



FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS  
E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA MECÂNICA

# **Metodologia de Análise Inversa para Determinação Simultânea dos Parâmetros de Leis Constitutivas, com Recurso a um Provedor Cruciforme**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia  
Mecânica na Especialidade de Sistemas de Produção

**Autor**

**Pedro André Dias Prates**

**Orientadores**

**Professor Doutor José Valdemar Bidarra Fernandes**

**Professora Doutora Marta Cristina Cardoso Oliveira**

**Júri**

**Presidente** Professora Doutora Marta Cristina Cardoso Oliveira  
Professora Auxiliar da Universidade de Coimbra

**Professor Doutor José Valdemar Bidarra Fernandes**  
Professor Catedrático da Universidade de Coimbra

**Vogais** Professor Doutor José Luís Martins de Carvalho Alves  
Professor Auxiliar da Universidade do Minho

**Doutora Nataliya Sakharova**  
Investigadora Auxiliar da Universidade de Coimbra

**Coimbra, Janeiro, 2010**

## Resumo

O presente trabalho centra-se no desenvolvimento de uma metodologia de análise inversa, para determinação dos parâmetros de modelos constitutivos utilizados para descrever o comportamento plástico de chapas metálicas, baseada na informação adquirida num ensaio de tracção biaxial de um provete cruciforme. Esta metodologia foi desenvolvida e testada com recurso a um programa de elementos finitos (DD3IMP), desenvolvido para simular numericamente a deformação plástica de chapas metálicas a três dimensões.

A geometria do provete cruciforme foi escolhida de modo a permitir obter, simultaneamente, valores elevados de deformação plástica e de gradientes de deformação, para pontos situados ao longo dos eixos de simetria do provete. Ou seja, a geometria escolhida, de entre várias possíveis do provete cruciforme, permite obter deformações elevadas para um amplo conjunto de trajectórias de deformação.

Realizou-se uma análise directa baseada em resultados numéricos obtidos em ensaios de tracção biaxial do provete cruciforme, com a geometria seleccionada. O comportamento plástico do material é descrito pelo critério de plasticidade de Hill'48 e pela lei de encruamento de Swift. A análise directa incidiu sobre aos parâmetros do critério de anisotropia de Hill'48 e da lei de encruamento de Swift e utilizou variáveis possíveis de obter experimentalmente neste tipo de ensaio, após um determinado nível de carregamento, tais como as trajectórias de deformação e os valores de deformação plástica equivalente em cada ponto e a evolução das forças de tracção durante o ensaio.

As tendências apresentadas pelas variáveis seleccionadas, em função do comportamento do material, foram identificadas e quantificadas por análise directa, o que permitiu desenvolver uma metodologia de análise inversa para identificação, simultânea, dos parâmetros do critério de anisotropia do critério de Hill'48 e da lei de encruamento de

Swift. A metodologia proposta foi testada e validada, com base em resultados gerados por simulação numérica de materiais fictícios com diferentes tipos de comportamento plástico, que se assumem como sendo resultados experimentais do ensaio de tracção biaxial do provete cruciforme.

Palavras-chave: Análise inversa, Leis constitutivas, Identificação de parâmetros, Ensaio de tracção biaxial, Provete cruciforme, Simulação numérica, Estampagem de chapa.

## Abstract

The present focuses on the development of an inverse analysis methodology to identify the constitutive model parameters, used to describe the plastic behavior of metallic sheets, based on the information acquired from the biaxial tensile test of a cruciform shaped specimen. This methodology was developed and tested based on a finite element code (DD3IMP), developed to simulate the plastic strain of metallic sheets In three dimensions.

The geometry of the cruciform shaped specimen was selected in order to obtain, simultaneously, high plastic strain levels and gradients, in points located along the symmetry axis. Therefore, from the several possible geometries for the cruciform shaped specimen, the selected geometry allows to obtain high strain levels for a large number of different strain paths.

Direct analysis was performed based on numerical results from the biaxial tensile test of the selected geometry for the cruciform shaped specimen. The plastic behavior of the material is described by the Hill'48 yield criteria and the isotropic hardening Swift law. The direct analysis focused on the parameters for the yield anisotropy criteria of Hill'48 and for the hardening Swift law and used experimentally available variables for this type of test, after a certain load level, such as the strain paths, the equivalent plastic strain values in each point and the load evolution during the test.

The trends presented by the selected variables, according to the mechanical behavior of the material, were identified and quantified by direct analysis, which allowed to develop an inverse analysis methodology for the, simultaneous, identification of the parameters for both the Hill'48 yield criteria and the Swift hardening law. The proposed methodology was tested and validated, using numerical simulation results for fictitious

materials with different plastic behavior, used as experimental results for the biaxial tensile test of the cruciform shaped specimen.

**Keywords:** Inverse analysis, Constitutive laws, Parameters identification, Biaxial tensile test, Cruciform-shaped specimen, Numerical simulation, Deep-drawing of metallic sheets.

## Índice

ÍNDICE DE FIGURAS .....	vii
ÍNDICE DE TABELAS .....	x
SIMBOLOGIA E SIGLAS.....	xi
Simbologia.....	xi
Siglas .....	xii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. OPTIMIZAÇÃO DA GEOMETRIA DO PROVETE .....	8
2.1. Optimização da Malha de Elementos Finitos .....	9
2.2. Optimização da Geometria do Provete Cruciforme.....	12
2.2.1. Método de Taguchi e ANOVA.....	12
3. ANÁLISE DIRECTA.....	17
3.1. Isotropia plana.....	17
3.1.1. Estudo preliminar sobre os parâmetros $L$ e $M$ .....	18
3.1.2. Estudo do <i>rmédio</i> .....	20
3.2. Lei de encruamento.....	25
3.2.1. Coeficiente de encruamento, $n$ .....	25
3.2.2. Nível da curva de encruamento .....	28
3.3. Anisotropia no Plano da Chapa.....	30
3.3.1. Caso geral .....	30
3.3.2. Estudo de $r45$ .....	42
3.3.3. Estudo de $r0$ e $r90$ .....	45
3.4. Considerações Finais .....	49
4. ANÁLISE INVERSA.....	50
4.1. Algoritmo de análise inversa .....	50
4.2. Casos <i>Hill-Hill</i> .....	55
4.2.1. CASO 1.A.....	55
4.2.2. CASO 1.B.....	62
4.2.3. CASO 2 .....	70
4.3. Caso Drucker+L – Hill (CASO 2).....	78
4.3.1. Análise das superfícies limite de elasticidade – encruamento isotrópico.....	87
4.3.2. Simulação numérica da estampagem de uma taça em cruz.....	90
5. CONCLUSÕES .....	95
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	98

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representação esquemática do ensaio de um provete cruciforme sujeito a uma solitação de tracção biaxial induzida pelas forças aplicadas nas extremidades das abas, nas direcções <i>segundo</i> $\theta x$ e $\theta y$ . A sombreado, mostra-se a região do provete considerada nas simulações numéricas ( $1/4$ do provete).	8
Figura 2. (a) Geometria e dimensões de $1/4$ do provete cruciforme; (b) Malha de elementos finitos.	9
Figura 3. Análise comparativa de resultados das três discretizações: (a) $F$ vs. $\Delta l$ e (b) $\epsilon$ vs. $d$ .	11
Figura 4. Distribuição da deformação plástica equivalente à carga máxima: Simulações (a) 1, (b) 6 e (c) 9.	15
Figura 5. Análise directa referente aos parâmetros $L$ e $M$ : Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ ; (b) $\epsilon_2\epsilon_1$ vs. $d$ , (c) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ e (d) $F$ vs. $\Delta l$ .	19
Figura 6. Análise directa em isotropia no plano da chapa: Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ ; (b) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ ; (c) $\epsilon_2\epsilon_1$ vs. $d$ e (d) $F$ vs. $\Delta l$ .	21
Figura 7 – Diagramas $\epsilon$ vs. $d$ (a) Região central do provete, (b) Região das abas, onde ocorre a deformação plástica equivalente máxima.	23
Figura 8 – Deformação plástica equivalente máxima em função de $1/r$ : (a) No centro do provete e (b) na região da aba.	24
Figura 9. Distância correspondente à deformação plástica equivalente máxima, na região da aba, em função de $1/r$ .	24
Figura 10. Curvas $\sigma$ vs. $\epsilon$ com diferentes leis de encruamento.	25
Figura 11. Caso de isotropia no plano da chapa, considerando a lei de encruamento da Tabela XI: Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $d$ , correspondente à deformação plástica equivalente máxima, vs. $1/r$ , (c) $\epsilon$ , no centro do provete, vs. $1/r$ e (d) $\epsilon$ máxima, na região da aba, vs. $1/r$ .	27
Figura 12. Curvas $\sigma$ vs. $\epsilon$ com diferentes leis de encruamento.	28
Figura 13. Análise comparativa em isotropia com diferentes parâmetros de encruamento: Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $\epsilon_2\epsilon_1$ vs. $d$ , (c) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ e (d) $F$ vs. $\Delta l$ .	29
Figura 14. Tipos de distribuições possíveis de $r(a)$ no plano da chapa, com $r_{\text{medio}}=3$ ; à esquerda fixou-se $r_0=2$ e à direita $r_0=4$ .	32
Figura 15. Análise da evolução do caso (a) até ao (c-3): (a) e (b) $\epsilon$ vs. $d$ , segundo $\theta x$ e $\theta y$ , respectivamente; (c) e (d) $\epsilon_2\epsilon_1$ vs. $d$ , segundo $\theta x$ e $\theta y$ , respectivamente.	33
Figura 16. Análise da evolução de (a) até (c-3): (a) e (b) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ em $\theta x$ e $\theta y$ ; (c) e (d) $F$ vs. $\Delta l$ , em $\theta x$ e $\theta y$ .	34
Figura 17. Análise da evolução do caso (a) até ao (d-3): (a) e (b) $\epsilon$ vs. $d$ , segundo $\theta x$ e $\theta y$ , respectivamente; (c) e (d) $\epsilon_2\epsilon_1$ vs. $d$ , segundo $\theta x$ e $\theta y$ , respectivamente.	37
Figura 18. Análise da evolução de (a) até (d-3): (a) e (b) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ em $\theta x$ e $\theta y$ ; (c) e (d) $F$ vs. $\Delta l$ , em $\theta x$ e $\theta y$ .	38
Figura 19. Algumas distribuições possíveis de $r$ no plano do provete, com $r_{\text{medio}}=2$ ...	40
Figura 20 – Diagrama $\epsilon$ vs. $d$ (a) em $\theta x$ (b) em $\theta y$ . Confirma-se o intervalo $d$ reduzido em que ocorre a deformação máxima, nas distribuições $r$ vs. $\alpha$ para $r_{\text{medio}}=2$ .	41
Figura 21. Diagrama $r$ vs. $\alpha$ .	43

Figura 22. Estudo da influência de $r_{45}$ . Diagramas (a) e (c): $\epsilon$ vs. $d$ em $\theta_x$ e $\theta_y$ , respectivamente; (b) e (d): detalhe dos picos dos diagramas (a) e (c), respectivamente. ....	44
Figura 23. Estudo da influência de $r_{45}$ . Diagramas (a) e (b): $F$ vs. $\Delta L$ em $\theta_x$ e $\theta_y$ , respectivamente. ....	45
Figura 24. Diferenças relativas $r - r^* r^*$ vs. $r^*$ , para o caso de isotropia no plano da chapa. ....	46
Figura 25. Diferenças relativas $r - r^* r^*$ vs. $r^*$ , para os casos de isotropia plana, da Tabela XVIII. ....	48
Figura 26. Distribuições $r$ vs. $\alpha$ no plano da chapa dos três casos em <i>Hill-Hill</i> em estudo: Casos (a) 1.A, (b) 1.B e (c) 2. ....	55
Figura 27 – Diagramas (a) $F$ vs. $\Delta l$ e (b) $\epsilon$ vs. $d$ referentes ao caso em estudo. ....	56
Figura 28 – Diagramas do caso experimental (a) $F$ vs. $\Delta l$ e (b) $\epsilon$ vs. $d$ . ....	57
Figura 29 – Diagrama $d$ vs. $1/r$ determinado com base nos resultados de simulação em isotropia no plano da chapa. ....	57
Figura 30 – Resultados da 1ª Estimativa e Experimental: Diagramas (a) $F$ vs. $\Delta l$ , (b-1) $\epsilon$ vs. $d$ e (c) detalhe do pico da distribuição $\epsilon$ vs. $d$ . ....	59
Figura 31 – Actualização do diagrama $d$ vs. $1/r$ . ....	60
Figura 32 - Resultados da 2ª Estimativa: Diagramas (a) $F$ vs. $\Delta l$ , (b-1) $\epsilon$ vs. $d$ e (b-2) detalhe do pico da distribuição $\epsilon$ vs. $d$ . ....	61
Figura 33. Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ e (b) $F$ vs. $\Delta l$ referentes ao caso experimental. ....	62
Figura 34 - Diagramas (a) $F$ vs. $\Delta l$ e (b) $\epsilon$ vs. $d$ . ....	63
Figura 35 - Resultados da 1ª Estimativa: Diagramas (a) $F$ vs. $\Delta l$ e (b) $\epsilon$ vs. $d$ . ....	64
Figura 36 - Diagrama $d$ vs. $1/r$ actualizado. ....	65
Figura 37 – (a) e (b) Determinação de $\Delta r$ do caso em estudo. ....	66
Figura 38 – Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) detalhe do pico da distribuição $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $F$ vs. $\Delta l$ e (c) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ comparativos entre o caso em estudo e a 2ª Estimativa. ....	67
Figura 39 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) detalhe do pico da distribuição $\epsilon$ vs. $d$ , (c) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ e (d) $F$ vs. $\Delta l$ comparativos entre o caso em estudo e a 3ª Estimativa. ....	69
Figura 40 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ , (c) $F$ vs. $\Delta l$ referentes ao caso em estudo. ....	71
Figura 41 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ e $d$ vs. $1/r$ em isotropia no plano da chapa. ....	72
Figura 42 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ e (c) $F$ vs. $\Delta l$ comparativos entre o caso em estudo e a 1ª Estimativa. ....	73
Figura 43 – Diagrama (a) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ em isotropia no plano da chapa e (b) diagrama das diferenças relativas entre $r^*$ e $r$ em isotropia planar. ....	74
Figura 44 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ , (c) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ e (d) $F$ vs. $\Delta l$ comparativos entre o caso em estudo e a 2ª Estimativa. ....	75
Figura 45 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ , (c) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ e (d) $F$ vs. $\Delta l$ comparativos entre o caso em estudo e a 3ª Estimativa. ....	77
Figura 46. Distribuição $r$ vs. $\alpha$ no plano da chapa do caso em estudo. ....	79
Figura 47 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ , (c) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ e (d) $F$ vs. $\Delta l$ referentes ao caso em estudo. ....	80
Figura 48 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ e (b) $d$ vs. $1/r$ em isotropia no plano da chapa. ....	81
Figura 49 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $\epsilon_2 \epsilon_1$ vs. $d$ e (c) $F$ vs. $\Delta l$ comparativos entre o caso em estudo e a 1ª Estimativa. ....	82
Figura 50 - Diagramas (a) $F$ vs. $\Delta l$ e (b) $\epsilon$ vs. $d$ , comparativos entre o caso em estudo e a 2ª Estimativa. ....	83



---

Figura 51 - Diagramas (a) $F$ vs. $\Delta l$ e (b) $\epsilon$ vs. $d$ , comparativos entre o caso em estudo e a 3ª Estimativa. ....	84
Figura 52 - Diagramas (a) $F$ vs. $\Delta l$ e (b) $\epsilon$ vs. $d$ , comparativos entre o caso em estudo e a 4ª Estimativa. ....	85
Figura 53 - Diagramas (a) $\epsilon$ vs. $d$ , (b) $\epsilon_1$ vs. $\epsilon_2$ e (c) $F$ vs. $\Delta l$ comparativos entre o caso em estudo e a 5ª Estimativa. ....	86
Figura 54 – Comparação entre as superfícies limite de elasticidade (a) 5ª Estimativa e (b) Método clássico, com o caso em estudo. ....	89
Figura 55 – Evolução da superfície limite de elasticidade. ....	89
Figura 56 – Malha de elementos finitos (a) na taça cruciforme completa e (b) na secção simulada, com os referenciais de estudo $0x$ e $0y$ . ....	91
Figura 57. Diagramas (a) $\delta$ vs. $\alpha$ e (b) $F$ vs. $\Delta l$ . ....	91
Figura 58. Diagramas $\epsilon$ vs. $d$ : (a) em $0x$ , (b) em $0y$ e (c) em $0x=0y$ . ....	93
Figura 59. Diagramas $t$ vs. $d$ : (a) em $0x$ , (b) em $0y$ e (c) em $0x=0y$ . ....	94

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela I. Características dos parâmetros de discretização do modelo. ....	10
Tabela II. Parâmetros das leis de comportamento utilizados nas simulações numéricas realizadas no estudo de sensibilidade à discretização do modelo. ....	10
Tabela III. Comparação dos tempos de cálculo, $\epsilon\epsilon$ (centro) e $\epsilon$ (máximo – abas) das Malhas 2, 1 e 0.5, para um deslocamento de 5mm. ....	11
Tabela IV. Valores dos parâmetros geométricos do provete cruciforme. ....	12
Tabela V. Estratégia de simulação, segundo o Método de Taguchi. ....	13
Tabela VI. Resultados obtidos de $\epsilon 1$ biaxial, $\epsilon 1$ máxima e $\epsilon 2 \epsilon 1$ para cada simulação realizada no estudo de otimização de geometria. ....	14
Tabela VII. Pesos relativos de $Lh$ , $\beta$ e $R$ . O parâmetro $\kappa$ representa o coeficiente de interferência entre os restantes parâmetros. ....	14
Tabela VIII. Valores de $\epsilon 1$ biaxial, $\epsilon 1$ máxima e $\epsilon 2 \epsilon 1$ para as geometrias 6, 6' e 6'' ..... 16	16
Tabela IX. Plano de simulações realizadas em isotropia no plano da chapa. ....	18
Tabela X. Razão entre as deformações principais para a trajectória de tracção em função de $r$ . ....	23
Tabela XI. Simulações em isotropia planar, considerando os parâmetros de encruamento que descrevem a curva $n=0.468$ , da Figura 10. ....	26
Tabela XII. Simulações em isotropia completa com diferentes leis de encruamento. ....	28
Tabela XIII. Simulações numéricas em anisotropia no plano da chapa, correspondentes a diferentes distribuições de $r(\alpha)$ , no plano da chapa (ver Figura 14). ....	31
Tabela XIV. Parâmetros para o cálculo de $\sigma 90$ , correspondente a diferentes distribuições de $r(\alpha)$ , no plano da chapa (ver Figura 14). ....	36
Tabela XV. Distâncias $d$ correspondentes a diferentes distribuições $r(\alpha)$ no plano da chapa. Diferença relativa ao caso em isotropia no plano da chapa. ....	42
Tabela XVI. Simulações numéricas em anisotropia no plano da chapa, para o estudo da influência de $r45$ nos resultados obtidos. ....	43
Tabela XVII. Valores das diferenças relativas para os diferentes casos indicados na Figura 14 (anisotropia planar com $rmédio=3$ ) ....	47
Tabela XVIII. Parâmetros das leis de encruamento. ....	48
Tabela XIX. Características dos casos experimentais Hill-Hill: Parâmetros de anisotropia e de encruamento. ....	55
Tabela XX. Diferenças relativas entre os valores de $rmédio$ dos casos Experimental e 2ª Estimativa. ....	62
Tabela XXI. Diferenças relativas entre os valores de $r0 = r90$ , $r45$ e $rmédio$ dos casos Experimental e 3ª Estimativa. ....	70
Tabela XXII. Diferenças relativas entre os valores de $r0$ , $r45$ , $r90$ e $rmédio$ dos casos Experimental e 3ª Estimativa. ....	78
Tabela XXIII. Características do caso experimental Drucker+L – Hill: Parâmetros de anisotropia e de encruamento. ....	78
Tabela XXIV. Diferenças relativas entre os valores de $r0$ , $r45$ , $r90$ , $rmédio$ , $K$ , $n$ e $\sigma 0$ dos casos Experimental e 5ª Estimativa. ....	87

## SIMBOLOGIA E SIGLAS

### Simbologia

$\alpha$  – Orientação do eixo do provete de tracção em relação à direcção de laminagem

$\Delta l$  – Deslocamento da amarra do provete cruciforme

$\varepsilon_0$  – Parâmetro da lei de encruamento de Swift

$\varepsilon$  – Deformação plástica equivalente

$\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , – Deformações logarítmicas, no plano da chapa, paralela e perpendicular à direcção de tracção, respectivamente, e  $\varepsilon_3$  a deformação logarítmica em espessura

$\nu$  – Coeficiente de Poisson

$\sigma$  – Tensão equivalente

$\boldsymbol{\sigma}$  – Tensor das tensões de Cauchy

$\sigma_\alpha$  – Tensão limite de elasticidade determinada para um ensaio de tracção uniaxial realizado com um provete com uma orientação  $\alpha$  em relação à direcção de laminagem

$\sigma_0(\alpha)$  – Evolução da tensão limite de elasticidade em tracção uniaxial, no plano da chapa

$\sigma_{médio}$  – Média da evolução da tensão limite de elasticidade em tracção uniaxial, no plano da chapa

$d$  – Distância ao centro do provete cruciforme

$e$  – Dimensão média do elemento finito no plano

$E$  – Módulo de Elasticidade

$F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  – Parâmetros de anisotropia do critério de plasticidade de Hill'48

$\kappa$  – Coeficiente de interferência da ANOVA

$K$  – Parâmetro da lei de encruamento de Swift

$n$  – coeficiente de encruamento

$r$  – Coeficiente de anisotropia

$r_\alpha$  – Coeficiente de anisotropia determinado para um ensaio de tracção uniaxial realizado com um provete com uma orientação  $\alpha$  em relação à direcção de laminagem

$r(\alpha)$  – Evolução do coeficiente de anisotropia no plano da chapa

$r_{médio}$  – Média da evolução do coeficiente de anisotropia no plano da chapa

$R$  – Coeficiente de correlação

## **Siglas**

DD3IMP – Programa de elementos finitos. Contração de Deep Drawing 3D  
IMPlicit Code

CEMUC – Centro de Engenharia Mecânica da Universidade de Coimbra

## 1. INTRODUÇÃO

De uma maneira geral, a descrição do comportamento mecânico de materiais metálicos é realizada com recurso a modelos matemáticos, que procuram aproximar o mais correctamente possível os resultados obtidos em ensaios experimentais. Este tipo de modelos, comumente designados de fenomenológicos, baseia-se na premissa de que o comportamento plástico dos materiais pode ser descrito com base em observações macroscópicas. Muitos destes modelos matemáticos caracterizam-se por apresentar uma elevada flexibilidade associada a um grande número de parâmetros, de modo a aproximar com rigor os resultados experimentais.

As leis constitutivas utilizadas no método dos elementos finitos (MEF), por exemplo, são a lei de encruamento e as que descrevem a superfície de plasticidade e sua evolução durante a deformação plástica de materiais metálicos. Geralmente, a equação que define a superfície de plasticidade funciona como uma função potencial utilizada na determinação do tensor das velocidades de deformação, quando se adopta uma lei de escoamento associada (lei de normalidade). Durante a deformação plástica, a superfície de plasticidade acompanha a evolução da tensão. A posição e o tamanho da superfície evolui por dilatação e/ou translação, descritas pelo tipo de encruamento do material, isotrópico e/ou cinemático, respectivamente.

Desde o primeiro critério de plasticidade para materiais metálicos, proposto por Tresca em 1864, até aos dias de hoje, foram formulados diversos modelos matemáticos que procuram descrever a superfície de plasticidade inicial e a sua evolução durante a deformação plástica dos materiais metálicos (Alves, 2003; Chaparro, 2006). No caso específico das chapas metálicas, devido ao processo de laminagem a que são sujeitas durante a sua produção, o comportamento mecânico é anisotrópico e do tipo ortotrópico, uma vez que as chapas apresentam três planos de simetria de propriedades, mutuamente ortogonais em cada ponto material (as rectas definidas pelas intersecções destes três planos constituem o sistema de eixos principais de anisotropia). Na simulação numérica de processos de conformação por deformação plástica de chapas metálicas, os modelos

constitutivos mais utilizados para descrever o comportamento plástico dos materiais são o critério de anisotropia de Hill'48 (Hill, 1948) e a lei de Swift (Swift, 1952).

Os parâmetros destas leis são habitualmente identificados a partir de resultados experimentais provenientes de ensaios de tracção, realizados segundo diferentes orientações do eixo dos provetes ( $\alpha$ ) em relação à direcção de laminagem. Para cada um destes ensaios de tracção, é possível identificar a tensão limite de elasticidade em tracção uniaxial,  $\sigma_0(\alpha)$ , bem como o coeficiente de anisotropia  $r(\alpha)$ . De um modo geral, o coeficiente de anisotropia  $r$  é definido como:

$$r = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = \frac{\varepsilon_2}{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \quad (1)$$

em que  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  representam as deformações logarítmicas, no plano da chapa, paralela e perpendicular à direcção de tracção, respectivamente, e  $\varepsilon_3$  a deformação logarítmica em espessura.

O critério de plasticidade Hill'48 é definido no sistema de eixos principais de anisotropia  $Oxyz$  e pode escrever-se:

$$F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad (2)$$

em que  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$  e  $N$  são os parâmetros do critério,  $\sigma$  representa o tensor das tensões de Cauchy, escrito no sistema de eixos principais de anisotropia, e  $\sigma_0$  a tensão limite de elasticidade, determinada, por exemplo, para o ensaio de tracção realizado para  $\alpha$  igual a  $0^\circ$  (neste caso, o eixo de tracção é paralelo a  $Ox$  e cumpre-se a condição  $G+H=1$ ). A determinação dos parâmetros  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $N$  do critério pode ser realizada com recurso a apenas a três ensaios de tracção uniaxial, com  $\alpha$  igual a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , por exemplo. Com base nestes ensaios experimentais determinam-se os coeficientes de anisotropia  $r_0$ ,  $r_{45}$  e  $r_{90}$ , que permitem determinar os parâmetros de anisotropia, tal que:

$$F = \frac{r_0}{r_{90}(r_0 + 1)}, \quad G = \frac{1}{r_0 + 1}, \quad H = \frac{r_0}{r_0 + 1},$$

$$N = \frac{1}{2} \frac{(r_0 + r_{90})(2r_{45} + 1)}{r_{90}(r_0 + 1)} \quad (3)$$

Uma vez conhecidos os parâmetros  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $N$  do critério pode saber-se como evoluem, no plano da chapa, o coeficiente de anisotropia  $r(\alpha)$ :

$$r(\alpha) = \frac{H + (2N - F - G - 4H)\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}{F\sin^2(\alpha) + G\cos^2(\alpha)} \quad (4)$$

bem como a tensão limite de elasticidade em tracção uniaxial,  $\sigma_0(\alpha)$ :

$$\sigma_0(\alpha) = \sigma_0 [F\sin^2(\alpha) + G\cos^2(\alpha) + H + (2N - F - G - 4H)\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)]^{-1/2} \quad (5)$$

No caso das chapas metálicas, é difícil a determinação experimental dos parâmetros de anisotropia  $L$  e  $M$ . Assim, quando se utiliza um programa de elementos finitos, considera-se geralmente que  $L = M = 1.5$ , isto é admite-se que as tensões limite de elasticidade são idênticas para ensaios de corte nos planos  $Oxz$  e  $Oyz$ , e adquirem o valor do caso de isotropia completa. De facto, neste caso, o critério de Hill'48 corresponde ao critério de plasticidade isotrópico de von Mises, e os seus parâmetros têm os valores:  $F=G=H=0.5$  e  $L=M=N=1.5$ .

Os parâmetros do critério de plasticidade de Hill'48 ou de outros critérios podem também ser determinados de modo a garantir o melhor ajuste a um conjunto mais alargado de resultados experimentais em tracção como, por exemplo, a tensão limite de elasticidade, e/ou o coeficiente de anisotropia, a diversos ângulos com a direcção de laminagem. Na determinação destes parâmetros podem mesmo ser utilizados outros ensaios experimentais, como por exemplo, o corte e a tracção biaxial simétrica. Nestas circunstâncias, critérios com um maior número de parâmetros exigem um maior número de ensaios experimentais na sua determinação, embora mostrem uma maior flexibilidade, isto é permitem, em geral, um melhor ajuste aos resultados experimentais (Alves, 2003; Chaparro, 2006). Na simulação de processos de deformação plástica, o critério de Hill'48 é o mais utilizado, devido à sua simplicidade de implementação, capacidade de descrever

---

modelarmente a superfície de plasticidade inicial da chapa e de se aplicar a qualquer estado de tensão.

Os resultados fornecidos pelo ensaio de tracção uniaxial são também utilizados para identificar os parâmetros da lei de encruamento. Uma das leis mais utilizadas para descrever o encruamento isotrópico de chapas é a lei de Swift:

$$\sigma = K(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n \quad (6)$$

em que  $K$ ,  $\varepsilon_0$  e  $n$  são parâmetros de ajuste e  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são a tensão e a deformação plástica equivalentes, respectivamente. De modo a ajustar a lei de encruamento a uma gama de valores de deformação plástica equivalente maior do que os registados em tracção pode recorrer-se a outro tipo de ensaios, como os de corte e tracção biaxial. Em geral, a identificação dos modelos constitutivos baseia-se na utilização de ensaios com deformação homogénea (pelo menos localmente, na região de medição), uma vez que os resultados fornecidos por estes ensaios são de fácil interpretação. No entanto, estes ensaios conduzem a estados de tensão e deformação uniformes (na região analisada) e, conseqüentemente, a identificação dos parâmetros baseia-se em informação escassa, apenas respeitante às tensões e deformações instaladas, no caso de um número limitado de trajectórias de deformação.

A simplicidade do ensaio de tracção (ou mesmo de corte e tracção biaxial simétrica) tem contribuído para a sua aplicação na identificação dos modelos utilizados nas simulações numéricas. No entanto, os processos de estampagem envolvem diferentes trajectórias de deformação e, em muitos processos, a deformação em tracção (ou em corte e expansão simétrica) não é o tipo dominante de trajectória. Uma alternativa, que propomos neste trabalho para a identificação dos parâmetros das leis de comportamento, consiste em realizar ensaios mecânicos em que os estados de tensão e deformação não são homogéneos, como por exemplo o *bulge test*, a estampagem de uma taça quadrada ou circular e o ensaio de tracção biaxial de um provete cruciforme. Nesta estratégia de identificação, devem ser considerados os estados de tensão e deformação em todo o provete e não apenas localmente. Deste modo, os resultados obtidos para os parâmetros das leis constitutivas (lei de encruamento e critério de plasticidade) são função do comportamento da chapa num conjunto largo de trajectórias de deformação, típicas da



estampagem, obtidas num único ensaio de um provete convenientemente escolhido. Porém, este tipo de identificação exige a implementação de uma estratégia de análise inversa para obtenção de resultados. Em seguida, descrevem-se os ensaios previamente mencionados, que podem ser eventualmente utilizados neste contexto.

O *bulge test* é um ensaio clássico de conformação plástica, em que uma chapa é deformada na forma de uma calote esférica, sob pressão crescente de um fluido. Este tipo de ensaio permite examinar trajectórias de deformação plástica desde a deformação plana (no bordo da chapa) à expansão biaxial simétrica (no topo da calote).

As vantagens do ensaio *bulge test* são:

- Valores máximos de deformação plástica equivalente relativamente elevados;
- A superfície da chapa é livremente expandida sem constrangimento por parte de um cerra-chapas, logo não se coloca o problema de contacto entre superfícies.

Os inconvenientes, por sua vez são:

- Trajectórias de deformação apenas desde a deformação plana até à biaxial simétrica;
- Não provoca corte em planos perpendiculares ao plano da chapa, o que não permite determinar os parâmetros  $L$  e  $M$  do critério de Hill'48, por exemplo;
- Origina gradientes de deformação relativamente atenuados, o que pode dificultar a aplicação de uma metodologia de análise inversa.

O ensaio mecânico da conformação de uma taça quadrada ou circular envolve vários tipos de trajectórias de deformação, desde o corte puro à expansão biaxial simétrica e ocorrendo também corte normal ao plano da chapa, devido à flexão nas áreas de dobragem, que são as trajectórias típicas dos processos de estampagem de chapas metálicas.

Outras vantagens deste tipo de ensaios são:

- Valores máximos de deformação plástica equivalente relativamente elevados;
- Gradientes de deformação plástica relativamente elevados;

- A ocorrência de flexão poderá permitir determinar os parâmetros  $L$  e  $M$  do critério de Hill'48, por exemplo.

Um inconveniente deste tipo de ensaio é a presença de contacto entre superfícies, o que (associado à, em geral, difícil caracterização das condições de contacto com atrito, que influenciam os níveis de deformação plástica equivalente atingidos em cada ponto da chapa) introduz o coeficiente de atrito como mais uma variável a ser determinada por análise inversa.

O ensaio de tracção biaxial em provetes com geometria cruciforme tem sido alvo de um interesse crescente, na caracterização do encruamento naquela trajectória e como ensaio auxiliar na determinação da superfície limite de elasticidade, nomeadamente na melhor caracterização da região desta superfície próxima da expansão biaxial simétrica (Abu-Farha *et al.*, 2009). Também, no contexto do presente trabalho, isto é, com o objectivo de estudar a possibilidade de utilizar um único ensaio para determinação dos parâmetros das leis constitutivas, este tipo de ensaio mostra potencialidades, tendo mesmo sido escolhido para realizar o presente estudo.

Assim, as vantagens associadas ao ensaio de provetes cruciformes são:

- Trajectórias de deformação desde trajectórias próximas da tracção uniaxial (nas abas do provete) até à tracção biaxial simétrica (no centro do provete);
- Gradientes de deformação plástica elevados, o que certamente facilita a implementação de uma metodologia de análise inversa;
- Não ocorre contacto com atrito entre superfícies.

Em contrapartida, este ensaio apresenta inconvenientes, tais como:

- Valores de deformação plástica equivalente relativamente pequenos (próximos dos obtidos na deformação em tracção);
- Não inclui trajectórias desde a tracção uniaxial até ao corte puro;
- Não ocorre flexão ou, de um modo geral, corte num plano perpendicular ao plano da chapa, e como tal não permite determinar os parâmetros  $L$  e  $M$  do critério de Hill'48, por exemplo.

A progressiva acessibilidade aos métodos computacionais tornou possível a simulação de processos de conformação plástica com recurso a modelos, cada vez mais

sofisticados e realistas, dos processos físicos. A utilização de programas de simulação numérica torna mais rápida a resolução problemas em plasticidade (ou de outro tipo), com base em modelos matemáticos, que reproduzem o problema em análise. A visualização gráfica dos resultados numéricos obtidos facilita a sua rápida e acessível compreensão. No método de elementos finitos, um sistema físico em análise pode ser dividido num número (muitas vezes elevado) de elementos discretos. A consistência das simulações pelo MEF depende não só da flexibilidade matemática das leis utilizadas, mas também do tipo de ensaios mecânicos e metodologias utilizados na identificação dos respectivos parâmetros. Geralmente, as leis dispendo de um número elevado de parâmetros mostram superior versatilidade de descrição do comportamento plástico e qualidade dos resultados das simulações. Porém, à medida que o número de parâmetros aumenta, o número de ensaios necessários para a sua identificação aumenta também.

Em resumo, actualmente é consensual que a precisão dos resultados das simulações depende não só das leis constitutivas utilizadas, mas também do procedimento utilizado na identificação dos respectivos parâmetros.

Neste trabalho testa-se a utilização de uma metodologia alternativa para a determinação simultânea dos parâmetros do critério de plasticidade e da lei de encruamento, que depende do desenvolvimento de um procedimento de análise inversa. Esta metodologia recorre à simulação numérica do ensaio de um provete cruciforme sujeito a tracção biaxial. Previamente, realiza-se um estudo por análise directa com o objectivo de compreender o efeito dos valores dos parâmetros numéricos dos modelos constitutivos adoptados nos resultados obtidos no ensaio, tais como deformações, deslocamentos e forças.

Este tipo de abordagem só é possível devido à progressiva acessibilidade aos métodos computacionais, com desempenho cada vez mais eficiente, no que respeita à simulação dos processos de conformação plástica com recurso a modelos constitutivos, que são também cada vez mais sofisticados e realistas. Neste contexto, a investigação aqui desenvolvida recorreu à utilização do programa de elementos finitos DD3IMP, continuamente actualizado no Grupo de Tecnologia Experimental e Computacional – CEMUC (Menezes e Teodosiu, 2000; Oliveira *et al.*, 2008).

## 2. OPTIMIZAÇÃO DA GEOMETRIA DO PROVETE

Como referido na Introdução, o ensaio de tracção biaxial de um provete cruciforme foi escolhido para testar a possibilidade de determinação dos parâmetros das leis constitutivas (critério de plasticidade e lei de encruamento), utilizando um único ensaio multi-trajectórias. Na primeira etapa deste trabalho realizou-se um estudo de optimização da geometria do provete cruciforme, de modo a obter um estado de deformação o mais heterogéneo possível, isto é segundo uma vasta gama de trajectórias de deformação, e garantindo valores de deformação plástica relativamente elevados para cada trajectória.

O estudo da geometria do provete foi realizado com recurso à simulação numérica do ensaio de tracção biaxial, pelo que numa primeira etapa foi realizado um estudo de sensibilidade de malha. Na Figura 1 mostra-se um desenho esquemático da geometria de um provete cruciforme solicitado em tracção biaxial. A figura apresenta também o referencial escolhido para o provete, no plano da chapa. O provete cruciforme é submetido a deslocamentos iguais nas direcções  $0x$  e  $0y$ , impostos nas extremidades das abas. O eixo  $0x$  coincide com a direcção de laminagem da chapa e  $0y$  com a direcção transversa.

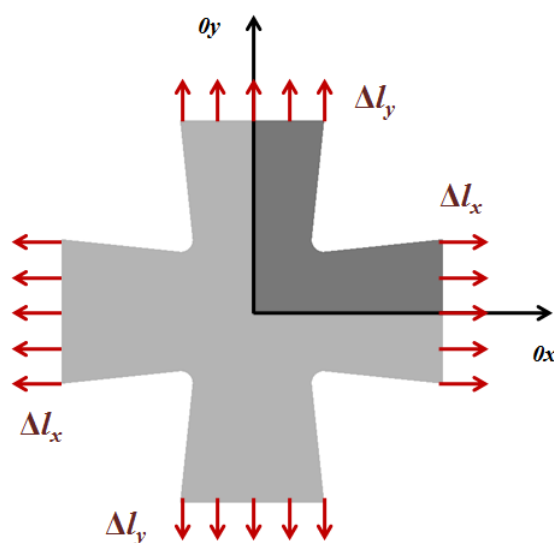


Figura 1. Representação esquemática do ensaio de um provete cruciforme sujeito a uma solicitação de tracção biaxial induzida pelas forças aplicadas nas extremidades das abas, nas direcções *segundo*  $0x$  e  $0y$ . A sombreado, mostra-se a região do provete considerada nas simulações numéricas ( $1/4$  do provete).

O modelo utilizado na simulação numérica do ensaio de tracção biaxial considera apenas  $\frac{1}{4}$  do provete cruciforme devido à condição de ortotropia planar da chapa metálica e às condições de simetria geométrica e de solitação do provete.

## 2.1. Optimização da Malha de Elementos Finitos

Na Figura 2(a) está indicada a geometria do provete cruciforme sobre o qual incidiu o estudo inicial para a selecção da dimensão do elemento finito a utilizar nas simulações numéricas. Todas as simulações realizadas neste estudo utilizam elementos finitos sólidos, trilineares de 8 nós. De modo a otimizar a discretização por elementos finitos sólidos a utilizar no estudo subsequente, foram construídas diferentes discretizações do modelo, considerando uma dimensão média do elemento finito no plano,  $e$ , de 2, 1 e 0.5mm, designadas por *Malha 2*, *Malha 1* e *Malha 0.5*, respectivamente. Na Figura 2(b) apresenta-se a *Malha 1*, a título de exemplo. As discretizações seleccionadas consideram sempre duas camadas de elementos finitos em espessura, cujo valor é de 1mm.

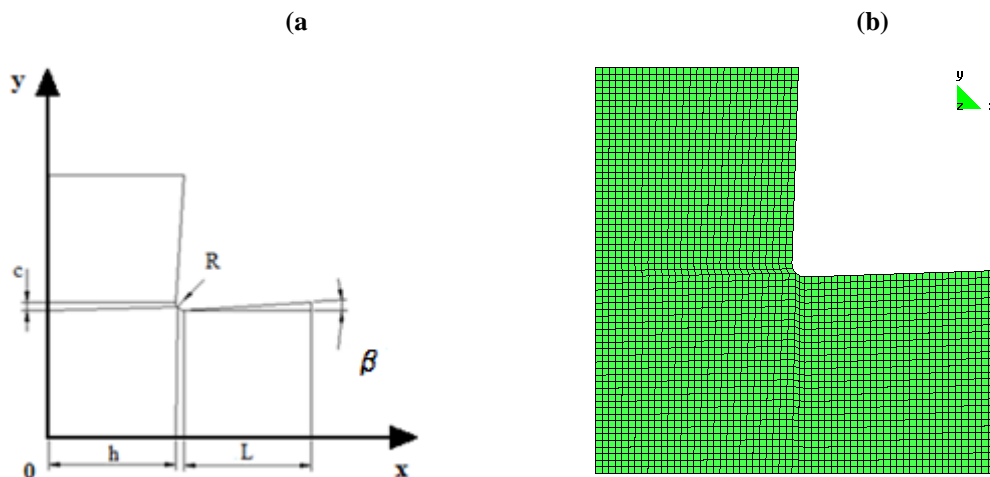


Figura 2. (a) Geometria e dimensões de  $\frac{1}{4}$  do provete cruciforme; (b) Malha de elementos finitos.

As dimensões relevantes do provete são:  $h$ , que indica  $\frac{1}{2}$  da largura da área central,  $L$  o comprimento das abas do provete,  $R$  o raio de concordância entre as abas,  $c$  o intervalo entre  $h$  e  $L$  (correspondente à região de concordância entre abas), que assume sempre valores iguais a  $R$ , e  $\beta$  o ângulo de abertura das abas. As dimensões consideradas neste estudo de sensibilidade da dimensão média do elemento finito no plano,  $e$ , foram:

- $h = 30\text{mm}$ ;  $L = 30\text{mm}$ ;  $R = c = 2\text{mm}$ ;  $\beta = 2^\circ$ .

Na Tabela I apresentam-se as relações entre as dimensões geométricas do provete e o tamanho médio do elemento finito no plano, para as diferentes discretizações.

**Tabela I. Características dos parâmetros de discretização do modelo.**

<i>Malha</i>	<i>e (mm)</i>	<i>h/e</i>	<i>L/e</i>	<i>c/e</i>
<b>2</b>	2.0	15.0	15.0	1.0
<b>1</b>	1.0	30.0	30.0	2.0
<b>0.5</b>	0.5	60.0	60.0	4.0

Na Tabela II indicam-se os parâmetros do critério de plasticidade Hill'48 e da lei de Swift utilizados neste estudo. Para simplificar, o material foi considerado isotrópico. Realizaram-se três simulações, correspondentes às discretizações, indicadas na Tabela I.

**Tabela II. Parâmetros das leis de comportamento utilizados nas simulações numéricas realizadas no estudo de sensibilidade à discretização do modelo.**

Critério de Plasticidade: Hill'48						Lei de Encruamento: Swift		
<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>K [MPa]</i>	<i>n</i>	<i><math>\sigma_Y</math> [MPa]</i>
0.5	0.5	0.5	1.5	1.5	1.5	494.2	0.234	134

Na Figura 3(a) apresenta-se a curva de evolução de força  $F$ , em função do deslocamento da extremidade de uma das abas do provete  $\Delta l$  durante o ensaio. A Figura 3(b) apresenta a evolução da deformação plástica equivalente  $\varepsilon$ , para pontos situados ao longo do eixo do provete, em função da distância ao centro do provete  $d$ , após um deslocamento de 5mm das amarras.

A evolução das forças durante o ensaio é coincidente para as três discretizações, ou seja, não depende da dimensão do elemento finito no plano. Os resultados referentes à distribuição da deformação plástica equivalente apresentam diferenças: (i) no centro do provete, até valores de  $d$  inferiores a 20mm e (ii) na região das abas, onde a deformação plástica equivalente é máxima, para valores de  $d$  próximos de 50mm.

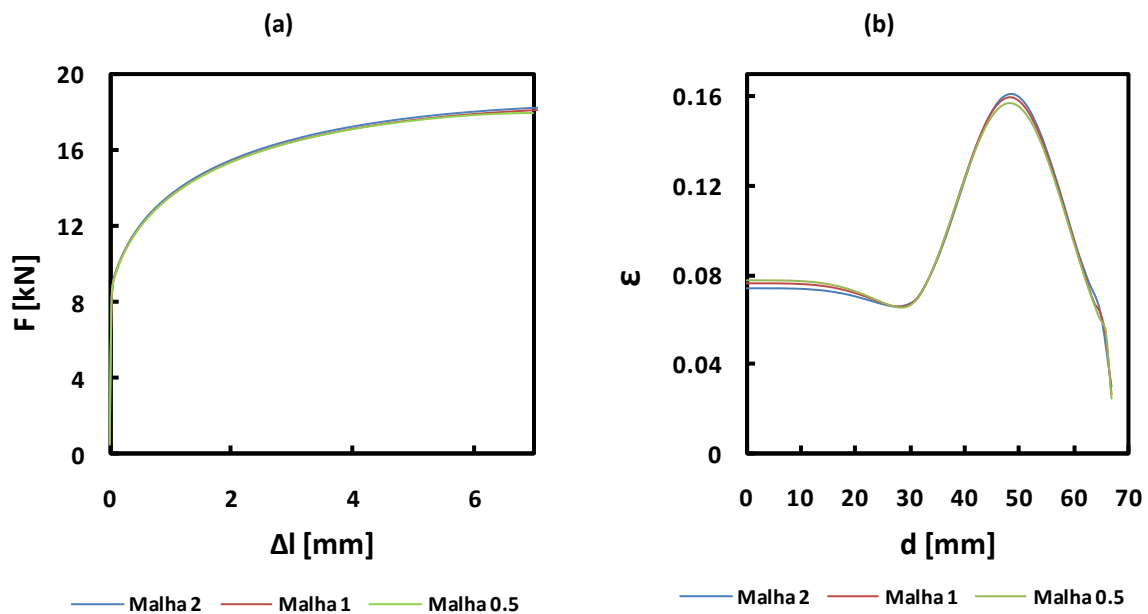


Figura 3. Análise comparativa de resultados das três discretizações: (a)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (b)  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

Na Tabela III estão indicados os valores de tempo de cálculo e das deformações plásticas equivalentes no centro do provete,  $\varepsilon$  (centro), e máxima nas abas  $\varepsilon$  (máximo - abas), após um deslocamento de 5mm, para as três discretizações estudadas. Para as duas discretizações mais grosseiras são indicadas na tabela (entre parêntesis) as diferenças percentuais relativas tendo como referência a *Malha 0.5*, de modo a facilitar a análise dos resultados.

Tabela III. Comparação dos tempos de cálculo,  $\varepsilon$  (centro) e  $\varepsilon$  (máximo - abas) das *Malhas 2, 1 e 0.5*, para um deslocamento de 5mm.

<i>Malha</i>	Tempo de cálculo [s]	$\varepsilon$ (centro)	$\varepsilon$ (máximo - abas)
2	438 (3.3%)	0.074 (-5%)	0.161 (+3%)
1	5332 (40.3%)	0.076 (-3%)	0.159 (+1%)
0.5	13245	0.078	0.157

A *Malha 2* apresenta o tempo de cálculo mais reduzido mas é a menos precisa na previsão das deformações, com uma diferença de 5% em  $\varepsilon$  (centro) e 3% em  $\varepsilon$  (máximo - abas), considerando como referência a malha mais refinada (*Malha 0.5*), que apresenta tempos de simulação demasiado elevados. Assim, optou-se por seleccionar a *Malha 1*, por apresentar resultados de deformação plástica equivalente relativamente próximos dos da *Malha 0.5*, com um tempo de cálculo correspondente a 40.3% do tempo de cálculo desta malha.

## 2.2. Optimização da Geometria do Provete Cruciforme

Os parâmetros geométricos seleccionados para a optimização da geometria do provete foram  $L/h$ ,  $R$  e  $\beta$ . A combinação de diferentes valores destes parâmetros geométricos permite obter diversas geometrias do provete cruciforme. De modo a estudar a influência dos diferentes parâmetros geométricos na distribuição da deformação no provete cruciforme, escolheram-se três níveis para o estudo, conforme indicado na Tabela IV. A combinação de 3 parâmetros geométricos, cada um com 3 níveis, impõe a realização de  $3^3=27$  simulações numéricas. De modo a minimizar o esforço envolvido nesta etapa do estudo, opta-se por recorrer ao método de Taguchi e ANOVA, apenas para determinar se algum dos parâmetros apresenta uma maior importância do que os outros e se existe alguma interferência entre eles (William e Creveling, 1995; Montgomery, 2005).

**Tabela IV. Valores dos parâmetros geométricos do provete cruciforme.**

<i>Nível</i>	$L/h$ ( $h=30\text{mm}$ )	$\beta$ (°)	$R$ (mm)
1	1	2	2
2	2	4	4
3	3	6	6

### 2.2.1. Método de Taguchi e ANOVA

A utilização do Método de Taguchi permite reduzir o número de simulações a realizar para 9, correspondente a um arranjo ortogonal do tipo  $L9$ , como se apresenta na Tabela V (Montgomery, 2005). As simulações foram realizadas com os parâmetros de plasticidade e encruamento indicados na Tabela II.

A geometria ideal é aquela que permite obter simultaneamente valores elevados de deformação plástica, maiores gradientes de deformação e um maior conjunto de trajectória de deformações. A influência dos diferentes parâmetros geométricos do provete cruciforme foi estudada tendo em conta os valores da deformação principal no centro do provete, na aba do provete ( máximo) e a relação  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ , entre as deformações principais mínima e máxima no plano da chapa (ao longo do eixo de simetria do provete),



obtidos na simulação numérica das diferentes geometrias em estudo. A Tabela VI apresenta os resultados obtidos para cada simulação, para o deslocamento correspondente à carga máxima.

**Tabela V. Estratégia de simulação, segundo o Método de Taguchi.**

#Simulação	$L/h$	$\beta$ (°)	$R$ (mm)
1	1	2	2
2	1	4	4
3	1	6	6
4	2	2	4
5	2	4	6
6	2	6	2
7	3	2	6
8	3	4	2
9	3	6	4

Em isotropia, o valor de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  correspondente a uma trajectória de deformação plástica biaxial simétrica é de 1.0 e o correspondente à trajectória de deformação em tracção é de -0.5. Nos ensaios realizados o ponto central segue uma trajectória de deformação biaxial simétrica, pelo que o valor máximo da relação  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  obtido é igual a 1.0, e nas abas ocorre o valor mínimo desta relação. Assim, indirectamente a relação  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  obtida em cada ponto permite aferir a gama de trajectórias de deformação obtidas em cada simulação da Tabela VI. Nesta tabela estão destacados, a *negrito* os valores mais elevados das deformações plásticas principais, no centro do provete ( $\varepsilon_1$  biaxial), máxima na aba ( $\varepsilon_1$  máxima) e o valor mínimo de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ , obtidos para cada um dos parâmetros em análise.

Para analisar a influência de cada parâmetro geométrico sobre os valores de  $\varepsilon$  biaxial,  $\varepsilon$  máxima e  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  mínimo recorreu-se ao método estatístico de análise de variância ANOVA (William e Creveling, 1995). Para tal, com base nos resultados indicados na Tabela VI, foram determinados os pesos relativos de  $L/h$ ,  $\beta$  e  $R$  com recurso a uma folha de cálculo ANOVA. Na Tabela VII apresentam-se os resultados dos pesos relativos de cada parâmetro geométrico, obtido para cada uma das variáveis em análise.

Tabela VI. Resultados obtidos de  $\varepsilon_1$  biaxial,  $\varepsilon_1$  máxima e  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  para cada simulação realizada no estudo de optimização de geometria.

#Simulação	$\varepsilon_1$ biaxial	$\varepsilon_1$ máxima	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$ mínimo
1	0.049	0.279	-0.308
2	0.044	0.279	-0.310
3	0.041	0.273	-0.312
4	0.034	<b>0.295</b>	-0.482
5	0.034	0.288	-0.485
6	<b>0.057</b>	0.258	-0.482
7	0.028	0.250	-0.510
8	0.048	0.271	-0.515
9	0.044	0.263	<b>-0.518</b>

Tabela VII. Pesos relativos de  $L/h$ ,  $\beta$  e  $R$ . O parâmetro  $\kappa$  representa o coeficiente de interferência entre os restantes parâmetros.

	$L/h$	$\beta$	$R$	$\kappa$
$\varepsilon_1$ biaxial	7.13%	31.92%	58.83%	2.12%
$\varepsilon_1$ máxima	34.54%	13.56%	19.64%	32.26%
$\varepsilon_2/\varepsilon_1$	99.95%	0.03%	0.01%	0.01%

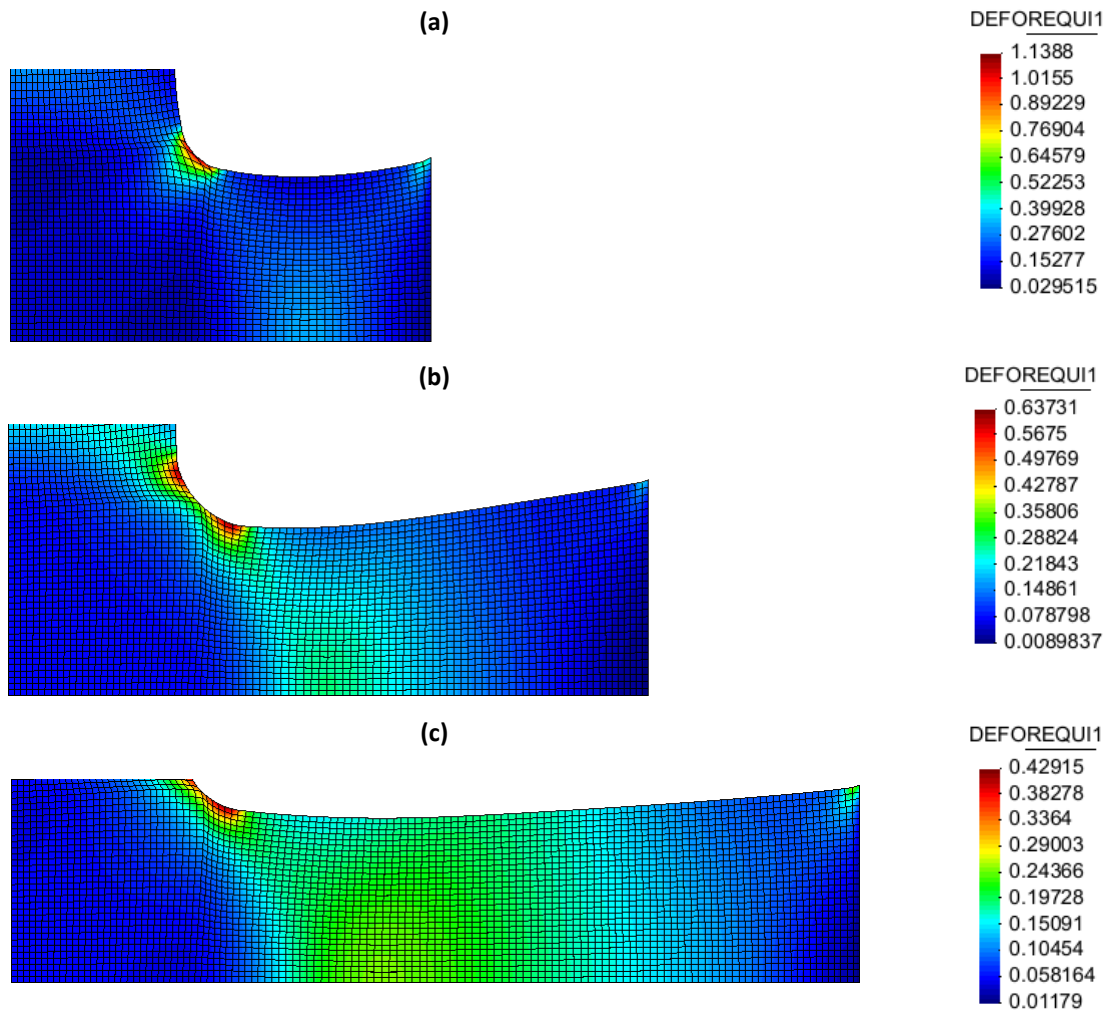
Da informação retirada da Tabela VII, conclui-se que:

A trajectória de deformação é afectada maioritariamente por  $L/h$ , tal que quanto maior  $L/h$ , maior o valor de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ . De facto, as simulações 7, 8 e 9, correspondentes ao maior valor de  $L/h$ , são as que possuem um valor de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  mais negativo;

- Em  $\varepsilon_1$  máxima, os parâmetros geométricos apresentam pesos relativos próximos, com um elevado coeficiente de interferência ( $\kappa$ ) a confirmar a interferência dos vários parâmetros geométricos nesta variável.
- Os valores de  $\varepsilon_1$  biaxial são afectados maioritariamente pelos parâmetros  $R$  (58.83%) e  $\beta$  (31.92%), com  $\kappa = 2.12\%$ .

As simulações 6 e 4, que possuem geometria  $L/h = 2$ , apresentam os valores mais elevados de  $\varepsilon_1$  biaxial e  $\varepsilon_1$  máxima, respectivamente. As simulações 8 e 9 apresentam os valores mais negativos de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ .

Na Figura 4 mostram-se alguns exemplos da distribuição da deformação plástica equivalente nas simulações 1, 6 e 9, com geometria  $L/h=1,2$  e 3, respectivamente. O pós-tratamento dos resultados foi realizado com o programa *GID 9.0.4*.



**Figura 4.** Distribuição da deformação plástica equivalente à carga máxima: Simulações (a) 1, (b) 6 e (c) 9.

Os resultados da distribuição da deformação plástica equivalente no sistema de eixos considerado no estudo, observados nos provetes de geometria  $L/h=1$ , são fortemente influenciados pela zona da curvatura, onde se atingem os maiores valores de deformação plástica. Esta influência, devido ao reduzido comprimento das abas, induz uma evolução brusca da deformação plástica equivalente ao longo da linha média do provete. Assim, os provetes cruciformes com geometria  $L/h=1$  foram considerados inviáveis. Por outro lado, os provetes cruciformes com geometria  $L/h=3$  são demasiado compridos, o que significa uma evolução suave das deformações plásticas equivalentes ao longo da linha média do provete. Este tipo de evolução prejudica uma análise directa de resultados.

Com base numa análise global dos resultados obtidos, considerou-se aceitável optar por utilizar um parâmetro geométrico  $L/h=2$  ( $L=60\text{mm}$  e  $h=30\text{mm}$ ), e escolheu-se a geometria correspondente à simulação  $\delta$ , que apresenta o maior valor de  $\varepsilon_1$  biaxial. Como a ANOVA permitiu concluir que esta variável é fortemente influenciada pelo parâmetro geométrico  $R$ , foram consideradas mais duas geometrias de modo a explorar o efeito de  $R$ . Na Tabela VIII estão indicados os parâmetros geométricos das novas geometrias ( $\delta'$  e  $\delta''$ ), assim como os resultados obtidos.

**Tabela VIII. Valores de  $\varepsilon_1$  biaxial,  $\varepsilon_1$  máxima e  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  para as geometrias  $\delta$ ,  $\delta'$  e  $\delta''$ .**

	$L/h$	$R$	$\beta$	$\varepsilon_1$ biaxial	$\varepsilon_1$ máxima	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$
$\delta$	2	2	6	<b>0.057</b>	0.258	-0.482
$\delta'$	2	4	6	0.044	0.273	-0.483
$\delta''$	2	6	6	0.038	<b>0.276</b>	<b>-0.485</b>

Com base nos resultados apresentados na Tabela VIII foi seleccionada a geometria  $\delta''$ , pois apresenta os melhores valores de  $\varepsilon_1$  máxima e  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ . Em contrapartida, apresenta o menor valor de  $\varepsilon_1$  biaxial.

Importa realçar que esta optimização da geometria do provete considerou um material isotrópico. Num caso de anisotropia planar, a geometria mais adequada pode ser diferente.

### 3. ANÁLISE DIRECTA

A análise directa foi realizada com o intuito de, a partir dos resultados obtidos por simulação numérica do ensaio de tracção biaxial do provete cruciforme, identificar: (i) as variáveis sensíveis à alteração do comportamento plástico do material em estudo; (ii) a influência dos parâmetros dos modelos constitutivos na distribuição e/ou evolução de cada uma das variáveis seleccionadas para análise. Assim, o conhecimento adquirido na análise directa é essencial para o estabelecimento de um procedimento de análise inversa, de modo a determinar os parâmetros do modelo constitutivo de um material, para o qual são conhecidos os resultados experimentais do ensaio cruciforme.

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos na análise directa de ensaios numéricos de materiais com diferente comportamento plástico. Todas as simulações realizadas consideram que o comportamento anisotrópico do material é descrito pelo critério de Hill'48 e o encruamento isotrópico é descrito pela lei de Swift. Analisa-se a influência dos parâmetros de anisotropia do critério de Hill'48, de modo indirecto através da evolução de  $r$  no plano da chapa, e dos parâmetros da lei de encruamento Swift. Os casos estudados dizem respeito a materiais que apresentam valores do coeficiente de anisotropia maiores ou iguais a um, para qualquer direcção do eixo de tracção no plano chapa.

#### 3.1. Isotropia plana

Numa primeira fase realizou-se um estudo acerca da influência dos parâmetros de anisotropia do critério de Hill'48 para materiais com isotropia de propriedades no plano da chapa, mantendo a lei de encruamento inalterada.

Na Tabela IX estão indicadas as simulações realizadas neste estudo, com os respectivos parâmetros para o critério de anisotropia e para a lei de encruamento. A simulação identificada como *Isotropia* corresponde ao critério de von Mises, pelo que  $r$  é

igual a 1.0. Para este valor de  $r$  foram igualmente realizadas simulações numéricas com diferentes valores de  $L$  e  $M$ , de modo a estudar a influência isolada destes parâmetros. Neste estudo foram ainda considerados diferentes valores de  $r$ .

**Tabela IX. Plano de simulações realizadas em isotropia no plano da chapa.**

Simulação	$r$	Critério de Plasticidade: Hill'48						Lei de Encruamento: Swift		
		$F$	$G$	$H$	$L$	$M$	$N$	$K$ [MPa]	$n$	$\sigma_0$ [MPa]
Isotropia	1.000	0.500	0.500	0.500	1.500	1.500	1.500	494.2	0.234	134
L=1, M=1	1.000	0.500	0.500	0.500	1.000	1.000	1.500			
L=2, M=1	1.000	0.500	0.500	0.500	2.000	1.000	1.500			
L=2, M=2	1.000	0.500	0.500	0.500	2.000	2.000	1.500			
L=1, M=2	1.000	0.500	0.500	0.500	1.000	2.000	1.500			
r=2	2.000	0.333	0.333	0.667	1.500	1.500	1.667			
r=3	3.000	0.250	0.250	0.750	1.500	1.500	1.750			
r=4	4.000	0.200	0.200	0.800	1.500	1.500	1.800			

### 3.1.1. Estudo preliminar sobre os parâmetros $L$ e $M$

Na Figura 5 apresentam-se os resultados obtidos no estudo realizado considerando  $r$  igual a 1.0 e diferentes valores de  $L$  e  $M$ . A Figura 5(a) e (b) correspondem às distribuições da deformação plástica equivalente e da razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ , em função da distância ao centro do provete cruciforme  $d$ , segundo um dos eixos de simetria,  $0x$  ou  $0y$  (devido à isotropia planar, os resultados são iguais para os dois eixos). A razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  é determinada de tal modo que, quando representada em função da distância ao centro do provete, segundo um dado eixo ( $0x$  ou  $0y$  – ver Figura 1), o valor de  $\varepsilon_1$  representa a deformação principal na direcção do eixo considerado e  $\varepsilon_2$  na direcção perpendicular a esse eixo. Assim, por exemplo, quando representamos a razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  ao longo do eixo  $0x$ ,  $\varepsilon_1$  é a deformação principal na direcção do eixo  $0x$  e  $\varepsilon_2$  na direcção do eixo  $0y$ .

A Figura 5(c) apresenta as trajectórias de deformação em pontos materiais correspondentes aos apresentados nas figuras (a) e (b). Os resultados de deformações foram obtidos imediatamente antes da carga máxima em tracção biaxial, correspondente a

um deslocamento  $\Delta l$  de 12mm, como se mostra na evolução da força com o deslocamento, apresentada na Figura 5(d).

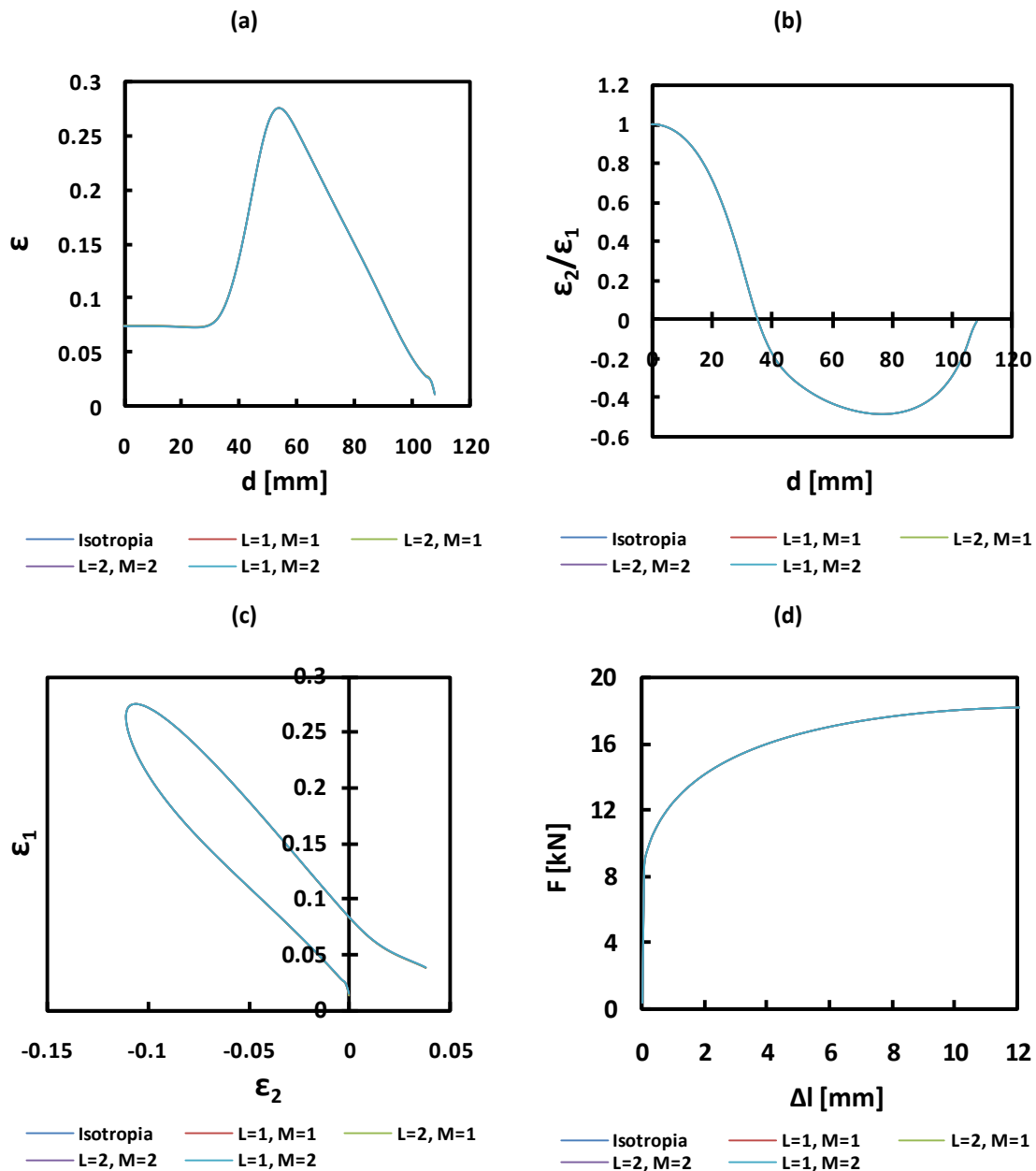


Figura 5. Análise directa referente aos parâmetros  $L$  e  $M$ : Diagramas (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$ ; (b)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , (c)  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$  e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$ .

A análise da Figura 5 permite concluir que os parâmetros  $L$  e  $M$  não influenciam os resultados obtidos, o que confirma as observações referentes à distribuição de deformações no provete, que mostram a não ocorrência de deformações de corte

perpendiculares ao plano chapa. Assim, serão sempre considerados  $L=M=1.5$  na restante investigação.

### 3.1.2. Estudo do $r_{médio}$

Na Figura 6 apresentam-se os resultados obtidos para as simulações em isotropia planar com diferentes valores de  $r$ . As Figura 6(a) e (b) apresentam a distribuição da deformação plástica equivalente e da razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ , em função da distância ao centro do provete cruciforme (ao longo dos eixos de simetria), respectivamente. Devido à isotropia planar, estes resultados são iguais para os dois eixos de simetria,  $0x$  e  $0y$ . A Figura 6(c) apresenta as trajectórias de deformação de cada um dos pontos materiais apresentado nas figuras (a) e (b). Todos os resultados foram obtidos para o ponto de carga máxima em tracção biaxial, correspondente a um deslocamento de 12mm, como se pode observar na Figura 6(d), que apresenta a evolução da força em função do deslocamento.



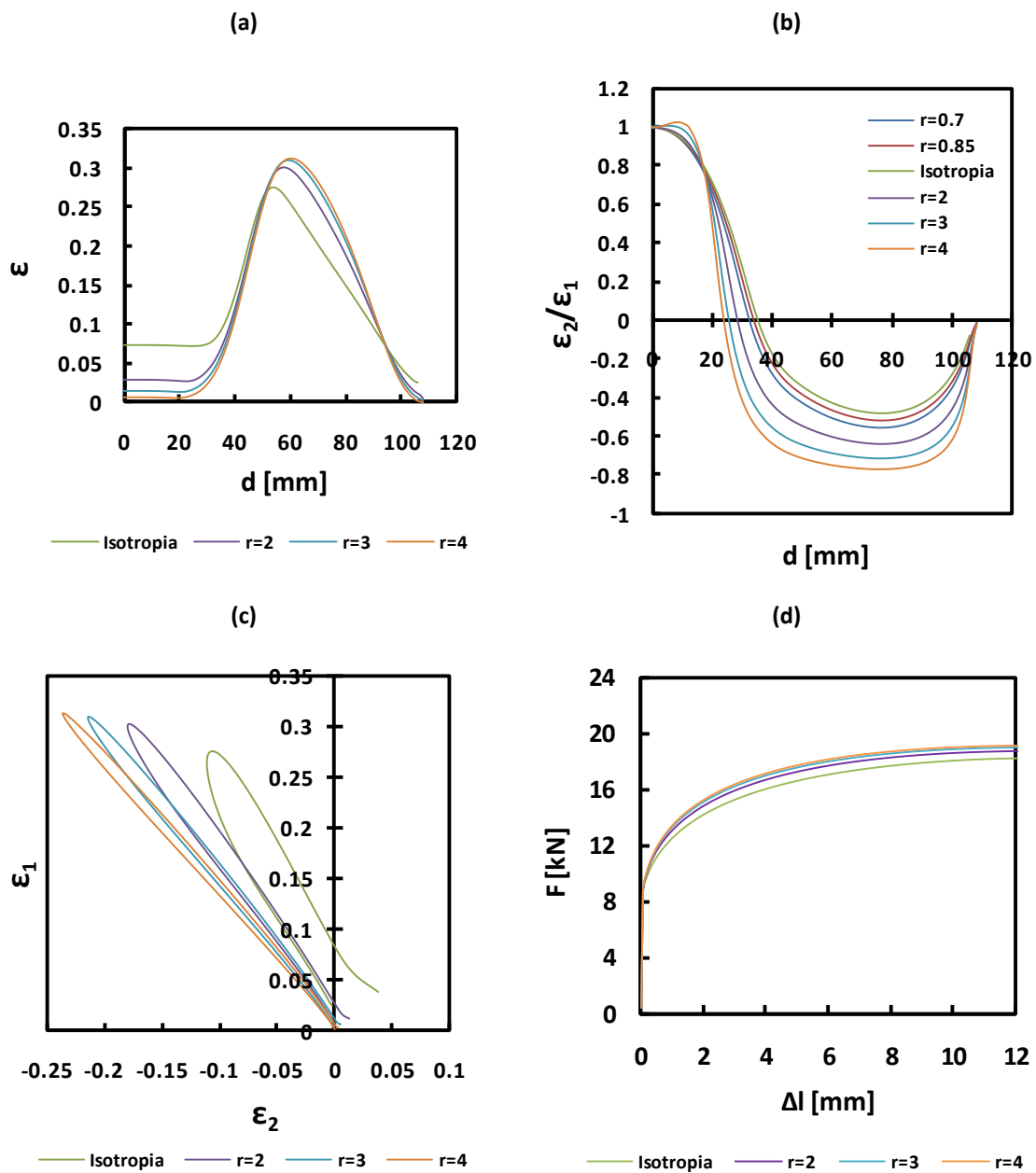


Figura 6. Análise directa em isotropia no plano da chapa: Diagramas (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$ ; (b)  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$ ; (c)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$ .

Da análise da Figura 6, destaca-se:

- No diagrama  $\varepsilon$  vs.  $d$ , na região correspondente à aba do provete ( $d > 30$  mm), observa-se um progressivo crescimento da deformação plástica equivalente e, nomeadamente do seu valor máximo (com alargamento do pico), quando  $r$  aumenta. Na região central do provete

( $d$  entre 0 e 30mm), a deformação plástica equivalente apresenta uma diminuição progressiva à medida que  $r$  aumenta.

- No diagrama  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , um maior valor de  $r$  corresponde a um valor de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  mínimo mais negativo. De facto, a trajectória de deformação, próxima da tracção uniaxial, definida pelo valor mínimo de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  depende do valor do coeficiente de anisotropia no plano da chapa, como se mostra na Tabela X. Para comparação, nesta tabela mostram-se também os valores de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  correspondentes à tracção pura, para cada um dos valores de  $r$  estudados.
- O diagrama  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$  permite visualizar as diferentes trajectórias de deformação para pontos ao longo dos eixos de simetria do provete (as extremidades de cada linha correspondem ao centro do provete,  $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ , e à extremidade da aba), bem como conhecer os respectivos valores de deformação imediatamente antes da carga máxima. À medida que  $r$  aumenta, os valores de deformação plástica no centro do provete diminuem, aproximando-se de zero, e os valores absolutos das deformações principais no plano da chapa aumentam, alterando-se também as trajectórias na região da aba do provete. Deve ser referido que algumas observações efectuadas a diversos valores de deslocamento ao longo do ensaio mostraram que as trajectórias em cada ponto, desde o centro até à extremidade da aba, são muito próximas da linearidade.
- No diagrama  $F$  vs.  $\Delta l$ , observa-se que nível das curvas aumenta com o aumento do valor de  $r$ , mas sem alterar significativamente o deslocamento correspondente à carga máxima.

Com base nestes resultados, optou-se por realizar uma análise mais pormenorizada do diagrama  $\varepsilon$  vs.  $d$ . Na Figura 7 apresentam-se detalhes do diagrama  $\varepsilon$  vs.  $d$ . A Figura 7(a) corresponde à região central do provete e a Figura 7(b) à zona da aba, onde ocorre a deformação plástica equivalente máxima.

Tabela X. Razão entre as deformações principais para a trajectória de tracção em função de  $r$ .

$r$	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$ (mínimo da Figura 6(b))	$\varepsilon_2/\varepsilon_1$ (tracção pura) $= -r/(r + 1)$
1	-0.484	-0.500
2	-0.638	-0.667
3	-0.683	-0.750
4	-0.770	-0.800

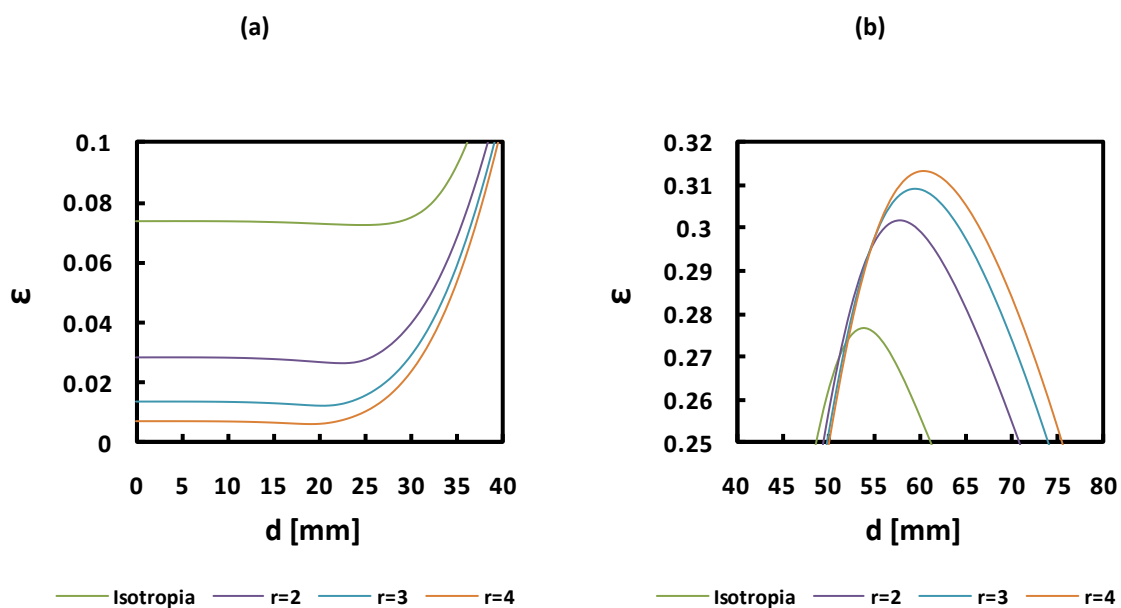


Figura 7 – Diagramas  $\varepsilon$  vs.  $d$  (a) Região central do provete, (b) Região das abas, onde ocorre a deformação plástica equivalente máxima.

O valor mais elevado de deformação plástica equivalente no centro do provete (Figura 7(a) para  $d=0$ mm) e o valor mais pequeno da deformação plástica equivalente máxima, na região da aba (Figura 7(b) para valores de  $d$  entre 50 e 65mm), são obtidos para o material isotrópico ( $r$  igual a 1). À medida que  $r$  aumenta, o valor da deformação plástica equivalente máxima na aba aumenta, e o da deformação plástica equivalente no centro do provete diminui. Na Figura 8, mostra-se que os valores de deformação plástica equivalente no centro do provete (ver Figura 8(a)), e máxima na aba (ver Figura 8(b)) evoluem linearmente com o inverso do valor de  $r$ .

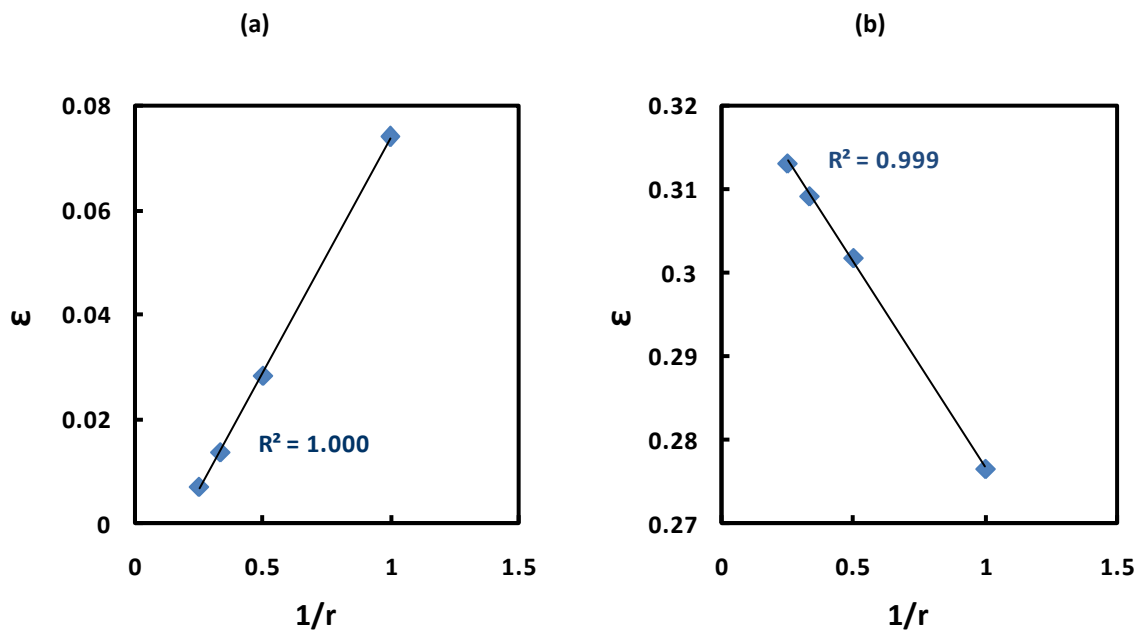


Figura 8 – Deformação plástica equivalente máxima em função de  $1/r$ : (a) No centro do provete e (b) na região da aba.

A análise da Figura 7(b) permite também observar que, à medida que  $r$  aumenta, a posição  $d$  para a qual ocorre a deformação plástica equivalente máxima também aumenta. A Figura 9 mostra que os valores da distância  $d$ , correspondentes à deformação plástica equivalente máxima na aba, evoluem linearmente com o inverso do valor de  $r$ .

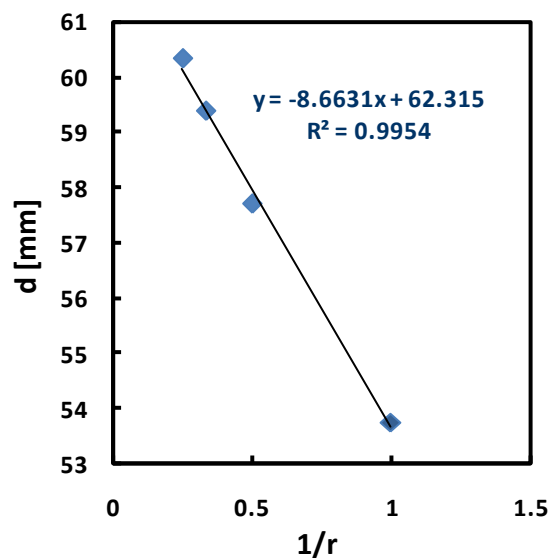


Figura 9. Distância correspondente à deformação plástica equivalente máxima, na região da aba, em função de  $1/r$ .

## 3.2. Lei de encruamento

### 3.2.1. Coeficiente de encruamento, $n$

De modo a avaliar se as tendências e relações (lineares) observadas na secção anterior são válidas para materiais com diferentes comportamentos de encruamento, procedeu-se a novo estudo em isotropia planar, para um material com a lei de encruamento indicada na Tabela XI. Relativamente à lei de encruamento anteriormente utilizada, foi alterado o coeficiente de encruamento  $n$  da lei de Swift, sendo mantida a tensão limite de elasticidade  $\sigma_0$  (ver Tabela IX). Na Figura 10 mostram-se as duas curvas de encruamento, para fácil comparação.

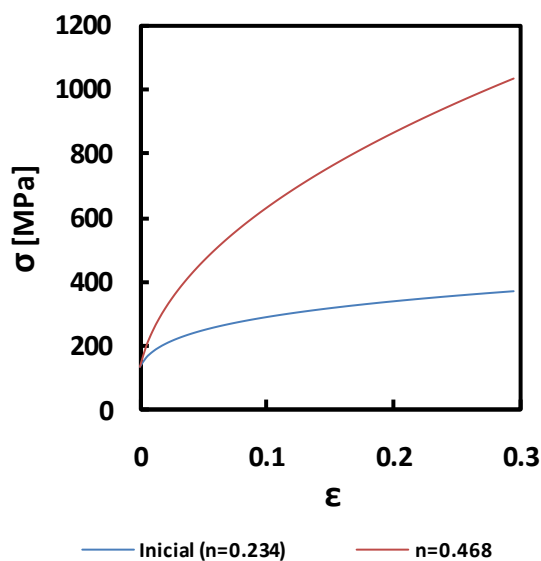


Figura 10. Curvas  $\sigma$  vs.  $\epsilon$  com diferentes leis de encruamento.

Na Figura 11(a) apresentam-se as evoluções da deformação plástica equivalente em função da distância ao centro do provete, para um deslocamento de 28mm, isto é, imediatamente antes do ponto de carga máxima. A Figura 11(b) apresenta a evolução da distância correspondente à deformação plástica equivalente máxima (na aba do provete) em função de  $1/r$ . Nas Figuras 11(c) e (d) mostram-se as evoluções da deformação plástica equivalente no centro do provete, e máxima (na aba), respectivamente, em função de  $1/r$ .

**Tabela XI. Simulações em isotropia planar, considerando os parâmetros de encruamento que descrevem a curva  $n=0.468$ , da Figura 10.**

<i>Simulação</i>	<i>Critério de Plasticidade: Hill'48</i>				<i>Lei de Encruamento: Swift</i>		
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>N</i>	<i>K</i> [MPa]	<i>n</i>	$\sigma_0$ [MPa]
<b>Isotropia</b>	0.500	0.500	0.500	1.500	1822.7	0.468	134
<b>r=2</b>	0.333	0.333	0.667	1.667			
<b>r=3</b>	0.250	0.250	0.750	1.750			
<b>r=4</b>	0.200	0.200	0.800	1.800			

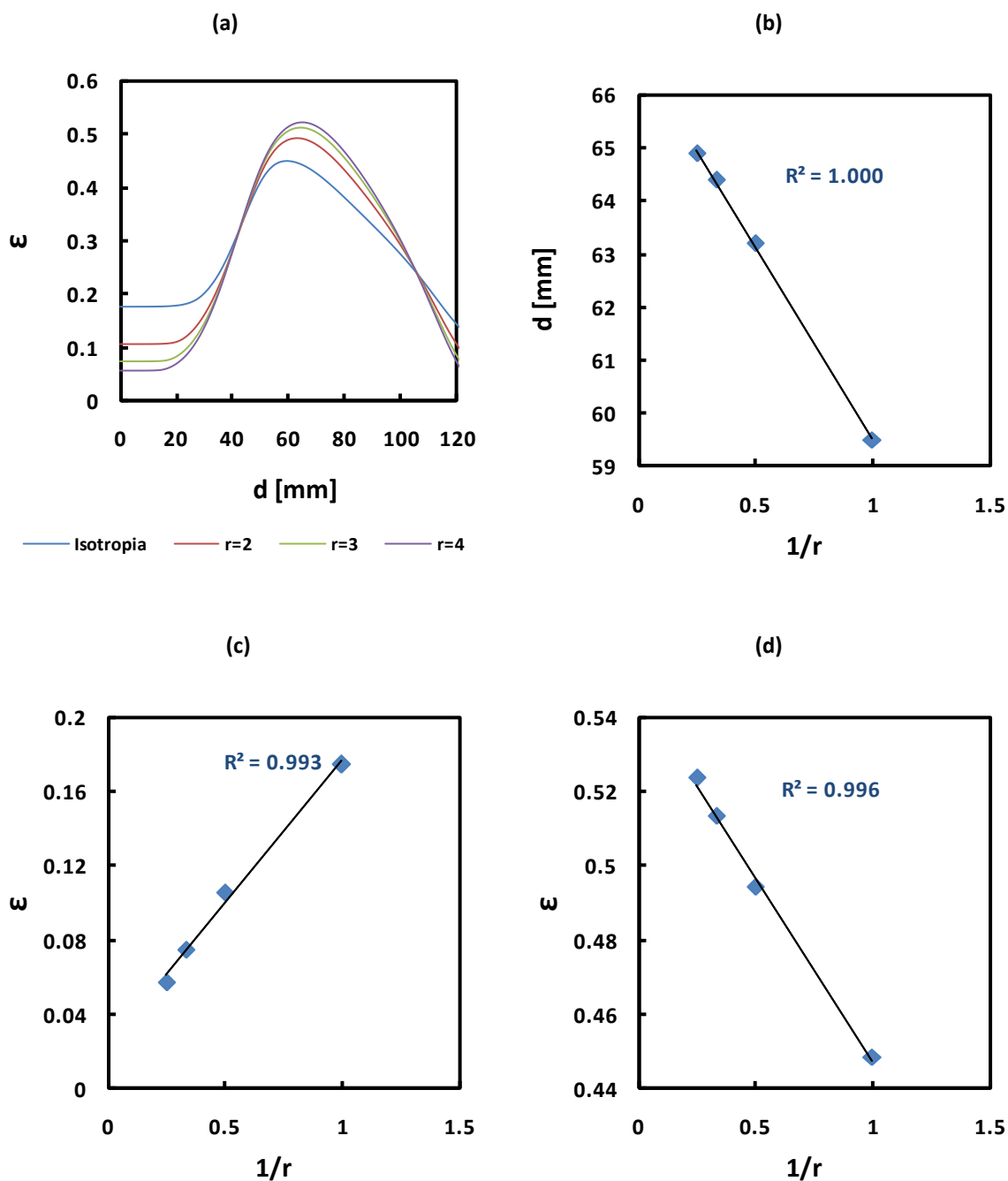


Figura 11. Caso de isotropia no plano da chapa, considerando a lei de encruamento da Tabela XI: Diagramas (a)  $\epsilon$  vs.  $d$ , (b)  $d$ , correspondente à deformação plástica equivalente máxima, vs.  $1/r$ , (c)  $\epsilon$ , no centro do provete, vs.  $1/r$  e (d)  $\epsilon$  máxima, na região da aba, vs.  $1/r$ .

Em resumo, as evoluções indicadas nas Figura 11(b), (c) e (d) são lineares para os dois materiais estudados (ver também Figura 8 e Figura 9), apesar dos valores de deformação atingidos serem bastante diferentes.

### 3.2.2. Nível da curva de encruamento

Em seguida procedeu-se a um estudo em isotropia completa, com alteração simultânea de todos os parâmetros da lei de encruamento, em relação à lei inicial. Para tal, a esta última (ver Tabela IX), aplicaram-se incrementos de 50MPa e 100MPa ao valor da tensão, conforme o indicado na Figura 12 (a lei inicial é designada por *Inicial*), e determinaram-se os correspondentes parâmetros para a lei de Swift. Isto é, no que diz respeito à lei de encruamento, a alteração mais significativa diz respeito ao valor da tensão limite de elasticidade  $\sigma_0$ , mantendo-se os valores do coeficiente de encruamento  $n$  muito próximos, como se mostra na Tabela XII, onde estão também indicados os respectivos parâmetros do critério de anisotropia.

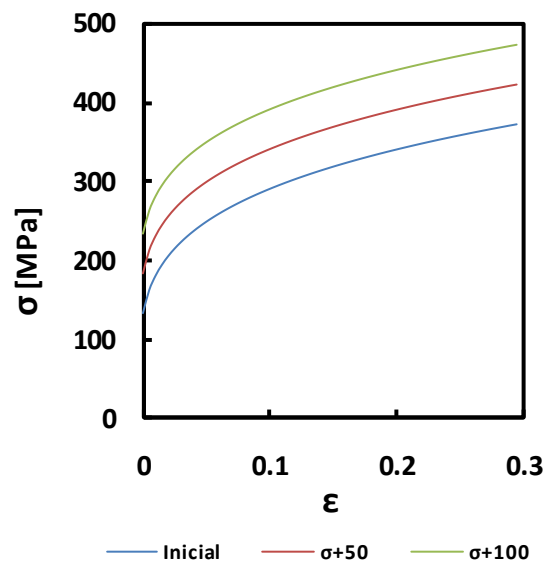


Figura 12. Curvas  $\sigma$  vs.  $\epsilon$  com diferentes leis de encruamento.

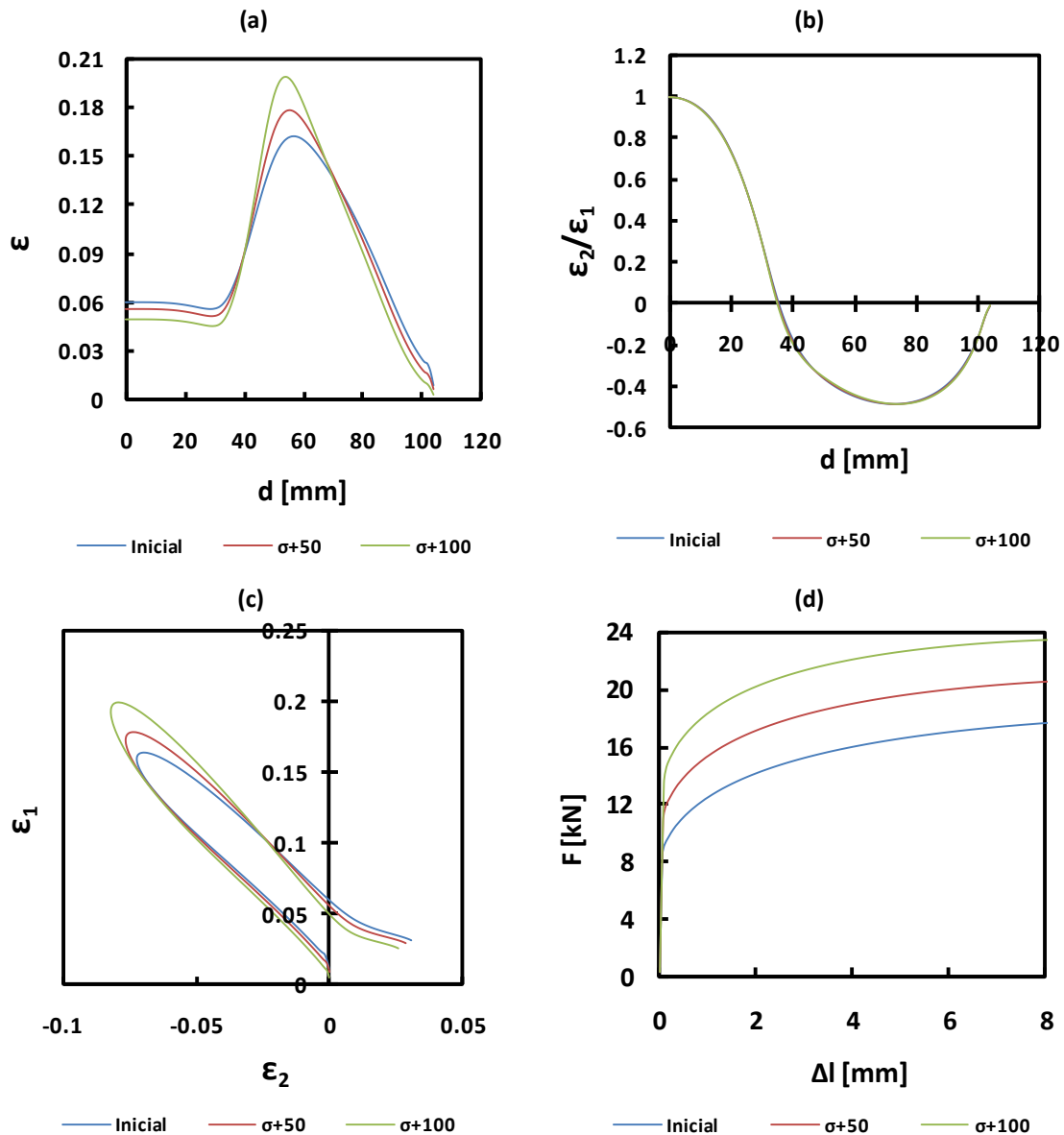
Tabela XII. Simulações em isotropia completa com diferentes leis de encruamento.

Simulação	Critério de Plasticidade: Hill'48				Lei de Encruamento: Swift		
	F	G	H	N	K [MPa]	n	$\sigma_0$ [MPa]
Inicial	0.5	0.5	0.5	1.5	494.2	0.234	134.00
$\sigma+50$					540.6	0.204	173.06
$\sigma+100$					587.9	0.181	214.02

Nas Figura 13(a) e (b) são apresentadas as distribuições da deformação plástica equivalente e da razão  $\epsilon_2/\epsilon_1$  em função da distância ao centro do provete cruciforme,



respectivamente. A Figura 13(c) apresenta as trajectórias de deformação para os pontos materiais localizados nos eixos de simetria do provete. Finalmente, a Figura 13(d) apresenta a evolução da força aplicada em função do respectivo deslocamento. Nos três casos, a carga máxima não ocorre para o mesmo valor de deslocamento da amarra. Assim, optou-se por analisar os resultados à imediatamente antes da carga máxima ( $\Delta l=8\text{mm}$ ) em tracção biaxial, observada para o caso  $\sigma+100$ .



**Figura 13. Análise comparativa em isotropia com diferentes parâmetros de encruamento: Diagramas (a)  $\epsilon$  vs.  $d$ , (b)  $\epsilon_2/\epsilon_1$  vs.  $d$ , (c)  $\epsilon_1$  vs.  $\epsilon_2$  e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$ .**

Da análise da Figura 13 destaca-se:

- O diagrama  $\epsilon$  vs.  $d$  mostra que, quanto maior for o nível das curvas  $\sigma$  vs.  $\epsilon$ , maior é a heterogeneidade de distribuição da deformação plástica equivalente. Isto é,

observa-se que, associado ao aumento nível das curvas  $\sigma$  vs.  $\varepsilon$  (para o mesmo valor de deslocamento  $\Delta l=8\text{mm}$ ), ocorre um aumento do valor máximo da deformação plástica equivalente que também se desloca para a esquerda, na região da aba, e simultaneamente, ocorre a diminuição do nível das deformações plásticas equivalentes, na região central do provete;

- Do diagrama  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  constata-se que as trajectórias de deformação plástica são sensivelmente coincidentes, em cada ponto ao longo do eixo do provete;
- Porém, a distribuição de  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$  mostra que os valores atingidos por estas deformações, em cada ponto, são diferentes o que está de acordo com os resultados do diagrama  $\varepsilon$  vs.  $d$ . No diagrama  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  as curvas cruzam-se em dois pontos, um dos quais corresponde à trajectória mais próxima da tracção (ponto de cruzamento mais à esquerda).
- O nível relativo das evoluções da força em função do deslocamento está de acordo com o das evoluções  $\sigma$  vs.  $\varepsilon$ , descritas na Figura 12.

### 3.3. Anisotropia no Plano da Chapa

#### 3.3.1. Caso geral

De modo geral, as chapas metálicas laminadas a frio apresentam anisotropia no plano da chapa. A análise directa realizada considerou também estes casos. Designamos agora por  $r_{\text{médio}}$  a média dos valores do coeficiente de anisotropia  $r(\alpha)$ , no plano da chapa. Na Tabela XIII estão indicadas simulações numéricas realizadas, todas com  $r_{\text{médio}}=3$ , mas com diferentes distribuições de  $r(\alpha)$  no plano da chapa. A lei de encruamento é a inicialmente utilizada.

Na Figura 14 estão representadas as distribuições de  $r(\alpha)$  no plano da chapa, correspondentes às simulações indicadas na Tabela XIII. A simulação (a) corresponde a uma distribuição de  $r(\alpha)$  com isotropia planar. A simulação (b) foi deduzida da (a) de modo a que os valores de  $r_0$  e  $r_{90}$ , fiquem equidistantes de  $r_{\text{médio}}$ , sendo que  $r_0 < r_{\text{médio}}$ ,  $r_{90} > r_{\text{médio}}$  e  $r_{45}=3$ . Em seguida consideraram-se duas alternativas continuando a manter  $r_{\text{médio}}=3$ : (i) fixou-se o valor de  $r_0=2$ , aumentando o valor de  $r_{45}$ , e conseqüentemente diminuindo o valor de  $r_{90}$  ((c-1) a (c-3)); (ii) fixou-se o valor de  $r_{90}=4$ , diminuindo o valor

de  $r_{45}$ , e conseqüentemente aumentando o valor de  $r_0$  ((d-1) a (d-3)). Nas situações (c-3) e (d-3) tem-se, respectivamente:  $r_0=r_{90}=2$  e  $r_{45}=4$ ;  $r_0=r_{90}=4$  e  $r_{45}=2$ . Finalmente, partindo de (c-3) e aumentando os valores de  $r_0=r_{90}$  e diminuindo o valor de  $r_{45}$  (ou o inverso a partir de (d-3)), pode progressivamente chegar-se ao ponto de partida, ou seja o caso (a), continuando a manter  $r_{m\acute{e}dio}=3$ .

**Tabela XIII. Simulações numéricas em anisotropia no plano da chapa, correspondentes a diferentes distribuições de  $r(\alpha)$ , no plano da chapa (ver Figura 14).**

<i>Simulação</i>	<b>Crítério de Plasticidade: Hill'48</b>				<b>Lei de Encruamento: Swift</b>		
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>N</i>	<i>K[MPa]</i>	<i>n</i>	<i><math>\sigma_0</math>[MPa]</i>
<b>(a)</b>	0.250	0.250	0.750	1.750	494.2	0.234	134
<b>(b)</b>	0.167	0.333	0.667	1.750			
<b>(c-1)</b>	0.180	0.333	0.667	1.873			
<b>(c-2)</b>	0.219	0.333	0.667	2.200			
<b>(c-3)</b>	0.333	0.333	0.667	3.000			
<b>(d-1)</b>	0.178	0.288	0.712	1.521			
<b>(d-2)</b>	0.184	0.265	0.735	1.394			
<b>(d-3)</b>	0.200	0.200	0.800	0.991			

É de realçar que os casos considerados nesta secção representam todos os tipos de anisotropia planar, possíveis de serem descritos pelo critério de Hill 48, que pressupõe a existência de nenhum ou apenas um valor extremo para  $r(\alpha)$  (mínimo ou máximo) no plano da chapa.

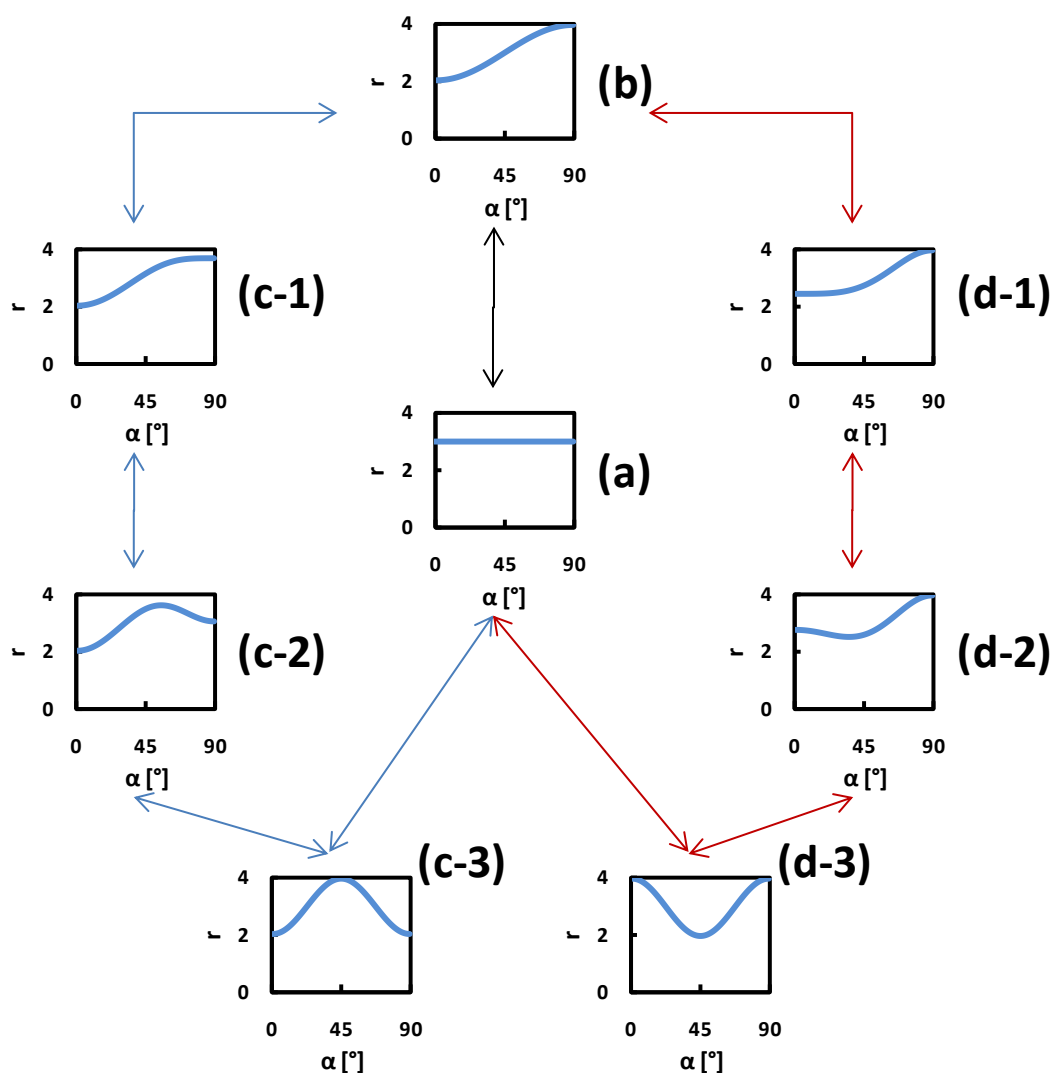


Figura 14. Tipos de distribuições possíveis de  $r(\alpha)$  no plano da chapa, com  $r_{\text{médio}}=3$ ; à esquerda fixou-se  $r_0=2$  e à direita  $r_{90}=4$ .

Partindo da distribuição isotrópica planar (caso (a)) até à distribuição  $r$  vs.  $\alpha$  com  $r_0=r_{90}$  e  $r_{45}$  mínimo, isto é, sucessivamente os casos (b) e (c-1) a (c-3), ou máximo, sucessivamente (b) e (c-1) a (c-3), observam-se dois tipos distintos de evolução.

Para descrever a evolução correspondente aos casos desde (a) até (c-3), nas Figura 15(a) e (b) apresenta-se a distribuição da deformação plástica equivalente em função da distância ao centro do provete cruciforme ao longo dos dois eixos de simetria do provete  $0x$  e  $0y$ , respectivamente. As Figura 15(c) e (d) apresentam a razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  segundo os mesmos eixos,  $0x$  e  $0y$ . A Figura 16 diz respeito aos mesmos casos da Figura 15, mas as evoluções analisadas são as trajetórias de deformação para os pontos materiais

localizados nos eixos  $0x$  e  $0y$  (Figura 16(a) e (b), respectivamente) e  $F$  vs.  $\Delta l$  (Figura 16(c) e (d), respectivamente). Ou seja, estas figuras comparam os resultados obtidos para as simulações (a), (b), (c-1), (c-2) e (c-3), para um  $r_{m\u00e9dio}=3$ . O estudo foi realizado imediatamente antes da carga m\u00e1xima em trac\u00e7\u00e3o biaxial no caso em isotropia planar, correspondente a um deslocamento  $\Delta l$  de 12mm.

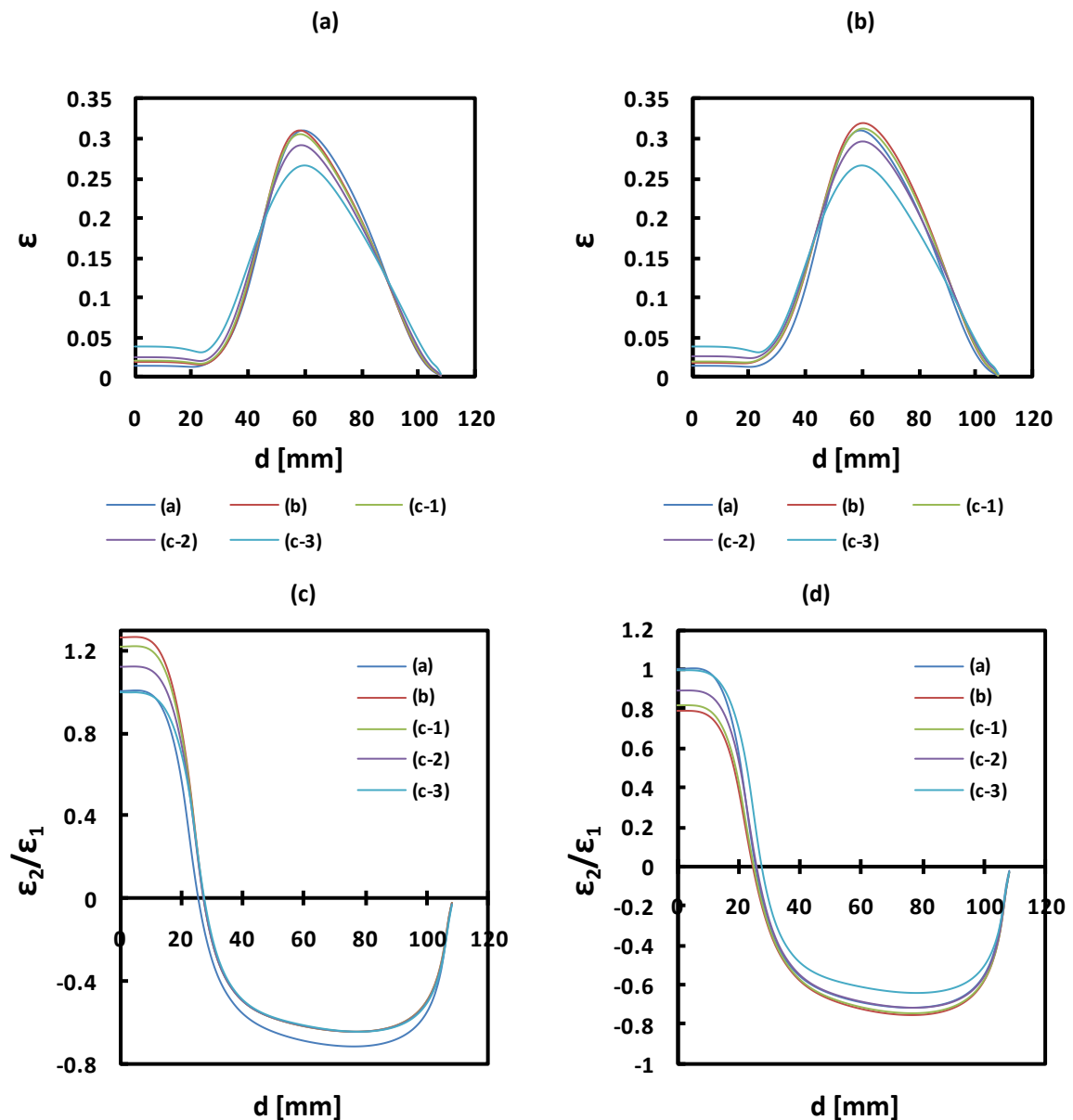


Figura 15. An\u00e1lise da evolu\u00e7\u00e3o do caso (a) at\u00e9 ao (c-3): (a) e (b)  $\epsilon$  vs.  $d$ , segundo  $0x$  e  $0y$ , respectivamente; (c) e (d)  $\epsilon_2/\epsilon_1$  vs.  $d$ , segundo  $0x$  e  $0y$ , respectivamente.

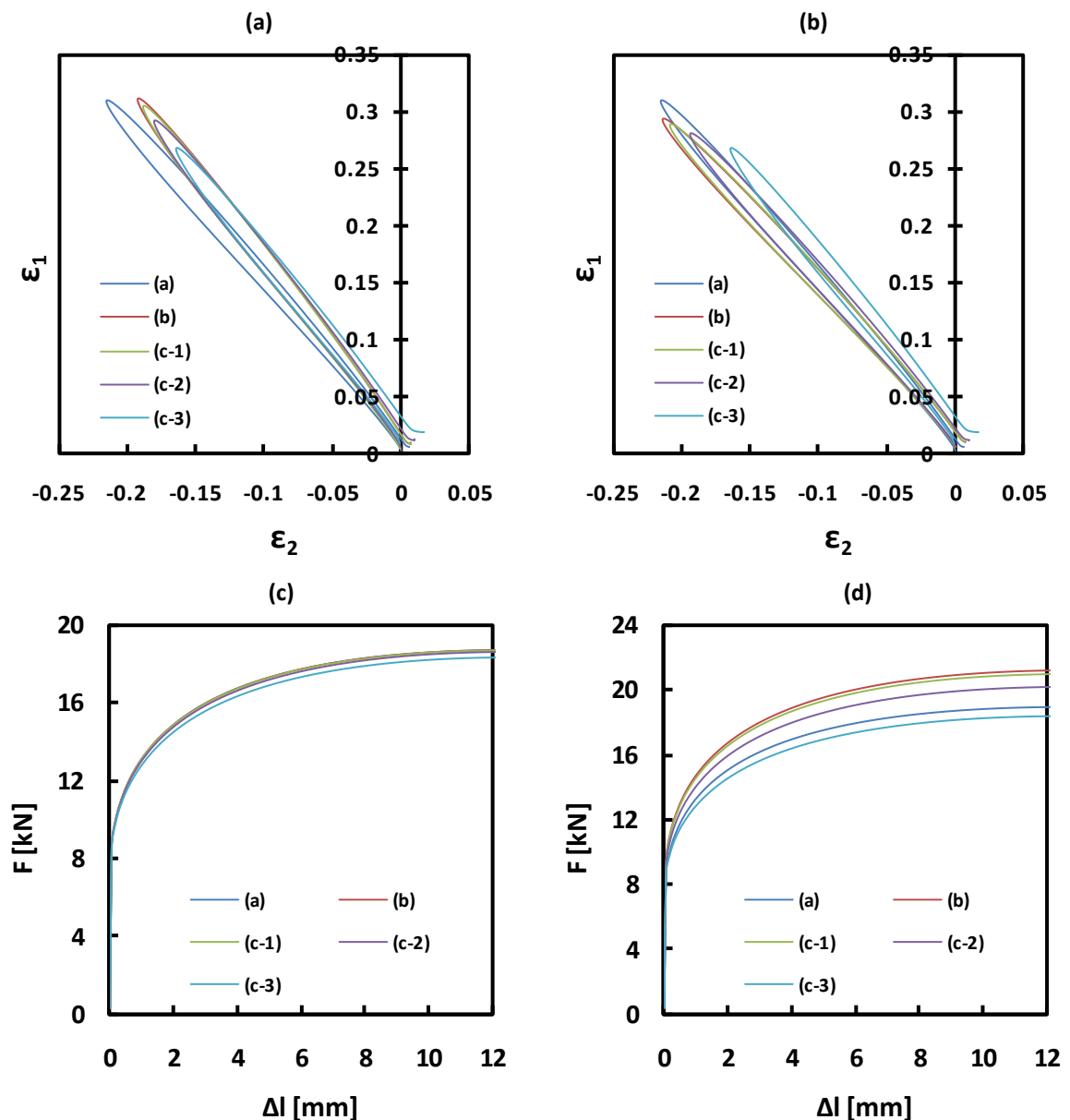


Figura 16. Análise da evolução de (a) até (c-3): (a) e (b)  $\epsilon_1$  vs.  $\epsilon_2$  em  $\theta_x$  e  $\theta_y$ ; (c) e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$ , em  $\theta_x$  e  $\theta_y$ .

A análise destas figuras permite observar o seguinte:

- Nos diagramas  $\epsilon$  vs.  $d$ , a deformação plástica equivalente apresenta diferenças na região central do provete, entre aproximadamente  $d=0mm$  e  $d=20mm$ , cujos pontos estão sujeitos a trajectórias de deformação biaxial. Na região da aba do provete (onde a razão  $\epsilon_2/\epsilon_1$  é menor do que zero), as diferenças nos níveis de deformação plástica equivalente atingidos são invertidos em relação à região central do provete. A distribuição da

deformação plástica equivalente máxima ocorre para valores idênticos de  $d$ , em todos os casos. As curvas dos casos (a) e (b) são as que apresentam o valor de  $\varepsilon$  máximo mais elevado, na direcção  $0x$ . Na direcção  $0y$ , o caso (b) é a que apresenta o valor de  $\varepsilon$  máximo mais elevado. Por outro lado, a curva (c-3) é a que apresenta o valor de  $\varepsilon$  máximo mais pequeno, nas direcções  $0x$  e  $0y$ .

- Nos diagramas  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , a razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  apresenta diferenças na região central e nas abas do provete cruciforme. As diferenças são mais acentuadas segundo  $0y$  (o que está certamente relacionado com a maior variação de  $r_{90}$  do que  $r_0$ ), desde o caso (a) até (c-3). O caso (b) apresenta o valor mínimo mais pequeno de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ , segundo  $0y$ , porque o valor de  $r_{90}$  utilizado é o maior dos casos considerados. As distribuições obtidas ao longo do eixo  $0x$  estão sensivelmente sobrepostas para os casos (b) até (c-3), apresentando sempre valores inferiores ao caso (a). De facto, o valor de  $r_0$  dos casos (b) até (c-3) é inferior ao valor de  $r_0$  do caso (a). Estas observações são consistentes com o estudo em isotropia planar, onde se observou que um menor valor de  $r$  indica um valor mínimo mais elevado de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ .
- Nos diagramas  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$ , a grandeza da deformação plástica biaxial é muito reduzida, em  $0x$  e em  $0y$ . As trajectórias de deformação, para os pontos materiais ao longo de  $0x$ , são sensivelmente as mesmas, excepto na curva (a). Para pontos materiais ao longo de  $0y$  as trajectórias de deformação são mais diferenciadas do que segundo  $0x$ ;
- No diagrama  $F$  vs.  $\Delta l$ , observa-se que as evoluções da força com o deslocamento são mais próximas em  $0x$  do que em  $0y$ . De facto, todos os casos considerados cumprem a condição  $G + H = 1$ , que garante que a tensão limite de elasticidade da chapa para  $\alpha=0^\circ$  é a mesma para todos os casos. De acordo com o critério de Hill'48 (ver Equação(5)), a tensão limite de elasticidade para  $\alpha=90^\circ$  varia linearmente com  $[F + H]^{-1/2}$ . Assim, as diferenças são mais acentuadas segundo  $0y$ , para os casos (b), (d-1) e (d-2), porque a tensão limite de elasticidade,  $\sigma_{90}$  é maior do que  $\sigma_0$ , como se mostra na Tabela XIV. Segundo  $0y$ , a força máxima é prevista para o caso (b), que apresenta o valor máximo para  $\sigma_{90}$ . O caso (c-3) apresenta um valor

de  $\sigma_{90}$  igual ao caso (a). O facto de a força prevista para o caso (c-3) ser inferior à do caso (a), em  $0x$  e em  $0y$ , está certamente relacionado com facto da distribuição das tensões  $\sigma(\alpha)$  no plano da chapa apresentar o menor valor médio de todos os casos considerados (cálculos efectuados com recurso à Equação (5)).

**Tabela XIV. Parâmetros para o cálculo de  $\sigma_{90}$ , correspondente a diferentes distribuições de  $r(\alpha)$ , no plano da chapa (ver Figura 14).**

<i>Simulação</i>	$\sigma_{90}/\sigma_0=[F + H]^{-1/2}$
(a)	1.00
(b)	1.10
(c-1)	1.09
(c-2)	1.06
(c-3)	1.00
(d-1)	1.06
(d-2)	1.04
(d-3)	1.00

Por fim, para descrever a evolução correspondente aos casos desde (a) até (d-3), apresenta-se, nas Figura 17(a) e (b), a distribuição da deformação plástica equivalente em função da distância ao centro do provete cruciforme ao longo dos dois eixos de simetria do provete  $0x$  e  $0y$ , respectivamente. As Figura 17(c) e (d) apresentam a razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  segundo os mesmos eixos,  $0x$  e  $0y$ . A Figura 18 diz respeito aos mesmos casos da Figura 17, mas são apresentadas as trajectórias de deformação para os pontos materiais, localizados nos eixos  $0x$  e  $0y$  (Figura 18(a) e (b), respectivamente) e  $F$  vs.  $\Delta l$  (Figura 18(c) e (d), respectivamente). Ou seja, estas figuras comparam os resultados obtidos para as simulações (a), (b), (d-1), (d-2) e (d-3), para um  $r_{médio}=3$ . O estudo foi realizado imediatamente antes da carga máxima em tracção biaxial do caso em isotropia planar, correspondente a um deslocamento  $\Delta l$  de 12mm.



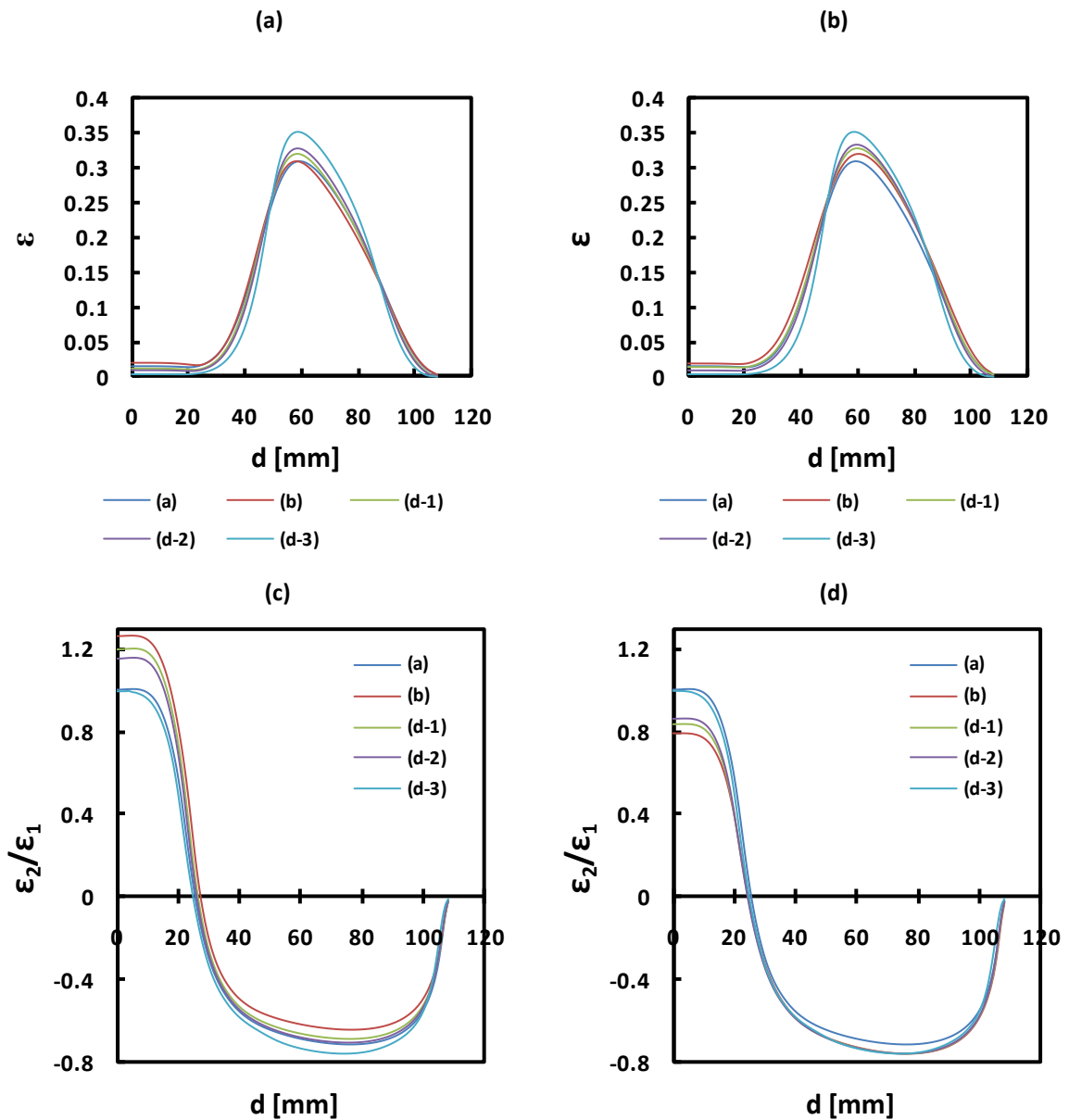


Figura 17. Análise da evolução do caso (a) até ao (d-3): (a) e (b)  $\varepsilon$  vs.  $d$ , segundo  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , respectivamente; (c) e (d)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , segundo  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , respectivamente.

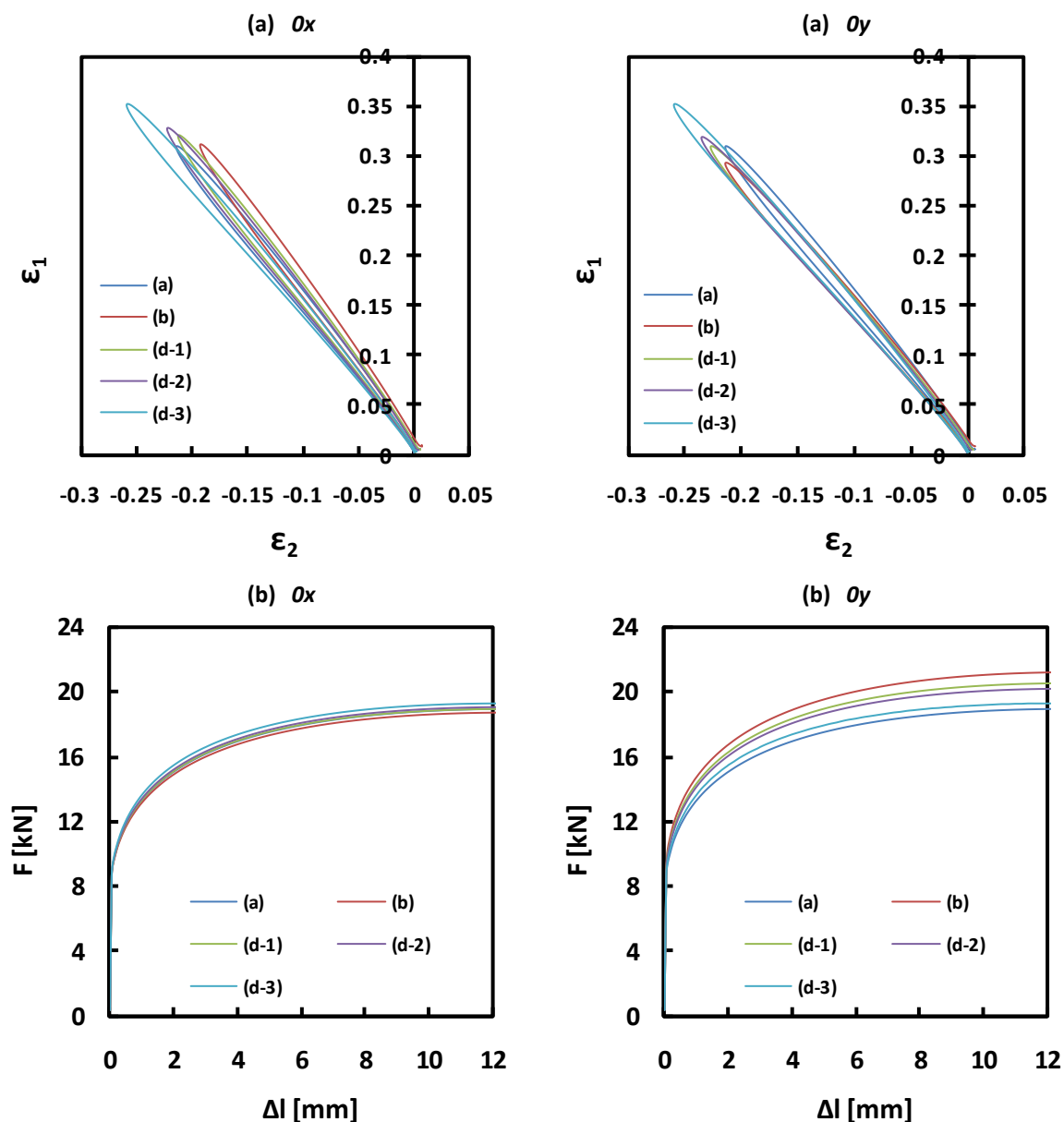


Figura 18. Análise da evolução de (a) até (d-3): (a) e (b)  $\epsilon_1$  vs.  $\epsilon_2$  em  $\theta_x$  e  $\theta_y$ ; (c) e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$ , em  $\theta_x$  e  $\theta_y$ .

A análise destas figuras permite observar o seguinte:

- Nos diagramas  $\epsilon$  vs.  $d$ , a deformação plástica equivalente apresenta diferenças na região central do provete, entre aproximadamente  $d=0\text{mm}$  e  $d=20\text{mm}$ , cujos pontos estão sujeitos a trajectórias de deformação biaxial. Na região da aba do provete (onde que a razão  $\epsilon_2/\epsilon_1$  é menor que zero), as diferenças nos níveis de deformação plástica equivalente atingidos são invertidos em relação à região central do provete. A distribuição da deformação plástica equivalente máxima ocorre a

valores idênticos de  $d$ , para todos os casos. A curva (a) é a que apresenta o valor de  $\varepsilon$  máximo mais pequeno (próximo de zero), no centro do provete, e maior, na região da aba, em ambas as direcções,  $Ox$  e  $Oy$ . Simultaneamente, observa-se alargamento da base do pico de deformação equivalente quando se evolui de (a) para (d-3).

- Nos diagramas  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , a razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  apresenta diferenças na região central e nas abas do provete cruciforme. As diferenças são mais acentuadas segundo  $Ox$ , o que está certamente relacionado com a maior variação de  $r_0$  do que  $r_{90}$ , desde o caso (a) até (d-3) (ver Figura 17(c) e (d)). O caso (b) apresenta o maior valor mínimo de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ , segundo  $Ox$ , porque o valor de  $r_0$  utilizado é o menor dos casos considerados. As distribuições obtidas ao longo do eixo  $Oy$  estão sensivelmente sobrepostas para os casos (b) até (d-3), na região da aba, apresentando sempre valores inferiores ao caso (a). De facto, o valor de  $r_{90}$  dos casos (b) até (d-3) é superior ao valor de  $r_{90}$  do caso (a). Estas observações são consistentes com o estudo em isotropia planar, onde se observou que um maior valor de  $r$  indica um valor mínimo mais pequeno de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ .
- Nos diagramas  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$ , a grandeza da deformação plástica biaxial (região central do provete) é muito reduzida, em  $Ox$  e em  $Oy$ . As trajectórias de deformação, para os pontos materiais ao longo de  $Oy$ , são sensivelmente as mesmas. Para os pontos materiais ao longo de  $Ox$  as trajectórias de deformação são mais diferenciadas;
- No diagrama  $F$  vs.  $\Delta l$ , observa-se que as evoluções da força com o deslocamento são mais próximas em  $Ox$  do que em  $Oy$ . A força máxima prevista em  $Oy$  diminui desde o caso (b) até (a), o que está certamente relacionado com a diminuição do factor  $[F + H]^{-1/2}$ , que determina o valor da tensão  $\sigma_{90}$  (ver Tabela XIV). O caso (d-3) apresenta um valor de  $[F + H]^{-1/2}$  igual a 1, tal como o caso (a), mas o valor médio de  $\sigma(\alpha)$  é superior ao valor médio do caso (a).

Analisando os resultados dos casos de anisotropia indicados na Figura 14, foi possível identificar uma coordenada  $d$  (na região da aba do provete), onde ocorrem os

valores máximos de deformação plástica equivalente, quer em  $0x$  quer em  $0y$  (Figuras 15(a) e (b) e Figuras 16(a) e (b)), que é quase independente do caso considerado. Mais exactamente, o valor médio de  $d$ , segundo  $0x$  e  $0y$  quase não depende da distribuição de  $r$  vs.  $\alpha$  no plano da chapa, para um mesmo valor de  $r_{médio}$

Esta constatação para  $r_{médio}=3$ , foi igualmente testada para mais alguns casos de anisotropia plano da chapa com  $r_{médio}=2$ , apresentados na Figura 19.

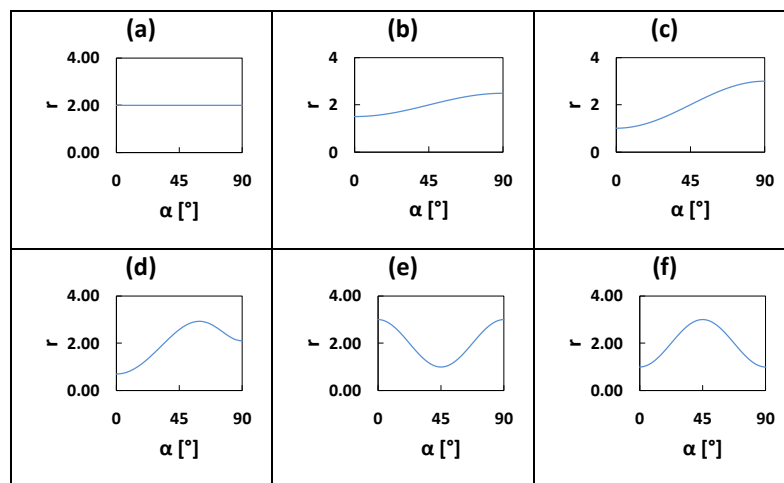


Figura 19. Algumas distribuições possíveis de  $r$  no plano do provete, com  $r_{médio}=2$ .

Na Figura 20 apresentam-se os resultados obtidos para as distribuições de deformação plástica equivalente em função da distância ao centro do provete cruciforme, para os casos descritos na Figura 19. Os resultados foram analisados para um valor  $\Delta l=12\text{mm}$ . Também nestes casos ( $r_{médio}=2$ ) a posição média  $d$  para a qual ocorre a deformação plástica equivalente máxima é idêntica, em  $0x$  e em  $0y$ .

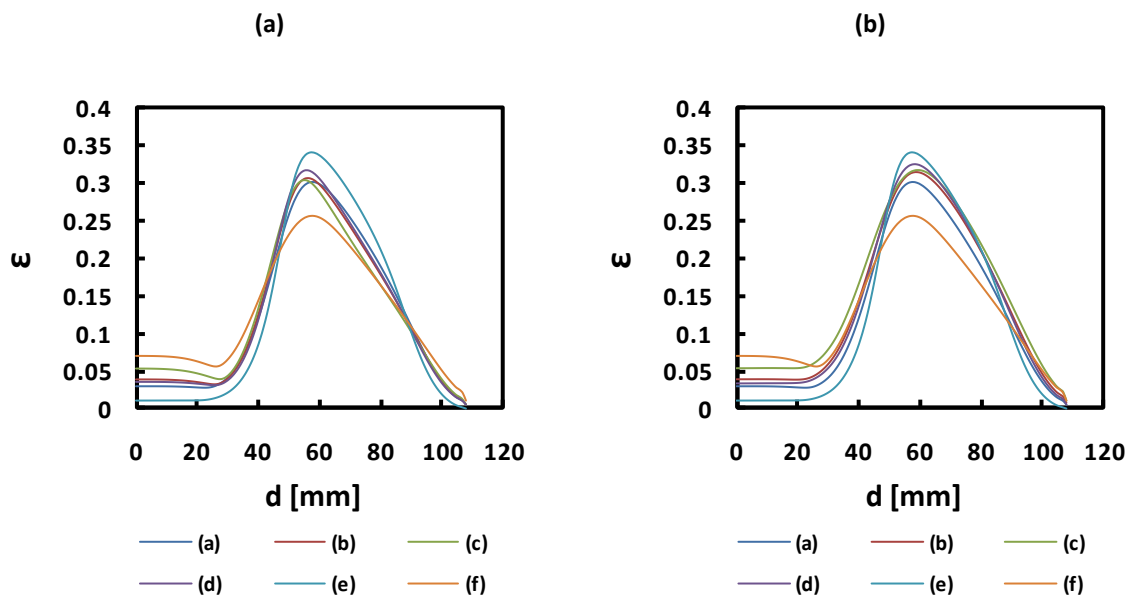


Figura 20 – Diagrama  $\varepsilon$  vs.  $d$  (a) em  $\theta_x$  (b) em  $\theta_y$ . Confirma-se o intervalo  $d$  reduzido em que ocorre a deformação máxima, nas distribuições  $r$  vs.  $\alpha$  para  $r_{\text{médio}}=2$ .

Na Tabela XV apresentam-se os valores de  $d$  para o qual ocorre a deformação plástica equivalente máxima, segundo  $\theta_x$  e  $\theta_y$  e o respectivo valor médio  $\bar{d}$ , para os casos em que  $r_{\text{médio}}=3$  e  $r_{\text{médio}}=2$ . Para cada caso, são também mostradas as diferenças percentuais de  $\bar{d}$ , em relação ao respectivo caso de isotropia planar. Os resultados apresentados na Tabela XV mostram que as diferenças relativas são sempre inferiores a 2%.

Na análise em isotropia no plano da chapa (secção 3.1.2) constatou-se a existência de uma relação linear entre a distância correspondente à deformação plástica equivalente na região da aba e o valor de  $1/r$  (ver Figura 9 e Figura 11(b)). Uma vez que, para diferentes distribuições de  $r$  vs.  $\alpha$ , com igual valor de  $r_{\text{médio}}$ , o valor da deformação plástica equivalente máxima ocorre para pontos materiais, em  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , com posições  $\bar{d}$  idênticas, então também nos casos de anisotropia, a referida relação linear deve ser sensivelmente observada entre  $\bar{d}$  e  $r_{\text{médio}}$ .

**Tabela XV. Distâncias  $d$  correspondentes a diferentes distribuições  $r(\alpha)$  no plano da chapa. Diferença relativa ao caso em isotropia no plano da chapa.**

	Simulação	$d_{0x}$	$d_{0y}$	$\bar{d}$	Diferença relativa ao caso (a) (%)
$r_{\text{médio}}=2$	(a)	57.72	57.72	57.72	-
	(b)	56.30	58.85	57.58	-0.25
	(c)	55.30	59.45	57.38	-0.60
	(d)	55.90	58.40	57.15	-0.99
	(e)	57.60	57.60	57.60	-0.21
	(f)	57.70	57.70	57.70	-0.04
$r_{\text{médio}}=3$	(a)	59.40	59.40	59.40	-
	(b)	58.83	60.09	59.51	0.11
	(c-1)	58.88	60.14	59.51	0.19
	(c-2)	59.00	60.26	59.63	0.39
	(c-3)	60.53	60.53	60.53	1.91
	(d-1)	58.60	59.90	59.25	-0.25
	(d-2)	58.70	59.80	59.25	-0.25
	(d-3)	58.90	58.90	58.90	-0.84

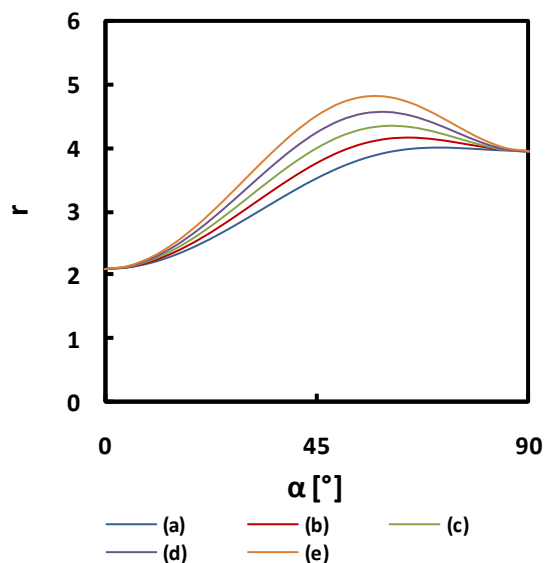
### 3.3.2. Estudo de $r_{45}$

Nesta secção analisa-se o efeito da variação de  $r_{45}$  na distribuição da deformação plástica equivalente,  $\varepsilon$  vs.  $d$ , e na evolução da força,  $F$  vs.  $\Delta l$ , para cada um dos eixos do provete cruciforme, num caso geral de anisotropia no plano da chapa. Na Tabela XVI estão indicadas as simulações realizadas neste estudo, com os respectivos valores de  $r_{45}$  e dos parâmetros do critério de anisotropia. A lei de encruamento utilizada é igual à indicada na Tabela IX (caso inicial).

**Tabela XVI. Simulações numéricas em anisotropia no plano da chapa, para o estudo da influência de  $r_{45}$  nos resultados obtidos.**

Simulação	$r_{45}$	Critério de Plasticidade: Hill'48				Lei de Encruamento: Swift		
		$F$	$G$	$H$	$N$	$K[MPa]$	$n$	$\sigma_0[MPa]$
(a)	3.51				1.989			
(b)	3.75				2.108			
(c)	4.00	0.171	0.325	0.675	2.232	492.1	0.234	134
(d)	4.25				2.356			
(e)	4.50				2.480			

Na Figura 21 são apresentadas as distribuições de  $r(\alpha)$  no plano da chapa para os cinco casos agora considerados (de (a) até (e)). Estes casos caracterizam-se por apresentarem o mesmo valor de  $r_0$  e  $r_{90}$ , com valores crescentes de  $r_{45}$ , desde 3.51 (caso (a)) até 4.50 (caso (e)).



**Figura 21. Diagrama  $r$  vs.  $\alpha$ .**

Os resultados das simulações foram analisados para valores de força imediatamente antes da carga máxima, correspondente a  $\Delta l=12\text{mm}$ . Na Figura 22(a) e (c) mostram-se as distribuições da deformação plástica em função da distância ao centro do provete, em  $0x$  e  $0y$ , respectivamente. A Figura 22(b) e (d) apresentam um detalhe desta distribuição na zona da aba sujeito a tracção, referentes à Figura 22(a) e (c),

respectivamente. Finalmente, na Figura 23(a) e (b) mostra-se a evolução da força em função do deslocamento, segundo  $0x$  e  $0y$ , respectivamente.

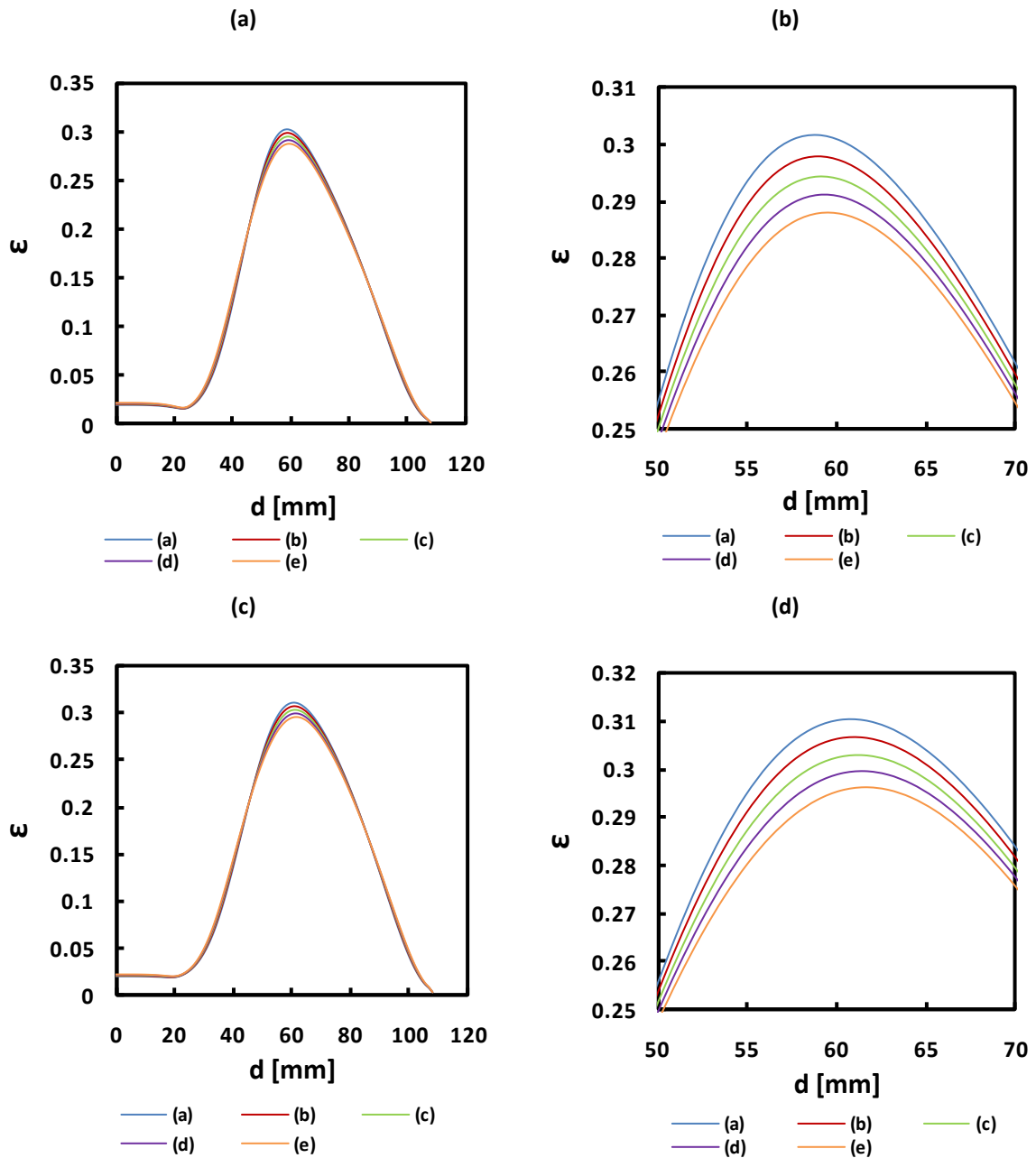


Figura 22. Estudo da influência de  $r_{45}$ . Diagramas (a) e (c):  $\varepsilon$  vs.  $d$  em  $0x$  e  $0y$ , respectivamente; (b) e (d): detalhe dos picos dos diagramas (a) e (c), respectivamente.



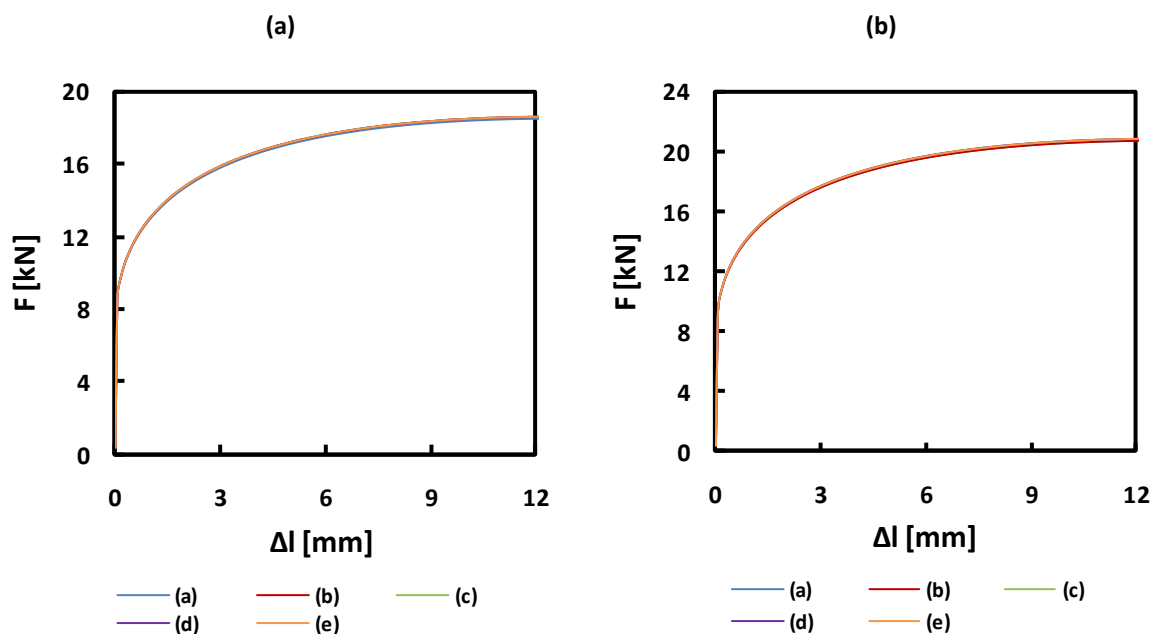


Figura 23. Estudo da influência de  $r_{45}$ . Diagramas (a) e (b):  $F$  vs.  $\Delta l$  em  $0x$  e  $0y$ , respectivamente.

No essencial, a distribuição da deformação plástica equivalente ao longo dos eixos de simetria é muito semelhante para todos os casos. De facto, na região central do provete, sujeita a trajectória de deformação biaxial, não se notam diferenças significativas nos valores de  $\varepsilon$ . Porém, na aba, junto ao pico, as distribuições são influenciadas pelo valor de  $r_{45}$  (ver detalhes na Figura 22(b) e (d)). O aumento de  $r_{45}$  conduz a uma diminuição da deformação equivalente máxima prevista e ao deslocamento para a zona da amarra do ponto para o qual ocorre o máximo.

Os diagramas  $F$  vs.  $\Delta l$  não são sensíveis à variação do valor de  $r_{45}$ , o que está de acordo com a conclusão atrás retirada (Secção 3.3) de que estes diagramas são, no essencial, dependentes de  $\sigma_0$  e  $\sigma_{90}$ , que não variam para os casos da Tabela XVI ( $\sigma_0$  e  $\sigma_{90}$  são iguais para todos os casos porque as somas  $(G+H)=1$  e  $(F+H)=0.846$  também o são).

### 3.3.3. Estudo de $r_0$ e $r_{90}$

Os resultados das secções anteriores mostraram a existência de pontos, nas regiões das abas do provete cruciforme, para os quais a trajectória de deformação se aproxima da tracção pura, nomeadamente os pontos das abas do provete para os quais a razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  atinge o valor mínimo. De facto, as abas do provete têm uma configuração

análoga à de um provete de tracção embora a secção transversal varie ligeiramente, desde a extremidade da aba até à fronteira com a região central. Assim, fomos conduzidos a analisar as trajectórias de deformação nos pontos de ambas as abas dos provetes, segundo  $Ox$  e  $Oy$ , para os quais o valor da razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  apresenta o valor mínimo e a relacionar estas trajectórias com as que são obtidas num ensaio de tracção pura do mesmo material, segundo  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente.

Para facilitar esta exposição vamos designar por  $r^*$  uma grandeza determinada a partir dos resultados do ensaio cruciforme nos pontos onde a razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  atinge o valor mínimo e definida de acordo com a equação (7), sob a forma:

$$r^* = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} / \left[ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 1 \right] \quad (7)$$

Neste contexto, ao comparar os valores de  $r^*$  obtidos para os pontos situados nos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , designados por  $r^*_0$  e  $r^*_{90}$  com  $r_0$ , e  $r_{90}$ , respectivamente, está indirectamente a comparar-se as trajectórias nesses pontos com as obtidas num ensaio de tracção pura do mesmo material, segundo  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente. Para tal, começou por analisar-se os casos de isotropia no plano da chapa para  $r=1, 2, 3$  e  $4$ , estudados na Secção 3.1.2. Na Figura 24, são apresentadas as diferenças relativas  $[(r - r^*)/r^*]$  em função de  $r^*$ , que obedecem aproximadamente à relação logarítmica, indicada nesta figura.

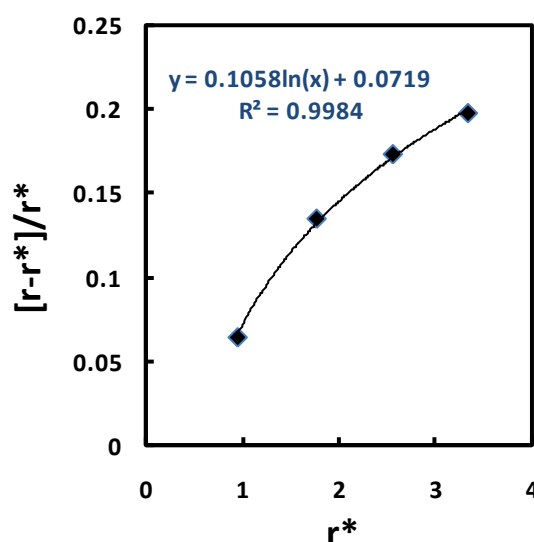


Figura 24. Diferenças relativas  $[(r - r^*)/r^*]$  vs.  $r^*$ , para o caso de isotropia no plano da chapa.

Para testar se, no caso geral de anisotropia planar, os valores de  $r^*_0$  e  $r_0$ , por um lado, e  $r^*_{90}$  e  $r_{90}$ , por outro, também obedecem à relação indicada na Figura 24, analisaram-se os casos com  $r_{médio}=3$ , estudados na Secção 3.3.1 (descritos na Tabela XII e Figura 14). Os valores de  $r^*_0$  e  $r^*_{90}$  foram obtidos a partir dos diagramas  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , apresentados nas Figuras 15(c) e (d) e Figuras 17(c) e (d). Em seguida, utilizou-se a equação da linha de tendência da Figura 24 para determinar  $r'_0$  e  $r'_{90}$ , que representam os valores  $r_0$ , e  $r_{90}$ , estimados a partir dos valores de  $r^*_0$  e  $r^*_{90}$ , respectivamente.

Na Tabela XVII são apresentados os valores de  $r_0$  e  $r_{90}$  e de  $r^*_0$  e  $r^*_{90}$ , referentes aos casos em estudo (ver Figura 14); são também indicados os valores de  $r'_0$  e  $r'_{90}$ , estimados a partir de  $r^*_0$  e  $r^*_{90}$ , utilizando a equação de regressão logarítmica da Figura 24. As diferenças relativas entre os valores de  $r^*_0$  e  $r_0$ , por um lado, e os valores de  $r^*_{90}$  e  $r_{90}$ , por outro lado, são também indicados. A última coluna mostra as diferenças relativas entre os valores de  $r'_0$  e  $r_0$ , por um lado, e os valores de  $r'_{90}$  e  $r_{90}$ , por outro lado. Estas diferenças são muito atenuadas, considerando como referência as diferenças relativas entre os valores de  $r^*_0$  e  $r_0$ , por um lado, e os valores de  $r^*_{90}$  e  $r_{90}$ .

**Tabela XVII. Valores das diferenças relativas para os diferentes casos indicados na Figura 14 (anisotropia planar com  $r_{médio}=3$ )**

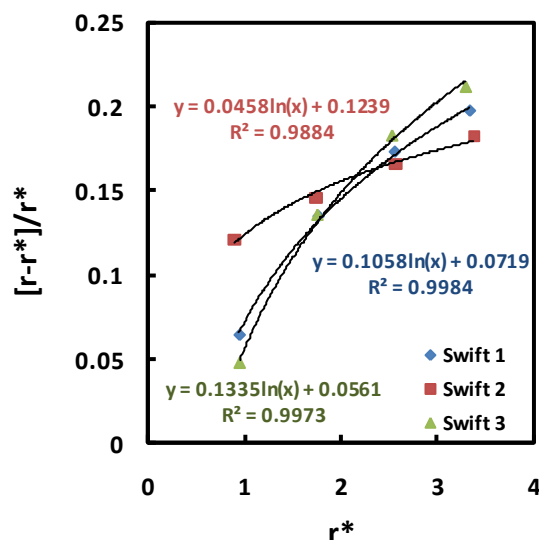
Caso	Anisotropia do material $r$		$r^*$ (equação (7))		Diferença relativa (%)		Anisotropia estimada $r'$		Diferença relativa (%)	
	$r_0$	$r_{90}$	$r^*_0$	$r^*_{90}$	$\frac{r_0 - r^*_0}{r^*_0}$	$\frac{r_{90} - r^*_{90}}{r^*_{90}}$	$r'_0$	$r'_{90}$	$\frac{r_0 - r'_0}{r_0}$	$\frac{r_{90} - r'_{90}}{r_{90}}$
<b>b</b>	2.000	4.000	1.830	3.132	9	28	2.078	3.736	4	-7
<b>c-1</b>	2.000	3.698	1.829	2.960	9	25	2.078	3.513	4	-5
<b>c-2</b>	2.000	3.040	1.819	2.525	10	20	2.065	2.954	3	-3
<b>c-3</b>	2.000	2.000	1.812	1.812	10	10	2.057	2.057	3	3
<b>d-1</b>	2.473	4.000	2.190	3.164	13	26	2.529	3.777	2	-6
<b>d-2</b>	2.780	4.000	2.411	3.175	15	26	2.809	3.792	1	-5
<b>d-3</b>	4.000	4.000	3.196	3.196	25	25	3.819	3.819	-2	-2
			<b>Média</b>					<b>Média</b>		
			$\left  \frac{r - r^*}{r^*} \right $		<b>13</b>	<b>23</b>		$\left  \frac{r - r'}{r'} \right $	<b>3</b>	<b>5</b>

Para avaliar se a metodologia acima referida, para estimar os valores de  $r$  a partir dos valores de  $r^*$ , é válida independentemente da lei de encruamento do material, realizou-se outro estudo em isotropia planar, mas considerando diferentes parâmetros de encruamento para a lei de Swift. Para tal foram utilizados resultados apresentados nas Secções 3.2.1 e 3.2.2 (Figura 11 e Figura 13). Na Tabela XVIII estão indicados os parâmetros das correspondentes leis de encruamento.

**Tabela XVIII. Parâmetros das leis de encruamento.**

Secção	Caso	$K$ (MPa)	$n$	$\sigma_0$ (MPa)
3.3.2	Swift 1	494.2	0.234	134
3.3.1	Swift 2	1822.7	0.468	134
3.3.2	Swift 3	587.9	0.181	214

Na Figura 25, são apresentadas as diferenças relativas  $[(r - r^*)/r^*]$  em função de  $r^*$ , para os casos de isotropia plana da Tabela XVIII, bem como as respectivas regressões logarítmicas, que dependem da lei de encruamento do material. Estes resultados indicam que o coeficiente de encruamento, influencia mais a relação  $[(r - r^*)/r^*]$  em função de  $r^*$ , do que a tensão limite de elasticidade.



**Figura 25. Diferenças relativas  $[(r - r^*)/r^*]$  vs.  $r^*$ , para os casos de isotropia plana, da Tabela XVIII.**

### 3.4. Considerações Finais

A análise directa acima descrita permitiu analisar e quantificar algumas tendências, no que diz respeito à influência dos parâmetros dos modelos constitutivos nos resultados das variáveis seleccionadas para análise. Em seguida, destacam-se algumas tendências relevantes, nomeadamente as que de modo mais significativo contribuíram para o desenvolvimento do algoritmo de análise inversa, para a identificação dos parâmetros dos modelos constitutivos, que será descrito e testado no capítulo seguinte.

No estudo realizado em isotropia no plano da chapa identificaram-se relações lineares entre a deformação plástica equivalente máxima, em trajectória de tracção biaxial, e o valor de  $1/r$ . Para além disso, observou-se uma relação linear também entre a distância  $d$ , para a qual ocorre deformação plástica equivalente máxima, e  $1/r$ . A existência de linearidade parece ser independente dos parâmetros da lei de encruamento considerada. A análise directa realizada em anisotropia no plano da chapa permite constatar que, nas distribuições  $\varepsilon$  vs.  $d$ , o valor da deformação plástica equivalente máxima ocorre para pontos materiais com posições  $d$  idênticas, quando o valor de  $r_{\text{médio}}$  não se altera, qualquer que seja a distribuição de  $r(\alpha)$  no plano da chapa. Este facto, pode possibilitar a determinação de um valor aproximado de  $r_{\text{médio}}$ , para um material em que a distribuição  $r$  vs.  $\alpha$  é qualquer e desconhecida.

O facto do provete cruciforme, solicitado em tracção biaxial, apresentar pontos com trajectórias próximas da tracção uniaxial permite igualmente estimar os coeficientes de anisotropia  $r_0$  e  $r_{90}$ , com base na razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  obtida nessa trajectória. A circunstância da solicitação ser biaxial simétrica permite também a utilização da evolução da  $F$  vs.  $\Delta\bar{\varepsilon}$  em  $0x$  e  $0y$ , para identificar os parâmetros da lei de encruamento.

## 4. ANÁLISE INVERSA

### 4.1. Algoritmo de análise inversa

A análise directa realizada no capítulo anterior, referente a resultados do ensaio cruciforme, permitiu desenvolver um algoritmo de análise inversa, para a determinação dos parâmetros dos modelos constitutivos de um material em estudo. O algoritmo desenvolvido assumiu que o comportamento plástico do material é descrito pelo critério de Hill'48 e pela lei de encruamento isotrópico de Swift.

Uma vez que a metodologia de análise inversa proposta é baseada na realização de simulações numéricas do ensaio, assumem-se como conhecidos o módulo de Young do material e o coeficiente de Poisson do material (que assumem os valores:  $E=210\text{GPa}$  e  $\nu=0.3$ , respectivamente), parâmetros necessários para descrever o comportamento elástico do material. Pressupõe-se também que o coeficiente de anisotropia do material no plano da chapa  $r(\alpha)$  é sempre maior do que 1, pois a análise directa que está na origem do algoritmo de análise inversa abaixo descrito, foi limitada a este tipo de casos. Além disso, assume-se que é conhecida uma solução inicial para os parâmetros da lei de encruamento. Esta solução inicial pode ser determinada, por exemplo, com base nos resultados de um ensaio de tracção na direcção de laminagem (paralela a  $0x$ ).

A metodologia de análise inversa proposta é a seguinte:

1. Determinação experimental de uma solução inicial para os parâmetros da lei de encruamento.
2. Determinação experimental dos diagramas  $F$  vs.  $\Delta l$ ,  $\varepsilon$  vs.  $d$  e  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  (em  $0x$  e  $0y$ ) para o ensaio cruciforme realizado para o material em estudo.

2.1. CASO 1 – Os resultados experimentais do provete cruciforme coincidem em  $0x$  e  $0y$ : (A) o material apresenta isotropia no plano da chapa ou (B) o material apresenta anisotropia, com  $r_0 = r_{90}$  e com  $r_{45}$  mínimo ou máximo na distribuição  $r(\alpha)$ , isto é, existe simetria em torno de um eixo que faz  $45^\circ$  com  $0x$  e  $0y$ .

- 
- 2.2. CASO 2 – Os resultados experimentais não coincidem em  $0x$  e  $0y$ .
3. Realização de simulações numéricas em isotropia no plano da chapa, com  $r=1$  e diferentes valores de  $r > 1$ . Recomenda-se a realização de quatro simulações.
- 3.1. Construção da regressão linear  $d$  vs.  $1/r$ , para a lei de encruamento inicial.
- 3.2. 1ª Estimativa:
- 3.2.1. CASO 1 – Determinação da posição  $d$  para a qual ocorre o máximo da deformação plástica equivalente experimental  $d_{exp}$ , e cálculo de  $r_{médio}$ , por regressão linear.
- 3.2.2. CASO 2:
- 3.2.2.1. Determinação de  $d_{exp}$  com base na média das distâncias  $d$ , em  $0x$  e  $0y$ , e cálculo de  $r_{médio}$ , por regressão linear.
- 3.2.2.2. Determinação de  $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)_{exp}^t$  (razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  experimental, para o ponto material com a trajectória de deformação mais próxima da tracção), em  $0x$  e  $0y$ , para o cálculo de  $r_0$  e  $r_{90}$ , respectivamente, com o auxílio da equação (7).
4. Realização da simulação numérica com a 1ª Estimativa para os parâmetros do critério de Hill'48.
- 4.1. Comparação da evolução  $F$  vs.  $\Delta l$ , para validação da lei de encruamento:
- 4.1.1. Se  $F_{exp.} \neq F(1^a \text{ Estimativa})$  é necessário obter uma melhor aproximação para a lei de encruamento antes de prosseguir com o algoritmo.
- 4.1.1.1. Alteração sucessiva dos parâmetros da lei de encruamento até obter um melhor ajuste, de acordo com:
- 4.1.1.1.1. Se  $F_{exp.} > F(1^a \text{ Estimativa})$  deve-se aumentar o valor global da tensão. Caso contrário, o valor global da tensão deve ser reduzido. Em função da análise anterior, sugerem-se incrementos, ou decrementos, de 20 MPa na distribuição da tensão, sem alterar o valor de  $n$ , até aproximar o valor da força máxima.
- 4.1.1.1.2. Se o deslocamento à carga máxima experimental  $\Delta l_{exp}^{max}$  for maior do que  $\Delta l^{max}$  (1ª Estimativa) deve-se aumentar

o valor de  $n$ . Caso contrário deve-se diminuir  $n$ . Este procedimento deve ser repetido até ajustar o valor do deslocamento para a carga máxima.

4.1.1.1.3. Se  $F_{exp.} > F(1^a \text{ Estimativa})$  para pequenos valores de  $\Delta l$  deve-se diminuir o valor da tensão limite de elasticidade,  $\sigma_0$ . Caso contrário deve-se aumentar  $\sigma_0$ .

4.1.2. Se  $F_{exp.} \sim F(1^a \text{ Estimativa})$  procede-se com a comparação da distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ :

4.1.2.1. CASO 1.A – Se  $d_{exp}$  e a deformação plástica equivalente experimental  $\varepsilon_{exp}$  forem maiores que os valores previstos, o material apresenta isotropia no plano da chapa.

4.1.2.2. CASO 1.B – Se  $d_{exp} \cong d$ , o material apresenta anisotropia, com  $r_0 = r_{90}$  e  $r_{45}$  mínimo ou máximo na distribuição  $r(\alpha)$ .

4.1.2.3. CASO 2 – Construção da relação logarítmica  $[r^* - r]/r$  vs.  $r$ , para os casos estudados em isotropia no plano da chapa, de modo a determinar os valores corrigidos de  $r_{médio}$ ,  $r_0$  e  $r_{90}$ .

5. Sequência de simulações até à otimização dos parâmetros de anisotropia:

5.1. CASO 1.A – Atualização sucessiva da regressão linear  $d$  vs.  $1/r$  para cálculo de nova estimativa de  $r_{médio}$ .

5.2. CASO 1.B:

5.2.1. Atualização da regressão linear  $d$  vs.  $1/r$  para cálculo de nova estimativa de  $r_{médio}$ .

5.2.2. Análise da distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ :

5.2.2.1. Se a deformação plástica equivalente experimental  $\varepsilon_{exp}$  for maior que a deformação plástica  $\varepsilon$  prevista na simulação realizada com  $r_{médio}$ ,  $r_{45}$  é mínimo da distribuição  $r(\alpha)$ .

5.2.2.2. Se  $\varepsilon_{exp.} < \varepsilon(r_{médio})$ ,  $r_{45}$  é máximo da distribuição  $r(\alpha)$ .

5.2.3. Cálculo de  $r_0 = r_{90}$  e  $r_{45}$  com base no valor de  $r_{médio}$ , utilizando uma relação, por exemplo, de 2 para:

5.2.3.1.  $r_0/r_{45}$ , se  $r_{45}$  for mínimo na distribuição  $r(\alpha)$ .

5.2.3.2.  $r_{45}/r_0$ , se  $r_{45}$  for máximo na distribuição  $r(\alpha)$ .



5.2.4. Realização da simulação numérica utilizando os parâmetros calculados.

5.2.5. Determinação de  $\Delta r = r_0 - r_{45}$  para cada uma das simulações realizadas e cálculo da regressão linear para  $\Delta r$  vs.  $\varepsilon$ .

5.2.6. Cálculo, por regressão linear, de uma aproximação para  $\Delta r$  e actualização dos valores de  $r_0 = r_{90}$  e  $r_{45}$ , com base nas relações:

$$r_0 = r_{90} = r_{\text{médio}} + \frac{\Delta r}{2}$$

$$r_{45} = r_{\text{médio}} - \frac{\Delta r}{2}$$

5.2.7. Análise sucessiva da distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ :

5.2.7.1. Se  $d_{\text{exp.}} > d$  deve-se aumentar o valor de  $r_{\text{médio}}$ . Caso contrário deve-se diminuir o valor de  $r_{\text{médio}}$ .

5.2.7.2. Se  $\varepsilon_{\text{exp.}} > \varepsilon$  deve-se diminuir o valor da razão  $r_0/r_{45}$ . Caso contrário deve-se aumentar  $r_0/r_{45}$ .

5.2.7.3. Actualização de  $r_{\text{médio}}$  e/ou de  $\Delta r$ , em função da análise anterior. Sugerem-se incrementos em  $\Delta r$  de 0.2.

5.3. CASO 2:

5.3.1. Análise sucessiva da distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ :

5.3.1.1. Se  $\varepsilon_{\text{exp.}} > \varepsilon$  e  $d_{\text{exp.}} > d$ , em  $0x$  e  $0y$ , deve-se aumentar  $r_{\text{médio}}$ . Caso contrário deve-se diminuir o valor de  $r_{\text{médio}}$ .

5.3.2. Análise sucessiva da distribuição  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  de modo a comparar os valores desta razão para a trajectória próxima da tracção,  $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^t$ :

5.3.2.1. Se  $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)_{\text{exp.}}^t > (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^t$  em  $0x$ , deve-se aumentar  $r_0$ . Caso contrário deve-se diminuir o valor de  $r_0$ .

5.3.2.2. Se  $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)_{\text{exp.}}^t > (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^t$  em  $0y$ , deve-se aumentar  $r_{90}$ . Caso contrário deve-se diminuir o valor de  $r_{90}$ .

5.3.2.3. Actualização de  $r_{\text{médio}}$  e/ou  $r_0$  e/ou  $r_{90}$ , em função da análise anterior. Sugerem-se incrementos de 0.2.

Deve realçar-se a importância da solução inicial para os parâmetros da lei de encruamento no algoritmo de análise inversa descrito. Se a evolução  $F$  vs.  $\Delta l$  da 1ª

Estimativa não for sensivelmente coincidente com a experimental, e se os diagramas  $\epsilon$  vs.  $d$  apresentarem uma diferença notória, a metodologia de análise inversa proposta inclui uma fase suplementar de alteração dos parâmetros da lei de encruamento, de modo a que as curvas de força se aproximem das do caso experimental (ver 4.1.1, no algoritmo). A partir daí, a análise inversa é realizada de modo a otimizar os parâmetros de anisotropia, através do algoritmo acima indicado.

Em seguida, são apresentados alguns casos de estudo realizados com o objectivo de testar e validar o algoritmo de análise inversa acima descrito. A validação é meramente qualitativa não incluindo determinações do erro, exceptuando a diferença relativa entre a distribuição de  $r(\alpha)$  do caso experimental e a obtida pela metodologia de análise inversa. Os testes de validação foram realizados sobre resultados *experimentais* de materiais fictícios, gerados por simulação numérica do ensaio de tracção biaxial do provete cruciforme.

Nos três primeiros casos de estudo, o comportamento plástico do material é perfeitamente descrito pelo critério de Hill'48. Isto é, os resultados experimentais são gerados por simulação numérica do ensaio cruciforme de materiais cujo comportamento plástico obedece ao critério de Hill'48. Nestes casos, o objectivo é identificar o melhor *ajuste* para os parâmetros do critério de plasticidade de Hill'48. Estes três primeiros casos, abaixo designados por *Hill-Hill*, incidem sobre situações que vão do particular para o geral, em termos de tipo de anisotropia planar do material. No quarto caso de estudo, o comportamento plástico do material é perfeitamente descrito pelo critério de Drucker+L, que possui mais parâmetros numéricos de ajuste do que o critério de Hill'48, o que lhe confere maior flexibilidade. Neste caso, abaixo designado por *Drucker+L – Hill*, o objectivo é identificar o melhor *ajuste* para os parâmetros do critério de plasticidade de Hill'48 e também da lei de encruamento de Swift. De facto, sendo o comportamento plástico do material descrito pelo critério de Drucker+L, a lei de encruamento que melhor descreve o comportamento plástico do material de acordo com Hill'48 não deverá ser exactamente a mesma da utilizada para gerar os resultados experimentais, em que o critério de Drucker+L é utilizado.

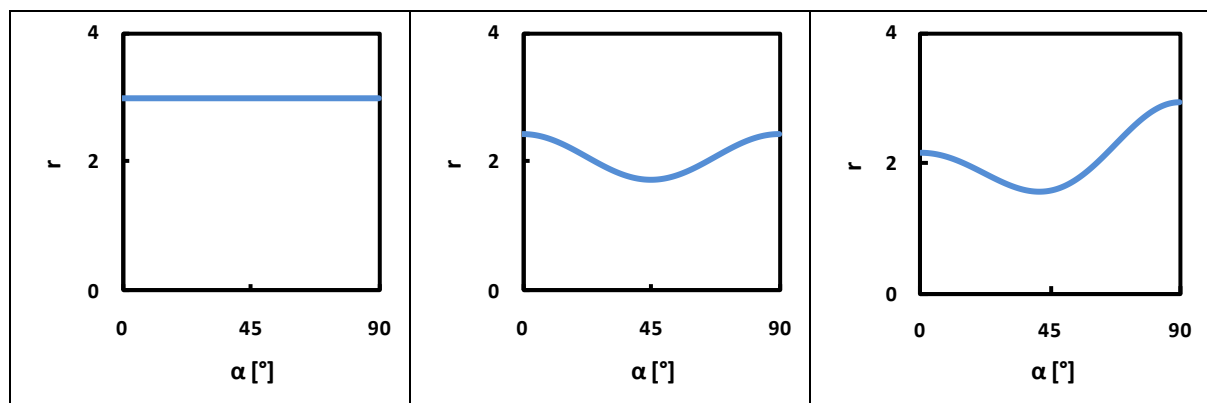
## 4.2. Casos Hill-Hill

Na Tabela XIX estão indicadas as características dos materiais experimentais (parâmetros de anisotropia Hill'48 e de encruamento Swift) dos três casos *Hill-Hill* em estudo.

**Tabela XIX. Características dos casos experimentais *Hill-Hill*: Parâmetros de anisotropia e de encruamento.**

Casos Experimentais <i>Hill – Hill</i>	Critério de Plasticidade: Hill'48						Lei de Encruamento: Swift		
	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>K</i>	<i>n</i>	$\sigma_0$
<b>1.A</b>	0.250	0.250	0.750	1.500	1.500	1.750	494.2	0.234	134
<b>1.B</b>	0.290	0.290	0.710	1.500	1.500	1.298			
<b>2</b>	0.233	0.316	0.684	1.500	1.500	1.149	785.45	0.267	217.5

Na Figura 52(a), (b) e (c) mostram-se as distribuições  $r$  vs.  $\alpha$  no plano da chapa dos três casos *Hill-Hill* em estudo, CASO 1.A, 1.B e 2, respectivamente. O CASO 1.A apresenta isotropia no plano da chapa e o CASO 1.B e o CASO 2 apresentam anisotropia planar. O CASO 1.B corresponde a uma situação particular de anisotropia em que  $r_0 = r_{90}$  com  $r_{45}$  mínimo na distribuição  $r(\alpha)$  no plano da chapa.



**Figura 26. Distribuições  $r$  vs.  $\alpha$  no plano da chapa dos três casos em *Hill-Hill* em estudo: Casos (a) 1.A, (b) 1.B e (c) 2.**

### 4.2.1. CASO 1.A

Na Figura 27 apresentam-se os resultados *experimentais* gerados por simulação numérica do ensaio biaxial do ensaio cruciforme, com as leis constitutivas indicadas na primeira linha da Tabela XIX, para um deslocamento  $\Delta l$  imediatamente antes da carga

máxima. A Figura 27(a) apresenta a evolução de  $F$  vs.  $\Delta l$  e a Figura 27(b) a distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

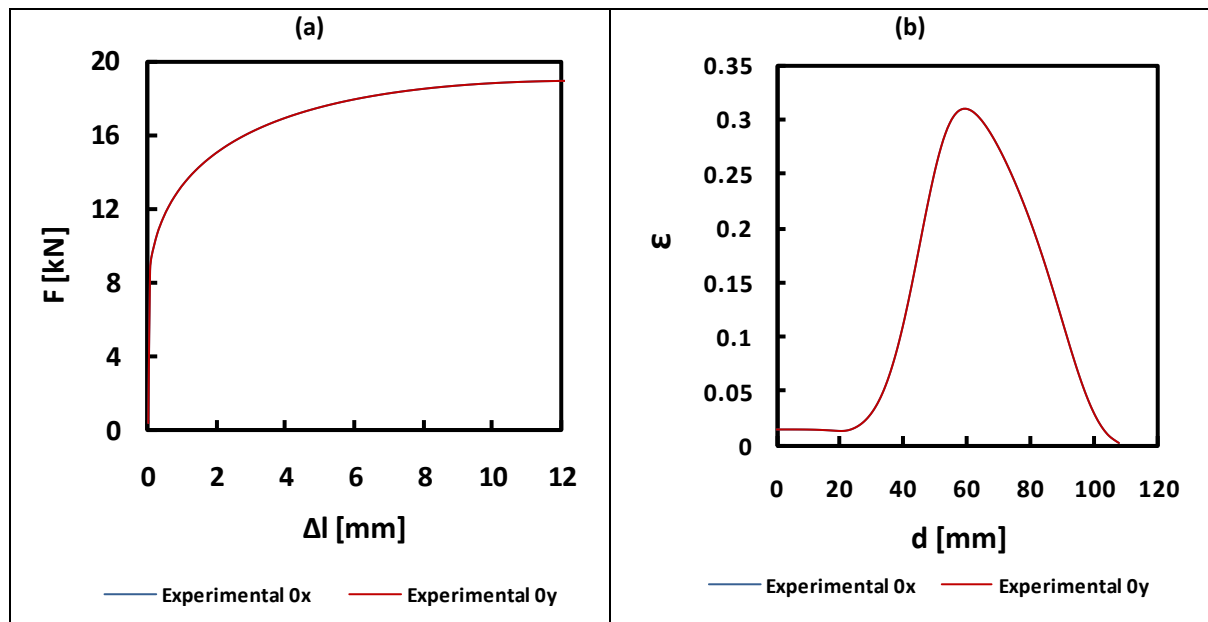


Figura 27 – Diagramas (a)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (b)  $\varepsilon$  vs.  $d$  referentes ao caso em estudo.

A análise da Figura 27 permite constatar que os diagramas obtidos para o ensaio experimental coincidem segundo  $0x$  e  $0y$ . Logo, o material em análise apresenta isotropia no plano da chapa ou anisotropia planar com  $r_0 = r_{90}$  e  $r_{45}$  mínimo ou máximo, na distribuição  $r$  vs.  $\alpha$  do plano da chapa. De acordo com a metodologia de análise inversa proposta, realizou-se o primeiro conjunto de simulações numéricas, com a solução inicial lei de encruamento, considerando isotropia no plano da chapa  $r(\alpha)$ , com  $r=1$  e  $r=4$ . Na Figura 28(a) mostram-se os diagramas  $F$  vs.  $\Delta l$ . e na Figura 28(b) os diagrama  $\varepsilon$  vs.  $d$ , comparando o caso experimental com os casos de isotropia planar ( $r=1$  – designado por *Isotropia* –  $r=4$ ).

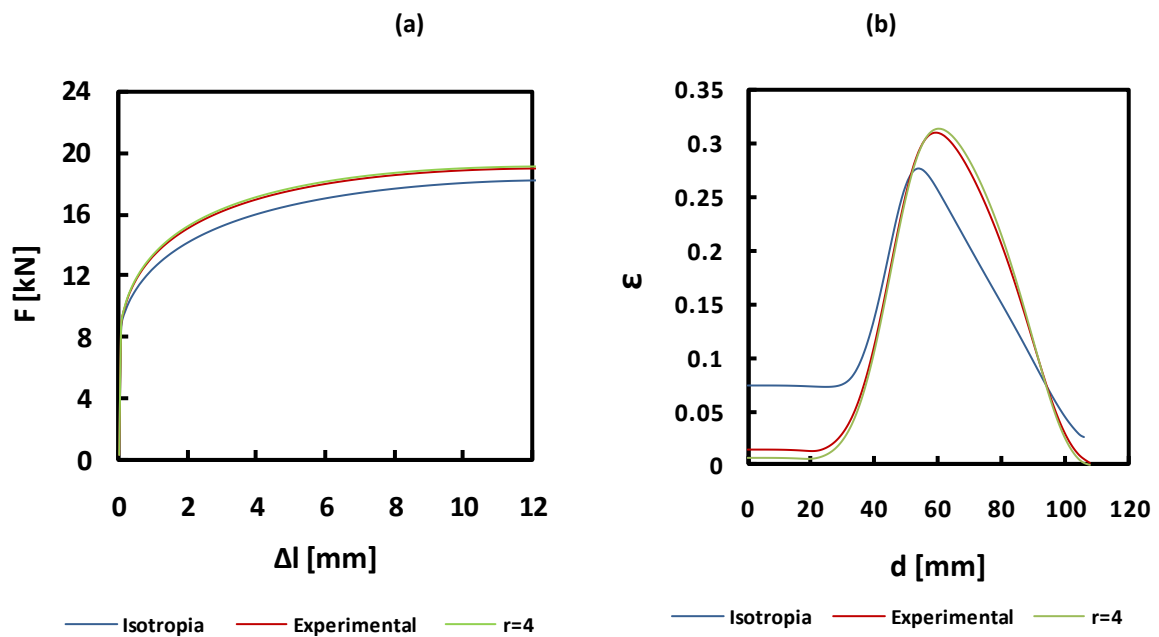


Figura 28 – Diagramas do caso experimental (a)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (b)  $\epsilon$  vs.  $d$ .

A Figura 28(a) mostra que os resultados do caso experimental estão próximos do caso  $r=4$ . A partir dos valores de  $d$ , correspondentes à deformação plástica equivalente máxima (Figura 28(b)), elaborou-se o diagrama  $d$  vs.  $1/r$  (ver Figura 29) para determinar a 1ª Estimativa de  $r_{\text{médio}}$ .

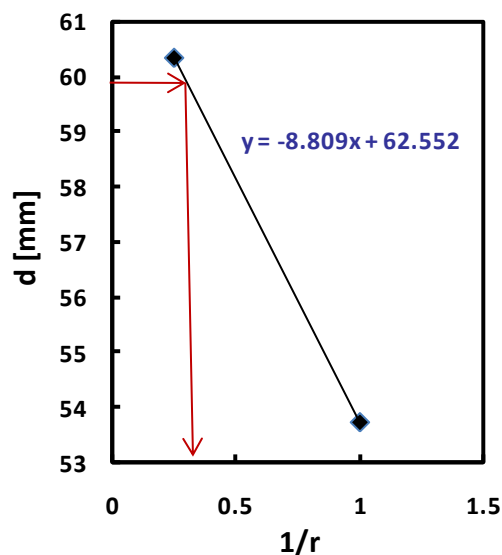


Figura 29 – Diagrama  $d$  vs.  $1/r$  determinado com base nos resultados de simulação em isotropia no plano da chapa.

Da Figura 27(b), com a distribuição experimental de  $\varepsilon$  vs.  $d$  para o caso em estudo, determinou-se o valor de  $d_{exp}$  correspondente à deformação plástica equivalente máxima:  $d_{exp}=59.4\text{mm}$ . A regressão linear apresentada na Figura 29, para  $d$  vs.  $1/r$ , permitiu determinar um valor de  $r_{m\u00e9dio}=2.79$ .

Com base neste valor realizou-se a simulação num\u00e9rica com a 1<sup>a</sup> Estimativa dos par\u00e2metros do crit\u00e9rio de Hill'48 do material, determinado no pressuposto da exist\u00eancia de isotropia no plano da chapa com  $r_{m\u00e9dio}=2.79$ . A compara\u00e7\u00e3o dos resultados desta simula\u00e7\u00e3o com os experimentais, efectuada na Figura 30, permite validar a lei de encruamento inicial e identificar o tipo de distribui\u00e7\u00e3o  $r(\alpha)$ .

A Figura 30(a) apresenta as evolu\u00e7\u00f5es de  $F$  vs.  $d$  e a Figura 30(b) as distribui\u00e7\u00f5es  $\varepsilon$  vs.  $d$  obtidas. Na Figura 30(c) apresenta-se um detalhe correspondente \u00e0 zona de deform\u00e7\u00e3o pl\u00e1stica equivalente m\u00e1xima das distribui\u00e7\u00f5es  $\varepsilon$  vs.  $d$ , uma vez que \u00e9 nesta zona que ocorrem as maiores diferen\u00e7as entre as duas curvas, experimental e num\u00e9rica.

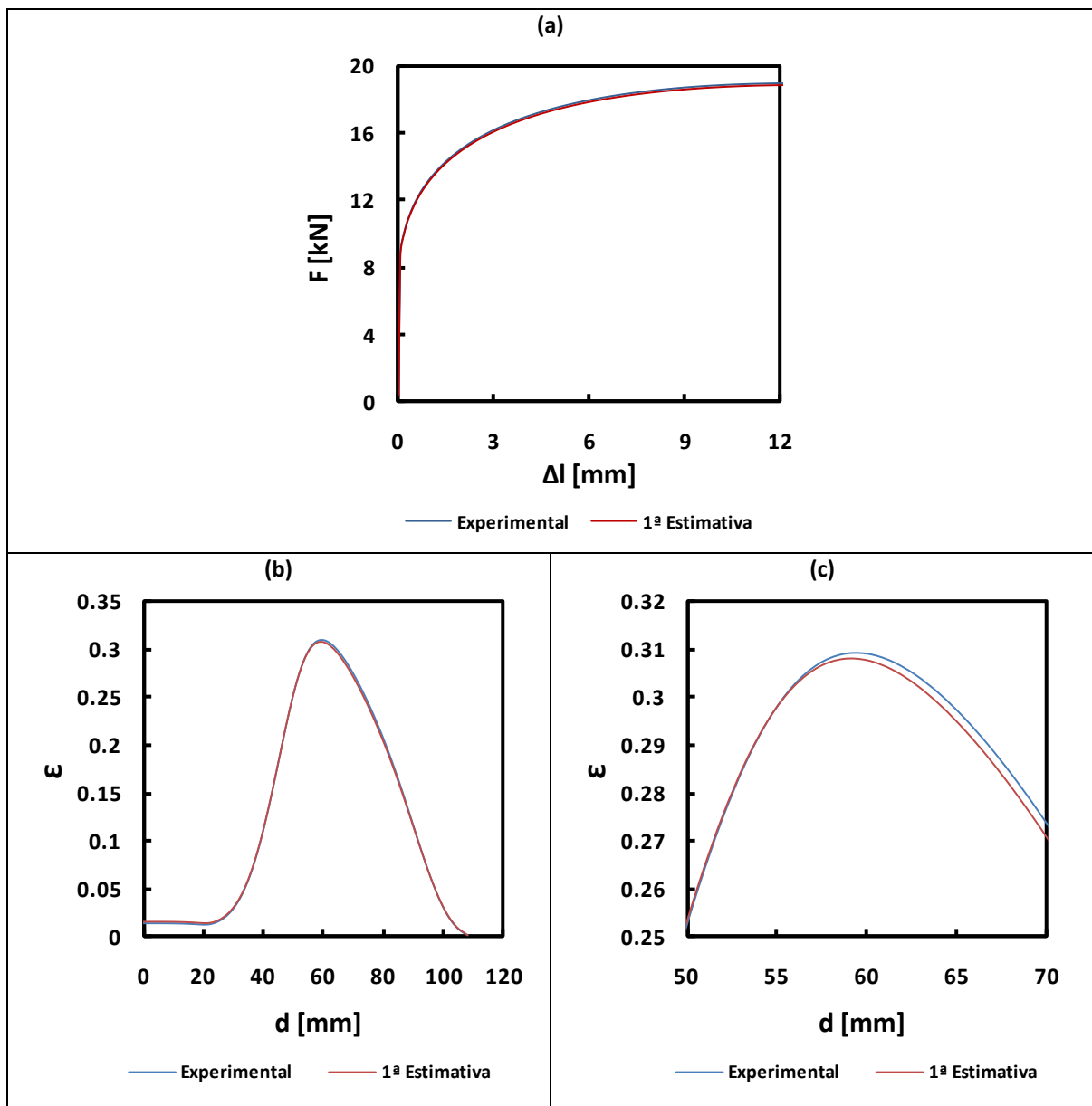


Figura 30 – Resultados da 1ª Estimativa e Experimental: Diagramas (a)  $F$  vs.  $\Delta l$ , (b-1)  $\varepsilon$  vs.  $d$  e (c) detalhe do pico da distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

A análise da Figura 30 permite observar que as diferenças entre os resultados experimentais e numéricos são muito pequenas, o que indica que o caso experimental é de isotropia planar, ou está muito próximo dela, com  $r_{\text{médio}}$  próximo de 2.79. De facto, na Figura 30(b) e (c) observa-se que as distribuições  $\varepsilon$  vs.  $d$  são manifestamente coincidentes, excepto entre  $d=0$ mm e  $d=30$ mm (região central do provete cruciforme) e na região próxima dos máximos da distribuição onde ocorrem diferenças mínimas. A distribuição experimental apresenta uma largura de pico menor que a distribuição correspondente à

simulação numérica da 1ª Estimativa, e atinge uma deformação plástica equivalente máxima ligeiramente menor. Com base no estudo realizado na análise directa, este resultado sugere que o caso experimental deverá ter um valor de  $r_{médio}$  superior ao considerado nesta 1ª Estimativa.

De modo a obter uma melhor estimativa do valor de  $r_{médio}$ , adicionou-se ao diagrama  $d$  vs.  $1/r$  (ver Figura 29), o ponto correspondente à 1ª Estimativa. Deste modo, é possível obter uma nova aproximação para a relação linear entre a distância  $d$  e o valor de  $r_{médio}$ , como se mostra na Figura 31.

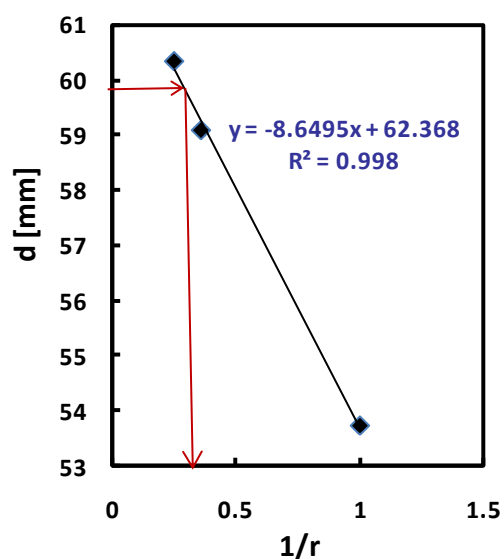


Figura 31 – Actualização do diagrama  $d$  vs.  $1/r$ .

Com base nesta nova regressão linear, determinou-se um novo valor de  $r_{médio}$ , para o caso experimental, igual a 2.91. Com este novo valor, realizou-se uma 2ª Estimativa dos parâmetros do critério de Hill'48 do material, determinados no pressuposto da existência de isotropia planar com  $r=2.91$ . Na Figura 32 apresenta-se a comparação dos resultados numéricos obtidos na 2ª Estimativa com os experimentais. A Figura 32(a) apresenta a evolução  $F$  vs.  $\Delta l$ , e a Figura 32(b) a distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ . Também neste caso, opta-se por apresentar um detalhe da distribuição de  $\varepsilon$  vs.  $d$ , na região onde ocorre a deformação plástica equivalente máxima, na Figura 32(c).



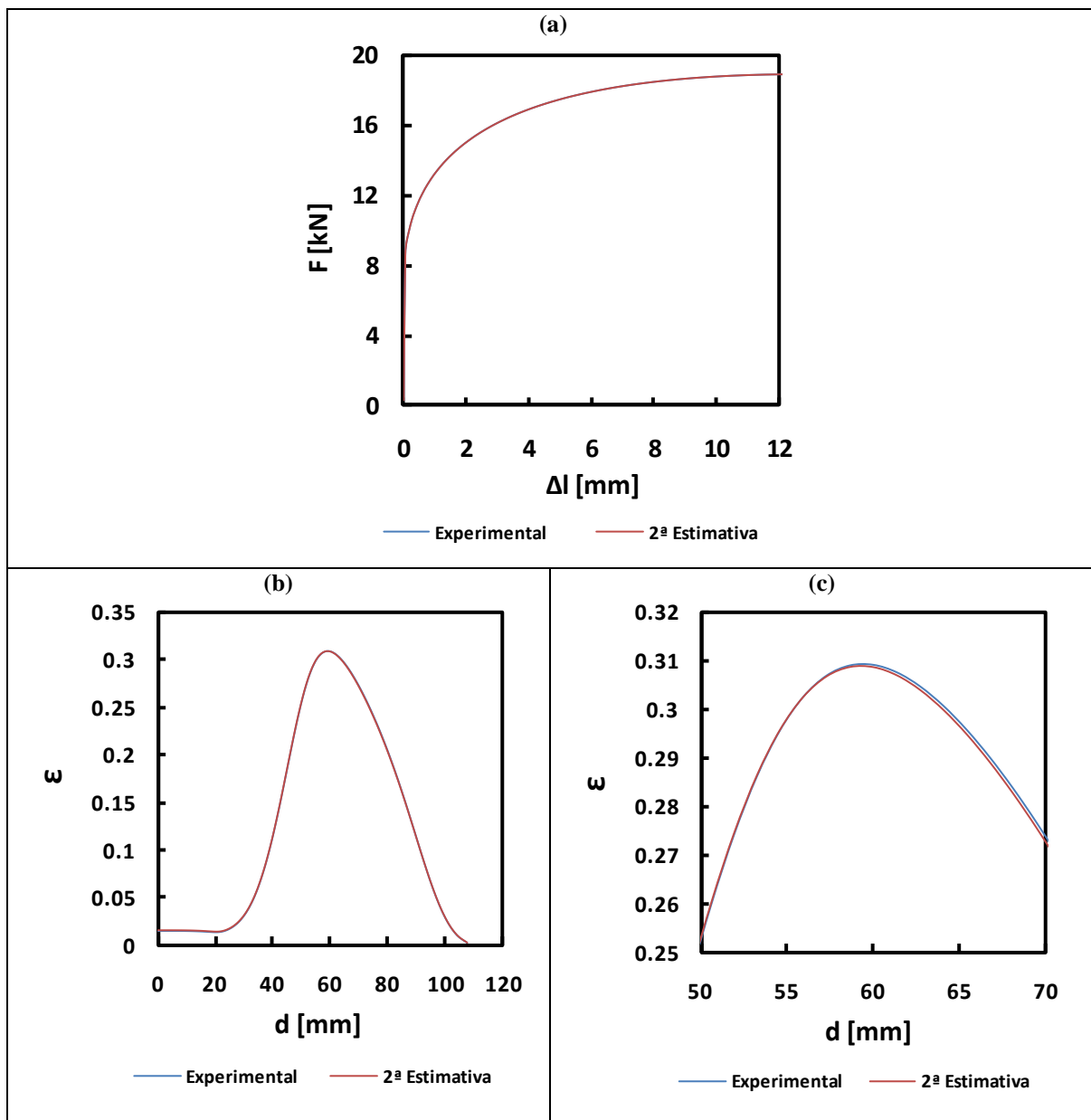


Figura 32 - Resultados da 2ª Estimativa: Diagramas (a)  $F$  vs.  $\Delta l$ , (b-1)  $\varepsilon$  vs.  $d$  e (b-2) detalhe do pico da distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

Os resultados numéricos obtidos nesta 2ª Estimativa são visivelmente coincidentes com os do caso experimental. Na Tabela XX estão indicados os valores de  $r_{médio}$  do caso experimental e da 2ª Estimativa, bem com a diferença relativa entre ambos. O procedimento de actualização do diagrama  $d$  vs.  $1/r$  poderia ter sido sucessivamente repetido para uma melhor optimização do valor de  $r_{médio}$ , o que foi considerado desnecessário, no contexto deste exemplo.

Tabela XX. Diferenças relativas entre os valores de  $r_{médio}$  dos casos Experimental e 2ª Estimativa.

Casos	$r_{médio}$
Experimental	3
2ª Estimativa	2.91
Diferença Relativa	-3%

#### 4.2.2. CASO 1.B

Na Figura 33 apresentam-se os resultados *experimentais* gerados por simulação numérica do ensaio biaxial do ensaio cruciforme, com as leis constitutivas indicadas na segunda linha da Tabela XIX, para um deslocamento  $\Delta l$  imediatamente antes da carga máxima. A Figura 33(a) apresenta a evolução de  $F$  vs.  $\Delta l$  e a Figura 33(b) a distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

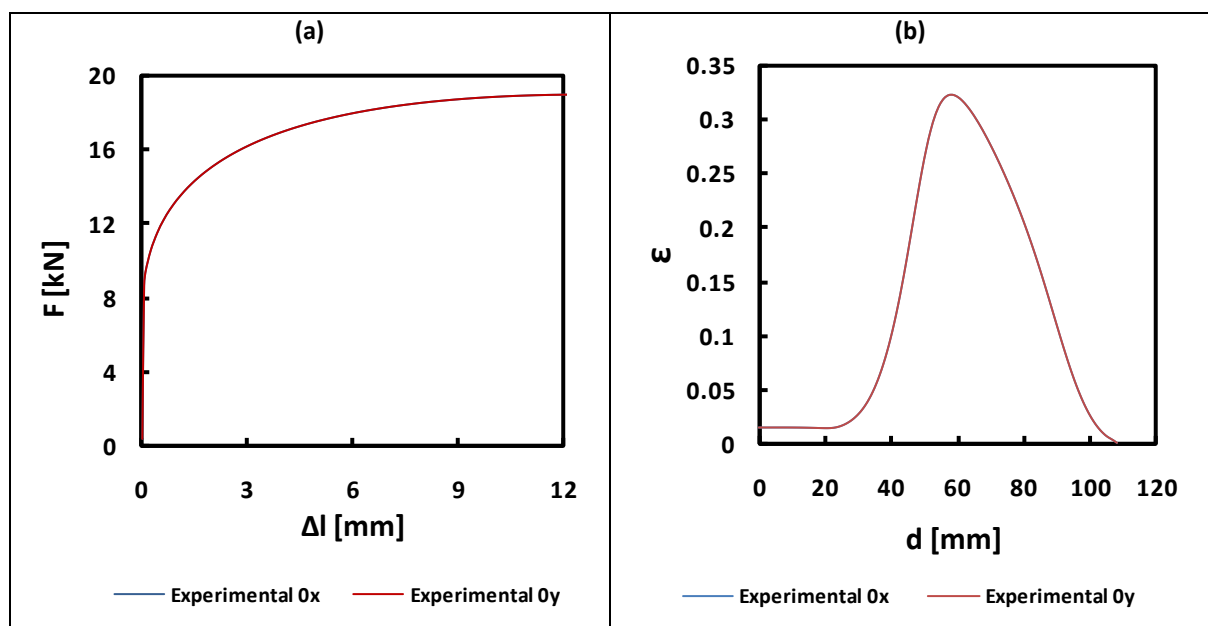


Figura 33. Diagramas (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$  e (b)  $F$  vs.  $\Delta l$  referentes ao caso experimental.

Tal como no 1º caso de estudo, os diagramas coincidem em  $0x$  e em  $0y$ , pelo que o material em análise apresenta isotropia no plano da chapa ou anisotropia planar com  $r_0 = r_{90}$  e  $r_{45}$  mínimo ou máximo na distribuição  $r$  vs.  $\alpha$  do plano da chapa. De acordo com a metodologia de análise inversa proposta, realizou-se um conjunto de simulações numéricas, com a solução inicial lei de encruamento, considerando isotropia no plano da

chapa no plano da chapa  $r(\alpha)$ , com  $r=1$  e  $r=4$ . A Figura 34(a) compara as evoluções de  $F$  vs.  $\Delta l$ , experimental e numéricas em isotropia planar. A Figura 34(b) apresenta as mesmas comparações para a distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ . Tal como o CASO 1.A, a distribuição  $F$  vs.  $\Delta l$  experimental está próxima da numérica com  $r=4$ .

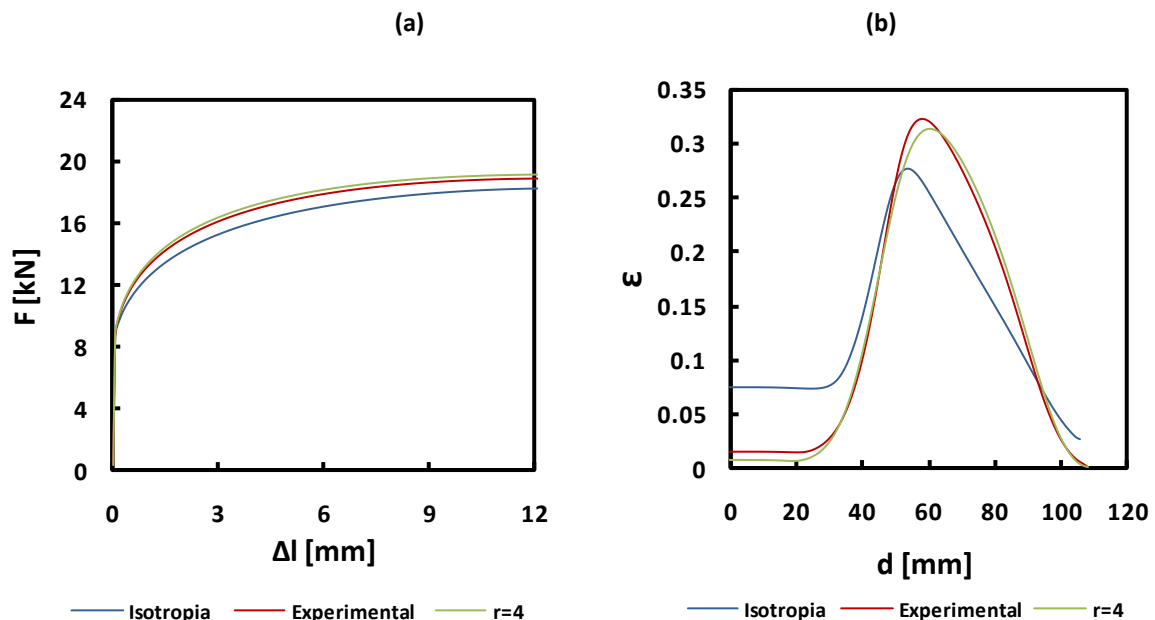


Figura 34 - Diagramas (a)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (b)  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

Uma vez que a lei de encruamento é igual à utilizada no CASO 1.A, a relação linear  $d$  vs.  $1/r$  é igual à indicada na Figura 29. Da distribuição experimental  $\varepsilon$  vs.  $d$  apresentada na Figura 33(b) retirou-se o valor de  $d_{exp}$  correspondente à deformação plástica equivalente máxima:  $d_{exp}=58$ mm. Com base neste valor e na relação linear  $d$  vs.  $1/r$  foi determinado um valor de  $r_{médio}=1.94$ . Em seguida, realizou-se a simulação numérica da 1ª Estimativa com os parâmetros do critério de Hill'48 do material, determinados no pressuposto da existência de isotropia no plano da chapa com  $r_{médio}=1.94$ . Na Figura 35 comparam-se os resultados obtidos nesta estimativa e experimentais para a evolução de  $F$  vs.  $\Delta l$  e para a distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

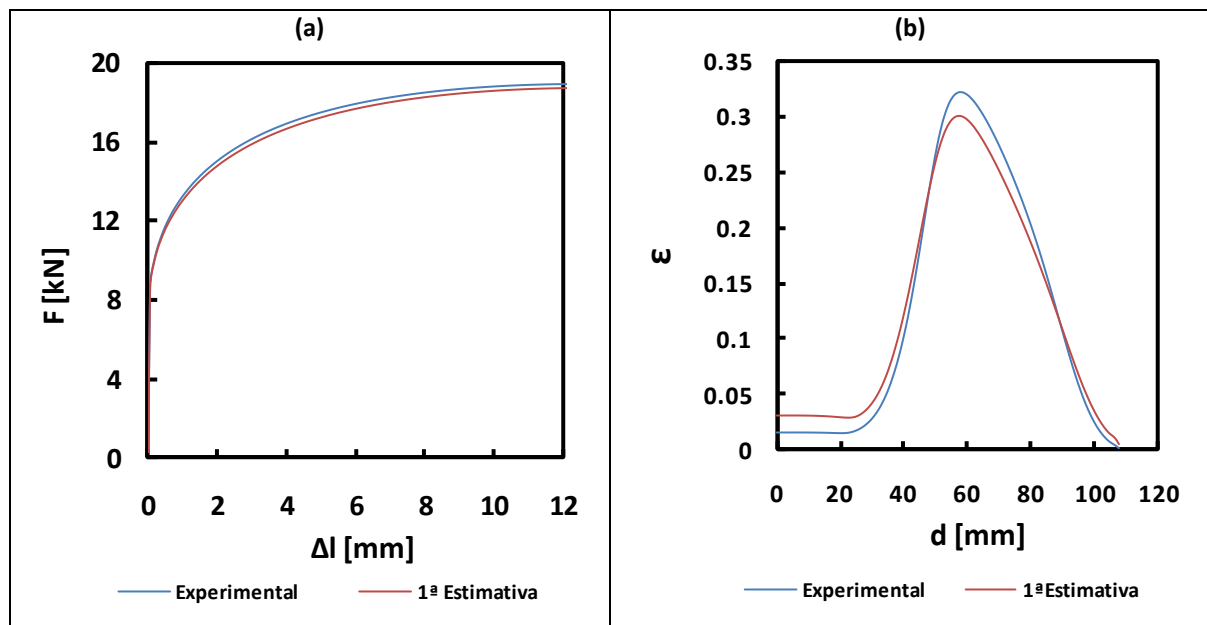


Figura 35 - Resultados da 1ª Estimativa: Diagramas (a)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (b)  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

Na Figura 35(a) observa-se que a evolução da força apresenta diferenças. Da análise da Figura 35(b), constata-se que a distribuição da deformação plástica equivalente apresenta o valor máximo para posições  $d$  idênticas, embora os valores de deformação plástica equivalente máxima sejam diferentes, ao longo de todo o eixo de simetria do provete. Quando comparado com o CASO 1.A, este caso apresenta maiores diferenças entre o experimental e a 1ª estimativa numérica, pelo que fomos levados a concluir que se trata de um caso de anisotropia com  $r_0=r_{90}$  e  $r_{45}$  mínimo ou máximo. O facto do máximo da curva experimental  $\varepsilon$  vs.  $d$  se situar acima da numérica, aproximadamente para o mesmo valor de  $d$  leva-nos a concluir que  $r_{45}$  corresponde a um mínimo na distribuição  $r(\alpha)$ .

De modo a obter uma melhor aproximação ao valor de  $r_{médio}$ , adicionou-se ao diagrama  $d$  vs.  $1/r$ , indicado na Figura 29, o ponto correspondente à 1ª Estimativa. A Figura 36 apresenta a regressão linear obtida para  $d$  vs.  $1/r$ , actualizada com o resultado obtido na 1ª Estimativa.

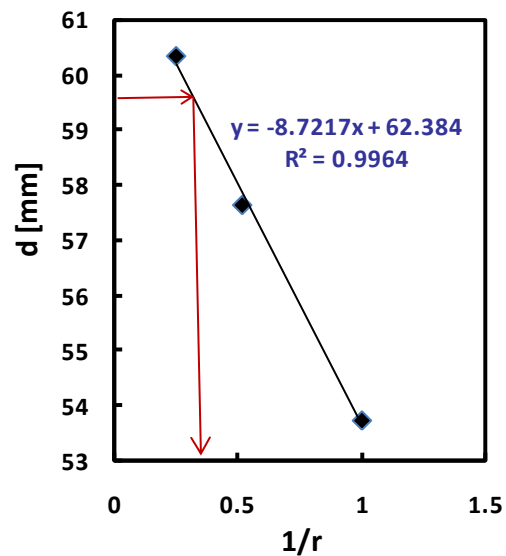


Figura 36 - Diagrama  $d$  vs.  $1/r$  actualizado.

A actualização da regressão linear  $d$  vs.  $1/r$  permitiu determinar uma segunda aproximação de  $r_{médio}=1.99$ . Com base neste valor de  $r_{médio}$ , foram realizadas duas simulações, uma em isotropia planar com  $r_{médio}=1.99$  e outra em anisotropia planar com  $r_0=r_{90}$  e  $r_{45}$  mínimo tal que  $r_0/r_{45}=2$  ( $r_0=r_{90}=2.65$ ;  $r_{45}=1.32$ ). O objectivo destas simulações foi possibilitar a determinação da relação  $r_0/r_{45}$  experimental, a partir dos valores da deformação plástica equivalente máxima, obtidos numericamente, que ocorrem para iguais valores de  $d$  nas distribuições  $\epsilon$  vs.  $d$ , quando o valor de  $r_{45}$  é mínimo (como neste caso) ou máximo e  $r_0=r_{90}$ .

Em seguida foram determinados os valores de  $\Delta r = r_0 - r_{45}$ , para as duas últimas simulações. A Figura 37(a) apresenta a tabela com estes valores, e os valores correspondentes de  $\epsilon$  máximo, bem como a regressão linear obtida para  $\Delta r$  vs.  $\epsilon$  (ver Figura 37(b)). A regressão linear obtida permite calcular uma aproximação para o valor de  $\Delta r$  experimental igual a 0.71. A partir deste valor e do valor de  $r_{médio}=1.99$ , determinaram-se os valores de  $r_0 = r_{90} = 2.34$  e de  $r_{45} = 1.64$ .

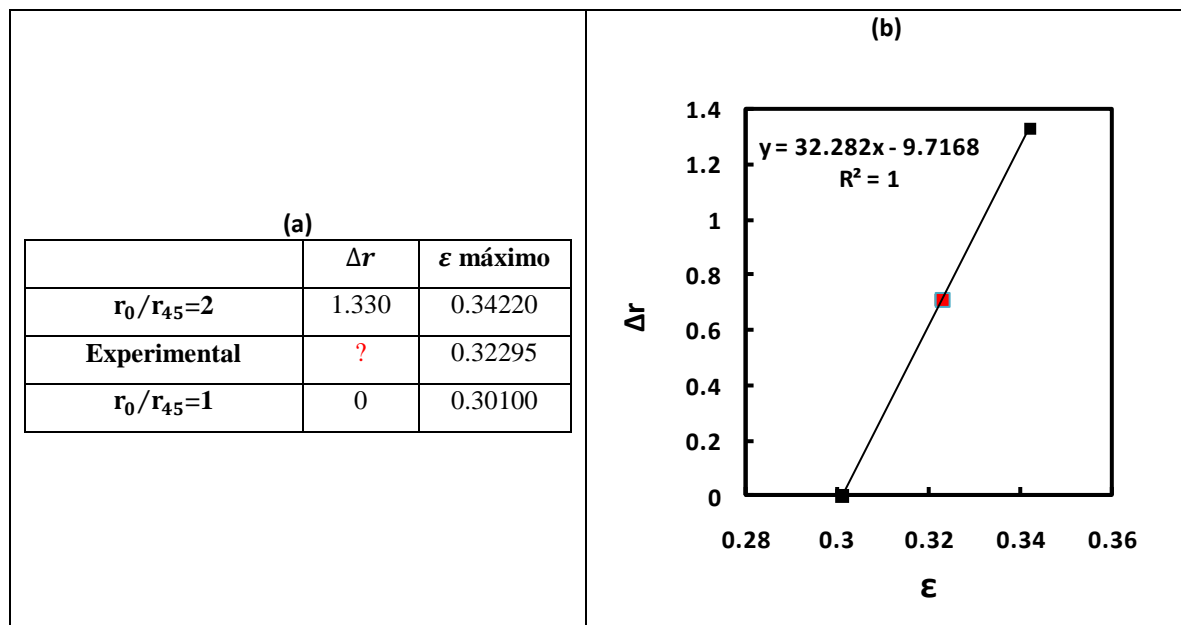


Figura 37 – (a) e (b) Determinação de  $\Delta r$  do caso em estudo.

A distribuição de  $r(\alpha)$  definida por estes valores permitiu realizar uma nova simulação, cujos resultados se comparam com os experimentais na Figura 38. Na Figura 38(a) e (b) comparam-se as distribuições  $\varepsilon$  vs.  $d$ ; a Figura 38(c) compara as distribuições  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  e a Figura 38(d) as evoluções de  $F$  vs.  $\Delta l$ .

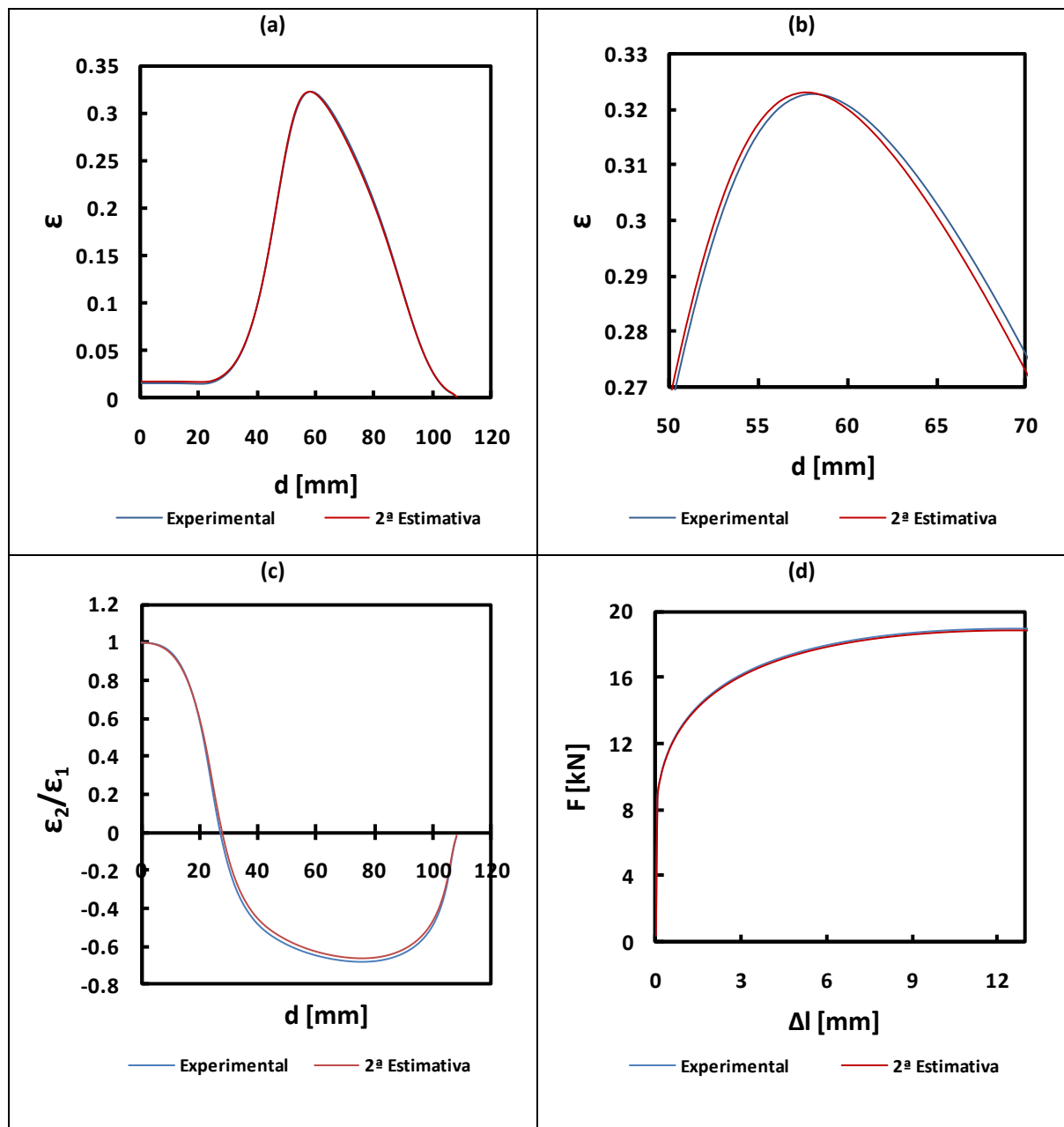


Figura 38 – Diagramas (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$ , (b) detalhe do pico da distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ , (c)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (d)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  comparativos entre o caso experimental e a simulação numérica com  $r_0 = r_{90} = 2.34$  e  $r_{45} = 1.64$ .

Na Figura 38(a) e (b) observa-se que ambas as distribuições se encontram quase sobrepostas, sendo perceptível um desalinhamento nestas distribuições (ver Figura 38(b)) e uma diferença nas curvas entre  $d=0$ mm e  $d=30$ mm, que corresponde à região central do provete cruciforme. Nesta região, a distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$  experimental situa-se abaixo da obtida numericamente. Este resultado indica que o valor de  $r_{médio}$  experimental é superior ao numérico (ver análise directa). Além disso, o detalhe apresentado na Figura

38(b) permite ainda observar que as distribuições apresentam sensivelmente a mesma deformação plástica equivalente máxima, mas a distâncias  $d$  distintas, sendo este valor inferior para o caso numérico. Este resultado indica que a relação  $r_0/r_{45}$  experimental é inferior à numérica (ver análise directa).

Esta análise conduziu à realização de mais uma simulação que, relativamente à anterior, apresenta as seguintes características: um acréscimo de 0.2 no valor de  $r_{médio}$ , de 1.99 para 2.19, e mantendo  $\Delta r=0.71$ . Esta combinação de valores permite reduzir a relação  $r_0/r_{45}$  de 1.43 para 1.41. Na Figura 39 comparam-se os resultados desta simulação com os experimentais. Na Figura 39(a) apresentam-se as distribuições  $\varepsilon$  vs.  $d$ , com um detalhe da zona de maior deformação plástica equivalente na Figura 39(b). A Figura 39(c) refere-se às distribuições  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  e a Figura 39(d) às evoluções de  $F$  vs.  $\Delta l$ .



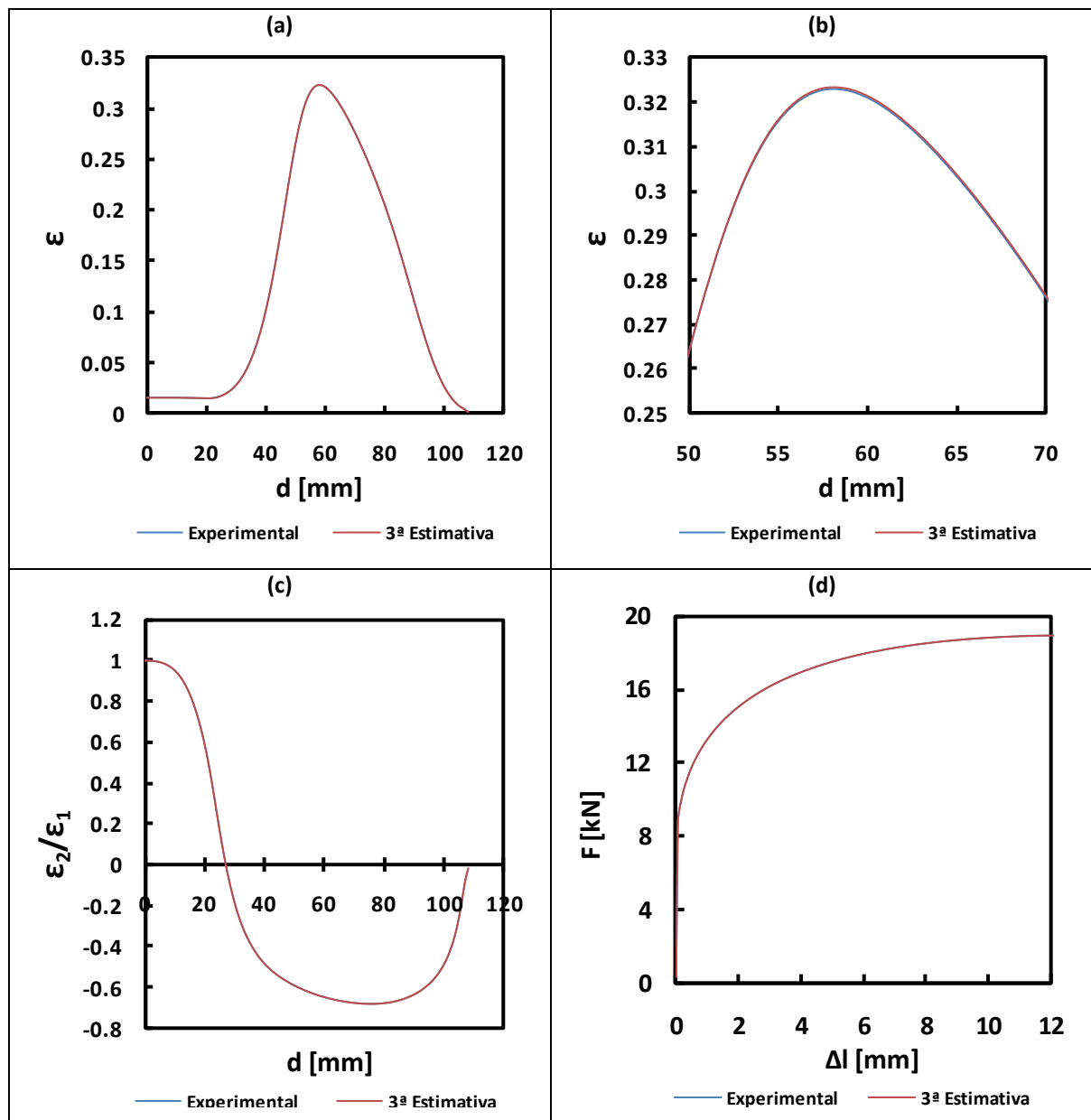


Figura 39 - Diagramas (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$ , (b) detalhe do pico da distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ , (c)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$  comparativos entre o caso em estudo e a 3ª Estimativa.

A análise da Figura 39 permite observar que os resultados numéricos são sensivelmente coincidentes com os resultados experimentais. Na Tabela XXI estão indicados os valores de  $r_0 = r_{90}$ ,  $r_{45}$  e  $r_{médio}$  do caso experimental e deste último ensaio numérico, bem como a diferença relativa entre ambos. O procedimento de otimização dos valores de  $\Delta r$  e de  $r_{médio}$  experimentais poderia ter sido repetido com base na análise sucessiva das distribuições  $\varepsilon$  vs.  $d$  (ver 5.2.7 do algoritmo). Neste caso, não se procedeu a uma nova estimativa, uma vez que as diferenças relativas obtidas são todas inferiores a 1%.

Tabela XXI. Diferenças relativas entre os valores de  $r_0 = r_{90}$ ,  $r_{45}$  e  $r_{médio}$  dos casos Experimental e 3ª Estimativa.

Casos	$r_0 = r_{90}$	$r_{45}$	$r_{médio}$
Experimental	2.545	1.836	2.194
3ª Estimativa	2.530	1.840	2.190
Diferença Relativa	-0.59%	0.22%	-0.18%

### 4.2.3. CASO 2

Na Figura 40 são apresentados os resultados *experimentais* gerados por simulação numérica do ensaio biaxial do ensaio cruciforme, com as leis constitutivas indicadas na terceira da linha da Tabela XIX, para um deslocamento  $\Delta l$  imediatamente antes da carga máxima. As Figura 40(a) e (b) apresentam as distribuições, em  $0x$  e  $0y$ , de  $\varepsilon$  vs.  $d$  e  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , respectivamente. Na Figura 40(c) são apresentadas as evoluções  $F$  vs.  $\Delta l$  em,  $0x$  e  $0y$ . Os resultados são apresentados para um deslocamento  $\Delta l$  inferior ao ponto de carga máxima.

Na análise da Figura 40 observa-se que os diagramas não coincidem segundo  $0x$  e  $0y$ , pelo que se conclui que se trata de um caso geral de anisotropia planar. Assim, realizaram-se quatro simulações em isotropia no plano da chapa, com  $r = 1, 2, 3$  e  $4$ , de modo a determinar um valor aproximado de  $r_{médio}$ , do material. Na Figura 41(a), apresentam-se as distribuições  $\varepsilon$  vs.  $d$  obtidas neste quatro casos numéricos de isotropia planar (em que os resultados em  $0x$  e  $0y$  coincidem) e do caso experimental, em  $0x$  e  $0y$ , para a lei de encruamento inicial. A Figura 41(b) apresenta a relação linear obtida para  $d$  vs.  $1/r$ , com base nos valores de  $d$  correspondentes à deformação plástica equivalente máxima nos quatro casos numéricos de isotropia plana.

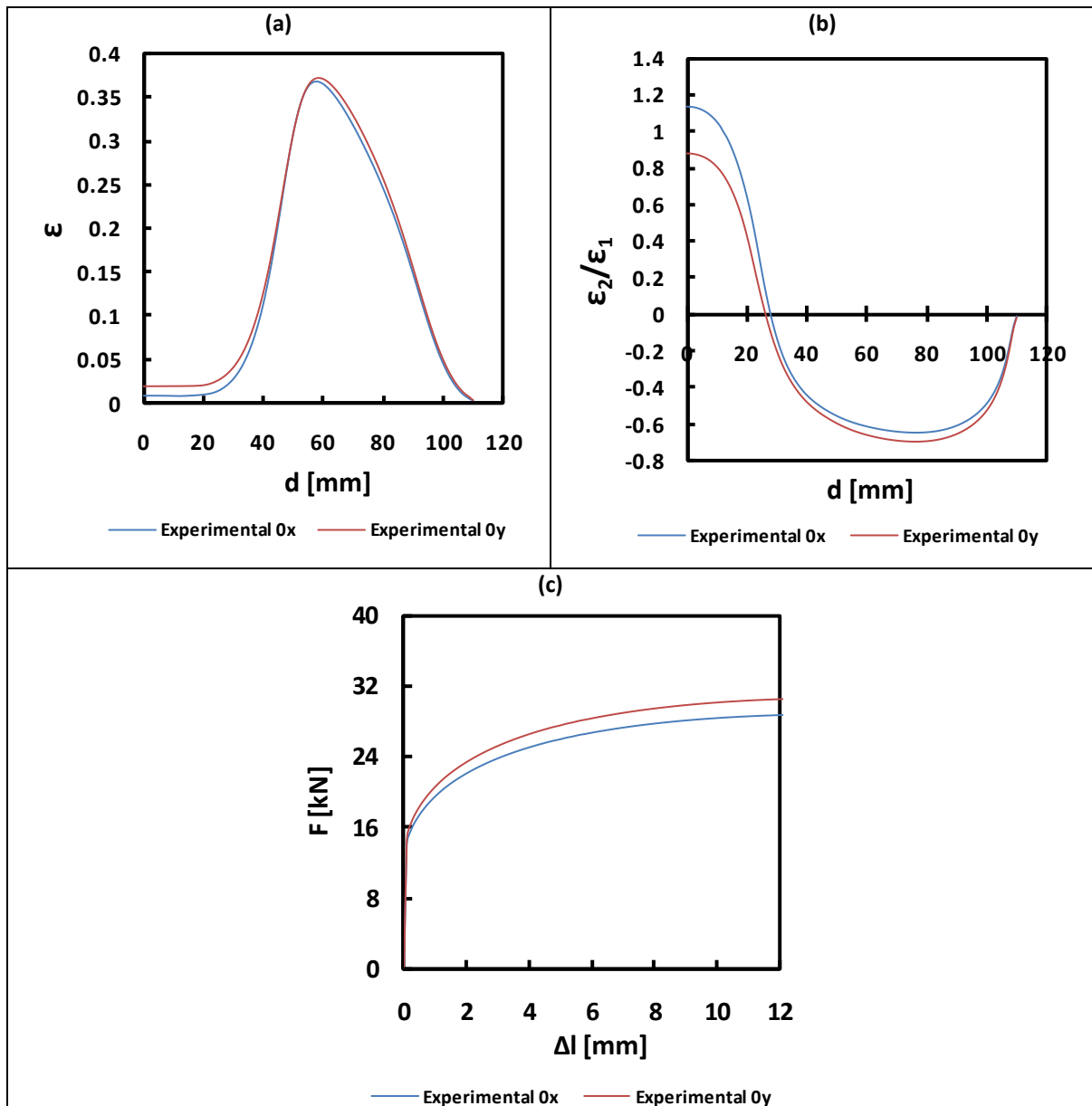


Figura 40 – Diagramas experimentais (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$ , (b)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , (c)  $F$  vs.  $\Delta l$ .

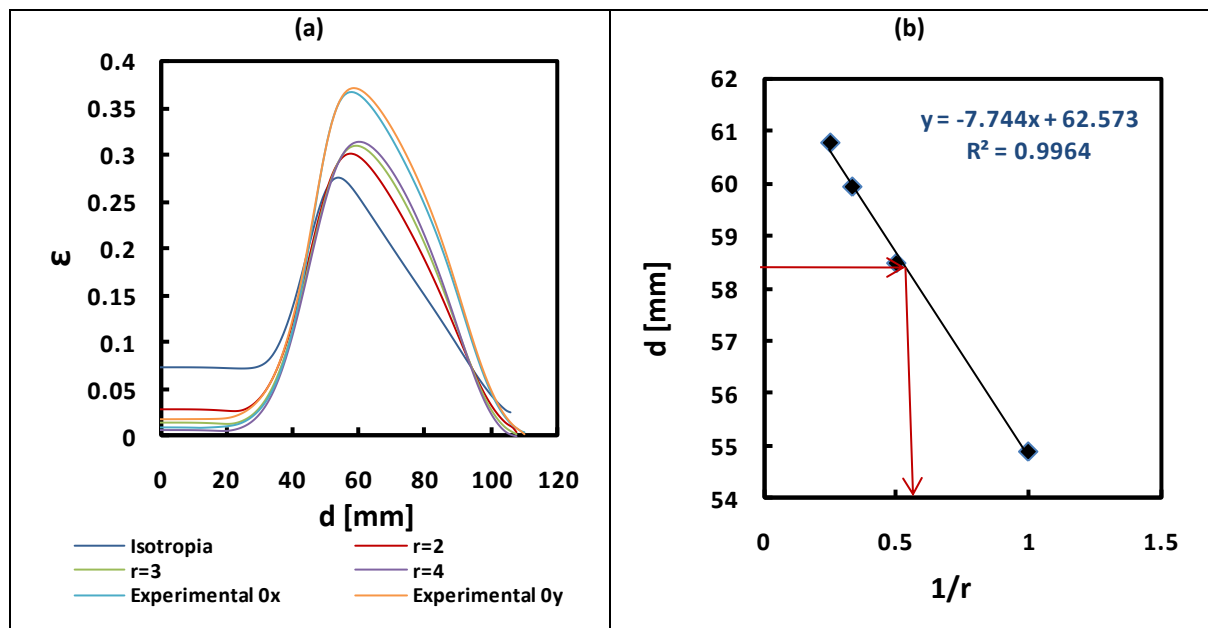


Figura 41 – Diagramas numéricos (a)  $\epsilon$  vs.  $d$  e  $d$  vs.  $1/r$  em isotropia no plano da chapa.

A regressão linear da Figura 41(b), permite estimar um valor de  $r_{médio} = 1.74$  para o caso experimental, com base na média dos valores de  $d$ , correspondentes à deformação plástica equivalente máxima, em  $0x$  e  $0y$ . A Figura 40(b) permite determinar os valores experimentais mínimos de  $\epsilon_2/\epsilon_1$ , em  $0x$  e  $0y$ , de modo a obter a 1ª Estimativa ( $r^*_{0}$  e  $r^*_{90}$ ) para  $r_0$  e  $r_{90}$  experimentais, respectivamente. Os valores calculados, com base na equação (7), foram:  $r^*_{0} = 1.89$  e  $r^*_{90} = 2.36$ . Estas aproximações, obtidas para  $r_{médio}$ ,  $r_0$  e  $r_{90}$ , permitem a realização de uma simulação numérica, cujos resultados são apresentados na Figura 42 e designados por 1ª Estimativa. Na Figura 42 mostram-se também os resultados experimentais para comparação.

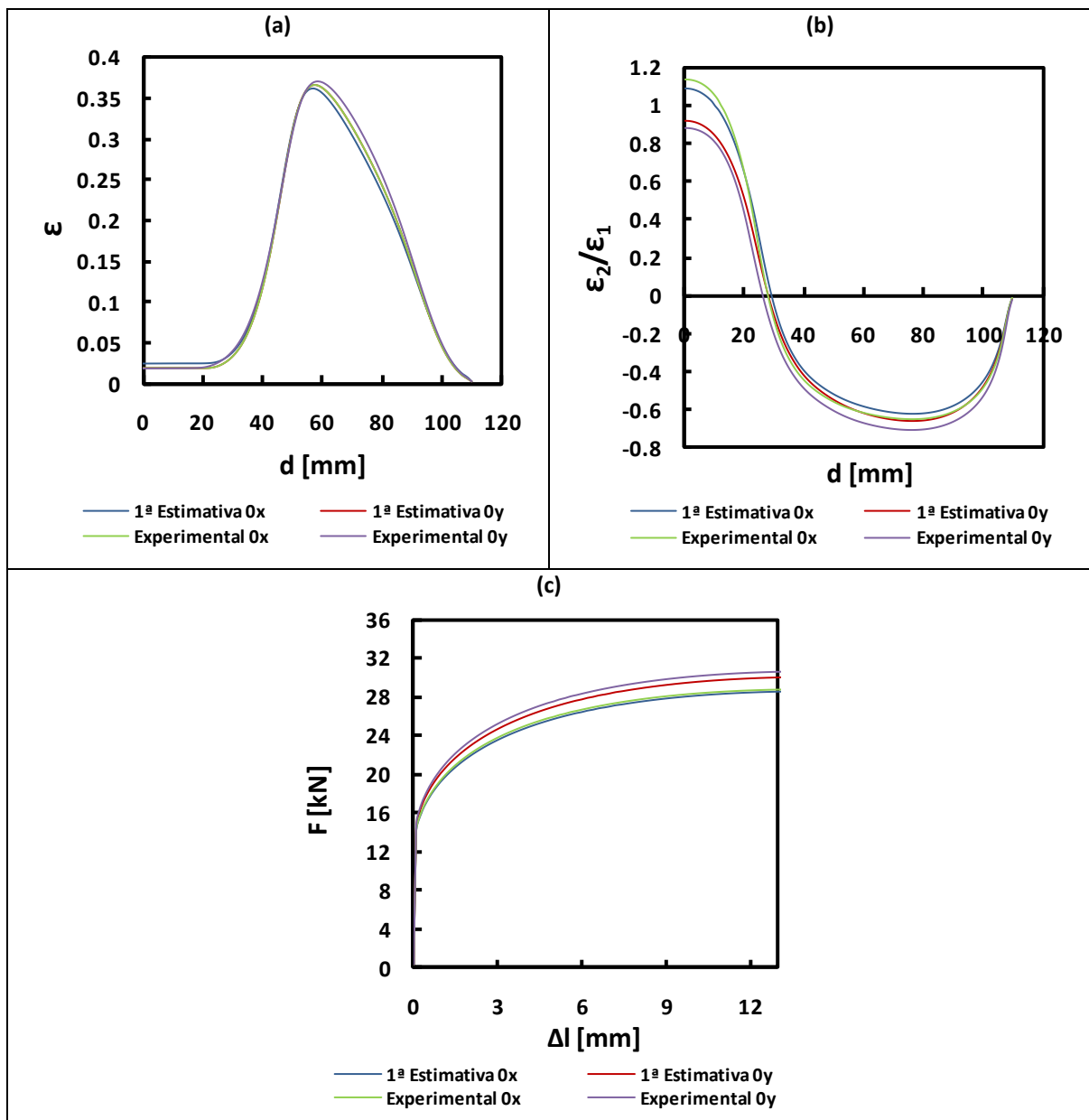


Figura 42 - Diagramas (a)  $\epsilon$  vs.  $d$ , (b)  $\epsilon_2/\epsilon_1$  vs.  $d$  e (c)  $F$  vs.  $\Delta l$  comparativos entre o caso experimental e a 1ª Estimativa.

Os resultados desta simulação não descrevem convenientemente os experimentais. Na Figura 42, pode observar-se que, em geral, as distribuições experimentais e numéricas apresentam diferenças maiores em  $Oy$  do que em  $Ox$ . Em  $Ox$  e  $Oy$ , a distribuição  $\epsilon$  vs.  $d$  numérica apresenta valores de deformação plástica equivalente inferiores aos experimentais, sendo as distâncias  $d$ , correspondentes aos pontos de deformação máxima, também inferiores (Figura 42(a)). Estes resultados indicam que para melhorar o ajuste, deve-se aumentar o valor de  $r_{médio}$  numérico. A análise da Figura 42(b),

que apresenta a distribuição  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , permite constatar que, na região do provete mais próxima da tracção uniaxial em  $\theta_y$ , o valor numérico da razão  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  está acima do experimental. Este resultado sugere que, na próxima simulação, se deve aumentar o valor de  $r_{90}$ . Em  $\theta_x$  o afastamento não é tão acentuado.

As curvas de força são sensivelmente coincidentes em  $\theta_x$ , como se observa na Figura 42(c). Em  $\theta_y$  a diferença aumenta, sendo que a força do ensaio numérico é sempre inferior à experimental. Esta diferença confirma que o valor de  $r_{90}$  precisa de ser alterado.

Nova estimativa dos valores de  $r_{\text{médio}}$ ,  $r_0$  e  $r_{90}$  foi efectuada, com base no estudo das diferenças relativas entre  $r$  e  $r^*$  para os quatro casos de isotropia no plano da chapa, de que se mostram alguns resultados na Figura 41. Na Figura 43(a) apresentam-se as distribuições  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , para estes casos. Com base nestas distribuições, determina-se o valor de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  mais próximo da tracção uniaxial, de modo a calcular  $r^*$  (equação (7)), para estes quatro casos. Com base nos valores de  $r$  e nos valores calculados para  $r^*$  define-se a relação logarítmica apresentada na Figura 43(b). A relação logarítmica entre as diferenças relativas  $[(r - r^*)/r^*]$  e  $r^*$  permite determinar uma nova aproximação para os valores de  $r$  ( $r_{\text{médio}}$ ,  $r_0$  e  $r_{90}$ ), como se indica na Figura 43(b). Os valores determinados foram:  $r_{\text{médio}}=2.00$ ,  $r_0=2.17$  e  $r_{90}=2.77$ .

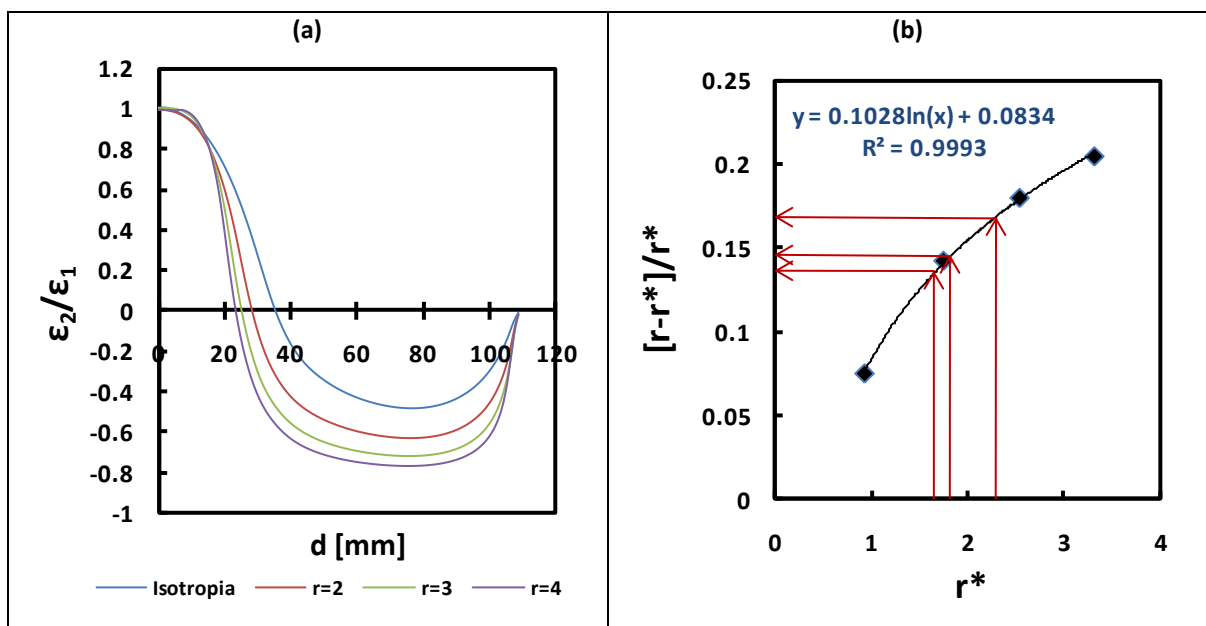


Figura 43 – Diagrama (a)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$  em isotropia no plano da chapa e (b) diagrama das diferenças relativas entre  $r^*$  e  $r$  em isotropia planar.

Com estes dados, foi realizada uma nova simulação, que constitui a 2ª Estimativa dos resultados experimentais. Os resultados obtidos são comparados com os resultados experimentais na Figura 44.

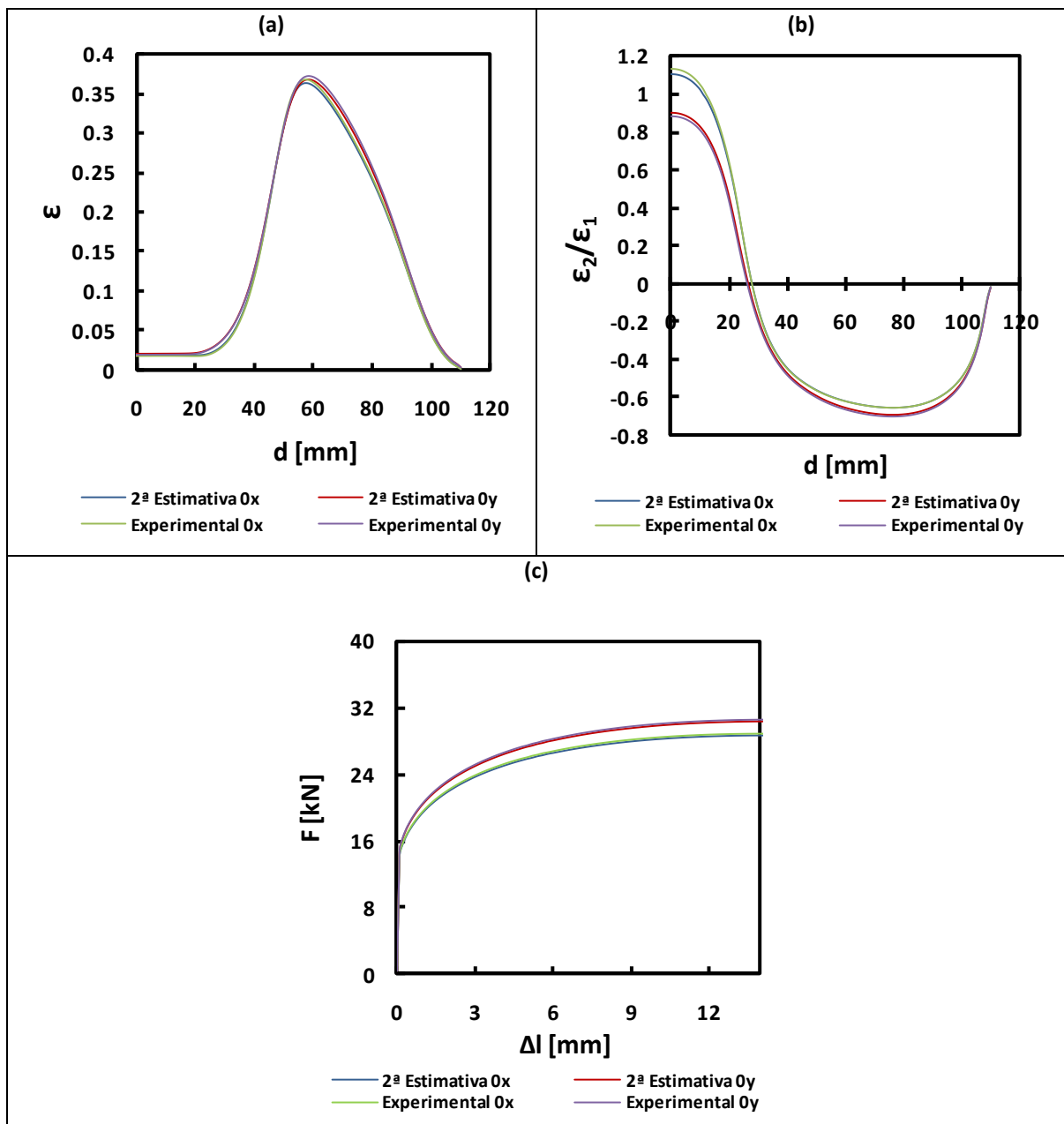


Figura 44 - Diagramas (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$ , (b)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , (c)  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$  e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$  comparativos entre o caso em estudo e a 2ª Estimativa.

A análise da Figura 44 permite observar que esta 2ª Estimativa numérica apresenta resultados mais próximos dos experimentais, embora ainda com algumas diferenças nas distribuições, em particular segundo  $0y$ . De facto, de acordo com a metodologia de análise inversa proposta, a análise das distribuições apresentadas na Figura 44 sugere que deve ser efectuada nova estimativa com ligeiro aumento de  $r_{90}$ . Assim, procedeu-se a um incremento de 0.20 no valor de  $r_{90}$ , e realizou-se uma nova simulação, considerando:  $r_{médio}=2.00$ ,  $r_0=2.17$  e  $r_{90}=2.97$ . A Figura 45 compara os resultados obtidos nesta 3ª Estimativa.



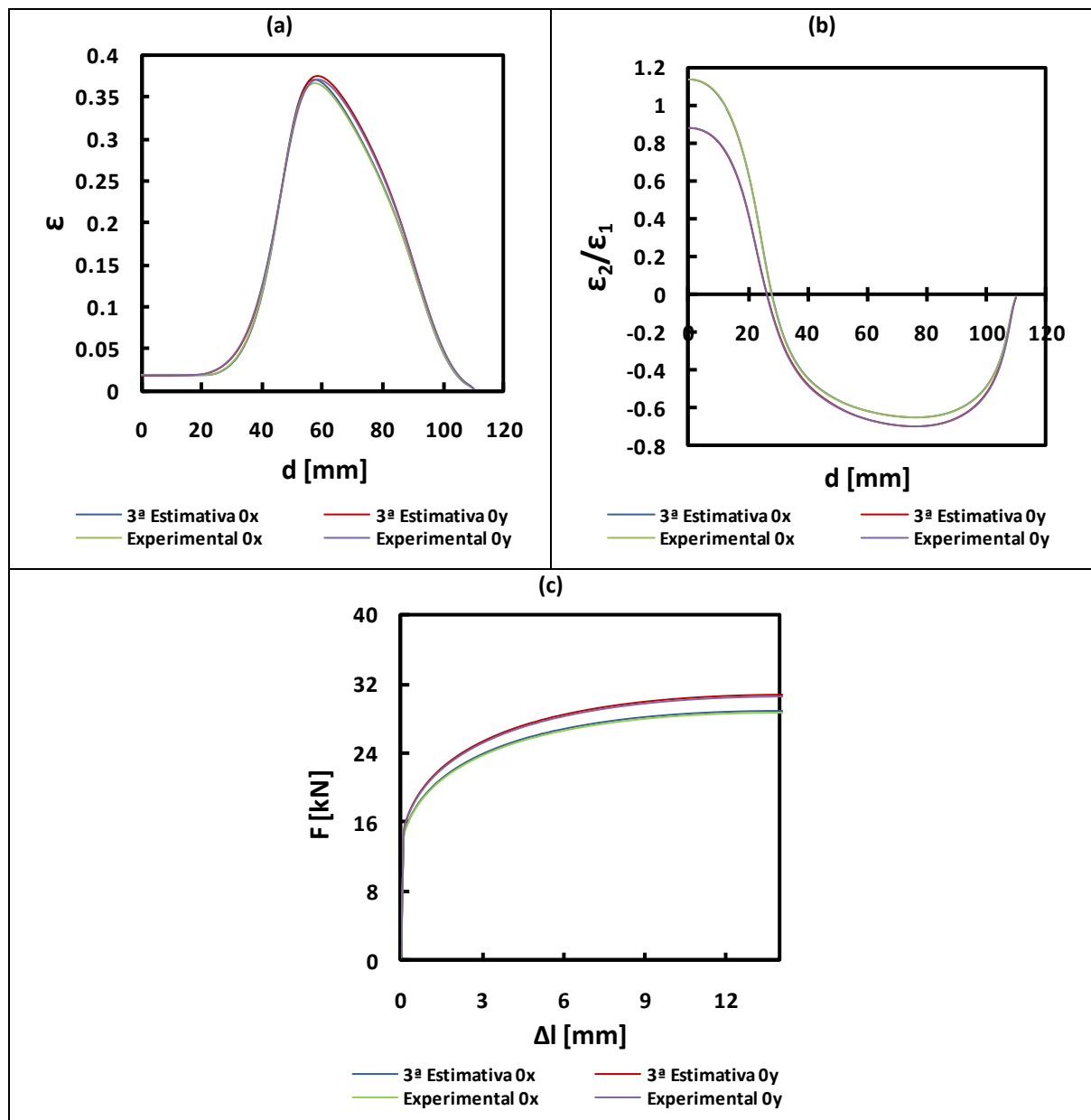


Figura 45 - Diagramas (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$ , (b)  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , (c)  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$  e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$  comparativos entre o caso em estudo e a 3ª Estimativa.

Na Figura 45 observa-se que os resultados desta 3ª Estimativa numérica são sensivelmente coincidentes com os resultados experimentais. Na Tabela XXII estão indicados os valores de  $r_0$ ,  $r_{90}$  e  $r_{médio}$  desta estimativa e os do caso experimental. As diferenças relativas de  $r_0$ ,  $r_{90}$  e  $r_{médio}$  são inferiores a 5%. Também neste caso, o procedimento de otimização dos valores de  $r_{médio}$ ,  $r_0$  e  $r_{90}$  experimentais poderia ter sido repetido com base na análise sucessiva das distribuições  $\varepsilon$  vs.  $d$  e  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , respectivamente (ver 5.3 do algoritmo).

Tabela XXII. Valores e Diferenças relativas dos valores de  $r_0$ ,  $r_{90}$  e  $r_{\text{médio}}$  entre os casos Experimental e a 3ª Estimativa.

Casos	$r_0$	$r_{90}$	$r_{\text{médio}}$
Experimental	2.165	2.930	2.072
3ª Estimativa	2.170	2.970	2
Diferença Relativa	0.23%	1.37%	-3.47%

### 4.3. Caso Drucker+L – Hill (CASO 2)

Nos casos reais, as leis constitutivas não descrevem perfeitamente o comportamento plástico dos materiais. Assim sendo, fomos conduzidos a testar a metodologia anteriormente utilizada, nos casos designados por *Hill-Hill*, num caso mais demonstrativo de realidade. Na ausência de resultados experimentais, simula-se uma situação real, recorrendo a um critério diferente do de Hill, no caso o critério de Drucker+L. A lei de encruamento utilizada continua a ser a lei de Swift.

Na Tabela XXIII estão indicados os parâmetros do critério de anisotropia de Drucker+L e da lei de encruamento de Swift, deste caso de estudo *Drucker+L-Hill*.

Tabela XXIII. Caso experimental *Drucker+L – Hill*: parâmetros de anisotropia e de encruamento.

Caso Experimental ( <i>Drucker+L – Hill</i> )	Critério de Plasticidade: Drucker+L							Lei de Encruamento: Swift		
	$c$	$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$C5$	$C6$	$K$	$n$	$\sigma_0$
2	-0.048	0.546	0.739	1.187	1.000	1.000	1.207	494.2	0.234	134

Na Figura 46 mostra-se a distribuição  $r$  vs.  $\alpha$  no plano da chapa deste caso em estudo, que apresenta anisotropia no plano da chapa.

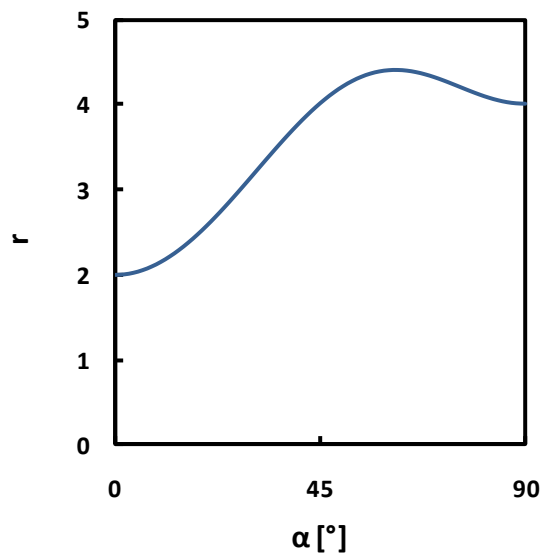


Figura 46. Distribuição  $r$  vs.  $\alpha$  no plano da chapa do caso em estudo.

Numa primeira fase, assume-se que os parâmetros da lei de encruamento inicial são conhecidos e iguais aos indicados na Tabela XXIII, correspondentes aos que teriam sido determinados num ensaio de tracção experimental, segundo  $0x$ , uma vez que se pressupõe que o material experimental (fictício) obedece ao critério de Drucker+L.

Na Figura 47 são apresentados os resultados *experimentais* gerados por simulação numérica do ensaio biaxial do ensaio cruciforme, com as leis constitutivas indicadas na terceira da linha da Tabela XXIII, para um deslocamento  $\Delta l$  imediatamente antes da carga máxima. A Figura 47(a) e (b) apresentam as distribuições, em  $0x$  e  $0y$ , de  $\varepsilon$  vs.  $d$  e  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  vs.  $d$ , respectivamente. A Figura 47(c) mostra o diagrama  $\varepsilon_1$  vs.  $\varepsilon_2$  e a Figura 47(d) a evolução  $F$  vs.  $\Delta l$ .

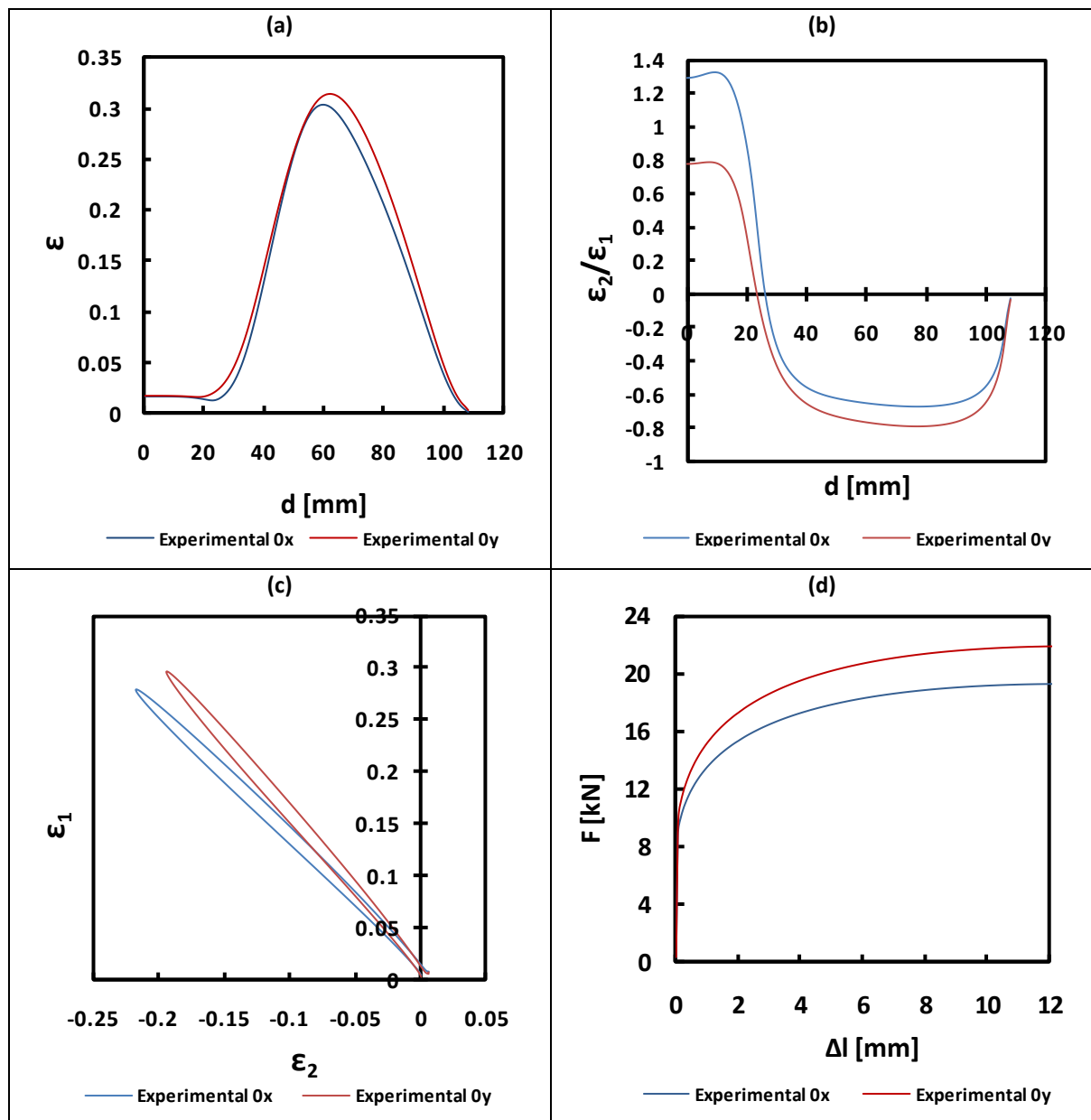


Figura 47 – Diagramas experimentais (a)  $\epsilon$  vs.  $d$ , (b)  $\epsilon_2/\epsilon_1$  vs.  $d$ , (c)  $\epsilon_1$  vs.  $\epsilon_2$  e (d)  $F$  vs.  $\Delta l$ .

Da análise da Figura 47 conclui-se que, como as distribuições segundo  $0x$  e  $0y$  não coincidem, estamos perante o material apresenta um comportamento anisotrópico no plano da chapa, com  $r_0 \neq r_{90}$ . Assim, de acordo com a metodologia proposta realizaram-se 4 simulações em isotropia planar, com  $r=1, 2, 3$  e  $4$ ), de modo a determinar uma aproximação para  $r_{médio}$  experimental. Para cada simulação em anisotropia planar, foi determinado o valor de  $d$  correspondente à deformação plástica equivalente máxima, na distribuição  $\epsilon$  vs.  $d$  (ver Figura 48(a)). Com base nestes valores de  $d$  determinou-se a

relação linear  $d$  vs.  $1/r$ , como se mostra na Figura 48(b). Esta relação linear permite estimar um valor para  $r_{médio}$  do material, com base na média dos valores experimentais de  $d$  em  $\theta_x$  e  $\theta_y$ . O valor previsto é  $r_{médio}=4.90$ .

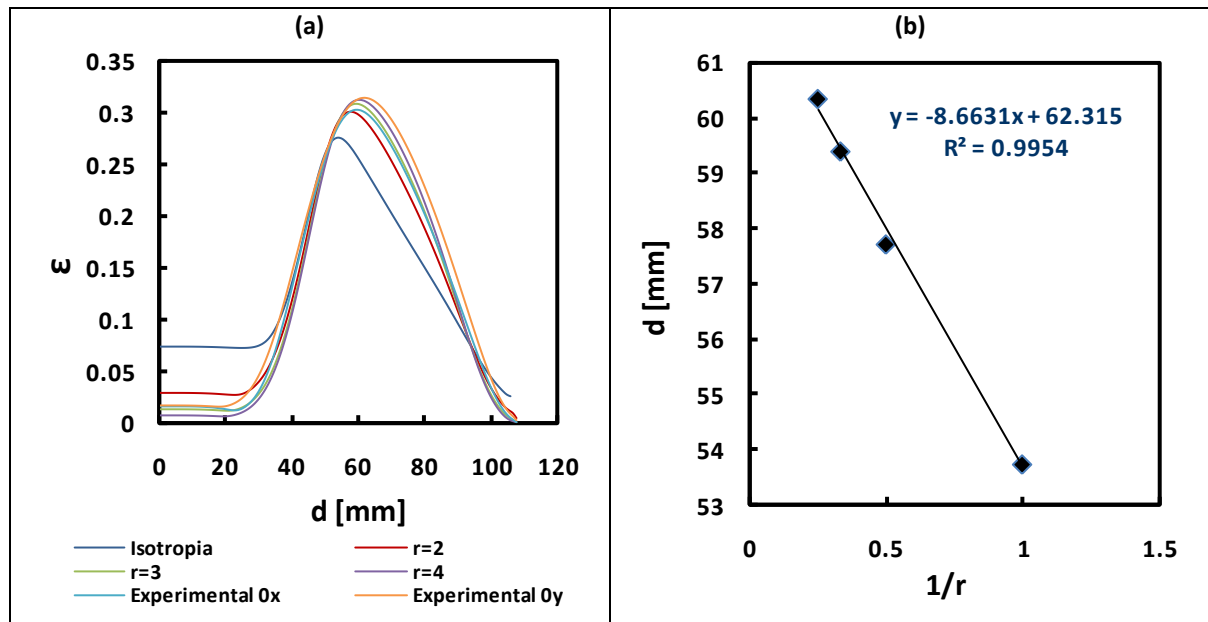


Figura 48 - Diagramas (a)  $\varepsilon$  vs.  $d$  e (b)  $d$  vs.  $1/r$  em isotropia no plano da chapa.

Para obter uma primeira aproximação de  $r_0$  e  $r_{90}$  utilizam-se os valores mínimos experimentais de  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ , em  $\theta_x$  e  $\theta_y$  (Figura 47(b)), e aplica-se a equação (7). Os valores obtidos são  $r^*_{0} = 2.08$  e  $r^*_{90} = 3.94$ . O cálculo de  $r_{45}$  com base nos valores estimados para  $r_{médio}$ ,  $r_0$  e  $r_{90}$ , conduz a um valor de 6.74. Estes valores foram utilizados para definir a distribuição  $r$  vs.  $\alpha$  utilizada na simulação designada por 1ª Estimativa. Na Figura 49 é feita a comparação entre os resultados obtidos nesta 1ª Estimativa e os experimentais.

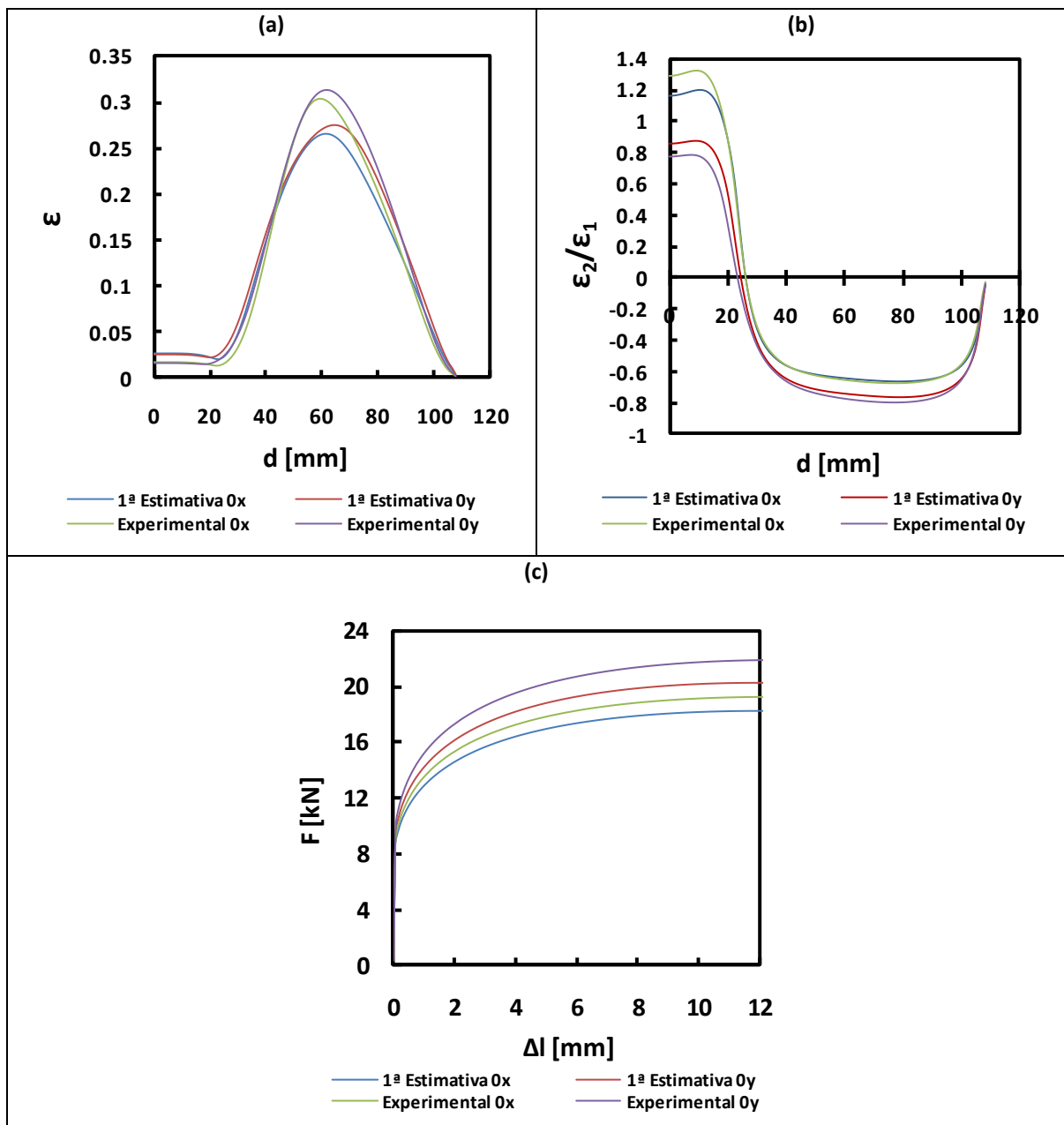


Figura 49 - Diagramas (a)  $\epsilon$  vs.  $d$ , (b)  $\epsilon_2/\epsilon_1$  vs.  $d$  e (c)  $F$  vs.  $\Delta l$  comparativos entre o caso em estudo e a 1ª Estimativa.

A Figura 49 permite observar que a aproximação gerada pela metodologia de análise inversa não descreve o caso em estudo com a precisão desejada. Em particular, na Figura 49(c) observa-se uma grande diferença na evolução  $F$  vs.  $\Delta l$ , em  $0x$  e em  $0y$ . O ajuste das curvas de força é um factor essencial para a metodologia de análise inversa proposta, uma vez que o desnivelamento das curvas em  $0x$  significa que, os valores dos

parâmetros da lei de encruamento que melhor se ajustam ao comportamento do material quando descrito por um dado critério de plasticidade, não são os mais convenientes.

Assim, alterou-se a lei de encruamento, procedendo-se a um incremento de 20MPa no nível geral da tensão, em relação à lei de encruamento inicial; esta descreve bem o comportamento do material, apenas quando este é descrito pelo critério de Drucker+L. Os parâmetros da lei de encruamento isotrópica de Swift, utilizada em nova simulação numérica designada por 2ª Estimativa, são:

$$K = 512.6MPa, \quad n = 0.204, \quad \sigma_0 = 164MPa$$

Esta simulação numérica utilizou estes parâmetros da lei de encruamento e uma evolução de  $r$  no plano da chapa igual ao da 1ª estimativa. Na Figura 50 comparam-se os resultados da 2ª Estimativa e os experimentais, com o auxílio dos diagramas  $F$  vs.  $\Delta l$  e  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

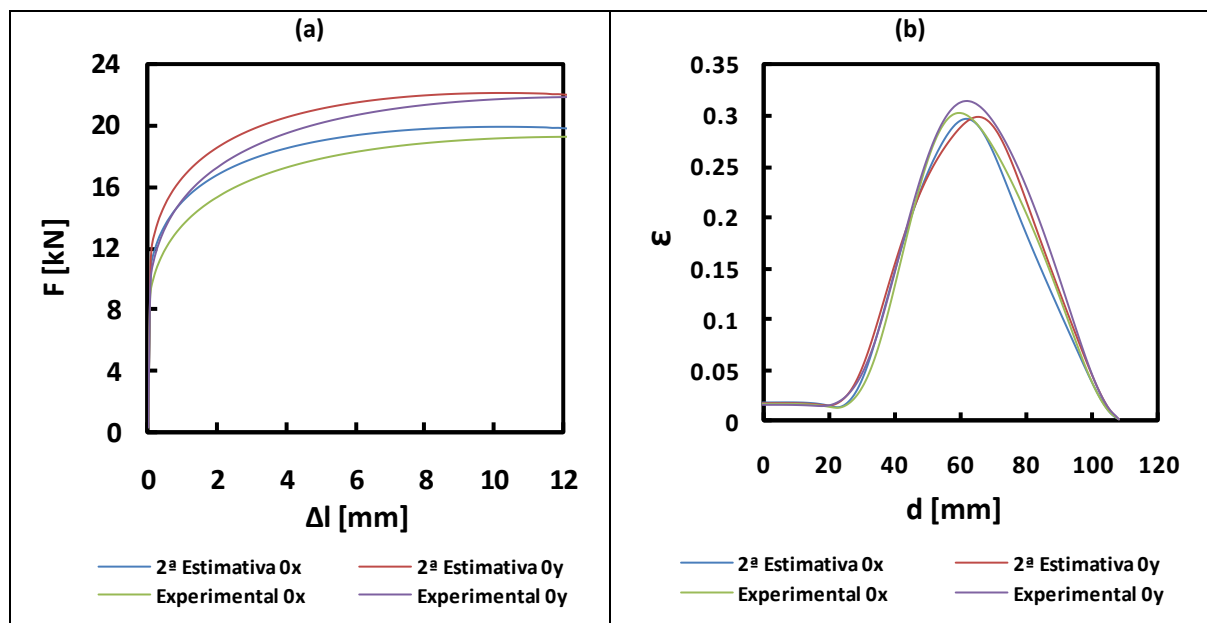


Figura 50 - Diagramas (a)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (b)  $\varepsilon$  vs.  $d$ , comparativos entre o caso em estudo e a 2ª Estimativa.

O posicionamento relativo das distribuições experimental e numérica nos diagramas  $F$  vs.  $\Delta l$  inverteram-se da 1ª para a 2ª Estimativa. O máximo das curvas numéricas  $\varepsilon$  vs.  $d$  aproximam-se das curvas experimentais e mantém o mesmo posicionamento relativo. A evolução das forças obtidas na 2ª Estimativa atinge o máximo, em 0x, para um valor de  $\Delta l$  inferior ao experimental e ao da 1ª Estimativa. Isto significa que a redução do coeficiente de encruamento da 1ª para a 2ª Estimativa foi demasiado

grande. De facto, da análise directa sabe-se que o aumento de  $n$  conduz ao aumento da coordenada  $d$  para a qual ocorrem os máximos de  $\varepsilon$ . Por outro lado, a aproximação das curvas experimentais e numéricas do diagrama da Figura 50(b), pode ser conseguido com uma diminuição de  $r_{médio}$ .

Assim, realizou-se uma simulação, designada por 3ª Estimativa, em que se aumentou  $n$  de 0.204 para 0.224 (mantendo a tensão limite de elasticidade inalterada) e reduziu-se o valor de  $r_{médio}$  de 4.90 para 3.90, mantendo os valores de  $r_0$  e  $r_{90}$  inalterados. A Figura 51 compara os resultados da 3ª Estimativa com os experimentais. A Figura 51(a) apresenta a evolução  $F$  vs.  $\Delta l$  e a Figura 51(b) a distribuição  $\varepsilon$  vs.  $d$ .

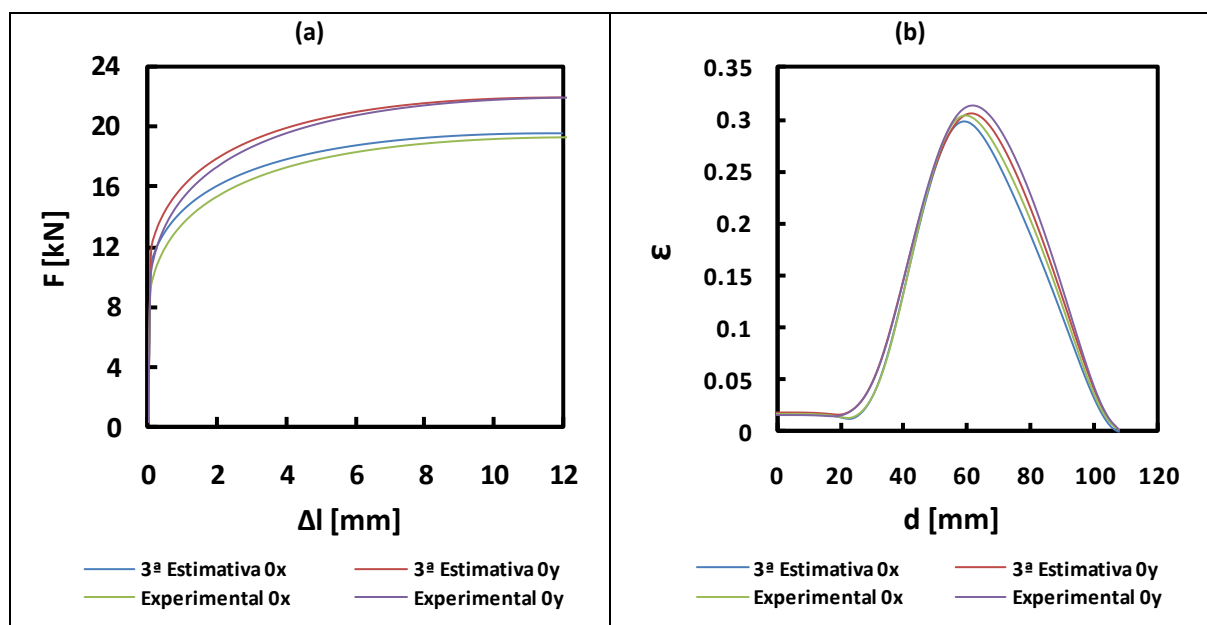


Figura 51 - Diagramas (a)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (b)  $\varepsilon$  vs.  $d$ , comparativos entre o caso em estudo e a 3ª Estimativa.

Globalmente, observa-se que a 3ª Estimativa apresenta melhores resultados do que a 2ª Estimativa (ver Figura 50). Porém, nas curvas  $F$  vs.  $\Delta l$  ainda se notam uma clara diferença em  $Ox$  e  $Oy$ , especialmente na região inicial das curvas. As distribuições  $\varepsilon$  vs.  $d$  apresentam ainda diferenças na região do pico.

Assim sendo, na simulação correspondente à 4ª Estimativa, reduziu-se o valor da tensão limite de elasticidade  $\sigma_0$ , de 164MPa para 144MPa, com o objectivo de reduzir o nível inicial das curvas de numéricas de força. A Figura 52 resume os resultados obtidos com esta 4ª Estimativa.



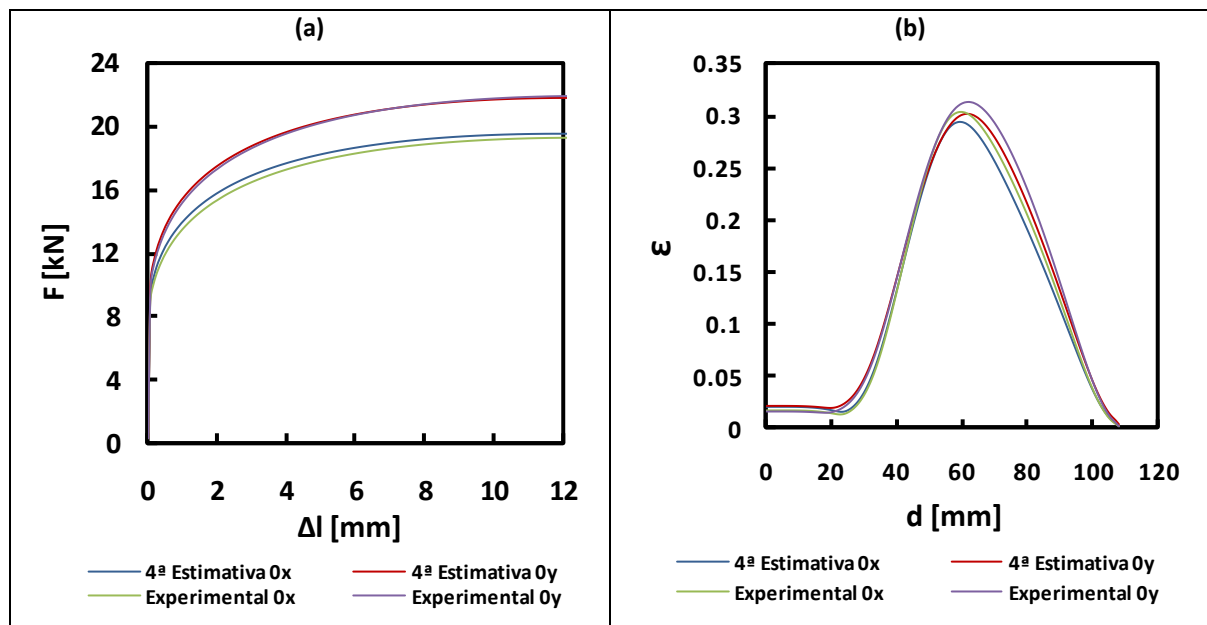


Figura 52 - Diagramas (a)  $F$  vs.  $\Delta l$  e (b)  $\epsilon$  vs.  $d$ , comparativos entre o caso em estudo e a 4ª Estimativa.

Na Figura 52(a) observa-se que a evolução  $F$  vs.  $\Delta l$  é relativamente semelhante para os resultados numéricos da 4ª Estimativa e o caso experimental, sendo mais próxima em  $0y$ . Na Figura 52(b), que apresenta a distribuição  $\epsilon$  vs.  $d$ , observa-se que os valores máximos numéricos de deformação plástica equivalente da 4ª Estimativa e experimentais ocorrem para, sensivelmente, a mesma posição  $d$ . No entanto, os valores numéricos máximos de  $\epsilon$  são inferiores aos experimentais. Na análise directa, concluiu-se que a redução do valor de  $r_{45}$  conduz ao aumento dos valores máximos das distribuições  $\epsilon$  vs.  $d$  e à redução do correspondente  $d$ . Além disso, a alteração de  $r_{45}$  não induz alterações na evolução  $F$  vs.  $\Delta l$ . Assim, fizeram-se simulações numéricas alterando o valor de  $r_{45}$ , sucessivamente desde 6.75 até 4.00 (mantendo inalterados todos os restantes parâmetros). A Figura 53 compara os resultados experimentais com os obtidos numericamente com este último valor de  $r_{45}$  (4.00), aqui designada por 5ª Estimativa.

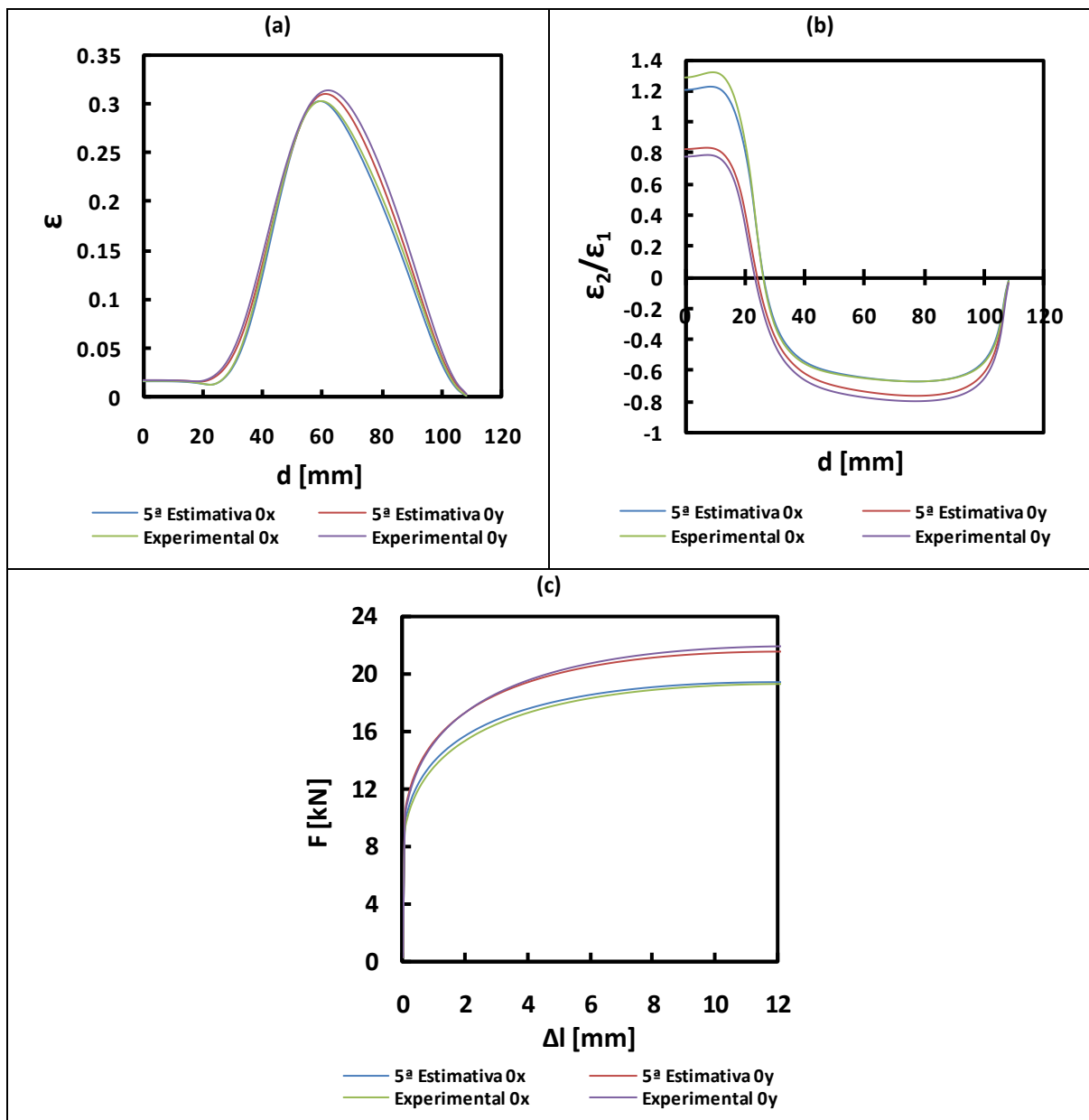


Figura 53 - Diagramas (a)  $\epsilon$  vs.  $d$ , (b)  $\epsilon_1$  vs.  $\epsilon_2$  e (c)  $F$  vs.  $\Delta l$  comparativos entre o caso em estudo e a 5ª Estimativa.

A análise da Figura 53 permite observar que as distribuições experimentais e numéricas apresentam diferenças bem mais reduzidas do que as da 4ª Estimativa. Uma vez que o comportamento anisotrópico do material em estudo foi descrito com um critério diferente do de Hill'48, pode afirmar-se que um ajuste perfeito entre as variáveis numéricas e experimentais, em  $0x$  e  $0y$ , não será possível de obter. No entanto, as diferenças entre numérico e experimental poderiam ainda ser minimizadas prosseguindo com o procedimento descrito no algoritmo de análise inversa (ver 5.3 do algoritmo).

Na Tabela XXIV estão indicados os valores de  $r_0$ ,  $r_{90}$  e  $r_{médio}$  do caso experimental e os obtidos por análise inversa (5ª Estimativa), bem como as suas diferenças relativas. No caso de alguns parâmetros, nomeadamente  $r_0$ ,  $r_{médio}$  e  $\sigma_0$ , as diferenças relativas entre resultados finais de análise inversa e experimentais são significativas. Isto está relacionado com o facto de não se prosseguir com a análise inversa para além da 5ª Estimativa. Mas, também está relacionado com o facto de o critério de Hill'48 não poder descrever convenientemente o comportamento experimental do material em estudo, que obedece ao critério de Drucker+L.

**Tabela XXIV. Valores e diferenças relativas de  $r_0$ ,  $r_{90}$ ,  $r_{médio}$ ,  $K$ ,  $n$  e  $\sigma_0$ , experimentais e obtidos por análise inversa (5ª Estimativa).**

Casos	$r_0$	$r_{90}$	$r_{médio}$	$K$	$n$	$\sigma_0$
<b>Experimental</b>	2.00	4.00	3.51	494.2	0.234	134
<b>5ª Estimativa</b>	2.28	4.14	3.92	508.1	0.225	145
<b>Diferença Relativa</b>	14.00%	3.50%	11.68%	1.40%	-3.85%	8.21%

#### **4.3.1. Análise das superfícies limite de elasticidade – encruamento isotrópico**

Nesta secção, analisam-se as superfícies limite de elasticidade de Hill'48 para o material do CASO 2, obtidas por diferentes metodologias de identificação de parâmetros de leis constitutivas. É possível realizar esta análise por diversas metodologias, uma vez que o comportamento plástico do material é perfeitamente descrito pelo critério de plasticidade de *Drucker+L* e pela lei de encruamento de Swift, cujos parâmetros são conhecidos (ver Tabela XXIII e Figura 46). Assim, podem conhecer-se todos as grandezas habitualmente determinadas experimentalmente, nomeadamente as distribuições de  $r(\alpha)$  e  $\sigma(\alpha)$  no plano da chapa e os valores de  $\sigma_b$  e  $r_b$  determinados em em expansão biaxial, respectivamente, a tensão limite de elasticidade e coeficiente de anisotropia.

Neste contexto, a superfície limite de elasticidade inicial do material é comparada com as obtidas por análise inversa e por um método clássico de determinação de parâmetros de anisotropia. No método método clássico aqui utilizado (Chaparro, 2006),

---

os parâmetros de anisotropia são determinados com recurso a ensaios de tracção uniaxial, realizados segundo diferentes orientações dos provetes em relação à direcção de laminagem, e com recurso a um ensaio biaxial, para determinação dos respectivos valores de  $\sigma_b$  e  $r_b$ . No caso em estudo, consideraram-se os valores obtidos pelo critério de Drucker+L para  $\sigma(\alpha)$  e de  $r(\alpha)$ , em tracção uniaxial para as orientações  $\alpha=0^\circ, 14^\circ, 30^\circ, 44^\circ, 60^\circ, 74^\circ$  e  $90^\circ$ , e os valores obtidos para  $\sigma_b$  e  $r_b$ . Cada um dos valores da tensão uniaxial e do coeficiente de anisotropia possui o peso de 0.1429 e cada um dos valores de  $\sigma_b$  e  $r_b$  possuem o peso de 0.5. Com recurso a um algoritmo de optimização foram determinados os parâmetros de anisotropia *Hill'48* que melhor descrevem o caso em estudo (Chaparro, 2006).

Na Figura 54 compara-se a superfície limite de elasticidade *real* (inicial) com as obtidas por análise inversa (Figura 54(a)) e pelo método clássico (Figura 54(b)). A análise desta figura permite constatar que a metodologia de análise inversa proposta, conduz a uma boa aproximação da superfície limite de elasticidade ao caso *real* em estudo. A superfície obtida pelo método clássico apresenta em geral maior afastamento, em particular para  $\sigma_1=\sigma_2$  (solicitação biaxial). Este afastamento poderá estar relacionado com o peso relativo atribuído aos dados experimentais no procedimento clássico, que porém constitui é um problema de difícil resolução (Chaparro, 2006).

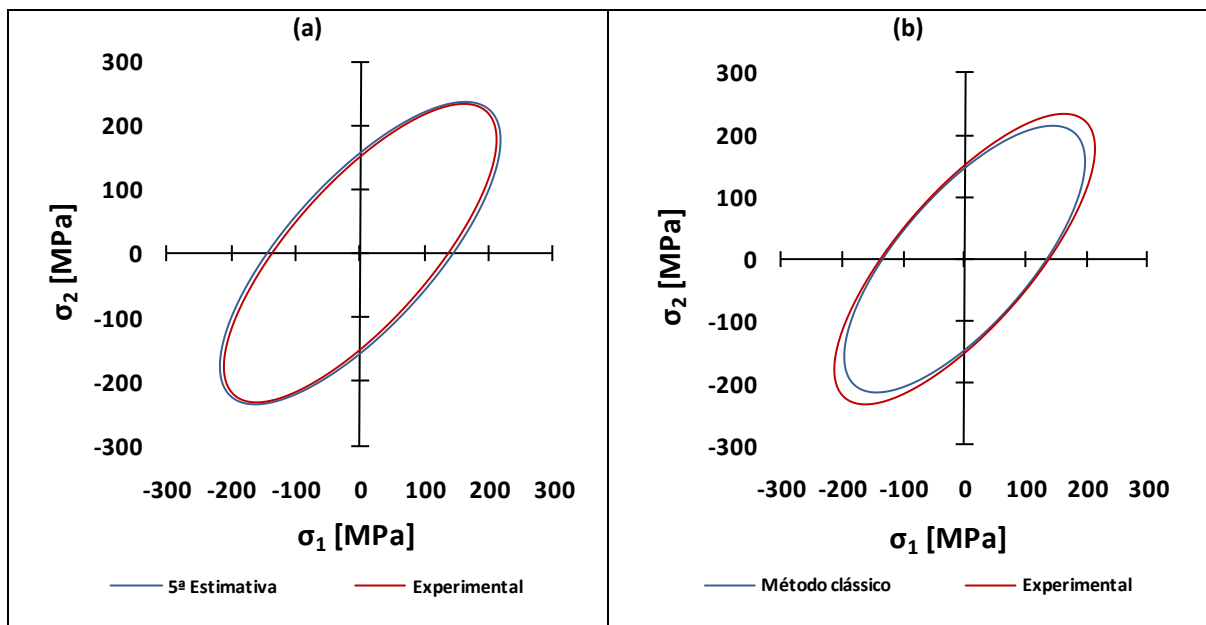


Figura 54 – Comparação da superfícies limite de elasticidade *real* (inicial), com as obtidas por: (a) Análise inversa (5ª Estimativa) e (b) Método clássico.

Na Figura 55 comparam-se as evoluções, durante a deformação, das superfícies limite de elasticidade *real* com a obtida por análise inversa. Não se apresenta a evolução da superfície obtida pelo método clássico, uma vez que a lei de encruamento isotrópico utilizada é a mesma da do caso experimental em estudo e, como tal, manterá, durante a deformação, o mesmo afastamento relativo da superfície real. A evolução foi analisada para quatro valores de deformação equivalente: 0, 0.25, 0.50 e 1.

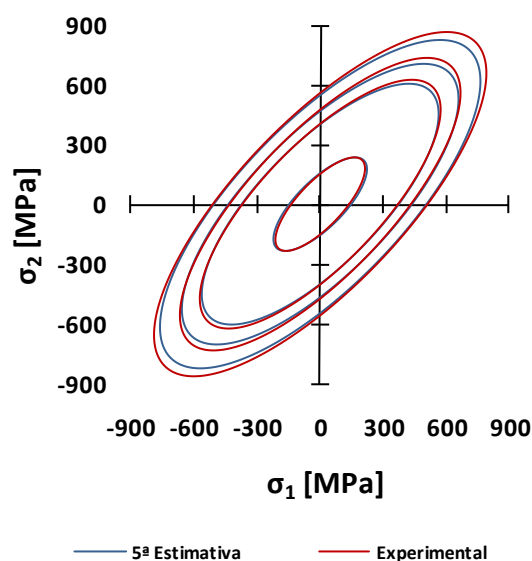


Figura 55 – Superfícies limite de elasticidade par  $\varepsilon = 0, 0.25, 0.5$  e  $1$ .

Na figura observa-se que as diferenças relativas entre as duas superfícies aumentam para trajectória  $\sigma_1=\sigma_2$ , embora o inverso aconteça para as regiões em tracção pura, o que atesta a boa previsão realizada por análise inversa, mesmo considerando que este procedimento fosse interrompido prematuramente.

#### **4.3.2. Simulação numérica da estampagem de uma taça em cruz**

Nesta secção, o processo de estampagem de uma taça em cruz serve para testar os resultados obtidos pela metodologia de análise inversa. As simulações realizadas dizem respeito ao caso *experimental* (critério de plasticidade de Drucker+L e solução inicial da lei de encruamento) e às soluções para os parâmetros do critério de Hill'48 e da lei de encruamento, obtidas por análise inversa e pela metodologia clássica.

O processo de estampagem foi simulado tendo em conta a geometria das ferramentas, que incluem uma matriz fechada e considerou um deslocamento total do punção de 60mm. Devido às condições de simetria geométricas e material apenas foi considerada no estudo  $\frac{1}{4}$  da geometria da taça. A chapa de dimensão inicial 125x125x1 mm foi descritizada com elementos finitos sólidos de 8 nós, com uma dimensão média no plano de 2.0 mm e duas camadas em espessura. A força total aplicada pelo cerra-chapas foi de 290 kN e o contacto com atrito, modelado pelo critério de Coulomb, considerou um coeficiente de atrito constante, igual a 0.03. Na Figura 56(a) apresenta-se o aspecto global da chapa e na Figura 56(b) a discretização considerada na simulação numérica, com a identificação do sistema de eixos  $Ox$  e  $Oy$ , após conformação no caso da simulação *experimental*.

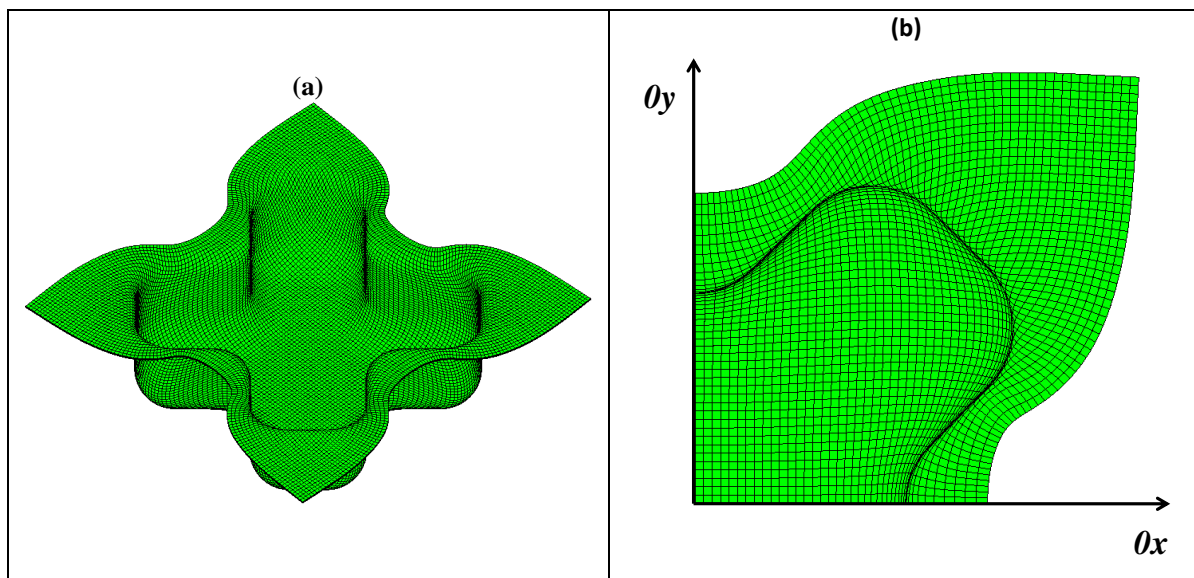


Figura 56 – Discretização após conformação da taça em cruz: (a) taça completa e (b) fracção simulada, com os referenciais de estudo  $0x$  e  $0y$ .

Na Figura 57 mostram-se os diagramas de deslizamento da aba ( $\delta$ ) em função do ângulo  $\alpha$ , relativo à direcção de laminagem ( $0x$ ). Nesta figura são comparados os resultados *experimentais* com os obtidos no caso de análise inversa e do método clássico.

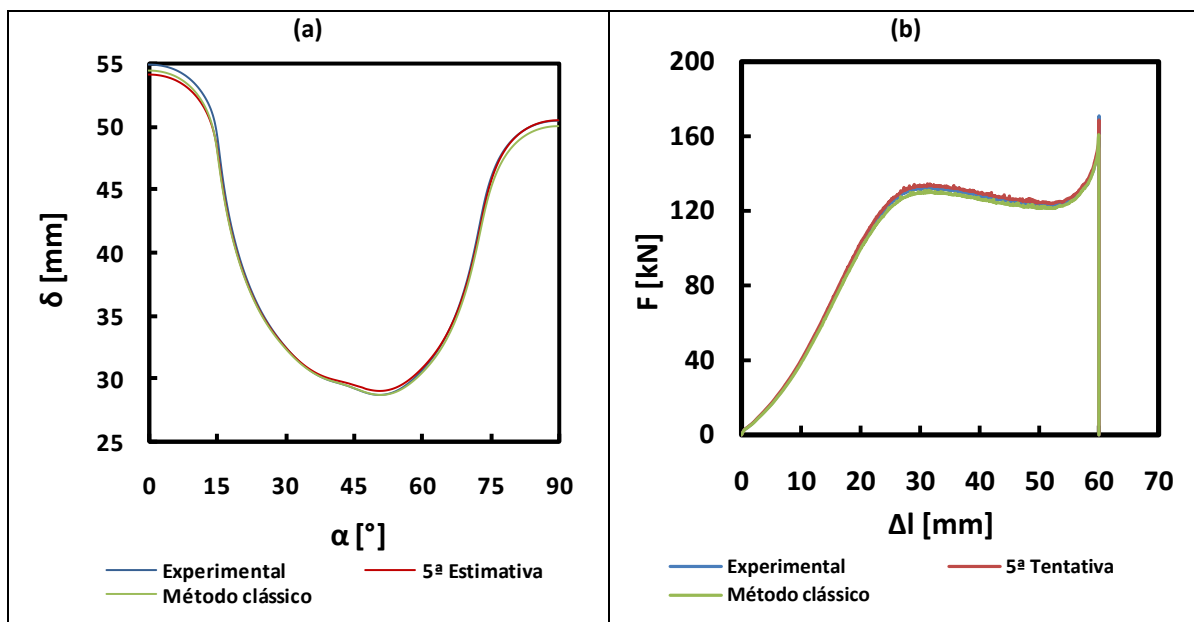


Figura 57. Diagramas (a)  $\delta$  vs.  $\alpha$  e (b)  $F$  vs.  $\Delta l$ .

O deslizamento da aba apresenta uma ligeira diferença, desde  $\alpha=0^\circ$  até  $\alpha=15^\circ$ , entre a curva do caso experimental e as restantes. De  $\alpha=15^\circ$  até  $\alpha=90^\circ$  o deslizamento obtido com os modelos constitutivos cujos parâmetros foram determinados por análise

inversa é coincidente com a do caso experimental. O deslizamento previsto com o modelo constitutivo identificado pelo método clássico apresenta uma diferença visível na região entre  $\alpha=75^\circ$  e  $\alpha=90^\circ$ .

Na Figura 58(a), (b) e (c) comparam-se as distribuições da deformação plástica equivalente ao longo de  $0x$ ,  $0y$  e  $0x=0y$ , respectivamente, para o caso experimental, análise inversa e método clássico. Globalmente, a deformação plástica equivalente prevista para todos os casos é muito semelhante. No entanto, a evolução prevista pelo método clássico é mais próxima da do caso experimental do que a do caso de análise inversa, embora as diferenças não sejam significativas em qualquer dos casos.



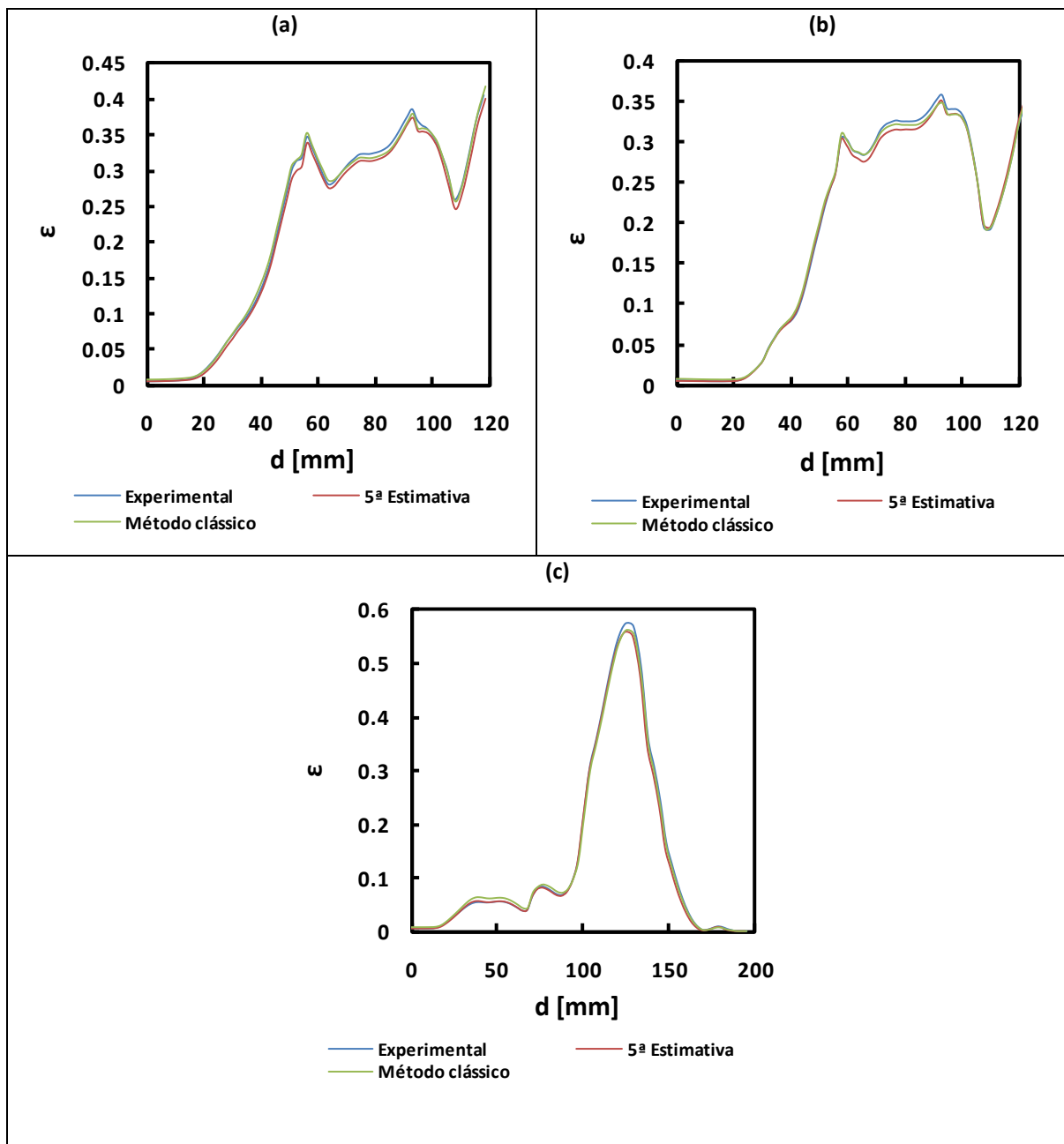


Figura 58. Diagramas  $\varepsilon$  vs.  $d$ : (a) em  $\theta_x$ , (b) em  $\theta_y$  e (c) em  $\theta_x = \theta_y$ .

Finalmente, na Figura 59 apresenta-se a distribuição da espessura  $t$  da chapa, prevista com os três casos, ao longo de  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  e  $\theta_x = \theta_y$ . Estas distribuições de espessura apresentam algumas diferenças, sendo a evolução prevista a partir dos resultados obtidos por análise inversa globalmente mais próxima do caso experimental do que a prevista a partir dos resultados obtidos pelo método clássico.

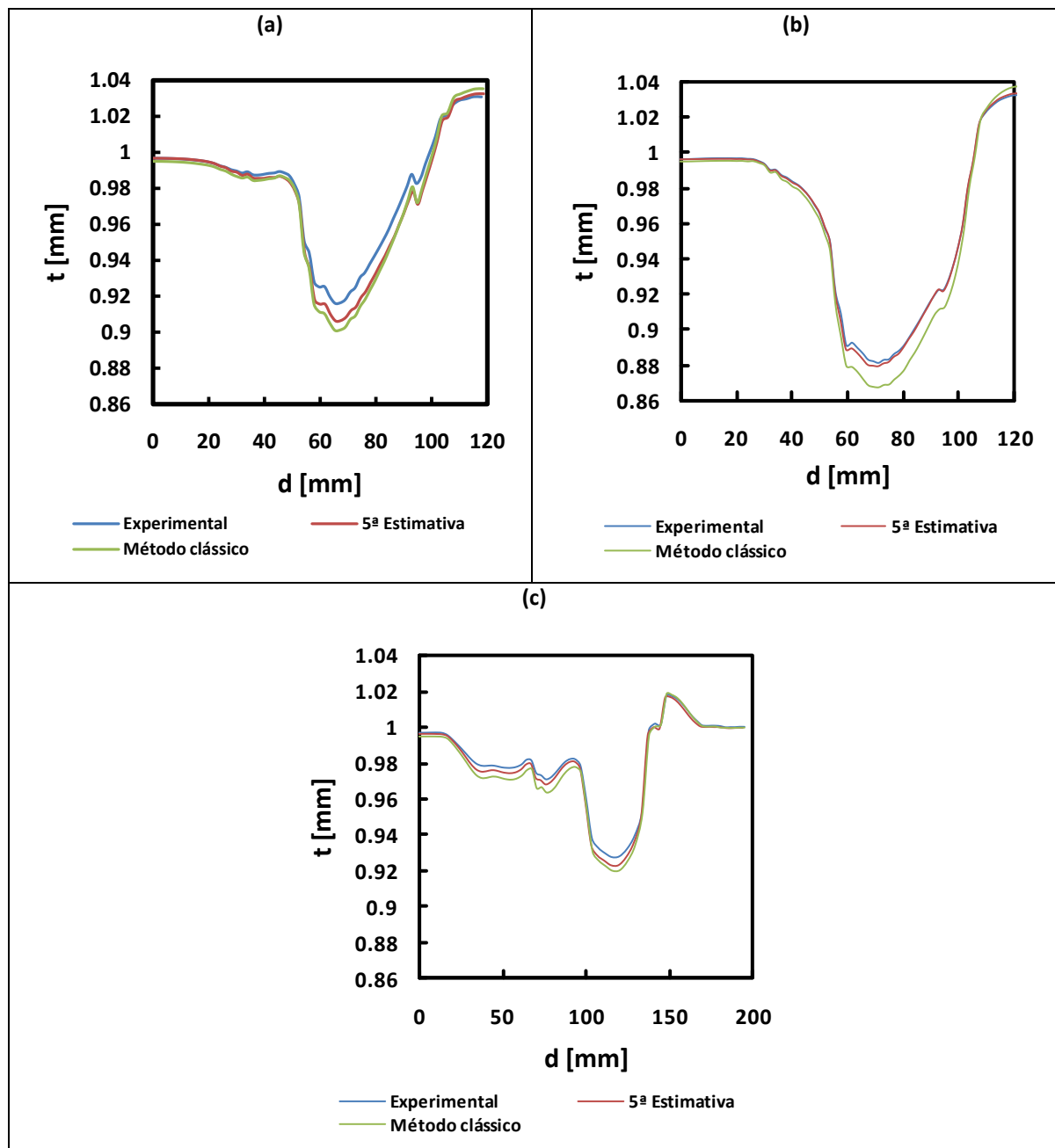


Figura 59. Diagramas  $t$  vs.  $d$ : (a) em  $\theta_x$ , (b) em  $\theta_y$  e (c) em  $\theta_x = \theta_y$ .

Os resultados obtidos para a estampagem da taça em cruz indicam que a metodologia de análise inversa proposta pode ser uma alternativa interessante aos métodos clássicos, uma vez que necessita apenas de um único ensaio experimental e não carece de nenhuma decisão, sempre difícil de tomar sobre os pesos relativos das variáveis a considerar no procedimento de identificação dos parâmetros dos modelos.

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho debruçou-se sobre a possibilidade de recorrer a uma metodologia de análise inversa, aplicada a um provete com deformação não-homogénea, para determinar os parâmetros de anisotropia do critério Hill'48 e da lei de encruamento de Swift, de chapas metálicas. O desenvolvimento da metodologia de análise inversa proposta apoiou-se no estudo por simulação numérica de ensaios de tracção biaxial de provetes cruciformes. Em seguida, resumem-se as principais etapas deste trabalho e as principais conclusões.

O estudo da influência da geometria do provete cruciforme nos resultados obtidos revelou que, uma geometria com as abas muito curtas aumenta a influência da zona de curvatura do provete nos resultados; para abas muito longas, a evolução da deformação plástica desde o centro do provete até à extremidade da aba é muito suave, com valores de deformação plástica relativamente reduzidos. Assim, seleccionou-se uma geometria de provete em que a razão entre o comprimento das abas e a largura da região central do provete é igual a 2, que apresenta um melhor balanço entre as especificações exigidas. Uma vez otimizada a geometria de provete, procedeu-se ao estudo por análise directa de resultados numéricos. No estudo de diversos casos de isotropia e de anisotropia no plano da chapa, constatou-se que existem diversas tendências nos resultados analisados. Desta forma, foi possível estabelecer relações que descrevem essas tendências.

A descrição e quantificação das tendências na análise directa, permitiu identificar relações entre os parâmetros do material, tais como  $r_{\text{médio}}$ ,  $r_0$  e  $r_{90}$  (que descrevem a evolução  $r(\alpha)$  no plano da chapa),  $\sigma_0$  e  $n$  (que descrevem o encruamento), e os resultados do ensaio de tracção biaxial do provete cruciforme. Com base nestas relações, desenvolveu-se e validou-se uma metodologia de análise inversa. Esta metodologia foi validada numericamente com recurso a quatro casos de estudo. Nos três primeiros casos, a metodologia proposta permitiu identificar de forma eficiente os parâmetros de anisotropia do material em estudo, cujo comportamento foi assumido obedecer ao critério de Hill'48. No quarto caso de estudo, apesar de o comportamento

---

plástico do material ser descrito com o critério Drucker+L, que se caracteriza por apresentar uma geometria da superfície limite de plasticidade mais flexível, a metodologia de análise inversa permitiu uma boa aproximação dos resultados dos parâmetros do critério de plasticidade e da lei de encruamento.

Neste último caso de estudo, foi realizada uma análise comparativa das superfícies limite de elasticidade obtidas por análise inversa e pelo método clássico de identificação de parâmetros com o comportamento perfeitamente descrito com o critério de Drucker+L (caso em estudo). Constatou-se que a metodologia de análise inversa é mais eficaz na definição da superfície de plasticidade na região de tensão biaxial do que a metodologia clássica, e que, de modo geral, a superfície de plasticidade inicial obtida por análise inversa é muito próxima da experimental. Estudou-se também a evolução da superfície para diferentes valores de  $\varepsilon$ , e observou-se que os resultados obtidos por análise inversa se aproximam dos experimentais nas regiões de tracção uniaxial, quer segundo  $Ox$  quer segundo  $Oy$ , à medida que  $\varepsilon$  aumenta.

Por fim, foi estudado um caso de estampagem de uma taça em cruz, com o objectivo de comparar os resultados *experimentais*, isto é obtidos com os modelos constitutivos que descrevem perfeitamente o comportamento do material (e respectivos parâmetros), com os obtidos por análise inversa e pelo método clássico. Neste estudo, concluiu-se que a metodologia proposta de análise inversa é eficaz, apresentando resultados satisfatórios.

Em resumo, este trabalho exploratório mostrou que é possível desenvolver uma metodologia de análise inversa para determinar os parâmetros dos modelos constitutivos do material, particularmente o critério de plasticidade de Hill'48 e a lei de encruamento de Swift. Esta metodologia deverá ser facilmente adaptada a outros modelos constitutivos. Para proceder à sua validação experimental, seria necessário realizar o projecto de um equipamento de ensaios de tracção biaxial para provetes cruciformes, de modo a obter os resultados experimentais de referência. Se o projecto deste equipamento incluir um dispositivo experimental que permita a realização de ensaios com inversão de trajectória, poderá ser possível desenvolver uma metodologia que permita a identificação de todos os parâmetros dos modelos constitutivos (incluindo a lei de encruamento isotrópico e/ou cinemático, da superfície de plasticidade), habitualmente utilizados na descrição do comportamento plástico de chapas metálicas. Finalmente, a conveniente validação

experimental exigirá estudos de erro, nomeadamente dos erros experimentais e numéricos e do associado à aptidão dos modelos constitutivos (usados na análise inversa) para descreverem o comportamento do material.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abu-Farha, F., Hector, L.G. e Khraisheh, M. (2009) *Cruciform-Shaped Specimens for Elevated Temperature Biaxial Testing of Lightweight Materials*, JOM Journal of the Minerals, Metals and Materials Society, 61 (8), 48-56.
- Alves, J.L. (2003) *Simulação numérica do processo de estampagem de chapas metálicas: Modelação mecânica e métodos numéricos*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- Chaparro, B.M. (2006) *Comportamento plástico de materiais metálicos: Identificação e optimização de parâmetros*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- Hill R. (1948) *A theory of yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 193, 281-297.
- Menezes, L.F. e Teodosiu C. (2000) Three-dimensional numerical simulation of the deep-drawing process using solid finite elements, *Journal of Materials Processing Technology*, 97, 100-106.
- Montgomery D.C. (2005) *Design and analysis of experiments*, 5ª Edição, John Wiley & Sons, Inc.
- Oliveira M.C., Alves J.L. e Menezes L.F. (2008) *Algorithms and Strategies for Treatment of Large Deformation Frictional Contact in the Numerical Simulation of Deep Drawing Process*, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 15, 113-162.
- Swift H.W. (1952) *Plastic instability under plane stress*, *Journal of the Mechanics of Physics of Solids*, 1, 1-18.
- William Y.F. e Creveling C.M. (1995) *Engineering methods for robust product design: Using Taguchi methods in technology and product development*, Addison-Wesley Longman, Inc.



