

Joana Jorge de Queiroz Leite

# PROCESSOS THRESHOLD GARCH COM POTÊNCIA ESTRUTURA PROBABILISTA E APLICAÇÃO A CARTAS DE CONTROLO

Tese de Doutoramento na área científica de Matemática, especialidade Matemática Aplicada, orientada pela Professora Doutora Maria Esmeralda Gonçalves e pela Professora Doutora Maria de Nazaré Mendes Lopes e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Maio de 2013



UNIVERSIDADE DE COIMBRA



Joana Jorge de Queiroz Leite

# PROCESSOS THRESHOLD GARCH COM POTÊNCIA ESTRUTURA PROBABILISTA E APLICAÇÃO A CARTAS DE CONTROLO

Tese de Doutoramento na área científica de Matemática, especialidade Matemática Aplicada, orientada pela Professora Doutora Maria Esmeralda Gonçalves e pela Professora Doutora Maria de Nazaré Mendes Lopes e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Maio de 2013



UNIVERSIDADE DE COIMBRA





# Resumo

O objetivo fundamental desta dissertação é aprofundar o conhecimento da estrutura probabilista do modelo Threshold GARCH com potência  $\delta$  ( $\delta$ -TGARCH) e propor uma sua aplicação às cartas de controlo Shewhart modificadas. A definição do modelo que considerámos inclui a possibilidade da potência  $\delta$  ser negativa e impõe restrições mínimas ao processo gerador.

Para este modelo, são obtidas três representações alternativas, começando pela  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ), uma representação puramente autorregressiva, garantindo a sua existência, com convergência quase certa, e unicidade; esta representação permite chegar a uma outra onde se asseguram as ordens mínimas, naturalmente designada representação mínima. Propomos ainda uma representação vetorial, mais compacta do que as habituais, com o propósito de estudar os diversos tipos de estacionaridade.

Estabelecemos condições necessárias e suficientes de estacionaridade forte e ergodicidade e também de existência de momento de ordem  $\delta$ , que permitem a discussão da estacionaridade à ordem  $\delta$  e também da estacionaridade fraca, esta última feita, primeiro, para a representação vetorial e, em seguida, para o modelo de potência  $\delta \geq 1$ . Particularizamos algumas destas condições para distribuições concretas do processo gerador, explicitando completamente as regiões de estacionaridade do modelo.

Analisamos a presença da propriedade de Taylor, que é a contrapartida teórica do facto estilizado conhecido como efeito de Taylor, detetado em inúmeras séries temporais de natureza financeira e que indica que a autocorrelação de ordem  $n$  do processo em valor absoluto é maior do que a do quadrado do processo. Esta análise é feita para o modelo 1-TGARCH(1,1), sendo estabelecidas as condições para a sua presença. Investigamos também a influência da distribuição das variáveis do processo gerador na extensão da região de parametrizações do modelo que verifica a propriedade. Um trabalho de simulação mostra que os modelos incorporados na classe  $\delta$ -TGARCH não são igualmente favoráveis ao aparecimento do efeito de Taylor.

Estudamos as distribuições de dimensão finita dos processos  $\delta$ -TGARCH, para as quais obtemos enquadramentos que dependem apenas dos parâmetros do modelo e da distribuição do processo gerador. A avaliação do enquadramento da distribuição marginal de um processo  $\delta$ -TGARCH de potência  $\delta \neq 0$  é feita através de simulações para várias parametrizações e diversas distribuições marginais do processo gerador (simétricas e assimétricas, com especial incidência nas de caudas pesadas) e mostra a boa qualidade do enquadramento determinado. As distribuições conjuntas de vetores de dimensão  $n$  são analisadas em todas as regiões de  $\mathbb{R}^n$ , sendo o seu enquadramento estabelecido para o modelo com potência  $\delta > 0$  e a sua qualidade ilustrada num trabalho de simulação para os vetores de dimensão 2.

Aplicamos os resultados obtidos no estudo da estacionaridade e das distribuições de dimensão finita às cartas (ou esquemas) de controlo Shewhart modificadas para processos  $\delta$ -TGARCH de potência positiva, que são analisadas abrindo a possibilidade de terem limites de controlo assimétricos. Para estas é estudado, através do seu enquadramento, o *average run length* ( $ARL$ ), que é a medida mais usual de avaliação de desempenho para cartas de controlo. Examinamos o enquadramento obtido para o  $ARL$  sob controlo, recorrendo a dois estudos de simulação para o modelo 1-TGARCH(1, 1), um para esquemas de controlo com limites simétricos e outro com limites assimétricos.

# Abstract

The main objective of this thesis is to develop a study on the probabilistic structure of the  $\delta$  Power Threshold GARCH model ( $\delta$ -TGARCH) and propose an application to modified Shewhart control charts. The definition here considered includes the possibility of negative values for  $\delta$  and imposes minimal restrictions on the generator process.

For this model, three different representations are obtained, starting with one that is purely autoregressive, the  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ) representation. We ensure its existence, with almost sure convergence, and uniqueness. This representation allows us to deduce another one, called minimal representation, where the model minimal orders are guaranteed. We also propose a vectorial representation, more compact than usual, used to study the various types of stationarity.

We derive necessary and sufficient conditions for strict stationarity, ergodicity and existence of moments of order  $\delta$ , that allow for the discussion of both  $\delta$  order and weak stationarity, the latter being done, firstly, for the vectorial representation and then for the model with power  $\delta \geq 1$ . We deduce some of these conditions for specific distributions of the generator process and obtain the corresponding stationarity regions of the model.

Taylor property is the theoretical counterpart of the stylized fact known as Taylor effect and has been detected in numerous financial time series. It means that the autocorrelation of lag  $n$  of the absolute valued process is larger than that of the squared process. We establish the conditions for its presence for the 1-TGARCH(1, 1) model and investigate the influence of the generator process marginal distribution in the extension of the regions of the model parameters which verify this property. A simulation study shows that the models incorporated in the  $\delta$ -TGARCH class are not equally favourable to the appearance of Taylor effect.

We study the finite-dimensional distributions of  $\delta$ -TGARCH processes, deriving bounds that only depend on the model parameters and on the marginal distribution of the generator process. The quality of the bounds for the marginal distribution

of a  $\delta$ -TGARCH process, with power  $\delta \neq 0$ , is evaluated through simulations for various parameterizations and several marginal distributions of the generator process (both symmetrical and asymmetrical, with special incidence in the ones with heavy tails). The results show the good quality of the bounds determined. The joint distributions of  $n$ -dimensional vectors are examined for all regions of  $\mathbb{R}^n$ . Its bounds are established for the model with power  $\delta > 0$  and its quality illustrated in a simulation work for 2-dimensional vectors.

We apply the results obtained in the study of stationarity and of the finite-dimensional distributions to modified Shewhart control charts (or schemes) for  $\delta$ -TGARCH processes, with positive power, which are analysed considering the possibility of asymmetrical control limits. For these charts, we examine and bound the average run length ( $ARL$ ), which is a widely used performance measure for control charts. The quality of the bounds determined for the in-control  $ARL$  is assessed using two simulation studies for the 1-TGARCH(1, 1) model, one for control schemes with symmetrical limits and another one with asymmetrical limits.





Aos meus pais,

Berta e Jorge.

Ao meu marido e ao nosso filho,

Miguel e David.





## Agradecimentos

Foram muitos os que me acompanharam de forma mais ou menos próxima nesta jornada que conduziu à realização da tese de doutoramento que agora se apresenta. A todos quero deixar os meus reconhecidos agradecimentos.

Antes de mais tenho que expressar a minha profunda gratidão à Doutora Maria Esmeralda Gonçalves e à Doutora Maria de Nazaré Mendes Lopes, desde logo pelo envolvimento de ambas na escolha do tema, mas também e sobretudo pela disponibilidade, pelo estímulo, pela superior orientação que senti desde a primeira hora. Guardarei e partilharei para toda a vida os saberes que me transmitiram.

À elaboração da tese ficam naturalmente associadas as instituições que me acolheram e me apoiaram e de que quero deixar registo público de reconhecimento: à FCTUC, instituição do meu percurso académico, ao ISCAC e ao IPC, onde sou docente. Uma referência merece igualmente, pela importância que teve, o programa PROTEC, que me permitiu usufruir de dispensa de serviço em dois semestres.

A imagem da capa, uma fotografia da obra “12000 m<sup>2</sup> dentro de um T0 #1” do pintor Manuel Caeiro, foi gentilmente cedida por Carlos Carvalho Arte Contemporânea, a quem agradeço a permissão do seu uso.

Quero ainda deixar um sincero agradecimento aos meus colegas e amigos que de uma forma ou de outra me incentivaram e ajudaram.

À minha família, particularmente ao meu marido e aos meus pais, agradeço a paciência e a compreensão, mas em especial o apoio e o carinho.

Por último – porque, como todos compreenderão, é o primeiro – ao David, a quem, por agora, só quero deixar mais um beijo, com a promessa de que as explicações de algumas ausências chegarão no tempo devido.



# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Notações e convenções</b>	<b>xvii</b>
<b>Introdução</b>	<b>xix</b>
<b>1 O modelo Threshold GARCH com potência</b>	<b>1</b>
1.1 Definição . . . . .	1
1.2 Modelos incorporados . . . . .	4
1.3 Representações do modelo . . . . .	6
1.3.1 Representação $\delta$ -TARCH( $\infty$ ) . . . . .	6
1.3.2 Representação mínima . . . . .	10
1.3.3 Representação vetorial . . . . .	13
<b>2 Estacionaridades e ergodicidade</b>	<b>21</b>
2.1 Definições e resultados de base em séries temporais . . . . .	21
2.2 Expoente de Lyapunov . . . . .	25
2.3 Estacionaridade forte e ergodicidade . . . . .	27
2.4 Estacionaridade à ordem $\delta$ . . . . .	38
2.5 Discussão da estacionaridade fraca . . . . .	44

<b>3 Propriedade de Taylor</b>	<b>53</b>
3.1 As autocorrelações $\rho_n(1)$ e $\rho_n(2)$ de um processo TGARCH(1,1) . . .	53
3.2 Resultado principal . . . . .	55
3.3 Regiões de verificação da condição $\rho_1(1) > \rho_1(2)$ . . . . .	60
3.4 Estudo de simulação . . . . .	63
<b>4 Enquadramento das distribuições de dimensão finita</b>	<b>67</b>
4.1 Distribuição marginal . . . . .	67
4.2 Um enquadramento preparatório . . . . .	78
4.3 Distribuições conjuntas . . . . .	85
4.3.1 Região $[0, +\infty[^n$ . . . . .	86
4.3.2 Região $]-\infty, 0]^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . . . . .	90
4.3.3 Região $\mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$ . . . . .	92
4.3.4 Estudo de simulação . . . . .	95
<b>5 Cartas de controlo para processos <math>\delta</math>-TGARCH</b>	<b>99</b>
5.1 Carta de controlo Shewhart modificada . . . . .	100
5.2 Enquadramento do <i>ARL</i> . . . . .	101
5.3 Estudos de simulação . . . . .	108
5.3.1 $ARL_0$ para cartas com limites de controlo simétricos . . . . .	108
5.3.2 $ARL_0$ para cartas com limites de controlo assimétricos . . . . .	112
<b>Considerações finais</b>	<b>116</b>
<b>Apêndices</b>	<b>121</b>
<b>A Sobre a especificação de <math>\sigma_t</math></b>	<b>123</b>
<b>B Momentos do modelo <math>\delta</math>-TGARCH(1,1)</b>	<b>127</b>
<b>C Ficheiros do <i>Mathematica</i></b>	<b>139</b>
C.1 Tabela 3.3 . . . . .	141
C.2 Tabela 3.4 . . . . .	145

*CONTEÚDO*

xv

C.3	Figura 4.1 . . . . .	148
C.4	Figura 4.2 . . . . .	151
C.5	Figuras 4.3 e 4.4 . . . . .	156
C.6	Figuras 4.5 e 4.6 . . . . .	160
C.7	Tabela 5.4 . . . . .	164

**Bibliografia**

**169**



# Notações e convenções

Com o objetivo de, neste texto, facilitar a localização de definições, teoremas, corolários, observações e exemplos, a sua numeração é sequencial dentro de cada capítulo. Por exemplo, o primeiro teorema do capítulo 1 é o teorema 1.4 pois é precedido por uma definição (definição 1.1) e dois lemas (lema 1.2 e lema 1.3).

Segue-se a lista de notação básica usada.

## *Funções*

$x^+$	$\max\{x, 0\}$
$x^-$	$\max\{-x, 0\}$
$\lfloor x \rfloor$	a parte inteira de $x$
$\mathbb{1}_C(x)$ ou $\mathbb{1}_{\{x \in C\}}$	1 se $x \in C$ , 0 caso contrário
$\log(x)$	logaritmo de base $e$ de $x$

## *Probabilidades*

i.i.d.	independente e identicamente distribuída
q.c.	quase certamente
$V = (V_t, t \in \mathbb{Z})$	processo estocástico de tempo discreto
processo $V$	$V = (V_t, t \in \mathbb{Z})$
$\underline{V}_t$	$\sigma$ -álgebra gerada por $(V_{t-i}, i \in \mathbb{N}_0)$

## *Modelo $\delta$ -TGARCH*

Os processos estocásticos designados pelas letras  $X$ ,  $Z$  e  $\sigma$  estão sempre associados ao modelo  $\delta$ -TGARCH. A letra  $\delta$  é usada apenas para representar a potência do modelo e as letras  $p$ ,  $q$  e  $m$  suas ordens.

processo $X$	processo que segue o modelo $\delta$ -TGARCH( $p, q$ )
processo $Z$	processo gerador de $X$
processo $\sigma$	processo tal que $X_t = Z_t \sigma_t$ , para todo $t \in \mathbb{Z}$
ordem $m$	$m = \max\{p, q\}$

Adotamos ainda as seguintes convenções:

- se  $i > j$ ,  $\sum_{k=i}^j (\cdot) = 0$  e  $\prod_{k=i}^j (\cdot) = 1$ ;
- se  $\delta < 0$  e  $x = 0$ ,  $x^\delta = 0$ .





# Introdução

Na nossa sociedade, os modelos matemáticos estão presentes nas mais variadas áreas, permitindo, direta ou indiretamente, avanços, mas também retrocessos, civilizacionais de diferentes escalas. Usamo-los para descrever fenómenos que nos impressionam com o objetivo final de os compreender e prever ou mesmo controlar.

A construção ou seleção de um modelo parte da observação, já que as características empíricas do fenómeno devem ser, por ele, respeitadas. Os avanços tecnológicos têm possibilitado o registo numérico, por vezes quase obsessivo, de inúmeros fenómenos que se desenrolam ao longo do tempo e que aceitamos como aleatórios, pois reconhecemos-lhes uma margem de imprevisibilidade. A esses registos chamamos séries temporais e a sua diversidade justifica o leque considerável de modelos estocásticos disponíveis atualmente.

Nesta dissertação centramo-nos na classe dos modelos condicionalmente heteroscedásticos para séries temporais, especialmente adaptados a processos estocásticos em que a variabilidade instantânea (ou volatilidade) depende de modo significativo do passado. Foi, aliás, a observação deste comportamento em séries temporais de natureza financeira que motivou a sua introdução.

O modelo que originou a classe que agora estudamos foi o autorregressivo condicionalmente heteroscedástico, vulgarmente conhecido por modelo ARCH, de Engle (1982). Neste e pela primeira vez, a variância condicional ao passado não é constante, surgindo como uma função linear do quadrado do passado do processo estocástico observado. Tal constituiu uma real inovação em relação ao que era feito na altura, permitindo modelar os aglomerados de volatilidade, característicos em séries de retornos financeiros.

A primeira generalização do modelo ARCH, que recebeu, muito naturalmente, a designação de modelo GARCH, foi devida a Bollerslev (1986), tendo a sua especificação passado a permitir que a variância condicional dependa também do seu próprio passado. Esta generalização originou modelações mais parcimoniosas. Estudos subsequentes, revelando que "*almost every asset price series exhibits volatility*

*clustering that can be modeled by ARCH/GARCH*" (Engle, 2002), desencadearam um sem número de trabalhos de investigação, com extensões dos modelos originais aplicados a estudos empíricos relevantes, razões que justificaram a atribuição a Engle do Prémio Nobel da Economia em 2003.

Neste trabalho elegemos o modelo Threshold GARCH com potência, que representaremos por  $\delta$ -TGARCH, sendo  $\delta$  a letra que designa a potência do modelo. Este modelo faz, então, parte da classe de modelos condicionalmente heteroscedásticos; é, portanto, um modelo inspirado no modelo ARCH original e cuja variância condicional ao passado é uma função do passado da série temporal e do seu próprio passado. O modelo  $\delta$ -TGARCH apresenta, como uma das suas grandes vantagens, a incorporação de muitos dos principais modelos condicionalmente heteroscedásticos, incluindo os modelos originais, permitindo ter, numa só especificação, diversas valências e fazer um estudo mais ágil e sistemático dos vários modelos nele incorporados. Referimos, ainda, que uma das suas principais características é o facto de possibilitar uma resposta assimétrica de acordo com o sinal do passado da série, uma inovação empíricamente relevante relativamente aos modelos originais.

Franses e McAleer (2002), por ocasião das comemorações dos 20 anos da introdução do modelo ARCH, alertam para o facto de que "*Although the ARCH model and its various extensions and modifications have been used intensively in numerous practical situations, there are still several theoretical issues that remain unsolved.*". Apesar de uma década ter já passado sobre a altura em que foi proferida, esta preocupação continua atual, já que o contexto de utilização desta classe se tem alargado, levando, por exemplo, a considerar hipóteses menos restritivas na sua definição. O âmbito principal desta tese insere-se na preocupação expressa por estes autores, concretamente, procurando aprofundar o conhecimento da estrutura probabilista do modelo  $\delta$ -TGARCH que, naturalmente, o valoriza, proporcionando ainda aplicações a áreas menos usuais, como a que aqui apresentamos às cartas de controlo.

Fazemos, agora, uma breve revisão da bibliografia, aproveitando para detalhar melhor as nossas motivações e objetivos e para dar uma primeira indicação das nossas contribuições, embora o seu sumário detalhado seja feito no final desta tese.

A génese do modelo  $\delta$ -TGARCH pode encontrar-se no artigo Ding, Granger e Engle (1993), onde é essencialmente discutida uma propriedade de memória longa em séries de retornos, sendo, em consequência, sugerida a especificação do, na altura chamado, modelo A-PARCH. Contudo, a análise probabilista deste modelo no caso

geral só é alvo de uma primeira atenção década e meia depois, com o trabalho de Pan, Wang e Tong (2008) para uma sua reparametrização designada PTTGARCH. Assim, embora os artigos sobre modelos condicionalmente heteroscedásticos sejam já "incontáveis", sobre este modelo, em concreto, a literatura não é abundante.

Quando Ding, Granger e Engle (1993) introduzem a especificação do modelo  $\delta$ -TGARCH, ou seja, as equações matemáticas que o regem, sugerem certas hipóteses para as suas componentes, especificamente os parâmetros e as variáveis aleatórias. A liberdade que é dada a estes intervenientes determina, evidentemente, a sua análise probabilista. Na sua formulação inicial, o parâmetro potência do modelo era positivo e as variáveis do processo gerador, independentes e identicamente distribuídas, tinham distribuição Gaussiana padrão. No entanto, não existem razões suportadas na experiência que obriguem a estas imposições. Assim, o objetivo transversal que guiou o nosso trabalho foi o de estudar, no contexto mais amplo possível, o modelo  $\delta$ -TGARCH. Quisemos, por exemplo, explorar a possibilidade do modelo ter potência negativa e avaliar quais eram as imposições mínimas que teríamos que fazer à estrutura probabilista do processo gerador em cada etapa do nosso trabalho.

Associada à definição, encontramos muitas vezes problemas de representação, especificamente, pretende-se saber sob que condições é possível obter uma equação, equivalente à proposta na definição, apresentando uma característica específica. As representações que nos interessaram foram a representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ), que é uma representação puramente autorregressiva e para a qual importa também perceber as condições de convergência, e a representação mínima, onde se pretende assegurar que a especificação usada é a mais parcimoniosa possível. As principais referências para o estudo destas representações são os trabalhos de Berkes, Horváth e Kokoszka (2003) para o modelo GARCH e de Gonçalves e Mendes-Lopes (2010) para o modelo TGARCH. Refira-se que este último modelo é um dos modelos de resposta assimétrica incorporados na classe  $\delta$ -TGARCH mais relevantes para o seu estudo, obtido quando  $\delta$  é igual a 1. A juntar a estas representações analisámos também uma nova representação vetorial, inspirada na de Mittnik, Paoletta e Rachev (2002) e mais compacta do que outras anteriormente propostas, importante no estudo dos diversos tipos de estacionaridade.

As propriedades de invariância no tempo, ou seja, de estacionaridade, são incontornáveis no estudo de modelos para séries temporais, já que conferem, em alguma medida, regularidade. A análise dos vários tipos de estacionaridade (forte, fraca e

à ordem  $r$ ), pela sua importância, tem sido abordada com alguma frequência em artigos da especialidade.

Tomemos como referência os modelos ARCH e GARCH. Para eles, Engle (1982) e Bollerslev (1986), respetivamente, determinam uma condição necessária e suficiente que garante a estacionaridade fraca mas apenas considerando o caso em que a lei marginal do processo gerador é a lei Gaussiana padrão. A estacionaridade forte é investigada pela primeira vez para estes modelos por Nelson (1991) e, embora as condições sobre o processo gerador sejam pouco restritivas, o modelo considerado é o modelo GARCH mais simples. O grande avanço para o estudo das estacionaridades dá-se com Bougerol e Picard (1992). Estes autores obtêm uma condição necessária e suficiente para a estacionaridade forte e ergodicidade do modelo GARCH geral, considerando que as variáveis do processo gerador são centradas e reduzidas. A sua principal inovação está na introdução da representação vetorial do modelo como base para o desenvolvimento do estudo e no recurso ao expoente de Lyapunov a ela associado. Desde aí, a análise da estacionaridade forte tornou-se indissociável da representação vetorial considerada.

Destacamos ainda o estudo da estacionaridade do modelo TARCH. Para este modelo, considerando que as variáveis do processo gerador são centradas e reduzidas, Gonçalves e Mendes-Lopes (1994), adaptando a representação vetorial de Bougerol e Picard (1992), conseguem obter uma condição necessária e suficiente para a estacionaridade fraca. Mais tarde, Gonçalves e Mendes-Lopes (1996), usando a mesma representação vetorial, determinam uma condição necessária e suficiente para a estacionaridade forte e ergodicidade.

No que diz respeito ao modelo  $\delta$ -TGARCH, devemos referir Pan, Wang e Tong (2008), em cujo trabalho encontramos condições necessárias ou suficientes para a estacionaridade forte e ergodicidade, para a existência de momentos e, embora sem referir explicitamente, uma condição suficiente de estacionaridade fraca. No entanto, as hipóteses sobre o processo gerador impõem que tenha lei simétrica. Além disso, os seus resultados baseiam-se numa representação vetorial pouco compacta. Já Liu (2009) adota uma representação vetorial mais interessante; contudo, devido à complexidade da família de modelos que considera, obtêm uma condição necessária e suficiente de estacionaridade forte e ergodicidade e outra de existência de momentos à ordem  $\delta$ , considerando, porém, que o processo gerador é centrado.

Assim, procurando partir de condições menos restritivas para o processo gerador e de uma representação vetorial mais compacta, dedicámo-nos à obtenção e exemplificação de condições necessárias ou suficientes para os diferentes tipos de estacionaridade, nomeadamente: estacionaridade forte, à qual associámos a ergodi-

cidade; estacionaridade à ordem  $\delta$ , cuja definição alargámos para incorporar potências negativas e que foi obrigatoriamente precedida pelo estudo de momentos do processo; e estacionaridade fraca. Este trabalho resultou no artigo Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2012), usado como base na escrita desta parte da dissertação.

Além da estacionaridade, há um tipo de propriedades probabilistas que procuramos quando selecionamos um modelo para ajustar a uma determinada série e que resultam da capacidade que lhe reconhecemos de capturar factos estilizados, ou seja, regularidades estatísticas partilhadas por um determinado grupo de séries temporais. Como refere Engle (2002), "*Wide-ranging applications to financial data have discovered important stylized facts and illustrated both strengths and weaknesses of the models.*". Um dos factos estilizados largamente documentados na literatura financeira é o denominado efeito de Taylor, assim designado por Granger e Ding (1995) por ter sido primeiramente detetado por Taylor (1986), que se reflete nas autocorrelações empíricas de transformações da série temporal <sup>(1)</sup>. Na versão observada por Taylor e que aqui adotamos, este efeito traduz-se na tendência da autorrelação da série em valor absoluto ser maior do que a dos quadrados, para qualquer horizonte. Granger (2005), também Prémio Nobel da Economia em 2003, junta-o à lista de factos estilizados "*that occur for many (possibly all) assets in most (possibly all) markets*". É interessante referir que também está, aparentemente, presente em classes de séries temporais de natureza não financeira, como observam Gonçalves et al. (2012) no estudo de uma série relativa à atividade solar observada no Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra.

Apesar das evidências empíricas, a propriedade teórica que traduz o efeito de Taylor tem sido alvo de poucos estudos nos modelos condicionalmente heteroscedásticos, resultando inclusivamente, grande parte deles, apenas de simulações. Tal prende-se com o facto desta análise depender das expressões teóricas das autocorrelações envolvidas, desconhecidas em maior parte dos casos ou de elevada complexidade. He e Teräsvirta (1999a) são pioneiros no estudo desta propriedade sem recurso a simulações, tendo começado por obter as expressões necessárias para uma família de modelos mas analisando-a para uma parametrização muito restrita do modelo TARARCH mais simples e apenas para autocorrelações de ordem 1. Procurámos também aqui acrescentar um contributo, ao tratar o modelo TGARCH de ordens iguais a 1 e a propriedade de Taylor considerando as autocorrelações de qualquer ordem obtidas por He e Teräsvirta (1999a). A investigação da influência da distribuição

---

<sup>1</sup>Para uma discussão mais detalhada sobre a presença do efeito Taylor sugerimos a consulta de Haas (2009), onde são ainda indicadas várias referências bibliográficas.

das variáveis do processo gerador foi um tópico considerado. Desde a sua versão inicial apresentada em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2009), onde se tratava o modelo TARARCH e a propriedade para autocorrelações de ordem 1, o estudo aqui exposto teve desenvolvimentos consideráveis também impulsionado pelo trabalho de Haas (2009) para um caso particular do modelo TGARCH.

Devemos a Kolmogorov e ao seu teorema da extensão <sup>(2)</sup> a possibilidade de estudar as propriedades probabilistas de um dado processo estocástico a partir das suas distribuições de dimensão finita. No entanto, este tema tem recebido muito pouca atenção no âmbito dos modelos condicionalmente heteroscedásticos. A primeira referência que encontramos é Pawlak e Schmid (2001), que sugerem, perante a impossibilidade de obter as verdadeiras distribuições, o estudo do seu enquadramento. A análise que efetuam centra-se numa transformação do processo, concretamente o quadrado, tanto para a distribuição marginal de um processo GARCH, como para as distribuições conjuntas de um processo ARCH. Também Gonçalves e Mendes-Lopes (2007) abordam este assunto recorrendo a uma transformação de um processo TGARCH, especificamente o valor absoluto. Estes estudos revelam, desde logo, uma forte influência da distribuição marginal do processo gerador nas distribuições de dimensão finita do processo. Acrescente-se que, embora a transformação operada por estes autores para os modelos em questão não seja relevante quando a distribuição marginal do processo gerador é simétrica em relação à origem, é-o no caso contrário. Tal é relevante, já que mesmo nas séries de retornos financeiros, que são usualmente descritas como simétricas e cujo comportamento esteve na origem destes modelos, há evidência de assimetria em algumas situações, como por exemplo nas séries de retornos de ações de empresas pequenas e de empresas não sobreviventes (Taylor, 2007, p. 69).

Assim, quisemos explorar as distribuições de dimensão finita de um processo  $\delta$ -TGARCH sem recorrer a transformações do processo. Para a distribuição marginal deduzimos um novo enquadramento melhor do que os já existentes e avaliámos a sua qualidade, tentando perceber os factores que a determinam. Para as distribuições conjuntas e numa primeira fase, este estudo limitou-se ao modelo TGARCH e não incluiu todas as regiões de  $\mathbb{R}^n$  (Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes, 2013a). Posteriormente, foi possível alargar os enquadramentos ao modelo  $\delta$ -TGARCH e ainda às regiões em falta.

---

<sup>2</sup>M. Métivier, *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, 2ème ed., Dunod, Paris, 1972.

Uma segunda motivação para o estudo destas distribuições, sugerida por Pawlak e Schmid (2001), é a sua aplicação às cartas de controlo. Estas são ferramentas poderosas do Controlo Estatístico do Processo que tem como objetivo detetar se um processo de interesse observado se afasta de um suposto processo alvo. Embora o Controlo Estatístico do Processo tenha as suas raízes na indústria e esteja aí fortemente estabelecido, este tipo de problemas é muitas vezes encontrado noutras áreas do conhecimento.

As cartas de controlo foram introduzidas por Shewhart nos anos 20 do século passado (Shewhart, 1931) e o seu esquema original é ainda amplamente utilizado, apesar das alternativas que foram sendo introduzidas. No contexto clássico, as cartas de controlo são desenhadas assumindo que as observações são independentes e que a característica de qualidade que se quer acompanhar tem distribuição Gaussiana (Montgomery, 2005, capítulo 5). Nas últimas décadas, a sua aplicabilidade foi sendo alargada a séries temporais, nomeadamente com o aparecimento de esquemas que incorporam a estrutura das séries no seu delineamento, chamadas cartas de controlo modificadas. Vasilopoulos e Stamboulis (1978) foram os precursores, propondo a carta Shewhart modificada para o modelo linear autorregressivo. Para os modelos condicionalmente heteroscedásticos, a adaptação surge com Severin e Schmid (1998, 1999), mais precisamente para o modelo GARCH, inspirada nos esquemas de controlo da média do processo.

O desenho de uma carta de controlo para a média implica a definição de uma linha central, correspondente ao valor esperado, e dos chamados limites de controlo, mais precisamente de um limite superior e outro inferior, que caso sejam ultrapassados pelo processo observado darão a indicação de que o processo está fora de controlo. As cartas de controlo mais usuais têm limites simétricos, o que faz sentido para séries temporais com distribuição marginal também simétrica, já que se procura que seja igualmente provável que um valor observado fique situado acima do limite superior ou abaixo do limite inferior. No entanto, caso sejam usados esquemas com limites simétricos quando a distribuição marginal do processo não o é, o pressuposto anterior não é verificado. Portanto, procurámos que as cartas para os processos  $\delta$ -TGARCH não tivessem essa limitação.

Depois de construída a carta é importante fazer a avaliação do seu desempenho. Uma das mais usadas medidas de avaliação de desempenho de uma carta de controlo é o *average run length* (*ARL*) que, quando trabalhamos com séries temporais, podemos definir como sendo o número médio de instantes que têm que passar até que um indique uma situação fora de controlo. O *ARL* deve ser avaliado no estado sob controlo mas também fora de controlo, já que, numa carta eficaz, o *ARL* sob

controle deve ser alto (correspondendo a poucos falsos alarmes) e o  $ARL$  fora de controle deve ser baixo (para uma detecção rápida deste estado). É na determinação desta medida que entram as distribuições de dimensão finita, especificamente no cálculo da probabilidade de nos primeiros  $n$  instantes não haver emissão de sinal. Quando estas distribuições não são conhecidas, a análise do  $ARL$  é feita muitas vezes recorrendo a simulações ou, quando possível, ao método numérico de Brook e Evans, como referem Severin e Schmid (1999). São estes últimos autores que sugerem, pela primeira vez, a avaliação do  $ARL$  por enquadramento, como uma forma de simplificar este procedimento.

Seguindo então esta abordagem, o estudo que desenvolvemos sobre o  $ARL$  fixou-se, numa primeira fase, nas cartas com limites simétricos proposta para processos ARCH e que estendemos para processos TARARCH, bem como no enquadramento do respetivo  $ARL$  sob controle tratado separadamente para cada um dos modelos. Esse trabalho resultou na publicação de Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b), onde destacamos que para o modelo ARCH, reexaminando os enquadramentos para o  $ARL$  sob controle de Severin e Schmid (1999) e baseados em Pawlak e Schmid (2001), deduzimos um outro com vantagens relativamente a ambos. Esse trabalho evoluiu naturalmente para o estudo que aqui apresentamos, primeiro para cartas com possibilidade de limites assimétricos, depois para o modelo  $\delta$ -TGARCH e finalmente para a análise do  $ARL$  não necessariamente sob controle.

Terminamos com uma descrição da organização dos temas pelos cinco capítulos que compõem esta dissertação.

No capítulo 1 começamos por formalizar a definição do modelo  $\delta$ -TGARCH e listar os modelos condicionalmente heteroscedásticos mais importantes nele incluídos. Segue-se, então, a análise das suas três representações, nomeadamente, a  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ), a mínima e uma vetorial.

O capítulo 2 é dedicado à obtenção de condições que permitam garantir os diversos tipos de estacionaridade (forte, à ordem  $\delta$  e fraca) e a ergodicidade, acompanhando com a exemplificação destas para algumas distribuições particulares do processo gerador. A preceder este estudo, são revistas as definições e os resultados de base necessários em séries temporais, incluindo o conceito de expoente de Lyapunov.

No capítulo 3 discutimos a presença da propriedade de Taylor para o modelo  $\delta$ -TGARCH de potência e ordens iguais a 1, procurando dar uma ideia da extensão da região de parametrizações onde esta se verifica e da forte influência da distribuição do processo gerador. Terminamos com um estudo de simulação que compara a



capacidade dos modelos TARARCH e ARCH gerarem essa propriedade.

No capítulo 4 obtemos enquadramentos para as distribuições de dimensão finita de um processo  $\delta$ -TGARCH, começando pela distribuição marginal tratada para qualquer potência  $\delta \neq 0$ . Passamos, então, para as distribuições conjuntas, analisadas para  $\delta > 0$ , estudo que é antecedido de enquadramento preparatório. Tanto o enquadramento da distribuição marginal como o das distribuições conjuntas é alvo de avaliação através de um trabalho de simulação, onde se procura mostrar a influência da distribuição do processo gerador.

Finalmente, no capítulo 5 aplicamos os resultados anteriormente provados às cartas de controlo para processos  $\delta$ -TGARCH de potência positiva. Nas cartas introduzidas abre-se a possibilidade dos limites de controlo serem assimétricos. É, então, enquadrado o *ARL* destes esquemas de controlo, que é particularizado para o caso do *ARL* sob controlo. Finalizamos com um novo estudo de simulação, no qual se examina o enquadramento determinado para o *ARL* sob controlo, quer quando os limites de controlo são simétricos, quer quando são assimétricos.

Terminamos com algumas considerações finais, onde destacamos, de modo sumário, os principais resultados estabelecidos neste trabalho, salientando as nossas contribuições, e indicamos algum trabalho futuro.



# Capítulo 1

## O modelo Threshold GARCH com potência

Este capítulo é dedicado à apresentação do modelo Threshold GARCH com potência  $\delta$ , onde  $\delta$  é um número real não nulo. Começamos, na secção 1.1, por apresentar a especificação do modelo, fazendo algumas considerações sobre o seu processo gerador e os seus parâmetros, e, na secção 1.2, listamos os modelos condicionalmente heteroscedásticos mais relevantes nele incorporados. Na secção 1.3, discutimos três representações deste modelo Threshold GARCH.

### 1.1 Definição

Sejam  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo estocástico com valores em  $\mathbb{R}$  e  $\underline{X}_{t-1}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $(X_{t-i}, i \in \mathbb{N})$ , ou seja, pelo passado relativo ao instante  $t$  do processo  $X$ .

Vamos definir  $X_t^+ = \max\{X_t, 0\}$  e  $X_t^- = \max\{-X_t, 0\}$ . Adicionalmente, adotamos a seguinte convenção: para todo o número real negativo  $\delta$ ,  $(X_t^+)^{\delta} = 0$ , se  $X_t \leq 0$ , e  $(X_t^-)^{\delta} = 0$ , se  $X_t \geq 0$ .

**Definição 1.1 (Modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ))** Dizemos que o processo  $X$  segue o modelo Threshold GARCH com potência  $\delta$  de ordens  $p$  e  $q$  (com  $p, q \in \mathbb{N}$ ), que passamos a designar por  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), se, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , temos

$$X_t = Z_t \sigma_t \tag{1.1}$$

e

$$\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \right] + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^{\delta} \tag{1.2}$$

onde  $\delta \neq 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, p$ ,  $\gamma_j \geq 0$ , para  $j = 1, \dots, q$ , e  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  é uma família de variáveis aleatórias reais independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) tal que  $Z_t$  é independente de  $\underline{X}_{t-1}$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$  <sup>(1)</sup>.

O processo  $Z$  é chamado processo gerador de  $X$ .

Se  $\gamma_j = 0$ , para  $j = 1, \dots, q$ , então o modelo designa-se simplesmente por  $\delta$ -TARCH( $p$ ).

Começamos por notar que, partindo da especificação (1.2) de  $\sigma_t$  e considerando, se  $p < q$ ,  $\alpha_i = \beta_i = 0$ , para  $i = p + 1, \dots, q$ , se  $p > q$ ,  $\gamma_j = 0$ , para  $j = q + 1, \dots, p$ , e  $m = \max\{p, q\}$ , podemos obter a seguinte especificação equivalente:

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} + \gamma_i \sigma_{t-i}^{\delta} \right]. \quad (1.3)$$

Caso seja de interesse distinguir as especificações, iremos referir-nos ao modelo por  $\delta$ -TGARCH de ordem  $m$  e denotá-lo por  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). Esta especificação do modelo trará, em algumas situações, vantagens de simplificação de escrita.

Sendo a especificação de  $\sigma_t$  a condição diferenciadora dos vários modelos condicionalmente heteroscedásticos, podemos enquadrar o modelo  $\delta$ -TGARCH na classe dos modelos condicionalmente heteroscedásticos assimétricos, mais concretamente, modelos que possibilitam uma reação diferente de  $\sigma_t$  de acordo com o sinal do passado da série temporal, bastando para isso que, para algum  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\alpha_i \neq \beta_i$ . Tal permite, por exemplo, capturar o efeito assimétrico verificado nas séries de retornos financeiros.

Centremo-nos, agora, no processo gerador  $Z$ , que é um processo de margens i.i.d. tal que  $Z_t$  é independente de  $\underline{X}_{t-1}$ , para avaliar de que forma é que as hipóteses sobre ele se refletem sobre  $X_t$  e  $\sigma_t$ .

Na literatura sobre modelos condicionalmente heteroscedásticos, é usual assumir ainda a seguinte hipótese relativa a  $Z$  <sup>(2)</sup>:

$$\mathbf{H1}: E(Z_0) = 0 \text{ e } V(Z_0) = 1.$$

No caso do modelo  $\delta$ -TARCH, esta hipótese permite garantir que a lei condicional de  $X_t$  relativamente a  $\underline{X}_{t-1}$  é centrada e de variância  $\sigma_t^2$ . De facto, supondo verificada

---

<sup>1</sup>Entendemos que desta definição se exclui, naturalmente, o caso em que  $Z_t = 0$  quase certamente, já que é o único em que não existe qualquer ligação entre os processos  $X$  e  $\sigma$ .

<sup>2</sup>Em alguns artigos a hipótese é ainda mais restritiva, com a indicação da distribuição das variáveis  $Z_t$ .

**H1**, das propriedades da esperança condicional, temos

$$E(X_t | \underline{X}_{t-1}) = E(Z_t \sigma_t | \underline{X}_{t-1}) = \sigma_t E(Z_t | \underline{X}_{t-1}) = \sigma_t E(Z_t) = 0$$

e

$$V(X_t | \underline{X}_{t-1}) = E(Z_t^2 \sigma_t^2 | \underline{X}_{t-1}) = \sigma_t^2 E(Z_t^2 | \underline{X}_{t-1}) = \sigma_t^2 E(Z_t^2) = \sigma_t^2,$$

já que  $\sigma_t$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável e  $Z_t$  é independente de  $\underline{X}_{t-1}$ . Porém, considerando  $E(Z_t) \neq 0$  e  $E(Z_t^2) = 1$ , então  $\sigma_t^2$  é o momento condicional de segunda ordem de  $X_t$ ; supondo que  $E(Z_t^2)$  é infinito ou não existe,  $\sigma_t^2$  interpreta-se como um parâmetro de escala condicional. Assim, no modelo  $\delta$ -TARCH, a hipótese **H1** permite interpretar  $\sigma_t$  como a volatilidade de  $X_t$  <sup>(3)</sup>.

É ainda interessante notar que, para o processo  $\delta$ -TGARCH, quando a lei condicional de  $X_t$  relativamente a  $\underline{X}_{t-1}$  é centrada e  $X$  é um processo de segunda ordem <sup>(4)</sup>, o processo  $X$  é centrado e não correlacionado, podendo  $X$  receber a designação de *processo de erro*. Efetivamente,

$$E(X_t) = E[E(X_t | \underline{X}_{t-1})] = 0$$

e, para  $h \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+h}) &= E(X_t X_{t+h}) = E[X_t E(X_{t+h} | \underline{X}_{t+h-1})] = 0 \\ Cov(X_t, X_{t-h}) &= E(X_t X_{t-h}) = E[X_{t-h} E(X_t | \underline{X}_{t-1})] = 0. \end{aligned}$$

A hipótese **H1** é, portanto, em alguns contextos de aplicação empírica, de extrema importância. Assim e atendendo também às simplificações que permite, sempre que seja necessário assumir que  $Z$  é um processo de segunda ordem, adotaremos, sem perda de generalidade, esta hipótese **H1**.

No que respeita às condições relativas ao sinal dos parâmetros, claramente que estas se destinam a garantir a positividade de  $\sigma_t^\delta$ . Por exemplo, relativamente ao modelo GARCH (que é o modelo  $\delta$ -TGARCH tal que  $\delta = 2$  e  $\alpha_i = \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, p$ ), a especificação (1.2) dá-nos a expressão de  $\sigma_t^2$  e as condições impostas sobre os parâmetros garantem a sua positividade, possibilitando a interpretação como variância <sup>(5)</sup>.

---

<sup>3</sup>No caso geral do modelo  $\delta$ -TGARCH, como veremos no capítulo 2, se  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$ , a hipótese **H1** também assegura a interpretação de  $\sigma_t$  como a volatilidade de  $X_t$ .

<sup>4</sup>O processo  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  é de segunda ordem se  $E(X_t^2) < +\infty, \forall t \in \mathbb{Z}$ .

<sup>5</sup>Na literatura ligada aos modelos condicionalmente heteroscedásticos, surge, pontualmente, examinada a possibilidade de enfraquecimento das condições relativas aos parâmetros, veja-se, para o modelo GARCH, Nelson e Cao (1992) e Tsai e Chan (2008). De referir que a análise feita por estes autores tem por base a representação ARCH( $\infty$ ), caso particular da representação que analisamos na secção 1.3.1.

## 1.2 Modelos incorporados

Da análise da forma funcional (1.2) de  $\sigma_t^\delta$  do modelo  $\delta$ -TGARCH, destacamos a potência  $\delta$  como elemento que imprime grande versatilidade ao modelo. Com efeito, o facto de  $\delta$  poder assumir qualquer valor real diferente de zero, faz com que o modelo  $\delta$ -TGARCH inclua muitos dos principais modelos condicionalmente heteroscedásticos, nomeadamente, o modelo:

- GARCH (Bollerslev, 1986), tomando  $\delta = 2$  e  $\alpha_i = \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, p$ , de forma a ficarmos com <sup>(6)</sup>

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^2; \quad (1.4)$$

notamos que o modelo ARCH original (Engle, 1982) é obtido deste considerando  $\gamma_j = 0$ , para  $j = 1, \dots, q$ ;

- GJR-GARCH, Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH (Glosten, Jagannathan e Runkle, 1993), fazendo  $\delta = 2$  e considerando, para todo  $i \in \{1, \dots, p\}$ , que  $\beta_i \geq \alpha_i$ , de modo a poder tomar  $\beta_i = \alpha_i + c_i$ , onde  $c_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, p$ , com vista a obter

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i X_{t-i}^2 + c_i (X_{t-i}^-)^2 \right] + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^2, \quad (1.5)$$

já que  $\alpha_i X_{t-i}^2 + c_i (X_{t-i}^-)^2 = \alpha_i (X_{t-i}^+)^2 + (\alpha_i + c_i) (X_{t-i}^-)^2$ ;

- TGARCH, *threshold* GARCH (Zakoian, 1994), seleccionando  $\delta = 1$ , para que fique

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i X_{t-i}^+ + \beta_i X_{t-i}^-) + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}; \quad (1.6)$$

observamos que o modelo AVGARCH, *absolute value* GARCH (Taylor, 1986, p. 78; Schwert, 1989) <sup>(7)</sup>, é obtido deste, fazendo  $\alpha_i = \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, p$ ;

- *power*-GARCH (Liu e Brorsen, 1995; Mittnik, Paoletta e Rachev, 2002), considerando  $\delta > 0$  e  $\alpha_i = \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, p$ , de modo a obter

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i |X_{t-i}|^\delta + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^\delta; \quad (1.7)$$

<sup>6</sup>Fixado  $t \in \mathbb{Z}$ , como  $X_t^+ \geq 0$ ,  $X_t^- \geq 0$  e  $X_t^+ X_t^- = 0$ ,  $X_t^+$  e  $X_t^-$  nunca são simultaneamente positivos; então temos  $(X_t^+)^\delta + (X_t^-)^\delta = (X_t^+ + X_t^-)^\delta = |X_t|^\delta$ , qualquer que seja  $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

<sup>7</sup>Este modelo é também designado por TS-GARCH de Taylor-Schwert GARCH.

este, por sua vez, inclui o modelo NARCH (Higgins e Bera, 1992) e, como caso limite quando  $\delta \rightarrow 0$ , o modelo log-ARCH (Geweke, 1986; Pantula, 1986).

Finalizamos esta lista com os modelos A-PARCH e PTTGARCH, que apresentam uma forma funcional de  $\sigma_t^\delta$  equivalente à do modelo  $\delta$ -TGARCH, quando  $\delta > 0$ . Notamos que a possibilidade da potência  $\delta$  poder assumir valores negativos foi introduzida neste último modelo por Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2012). Assim, para  $\delta > 0$ , obtemos o modelo:

- A-PARCH, *asymmetric power ARCH* (Ding, Granger e Engle, 1993), fazendo  $\alpha_i = a_i (1 - b_i)^\delta$  e  $\beta_i = a_i (1 + b_i)^\delta$ , onde  $a_i \geq 0$  e  $-1 \leq b_i \leq 1$ , para  $i = 1, \dots, p$  <sup>(8)</sup>, o que resulta em

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p a_i (|X_{t-i}| - b_i X_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^\delta, \quad (1.8)$$

uma vez que  $a_i (|X_{t-i}| - b_i X_{t-i})^\delta = a_i [(X_{t-i}^+ + X_{t-i}^-) - b_i (X_{t-i}^+ - X_{t-i}^-)]^\delta = a_i [(1 - b_i) X_{t-i}^+ + (1 + b_i) X_{t-i}^-]^\delta = a_i [(1 - b_i)^\delta (X_{t-i}^+)^\delta + (1 + b_i)^\delta (X_{t-i}^-)^\delta]$ ;

- PTTGARCH, *power-transformed and threshold GARCH* (Pan, Wang e Tong, 2008), definindo  $\dot{\delta} = \delta/2$ , para que

$$\sigma_t^{2\dot{\delta}} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{2\dot{\delta}} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{2\dot{\delta}} \right] + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^{2\dot{\delta}}. \quad (1.9)$$

A lista anterior não é exaustiva mas é representativa dos principais modelos incorporados nesta classe  $\delta$ -TGARCH. Todavia, modelos com algum destaque na literatura não estão nela incluídos, como o modelo EGARCH de Nelson (1991) ou o modelo VS-GARCH de Fornari e Mele (1997).

Na lista que apresentamos, é imediato notar que, partindo do modelo ARCH, foram sucessivamente propostas extensões, sendo o culminar desta lista o modelo  $\delta$ -TGARCH. Esta é, naturalmente, uma das grandes vantagens do estudo desta classe, pois permite a sistematização de resultados para todos os modelos incorporados. Devemos ainda referir que, nesta lista, estamos apenas a destacar a especificação dos modelos no que diz respeito à forma funcional de  $\sigma_t$ . É, no entanto, importante observar que, por exemplo, quando Engle (1982), Bollerslev (1986) e Ding, Granger e Engle (1993) introduziram os seus modelos, assumiram a normalidade das variáveis aleatórias  $Z_t$  ou que Pan, Wang e Tong (2008) estabeleceram que a distribuição marginal do processo gerador  $Z$  era simétrica.

---

<sup>8</sup>Em Ding, Granger e Engle (1993),  $-1 < b_i < 1$ , para  $i = 1, \dots, p$ . No entanto, a equivalência entre as especificações só se verifica considerando, adicionalmente, a possibilidade da igualdade.

### 1.3 Representações do modelo

#### 1.3.1 Representação $\delta$ -TARCH( $\infty$ )

Na introdução do modelo GARCH, Bollerslev (1986) chama a atenção para a possibilidade de existência de uma representação ARCH( $\infty$ ). Adotando a formalização presente em Berkes, Horváth e Kokoszka (2003) para o modelo GARCH e em Gonçalves e Mendes-Lopes (2010) para o modelo TGARCH, vamos aqui obter uma representação única do processo  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  que segue o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) em termos do seu passado, começando por descrever  $\sigma_t$  em função de  $X_{t-i}^+$  e  $X_{t-i}^-$ , com  $i \geq 1$ , ou seja, vamos obter uma representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ) para  $X$ .

Com esse objetivo, vamos definir os três polinómios seguintes, cujos coeficientes são os presentes na especificação (1.2) de  $\sigma_t^\delta$ :

$$\begin{aligned} A(x) &= \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p \\ B(x) &= \beta_1 x + \dots + \beta_p x^p \\ G(x) &= 1 - \gamma_1 x - \dots - \gamma_q x^q. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Para assegurar que as ordens do modelo são, de facto,  $p$  e  $q$ , vamos admitir que  $\alpha_p$  e  $\beta_p$  não são simultaneamente nulos e que  $\gamma_q$  é não nulo.

Começemos por mostrar o lema seguinte, que relaciona a condição  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$  com os zeros do polinómio  $G(x)$ .

**Lema 1.2** *Os zeros de  $G(x)$  são, em módulo, superiores a 1 se e só se  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$ .*

**Demonstração:** Se  $\sum_{j=1}^q \gamma_j \geq 1$ , então  $G(1) \leq 0$ . Como  $G(0) = 1 > 0$  e  $G(x)$  é uma função contínua em  $[0, 1]$ , então existe uma raiz real de  $G(x) = 0$  no intervalo  $]0, 1]$ .

Suponhamos que existe um zero de  $G(x)$ , que denotamos por  $\tilde{x}$ , cujo módulo é inferior ou igual a 1. Nestas condições,  $G(\tilde{x}) = 0$  e temos

$$1 = \sum_{j=1}^q \gamma_j \tilde{x}^j = \left| \sum_{j=1}^q \gamma_j \tilde{x}^j \right| \leq \sum_{j=1}^q \gamma_j |\tilde{x}|^j \leq \sum_{j=1}^q \gamma_j. \blacksquare$$



Assim, se tivermos  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$ , todas as raízes de  $G(x) = 0$  estão fora do círculo unitário, o que implica que, para todo  $x$  tal que  $|x| \leq 1$ ,  $\left| \sum_{j=1}^q \gamma_j x^j \right| < 1$ , logo

$$\frac{1}{G(x)} = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^q \gamma_j x^j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^q \gamma_j x^j \right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k,$$

onde os coeficientes  $d_k$  são não negativos e decrescem exponencialmente à medida que  $k \rightarrow +\infty$  <sup>(9)</sup>. Desta forma, tem-se, para todo  $x$  tal que  $|x| \leq 1$ , que

$$\frac{A(x)}{G(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^k \quad \text{e} \quad \frac{B(x)}{G(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k x^k,$$

onde  $c_k = \alpha_1 d_{k-1} + \dots + \alpha_p d_{k-p}$  e  $\tilde{c}_k = \beta_1 d_{k-1} + \dots + \beta_p d_{k-p}$ , para  $k \geq 1$ , tal que  $d_{k-i} = 0$ , se  $i > k$ , com  $c_k$  e  $\tilde{c}_k$ , não negativos, a decrescer exponencialmente quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Como vamos ver no teorema 1.4, os coeficientes  $c_k$  e  $\tilde{c}_k$  são os parâmetros da representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ). Segue-se um lema que nos vai auxiliar na prova deste teorema. Detalhamos aqui a prova do lema que foi apresentada por Berkes, Horváth e Kokoszka (2003, lema 2.2).

**Lema 1.3** *Se  $(\xi_k, k \in \mathbb{N}_0)$  é uma família de variáveis aleatórias reais identicamente distribuídas tais que  $E(\log^+ |\xi_0|) < +\infty$ , então a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k z^k$  converge quase certamente (q.c.) para todo  $z$  tal que  $|z| < 1$ .*

**Demonstração:** Começemos por mostrar que, para todo  $\zeta > 1$ ,  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(|\xi_k| > \zeta^k)$  é convergente. De facto, como a distribuição de  $\xi_k$  não depende de  $k$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} P(|\xi_k| > \zeta^k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(\log^+ |\xi_k| > k \log \zeta) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(\log^+ |\xi_0| > k \log \zeta) \\ &\leq \frac{E(\log^+ |\xi_0|)}{\log \zeta}, \end{aligned}$$

---

<sup>9</sup>Notamos que, como  $\frac{1}{G(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k \Leftrightarrow 1 = (1 - \gamma_1 x - \dots - \gamma_q x^q) \sum_{k=0}^{+\infty} d_k x^k$ , então  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = \gamma_1$ ,  $d_2 = d_1 \gamma_1 + \gamma_2, \dots$ ,  $d_q = d_{q-1} \gamma_1 + \dots + d_1 \gamma_{q-1} + \gamma_q$  e  $d_k = d_{k-1} \gamma_1 + \dots + d_{k-q} \gamma_q$ , para  $k > q$ .

Além disso, como, por hipótese,  $E(\log^+ |\xi_0|) < +\infty$ , concluímos que  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(|\xi_k| > \zeta^k)$  é convergente.

Assim sendo, pelo lema de Borel-Cantelli,

$$P\left(\limsup_n |\xi_n| > \zeta^n\right) = 0,$$

o que é equivalente a

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} |\xi_k| \leq \zeta^k\right) = 1.$$

Atendendo, agora, a que, para todo  $z$  tal que  $|z| < 1$ ,

$$\left\{\omega : \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} |\xi_k(\omega)| \leq \zeta^k\right\} = \left\{\omega : \exists n \in \mathbb{N} \forall k \geq n, |\xi_k(\omega)| |z|^k \leq \zeta^k |z|^k\right\}$$

podemos afirmar, usando também o 1.º critério de comparação para séries, que a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k z^k$  converge q.c.. ■

**Teorema 1.4** *Seja  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo de margens identicamente distribuídas seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$  e também  $E[\log^+(\sigma_0)] < +\infty$ ,  $E(\log^+ |Z_0|) < +\infty$ . Então, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\sigma_t^\delta = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{c}_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \quad q.c. \quad (1.11)$$

onde  $c_0 = \frac{\alpha_0}{G(1)} = \alpha_0 \sum_{j=1}^{+\infty} d_j$  e os coeficientes  $c_i$  e  $\tilde{c}_i$  decrescem exponencialmente.

Se, adicionalmente,  $Z_0^+$  e  $Z_0^-$  são variáveis aleatórias não degeneradas, então a representação obtida é única.

**Demonstração:** Começamos por observar que, como  $E[\log^+(\sigma_0)] < +\infty$  e  $E(\log^+ |Z_0|) < +\infty$ , então  $E[\log^+(X_0^+)]$  e  $E[\log^+(X_0^-)]$  são finitas. Além disso, como  $(X_t^+, t \in \mathbb{Z})$  e  $(X_t^-, t \in \mathbb{Z})$  são duas famílias de variáveis aleatórias identicamente distribuídas, então, pelo lema 1.3,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} c_i (X_{t-i}^+)^{\delta} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{c}_i (X_{t-i}^-)^{\delta}$$

são q.c. convergentes, já que  $c_i$  e  $\tilde{c}_i$  decrescem exponencialmente quando  $i \rightarrow +\infty$ .

Assim sendo, também

$$c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{c}_i (X_{t-i}^-)^{\delta}$$

é q.c. convergente.

Vamos agora considerar o processo  $\xi = (\xi_t, t \in \mathbb{Z})$  tal que, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,

$$\xi_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^p \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta}.$$

Começamos por observar que  $\sum_{j=0}^{+\infty} d_j \xi_{t-j} = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{c}_i (X_{t-i}^-)^{\delta}$ , o

que implica que  $\sum_{j=0}^{+\infty} d_j \xi_{t-j}$  é q.c. convergente. Assim, pretendemos mostrar que

$$\sigma_t^{\delta} = \sum_{j=0}^{+\infty} d_j \xi_{t-j} \text{ q.c..}$$

Como, para o operador atraso  $L$ ,

$$G(L) \sigma_t^{\delta} = \sigma_t^{\delta} - \sum_{j=1}^q \gamma_j [L^j (\sigma_t^{\delta})] = \sigma_t^{\delta} - \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^{\delta} = \xi_t$$

e  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$ , então  $G(L)$  é invertível e temos

$$\sigma_t^{\delta} = \frac{1}{G(L)} \xi_t \Leftrightarrow \sigma_t^{\delta} = \sum_{j=0}^{+\infty} d_j [L^j (\xi_t)] \Leftrightarrow \sigma_t^{\delta} = \sum_{j=0}^{+\infty} d_j \xi_{t-j}.$$

Consideremos agora que  $Z_0^+$  e  $Z_0^-$  são variáveis aleatórias não degeneradas. Para estabelecer a unicidade da representação obtida para  $\sigma_t$ , vamos considerar, para um  $t$  arbitrariamente fixo, que

$$\sigma_t^{\delta} = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{c}_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \quad \text{q.c.}$$

e

$$\sigma_t^{\delta} = f_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} f_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{f}_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \quad \text{q.c..}$$

Vamos fazer esta prova por contradição. Sem perda de generalidade, consideremos que existem  $r_1 > 0$  e  $r_2 > 0$  que são os menores inteiros tais que  $c_{r_1} \neq f_{r_1}$  e  $\tilde{c}_{r_2} \neq \tilde{f}_{r_2}$  (notamos que se  $c_i = f_i$  e  $\tilde{c}_i = \tilde{f}_i$ , para todo  $i > 0$ , então  $c_0 = f_0$ ). Então, recordando que  $X_t = Z_t \sigma_t$ , obtemos

$$\begin{aligned} & (f_{r_1} - c_{r_1}) \sigma_{t-r_1} Z_{t-r_1}^+ + (\tilde{f}_{r_2} - \tilde{c}_{r_2}) X_{t-r_2}^- = \\ & = c_0 - f_0 + \sum_{i=r_1+1}^{+\infty} (c_i - f_i) (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=r_2+1}^{+\infty} (\tilde{c}_i - \tilde{f}_i) (X_{t-i}^-)^{\delta}. \end{aligned}$$

Se  $r_1 \leq r_2$ , ficamos com

$$Z_{t-r_1}^+ = \frac{1}{(f_{r_1} - c_{r_1}) \sigma_{t-r_1}} \left[ (\tilde{c}_{r_2} - \tilde{f}_{r_2}) X_{t-r_2}^- + (c_0 - f_0) \right] + \\ + \frac{1}{(f_{r_1} - c_{r_1}) \sigma_{t-r_1}} \left[ \sum_{i=r_1+1}^{+\infty} (c_i - f_i) (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=r_2+1}^{+\infty} (\tilde{c}_i - \tilde{f}_i) (X_{t-i}^-)^{\delta} \right].$$

Atendendo a que  $\sigma_{t-r_1} \geq \alpha_0 > 0$ ,  $Z_{t-r_1}^+$  está bem definida. Como, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $X_k^+$  e  $X_k^-$  são  $\underline{Z}_k$ -mensuráveis, o segundo membro da igualdade anterior (e, conseqüentemente, também  $Z_{t-r_1}^+$ ) é uma variável aleatória mensurável com respeito a  $\underline{Z}_{t-r_1-1}$ . Ora,  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  é uma família de variáveis aleatórias independentes. Portanto,  $Z_{t-r_1}^+$  é q.c. constante. O que contradiz a hipótese.

A conclusão é análoga para  $r_1 > r_2$ . ■

Usando o operador atraso  $L$ , o resultado anterior pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sigma_t^{\delta} = \frac{1}{G(L)} \left[ \alpha_0 + A(L) (X_t^+)^{\delta} + B(L) (X_t^-)^{\delta} \right] \\ = \frac{\alpha_0}{G(1)} + \frac{A(L)}{G(L)} (X_t^+)^{\delta} + \frac{B(L)}{G(L)} (X_t^-)^{\delta}. \quad (1.12)$$

Desta representação podemos deduzir uma representação única para  $X_t = Z_t \sigma_t$  em termos do seu passado, para qualquer processo gerador  $Z$  arbitrariamente fixo.

### 1.3.2 Representação mínima

Vamos agora estudar a representação mínima do processo  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  que segue o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ). Para este processo temos

$$\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^p \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^{\delta}.$$

À semelhança da representação anterior, vamos admitir que  $\alpha_p$  e  $\beta_p$  não são simultaneamente nulos e que  $\gamma_q$  é não nulo, para garantir as ordens  $p$  e  $q$  do modelo. Procuramos, então, saber em que condições é que a representação anterior é mínima, ou seja, sob que hipóteses é que não existe um par  $(p^*, q^*)$  tal que  $p^* < p$  ou  $q^* < q$  e

$$\sigma_t^{\delta} = \alpha_0^* + \sum_{i=1}^{p^*} \alpha_i^* (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^{p^*} \beta_i^* (X_{t-i}^-)^{\delta} + \sum_{j=1}^{q^*} \gamma_j^* \sigma_{t-j}^{\delta}, \quad (1.13)$$

para algum  $\alpha_0^*$ ,  $\alpha_i^*$ ,  $\beta_i^*$  ( $i = 1, \dots, p^*$ ) e  $\gamma_j^*$  ( $j = 1, \dots, q^*$ ) (não necessariamente não negativos).

**Teorema 1.5** *Suponhamos verificadas as hipóteses do teorema 1.4 que garantem a unicidade da representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ).*

(a) *A representação da definição 1.1 é mínima se*

$$A(x) \text{ e } G(x) \text{ são coprimos ou } B(x) \text{ e } G(x) \text{ são coprimos} \quad (1.14)$$

*no conjunto dos polinómios com coeficientes reais, com  $A(x)$ ,  $B(x)$  e  $G(x)$  definidos em (1.10).*

(b) *Se a representação da definição 1.1 é mínima, então*

$$A(x), B(x) \text{ e } G(x) \text{ são coprimos} \quad (1.15)$$

*no conjunto dos polinómios com coeficientes reais, com  $A(x)$ ,  $B(x)$  e  $G(x)$  definidos em (1.10).*

**Demonstração:** (a) Começemos por admitir que  $A(x)$  e  $G(x)$  são coprimos ou  $B(x)$  e  $G(x)$  são coprimos <sup>(10)</sup> mas que existe o par  $(p^*, q^*)$ , com  $p^* < p$  ou  $q^* < q$ , e os números  $\alpha_0^*$ ,  $\alpha_i^*$ ,  $\beta_i^*$  ( $i = 1, \dots, p^*$ ),  $\gamma_j^*$  ( $j = 1, \dots, q^*$ ) tais que (1.13) é verificada, com  $\sum_{j=1}^{q^*} \gamma_j^* < 1$ .

Então, considerando

$$\begin{aligned} A^*(x) &= \alpha_1^* x + \dots + \alpha_{p^*}^* x^{p^*} \\ B^*(x) &= \beta_1^* x + \dots + \beta_{p^*}^* x^{p^*} \\ G^*(x) &= 1 - \gamma_1^* x - \dots - \gamma_{q^*}^* x^{q^*}, \end{aligned}$$

obtemos, pelo teorema 1.4,

$$\frac{A^*(x)}{G^*(x)} = \sum_{j=1}^{+\infty} c_j x^j \quad \text{e} \quad \frac{B^*(x)}{G^*(x)} = \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{c}_j x^j$$

e, portanto, da unicidade da representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ) vem

$$\frac{A(x)}{G(x)} = \frac{A^*(x)}{G^*(x)} \quad \text{e} \quad \frac{B(x)}{G(x)} = \frac{B^*(x)}{G^*(x)}.$$

Assim, se  $A(x)$  e  $G(x)$  são coprimos, podemos concluir que existe um polinómio  $Q(x)$  tal que

$$A^*(x) = A(x)Q(x) \quad \text{e} \quad G^*(x) = G(x)Q(x).$$

---

<sup>10</sup>Os polinómios  $A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)$  dizem-se coprimos se  $\text{mdc}(A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x)) = k$ , com  $k$  uma constante não nula.

Então  $p^* \geq p$  e  $q^* \geq q$ , o que é uma contradição. Analogamente, ao admitir que  $B(x)$  e  $G(x)$  são coprimos, obteríamos também  $p^* \geq p$  e  $q^* \geq q$ .

(b) Vamos agora supor que a representação da definição 1.1 é mínima mas falha a condição (1.15), isto é, o máximo divisor comum (mdc) entre  $A(x)$ ,  $B(x)$  e  $G(x)$  não é uma constante.

Seja  $\text{mdc}(G(x), A(x), B(x)) = S(x)$ , com o grau de  $S(x)$  maior ou igual a 1. Então:

$$G(x) = S(x) \tilde{G}(x), \quad A(x) = S(x) \tilde{A}(x) \quad \text{e} \quad B(x) = S(x) \tilde{B}(x),$$

onde o grau de  $\tilde{G}(x)$  é inferior a  $q$  e os graus de  $\tilde{A}(x)$  e de  $\tilde{B}(x)$  são inferiores a  $p$ .

De (1.12), podemos escrever

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \frac{1}{G(L)} \left[ \alpha_0 + A(L) (X_t^+)^{\delta} + B(L) (X_t^-)^{\delta} \right] \\ &= \frac{1}{\tilde{G}(L)} \left[ \tilde{\alpha}_0 + \tilde{A}(L) (X_t^+)^{\delta} + \tilde{B}(L) (X_t^-)^{\delta} \right], \end{aligned}$$

com  $\tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{S(1)}$ . Atendendo aos graus dos polinómios  $\tilde{G}(x)$ ,  $\tilde{A}(x)$  e  $\tilde{B}(x)$ , temos uma contradição com o facto de  $\sigma_t^\delta = \frac{1}{\tilde{G}(L)} \left[ \alpha_0 + A(L) (X_t^+)^{\delta} + B(L) (X_t^-)^{\delta} \right]$  ser a representação mínima. ■

É interessante notar que, quando  $\alpha_i = \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, p$ , tanto (1.14) como (1.15) se reduzem a  $A(x) = B(x)$  e  $G(x)$  são coprimos, obtendo-se, neste caso, uma condição necessária e suficiente que garante que a representação é mínima.

Para terminar, podemos acrescentar que, sob as hipóteses do teorema 1.4 e supondo que os polinómios  $A(x)$  e  $G(x)$  são coprimos ou que os polinómios  $B(x)$  e  $G(x)$  são coprimos, não existem

$$(\alpha_0^*, \alpha_i^*, \beta_i^* (i = 1, \dots, p), \gamma_j^* (j = 1, \dots, q)) \neq (\alpha_0, \alpha_i, \beta_i (i = 1, \dots, p), \gamma_j (j = 1, \dots, q))$$

tais que  $\sigma_t^\delta = \alpha_0^* + \sum_{i=1}^p \alpha_i^* (X_{t-i}^+)^{\delta} + \sum_{i=1}^p \beta_i^* (X_{t-i}^-)^{\delta} + \sum_{j=1}^q \gamma_j^* \sigma_{t-j}^\delta$ , o que assegura a unicidade da representação mínima de  $\sigma_t^\delta$ . De facto, seguindo um processo de prova semelhante à primeira parte da demonstração do teorema 1.5, chegamos à conclusão que existe um polinómio  $Q(x)$  tal que  $A^*(x) = A(x) Q(x)$  e  $G^*(x) = G(x) Q(x)$  mas como agora  $G^*(x)$  e  $G(x)$  têm o mesmo grau e o mesmo termo independente, então  $Q(x) = 1$  e, portanto,  $G^*(x) = G(x)$  e também  $A^*(x) = A(x)$ , o que implica que  $B^*(x) = B(x)$ .

### 1.3.3 Representação vetorial

O desenvolvimento da análise probabilista dos modelos condicionalmente heteroscedásticos, concretamente no que diz respeito aos modelos de ordens superiores a 1, está estreitamente ligado à introdução de uma sua representação vetorial. Nesta subsecção, vamos apresentar a representação vetorial para o modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), seguindo a ideia presente no artigo de Mittnik, Paoella e Rachev (2002). Obtemos uma solução para a representação vetorial e também para o modelo  $\delta$ -TGARCH. Terminamos, mostrando que esta solução da representação vetorial é markoviana.

Para obter uma representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH, comecemos por fixar a família  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  de variáveis aleatórias reais i.i.d. e os parâmetros  $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  e  $\gamma_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ .

Podemos, então, definir a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  aleatórias, i.i.d., quadradas de ordem  $m$  e de coeficientes não negativos, tais que

$$A_t = \begin{bmatrix} \alpha_1 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_2 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m-1} (Z_t^+)^{\delta} + \beta_{m-1} (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

e o vetor de  $\mathbb{R}^m$  <sup>(11)</sup>

$$B = [\alpha_0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T. \quad (1.17)$$

Seja  $\sigma = (\sigma_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo estocástico real estritamente positivo. Estão bem definidos: o processo  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  tal que  $X_t = Z_t \sigma_t$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , e o processo vetorial  $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ , de  $\mathbb{R}^m$ , tal que, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,

$$Y_t^{(k)} = \begin{cases} \sigma_t^{\delta} & \text{se } k = 1 \\ \sum_{i=k}^m [\alpha_i (Z_{t-i+k-1}^+)^{\delta} + \beta_i (Z_{t-i+k-1}^-)^{\delta} + \gamma_i] \sigma_{t-i+k-1}^{\delta} & \text{se } k \neq 1 \end{cases} \quad (1.18)$$

onde  $Y_t^{(k)}$  é a  $k$ -ésima componente de  $Y_t$ , para  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Relativamente a estes processos  $X$  e  $Y$  podemos fazer a seguinte afirmação: o processo  $X$  verifica a especificação (1.3) do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) se e só se o processo  $Y$  verifica a equação autorregressiva de coeficientes aleatórios

$$Y_{t+1} = A_t Y_t + B. \quad (1.19)$$

<sup>11</sup>Como os espaços vetoriais  $\mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$ , das matrizes reais do tipo  $m \times 1$ , e  $\mathbb{R}^m$  são isomorfos, escreveremos, em benefício da simplificação da escrita, que um elemento de  $\mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R})$  é elemento de  $\mathbb{R}^m$ .

Vamos mostrar esta equivalência começando por admitir que  $X$  verifica a especificação (1.3) do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). Vejamos que o processo  $Y$  verifica a equação (1.19) componente a componente, ou seja, que  $Y_{t+1}^{(k)}$  é dado pela soma do produto da linha  $k$  de  $A_t$  por  $Y_t$  com o elemento da linha  $k$  de  $B$ . De facto, temos, para  $k = 1$ ,

$$\begin{aligned}
\text{Linha}_1(A_t) Y_t + \text{Linha}_1(B) &= \\
&= \left( \alpha_1 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_1 \right) \sigma_t^{\delta} + \\
&\quad + \sum_{i=2}^m \left\{ \left[ \alpha_i (Z_{t-i+1}^+)^{\delta} + \beta_i (Z_{t-i+1}^-)^{\delta} + \gamma_i \right] \sigma_{t-i+1}^{\delta} \right\} + \alpha_0 \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \left[ \alpha_i (X_{(t+1)-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{(t+1)-i}^-)^{\delta} + \gamma_i \sigma_{(t+1)-i}^{\delta} \right] \\
&= \sigma_{t+1}^{\delta} \\
&= Y_{t+1}^{(1)},
\end{aligned}$$

pois  $X$  é tal que  $X_t = Z_t \sigma_t$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , e verifica (1.3); além disso, para  $k = 2, \dots, m-1$ ,

$$\begin{aligned}
\text{Linha}_k(A_t) Y_t + \text{Linha}_k(B) &= \\
&= \left( \alpha_k (Z_t^+)^{\delta} + \beta_k (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_k \right) \sigma_t^{\delta} + \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^m \left[ \alpha_i (X_{t-i+(k+1)-1}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i+(k+1)-1}^-)^{\delta} + \gamma_i \sigma_{t-i+(k+1)-1}^{\delta} \right] + 0 \\
&= \sum_{i=k}^m \left[ \alpha_i (X_{(t+1)-i+k-1}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{(t+1)-i+k-1}^-)^{\delta} + \gamma_i \sigma_{(t+1)-i+k-1}^{\delta} \right] \\
&= Y_{t+1}^{(k)}
\end{aligned}$$

e, para  $k = m$ ,

$$\begin{aligned}
\text{Linha}_m(A_t) Y_t + \text{Linha}_m(B) &= \\
&= \left( \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m \right) \sigma_t^{\delta} \\
&= \alpha_m (X_t^+)^{\delta} + \beta_m (X_t^-)^{\delta} + \gamma_m \sigma_t^{\delta} \\
&= Y_{t+1}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que o processo  $Y$  verifica a equação (1.19). Então, por um



lado,

$$\begin{aligned}
Y_{t+1}^{(1)} &= \text{Linha}_1(A_t)Y_t + \text{Linha}_1(B) \\
&= \left( \alpha_1 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_1 \right) \sigma_t^{\delta} + \\
&\quad + \sum_{i=2}^m \left[ \alpha_i (X_{t-i+1}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i+1}^-)^{\delta} + \gamma_i \sigma_{t-i+1}^{\delta} \right] + \alpha_0 \\
&= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \left[ \alpha_i (X_{(t+1)-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{(t+1)-i}^-)^{\delta} + \gamma_i \sigma_{(t+1)-i}^{\delta} \right]
\end{aligned}$$

e, por outro lado, sabemos que  $Y_{t+1}^{(1)} = \sigma_{t+1}^{\delta}$ ; assim sendo, podemos afirmar que  $\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} + \gamma_i \sigma_{t-i}^{\delta} \right]$ , o que permite concluir que  $X$  satisfaz a especificação (1.3) do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ).

Estamos, então, em condições de definir representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ).

**Definição 1.6 (Representação vetorial)** *Designamos por representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) o seguinte modelo vetorial de coeficientes aleatórios:*

$$Y_{t+1} = A_t Y_t + B$$

com  $A_t$  definido em (1.16),  $B$  definido em (1.17) e  $Y_t$  definido em (1.18) tal que  $Z_t$  é independente de  $\mathcal{F}_{t-1}$ , onde  $\mathcal{F}_{t-1}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $(Z_{t-i}\sigma_{t-i}, i \in \mathbb{N})$ .

As matrizes  $A_t$  vão desempenhar um papel central no estudo feito no próximo capítulo. Assim, importa perceber em que é que a representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) da definição 1.6 difere das representações vetoriais usuais para os modelos condicionalmente heteroscedásticos, definidas à custa de uma equação de recorrência idêntica a  $Y_{t+1} = A_t Y_t + B$  e inspiradas na representação original de Bougerol e Picard (1992) para o modelo GARCH. Vamos focar os três aspetos principais: (i) o primeiro está relacionado com a validade da representação; (ii) o segundo é relativo à dimensão das matrizes envolvidas; (iii) o terceiro está relacionado com a forma das matrizes.

Sobre o ponto (i), a representação que apresentamos é válida para qualquer ordem  $m$  (recordamos que  $m \in \mathbb{N}$ ), contrariamente às representações usuais, válidas apenas quando  $p \geq 2$  e  $q \geq 2$ . Embora estas últimas representações possam incluir as ordens em falta, tal é feito rescrevendo o modelo como um modelo de ordens  $p = 2$  e  $q = 2$  e considerando alguns coeficientes nulos. O que significa, na prática, que as representações usuais são sempre vetoriais, isto é,  $Y$  tem valores em  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ ;

porém, na representação da definição 1.6, caso  $m = 1$ , o processo  $Y$  tem valores em  $\mathbb{R}$ . Este facto traz simplificações consideráveis quando se trata de um modelo de primeira ordem, tão frequente em estudos empíricos.

Relativamente ao aspeto (ii), na representação que apresentamos, as matrizes  $A_t$  são quadradas de ordem  $m$ ; noutras representações, caso  $\alpha_i = \beta_i, \forall i \in \{1, \dots, p\}$ , veja-se Bougerol e Picard (1992), estas matrizes são de ordem  $p+q-1$ , caso contrário, como em Gonçalves e Mendes-Lopes (1994, 1996) e em Pan, Wang e Tong (2008), estas matrizes são de ordem  $2p+q-2$ . Em termos práticos, a dimensão das matrizes  $A_t$  é relevante, por exemplo, em estudos de simulação com aplicações computacionais intensivas.

Finalmente, no que diz respeito a (iii), fixada a ordem  $m$ , na representação da definição 1.6, toda a informação passível de ser alterada na matriz  $A_t$  está na primeira coluna e é muito semelhante em todas as linhas, tal não acontecendo com as demais representações, como, por exemplo, as representações de Bougerol e Picard (1992), de Gonçalves e Mendes-Lopes (1994, 1996) e de Pan, Wang e Tong (2008).

Atendendo às vantagens da representação da definição 1.6, ela será a única representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH usada, pelo que, no que se segue, omitiremos essa referência.

**Observação 1.7** *Se o processo vetorial  $Y$  é solução da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), então o processo  $X$  tal que, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $X_t = Z_t \left[ Y_t^{(1)} \right]^{\frac{1}{\delta}}$ , segue o modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ); atendendo à forma como está definido, este processo  $X$  é único. Do mesmo modo, dado o processo  $X$  que segue o modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), temos um único processo  $\sigma = (\sigma_t, t \in \mathbb{Z})$  a ele associado por definição e, portanto, só temos uma solução  $Y$  da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH. Dizemos, então, que  $Y$  é a representação vetorial de  $X$ .*

*Podemos acrescentar que, se  $Y$  é a representação vetorial de  $X$ , então  $Y$  é um processo de componentes não negativas.*

Uma solução da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH é o processo  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z})$ , dado por

$$\mathcal{Y}_t = B + \lim_{k \rightarrow +\infty} (q.c.) \sum_{n=1}^k A_{t-1} \dots A_{t-n} B, \quad (1.20)$$

desde que a série seja q.c. convergente, para garantir que o processo  $\mathcal{Y}$  está q.c. definido (<sup>12</sup>). De facto, assumindo que o processo  $\mathcal{Y}$  está q.c. definido, temos:

<sup>12</sup>As condições que asseguram que  $\mathcal{Y}$  está q.c. definido serão estabelecidas no capítulo seguinte.

(i) em primeiro lugar, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_{t+1} &= B + \lim_{k \rightarrow +\infty} (q.c.) \sum_{n=1}^k A_t \dots A_{t+1-n} B \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} (q.c.) \left( A_t B + \sum_{n=2}^k A_t \dots A_{t+1-n} B \right) + B \\
&= A_t \left[ \lim_{k \rightarrow +\infty} (q.c.) \left( B + \sum_{n=1}^{k-1} A_{t-1} \dots A_{t-n} B \right) \right] + B \\
&= A_t \mathcal{Y}_t + B,
\end{aligned}$$

ou seja, o processo  $\mathcal{Y}$  dado por (1.20) satisfaz a equação de recorrência (1.19);

(ii) além disso, o processo  $\mathcal{Y}$  definido em (1.20) verifica a especificação (1.18), pois, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , como, para  $k = 1, \dots, m$ ,

$$\mathcal{Y}_{t+1}^{(k)} = \text{Linha}_k(A_t) \left[ \mathcal{Y}_t^{(1)} \quad \mathcal{Y}_t^{(2)} \quad \dots \quad \mathcal{Y}_t^{(m)} \right]^T + \text{Linha}_k(B),$$

temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_t^{(1)} &= \left[ \alpha_1 (Z_{t-1}^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_{t-1}^-)^{\delta} + \gamma_1 \right] \mathcal{Y}_{t-1}^{(1)} + \mathcal{Y}_{t-1}^{(2)} + \alpha_0 \\
\mathcal{Y}_{t-1}^{(2)} &= \left[ \alpha_2 (Z_{t-2}^+)^{\delta} + \beta_2 (Z_{t-2}^-)^{\delta} + \gamma_2 \right] \mathcal{Y}_{t-2}^{(1)} + \mathcal{Y}_{t-2}^{(3)} \\
&\vdots \\
\mathcal{Y}_{t-m+2}^{(m-1)} &= \left[ \alpha_{m-1} (Z_{t-m+1}^+)^{\delta} + \beta_{m-1} (Z_{t-m+1}^-)^{\delta} + \gamma_{m-1} \right] \mathcal{Y}_{t-m+1}^{(1)} + \mathcal{Y}_{t-m+1}^{(m)} \\
\mathcal{Y}_{t-m+1}^{(m)} &= \left[ \alpha_m (Z_{t-m}^+)^{\delta} + \beta_m (Z_{t-m}^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \mathcal{Y}_{t-m}^{(1)}
\end{aligned}$$

logo temos, para  $k = 2, \dots, m$ ,

$$\mathcal{Y}_t^{(k)} = \sum_{i=k}^m \left[ \alpha_i (Z_{t-i+k-1}^+)^{\delta} + \beta_i (Z_{t-i+k-1}^-)^{\delta} + \gamma_i \right] \mathcal{Y}_{t-i+k-1}^{(1)}$$

e, para  $k = 1$ ,

$$\mathcal{Y}_t^{(1)} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \left[ \alpha_i (Z_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (Z_{t-i}^-)^{\delta} + \gamma_i \right] \mathcal{Y}_{t-i}^{(1)}$$

e, portanto, basta considerar  $\sigma_t^{\delta} = \mathcal{Y}_t^{(1)}$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ; notamos ainda que  $Z_t$  é independente de  $\mathcal{F}_{t-1}$ , pois, atendendo a (1.20),  $\underline{\mathcal{Y}}_{t-1}^{(1)} \subset \underline{Z}_{t-2}$  e  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  é um processo de margens independentes.

É interessante notar este processo  $\mathcal{Y}$  é um processo de Markov, pois, para todo o boreliano  $C$  de  $\mathbb{R}^m$ , temos, tal como em Gonçalves e Mendes-Lopes (1993),

$$\begin{aligned} P(\mathcal{Y}_{t+1} \in C | \underline{\mathcal{Y}}_t) &= \\ &= P(\mathcal{Y}_{t+1} \in C | (\mathcal{Y}_t, \mathcal{Y}_{t-1}, \dots)) \\ &= P(\mathcal{Y}_{t+1} \in C | (\mathcal{Y}_t, \mathcal{Y}_{t-1}, \dots) = (y_t, y_{t-1}, \dots)), P_{(\mathcal{Y}_t, \mathcal{Y}_{t-1}, \dots)} - q.c. \\ &= E(\mathbf{1}_C(A_t y_t + B) | (\mathcal{Y}_t, \mathcal{Y}_{t-1}, \dots) = (y_t, y_{t-1}, \dots)) \\ &= E(\mathbf{1}_C(A_t y_t + B)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(\mathcal{Y}_{t+1} \in C | \mathcal{Y}_t) &= P(\mathcal{Y}_{t+1} \in C | \mathcal{Y}_t = y_t), P_{\mathcal{Y}_t} - q.c. \\ &= E(\mathbf{1}_C(A_t y_t + B) | \mathcal{Y}_t = y_t) \\ &= E(\mathbf{1}_C(A_t y_t + B)), \end{aligned}$$

uma vez que  $A_t$  é independente de  $\underline{\mathcal{Y}}_t$  (visto que  $\underline{\mathcal{Y}}_t \subset A_{t-1}$ ), logo

$$P(\mathcal{Y}_{t+1} \in C | \underline{\mathcal{Y}}_t) = P(\mathcal{Y}_{t+1} \in C | \mathcal{Y}_t), P - q.c..$$

Adicionalmente, podemos acrescentar que  $\mathcal{Y}$  é um processo de Markov homogêneo, pois o valor das probabilidades calculadas não depende de  $t$ , e de margens identicamente distribuídas, já que  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  é uma família de matrizes i.i.d..

Finalizamos sistematizando, na proposição seguinte, as conclusões desta secção relativas ao processo  $\mathcal{Y}$ :

**Proposição 1.8** *Sejam  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  a família de matrizes definidas em (1.16) à custa do processo  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  de margens i.i.d. e  $B$  o vetor de  $\mathbb{R}^m$  definido em (1.17).*

*Se o processo vetorial  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z})$  tal que, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\mathcal{Y}_t = B + \lim_{k \rightarrow +\infty} (q.c.) \sum_{n=1}^k A_{t-1} \dots A_{t-n} B$$

*está q.c. definido, então o processo  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z})$  dado, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , por*

$$\mathcal{X}_t = Z_t \left[ \mathcal{Y}_t^{(1)} \right]^{\frac{1}{\delta}},$$

*onde  $\mathcal{Y}_t^{(1)}$  é a primeira componente do processo vetorial  $\mathcal{Y}$ , é solução do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). Além disso,  $\mathcal{Y}$  é a representação vetorial de  $\mathcal{X}$ , sendo  $\mathcal{Y}$  um processo de Markov homogêneo de margens identicamente distribuídas.*

Nesta seção 1.3 explorámos três representações para um processo  $X$  seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH: a representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ), a representação mínima e a representação vetorial. As hipóteses estabelecidas para a obtenção destas representações levantam, agora, novas questões, nomeadamente: Como é que vamos garantir que  $X$  é um processo de margens identicamente distribuídas de modo a poder assegurar a existência da representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ) e da representação mínima? Sob que condições é que o processo vetorial da proposição 1.8 está q.c. definido? Numa perspectiva de aplicabilidade dos resultados, é importante que as respostas sejam dadas em termos dos parâmetros do modelo e do processo gerador. No capítulo seguinte, partindo da representação vetorial do modelo que será usada para o estudo da estacionaridade forte, vamos dar resposta às questões colocadas.



## Capítulo 2

# Estacionaridades e ergodicidade

As hipóteses de invariância no tempo, ou seja, de estacionaridade, desempenham um papel central na análise de séries temporais pois substituem, de um modo natural, a hipótese de observações i.i.d. considerada na análise estatística clássica. Assim, dedicamos este capítulo à obtenção de condições necessárias ou suficientes de estacionaridade forte, fraca e à ordem  $\delta$  para o modelo  $\delta$ -TGARCH, o que envolve, naturalmente, a análise de momentos destes processos.

À estacionaridade forte juntamos a ergodicidade, características que, em conjunto, são muitas vezes determinantes para o estudo de uma série temporal.

Temos, então, este capítulo organizado do seguinte modo: na secção 2.1, apresentamos as definições dos diversos tipos de estacionaridade e de ergodicidade, bem como os resultados de base em séries temporais relativos a estes conceitos; na secção 2.2, introduzimos o conceito de expoente de Lyapunov; nas secções seguintes estudamos condições necessárias ou suficientes de estacionaridade forte e ergodicidade, de estacionaridade à ordem  $\delta$  e de estacionaridade fraca para o modelo  $\delta$ -TGARCH.

### 2.1 Definições e resultados de base em séries temporais

O objetivo principal deste capítulo é, como já referimos, o estudo da estacionaridade nos vários sentidos e da ergodicidade de um processo  $\delta$ -TGARCH. A representação vetorial do processo vai aqui desempenhar um papel central. Assim, nesta secção, formalizamos alguns destes conceitos não só para processos univariados mas também para processos vetoriais; referimo-nos concretamente às definições de estacionaridade forte e fraca. Os restantes conceitos e resultados, atendendo à sua aplicabilidade neste texto, são apresentados apenas para processos univariados.

Seja  $V = (V_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo estocástico vetorial com valores em  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Definição 2.1 (Estacionaridade forte)** *O processo  $V$  é fortemente estacionário se, para qualquer  $k \in \mathbb{N}$  e quaisquer  $t_1, \dots, t_k, h \in \mathbb{Z}$ , os vetores  $(V_{t_1}, \dots, V_{t_k})$  e  $(V_{t_1+h}, \dots, V_{t_k+h})$  têm a mesma lei.*

Os processos fortemente estacionários são, então, processos em que a estrutura probabilista é invariante para qualquer translação do tempo. Em particular, se  $V$  é fortemente estacionário, temos que as margens de  $V$  são identicamente distribuídas.

Um exemplo imediato de um processo fortemente estacionário é um processo de margens i.i.d.. Outro exemplo, é um processo de Markov homogêneo de margens identicamente distribuídas.

No caso em que  $n > 1$ , isto é, quando  $V$  é efetivamente um processo vetorial, tendo-se  $V_t = \begin{bmatrix} V_t^{(1)} & \dots & V_t^{(n)} \end{bmatrix}^T$ , podemos afirmar que, se  $V$  é fortemente estacionário, então qualquer seu processo componente  $V^{(k)} = (V_t^{(k)}, t \in \mathbb{Z})$ , com  $k \in \{1, \dots, n\}$ , é também fortemente estacionário. No entanto, a recíproca desta afirmação não é verdadeira.

A noção seguinte, de estacionaridade fraca, requer a existência de momentos até à ordem 2.

**Definição 2.2 (Estacionaridade fraca)** *Seja  $\|\cdot\|$  uma norma em  $\mathbb{R}^n$ . O processo estocástico  $V$  é fracamente estacionário se:*

- (i)  $E(\|V_t\|^2) < +\infty, \forall t \in \mathbb{Z}$  (i.e.,  $V$  é um processo de segunda ordem);
- (ii)  $E(V_t) = \mu, \forall t \in \mathbb{Z}$  (i.e.,  $E(V_t)$  é independente de  $t$ );
- (iii)  $Cov(V_t, V_{t+h}) = \gamma_V(h), \forall t, h \in \mathbb{Z}$  (i.e., a função de autocovariância de  $V$  depende apenas de  $h$ ).

Assim, de acordo com estas definições, um processo fortemente estacionário é fracamente estacionário desde que seja de segunda ordem.

Recordamos que um processo vetorial é de segunda ordem se e só se os seus processos componentes são de segunda ordem. Não obstante, se um processo é fracamente estacionário, qualquer seu processo componente é também fracamente estacionário, não sendo verdadeira a recíproca desta afirmação.



No que se segue, restringimo-nos ao caso em que  $V = (V_t, t \in \mathbb{Z})$  é um processo com valores em  $\mathbb{R}$ .

Apresentamos, em seguida, a definição de estacionaridade à ordem  $r$ , com  $r$  um número real não nulo, que generaliza a definição de estacionaridade fraca.

**Definição 2.3 (Estacionaridade à ordem  $r$ )** *O processo  $V$  é estacionário à ordem  $r$ , com  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , se, para qualquer  $k \in \mathbb{N}$  e quaisquer  $t_1, \dots, t_k, h \in \mathbb{Z}$ :*

- (a) *caso  $r > 0$ , todos os momentos conjuntos de ordem inferior ou igual a  $r$  de  $(V_{t_1}, \dots, V_{t_k})$ , desde que definidos <sup>(1)</sup>, existem e são finitos, sendo iguais aos momentos conjuntos correspondentes de  $(V_{t_1+h}, \dots, V_{t_k+h})$ , isto é,*

$$E(V_{t_1}^{r_1} \dots V_{t_k}^{r_k}) = E(V_{t_1+h}^{r_1} \dots V_{t_k+h}^{r_k}),$$

onde  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}^+$  são tais que  $r_1 + \dots + r_k \leq r$ ;

- (b) *caso  $r < 0$ , todos os momentos conjuntos de ordem inferior ou igual a  $|r|$  de  $(V_{t_1}^{-1}, \dots, V_{t_k}^{-1})$ , desde que definidos <sup>(2)</sup>, existem e são finitos, sendo iguais aos momentos conjuntos correspondentes de  $(V_{t_1+h}^{-1}, \dots, V_{t_k+h}^{-1})$ , isto é,*

$$E(V_{t_1}^{r_1} \dots V_{t_k}^{r_k}) = E(V_{t_1+h}^{r_1} \dots V_{t_k+h}^{r_k}),$$

onde  $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}^-$  são tais que  $|r_1| + \dots + |r_k| \leq |r|$ .

Abordamos agora a noção de ergodicidade de um processo fortemente estacionário, seguindo Azencott e Dacunha-Castelle (1984, pp. 31–32).

Seja, então,  $P_V$  a lei de probabilidade sobre  $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}))$  do processo  $V$ , onde  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$  denota a  $\sigma$ -álgebra de Borel sobre  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ .

Consideremos a função de translação  $\tau : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  definida por:

$$\tau[(a_t, t \in \mathbb{Z})] = (b_t, t \in \mathbb{Z}), \text{ onde } b_t = a_{t+1}.$$

É imediato que esta função é invertível, sendo também  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$ -mensurável, já que, dado  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$ , temos  $\tau^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$ , onde  $\tau^{-1}(B)$  é o conjunto

---

<sup>1</sup>Como o processo estocástico  $V$  assume valores em  $\mathbb{R}$ , importa assegurar que a expressão  $V_t^s$ , com  $t \in \mathbb{Z}$  e  $s \in \mathbb{R}^+$ , está efetivamente bem definida.

<sup>2</sup>Estende-se aqui a nota da alínea (a), sem prejuízo da convenção referente ao caso dos expoentes negativos (página 1).

$\{(a_t, t \in \mathbb{Z}) : \tau[(a_t, t \in \mathbb{Z})] \in B\}$ . Podemos, então, dizer que  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$  é um *acontecimento invariante* por  $\tau$  se  $\tau^{-1}(B) = B$ .

Usando esta função de translação, podemos afirmar que  $V$  é fortemente estacionário se e somente se a lei  $P_V$  é *invariante* por  $\tau$ , o que é o mesmo que dizer que  $P_V(\tau^{-1}(B)) = P_V(B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$ .

Assumindo a estacionariade forte, temos então a seguinte definição de processo ergódico:

**Definição 2.4 (Ergodicidade)** *O processo estocástico  $V$  é ergódico se é fortemente estacionário e se qualquer acontecimento invariante por  $\tau$  tem probabilidade zero ou um.*

Assim, de forma intuitiva, a ergodicidade de  $V$  pode ser interpretada como significando que qualquer trajetória de  $V$  preenche, por translações sucessivas, o espaço  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ . Esta característica de  $V$  permite uma generalização da lei forte dos grandes números conhecida por teorema ergódico e devida a Birkhoff e von Neumann.

**Teorema 2.5 (Teorema ergódico)** *Seja  $V$  um processo estocástico ergódico. Se  $g : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável relativamente a  $P_V$ , então tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} [g(V) + g \circ \tau(V) + \dots + g \circ \tau^n(V)] = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}} g dP_V.$$

Consideremos  $g$  da forma

$$g(x) = \mathbf{g}(x_1, \dots, x_k), \text{ para } x = (x_t, t \in \mathbb{Z}),$$

onde  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $E[\mathbf{g}(V_1, \dots, V_k)]$  existe. Então, fazendo uso do teorema ergódico, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} [\mathbf{g}(V_1, \dots, V_k) + \dots + \mathbf{g}(V_{n+1}, \dots, V_{n+k})] = E[\mathbf{g}(V_1, \dots, V_k)].$$

Em particular, para  $\mathbf{g} = \mathbf{1}_A$ , com  $A \subset \mathbb{R}^k$ , vem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} [\mathbf{1}_A(V_1, \dots, V_k) + \dots + \mathbf{1}_A(V_{n+1}, \dots, V_{n+k})] = P[(V_1, \dots, V_k) \in A],$$

o que permite afirmar que a lei de  $(V_1, \dots, V_k)$  (ou, mais geralmente, a família de leis de dimensão finita de  $V$ ) fica completamente determinada pela sucessão  $V_1, \dots, V_n$ , com  $n \rightarrow +\infty$ . As séries temporais ergódicas são, então, identificáveis a partir de uma trajetória infinita.

Ao facto, já referido, de que um processo de margens i.i.d. é fortemente estacionário, podemos acrescentar que é também ergódico.

Um problema importante é o da construção de um processo fortemente estacionário a partir de outro processo também fortemente estacionário. De acordo com Azencott e Dacunha-Castelle (1984, p. 30), tal pode ser feito do seguinte modo:

**Proposição 2.6** *Se  $V$  é um processo fortemente estacionário e se  $f : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável, então o processo  $W$ , onde*

$$W_t = f(\dots, V_{t-1}, V_t, V_{t+1}, \dots),$$

*com  $t \in \mathbb{Z}$ , é ainda fortemente estacionário.*

Este resultado relativo à construção de processos fortemente estacionários pode ser estendido para processos ergódicos (Rosenblatt, 1978, p. 33):

**Proposição 2.7** *Se  $V$  é um processo ergódico e se  $f : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável, então o processo  $W$ , onde*

$$W_t = f(\dots, V_{t-1}, V_t, V_{t+1}, \dots),$$

*com  $t \in \mathbb{Z}$ , é ainda ergódico.*

## 2.2 Expoente de Lyapunov

Vamos agora introduzir o conceito de expoente de Lyapunov associado a uma família de matrizes aleatórias quadradas e i.i.d.,  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ , conceito que vai desempenhar um papel central nas provas de estacionaridade.

Para tal, começamos por recordar o conceito de norma matricial e algumas propriedades associadas (Lancaster e Tismenetsky, 1985, capítulo 10). Seja  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem  $m$ . Uma *norma* de  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  é uma função  $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  tal que, para todo  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- (i)  $\|A\| \geq 0$  e  $\|A\| = 0$  se e só se  $A = 0$ ,
- (ii)  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ ,
- (iii)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,

sendo designada por *norma matricial* se verificar adicionalmente

- (iv)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ .

Uma forma de obter uma norma matricial é considerar a norma induzida por uma (qualquer) norma de  $\mathbb{R}^m$ , mais precisamente, diz-se que  $\|\cdot\|$  é uma norma induzida pela norma  $\|\cdot\|_v$  de  $\mathbb{R}^m$  se, para  $A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ ,

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} : x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0 \right\} = \max \{ \|Ax\|_v : x \in \mathbb{R}^m, \|x\|_v = 1 \}.$$

Uma norma induzida apresenta a vantagem de ser compatível com a norma vetorial à custa da qual foi definida, isto é,

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \|x\|_v,$$

para todo  $A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  e  $x \in \mathbb{R}^m$ .

Seja  $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,m}$ . Seguem-se agora alguns exemplos de normas matriciais:  $\|A\|_r = \left( \sum_{i,j=1}^m |a_{ij}|^r \right)^{1/r}$ , desde que  $1 \leq r \leq 2$  (norma de Hölder);  $\|A\|_s = \lambda_A^{1/2}$ , onde  $\lambda_A$  é o maior valor próprio da matriz  $A^T A$  (norma espectral, que é uma norma induzida);  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$  (norma induzida pela norma infinita).

Consideremos, então, uma norma induzida em  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ . O *expoente de Lyapunov* associado a  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ , denotado por  $\gamma_L$ , é

$$\gamma_L = \inf \left\{ E \left( \frac{1}{n+1} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\| \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Segue-se o teorema que garante, sob determinadas condições, a existência do expoente de Lyapunov (Kingman, 1976, teorema 2.1; Cohen, 1988, teorema C).

**Teorema 2.8 (Expoente de Lyapunov)** *Sejam  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  uma família de matrizes aleatórias quadradas e i.i.d. e  $\|\cdot\|$  uma norma matricial. Se  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ , então temos*

$$\gamma_L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(\log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|), \quad (2.1)$$

com  $\gamma_L \in [-\infty, +\infty[$ . Além disso,

$$\gamma_L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|. \quad (2.2)$$

Este resultado permite observar que, se  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ , o expoente de Lyapunov,  $\gamma_L$ , é uma constante independente da norma escolhida, já que, como  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  é um espaço vetorial de dimensão finita, todas as normas em  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  são equivalentes<sup>(3)</sup> e, portanto, a convergência para  $\gamma_L$  está garantida com qualquer norma.

<sup>3</sup>Duas normas  $\|\cdot\|_a$  e  $\|\cdot\|_b$ , definidas no mesmo espaço vetorial  $\mathcal{S}$ , são equivalentes se existem dois números positivos  $r_1$  e  $r_2$  tais que  $r_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq r_2 \|x\|_a, \forall x \in \mathcal{S}$ .

Além disso, admitindo que  $\gamma_L$  existe, como  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  é uma família de matrizes i.i.d., então, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $E(\log \|A_0 \dots A_{-n}\|) = E(\log \|A_t \dots A_{t-n}\|)$  e, portanto,  $\gamma_L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} \log \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n}\|$ . Analogamente, obtemos  $\gamma_L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} \log \|A_0 A_1 \dots A_n\|$ .

Temos também que  $\gamma_L \leq E(\log \|A_0\|)$ , verificando-se a igualdade quando  $A_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , são variáveis aleatórias reais. Com efeito, como  $\|\cdot\|$  é uma norma matricial, podemos escrever

$$\begin{aligned} E(\log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|) &\leq \\ &\leq E[\log (\|A_0\| \|A_{-1}\| \dots \|A_{-n}\|)] \\ &= E(\log \|A_0\|) + E(\log \|A_{-1}\|) + \dots + E(\log \|A_{-n}\|) \\ &= (n+1) E(\log \|A_0\|), \end{aligned}$$

atendendo a que as matrizes aleatórias  $A_t$  são i.i.d. e, portanto, também as variáveis aleatórias  $\log \|A_t\|$  são i.i.d., o que, aplicado a (2.1), permite concluir o pretendido.

Observamos que o expoente de Lyapunov pode ser estimado de forma relativamente simples por simulação usando a expressão (2.2).

O lema seguinte deve-se a Bougerol e Picard (1992, lema 2.1) e fornece uma condição suficiente que garante que  $\gamma_L < 0$ .

**Lema 2.9** *Seja  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  uma família de matrizes quadradas aleatórias i.i.d. que verifica  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ . Se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\| = 0$$

*então o expoente de Lyapunov associado a  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  é estritamente negativo.*

## 2.3 Estacionaridade forte e ergodicidade

Nesta secção vamos obter condições necessárias ou suficientes para a estacionaridade forte do modelo  $\delta$ -TGARCH, recorrendo à representação vetorial do modelo e ao expoente de Lyapunov a ela associado.

Começemos por recordar que na representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH é definida a família  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  de matrizes i.i.d., quadradas de ordem  $m$ , com  $A_t$

definido em (1.16), concretamente,

$$A_t = \begin{bmatrix} \alpha_1 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_2 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m-1} (Z_t^+)^{\delta} + \beta_{m-1} (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$  é um processo estocástico real de margens i.i.d. e onde  $\delta > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$  e  $\gamma_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Se existir, o expoente de Lyapunov associado a  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  é

$$\gamma_L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|.$$

Consideremos, então, a seguinte hipótese:

**H2:** O limite q.c. da sucessão  $(\frac{1}{n} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|)_{n \in \mathbb{N}}$  existe e pertence a  $[-\infty, 0[$ .

Observamos que **H2** implica a existência do expoente de Lyapunov se admitirmos adicionalmente que  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ .

Vejam agora que esta hipótese é suficiente para garantir a existência de uma solução fortemente estacionária da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH.

**Teorema 2.10** *Se a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  satisfaz a hipótese **H2**, então existe uma única solução fortemente estacionária da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). Essa solução é o processo vetorial  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z})$  tal que*

$$\mathcal{Y}_t = B + \lim_{k \rightarrow +\infty} (q.c.) \sum_{n=1}^k A_{t-1} \dots A_{t-n} B,$$

com  $B = [\alpha_0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$  e  $\alpha_0 > 0$ , que sob a hipótese **H2** está q.c. definido.

**Demonstração:** Começemos por mostrar que a hipótese **H2** garante que o processo  $\mathcal{Y}$  está q.c. definido.

Sob a hipótese **H2**, existe  $\gamma \in [-\infty, 0[$  tal que

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n+1}\| = \gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \log \left( \|A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-n}\|^{\frac{1}{n}} \right) = \gamma \\ \Leftrightarrow & \lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \|A_{t-1} A_{t-2} \dots A_{t-n}\|^{\frac{1}{n}} = e^{\gamma}. \end{aligned}$$

Além disso, sabemos também que  $\gamma < 0$ , então  $e^\gamma < 1$  e, portanto, pelo critério de Cauchy para séries numéricas, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|A_{t-1}\dots A_{t-n}\|$  é q.c. convergente.

Então também a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|A_{t-1}\dots A_{t-n}\| \|B\|$  é q.c. convergente e, atendendo à compatibilidade da norma matricial induzida com a norma vetorial, pelo 1.º critério de comparação para séries numéricas,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|A_{t-1}\dots A_{t-n}B\|$  é ainda q.c. convergente. Da equivalência entre a convergência de uma sucessão de matrizes e a convergência em norma dessa sucessão (Lancaster e Tismenetsky, 1985, p. 361), temos então assegurado que o processo vetorial  $\mathcal{Y}$  está q.c. definido.

O processo  $\mathcal{Y}$  é fortemente estacionário, pois, como vimos na proposição 1.8,  $\mathcal{Y}$  é um processo de Markov homogêneo de margens identicamente distribuídas.

Passemos agora à prova da unicidade.

Suponhamos, então, que  $W = (W_t, t \in \mathbb{Z})$  é também uma solução fortemente estacionária da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). Fixemos  $t$  arbitrariamente em  $\mathbb{Z}$ .

Assim, os processos  $\mathcal{Y}$  e  $W$  são soluções da equação  $Y_{t+1} = A_t Y_t + B$ . Então, para  $n \in \mathbb{N}$ , temos que

$$\begin{aligned} W_t &= A_{t-1}W_{t-1} + B \\ &= A_{t-1}(A_{t-2}W_{t-2} + B) + B \\ &= A_{t-1}A_{t-2}W_{t-2} + A_{t-1}B + B \\ &= \dots \\ &= A_{t-1}\dots A_{t-n-1}W_{t-n-1} + \sum_{k=1}^n A_{t-1}\dots A_{t-k}B + B \end{aligned}$$

e, analogamente, para  $\mathcal{Y}_t$ . Pelas propriedades das normas consideradas, para  $n \in \mathbb{N}$ , vem

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Y}_t - W_t\| &= \|A_{t-1}\dots A_{t-n-1}\mathcal{Y}_{t-n-1} - A_{t-1}\dots A_{t-n-1}W_{t-n-1}\| \\ &\leq \|A_{t-1}\dots A_{t-n-1}\| \|\mathcal{Y}_{t-n-1}\| + \|A_{t-1}\dots A_{t-n-1}\| \|W_{t-n-1}\| \\ &= \|A_{t-1}\dots A_{t-n-1}\| (\|\mathcal{Y}_{t-n-1}\| + \|W_{t-n-1}\|). \end{aligned}$$

Logo, qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ,

$$P(\|\mathcal{Y}_t - W_t\| > \epsilon) \leq P\left(\|A_{t+n}\dots A_t\| \|\mathcal{Y}_t\| > \frac{\epsilon}{2}\right) + P\left(\|A_{t+n}\dots A_t\| \|W_t\| > \frac{\epsilon}{2}\right),$$

uma vez que as leis de  $\|A_{t-1}\dots A_{t-n-1}\| \|\mathcal{Y}_{t-n-1}\|$  e de  $\|A_{t-1}\dots A_{t-n-1}\| \|W_{t-n-1}\|$  são independentes de  $t$ .

Consideremos agora um real positivo  $\zeta$  arbitrariamente fixo e escolhamos  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  tais que

$$P(\|\mathcal{Y}_t\| > \zeta_1) < \frac{\zeta}{4} \quad \text{e} \quad P(\|W_t\| > \zeta_2) < \frac{\zeta}{4}.$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} P(\|\mathcal{Y}_t - W_t\| > \epsilon) &\leq P\left(\|A_{t+n} \dots A_t\| > \frac{\epsilon}{2\zeta_1}\right) + P(\|\mathcal{Y}_t\| > \zeta_1) + \\ &\quad + P\left(\|A_{t+n} \dots A_t\| > \frac{\epsilon}{2\zeta_2}\right) + P(\|W_t\| > \zeta_2). \end{aligned}$$

Ora, como  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  foram escolhidos em função de  $\zeta$  (qualquer) e, sob a hipótese **H2**, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \|A_{t+n} \dots A_t\|$  é q.c. convergente, o que implica, pela condição necessária de convergência de séries numéricas, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \|A_{t+n} \dots A_t\| = 0$ , tem-se, para todo  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}^+, 0 \leq P(\|\mathcal{Y}_t - W_t\| > \epsilon) < \zeta \Leftrightarrow 0 \leq P(\|\mathcal{Y}_t - W_t\| > \epsilon) \leq \inf_{\zeta > 0} \zeta = 0,$$

logo  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, P(\|\mathcal{Y}_t - W_t\| > \epsilon) = 0$ , o que equivale a dizer que  $\|\mathcal{Y}_t - W_t\| = 0$  q.c., ou seja, que  $\mathcal{Y}_t = W_t$  q.c.. ■

Passamos para uma condição necessária de existência de uma solução fortemente estacionária.

**Teorema 2.11** *Seja  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ . Se existe uma solução fortemente estacionária da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), então a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  satisfaz a hipótese **H2**.*

**Demonstração:** Vamos, então, assumir que existe uma solução da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), que designaremos por  $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ . Como  $Y$  verifica a equação  $Y_{t+1} = A_t Y_t + B$ , então, para  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$Y_0 = A_{-1} \dots A_{-k-1} Y_{-k-1} + \sum_{n=1}^k A_{-1} \dots A_{-n} B + B.$$

Atendendo a que todos os coeficientes dos vetores  $B$  e  $Y_{-k-1}$  e das matrizes  $A_t$  são não negativos, então, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , podemos escrever <sup>(4)</sup>

$$\sum_{n=1}^k A_{-1} \dots A_{-n} B \leq Y_0.$$

---

<sup>4</sup>Para  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{R}^m$ ,  $x \leq y$  significa que  $y - x \in (\mathbb{R}^+)^m$ .



Assim sendo, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} A_{-1} \dots A_{-n} B$  é q.c. convergente e, portanto, temos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \|A_{-1} \dots A_{-n} B\| = 0$ .

Seja  $(e_1, \dots, e_m)$  a base canónica de  $\mathbb{R}^m$ . Logo  $B = \alpha_0 e_1$  e, para  $2 \leq i \leq m-1$ , temos  $A_{-n} e_i = e_{i-1}$  e  $A_{-n} e_m = 0$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \|A_{-1} \dots A_{-n} B\| = 0$  implica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \|A_{-1} \dots A_{-n} e_i\| = 0$ , com  $i = 1, \dots, m$ . Podemos, então, afirmar que, para qualquer vetor  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \|A_{-1} \dots A_{-n} U\| = 0,$$

o que permite concluir que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \|A_{-1} \dots A_{-n}\| = 0$ . Tal implica, pelo lema 2.9, que  $\gamma_L < 0$ . ■

Estamos agora em condições de apresentar uma condição necessária e suficiente que garante a existência da solução fortemente estacionária do modelo  $\delta$ -TGARCH.

**Corolário 2.12** *Seja  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ . Existe uma solução fortemente estacionária do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) se e só se  $\gamma_L < 0$ . Além disso, a solução fortemente estacionária é única e ergódica, sendo a referida solução o processo  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z})$  dado, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , por*

$$\mathcal{X}_t = Z_t \left[ \mathcal{Y}_t^{(1)} \right]^{\frac{1}{\delta}},$$

onde  $\mathcal{Y}_t^{(1)}$  é a primeira componente do processo vetorial  $\mathcal{Y}$  do teorema 2.10.

**Demonstração:** A prova de que existe uma solução fortemente estacionária do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) se e só se  $\gamma_L < 0$  e de que a solução fortemente estacionária é única, e é o processo  $\mathcal{X}$ , é uma consequência imediata do facto de  $\mathcal{Y}$  ser a representação vetorial de  $\mathcal{X}$  (proposição 1.8) e dos teoremas 2.10 e 2.11.

A ergodicidade de  $\mathcal{X}$  resulta de, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{X}_t$  ser uma função mensurável de  $(Z_t, Z_{t-1}, \dots)$  e da proposição 2.7. ■

**Observação 2.13** *A hipótese  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$  é importante para garantir a existência do expoente de Lyapunov. Vejamos uma forma de a traduzir em termos do processo gerador  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  quando  $\delta > 0$ . Concretamente, vamos mostrar que se  $\exists \xi \in ]0, \delta[ : E(|Z_t|^\xi) < +\infty$ , então  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ .*

*Começemos por notar que, como as normas em  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$  são equivalentes, basta mostrar que  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ , para uma norma de  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ . Calcule-*

mos, então,  $\|A_0\|$  usando a norma de Hölder com  $r = 1$ :

$$\begin{aligned}
\|A_0\|_1 &= \sum_{i=1}^m \left( \alpha_i (Z_0^+)^{\delta} + \beta_i (Z_0^-)^{\delta} + \gamma_i \right) + (m-1) \\
&= (Z_0^+)^{\delta} \sum_{i=1}^m \alpha_i + (Z_0^-)^{\delta} \sum_{i=1}^m \beta_i + \sum_{i=1}^m \gamma_i + (m-1) \\
&\leq \Delta \left( (Z_0^+)^{\delta} + (Z_0^-)^{\delta} \right) + 2\Delta \\
&= \Delta (Z_0^+ + Z_0^-)^{\delta} + 2\Delta \\
&= \Delta (|Z_0|^{\delta} + 2),
\end{aligned}$$

para  $\Delta = \max \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i, \sum_{i=1}^m \beta_i, \sum_{i=1}^m \gamma_i, m-1 \right\}$ . Seja  $\xi > 0$ . Como é verdade que existe  $C \in [1, +\infty[$  tal que  $\log^+(x) < x^{\xi/\delta}$ , para todo  $x > C$  <sup>(5)</sup>, podemos escrever:

$$\log^+ \left[ \Delta (|Z_0|^{\delta} + 2) + C \right] < \left[ \Delta (|Z_0|^{\delta} + 2) + C \right]^{\xi/\delta}.$$

Como, por um lado, temos

$$\log^+ \|A_0\| \leq \log^+ \left[ \Delta (|Z_0|^{\delta} + 2) \right] < \log^+ \left[ \Delta (|Z_0|^{\delta} + 2) + C \right]$$

e, por outro lado, temos, para  $\xi \in ]0, \delta[$  <sup>(6)</sup>,

$$\left[ \Delta (|Z_0|^{\delta} + 2) + C \right]^{\xi/\delta} < \Delta^{\xi/\delta} (|Z_0|^{\xi} + 2^{\xi/\delta}) + C^{\xi/\delta},$$

logo

$$E(\log^+ \|A_0\|) \leq \Delta^{\xi/\delta} (E(|Z_0|^{\xi}) + 2^{\xi/\delta}) + C^{\xi/\delta} < +\infty.$$

Mostramos, então, que se existe  $\xi > 0$  tal que  $E(|Z_t|^{\xi})$  é finita, por menor que este  $\xi$  seja, fica garantida a existência do expoente de Lyapunov associado a  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ .

Recordamos que, quando o expoente de Lyapunov,  $\gamma_L$ , associado às matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  existe, temos  $\gamma_L \leq E(\log \|A_0\|)$ , verificando-se a igualdade quando as matrizes  $A_t$  são variáveis aleatórias reais. Assim, para  $m \geq 2$ , a referida desigualdade permite obter condições suficientes, que dependem da norma escolhida,

---

<sup>5</sup>Com efeito, como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^r} = 0$ , para todo  $r \in \mathbb{R}^+$ , então é possível garantir que existe  $C \in [1, +\infty[$  tal que  $0 < \frac{\log(x)}{x^r} < 1$ , para todo  $x > C$ .

<sup>6</sup>Em Hardy, Littlewood e Pólya (1952, p. 4), para  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ , quando  $0 < r < s$ ,  $(a_1^s + \dots + a_n^s)^{1/s} \leq (a_1^r + \dots + a_n^r)^{1/r}$ . Basta, então, fazer  $s = 1$ , para assegurar que  $(a_1 + \dots + a_n)^r \leq a_1^r + \dots + a_n^r$ , para qualquer  $0 < r < 1$ .

para a existência da solução fortemente estacionária e ergódica para o modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). Para  $m = 1$ , ou seja, para o modelo  $\delta$ -TGARCH(1), como temos uma igualdade, então

$$\gamma_L < 0 \Leftrightarrow E \left\{ \log \left[ \alpha_1 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_1 \right] \right\} < 0.$$

No corolário seguinte vamos conseguir generalizar esta equivalência para o modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) tal que  $\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \alpha_m (X_{t-m}^+)^{\delta} + \beta_m (X_{t-m}^-)^{\delta} + \gamma_m \sigma_{t-m}^{\delta}$  (tendo-se, portanto,  $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, m-1$ ).

**Corolário 2.14** *Se  $E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \right\} < +\infty$ , uma condição necessária e suficiente para a existência de uma única solução  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ , fortemente estacionária e ergódica, do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) tal que*

$$\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \alpha_m (X_{t-m}^+)^{\delta} + \beta_m (X_{t-m}^-)^{\delta} + \gamma_m \sigma_{t-m}^{\delta}$$

é

$$E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \right\} < 0.$$

**Demonstração:** Começamos por notar que o expoente de Lyapunov

$$\gamma_L = \lim_{n \rightarrow +\infty} (q.c.) \frac{1}{n} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|$$

existe, pois, como  $E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \right\} < +\infty$ , temos que  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ .

Atendendo à forma particular das matrizes  $A_t$  para a especificação considerada de  $\sigma_t^{\delta}$ , o produto de quaisquer  $m$  matrizes é uma matriz diagonal; concretamente,

$$A_0 A_{-1} \dots A_{-m+1} = D_{-m+1,0} = [d_{ij}]_{i,j=1,\dots,m},$$

onde, para  $i = j$ ,  $d_{ii} = \alpha_m (Z_{-m+i}^+)^{\delta} + \beta_m (Z_{-m+i}^-)^{\delta} + \gamma_m$  e, para  $i \neq j$ ,  $d_{ij} = 0$ . Como o produto de matrizes diagonais é ainda uma matriz diagonal, temos, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D_{-m+1,0} D_{-m,-2m+1} \dots D_{-(n-1)m,-nm+1} = D_0^{(-nm+1)} = [d_{ij}^*]_{i,j=1,\dots,m},$$

onde, para  $i = j$ ,  $d_{ii}^* = \prod_{k=1}^n \left[ \alpha_m (Z_{-km+i}^+)^{\delta} + \beta_m (Z_{-km+i}^-)^{\delta} + \gamma_m \right]$  e, para  $i \neq j$ ,  $d_{ij}^* = 0$ .

Consideremos a sucessão  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de termo geral  $U_n = \frac{1}{n} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|$  e a sua subsucessão  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $V_n = U_{nm-1}$ . Como, por hipótese,  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é q.c. convergente, temos  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  q.c. convergente para  $\gamma_L$  se e só se  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  q.c. convergente para  $\gamma_L$ .

Por outro lado, considerando a norma induzida pela norma infinita, temos que

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{nm-1} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-nm+1}\|_\infty \\
&= \frac{1}{nm-1} \log \left\| D_0^{(-nm+1)} \right\|_\infty \\
&= \frac{1}{nm-1} \log \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} \prod_{k=1}^n \left[ \alpha_m (Z_{-km+i}^+)^{\delta} + \beta_m (Z_{-km+i}^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \right\} \\
&= \frac{1}{nm-1} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n \log \left[ \alpha_m (Z_{-km+i}^+)^{\delta} + \beta_m (Z_{-km+i}^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \\
&= \frac{n}{nm-1} \times \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{k=1}^n \log \left[ \alpha_m (Z_{-km+i}^+)^{\delta} + \beta_m (Z_{-km+i}^-)^{\delta} + \gamma_m \right]
\end{aligned}$$

Como estamos a admitir que  $E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \right\} < +\infty$  e como as variáveis aleatórias  $Z_t$  são i.i.d., então, pela lei forte dos grandes números, podemos afirmar que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge q.c. para  $\frac{1}{m} E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \right\}$ .

Assim sendo, podemos afirmar que, para este modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) particular,  $\gamma_L = \frac{1}{m} E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \right\}$  e, portanto, o corolário 2.12 permite concluir que uma condição necessária e suficiente para a existência de uma única solução fortemente estacionária e ergódica do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) é

$$E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_m \right] \right\} < 0. \blacksquare$$

Vamos agora ilustrar este resultado nos dois exemplos seguintes para o modelo  $\delta$ -TGARCH tal que as variáveis  $Z_t$  do processo gerador seguem a distribuição de Cauchy padrão,  $Z_t \sim \mathcal{C}(0, 1)$ , concretamente, têm função densidade

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 2.15** Suponhamos que  $Z_t \sim \mathcal{C}(0, 1)$ . Sob as hipóteses do corolário 2.14, se considerarmos  $\delta = 2$ , obtemos <sup>(7)</sup>

$$\begin{aligned} E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^2 + \beta_m (Z_t^-)^2 + \gamma_m \right] \right\} &= \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\log(\alpha_m z^2 + \gamma_m)}{\pi(1+z^2)} dz + \int_{-\infty}^0 \frac{\log(\beta_m z^2 + \gamma_m)}{\pi(1+z^2)} dz \\ &= \log(\sqrt{\alpha_m} + \sqrt{\gamma_m}) + \log(\sqrt{\beta_m} + \sqrt{\gamma_m}) \\ &= \log \left[ (\sqrt{\alpha_m} + \sqrt{\gamma_m}) (\sqrt{\beta_m} + \sqrt{\gamma_m}) \right], \end{aligned}$$

desde que  $\alpha_m > 0$ ,  $\beta_m > 0$  e  $\gamma_m > 0$ .

Então existe uma solução  $X$  fortemente estacionária deste modelo  $\delta$ -TGARCH se e só se  $(\alpha_m, \beta_m, \gamma_m)$  pertence ao conjunto

$$R_1 = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{R}^+)^3 : \gamma < \frac{1}{4} \left[ \sqrt{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 + 4} - (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \right]^2 \right\}.$$

Efetivamente,

$$\begin{aligned} &\log \left[ (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\gamma}) (\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}) \right] < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\gamma + (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \sqrt{\gamma} + (\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} - 1) < 0 \\ \Leftrightarrow &0 \leq \sqrt{\gamma} < \frac{1}{2} \left[ -(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) + \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 - 4(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} - 1)} \right] \\ \Leftrightarrow &0 \leq \gamma < \frac{1}{4} \left[ \sqrt{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 + 4} - (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}) \right]^2 \end{aligned}$$

Na figura 2.1 apresentamos a parte da fronteira da região  $R_1$  correspondente à condição indicada no conjunto, encontrando-se a referida região abaixo desta fronteira.

---

<sup>7</sup>Em Gradshteyn e Ryzhik (2007, fórmula 4.295.7),  $\int_0^{+\infty} \frac{\log(a^2 z^2 + b^2)}{1+z^2} dz = \pi \log(a+b)$ , onde  $a > 0$  e  $b > 0$ .

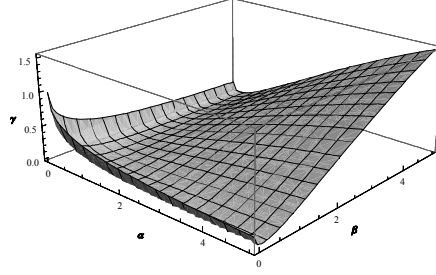


Figura 2.1: Representação do limite superior da região de estacionaridade forte de  $X \sim 2\text{-TGARCH}(m)$  tal que  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_m (X_{t-m}^+)^2 + \beta_m (X_{t-m}^-)^2 + \gamma_m \sigma_{t-m}^2$  e  $Z_t \sim \mathcal{C}(0, 1)$ .

**Exemplo 2.16** Continuamos a admitir que  $Z_t \sim \mathcal{C}(0, 1)$ . Sob as hipóteses do corolário 2.14, se  $\gamma_m = 0$  (i.e., se temos o modelo  $\delta\text{-TARCH}$ ), então <sup>(8)</sup>

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} \right] \right\} &= \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\log(\alpha_m z^{\delta})}{\pi(1+z^2)} dz + \int_{-\infty}^0 \frac{\log(\beta_m (-z)^{\delta})}{\pi(1+z^2)} dz \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \log(\alpha_m) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} dz + \delta \int_0^{+\infty} \frac{\log(z)}{1+z^2} dz + \right. \\
 &\quad \left. + \log(\beta_m) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+z^2} dz + \delta \int_{-\infty}^0 \frac{\log(-z)}{1+z^2} dz \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \log(\alpha_m) + \frac{\pi}{2} \log(\beta_m) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \log(\alpha_m \beta_m),
 \end{aligned}$$

desde que  $\alpha_m > 0$  e  $\beta_m > 0$ .

Assim, existe uma solução  $X$  fortemente estacionária deste modelo  $\delta\text{-TGARCH}$  se e só se  $(\alpha_m, \beta_m, \delta)$  pertence ao conjunto

$$R_2 = \left\{ (\alpha, \beta, \delta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R} \setminus \{0\} : \alpha\beta < 1 \right\}.$$

Também neste caso apresentamos, na figura 2.2, parte da fronteira da região  $R_2$  correspondente à condição indicada no conjunto e  $\delta > 0$ , encontrando-se a referida região à esquerda desta fronteira.

<sup>8</sup>Em Gradshteyn e Ryzhik (2007, fórmula 4.231.12),  $\int_0^1 \frac{\log(z)}{1+z^2} dz = -\int_1^{+\infty} \frac{\log(z)}{1+z^2} dz$ .

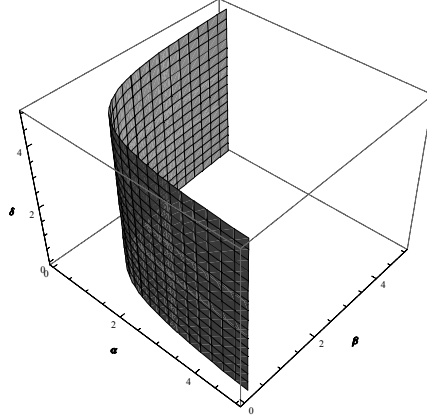


Figura 2.2: Representação do limite à direita da região de estacionaridade forte de  $X \sim \delta$ -TARCH( $m$ ) tal que  $\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_m (X_{t-m}^+)^{\delta} + \beta_m (X_{t-m}^-)^{\delta}$  e  $Z_t \sim \mathcal{C}(0, 1)$ .

Deixando o caso particular analisado nos dois exemplos anteriores, no teorema seguinte fornecemos uma condição necessária para a existência de uma solução fortemente estacionária do modelo  $\delta$ -TGARCH geral.

**Teorema 2.17** *Seja  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ . Se existe uma solução fortemente estacionária do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), então  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$ .*

**Demonstração:** Seja  $A$  a matriz obtida da matriz  $A_t$  substituindo  $Z_t^+$  e  $Z_t^-$  por zero. Então, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , temos que  $A \leq A_t$  <sup>(9)</sup> e, portanto, também  $A^{n+1} \leq A_0 \dots A_{-n}$ . Além disso, como as matrizes  $A$  e  $A_{-t}$ , para  $t = 0, \dots, n$ , são matrizes de elementos não negativos, então temos  $\|A^{n+1}\| \leq \|A_0 \dots A_{-n}\|$  e, portanto, podemos escrever  $\log \|A^{n+1}\| \leq \log \|A_0 \dots A_{-n}\|$ .

Assim sendo,  $\rho(A) < 1$ , onde  $\rho(A)$  é o raio espectral de  $A$  (*i.e.*,  $\rho(A)$  é o maior valor próprio, em módulo, de  $A$ ). De facto, por um lado, temos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A^n\| = \log[\rho(A)]$  (Horn e Johnson, 1985, p. 299) e, por outro lado, sabemos que existe uma solução fortemente estacionária do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), portanto, pelo corolário 2.12, o expoente de Lyapunov associado a  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ ,  $\gamma_L$ , é estritamente negativo. Logo podemos concluir que  $\log[\rho(A)] \leq \gamma_L < 0$ , ou seja, que  $\rho(A) < 1$ .

Como  $\rho(A) < 1$ , as raízes do polinómio característico de  $A$ , ou seja, os zeros do polinómio em  $\lambda$  dado por  $\det(A - \lambda I_m)$ , são, em módulo, estritamente inferiores a

<sup>9</sup>Para  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ ,  $A \leq B$  significa que  $B - A \in \mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R}^+)$ .

1. Calculemos, então, o polinómio característico, usando exclusivamente o teorema de Laplace (aplicado sempre à primeira linha):

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_m) &= (-1)^m \det(\lambda I_m - A) \\
&= (-1)^m \begin{vmatrix} \lambda - \gamma_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma_2 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -\gamma_m & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1)^m [(\lambda - \gamma_1)\lambda^{m-1} - \gamma_2\lambda^{m-2} - \dots - \gamma_{m-1}\lambda - \gamma_m] \\
&= (-1)^m \lambda^m \left( 1 - \sum_{j=1}^m \gamma_j \lambda^{-j} \right) \\
&= (-\lambda)^m \left( 1 - \sum_{j=1}^q \gamma_j \lambda^{-j} \right).
\end{aligned}$$

Atendendo ao que foi referido, podemos afirmar que a função contínua definida por  $f(x) = 1 - \sum_{j=1}^q \gamma_j x^j$  não tem zeros em  $[-1, 1]$ . Adicionalmente, como  $f(0) = 1$ , tal implica que  $f(1) = 1 - \sum_{j=1}^q \gamma_j > 0$ . Portanto,  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$ . ■

**Observação 2.18** *Com este último teorema, podemos garantir que o processo  $X$  fortemente estacionário, tal que  $E(\log^+ \|A_0\|) < +\infty$  e  $E[\log^+(\sigma_0)] < +\infty$ , solução do modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) admite representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ) (vejam-se as condições do teorema 1.4).*

## 2.4 Estacionaridade à ordem $\delta$

Nesta secção analisamos os momentos de ordem  $\delta$  de um processo  $X$  solução do modelo  $\delta$ -TGARCH, o que permitirá estudar a sua estacionaridade à ordem  $\delta$ .

Vamos começar por avaliar em que condições podemos garantir a finitude e independência de  $t$  de  $E(|X_t|^\delta)$ . Para tal, vamos considerar a seguinte hipótese:

$$\mathbf{H3}: E(|Z_0|^\delta) < +\infty \text{ e } \sum_{j=1}^q \gamma_j < 1.$$

Notamos que, sob esta hipótese, como as variáveis do processo gerador  $Z$  são idênticamente distribuídas, podemos usar as notações:

$$E(|Z_t|^\delta) = \phi_\delta, \quad E[(Z_t^+)^\delta] = \phi_{1,\delta} \quad \text{e} \quad E[(Z_t^-)^\delta] = \phi_{2,\delta},$$



onde  $\phi_\delta$ ,  $\phi_{1,\delta}$  e  $\phi_{2,\delta}$  são constantes reais positivas (independentes de  $t$ ).

Assim, como temos  $\sigma_t > 0$ ,  $\sigma_t^\delta$  é, da hipótese **H3**,  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável e como  $Z_t$  é independente de  $\underline{X}_{t-1}$ , vem

$$E \left[ (X_t^+)^{\delta} \mid \underline{X}_{t-1} \right] = \sigma_t^\delta E \left[ (Z_t^+)^{\delta} \mid \underline{X}_{t-1} \right] = \sigma_t^\delta E \left[ (Z_t^+)^{\delta} \right] = \sigma_t^\delta \phi_{1,\delta}.$$

Portanto, podemos formalmente escrever  $E \left[ (X_t^+)^{\delta} \right] = E(\sigma_t^\delta) \phi_{1,\delta}$ . Analogamente,  $E \left[ (X_t^-)^{\delta} \right] = E(\sigma_t^\delta) \phi_{2,\delta}$ . Ou seja, a finitude e independência de  $t$  de  $E \left[ (X_t^+)^{\delta} \right]$  e de  $E \left[ (X_t^-)^{\delta} \right]$  e, conseqüentemente, também a de  $E(|X_t|^\delta)$ , dependem da finitude e independência de  $t$  de  $E(\sigma_t^\delta)$ .

**Teorema 2.19** *Seja  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) verificando a hipótese **H3**. Então,  $E(|X_t|^\delta)$  é finita e independente de  $t$  se e só se*

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1. \quad (2.3)$$

**Demonstração:** Começemos por assumir que  $\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1$ .

As propriedades de integração de funções mensuráveis positivas, permitem-nos escrever

$$E(\sigma_t^\delta) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) E(\sigma_{t-i}^\delta),$$

igualdade esta que não é mais do que uma equação de recorrência com incógnita  $E(\sigma_t^\delta)$ . O polinómio associado à equação homogénea correspondente é

$$pol(L) = 1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) L^i,$$

onde  $L$  representa o operador atraso. Podemos, então, afirmar que esta equação tem uma solução,  $E(\sigma_t^\delta)$ , que é independente de  $t$  se todas as raízes de  $pol(L)$  estiverem fora do círculo unitário, o que acontece se e só se  $\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1$  <sup>(10)</sup>.

Vamos agora assumir que  $E(|X_t|^\delta)$  é finita e independente de  $t$ . Assim, como  $E(|X_t|^\delta) = E(\sigma_t^\delta) \phi_\delta$  e  $\phi_\delta \neq 0$ , então  $E(\sigma_t^\delta)$  é finita e independente de  $t$ . Logo

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^\delta) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) E(\sigma_{t-i}^\delta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[ 1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) \right] E(\sigma_t^\delta) &= \alpha_0. \end{aligned}$$

<sup>10</sup>A prova desta afirmação é idêntica à do lema 1.2.

Então, atendendo à positividade de  $E(\sigma_t^\delta)$  e de  $\alpha_0$ , temos como consequência a positividade de  $1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i)$ . ■

Para a obtenção do valor de  $E(|X_t|^\delta)$ , basta notar que  $E(|X_t|^\delta) = E(\sigma_t^\delta) \phi_\delta$ .

**Corolário 2.20** *Seja  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). Se o processo gerador  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  é tal que  $E(|Z_0|^\delta) < +\infty$  e, adicionalmente,*

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1,$$

então  $E(|X_t|^\delta)$  é finita e independente de  $t$  e temos

$$E(|X_t|^\delta) = \frac{\alpha_0 \phi_\delta}{1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i)}. \quad (2.4)$$

Consideremos agora  $\delta \in \mathbb{Z}$  ou  $\delta = \frac{a}{2b+1}$ , com  $a \in \mathbb{Z}$  e  $b \in \mathbb{N}$ . Para  $\delta$  nestas condições, podemos garantir que  $X_t^\delta$  está definido. Assim, sob as condições do corolário anterior, como  $E(X_t^\delta) = E(\sigma_t^\delta) E(Z_t^\delta)$ , temos

$$E(X_t^\delta) = \frac{\alpha_0 E(Z_t^\delta)}{1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i)}. \quad (2.5)$$

Vamos agora mostrar que a condição (2.3) é suficiente para a existência de uma solução fortemente estacionária do modelo  $\delta$ -TGARCH. Este resultado é muito interessante na prática, atendendo à facilidade com que a condição (2.3) pode ser verificada.

**Teorema 2.21** *O processo  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  verificando o modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), tal que  $E(|Z_0|^\delta) < +\infty$  e  $\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1$ , é fortemente estacionário.*

**Demonstração:** Começemos por observar que podemos garantir a existência do expoente de Lyapunov,  $\gamma_L$ , associado a  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ , pois  $E(\log^+ \|A_0\|) \leq E(\|A_0\|)$  e  $E(\|A_0\|)$  é finita se  $E(|Z_t|^\delta) < +\infty$ .

Fixemo-nos na matriz  $E(A_0)$  e calculemos o seu polinómio característico, seguindo o procedimento também usado na demonstração do teorema 2.17:

$$\begin{aligned} \det [E(A_0) - \lambda I_m] &= (-1)^m \det [\lambda I_m - E(A_0)] \\ &= (-1)^m \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_1 \phi_{1,\delta} - \beta_1 \phi_{2,\delta} - \gamma_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 \phi_{1,\delta} - \beta_2 \phi_{2,\delta} - \gamma_2 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{m-1} \phi_{1,\delta} - \beta_{m-1} \phi_{2,\delta} - \gamma_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -\alpha_m \phi_{1,\delta} - \beta_m \phi_{2,\delta} - \gamma_m & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\lambda)^m \left( 1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) \lambda^{-i} \right). \end{aligned}$$

Por um lado,

$$|\det [E(A_0) - \lambda I_m]| \geq |\lambda^m| \left( 1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) |\lambda^{-i}| \right),$$

logo, se  $|\lambda| \geq 1$ , temos  $|\det [E(A_0) - \lambda I_m]| > 1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i)$ . Por outro lado, temos, por hipótese, que  $1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) > 0$ . Assim, podemos concluir que os valores próprios de  $E(A_0)$  pertencem necessariamente ao intervalo  $] -1, 1[$ , ou seja, o raio espectral de  $E(A_0)$ ,  $\rho(E(A_0))$ , é menor do que 1. Ora, como  $\gamma_L \leq \log[\rho(E(A_0))]$  (Kesten e Spitzer, 1984, desigualdade (1.4)), então  $\gamma_L < 0$ , o que, pelo corolário 2.12, permite concluir que o modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) tem uma solução fortemente estacionária. ■

A estacionaridade à ordem  $\delta$  surge como consequência imediata dos dois últimos teoremas e da desigualdade de Hölder.

**Corolário 2.22** *Seja  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) que verifica a hipótese **H3**.  $X$  é estacionário à ordem  $\delta$  se e só se  $\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1$ .*

**Demonstração:** A prova de que  $\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1$  é uma condição necessária para a estacionaridade à ordem  $\delta$  é imediata, usando o teorema 2.19.

Admitindo agora que  $\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1$ , pelo teorema 2.21,  $X$  é fortemente estacionário. Assim, para mostrar que  $X$  é também estacionário à ordem  $\delta$ , basta garantir que, para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{Z}$ , existe e é finita  $E(|X_{t_1}|^{n_1} \dots |X_{t_k}|^{n_k})$ , onde  $n_1 + \dots + n_k = \delta$ , com  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{R}^+$ , caso  $\delta > 0$ , e  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{R}^-$ , caso  $\delta < 0$ .

Atendendo a que  $E(|X_{t_1}|^{n_1} \dots |X_{t_k}|^{n_k}) = \int \prod_{i=1}^k |X_{t_i}|^{n_i} dP$ , então, pela desigualdade de Hölder generalizada para expoentes positivos <sup>(11)</sup>:

– caso  $\delta > 0$ , como  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{R}^+$  são tais que  $n_1 + \dots + n_k = \delta$ , temos

$$\int \prod_{i=1}^k |X_{t_i}|^{n_i} dP \leq \prod_{i=1}^k \left( \int |X_{t_i}|^\delta dP \right)^{\frac{n_i}{\delta}} = \prod_{i=1}^k \left( E(|X_{t_i}|^\delta) \right)^{\frac{n_i}{\delta}};$$

– caso  $\delta < 0$ , como  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{R}^-$  são tais que  $n_1 + \dots + n_k = \delta$ , temos

$$\int \prod_{i=1}^k \left( \frac{1}{|X_{t_i}|} \right)^{|n_i|} dP \leq \prod_{i=1}^k \left( \int \left( \frac{1}{|X_{t_i}|} \right)^{|\delta|} dP \right)^{\frac{|n_i|}{|\delta|}} = \prod_{i=1}^k \left( E(|X_{t_i}|^\delta) \right)^{\left| \frac{n_i}{\delta} \right|}.$$

Assim, como, pelo teorema 2.19,  $E(|X_{t_i}|^\delta) < +\infty$ , podemos concluir que  $E(|X_{t_1}|^{n_1} \dots |X_{t_k}|^{n_k}) < +\infty$ . ■

Vamos agora concretizar as condições necessárias e suficientes do corolário 2.14 e do teorema 2.19 para um processo  $X$  seguindo o modelo  $\delta$ -TARCH( $m$ ) tal que  $\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_m (X_{t-m}^+)^{\delta} + \beta_m (X_{t-m}^-)^{\delta}$ , considerando, adicionalmente, uma distribuição marginal simétrica para o processo gerador  $Z$ . Denotando por  $f$  a densidade das variáveis  $Z_t$ , que, atendendo à simetria da distribuição, é uma função par, temos

$$\begin{aligned} E \left\{ \log \left[ \alpha_m (Z_t^+)^{\delta} + \beta_m (Z_t^-)^{\delta} \right] \right\} &= \\ &= \int_0^{+\infty} \log(\alpha_m z^{\delta}) f(z) dz + \int_{-\infty}^0 \log[\beta_m (-z)^{\delta}] f(z) dz \\ &= \int_0^{+\infty} \log(\alpha_m z^{\delta}) f(z) dz + \int_0^{+\infty} \log(\beta_m z^{\delta}) f(z) dz \\ &= [\log(\alpha_m) + \log(\beta_m)] \int_0^{+\infty} f(z) dz + 2\delta \int_0^{+\infty} \log(z) f(z) dz \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_m E \left[ (Z_t^+)^{\delta} \right] + \beta_m E \left[ (Z_t^-)^{\delta} \right] &= (\alpha_m + \beta_m) E \left[ (Z_t^+)^{\delta} \right] \\ &= (\alpha_m + \beta_m) \int_0^{+\infty} z^{\delta} f(z) dz. \end{aligned}$$

---

<sup>11</sup>Desigualdade de Hölder: Sejam  $p_1, \dots, p_n$  em  $]0, +\infty[$  tais que  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ . Se  $f_i \in L_{p_i}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então  $\prod_{i=1}^n f_i \in L(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  e  $\int \prod_{i=1}^n |f_i| d\mu \leq \prod_{i=1}^n \left( \int |f_i|^{p_i} d\mu \right)^{\frac{1}{p_i}}$  (Cheung, 2001).

Logo, do corolário 2.14,

$$\frac{1}{2} \log(\alpha_m \beta_m) + 2\delta \int_0^{+\infty} \log(z) f(z) dz < 0 \quad (2.6)$$

é uma condição necessária e suficiente de estacionaridade forte de  $X$  e, do teorema 2.19,

$$(\alpha_m + \beta_m) \int_0^{+\infty} z^\delta f(z) dz < 1 \quad (2.7)$$

é uma condição necessária e suficiente para que  $E(|X_t|^\delta) < +\infty$  (e também uma condição suficiente de estacionaridade forte de  $X$ , pelo teorema 2.21). Na tabela 2.1, fornecemos estas condições para algumas distribuições de  $Z_t$ , tendo os cálculos sido efetuados com recurso a Gradshteyn e Ryzhik (2007) <sup>(12)</sup>.

Tabela 2.1: Condições (2.6) e (2.7) para várias distribuições simétricas de  $Z_t$  e  $\delta \neq 0$ . Nesta tabela,  $c$  é a constante de Euler ( $c \simeq 0.577215$ ) e  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama.

Densidade de $Z_t$	Condição (2.6)	Condição (2.7)
Dist. Cauchy padrão $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}$	$\alpha_m \beta_m < 1$	$\frac{\alpha_m + \beta_m}{2 \sin(\frac{\delta+1}{2}\pi)} < 1 \wedge  \delta  < 1$
Dist. Gaussiana padrão $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, x \in \mathbb{R}$	$\log(\alpha_m \beta_m) - \delta(c + \log 2) < 0$	$\frac{(\alpha_m + \beta_m)\Gamma(\delta+1)}{2^{\frac{\delta}{2}+1}\Gamma(\frac{\delta}{2}+1)} < 1 \wedge \delta > -1$
Dist. Laplace padrão $f(x) = \frac{e^{- x }}{2}, x \in \mathbb{R}$	$\log(\alpha_m \beta_m) - 2\delta c < 0$	$\frac{(\alpha_m + \beta_m)\Gamma(\delta+1)}{2} < 1 \wedge \delta > -1$
Dist. uniforme sobre $] -1, 1[$ $f(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{]-1, 1[}(x), x \in \mathbb{R}$	$\log(\alpha_m \beta_m) - 2\delta < 0$	$\frac{\alpha_m + \beta_m}{2(\delta+1)} < 1 \wedge \delta \neq -1$

A figura 2.3 ilustra a condição (2.6) (anteriormente representada na figura 2.2 do exemplo 2.16) e a condição (2.7) para a distribuição de Cauchy padrão. Como

<sup>12</sup>Segue-se a lista das fórmulas usadas e respetivas referências em Gradshteyn e Ryzhik (2007), para  $a, b \in \mathbb{R}^+$  e denotando por  $c$  a constante de Euler e  $\Gamma(\cdot)$  a função gama:

Ref.	Fórmula	Usada para a dist.
4.231.12	$\int_0^1 \frac{\log(z)}{1+z^2} dz = - \int_1^{+\infty} \frac{\log(z)}{1+z^2} dz$	Cauchy
3.241.2	$\int_0^{+\infty} \frac{z^{a-1}}{1+z^b} dz = \frac{\pi}{b \sin(\frac{a\pi}{b})}$ (desde que $b > a$ )	
3.321.3	$\int_0^{+\infty} \exp(-a^2 z^2) dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$	Gaussiana
4.333	$\int_0^{+\infty} \exp(-bz^2) \log(z) dz = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{b}} (c + \log(4b))$	
3.462.1	$\int_0^{+\infty} z^{b-1} \exp(-az^2) dz = \sqrt{\pi} (4a)^{-\frac{b}{2}} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(\frac{1+b}{2})}$	
4.331.1	$\int_0^{+\infty} \exp(-bz) \log(z) dz = -\frac{1}{b} (c + \log(b))$	Laplace
8.310.1	$\int_0^{+\infty} z^{a-1} \exp(-z) dz = \Gamma(a)$	

esperado, a região tal que  $E(|X_t|^\delta) < +\infty$  está contida na região de estacionaridade forte de  $X$ .

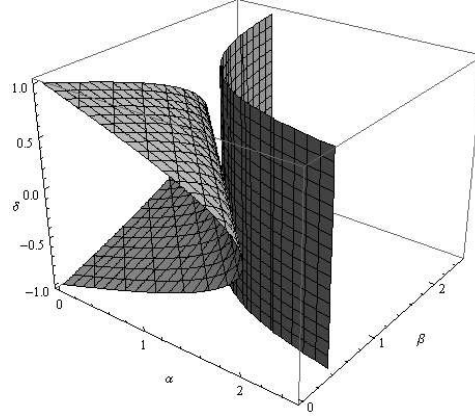


Figura 2.3: Representação do limite à direita da região tal que  $E(|X_t|^\delta) < +\infty$  (cinzento claro) e do limite à direita da região de estacionaridade forte (cinzento escuro) de  $X \sim \delta\text{-TGARCH}(m)$  tal que  $\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_m (X_{t-m}^+)^{\delta} + \beta_m (X_{t-m}^-)^{\delta}$  e  $Z_t \sim \mathcal{C}(0, 1)$ .

## 2.5 Discussão da estacionaridade fraca

Começamos por notar que, atendendo aos resultados obtidos na secção 2.4, sob a hipótese **H3**, quando  $\delta = 2$ , a condição

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1,$$

é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução fracamente estacionária do modelo  $\delta\text{-TGARCH}(m)$ . A título de exemplo, se considerarmos o modelo  $\text{GARCH}(p, q)$ , ou seja, o modelo  $\delta\text{-TGARCH}(p, q)$  com  $\delta = 2$  e  $\alpha_i = \beta_i$ , para  $i = 1, \dots, p$ , esta condição, no contexto particular da distribuição das variáveis do processo gerador ser a gaussiana padrão, é equivalente a

$$\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \gamma_i) < 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$$

pois, neste caso,  $\phi_{1,2} = \phi_{2,2} = \frac{1}{2}$ , sendo esta a conhecida condição necessária e suficiente de estacionaridade fraca obtida por Bollerslev (1986).

Nesta secção analisamos condições para a existência de solução fracamente estacionária do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). À semelhança do que foi feito para a estacionaridade forte, vamos recorrer à representação vetorial para fazer esta análise, sendo aqui a hipótese base a considerar:

$$\mathbf{H4}: \forall n \in \mathbb{N}_0 : E \left( \|A_0 \dots A_n\|^2 \right) < +\infty \text{ e } \exists r \in \mathbb{N} : E \left( \|A_0 \dots A_{r-1}\|^2 \right) < 1,$$

onde  $\|\cdot\|$  é uma (qualquer) norma matricial.

**Observação 2.23** *Impõem-se, desde já, algumas observações relativas a esta hipótese.*

1. *Comecemos por mostrar que  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : E \left( \|A_0 \dots A_n\|^2 \right) < +\infty$  é equivalente a  $E \left( \|A_0\|^2 \right) < +\infty$ .*

*Com efeito, esta equivalência é imediata, notando que, para todo  $n \in \mathbb{N}_0$*

$$E \left( \|A_0 \dots A_n\|^2 \right) \leq E \left( \prod_{i=0}^n \|A_i\|^2 \right) = \prod_{i=0}^n E \left( \|A_i\|^2 \right) = \left[ E \left( \|A_0\|^2 \right) \right]^{n+1},$$

*pois a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  é i.i.d..*

2. *Além disso,  $E \left( \|A_0\|^2 \right) < +\infty$  é ainda equivalente a  $E \left( |Z_t|^{2\delta} \right) < +\infty$ .*

*De facto, como vimos na observação 2.13, basta mostrar que  $E \left( \|A_0\|_\infty^2 \right) < +\infty$  se e só se  $E \left( |Z_t|^{2\delta} \right) < +\infty$ .*

*Ora, atendendo a que*

$$\|A_0\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \alpha_i (Z_0^+)^{\delta} + \beta_i (Z_0^-)^{\delta} + \gamma_i + \mathbb{1}_{\{1, \dots, m-1\}}(i) \right\},$$

*$E \left( \|A_0\|_\infty^2 \right) < +\infty$  se e só se  $E \left[ (Z_0^+)^{2\delta} \right] < +\infty$  e  $E \left[ (Z_0^-)^{2\delta} \right] < +\infty$  o que é equivalente a ter  $E \left( |Z_t|^{2\delta} \right) < +\infty$ .*

3. *Admitindo que  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : E \left( \|A_0 \dots A_n\|^2 \right) < +\infty$ , temos que a condição  $\exists r \in \mathbb{N} : E \left( \|A_0 \dots A_{r-1}\|^2 \right) < 1$  é equivalente a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \|A_0 \dots A_n\|^2 \right) = 0. \quad (2.8)$$

*De facto, denotando por  $[x]$  a parte inteira do número real  $x$ , podemos escrever, para  $n$  suficientemente grande,*

$$\begin{aligned} E \left( \|A_0 \dots A_n\|^2 \right) &\leq \\ &\leq E \left( \|A_0 \dots A_{r-1}\|^2 \dots \left\| A_{(\lfloor \frac{n}{r} \rfloor - 1)r} \dots A_{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor r - 1} \right\|^2 \left\| A_{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor r} \dots A_n \right\|^2 \right) \\ &\leq \left[ E \left( \|A_0 \dots A_{r-1}\|^2 \right) \right]^{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \left[ E \left( \|A_0\|^2 \right) \right]^{n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor r + 1}, \end{aligned}$$

já que as matrizes  $A_t$  são *i.i.d.*; assim, como  $\exists r \in \mathbf{N} : E \left( \|A_0 \dots A_{r-1}\|^2 \right) < 1$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ E \left( \|A_0 \dots A_{r-1}\|^2 \right) \right]^{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} = 0$$

e,  $\forall n \in \mathbf{N}, 1 \leq n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor r + 1 < r + 1$ , ou seja, a sucessão  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de termo geral  $u_n = \left( E \|A_0\|^2 \right)^{n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor r + 1}$  é limitada, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ E \left( \|A_0 \dots A_{r-1}\|^2 \right) \right]^{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \left[ E (\|A_0\|^2) \right]^{n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor r + 1} = 0,$$

o que implica (2.8). A recíproca é evidente.

4. A verificação da hipótese **H4** implica a verificação da hipótese **H2**.

Com efeito, comecemos por mostrar que, sob a hipótese **H4**, o expoente de Lyapunov,  $\gamma_L$ , existe, ou seja, que  $E (\log^+ \|A_0\|) < +\infty$ .

Ora, como, por hipótese,  $E (\|A_0\|^2) < +\infty$ , então também  $E (\|A_0\|) < +\infty$ , o que implica  $E (\log \|A_0\|) < +\infty$ , já que, da desigualdade de Jensen, temos  $E (\log \|A_0\|) \leq \log E (\|A_0\|)$ . Portanto, a integrabilidade de  $\log^+ \|A_0\|$  é uma consequência da integrabilidade de  $\|A_0\|$ .

Vejamos, agora, que a hipótese **H4** implica que  $\gamma_L < 0$ , ou seja, pelo teorema 2.8, que

$$\gamma_L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E (\log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|) < 0.$$

Como  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  é uma família de matrizes *i.i.d.* e pela desigualdade de Jensen, então, para  $n$  suficientemente grande e arbitrariamente fixo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} E (\log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|) &= \\ &= \frac{1}{n} E (\log \|A_0 A_1 \dots A_n\|) \\ &\leq \frac{1}{n} \log [E (\|A_0 A_1 \dots A_n\|)] \\ &\leq \frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{n} \log [E (\|A_0 \dots A_{r-1}\|)] + \frac{1}{n} \log \left( [E (\|A_0\|)]^{n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor r + 1} \right), \end{aligned}$$

tendo considerado a associação feita na observação anterior no produto  $A_0 A_1 \dots A_n$ .

Ora, por hipótese  $E (\|A_0\|^2) < +\infty$ , logo também  $\|A_0\|$  é integrável e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( [E (\|A_0\|)]^{n - \lfloor \frac{n}{r} \rfloor r + 1} \right) = 0.$$

Além disso, como  $\forall n \in \mathbf{N}, \lfloor \frac{n}{r} \rfloor \leq \frac{n}{r}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \frac{n}{r} \rfloor}{n} \log [E (\|A_0 \dots A_{r-1}\|)] = \frac{1}{r} \log [E (\|A_0 \dots A_{r-1}\|)].$$



Assim,

$$\gamma_L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} E(\log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-n}\|) \leq \frac{1}{r} \log [E(\|A_0 \dots A_{r-1}\|)] < 0,$$

pois, por hipótese,  $\exists r \in \mathbb{N} : E(\|A_0 \dots A_{r-1}\|^2) < 1$ .

Vamos agora analisar a estacionaridade fraca da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH.

**Teorema 2.24** *Se a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  verifica a hipótese **H4**, então o processo vetorial  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z})$  tal que*

$$\mathcal{Y}_t = B + \lim_{k \rightarrow +\infty} (q.c.) \sum_{n=1}^k A_{t-1} \dots A_{t-n} B,$$

com  $B = [\alpha_0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T$  e  $\alpha_0 > 0$ , está q.c. definido. Além disso,  $\mathcal{Y}$  é, simultaneamente, forte e fracamente estacionário, sendo a única solução fracamente estacionária da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ).

**Demonstração:** Como acabámos de ver no ponto 4 da observação 2.23, a hipótese **H4** implica a hipótese **H2**. Então, pelo teorema 2.10, o processo vetorial  $\mathcal{Y}$  está q.c. definido e é fortemente estacionário, sendo solução da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ).

Assim, para provar que  $\mathcal{Y}$  é fracamente estacionário, basta-nos mostrar que  $E(\|\mathcal{Y}_t\|^2) < +\infty, \forall t \in \mathbb{Z}$ .

Ora,

$$E(\|\mathcal{Y}_t\|^2) \leq \|B\|^2 \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|) + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\| \|A_{t-1} \dots A_{t-j}\|) \right],$$

com todas as esperanças do segundo membro desta expressão, por hipótese, finitas. Vamos, então, provar que as séries envolvidas são convergentes.

Comecemos por mostrar que  $\sum_{k=1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|)$  é convergente ou, equivalentemente, que  $\sum_{k=r}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|)$  é convergente. Sendo  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  uma família de

matrizes i.i.d., temos, para qualquer  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|) &= \sum_{k=r}^{+\infty} E(\|A_1 \dots A_k\|) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{+\infty} E(\|A_1 \dots A_{kr+i}\|) \\
&\leq \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{+\infty} [E(\|A_1 \dots A_r\|)]^k [E(\|A_0\|)]^i \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} [E(\|A_0\|)]^i \times \sum_{k=1}^{+\infty} [E(\|A_1 \dots A_r\|)]^k \\
&\leq \sum_{i=0}^{r-1} [E(\|A_0\|)]^i \times \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \left[ E(\|A_1 \dots A_r\|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^k.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese,  $a = E(\|A_1 \dots A_r\|^2) < 1$ , então  $\sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \left[ E(\|A_1 \dots A_r\|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^k$  é uma série geométrica convergente de razão  $\sqrt{a}$  e vem

$$\sum_{k=r}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|) \leq a_1 \frac{\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}},$$

onde  $a_1 = \begin{cases} r & \text{se } E(\|A_0\|) = 1 \\ \frac{1 - [E(\|A_0\|)]^r}{1 - E(\|A_0\|)} & \text{se } E(\|A_0\|) \neq 1 \end{cases}$ , o que prova o pretendido, pois estamos a acrescentar um número finito de parcelas. Sendo importante para o que se segue, observamos que, de modo análogo, se mostra que  $\sum_{k=r}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|^2)$  é convergente.

Passemos agora para a série  $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\| \|A_{t-1} \dots A_{t-j}\|)$ .

Em primeiro lugar, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=r+1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\| \|A_{t-1} \dots A_{t-j}\|) &\leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=r+1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|^2 \|A_{t-k-1} \dots A_{t-j}\|) \\
&= \sum_{k=1}^{r-1} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|^2) \sum_{j=r+1}^{+\infty} E(\|A_{t-(k+1)} \dots A_{t-j}\|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{r-1} \left[ E(\|A_0\|^2) \right]^k \sum_{j=r+1}^{+\infty} E(\|A_{t-(k+1)} \dots A_{t-j}\|),
\end{aligned}$$

logo, como já vimos que, para  $1 \leq k \leq r-1$ ,  $\sum_{j=r+1}^{+\infty} E(\|A_{t-(k+1)} \dots A_{t-j}\|)$  é convergente, podemos concluir que  $\sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=r+1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\| \|A_{t-1} \dots A_{t-j}\|)$  é convergente. Portanto, também é convergente  $\sum_{k=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\| \|A_{t-1} \dots A_{t-j}\|)$ , pois apenas estamos a acrescentar  $r(r-1)$  parcelas.

Em segundo lugar, observamos que, analogamente à série anterior, também  $\sum_{k=r}^{+\infty} \sum_{j=1}^k E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\| \|A_{t-1} \dots A_{t-j}\|)$  é convergente.

Finalmente, a série  $\sum_{k=r}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\| \|A_{t-1} \dots A_{t-j}\|)$  é convergente, pois

$$\begin{aligned} & \sum_{k=r}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} E(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\| \|A_{t-1} \dots A_{t-j}\|) \leq \\ & \leq \sum_{k=r}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} E\left(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|^2 \|A_{t-(k+1)} \dots A_{t-j}\|\right) \\ & \leq \sum_{k=r}^{+\infty} E\left(\|A_{t-1} \dots A_{t-k}\|^2\right) \sum_{j=k+1}^{+\infty} E\left(\|A_{t-(k+1)} \dots A_{t-j}\|\right), \end{aligned}$$

sendo ambas as séries desta expressão convergentes.

O que conclui a prova de que  $E\left(\|\mathcal{Y}_t\|^2\right) < +\infty, \forall t \in \mathbb{Z}$ .

Resta mostrar a unicidade da solução fracamente estacionária da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ). Suponhamos que  $W = (W_t, t \in \mathbb{Z})$  é outra solução fracamente estacionária deste modelo. Assim, ambas são solução da equação  $Y_{t+1} = Y_t A_t + B$  e, por recorrência, obtemos, para todo  $i \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \|W_t - \mathcal{Y}_t\|^2 & \leq \|A_{t-1} \dots A_{t-i-1}\|^2 (\|W_{t-i-1}\| + \|\mathcal{Y}_{t-i-1}\|)^2 \\ & \leq 2 \|A_{t-1} \dots A_{t-i-1}\|^2 (\|W_{t-i-1}\|^2 + \|\mathcal{Y}_{t-i-1}\|^2). \end{aligned}$$

Como  $A_{t-1} \dots A_{t-i-1}$  é independente de  $W_{t-i-1}$  e de  $\mathcal{Y}_{t-i-1}$ , então

$$E\left(\|W_t - \mathcal{Y}_t\|^2\right) \leq 2E\left(\|A_{t-1} \dots A_{t-i-1}\|^2\right) E\left(\|W_{t-i-1}\|^2 + \|\mathcal{Y}_{t-i-1}\|^2\right).$$

Sob a hipótese **H4**, temos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\|A_0 \dots A_n\|^2\right) = 0$  (observação 2.23.3) e, portanto,  $E\left(\|W_t - \mathcal{Y}_t\|^2\right) \leq c$ , para todo  $c > 0$ , o que implica  $W_t = \mathcal{Y}_t$  em  $L_m^2$ . ■

Voltemo-nos, agora, para a condição necessária de estacionaridade fraca da representação vetorial.

**Teorema 2.25** *Seja  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  uma família de variáveis aleatórias i.i.d. tal que  $E(|Z_t|^{2\delta}) < +\infty$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ . Se existe uma solução de segunda ordem da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), então a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  verifica a hipótese **H4**.*

**Demonstração:** Sejam  $C_n = A_{-1} \dots A_{-n}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , e  $(e_1, \dots, e_m)$  a base canónica de  $\mathbb{R}^m$ . Seja  $\|\cdot\|_v$  uma (qualquer) norma em  $\mathbb{R}^m$ .

Esta prova vai ser feita em quatro partes, mostrando, sucessivamente, que:

- (i)  $E\left(\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} C_n B\right\|^2\right) < +\infty$ ;
- (ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} E\left(\|C_n B\|^2\right) < +\infty$ ;
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\|C_n e_i\|^2\right) = 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ ;
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\|C_n\|^2\right) = 0$ .

Tal é suficiente, pois, como vimos na observação 2.23,  $E(|Z_t|^{2\delta}) < +\infty$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(\|C_n\|^2\right) = 0$  é equivalente a **H4**.

Suponhamos, então, que existe um processo vetorial  $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$  que é solução da representação vetorial do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ).

- (i) Então  $Y$  verifica  $Y_{t+1} = A_t Y_t + B$  e podemos escrever, para todo  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$Y_0 = A_{-1} \dots A_{-r} Y_{-r} + \sum_{n=1}^r A_{-1} \dots A_{-n} B + B.$$

Atendendo a que  $A_{-1} \dots A_{-r} Y_{-r}$  é um vetor de componentes positivas, então, para todo  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n=1}^r C_n B \leq Y_0$  e temos

$$E\left(\left\|\sum_{n=1}^r C_n B\right\|^2\right) \leq E\left(\|Y_0\|^2\right) < +\infty.$$

Assim, novamente notando que as componentes dos vetores envolvidos são positivas, podemos usar o teorema de Beppo-Levi para obter

$$E\left(\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} C_n B\right\|^2\right) \leq E\left(\|Y_0\|^2\right) < +\infty.$$

- (ii) Denotemos por  $c_{ij}^{(n)}$  um elemento genérico da matriz  $C_n$ . Então, considerando a norma euclidiana de  $\mathbb{R}^m$ ,

$$\|C_n B\|^2 = \alpha_0^2 \sum_{i=1}^m \left(c_{i1}^{(n)}\right)^2$$

e, portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E \left( \|C_n B\|^2 \right) = E \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_0^2 \left( c_{i1}^{(n)} \right)^2 \right] \leq E \left( \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} C_n B \right\|^2 \right) < +\infty.$$

(iii) Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} E \left( \|C_n B\|^2 \right)$  é finito, então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \|C_n B\|^2 \right) = 0$ . Assim sendo, notando que  $E \left( \|C_n B\|^2 \right) = \alpha_0^2 E \left( \|C_n e_1\|^2 \right)$ , também  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \|C_n e_1\|^2 \right) = 0$ . Adicionalmente, como, para  $i = 2, \dots, m-1$ ,  $\|C_n e_i\| = \|C_{n-1} e_{i-1}\| = \|C_{n-2} e_{i-2}\| = \dots = \|C_{n-(i-1)} e_1\|$  e  $\|C_n e_m\| = 0$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \|C_n e_i\|^2 \right) = 0, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

(iv) Vamos admitir que a norma matricial que estamos a considerar é uma norma induzida, então  $\|C_n\|^2 = \max_{\|x\|=1} \|C_n x\|^2$ . Assim, para todo  $\omega \in \Omega$ , podemos escrever  $\max_{\|x\|=1} \|C_n x\|^2 = \|C_n V_0(\omega)\|^2$ , para algum  $V_0(\omega)$  tal que  $\|V_0(\omega)\| = 1$ . Portanto, escolhendo uma versão mensurável de  $V_0$ , temos  $\|C_n\|^2 = \max_{\|x\|=1} \|C_n x\|^2 = \|C_n V_0\|^2$ .

Consideremos, então, um qualquer vetor aleatório  $V$  tal que  $\|V\| = 1$ . Podemos escrever  $V = \sum_{i=1}^m V_i e_i$ , com  $V_i$  variáveis aleatórias reais tais que  $V_i^2 \leq 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} E \left( \|C_n V\|^2 \right) &\leq E \left[ \left( \sum_{i=1}^m |V_i| \|C_n e_i\| \right)^2 \right] \\ &= E \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |V_i| |V_j| \|C_n e_i\| \|C_n e_j\| \right) \\ &\leq E \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|C_n e_i\| \|C_n e_j\| \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[ E \left( \|C_n e_i\|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ E \left( \|C_n e_j\|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

tal implica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \|C_n V\|^2 \right) = 0$ , o que tem como consequência o facto de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E \left( \|C_n\|^2 \right) = 0$ . ■

Juntemos, agora, os dois resultados anteriores de modo a obter uma condição necessária e suficiente que garanta a existência de uma solução com momentos de ordem  $2\delta$  do modelo  $\delta$ -TGARCH. Caso  $\delta$  seja maior ou igual a 1, esta condição será necessária e suficiente para garantir a existência de uma solução fracamente estacionária com momentos de ordem  $2\delta$ .

**Corolário 2.26** *Seja  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  uma família de variáveis aleatórias i.i.d. com momentos de ordem  $2\delta$  finitos. Existe uma solução do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) com momentos de ordem  $2\delta$  finitos se e só se a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  verifica a hipótese **H4**.*

*Além disso, esta solução é única e é a solução fortemente estacionária do corolário 2.12. Se  $\delta \geq 1$ , a solução é fracamente estacionária.*

**Demonstração:** Consideremos, então, que  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  é uma família de variáveis aleatórias i.i.d. tal que  $E(|Z_t|^{2\delta}) < +\infty$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ .

Começemos por admitir que a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  verifica a hipótese **H4**. Atendendo a que o processo vetorial  $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_t, t \in \mathbb{Z})$  obtido no teorema 2.24 é a representação vetorial do processo  $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_t, t \in \mathbb{Z})$ , dado, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , por  $\mathcal{X}_t = Z_t \left[ \mathcal{Y}_t^{(1)} \right]^{\frac{1}{\delta}}$ , onde  $\mathcal{Y}_t^{(1)}$  é a primeira componente do processo vetorial  $\mathcal{Y}$ , é imediato, pelo teorema 2.24, que  $\mathcal{X}$  é a única solução do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ), que é fortemente estacionário e que tem momentos de ordem  $2\delta$  finitos, pois, como  $E(|Z_t|^{2\delta}) < +\infty$  e  $E\left(\left[\mathcal{Y}_t^{(1)}\right]^2\right) < +\infty$ ,

$$E(|X_t|^{2\delta}) = E\left[\left(|Z_t|^\delta \mathcal{Y}_t^{(1)}\right)^2\right] = E(|Z_t|^{2\delta}) E\left(\left[\mathcal{Y}_t^{(1)}\right]^2\right) < +\infty,$$

já que  $Z_t$  é independente de  $\underline{\mathcal{Y}}_t^{(1)}$  e as variáveis  $Z_t$  são i.i.d..

Suponhamos, agora, que existe uma solução do modelo  $\delta$ -TGARCH( $m$ ) com momentos de ordem  $2\delta$  finitos, digamos  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$ , com  $X_t = Z_t \sigma_t$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ . Então o processo  $\sigma^\delta = (\sigma_t^\delta, t \in \mathbb{Z})$  é de segunda ordem. Além disso, como  $Z^\delta = (Z_t^\delta, t \in \mathbb{Z})$  é um processo de segunda ordem, a representação vetorial de  $X$  é também um processo de segunda ordem. Assim, pelo teorema 2.25, a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  verifica a hipótese **H4**. ■

Este corolário fornece, então, uma conclusão especialmente relevante para o modelo  $\delta$ -TGARCH quando  $\delta = 1$ . Nomeadamente, o modelo TGARCH( $m$ ) tem uma solução fracamente estacionária se e só se a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  verifica a hipótese **H4**. Em particular, o modelo TGARCH(1) tem uma solução fracamente estacionária se e só se

$$E\left[\left(\alpha_1 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_1\right)^2\right] < 1.$$

## Capítulo 3

# Propriedade de Taylor

A propriedade de Taylor é a relação teórica que traduz o facto estilizado conhecido como efeito de Taylor, detetado em múltiplas séries temporais, em particular de natureza financeira (Taylor, 1986, 2007; Ding, Granger e Engle, 1993; Granger, Spear e Ding, 2000) e física (Gonçalves et al., 2012). Dizemos, então, que a propriedade de Taylor está presente numa série temporal  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  quando, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , a autocorrelação de ordem  $n$  da série em valor absoluto,  $\rho_n(1) = \text{corr}(|X_t|, |X_{t-n}|)$ , é maior do que a autocorrelação de ordem  $n$  do quadrado da série,  $\rho_n(2) = \text{corr}(X_t^2, X_{t-n}^2)$  (He e Teräsvirta, 1999a).

Neste capítulo avaliamos a possibilidade de um processo  $X$  seguindo o modelo TGARCH(1, 1) (que é o modelo  $\delta$ -TGARCH(1, 1) com  $\delta = 1$ ) verificar a propriedade de Taylor. Para tal, na secção 3.1, apresentamos as condições de existência e as expressões de  $\rho_n(1)$  e  $\rho_n(2)$ . Na secção 3.2, demonstramos a existência de um conjunto de parametrizações do modelo que verifica a propriedade de Taylor, fazendo as primeiras considerações sobre a extensão desta região. Na secção 3.3, considerando o modelo TARCH(1) e adotando algumas distribuições para o processo gerador, exibimos a região de verificação da condição  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$ . Finalmente, na secção 3.4, estendemos o estudo de simulação de He e Teräsvirta (1999a), considerando uma distribuição não Gaussiana para o processo gerador e fazendo uma análise comparativa empírica sobre os modelos TARCH(1) e ARCH(1) no que diz respeito à verificação da relação  $\hat{\rho}_1(1) > \hat{\rho}_1(2)$ .

### 3.1 As autocorrelações $\rho_n(1)$ e $\rho_n(2)$ de um processo TGARCH(1, 1)

A determinação das condições de existência e das expressões de  $\rho_n(1)$  e  $\rho_n(2)$ , para qualquer  $n$  em  $\mathbb{N}$ , foi feita por He e Teräsvirta (1999a) para uma família de modelos condicionalmente heteroscedásticos de ordens  $p = q = 1$ , podendo ser revista para o modelo TGARCH(1, 1) no apêndice B <sup>(1)</sup>. As expressões obtidas, embora seja facilmente verificável que coincidem com as de He e Teräsvirta (1999a), surgem com uma formulação que, como veremos, foi crucial na obtenção dos resultados da secção 3.2.

Neste estudo, focamos a nossa atenção no modelo TGARCH(1, 1) cujas variáveis i.i.d. do processo gerador satisfazem a seguinte hipótese:

**H5:**  $Z_0$  tem distribuição simétrica, centrada e reduzida tal que  $\phi_4 < +\infty$ ,

onde  $\phi_k = E(|Z_0|^k)$ .

Sob a hipótese **H5**, temos  $E[(\alpha_1 Z_0^+ + \beta_1 Z_0^- + \gamma_1)^4] < +\infty$ , o que permite adotar, para  $i = 1, 2, 3, 4$ , a seguinte notação

$$\vartheta_i = E[(\alpha_1 Z_0^+ + \beta_1 Z_0^- + \gamma_1)^i].$$

Particularizando a expressão para cada valor de  $i = 1, 2, 3, 4$ , temos

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \phi_1 + \gamma_1 \\ \vartheta_2 &= \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} + \gamma_1^2 + \gamma_1(\alpha_1 + \beta_1) \phi_1 \\ \vartheta_3 &= \frac{\alpha_1^3 + \beta_1^3}{2} \phi_3 + \gamma_1^3 + \frac{3\gamma_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{2} + \frac{3\gamma_1^2(\alpha_1 + \beta_1)}{2} \phi_1 \\ \vartheta_4 &= \frac{\alpha_1^4 + \beta_1^4}{2} \phi_4 + \gamma_1^4 + 2\gamma_1(\alpha_1^3 + \beta_1^3) \phi_3 + 3\gamma_1^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2) + 2\gamma_1^3(\alpha_1 + \beta_1) \phi_1.\end{aligned}$$

Se  $\vartheta_2 < 1$ , para além de podermos já garantir que o processo  $X$ , que segue o modelo TGARCH(1, 1), é forte e fracamente estacionário, fica ainda assegurada a

---

<sup>1</sup>No apêndice B, para um processo  $X$  que segue o modelo  $\delta$ -TGARCH(1, 1), são deduzidas as expressões de  $\rho_{n,\delta}(j) = \text{corr}(|X_t|^{\delta j}, |X_{t-n}|^{\delta j})$ , para  $j = 1, 2$  e onde  $\delta$  é o parâmetro potência do modelo em estudo. Para a propriedade de Taylor, porém, apenas interessam as autocorrelações do processo em valor absoluto e do quadrado do processo. Assim, só quando  $\delta = 1$  é que temos estas expressões, que são particularizadas para o modelo em estudo neste capítulo na última observação do referido apêndice. No que diz respeito à notação, quando  $\delta = 1$ , escrevemos  $\rho_{n,1}(j) = \rho_n(j)$ , para  $j = 1, 2$ , sendo esta última a única notação usada no presente capítulo.



existência de  $\rho_n(1)$ , para qualquer  $n$ , tendo-se

$$\rho_1(1) = \vartheta_1 + \frac{\gamma_1(1 - \vartheta_1^2)(\phi_1^2 - 1)}{(1 - \vartheta_1^2) - \phi_1^2(1 - \vartheta_2)} \quad (3.1)$$

e, para  $n > 1$ ,

$$\rho_n(1) = \vartheta_1^{n-1} \rho_1(1). \quad (3.2)$$

A condição de existência das autocorrelações do quadrado do processo  $X$  é  $\vartheta_4 < 1$ , que, desde já observamos, implica  $\vartheta_2 < 1$ . Sob esta condição, temos

$$\rho_1(2) = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} + (\alpha_1 + \beta_1) \gamma_1 \frac{\phi_3}{\phi_4} + \frac{\gamma_1^2}{\phi_4} + (1 - \vartheta_4) \frac{\Upsilon}{\Delta} \quad (3.3)$$

e, para  $n > 1$ ,

$$\rho_n(2) = \vartheta_2^{n-1} \rho_1(2) + (1 - \vartheta_4) \frac{\Phi^*}{\Delta} \sum_{i=1}^{n-1} \vartheta_2^{n-i-1} \vartheta_1^i, \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \Upsilon &= [(\alpha_1 + \beta_1) \phi_3 + 2\gamma_1] (1 + 2\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2) (1 - \vartheta_1) (1 - \vartheta_2) + \\ &\quad + \left( \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} + (\alpha_1 + \beta_1) \gamma_1 \frac{\phi_3}{\phi_4} + \frac{\gamma_1^2}{\phi_4} - 1 \right) (1 + \vartheta_1)^2 (1 - \vartheta_3) + (1 - \vartheta_1^2) (1 - \vartheta_2) (1 - \vartheta_3) \\ \Phi^* &= -2\vartheta_1 (1 + \vartheta_1) (1 - \vartheta_3) + [(\alpha_1 + \beta_1) \phi_3 + 2\gamma_1] (1 + 2\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2) (1 - \vartheta_1) \\ \Delta &= \phi_4 \Psi (1 - \vartheta_1) (1 - \vartheta_2) - (1 + \vartheta_1)^2 (1 - \vartheta_3) (1 - \vartheta_4) \\ \Psi &= 1 + 3\vartheta_1 + 5\vartheta_2 + 3\vartheta_3 + 3\vartheta_1\vartheta_2 + 5\vartheta_1\vartheta_3 + 3\vartheta_2\vartheta_3 + \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3. \end{aligned}$$

Notamos que o parâmetro  $\alpha_0$  do modelo não tem qualquer interferência nem nas condições de existência nem nas expressões das autocorrelações, podendo, portanto, assumir qualquer valor positivo.

## 3.2 Resultado principal

**Teorema 3.1** *Seja  $\alpha_0 > 0$  fixo. O modelo  $TGARCh(1, 1)$ , verificando a hipótese **H5** e ainda as condições  $\phi_1 \neq 1$ ,  $\phi_4 \neq 1$  e  $\phi_4^{-\frac{1}{4}} < \phi_1$ , admite um conjunto de parametrizações, contido em  $\mathcal{C} = \left\{ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \in (\mathbf{R}_0^+)^3 : \vartheta_4 < 1 \right\}$ , para as quais a propriedade de Taylor é verificada.*

**Demonstração:** Começamos por observar que, sob a hipótese **H5**, para cada  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\rho_n(1)$  e  $\rho_n(2)$  são funções de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  e estão definidas e são contínuas em todos os pontos de  $\mathcal{C}$ , atendendo às respectivas condições de existência.

Vamos, primeiramente, analisar o comportamento de  $\rho_1(1)$  e  $\rho_1(2)$  numa vizinhança de  $(\phi_4^{-1/4}, \phi_4^{-1/4}, 0)$  intersetada com  $\mathcal{C}$ . Atendendo às suas expressões, temos, quando  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  tende para  $(\phi_4^{-1/4}, \phi_4^{-1/4}, 0)$  por valores de  $\mathcal{C}$ , que

$$\rho_1(1) = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \phi_1 + \gamma_1 + \frac{\gamma_1(1 - \vartheta_1^2)(\phi_1^2 - 1)}{(1 - \vartheta_1^2) - \phi_1^2(1 - \vartheta_2)} \longrightarrow \phi_1 \phi_4^{-\frac{1}{4}},$$

uma vez que  $(1 - \vartheta_1^2) - \phi_1^2(1 - \vartheta_2)$  converge para  $1 - \phi_1^2 \neq 0$ , e, como  $1 - \vartheta_4 \rightarrow 0$ , então

$$\rho_1(2) = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} + (\alpha_1 + \beta_1) \gamma_1 \frac{\phi_3}{\phi_4} + \frac{\gamma_1^2}{\phi_4} + (1 - \vartheta_4) \frac{\Upsilon}{\Delta} \longrightarrow \phi_4^{-\frac{1}{2}},$$

já que o denominador  $\Delta = \phi_4 \Psi(1 - \vartheta_1)(1 - \vartheta_2) - (1 + \vartheta_1)^2(1 - \vartheta_3)(1 - \vartheta_4)$  converge para um número diferente de zero, pois  $(1 + \vartheta_1)^2(1 - \vartheta_3)(1 - \vartheta_4) \rightarrow 0$ ,  $\phi_4 \Psi > \phi_4$  e que  $(1 - \vartheta_1)(1 - \vartheta_2)$  converge para  $(1 - \phi_1 \phi_4^{-1/4})(1 - \phi_4^{-1/2}) \neq 0$ . Assim, como, por hipótese,  $\phi_1 > \phi_4^{-1/4}$ , então  $\phi_1 \phi_4^{-1/4} > \phi_4^{-1/2}$  e, portanto, podemos concluir que existe uma vizinhança de  $(\phi_4^{-1/4}, \phi_4^{-1/4}, 0)$  intersetada com  $\mathcal{C}$  tal que os seus elementos, que correspondem a parametrizações do modelo TGARCH(1, 1), verificam  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$ .

Analogamente, para cada  $n$  em  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ , quando  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  tende para  $(\phi_4^{-1/4}, \phi_4^{-1/4}, 0)$  por valores de  $\mathcal{C}$ ,

$$\rho_n(1) = \vartheta_1^{n-1} \rho_1(1) \longrightarrow \left( \phi_1 \phi_4^{-\frac{1}{4}} \right)^n$$

$$\rho_n(2) = \vartheta_2^{n-1} \rho_1(2) + (1 - \vartheta_4) \frac{\Phi^*}{\Delta} \sum_{i=1}^{n-1} \vartheta_2^{n-i-1} \vartheta_1^i \longrightarrow \left( \phi_4^{-\frac{1}{2}} \right)^n$$

e, assim, podemos garantir que existe uma vizinhança de  $(\phi_4^{-1/4}, \phi_4^{-1/4}, 0)$  interse-tada com  $\mathcal{C}$  cujos elementos verificam  $\rho_n(1) > \rho_n(2)$ . ■

No teorema anterior garantimos, então, a existência de parametrizações do modelo TGARCH(1, 1) que verificam a propriedade de Taylor. Notamos que a hipótese  $\phi_4^{-\frac{1}{4}} < \phi_1$ , imposta ao processo gerador, não é muito restritiva no contexto habitual de aplicação deste modelo (Haas, 2009). Na sua demonstração fica evidente que, pelo menos, para parametrizações do modelo TGARCH(1, 1) tais que  $\alpha_1 \simeq \beta_1 \lesssim \phi_4^{-1/4}$  e  $\gamma_1$  próximo de zero ou, eventualmente, igual a zero (ou seja, quando nos aproximamos do modelo AVARCH(1) com parametrizações perto da fronteira de existência das autocorrelações) a propriedade de Taylor está presente.

Interessa agora perceber se a região de parametrizações que apresentam a referida propriedade pode ser alargada. Vamos, então, procurar estender a região considerando parametrizações do modelo TGARCH(1, 1) junto da fronteira de existência das autocorrelações mas em que  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  não estão necessariamente próximos, mantendo, porém,  $\gamma_1$  próximo de ou igual a 0. Para tal, estabelecemos que  $\beta_1 = k\alpha_1$ , onde  $k$  é uma constante real positiva. Admitindo as mesmas hipóteses do teorema anterior e seguindo um raciocínio semelhante ao da sua demonstração, começamos por observar que, quando  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  tende para  $\left(\phi_4^{-1/4} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/4}, k\phi_4^{-1/4} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/4}, 0\right)$  por valores de  $\mathcal{C}$ , então  $\vartheta_4 \rightarrow 1$ . Além disso, temos ainda que, para cada  $n$  em  $\mathbb{N}$ ,

$$\rho_n(1) \longrightarrow \left[ \frac{1+k}{2} \cdot \frac{\phi_1}{\phi_4^{1/4}} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/4} \right]^n$$

e

$$\rho_n(2) \longrightarrow \left[ \frac{1+k^2}{2} \cdot \phi_4^{-1/2} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/2} \right]^n.$$

Pretendemos, então, encontrar os valores de  $k > 0$  tais que

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1+k}{2} \cdot \frac{\phi_1}{\phi_4^{1/4}} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/4} \right]^n > \left[ \frac{1+k^2}{2} \cdot \phi_4^{-1/2} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/2} \right]^n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{1+k}{1+k^2} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{-1/4} > \frac{1}{\phi_1 \phi_4^{1/4}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como  $\phi_4^{-1/4} < \phi_1$  (hipótese do teorema 3.1), o que é equivalente a  $(\phi_1 \phi_4^{1/4})^{-1} < 1$ , então os valores de  $k > 0$  que verificam

$$\frac{1+k}{1+k^2} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{-1/4} \geq 1 \quad (3.6)$$

---

<sup>2</sup>Observamos que, para  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \left(\phi_4^{-1/4} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/4}, k\phi_4^{-1/4} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/4}, 0\right)$ , atendendo às hipóteses consideradas, fica assegurado que os denominadores das expressões de  $\rho_n(1)$  e de  $\rho_n(2)$  não se anulam. De facto, começando com o denominador que surge em  $\rho_n(1)$ , como  $\gamma_1 = 0$ , temos  $(1 - \vartheta_1^2) - \phi_1^2(1 - \vartheta_2) = 1 - \phi_1^2 + \frac{(\alpha_1 - \beta_1)^2}{4} \phi_1^2 \neq 0$ , pois  $\phi_1 < 1$ . Passando para a nulidade do denominador em  $\rho_n(2)$ , vimos, na demonstração do teorema 3.1, que basta assegurar que  $(1 - \vartheta_1)(1 - \vartheta_2) \neq 0$ . Por um lado temos, da desigualdade de Lyapunov, que  $\vartheta_1 \leq \sqrt{\vartheta_2}$ ; por outro lado, como  $\gamma_1 = 0$ , temos  $\vartheta_2 = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} = \frac{1+k^2}{2} \cdot \phi_4^{-1/2} \left(\frac{2}{k^4+1}\right)^{1/2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1+k^2}{\sqrt{k^4+1}} \leq 1$ , pois  $\phi_4 > 1$  e, para  $k > 0$ ,  $\frac{1+k^2}{\sqrt{k^4+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$ . Logo  $\vartheta_1 < 1$  e  $\vartheta_2 < 1$ .

também verificam (3.5). Começando por determinar as soluções positivas de

$$\begin{aligned}
 & \frac{1+k}{1+k^2} \left( \frac{2}{k^4+1} \right)^{-1/4} = 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & (1+k)^4 (k^4+1) - 2(1+k^2)^4 = 0 \\
 \Leftrightarrow & -k^8 + 4k^7 - 2k^6 + 4k^5 - 10k^4 + 4k^3 - 2k^2 + 4k - 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (k-1)^2 (-k^6 + 2k^5 + 3k^4 + 8k^3 + 3k^2 + 2k - 1) = 0, \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

verificamos que 1 é raiz desta equação e, de acordo com a regra de sinais de Decartes <sup>(3)</sup>, o número máximo de raízes positivas do polinómio de grau 6 da equação (3.7) é dois. Recorrendo, agora, ao teorema de Sturm <sup>(4)</sup>, cujos cálculos auxiliares são apresentados parcialmente na tabela 3.1, temos que uma das raízes positivas do polinómio de grau 6 pertence a [0.2813, 0.2814] e a outra pertence a [3.5546, 3.5547]. Assim, e fazendo uma análise simples do sinal do polinómio de grau 6, podemos concluir que os valores de  $k$  em [0.2814, 3.5546] são solução da inequação (3.6).

Tabela 3.1: Cadeia de Sturm,  $(S_i(k), i = 0, \dots, 6)$  para a resolução da equação (3.7), sendo  $N(k)$  o número de mudanças de sinal da cadeia de Sturm calculado em  $k$ .

$k$	$S_0(k)$	$S_1(k)$	$S_2(k)$	$S_3(k)$	$S_4(k)$	$S_5(k)$	$S_6(k)$	$N(k)$
0.2813	$-1.26 \times 10^{-4}$	5.91	-0.051	-5.04	0.42	18.72	-127.26	4
0.2814	$4.65 \times 10^{-4}$	5.91	-0.052	-5.04	0.42	18.72	-127.26	3
3.5546	0.052	-942.90	-506.27	3114.5	8.52	14.44	-127.26	3
3.5547	-0.043	-943.13	-506.32	3114.75	8.52	14.44	-127.26	2

Os cálculos efetuados permitem, então, mostrar que a propriedade de Taylor está também presente no modelo TGARCH(1,1) com parâmetros  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  claramente distintos e  $\gamma_1$  próximo de ou, eventualmente, igual a 0, como mostra a figura 3.1.

<sup>3</sup>A regra de sinais de Decartes diz que o número máximo de raízes positivas de uma equação polinomial é igual ao número de variações do sinal da sucessão dos coeficientes, considerando o polinómio ordenado.

<sup>4</sup>O teorema de Sturm é um método numérico de localização de raízes, que, dependendo da precisão considerada, pode também ser usado para determinar um valor aproximado de uma raiz. Este teorema diz que o número exato de raízes reais distintas de uma equação polinomial com coeficientes reais num certo intervalo, cujos limites não são raízes, é igual à diferença entre o número de mudanças de sinal da cadeia de Sturm calculado em ambos os limites do intervalo (Durand, 1960, pp. 159-161). Seja  $P(x) = 0$  a equação polinomial de grau  $n$  que se pretende resolver. Então a cadeia de Sturm é composta por  $n+1$  polinómios, digamos  $S_0(x), S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x)$ , obtidos da seguinte forma:  $S_0(x) = P(x)$ ,  $S_1(x) = P'(x)$  e, para  $i \geq 2$ ,  $S_i(x)$  é o simétrico do resto da divisão de  $S_{i-2}(x)$  por  $S_{i-1}(x)$ .

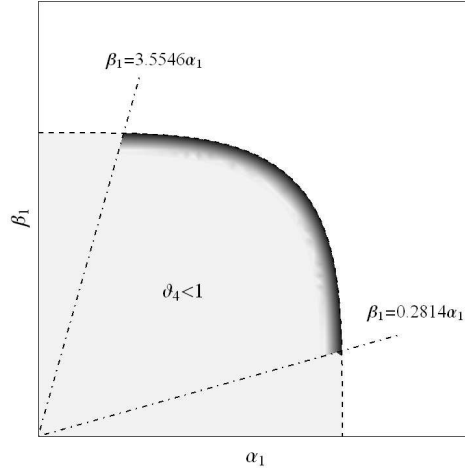


Figura 3.1: Representação, a cinzento claro, da região de existência das autocorrelações ( $\vartheta_4 < 1$ ), sendo assinalado, com um cinzento mais escuro, a faixa onde está garantida a presença da propriedade de Taylor no modelo TGARCH(1, 1).

É interessante notar que, tanto na demonstração do teorema 3.1 como no alargamento da região que acabámos de concluir, a relação  $\phi_4^{-1/4} < \phi_1$  desempenha um papel fundamental. Tal permite antever alguma influência do coeficiente de curtose da distribuição marginal do processo gerador, que é igual a  $\phi_4$  (já que estamos a considerar  $\phi_2 = 1$ ), na dimensão da região de parametrizações onde está presente a propriedade de Taylor.

**Observação 3.2** *Se pretendermos determinar o valor exato dos limites da região assinalada na figura 3.1, como  $\gamma_1 = 0$ , devemos resolver o sistema*

$$\begin{cases} 1 - \vartheta_4 = 0 \\ \rho_n(1) - \rho_n(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (\alpha_1^4 + \beta_1^4) \phi_4 = 0 \\ (\alpha_1 + \beta_1) \phi_1 - (\alpha_1^2 + \beta_1^2) = 0 \end{cases} .$$

Da segunda equação obtemos

$$\beta_1 = \frac{\phi_1}{2} \pm \sqrt{\mathbf{a}},$$

com  $\mathbf{a} = -\alpha_1^2 + \phi_1 \alpha_1 + \left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2$  <sup>(5)</sup>, logo, substituindo na primeira equação, ficamos com

$$\left(\frac{\phi_1}{2} \pm \sqrt{\mathbf{a}}\right)^4 = \frac{2}{\phi_4} - \alpha_1^4.$$

<sup>5</sup>Observamos que, para os valores de  $\alpha_1$  considerados, ou seja,  $\alpha_1 \geq 0$  e tal que  $\vartheta_4 \leq 1$ , temos a garantia que  $-\alpha_1^2 + \phi_1 \alpha_1 + \left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2$  é sempre positivo. Com efeito, por um lado, como  $\vartheta_4 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \beta_1 \leq \sqrt[4]{\frac{2}{\phi_4} - \alpha_1^4}$ , então  $\frac{2}{\phi_4} - \alpha_1^4 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha_1 \leq \sqrt[4]{\frac{2}{\phi_4}}$  e, por outro lado, sabemos que  $-\alpha_1^2 + \phi_1 \alpha_1 + \left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2} \phi_1$ , juntando agora o facto de  $\phi_4^{-1/4} < \phi_1$  implicar  $\sqrt[4]{\frac{2}{\phi_4}} < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \phi_1$ , podemos concluir o pretendido.

Desenvolvendo a potência do primeiro membro e manipulando a equação obtida, chegamos a

$$\pm\sqrt{\mathbf{a}} = \frac{2}{\phi_1(\phi_1^2 + 4\mathbf{a})} \left( \frac{2}{\phi_4} - \alpha_1^4 - \frac{\phi_1^4}{16} - \frac{3\phi_1^2}{2}\mathbf{a} - \mathbf{a}^2 \right).$$

Elevando agora ambos os membros da equação ao quadrado (o que obrigará a uma verificação das soluções) e fazendo algumas simplificações, obtemos a equação polinomial  $\mathcal{F}(\alpha_1) = 0$ , onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha_1) = & -2\alpha_1^8 + 4\phi_1\alpha_1^7 - 2\phi_1^2\alpha_1^6 - \left( \phi_1^4 - \frac{4}{\phi_4} \right) \alpha_1^4 - \frac{4\phi_1}{\phi_4}\alpha_1^3 - \frac{2\phi_1^2}{\phi_4}\alpha_1^2 + \\ & + \frac{4\phi_1^3}{\phi_4}\alpha_1 + \frac{1}{\phi_4} \left( \phi_1^4 - \frac{2}{\phi_4} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sem definir a distribuição marginal do processo gerador, não é possível concluir a resolução; podemos, porém, acrescentar, com base no estudo desenvolvido, que, caso existam, as soluções do sistema serão pares  $(\alpha_1, \beta_1)$  tais que  $\beta_1 < 0.2814\alpha_1$  ou  $\beta_1 > 3.5546\alpha_1$ .

O trabalho apresentado nesta secção alarga as conclusões obtidas para os modelos em que  $\gamma_1 = 0$ , mais concretamente, as conclusões de He e Teräsvirta (1999a), que provam que  $\rho_n(1) > \rho_n(2)$  mas apenas para  $n = 1$ , em certas parametrizações do modelo AVARCH(1), com distribuição marginal Gaussiana padrão do processo gerador, e de Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2009), que mostraram haver parametrizações do modelo TARCH(1) (sem fixar a distribuição marginal do processo gerador) tais que  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$ . A extensão clara para o modelo TGARCH(1,1) com  $\gamma_1$  não tão próximo de zero é devida à continuidade das expressões de  $\rho_n(1)$  e de  $\rho_n(2)$  e surge quando se conjugam os resultados aqui demonstrados com o de Haas (2009, corolário 3) para o modelo AVGARCH(1,1) (que é o modelo TGARCH(1,1), com  $\alpha_1 = \beta_1$ ).

### 3.3 Regiões de verificação da condição $\rho_1(1) > \rho_1(2)$

Na secção anterior ficou estabelecida a existência de parametrizações do modelo TGARCH(1,1) que verificam a propriedade de Taylor. Devido à complexidade das expressões das autocorrelações, nesta secção consideramos apenas o modelo TARCH(1) e a relação  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$ , o que permitirá exhibir, para distribuições marginais particulares do processo gerador que verifiquem  $\phi_4^{-1/4} < \phi_1$ , os conjuntos de parametrizações para as quais a referida relação é verificada.

No modelo TARCH(1), como  $\gamma_1 = 0$ , todas as expressões da secção 3.1 sofrem uma simplificação considerável, ficando

$$\vartheta_i = \frac{\alpha_1^i + \beta_1^i}{2} \phi_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\rho_1(1) = \vartheta_1$$

$$\begin{aligned} \rho_1(2) &= \vartheta_2 + \frac{2\vartheta_1(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_4)}{\Delta} \times \\ &\times \left[ \frac{\phi_3}{\phi_1} (1+2\vartheta_1+2\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2)(1-\vartheta_1) - (1+\vartheta_1)(1-\vartheta_3) \right], \end{aligned}$$

com  $\Delta = \phi_4 \Psi (1 - \vartheta_1) (1 - \vartheta_2) - (1 + \vartheta_1)^2 (1 - \vartheta_3) (1 - \vartheta_4)$  e  $\Psi = 1 + 3\vartheta_1 + 5\vartheta_2 + 3\vartheta_3 + 3\vartheta_1\vartheta_2 + 5\vartheta_1\vartheta_3 + 3\vartheta_2\vartheta_3 + \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$ .

Por exemplo, considerando o caso particular do modelo TARCH(1) em que  $\alpha_1 = \beta_1$ , ou seja, o modelo AVARCH(1), o problema da determinação do conjunto de parametrizações que verificam  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$  apresenta-se na sua forma mais simples, visto que se resume à determinação de um intervalo ou, eventualmente, de uma reunião de intervalos de número reais. Neste caso e para qualquer distribuição marginal do processo gerador, sabemos, da demonstração do teorema 3.1, que a referida relação é satisfeita para valores próximos da fronteira de existência das autocorrelações, portanto, notando que  $\vartheta_4 < 1 \Leftrightarrow \alpha_1 < \phi_4^{-1/4}$ , então o limite superior do intervalo é  $\phi_4^{-1/4}$ . Para determinar o ou os restantes limites, há que resolver a equação  $\rho_1(1) - \rho_1(2) = 0$ , que é equivalente a

$$\begin{aligned} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \Delta - \left[ \frac{\phi_3}{\phi_1} (1 + 2\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2) (1 - \vartheta_1) - (1 + \vartheta_1) (1 - \vartheta_3) \right] \times \\ \times 2\vartheta_1 (1 - \vartheta_2) (1 - \vartheta_4) = 0 \end{aligned}$$

e que, depois de devidamente simplificada, se traduz na seguinte equação polinomial:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \{ &- 2\phi_1\phi_4(\phi_1 + \phi_3 - 2\phi_1^2\phi_3)\alpha_1^7 + [-\phi_1^2\phi_3 + \phi_4(2\phi_3 - 2\phi_1 + 4\phi_1^3 - 3\phi_1^2\phi_3)]\alpha_1^6 + \\ &+ [\phi_1\phi_3(\phi_1^2 - 2 - 5\phi_1^2\phi_4) + 2\phi_4(2 + \phi_1^2)]\alpha_1^5 + [\phi_3(3 - 2\phi_1^2 - \phi_4 + 2\phi_1^2\phi_4) - 2\phi_1\phi_4]\alpha_1^4 + \\ &+ [3\phi_1\phi_3 - \phi_1^2 + \phi_4(3\phi_1\phi_3 - 4 - \phi_1^2)]\alpha_1^3 + (4\phi_1^2\phi_3 - \phi_1^3 - 2\phi_3 + 2\phi_1\phi_4 - 3\phi_1^3\phi_4)\alpha_1^2 + \\ &+ (1 - 2\phi_1\phi_3 - \phi_4 + 2\phi_1^2\phi_4)\alpha_1 + (\phi_1 - 2\phi_3 + \phi_1\phi_4) \} = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

É imediato que 0 é solução desta equação. A determinação das restantes soluções, pertencentes ao intervalo  $]0, \phi_4^{-1/4}[$ , foi feita para alguns casos particulares, fixando a distribuição marginal do processo gerador e recorrendo ao já referido teorema de Sturm.

As distribuições consideradas foram as quatro seguintes, que designaremos daqui em diante pelo nome escrito a itálico: (i) distribuição *triangular* de densidade  $f(x) = \frac{\sqrt{6-|x|}}{6} \mathbb{1}_{] -\sqrt{6}, \sqrt{6}[}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que é tal que  $\phi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $\phi_2 = 1$ ,  $\phi_3 = \frac{3\sqrt{6}}{5}$  e  $\phi_4 = \frac{12}{5}$ , portanto, uma distribuição platicúrtica; (ii) distribuição *Gaussiana* padrão, de densidade  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que é tal que  $\phi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ,  $\phi_2 = 1$ ,  $\phi_3 = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$  e  $\phi_4 = 3$ , mesocúrtica; (iii) distribuição de *Laplace* de densidade  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\sqrt{2}|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que é tal que  $\phi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\phi_2 = 1$ ,  $\phi_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  e  $\phi_4 = 6$ , consequentemente, leptocúrtica; (iv) distribuição baseada na distribuição de *Student* com 6 graus de liberdade de densidade  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(3)} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-7/2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , que é tal que  $\phi_1 = \frac{3}{4}$ ,  $\phi_2 = 1$ ,  $\phi_3 = 2$  e  $\phi_4 = 6$ , portanto, também leptocúrtica e com o mesmo valor do coeficiente de curtose da distribuição de Laplace indicada. Acrescentamos, ainda, que o valor da diferença  $\phi_1 - \phi_4^{-1/4}$  é aproximadamente igual, na distribuição triangular, a 0.013, na Gaussiana padrão, a 0.038, na de Laplace, a 0.068 e, na de Student, a 0.111.

Para as quatro distribuições indicadas no parágrafo anterior, foi determinado o polinómio de grau 7 da equação (3.9) e aplicado o teorema de Sturm, estando os cálculos resumidos na tabela 3.2 <sup>(6)</sup>.

A análise da tabela 3.2 permite concluir que, no intervalo  $]0, \phi_4^{-1/4}[$ , a equação (3.9) tem uma única raiz quando a distribuição considerada é a triangular ou a Gaussiana, pertencendo, respetivamente, a  $]0.7725, 0.7726[$  e a  $]0.6227, 0.6228[$ , não tendo raízes para as outras duas distribuições. Assim, podemos afirmar que, no modelo AVARCH(1), onde  $\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 |X_{t-1}|$ , independentemente do valor de  $\alpha_0$  fixado, a relação  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$  é satisfeita: sempre que  $\alpha_1 \in ]0.7726, \phi_4^{-1/4}[$ , quando a distribuição marginal do processo gerador é a triangular; para  $\alpha_1 \in ]0.6228, \phi_4^{-1/4}[$ , considerando a distribuição Gaussiana; se  $\alpha_1 \in ]0, \phi_4^{-1/4}[$ , ou seja, se o momento de ordem 4 do processo AVARCH(1) existir, nas distribuições de Laplace e baseada na de Student. Atendendo agora à proposição 4 de Haas (2009), que garante que, no modelo AVARCH(1), a propriedade de Taylor é satisfeita sempre que  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$ ,

<sup>6</sup>O polinómio de grau 7 da equação (3.9) é, para a distribuição:

Triangular	$-\frac{1}{225} [288\alpha_1^7 - 30\sqrt{6}\alpha_1^6 - 360\alpha_1^5 + 27\sqrt{6}\alpha_1^4 - 84\alpha_1^3 - 40\sqrt{6}\alpha_1^2 + 135\alpha_1 + 15\sqrt{6}]$
Gaussiana	$-\frac{2}{\pi^2}\alpha_1 [(18\pi - 48)\alpha_1^6 + (8 - 3\pi)\sqrt{2\pi}\alpha_1^5 + (56 - 2\pi - 6\pi^2)\alpha_1^4 + (3\pi - 8)\sqrt{2\pi}\alpha_1^3 + (6\pi - 20)\pi\alpha_1^2 + (2 - \pi)\sqrt{2\pi}\alpha_1 + \pi^2 - 2\pi]$
Laplace	$-\frac{1}{4} [24\alpha_1^7 - 15\sqrt{2}\alpha_1^6 - 21\alpha_1^5 + 12\sqrt{2}\alpha_1^4 - 16\alpha_1^3 - 5\sqrt{2}\alpha_1^2 + 8\alpha_1 - 2\sqrt{2}]$
Student	$-\frac{1}{64} [288\alpha_1^7 - 240\alpha_1^6 - 210\alpha_1^5 + 240\alpha_1^4 - 228\alpha_1^3 - 95\alpha_1^2 + 80\alpha_1 - 80]$

O polinómio  $S_0(\alpha_1)$  considerado para a obtenção dos valores da tabela 3.2 é, para cada distribuição, o polinómio entre parênteses retos.



Tabela 3.2: Cadeia de Sturm,  $(S_i(\alpha_1), i = 0, \dots, 7)$  para a resolução da equação (3.9), sendo  $N(\alpha_1)$  o número de mudanças de sinal da cadeia de Sturm calculado em  $\alpha_1$ , considerando, sucessivamente, as quatro distribuições indicadas.

$\alpha_1$	$S_0(\alpha_1)$	$S_1(\alpha_1)$	$S_2(\alpha_1)$	$S_3(\alpha_1)$	$S_4(\alpha_1)$	$S_5(\alpha_1)$	$S_6(\alpha_1)$	$S_7(\alpha_1)$	$N(\alpha_1)$
<i>Triangular</i>									
0	36.74	135.00	-37.45	-107.51	39.85	34.91	-209.02	10.53	4
0.7725	0.02	-378.68	-39.83	-182.04	38.44	-430.86	1640.37	10.53	4
0.7726	-0.02	-378.77	-39.81	-181.70	38.42	-430.93	1640.60	10.53	3
0.81	-14.76	-407.67	-30.29	-40.53	29.92	-457.13	1730.14	10.53	3
<i>Gaussiana</i>									
0	3.59	-2.86	-3.55	0.14	3.55	-12.05	831.17	—	4
0.6227	$9.61 \times 10^{-4}$	-10.27	-0.95	0.57	0.94	-11.43	831.17	—	4
0.6228	$-6.61 \times 10^{-5}$	-10.27	-0.95	0.58	0.94	-11.43	831.17	—	3
0.76	-1.54	-11.80	0.18	14.00	-0.20	-11.30	831.17	—	3
<i>Laplace</i>									
0	-1.62	3.60	1.66	-0.55	-1.65	9.40	-964.17	-0.02	4
0.64	-4.61	-22.65	2.95	54.32	-3.16	-4.30	433.40	-0.02	4
<i>Student</i>									
0	-80.00	80.00	78.64	467.45	-97.91	212.88	41.73	-217.05	4
0.64	-113.59	-262.35	94.07	2353.66	-151.05	280.54	-39.61	-217.05	4

podemos concluir que os intervalos encontrados são intervalos de parametrizações onde é verificada a propriedade de Taylor (<sup>7</sup>).

Voltando ao modelo TAR(1), onde  $\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^+ + \beta_1 X_{t-1}^-$ , com  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  não necessariamente iguais, na figura 3.2 temos representada, para as quatro distribuições adotadas nesta secção, a região de parametrizações que satisfaz  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$ . Esta região está contida em  $\left\{ (\alpha_1, \beta_1) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : \vartheta_4 < 1 \right\}$  e, assim, o limite superior da região é obtido do gráfico de  $\vartheta_4 = 1 \Leftrightarrow \beta_1 = \sqrt[4]{\frac{2}{\phi_4} - \alpha_1^4}$ , desenhado entre os pontos  $(\alpha_1, \beta_1)$  soluções do sistema da observação 3.2.

A figura 3.2 reflete, naturalmente, as conclusões tiradas na secção anterior e ilustradas na figura 3.1, bem como as conclusões tiradas, já nesta secção, para o modelo AVARCH(1), que, recordamos, para as distribuições de Laplace e baseada na de Student, indicavam que este modelo verificava sempre a relação  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$ , bastando apenas garantir a existência do momento de ordem 4 do modelo. Quando

<sup>7</sup>Haas (2009) observa que é necessário que  $\phi_1 - 2\phi_3 + \phi_1\phi_4 > 0$  ou que  $\phi_1 - 2\phi_3 + \phi_1\phi_4 = 0$  e  $1 - 4\phi_1\phi_3 + \phi_1^2 + 3\phi_1^2\phi_4 + \phi_4 > 0$ , para que a propriedade de Taylor esteja presente em qualquer parametrização que garanta a existência do momento de ordem 4 do processo AVARCH(1). Podemos chegar à mesma conclusão fazendo  $\alpha_1 = 0$  no polinómio de grau 7 da equação (3.9) e notando que  $\phi_1 - 2\phi_3 + \phi_1\phi_4 = 0$  e  $1 - 4\phi_1\phi_3 + \phi_1^2 + 3\phi_1^2\phi_4 + \phi_4 = 1 - 2\phi_1\phi_3 - \phi_4 + 2\phi_1^2\phi_4$ , já que, para um dado  $\alpha_1$ , esse polinómio é positivo se e só se o processo AVARCH(1) apresenta a propriedade de Taylor.

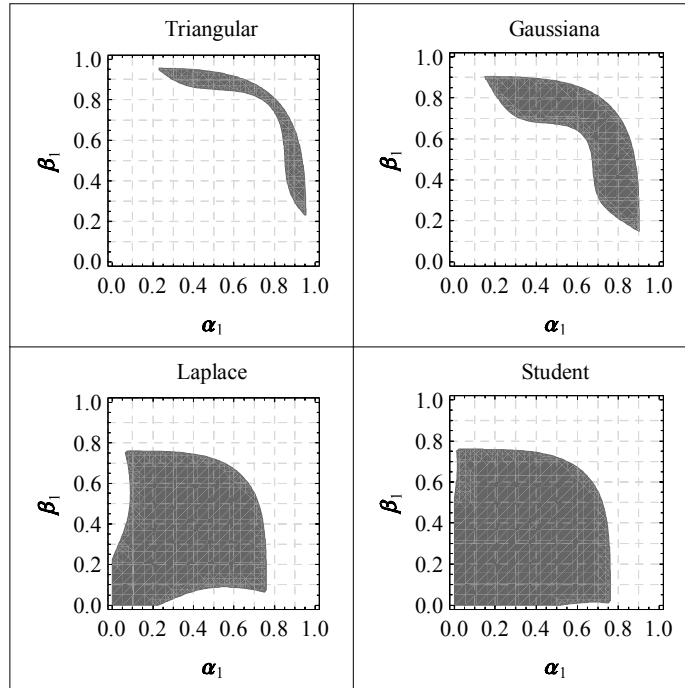


Figura 3.2: Região de verificação da relação  $\rho_1(1) > \rho_1(2)$  para um processo TARCH(1).

passamos para o modelo TARCH(1), já não é assim mas podemos ainda afirmar que é mais significativa quando a distribuição marginal do processo gerador tem caudas pesadas. Acrescentamos ainda que, quando a distribuição marginal do processo gerador tem o mesmo coeficiente de curtose, a proporção de parametrizações que satisfazem a referida relação parece aumentar com o aumento da diferença  $\phi_1 - \phi_4^{-1/4}$ .

### 3.4 Estudo de simulação

Nesta secção apresentamos um estudo de simulação onde comparamos os modelos TARCH(1) e ARCH(1) no que diz respeito à verificação da relação  $\hat{\rho}_1(1) > \hat{\rho}_1(2)$ .

O confronto entre estes modelos impõe-se devido ao peso que ainda hoje o modelo ARCH tem na modelação de séries financeiras, séries onde este efeito foi inicialmente detetado. Idealmente a comparação seria feita a partir das expressões teóricas das autocorrelações. No entanto, e embora ambos os modelos se enquadrem no modelo  $\delta$ -TGARCH, tal não é atualmente possível, visto que não é conhecida a expressão da autocorrelação de um processo ARCH(1) em valor absoluto.

No estudo de simulação feito por He e Teräsvirta (1999a), foram considerados os modelos ARCH(1) e GARCH(1, 1) condicionalmente Gaussianos, concluindo os autores que estes modelos não parecem capazes de produzir trajetórias com o efeito de Taylor. No nosso estudo consideramos os modelos ARCH e TARCH com a mesma distribuição marginal não Gaussiana e leptocúrtica para o processo gerador, especificamente a distribuição baseada na Student indicada na secção anterior, com coeficiente de curtose igual a 6.

He e Teräsvirta (1999a) também referem que a curtose do processo  $X$  parece desempenhar um papel na presença da propriedade de Taylor. Acrescentamos que as séries reais que apresentam o efeito de Taylor são leptocúrticas, como, por exemplo, as séries financeiras estudadas por Taylor (1986, 2007). Assim, para melhor comparar os modelos TARCH(1) e ARCH(1), escolhemos quatro parametrizações para cada modelo de modo que o valor do coeficiente de curtose,  $\kappa_X$  <sup>(8)</sup>, seja semelhante. Fixámos  $\alpha_0 = 1$  em ambos os modelos, já que este valor não aparece nas expressões teóricas das autocorrelações nem do coeficiente de curtose.

Baseando-nos em 200 realizações de cada série simulada com 100 000 observações (depois de descartar as primeiras 50 para eliminar o efeito da escolha dos valores iniciais) para cada uma das parametrizações, registámos o número de vezes em que se verificou  $\hat{\rho}_1(1) > \hat{\rho}_1(2)$  e determinámos o intervalo de confiança a 95% para a proporção <sup>(9)</sup>. Os resultados são apresentados para o modelo TARCH(1) na tabela 3.3 e para o modelo ARCH(1) na tabela 3.4.

Tabela 3.3: Intervalo de confiança a 95% para a proporção de verificações do efeito de Taylor para o modelo TARCH(1), com parâmetros  $\alpha_0 = 1$  e  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  indicados, sendo  $\kappa_X$  o coeficiente de curtose do modelo.

$\alpha_1$	$\beta_1$	$\kappa_X$	$IC_{95\%}$
0.2	0.75	357.48	]0.80, 0.90[
0.58	0.65	112.20	]0.84, 0.93[
0.3	0.3	7.60	]0.97, 1.00[
0.2	0.1	6.40	]0.96, 1.00[

<sup>8</sup>No apêndice B, apresentam-se os cálculos que levam à obtenção da expressão de  $\kappa_X$  para o modelo TARCH(1), expressão (B.8), e para o modelo ARCH(1), expressão (B.5).

<sup>9</sup>Os ficheiros do programa *Mathematica* 8, onde foram executadas estas simulações, fazem parte do apêndice C.

Tabela 3.4: Intervalo de confiança a 95% para a proporção de verificações do efeito de Taylor para o modelo ARCH(1), com parâmetros  $\alpha_0 = 1$  e  $\alpha_1$  indicado, sendo  $\kappa_X$  o coeficiente de curtose do modelo.

$\alpha_1$	$\kappa_X$	$IC_{95\%}$
0.405	316.46	]0.22, 0.34[
0.4	126.00	]0.24, 0.36[
0.2	7.58	]0.11, 0.21[
0.1	6.23	]0.20, 0.32[

Comparando os resultados apresentados nestas duas tabelas, podemos ver que a relação  $\hat{\rho}_1(1) > \hat{\rho}_1(2)$  ocorre um número muito mais significativo de vezes no modelo TARCH(1) do que no modelo ARCH(1). Olhando agora aos resultados de He e Teräsvirta (1999a), observamos que o modelo ARCH(1) condicionalmente Gaussiano que consideram, com coeficiente de curtose do processo gerador, naturalmente, igual a 3, parece ser ainda menos capaz de capturar o efeito de Taylor do que o não Gaussiano aqui estudado, com coeficiente de curtose do processo gerador igual a 6. Este facto, a par das conclusões tiradas na secção anterior, suportam a nossa suspeita de que valores altos do coeficiente de curtose do processo gerador favorecem o aparecimento da propriedade de Taylor.

## Capítulo 4

# Enquadramento das distribuições de dimensão finita

Neste capítulo propomos enquadramentos para as distribuições de dimensão finita de um processo  $X$  que segue o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $\delta > 0$  e, sempre que possível, com  $\delta < 0$ . Começamos, na secção 4.1, pela distribuição marginal de  $X$ , continuamos com a construção, na secção 4.2, de um enquadramento preparatório, concretamente, da função de distribuição do vetor  $(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)$  de dimensão  $2n$ , para terminar, na secção 4.3, com as distribuições conjuntas das margens de  $X$ .

No desenvolvimento de todos os enquadramentos, será interessante observar o papel fundamental da distribuição marginal do processo gerador. Será também curioso notar que as regiões de validade dos enquadramentos estabelecidas nos resultados teóricos parecem, com base nos estudos de simulação feitos e apresentados com o objetivo de avaliar a qualidade dos enquadramentos, poder ser expandidas.

Em todo o capítulo, vamos considerar  $\gamma_\tau < 1$ , com  $\gamma_\tau = \max_{1 \leq j \leq q} \gamma_j$ . Recordamos que esta hipótese inclui todas as soluções estacionárias em qualquer um dos três sentidos definidos, pois, como vimos no capítulo 2,  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$  é uma condição necessária para a estacionaridade forte, fraca e à ordem  $\delta$ . A assunção desta hipótese tem, assim, como objetivo e única consequência eliminar os casos degenerados descritos no apêndice A.

### 4.1 Distribuição marginal

O objetivo principal desta secção é obter um enquadramento para a função de distribuição de  $X_t$ , que denotaremos por  $F_{X_t}$ , com  $X$  um processo seguindo o modelo

$\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $\delta \neq 0$ . Como vamos mostrar, a função distribuição das variáveis  $Z_t, F_Z$  <sup>(1)</sup>, vai ter um papel preponderante.

Começamos por observar que o processo  $X$ , tal que  $\sigma_t$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável <sup>(2)</sup>, tem distribuição marginal simétrica (em relação à origem) se e só se o seu processo gerador  $Z$  também tem. Com efeito, dados  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $a \leq b$ , das propriedades da esperança e da esperança condicional,

$$\begin{aligned} P(a \leq X_t \leq b) &= E(\mathbb{1}_{\{a \leq X_t \leq b\}}) = E[E(\mathbb{1}_{\{a \leq X_t \leq b\}} | \underline{X}_{t-1})] = \\ &= E[P(a \leq X_t \leq b | \underline{X}_{t-1})] = E\left[P\left(\frac{a}{\sigma_t} \leq Z_t \leq \frac{b}{\sigma_t} \middle| \underline{X}_{t-1}\right)\right], \end{aligned}$$

visto que  $\sigma_t > 0$ . Então, se as variáveis  $Z_t$  têm lei simétrica, notando que  $\sigma_t$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável, podemos concluir que

$$\begin{aligned} P(a \leq X_t \leq b) &= E\left[P\left(\frac{-b}{\sigma_t} \leq Z_t \leq \frac{-a}{\sigma_t} \middle| \underline{X}_{t-1}\right)\right] \\ &= P(-b \leq X_t \leq -a). \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que se a lei marginal de  $Z$  não é simétrica, também a lei marginal de  $X$  não o é.

Destacamos esta relação existente entre a simetria da distribuição marginal de um processo  $\delta$ -TGARCH e a simetria da distribuição marginal do seu processo gerador, pois vinca a importância de tratar as distribuições do processo  $\delta$ -TGARCH e não só as distribuições de transformações deste processo, como fazem Pawlak e Schmid (2001) para o quadrado de um processo GARCH. A transformação considerada por estes autores para o modelo GARCH permite tirar conclusões para o processo apenas quando a distribuição marginal do processo gerador é simétrica.

Sobre a relação entre a lei marginal destes processos é ainda interessante notar que um processo  $\delta$ -TGARCH tem lei marginal difusa se o mesmo acontece ao seu processo gerador. De facto, se  $X$  é um processo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que  $\sigma_t$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável e as variáveis  $Z_t$  são difusas, então

$$P(X_t = x) = E\left[P\left(Z_t = \frac{x}{\sigma_t}\right)\right] = 0. \quad (4.1)$$

Terminadas as considerações iniciais, avançamos para a primeira parte do enquadramento da função de distribuição de  $X_t$  no teorema seguinte.

<sup>1</sup>Recordamos que o processo gerador  $Z$  é um processo de margens i.i.d., pelo que usaremos a notação simplificada  $F_Z$  para a sua distribuição marginal, em vez de  $F_{Z_t}$ .

<sup>2</sup>Para que  $\sigma_t$  seja  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , basta que  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$ .

**Teorema 4.1** *Seja  $X$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $Z$  o seu processo gerador, tal que  $\gamma_\tau < 1$ . Então, para  $\theta = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$ :*

(a) *se  $x \geq 0$ , temos*

$$(a.1) \text{ caso } \delta > 0, F_{X_t}(x) \leq F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right),$$

$$(a.2) \text{ caso } \delta < 0, F_{X_t}(x) \geq F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right);$$

(b) *se  $x < 0$ , temos*

$$(b.1) \text{ caso } \delta > 0, F_{X_t}(x) \geq F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right),$$

$$(b.2) \text{ caso } \delta < 0, F_{X_t}(x) \leq F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right).$$

Este resultado decorre facilmente do lema A.1 (do apêndice A), onde se prova que  $\sigma_t \geq \theta$ , se  $\delta > 0$ , e que  $\sigma_t \leq \theta$ , se  $\delta < 0$ .

Chamamos a atenção para o facto do resultado anterior ser válido para um qualquer processo  $\delta$ -TGARCH tal que  $\gamma_\tau < 1$ . No entanto, para completar o enquadramento vamos ter que considerar algumas hipóteses adicionais.

Antes de continuar, vamos mostrar a seguinte igualdade:

$$F_{X_t}(x) = E \left[ F_Z \left( \frac{x}{\sigma_t} \right) \right], \quad (4.2)$$

desde que  $\sigma_t$  seja  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável, análoga à introduzida por Pawlak e Schmid (2001) para o modelo GARCH, aquando do estudo da distribuição marginal do quadrado do processo. De facto, temos

$$F_{X_t}(x) = P(X_t \leq x) = E \left[ E \left( \mathbf{1}_{\{X_t \leq x\}} \mid \underline{X}_{t-1} \right) \right] = E \left[ P \left( Z_t \leq \frac{x}{\sigma_t} \mid \underline{X}_{t-1} \right) \right],$$

pois  $\sigma_t > 0$ . Ora, como  $\sigma_t$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável e  $Z_t$  é independente de  $\underline{X}_{t-1}$ ,

$$\begin{aligned} P \left( Z_t \leq \frac{x}{\sigma_t} \mid \underline{X}_{t-1} \right) &= \\ &= P \left( Z_t \leq \frac{x}{\sigma_t} \mid (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) \right) \\ &= P \left( Z_t \leq \frac{x}{\sigma_t \left( \underline{x}_{t-1} \right)} \mid (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots) = \underline{x}_{t-1} \right), P_{(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)} - q.c. \\ &= P \left( Z_t \leq \frac{x}{\sigma_t \left( \underline{x}_{t-1} \right)} \right), P_{(X_{t-1}, X_{t-2}, \dots)} - q.c.. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever  $F_{X_t}(x) = E \left[ F_Z \left( \frac{x}{\sigma_t} \right) \right]$ . Esta igualdade vai ser o ponto de partida para completar o enquadramento, como veremos na demonstração do teorema seguinte.

Ainda antes de passar ao enunciado do teorema, recordamos que, na secção 2.4 do capítulo 2, mostrámos que, se o processo gerador  $Z$  é tal que  $E \left( |Z_0|^\delta \right) < +\infty$ , considerando

$$S_\delta = \sum_{i=1}^p (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta}) + \sum_{i=1}^q \gamma_i, \quad (4.3)$$

com  $E \left[ (Z_t^+)^{\delta} \right] = \phi_{1,\delta}$  e  $E \left[ (Z_t^-)^{\delta} \right] = \phi_{2,\delta}$ , a condição  $S_\delta < 1$  é uma condição suficiente para garantir que  $X$  é estacionário à ordem  $\delta$  e que  $E \left( \sigma_t^\delta \right)$  existe, é finita e independente de  $t$ , tendo-se

$$E \left( \sigma_t^\delta \right) = \frac{\alpha_0}{1 - S_\delta}. \quad (4.4)$$

Estamos, agora, em condições de enunciar o resultado que permite concluir o enquadramento.

**Teorema 4.2** *Seja  $X$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que  $E \left( |Z_0|^\delta \right) < +\infty$  e  $S_\delta < 1$ . Adicionalmente, vamos admitir que as variáveis aleatórias  $Z_t$  são absolutamente contínuas, com densidade  $f_z$  diferenciável.*

*Consideremos a função*

$$h_\delta(x) = (1 + \delta) f_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) + \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} f'_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right),$$

onde  $y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

(a) *Se  $x \geq 0$  e*

$$(a.1) \text{ se } h_\delta(x) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[, \text{ temos } F_{X_t}(x) \geq F_Z \left( \frac{x}{[E(\sigma_t^\delta)]^{\frac{1}{\delta}}} \right);$$

$$(a.2) \text{ se } h_\delta(x) \leq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[, \text{ temos } F_{X_t}(x) \leq F_Z \left( \frac{x}{[E(\sigma_t^\delta)]^{\frac{1}{\delta}}} \right).$$

(b) *Se  $x < 0$  e*

$$(b.1) \text{ se } h_\delta(x) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[, \text{ temos } F_{X_t}(x) \leq F_Z \left( \frac{x}{[E(\sigma_t^\delta)]^{\frac{1}{\delta}}} \right);$$

$$(b.2) \text{ se } h_\delta(x) \leq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[, \text{ temos } F_{X_t}(x) \geq F_Z \left( \frac{x}{[E(\sigma_t^\delta)]^{\frac{1}{\delta}}} \right).$$



**Demonstração:** Sejam  $t \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

Partindo de (4.2), podemos escrever  $F_{X_t}(x) = E \left[ F_Z \left( \frac{x}{(\sigma_t^\delta)^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right]$ .

Fixando  $x$ , consideremos a função  $R_\delta : [\alpha_0, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$  definida por  $R_\delta(y) = F_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right)$ . Para esta função, temos

$$\frac{dR_\delta}{dy}(y) = -\frac{x}{\delta y^{\frac{1}{\delta}+1}} f_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right),$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_\delta}{dy^2}(y) &= \frac{(1+\delta)x}{\delta^2 y^{\frac{1}{\delta}+2}} f_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) + \frac{x^2}{\delta^2 y^{\frac{2}{\delta}+2}} f'_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) \\ &= \frac{x}{\delta^2 y^{\frac{1}{\delta}+2}} \left[ (1+\delta) f_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) + \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} f'_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right] \\ &= \frac{x}{\delta^2 y^{\frac{1}{\delta}+2}} h_\delta(x). \end{aligned}$$

Como  $X$  é estacionário à ordem  $\delta$ ,  $E(\sigma_t^\delta)$  existe, é finita e independente de  $t$ . Assim, se  $x \geq 0$  e  $h_\delta(x) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ , então  $R_\delta$  é convexa e, portanto, pela desigualdade de Jensen, vem

$$F_{X_t}(x) = E \left[ F_Z \left( \frac{x}{(\sigma_t^\delta)^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right] \geq F_Z \left( \frac{x}{[E(\sigma_t^\delta)]^{\frac{1}{\delta}}} \right).$$

Analogamente, se  $x > 0$  e  $h_\delta(x) \leq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ , então  $R_\delta$  é côncava e temos

$$F_{X_t}(x) = E \left[ F_Z \left( \frac{x}{(\sigma_t^\delta)^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right] \leq F_Z \left( \frac{x}{[E(\sigma_t^\delta)]^{\frac{1}{\delta}}} \right).$$

Ficam provadas as desigualdades em (a.1) e em (a.2). Analogamente, podemos deduzir (b.1) e (b.2). ■

A aplicação do teorema anterior depende da análise do sinal da função  $h_\delta(x) = (1+\delta) f_Z \left( xy^{-\frac{1}{\delta}} \right) + xy^{-\frac{1}{\delta}} f'_Z \left( xy^{-\frac{1}{\delta}} \right), \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ . Sendo o objetivo principal o enquadramento de  $F_{X_t}$ , esse sinal é determinado pela conjugação dos teoremas 4.1 e 4.2. Assim, interessa-nos ter  $h_\delta$  não positiva, caso  $\delta < 0$ , e  $h_\delta$  não negativa, caso  $\delta > 0$ . Vejamos nos exemplos seguintes, para algumas distribuições do processo gerador  $Z$  e alguns valores de  $\delta$ , como é que tal pode ser feito.

**Exemplo 4.3** Suponhamos que as variáveis  $Z_t$  têm distribuição Gaussiana padrão. Neste caso, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , como  $f'_Z(x) = -xf_Z(x)$ , temos

$$h_\delta(x) = f_Z\left(\frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}}\right) \left[ (1 + \delta) - \left(\frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}}\right)^2 \right], \text{ onde } y \in [\alpha_0, +\infty[.$$

Se  $\delta \leq -1$ , é imediato que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h_\delta(x) \leq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

Vejam, agora, o caso  $-1 < \delta < 0$ . Ora,  $h_\delta(x) \leq 0 \Leftrightarrow |x| \geq y^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1 + \delta}$ . Uma vez que  $y \geq \alpha_0 \Leftrightarrow y^{\frac{1}{\delta}} \leq \alpha_0^{\frac{1}{\delta}}$ , podemos garantir que, pelo menos para  $x \in \left] -\infty, -\alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1 + \delta} \right] \cup \left[ \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1 + \delta}, +\infty \right[$ , se tem  $h_\delta(x) \leq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

Finalmente, consideremos  $\delta > 0$ . Como  $h_\delta(x) \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq y^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1 + \delta}$  mas, neste caso,  $y \geq \alpha_0 \Leftrightarrow y^{\frac{1}{\delta}} \geq \alpha_0^{\frac{1}{\delta}}$ , é possível assegurar que, pelo menos para  $x \in \left[ -\alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1 + \delta}, \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1 + \delta} \right]$ ,  $h_\delta(x) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

Dando seguimento a este exemplo, na figura 4.1 ilustramos os enquadramentos obtidos nos teoremas 4.1 e 4.2. Esta figura resulta de um estudo de simulação para o modelo  $\delta$ -TGARCH(1, 1), com  $\alpha_0 = 10$ ,  $\alpha_1 = 0.3$ ,  $\beta_1 = 0.5$ ,  $\gamma_1 = 0.2$ , tal que as variáveis  $Z_t$  têm distribuição Gaussiana padrão,  $N(0, 1)$ , e onde considerámos, sucessivamente,  $\delta$  igual a  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $1$ ,  $\frac{3}{2}$  e  $2$  (tendo-se  $S_\delta$  aproximadamente igual a 0.888, 0.739, 0.529, 0.520, 0.544, 0.6, respetivamente). A vermelho está representada a função  $F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right)$  e a azul está desenhada a função  $F_Z\left(x [E(\sigma_t^\delta)]^{-\frac{1}{\delta}}\right)$ . A estimativa de  $F_{X_t}(x)$ , apresentada a verde, foi obtida a partir de 10 000 realizações do processo  $X \sim \delta$ -TGARCH(1, 1) <sup>(3)</sup>. Os segmentos a tracejado passam nos pontos de abcissa  $\pm \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1 + \delta}$ . Assim e de acordo com o que foi visto no exemplo 4.3, a validade do enquadramento está garantida, pelo menos, para os valores de  $x$  entre os segmentos, quando  $\delta > 0$ , e para lá dos segmentos, quando  $\delta < 0$ .

Da observação da figura 4.1, há a salientar três aspetos principais: (i) o enquadramento parece ser válido para valores de  $x$  para além dos intervalos indicados; (ii) o enquadramento no que diz respeito à função  $F_Z\left(x [E(\sigma_t^\delta)]^{-\frac{1}{\delta}}\right)$  é, em todos os casos, de grande qualidade; (iii) o enquadramento parece melhorar à medida que os valores de  $\delta$  aumentam. Relativamente ao ponto (i), sabemos que no exemplo 4.3 apenas determinámos um subconjunto de valores de  $x$  para os quais está garantida a validade do enquadramento; é, portanto, natural que ele seja válido para mais

<sup>3</sup>Para cada uma das 10 000 trajetórias do processo, foram geradas 101 observações, tendo sido aproveitada, para a função de distribuição empírica, apenas a última. Pretendeu-se, desta forma, eliminar o efeito da escolha dos valores iniciais. O ficheiro do programa *Mathematica 8* onde foram corridas estas simulações consta do apêndice C.

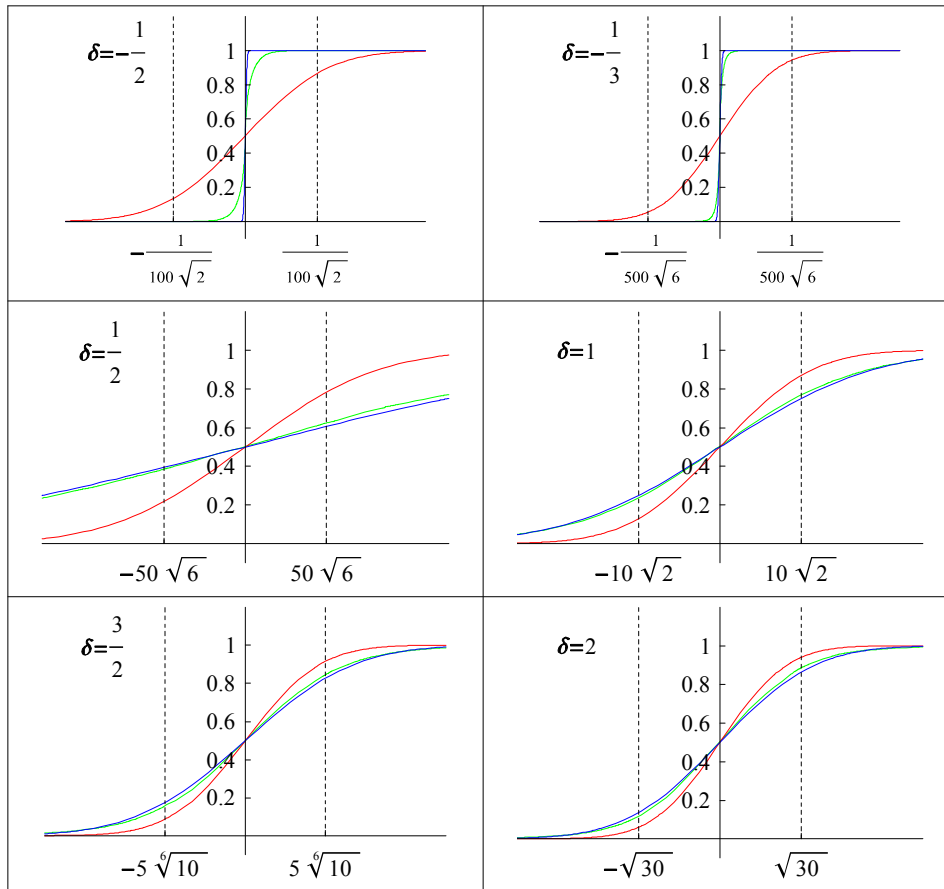


Figura 4.1: Representação gráfica de  $F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right)$  (vermelho), de  $F_Z\left(x\left[E\left(\sigma_t^\delta\right)\right]^{-\frac{1}{\delta}}\right)$  (azul) e da estimativa de  $F_{X_t}(x)$  (verde), para  $X \sim \delta\text{-TGARCH}(1, 1)$  e  $Z_t \sim N(0, 1)$ .

valores de  $x$ . Mesmo assim, não deixa de ser interessante notar que, por exemplo, para os valores de  $\delta$  negativos, o enquadramento, nesta simulação e considerando apenas a observação da figura, parece ser válido para todo o  $x$ . Sobre (ii), já era esperado que a função  $F_Z\left(x\left[E\left(\sigma_t^\delta\right)\right]^{-\frac{1}{\delta}}\right)$  produzisse um melhor enquadramento do que a função  $F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right)$ , já que a primeira depende de todos os parâmetros do modelo e a segunda depende apenas de alguns. Não obstante, mesmo tendo esta expectativa, continua a merecer destaque a qualidade do enquadramento produzido pela função  $F_Z\left(x\left[E\left(\sigma_t^\delta\right)\right]^{-\frac{1}{\delta}}\right)$ . Em relação a (iii), pensamos que, embora o enquadramento pareça melhorar com o aumento do valor de  $\delta$ , a melhoria estará mais relacionada com o valor de  $S_\delta$  em cada caso.

**Exemplo 4.4** Vamos, agora, admitir que as variáveis  $Z_t$  têm distribuição centrada e reduzida baseada na distribuição de Student com  $n$  graus de liberdade, para  $n > 2$ .

Assim,

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{(n-2)\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n-2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

e, portanto, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'_Z(x) = -\frac{x(n+1)}{n-2+x^2} f_Z(x)$ .

Temos, então,

$$h_\delta(x) = f_Z\left(\frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}}\right) \cdot \frac{(1+\delta)(n-2)y^{\frac{2}{\delta}} + (\delta-n)x^2}{y^{\frac{2}{\delta}}(n-2) + x^2}, \quad \text{onde } y \in [\alpha_0, +\infty[.$$

Caso  $\delta \leq -1$ , vem, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h_\delta(x) \leq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

Se  $-1 < \delta < 0$ , para  $x \in \left] -\infty, -\alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1+\delta)(n-2)}{n-\delta}} \right] \cup \left[ \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1+\delta)(n-2)}{n-\delta}}, +\infty \right[$ , vem  $h_\delta(x) \leq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

Considerando  $0 < \delta < n$ , quando  $x \in \left[ -\alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1+\delta)(n-2)}{n-\delta}}, \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1+\delta)(n-2)}{n-\delta}} \right]$ , obtemos  $h_\delta(x) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

Para  $n \leq \delta$ , temos, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h_\delta(x) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

Também foi desenvolvido um estudo de simulação quando o processo gerador tem uma distribuição baseada na distribuição de *Student*, tal como vem indicada no exemplo anterior, fixando, no estudo, 6 graus de liberdade,  $t_6$ . A obtenção da estimativa de  $F_{X_t}(x)$  foi feita seguindo o mesmo procedimento do caso anterior e a legenda para a figura resultante, que é a figura 4.2, é a mesma da anterior (4). A diferença está, para além da distribuição marginal do processo gerador, nas ordens do modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), porém, mantendo sempre  $\delta = 1$ ,  $\alpha_0 = 10$ ,  $\alpha_1 = 0.3$ ,  $\beta_1 = 0.5$  e  $\gamma_1 = 0.2$ . Assim, considerámos quatro situações: na primeira, o modelo adotado foi o 1-TGARCH(1, 1) (sendo  $S_\delta = 0.5$ ); na segunda, o modelo é o 1-TGARCH(2, 1), com  $\alpha_2 = 0.1$  e  $\beta_2 = 0.4$  (sendo  $S_\delta \simeq 0.688$ ); na terceira, o modelo considerado é o 1-TGARCH(1, 2), com  $\gamma_2 = 0.25$  (sendo  $S_\delta = 0.75$ ); na quarta, o modelo é o 1-TGARCH(2, 2), com  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 0.4$  e  $\gamma_2 = 0.25$  (sendo  $S_\delta \simeq 0.938$ ).

Embora estejamos agora num contexto muito diferente, já que alterámos a distribuição marginal do processo gerador e as ordens do modelo, os comentários à figura 4.2 são idênticos aos da figura anterior no que se refere aos pontos (i) e (ii). Relativamente à melhoria do enquadramento estar, aparentemente, ligada ao diminuir das ordens do modelo, novamente entendemos que terá mais influência o valor de  $S_\delta$ .

---

<sup>4</sup>O ficheiro do programa *Mathematica* 8, onde foram corridas estas simulações, faz parte do apêndice C.

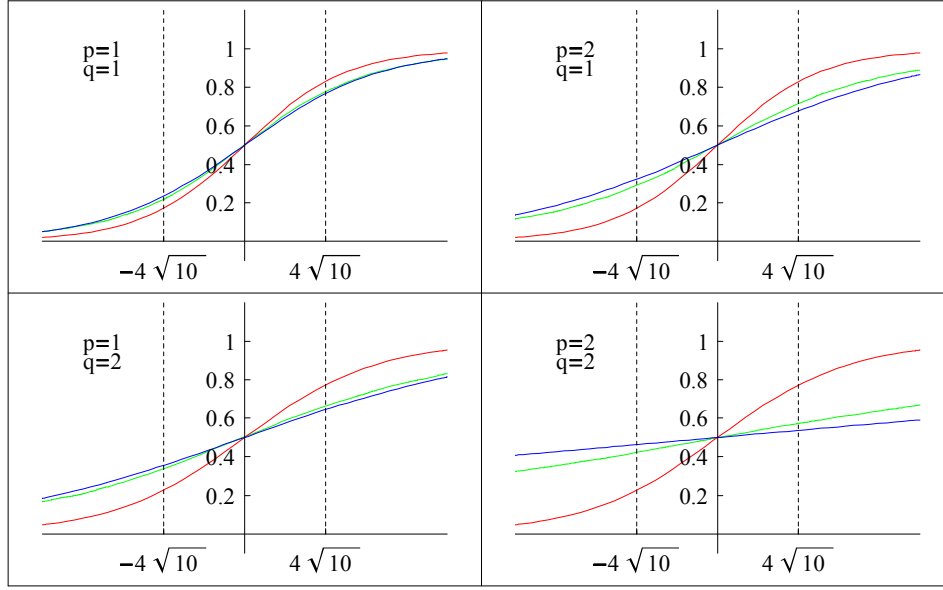


Figura 4.2: Representação gráfica de  $F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right)$  (vermelho), de  $F_Z\left(x [E(\sigma_t^\delta)]^{-\frac{1}{5}}\right)$  (azul) e da estimativa de  $F_{X_t}(x)$  (verde), para  $X \sim 1\text{-TGARCH}(p, q)$  e  $Z_t = \sqrt{\frac{2}{3}}W$ , com  $W \sim t_6$ .

**Exemplo 4.5** Consideremos, como último caso, que a lei das variáveis  $Z_t$  é uma mistura de duas distribuições Gaussianas (não necessariamente simétrica), ou seja, que

$$f_Z(x) = p_1 f_1(x; \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) + p_2 f_2(x; \mathbf{m}_2, \mathbf{s}_2),$$

onde  $p_1, p_2 \in ]0, 1[$  tais que  $p_1 + p_2 = 1$  e  $f_k(\cdot; \mathbf{m}_k, \mathbf{s}_k)$  denota a densidade da distribuição Gaussiana de média  $\mathbf{m}_k$  e variância  $\mathbf{s}_k^2$ . Então:

$$E(Z_t) = p_1 \mathbf{m}_1 + p_2 \mathbf{m}_2 \quad \text{e} \quad V(Z_t) = p_1 (\mathbf{m}_1^2 + \mathbf{s}_1^2) + p_2 (\mathbf{m}_2^2 + \mathbf{s}_2^2) - (p_1 \mathbf{m}_1 + p_2 \mathbf{m}_2)^2.$$

Assim, caso se pretenda que  $E(Z_t) = 0$  e  $V(Z_t) = 1$  (<sup>5</sup>), há que impor as seguintes restrições sobre os parâmetros:

$$p_2 = 1 - p_1, \quad \mathbf{m}_2 = \frac{p_1 \mathbf{m}_1}{p_1 - 1} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{1 - p_1 (\mathbf{m}_1^2 + \mathbf{s}_1^2) - (1 - p_1) \left(\frac{p_1 \mathbf{m}_1}{p_1 - 1}\right)^2}{1 - p_1}}.$$

No que diz respeito à análise do sinal da função  $h_\delta(x)$ , vamos considerar apenas

<sup>5</sup> Admitindo estas restrições, concretamente, admitindo que  $E(Z_t) = 0$  e  $V(Z_t) = 1$ , o coeficiente de assimetria é igual a  $E(Z_t^3) = p_1 \mathbf{m}_1 (\mathbf{m}_1^2 + 3\mathbf{s}_1^2) + p_2 \mathbf{m}_2 (\mathbf{m}_2^2 + 3\mathbf{s}_2^2)$  e o coeficiente de curtose é igual a  $E(Z_t^4) = p_1 (\mathbf{m}_1^4 + 6\mathbf{m}_1^2 \mathbf{s}_1^2 + 3\mathbf{s}_1^4) + p_2 (\mathbf{m}_2^4 + 6\mathbf{m}_2^2 \mathbf{s}_2^2 + 3\mathbf{s}_2^4)$ .

o caso em que  $\delta = 1$ . Como  $f'_k(x; \mathbf{m}_k, \mathbf{s}_k) = f_k(x; \mathbf{m}_k, \mathbf{s}_k) \left(-\frac{(x-\mathbf{m}_k)}{\mathbf{s}_k^2}\right)$ , temos

$$\begin{aligned} h_1(x) &= 2f_Z\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}f'_Z\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= \sum_{k=1}^2 p_k \left[ 2f_k\left(\frac{x}{y}; \mathbf{m}_k, \mathbf{s}_k\right) + \frac{x}{y}f'_k\left(\frac{x}{y}; \mathbf{m}_k, \mathbf{s}_k\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^2 p_k f_k\left(\frac{x}{y}; \mathbf{m}_k, \mathbf{s}_k\right) \left[ 2 - \frac{\left(\frac{x}{y} - \mathbf{m}_k\right) \frac{x}{y}}{\mathbf{s}_k^2} \right]. \end{aligned}$$

Observamos que temos  $h_1(x) \geq 0$ , pelo menos quando

$$\begin{aligned} 2 - \frac{\left(\frac{x}{y} - \mathbf{m}_1\right) \frac{x}{y}}{\mathbf{s}_1^2} \geq 0 \wedge 2 - \frac{\left(\frac{x}{y} - \mathbf{m}_2\right) \frac{x}{y}}{\mathbf{s}_2^2} \geq 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \bigcap_{k=1}^2 \left[ \frac{\mathbf{m}_k - \sqrt{\mathbf{m}_k^2 + 8\mathbf{s}_k^2}}{2}, \frac{\mathbf{m}_k + \sqrt{\mathbf{m}_k^2 + 8\mathbf{s}_k^2}}{2} \right], \end{aligned}$$

o que equivale a  $\frac{x}{y} \in [l_1, l_2]$ , com  $l_1 = \max_{k \in \{1,2\}} \frac{\mathbf{m}_k - \sqrt{\mathbf{m}_k^2 + 8\mathbf{s}_k^2}}{2}$  e  $l_2 = \min_{k \in \{1,2\}} \frac{\mathbf{m}_k + \sqrt{\mathbf{m}_k^2 + 8\mathbf{s}_k^2}}{2}$ . Assim, pelo menos quando  $x \in [\alpha_0 l_1, \alpha_0 l_2]$ , temos  $h_1(x) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ .

Uma vez que o conjunto de valores de  $x$  que garante a não negatividade de  $h_1(x)$ , para todo  $y \in [\alpha_0, +\infty[$ , é, regra geral, maior do que o apresentado, a análise do sinal de  $h_1(x)$  poderá ser feita, em alternativa, recorrendo a métodos gráficos e numéricos.

Vamos, por exemplo, considerar as duas parametrizações seguintes para a mistura de duas distribuições Gaussianas de modo que a distribuição resultante seja centrada e reduzida: (A) para  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.65, -0.15, 0.4)$ , temos, então,  $(p_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{s}_2) = \left(0.35, \frac{39}{140}, \frac{\sqrt{11959}}{70}\right)$ , sendo o coeficiente de assimetria aproximadamente igual a 0.672 e o de curtose aproximadamente igual a 6.719; (B) para  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.6, 0.3, 0.4)$ , então  $(p_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{s}_2) = \left(0.4, -0.45, \frac{\sqrt{769}}{20}\right)$ , sendo o coeficiente de assimetria igual a -0.972 e o de curtose aproximadamente igual a 5.489. Na figura 4.3 representamos a função  $h_1$  para cada um destes dois casos.

Da análise desta figura e recorrendo a métodos numéricos <sup>(6)</sup>, podemos dizer que  $h_1(x) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[$ , no caso A, para  $\frac{x}{y} \in [-0.714, 2.353]$ , o que permite afirmar que o mesmo acontece se  $x \in [-0.714\alpha_0, 2.353\alpha_0]$ . Do mesmo modo, na situação B,  $h_1$  satisfaz o pretendido se  $\frac{x}{y} \in [-2.198, 0.788]$ , o mesmo se verificando quando  $x \in [-2.198\alpha_0, 0.788\alpha_0]$ .

<sup>6</sup>O ficheiro do programa *Mathematica 8* que permitiu a obtenção destes valores faz parte do apêndice C.

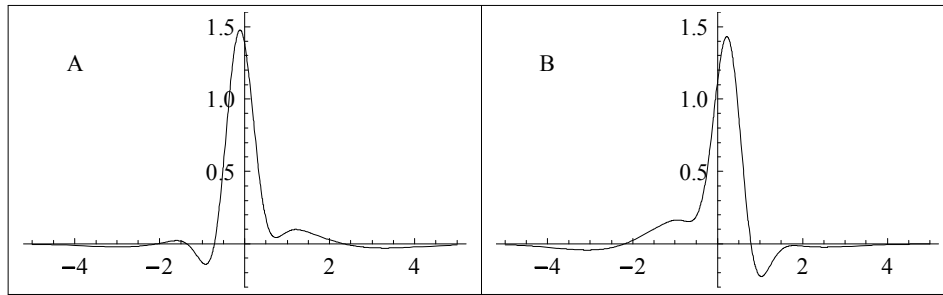


Figura 4.3: Representação gráfica da função  $h_1$  quando a lei das variáveis  $Z_t$  é uma mistura de distribuições Gaussianas, centrada e reduzida, de parâmetros, em A,  $(p_1, m_1, \sigma_1) = (0.65, -0.15, 0.4)$  e, em B,  $(p_1, m_1, \sigma_1) = (0.6, 0.3, 0.4)$ .

À semelhança do que foi feito para os exemplos anteriores, fizemos um estudo de simulação quando a distribuição marginal do processo gerador resulta da mistura de duas distribuições Gaussianas,  $NM$ , considerando as parametrizações dos casos A e B analisados no exemplo 4.5, que resultou na figura 4.4.

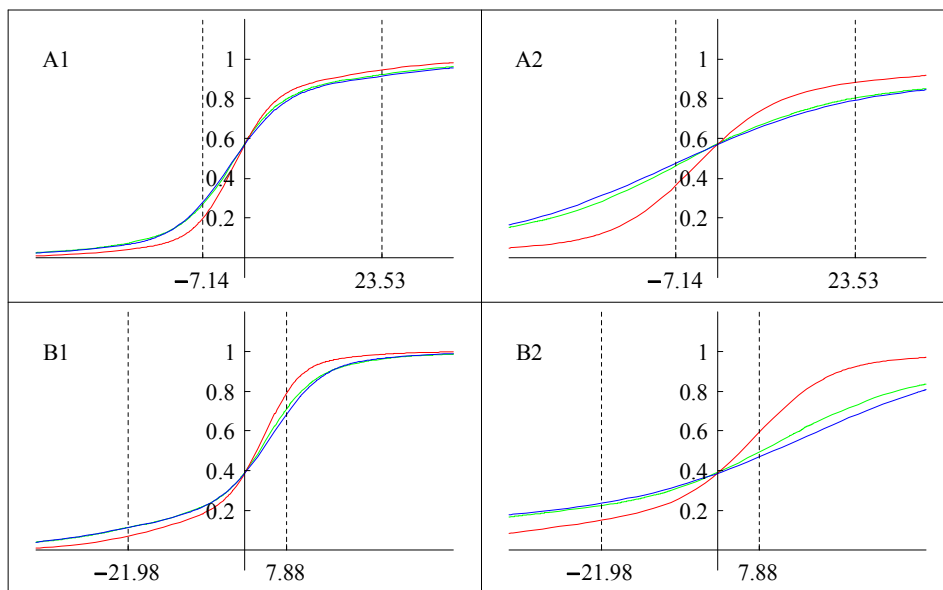


Figura 4.4: Representação gráfica de  $F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right)$  (vermelho), de  $F_Z\left(x[E(\sigma_t^\delta)]^{-\frac{1}{5}}\right)$  (azul) e da estimativa de  $F_{X_t}(x)$  (verde), para  $X \sim 1\text{-TGARCH}(1,1)$  e  $Z_t \sim NM$ .

A estimativa de  $F_{X_t}(x)$ , apresentada na figura 4.4, foi conseguida seguindo o procedimento adotado nos casos anteriores, mantendo-se a legenda para esta figura <sup>(6)</sup>.

Considerámos, agora, ao contrário dos casos anteriores, distribuições assimétricas para as variáveis  $Z_t$ , concretamente: em A1 e A2, escolhemos  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.65, -0.15, 0.4)$  (assimetria positiva); em B1 e B2, fizemos  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.6, 0.3, 0.4)$  (assimetria negativa). Em relação ao processo  $\delta$ -TGARCH, considerámos, nos quatro casos, o modelo 1-TGARCH(1, 1), com os parâmetros  $\alpha_0 = 10$ ,  $\alpha_1 = 0.15$ ,  $\beta_1 = 0.5$  e, em A1 e B1,  $\gamma_1 = 0.2$  e, em A2 e B2,  $\gamma_1 = 0.6$ . Assim,  $S_\delta$  é aproximadamente igual, em A1, a 0.416, em A2, a 0.816, em B1, a 0.430 e, em B2, a 0.830.

Mais uma vez, as observações feitas para as figuras 4.1 e 4.2 podem ser aplicadas à figura 4.4, embora a distribuição marginal do processo gerador seja agora assimétrica. Também esta simulação reforça a nossa suspeita de que a qualidade do enquadramento melhora para valores de  $S_\delta$  mais baixos.

## 4.2 Um enquadramento preparatório

Nesta secção preparamos o enquadramento das distribuições de dimensão finita para o modelo  $\delta$ -TGARCH quando a potência  $\delta$  é positiva, estabelecendo um enquadramento preparatório, mais concretamente, o enquadramento da função de distribuição do vetor  $(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)$ . O procedimento para a sua obtenção segue o mesmo princípio usado no enquadramento da distribuição marginal, como veremos na demonstração dos teoremas desta secção.

Antes, recordamos que, dada uma variável aleatória  $W$ , definimos  $W^+ = \max\{W, 0\}$  e  $W^- = \max\{-W, 0\}$ . Uma equivalência simples, mas que se revelará útil, entre estas variáveis é

$$-y \leq W \leq x \Leftrightarrow W^+ \leq x \wedge W^- \leq y, \quad (4.5)$$

para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ .

No teorema seguinte, construímos a primeira parte do enquadramento.

**Teorema 4.6** *Seja  $X$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $\delta > 0$ , tal que  $\gamma_\tau < 1$  e as variáveis  $Z_t$  do seu processo gerador são difusas. Então, para todo  $(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \in (\mathbb{R}_0^+)^{2n}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \leq \prod_{t=1}^n \left[ F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right) - F_Z\left(-\frac{x_t^*}{\theta}\right) \right],$$

$$\text{com } \theta = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$



**Demonstração:** Seja  $(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \in (\mathbb{R}_0^+)^{2n}$ .

Como  $\sigma_t > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , podemos escrever, usando a equivalência (4.5),

$$F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) = P\left(-\frac{x_t^*}{\sigma_t} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{\sigma_t}, t = 1, \dots, n\right).$$

Como, do lema A.1 do apêndice A,  $\sigma_t \geq \theta$ , para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , então

$$P\left(-\frac{x_t^*}{\sigma_t} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{\sigma_t}, t = 1, \dots, n\right) \leq P\left(-\frac{x_t^*}{\theta} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{\theta}, t = 1, \dots, n\right).$$

Assim, visto que as variáveis  $Z_1, \dots, Z_n$  são i.i.d. e difusas, temos

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{x_t^*}{\theta} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{\theta}, t = 1, \dots, n\right) &= \prod_{t=1}^n P\left(-\frac{x_t^*}{\theta} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{\theta}\right) \\ &= \prod_{t=1}^n \left[ F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right) - F_Z\left(-\frac{x_t^*}{\theta}\right) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,  $F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \leq \prod_{t=1}^n \left[ F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right) - F_Z\left(-\frac{x_t^*}{\theta}\right) \right]$ . ■

Tal como na secção anterior, a segunda parte do enquadramento é mais difícil de conseguir. Começamos por provar um lema que nos irá auxiliar, já que nos indica que devemos começar por procurar um enquadramento das variáveis  $Z_1, \dots, Z_n$  por expressões  $\underline{X}_0$ -mensuráveis ou não aleatórias.

**Lema 4.7** *Seja  $X$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que as variáveis  $Z_t$  do seu processo gerador são difusas. Então, para  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$P(V_t \leq Z_t \leq W_t, t = 1, \dots, k) = \prod_{t=1}^k E[F_Z(W_t) - F_Z(V_t)],$$

onde, para cada  $t$  em  $\{1, \dots, k\}$ ,  $V_t$  e  $W_t$ , tais que  $V_t \leq W_t$ , são variáveis aleatórias  $\underline{X}_0$ -mensuráveis ou quantidades não aleatórias.

**Demonstração:** Das propriedades da esperança e da esperança condicional, temos

$$\begin{aligned} P(V_t \leq Z_t \leq W_t, t = 1, \dots, k) &= E\left[\mathbb{1}_{[V_1, W_1] \times \dots \times [V_k, W_k]}(Z_1, \dots, Z_k)\right] \\ &= E\left[E\left(\mathbb{1}_{[V_1, W_1] \times \dots \times [V_k, W_k]}(Z_1, \dots, Z_k) \mid \underline{X}_0\right)\right] \\ &= E\left[P(V_t \leq Z_t \leq W_t, t = 1, \dots, k \mid \underline{X}_0)\right]. \end{aligned}$$

Recorrendo agora ao teorema da probabilidade composta, podemos escrever

$$\begin{aligned} E[P(V_t \leq Z_t \leq W_t, t = 1, \dots, k | \underline{X}_0)] &= \\ &= E[P(V_1 \leq Z_1 \leq W_1 | \underline{X}_0) \times P(V_2 \leq Z_2 \leq W_2 | V_1 \leq Z_1 \leq W_1, \underline{X}_0) \times \dots \times \\ &\quad \times P(V_k \leq Z_k \leq W_k | V_t \leq Z_t \leq W_t, t = 1, \dots, k-1, \underline{X}_0)] \\ &= \prod_{t=1}^k E[P(V_t \leq Z_t \leq W_t)], \end{aligned}$$

pois as variáveis  $Z_1, \dots, Z_k$  são independentes e independentes de  $\underline{X}_0$ . Assim, obtemos a igualdade enunciada no lema, atendendo a que as variáveis  $Z_1, \dots, Z_k$  são ainda difusas e identicamente distribuídas. ■

No resultado seguinte concluímos, então, o enquadramento para o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $\delta > 0$ . Optámos, à semelhança do teorema 4 de Gonçalves e Mendes-Lopes (2007), por não apresentar o enquadramento para todas as ordens do modelo. Concretamente, vamos considerar apenas os casos do modelo  $\delta$ -TARCH( $p$ ) (*i.e.*,  $\gamma_1 = \dots = \gamma_q = 0$ , situação que resumiremos considerando  $q = 0$ ) e do modelo  $\delta$ -TGARCH(1,1). Entendemos que as deduções que faremos para estes dois casos permitem inferir o procedimento a adotar caso se pretendam considerar outras ordens, embora produzam expressões mais longas do que as dos casos indicados.

**Teorema 4.8** *Seja  $X$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $\delta > 0$ , tal que  $E(|Z_0|^\delta) < +\infty$  e  $S_\delta < 1$ . Adicionalmente, vamos admitir que as variáveis aleatórias  $Z_t$  são absolutamente contínuas, com densidade  $f_z$  diferenciável.*

*Consideremos a função*

$$h_\delta(x) = (1 + \delta) f_z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) + \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} f'_z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right),$$

onde  $y \in [\alpha_0, +\infty[$ . Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Para todo  $(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \in (\mathbb{R}_0^+)^{2n}$  tal que

$$x_t h_\delta(x_t) + x_t^* h_\delta(-x_t^*) \geq 0, \forall y \in [\alpha_0, +\infty[, \quad (4.6)$$

onde  $t = \begin{cases} 1, \dots, \min\{p, n\} & \text{se } q = 0 \\ 1, \dots, n, & \text{se } q = 1 \end{cases}$ , temos:

(a) caso  $q = 0$  e

(a.1)  $1 \leq p \leq n$ ,

$$\begin{aligned} F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) &\geq \\ &\geq \prod_{t=1}^p \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{u_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{u_t^{1/\delta}} \right) \right] \prod_{t=p+1}^n \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{v_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{v_t^{1/\delta}} \right) \right], \end{aligned}$$

(a.2)  $p > n \geq 1$ ,

$$F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \geq \prod_{t=1}^n \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{u_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{u_t^{1/\delta}} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \text{onde } u_t &= \sum_{i=1}^{t-1} \left[ \alpha_i (x_{t-i})^\delta + \beta_i (x_{t-i}^*)^\delta \right] + E(\sigma_t^\delta) \left[ 1 - \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta}) \right] e \\ v_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (x_{t-i})^\delta + \beta_i (x_{t-i}^*)^\delta \right]; \end{aligned}$$

(b) caso  $p = 1$  e  $q = 1$ ,

$$F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \geq \prod_{t=1}^n \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{w_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{w_t^{1/\delta}} \right) \right],$$

$$\text{onde } w_t = \alpha_0 \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} + \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} \left[ \alpha_1 (x_{t-j})^\delta + \beta_1 (x_{t-j}^*)^\delta \right] + \gamma_1^{t-1} E(\sigma_t^\delta).$$

**Demonstração:** Seja  $(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \in (\mathbb{R}_0^+)^{2n}$ .

(a.1) Começemos por considerar o caso  $q = 0$  e  $1 \leq p \leq n$ .

Como  $\delta > 0$ , então, para todo  $t$  em  $\{1, \dots, n\}$ , se  $X_t^+ \leq x_t$  e  $X_t^- \leq x_t^*$ , temos  $(X_t^+)^{\delta} \leq (x_t)^{\delta}$  e  $(X_t^-)^{\delta} \leq (x_t^*)^{\delta}$ , logo:

– para  $t \in \{2, \dots, p\}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \right] + \sum_{i=t}^p \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \right] \\ &\leq \alpha_0 + \sum_{i=1}^{t-1} \left[ \alpha_i (x_{t-i})^{\delta} + \beta_i (x_{t-i}^*)^{\delta} \right] + \sum_{i=t}^p \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \right] = U_t, \end{aligned}$$

já que, para  $i \in \{1, \dots, t-1\}$ ,  $1 \leq t-i \leq p-1 < n$  e, para  $i \in \{t, \dots, p\}$ ,  $t-i \leq 0$ ;

- para  $t = 1$ ,  $\sigma_1^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (X_{1-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{1-i}^-)^{\delta} \right]$ , logo  $\sigma_1 = U_1$ ;
- e, para  $t \in \{p+1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \right] \\ &\leq \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (x_{t-i})^{\delta} + \beta_i (x_{t-i}^*)^{\delta} \right] = v_t, \end{aligned}$$

pois, para  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $1 \leq t - i \leq n - 1$ .

Assim, como  $\delta > 0$ , para  $t = 1, \dots, p$ ,  $\sigma_t^\delta \leq U_t \Leftrightarrow \sigma_t \leq U_t^{\frac{1}{\delta}}$  e,  $t = p+1, \dots, n$ ,  $\sigma_t^\delta \leq v_t \Leftrightarrow \sigma_t \leq v_t^{\frac{1}{\delta}}$ . Portanto, usando também a equivalência (4.5), temos

$$\begin{aligned} &F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) = \\ &\geq P \left( -\frac{x_t^*}{U_t^{\frac{1}{\delta}}} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{U_t^{\frac{1}{\delta}}}, t = 1, \dots, p, -\frac{x_t^*}{v_t^{\frac{1}{\delta}}} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{v_t^{\frac{1}{\delta}}}, t = p+1, \dots, n \right). \end{aligned}$$

Como  $U_t^{\frac{1}{\delta}}$  é  $\underline{X}_0$ -mensurável ( $t = 1, \dots, p$ ) e  $v_t^{\frac{1}{\delta}}$  é não aleatório ( $t = p+1, \dots, n$ ), são satisfeitas as hipóteses do lema 4.7 e podemos afirmar que

$$\begin{aligned} &P \left( -\frac{x_t^*}{U_t^{\frac{1}{\delta}}} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{U_t^{\frac{1}{\delta}}}, t = 1, \dots, p, -\frac{x_t^*}{v_t^{\frac{1}{\delta}}} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{v_t^{\frac{1}{\delta}}}, t = p+1, \dots, n \right) = \\ &= \prod_{t=1}^p E \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{U_t^{\frac{1}{\delta}}} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{U_t^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right] \prod_{t=p+1}^n \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{v_t^{\frac{1}{\delta}}} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{v_t^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Fixando arbitrariamente  $a_1$  em  $\mathbb{R}_0^+$  e  $a_2$  em  $\mathbb{R}_0^-$ , vamos considerar a função  $\mathcal{R}_\delta : [\alpha_0, +\infty[ \longrightarrow [-1, 1]$  definida por

$$\mathcal{R}_\delta(y) = F_Z \left( \frac{a_1}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) - F_Z \left( \frac{a_2}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} F_Z \left( \frac{a_i}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right).$$

Temos, então,

$$\frac{d\mathcal{R}_\delta}{dy}(y) = \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{a_i}{\delta y^{\frac{1}{\delta}+1}} f_Z \left( \frac{a_i}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathcal{R}_\delta}{dy^2}(y) &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[ \frac{(1+\delta)a_i}{\delta^2 y^{\frac{1}{\delta}+2}} f_Z \left( \frac{a_i}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) + \frac{a_i^2}{\delta^2 y^{\frac{2}{\delta}+2}} f'_Z \left( \frac{a_i}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{a_i}{\delta^2 y^{\frac{1}{\delta}+2}} \left[ (1+\delta) f_Z \left( \frac{a_i}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) + \frac{a_i}{y^{\frac{1}{\delta}}} f'_Z \left( \frac{a_i}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{a_i}{\delta^2 y^{\frac{1}{\delta}+2}} h_\delta(a_i) \\
&= \frac{1}{\delta^2 y^{\frac{1}{\delta}+2}} [a_1 h_\delta(a_1) - a_2 h_\delta(a_2)].
\end{aligned}$$

Antes de avançar é importante notar que, como  $E(|Z_0|^\delta) < +\infty$  e  $S_\delta < 1$ ,  $E(U_t)$ , para  $t = 1, \dots, p$ , existe e é finita, tendo-se

$$\begin{aligned}
E(U_t) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{t-1} [\alpha_i (x_{t-i})^\delta + \beta_i (x_{t-i}^*)^\delta] + \sum_{i=t}^p \{ \alpha_i E[(X_{t-i}^+)^\delta] + \beta_i E[(X_{t-i}^-)^\delta] \} \\
&= \sum_{i=1}^{t-1} [\alpha_i (x_{t-i})^\delta + \beta_i (x_{t-i}^*)^\delta] + E(\sigma_t^\delta) \left[ 1 - \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta}) \right] = u_t,
\end{aligned}$$

uma vez que, como vimos na secção 2.4 do capítulo 2,  $E[(X_t^+)^\delta] = E(\sigma_t^\delta) \phi_{1,\delta}$ ,  $E[(X_t^-)^\delta] = E(\sigma_t^\delta) \phi_{2,\delta}$  e  $E(\sigma_t^\delta) = \alpha_0 \left[ 1 - \sum_{i=1}^p (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta}) \right]^{-1}$ .

Assim, considerando sucessivamente  $a_1 = x_t$  e  $a_2 = -x_t^*$ , para cada  $t$  em  $\{1, \dots, p\}$ , se  $x_t h_\delta\left(\frac{x_t}{y}\right) + x_t^* h_\delta\left(-\frac{x_t^*}{y}\right) \geq 0$ , então  $\mathcal{R}_\delta$  é convexa. Nestas condições, podemos aplicar a desigualdade de Jensen e temos

$$\begin{aligned}
&\prod_{t=1}^p E \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{U_t^\delta} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{U_t^\delta} \right) \right] \prod_{t=p+1}^n \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{v_t^\delta} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{v_t^\delta} \right) \right] \geq \\
&\geq \prod_{t=1}^p \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{[E(U_t)]^\delta} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{[E(U_t)]^\delta} \right) \right] \prod_{t=p+1}^n \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{v_t^\delta} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{v_t^\delta} \right) \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \geq \\
&\geq \prod_{t=1}^p \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{u_t^\delta} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{u_t^\delta} \right) \right] \prod_{t=p+1}^n \left[ F_Z \left( \frac{x_t}{v_t^\delta} \right) - F_Z \left( -\frac{x_t^*}{v_t^\delta} \right) \right],
\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade do caso (a.1).

**(a.2)** A prova da desigualdade quando  $q = 0$  e  $p > n \geq 1$ , é muito semelhante à do caso anterior.

Efetivamente, como também neste caso  $\delta > 0$ , então, para todo  $t$  em  $\{1, \dots, n\}$ , se  $X_t^+ \leq x_t$  e  $X_t^- \leq x_t^*$ , vem:

– para  $t \in \{2, \dots, n\}$ ,

$$\sigma_t^\delta \leq \alpha_0 + \sum_{i=1}^{t-1} [\alpha_i (x_{t-i})^\delta + \beta_i (x_{t-i}^*)^\delta] + \sum_{i=t}^p [\alpha_i (X_{t-i}^+)^\delta + \beta_i (X_{t-i}^-)^\delta] = U_t,$$

já que, para  $i \in \{1, \dots, t-1\}$ ,  $1 \leq t-i \leq n-1$  e, para  $i \in \{t, \dots, p\}$ ,  $t-i \leq 0$ ;

– para  $t = 1$ ,  $\sigma_1^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p [\alpha_i (X_{1-i}^+)^\delta + \beta_i (X_{1-i}^-)^\delta]$ , logo  $\sigma_1 = U_1$ .

Assim e recorrendo à equivalência (4.5), temos

$$F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \geq P \left( -\frac{x_t^*}{U_t^\delta} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{U_t^\delta}, t = 1, \dots, n \right).$$

A partir daqui e seguindo um raciocínio em tudo semelhante ao do caso anterior, conclui-se o pretendido.

**(b)** A obtenção da desigualdade do último caso também segue o mesmo processo. De facto, como  $\delta > 0$ , então, para todo  $t$  em  $\{1, \dots, n\}$ , se  $X_t^+ \leq x_t$  e  $X_t^- \leq x_t^*$ , temos:

– para  $t \in \{2, \dots, n\}$ ,

$$\sigma_t^\delta \leq \alpha_0 + \alpha_1 (x_{t-1})^\delta + \beta_1 (x_{t-1}^*)^\delta + \gamma_1 \sigma_{t-1}^\delta,$$

desigualdade esta que permite, por recorrência, obter

$$\sigma_t^\delta \leq \alpha_0 \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} + \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} [\alpha_1 (x_{t-j})^\delta + \beta_1 (x_{t-j}^*)^\delta] + \gamma_1^{t-1} \sigma_1^\delta = W_t;$$

– para  $t = 1$ , tem-se  $\sigma_1 = W_1$ .

Ora, como

$$F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, x_1^*, \dots, x_n, x_n^*) \geq P \left( -\frac{x_t^*}{W_t^\delta} \leq Z_t \leq \frac{x_t}{W_t^\delta}, t = 1, \dots, n \right),$$

onde  $W_t^{\frac{1}{\delta}}$  é  $\underline{X}_0$ -mensurável ( $t = 1, \dots, n$ ), seguindo o mesmo procedimento dos casos anteriores, obtém-se a desigualdade da alínea (b). ■

Finalizamos esta secção referindo que, quando a potência  $\delta$  do modelo é negativa, a desigualdade apresentada no teorema 4.6 inverte-se. No entanto, no teorema 4.8, não é possível fazer o mesmo, pelo menos considerando a mesma estratégia de demonstração aí usada. Assim, a obtenção do enquadramento é um problema parcialmente em aberto para  $\delta < 0$ .

### 4.3 Distribuições conjuntas

Estamos agora em condições de obter o enquadramento da função de distribuição de  $(X_1, \dots, X_n)$ , ou seja, de  $F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$ , para  $(x_1, \dots, x_n)$  em  $\mathbb{R}^n$ , quando a potência  $\delta$  do modelo é positiva <sup>(7)</sup>. Com o intuito de facilitar a sua apresentação, dividimos os resultados teóricos por três regiões: em 4.3.1, consideramos a região  $[0, +\infty[^n$ , em 4.3.2, a região  $]-\infty, 0]^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  e, em 4.3.3, a região  $\mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$ . Terminamos com um estudo de simulação, em 4.3.4, para avaliar a qualidade dos enquadramentos obtidos quando  $n = 2$ .

Porém, antes de avançar, provamos o lema seguinte, que será indispensável para algumas das demonstrações que se seguem e onde  $\text{fr}(A)$  designa a fronteira do conjunto  $A$ .

**Lema 4.9** *Seja  $X$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), tal que  $\sigma_t$  é  $X_{t-1}$ -mensurável e as variáveis  $Z_t$  são difusas. Então, para  $C \subseteq \text{fr}\left(\prod_{i=1}^n ]-\infty, x_i]\right)$ , com  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $P((X_1, \dots, X_n) \in C) = 0$ .*

**Demonstração:** Como

$$\text{fr}\left(\prod_{i=1}^n ]-\infty, x_i]\right) = \bigcup_{k=1}^n \left( \prod_{i=1}^{k-1} ]-\infty, x_i] \times \{x_k\} \times \prod_{i=k+1}^n ]-\infty, x_i] \right),$$

então, para  $C \subseteq \text{fr}\left(\prod_{i=1}^n ]-\infty, x_i]\right)$ ,

$$\begin{aligned} P((X_1, \dots, X_n) \in C) &\leq P\left((X_1, \dots, X_n) \in \text{fr}\left(\prod_{i=1}^n ]-\infty, x_i]\right)\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n P\left((X_1, \dots, X_n) \in \prod_{i=1}^{k-1} ]-\infty, x_i] \times \{x_k\} \times \prod_{i=k+1}^n ]-\infty, x_i]\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n P(X_k = x_k) = 0, \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>Como vamos ver, quando  $\delta < 0$ , conseguimos apenas o limite mais imediato do enquadramento. Assim, faremos só breves referências ao caso em que a potência  $\delta$  é negativa.

pois se as variáveis  $Z_t$  são difusas o mesmo acontece às variáveis  $X_t$ . ■

É interessante notar que este lema apresenta como consequência imediata que um processo  $\delta$ -TGARCH que esteja nas condições referidas no lema tem leis de dimensão finita difusas.

### 4.3.1 Região $[0, +\infty[^n$

Começamos por enquadrar  $F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$ , quando  $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ .

A majoração, apresentada no teorema seguinte, é uma generalização imediata da alínea (a.1) do teorema 4.1 relativo à distribuição marginal <sup>(8)</sup>.

**Teorema 4.10** *Seja  $X$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $\delta > 0$ , tal que  $\gamma_\tau < 1$ . Então, para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{t=1}^n F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right),$$

$$\text{onde } \theta = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Vamos, seguidamente, completar o enquadramento para o modelo de potência positiva com a minoração da função de distribuição  $F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n)$ , obtida à custa da função de distribuição do vetor  $(X_1^+, X_1^-, \dots, X_t^+, X_t^-)$ , para  $t = 1, \dots, n$ .

Esta minoração é construída tendo por base a probabilidade inicial escrita como uma soma de probabilidades onde as variáveis são limitadas, superior ou inferiormente, por 0. Por exemplo, para  $n = 2$ , partimos de

$$\begin{aligned} F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) &= P(X_1 < 0, X_2 < 0) + P(X_1 < 0, 0 \leq X_2 \leq x_2) + \\ &+ P(0 \leq X_1 \leq x_1, X_2 < 0) + P(0 \leq X_1 \leq x_1, 0 \leq X_2 \leq x_2). \end{aligned}$$

O aumento de  $n$  faz crescer exponencialmente o número de parcelas. Assim, houve necessidade de introduzir uma notação que, apesar dos melhores esforços, se reveste de alguma complexidade de leitura.

Por esta razão, começamos por apresentar esta notação considerando  $n = 3$ . Estamos, portanto, a considerar

$$F_{(X_1, X_2, X_3)}(x_1, x_2, x_3) = P\left((X_1, X_2, X_3) \in \prod_{t=1}^3 ]-\infty, x_t]\right).$$

Como, para todo  $t$ ,  $]-\infty, x_t] = ]-\infty, 0[ \cup [0, x_t]$ , vamos denotar estes intervalos da seguinte forma:  $C_t^{(-1)} = ]-\infty, 0[$  e  $C_t^{(+1)} = [0, x_t]$ . Chamamos desde já a atenção

<sup>8</sup>No caso em que  $\delta < 0$ , obtém-se uma minoração, generalizando a alínea (a.2) do teorema 4.1.



para o facto de que o expoente usado na notação funcionará também como número, isto é, por exemplo,  $C_t^{(-1)^2} = C_t^{(+1)}$  e  $C_t^{(-1)^3} = C_t^{(-1)}$ .

Servindo-nos desta notação, vamos desenvolver o produto cartesiano <sup>(9)</sup>:

$$\begin{aligned} \prod_{t=1}^3 ]-\infty, x_t] &= \prod_{t=1}^3 \left( C_t^{(+1)} \cup C_t^{(-1)} \right) \\ &= C_1^{(+1)} \times C_2^{(+1)} \times C_3^{(+1)} \cup C_1^{(+1)} \times C_2^{(+1)} \times C_3^{(-1)} \cup \\ &\quad \cup C_1^{(+1)} \times C_2^{(-1)} \times C_3^{(+1)} \cup C_1^{(+1)} \times C_2^{(-1)} \times C_3^{(-1)} \cup \\ &\quad \cup C_1^{(-1)} \times C_2^{(+1)} \times C_3^{(+1)} \cup C_1^{(-1)} \times C_2^{(+1)} \times C_3^{(-1)} \cup \\ &\quad \cup C_1^{(-1)} \times C_2^{(-1)} \times C_3^{(+1)} \cup C_1^{(-1)} \times C_2^{(-1)} \times C_3^{(-1)}. \end{aligned}$$

Obtemos, então, a reunião de  $2^3$  produtos cartesianos, cujos expoentes formam os arranjos com repetição dos números  $(+1)$  e  $(-1)$ , 3 a 3. Para a representação concisa desta reunião, vamos considerar o terno  $\left( (-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2^2} \rfloor}, (-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2^1} \rfloor}, (-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2^0} \rfloor} \right)$ , onde  $\lfloor x \rfloor$ , que surge no expoente, denota a parte inteira do número  $x$ . Por exemplo, para  $k = 1$ , vem  $((+1), (+1), (+1))$ , para  $k = 2$ , fica  $((+1), (+1), (-1))$ , para  $k = 3$ , resulta em  $((+1), (-1), (+1))$  e assim sucessivamente até  $k = 2^3$ , quando obtemos  $((-1), (-1), (-1))$ . Podemos, então, dizer que, fazendo  $k$  variar de 1 a  $2^3$ , este terno nos permite obter os arranjos com repetição dos números  $(+1)$  e  $(-1)$ , 3 a 3, exatamente pela mesma ordem da apresentada na expressão anterior. Logo

$$\begin{aligned} \prod_{t=1}^3 ]-\infty, x_t] &= \bigcup_{k=1}^{2^3} \left( C_1^{(-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2^2} \rfloor}} \times C_2^{(-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2^1} \rfloor}} \times C_3^{(-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2^0} \rfloor}} \right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{2^3} \left( \prod_{t=1}^3 C_t^{(-1)^{\lfloor \frac{k-1}{2^{3-t}} \rfloor}} \right). \end{aligned}$$

Exemplificada a notação, passamos ao resultado referente à minoração.

**Teorema 4.11** *Seja  $X$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que  $\sigma_t$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável e as variáveis  $Z_t$  são difusas. Para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , verifica-se*

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\geq \\ &\geq [F_Z(0)]^n + \sum_{k=1}^n F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_k^+, X_k^-)}(x_1, 0, \dots, x_k, 0) [F_Z(0)]^{n-k} + \\ &\quad + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2^0, 2^1, \dots, 2^n}}^{2^n} F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(a_{k,1}, a_{k,1}^*, \dots, a_{k,n}, a_{k,n}^*), \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Dados os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  quaisquer, temos  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$  e também  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ .

sendo  $a_{k,t} = \begin{cases} x_t & \text{se } \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$  e  $a_{k,t}^* = \begin{cases} 0 & \text{se } \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor \text{ é par} \\ y_t & \text{caso contrário} \end{cases}$ , com  $y_t$  arbitrariamente fixo em  $[0, +\infty[$  e onde  $\lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor$  denota a parte inteira do número  $\frac{k-1}{2^{n-t}}$ .

**Demonstração:** Seja  $(x_1, \dots, x_n) \in [0, +\infty[^n$ , com  $n$  fixo em  $\mathbb{N}$ . Pretendemos minorar

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n ]-\infty, x_t] \right).$$

Com esse objetivo, começamos por nos focar no conjunto  $\prod_{t=1}^n ]-\infty, x_t]$ . Introduzindo a notação, para  $t = 1, \dots, n$ ,  $C_t^{(-1)} = ]-\infty, 0[$  e  $C_t^{(+1)} = [0, x_t]$ , temos a seguinte igualdade, que se prova por recorrência:

$$\prod_{t=1}^n ]-\infty, x_t] = \prod_{t=1}^n \left( C_t^{(+1)} \cup C_t^{(-1)} \right) = \bigcup_{k=1}^{2^n} \left( \prod_{t=1}^n C_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} \right).$$

Para  $t = 1, \dots, n$ , como  $C_t^{(+1)} \cap C_t^{(-1)} = \emptyset$ , então

$$\prod_{t=1}^n C_t^{(-1) \lfloor \frac{k_1-1}{2^{n-t}} \rfloor} \cap \prod_{t=1}^n C_t^{(-1) \lfloor \frac{k_2-1}{2^{n-t}} \rfloor} = \emptyset,$$

para  $k_1, k_2 \in \{1, \dots, 2^n\}$  tais que  $k_1 \neq k_2$ .

Assim sendo,

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{2^n} P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n C_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} \right).$$

Calculamos, agora,  $P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n C_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} \right)$ , para  $k = 2^{n-j}$ , com  $j$  a variar de 0 até  $n$ .

Notando que, para  $k = 2^0$ , vem  $\prod_{t=1}^n C_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} = \prod_{t=1}^n C_t^{(+1)}$ , temos

$$\begin{aligned} P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n C_t^{(+1)} \right) &= P(0 \leq X_t \leq x_t, t = 1, \dots, n) \\ &= P(X_t^+ \leq x_t, X_t^- \leq 0, t = 1, \dots, n) \\ &= F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, 0, \dots, x_n, 0). \end{aligned}$$

Fazendo  $k = 2^n$ , obtemos  $\prod_{t=1}^n C_t^{(-1)\lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} = \prod_{t=1}^n C_t^{(-1)}$ , portanto,

$$\begin{aligned} P\left((X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n C_t^{(-1)}\right) &= P(X_t < 0, t = 1, \dots, n) \\ &= P(Z_t < 0, t = 1, \dots, n) \\ &= \prod_{t=1}^n P(Z_t < 0) \\ &= [F_Z(0)]^n, \end{aligned}$$

uma vez que  $\sigma_t > 0$ , para  $t \in \{1, \dots, n\}$ , e as variáveis  $Z_1, \dots, Z_n$  são i.i.d. e difusas.

Finalmente, vejamos o que acontece para  $k = 2^{n-j}$ , com  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ . Neste caso, temos  $\prod_{t=1}^n C_t^{(-1)\lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} = \prod_{t=1}^j C_t^{(+1)} \times \prod_{t=j+1}^n C_t^{(-1)}$ , logo

$$\begin{aligned} P\left((X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^j C_t^{(+1)} \times \prod_{t=j+1}^n C_t^{(-1)}\right) &= \\ &= P(0 \leq X_t \leq x_t, t = 1, \dots, j, X_t < 0, t = j+1, \dots, n) \\ &= P(0 \leq X_t \leq x_t, t = 1, \dots, j, Z_t < 0, t = j+1, \dots, n) \\ &= P(X_t^+ \leq x_t, X_t^- \leq 0, t = 1, \dots, j) \prod_{t=j+1}^n P(Z_t < 0) \\ &= F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_j^+, X_j^-)}(x_1, 0, \dots, x_j, 0) \times [F_Z(0)]^{n-j}, \end{aligned}$$

pois, para além do facto já referido de  $\sigma_t > 0$ , para  $t \in \{j+1, \dots, n\}$ , e das variáveis  $Z_1, \dots, Z_n$  serem i.i.d. e difusas, temos também, para  $t \in \{j+1, \dots, n\}$ , que  $Z_t$  é independente de  $\underline{X}_{t-1}$ .

Seguidamente, para os restantes valores de  $k$ , ou seja, para  $k \in \{1, \dots, 2^n\}$  tal que  $k \neq 2^{n-j}$  com  $j$  a variar de 0 até  $n$ , vamos obter uma minoração de  $P\left((X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n C_t^{(-1)\lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor}\right)$ .

Fixemos arbitrariamente  $(y_1, \dots, y_n)$  em  $]0, +\infty[^n$ .

Para  $t = 1, \dots, n$ , temos  $[-y_t, 0[ \subset C_t^{(-1)}$ . Usando a notação  $D_t^{(-1)} = [-y_t, 0[$  e  $D_t^{(+1)} = C_t^{(+1)}$ , vem

$$P\left((X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n C_t^{(-1)\lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor}\right) \geq P\left((X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n D_t^{(-1)\lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor}\right).$$

Consideremos, agora,

$$a_{k,t} = \begin{cases} x_t & \text{se } \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad a_{k,t}^* = \begin{cases} 0 & \text{se } \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor \text{ é par} \\ y_t & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Temos então, caso  $\lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor$  seja par,  $[-a_{k,t}^*, a_{k,t}] = [0, x_t] = D_t^{(+1)}$  e, caso  $\lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor$  seja ímpar,  $[-a_{k,t}^*, a_{k,t}] = [-y_t, 0] = D_t^{(-1)} \cup \{0\}$ . Logo, atendendo ao lema 4.9,

$$\begin{aligned} P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n D_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} \right) &= P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n [-a_{k,t}^*, a_{k,t}] \right) \\ &= P \left( X_t^+ \leq a_{k,t}, X_t^- \leq a_{k,t}^*, t = 1, \dots, n \right) \\ &= F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(a_{k,1}, a_{k,1}^*, \dots, a_{k,n}, a_{k,n}^*). \end{aligned}$$

Assim, juntando as conclusões para todos os valores de  $k$  entre 1 e  $2^n$ , obtemos a minoração indicada no enunciado do teorema. ■

O teorema anterior é válido para qualquer  $\delta$ , positivo ou negativo, já que o sinal de  $\delta$  não tem qualquer influência na sua demonstração. No entanto, é apenas útil quando a potência é positiva <sup>(10)</sup>. Assim, nas observações que se seguem consideramos sempre  $\delta > 0$ .

Começamos por notar que este resultado só será utilizável quando conjugado com o teorema 4.8, onde é obtida a minoração da função de distribuição do vetor  $(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)$  apenas à custa da função de distribuição marginal do processo gerador e dos parâmetros do modelo. Assim, é importante notar que as hipóteses do teorema 4.8 são mais fortes, implicando todas as hipóteses do teorema 4.11. Outra questão relevante é a da escolha dos  $y_t$ . Ora, sendo a minoração do teorema 4.11 válida para quaisquer  $y_t$  positivos mas sabendo que será tanto melhor quanto maiores forem os  $y_t$ , na prática, para cada  $t$ ,  $y_t$  deve ser o maior real que satisfaz a condição (4.6) do teorema 4.8. Finalizamos referindo que, quando  $n = 1$ , a minoração obtida da conjugação dos teoremas 4.8 e 4.11 coincide com a minoração da alínea (a.1) do teorema 4.2 relativo à distribuição marginal.

### 4.3.2 Região $]-\infty, 0]^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$

Também para a região  $]-\infty, 0]^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ , a primeira parte do enquadramento é uma generalização imediata da alínea (b.1) do teorema 4.1 relativo à distribuição marginal <sup>(11)</sup>.

<sup>10</sup>De facto, para  $\delta < 0$ , a minoração obtida no teorema 4.11, quando articulada com a adaptação do teorema 4.6 para este caso, é igual à minoração que resulta da generalização da alínea (a.2) do teorema 4.1, ou seja, em ambos os casos ficamos com  $F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \geq \prod_{t=1}^n F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right)$ .

<sup>11</sup>No caso em que  $\delta < 0$ , obtém-se uma majoração, generalizando a alínea (b.2) do teorema 4.1.

**Teorema 4.12** *Seja  $X$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $\delta > 0$ , tal que  $\gamma_\tau < 1$ . Então, para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in ]-\infty, 0]^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \geq \prod_{t=1}^n F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right),$$

$$\text{onde } \theta = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

Terminamos o enquadramento para esta região no caso em que a potência  $\delta$  é positiva com a majoração da função de distribuição também obtida à custa da função de distribuição de  $(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)$  <sup>(12)</sup>.

**Teorema 4.13** *Seja  $X$  um processo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que  $\sigma_t$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável e as variáveis  $Z_t$  são difusas. Logo, para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in ]-\infty, 0]^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \leq [F_Z(0)]^n - F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(0, -x_1, \dots, 0, -x_n).$$

**Demonstração:** O início desta prova é semelhante à do teorema 4.11, sendo aqui o ponto de partida o conjunto  $]-\infty, 0]^n$ .

Seja  $(x_1, \dots, x_n) \in ]-\infty, 0]^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ , com  $n$  fixo em  $\mathbb{N}$ .

Como

$$]-\infty, 0]^n = \prod_{t=1}^n \left( \mathcal{C}_t^{(+1)} \cup \mathcal{C}_t^{(-1)} \right) = \bigcup_{k=1}^{2^n} \left( \prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} \right),$$

onde, para  $t = 1, \dots, n$ ,  $\mathcal{C}_t^{(-1)} = ]-\infty, x_t[$  e  $\mathcal{C}_t^{(+1)} = [x_t, 0]$ , tendo-se  $\mathcal{C}_t^{(+1)} \cap \mathcal{C}_t^{(-1)} = \emptyset$ , então

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(0, \dots, 0) = \sum_{k=1}^{2^n} P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} \right).$$

Ora,  $F_{(X_1, \dots, X_n)}(0, \dots, 0) = [F_Z(0)]^n$ . Quando  $k = 2^n$ ,  $\prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} = \prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(-1)}$ , o que permite escrever

$$P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(-1)} \right) = F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n),$$

<sup>12</sup>Embora o teorema 4.13 seja válido para qualquer  $\delta$  positivo ou negativo, quando  $\delta < 0$  verifica-se facilmente que o majorante produzido pela sua conjugação com a adaptação do teorema 4.6 para este caso é pior do que o majorante que resulta da generalização da alínea (b.2) do teorema 4.1.

atendendo ao lema 4.9. Finalmente, para  $k = 1$ , vem  $\prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} = \prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(+1)}$ , portanto,

$$\begin{aligned} P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(+1)} \right) &= P(-x_t \leq X_t \leq 0, t = 1, \dots, n) \\ &= F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(0, -x_1, \dots, 0, -x_n). \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &= [F_Z(0)]^n - F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(0, -x_1, \dots, 0, -x_n) + \\ &\quad - \sum_{k=2}^{2^{n-1}} P \left( (X_1, \dots, X_n) \in \prod_{t=1}^n \mathcal{C}_t^{(-1) \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor} \right), \end{aligned}$$

concluindo-se, daqui, facilmente o pretendido. ■

### 4.3.3 Região $\mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$

Nesta última região  $\mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$ , com  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , consideramos, exclusivamente, o modelo  $\delta$ -TGARCH com potência positiva.

Nos teoremas desta subsecção utilizamos os seguintes quatro conjuntos de índices:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^+ &= \{t \in \{1, \dots, n\} : x_t > 0\}, \text{ com } \check{\eta} = \min \mathcal{I}^+ \text{ e } \#\mathcal{I}^+ = k; \\ \mathcal{I}^- &= \{t \in \{1, \dots, n\} : x_t < 0\}, \text{ com } \check{\eta} = \min \mathcal{I}^-; \\ \mathcal{I}^{+*} &= \{t \in \mathcal{I}^+ : t > \check{\eta}\} \text{ tal que } \#\mathcal{I}^{+*} = k^*; \\ \mathcal{I}^{-*} &= \{t \in \mathcal{I}^- : t > \check{\eta}\} \text{ tal que } \#\mathcal{I}^{-*} = \kappa^*. \end{aligned}$$

Começamos por obter uma majoração para a função de distribuição em causa.

**Teorema 4.14** *Seja  $X$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que  $\delta > 0$  e  $\gamma_\tau < 1$ . Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  um elemento qualquer de  $\mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$ , para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , com  $k$  coordenadas positivas, para  $1 \leq k < n$ .*

*Então:*

(a) *se  $x_1 \leq 0$ , temos*

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\leq \\ &\leq F_{(X_1, \dots, X_{\check{\eta}-1})}(x_1, \dots, x_{\check{\eta}-1}) \prod_{t \in \mathcal{I}^+} F_Z \left( \frac{x_t}{\theta} \right) \times [F_Z(0)]^{n-k-(\check{\eta}-1)}, \end{aligned}$$

(b) *se  $x_1 \geq 0$ , temos*

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\leq \\ &\leq F_{(X_1, \dots, X_{\check{\eta}-1})}(x_1, \dots, x_{\check{\eta}-1}) \prod_{t \in \mathcal{I}^{+*}} F_Z \left( \frac{x_t}{\theta} \right) \times [F_Z(0)]^{n-k^*-(\check{\eta}-1)}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \theta = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

**Demonstração:** Sendo as provas das duas alíneas em tudo semelhantes, apresentamos, de seguida, apenas a da alínea (a).

Seja  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$ , com  $n$  fixo em  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ , tal que  $k$  das suas coordenadas são positivas, com  $1 \leq k < n$ .

Se  $x_1 \leq 0$ , vem

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}, X_{\check{\eta}} \leq x_{\check{\eta}}, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P\left(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}, Z_{\check{\eta}} \leq \frac{x_{\check{\eta}}}{\sigma_{\check{\eta}}}, \dots, Z_n \leq \frac{x_n}{\sigma_n}\right). \end{aligned}$$

Portanto, para  $1 \leq t \leq \check{\eta} - 1$ ,  $x_t \leq 0$  e, para  $t = \check{\eta}$ ,  $x_t > 0$ .

Para  $\check{\eta} \leq t \leq n$ , vamos majorar cada coordenada do seguinte modo: se  $x_t \leq 0$ , então, como  $\sigma_t > 0$ , temos  $\frac{x_t}{\sigma_t} \leq 0$  e, portanto,  $\left\{Z_t \leq \frac{x_t}{\sigma_t}\right\} \subseteq \{Z_t \leq 0\}$ ; se  $x_t > 0$ , como, do lema A.1 do apêndice A,  $\sigma_t \geq \theta$ , então temos  $\frac{x_t}{\sigma_t} \leq \frac{x_t}{\theta}$  e, portanto,  $\left\{Z_t \leq \frac{x_t}{\sigma_t}\right\} \subseteq \left\{Z_t \leq \frac{x_t}{\theta}\right\}$ . Logo

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \leq P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}, Z_{\check{\eta}} \leq u_{\check{\eta}}, \dots, Z_n \leq u_n),$$

onde  $u_t = \begin{cases} 0 & \text{se } x_t \leq 0 \\ \frac{x_t}{\theta} & \text{se } x_t > 0 \end{cases}$ , para  $t = \check{\eta}, \dots, n$ , é não aleatório.

Como as variáveis  $Z_{\check{\eta}}, \dots, Z_n$  são independentes e são independentes de  $X_{\check{\eta}-1}$ , então

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}, Z_{\check{\eta}} \leq u_{\check{\eta}}, \dots, Z_n \leq u_n) &= \\ &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}) \times P(Z_{\check{\eta}} \leq u_{\check{\eta}}) \times \dots \times P(Z_n \leq u_n) \\ &= F_{(X_1, \dots, X_{\check{\eta}-1})}(x_1, \dots, x_{\check{\eta}-1}) \times F_Z(u_{\check{\eta}}) \times \dots \times F_Z(u_n). \end{aligned}$$

Assim sendo, atendendo à definição de  $u_t$ , podemos concluir que

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\leq \\ &\leq F_{(X_1, \dots, X_{\check{\eta}-1})}(x_1, \dots, x_{\check{\eta}-1}) \prod_{t \in \mathcal{I}^+} F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right) \times [F_Z(0)]^{n-k-(\check{\eta}-1)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Os majorantes obtidos no teorema anterior dependem da função de distribuição de  $(X_1, \dots, X_t)$ , com  $t < n$ . Não há aqui qualquer problema, já que o ponto onde é calculada esta função tem todas as coordenadas não positivas, na alínea (a), e não negativas, na alínea (b), o que possibilita a utilização dos resultados desenvolvidos para as regiões  $[0, +\infty[^n$  e  $]-\infty, 0]^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ . O mesmo vai acontecer no teorema seguinte, onde completamos o enquadramento.

**Teorema 4.15** *Seja  $X$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que  $\delta > 0$  e  $\gamma_\tau < 1$ . Seja  $(x_1, \dots, x_n)$  um elemento qualquer de  $\mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$ , para  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , com  $\kappa$  coordenadas negativas, para  $1 \leq \kappa < n$ .*

*Então:*

(a) *se  $x_1 \leq 0$ , temos*

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\geq \\ &\geq F_{(X_1, \dots, X_{\check{\eta}-1})}(x_1, \dots, x_{\check{\eta}-1}) \prod_{t \in \mathcal{I}^*} F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right) \times [F_Z(0)]^{n-\kappa^*-(\check{\eta}-1)}, \end{aligned}$$

(b) *se  $x_1 \geq 0$ , temos*

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\geq \\ &\geq F_{(X_1, \dots, X_{\check{\eta}-1})}(x_1, \dots, x_{\check{\eta}-1}) \prod_{t \in \mathcal{I}^-} F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right) \times [F_Z(0)]^{n-\kappa-(\check{\eta}-1)}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \theta = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

**Demonstração:** Também as demonstrações das alíneas (a) e (b) deste teorema são semelhantes. Assim, fazemos a prova da alínea (a).

Seja  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$ , com  $n$  fixo em  $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ , tal que  $\kappa$  das suas coordenadas são negativas, com  $1 \leq \kappa < n$ .

Atendendo a que  $x_1 \leq 0$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}, X_{\check{\eta}} \leq x_{\check{\eta}}, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= P\left(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}, Z_{\check{\eta}} \leq \frac{x_{\check{\eta}}}{\sigma_{\check{\eta}}}, \dots, Z_n \leq \frac{x_n}{\sigma_n}\right). \end{aligned}$$

Portanto, para  $1 \leq t \leq \check{\eta} - 1$ ,  $x_t \leq 0$  e, para  $t = \check{\eta}$ ,  $x_t > 0$ .

Para  $\check{\eta} \leq t \leq n$ , vamos minorar cada coordenada do seguinte modo: se  $x_t \geq 0$ , então, como  $\sigma_t > 0$ , temos  $\frac{x_t}{\sigma_t} \geq 0$  e, portanto,  $\{Z_t \leq 0\} \subseteq \left\{Z_t \leq \frac{x_t}{\sigma_t}\right\}$ ; se  $x_t < 0$ , como, do lema A.1 do apêndice A,  $\sigma_t \geq \theta$ , então temos  $\frac{x_t}{\sigma_t} \geq \frac{x_t}{\theta}$  e, portanto,  $\{Z_t \leq \frac{x_t}{\theta}\} \subseteq \left\{Z_t \leq \frac{x_t}{\sigma_t}\right\}$ . Logo

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \geq P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}, Z_{\check{\eta}} \leq v_{\check{\eta}}, \dots, Z_n \leq v_n),$$

onde  $v_t = \begin{cases} 0 & \text{se } x_t \geq 0 \\ \frac{x_t}{\theta} & \text{se } x_t < 0 \end{cases}$ , para  $t = \check{\eta}, \dots, n$ , é não aleatório.



Como as variáveis  $Z_{\check{\eta}}, \dots, Z_n$  são independentes e são independentes de  $\underline{X}_{\check{\eta}-1}$ , então

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}, Z_{\check{\eta}} \leq v_{\check{\eta}}, \dots, Z_n \leq v_n) &= \\ &= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_{\check{\eta}-1} \leq x_{\check{\eta}-1}) \times P(Z_{\check{\eta}} \leq v_{\check{\eta}}) \times \dots \times P(Z_n \leq v_n) \\ &= F_{(X_1, \dots, X_{\check{\eta}-1})}(x_1, \dots, x_{\check{\eta}-1}) \times F_Z(v_{\check{\eta}}) \times \dots \times F_Z(v_n). \end{aligned}$$

Assim, atendendo à definição de  $v_t$ , podemos concluir que

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\geq \\ &\geq F_{(X_1, \dots, X_{\check{\eta}-1})}(x_1, \dots, x_{\check{\eta}-1}) \prod_{t \in \mathcal{I}^*} F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right) \times [F_Z(0)]^{n-\kappa^*-(\check{\eta}-1)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

#### 4.3.4 Estudo de simulação

Obtido o enquadramento teórico das distribuições de dimensão finita de um processo  $X$  seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH, apresentamos agora um estudo de simulação para avaliação da sua qualidade. O estudo centrou-se no enquadramento determinado para  $F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$ , por possibilitar uma comparação gráfica análoga à que foi feita para a distribuição marginal. O modelo considerado foi sempre o  $\delta$ -TGARCH com ambas as ordens iguais a 1, o que permitiu usar todas as expressões de majorantes e minorantes determinadas neste capítulo, à exceção das expressões da alínea (a) do teorema 4.8.

Começamos por indicar, para o modelo  $\delta$ -TGARCH(1, 1), as expressões do enquadramento resultantes da concretização, para  $n = 2$ , dos teoremas das subsecções anteriores, conjugados, sempre que necessário, com os resultados da secções 4.1 e 4.2. Temos, então, para cada  $(x_1, x_2)$ , um majorante e um minorante de  $F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$ , que vamos representar por  $LS(x_1, x_2)$  e  $LI(x_1, x_2)$ , respetivamente. Para facilitar a apresentação, considerámos  $\mathbb{R}^2$  dividido nos seus quatro quadrantes, incluindo os pontos da forma  $(0, x_2)$  e  $(x_1, 0)$  no quadrante ímpar apropriado.

Assim, vem

$$LS(x_1, x_2) = \begin{cases} F_Z\left(\frac{x_1}{\theta}\right) F_Z\left(\frac{x_2}{\theta}\right), & (x_1, x_2) \in 1.^\circ Q \\ F_Z\left(\frac{x_1}{\varpi_1}\right) F_Z\left(\frac{x_2}{\theta}\right), & (x_1, x_2) \in 2.^\circ Q \text{ tal que} \\ & h_\delta(x_1) \geq 0 \\ [F_Z(0)]^2 - \left[F_Z(0) - F_Z\left(\frac{x_1}{\varpi_1}\right)\right] \times \\ \times \left[F_Z(0) - F_Z\left(\frac{x_2}{\varpi_3(-x_1)}\right)\right], & (x_1, x_2) \in 3.^\circ Q \text{ tal que} \\ & h_\delta(-x_1) \geq 0 \text{ e } h_\delta(-x_2) \geq 0 \\ F_Z\left(\frac{x_1}{\theta}\right) F_Z(0), & (x_1, x_2) \in 4.^\circ Q \end{cases}$$

e

$$LI(x_1, x_2) = \begin{cases} [F_Z(0)]^2 + [F_Z\left(\frac{x_1}{\varpi_1}\right) - F_Z(0)] F_Z(0) + \\ + [F_Z\left(\frac{x_1}{\varpi_1}\right) - F_Z(0)] [F_Z\left(\frac{x_2}{\varpi_2(x_1)}\right) - F_Z(0)] + \\ + [F_Z(0) - F_Z\left(-\frac{y_1}{\varpi_1}\right)] [F_Z\left(\frac{x_2}{\varpi_3(y_1)}\right) - F_Z(0)], & (x_1, x_2) \in 1.^\circ Q \text{ tal que} \\ & h_\delta(x_1) \geq 0 \text{ e } h_\delta(x_2) \geq 0 \\ F_Z\left(\frac{x_1}{\theta}\right) F_Z(0), & (x_1, x_2) \in 2.^\circ Q \\ F_Z\left(\frac{x_1}{\theta}\right) F_Z\left(\frac{x_2}{\theta}\right), & (x_1, x_2) \in 3.^\circ Q \\ F_Z\left(\frac{x_1}{\varpi_1}\right) F_Z\left(\frac{x_2}{\theta}\right), & (x_1, x_2) \in 4.^\circ Q \text{ tal que} \\ & h_\delta(x_1) \geq 0 \end{cases}$$

com  $\theta = \left(\frac{\alpha_0}{1-\gamma_1}\right)^{1/\delta}$ ,  $\varpi_1 = [E(\sigma_t^\delta)]^{1/\delta}$ ,  $\varpi_2(x) = [\alpha_0 + \alpha_1 x^\delta + \gamma_1 E(\sigma_t^\delta)]^{1/\delta}$  e  $\varpi_3(x) = [\alpha_0 + \beta_1 x^\delta + \gamma_1 E(\sigma_t^\delta)]^{1/\delta}$  e onde  $y_1$  é escolhido de forma a ser o maior real positivo que verifica  $h_\delta(-y_1) \geq 0$ .

Dando continuidade ao estudo de simulação feito para a distribuição marginal de  $X$  quando a distribuição marginal do processo gerador é a Gaussiana padrão, considerámos agora o modelo  $\delta$ -TGARCH(1, 1), com  $\alpha_0 = 10$ ,  $\alpha_1 = 0.3$ ,  $\beta_1 = 0.5$ ,  $\gamma_1 = 0.2$ , tal que  $Z_t \sim N(0, 1)$ , fazendo  $\delta$  sucessivamente igual a  $\frac{1}{2}$  (figura 4.5) e 2 (figura 4.6). Em cada uma das figuras, o mesmo gráfico é apresentado sob quatro perspectivas diferentes, tendo representado, a laranja,  $LS(x_1, x_2)$ , a azul,  $LI(x_1, x_2)$  e, a verde, a estimativa de  $F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$ , obtida a partir de 10000 realizações do processo  $X$  <sup>(13)</sup>. Por uma questão de leitura dos gráficos, optámos por exibir apenas a região tal que  $(x_1, x_2) \in \left[-\alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1+\delta}, \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1+\delta}\right]^2$ , onde está garantido, se atendermos ao exemplo 4.3, que  $h_\delta(x_1) \geq 0$  e  $h_\delta(x_2) \geq 0$  <sup>(14)</sup>. No entanto, é importante observar que a região onde os enquadramentos teóricos de  $F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$  por  $LS(x_1, x_2)$  e  $LI(x_1, x_2)$  são válidos é mais vasta, como é imediato constatar da leitura das suas expressões. Referimos, ainda, que considerámos  $y_1 = \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{1+\delta}$ .

Da observação das figuras 4.5 e 4.6 destacamos que: no 1.º quadrante, o limite inferior apresenta, em ambos os casos, boa qualidade, ao contrário do limite superior, obtido do teorema 4.10 (que usa a minoração de  $\sigma_t$  por  $\theta$ ), mas que parece melhorar com o aumento de  $\delta$ ; no 2.º quadrante, observamos uma clara melhoria na qualidade do enquadramento com o aumento de  $\delta$ , principalmente no que diz respeito ao limite superior; nos 3.º e 4.º quadrantes, há uma melhoria do limite inferior com o aumento de  $\delta$ , o mesmo não se podendo dizer do limite superior. Também

<sup>13</sup>O ficheiro do programa *Mathematica 8* usado para obter estas simulações está incluído no apêndice C.

<sup>14</sup>O facto da densidade da Gaussiana padrão ser uma função par, implica que  $h_\delta$  também o é.

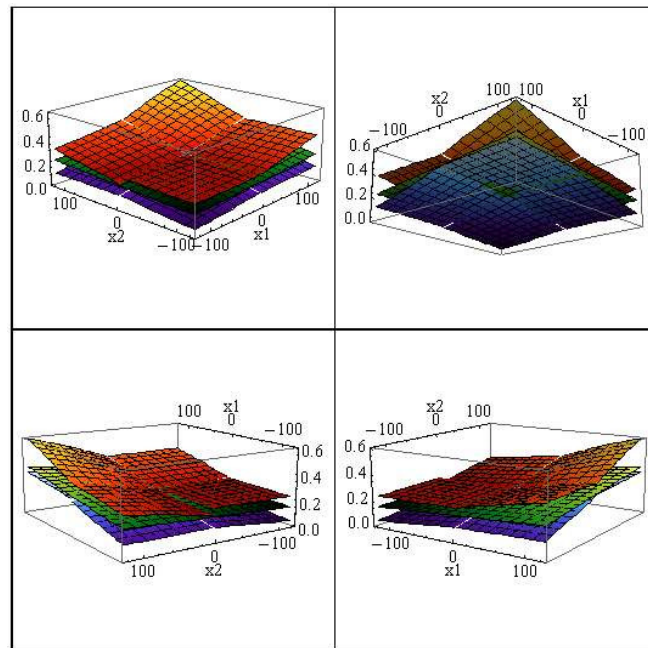


Figura 4.5: Representação gráfica de  $LS(x_1, x_2)$  (laranja), de  $LI(x_1, x_2)$  (azul) e da estimativa de  $F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$  (verde), para  $X \sim \frac{1}{2}\text{-TGARCH}(1, 1)$  e  $Z_t \sim N(0, 1)$ .

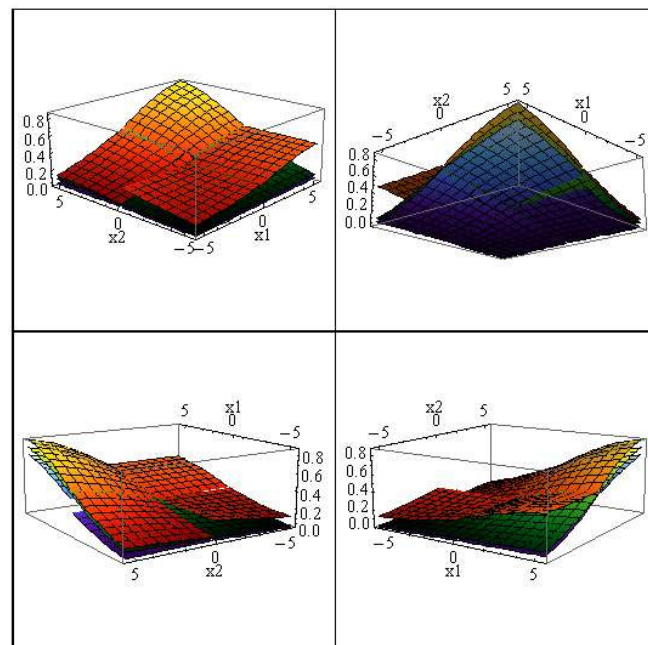


Figura 4.6: Representação gráfica de  $LS(x_1, x_2)$  (laranja), de  $LI(x_1, x_2)$  (azul) e da estimativa de  $F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$  (verde), para  $X \sim 2\text{-TGARCH}(1, 1)$  e  $Z_t \sim N(0, 1)$ .

aqui será interessante avaliar se a qualidade do enquadramento está relacionada com  $\delta$  ou, alternativamente, com outro parâmetro associado à estacionaridade à ordem  $\delta$ , como por exemplo  $S_\delta$ , que, neste caso em estudo, é igual a 0.529, quando  $\delta$  é  $\frac{1}{2}$ , e 0.6, quando  $\delta$  é 2. Embora não exibindo, referimos que, aumentando a região representada, o enquadramento parece ser válido para além dos limites teóricos estabelecidos, tal como ocorreu no estudo da distribuição marginal. Entendemos ter um enquadramento de boa qualidade para  $F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2)$ , embora possa ser objeto de algum aperfeiçoamento no que diz respeito ao limite superior do 3.º e 4.º quadrantes.

Terminamos referindo que obtivemos figuras idênticas a esta quando considerámos outras distribuições marginais do processo gerador.

## Capítulo 5

# Cartas de controlo para processos $\delta$ -TGARCH

Neste capítulo entramos no âmbito do Controlo Estatístico do Processo, com a aplicação de resultados dos capítulos anteriores às cartas de controlo. Concretamente, interessam-nos as cartas de controlo modificadas para séries temporais, cartas estas que pressupõem, numa primeira fase, o ajustamento de um modelo às observações seguindo-se, então, a construção da carta propriamente dita, incorporando a estrutura da série observada que é refletida no modelo ajustado. Nas cartas que apresentamos abre-se a possibilidade dos limites de controlo serem assimétricos, o que alarga a aplicação destas a processos de lei marginal assimétrica. Centramos a nossa atenção na *ARL* <sup>(1)</sup> destas cartas que, sinteticamente, pode ser definido como o número médio de instantes que têm que passar até que haja a indicação de que o processo está fora de controlo, já que o *ARL* é a medida mais usual na avaliação do desempenho de uma carta de controlo, sendo também tida em consideração na definição dos limites de controlo.

Este capítulo está, então, estruturado da seguinte forma: na secção 5.1 introduzimos a carta de controlo Shewhart modificada para processos  $\delta$ -TGARCH, aproveitando para formalizar os conceitos de cartas de controlo com que vamos trabalhar; na secção 5.2 abordamos o problema da determinação do *ARL*, fazendo o seu enquadramento teórico, que particularizamos para o caso do *ARL* sob controlo; na secção 5.3 finalizamos com um estudo de simulação cujo objetivo é avaliar a qualidade do enquadramento obtido para o *ARL* sob controlo, supondo, inicialmente, que a lei marginal do processo é simétrica, o que nos leva a considerar cartas com limites simétricos, e, depois, que é assimétrica, adotando-se limites de controlo assimétricos.

---

<sup>1</sup>Do inglês, *average run length*.

## 5.1 Carta de controlo Shewhart modificada

Seja  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo estocástico real, fracamente estacionário, tal que  $E(X_t) = \mu_0$  e  $V(X_t) = \sigma_X^2$ , que tomamos para processo alvo. Vamos aqui assumir que o processo observado  $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$  se relaciona com o processo alvo de acordo com o seguinte modelo, habitualmente designado na literatura por *change point model*,

$$Y_t = X_t + d_t, \quad (5.1)$$

para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , onde  $d_t = a\sigma_X \mathbb{1}_{\{s, s+1, s+2, \dots\}}(t)$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $s \in \mathbb{N}$  parâmetros do modelo. Diz-se que estamos perante um ponto de mudança no instante  $s$  se  $a \neq 0$ , sendo, neste caso, afetada a média do processo observado, não havendo alteração da variância nem do coeficiente de assimetria, caso este último exista. Com este modelo, o processo observado sofre uma alteração brusca ou *shift*. Nos instantes em que o processo observado  $Y$  coincide com o processo alvo  $X$ ,  $Y$  diz-se sob controlo. O nosso objectivo é detetar qualquer alteração na média do processo analisando, para tal, se se verifica  $E(Y_t) = \mu_0$  em cada instante  $t$ .

Para fazer esta análise através de uma carta de controlo Shewhart modificada, tal como foi introduzida inicialmente por Vasilopoulos e Stamboulis (1978), define-se, para um dado valor crítico  $c \in \mathbb{R}^+$ , que  $Y$  está fora de controlo no instante  $t$  se  $|Y_t - \mu_0| > c\sigma_X$ . Como refere Schmid (1995), esta definição é uma extensão direta da carta de controlo Shewhart clássica, onde se assume uma distribuição marginal simétrica relativamente a  $\mu_0$ , usualmente a distribuição Gaussiana, para o processo alvo. Tal justifica os limites de controlo simétricos,  $LCL = \mu_0 - c\sigma_X$  (*lower control limit*) e  $UCL = \mu_0 + c\sigma_X$  (*upper control limit*), em relação à linha central,  $CL = \mu_0$  (*central line*), garantindo que, quando  $Y$  está sob controlo, a probabilidade de  $Y_t$  estar acima de  $UCL$  é igual à probabilidade de  $Y_t$  estar abaixo de  $LCL$ . Foi com esta formulação que Severin e Schmid (1998, 1999) usaram pela primeira vez estas cartas no contexto dos modelos condicionalmente heteroscedásticos, admitindo que o processo alvo era um processo ARCH com distribuição marginal do processo gerador simétrica.

Ora, se o processo alvo é um processo  $\delta$ -TGARCH, a sua lei marginal não é simétrica quando a lei do seu processo gerador também não o é. Para lidar com tal facto, partindo da premissa natural de que os limites de controlo são definidos de modo a garantir que, quando o processo observado  $Y$  está sob controlo, a probabilidade de  $Y_t$  estar acima de  $UCL$  é igual à probabilidade de  $Y_t$  estar abaixo de  $LCL$ , devemos ter  $P(X_t > UCL) = \frac{\alpha}{2}$  e  $P(X_t < LCL) = \frac{\alpha}{2}$ , onde  $\alpha$  é o erro de tipo I (ou seja, erro que se comete quando, estando o processo  $Y$  sob controlo, somos con-

duzidos a decidir que está fora de controlo). Logo, quando o processo alvo  $X$  é um processo  $\delta$ -TGARCH, fracamente estacionário, com processo gerador de variáveis centradas e reduzidas <sup>(2)</sup>, se não quisermos impor mais restrições à distribuição do processo gerador, somos forçados a considerar que os limites de controlo são da forma  $LCL = -c_1\sigma_X$  e  $UCL = c_2\sigma_X$ , onde  $c_1, c_2 \in ]0, +\infty[$ , com  $c_1 = c_2$  caso a distribuição marginal de  $X$  seja simétrica. Estamos, assim, a propor uma versão generalizada da carta de controlo Shewhart modificada.

Quando nos voltamos para a escolha de  $c_1$  e de  $c_2$ , ou seja, dos valores críticos da carta de controlo, não importa apenas atender ao valor do erro de tipo I, pois embora se pretenda que a carta emita um reduzido número de falsos alarmes, tal não pode pôr em causa a emissão de um sinal, o mais depressa possível, caso o processo fique fora de controlo. É aqui que entra o *ARL* como forma de avaliar o desempenho de uma carta de controlo. Concretamente, pretende-se que o *ARL* sob controlo, que denotaremos por  $ARL_0$  e que é o número médio de instantes que têm que passar até que haja indicação de que o processo observado está fora de controlo quando, na verdade, o processo observado está sob controlo, seja alto mas que o *ARL* fora de controlo seja baixo <sup>(3)</sup>.

Formalizando, então, a definição do *ARL* para a carta de controlo Shewhart modificada com possibilidade de limites assimétricos, temos que  $ARL = E(N_S)$ , onde  $N_S$  (*run length*) é a variável aleatória real discreta definida por

$$N_S = \min \{t \in \mathbb{N} : Y_t < -c_1\sigma_X \text{ ou } Y_t > c_2\sigma_X\}, \quad (5.2)$$

com  $c_1, c_2 \in ]0, +\infty[$ , ou seja,  $N_S$  é o menor instante  $t$  tal que  $Y_t$  está fora de controlo. Assim, atendendo ao modelo (5.1), no  $ARL_0$ , temos  $a = 0$  e, no *ARL* fora de controlo, temos  $a \neq 0$ .

## 5.2 Enquadramento do *ARL*

Nesta secção focamos a nossa atenção no cálculo do *ARL*. Na impossibilidade de obter a verdadeira distribuição da variável  $N_S$ , vamos seguir a abordagem de Severin e Schmid (1999) e de Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b), onde é obtido um enquadramento teórico para o valor do  $ARL_0$ . Generalizamos aqui este procedimento para incluir não só o  $ARL_0$  mas também o *ARL* fora de controlo.

<sup>2</sup>Estamos, portanto, a assumir a hipótese **H1**, ou seja,  $E(Z_0) = 0$  e  $V(Z_0) = 1$ .

<sup>3</sup>Severin e Schmid (1999) vão ainda mais longe, sugerindo que, em aplicações financeiras que usem valores diários de mercados de ações, o  $ARL_0$  deveria ser 20, 40 ou 60, porque estes valores correspondem, respetivamente, a 1, 2 ou 3 meses de transações.

Notemos que o  $ARL$  pode ser calculado do seguinte modo

$$ARL = E(N_S) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N_S = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_S > n). \quad (5.3)$$

Como  $P(N_S > 0) = 1$ , o primeiro problema a abordar é o da determinação de  $P(N_S > n)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

Da definição da variável  $N_S$ , temos

$$P(N_S > n) = P(-c_1\sigma_X \leq Y_t \leq c_2\sigma_X, t = 1, \dots, n).$$

Logo, atendendo à relação definida em (5.1) entre o processo observado e o processo alvo, vem

$$P(N_S > n) = P(-c_1\sigma_X - d_t \leq X_t \leq c_2\sigma_X - d_t, t = 1, \dots, n).$$

Assim, quando o processo alvo é um processo  $\delta$ -TGARCH, podemos usar os resultados do capítulo 4, para obter um enquadramento para esta probabilidade. Vamos, agora, restringir a nossa atenção ao caso em que  $-c_1 < a < c_2$ , correspondendo a alterações do processo menos evidentes e, em princípio, mais difíceis de detetar; desta forma temos  $-c_1\sigma_X - d_t < 0$  e  $c_2\sigma_X - d_t > 0$ , o que, lembrando a equivalência (4.5), permite escrever

$$\begin{aligned} P(N_S > n) &= P(X_t^+ \leq c_2\sigma_X - d_t, X_t^- \leq c_1\sigma_X + d_t, t = 1, \dots, n) \\ &= F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(c_2\sigma_X - d_1, c_1\sigma_X + d_1, \dots, c_2\sigma_X - d_n, c_1\sigma_X + d_n). \end{aligned}$$

Assim, os teoremas 4.6 e 4.8 permitem-nos obter um enquadramento para o  $ARL$ . No teorema seguinte deduzimos esses enquadramentos no caso dos modelos  $\delta$ -TARCH( $p$ ) e  $\delta$ -TGARCH(1, 1). Recordamos as notações usadas:  $\gamma_\tau = \max_{1 \leq j \leq q} \gamma_j$ ;  $\phi_{1,\delta} = E[(Z_t^+)^{\delta}]$  e  $\phi_{2,\delta} = E[(Z_t^-)^{\delta}]$ ;  $S_\delta = \sum_{i=1}^p (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta}) + \sum_{i=1}^q \gamma_i$ .

**Teorema 5.1** *Consideremos o processo alvo  $X$ , fracamente estacionário, seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), com  $\delta > 0$ , tal que o processo gerador verifica a hipótese **H1**. Se o processo  $X$  respeitar as hipóteses do teorema 4.8 e se o parâmetro  $a$  do modelo (5.1) é tal que  $-c_1 < a < c_2$ , então, a carta de controlo Shewhart modificada com possibilidade de limites assimétricos verifica as seguintes condições:*



(a) para  $c_1, c_2 \in ]0, +\infty[$ , tem-se

$$ARL \leq \frac{1 - \left[ F_Z \left( \frac{c_2 \sigma_X}{\theta} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1 \sigma_X}{\theta} \right) \right]^s}{1 - \left[ F_Z \left( \frac{c_2 \sigma_X}{\theta} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1 \sigma_X}{\theta} \right) \right]} + \frac{\left[ F_Z \left( \frac{c_2 \sigma_X}{\theta} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1 \sigma_X}{\theta} \right) \right]^{s-1} \left[ F_Z \left( \frac{(c_2-a)\sigma_X}{\theta} \right) - F_Z \left( -\frac{(c_1+a)\sigma_X}{\theta} \right) \right]}{1 - \left[ F_Z \left( \frac{(c_2-a)\sigma_X}{\theta} \right) - F_Z \left( -\frac{(c_1+a)\sigma_X}{\theta} \right) \right]},$$

sendo  $\theta = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$ , desde que  $-\frac{c_1 \sigma_X}{\theta}$ ,  $\frac{c_2 \sigma_X}{\theta}$ ,  $-\frac{(c_1+a)\sigma_X}{\theta}$  e  $\frac{(c_2-a)\sigma_X}{\theta}$  pertençam ao suporte das variáveis  $Z_t$ ;

(b) para  $c_1, c_2 \in ]0, +\infty[$  tais que

$$c_2 h_\delta (c_2 \sigma_X) + c_1 h_\delta (-c_1 \sigma_X) \geq 0 \quad (5.4)$$

e

$$(c_2 - a) h_\delta ((c_2 - a) \sigma_X) + (c_1 + a) h_\delta (-(c_1 + a) \sigma_X) \geq 0, \quad (5.5)$$

com  $h_\delta(x) = (1 + \delta) f_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) + \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} f'_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right)$ , onde  $y \in ]0, +\infty[$ ,

(b.1) quando  $q = 0$ , tem-se

$$ARL \geq 1 + \sum_{n=1}^{p-1} \prod_{t=1}^n B_t + \prod_{t=1}^p B_t \left( \sum_{n=p}^{p+s-1} \prod_{t=p+1}^n C_t \right) + \left( \prod_{t=1}^p B_t \prod_{t=p+1}^{s+p-1} C_t \right) \frac{C}{1-C}$$

onde  $B_t = F_Z \left( \frac{c_2 \sigma_X - d_t}{u_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1 \sigma_X + d_t}{u_t^{1/\delta}} \right)$ , com

$$u_t = \sum_{i=1}^{t-1} \left[ \alpha_i (c_2 \sigma_X - d_{t-i})^\delta + \beta_i (c_1 \sigma_X + d_{t-i})^\delta \right] + \frac{\alpha_0}{1 - S_\delta} \left[ 1 - \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta}) \right],$$

$C_t = F_Z \left( \frac{c_2 \sigma_X - d_t}{v_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1 \sigma_X + d_t}{v_t^{1/\delta}} \right)$ , com

$$v_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (c_2 \sigma_X - d_{t-i})^\delta + \beta_i (c_1 \sigma_X + d_{t-i})^\delta \right],$$

e  $C = F_Z \left( \frac{(c_2-a)\sigma_X}{v^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{(c_1+a)\sigma_X}{v^{1/\delta}} \right)$ , com

$$v = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left\{ \alpha_i [(c_2 - a) \sigma_X]^\delta + \beta_i [(c_1 + a) \sigma_X]^\delta \right\},$$

desde que  $-\frac{(c_1+a)\sigma_X}{v^{1/\delta}}$  e  $\frac{(c_2-a)\sigma_X}{v^{1/\delta}}$  pertençam ao suporte das variáveis  $Z_t$ ;

(b.2) quando  $p = 1$  e  $q = 1$ , tem-se

$$ARL \geq 1 + \sum_{n=1}^s \prod_{t=1}^n D_t + \left( \prod_{t=1}^s D_t \right) \frac{D}{1-D},$$

$$\text{onde } D_t = F_Z \left( \frac{c_2 \sigma_X - d_t}{w_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1 \sigma_X + d_t}{w_t^{1/\delta}} \right), \text{ com}$$

$$w_t = \alpha_0 \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} + \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} \left[ \alpha_1 (c_2 \sigma_X - d_{t-j})^\delta + \beta_1 (c_1 \sigma_X + d_{t-j})^\delta \right] + \gamma_1^{t-1} \frac{\alpha_0}{1 - S_\delta},$$

$$\text{e } D = F_Z \left( \frac{(c_2 - a) \sigma_X}{w_{a,s}^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{(c_1 + a) \sigma_X}{w_{a,s}^{1/\delta}} \right), \text{ com}$$

$$w_{a,s} = \frac{\alpha_0}{1 - \gamma_1} + \frac{\alpha_0}{1 - S_\delta} + \frac{\left[ \alpha_1 \left( c_2^\delta \mathbb{1}_{\mathbf{N} \setminus \{1\}}(s) + (c_2 - a)^\delta \mathbb{1}_{\mathbf{R} \setminus \{0\}}(a) \right) + \beta_1 \left( c_1^\delta \mathbb{1}_{\mathbf{N} \setminus \{1\}}(s) + (c_1 + a)^\delta \mathbb{1}_{\mathbf{R} \setminus \{0\}}(a) \right) \right] \sigma_X^\delta}{1 - \gamma_1},$$

desde que  $-\frac{(c_1 + a) \sigma_X}{w_{a,s}^{1/\delta}}$  e  $\frac{(c_2 - a) \sigma_X}{w_{a,s}^{1/\delta}}$  pertençam ao suporte das variáveis  $Z_t$ .

**Demonstração:** Sejam  $c_1, c_2 \in ]0, +\infty[$ .

(a) Do teorema 4.6, considerando  $A_1 = F_Z \left( \frac{c_2 \sigma_X}{\theta} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1 \sigma_X}{\theta} \right)$  e  $A_2 = F_Z \left( \frac{(c_2 - a) \sigma_X}{\theta} \right) - F_Z \left( -\frac{(c_1 + a) \sigma_X}{\theta} \right)$ , obtemos, para  $1 \leq n \leq s - 1$ ,

$$P(N_S > n) \leq \prod_{t=1}^n A_1 = A_1^n$$

e, para  $n \geq s$ ,

$$P(N_S > n) \leq \prod_{t=1}^{s-1} A_1 \prod_{t=s}^n A_2 = A_1^{s-1} A_2^{n-s+1}.$$

Consequentemente, da expressão (5.3), vem

$$ARL \leq 1 + \sum_{n=1}^{s-1} A_1^n + A_1^{s-1} \sum_{n=s}^{+\infty} A_2^{n-s+1} = \frac{1 - A_1^s}{1 - A_1} + \frac{A_1^{s-1} A_2}{1 - A_2},$$

visto que  $A_1, A_2 \in ]0, 1[$ , já que  $-\frac{c_1 \sigma_X}{\theta}$ ,  $\frac{c_2 \sigma_X}{\theta}$ ,  $-\frac{(c_1 + a) \sigma_X}{\theta}$  e  $\frac{(c_2 - a) \sigma_X}{\theta}$  pertencem ao suporte das variáveis  $Z_t$ .

(b) Vamos agora admitir que  $c_1$  e  $c_2$  satisfazem (5.4) e (5.5).

(b.1) Começamos por considerar  $p$  qualquer em  $\mathbf{N}$  e  $q = 0$ , ou seja, que  $X$  segue o modelo  $\delta$ -TARCH( $p$ ).

Do teorema 4.8, obtemos, para  $n < p$ ,

$$P(N_S > n) \geq \prod_{t=1}^n B_t$$

e, para  $n \geq p$ ,

$$P(N_S > n) \geq \prod_{t=1}^p B_t \prod_{t=p+1}^n C_t,$$

onde  $B_t = F_Z\left(\frac{c_2\sigma_X - d_t}{u_t^{1/\delta}}\right) - F_Z\left(-\frac{c_1\sigma_X + d_t}{u_t^{1/\delta}}\right)$ , com

$$u_t = \sum_{i=1}^{t-1} \left[ \alpha_i (c_2\sigma_X - d_{t-i})^\delta + \beta_i (c_1\sigma_X + d_{t-i})^\delta \right] + \frac{\alpha_0}{1 - S_\delta} \left[ 1 - \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta}) \right],$$

e  $C_t = F_Z\left(\frac{c_2\sigma_X - d_t}{v_t^{1/\delta}}\right) - F_Z\left(-\frac{c_1\sigma_X + d_t}{v_t^{1/\delta}}\right)$ , com

$$v_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (c_2\sigma_X - d_{t-i})^\delta + \beta_i (c_1\sigma_X + d_{t-i})^\delta \right].$$

Observamos agora que, para  $n \geq p + s$ , podemos escrever

$$\prod_{t=1}^p B_t \prod_{t=p+1}^n C_t = \prod_{t=1}^p B_t \prod_{t=p+1}^{s+p-1} C_t \prod_{t=s+p}^n C = \left( \prod_{t=1}^p B_t \prod_{t=p+1}^{s+p-1} C_t \right) C^{n-s-p+1},$$

onde  $C = F_Z\left(\frac{(c_2-a)\sigma_X}{v^{1/\delta}}\right) - F_Z\left(-\frac{(c_1+a)\sigma_X}{v^{1/\delta}}\right)$ , com

$$v = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left\{ \alpha_i [(c_2 - a)\sigma_X]^\delta + \beta_i [(c_1 + a)\sigma_X]^\delta \right\},$$

pois, se  $t \in \{p + s, \dots, n\}$ , então  $d_t = a\sigma_X$  e, para  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $s \leq t - i \leq n - 1$ .

Logo, da expressão (5.3) do ARL, obtemos

$$\begin{aligned} ARL &\geq 1 + \sum_{n=1}^{p-1} \prod_{t=1}^n B_t + \prod_{t=1}^p B_t \left( \sum_{n=p}^{p+s-1} \prod_{t=p+1}^n C_t \right) + \left( \prod_{t=1}^p B_t \prod_{t=p+1}^{s+p-1} C_t \right) \sum_{n=p+s}^{+\infty} C^{n-s-p+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{p-1} \prod_{t=1}^n B_t + \prod_{t=1}^p B_t \left( \sum_{n=p}^{p+s-1} \prod_{t=p+1}^n C_t \right) + \left( \prod_{t=1}^p B_t \prod_{t=p+1}^{s+p-1} C_t \right) \frac{C}{1 - C}, \end{aligned}$$

pois  $\frac{(c_2-a)\sigma_X}{v^{1/\delta}}$  e  $-\frac{(c_1+a)\sigma_X}{v^{1/\delta}}$  pertencem ao suporte das variáveis  $Z_t$ .

**(b.2)** Passamos, agora, para o caso  $p = q = 1$ , isto é, estamos a admitir que  $X$  segue o modelo  $\delta$ -TGARCH(1, 1).

Do teorema 4.8, temos, para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P(N_S > n) \geq \prod_{t=1}^n D_t,$$

com  $D_t = F_Z\left(\frac{c_2\sigma_X - d_t}{w_t^{1/\delta}}\right) - F_Z\left(-\frac{c_1\sigma_X + d_t}{w_t^{1/\delta}}\right)$ , onde

$$w_t = \alpha_0 \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} + \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} \left[ \alpha_1 (c_2\sigma_X - d_{t-j})^\delta + \beta_1 (c_1\sigma_X + d_{t-j})^\delta \right] + \gamma_1^{t-1} \frac{\alpha_0}{1 - S_\delta}.$$

Foquemos a nossa atenção na segunda parcela da expressão de  $w_t$  quando  $t - 1 \geq s$ . Neste caso, vem

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} \left[ \alpha_1 (c_2\sigma_X - d_{t-j})^\delta + \beta_1 (c_1\sigma_X + d_{t-j})^\delta \right] = \\ &= \sum_{j=1}^{t-s} \gamma_1^{j-1} \left\{ \alpha_1 [(c_2 - a)\sigma_X]^\delta + \beta_1 [(c_1 + a)\sigma_X]^\delta \right\} + \sum_{j=t-s+1}^{t-1} \gamma_1^{j-1} \left[ \alpha_1 (c_2\sigma_X)^\delta + \beta_1 (c_1\sigma_X)^\delta \right] \\ &= \left\{ \alpha_1 [(c_2 - a)\sigma_X]^\delta + \beta_1 [(c_1 + a)\sigma_X]^\delta \right\} \sum_{j=1}^{t-s} \gamma_1^{j-1} + \left[ \alpha_1 (c_2\sigma_X)^\delta + \beta_1 (c_1\sigma_X)^\delta \right] \sum_{j=t-s+1}^{t-1} \gamma_1^{j-1}. \end{aligned}$$

Olhando agora para a expressão completa de  $w_t$  quando  $t - 1 \geq s$ , atendendo a que, por hipótese,  $\gamma_1 < 1$ , temos  $w_t \leq w_{a,s}$ , onde

$$\begin{aligned} w_{a,s} &= \frac{\left[ \alpha_1 \left( c_2^\delta \mathbf{1}_{\mathbb{N} \setminus \{1\}}(s) + (c_2 - a)^\delta \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(a) \right) + \beta_1 \left( c_1^\delta \mathbf{1}_{\mathbb{N} \setminus \{1\}}(s) + (c_1 + a)^\delta \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(a) \right) \right] \sigma_X^\delta}{1 - \gamma_1} + \\ &+ \frac{\alpha_0}{1 - \gamma_1} + \frac{\alpha_0}{1 - S_\delta}, \end{aligned}$$

pois, para qualquer  $t$  em  $\mathbb{N}$ ,  $\gamma_1^{t-1} \leq 1$  e  $\sum_{j=1}^{t-s-1} \gamma_1^{j-1}$  e  $\sum_{j=t-s}^{t-1} \gamma_1^{j-1}$  são inferiores ou iguais a  $\sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_1^j = \frac{1}{1 - \gamma_1}$ .

Portanto, partindo da expressão (5.3) do *ARL*, podemos escrever

$$\begin{aligned} ARL &\geq 1 + \sum_{n=1}^s \prod_{t=1}^n D_t + \left( \prod_{t=1}^s D_t \right) \sum_{n=s+1}^{+\infty} \left( \prod_{t=s+1}^n D_t \right) \\ &\geq 1 + \sum_{n=1}^s \prod_{t=1}^n D_t + \left( \prod_{t=1}^s D_t \right) \sum_{n=s+1}^{+\infty} D^{n-s} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^s \prod_{t=1}^n D_t + \left( \prod_{t=1}^s D_t \right) \frac{D}{1 - D}, \end{aligned}$$

onde  $D = F_Z \left( \frac{(c_2-a)\sigma_X}{w_{a,s}^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{(c_1+a)\sigma_X}{w_{a,s}^{1/\delta}} \right)$ . ■

No corolário seguinte, particularizamos este teorema para o caso do  $ARL_0$ , ou seja, consideramos  $a = 0$ .

**Corolário 5.2** *Seja  $X$  o processo alvo verificando as condições do teorema 5.1. O  $ARL_0$  da carta de controlo Shewhart modificada com possibilidade de limites assimétricos está enquadrado por:*

(a) para  $c_1, c_2 \in ]0, +\infty[$ ,

$$ARL_0 \leq \left[ 1 - F_Z \left( \frac{c_2\sigma_X}{\theta} \right) + F_Z \left( -\frac{c_1\sigma_X}{\theta} \right) \right]^{-1},$$

sendo  $\theta = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$ , desde que  $-\frac{c_1\sigma_X}{\theta}$  e  $\frac{c_2\sigma_X}{\theta}$  pertençam ao suporte das variáveis  $Z_t$ ;

(b) para  $c_1, c_2 \in ]0, +\infty[$  tais que

$$c_2 h_\delta(c_2\sigma_X) + c_1 h_\delta(-c_1\sigma_X) \geq 0$$

com  $h_\delta(x) = (1 + \delta) f_Z \left( \frac{x}{y} \right) + \frac{x}{y} f'_Z \left( \frac{x}{y} \right)$ , onde  $y \in [\alpha_0, +\infty[$ ,

(b.1) quando  $q = 0$ ,

$$ARL_0 \geq 1 + \sum_{n=1}^{p-1} \prod_{t=1}^n \left[ F_Z \left( \frac{c_2\sigma_X}{u_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1\sigma_X}{u_t^{1/\delta}} \right) \right] + \frac{\prod_{t=1}^p \left[ F_Z \left( \frac{c_2\sigma_X}{u_t^{1/\delta}} \right) - F_Z \left( -\frac{c_1\sigma_X}{u_t^{1/\delta}} \right) \right]}{1 - F_Z \left( \frac{c_2\sigma_X}{v^{1/\delta}} \right) + F_Z \left( -\frac{c_1\sigma_X}{v^{1/\delta}} \right)}$$

onde  $u_t = \sigma_X^\delta \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha_i c_2^\delta + \beta_i c_1^\delta) + \frac{\alpha_0}{1-S_\delta} \left[ 1 - \sum_{i=1}^{t-1} (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta}) \right]$  e

$v = \alpha_0 + \sigma_X^\delta \sum_{i=1}^p (\alpha_i c_2^\delta + \beta_i c_1^\delta)$ , desde que  $-\frac{c_1\sigma_X}{v^{1/\delta}}$  e  $\frac{c_2\sigma_X}{v^{1/\delta}}$  pertençam ao suporte das variáveis  $Z_t$ ;

(b.2) quando  $p = 1$  e  $q = 1$ ,

$$ARL_0 \geq \left[ 1 - F_Z \left( \frac{c_2\sigma_X}{w_0^{1/\delta}} \right) + F_Z \left( -\frac{c_1\sigma_X}{w_0^{1/\delta}} \right) \right]^{-1},$$

onde  $w_0 = \frac{\alpha_0 + (\alpha_1 c_2^\delta + \beta_1 c_1^\delta) \sigma_X^\delta}{1-\gamma_1} + \frac{\alpha_0}{1-S_\delta}$ , desde que  $-\frac{(c_1+a)\sigma_X}{w_{a,s}^{1/\delta}}$  e  $\frac{(c_2-a)\sigma_X}{w_{a,s}^{1/\delta}}$  pertençam ao suporte das variáveis  $Z_t$ .

No caso em que o processo alvo é i.i.d., o valor do  $ARL$  é conhecido. Assim, pela simplicidade com que o podemos fazer e como forma de começar a avaliar a qualidade do enquadramento, observamos seguidamente o que ocorre ao enquadramento estabelecido para o  $ARL_0$  quando reduzimos o processo alvo ao caso clássico de processos i.i.d..

**Observação 5.3** *Se o processo  $X$  segue um modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que, na expressão de  $\sigma_t$ , todos os parâmetros, exceto  $\alpha_0$ , são iguais a zero,  $X$  deixa de ser condicionalmente heteroscedástico. O processo alvo  $X$  é, então, um processo i.i.d., com  $\sigma_X = \alpha_0^{1/\delta}$ , e  $N_S$  segue a lei geométrica  $G(\phi)$ , de suporte  $\mathbb{N}$  e  $\phi = 1 - F_Z(c_2) + F_Z(-c_1)$ , sendo  $ARL_{0(iid)} = \frac{1}{\phi}$ . Neste caso, podemos observar que:*

- $ARL_{0(iid)} = \underset{\delta\text{-TGARCH}(p,q)}{MajARL_0}$ , onde  $\underset{\delta\text{-TGARCH}(p,q)}{MajARL_0}$  denota o majorante do  $ARL_0$  obtido na alínea (a) do corolário 5.2;
- $ARL_{0(iid)} = \underset{\delta\text{-TARCH}(p)}{MinARL_0}$ , onde  $\underset{\delta\text{-TARCH}(p)}{MinARL_0}$  denota o minorante do  $ARL_0$  obtido na alínea (b.1) do corolário 5.2;
- $ARL_{0(iid)} \geq \underset{\delta\text{-TGARCH}(1,1)}{MinARL_0}$ , onde  $\underset{\delta\text{-TGARCH}(1,1)}{MinARL_0} = \left[ 1 - F_Z\left(\frac{c_2}{2^{1/\delta}}\right) + F_Z\left(-\frac{c_1}{2^{1/\delta}}\right) \right]^{-1}$  é o minorante do  $ARL_0$  obtido na alínea (b.2) do corolário 5.2.

As conclusões desta observação estão refletidas na secção seguinte, tendo, inclusivamente, sido usadas nas simulações como controlo para a obtenção da estimativa do  $ARL_0$ .

## 5.3 Estudos de simulação

### 5.3.1 $ARL_0$ para cartas com limites de controlo simétricos

Para este primeiro estudo de simulação baseamo-nos em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b), onde foram obtidos enquadramentos do  $ARL_0$  para cartas de controlo com limites simétricos para processos ARCH( $p$ ) e TARCH( $p$ ). De notar que, contrariamente ao que apresentámos na secção anterior, o desenvolvimento dos enquadramentos para os dois modelos foi aí feito separadamente. Nesse trabalho efetuámos ainda um estudo comparativo para o caso do modelo ARCH por haver mais dois minorantes disponíveis. Nessa análise comparativa ficam evidentes as vantagens do novo minorante obtido, já que o minorante de Severin e Schmid (1999),

embora teoricamente o melhor, depende da probabilidade  $P(N_S > \min\{p, n\})$  desconhecida, e o minorante determinado a partir do trabalho de Pawlak e Schmid (2001), apesar de depender apenas do valor crítico, da distribuição das variáveis  $Z_t^2$  e dos parâmetros do modelo, é pior dos três para valores críticos inferiores ou iguais a 1.

Centrando-nos, agora, no modelo TARCH, relativamente ao trabalho desenvolvido em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b), verificamos que a majoração conseguida para o  $ARL_0$  é igual à do corolário 5.2. No que diz respeito à minoração, a comparação não é imediata e, por isso, vamos tratar um caso particular também estudado em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b), que permitirá ainda ilustrar a forma como foi avaliada a qualidade dos enquadramentos.

Consideremos, então, o caso das cartas de controlo com limites simétricos, portanto  $c_1 = c_2 = c$ , para um processo alvo TARCH(1) fracamente estacionário com distribuição marginal do processo gerador simétrica, centrada e reduzida. Neste caso, temos  $F_Z(x) - F_Z(-x) = F_{|Z|}(x)$ , sendo  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 < 2$  uma condição necessária e suficiente para a estacionaridade fraca do processo alvo  $X$  (pelo corolário 2.26).

No que diz respeito à majoração, tanto em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b) como pelo corolário 5.2, temos, para todo  $c \in \mathbb{R}^+$ ,

$$ARL_0 \leq \frac{1}{1 - F_{|Z|}\left(\frac{c\sigma_X}{\alpha_0}\right)} = M(c; \alpha_1, \beta_1).$$

Relativamente à minoração, em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b) tem-se

$$ARL_0 \geq 1 + \frac{F_{|Z|}(c)}{1 - F_{|Z|}\left(\frac{c\sigma_X}{\alpha_0 + c\sigma_X \max\{\alpha_1, \beta_1\}}\right)} = m_1(c; \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$$

e, pelo corolário 5.2,

$$ARL_0 \geq 1 + \frac{F_{|Z|}\left(\frac{c\sigma_X(1-S_1)}{\alpha_0}\right)}{1 - F_{|Z|}\left(\frac{c\sigma_X}{\alpha_0 + c\sigma_X(\alpha_1 + \beta_1)}\right)} = m_2(c; \alpha_0, \alpha_1, \beta_1),$$

com ambos os minorantes válidos para, pelo menos, todo  $c \in \mathbb{R}^+$  tal que  $2f_Z\left(\frac{c\sigma_X}{y}\right) + \frac{x}{y}f'_Z\left(\frac{c\sigma_X}{y}\right) \geq 0$ , com  $y \geq \alpha_0$ . É importante observar que, como temos da expressão B.6 do apêndice B

$$\sigma_X^2 = \frac{\alpha_0^2 \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) E(|Z_t|)\right]}{\left[1 - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) E(|Z_t|)\right] \left[1 - \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\right]},$$

então o valor do parâmetro  $\alpha_0$  não interfere nos valores do majorante nem dos minorantes, tendo, porém, influência no intervalo de validade dos minorantes.

Os valores de  $m_1(c; \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$ ,  $m_2(c; \alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$  e  $M(c; \alpha_1, \beta_1)$  foram comparados com uma estimativa do  $ARL_0$ ,  $\widehat{ARL}_0$ , quando  $c = 0.5$ , para algumas parametrizações do modelo TARCH(1), concretamente, fixando  $\alpha_0 = 1$ , considerámos  $\alpha_1 = 0, 0.3, 0.7$  e  $\beta_1 = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ . Para cada uma das parametrizações, o  $\widehat{ARL}_0$  foi obtido de 25 000 realizações do processo, cada uma com 150 observações, tendo as primeiras 50 sido descartadas para eliminar o efeito da escolha dos valores iniciais. O  $RL$  máximo do conjunto das 25 000 realizações do processo foi controlado de modo a garantir que não ultrapassava o número de observações consideradas, ou seja, 100 <sup>(4)</sup>.

Os resultados das simulações estão nas tabelas 5.1 e 5.2. Sendo a distribuição do processo alvo simétrica, os valores do  $ARL_0$ , do majorante e dos minorantes são simétricos em  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ , ou seja, por exemplo, os casos  $(\alpha_1, \beta_1) = (0, 0.1)$  e  $(\alpha_1, \beta_1) = (0.1, 0)$  produzem os mesmos valores, pelo que optámos por não os repetir, deixando o espaço correspondente em branco. Na tabela 5.1, reportamos os resultados quando a distribuição marginal do processo gerador é a Gaussiana padrão e, na tabela 5.2, quando é a distribuição centrada e reduzida baseada na distribuição de Student com 6 graus de liberdade. Atendendo aos cálculos efetuados nos exemplos 4.3 e 4.4, a validade do minorante está garantida, pelo menos, para  $0 < c \leq \frac{\sqrt{2}}{\sigma_X}$ , na tabela 5.1, e para  $0 < c \leq \frac{\sqrt{1.6}}{\sigma_X}$ , na tabela 5.2. Quando  $c$  excede o valor indicado, os minorantes surgem em itálico.

Passamos, agora, para a análise dos resultados. Começamos por notar, recordando a informação da observação 5.3, que quando  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ , podemos aceitar a estimativa obtida para o  $ARL_0$ , atendendo ao respetivo desvio padrão. Foi, deste modo, possível validar o procedimento usado para a obtenção de  $\widehat{ARL}_0$ . Nas duas tabelas observamos que, fixando  $\alpha_1$ , à medida que  $\beta_1$  aumenta também  $\widehat{ARL}_0$  aumenta. Fazendo a mesma análise para o enquadramento, verificamos que: o majorante  $M = M(0.5; \alpha_1, \beta_1)$  acompanha esta tendência, embora para valores altos de  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  pareça perder qualidade; o minorante  $m_1 = m_1(0.5; 1, \alpha_1, \beta_1)$  fica praticamente inalterado; o minorante  $m_2 = m_2(0.5; 1, \alpha_1, \beta_1)$  cresce com o aumento de  $\beta_1$  mas apenas até um certo  $\beta_1$ , aparentemente, 0.7, decrescendo depois. Não obstante, o enquadramento é melhor para os valores mais baixos de  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ . Fixando-nos, agora, no caso em que  $\alpha_1 = 0.7$  e  $\beta_1 = 0.9$ , é de salientar que, embora não esteja assegurada analiticamente a validade dos minorantes  $m_1$  e  $m_2$ , estes permanecem válidos, o que está na linha do já observado para os enquadramentos das leis de dimensão finita apresentados no capítulo anterior. Para terminar, no que diz respeito à comparação entre os minorantes,  $m_2$  é melhor do que  $m_1$ , exceto quando  $\alpha_1 = 0.7$

<sup>4</sup>O ficheiro do programa *Mathematica 8* relativo a este estudo de simulação está no apêndice C.



Tabela 5.1:  $\widehat{ARL}_0$  (respetivo desvio padrão entre parênteses) e enquadramento, para o valor crítico  $c = 0.5$  e processo alvo TARCh(1) tal que  $\alpha_0 = 1$  e  $Z_t \sim N(0, 1)$ .

$\alpha_1$		$\beta_1$					
		0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0	$m_1$	1.621	1.618	1.615	1.616	1.620	1.628
	$m_2$	1.621	1.639	1.672	1.696	1.708	1.698
	$\widehat{ARL}_0$	1.617 (0.006)	1.635 (0.006)	1.686 (0.007)	1.783 (0.008)	1.936 (0.009)	2.260 (0.011)
	$M$	1.621	1.661	1.773	1.950	2.256	2.897
0.3	$m_1$			1.663	1.660	1.661	1.667
	$m_2$			1.722	1.746	1.756	1.742
	$\widehat{ARL}_0$			1.748 (0.008)	1.831 (0.008)	2.000 (0.010)	2.371 (0.013)
	$M$			1.986	2.248	2.737	3.904
0.7	$m_1$					1.776	1.778
	$m_2$					1.774	1.733
	$\widehat{ARL}_0$					2.452 (0.014)	3.217 (0.019)
	$M$					5.309	13.877

Tabela 5.2:  $\widehat{ARL}_0$  (respetivo desvio padrão entre parênteses) e enquadramento, para o valor crítico  $c = 0.5$  e processo alvo TARCh(1) tal que  $\alpha_0 = 1$  e  $\sqrt{3/2}Z_t \sim t_6$ .

$\alpha_1$		$\beta_1$					
		0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0	$m_1$	1.777	1.771	1.765	1.765	1.770	1.781
	$m_2$	1.777	1.795	1.827	1.849	1.858	1.844
	$\widehat{ARL}_0$	1.780 (0.007)	1.789 (0.008)	1.846 (0.008)	1.972 (0.009)	2.170 (0.011)	2.546 (0.013)
	$M$	1.777	1.827	1.964	2.179	2.551	3.307
0.3	$m_1$			1.832	1.825	1.826	1.833
	$m_2$			1.873	1.892	1.897	1.876
	$\widehat{ARL}_0$			1.941 (0.009)	2.051 (0.010)	2.288 (0.012)	2.713 (0.015)
	$M$			2.220	2.532	3.101	4.376
0.7	$m_1$					1.983	1.987
	$m_2$					1.899	1.845
	$\widehat{ARL}_0$					2.826 (0.016)	3.796 (0.024)
	$M$					5.703	11.924

e  $\beta_1 = 0.7, 0.9$ .

De referir que em simulações para valores de  $c$  maiores do que 0.5, mantendo as parametrizações e as distribuições marginais do processo gerador, as conclusões foram, genericamente, idênticas. Contudo, há um maior número de casos em que não está garantida teoricamente a validade dos minorantes, embora na prática a validade se verifique, e há um aumento das situações em que  $m_1$  é melhor do que  $m_2$ .

Ainda sobre a comparação dos minorantes, recordamos que, contrariamente a  $m_1$ ,  $m_2$  foi obtido no contexto geral, o que pode ter limitado a utilização ao longo da prova de eventuais especificidades associadas ao caso particular das cartas de limites simétricos. Assim, poderá ser interessante reexaminar o enquadramento para este caso particular.

### 5.3.2 $ARL_0$ para cartas com limites de controlo assimétricos

Interessa-nos agora avaliar o enquadramento do  $ARL_0$  quando a distribuição marginal do processo alvo é assimétrica. Para tal, escolhemos para distribuição marginal do processo gerador a mistura de duas distribuições Gaussianas já considerada no exemplo 4.5, primeiro, com  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.65, -0.15, 0.4)$ , sendo o coeficiente de assimetria igual a 0.672, e, seguidamente, com parâmetros  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.6, 0.3, 0.4)$ , cujo coeficiente de assimetria é  $-0.972$ . Para cada uma delas foram consideradas três parametrizações  $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  do processo alvo TGARCH(1, 1):  $(10, 0.15, 0.5, 0)$ ;  $(10, 0.15, 0.5, 0.2)$ ;  $(10, 0.15, 0.5, 0.6)$ . Todas estas parametrizações, atendendo à condição estabelecida no corolário 2.26, garantem a estacionaridade fraca desse processo.

Para as parametrizações escolhidas, na tabela 5.3 são fornecidos, em caso de existência, os valores teóricos de  $\sigma_X$  (desvio padrão),  $\zeta_X$  (coeficiente de assimetria) e  $\kappa_X$  (coeficiente de curtose) relativos às variáveis do processo alvo e obtidos, respetivamente, das expressões B.6, B.7 e B.8 do apêndice B. O coeficiente  $\zeta_X$  interessa na medida em que o processo alvo tem distribuição marginal assimétrica. Notamos ainda que o valor de  $\sigma_X$ , quando multiplicado pelos valores críticos  $c_1$  e  $c_2$ , permite obter os limites de controlo e que o valor de  $\kappa_X$  vai ajudar a perceber as diferenças entre as estimativas obtidas para o  $ARL$ .

Do corolário 5.2, para o processo alvo TGARCH(1, 1), sabemos que um majorante do  $ARL_0$  é

$$M(c_1, c_2; \alpha_1, \beta_1) = \frac{1}{1 - F_Z\left(\frac{c_2 \sigma_X}{\theta}\right) + F_Z\left(-\frac{c_1 \sigma_X}{\theta}\right)},$$

Tabela 5.3: Momentos teóricos das parametrizações consideradas nas simulações.

$(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1)$	$(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$	$\sigma_X$	$\zeta_X$	$\kappa_X$
(0.65, -0.15, 0.4)	(10, 0.15, 0.5, 0)	13.246	0.790	11.384
(0.65, -0.15, 0.4)	(10, 0.15, 0.5, 0.2)	17.890	0.813	12.720
(0.65, -0.15, 0.4)	(10, 0.15, 0.5, 0.6)	61.062	1.214	185.883
(0.6, 0.3, 0.4)	(10, 0.15, 0.5, 0)	13.861	-1.297	14.100
(0.6, 0.3, 0.4)	(10, 0.15, 0.5, 0.2)	18.941	-1.386	18.850
(0.6, 0.3, 0.4)	(10, 0.15, 0.5, 0.6)	74.260	-8.916	—

onde  $\theta = \frac{\alpha_0}{1-\gamma_1}$ , sendo válido para quaisquer  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ , e um minorante do  $ARL_0$  é

$$m(c_1, c_2; \alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = \begin{cases} 1 + \frac{F_Z\left(\frac{c_2\sigma_X}{u_1}\right) - F_Z\left(-\frac{c_1\sigma_X}{u_1}\right)}{1 - F_Z\left(\frac{c_2\sigma_X}{v}\right) + F_Z\left(-\frac{c_1\sigma_X}{v}\right)}, & \gamma_1 = 0 \\ \left[1 - F_Z\left(\frac{c_2\sigma_X}{w_0}\right) + F_Z\left(-\frac{c_1\sigma_X}{w_0}\right)\right]^{-1}, & \gamma_1 \neq 0 \end{cases}$$

onde  $u_1 = \frac{\alpha_0}{1-S_1}$ ,  $v = \alpha_0 + \sigma_X(c_2\alpha_1 + c_1\beta_1)$  e  $w_0 = \frac{\alpha_0 + \sigma_X(c_2\alpha_1 + c_1\beta_1)}{1-\gamma_1} + \frac{\alpha_0}{1-S_1}$ , válido para, pelo menos, quaisquer  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$  tais que  $c_2h(c_2\sigma_X) + c_1h(-c_1\sigma_X) \geq 0$ , com  $h(x) = 2f_Z\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}f'_Z\left(\frac{x}{y}\right)$ , onde  $y \geq \alpha_0$ . Atendendo aos cálculos efetuados no exemplo 4.5, onde é também analisada a positividade de  $h(x)$ , é possível garantir que o minorante é válido para  $c_1 \in ]0, \frac{0.714\alpha_0}{\sigma_X}[$  e  $c_2 \in ]0, \frac{2.353\alpha_0}{\sigma_X}[$ , quando consideramos  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.65, -0.15, 0.4)$ , e para  $c_1 \in ]0, \frac{2.198\alpha_0}{\sigma_X}[$  e  $c_2 \in ]0, \frac{0.788\alpha_0}{\sigma_X}[$ , quando  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.6, 0.3, 0.4)$ .

Para cada uma das distribuições e parametrizações, foi selecionado o valor crítico  $c_1$ , de acordo com os intervalos de validade do minorante, tendo o valor de  $c_2$  sido calculado de modo a verificar a igualdade  $P(X_t > c_2\sigma_X) = P(X_t < -c_1\sigma_X)$ . Para tal recorremos a  $F_Z\left(\frac{x(1-S_1)}{\alpha_0}\right)$ , que é a melhor aproximação disponível para  $F_{X_t}(x)$  (veja-se, para  $\gamma_1 = 0.2, 0.6$ , a figura 4.4). Nos casos em que  $c_2$  não pertence aos referidos intervalos, o valor do minorante está escrito em itálico.

O  $\widehat{ARL}_0$  foi, então, obtido de 10 000 realizações do processo, cada uma com 175 observações, tendo as primeiras 50 sido descartadas. O  $RL$  máximo do conjunto das 10 000 realizações do processo foi controlado de modo a assegurar que não ultrapassava o número de observações consideradas, ou seja, 125 <sup>(5)</sup>. Os resultados estão nas tabelas 5.4 e 5.5, a primeira, para a distribuição do processo gerador que

<sup>5</sup>O ficheiro do programa *Mathematica 8* relativo a este estudo de simulação está no apêndice C.

Tabela 5.4:  $\widehat{ARL}_0$  (respetivo desvio padrão entre parênteses) e enquadramento, para os valores críticos  $c_1$  e  $c_2$  indicados e processo alvo TGARCH(1,1) tal que  $\alpha_0 = 10$  e  $Z_t \sim NM(0.65, -0.15, 0.4)$ .

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$		$c_1$			
		0.2	0.5	0.75	1
(0.15, 0.5, 0)	$c_2$	<b>0.014</b>	<b>0.376</b>	<b>0.855</b>	<b>1.410</b>
	$m$	1.195	2.149	3.215	4.105
	$\widehat{ARL}_0$	1.219 (0.005)	2.448 (0.020)	4.401 (0.040)	7.160 (0.067)
	$M$	1.256	2.854	5.353	9.213
(0.15, 0.5, 0.2)	$c_2$	<b>0.015</b>	<b>0.378</b>	<b>0.861</b>	<b>1.412</b>
	$m$	1.094	1.415	1.777	2.130
	$\widehat{ARL}_0$	1.214 (0.005)	2.502 (0.021)	4.550 (0.042)	7.419 (0.073)
	$M$	1.284	3.107	5.902	10.558
(0.15, 0.5, 0.6)	$c_2$	<b>0.029</b>	<b>0.404</b>	<b>0.932</b>	<b>1.425</b>
	$m$	1.117	1.418	1.681	1.860
	$\widehat{ARL}_0$	1.284 (0.007)	3.204 (0.031)	6.221 (0.065)	10.634 (0.110)
	$M$	1.610	5.660	15.118	46.865

Tabela 5.5:  $\widehat{ARL}_0$  (respetivo desvio padrão entre parênteses) e enquadramento, para os valores críticos  $c_1$  e  $c_2$  indicados e processo alvo TGARCH(1,1) tal que  $\alpha_0 = 10$  e  $Z_t \sim NM(0.6, 0.3, 0.4)$ .

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$		$c_1$				
		0.1	0.2	0.5	0.75	1
(0.15, 0.5, 0)	$c_2$	<b>0.398</b>	<b>0.464</b>	<b>0.606</b>	<b>0.688</b>	<b>0.765</b>
	$m$	1.540	1.769	2.310	2.586	2.799
	$\widehat{ARL}_0$	1.634 (0.011)	1.961 (0.015)	2.904 (0.025)	3.670 (0.032)	4.588 (0.042)
	$M$	1.755	2.137	3.339	4.400	5.800
(0.15, 0.5, 0.2)	$c_2$	<b>0.395</b>	<b>0.460</b>	<b>0.601</b>	<b>0.683</b>	<b>0.759</b>
	$m$	1.215	1.285	1.444	1.531	1.598
	$\widehat{ARL}_0$	1.632 (0.011)	1.968 (0.015)	3.024 (0.027)	3.882 (0.036)	4.894 (0.047)
	$M$	1.857	2.303	3.697	4.978	6.750
(0.15, 0.5, 0.6)	$c_2$	<b>0.348</b>	<b>0.411</b>	<b>0.540</b>	<b>0.617</b>	<b>0.698</b>
	$m$	1.249	1.314	1.416	1.451	1.475
	$\widehat{ARL}_0$	1.932 (0.016)	2.516 (0.024)	4.216 (0.045)	5.884 (0.063)	7.959 (0.086)
	$M$	2.984	4.112	8.397	16.696	36.231

é a mistura de Gaussianas com  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.65, -0.15, 0.4)$  e, a segunda, com  $(p_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{s}_1) = (0.6, 0.3, 0.4)$ .

O primeiro comentário que pode ser feito aos resultados é o facto do enquadramento ser sempre válido mesmo quando não há a garantia analítica da validade do minorante. Há, no entanto, uma diferença de qualidade quando comparamos o minorante no caso do processo alvo ser um TARCH(1) ( $\gamma_1 = 0$ ), que é o que apresenta maior qualidade, com o caso de ser um TGARCH(1, 1) ( $\gamma_1 \neq 0$ ). Tal não surpreende se olharmos para a forma como o minorante em cada caso foi conseguido; de facto, para o modelo TGARCH(1, 1), contrariamente ao modelo TARCH(1), houve necessidade de proceder a uma majoração adicional. A qualidade do enquadramento parece ser melhor para os valores mais baixos de  $c_1$  e  $c_2$ , o mesmo acontecendo para valores mais baixos de  $\gamma_1$ .

Para terminar referimos que a avaliação da qualidade do enquadramento do  $ARL$  precisa ainda de trabalho adicional, sendo de destacar a necessidade de analisar o  $ARL_0$  para modelos com  $\delta \neq 1$  ou de ordens superior a 1 mas também o  $ARL$  fora de controlo, já que a avaliação do desempenho dos esquemas de controlo com possibilidade de limites assimétricos para processo  $\delta$ -TGARCH depende tanto do  $ARL$  sob controlo como do  $ARL$  fora de controlo.



# Considerações finais

Nesta dissertação aprofundamos o estudo da estrutura probabilista do modelo  $\delta$ -TGARCH, que passa aqui a incluir a possibilidade da potência  $\delta$  ser negativa, e avançamos uma aplicação às cartas de controlo.

Concretamente no que respeita às representações do modelo, para a representação  $\delta$ -TARCH( $\infty$ ) obtivemos condições que garantem a sua existência, com convergência q.c., e ainda a sua unicidade. A partir desta pudemos obter a representação mínima, mais especificamente uma condição necessária e outra suficiente para a sua existência. Notamos que estas duas representações se encontravam estabelecidas apenas para casos particulares do modelo  $\delta$ -TGARCH, nomeadamente os modelos GARCH (Berkes, Horváth e Kokoszka, 2003) e TGARCH (Gonçalves e Mendes-Lopes, 2010). Propusemos também uma representação vetorial mais compacta do que as usuais, que, ao contrário da inicialmente proposta por Pan, Wang e Tong (2008), tem a vantagem de incluir o modelo em que alguma das ordens é igual a 1, e que foi instrumental para o desenvolvimento do estudo das estacionaridades.

O objetivo transversal estabelecido determinava a análise dos diversos tipos de estacionariedade e da ergodicidade do modelo  $\delta$ -TGARCH, adotando condições mínimas sobre o processo gerador. Assim, concretamente no que respeita às nossas contribuições, no estudo da estacionariedade forte e ergodicidade e existência de momento de ordem  $\delta$ , para além de considerarmos uma nova representação vetorial para o modelo e  $\delta \neq 0$ , as nossas hipóteses sobre o processo gerador são menos restritivas do que em Pan, Wang e Tong (2008), onde há simetria, e mesmo do que em Liu (2009), onde se assume que as variáveis são centradas. Mesmo assim, conseguimos obter uma condição necessária e suficiente para garantir a existência da solução fortemente estacionária e outra para garantir a existência solução estacionária à ordem  $\delta$ , que é ainda uma condição suficiente de estacionariedade forte. De salientar que, tendo a potência  $\delta$  a faculdade de ser negativa, o conceito de estacionariedade à ordem  $\delta$  foi alargado. Ilustrámos a relevância de considerar hipóteses menos restritivas sobre o processo gerador, quando tomámos, por exemplo, a lei de Cauchy padrão para lei

marginal do processo gerador, já que, neste caso, o momento de ordem 1 não é finito. Além disso, traduzimos as condições obtidas para situações concretas, obtendo as regiões de estacionaridade de modo explícito. No que diz respeito à discussão da estacionaridade fraca, obtivemos uma condição necessária e suficiente que garante a estacionaridade fraca da representação vetorial. A tradução desta condição para o modelo  $\delta$ -TGARCH permitiu obter uma solução fracamente estacionária com momentos finitos à ordem  $2\delta$ , para  $\delta \geq 1$ . Pan, Wang e Tong (2008), ainda que sem referir diretamente a estacionaridade fraca, ficam-se pela obtenção de uma condição suficiente.

A exposição feita sobre representações e estacionaridades foi já objeto de publicação em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2012).

A propriedade de Taylor indica-nos que a autocorrelação de ordem  $n$  do processo em valor absoluto é maior do que a do quadrado do processo e traduz o facto estilizado conhecido como efeito de Taylor. Partindo das expressões das autocorrelações obtidas por He e Teräsvirta (1999a), explorámos aqui esta propriedade no modelo TGARCH(1, 1), provando que não se limita a parametrizações do modelo particular AVGARCH(1, 1) nem a autocorrelações de ordem 1, algo que não tinha sido possível fazer em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2009). A propriedade de Taylor para este modelo AVGARCH(1, 1) já tinha sido estudada por He e Teräsvirta (1999a), para  $\gamma_1 = 0$  e apenas para autocorrelações de ordem 1, e por Haas (2009), no caso geral, que usou a importância da condição sobre os momentos do processo gerador estabelecida em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2009). Refira-se que este tipo de estudo teórico não tem paralelo para outros modelos condicionalmente heteroscedásticos, devido à dificuldade de obtenção das expressões analíticas das autocorrelações. Analisámos ainda a questão da extensão da região de parametrizações para as quais a propriedade se verifica, tendo observado uma clara influência dos momentos das variáveis do processo gerador na região obtida. Acrescente-se que, no modelo TARCH, trabalhamos com distribuições leptocúrticas, tendo verificado a validade da propriedade para praticamente todas as parametrizações que garantem a existência das autocorrelações. Fizemos ainda um estudo de simulação que indica que o modelo TARCH é muito mais favorável ao aparecimento do efeito de Taylor do que o modelo ARCH, considerando a mesma distribuição marginal para o processo gerador e parametrizações produzindo valores de curtose próximos nos dois modelos. Será interessante, como trabalho futuro, procurar desenvolver condições dependentes apenas dos parâmetros e da distribuição do processo gerador que permitam assegurar a presença da propriedade de Taylor no modelo TGARCH(1, 1), bem como analisar a magnitude desta propriedade (isto é, o valor da diferença entre



as autocorrelações). A extensão do estudo a ordens mais elevadas e a outros modelos está, naturalmente, condicionada pela obtenção das expressões das autocorrelações.

No que se refere ao estudo das distribuições de dimensão finita de um processo  $X$  seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH, o facto de que a lei marginal é simétrica se e só se a distribuição marginal do processo gerador,  $Z$ , também o é, tornou evidente que não bastaria tratar transformações do processo, como o quadrado ou o valor absoluto. Ainda para a distribuição marginal, obtivemos um seu enquadramento para qualquer  $\delta \neq 0$ . Este estudo encontrava-se apenas feito para uma transformação de processo GARCH (Pawlak e Schmid, 2001) e para processos TGARCH (Gonçalves e Mendes-Lopes, 2007). Com facilidade se constata que o enquadramento aqui obtido para o caso geral é melhor do que o já existente para os casos particulares. A função  $F_Z(x [E(\sigma_t^\delta)]^{-1/\delta})$ , umas vezes majorante outras minorante de  $F_{X_t}(x)$  (mas cuja validade teórica como tal não ficou estabelecida para todo  $x \in \mathbb{R}$ ), tem, de acordo com as simulações desenvolvidas, elevada qualidade, confundindo-se, por vezes, com  $F_{X_t}(x)$  e mostrando-se relevante mesmo fora dos limites de validade teóricos estabelecidos. O estudo paralelo das duas funções anteriores merece, pelo exposto, ser aprofundado, por exemplo no que diz respeito à investigação das condições que determinam o nível de afastamento entre elas.

Passando ao enquadramento das distribuições conjuntas, o trabalho existente estava limitado a transformações do modelo ARCH (Pawlak e Schmid, 2001) e TGARCH (Gonçalves e Mendes-Lopes, 2007); aqui estabelecemo-lo para o processo  $\delta$ -TGARCH de potência positiva, o que ampliou, inclusivamente, a análise apresentada em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013a), onde tratámos o modelo TGARCH e apenas algumas regiões de  $\mathbb{R}^n$ . A dificuldade de ilustração do enquadramento determinou que o estudo de simulação para avaliação da qualidade fosse feito para as distribuições dos vetores de dimensão 2. Apesar disso, pensamos que clarifica os pontos fortes e menos fortes deste enquadramento, que queremos, naturalmente, aperfeiçoar em trabalho futuro. Como ponto a melhorar, está também a extensão da região de validade de alguns enquadramentos já que, também aqui, eles parecem ser válidos para além das regiões que foi possível indicar analiticamente. Refira-se ainda que o enquadramento prévio da função  $F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(x_1, \dots, x_n)$  foi fundamental para o desenvolvimento deste estudo. É interessante notar que foi também com ele que fizemos a ligação para a aplicação às cartas de controlo.

As cartas de controlo Shewhart modificadas com possibilidade de limites assimétricos foram aqui consideradas para processos  $\delta$ -TGARCH de potência positiva, estendendo-se o âmbito inicial quer em termos do modelo, uma vez que foram introduzidas para processos GARCH, quer em termos do seu desenho, pois foram pro-

postas com limites de controlo simétricos (Severin e Schmid, 1998, 1999). Seguiu-se o estudo do *ARL* destas cartas, já que é a medida mais usual de avaliação de desempenho. Considerando um modelo de relação entre o processo observado e o processo alvo que prevê a possibilidade de *shift* (mudança brusca de magnitude fixa), obtivemos um enquadramento para o *ARL*, depois particularizado para o *ARL* sob controlo. Este último foi, então, examinado no contexto dos esquemas com limites de controlo, primeiro, simétricos e, depois, assimétricos. Os estudos de simulação desenvolvidos para o modelo TGARCH(1, 1) ilustraram o nível de enquadramento que está para já estabelecido, que, por exemplo, já teve melhoria no modelo TARCH quando comparado com o enquadramento obtido em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b). Refira-se que em Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes (2013b) tínhamos feito o estudo comparativo do *ARL* sob controlo para cartas com limites simétricos, considerando apenas (mas, mesmo assim, separadamente) os modelos ARCH e TARCH, e já havíamos mostrado as vantagens do enquadramento para o *ARL* sob controlo aí determinado para o modelo ARCH geral relativamente ao enquadramento de Severin e Schmid (1999) e ao obtido de Pawlak e Schmid (2001). O trabalho futuro deverá passar por completar a avaliação da qualidade do *ARL*, já que, por exemplo, falta analisar outros valores de  $\delta$  diferentes de 0 e de 1 mas também o *ARL* fora de controlo. Será ainda interessante quantificar os ganhos da introdução da possibilidade de limites assimétricos em termos de deteção mais rápida do estado fora de controlo. Mais tarde, há que considerar a carta Shewhart para a variância do processo e a possibilidade da passagem a outro tipo de cartas, como as EWMA (da qual a carta Shewhart é um caso particular) e CUSUM.

Como nota final e atendendo ao exposto, é inevitável salientar, mais uma vez, a agilidade e sistematização que este modelo  $\delta$ -TGARCH traz ao estudo da estrutura probabilista de um vasto grupo de modelos condicionalmente heteroscedásticos nele incorporados.

# Apêndices



## Apêndice A

# Sobre a especificação de $\sigma_t$

Seja  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ). Então, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \left[ \alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta} \right] + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^{\delta} \quad (\text{A.1})$$

onde  $\delta \neq 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, p$ ,  $\gamma_j \geq 0$ , para  $j = 1, \dots, q$ .

Adotemos a seguinte notação:  $\gamma_\tau = \max_{1 \leq j \leq q} \gamma_j$ , onde  $\tau \in \{1, \dots, q\}$ .

Neste apêndice vamos discutir a especificação de  $\sigma_t$ , para qualquer  $t$  em  $\mathbb{Z}$ , quando  $\gamma_\tau < 1$  e quando  $\gamma_\tau \geq 1$ .

Começemos por notar que, partindo de (A.1), temos

$$\sigma_t^\delta \geq \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^{\delta} \quad (\text{A.2})$$

e também

$$\sigma_t^\delta \geq \alpha_0 + \gamma_\tau \sigma_{t-\tau}^{\delta}. \quad (\text{A.3})$$

Considerando apenas a desigualdade (A.3) e procedendo de modo recursivo, obtemos, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sigma_t^\delta \geq \alpha_0 \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_\tau^k + \gamma_\tau^n \sigma_{t-n\tau}^{\delta},$$

logo

$$\sigma_t^\delta \geq \alpha_0 \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_\tau^k. \quad (\text{A.4})$$

Assim, partindo de (A.2) e fazendo as substituições sugeridas por (A.3), obtemos, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sigma_t^\delta \geq \alpha_0 + \alpha_0 \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_\tau^k (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_q) = \alpha_0 \left( 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_\tau^k \times \sum_{j=1}^q \gamma_j \right).$$

Portanto, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :

- caso  $\gamma_\tau = 1$ , como  $\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_\tau^k = n$ , vem  $\sigma_t^\delta \geq \alpha_0 \left( 1 + n \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) > 0$ ;
- caso  $\gamma_\tau \neq 1$ , como  $\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_\tau^k = \frac{1-\gamma_\tau^n}{1-\gamma_\tau}$ , vem  $\sigma_t^\delta \geq \alpha_0 \left( 1 + \frac{1-\gamma_\tau^n}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) > 0$ .

Antes de continuar, notemos que, relativamente à função real  $f$ , de domínio  $[0, +\infty[$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} x^a & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ , onde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , podemos dizer que, caso  $a < 0$ ,  $f$  é decrescente em  $]0, +\infty[$  e, caso  $a > 0$ ,  $f$  é crescente em  $[0, +\infty[$ .

Assim sendo, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ :

- caso  $\delta < 0$  e  $\gamma_\tau = 1$ , temos  $\sigma_t \leq \left[ \alpha_0 \left( 1 + n \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$ ;
- caso  $\delta < 0$  e  $\gamma_\tau \neq 1$ , temos  $\sigma_t \leq \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1-\gamma_\tau^n}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$ ;
- caso  $\delta > 0$  e  $\gamma_\tau = 1$ , temos  $\sigma_t \geq \left[ \alpha_0 \left( 1 + n \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$ ;
- caso  $\delta > 0$  e  $\gamma_\tau \neq 1$ , temos  $\sigma_t \geq \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1-\gamma_\tau^n}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$ .

No que se segue, vamos considerar  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a sucessão de termo geral

$$u_n = \begin{cases} \left[ \alpha_0 \left( 1 + n \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}} & \text{se } \gamma_\tau = 1 \\ \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1-\gamma_\tau^n}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}} & \text{se } \gamma_\tau \neq 1 \end{cases}.$$

Começemos por analisar o caso  $\delta < 0$  e  $\gamma_\tau \geq 1$ .

Na dedução anterior ficou evidente que, como  $\alpha_0 > 0$ , então  $\sigma_t^\delta > 0$ , logo  $\sigma_t > 0$ . Mostremos que, sendo as desigualdades anteriores verificadas para qualquer  $n$  em  $\mathbb{N}$ , então também temos  $\sigma_t \leq 0$ , o que conduz a uma contradição.

Com efeito, por um lado, temos que  $\sigma_t$  é um minorante de  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$  e, por outro lado, sendo  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão decrescente <sup>(1)</sup> tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , temos que 0 é o máximo do conjunto de minorantes de  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ , portanto,  $\sigma_t \leq 0$ . Encontrámos, assim, a contradição.

Assim, caso  $\delta < 0$  e  $\gamma_\tau \geq 1$ , o processo não está bem definido.

Voltemo-nos, em seguida, para o caso  $\delta > 0$  e  $\gamma_\tau \geq 1$ .

Neste caso,  $\sigma_t = +\infty$ , pois  $\sigma_t \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Consideremos, agora, o caso  $\gamma_\tau < 1$ . Vamos apresentar as conclusões para este caso sob a forma de lema, dada a sua importância para alguns resultados presentes neste texto.

**Lema A.1** *Seja  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) tal que  $\gamma_\tau < 1$ . Para todo  $t \in \mathbb{Z}$ ,*

$$(a) \text{ se } \delta > 0, \text{ então } \sigma_t \geq \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}},$$

$$(b) \text{ se } \delta < 0, \text{ então } \sigma_t \leq \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

**Demonstração:** Se  $\delta > 0$  (respetivamente,  $\delta < 0$ ), por um lado, temos que  $\sigma_t$  é um majorante (respetivamente, minorante) de  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$  e, por outro lado, sendo

---


$$\begin{aligned} &^1 \text{Para } n \in \mathbb{N}, \text{ temos } n < n+1 \Leftrightarrow \alpha_0 \left( 1 + n \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) < \alpha_0 \left( 1 + (n+1) \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[ \alpha_0 \left( 1 + n \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}} > \left[ \alpha_0 \left( 1 + (n+1) \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}} \Leftrightarrow u_n > u_{n+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Para } n \in \mathbb{N}, \text{ como } \gamma_\tau > 1, \text{ temos } n < n+1 \Leftrightarrow \gamma_\tau^n < \gamma_\tau^{n+1} \Leftrightarrow -\gamma_\tau^n > -\gamma_\tau^{n+1} \Leftrightarrow 1-\gamma_\tau^n > 1-\gamma_\tau^{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1-\gamma_\tau^n}{1-\gamma_\tau} < \frac{1-\gamma_\tau^{n+1}}{1-\gamma_\tau} \Leftrightarrow \alpha_0 \left( 1 + \frac{1-\gamma_\tau^n}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) < \alpha_0 \left( 1 + \frac{1-\gamma_\tau^{n+1}}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1-\gamma_\tau^n}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}} > \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1-\gamma_\tau^{n+1}}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}} \Leftrightarrow u_n > u_{n+1}. \end{aligned}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão crescente (respetivamente, decrescente) tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$ , temos que  $\left[ \alpha_0 \left( 1 + \frac{1}{1-\gamma_\tau} \sum_{j=1}^q \gamma_j \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$  é o mínimo (respetivamente, máximo) do conjunto de mājorantes (respetivamente, mino- rantes) de  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ , o que prova (a) (respetivamente, (b)). ■



## Apêndice B

# Momentos do modelo

## $\delta$ -TGARCH(1, 1)

O capítulo 3 tem como base expressões de autocorrelações de transformações de um processo  $\delta$ -TGARCH(1,1) que foram determinadas por He e Teräsvirta (1999a). Nesse capítulo e no capítulo 5 surgem também outras expressões como, por exemplo, do coeficiente de curtose do processo, igualmente obtidas por He e Teräsvirta (1999a). Porém, num artigo posterior, Ling e McAleer (2002a) afirmam que a dedução das expressões feita por He e Teräsvirta (1999a) só está correta se o processo for fortemente estacionário. Este alerta leva-nos a rever aqui as condições de existência e o cálculo destas expressões para o modelo  $\delta$ -TGARCH(1, 1) com potência  $\delta$  positiva. É, no entanto, importante referir que a partir das expressões aqui apresentadas facilmente reencontramos as expressões de He e Teräsvirta (1999a). Decidimos mesmo assim manter este apêndice, pois todas as deduções são feitas recorrendo apenas a resultados provados neste texto, o que tem a vantagem adicional de o tornar mais autocontido.

Seja, então,  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  um processo seguindo o modelo  $\delta$ -TGARCH(1,1) com potência  $\delta$  positiva. Assim, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , temos

$$\begin{cases} X_t = Z_t \sigma_t \\ \sigma_t^\delta = \alpha_0 + \alpha_1 (X_{t-1}^+)^{\delta} + \beta_1 (X_{t-1}^-)^{\delta} + \gamma_1 \sigma_{t-1}^{\delta} \end{cases}$$

onde  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  é o processo gerador e  $\delta > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\beta_1 \geq 0$ ,  $\gamma_1 \geq 0$ .

Começamos por recordar que, de acordo com o teorema 2.21, se o processo gerador  $Z$  verifica  $E(|Z_0|^\delta) < +\infty$  e  $E[\alpha_1 (Z_0^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_0^-)^{\delta} + \gamma_1] < 1$ , então  $X$  é fortemente estacionário. Também já estabelecemos, no corolário 2.20, que estas

mesmas hipóteses garantem a finitude e independência de  $t$  de  $E(|X_t|^\delta)$ , tendo-se

$$E(|X_t|^\delta) = \frac{\alpha_0 E(|Z_0|^\delta)}{1 - E[\alpha_1 (Z_0^+)^\delta + \beta_1 (Z_0^-)^\delta + \gamma_1]}.$$

Seja  $k \in \mathbb{N}$  fixo. Consideremos, agora, que  $E(|Z_0|^{\delta k}) < +\infty$ . Tal implica que  $E(|Z_0|^\delta) < +\infty$ , uma vez que o parâmetro  $\delta$  do modelo é positivo. Além disso, temos  $E\left\{[\alpha_1 (Z_t^+)^\delta + \beta_1 (Z_t^-)^\delta + \gamma_1]^k\right\} < +\infty$ , o que permite adotar, para  $i = 0, 1, \dots, k$ , a seguinte notação

$$\vartheta_i = E\left\{[\alpha_1 (Z_t^+)^\delta + \beta_1 (Z_t^-)^\delta + \gamma_1]^i\right\} = E\left\{[\alpha_1 (Z_0^+)^\delta + \beta_1 (Z_0^-)^\delta + \gamma_1]^i\right\}, \quad (\text{B.1})$$

já que as variáveis  $Z_t$  são identicamente distribuídas.

Vejamos, então, sob que condições é que podemos garantir que  $E(|X_t|^{\delta k})$  é finita e independente de  $t$ .

**Lema B.1** *Seja  $k \in \mathbb{N}$  fixo. Consideremos um processo  $\delta$ -TGARCH(1,1),  $X$ , tal que  $\delta > 0$  e  $E(|Z_0|^{\delta k}) < +\infty$ . Se*

$$\vartheta_k < 1,$$

então  $E(|X_t|^{\delta k})$  é finita e independente de  $t$ , tendo-se  $E(|X_t|^{\delta k})$  definido recursivamente do seguinte modo

$$E(|X_t|^{\delta k}) = \frac{E(|Z_0|^{\delta k})}{1 - \vartheta_k} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \alpha_0^i \vartheta_{k-i} \frac{E(|X_t|^{\delta(k-i)})}{E(|Z_0|^{\delta(k-i)})}. \quad (\text{B.2})$$

**Demonstração:** Seja  $t \in \mathbb{Z}$ . Observamos, em primeiro lugar, que se  $E(|Z_0|^{\delta k}) < +\infty$  e  $\vartheta_k < 1$ , então  $E(|Z_0|^\delta) < +\infty$  e, pela desigualdade de Jensen,  $\vartheta_1 < 1$ , o que significa que  $X$  é fortemente estacionário e  $E(|X_t|^\delta)$  é finita e independente de  $t$ .

Ora, como  $X$  é fortemente estacionário, então  $\sigma_t^\delta$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável, logo, para  $i = 1, \dots, k$ ,

$$\begin{aligned} E(|X_t|^{\delta i}) &= E\left(\sigma_t^{\delta i} E[|Z_t|^{\delta i} | \underline{X}_{t-1}]\right) \\ &= E\left(\sigma_t^{\delta i}\right) E\left(E[|Z_t|^{\delta i} | \underline{X}_{t-1}]\right) \\ &= E\left(\sigma_t^{\delta i}\right) E(|Z_0|^{\delta i}), \end{aligned}$$

já que  $Z_t$  é independente de  $\underline{X}_{t-1}$ . A estacionaridade forte de  $X$  também assegura que, se  $E(|X_t|^{\delta k})$  for finita, então é independente de  $t$ . Portanto, para mostrar que  $E(|X_t|^{\delta k}) < +\infty$  basta provar que  $E(\sigma_t^{k\delta}) < +\infty$ .

Seja  $f(Z_t) = \alpha_1 (Z_t^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_t^-)^{\delta} + \gamma_1$ . Então

$$\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + f(Z_{t-1}) \sigma_{t-1}^{\delta}. \quad (\text{B.3})$$

Começemos por elevar ambos os membros da igualdade anterior à potência  $k$ . Desta forma, obtemos

$$\sigma_t^{\delta k} = [f(Z_{t-1})]^k \sigma_{t-1}^{\delta k} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \alpha_0^i \left( f(Z_{t-1}) \sigma_{t-1}^{\delta} \right)^{k-i}.$$

Atendendo às propriedades das funções mensuráveis positivas, podemos integrar ambos os membros desta igualdade e vem

$$E(\sigma_t^{\delta k}) = \vartheta_k E(\sigma_{t-1}^{\delta k}) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \alpha_0^i \vartheta_{k-i} E(\sigma_{t-1}^{\delta(k-i)}),$$

pois  $\sigma_{t-1}^{\delta}$  é  $\underline{X}_{t-2}$ -mensurável e  $Z_{t-1}$  é independente de  $\underline{X}_{t-2}$ . Como  $X$  é fortemente estacionário, então

$$E(\sigma_t^{\delta k}) = \vartheta_k E(\sigma_t^{\delta k}) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \alpha_0^i \vartheta_{k-i} E(\sigma_t^{\delta(k-i)}),$$

o que é equivalente a

$$E(\sigma_t^{\delta k}) = \frac{1}{1 - \vartheta_k} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \alpha_0^i \vartheta_{k-i} E(\sigma_t^{\delta(k-i)}),$$

uma vez que  $1 - \vartheta_k \neq 0$ .

Assim sendo, e atendendo à igualdade estabelecida no início desta prova, temos, então,

$$E(|X_t|^{\delta k}) = \frac{E(|Z_0|^{\delta k})}{1 - \vartheta_k} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \alpha_0^i \vartheta_{k-i} \frac{E(|X_t|^{\delta(k-i)})}{E(|Z_0|^{\delta(k-i)})}$$

que é finita, pois  $0 < E(|Z_0|^{\delta k}) < +\infty$ , logo também  $0 < E(|Z_0|^{\delta(k-i)}) < +\infty$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ , o que permite concluir o pretendido recursivamente, partindo do facto conhecido de que  $E(|X_t|^{\delta}) < +\infty$ . ■

Vamos, agora, particularizar a expressão (B.2) obtida no lema anterior para alguns valores de  $k$  e de  $\delta$ . Para além de supor verificadas as hipóteses do lema

necessárias em cada caso, vamos admitir que  $E(Z_0) = 0$  e  $E(Z_0^2) = 1$ . Então, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ , temos  $E(X_t) = 0$  <sup>(1)</sup>,  $V(X_t) = E(X_t^2)$ ,  $A(X_t) = \frac{E(X_t^3)}{[E(X_t^2)]^{\frac{3}{2}}}$  e  $K(X_t) = \frac{E(X_t^4)}{[E(X_t^2)]^2}$ , expressões estas que são independentes de  $t$ . Assim, temos que as variáveis do processo  $X$  são centradas, de variância  $\sigma_X^2$ , de coeficiente de assimetria  $\zeta_X$  e de coeficiente de curtose  $\kappa_X$ . Então:

– quando  $\delta = 2$ , temos

$$\sigma_X^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \vartheta_1} \quad (\text{B.4})$$

e

$$\begin{aligned} \kappa_X &= \frac{E(Z_0^4)}{1 - \vartheta_2} \left[ 2\alpha_0\vartheta_1 \frac{E(X_t^2)}{E(Z_0^2)} + \alpha_0^2 \right] \times \left( \frac{1 - \vartheta_1}{\alpha_0} \right)^{-2} \\ &= \frac{\kappa_Z (1 - \vartheta_1^2)}{1 - \vartheta_2}, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

– quando  $\delta = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \frac{E(Z_0^2)}{1 - \vartheta_2} \left[ 2\alpha_0\vartheta_1 \frac{E(|X_t|)}{E(|Z_0|)} + \alpha_0^2 \right] \\ &= \frac{\alpha_0^2 (1 + \vartheta_1)}{(1 - \vartheta_1)(1 - \vartheta_2)}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \zeta_X &= \frac{E(Z_0^3)}{1 - \vartheta_3} \left( 3\alpha_0\vartheta_2 \frac{E(X_t^2)}{E(Z_0^2)} + 3\alpha_0^2\vartheta_1 \frac{E(|X_t|)}{E(|Z_0|)} + \alpha_0^3 \right) (\sigma_X^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\zeta_Z}{(1 - \vartheta_3)\sigma_X^3} \left( 3\alpha_0\vartheta_2\sigma_X^2 + \frac{3\alpha_0^3\vartheta_1}{1 - \vartheta_1} + \alpha_0^3 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

e

$$\begin{aligned} \kappa_X &= \left( 4\alpha_0\vartheta_3 \frac{E(|X_t|^3)}{E(|Z_0|^3)} + 6\alpha_0^2\vartheta_2 \frac{E(X_t^2)}{E(Z_0^2)} + 4\alpha_0^3\vartheta_1 \frac{E(|X_t|)}{E(|Z_0|)} + \alpha_0^4 \right) \times \\ &\quad \times \frac{E(Z_0^4)}{(1 - \vartheta_4)(\sigma_X^2)^2} \\ &= \frac{\kappa_Z}{(1 - \vartheta_4)\sigma_X^4} \left( 4\alpha_0\vartheta_3\sigma_X^3 \frac{\zeta_X}{\zeta_Z} + 6\alpha_0^2\vartheta_2\sigma_X^2 + \frac{4\alpha_0^4\vartheta_1}{1 - \vartheta_1} + \alpha_0^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

<sup>1</sup>Na introdução do modelo  $\delta$ -TGARCH, concretamente na secção 1.1 do capítulo 1, vimos que se as variáveis do processo  $Z$  são centradas e reduzidas (ou seja, satisfazem a hipótese **H1**) e  $\sigma_t$  é  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurável, então, caso exista,  $E(X_t) = 0$ .

onde  $\zeta_Z$  e  $\kappa_Z$  são, respetivamente, os coeficientes de assimetria e de curtose das variáveis  $Z_t$ .

Avançamos, agora, para a expressão da autocorrelação de duas transformações do processo  $X$ , especificamente,  $|X_t|^\delta$  e  $|X_t|^{2\delta}$ . Queremos, em concreto, determinar  $\rho_{n,\delta}(j) = \text{corr}(|X_t|^{\delta j}, |X_{t-n}|^{\delta j}) = \frac{\text{cov}(|X_t|^{\delta j}, |X_{t-n}|^{\delta j})}{\sqrt{V(|X_t|^{\delta j})}\sqrt{V(|X_{t-n}|^{\delta j})}}$ , para  $j = 1, 2$  e onde  $\delta$  é o parâmetro potência do modelo em estudo.

Do lema B.1, as condições de existência de  $\rho_{n,\delta}(j)$  são  $E(|Z_0|^{\delta j}) < +\infty$  e  $\vartheta_j < 1$ , que admitiremos, no que se segue, verificadas. Salientamos que, sob estas condições,  $X$  é fortemente estacionário e  $\rho_{n,\delta}(j)$  é independente de  $t$ .

Nos cálculos seguintes, retomamos a notação (B.3) usada na demonstração do lema B.1, ou seja,  $\sigma_t^\delta = \alpha_0 + f(Z_{t-1})\sigma_{t-1}^\delta$ , com  $f(Z_t) = \alpha_1(Z_t^+)^\delta + \beta_1(Z_t^-)^\delta + \gamma_1$ .

Começamos pela expressão de  $\rho_{1,\delta}(1)$ . Atendendo a que

$$\rho_{1,\delta}(1) = \frac{E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta) - [E(|X_t|^\delta)]^2}{E(|X_t|^{2\delta}) - [E(|X_t|^\delta)]^2} \quad (\text{B.9})$$

e  $E(|X_t|^\delta)$  e  $E(|X_t|^{2\delta})$  são conhecidos, resta determinar  $E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta)$ . Ora,

$$\begin{aligned} E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta) &= E(|Z_t|^\delta |Z_{t-1}|^\delta \sigma_t^\delta \sigma_{t-1}^\delta) \\ &= E(|Z_t|^\delta |Z_{t-1}|^\delta [\alpha_0 + f(Z_{t-1})\sigma_{t-1}^\delta] \sigma_{t-1}^\delta) \\ &= \alpha_0 E(|Z_t|^\delta |Z_{t-1}|^\delta \sigma_{t-1}^\delta) + E[|Z_t|^\delta |Z_{t-1}|^\delta f(Z_{t-1})\sigma_{t-1}^{2\delta}]. \end{aligned}$$

Como  $\sigma_{t-1}^\delta$  e  $\sigma_{t-1}^{2\delta}$  são  $\underline{X}_{t-2}$ -mensuráveis e  $|Z_t|^\delta$ ,  $|Z_{t-1}|^\delta$  e  $f(Z_{t-1})$  são independentes de  $\underline{X}_{t-2}$ , então

$$E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta) = \alpha_0 E(|Z_t|^\delta |Z_{t-1}|^\delta) E(\sigma_{t-1}^\delta) + E[|Z_t|^\delta |Z_{t-1}|^\delta f(Z_{t-1})] E(\sigma_{t-1}^{2\delta}).$$

Logo, como as variáveis  $Z_t$  são i.i.d. e  $X$  é fortemente estacionário, podemos escrever

$$\begin{aligned} E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta) &= \alpha_0 [E(|Z_0|^\delta)]^2 E(\sigma_t^\delta) + E(|Z_0|^\delta) E[|Z_0|^\delta f(Z_0)] E(\sigma_t^{2\delta}) \\ &= \alpha_0 E(|Z_0|^\delta) E(|X_t|^\delta) + E(|Z_0|^\delta) E[|Z_0|^\delta f(Z_0)] \frac{E(|X_t|^{2\delta})}{E(|Z_0|^{2\delta})}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E[|Z_0|^\delta f(Z_0)] &= E\left\{(Z_0^+ + Z_0^-)^\delta [\alpha_1 (Z_0^+)^\delta + \beta_1 (Z_0^-)^\delta + \gamma_1]\right\} \\ &= E\left\{[(Z_0^+)^\delta + (Z_0^-)^\delta] [\alpha_1 (Z_0^+)^\delta + \beta_1 (Z_0^-)^\delta + \gamma_1]\right\} \\ &= E[\alpha_1 (Z_0^+)^{2\delta} + \beta_1 (Z_0^-)^{2\delta} + \gamma_1 |Z_0|^\delta] \\ &= \alpha_1 E[(Z_0^+)^{2\delta}] + \beta_1 E[(Z_0^-)^{2\delta}] + \gamma_1 E(|Z_0|^\delta). \end{aligned}$$

Passamos, em seguida, para a expressão de  $\rho_{n,\delta}(1)$ , para  $n > 1$ . Como

$$\rho_{n,\delta}(1) = \frac{E\left(|X_t|^\delta |X_{t-n}|^\delta\right) - \left[E\left(|X_t|^\delta\right)\right]^2}{E\left(|X_t|^{2\delta}\right) - \left[E\left(|X_t|^\delta\right)\right]^2}, \quad (\text{B.10})$$

então, analogamente ao caso anterior, basta determinar  $E\left(|X_t|^\delta |X_{t-n}|^\delta\right)$ . Partindo de  $\sigma_t^\delta = \alpha_0 + f(Z_{t-1})\sigma_{t-1}^\delta$  e usando esta igualdade recursivamente, temos

$$\begin{aligned} \sigma_t^\delta &= \alpha_0 + \alpha_0 f(Z_{t-1}) + f(Z_{t-1})f(Z_{t-2})\sigma_{t-2}^\delta \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 f(Z_{t-1}) + \alpha_0 f(Z_{t-1})f(Z_{t-2}) + f(Z_{t-1})f(Z_{t-2})f(Z_{t-3})\sigma_{t-3}^\delta; \end{aligned}$$

logo, continuando este procedimento, temos

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 \sum_{i=1}^n \prod_{l=1}^{i-1} f(Z_{t-l}) + \prod_{i=1}^n f(Z_{t-i})\sigma_{t-n}^\delta.$$

Assim, vem

$$\begin{aligned} E\left(|X_t|^\delta |X_{t-n}|^\delta\right) &= E\left(|Z_t|^\delta |Z_{t-n}|^\delta \sigma_t^\delta \sigma_{t-n}^\delta\right) \\ &= \alpha_0 E\left\{|Z_t|^\delta |Z_{t-n}|^\delta \left[\sum_{i=1}^n \prod_{l=1}^{i-1} f(Z_{t-l})\right] \sigma_{t-n}^\delta\right\} + \\ &\quad + E\left\{|Z_t|^\delta |Z_{t-n}|^\delta \left[\prod_{i=1}^n f(Z_{t-i})\right] \sigma_{t-n}^{2\delta}\right\}. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\sigma_{t-n}^\delta$  é  $\underline{X}_{t-n-1}$ -mensurável e  $|Z_t|^\delta$ ,  $|Z_{t-n}|^\delta$  e  $f(Z_{t-i})$ , para  $i = 1, \dots, n$ , são independentes de  $\underline{X}_{t-n-1}$ , então

$$\begin{aligned} E\left(|X_t|^\delta |X_{t-n}|^\delta\right) &= \alpha_0 E\left\{|Z_t|^\delta |Z_{t-n}|^\delta \left[\sum_{i=1}^n \prod_{l=1}^{i-1} f(Z_{t-l})\right]\right\} E\left(\sigma_{t-n}^\delta\right) + \\ &\quad + E\left\{|Z_t|^\delta |Z_{t-n}|^\delta \left[\prod_{i=1}^n f(Z_{t-i})\right]\right\} E\left(\sigma_{t-n}^{2\delta}\right). \end{aligned}$$

Portanto, como as variáveis  $Z_t$  são i.i.d. e  $X$  é fortemente estacionário, obtemos

$$\begin{aligned} E\left(|X_t|^\delta |X_{t-n}|^\delta\right) &= \alpha_0 E\left(|Z_0|^\delta\right) E\left(|X_t|^\delta\right) \sum_{i=1}^n \vartheta_1^{i-1} + \\ &\quad + E\left(|Z_0|^\delta\right) E\left[|Z_0|^\delta f(Z_0)\right] \frac{E\left(|X_t|^{2\delta}\right)}{E\left(|Z_0|^{2\delta}\right)} \vartheta_1^{n-1} \\ &= \alpha_0 E\left(|Z_0|^\delta\right) E\left(|X_t|^\delta\right) \sum_{i=1}^{n-1} \vartheta_1^{i-1} + E\left(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta\right) \vartheta_1^{n-1}, \end{aligned}$$

usando a última expressão de  $E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta)$  determinada para o cálculo de  $\rho_{1,\delta}(1)$ . Notando, agora, que

$$\begin{aligned}
& E(|X_t|^\delta |X_{t-n}|^\delta) - \left[ E(|X_t|^\delta) \right]^2 = \\
&= \alpha_0 E(|Z_0|^\delta) E(|X_t|^\delta) \sum_{i=1}^{n-1} \vartheta_1^{i-1} + E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta) \vartheta_1^{n-1} - \left[ E(|X_t|^\delta) \right]^2 \\
&= E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta) \vartheta_1^{n-1} + E(|X_t|^\delta) \left\{ \alpha_0 E(|Z_0|^\delta) \frac{1 - \vartheta_1^{n-1}}{1 - \vartheta_1} - \frac{\alpha_0 \left[ E(|Z_0|^\delta) \right]}{1 - \vartheta_1} \right\} \\
&= E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta) \vartheta_1^{n-1} + E(|X_t|^\delta) \times \alpha_0 E(|Z_0|^\delta) \frac{-\vartheta_1^{n-1}}{1 - \vartheta_1} \\
&= \left\{ E(|X_t|^\delta |X_{t-1}|^\delta) - \left[ E(|X_t|^\delta) \right]^2 \right\} \vartheta_1^{n-1},
\end{aligned}$$

obtemos

$$\rho_{n,\delta}(1) = \vartheta_1^{n-1} \rho_{1,\delta}(1). \quad (\text{B.11})$$

Avançamos para a determinação de  $\rho_{1,\delta}(2)$ . Notando que

$$\rho_{1,\delta}(2) = \frac{E(|X_t|^{2\delta} |X_{t-1}|^{2\delta}) - \left[ E(|X_t|^{2\delta}) \right]^2}{E(|X_t|^{4\delta}) - \left[ E(|X_t|^{2\delta}) \right]^2} \quad (\text{B.12})$$

e que  $E(|X_t|^{2\delta})$  e  $E(|X_t|^{4\delta})$  são conhecidos, falta calcular  $E(|X_t|^{2\delta} |X_{t-1}|^{2\delta})$ . Temos, então,

$$\begin{aligned}
E(|X_t|^{2\delta} |X_{t-1}|^{2\delta}) &= E(|Z_t|^{2\delta} |Z_{t-1}|^{2\delta} \sigma_t^{2\delta} \sigma_{t-1}^{2\delta}) \\
&= E(|Z_t|^{2\delta} |Z_{t-1}|^{2\delta} \left[ \alpha_0 + f(Z_{t-1}) \sigma_{t-1}^\delta \right]^2 \sigma_{t-1}^{2\delta}) \\
&= \alpha_0^2 E(|Z_t|^{2\delta} |Z_{t-1}|^{2\delta} \sigma_{t-1}^{2\delta}) + 2\alpha_0 E(|Z_t|^{2\delta} |Z_{t-1}|^{2\delta} f(Z_{t-1}) \sigma_{t-1}^{3\delta}) + \\
&\quad + E(|Z_t|^{2\delta} |Z_{t-1}|^{2\delta} [f(Z_{t-1})]^2 \sigma_{t-1}^{4\delta}).
\end{aligned}$$

Como  $\sigma_{t-1}^{2\delta}$  e  $\sigma_{t-1}^{4\delta}$  são  $\underline{X}_{t-2}$ -mensurável e  $|Z_t|^{2\delta}$ ,  $|Z_{t-1}|^{2\delta}$  e  $f(Z_{t-1})$  são independentes de  $\underline{X}_{t-2}$ , vem

$$\begin{aligned}
E(|X_t|^{2\delta} |X_{t-1}|^{2\delta}) &= \alpha_0^2 E(|Z_t|^{2\delta} |Z_{t-1}|^{2\delta}) E(\sigma_{t-1}^{2\delta}) + \\
&\quad + 2\alpha_0 E(|Z_t|^{2\delta} |Z_{t-1}|^{2\delta} f(Z_{t-1})) E(\sigma_{t-1}^{3\delta}) + \\
&\quad + E(|Z_t|^{2\delta} |Z_{t-1}|^{2\delta} [f(Z_{t-1})]^2) E(\sigma_{t-1}^{4\delta}).
\end{aligned}$$

Portanto, atendendo a que as variáveis  $Z_t$  são i.i.d. e  $X$  é fortemente estacionário, podemos escrever

$$E\left(|X_t|^{2\delta} |X_{t-1}|^{2\delta}\right) = E\left(|Z_0|^{2\delta}\right) \left\{ 2\alpha_0 E\left[|Z_0|^{2\delta} f(Z_0)\right] \frac{E\left(|X_t|^{3\delta}\right)}{E\left(|Z_0|^{3\delta}\right)} + \right. \\ \left. + \alpha_0^2 E\left(|X_t|^{2\delta}\right) + E\left[|Z_0|^{2\delta} [f(Z_0)]^2\right] \frac{E\left(|X_t|^{4\delta}\right)}{E\left(|Z_0|^{4\delta}\right)} \right\},$$

onde

$$E\left[|Z_0|^{2\delta} f(Z_0)\right] = E\left\{\left[(Z_0^+)^{2\delta} + (Z_0^-)^{2\delta}\right] \left[\alpha_1 (Z_0^+)^{\delta} + \beta_1 (Z_0^-)^{\delta} + \gamma_1\right]\right\} \\ = E\left[\alpha_1 (Z_0^+)^{3\delta} + \beta_1 (Z_0^-)^{3\delta} + \gamma_1 |Z_0|^{2\delta}\right] \\ = \alpha_1 E\left[(Z_0^+)^{3\delta}\right] + \beta_1 E\left[(Z_0^-)^{3\delta}\right] + \gamma_1 E\left(|Z_0|^{2\delta}\right)$$

e

$$E\left[|Z_0|^{2\delta} [f(Z_0)]^2\right] = \\ = E\left\{|Z_0|^{2\delta} \left[\alpha_1 (Z_0^+)^{\delta} \left(\alpha_1 (Z_0^+)^{\delta} + 2\gamma_1\right) + \beta_1 (Z_0^-)^{\delta} \left(\beta_1 (Z_0^-)^{\delta} + 2\gamma_1\right) + \gamma_1^2\right]\right\} \\ = E\left[\alpha_1 (Z_0^+)^{3\delta} \left(\alpha_1 (Z_0^+)^{\delta} + 2\gamma_1\right) + \beta_1 (Z_0^-)^{3\delta} \left(\beta_1 (Z_0^-)^{\delta} + 2\gamma_1\right) + \gamma_1^2 |Z_0|^{2\delta}\right] \\ = \alpha_1^2 E\left[(Z_0^+)^{4\delta}\right] + 2\alpha_1 \gamma_1 E\left[(Z_0^+)^{3\delta}\right] + \beta_1^2 E\left[(Z_0^-)^{4\delta}\right] + 2\beta_1 \gamma_1 E\left[(Z_0^-)^{3\delta}\right] + \gamma_1^2 E\left(|Z_0|^{2\delta}\right).$$

Falta, ainda, a expressão de  $\rho_{n,\delta}(2)$ , para  $n > 1$ . Como

$$\rho_{n,\delta}(2) = \frac{E\left(|X_t|^{2\delta} |X_{t-n}|^{2\delta}\right) - \left[E\left(|X_t|^{2\delta}\right)\right]^2}{E\left(|X_t|^{4\delta}\right) - \left[E\left(|X_t|^{2\delta}\right)\right]^2}, \quad (\text{B.13})$$

então, tal como no caso anterior, basta determinar  $E\left(|X_t|^{2\delta} |X_{t-n}|^{2\delta}\right)$ . Partindo das igualdades  $\sigma_t^\delta = \alpha_0 + f(Z_{t-1})\sigma_{t-1}^\delta$  e  $\sigma_t^{2\delta} = \alpha_0^2 + 2\alpha_0 f(Z_{t-1})\sigma_{t-1}^\delta + [f(Z_{t-1})]^2 \sigma_{t-1}^{2\delta}$ , podemos escrever que

$$\sigma_t^{2\delta} = \alpha_0^2 + 2\alpha_0^2 f(Z_{t-1}) + \alpha_0^2 [f(Z_{t-1})]^2 + 2\alpha_0 \{f(Z_{t-1})f(Z_{t-2}) + \\ + [f(Z_{t-1})]^2 f(Z_{t-2})\} \sigma_{t-2}^\delta + [f(Z_{t-1})]^2 [f(Z_{t-2})]^2 \sigma_{t-2}^{2\delta} \\ = \alpha_0^2 + 2\alpha_0^2 f(Z_{t-1}) + 2\alpha_0^2 f(Z_{t-1})f(Z_{t-2}) + \alpha_0^2 [f(Z_{t-1})]^2 + \\ + \alpha_0^2 [f(Z_{t-1})]^2 [f(Z_{t-2})]^2 + 2\alpha_0^2 [f(Z_{t-1})]^2 f(Z_{t-2}) + \\ + 2\alpha_0 \left\{f(Z_{t-1})f(Z_{t-2})f(Z_{t-3}) + [f(Z_{t-1})]^2 f(Z_{t-2})f(Z_{t-3}) + \right. \\ \left. + [f(Z_{t-1})]^2 [f(Z_{t-2})]^2 f(Z_{t-3})\right\} \sigma_{t-3}^\delta + \\ + [f(Z_{t-1})]^2 [f(Z_{t-2})]^2 [f(Z_{t-3})]^2 \sigma_{t-3}^{2\delta};$$



assim, se usarmos estas igualdades recursivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_t^{2\delta} &= \alpha_0^2 + 2\alpha_0^2 \sum_{j=2}^n \left( \prod_{i=1}^{j-1} f(Z_{t-i}) \right) + \alpha_0^2 \sum_{j=2}^n \left( \prod_{i=1}^{j-1} [f(Z_{t-i})]^2 \right) + \\
&\quad + 2\alpha_0^2 \sum_{j=2}^{n-1} \left\{ \left( \prod_{i=1}^{j-1} [f(Z_{t-i})]^2 \right) \left[ \sum_{l=j+1}^n \left( \prod_{k=j}^{l-1} f(Z_{t-k}) \right) \right] \right\} + \\
&\quad + 2\alpha_0 \left\{ \prod_{i=1}^n f(Z_{t-i}) + \sum_{j=2}^n \left[ \left( \prod_{i=1}^{j-1} f(Z_{t-i}) \right) \left( \prod_{i=1}^n f(Z_{t-i}) \right) \right] \right\} \sigma_{t-n}^\delta + \\
&\quad + \left( \prod_{i=1}^n [f(Z_{t-i})]^2 \right) \sigma_{t-n}^{2\delta}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
E \left( |X_t|^{2\delta} |X_{t-n}|^{2\delta} \right) &= E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \sigma_t^{2\delta} \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) = \\
&= \alpha_0^2 E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) + 2\alpha_0^2 \sum_{j=2}^n E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left( \prod_{i=1}^{j-1} f(Z_{t-i}) \right) \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) + \\
&\quad + \alpha_0^2 \sum_{j=2}^n E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left( \prod_{i=1}^{j-1} [f(Z_{t-i})]^2 \right) \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) + \\
&\quad + 2\alpha_0^2 \sum_{j=2}^{n-1} E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left\{ \left( \prod_{i=1}^{j-1} [f(Z_{t-i})]^2 \right) \left[ \sum_{l=j+1}^n \left( \prod_{k=j}^{l-1} f(Z_{t-k}) \right) \right] \right\} \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) + \\
&\quad + 2\alpha_0 E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left( \prod_{i=1}^n f(Z_{t-i}) \right) \sigma_{t-n}^{3\delta} \right) + \\
&\quad + 2\alpha_0 \sum_{j=2}^n E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left[ \left( \prod_{i=1}^{j-1} f(Z_{t-i}) \right) \left( \prod_{i=1}^n f(Z_{t-i}) \right) \right] \sigma_{t-n}^{3\delta} \right) + \\
&\quad + E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left( \prod_{i=1}^n [f(Z_{t-i})]^2 \right) \sigma_{t-n}^{4\delta} \right).
\end{aligned}$$

Ora, como  $\sigma_{t-n}^\delta$  é  $\underline{X}_{t-n-1}$ -mensurável,  $|Z_t|^\delta$ ,  $|Z_{t-n}|^\delta$  e  $f(Z_{t-i})$ , para  $i = 1, \dots, n$ , são independentes de  $\underline{X}_{t-n-1}$ , as variáveis  $Z_t$  são i.i.d. e  $X$  é fortemente estacionário, temos, para  $j \in \{2, \dots, n\}$ ,

$$E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) = \left[ E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \right]^2 E \left( \sigma_t^{2\delta} \right),$$

$$E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left( \prod_{i=1}^{j-1} f(Z_{t-i}) \right) \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) = \left[ E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \right]^2 \vartheta_1^{j-1} E \left( \sigma_t^{2\delta} \right),$$

$$E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left( \prod_{i=1}^{j-1} [f(Z_{t-i})]^2 \right) \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) = \left[ E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \right]^2 \vartheta_2^{j-1} E \left( \sigma_t^{2\delta} \right),$$

$$\begin{aligned} E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left\{ \left( \prod_{i=1}^{j-1} [f(Z_{t-i})]^2 \right) \left[ \sum_{l=j+1}^n \left( \prod_{k=j}^{l-1} f(Z_{t-k}) \right) \right] \right\} \sigma_{t-n}^{2\delta} \right) = \\ = \left[ E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \right]^2 \vartheta_2^{j-1} \left( \sum_{l=j+1}^n \vartheta_1^{l-j} \right) E \left( \sigma_t^{2\delta} \right) \quad (\text{exceto para } j=n), \end{aligned}$$

$$E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left( \prod_{i=1}^n f(Z_{t-i}) \right) \sigma_{t-n}^{3\delta} \right) = E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \vartheta_1^{n-1} E \left[ |Z_0|^{2\delta} f(Z_0) \right] E \left( \sigma_t^{3\delta} \right),$$

$$\begin{aligned} E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left[ \left( \prod_{i=1}^{j-1} f(Z_{t-i}) \right) \left( \prod_{i=1}^n f(Z_{t-i}) \right) \right] \sigma_{t-n}^{3\delta} \right) = \\ = E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \vartheta_2^{j-1} \vartheta_1^{n-j} E \left[ |Z_0|^{2\delta} f(Z_0) \right] E \left( \sigma_t^{3\delta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \left( |Z_t|^{2\delta} |Z_{t-n}|^{2\delta} \left( \prod_{i=1}^n [f(Z_{t-i})]^2 \right) \sigma_{t-n}^{4\delta} \right) = \\ = E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \vartheta_2^{n-1} E \left[ |Z_0|^{2\delta} [f(Z_0)]^2 \right] E \left( \sigma_t^{4\delta} \right). \end{aligned}$$

Então podemos escrever que

$$\begin{aligned} E \left( |X_t|^{2\delta} |X_{t-n}|^{2\delta} \right) = \\ = \alpha_0^2 E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) E \left( \sigma_t^{2\delta} \right) \left\{ 1 + 2 \sum_{j=2}^n \vartheta_1^{j-1} + \sum_{j=2}^n \vartheta_2^{j-1} + 2 \sum_{j=2}^{n-1} \left[ \vartheta_2^{j-1} \left( \sum_{l=j+1}^n \vartheta_1^{l-j} \right) \right] \right\} + \\ + 2\alpha_0 E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) E \left[ |Z_0|^{2\delta} [f(Z_0)]^2 \right] E \left( \sigma_t^{3\delta} \right) \left[ \vartheta_1^{n-1} + \sum_{j=2}^n \left( \vartheta_2^{j-1} \vartheta_1^{n-j} \right) \right] + \\ + E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \vartheta_2^{n-1} E \left[ |Z_0|^{2\delta} [f(Z_0)]^2 \right] E \left( \sigma_t^{4\delta} \right) \end{aligned}$$

e, portanto, aplicando a igualdade anterior a  $E \left( |X_t|^{2\delta} |X_{t-(n-1)}|^{2\delta} \right)$ , obtemos

$$\begin{aligned} E \left( |X_t|^{2\delta} |X_{t-n}|^{2\delta} \right) = \\ = \vartheta_2 E \left( |X_t|^{2\delta} |X_{t-(n-1)}|^{2\delta} \right) + \alpha_0^2 \left[ E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) \right]^2 \left( 1 + 2 \sum_{j=2}^n \vartheta_1^{j-1} \right) E \left( \sigma_t^{2\delta} \right) + \\ + 2\alpha_0 E \left( |Z_0|^{2\delta} \right) E \left[ |Z_0|^{2\delta} f(Z_0) \right] \vartheta_1^{n-1} E \left( \sigma_t^{3\delta} \right). \end{aligned}$$

A igualdade anterior permite, finalmente, concluir que

$$\rho_{n,\delta}(2) = \vartheta_2 \rho_{n-1,\delta}(2) + \Phi \vartheta_1^{n-1}, \quad (\text{B.14})$$

com

$$\Phi = \frac{-2\alpha_0^4\vartheta_1(1+\vartheta_1)\left[E(|Z_0|^{2\delta})\right]^2\left[(1-\vartheta_1)^2(1-\vartheta_2)\right]^{-1}}{E(|X_t|^{4\delta}) - \left[E(|X_t|^{2\delta})\right]^2} + \frac{2\alpha_0 E(|Z_0|^{2\delta}) E\left[|Z_0|^{2\delta} f(Z_0)\right] E(\sigma_t^{3\delta})}{E(|X_t|^{4\delta}) - \left[E(|X_t|^{2\delta})\right]^2}.$$

Observamos ainda que, usando recursivamente (B.14), obtemos

$$\rho_{n,\delta}(2) = \vartheta_2^{n-1}\rho_{1,\delta}(2) + \Phi \sum_{i=1}^{n-1} \vartheta_2^{n-i-1}\vartheta_1^i. \quad (\text{B.15})$$

**Observação B.2** Vejamos, agora, como é que são obtidas as expressões de  $\rho_{1,\delta}(1)$  e  $\rho_{1,\delta}(2)$  quando  $\delta = 1$ , que representaremos simplesmente por  $\rho_1(1)$  e  $\rho_1(2)$ , respectivamente, bem como a expressão de  $\Phi$ , usadas no capítulo 3. Consideremos, então, o modelo TGARCH(1,1) com processo gerador  $Z$  centrado e reduzido (logo é verificada a hipótese **H1**) e de distribuição marginal simétrica, o que significa que, em caso de existência,  $E\left[(Z_0^+)^i\right] = E\left[(Z_0^-)^i\right]$ , para todo  $i$  em  $\mathbb{N}$ . Assim sendo, e como temos  $E(|Z_0|^i) = E\left[(Z_0^+)^i\right] + E\left[(Z_0^-)^i\right]$ , então  $E\left[(Z_0^+)^i\right] = E\left[(Z_0^-)^i\right] = \frac{1}{2}E(|Z_0|^i)$ .

Então

$$E[|Z_0|f(Z_0)] = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + \gamma_1 E(|Z_0|) = \frac{\vartheta_1 + \gamma_1 \left\{ [E(|Z_0|)]^2 - 1 \right\}}{E(|Z_0|)}$$

e, portanto, a partir das indicações dadas para (B.9)

$$\begin{aligned} \rho_1(1) &= \frac{\alpha_0 E(|Z_0|) E(|X_t|) + E(|Z_0|) E[|Z_0|f(Z_0)] E(X_t^2) - [E(|X_t|)]^2}{E(X_t^2) - [E(|X_t|)]^2} \\ &= \frac{\frac{\alpha_0^2 [E(|Z_0|)]^2 (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2) + \vartheta_1 \alpha_0^2 (1+\vartheta_1)(1-\vartheta_1) - \alpha_0^2 [E(|Z_0|)]^2 (1-\vartheta_2)}{(1-\vartheta_1)^2 (1-\vartheta_2)}}{\frac{\alpha_0^2 (1+\vartheta_1)(1-\vartheta_1) - \alpha_0^2 [E(|Z_0|)]^2 (1-\vartheta_2)}{(1-\vartheta_1)^2 (1-\vartheta_2)}} + \\ &\quad + \frac{\frac{\gamma_1 \{ [E(|Z_0|)]^2 - 1 \} \alpha_0^2 (1+\vartheta_1)}{(1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)}}{\frac{\alpha_0^2 (1+\vartheta_1)(1-\vartheta_1) - \alpha_0^2 [E(|Z_0|)]^2 (1-\vartheta_2)}{(1-\vartheta_1)^2 (1-\vartheta_2)}} \\ &= \frac{[E(|Z_0|)]^2 (1-\vartheta_2) (-\vartheta_1) + \vartheta_1 (1-\vartheta_1^2)}{(1-\vartheta_1^2) - [E(|Z_0|)]^2 (1-\vartheta_2)} + \frac{\gamma_1 (1-\vartheta_1^2) \{ [E(|Z_0|)]^2 - 1 \}}{(1-\vartheta_1^2) - [E(|Z_0|)]^2 (1-\vartheta_2)} \\ &= \vartheta_1 + \frac{\gamma_1 (1-\vartheta_1^2) \{ [E(|Z_0|)]^2 - 1 \}}{(1-\vartheta_1^2) - [E(|Z_0|)]^2 (1-\vartheta_2)}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Para obter  $\rho_1(2)$ , começamos por determinar

$$E \left[ |Z_0|^2 f(Z_0) \right] = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} E \left( |Z_0|^3 \right) + \gamma_1,$$

$$E \left[ |Z_0|^2 [f(Z_0)]^2 \right] = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} E(Z_0^4) + (\alpha_1 + \beta_1) \gamma_1 E \left( |Z_0|^3 \right) + \gamma_1^2,$$

o que permite obter, a partir das indicações dadas para (B.12),

$$\begin{aligned} \rho_1(2) &= \\ &= \frac{\alpha_0^2 E(X_t^2) + 2\alpha_0 E[Z_0^2 f(Z_0)] \frac{E(|X_t|^3)}{E(|Z_0|^3)} + E[Z_0^2 [f(Z_0)]^2] \frac{E(X_t^4)}{E(Z_0^4)} - [E(X_t^2)]^2}{E(X_t^4) - [E(X_t^2)]^2} \\ &= \frac{\alpha_0^2 E(X_t^2) + 2\alpha_0 E[Z_0^2 f(Z_0)] \frac{E(|X_t|^3)}{E(|Z_0|^3)} + \left( \frac{E[Z_0^2 [f(Z_0)]^2]}{E(Z_0^4)} - 1 \right) [E(X_t^2)]^2}{E(X_t^4) - [E(X_t^2)]^2} + \\ &\quad + \frac{E[Z_0^2 [f(Z_0)]^2]}{E(Z_0^4)} \\ &= \frac{\frac{\alpha_0^4(1+\vartheta_1)}{(1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)} + \frac{2E[Z_0^2 f(Z_0)]\alpha_0^4(1+2\vartheta_1+2\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2)}{(1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)} + \left( \frac{E[Z_0^2 [f(Z_0)]^2]}{E(Z_0^4)} - 1 \right) \frac{\alpha_0^4(1+\vartheta_1)^2}{(1-\vartheta_1)^2(1-\vartheta_2)^2}}{\frac{\alpha_0^4 E(Z_0^4) \Psi}{(1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)(1-\vartheta_4)} - \frac{\alpha_0^4(1+\vartheta_1)^2}{(1-\vartheta_1)^2(1-\vartheta_2)^2}} + \\ &\quad + \frac{E[Z_0^2 [f(Z_0)]^2]}{E(Z_0^4)} \\ &= \frac{(1-\vartheta_4) \Upsilon}{E(Z_0^4) \Psi (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2) - (1+\vartheta_1)^2 (1-\vartheta_3)(1-\vartheta_4)} + \\ &\quad + \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} + (\alpha_1 + \beta_1) \gamma_1 \frac{E(|Z_0|^3)}{E(Z_0^4)} + \frac{\gamma_1^2}{E(Z_0^4)}, \end{aligned} \tag{B.17}$$

onde  $\Psi = 1 + 3\vartheta_1 + 5\vartheta_2 + 3\vartheta_3 + 3\vartheta_1\vartheta_2 + 5\vartheta_1\vartheta_3 + 3\vartheta_2\vartheta_3 + \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3$  e

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \left[ (\alpha_1 + \beta_1) E(|Z_0|^3) + 2\gamma_1 \right] (1 + 2\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2) (1 - \vartheta_1) (1 - \vartheta_2) + \\ &+ \left( \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{2} + (\alpha_1 + \beta_1) \gamma_1 \frac{E(|Z_0|^3)}{E(Z_0^4)} + \frac{\gamma_1^2}{E(Z_0^4)} - 1 \right) (1 + \vartheta_1)^2 (1 - \vartheta_3) + (1 - \vartheta_1^2) (1 - \vartheta_2) (1 - \vartheta_3). \end{aligned}$$

Resta, agora, obter

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{-2\vartheta_1(1+\vartheta_1)}{(1-\vartheta_1)^2(1-\vartheta_2)} + \frac{2E[Z_0^2 f(Z_0)](1+2\vartheta_1+2\vartheta_2+\vartheta_1\vartheta_2)}{(1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)} \\ &\quad - \frac{E(Z_0^4) \Psi}{(1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2)(1-\vartheta_3)(1-\vartheta_4)} - \frac{(1+\vartheta_1)^2}{(1-\vartheta_1)^2(1-\vartheta_2)^2} \\ &= (1-\vartheta_4) \left\{ \frac{-2\vartheta_1(1+\vartheta_1)(1-\vartheta_3)}{E(Z_0^4) \Psi (1-\vartheta_1)(1-\vartheta_2) - (1+\vartheta_1)^2 (1-\vartheta_3)(1-\vartheta_4)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left[ (\alpha_1 + \beta_1) E(|Z_0|^3) + 2\gamma_1 \right] (1 + 2\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2) (1 - \vartheta_1)}{E(Z_0^4) \Psi (1 - \vartheta_1) (1 - \vartheta_2) - (1 + \vartheta_1)^2 (1 - \vartheta_3) (1 - \vartheta_4)} \right\}. \end{aligned} \tag{B.18}$$

## Apêndice C

# Ficheiros do *Mathematica*

Neste apêndice são apresentados os sete ficheiros do programa *Mathematica 8* usados para obter as tabelas dos capítulos 3 e 5 e as figuras do capítulo 4 que dependem da simulação de trajetórias de um processo  $\delta$ -TGARCH.

Os dois primeiros ficheiros são referentes às tabelas da secção 3.4:

- O primeiro ficheiro, que compõe a secção C.1, diz respeito à tabela 3.3 da página 65. Com este ficheiro foram geradas as 100 trajetórias para uma parametrização do modelo TARCH(1) e, para cada uma delas, calculadas  $\hat{\rho}_1(1)$  e  $\hat{\rho}_1(2)$ , sendo estes valores exportados para um ficheiro do Excel.
- O segundo ficheiro, que forma a secção C.2, diz respeito à tabela 3.4 da página 66. Com este ficheiro foram geradas as 100 trajetórias para uma parametrização do modelo ARCH(1) e, para cada uma delas, calculadas  $\hat{\rho}_1(1)$  e  $\hat{\rho}_1(2)$ , sendo estes valores exportados para um ficheiro do Excel.

Os três ficheiros seguintes são referentes às figuras da secção 4.1:

- O primeiro ficheiro, que constitui a secção C.3, diz respeito à figura 4.1 da página 73. Esta figura é composta por seis gráficos, sendo o ficheiro apresentado aquele que foi executado para obter o gráfico referente a  $\delta = -\frac{1}{2}$ . Para conseguir os restantes gráficos foi apenas necessário alterar o valor de  $\delta$ .
- O segundo ficheiro, que forma a secção C.4, reporta à figura 4.2 da página 75, constituída por quatro gráficos. O ficheiro que juntamos diz respeito ao modelo de ordens  $p = 1$  e  $q = 1$ . Os outros gráficos foram obtidos alterando apenas as ordens e os parâmetros do modelo.

- O terceiro ficheiro, que constitui a secção C.5, foi usado para obter as figuras 4.3 e 4.4, da página 77. O ficheiro que exibimos corresponde ao gráfico da parametrização A1. Para conseguir o gráfico da parametrização A2 apenas foram alterados os parâmetros do modelo. Para as parametrizações B1 e B2, para além dos parâmetros do modelo, foi necessário alterar os parâmetros referentes à distribuição marginal do processo gerador.

O sexto ficheiro é referente às figuras da subsecção 4.3.4:

- Este ficheiro, que compõe a secção C.6, diz respeito às figuras 4.5 e 4.6 da página 97. Cada figura apresenta o mesmo gráfico sob quatro perspetivas diferentes, sendo o ficheiro apresentado aquele que foi executado para obter o gráfico referente a  $\delta = \frac{1}{2}$ . Para conseguir o outro gráfico foi apenas necessário alterar o valor de  $\delta$  para 2.

O último ficheiro é referente às tabelas da secção 5.3:

- Este ficheiro, que forma a secção C.7, diz respeito à tabela 5.4 da página 114. Com este ficheiro foram geradas as trajetórias para uma parametrização do modelo TGARCH(1,1), que permitiram o cálculo da estimativa do  $ARL_0$ . Todos os valores de interesse foram exportados para um ficheiro do Excel. A obtenção da tabela 5.5, da página 114, implicou apenas a alteração dos parâmetros da distribuição. As tabelas 5.1 e 5.2, da página 111, implicaram alterações mais profundas mas, sendo o resultado mais simples e as alterações semelhantes às que estão feitas noutros ficheiros, optámos por omitir o ficheiro que lhes deu origem.

## C.1 Tabela 3.3

## Efeito de Taylor

$$X \sim \text{TARCH}(1) \text{ e } Z_t = \sqrt{\frac{2}{3}} W, \text{ com } W \sim t_6$$

*Nota:* Precisão definida para 20 dígitos (no *Mathematica*, "... the precision of an approximate real number is the effective number of decimal digits in it which are treated as significant for computations.", em *Numerical Precision Mathematical Tutorial, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

## 0. Funções auxiliares

$$\text{Exp}\delta^+ [x\_ ] := \text{If}[x \leq 0, 0, x^\delta]$$

$$\text{Exp}\delta^- [x\_ ] := \text{If}[x \geq 0, 0, (-x)^\delta]$$

1. Parâmetros do modelo  $\delta$ -TGARCH(1,1)

$$\delta = 1; \alpha_0 = 1; \alpha_1 = \frac{2}{10}; \beta_1 = \frac{75}{100}; \gamma_1 = 0;$$

## 2. Distribuição marginal do processo gerador Z

$$\text{df} = 6; \text{distZ} =$$

$$\text{TransformedDistribution}\left[\sqrt{\frac{\text{df} - 2}{\text{df}}} W, W \approx \text{StudentTDistribution}[\text{df}]\right];$$

$$\text{StringForm}["\mu_1=\`, \mu_2=\`, \mu_3=\`, \mu_4=\`", \text{Mean}[\text{distZ}], \text{Variance}[\text{distZ}], \text{Skewness}[\text{distZ}], \text{Kurtosis}[\text{distZ}]]$$

$$\mu_1=0, \mu_2=1, \mu_3=0, \mu_4=6$$

$$\text{distAbsZ} = \text{TransformedDistribution}[\text{Abs}[Z], Z \approx \text{distZ}];$$

$$\text{StringForm}["\phi_1=\`, \phi_2=\`, \phi_3=\`, \phi_4=\`", \phi_1 = \text{Moment}[\text{distAbsZ}, 1], \phi_2 = \text{Moment}[\text{distAbsZ}, 2], \phi_3 = \text{Moment}[\text{distAbsZ}, 3], \phi_4 = \text{Moment}[\text{distAbsZ}, 4]]$$

$$\phi_1 = \frac{3}{4}, \phi_2 = 1, \phi_3 = 2, \phi_4 = 6$$

3. Expressões dos momentos  $\vartheta_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ 

$$\vartheta_1[\alpha\_ , \beta\_ , \gamma\_ ] := \frac{\alpha + \beta}{2} \phi_1 + \gamma$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2[\alpha_-, \beta_-, \gamma_-] &:= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + (\gamma)^2 + \gamma (\alpha + \beta) \phi_1 \\ \vartheta_3[\alpha_-, \beta_-, \gamma_-] &:= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \phi_3 + \gamma^3 + \frac{3 \gamma (\alpha^2 + \beta^2)}{2} + \frac{3 \gamma^2 (\alpha + \beta)}{2} \phi_1 \\ \vartheta_4[\alpha_-, \beta_-, \gamma_-] &:= \\ &\frac{\alpha^4 + \beta^4}{2} \phi_4 + \gamma^4 + 2 \gamma (\alpha^3 + \beta^3) \phi_3 + 3 \gamma^2 (\alpha^2 + \beta^2) + 2 \gamma^3 (\alpha + \beta) \phi_1\end{aligned}$$

### 3. Existência do momento de ordem 4 do processo X. Coeficiente de curtose. Autocorrelações teóricas.

If[ $\vartheta_4[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1] < 1$ , "Existe o momento de ordem 4 de X.",  
"Não existe o momento de ordem 4 de X."]

Existe o momento de ordem 4 de X.

$$\begin{aligned}\kappa[\alpha_-, \beta_-, \gamma_-] &:= \\ &\frac{\phi_4}{1 - \vartheta_4[\alpha, \beta, \gamma]} \left( \frac{((1 - \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]) (1 - \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma])) / (1 + \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma])^2}{\left( \frac{4 \vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma]}{1 - \vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma]} \left( \frac{(3 \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma] (1 + \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma])) /}{\left( (1 - \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]) (1 - \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma]) \right) + \frac{3 \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]}{1 - \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]} + 1 \right)} + \right.} \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{6 \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma] (1 + \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma])}{(1 - \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]) (1 - \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma])} + \frac{4 \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]}{1 - \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]} + 1 \right) \right)\end{aligned}$$

N[ $\kappa[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$ ]

357.481

$$\begin{aligned}\rho_1[\alpha_-, \beta_-, \gamma_-] &:= \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma] + (\gamma (1 - (\vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma])^2) ((\phi_1)^2 - 1)) / \\ &\quad \left( (1 - (\vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma])^2) - (\phi_1)^2 (1 - \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma]) \right)\end{aligned}$$

N[ $\rho_1[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]$ ]

0.35625



$$\rho_2[\alpha_-, \beta_-, \gamma_-] := \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \gamma(\alpha + \beta) \frac{\phi_3}{\phi_4} + \frac{\gamma^2}{\phi_4} +$$

$$(1 - \vartheta_4[\alpha, \beta, \gamma]) \left( ((\alpha + \beta) \phi_3 + 2\gamma) (1 + 2\vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma] + 2\vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma] + \right.$$

$$\left. \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma] \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma]) (1 - \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]) (1 - \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma]) + \right.$$

$$\left. \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \gamma(\alpha + \beta) \frac{\phi_3}{\phi_4} + \frac{\gamma^2}{\phi_4} - 1 \right) (1 + \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma])^2 (1 - \vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma]) + \right.$$

$$\left. (1 - (\vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma])^2) (1 - \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma]) (1 - \vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma]) \right) /$$

$$(\phi_4 (1 + 3\vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma] + 5\vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma] + 3\vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma] +$$

$$3\vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma] \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma] + 5\vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma] \vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma] +$$

$$3\vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma] \vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma] + \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma] \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma] \vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma]) -$$

$$(1 - \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma]) (1 - \vartheta_2[\alpha, \beta, \gamma]) -$$

$$(1 + \vartheta_1[\alpha, \beta, \gamma])^2 (1 - \vartheta_3[\alpha, \beta, \gamma]) (1 - \vartheta_4[\alpha, \beta, \gamma]))$$

$N[\rho_2[\alpha_1, \beta_1, \gamma_1]]$

0.305758

#### 4. Simulação das trajetórias do processo $X$

Número de trajetórias a simular do processo  $X$

$nt = 200;$

Número de observações a gerar para cada trajetória do processo  $X$

$nobs = 100\ 050;$

Todas as trajetórias simuladas de  $X$  terão os mesmos valores iniciais:  $\sigma_1 = \alpha_0$  e  $X_1 = 0$ .

$\sigma_1 = \alpha_0; X_1 = 0;$

**Tabela aux:** Tabela auxiliar que será usada para armazenar, sucessivamente em cada trajetória do processo, os valores simulados.

$aux = Table[\{\sigma_1, X_1\}, \{nobs\}];$

**Tabela ValObs:** Nesta tabela serão armazenadas as últimas 100000 observações simulada do processo  $X$  de cada trajetória.

*Observação:* As primeiras 50 observações de cada trajetória serão descartadas para eliminar o efeito da escolha dos valores de  $\sigma_1$  e  $X_1$ .

$ValObs = Table[\{0\}, \{i, 51, nobs\}];$

Seqüência de cálculo das  $nt$  trajetórias com cálculo das autocorrelações empíricas.

```

k = 1; While [k ≤ nt,
procZ = RandomVariate [distZ, nobs, WorkingPrecision → 20];
Do [ { (aux[[i, 1]]) = (α0 + α1 × Expδ+ [aux[[i - 1, 2]]) +
      β1 × Expδ- [aux[[i - 1, 2]]) + γ1 × (aux[[i - 1, 1]])δ )1/δ,
      aux[[i, 2]] = aux[[i, 1]] × procZ[[i]] }, {i, 2, nobs} ];
ValObs = Table [aux[[i, 2]], {i, 51, nobs}];
aa = Table [(ValObs[[i]])2, {i, 1, nobs - 51}];
bb = Table [(ValObs[[i + 1]])2, {i, 1, nobs - 51}];
cc = Table [(ValObs[[i]])2, {i, 1, nobs - 50}];
dd = Table [Abs [ValObs[[i]]], {i, 1, nobs - 51}];
ee = Table [Abs [ValObs[[i + 1]]], {i, 1, nobs - 51}];
ff = Table [Abs [ValObs[[i]]], {i, 1, nobs - 50}];

aqe =  $\frac{1}{\text{Variance}[cc]}$  × (Covariance [aa, bb] × (Length [aa] - 1) / Length [aa] +
      Mean [aa] × Mean [bb] - Mean [cc] × Mean [aa] -
      Mean [cc] × Mean [bb] + (Mean [cc])2);

ame =  $\frac{1}{\text{Variance}[ff]}$  × (Covariance [dd, ee] × (Length [dd] - 1) / Length [dd] +
      Mean [dd] × Mean [ee] - Mean [ff] × Mean [dd] -
      Mean [ff] × Mean [ee] + (Mean [ff])2);

{N [ame], N [aqe]} >>> StudentResultTARCH.xls; k++ ]

```

*Nota:* “RandomVariate gives a different sequence of pseudorandom numbers whenever you run Mathematica.” (em *RandomVariate Built-in Mathematica Symbol*, *Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

## C.2 Tabela 3.4

## Efeito de Taylor

$$X \sim \text{ARCH}(1) \text{ e } Z_t = \sqrt{\frac{2}{3}} W, \text{ com } W \sim t_6$$

*Nota:* Precisão definida para 20 dígitos (no *Mathematica*, “... the *precision* of an approximate real number is the effective number of decimal digits in it which are treated as significant for computations.”, em *Numerical Precision Mathematical Tutorial, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

## 1. Parâmetros do modelo ARCH(1)

$$\alpha_0 = 1; \alpha_1 = \frac{2}{10};$$

## 2. Distribuição marginal do processo gerador Z

df = 6; distZ =

$$\text{TransformedDistribution}\left[\sqrt{\frac{\text{df} - 2}{\text{df}}} W, W \approx \text{StudentTDistribution}[\text{df}]\right];$$

StringForm["μ<sub>1</sub>=` , μ<sub>2</sub>=` , μ<sub>3</sub>=` , μ<sub>4</sub>=`", Mean[distZ],  
Variance[distZ], Skewness[distZ], Kurtosis[distZ]]

μ<sub>1</sub>=0 , μ<sub>2</sub>=1 , μ<sub>3</sub>=0 , μ<sub>4</sub>=6

distAbsZ = TransformedDistribution[Abs[Z], Z ≈ distZ];

StringForm["φ<sub>1</sub>=` , φ<sub>2</sub>=` , φ<sub>3</sub>=` , φ<sub>4</sub>=`",  
φ<sub>1</sub> = Moment[distAbsZ, 1], φ<sub>2</sub> = Moment[distAbsZ, 2],  
φ<sub>3</sub> = Moment[distAbsZ, 3], φ<sub>4</sub> = Moment[distAbsZ, 4]]

φ<sub>1</sub>= $\frac{3}{4}$  , φ<sub>2</sub>=1 , φ<sub>3</sub>=2 , φ<sub>4</sub>=6

3. Expressões dos momentos ϑ<sub>i</sub>, para i = 1, 2, 3, 4

$$\vartheta_1[\alpha_] := \alpha$$

$$\vartheta_2[\alpha_] := \alpha^2 \phi_4$$

#### 4. Existência do momento de ordem 4 do processo $X$ . Coeficiente de curtose

```
If[ $\phi_2[\alpha_1] < 1$ , "Existe o momento de ordem 4 de X.",
  "Não existe o momento de ordem 4 de X."]
```

Existe o momento de ordem 4 de  $X$ .

$$\kappa[\alpha_1] := \frac{\phi_4(1 - (\phi_1[\alpha])^2)}{1 - \phi_2[\alpha]}$$

```
N[ $\kappa[\alpha_1]$ ]
```

```
7.57895
```

#### 4. Simulação das trajetórias do processo $X$

Número de trajetórias a simular do processo  $X$

```
nt = 200;
```

Número de observações a gerar para cada trajetória do processo  $X$

```
nobs = 10 050;
```

Todas as trajetórias simuladas de  $X$  terão os mesmos valores iniciais:  $\sigma_1 = \alpha_0$  e  $X_1 = 0$ .

```
 $\sigma_1 = \alpha_0$ ;  $X_1 = 0$ ;
```

**Tabela aux:** Tabela auxiliar que será usada para armazenar, sucessivamente em cada trajetória do processo, os valores simulados.

```
aux = Table[{ $\sigma_1$ ,  $X_1$ }, {nobs}];
```

**Tabela ValObs:** Nesta tabela serão armazenadas as últimas 100000 observações simulada do processo  $X$  de cada trajetória.

*Observação:* As primeiras 50 observações de cada trajetória serão descartadas para eliminar o efeito da escolha dos valores de  $\sigma_1$  e  $X_1$ .

```
ValObs = Table[{0}, {i, 51, nobs}];
```

Sequência de cálculo das  $nt$  trajetórias com cálculo das autocorrelações empíricas.

```

k = 1; While [k ≤ nt,
procZ = RandomVariate [distZ, nobs, WorkingPrecision → 20];
Do [ { (aux[[i, 1]]) = (α0 + α1 × (aux[[i - 1, 2]])2)1/2,
aux[[i, 2]] = aux[[i, 1]] × procZ[[i]] }, {i, 2, nobs} ];
ValObs = Table [aux[[i, 2]], {i, 51, nobs}];
aa = Table [(ValObs[[i]])2, {i, 1, nobs - 51}];
bb = Table [(ValObs[[i + 1]])2, {i, 1, nobs - 51}];
cc = Table [(ValObs[[i]])2, {i, 1, nobs - 50}];
dd = Table [Abs [ValObs[[i]]], {i, 1, nobs - 51}];
ee = Table [Abs [ValObs[[i + 1]]], {i, 1, nobs - 51}];
ff = Table [Abs [ValObs[[i]]], {i, 1, nobs - 50}];
aqe =  $\frac{1}{\text{Variance}[cc]} \times (\text{Covariance}[aa, bb] \times (\text{Length}[aa] - 1) / \text{Length}[aa] +$ 
Mean[aa] × Mean[bb] - Mean[cc] × Mean[aa] -
Mean[cc] × Mean[bb] + (Mean[cc])2); ame =  $\frac{1}{\text{Variance}[ff]} \times$ 
(Covariance[dd, ee] × (Length[dd] - 1) / Length[dd] + Mean[dd] ×
Mean[ee] - Mean[ff] × Mean[dd] - Mean[ff] × Mean[ee] + (Mean[ff])2);
{N[ame], N[aqe]} >>> StudentResultARCH.xls; k++ ]

```

*Nota:* “RandomVariate gives a different sequence of pseudorandom numbers whenever you run Mathematica.” (em *RandomVariate Built-in Mathematica Symbol, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

## C.3 Figura 4.1

## Distribuição marginal

$$X \sim \delta - \text{TGARCH}(1, 1) \text{ e } Z_t \sim N(0, 1)$$

*Nota:* Precisão definida para 20 dígitos (no *Mathematica*, "... the *precision* of an approximate real number is the effective number of decimal digits in it which are treated as significant for computations.", em *Numerical Precision Mathematical Tutorial, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

## 0. Funções auxiliares

```
Expδ+[x_] := If[x ≤ 0, 0, xδ]
Expδ-[x_] := If[x ≥ 0, 0, (-x)δ]
```

## 1. Parâmetros do modelo δ-TGARCH(1,1)

$$\delta = -\frac{1}{2}; \alpha_0 = 10; \alpha_1 = \frac{3}{10}; \beta_1 = \frac{1}{2}; \gamma_1 = \frac{1}{5};$$

## 2. Distribuição marginal do processo gerador Z

```
distZ = NormalDistribution[0, 1];
StringForm["μ1=`", μ2=`", μ3=`", μ4=`", Mean[distZ],
  Variance[distZ], Skewness[distZ], Kurtosis[distZ]]
μ1=0 , μ2=1 , μ3=0 , μ4=3
```

## 3. Estacionaridade à ordem δ do processo X

```
(*Expressões de φ1,δ e φ2,δ obtidas da tabela 3.1,
sendo válidas para δ > -1 e δ ≠ 0.*) φ1,δ = φ2,δ = N[
   $\frac{\text{Gamma}[\delta + 1]}{2^{\frac{\delta}{2} + 1} \text{Gamma}[\frac{\delta}{2} + 1]}$ , 20]
0.86003998732451953538
Sδ = α1 φ1,δ + β1 φ2,δ + γ1
0.88803198985961562830
If[Probability[Z == 0, Z ≈ distZ] ≠ 1 ∧ φ1,δ < +∞ ∧ Sδ < 1,
  "X é estacionário à ordem δ.", "X não é estacionário à ordem δ."]
X é estacionário à ordem δ.
```

## 4. Simulação das trajetórias do processo X

**Número de trajetórias a simular do processo  $X$** 

```
nt = 10 000;
```

**Número de observações a gerar para cada trajetória do processo  $X$** 

```
nobs = 101;
```

**Todas as trajetórias simuladas de  $X$  terão os mesmos valores iniciais:  $\sigma_1 = \alpha_0$  e  $X_1 = 0$ .**

```
 $\sigma_1 = \alpha_0$ ;  $X_1 = 0$ ;
```

**Tabela aux:** Tabela auxiliar que será usada para armazenar, sucessivamente em cada trajetória do processo, os valores simulados.

```
aux = Table[{ $\sigma_1$ ,  $X_1$ }, {nobs}];
```

**Tabela ValObs:** Nesta tabela será armazenada a última observação simulada do processo  $X$  de cada trajetória.

*Observação:* Todas as observações anteriores à última de cada trajetória serão descartadas para eliminar o efeito da escolha dos valores de  $\sigma_1$  e  $X_1$ .

```
ValObs = Table[0, {nt}];
```

**Sequência de cálculo das  $nt$  trajetórias com armazenamento de uma observação de  $X$  (a última gerada) por trajetória.**

```
k = 1; While[k ≤ nt,
  procZ = RandomVariate[distZ, nobs, WorkingPrecision → 20];
  Do[{(aux[[i, 1]]) = ( $\alpha_0 + \alpha_1 \times \text{Exp}^{\delta^+}[\text{aux}[[i - 1, 2]]] +$ 
     $\beta_1 \times \text{Exp}^{\delta^-}[\text{aux}[[i - 1, 2]]] + \gamma_1 \times (\text{aux}[[i - 1, 1]])^{\delta}$ )1/δ,
    aux[[i, 2]] = aux[[i, 1]] × procZ[[i]]}, {i, 2, nobs}];
  ValObs[[k]] = aux[[nobs, 2]]; k++]
```

*Nota:* “RandomVariate gives a different sequence of pseudorandom numbers whenever you run Mathematica.” (em *RandomVariate Built-in Mathematica Symbol*, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center).

**5. Enquadramento gráfico função de distribuição empírica****Representação gráfica da função de distribuição empírica (verde)**

```
D = EmpiricalDistribution[ValObs]
DataDistribution[<<Empirical>>, {10 000}]
```

```
G1 = Plot[CDF[D, x], {x, -2.5 α₀1/δ √(1+δ), 2.5 α₀1/δ √(1+δ)},
PlotRange → {{-2.5 α₀1/δ √(1+δ), 2.5 α₀1/δ √(1+δ)}, {-0.1, 1.2}},
Ticks → {{-α₀1/δ √(1+δ), α₀1/δ √(1+δ)}, {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}},
PlotStyle → {Thickness[0.003], RGBColor[0, 1, 0]}];
```

**Representação gráfica de  $F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right)$ , com  $\theta = \left(\frac{\alpha_0}{1-\gamma_1}\right)^{\frac{1}{\delta}}$  (vermelho)**

```
G2 = Plot[CDF[distZ, x (1 - γ₁) / α₀]^(1/δ), {x, -2.5 α₀1/δ √(1+δ), 2.5 α₀1/δ √(1+δ)},
PlotRange → {{-2.5 α₀1/δ √(1+δ), 2.5 α₀1/δ √(1+δ)}, {-0.1, 1.2}},
Ticks → {{-α₀1/δ √(1+δ), α₀1/δ √(1+δ)}, {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}},
PlotStyle → {Thickness[0.003], RGBColor[1, 0, 0]}];
```

**Representação gráfica de  $F_Z\left(\frac{x}{|E(\sigma_t^\delta)|^{\frac{1}{\delta}}}\right)$ , com  $E(\sigma_t^\delta) = \frac{\alpha_0}{1-S\delta}$  (azul)**

```
G3 = Plot[CDF[distZ, x (1 - Sδ) / α₀]^(1/δ), {x, -2.5 α₀1/δ √(1+δ), 2.5 α₀1/δ √(1+δ)},
PlotRange → {{-2.5 α₀1/δ √(1+δ), 2.5 α₀1/δ √(1+δ)}, {-0.1, 1.2}},
Ticks → {{-α₀1/δ √(1+δ), α₀1/δ √(1+δ)}, {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}},
PlotStyle → {Thickness[0.003], RGBColor[0, 0, 1]}];
```

**Representação gráfica do enquadramento da função de distribuição empírica, com indicação da validade do enquadramento**

```
Figura = Show[G1, G2, G3, Graphics[Text["δ = -1/2", {-1.75 α₀1/δ √(1+δ), 1}]],
Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}],
Line[{{-α₀1/δ √(1+δ), 0}, {-α₀1/δ √(1+δ), 1.2}]}],
Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}],
Line[{{α₀1/δ √(1+δ), 0}, {α₀1/δ √(1+δ), 1.2}]}]}];
Export["fig.eps", Figura];
```



## C.4 Figura 4.2

## Distribuição marginal

$$X \sim \delta - \text{TGARCH}(p, q) \text{ e } Z_t = \sqrt{\frac{2}{3}} W, \text{ com } W \sim t_6$$

Nota: Precisão definida para 20 dígitos (no *Mathematica*, "... the precision of an approximate real number is the effective number of decimal digits in it which are treated as significant for computations.", em *Numerical Precision Mathematical Tutorial, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

## 0. Funções auxiliares

```
Expδ+[x_] := If[x ≤ 0, 0, xδ]
```

```
Expδ-[x_] := If[x ≥ 0, 0, (-x)δ]
```

1. Parâmetros do modelo  $\delta$ -TGARCH(p,q)

$$p = 1; q = 1; \delta = 1; \alpha_0 = 10; \alpha_1 = \frac{3}{10}; \beta_1 = \frac{1}{2}; \gamma_1 = \frac{1}{5}; \alpha_2 = 0; \beta_2 = 0; \gamma_2 = 0;$$

## 2. Distribuição marginal do processo gerador Z

```
df = 6; distZ =
```

```
TransformedDistribution[ $\sqrt{\frac{df - 2}{df}}$  W, W ≈ StudentTDistribution[df]];
```

```
StringForm["μ1=` , μ2=` , μ3=` , μ4=`", Mean[distZ],  
Variance[distZ], Skewness[distZ], Kurtosis[distZ]]
```

```
μ1=0 , μ2=1 , μ3=0 , μ4=6
```

3. Estacionaridade à ordem  $\delta$  do processo X

```
distZ+ = TransformedDistribution[If[Z > 0, Z, 0], Z ≈ distZ];
```

```
distZ- = TransformedDistribution[If[Z < 0, -Z, 0], Z ≈ distZ];
```

```
StringForm["φ1,δ=` , φ2,δ=`",  
φ1,δ = Moment[distZ+, δ], φ2,δ = Moment[distZ-, δ]]
```

$$\phi_{1,\delta} = \frac{3}{8}, \quad \phi_{2,\delta} = \frac{3}{8}$$

$$S\delta = \alpha_1 \phi_{1,\delta} + \beta_1 \phi_{2,\delta} + \gamma_1 + \alpha_2 \phi_{1,\delta} + \beta_2 \phi_{2,\delta} + \gamma_2$$

$$\frac{1}{2}$$

If[Probability[Z == 0, Z ≈ distZ] ≠ 1 ∧  $\phi_{1,\delta} < +\infty$  ∧  $\phi_{2,\delta} < +\infty$  ∧  $S\delta < 1$ ,  
 "X é estacionário à ordem  $\delta$ .", "X não é estacionário à ordem  $\delta$ ."]

X é estacionário à ordem  $\delta$ .

#### 4. Simulação das trajetórias do processo X

Número de trajetórias a simular do processo X

nt = 10 000;

Número de observações a gerar para cada trajetória do processo X

nobs = 102;

Todas as trajetórias simuladas de X terão os mesmos valores iniciais:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \alpha_0$  e  $X_1 = X_2 = 0$ .

$\sigma_1 = \alpha_0$ ;  $X_1 = 0$ ;

**Tabela aux:** Tabela auxiliar que será usada para armazenar, sucessivamente em cada trajetória do processo, os valores simulados.

aux = Table[{ $\sigma_1$ ,  $X_1$ }, {nobs}];

**Tabela ValObs:** Nesta tabela será armazenada a última observação simulada do processo X de cada trajetória.

*Observação:* Todas as observações anteriores à última de cada trajetória serão descartadas para eliminar o efeito da escolha dos valores de  $\sigma_t$  e  $X_t$ , para  $t = 1, 2$ .

valObs = Table[0, {nt}];

Sequência de cálculo das  $nt$  trajetórias com armazenamento de uma observação de X (a última gerada) por trajetória.

```

k = 1; While [k ≤ nt,
  procZ = RandomVariate [distZ, nobs, WorkingPrecision → 20];
  Do [ { (aux[[i, 1]]) =
    (α0 + α1 × Expδ+ [aux[[i - 1, 2]]) + β1 × Expδ- [aux[[i - 1, 2]]) +
    γ1 × (aux[[i - 1, 1]])δ + α2 × Expδ+ [aux[[i - 2, 2]]) +
    β2 × Expδ- [aux[[i - 2, 2]]) + γ2 × (aux[[i - 2, 1]])δ )1/δ,
    aux[[i, 2]] = aux[[i, 1]] × procZ[[i]] }, {i, 3, nobs} ];
  ValObs [[k]] = aux[[nobs, 2]];
  k++ ]

```

Nota: “RandomVariate gives a different sequence of pseudorandom numbers whenever you run Mathematica.” (em *RandomVariate Built-in Mathematica Symbol*, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center).

## 5. Enquadramento gráfico função de distribuição empírica

### Representação gráfica da função de distribuição empírica (verde)

```

D = EmpiricalDistribution [ValObs]
DataDistribution [ <<Empirical>>, {10 000} ]

G1 = Plot [ CDF [D, x],
  {x, -2.5 α01/δ √((1 + δ) (df - 2) / (df - δ)), 2.5 α01/δ √((1 + δ) (df - 2) / (df - δ)) },
  PlotRange → { { -2.5 α01/δ √((1 + δ) (df - 2) / (df - δ)), 2.5 α01/δ √((1 + δ) (df - 2) / (df - δ)) },
  {-0.1, 1.2} }, Ticks → { { -α01/δ √((1 + δ) (df - 2) / (df - δ)),
  α01/δ √((1 + δ) (df - 2) / (df - δ)) }, {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1} },
  PlotStyle → {Thickness [0.003], RGBColor [0, 1, 0]} ];

```

Representação gráfica de  $F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right)$ , com  $\theta = \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_0(\gamma_1 + \gamma_2)}{1 - \max\{\gamma_1, \gamma_2\}}\right)^{\frac{1}{\delta}}$  (vermelho)

$$G2 = \text{Plot} \left[ \text{CDF} \left[ \text{distZ}, x \left( \frac{1}{\frac{\alpha_0 + \alpha_0 (\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{1 - \text{Max}[\bar{y}_1, \bar{y}_2]}} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right], \right.$$

$$\left. \{x, -2.5 \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}}, 2.5 \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}}\}, \right.$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \left\{ \left\{ -2.5 \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}}, 2.5 \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}} \right\}, \right.$$

$$\{-0.1, 1.2\}, \text{Ticks} \rightarrow \left\{ \left\{ -\alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}}, \right. \right.$$

$$\left. \left. \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}} \right\}, \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}, \right.$$

$$\left. \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.003], \text{RGBColor}[1, 0, 0]\}; \right.$$

Representação gráfica de  $F_Z \left( \frac{x}{[E(\sigma_t^2)]^{\frac{1}{\delta}}} \right)$ , com  $E(\sigma_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - S\delta}$  (azul)

$$G3 = \text{Plot} \left[ \text{CDF} \left[ \text{distZ}, x \left( \frac{1 - S\delta}{\alpha_0} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right], \right.$$

$$\left. \{x, -2.5 \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}}, 2.5 \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}}\}, \right.$$

$$\text{PlotRange} \rightarrow \left\{ \left\{ -2.5 \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}}, 2.5 \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}} \right\}, \right.$$

$$\{-0.1, 1.2\}, \text{Ticks} \rightarrow \left\{ \left\{ -\alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}}, \right. \right.$$

$$\left. \left. \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{(1 + \delta) (df - 2)}{df - \delta}} \right\}, \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}, \right.$$

$$\left. \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thickness}[0.003], \text{RGBColor}[0, 0, 1]\}; \right.$$

Representação gráfica do enquadramento da função de distribuição empírica, com indicação da validade do enquadramento

```

Figura = Show[G1, G2, G3,

Graphics[Text["p=1", {-1.75  $\alpha_0^{\frac{1}{\delta}}$   $\sqrt{\frac{(1+\delta)(df-2)}{df-\delta}}$ , 1}]],

Graphics[Text["q=1", {-1.75  $\alpha_0^{\frac{1}{\delta}}$   $\sqrt{\frac{(1+\delta)(df-2)}{df-\delta}}$ , 0.9}]],

Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[
  {{{- $\alpha_0^{\frac{1}{\delta}}$   $\sqrt{\frac{(1+\delta)(df-2)}{df-\delta}}$ , 0}, {- $\alpha_0^{\frac{1}{\delta}}$   $\sqrt{\frac{(1+\delta)(df-2)}{df-\delta}}$ , 1.2}}]}]},

Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[
  {{{ $\alpha_0^{\frac{1}{\delta}}$   $\sqrt{\frac{(1+\delta)(df-2)}{df-\delta}}$ , 0}, { $\alpha_0^{\frac{1}{\delta}}$   $\sqrt{\frac{(1+\delta)(df-2)}{df-\delta}}$ , 1.2}}]}]}];

Export["fig.eps", Figura];

```

## C.5 Figuras 4.3 e 4.4

## Distribuição marginal

### $X \sim \delta - \text{TGARCH}(p, q)$ e $Z_t \sim \text{NM}$

*Nota:* Precisão definida para 20 dígitos (no *Mathematica*, “... the *precision* of an approximate real number is the effective number of decimal digits in it which are treated as significant for computations.”, em *Numerical Precision Mathematical Tutorial*, Wolfram *Mathematica 8 – Documentation Center*).

#### 0. Funções auxiliares

$$\text{Exp}\delta^+[\mathbf{x}_-] := \text{If}[\mathbf{x} \leq 0, 0, \mathbf{x}^\delta]$$

$$\text{Exp}\delta^-[\mathbf{x}_-] := \text{If}[\mathbf{x} \geq 0, 0, (-\mathbf{x})^\delta]$$

#### 1. Parâmetros do modelo $\delta$ -TGARCH(1,1)

$$\delta = 1; \alpha_0 = 10; \alpha_1 = \frac{3}{20}; \beta_1 = \frac{1}{2}; \gamma_1 = \frac{1}{5};$$

#### 2. Distribuição marginal do processo gerador $Z$

$$p_1 = \frac{13}{20}; m_1 = -\frac{3}{20}; v_1 = \frac{2}{5};$$

$$\text{StringForm}["p_2=\` , \quad m_2=\` , \quad v_2=\`", p_2 = 1 - p_1, m_2 = \frac{p_1 m_1}{p_1 - 1},$$

$$v_2 = \sqrt{\left(1 / (1 - p_1) \left(1 - p_1 (m_1^2 + v_1^2) - (1 - p_1) \left(\frac{p_1 m_1}{p_1 - 1}\right)^2\right)\right)}$$

$$p_2 = \frac{7}{20}, \quad m_2 = \frac{39}{140}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{11959}}{70}$$

```
distZ = MixtureDistribution[{p1, p2},
  {NormalDistribution[m1, v1], NormalDistribution[m2, v2]}];
```

```
StringForm["mu1=\` , \quad mu2=\` , \quad mu3=\`≈\` , \quad mu4=\`≈\`",
  Mean[distZ], Variance[distZ], Skewness[distZ],
  N[Skewness[distZ], Kurtosis[distZ], N[Kurtosis[distZ]]]
```

$$\mu_1=0, \quad \mu_2=1, \quad \mu_3 = \frac{263601}{392000} \approx 0.6724515306122449`$$

$$, \quad \mu_4 = \frac{368713857}{54880000} \approx 6.718546956997084`$$

```

h1[x_] := p1 PDF[NormalDistribution[m1, v1], x]  $\left(2 - \frac{(x - m_1) x}{v_1^2}\right) +$ 
p2 PDF[NormalDistribution[m2, v2], x]  $\left(2 - \frac{(x - m_2) x}{v_2^2}\right)$ 

hFigura = Show[Plot[h1[x], {x, -5, 5}, PlotRange -> {-0.3, 1.6},
PlotStyle -> {Thickness[0.003], RGBColor[0, 0, 0]}],
Graphics[Text["A", {-4, 1.25}]]];

Export["hfig.eps", hFigura];

FindRoot[h1[x], {x, -0.5}]

{x -> -0.714555}

l1 = -0.714;

FindRoot[h1[x], {x, 2}]

{x -> 2.35302}

l2 = 2.353;

```

### 3. Estacionaridade à ordem $\delta$ do processo $X$

```

distZ+ = TransformedDistribution[If[Z > 0, Z, 0], Z ~ distZ];
distZ- = TransformedDistribution[If[Z < 0, -Z, 0], Z ~ distZ];

StringForm[" $\phi_{1,\delta} = \dots$ ",  $\phi_{2,\delta} = \dots$ ",
 $\phi_{1,\delta} = \text{Moment}[\text{distZ}^+, \delta]$ ,  $\phi_{2,\delta} = \text{Moment}[\text{distZ}^-, \delta]$ ]


$$\phi_{1,\delta} = \frac{1}{800} \left( \frac{104 \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{e^{9/128}} + \frac{2 \sqrt{\frac{23918}{\pi}}}{e^{1521/95672}} + 39 \left( 1 + \text{Erf} \left[ \frac{39}{2 \sqrt{23918}} \right] - \text{Erfc} \left[ \frac{3}{8 \sqrt{2}} \right] \right) \right)$$


,


$$\phi_{2,\delta} = \left( 104 \sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2 e^{83295/1530752} \sqrt{\frac{23918}{\pi}} + 39 e^{9/128} \left( \text{Erf} \left[ \frac{3}{8 \sqrt{2}} \right] + \text{Erf} \left[ \frac{39}{2 \sqrt{23918}} \right] \right) \right) / (800 e^{9/128})$$


S $\delta$  =  $\alpha_1 \phi_{1,\delta} + \beta_1 \phi_{2,\delta} + \gamma_1$ ;

StringForm["S $\delta = \dots$ ", N[S $\delta$ ]]

S $\delta \approx 0.4660229908103973$ 

If[Probability[Z == 0, Z ~ distZ] != 1 &  $\phi_{1,\delta} < +\infty$  &  $\phi_{2,\delta} < +\infty$  & S $\delta < 1$ ,
"X é estacionário à ordem  $\delta$ .", "X não é estacionário à ordem  $\delta$ ."]

X é estacionário à ordem  $\delta$ .

```

#### 4. Simulação das trajetórias do processo $X$

Número de trajetórias a simular do processo  $X$

```
nt = 10 000;
```

Número de observações a gerar para cada trajetória do processo  $X$

```
nobs = 101;
```

Todas as trajetórias simuladas de  $X$  terão os mesmos valores iniciais:  $\sigma_1 = \alpha_0$  e  $X_1 = 0$ .

```
 $\sigma_1 = \alpha_0$ ;  $X_1 = 0$ ;
```

**Tabela aux:** Tabela auxiliar que será usada para armazenar, sucessivamente em cada trajetória do processo, os valores simulados.

```
aux = Table[{ $\sigma_1$ ,  $X_1$ }, {nobs}];
```

**Tabela ValObs:** Nesta tabela será armazenada a última observação simulada do processo  $X$  de cada trajetória.

*Observação:* Todas as observações anteriores à última de cada trajetória serão descartadas para eliminar o efeito da escolha dos valores de  $\sigma_1$  e  $X_1$ .

```
ValObs = Table[0, {nt}];
```

Seqüência de cálculo das  $nt$  trajetórias com armazenamento de uma observação de  $X$  (a última gerada) por trajetória.

```
k = 1; While[k ≤ nt,
  procZ = RandomVariate[distZ, nobs, WorkingPrecision → 20];
  Do[{(aux[[i, 1]]) = ( $\alpha_0 + \alpha_1 \times \text{Exp}^{\delta^+}$ [aux[[i - 1, 2]]) +
     $\beta_1 \times \text{Exp}^{\delta^-}$ [aux[[i - 1, 2]]) +  $\gamma_1 \times (\text{aux}[[i - 1, 1]])^{\delta}$ ),
    aux[[i, 2]] = aux[[i, 1]] × procZ[[i]]}, {i, 2, nobs}];
  ValObs[[k]] = aux[[nobs, 2]]; k++]
```

*Nota:* “RandomVariate gives a different sequence of pseudorandom numbers whenever you run Mathematica.” (em *RandomVariate Built-in Mathematica Symbol, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

#### 5. Enquadramento gráfico função de distribuição empírica

Representação gráfica da função de distribuição empírica (*verde*)



```

D = EmpiricalDistribution[ValObs]

DataDistribution[<<Empirical>>, {10 000}]

G1 = Plot[CDF[D, x],
  {x, -5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2], 5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2]}, PlotRange →
  {{-5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2], 5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2]}, {-0.1, 1.2}},
  Ticks → {{ $\alpha_0$  l1,  $\alpha_0$  l2}, {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}},
  PlotStyle → {Thickness[0.003], RGBColor[0, 1, 0]};

```

Representação gráfica de  $F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right)$ , com  $\theta = \left(\frac{\alpha_0}{1-\gamma_1}\right)^{\frac{1}{\delta}}$  (vermelho)

```

G2 = Plot[CDF[distZ, x  $\left(\frac{1 - \gamma_1}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ ],
  {x, -5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2], 5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2]}, PlotRange →
  {{-5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2], 5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2]}, {-0.1, 1.2}},
  Ticks → {{ $\alpha_0$  l1,  $\alpha_0$  l2}, {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}},
  PlotStyle → {Thickness[0.003], RGBColor[1, 0, 0]};

```

Representação gráfica de  $F_Z\left(\frac{x}{|E(\sigma_t^{\delta})|^{\frac{1}{\delta}}}\right)$ , com  $E(\sigma_t^{\delta}) = \frac{\alpha_0}{1-S\delta}$  (azul)

```

G3 = Plot[CDF[distZ, x  $\left(\frac{1 - S\delta}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ ],
  {x, -5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2], 5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2]}, PlotRange →
  {{-5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2], 5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2]}, {-0.1, 1.2}},
  Ticks → {{ $\alpha_0$  l1,  $\alpha_0$  l2}, {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}},
  PlotStyle → {Thickness[0.003], RGBColor[0, 0, 1]};

```

Representação gráfica do enquadramento da função de distribuição empírica, com indicação da validade do enquadramento

```

Figura =
  Show[G1, G2, G3, Graphics[Text["A1", {-4.5  $\alpha_0$  Min[Abs[l1], l2], 1}]],
  Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{ $\alpha_0$  l1, 0}, { $\alpha_0$  l1, 1.2}}]}],
  Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{ $\alpha_0$  l2, 0}, { $\alpha_0$  l2, 1.2}}]}]}];

Export["fig.eps", Figura];

```

## C.6 Figuras 4.5 e 4.6

## Distribuição conjunta

$$X \sim \delta - \text{TGARCH}(1, 1) \text{ e } Z_t \sim N(0, 1)$$

*Nota:* Precisão definida para 20 dígitos (no *Mathematica*, "... the *precision* of an approximate real number is the effective number of decimal digits in it which are treated as significant for computations.", em *Numerical Precision Mathematical Tutorial*, Wolfram *Mathematica 8 – Documentation Center*).

## 0. Funções auxiliares

$$\text{Exp}\delta^+ [x\_ ] := \text{If}[x \leq 0, 0, x^\delta]$$

$$\text{Exp}\delta^- [x\_ ] := \text{If}[x \geq 0, 0, (-x)^\delta]$$

1. Parâmetros do modelo  $\delta$ -TGARCH(1,1)

$$\delta = \frac{1}{2}; \alpha_0 = 10; \alpha_1 = \frac{3}{10}; \beta_1 = \frac{1}{2}; \gamma_1 = \frac{1}{5};$$

## 2. Distribuição marginal do processo gerador Z

$$\text{distZ} = \text{NormalDistribution}[0, 1];$$

$$\text{StringForm}["\mu_1=\`, \mu_2=\`, \mu_3=\`, \mu_4=\`", \text{Mean}[\text{distZ}], \text{Variance}[\text{distZ}], \text{Skewness}[\text{distZ}], \text{Kurtosis}[\text{distZ}]]$$

$$\mu_1=0, \mu_2=1, \mu_3=0, \mu_4=3$$

$$F_Z[x\_ ] := \text{CDF}[\text{distZ}, x]$$

3. Estacionaridade à ordem  $\delta$  do processo X

(\*Expressões de  $\phi_{1,\delta}$  e  $\phi_{2,\delta}$  obtidas da tabela 3.1,

$$\text{sendo válidas para } \delta > -1 \text{ e } \delta \neq 0.*) \phi_{1,\delta} = \phi_{2,\delta} = N\left[\frac{\text{Gamma}[\delta + 1]}{2^{\frac{\delta}{2}+1} \text{Gamma}\left[\frac{\delta}{2} + 1\right]}, 20\right]$$

$$0.41108947933122927617$$

$$S\delta = \alpha_1 \phi_{1,\delta} + \beta_1 \phi_{2,\delta} + \gamma_1$$

$$0.52887158346498342093$$

$\text{If}[\text{Probability}[Z == 0, Z \approx \text{distZ}] \neq 1 \wedge \phi_{1,\delta} < +\infty \wedge \phi_{2,\delta} < +\infty \wedge S\delta < 1,$   
 "X é estacionário à ordem  $\delta$ .", "X não é estacionário à ordem  $\delta$ ."]

X é estacionário à ordem  $\delta$ .

#### 4. Simulação das trajetórias do processo $X$

Número de trajetórias a simular do processo  $X$

```
nt = 10 000;
```

Número de observações a gerar para cada trajetória do processo  $X$

```
nobs = 102;
```

Todas as trajetórias simuladas de  $X$  terão os mesmos valores iniciais:  $\sigma_1 = \alpha_0$  e  $X_1 = 0$ .

```
 $\sigma_1 = \alpha_0$ ;  $X_1 = 0$ ;
```

**Tabela aux:** Tabela auxiliar que será usada para armazenar, sucessivamente em cada trajetória do processo, os valores simulados.

```
aux = Table[{ $\sigma_1$ ,  $X_1$ }, {nobs}];
```

**Tabela ValObs:** Nesta tabela serão armazenadas as duas últimas observações simulada do processo  $X$  de cada trajetória.

*Observação:* Todas as observações anteriores às duas últimas de cada trajetória serão descartadas para eliminar o efeito da escolha dos valores de  $\sigma_1$  e  $X_1$ .

```
ValObs = Table[{0, 0}, {nt}];
```

Seqüência de cálculo das  $nt$  trajetórias com armazenamento de uma observação de  $X$  (a última gerada) por trajetória.

```
k = 1; While[k ≤ nt,
  procZ = RandomVariate[distZ, nobs, WorkingPrecision → 20];
  Do[{(aux[[i, 1]]) = ( $\alpha_0 + \alpha_1 \times \text{Exp}^{\delta^+}$ [aux[[i - 1, 2]]) +
     $\beta_1 \times \text{Exp}^{\delta^-}$ [aux[[i - 1, 2]]) +  $\gamma_1 \times (\text{aux}[[i - 1, 1]])^{\delta}$ ),
    aux[[i, 2]] = aux[[i, 1]] × procZ[[i]]}, {i, 3, nobs}];
  ValObs[[k]] = {aux[[nobs - 1, 2]], aux[[nobs, 2]]}; k++]
```

*Nota:* “RandomVariate gives a different sequence of pseudorandom numbers whenever you run Mathematica.” (em *RandomVariate Built-in Mathematica Symbol, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

#### 5. Enquadramento gráfico função de distribuição empírica

Função de distribuição empírica (que será representada a verde)

```

D = EmpiricalDistribution[ValObs]
DataDistribution[<<Empirical>>, {10, 2}]

```

### Expressões do limite inferior e superior do enquadramento

Expressões auxiliares

$$\theta = \left( \frac{\alpha_0}{1 - \gamma_1} \right)^{\frac{1}{\delta}}; \mathbf{E}\sigma\delta = \frac{\alpha_0}{1 - s\delta};$$

$$y_1 = \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{(1 + \delta)}; w_1 = (\mathbf{E}\sigma\delta)^{\frac{1}{\delta}}; w_2[\mathbf{x}_-] := (\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{x}^\delta + \gamma_1 \mathbf{E}\sigma\delta)^{\frac{1}{\delta}};$$

$$w_3 = (\alpha_0 + \alpha_1 y_1^\delta + \gamma_1 \mathbf{E}\sigma\delta)^{\frac{1}{\delta}}; w_4[\mathbf{x}_-] := (\alpha_0 + \beta_1 \mathbf{x}^\delta + \gamma_1 \mathbf{E}\sigma\delta)^{\frac{1}{\delta}};$$

Expressão do limite inferior (que será representado a azul)

$$\text{LI}[\mathbf{x1}_-, \mathbf{x2}_-] :=$$

$$\text{Piecewise}\left[\left\{\left\{\left(\mathbf{F}_Z[0]\right)^2 + \left(\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{w_1}\right] - \mathbf{F}_Z[0]\right) \mathbf{F}_Z[0] + \left(\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{w_1}\right] - \mathbf{F}_Z[0]\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x2}}{w_2[\mathbf{x1}]}\right] - \mathbf{F}_Z[0]\right) + \left(\mathbf{F}_Z[0] - \mathbf{F}_Z\left[-\frac{y_1}{w_1}\right]\right) \left(\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x2}}{w_3}\right] - \mathbf{F}_Z[0]\right),\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathbf{x1} > 0 \wedge \mathbf{x2} > 0\right\}, \left\{\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{\theta}\right] \mathbf{F}_Z[0], \mathbf{x1} < 0 \wedge \mathbf{x2} > 0\right\},\right.$$

$$\left.\left.\left\{\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{\theta}\right] \mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x2}}{\theta}\right], \mathbf{x1} < 0 \wedge \mathbf{x2} < 0\right\}, \left\{\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{w_1}\right] \mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x2}}{\theta}\right], \mathbf{x1} > 0 \wedge \mathbf{x2} < 0\right\}\right\}\right]$$

Expressão do limite superior (que será representado a laranja)

$$\text{LS}[\mathbf{x1}_-, \mathbf{x2}_-] := \text{Piecewise}\left[\right.$$

$$\left.\left\{\left\{\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{\theta}\right] \mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x2}}{\theta}\right], \mathbf{x1} > 0 \wedge \mathbf{x2} > 0\right\}, \left\{\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{w_1}\right] \mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x2}}{\theta}\right], \mathbf{x1} < 0 \wedge \mathbf{x2} > 0\right\},\right.\right.$$

$$\left.\left\{\left(\mathbf{F}_Z[0]\right)^2 - \left(\mathbf{F}_Z[0] - \mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{w_1}\right]\right) \left(\mathbf{F}_Z[0] - \mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x2}}{w_4[-\mathbf{x1}]}\right]\right), \mathbf{x1} < 0 \wedge \mathbf{x2} < 0\right\},\right.$$

$$\left.\left.\left\{\mathbf{F}_Z\left[\frac{\mathbf{x1}}{\theta}\right] \mathbf{F}_Z[0], \mathbf{x1} > 0 \wedge \mathbf{x2} < 0\right\}\right\}\right]$$

### Representação gráfica do enquadramento da função de distribuição empírica

```

Graf1 = Plot3D[CDF[D, {x1, x2}],
  {x1, -y1, y1}, {x2, -y1, y1}, PlotRange -> {0, LS[y1, y1]},
  AxesLabel -> Automatic, ColorFunction -> "AvocadoColors"];

Graf2 = Plot3D[LI[x1, x2], {x1, -y1, y1}, {x2, -y1, y1},
  PlotRange -> {0, LS[y1, y1]}, Exclusions -> {x1 == 0, x2 == 0},
  AxesLabel -> Automatic, ColorFunction -> "DeepSeaColors"];

Graf3 = Plot3D[LS[x1, x2], {x1, -y1, y1}, {x2, -y1, y1},
  PlotRange -> {0, LS[y1, y1]}, Exclusions -> {x1 == 0, x2 == 0},
  AxesLabel -> Automatic, ColorFunction -> "SolarColors"];

```

```
Figura = Show[Graf1, Graf2, Graf3, ViewPoint -> {-3, -2.7, 1.3}];  
Export["fig.eps", Figura];
```

## C.7 Tabela 5.4

# ARL sob controlo para cartas de controlo com limites assimétricos

## $X \sim \text{TGARCH}(1, 1)$ e $Z_t \sim \text{NM}$

*Nota:* Precisão definida para 20 dígitos (no *Mathematica*, "... the precision of an approximate real number is the effective number of decimal digits in it which are treated as significant for computations.", em *Numerical Precision Mathematical Tutorial, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

### 0. Funções auxiliares

$$\text{Exp}\delta^+ [x\_ ] := \text{If} [x \leq 0, 0, x^\delta]$$

$$\text{Exp}\delta^- [x\_ ] := \text{If} [x \geq 0, 0, (-x)^\delta]$$

### 1. Parâmetros do modelo $\delta$ -TGARCH(1,1)

$$\delta = 1; \alpha_0 = 10; \alpha_1 = \frac{3}{20}; \beta_1 = \frac{1}{2}; \gamma_1 = \frac{1}{5}$$

### 2. Distribuição marginal do processo gerador Z

$$p_1 = \frac{13}{20}; m_1 = -\frac{3}{20}; v_1 = \frac{2}{5};$$

$$\text{StringForm}["p_2 = \", m_2 = \", v_2 = \", p_2 = 1 - p_1, m_2 = \frac{p_1 m_1}{p_1 - 1},$$

$$v_2 = \sqrt{\left(1 / (1 - p_1) \left(1 - p_1 (m_1^2 + v_1^2) - (1 - p_1) \left(\frac{p_1 m_1}{p_1 - 1}\right)^2\right)\right)}$$

$$p_2 = \frac{7}{20}, m_2 = \frac{39}{140}, v_2 = \frac{\sqrt{11959}}{70}$$

$$\text{distZ} = \text{MixtureDistribution}[\{p_1, p_2\}, \{ \text{NormalDistribution}[m_1, v_1], \text{NormalDistribution}[m_2, v_2] \}];$$

$$\text{StringForm}["\mu_1 = \", \mu_2 = \", \mu_3 = \", \mu_4 = \", \mu_1 = \text{Mean}[\text{distZ}], \mu_2 = \text{Variance}[\text{distZ}], \mu_3 = \text{Skewness}[\text{distZ}], \text{N}[\text{Skewness}[\text{distZ}]], \mu_4 = \text{Kurtosis}[\text{distZ}], \text{N}[\text{Kurtosis}[\text{distZ}]]]$$

$$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = \frac{263601}{392000} \approx 0.6724515306122449$$

$$, \mu_4 = \frac{368713857}{54880000} \approx 6.718546956997084$$

$$\text{distZ}^+ = \text{TransformedDistribution}[\text{If}[Z > 0, Z, 0], Z \approx \text{distZ}];$$

```

distZ^- = TransformedDistribution[If[Z < 0, -Z, 0], Z ≈ distZ];

ϕ1,1 = Moment[distZ+, 1]; ϕ2,1 = Moment[distZ-, 1];
ϕ1,2 = Moment[distZ+, 2]; ϕ2,2 = Moment[distZ-, 2]; ϕ1,3 = Moment[distZ+, 3];
ϕ2,3 = Moment[distZ-, 3]; ϕ1,4 = Moment[distZ+, 4]; ϕ2,4 = Moment[distZ-, 4];
{N[ϕ1,1], N[ϕ2,1], N[ϕ1,2], N[ϕ2,2], N[ϕ1,3], N[ϕ2,3], N[ϕ1,4], N[ϕ2,4]}
{0.332529, 0.332529, 0.590334,
 0.409666, 1.49219, 0.819738, 4.5433, 2.17525}

```

### 3. Momentos do processo X

```

ϑ1 = α1 ϕ1,1 + β1 ϕ2,1 + γ1;
ϑ2 = α1^2 ϕ1,2 + 2 α1 γ1 ϕ1,1 + β1^2 ϕ2,2 + 2 β1 γ1 ϕ2,1 + γ1^2; ϑ3 =
  α1^3 ϕ1,3 + 3 α1^2 γ1 ϕ1,2 + 3 α1 γ1^2 ϕ1,1 + β1^3 ϕ2,3 + 3 β1^2 γ1 ϕ2,2 + 3 β1 γ1^2 ϕ2,1 + γ1^3;
ϑ4 = α1^4 ϕ1,4 + 4 α1^3 γ1 ϕ1,3 + 6 α1^2 γ1^2 ϕ1,2 + 4 α1 γ1^3 ϕ1,1 +
  β1^4 ϕ2,4 + 4 β1^3 γ1 ϕ2,3 + 6 β1^2 γ1^2 ϕ2,2 + 4 β1 γ1^3 ϕ2,1 + γ1^4;

StringForm["ϑ1≈`, ϑ2≈`, ϑ3≈`, ϑ4≈`", N[ϑ1], N[ϑ2], N[ϑ3], N[ϑ4]]
ϑ1≈0.41614368003344776`, ϑ2≈0.24215643102603115`,
ϑ3≈0.2108600503927296`, ϑ4≈0.2605400836094412`

```

```

StringForm["σx≈`, ξx≈`, κx≈`", N[√(α0^2 (1 + ϑ1) / ((1 - ϑ1) (1 - ϑ2)))]],
ξx = N[μ3 / (1 - ϑ3) (√((1 - ϑ1) (1 - ϑ2)) / (1 + ϑ1))^3 (3 ϑ2 (1 + ϑ1) / ((1 - ϑ1) (1 - ϑ2)) + 3 ϑ1 / (1 - ϑ1) + 1)],
κx = N[μ4 / (1 - ϑ4) ((1 - ϑ1) (1 - ϑ2)) / (1 + ϑ1))^2 (4 ϑ3 / (1 - ϑ3) (3 ϑ2 (1 + ϑ1) / ((1 - ϑ1) (1 - ϑ2)) + 3 ϑ1 / (1 - ϑ1) + 1) + 6 ϑ2 (1 + ϑ1) / ((1 - ϑ1) (1 - ϑ2)) + 4 ϑ1 / (1 - ϑ1) + 1)]];
σx≈17.89002229025639`,
ξx≈0.8130780935194123`, κx≈12.719780324464095`

```

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\alpha_0^2 (1 + \vartheta_1)}{(1 - \vartheta_1) (1 - \vartheta_2)}};$$

### 4. Valor crítico $c_2$

$$c_2[x_-] := \left( \text{InverseCDF}[\text{distZ}, 1 - \text{CDF}[\text{distZ}, -\frac{x \sigma_x (1 - \vartheta_1)}{\alpha_0}] \right] \alpha_0 \Big/ (\sigma_x (1 - \vartheta_1))$$

### 5. Expressões do majorante e do minorante

$$M[x_-, y_-] := 1 / \left( 1 - \text{CDF}[\text{distZ}, \frac{y \sigma_x (1 - \gamma_1)}{\alpha_0}] + \text{CDF}[\text{distZ}, -\frac{x \sigma_x (1 - \gamma_1)}{\alpha_0}] \right);$$

$$\begin{aligned}
m[x_-, y_-] := & \text{If}[\gamma_1 == 0, \\
& 1 + \left( \text{CDF}[\text{distZ}, \frac{y \sigma_x (1 - \theta_1)}{\alpha_0}] - \text{CDF}[\text{distZ}, -\frac{x \sigma_x (1 - \theta_1)}{\alpha_0}] \right) / \left( 1 - \right. \\
& \left. \text{CDF}[\text{distZ}, \frac{y \sigma_x}{\alpha_0 + \sigma_x (y \alpha_1 + x \beta_1)}] + \text{CDF}[\text{distZ}, -\frac{x \sigma_x}{\alpha_0 + \sigma_x (y \alpha_1 + x \beta_1)}] \right), \\
& 1 / \left( 1 - \text{CDF}[\text{distZ}, \frac{y \sigma_x}{\frac{\alpha_0 + \sigma_x (y \alpha_1 + x \beta_1)}{1 - \gamma_1} + \frac{\alpha_0}{1 - \theta_1}}] + \right. \\
& \left. \text{CDF}[\text{distZ}, -\frac{x \sigma_x}{\frac{\alpha_0 + \sigma_x (y \alpha_1 + x \beta_1)}{1 - \gamma_1} + \frac{\alpha_0}{1 - \theta_1}}] \right);
\end{aligned}$$

## 6. Simulação das trajetórias do processo $X$ e cálculo das estimativas do $ARL_0$

Número de trajetórias a simular do processo  $X$

```
nt = 10 000;
```

Número de observações a gerar para cada trajetória do processo  $X$

```
nobs = 175;
```

Todas as trajetórias simuladas de  $X$  terão os mesmos valores iniciais:  $\sigma_1 = \alpha_0$  e  $X_1 = 0$ .

```
 $\sigma_1 = \alpha_0$ ;  $X_1 = 0$ ;
```

**Tabela aux:** Tabela auxiliar que será usada para armazenar, sucessivamente em cada trajetória do processo, os valores simulados.

```
aux = Table[{ $\sigma_1$ ,  $X_1$ }, {nobs}];
```

**Tabela simRL:** Nesta tabela será armazenada, sucessivamente, em cada realização do processo, o RL.

```
simRL01 = Table[0, {nt}];
simRL02 = Table[0, {nt}]; simRL05 = Table[0, {nt}];
simRL075 = Table[0, {nt}]; simRL1 = Table[0, {nt}];
```

Sequência de cálculo das  $nt$  trajetórias com armazenamento do RL.



```

k = 1; While[k ≤ nt,
  procZ = RandomVariate[distZ, nobs, WorkingPrecision → 20];
  Do[{(aux[[i, 1]]) = α0 + α1 × Expδ+[aux[[i - 1, 2]]] +
    β1 × Expδ-[aux[[i - 1, 2]]] + γ1 × (aux[[i - 1, 1]]),
    aux[[i, 2]] = aux[[i, 1]] × procZ[[i]], {i, 2, nobs}];
  ValObs = Table[aux[[i, 2]], {i, 51, nobs}];
  RL01 = LengthWhile[ValObs, # ≥ -0.1 σ ε && # ≤ c2[0.1] σ ε &];
  simRL01[[k]] = RL01 + 1;
  RL02 = LengthWhile[ValObs, # ≥ -0.2 σ ε && # ≤ c2[0.2] σ ε &];
  simRL02[[k]] = RL02 + 1;
  RL05 = LengthWhile[ValObs, # ≥ -0.5 σ ε && # ≤ c2[0.5] σ ε &];
  simRL05[[k]] = RL05 + 1;
  RL075 = LengthWhile[ValObs, # ≥ -0.75 σ ε && # ≤ c2[0.75] σ ε &];
  simRL075[[k]] = RL075 + 1;
  RL1 = LengthWhile[ValObs, # ≥ -1 σ ε && # ≤ c2[1] σ ε &];
  simRL1[[k]] = RL1 + 1; k++];

```

Nota: “RandomVariate gives a different sequence of pseudorandom numbers whenever you run Mathematica.” (em *RandomVariate Built-in Mathematica Symbol, Wolfram Mathematica 8 – Documentation Center*).

#### Valores de controle.

```

MaxControl01 = Max[simRL01];
MaxControl02 = Max[simRL02]; MaxControl05 = Max[simRL05];
MaxControl075 = Max[simRL075]; MaxControl1 = Max[simRL1];

```

#### Cálculo das estimativas do $ARL_0$ .

```

ARL01 = N[Mean[simRL01]];

SDARL01 = N[ $\frac{\text{StandardDeviation[simRL01]}}{\sqrt{nt}}$ ];

ARL02 = N[Mean[simRL02]];

SDARL02 = N[ $\frac{\text{StandardDeviation[simRL02]}}{\sqrt{nt}}$ ];

ARL05 = N[Mean[simRL05]];

SDARL05 = N[ $\frac{\text{StandardDeviation[simRL05]}}{\sqrt{nt}}$ ];

ARL075 = N[Mean[simRL075]];

SDARL075 = N[ $\frac{\text{StandardDeviation[simRL075]}}{\sqrt{nt}}$ ];

ARL1 = N[Mean[simRL1]];

SDARL1 = N[ $\frac{\text{StandardDeviation[simRL1]}}{\sqrt{nt}}$ ];

```

**7. Outputs**

```
{N[p1], N[m1], N[v1], N[p2], N[m2], N[v2]} >>> sim.xls  
distZ >>> sim.xls  
{Mean[distZ], Variance[distZ],  
  Skewness[distZ], Kurtosis[distZ]} >>> sim.xls  
{ $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ } >>> sim.xls  
{N[ $\sigma_x$ ],  $\xi_x$ ,  $\kappa_x$ } >>> sim.xls  
{0.1, c2[0.1]} >>> sim.xls  
{m[0.1, c2[0.1]], M[0.1, c2[0.1]]} >>> sim.xls  
{MaxControl01, ARL01, SDARL01} >>> sim.xls  
{0.2, c2[0.2]} >>> sim.xls  
{m[0.2, c2[0.2]], M[0.2, c2[0.2]]} >>> sim.xls  
{MaxControl02, ARL02, SDARL02} >>> sim.xls  
{0.5, c2[0.5]} >>> sim.xls  
{m[0.5, c2[0.5]], M[0.5, c2[0.5]]} >>> sim.xls  
{MaxControl05, ARL05, SDARL05} >>> sim.xls  
{0.75, c2[0.75]} >>> sim.xls  
{m[0.75, c2[0.75]], M[0.75, c2[0.75]]} >>> sim.xls  
{MaxControl075, ARL075, SDARL075} >>> sim.xls  
{1, N[c2[1]]} >>> sim.xls  
{m[1, N[c2[1]]], M[1, N[c2[1]]]} >>> sim.xls  
{MaxControl1, ARL1, SDARL1} >>> sim.xls
```

# Bibliografia

- Azencott, R., Dacunha-Castelle, D. (1984). *Séries d'observations irrégulières: modélisation et prévision*. Masson, Paris.
- Bai, X., Russell, J.R., Tiao, G.C. (2003). Kurtosis of GARCH and stochastic volatility models with non-normal innovations. *Journal of Econometrics*, 114, 349–360.
- Bellini, F., Bottolo, L. (2007). Stationarity domains for  $\delta$ -power GARCH process with heavy tails. *Statistics and Probability Letters*, 77, 1418–1427.
- Berkes, I., Horváth, L., Kokoszka, P. (2003). GARCH processes: structure and estimation. *Bernoulli*, 9, 201–227.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.
- Bougerol, P., Picard, N. (1992). Stationarity of GARCH processes and some non-negative time series. *Journal of Econometrics*, 52, 115–127.
- Chen, H., Kuo, W.L. (2010). Comparisons of symmetric and asymmetric control limits for  $\bar{X}$  and  $R$  charts. *Computers and Industrial Engineering*, 59, 903–910.
- Cheung, W.-S. (2001). Generalizations of Hölder's inequality. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 26, 7–10.
- Cohen, J.E. (1988). Subadditivity, generalized products of random matrices and operations research. *SIAM Review*, 30, 69–86.
- Ding, Z., Granger, C.W.J., Engle, R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, 1, 83–106.
- Durand, E. (1960). *Solutions Numériques des Équations Algébriques, Tome I*. Masson, Paris, France.
- Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987–1007.

- Engle, R.F. (2002). New frontiers for ARCH models. *Journal of Applied Econometrics*, 17, 425–446.
- Fornari, F., Mele, A. (1997). Sign- and volatility-switching ARCH models: theory and applications to international stock markets. *Journal of Applied Econometrics*, 12, 49–65.
- Francq, C., Zakoian, J.M. (2010). *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Franses, P.H., McAleer, M. (2002). Financial volatility: an introduction. *Journal of Applied Econometrics*, 17, 419–424.
- Geweke, J. (1986). Modeling the persistence of conditional variances – Comment. *Econometric Reviews*, 5, 57–61.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R., Runkle, D.E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, 48, 1779–1801.
- Gonçalves, E., Leite, J., Mendes-Lopes, N. (2009). A mathematical approach to detect the Taylor property in TARARCH processes. *Statistics and Probability Letters*, 79, 602–610.
- Gonçalves, E., Leite, J., Mendes-Lopes, N. (2011). Asymmetric limits in modified control charts for TGARCH model. Em *Proceedings of ENBIS2011*, 15 pp.
- Gonçalves, E., Leite, J., Mendes-Lopes, N. (2012). On the probabilistic structure of power threshold generalized ARCH stochastic processes. *Statistics and Probability Letters*, 82, 1597–1609.
- Gonçalves, E., Leite, J., Mendes-Lopes, N. (2013a). On the finite dimensional laws of threshold GARCH processes. Em *Recent Developments in Modeling and Applications in Statistics* (Vichi, M., Oliveira, P.E., Temido, M.G., Henriques, C., eds.), Selected Papers of the Statistical Societies, Springer, 237–247.
- Gonçalves, E., Leite, J., Mendes-Lopes, N. (2013b). The ARL of modified Shewhart control charts for conditionally heteroskedastic models. *Statistical Papers*, 54, 1–19.
- Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N. (1993). Modelos GARCH e TARARCH – estacionaridade forte, estacionaridade fraca, ergodicidade e comportamento limite do agregado temporal. *Portugaliae Mathematica*, 50, 447–465.

- Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N. (1994). The general threshold ARCH model: wide sense stationarity and asymptotic normality of the temporal aggregate. *Pub. Inst. Univ. Paris*, XXXVIII, 19–35.
- Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N. (1996). Stationarity of GARCH processes. *Statistics*, 28, 171–178.
- Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N. (2007). On the distribution of generalized threshold ARCH stochastic processes. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 35, 397–419.
- Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N. (2008). *Séries temporais: modelações lineares e não lineares*, 2.<sup>a</sup> edição revista e aumentada. Edições SPE, INE, Portugal.
- Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N. (2010). On the structure of generalized threshold ARCH processes. *Statistics and Probability Letters*, 80, 573–580.
- Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N., Dorotovič, I., Fernandes, J.M., Garcia, A. (2010). Volatilidade condicional no estudo estatístico da actividade solar registada no OAUC. *Livro de Resumos do XX Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, 125–129.
- Gradshteyn, I.S., Ryzhik (2007). *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th Edition. (Jeffrey, A., Zwillinger, D., eds.) Academic Press, New York, USA.
- Granger, C.W.J. (2005). The past and future of empirical finance: some personal comments. *Journal of Econometrics*, 129, 35–40.
- Granger, C.W.J., Ding, Z. (1995). Some properties of absolute return. An alternative measure of risk. *Annales D'Économie et de Statistique*, 40, 67–91.
- Granger, C.W.J., Spear, S., Ding, Z. (2000). Stylized facts on the temporal distributional properties of absolute returns: an update. Em *Proceedings of the Hong Kong International Workshop on Statistics and Finance: An Interface* (Chan, W., Li, W., Tong, H., eds.), Imperial College Press, London, 97–120.
- Haas, M. (2009). Persistence in volatility, conditional kurtosis, and the Taylor property in absolute value GARCH processes. *Statistics and Probability Letters*, 79, 1674–1683.
- Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G. (1952). *Inequalities*, 2nd Edition. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

- He, C., Teräsvirta, T. (1999a). Properties of moments of a family of GARCH processes. *Journal of Econometrics*, 92, 173–192.
- He, C., Teräsvirta, T. (1999b). Fourth moment structure of the GARCH( $p, q$ ) process. *Econometric Theory*, 15, 824–846.
- Higgins, M.L., Bera, A.K. (1992). A class of nonlinear ARCH models. *International Economic Review*, 33, 137–158.
- Horn, R.A., Johnson, C.R. (1985). *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Hwang, S.Y., Baek, J.S., Park, J.A., Choi, M.S. (2010). Explosive volatilities for threshold-GARCH processes generated by asymmetric innovations. *Statistics and Probability Letters*, 80, 26–33.
- Karanasos, M. (1999). The second moment and the autocovariance function of the squared errors of the GARCH model. *Journal of Econometrics*, 90, 63–76.
- Kesten, H., Spitzer, F. (1984). Convergence in distribution of products of random matrices. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeit und verwandete Gebiete*, 67, 363–386.
- Kingman, J.F.C. (1976). Subadditive processes. Em *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour V-1975* (Badrikian, A., Kingman, J.F.C., Kuelbs, J., eds.), Lecture Notes in Mathematics, Springer, 539, 167–223.
- Kramer, H., Schmid, W. (1997). Control charts for time series. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 30, 4007–4016.
- Kramer, H., Schmid, W. (2000). The influence of parameter estimation on the ARL of Shewhart type charts for time series. *Statistical Papers*, 41, 173–196.
- Lancaster, P., Tismenetsky, M. (1985). *The Theory of Matrices*, 2nd Edition. Academic Press, Orlando, USA.
- Ling, S., McAleer, M. (2002a). Stationarity and the existence of moments of a family of GARCH processes. *Journal of Econometrics*, 106, 109–117.
- Ling, S., McAleer, M. (2002b). Necessary and sufficient moment conditions for the GARCH( $r, s$ ) and asymmetric power GARCH( $r, s$ ) models. *Econometric Theory*, 18, 722–729.
- Liu, J.-C. (2009). Stationarity of a family of GARCH processes. *Econometrics Journal*, 12, 436–446.

- Liu, S.-M., Brorsen, B.W. (1995). Maximum likelihood estimation of a GARCH-stable model. *Journal of Applied Econometrics*, 10, 273–285.
- Mittnik, S., Paoletta, M.S., Rachev, S.T. (2002). Stationarity of stable power-GARCH processes. *Journal of Econometrics*, 106, 97–107.
- Montgomery, D.C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control*, 5th Edition. John Wiley & Sons, USA.
- Nelson, D.B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model. *Econometric Theory*, 6, 318–334.
- Nelson, D.B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, 59, 347–370.
- Nelson, D.B., Cao, C.Q. (1992). Inequality constraints in the univariate GARCH model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 10, 229–235.
- Pan, J., Wang, H., Tong, H. (2008). Estimation and tests for power-transformed and threshold GARCH models. *Journal of Econometrics*, 142, 352–378.
- Pantula, S.G. (1986). Modeling the persistence of conditional variances – Comment. *Econometric Reviews*, 5, 71–74.
- Pawlak, M., Schmid, W. (2001). On the distributional properties of GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, 22, 339–352.
- Rosenblatt, M. (1978). Dependence and asymptotic independence for random processes. Em *Studies in Probability Theory* (Rosenblatt, M., eds.), Mathematical Association of America, Washington, DC, 24–45.
- Schipper, S., Schmid, W. (2001a). Control charts for GARCH processes. *Nonlinear Analysis*, 47, 2049–2060.
- Schipper, S., Schmid, W. (2001b). Sequential methods for detecting changes in the variance of economic time series. *Sequential Analysis*, 20, 235–262.
- Schmid, W. (1995). On the run length of a Shewhart chart for correlated data. *Statistical Papers*, 36, 111–130.
- Schwert, G.W. (1989). Why does stock market volatility change over time. *The Journal of Finance*, 44, 1115–1153.
- Severin, T., Schmid, W. (1998). Statistical process control and its application in finance. Em *Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks* (G. Bol, G. Nakhaeizadeh, K.H. Vollmer, eds.), Physica-Verlag, Heidelberg, 83–104.

- Severin, T., Schmid, W. (1999). Monitoring changes in GARCH processes. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 83, 281–307.
- Shewhart, W. (1931). *Economic control of quality of manufactured product*. Van Nostrand, New York.
- Taylor, S.J. (1986). *Modelling Financial Time Series*. John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Taylor, S.J. (2007). *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*. Princeton University Press, Princeton.
- Tsai, H., Chan, K.-S. (2008). A note on inequality constraints in the GARCH model. *Econometric Theory*, 24, 823–828.
- Vasilopoulos, A.V., Stamboulis, A.P. (1978) Modification of control chart limits in the presence of data correlation. *Journal of Quality Technology*, 10, 20–30.
- Yazici, B., Kan, B. (2009). Asymmetric control limits for small samples. *Quality and Quantity*, 43, 865–874.
- Zakoian, J.M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931–955.