. thesis: 135.
- Minor, J. e J. O. Jirsa [1975].** *Behavior of bent bar anchorages.* ACI Journal, 72(4): 141-149.
- Mirzaei, Y. [2010].** *Post-punching behavior of reinforced concrete slabs.* École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Ph.D. thesis (4613): 230.
- Mitra, N. [2007].** *An analytical study of reinforced concrete beam-column joint behavior under seismic loading.* University of Washington. Ph.D. thesis: 278.
- Mitra, N. e L. N. Lowes [2007].** *Evaluation, calibration, and verification of a reinforced concrete beam-column joint model.* Journal of Structural Engineering-ASCE, 133(1): 105-120.
- Monti, G., F. C. Filippou e E. Spacone [1997].** *Finite element for anchored bars under cyclic load reversals.* Journal of Structural Engineering-ASCE, 123(5): 614-623.
- Moretti, M. L. e T. P. Tassios [2011].** *Detailing of corner joints under opening moment.* Concrete engineering for excellence and efficiency, Prague: 10.
- Muttoni, A., J. Schwartz e B. Thürliman [1996].** *Design of concrete structures with stress fields.* Birkhäuser: 152.
- Negro, P., H. Verzeletti, G. E. Magonette e A. V. Pinto [1994].** *Tests on a four-storey full-scale r/c frame designed according to Eurocodes 8 e 2: preliminary report.* ELSA Laboratory, Luxembourg: 87.
- Nilson, A. A., D. Darwin e C. W. Dolan [2003].** *Design of concrete structures.* McGraw-Hill: 783.
- Nilsson, I. H. E. e A. Losberg [1976].** *Reinforced concrete corners and joints subjected to bending moment.* Journal of the Structural Division-ASCE, 102(6): 1229-1254.
- Ortiz, R. [1993].** *Strut and tie modelling of reinforced concrete short beams and beam-column joints.* University of Westminster. Ph.D. thesis: 208.
- Otani, S. [1974].** *Inelastic analysis of rc frame structures.* Journal of the Structural Division-ASCE, 100(Nst7): 1433-1449.
- Park, R., M. J. N. Priestley e W. D. Gill [1982].** *Ductility of squared-confined concrete columns.* Journal of Structural Division-ASCE, 108(4): 929-950.
- Parker, D. E. [1997].** *Shear strength within reinforced concrete beam-column joints.* Bolton Institute of Higher Education. Ph.D. thesis: 169.
- Parra-Montesinos, G. J. e J. K. Wight [2002].** *Prediction of strength and shear distortion in r/c beam-column joints.* Behavior and Design of Concrete Structures for Seismic Performance, American Concrete Institute: 191-214.
- Paulay, T. e R. Park [1984].** *Joints in reinforced concrete frames designed for earthquake resistance.* Department of Civil Engineering, University of Canterbury, Christchurch: 82.
- Paulay, T., R. Park e M. J. N. Priestley [1979].** *Reinforced-concrete beam-column joints under seismic actions - Closure.* ACI Journal, 76(5): 666-667.
- Paulay, T. e M. J. N. Priestley [1992].** *Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings.* John Willey & Sons, Inc.: 744.
- Pochanart, S. e T. Harmon [1989].** *Bond-slip model for generalized excitation including fatigue.* ACI Materials Journal, 86(5): 465-474.
- Poli, S. D., M. D. Prisco e P. G. Gambarova [1992].** *Shear response, deformations, and subgrade stiffness of a dowel bar embedded in concrete.* ACI Structural Journal, 89(6): 665-675.
- Priestley, M. J. N., G. M. Calvi e M. J. Kowalsky [2007].** *Displacement-based seismic design of structures.* IUSS Press: 721.
- Reis, A. e D. Camotim [2000].** *Estabilidade estrutural.* McGraw-Hill de Portugal, Lda, Alfragide: 470.
- Restrepo, J. e C.-M. Lin [2000].** *Evaluation of the shear strength of beam-column joints of*

*reinforced concrete frames subjected to earthquake loading*. 12 WCEE 2000, Auckland: 8.

**Richard, R. M. e B. J. Abbott [1975]**. *Versatile elastic-plastic stress-strain formula*. Journal of Engineering Mechanics - ASCE, 101(EM4): 511-515.

**Roeser, W. [2002]**. *Zum tragverhalten von Rahmenknoten aus Stahlbeton*. Lehrstuhl und Institut für Massivbau, RWTH Aachen University. Ph.D. thesis: 176.

**Rostásy, F., R. Koch e F. Leonhardt [1976]**. *Zur Mindestbewehrung für Zwang von Außenwänden aus Stahleibbeton*: 267.

**Rungrojsaratis, V. e T. Ueda [1987]**. *A study of ultimate strength of reinforced concrete corner connection joints subjected to negative moments*. 9th JCI Conference: 687-692.

**Russo, G., G. Zingone e F. Romano [1990]**. *Analytical solution for bond-slip of reinforcing bars in reinforced concrete joints* Journal of Structural Engineering-ASCE, 116(2): 336.

**Ryan, J. [1977]**. *Reinforced concrete beam-column connections*. Concrete Magazine, March: 37-39.

**Ryp, D. [2006]**. *T3D Triangulation of 3D Domains (with Quad-Hexa Support)*. Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics: 94.

**Sadek, F., J. A. Main, H. S. Lew e Y. Bao [2011]**. *Testing and analysis of steel and concrete beam-column assemblies under a column removal scenario*. Journal of Structural Engineering - ASCE, 137(9): 881-892.

**Sagbas, G., F. J. Vecchio e C. Christopoulos [2011]**. *Computational modeling of the seismic performance of beam-column subassemblies*. Journal of Earthquake Engineering, 15(4): 640-663.

**Sarsam, K. F. [1983]**. *Strength and deformation of structural joints*. University of Manchester Institute of Science and Technology, Department of Civil and Structural Engineering. Ph.D. thesis: 355.

**Sarsam, K. F. e M. E. Phipps [1985]**. *The shear design of in situ reinforced-concrete beam-column joints subjected to monotonic loading*. Magazine of Concrete Research, 37(130): 16-28.

**Sasani, M., A. Kazemi, S. Sagiroglu e S. Forest [2011]**. *Progressive collapse resistance of an actual 11-story structure subjected to severe initial damage*. Journal of Structural Engineering - ASCE, 137(9): 893-902.

**Sasmal, S. [2009]**. *Performance evaluation and strengthening of deficient beam-column sub-assemblages under cyclic loading*. Universität Stuttgart. Ph.D. thesis: 232.

**Sasmal, S., B. Novák e K. Ramanjaneyulu [2010a]**. *Numerical analysis of fiber composite-steel plate upgraded beam-column sub-assemblages under cyclic loading*. Composite Structures, 93(2): 599-610.

**Sasmal, S., B. Novák e K. Ramanjaneyulu [2010b]**. *Numerical analysis of under-designed reinforced concrete beam-column joints under cyclic loading*. Computers and Concrete, 7(3): 203-220.

**Schlaich, J., K. Schafer e M. Jennewein [1987]**. *Toward a consistent design of structural concrete*. Journal Prestressed Concrete Institute, 32(3): 74-150.

**Scott, R. H. [1992]**. *The effects of detailing on RC beam-column connection behaviour*. The Structural Engineer, 70(18): 318-324.

**Scott, R. H. [1996]**. *Intrinsic mechanisms in reinforced concrete beam-column connection behavior*. ACI Structural Journal, 93(5): 336-346.

**Scott, R. H., I. Feltham e R. T. Whittle [1994]**. *Reinforced beam-column connection and BS8110*. The Structural Engineer, 72(4): 55-60.

**Sezen, H. [2000]**. *Seismic behavior and modeling of reinforced concrete building columns*. University of California. Ph.D. thesis: 345.

- Sezen, H. e J. P. Moehle [2003].** *Bond-slip behavior of reinforced concrete members*. fib-Symposium: Concrete Structures in Seismic Regions, Athens: 10.
- Sharma, A., R. Eligehausen e G. R. Reddy [2011].** *A new model to simulate joint shear behavior of poorly detailed beam-column connections in RC structures under seismic loads, Part I: Exterior joints*. Engineering Structures, 33(3): 1034–1051.
- Sharma, A., G. R. Reddy, K. K. Vaze e R. Eligehausen [2013].** *Pushover experiment and analysis of a full scale non-seismically detailed RC structure*. Engineering Structures, 46: 218-233.
- Sheikh, S. A. e S. M. Uzumeri [1982].** *Analytical model for concrete confinement in tied columns*. Journal of Structural Division-ASCE, 108(12): 2703-2722.
- Shin, M. e J. M. LaFave [2004].** *Modeling of cyclic joint shear deformation contributions in RC beam-column connections to overall frame behavior*. Structural Engineering and Mechanics, 18(5): 645-668.
- Silva, L. S. d. [2008].** *Towards a consistent design approach for steel joints under generalized loading*. Journal of Constructional Steel Research, 64: 1059–1075.
- Soroushian, P., K. Obaseki, M. Nagi e M. C. Rojas [1988].** *Pullout behaviour of hooked bars in exterior beam-column connections*. ACI Structural Journal: 269-276.
- Soroushian, P., K. Obaseki e M. C. Rojas [1987].** *Bearing strength and stiffness of concrete under reinforcing bars*. ACI Materials Journal, 84(3): 179-184.
- SSEDTA [2003a].** *Structural steelwork eurocodes: development of trans-national approach, couse: Eurocode 3*: 530.
- SSEDTA [2003b].** *Structural steelwork eurocodes: development of trans-national approach, couse: Eurocode 4*: 420.
- Steenhuis, M., J.-P. Jaspert, F. Gomes e T. Leino [1998].** *Aplication of the component method to steel joints*. Control of the Semi-Rigid Behaviour of Civil Engineering Structural Connections: 19.
- Stramandinoli, R. S. B. e H. L. L. Rovere [2008].** *An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members*. Engineering Structures, 30: 2069–2080.
- Tajiri, S., H. Shiohara e F. Kusuhara [2006].** *A new macroelement of reinforced concrete beam column joint for elasto-plastic plane frame analysis*. Eighth National Conference of Earthquake Engineering, San Francisco, California: 10.
- Tanaka, H. e R. Park [1990].** *Effect of lateral confining reinforcement on the ductile behaviour of reinforced concrete columns*. Department of Civil Engineering, University of Canterbury, New Zealand.
- Taucer, F. F., E. Spacone e F. C. Filippou [1991].** *A fiber beam column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures*. Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California, Berkeley: 140.
- Taylor, H. P. J. [1974].** *The behaviour of in situ concrete beam-column joints*. Cement and Concrete Association, London: 32.
- Thompson, M. K., J. O. Jirsa, J. E. Breen e R. E. Klingner [2002].** *Anchorage behavior of headed reinforcement: literature review*. Center for Transportation Research - The University of Texas at Austin, Austin: 116.
- TNO DIANA [2007].** *DIANA 9.1*, Delft.
- Tschemmernegg, F. e C. Humer [1988].** *The design of structural steel frames under consideration of the nonlinear behaviour of joints*. J. Construct. Steel Research, 11: 73-103.
- Tschemmernegg, F., D. Rubin e A. Pavlov [1998].** *Application of the component method to composite joints*. Control of the semi-rigid behaviour of civil engineering structural connections, Liège, European Commission: 145-154.
- Tsonos, A., I. Tegos e G. G. Penelis [1993].** *Seismic resistance of type 2 exterior beam-column*

*joints reinforced with inclined bars*. ACI Structural Journal, 89(1): 3-12.

**Ueda, T., I. Lin e N. M. Hawkins [1986]**. *Beam bar anchorage in exterior beam column-beam connections*. ACI Journal, 83(3): 412-422.

**Uma, S. R. e S. K. Jain [2006]**. *Seismic design of beam-column joints in RC moment resisting frames - review of codes* Structural Engineering and Mechanics, 23(5): 579-597.

**Van Mier, J. G. M. [1986]**. *Multiaxial strain-softening of concrete, Part I: Fracture*. Materials and Structures, 19(111): 179-190.

**Vecchio, F. J. e M. P. Collins [1986]**. *The modified compression-field theory for reinforced-concrete elements subjected to shear*. ACI Journal, 83(2): 219-231.

**Vecchio, F. J. e M. P. Collins [1993]**. *Compression response of cracked reinforced concrete*. Journal of Structural Engineering-ASCE, 119(12): 3590-3610.

**Viathanatepa, S., E. P. Popov e V. V. Bertero [1979a]**. *Effects of generalized loadings on bond of reinforcing bars embedded in confined concrete blocks*. Report UCB/EERC-79/22. Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley: 323.

**Viathanatepa, S., E. P. Popov, V. V. Bertero e V. Vitelmo [1979b]**. *Seismic behavior of reinforced concrete interior beam-column subassemblages*. University of California, Berkeley: 187.

**Vollum, R. L. [1998]**. *Design and analysis of reinforced concrete beam-column joints*. University of London, Imperial College of Science Technology and Medicine. Ph.D. thesis: 603.

**Vollum, R. L. e J. B. Newman [1999a]**. *The design of external reinforced concrete beam-column joints*. The Structural Engineer, 77 (23&24): 21-27.

**Vollum, R. L. e J. B. Newman [1999b]**. *Strut and tie models for analysis/design of external beam-column joints*. Magazine of Concrete Research, 51(6): 415-425.

**Walker, S. G. [2001]**. *Seismic performance of existing reinforced concrete beam column joints*. University of Washington, Department of Civil and Environmental Engineering. M.Sc. thesis: 326.

**Walraven, J. [2010]**. *The 2010 fib model code for concrete structures: a new approach to structural engineering*. BE2010 - Encontro Nacional Betão Estrutural Lisboa: 15.

**Westerberg, B. [2004]**. *Second order effects in slender concrete structures - Background to the rules in EC2 - TRITA-BKN. Rapport 77*. KTH Civil and Architectural Engineering: 98.

**William, K. J. e E. D. Warke [1974]**. *Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete*. IABSE seminar on concrete structures subjected to triaxial stress, Bergamo: 31.

**Wilson, E. L. [1999]**. *Static and dynamic analysis of structures*. Computers and Structures, Inc., Berkeley.

**Wrede, R. e M. Spiegel [2010]**. *Schaum's outline of advanced calculus*. McGraw-Hill: 456.

**Yap, S. L. e B. Li [2011]**. *Experimental investigation of reinforced concrete exterior beam-column subassemblages for progressive collapse*. ACI Structural Journal, 108(5): 542-552.

**Youssef, H. e A. Ghobarah [2001]**. *Modelling of rc beam-column joints and structural walls*. Journal of Earthquake Engineering, 5(1): 93-111.

**Yu, J. e K.-H. Tan [2012]**. *Experimental and numerical investigation on progressive collapse resistance of reinforced concrete beam column sub-assemblages*. Engineering Structures, (in press).

**Zienkiewicz, O. C., S. Valliappan e I. P. King [1969]**. *Elasto-plastic solutions of engineering problems 'initial stress', finite element approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1(1): 75-100.

---

# Índice remissivo

altura da ligação .....	11	ligação de extremidade .....	13
altura da secção transversal.....	11	ligação de resistência parcial.....	272
amarração .....	144	ligação de resistência total .....	272
amarração curta .....	414	ligação interior .....	13
<i>beam growth</i> .....	252	ligação viga-pilar.....	10
betão confinado .....	404	ligação viga-pilar excêntrica .....	10
betão não confinado .....	404	localização.....	166, 251
boas condições de aderência.....	405	macro-elemento.....	21
componente básica .....	137	método das forças fictícias .....	234
comportamento da ligação viga-pilar .....	11	método geral .....	71, 221
comprimento da rótula plástica.....	251	modelo de análise global.....	20
configuração da ligação .....	12	modelo de análise local .....	20
<i>drift</i> .....	70	modelo de camadas.....	221
eficiência da ligação .....	32	modelo de eixos.....	19
elemento adjacente .....	10	modelo de fibras.....	221
esbelteza da ligação viga-pilar .....	11	modelo explícito .....	19
espessura da ligação .....	11	modelo implícito.....	19
estrutura arquétipo.....	69	modelo macroscópico explícito .....	21
extremidade efectiva .....	10	modelo mecânico .....	21
face da ligação.....	11	momento de segunda ordem.....	213
forças nodais equivalentes.....	213	núcleo da ligação .....	11
interface pilar-ligação.....	10	núcleo da ligação ao corte .....	145
interface viga-ligação .....	10	periferia da ligação viga-pilar .....	10
junta .....	15	plano do pórtico .....	11
junta nominalmente rígida.....	55	profundidade da ligação .....	11
junta viga-coluna .....	15	regularização .....	251
largura da ligação .....	11	rigidez efectiva.....	306
largura da secção transversal.....	11	rigidez equivalente .....	306
ligação .....	15	rótula plástica .....	251
ligação de canto .....	13	secção extrema .....	10
ligação de cobertura de canto.....	13	<i>tension stiffening</i> .....	226
ligação de cobertura de extremidade .....	13	viga transversal.....	11
ligação de cobertura interior .....	13		







