Polinómios Ortogonais e Funcionais de Momentos: Problemas Inversos

A. Branquinho [1]

September 15, 2002

[1]Dpto. de Matemática, Universidade de Coimbra, 3000 Coimbra, Portugal

Introdução

A teoria dos polinómios ortogonais constitui um local de encontro privilegiado de diversas disciplinas (Física–Matemática, Análise Numérica, Análise Funcional, Probabilidades, Estística, etc). As sucessões de polinómios ortogonais mais utilizadas são as dos polinómios clássicos que estão intimamente ligados às funções hiper–geométricas. Não é de estranhar que muitos dos trabalhos que se têm escrito até hoje tenham como ponto de partida o carácter hiper–geométrico destas sucessões, [99], [45], [9] e [87]. Mas a evolução da teoria matemática dos polinómios ortogonais tem sido feita no sentido de progressivamente "esquecer" esta tendência. Como marco importante desta evolução temos o trabalho de T.S.Chihara [30]. Neste trabalho o autor introduz o conceito de funcional de momentos e o de sucessão de polinómios ortogonais que lhe está associada.

Diversos autores têm desenvolvido esta teoria ao longo destes anos, sendo de destacar entre outros autores P.Maroni, F.Marcellán, J.Dini e S.Belmehdi (ver [84], [77], [37] e [12]).

O trabalho que nos propomos realizar vem no seguimento destes últimos, havendo ainda a acrescentar os textos [20] e [2]:

> Pretendemos fazer uma análise construtiva das sucessões de polinómios ortogonais a partir de propriedades diferenciais das funcionais.
>
> Além disso, resolvemos o problema inverso deste, i.e., a partir de relações existentes entre duas sucessões de polinómios ortogonais, determinar relações entre as funcionais de momentos que lhes estão associadas.

Basicamente existem duas formas de gerar novas sucessões de polinómios ortogonais mónicos a partir de uma já conhecida:

— por uma transformação nos coeficientes da relação de recorrência, dando origem aos polinómios associados, co–recursivos e co–modificados, [29], [77], [14], [35];

— por perturbações definidas no espaço das funcionais lineares, $\mathbb{P}^*$, [84].

Aqui deter–nos–emos sobre este segundo tipo de geração, cuja importância pode ser vista no trabalho de W.Gautschi [47]:

— Aproximação por Splines de uma função real de variável real.

— Aceleração de convergência de séries.

Organização do Trabalho

No início de cada capítulo damos uma breve introdução histórica sobre os assuntos que aí pretendemos tratar.

Cap. I Introduzimos as noções essenciais deste trabalho.
Daremos também uma nova caracterização das sucessões de polinómios ortogonais (ver alínea (e) do teorema 1.3.2).
Generalizamos o operador θ_X definido no teorema 1.2.6 (ver teorema 1.2.7).

Cap. II Introduzimos as sucessões de polinómios ortogonais semi–clássicos e caracterizamo–las. Damos demonstrações alternativas dessas caracterizações, bem como de uma conjectura de A.Magnus [76].

Cap. III Mostramos a insuficiência do método de B.Fischer e G.H.Golub [44] e W.Gautschi [46], na análise das modificações polinomiais das funcionais.

Cap. IV Generalizamos os problemas tratados por P.Maroni em [84], analisando a modificação inversa polinomial tratada na secção 1.2 do capítulo IV.

Cap. V Generalizamos os problemas tratados em [84], [20] e [2], e resolvemos como aplicação destes resultados, um problema proposto por L.L.Littlejohn em [72].

AGRADECIMENTOS

Quero deixar aqui expresso o meu agradecimento ao Ex$^{\text{mo}}$ Senhor Professor Doutor Francisco Marcellán, por me ter proposto o tema deste trabalho, além da orientação e facilidades concedidas, que foram imprescindíveis para a elaboração do mesmo.

Aproveito a oportunidade para testemunhar todo o meu reconhecimento ao Ex$^{\text{mo}}$ Senhor Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva, por me ter aconselhado a frequentar este Mestrado bem como pelo apoio que nunca me negou.

Esta dissertação foi realizada no âmbito da Linha de Equações Diferenciais e Aplicações ($n^{\underline{\text{o}}}$9) do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, com o apoio do Departamento de Matemática e da Acção Integrada Luso–Espanhola $n^{\underline{\text{o}}}$2/B, 1992.

Chapter 1

Motivação

Este capítulo tem um triplo objectivo:

(a) Introduzir o conceito fundamental deste trabalho— Sucessão de Polinómios Ortogonais— o que faremos falando da sua origem (ver [97] e [75]).

(b) Caracterizar as sucessões de polinómios ortogonais a partir das sucessões de funcionais lineares que lhes estão associadas (ver [81]).

(c) Dar condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade de sucessões de polinómios ortogonais associadas a uma sucessão de funcionais lineares (ver [58] e [84]).

Daremos uma nova caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais, que envolve a sucessão de polinómios derivados que lhe está associada (ver alínea **(e)** do teorema 1.3.2).

Provaremos a conjectura de W.R.Allaway (ver [4]):
— Podemos tomar no teorema 4.1 de [4] $(L_n^{(\alpha+i)})$ para $i = 1, 2, \ldots$ em vez de $(L_n^{(\alpha)})$.

1.1 Noções Gerais

Suponhamos definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ uma função, ϕ, não decrescente tal que $(x^k)_{k=0}^{\infty} \subset L^2_\phi$, i.e., $\int_I x^k d\phi(x) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ [1]. Suponhamos ainda, que o conjunto de pontos de crescimento da função ϕ é infinito, ou seja $\{x \in \mathbb{R} : \phi(x+\delta) - \phi(x-\delta) > 0 \ \forall \delta > 0\}$ é infinito. A este conjunto chamaremos *espectro* de ϕ. Nestas condições podemos definir o produto interno

$$(f(x), g(x)) = \int_I f(x) g(x) d\phi(x).$$

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt à sucessão (x^k), obtemos uma sucessão de polinómios ortogonais (S.P.O.), (P_k), com $\mathrm{gr} P_k = k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, que está univocamente determinada por ϕ. Se ϕ é absolutamente contínua a sua derivada, $p = \phi'$, é chamada função peso e, portanto, falaremos de polinómios ortogonais relativamente a um determinado peso p. Alguns dos exemplos clássicos que aparecem na Física Matemática são:

i) $p(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$ — Caso Hermite

ii) $p(x) = e^{-x}, x \in]0, \infty[$ — Caso Laguerre

iii) $p(x) = 1, x \in [-1, 1]$ — Caso Legendre

Todas as S.P.O., (P_n), associadas a estes pesos são completas em L^2_ϕ, i.e.,

$$\forall f \ \in L^2_\phi \exists \ (c_n) \subset \mathbb{R} : \ \lim_{N \to \infty} \int_a^b (f - \sum_{n=0}^{N} c_n P_n)^2 d\phi(x) = 0, \ .$$

Por um teorema de Weierstrass (aproximação uniforme de função contínuas por polinómios) sabemos que um sistema de polinómios é completo num intervalo compacto. Num intervalo não limitado, o facto de ser completo depende da função peso. Por exemplo, se $p(x) = e^{-\ln^2 |x|}$ então o sistema de polinómios ortogonais associado não é completo, pois

$$\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-\ln^2 |x|} \sin(2\pi \ln |x|) dx = 0, \ k = 0, 1, \ldots \tag{1.1}$$

(qualquer função que possa ser aproximada em mínimos quadrados por polinómios para este peso, é ortogonal a $\sin(2\pi \ln |x|)$). Este exemplo devido a Stieltjes (ver [98]) está incluído no seguinte teste:

Teorema 1.1.1 (M.G.Krein,1945) *Se ϕ' é a derivada da parte absolutamente contínua de ϕ, $x \in \mathbb{R}$ e $\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln \phi'(x)}{1+x^2} dx > -\infty$, então o sistema de potências de x, (x^k), não é completo em L^2_ϕ.*

O recíproco é verdadeiro se ϕ for absolutamente contínua e o peso p satisfizer as condições:

1. $\sup(p(x)) < \infty$

[1] Na verdade necessitamos somente de impor que as potências de ordem par de x pertencam a L^2_ϕ.

2. $p(-x) = p(x)$
3. para $x > 0$ a função $-\ln(1+x^2)p(x)$ é não decrescente e convexa relativamente a $\ln(x)$.

Assim, se as condições enunciadas se verificam e

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln(p(x))}{1+x^2} dx = \infty$$

então o sistema de potências de x, (x^n), é completo em L^2_ϕ.

Temos também a seguinte condição necessária e suficiente:

Teorema 1.1.2 (B.Ya.Levin) *Seja $\mathcal{M}_\phi$ o conjunto de todos os polinómios satisfazendo a condição*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|Q(x)|^2}{1+x^2} d\phi(x) \leq 1$$

e seja

$$M(x) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_\phi} |Q(x)| \ .$$

Então, para que o sistema de potências de x seja completo em L^2_ϕ é necessário e suficiente que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\ln M(x)}{1+x^2} dx = \infty.$$

Observação

Este teorema está relacionado com os critérios de N.I.Akhiezer e S.N.Bernstein (1953), e S.N.Mergelyan (1954), sobre a aproximação por polinómios relativamente a uma função peso em $\mathbb{R}$.

Pegando no exemplo de Stieltjes (1.1) vemos ainda que $p(x) = e^{-\ln^2|x|}$ não é a única função peso associada à seguinte sucessão (u_n), onde os u_n são definidos por

$$u_n = \int_{\mathbb{R}} x^n p(x) dx. \tag{1.2}$$

De facto, por (1.1)

$$u_n = \int_{\mathbb{R}} x^n (1 + c \sin(2\pi \ln|x|)) p(x) dx;$$

e, como, a função $\Psi(c;x) = \int_0^x (1 + c\sin(2\pi \ln|t|))p(t)dt$ é não decrescente para $|c| < 1$ temos que há infinitas funções peso associadas à sucessão (u_n).

Estamos, então, em condições de formular a seguinte questão:

— Que condições temos de impor a uma sucessão de números reais (u_n)— *sucessão de momentos*— para que exista uma função ϕ não decrescente e de espectro infinito verificando

$$u_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\phi(x) \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Este problema é conhecido na literatura por Problema de Momentos (neste caso de Hamburger); foi enunciado e resolvido por Hamburger em 1921:

Teorema 1.1.3 (Hamburger,1921) *Uma condição necessária e suficiente para que o Problema de Momentos tenha solução é que a matriz de Hankel,* $H = [u_{k+j}]_{k,j=0}^{\infty}$ *seja definida positiva, i.e.,*

$$\sum_{k,j} u_{k+j}\xi_k\xi_j \geq 0$$

para todo o $n = 0, 1, \ldots$ *e* $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

No caso do domínio de ϕ ser $[0, \infty[$, temos que a condição necessária e suficiente vem dada por $|H| > 0$ e $|H_1| > 0$ onde $H_1 = [u_{k+j+1}]_{k,j=0}^{\infty}$.

No caso do domínio de ϕ ser $[0, 1]$, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1.4 (Hausdorff,1923) *Uma condição necessária e suficiente para que o Problema de Momentos tenha solução em [0,1] é que*

$$\Delta^n u_k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_j^n u_{k+j} \geq 0,\ n, k = 0, 1, \ldots$$

onde $C_j^n = \frac{n!}{(n-j)!j!}$.

A condição necessária é trivial. A demonstração da suficiência pode ser feita atendendo a que qualquer função $f \in C[0, 1]$ pode ser aproximada por polinómios de Bernstein

$$B(x; f) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n f(\frac{k}{n}) x^k (1 - x)^{n-k}$$

Isto foi proposto primeiro por S.N.Bernstein para demonstrar o teorema de Weierstrass. Ao mesmo tempo obtemos do teorema de Weierstrass que o Problema de Momentos neste caso é *determinado*, i.e., temos unicidade da função ϕ correspondente.

Como vimos pelo exemplo de Stieltjes o Problema de Momentos não é, em geral, determinado quando o domínio de definição de ϕ for $\mathbb{R}$ ou $[0, \infty[$.

Em 1922 Carleman (ver [25],[26],[27]) encontrou a seguinte condição suficiente para a determinação deste problema em $[0, \infty[$ (i.e., para que se tenha unicidade da função ϕ a menos de uma constante):

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{-\frac{1}{2k}} = \infty.$$

Esta condição é satisfeita, por exemplo, pela sucessão de termo geral $u_n = n!$; neste caso, a única solução (a menos de uma constante) é $\phi(x) = -e^{-x} + 1$.

Em $\mathbb{R}$ a condição análoga é

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}^{-\frac{1}{2k}} = \infty.$$

Esta condição é satisteita, por exemplo, pela sucessão de termo geral $u_{2k} = \Gamma(k + \frac{1}{2})$ e $u_{2k+2} = 0$, $k \in \mathbb{N}$; neste caso, a única solução (a menos de uma constante) é $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

Como consequência destas condições suficientes, temos o seguinte resultado devido a Hardy (ver [54]):

Teorema 1.1.5 (Hardy,1917) *Se o Problema de Momentos em* $\mathbb{R}$ *admitir por solução*

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt,$$

onde

$$\psi(t) \geq 0 \ e \ \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(t)]^q e^{\delta|t|} dt < \infty, \tag{1.4}$$

para algum $q \geq 1$ *e* $\delta > 0$, *então o problema é determinado.*

<u>Observação</u>

Se estivermos em presença de um Problema de Momentos em $[0, \infty[$, basta substituir (1.4) por

$$\psi(t) \geq 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(t)]^q e^{\delta(t)^{1/2}} dt < \infty. \tag{1.5}$$

O estudo do Problema de Momentos em $\mathbb{R}$ está intimamente ligado com as propriedades dos polinómios ortogonais, pois foi aqui que nasceu a teoria geral dos S.P.O. (alguns exemplos particulares destas sucessões tinham já sido estudadas— especialmente as chamadas clássicas).

Consideremos então o Problema de Momentos em $\mathbb{R}$ para a sucessão (u_k). Introduzamos no espaço vectorial dos polinómios de variável real com coeficientes complexos, $\mathbb{P}$, a funcional linear (i.e., uma aplicação linear de $\mathbb{P}$ em $\mathbb{R}$) u definida por

$$< u, R(x) >= \sum_{k=0}^{n} u_k r_k \tag{1.6}$$

onde $R(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k x^k$.

Quando nos referirmos ao espaço vectorial dos polinómios reais de coeficientes complexos de grau não superior a n, escreveremos $\mathbb{P}_n$.

Se o Problema de Momentos associado a (u_n) é solúvel e $\phi(x)$ é uma sua solução, então

$$< u, R(x) >= \int_{\mathbb{R}} R(x) d\phi(x). \tag{1.7}$$

Assim, cada solução gera uma e uma só funcional linear e um e um só produto interno, $(P(x), Q(x)) =< u, P(x)Q(x) >$. De facto,

i) a positividade sai de u ser positiva;

ii) a não–degenerescência resulta de u ser não degenerada, pois o espectro de ϕ é infinito;

iii) a simetria sai por definição.

Temos pois definida uma S.P.O., (P_n), associada a u unicamente determinada pela sucessão (u_n); mesmo no caso em que o Problema de Momentos não é determinado.

De seguida vou enunciar, comentando, alguns resultados que nos permitirão relacionar estes dois problemas (o da completude do sistema de potências de x em L^2_ϕ, com a determinação dum Problema de Momentos). Esta teoria foi apresentada em 1922 por Hellinger, Nevanlina e M.Riesz, e foi posteriormente desenvolvida por H.Weyl(1935).

Lema 1.1 *Se a série $\sum_k |P_k(z)|^2$ converge, mesmo que num só ponto z ($Imz \neq 0$), então converge uniformemente em cada região limitada.*

Em qualquer dos casos a quantidade

$$r(z) = \frac{1}{2|\mathrm{Im}z|}(\sum_k |P_k(z)|^2)^{-1}$$

é chamada *raio de Weyl em z*. Assim, o lema diz–nos que no conjunto $\{z : \mathrm{Im}z \neq 0\}$ se tem:

$$r(z) = 0\ \forall z \ \ ou \ \ r(z) > 0\ \forall z.$$

Introduzamos então a sucessão de polinómios $(P_k^{(1)})$— ditos *associados*— definida por

$$P_k^{(1)}(z) = \ < u_x, \frac{P_{k+1}(z) - P_{k+1}(x)}{z - x} > ,\ k = 0, 1, \ldots \tag{1.8}$$

associada a (P_k). Se tomarmos

$$w_\phi(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi(x)}{x - z},\ \mathrm{Im}z \neq 0$$

então de (1.7) obtemos

$$P_k^{(1)}(z) = -w_\phi(z)P_k(z) + c_k(z)$$

onde $c_k(z) = \frac{1}{z^{k+1}} < u, P^2_{k+1}(x) >$ são os coeficientes de Fourier da função $(x - z)^{-1}$. Da desigualdade de Bessel concluímos

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w_\phi(z)P_k(z) + P_k^{(1)}(z)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi(x)}{|x - z|^2} = \frac{\mathrm{Im}w_\phi(z)}{\mathrm{Im}z}. \tag{1.9}$$

Consequentemente, o ponto $w_\phi(z)$ pertence ao conjunto

$$\mathcal{W}(z) = \{w : \sum_{k=0}^{\infty} |wP_k(z) + P_k^{(1)}(z)|^2 \leq \frac{\mathrm{Im}w}{\mathrm{Im}z}\}.$$

Este é um disco de raio $r(z)$, para $r(z) > 0$ e um ponto para $r(z) = 0$; e, portanto, $\mathcal{W}(z)$ é chamado disco ou ponto de Weyl, respectivamente.

Teorema 1.1.6 *O Problema de Momentos é determinado no caso pontual e indeterminado no caso do disco.*

De facto, no caso pontual, se existirem duas soluções ϕ_1 e ϕ_2 então $w_{\phi_1}(z) = w_{\phi_2}(z)$, para Im$z \neq 0$, i.e.,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_1(x)}{x-z} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi_2(x)}{x-z}$$

donde ϕ_1 essencialmente coincide com ϕ_2.

No caso do disco, para cada ponto $\zeta \in \mathcal{W}(z)$ existe uma solução ϕ do Problema de Momentos, tal que $w_\phi(z) = \zeta$.

Uma solução ϕ é dita *z–extremal* se o ponto $w_\phi(z)$ está na fronteira do disco, i.e., temos igualdade na expressão (1.9), ou seja, temos a identidade de Parseval para $(x-z)^{-1}$. Assim, se a sucessão de potências (x^n) é um subconjunto completo de L^2_ϕ, então ϕ é z–extremal para todo o z tal que Im$z \neq 0$. O recíproco é também verdadeiro:

Teorema 1.1.7 *Se a solução ϕ do Problema de Momentos é z–extremal para algum z com Im$z \neq 0$, então a sucessão de potências de x é completa em L^2_ϕ.*

A solução única do caso pontual é tratada da mesma forma. Analogamente, temos:

Teorema 1.1.8 *Se o Problema de Momentos é determinado, admitindo por solução a função ϕ então a sucessão de potências de x é completa em L^2_ϕ.*

Enunciemos, agora, alguns resultados sobre representações para a funcional u, associada a uma sucessão de momentos (u_n) qualquer. Daqui em diante referir–nos–emos a esta funcional como sendo a *funcional de momentos* (ainda que não se tenha unicidade do Problema de Momentos).

Teorema 1.1.9 (Boas,1939) *Seja (u_n) uma sucessão arbitrária de números reais. Então, existe uma função ϕ de variação limitada tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n d\phi(x) = u_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Concluímos deste resultado que toda a funcional de momentos u, que esteja associada a uma sucessão de momentos real, pode ser representada por um integral de Stieltjes cujo argumento é uma função de variação limitada. Este resultado é uma extensão de um outro devido a Stieltjes (ver [98]):

Teorema 1.1.10 (Stieltjes,1894) *Dada uma sucessão $(u_n) \subset \mathbb{R}$, existe uma função crescente de variação limitada, ϕ, em $[0, \infty[$ para a qual*

$$\int_0^{\infty} x^n d\phi(x) = u_n \ \ n = 0, 1, \ldots$$

se, e somente se

$$(u_n) \text{ é tal que } \Delta_n > 0 \text{ e } \Delta_n^{(1)} > 0,\ n = 0, 1, \ldots$$

onde $\Delta_n = |u_{i+j}|_{i,j=0}^n$ *e* $\Delta_n^{(1)} = |u_{i+j+1}|_{i,j=0}^n$.

Qualquer dos teoremas anteriores pode ainda ser estendido por forma a incluir qualquer sucessão de números complexos, tomando $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, i.e., no conjunto das funções de domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio em $\mathbb{C}$. Assim, sendo

$$\mathcal{S}(I) = \{f \in C^\infty(I) : \|f\|_{I,k,n} = \sup_{t \in I} |t^k f^{(n)}(t)| < +\infty, \text{ para todo o } k, n \in \mathbb{N}\}$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ temos:

Teorema 1.1.11 (Duran,1989) *Dada uma sucessão $(u_n) \subset \mathbb{C}$, existe $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (respectivamente, $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}) = \{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \psi(x) = 0, \text{ em }]-\infty, 0]\}$), tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \psi(x) dx = u_n \;\; (\textit{respectivamente}, \int_0^\infty x^n \psi(x) dx = u_n) \;\; n = 0, 1, \ldots$$

<u>Observação</u>

1. Se ψ é a função do teorema anterior, então

$$\phi(x) = \int_0^x \psi(t) dt$$

é uma função de variação limitada em $\mathbb{R}$ ou $[0, \infty[$ que resolve o nosso Problema de Momentos.

2. O Problema de Momentos do teorema anterior é sempre indeterminado, pois podemos sempre adicionar à solução desse problema uma função de variação limitada arbitrária cuja sucessão de momentos associada seja constantemente nula.

Podemos pensar em determinar explicitamente a função de variação limitada ϕ (ver [103]):

Teorema 1.1.12 (Teorema de Inversão de Stieltjes) *Se ϕ é uma função de variação limitada em $\mathbb{R}$, com suporte em $[0, \infty[$ e $F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\phi(t)}{z-t}$, então o ϕ vem dado por*

$$\phi(t) - \phi(s) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi i} \int_s^t Im\{F(x + i\varepsilon)\} dt. \tag{1.10}$$

A partir de (1.10) podemos redefinir ϕ, se necessário em pontos de descontinuidade por

$$\phi(x) = \frac{\phi(x+0) - \phi(x-0)}{2}.$$

Assim, associada a uma sucessão de momentos (u_n), temos sempre uma funcional linear u— funcional de momentos— definida por

$$< u, x^n >= \int_0^\infty x^n d\phi(x), \; n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Consideremos agora a seguinte:

Definição 1.1.1 Seja u uma funcional de momentos. Uma sucessão (P_n) de polinómios é chamada *sucessão de polinómios ortogonais associada a u* se

a) $\text{gr}P_n = n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, i.e., (P_n) é uma *família livre* ;

b) existem $K_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tais que

$$< u, P_n P_m >= K_n \delta_{m,n}$$

m, $n \in \mathbb{N}$.

Se, além disso, todos os P_n forem *mónicos*, i.e., o coeficiente do termo de maior ordem for igual a 1, então chamamos a (P_n) S.P.O. mónicos (S.P.O.M.) associada a u.

Lema 1.2 (Chihara,1978) *Sejam u uma funcional de momentos e (P_n) uma S.P.O.M. associada. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *(P_n) é uma S.P.O.M. associada a u*

b) $< u, x^m P_n >= A_n \delta_{m,n},\ A_n \neq 0,\ 0 \leq m < n$

c) *para todo o $\pi \in \mathbb{P}$*

$$< u, \pi P_n >= \begin{cases} 0 \ \ se\ gr\pi < n \\ \neq 0\ \ se\ gr\pi = n \end{cases}.$$

Podemos formular as seguintes questões:

1. Será que cada funcional de momentos tem uma S.P.O.M. associada?

2. Se tiver, será única?

Podem dar–se, facilmente, contra–exemplos destas duas questões. De facto, temos:

Lema 1.3 (Chihara,1978) *Seja u uma funcional de momentos, de sucessão de momentos (u_n). Então, existe uma S.P.O.M. associada a u se e somente se $\Delta_n \neq 0$, $n \geq 0$. Além disso, se u satisfizer esta condição (condição tipo Tchebychev), existe uma única S.P.O.M., (P_n) definida por*

$$P_0(x) = 1,\ P_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ & \dots & \\ u_{n-1} & \dots & u_{2n-1} \\ 1 & \dots & x^n \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

e

$$< u, P_m P_n >= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \delta_{m,n},\ m,n \in \mathbb{N} \tag{1.13}$$

onde $\Delta_{-1} = 1$.

A uma funcional de momentos verificando a condição tipo Tchebychev, passaremos a chamar *quase–definida* ou *regular*. Será dita *definida positiva* se $\Delta_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Temos assim que as funcionais de momentos definidas por

$$< u, x^n >= \int_I x^n p(x)dx, \; n \in \mathbb{N}$$

onde p é uma das funções peso dadas no início desta secção, são definidas positivas. Existem, no entanto, funcionais de momentos regulares mas não definidas positivas. Por exemplo, a funcional de momentos associada à sucessão de momentos de termo geral

$$u_n = \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{1.14}$$

De facto,

$$\Delta_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-2)^{n^2}\frac{\prod_{s=1}^{n-1} s!}{\prod_{s=n}^{2n-1} s!}$$

é não nulo para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $\Delta_1 = -2$ (ver [66], [67] e [68]). A S.P.O.M. que está associada a esta sucessão é chamada de Bessel.

O problema da determinação explícita de uma função ϕ de variação limitada verificando

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n d\phi(x) = u_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

onde os u_n são dados por (1.14), cuja existência está garantida pelo teorema de R.P.Boas, foi determinada independentemente por A.J.Duran em [40] e por um grupo de matemáticos Coreanos S.S.Kim, K.H.Kwon e S.S.Han em [53].

Damos, de seguida, uma condição necessária e suficiente de regularidade para a funcional de momentos:

Teorema 1.1.13 (Maroni,1987) *Seja u uma funcional de momentos; então as seguintes afirmações são equivalentes*

(i) u é regular;

(ii) existe uma sucessão livre de polinómios, (B_n), verificando

$$| < u, B_k B_m > |_{k,m=0}^{n} \neq 0 \; , \; n \in \mathbb{N};$$

(iii) para cada família livre de polinómios, (Q_n), temos

$$| < u, Q_k Q_m > |_{k,m=0}^{n} \neq 0 \; , \; n \in \mathbb{N}.$$

<u>Observação</u>

Tendo em conta este teorema e o lema anterior, podemos demonstrar que o termo geral da S.P.O.M. associada a u toma a forma

$$P_n(x) = \frac{1}{k_{n-1}} \begin{vmatrix} < u, Q_0 > & \dots & < u, Q_0 Q_n > \\ & \dots & \\ < u, Q_0 Q_{n-1} > & \dots & < u, Q_{n-1} Q_n > \\ Q_0(x) & \dots & Q_n(x) \end{vmatrix}$$

onde

$$k_{n-1} = \begin{vmatrix} < u, Q_0 Q_0 > & \dots & < u, Q_0 Q_{n-1} > \\ & \dots & \\ < u, Q_0 Q_{n-1} > & \dots & < u, Q_{n-1} Q_{n-1} > \end{vmatrix}, \ n \geq 1 \ .$$

Enunciemos agora um dos resultados fundamentais da teoria dos polinómios ortogonais:

Teorema 1.1.14 (Favard–Shohat) *Sejam (β_n) e (γ_n) duas sucessões de números complexos arbitrárias; seja (P_n) definida por*

$$\begin{array}{l} xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \ n = 1, 2, \dots \\ P_0(x) = 1 \ e \ \ P_1(x) = x - \beta_0 \ . \end{array} \tag{1.15}$$

Então, existe uma única funcional de momentos u, tal que

$$< u, P_m P_n > = < u, P_n^2 > \delta_{m,n}, \ m, n = 0, 1, 2, \dots .$$

Além disso u é quase–definida e (P_n) é a correspondente S.P.O.M. se e somente se $\gamma_n \neq 0$; e será definida positiva quando, e só quando β_n forem números reais e os $\gamma_n > 0$ para $n \geq 1$.

Observação

- **(a)** Na verdade, este teorema dá–nos uma caracterização para as S.P.O.M.; pois, se u for uma funcional de momentos quase–definida e (P_n) a S.P.O.M. associada, então existem constantes β_n e γ_n, com $\gamma_n \neq 0$ tais que

  $$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

  e

  $$P_0(x) = 1 \text{ e } P_1(x) = x - \beta_0.$$

  Além disso, se u é definida positiva, então os β_n são reais e os $\gamma_{n+1} > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

- **(b)** A fórmula (1.12) é devida a Szegö [99].

- **(c)** γ_0 não aparece na fórmula de recorrência verificada por (P_n); por convenção tomá–lo–emos igual a $< u, 1 >$.

(d) [30]

$$\gamma_{n+1} = \frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2} \quad , n \in \mathbb{N}$$
$$\beta_n = \frac{< u, xP_n^2 >}{< u, P_n^2 >} \quad , n \in \mathbb{N}$$
$$< u, P_n^2 >= \prod_{k=0}^{n} \gamma_k \quad , n \in \mathbb{N}$$

Temos ainda um resultado muito importante:

Teorema 1.1.15 (Brezinski,1990) *Seja (P_n) uma família livre de polinómios; (P_n) verifica a relação de recorrência (1.15) quando, e só quando, ela verifica a identidade da Darboux–Christoffel:*

$$\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k(x)P_k(y) \tag{1.16}$$

onde $r_n = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i$.

Denotaremos $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{r_k}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Operadores em $\mathbb{P}^*$

Da secção anterior concluímos que, no estudo das sucessões de polinómios, a funcional linear relativamente à qual uma sucessão de polinómios é ortogonal tem um papel essencial, e é muitas vezes importante conhecer as suas propriedades independentemente das suas representações. Por exemplo, o conhecimento de uma funcional linear é equivalente ao conhecimento dos seus momentos; pois, como veremos, a sucessão de momentos verifica uma relação de recorrência que, com a ajuda de uma teoria algébrica conveniente, traduzir–se–á por uma equação verificada pela funcional linear (ver [49]).

Existem duas formas de descrever uma sucessão de números (a_n):

(1) Por uma função geradora

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Esta representação é útil quando conhecemos propriedades assimptóticas da sucessão dada.

(2) Por uma transformada

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$$

As propriedades de (a_n) saem do conhecimento de f.

Vimos já que, associada a uma sucessão de números reais, podemos considerar uma funcional linear, dita funcional de momentos, à qual está associada uma S.P.O.M. sempre que os momentos satisfizerem uma condição tipo Tchebychev. Assim, podemos considerar a sucessão (u_n) como sendo a acção de uma funcional de momentos u sobre (x^n), i.e.,

$$< u, x^n >= u_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

E, por **(2)**, à funcional de momentos u actuando no espaço vectorial $\mathbb{P}$, definida por (1.17) corresponde, uma série formal cujo coeficiente da potência de ordem n é u_n, i.e.,

$$u \longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \frac{x^n}{n!}.$$

Esta representação permitir–nos-á definir alguns operadores sobre as funcionais.

O poder desta técnica resulta de ser relativamente fácil determinar o operador adjunto de um determinado operador linear, actuando no espaço vectorial dos polinómios, $\mathbb{P}$, aproveitando a dualidade existente entre este espaço e o das funcionais lineares.

Seja $\mathbb{P} = \mathbb{C}[x]$ a álgebra comutativa de todos os polinómios na variável x com coeficientes em $\mathbb{C}$. Seja $\mathbb{P}^*$ o espaço vectorial das funcionais lineares em $\mathbb{P}$. Denotemos a acção da funcional linear α sobre $p(x) \in \mathbb{P}$ por

$$< \alpha, p(x) > .$$

Seja $(p_n(x))$ uma família livre de polinómios; então, duas funcionais lineares α e β são iguais quando, e só quando,

$$< \alpha, p_n(x) >=< \beta, p_n(x) >$$

para todo o p_n da família anterior. Isto porque (p_n) é um conjunto gerador de $\mathbb{P}$. Assim, uma funcional linear α fica perfeitamente definida conhecidos os $< \alpha, p_n(x) >$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos munir $\mathbb{P}^*$ de uma operação— a que chamaremos produto— que o transformará numa álgebra associativa e comutativa com unidade, δ_0, definida por $< \delta_0, p_n(x) >= p_n(0)$:

$$< \alpha\beta, x^n >= \sum_{k=0}^{n} C_k^n < \alpha, x^k >< \beta, x^{n-k} > .$$

A álgebra $\mathbb{P}^*$ é uma álgebra topológica, para a topologia definida por:

— Uma sucessão (α_n) de funcionais lineares converge para uma funcional linear α, se

$$\text{dado } p(x) \in \mathbb{P},\ \exists n_0(p) \in \mathbb{N}:\ n > n_0(p) \ \Rightarrow\ < \alpha_n, p(x) >=< \alpha, p(x) > .$$

Equivalentemente, uma série, $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$, de funcionais lineares converge se

$$\text{dado } p(x) \in \mathbb{P},\ \exists n_0(p) \in \mathbb{N}:\ n > n_0(p) \ \Rightarrow\ < \alpha_n, p(x) >= 0, \text{ i.e.,}$$

$$\alpha_n \to 0 \text{ nesta topologia.}$$

Com esta topologia $\mathbb{P}^*$ é uma álgebra topológica completa.

Teorema 1.2.1 (Roman e Rota,1978) *Sejam, α uma funcional linear e (a_n) uma sucessão de números complexos; então as afirmações seguintes são equivalentes:*

1. $< \alpha, 1 >= 0$;
2. (α^n) *converge para a funcional linear nula;*
3. *a série* $\sum_{n\geq 0} a_n \alpha^n$ *converge.*

Observação

Se (p_n) é uma família livre de polinómios então a sucessão de funcionais lineares (α_k) tais que

$$< \alpha_k, p_n >= \delta_{k,n} \tag{1.18}$$

é uma *pseudo–base* de $\mathbb{P}^*$. Mais, toda a funcional linear β pode ser expressa de forma única por

$$\beta = \sum_{n\geq 0} a_n \alpha_n$$

onde $a_n =< \beta, p_n >$. De facto, a condição (1.18) assegura a convergência da série $\sum_{n\geq 0} a_n \alpha_n$; e como (p_n) é uma família livre, temos a convergência para β.

Podemos, em determinadas situações, considerar um número finito de somandos na representação de uma funcional linear. De facto:

Lema 1.4 (ver [21]) *Sejam $\beta \in \mathbb{P}^*$, (α_n) uma pseudo–base associada a uma família livre de polinómios, (p_n), e $s \in \mathbb{N}$. Uma condição necessária e suficiente para que*

$$< \beta, p_{s-1} >\neq 0 \;\; e \;\; < \beta, p_n >= 0 \; , \; n \geq s \tag{1.19}$$

é que existam $a_i \in \mathbb{C}$ para $i = 0, 1, \ldots, s-1$ com $a_{s-1} \neq 0$ tais que

$$\beta = \sum_{i=0}^{s-1} a_i \alpha_i. \tag{1.20}$$

Introduzamos agora o seguinte conceito:

Definição 1.2.1 Chamamos *funcional de base* a toda a funcional linear, α, verificando

$$< \alpha, 1 >= 0 \text{ e } < \alpha, x >\neq 0. \tag{1.21}$$

Dizemos que uma sucessão de polinómios, (p_n), é uma *sucessão associada* à funcional linear de base, α, quando

$$< \alpha^k, p_n >= \delta_{n,k} \tag{1.22}$$

para todo o n,$k \in \mathbb{N}$, com a convenção $\alpha^0 = \delta_0$.

Mais geralmente, dizemos que a sucessão de polinómios (p_n)— a existir— é uma *sucessão associada* à sucessão de funcionais (α_n) se

$$< \alpha_k, p_n >= 0 \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ e } n \in \mathbb{N}. \tag{1.23}$$

É claro que (α^k), com α funcional de base, constitui uma pseudo–base para $\mathbb{P}^*$.Vamos ver que existem infinitas pseudo–bases de $\mathbb{P}^*$:

Teorema 1.2.2 (Roman e Rota,1978) *Toda a funcional de base tem uma única família livre de polinómios associada.*

Será, então, natural perguntar se isto é válido para qualquer sucessão de funcionais. Como resposta temos o seguinte:

Teorema 1.2.3 (Iserles e Nørsett,1988) *Uma condição necessária e suficiente para que se tenha a existência e unicidade de uma sucessão de polinómios mónicos, (p_n), associada a uma sucessão de funcionais lineares, (α_n), é que*

$$D_n = |d_n| \neq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{1.24}$$

onde

$$d_n = \begin{bmatrix} < \alpha_0, 1 > & \ldots & < \alpha_0, x^n > \\ & \ldots & \\ < \alpha_n, 1 > & \ldots & < \alpha_n, x^n > \end{bmatrix}. \tag{1.25}$$

Além disso, os p_n vêm dados por

$$p_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}} \begin{vmatrix} < \alpha_0, 1 > & \ldots & < \alpha_0, x^n > \\ & \ldots & \\ < \alpha_{n-1}, 1 > & \ldots & < \alpha_{n-1}, x^n > \\ 1 & \ldots & x^n \end{vmatrix}. \tag{1.26}$$

<u>Demonstração</u>

Como os p_n são mónicos admitem a seguinte representação

$$p_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} x^k$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Então, por definição de sucessão associada a (α_n),

$$< \alpha_i, p_n >= 0 \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n-1$$

e, portanto,

$$< \alpha_i, x^n > + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} < \alpha_i, x^k >= 0 \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Reescrevendo–o na fórmula matricial

$$\begin{bmatrix} <\alpha_0, 1> & \dots & <\alpha_0, x^{n-1}> \\ & \dots & \\ <\alpha_{n-1}, 1> & \dots & <\alpha_{n-1}, x^{n-1}> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n,0} \\ \vdots \\ a_{n,n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} <\alpha_0, x^n> \\ \vdots \\ <\alpha_{n-1}, x^n> \end{bmatrix}$$

permite–nos concluir a existência e unicidade dos $a_{n,k}$ quando, e só quando, $D_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para obtermos a representação (1.26) para os p_n basta aplicar a regra de Cramer ao sistema anterior.□

Observação

A definição de biortogonalidade que aparece em [58] coincide com a nossa definição de sucessão de polinómios associada à sucessão de funcionais lineares (α_n). Mais, se existir a sucessão de polinómios associada, (p_n), então

$$<\alpha_n, p_n>= 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos agora a pseudo–base associada a (x^n), i.e., uma sucessão de funcionais lineares, que denotaremos por $(\frac{(-1)^k}{k!}\delta_0^{(k)})$, que verifica

$$<\frac{(-1)^k}{k!}\delta_0^{(k)}, x^n >= \delta_{k,n}\ k, n \in \mathbb{N}. \tag{1.27}$$

Notemos que todos os resultados que passaremos a enunciar valem para uma qualquer sucessão de funcionais lineares, (α^n), onde α é uma funcional de base.

Então, da observação do teorema 1.2.1, concluímos:

Teorema 1.2.4 *Seja α uma funcional linear e $(\frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de funcionais lineares definida por (1.27). Então,*

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} <\alpha, x^n> \frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)}.$$

Corolário 1.1 *Sejam α e β duas funcionais lineares, e $(\frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)})$ a sucessão de funcionais lineares definida por (1.27). Suponhamos que*

$$\alpha = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)},\ a_n \in \mathbb{R}$$

e

$$\beta = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)},\ b_n \in \mathbb{R};$$

então, se

$$\alpha\beta = \sum_{n\geq 0} c_n \frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)},\ c_n \in \mathbb{R}$$

temos

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

O próximo corolário dá–nos um critério para a invertibilidade de uma funcional linear:

Corolário 1.2 *Uma funcional linear, α, é invertível em $\mathbb{P}^*$ quando, e só quando,*

$$< \alpha, 1 > \neq 0.$$

Vamos dar, de seguida, o resultado fundamental desta secção. Como consequência do teorema 1.2.4, dada uma funcional linear, α, podemos associar–lhe uma série de potências formal. De facto, se

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)}$$

podemos associar a α a série de potências formal

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Tendo em atenção que a álgebra $\mathbb{F}$, das séries de potências formais, pode ser considerada como álgebra topológica, para a topologia definida por:

— $(f_n(t)) \subset \mathbb{F}$ converge se a sucessão dos coeficientes das potências de t convergir na topologia discreta de $\mathbb{R}$.

Temos, nesta topologia:

Teorema 1.2.5 *A aplicação*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & \mathbb{P}^* & \rightarrow & \mathbb{F} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n!}\delta_0^{(n)} & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \end{array}$$

é um isomorfismo contínuo para as topologias consideradas.

Demonstração

Pelo teorema 1.2.4 concluímos que $\mathcal{F}$ é um operador linear e bijectivo. E do corolário 1.1 tiramos que $\mathcal{F}$ é um homomorfismo algébrico.

Para provar que $\mathcal{F}$ é contínuo, consideremos a sucessão de funcionais lineares (γ_n) convergente para a funcional linear γ, onde

$$\gamma_n = \sum_{k\geq 0} a_{k,n} \frac{(-1)^k}{k!}\delta_0^{(k)}$$

e

$$\gamma = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{(-1)^k}{k!} \delta_0^{(k)}.$$

Temos que provar que $\mathcal{F}(\gamma_n)$ converge para $\mathcal{F}(\gamma)$:

— Por definição de convergência em $\mathbb{P}^*$, para um qualquer $j \geq 0$ fixo, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $< \gamma_n, x^j >=< \gamma, x^j >$, i.e., $n > n_0$ implica que $a_{j,n} = a_j$, c.q.d.□

Considerem–se, de seguida, alguns operadores lineares de $\mathbb{P}$ em $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{lll} p & \mapsto & (qp)(x) = q(x)p(x) \quad , q \in \mathbb{P} \\ p & \mapsto & (\theta_c p)(x) = \frac{p(x)-p(c)}{x-c} \quad , c \in \mathbb{C} \\ p & \mapsto & (Dp)(x) = p'(x) \\ p & \mapsto & (\tau_b p)(x) = p(x-b) \quad , b \in \mathbb{C} \\ p & \mapsto & (h_a p)(x) = p(ax) \quad , a \in \mathbb{C} - \{0\}. \end{array} \tag{1.28}$$

Por transposição (passagem ao operador adjunto), obtemos os seguintes operadores lineares de $\mathbb{P}^*$ em $\mathbb{P}^*$:

1. $< q\alpha, p >=< \alpha, qp >$ onde

$$< q\alpha, x^n >= \sum_{i=0}^{\mathrm{gr}_q} a_i < \alpha, x^{i+n} > \quad , n \in \mathbb{N}$$

   para $q(x) = \sum_{i=0}^{\mathrm{gr}_q} a_i x^i$;

2. $< (x-c)^{-1}\alpha, p >=< \alpha, \theta_c p >$ onde

$$< (x-c)^{-1}\alpha, x^n >= \begin{cases} 0 \text{ , se } n = 0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} c^{n-1-i} < \alpha, x^{i+n} > \text{ , se } n \geq 1 \end{cases} \quad , n \in \mathbb{N};$$

3. $< D\alpha, p >= - < \alpha, p' >$ onde

$$< D\alpha, x^n >= -n < \alpha, x^{n-1} > \quad , n \in \mathbb{N};$$

4. $< \tau_b\alpha, p >=< \alpha, \tau_{-b} p >$ onde

$$< \tau_b\alpha, x^n >= n! \sum_{i+j=n} \frac{< \alpha, x^i > b^j}{i!j!} \quad , n \in \mathbb{N};$$

5. $< h_a\alpha, p >=< \alpha, h_a p >$ onde

$$< h_a\alpha, x^n >= a^n < \alpha, x^n > \ , n \in \mathbb{N}.$$

A fórmula 2 admite a seguinte generalização:

Teorema 1.2.6 (Maroni e Dini,1990) *Seja $X = \{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ um conjunto de números complexos distintos; então, para todo o $p \in \mathbb{P}$, temos*

$$(\theta_X p)(x) = \frac{p(x) - (Lp)(X)}{r(x)} \tag{1.29}$$

onde,

$$(Lp)(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) l_i(x)$$

é o polinómio interpolador de Lagrange de p nos nodos x_i, $i = 1, \ldots, n$,

$$r(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

e

$$l_i(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{se} \ x \neq x_i \\ 1 \ \textit{se} \ x = x_i \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Assim,

$$< r^{-1}(x)\alpha, p >=< \alpha, \theta_X p > . \tag{1.30}$$

Neste trabalho vamos necessitar também do operador $p^{-1}u$ onde

$$p(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - x_i)^{m_i}.$$

Assim, vamos estender o operador θ_X definido no teorema anterior, por forma a englobar este caso:

Teorema 1.2.7 *Seja $X = \{\underbrace{x_i, \ldots, x_i}_{m_i \ vezes}\}_{1\leq i\leq s}$ um conjunto de $r + 1$ números complexos; então, para todo o $f \in \mathbb{P}$, temos*

$$(\Theta_X f)(x) = \frac{f(x) - (\mathcal{L}f)(X)}{p(x)} \tag{1.31}$$

onde,

$$(\mathcal{L}f)(X) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_i} f^{(k-1)}(x_i) L_{ik}(x)$$

é o polinómio interpolador de Lagrange–Sylvester de f nos nodos x_i, $i = 1, \ldots, r+1$ e os L_{ik} satisfazem as seguintes condições

$$L_{ik}^{(\nu)}(x) = \begin{cases} 1 \ \textit{se } i = j \ \textit{e } \nu = k-1 \\ 0 \ \textit{caso contrário} \end{cases} \tag{1.32}$$

para $k = 1, 2, \ldots, m_i$ e $i = 1, \ldots, s$.

<u>Demonstração</u> (ver [24])

O nosso objectivo é o de determinarmos, como no caso já tratado, $T \in \mathbb{P}_r$ verificando

$$\frac{f(x) - T(x)}{p(x)} \in \mathbb{P}, \text{ i.e.,}$$

$$(f - T)(x) = q(x) \prod_{i=1}^{s} (x - x_i)^{m_i}$$

onde $q \in \mathbb{P}$. Assim, procuramos um polinómio T sujeito às seguintes $r+1$ condições

$$(f - T)^{(k-1)}(x_i) = 0 \text{ para}$$

$k = 1, \ldots, m_i$ e $i = 1, \ldots, s$.

Analisemos a existência e unicidade dum polinómio satisfazendo estas condições:

(i) <u>Existência</u>

Pode provar–se que os $((L_{ik}(x))_{k=1}^{m_i})_{i=1}^{s}$ definidos por (1.32) constituem uma base para o espaço $\mathbb{P}_r$; logo uma solução para o nosso problema é

$$T(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_i} f^{(k-1)}(x_i) L_{ik}(x).$$

(ii) <u>Unicidade</u>

Sejam T_1 e T_2 duas soluções do nosso problema. Então $Q(x) = T_1(x) - T_2(x)$ é um elemento de $\mathbb{P}_r$ verificando

$$Q^{(k-1)}(x_i) = 0 \text{ para } k = 1, \ldots, m_i \text{ e } i = 1, \ldots, s \text{ , i.e.,}$$

$$Q(x) \equiv 0 \text{ (pelo teorema fundamental da álgebra).} \square$$

Assim,

$$< p^{-1}(x)u, f > = < u, \Theta_X f > . \tag{1.33}$$

1.3 Quase–Ortogonalidade

Do teorema 1.2.3 concluímos que se existir uma família livre de polinómios mónicos, (p_n), associada à pseudo–base (α_n) então os p_n vêm dados por

$$p_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}} \begin{vmatrix} <\alpha_0, 1> & \dots & <\alpha_0, x^n> \\ & \dots & \\ <\alpha_{n-1}, 1> & \dots & <\alpha_{n-1}, x^n> \\ 1 & \dots & x^n \end{vmatrix}$$

e satisfazem a condição suplementar $<\alpha_n, p_n>= 1$, $n \in \mathbb{N}$. Esta família de polinómios não é necessariamente uma S.P.O.M.; podemos, então formular as seguintes questões:

(1) Que condições temos de impor para que (p_n) seja uma S.P.O.M.?

(2) Associada a que funcional linear?

Construímos (p_n) à custa das seguintes condições

$$<\alpha_m, p_n>= \delta_{m,n},\ m = 0, 1, \dots, n-1 \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $m = 0$ temos

$$<\alpha_0, p_n>= \delta_{0,n},\ n \in \mathbb{N};$$

e, portanto, se (p_n) for uma S.P.O.M. será associada à funcional $k\alpha_0$ com $k \neq 0$.

Enunciemos agora uma condição suficiente para que uma família livre de polinómios mónicos, (p_n), associada a (α_n) seja uma S.P.O.M. associada à funcional linear $K\alpha_0$.

Teorema 1.3.1 *Sejam (α_n) uma sucessão de funcionais lineares e (p_n) a família livre de polinómios mónicos associada. Se existirem constantes reais (c_n) tais que*

$$<\alpha_{k-1}, x^{m-k}>= c_{m-1},\ 1 \leq k \leq m \text{ e } m \geq 1$$

e

$$D_m \neq 0,\ m \geq 1$$

então (p_n) é a S.P.O.M. associada a $<\alpha_0, p_0> \alpha_0$.

Demonstração

Pelo teorema 1.1.9, associada à sucessão (c_n) existe uma função ϕ de variação limitada tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m d\phi(x) = c_m,\ m = 0, 1, 2, \dots;$$

e associada à funcional u definida por

$$<u, x^n>= \int_{-\infty}^{\infty} x^m d\phi(x),\ n \in \mathbb{N}$$

existe uma S.P.O.M. quando, e só quando,

$$\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_m \\ c_1 & \dots & c_{m+1} \\ & \dots & \\ c_m & \dots & c_{2m} \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo o $m \in \mathbb{N}$. Mas, nas condições do teorema,

$$D_m = \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_m \\ c_1 & \dots & c_{m+1} \\ & \dots & \\ c_m & \dots & c_{2m} \end{vmatrix}$$

para todo o $m \in \mathbb{N}$; e, portanto, (p_n) é a S.P.O.M. associada a u (ver lema 1.3); e pelo que já dissemos $u =< \alpha_0, p_0 > \alpha_0$. □

Observação

Este teorema é uma generalização de [58, Lema 10].

Temos ainda o seguinte resultado fundamental:

Teorema 1.3.2 (Maroni,1992) *Sejam (p_n) uma família livre de polinómios mónicos e (α_n) a pseudo–base que lhe está associada; então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(a) *(p_n) é a S.P.O.M. associada a $< \alpha_0, p_0 > \alpha_0 = u$.*

(b) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\phi_n \in \mathbb{P}$ de grau n tal que $\alpha_n = \phi_n u$.*

(c) *$\alpha_n = \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u$, $n \in \mathbb{N}$.*

(d) *$x\alpha_n = \gamma_{n+1}\alpha_{n+1} + \beta_n \alpha_n - \alpha_{n-1}$ com $\gamma_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, convencionando–se que $\alpha_{-1} = 0$.*

(e) *$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k^2(x)$ onde $r_k = \prod_{i=1}^{k} \gamma_i$.*

Esquema da demonstração:

$$\begin{array}{ccccc} \textbf{(e)} & \Leftrightarrow & \textbf{(a)} & \Leftrightarrow & \textbf{(c)} \\ & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ & & \textbf{(d)} & & \textbf{(b)} \end{array}$$

Comecemos por demonstrar que **(a)** $\Leftrightarrow$ **(c)**:

(a) ⇒ (c)

Por definição de S.P.O.M. associada à funcional de momentos regular u temos

$$< u, p_m p_n >= K_n \delta_{m,n} \text{ para todo o } m, n \in \mathbb{N};$$

e, portanto, $< \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u, p_m >= \delta_{m,n}$. Assim,

$$\alpha_n = \frac{p_n}{< u, p_n^2 >} u$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(c) ⇒ (a)

Seja (α_n) a pseudo–base de termo geral $\alpha_n = \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u$ associada a (p_n). Então,

$$< \frac{p_n}{< u, p_n^2 >} u, p_m >= \delta_{m,n} \text{ para todo o } m, n \in \mathbb{N}$$

ou equivalentemente,

$$< u, p_n p_m >=< u, p_n^2 > \delta_{m,n} \text{ para todo o } m, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstremos agora que **(a)** ⇔ **(d)**:

(a) ⇒ (d)

Pelo teorema 1.1.14 temos que os p_n satisfazem uma relação de recorrência a três termos

$$\begin{array}{l} x p_n = p_{n+1} + \beta_n p_n + \gamma_n p_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots \\ p_0 = 1 \text{ e } \ p_1 = x - \beta_0, \end{array}$$

onde $\gamma_n = \frac{<u,p_n^2>}{<u,p_{n-1}^2>}$ é diferente de 0 para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Assim, aplicando u a ambos os membros da fórmula de recorrência anterior, depois de multiplicada por p_n (i.e., multiplicando escalarmente por p_n), vem sucessivamente

$$< u, x p_n p_n >=< u, p_{n+1} p_n > + \beta_n < u, p_n p_n > + \frac{<u,p_n^2>}{<u,p_{n-1}^2>} < u, p_{n-1} p_n >$$

$$< x \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u, p_n >= \frac{1}{<u,p_n^2>} < p_{n+1} u, p_n > + < \beta_n \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u, p_n > + < \frac{p_{n-1}}{<u,p_{n-1}^2>} u, p_n >$$

$$< x \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u - \gamma_{n+1} \frac{p_{n+1}}{<u,p_{n+1}^2>} u - \beta_n \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u - \frac{p_{n-1}}{<u,p_{n-1}^2>} u, p_n >= 0,\ n \in \mathbb{N}$$

$$x \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u = \gamma_{n+1} \frac{p_{n+1}}{<u,p_{n+1}^2>} u + \beta_n \frac{p_n}{<u,p_n^2>} u + \frac{p_{n-1}}{<u,p_{n-1}^2>} u,\ n \in \mathbb{N}$$

e por **(c)** temos o pretendido.

(d) ⇒ (a)

p_{n+2} admite a seguinte decomposição

$$p_{n+2} = (x - \beta_{n+1})p_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k$$

onde $\underbrace{< \alpha_k, p_k >}_{=1} a_{n,k} =< \alpha_k, p_{n+2} > - < \alpha_k, (x - \beta_{n+1})p_{n+1} >$. Então,

$$\begin{array}{rcl} a_{n,k} & = & - < x\alpha_k, p_{n+1} > + \beta_{n+1} < \alpha_k, p_{n+1} > \\ & = & - < \gamma_{k+1}\alpha_{k+1} + \beta_k\alpha_k - \alpha_{k-1}, p_{n+1} > \quad \text{(por hipótese)} \\ & = & \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq n-1 \\ -\gamma_{n+1} & \text{se } k = n \end{cases} \end{array}$$

Que **(b)** ⇔ **(c)** sai directamente do lema 1.2.
Demonstremos agora que **(a)** ⇔ **(e)**:

(a) ⇒ (e)

Do teorema 1.1.15 tiramos que

$$\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x - y} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k(x)P_k(y);$$

e portanto, tomando o limite quando $x \to y$ nesta expressão, vem sucessivamente

$$\frac{P_{n+1}(x)(P_n(y)-P_n(x))}{x-y} - \frac{P_n(x)(P_{n+1}(y)-P_{n+1}(x))}{x-y} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k(x)P_k(y)$$

$$P_n(y)P'_{n+1}(y) - P'_n(y)P_{n+1}(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k(y)P_k(y).$$

(e) ⇒ (a)

Da hipótese temos

$$P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) = P_n^2(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_{n-1}}{r_k} P_k(x)P_k(y),$$

ou seja,

$$P_n(x)P'_{n+1}(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) = P_n^2(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}}(P_{n-1}(x)P'_n(x) - P'_{n-1}(x)P_n(x))$$

e, portanto,

$$P_n(x)(P'_{n+1}(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}}P'_{n-1}(x)) - P'_n(x)(P_{n+1}(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}}P_{n-1}(x)) = P_n^2(x);$$

e, dividindo ambos os membros desta expressão por $P_n^2(x)$, obtemos

$$\frac{P_n(x)(P'_{n+1}(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}}P'_{n-1}(x)) - P'_n(x)(P_{n+1}(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}}P_{n-1}(x))}{P_n^2(x)} = 1$$

logo

$$(\frac{P_{n+1}(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}} P_{n-1}(x)}{P_n(x)})' = 1.$$

Assim,

$$P_{n+1}(x) + \frac{r_n}{r_{n-1}} P_{n-1}(x) = (x - \beta_n) P_n(x). \ \square$$

Na tentativa de generalizar o conceito de ortogonalidade temos:

Definição 1.3.1 Uma família de polinómios (p_n) é dita *quase–ortogonal de ordem* s relativamente a u— funcional de momentos não necessariamente regular— se

$$< u, p_m p_n >= 0, \ |n - m| \geq s + 1$$

e

$$\exists r \geq s : \quad < u, p_{r-s} p_r > \neq 0.$$

Observação

Esta definição não implica que a família de polinómios seja livre. No caso de (P_n) constituir uma família livre, podemos reescrever a definição de família quase–ortogonal de ordem s na seguinte forma

$$\begin{cases} < u, x^m p_n >= 0, \ 0 \leq m \leq n - (s + 1) \\ \exists r \geq s : \quad < u, x^{r-s} p_r > \neq 0. \end{cases}$$

Exemplo

Sejam (P_n) a S.P.O.M. associada à funcional de momentos u e (α_n) a pseudo–base que lhe está associada. Então (P_n) é quase–ortogonal de ordem s relativamente a α_s.

De facto, pelo teorema 1.3.2 $\alpha_n = \frac{P_n}{<u, P_n^2>} u$, $n \in \mathbb{N}$; e, portanto,

$$< \alpha_s, P_m P_n >= \frac{< u, P_s P_m P_n >}{< u, P_s^2 >} = 0, \ |m - n| \geq s + 1$$

e

$$\exists \ r \geq s : \ < \alpha_s, P_{r-s} P_r >= \frac{< u, P_s P_{r-s} P_r >}{< u, P_s^2 >} \neq 0. \ \square$$

Na verdade, no exemplo anterior poder–se–ia dizer que

$$\forall r \geq s < \alpha_s, P_{r-s} P_r > \neq 0.$$

Isto sugere–nos a seguinte definição:

Definição 1.3.2 Uma família de polinómios (p_n) é dita *estritamente quase–ortogonal de ordem s* relativamente a u— funcional de momentos não necessariamente regular— se

$$< u, p_m p_n >= 0,\ |n-m| \geq s+1$$

e

$$\forall r \geq s\ :\ \ < u, p_{r-s} p_r > \neq 0.$$

Observação

A definição 1.1.1 coincide com a de quase–ortogonalidade estrita de ordem zero.

Sempre que tivermos regularidade podemos pensar procurar relações entre estas duas famílias de polinómios mónicos: a quase–ortogonal de ordem $s-1$ relativamente a u, (B_n), e a S.P.O.M., (P_n), que lhe está associada. Assim:

Teorema 1.3.3 (Shohat,1937)

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} P_k(x),\ 0 \leq n \leq s-1 \\ B_n(x) &= \textstyle\sum_{k=n-s+1}^{n} a_{n,k} P_k(x),\ n \geq s \end{aligned} \tag{1.34}$$

e existe $r \geq s$ tal que $a_{r,r-s} \neq 0$.

Damos, de seguida, um resultado que relaciona todos estes conceitos (ver [65]):

Teorema 1.3.4 (Maroni,1987) *Seja (P_n) a S.P.O.M. associada à funcional de momentos regular u; então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *(P_n) é quase–ortogonal de ordem $s-1$ relativamente a $\tilde{u}$.*

(b) *$\exists r \geq s-1$: $< \tilde{u}, P_{r-s+1} P_r > \neq 0$ e $< \tilde{u}, P_n >= 0$, $n \geq s$.*

(c) *Existe um único polinómio ϕ de grau exactamente $s-1$ tal que $\tilde{u} = \phi u$.*

(d) *(P_n) é estritamente quase–ortogonal de ordem $s-1$ relativamente a $\tilde{u}$.*

(e) *$< \tilde{u}, P_{s-1} > \neq 0$ e $< \tilde{u}, P_n >= 0$, para $n \geq s$.*

Demonstração

O esquema de demonstração vai ser o seguinte:

$$(\mathbf{a}) \Rightarrow (\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{c}) \Rightarrow (\mathbf{d}) \Rightarrow (\mathbf{e}) \Rightarrow (\mathbf{a})$$

Demonstremos que (**a**) ⇒ (**b**):

— Basta tomar $n = 0$ na primeira condição da definição 1.3.1.

Demonstremos que (**b**) ⇒ (**c**):

— Seja (α_n) a pseudo–base associada a (P_n); então, $\tilde{u} = \sum_{k\geq 0} a_k\alpha_k$ onde $a_k =< \tilde{u}, P_k >$. Mas, por hipótese, $< \tilde{u}, P_k >= 0$ para $k \geq s$, logo

$$\tilde{u} = \sum_{k\geq 0}^{s-1} a_k\alpha_k.$$

Falta então provar que $< \tilde{u}, P_{s-1} >\neq 0$ (ver lema 1.4).

Por hipótese, $\exists r \geq s-1 : \quad < \tilde{u}, P_{r-s+1}P_r >\neq 0$ e, portanto, tomando $P_{r-(s-1)} = \sum_{k=0}^{r-(s-1)} b_k x^k$ vem

$$\begin{aligned} < \tilde{u}, P_{r-s+1}P_r > &= \textstyle\sum_{k=0}^{r-(s-1)} b_k < \tilde{u}, x^k P_r > \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{r-(s-1)} b_k < \tilde{u}, \sum_{i=r-k}^{r+k} c_i P_i > \quad \text{(pois } (P_n) \text{ é uma S.P.O.M.)} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{r-(s-1)} \sum_{i=r-k}^{r+k} b_k c_i < \tilde{u}, P_i > \\ &= b_{r-(s-1)} c_{s-1} < \tilde{u}, P_{s-1} > \quad \text{(por hipótese).} \end{aligned}$$

Como $c_{s-1} = \prod_{i=r-s}^{s} \gamma_i$ onde os γ_i são os do teorema 1.1.14, temos que $< \tilde{u}, P_{s-1} >\neq 0$.

Demonstremos que (**c**) $\Rightarrow$ (**d**):

$$< \tilde{u}, P_m P_n >=< u, \phi_{s-1} P_m P_n >= \begin{cases} 0 \ , \ |m-n| \geq s \\ \neq 0 \ , \ |m-n| = s-1. \end{cases}$$

Demonstremos que (**d**) $\Rightarrow$ (**e**):

— Basta toma $r = s-1$ na segunda condição da definição de quase–ortogonalidade estrita de ordem $s-1$, e $n = 0$ na primeira condição da mesma definição.

Demonstremos que (**e**) $\Rightarrow$ (**a**):

— Da hipótese tiramos que

$$\tilde{u} = \sum_{k=0}^{s-1} < \tilde{u}, P_k > \frac{P_k}{< u, P_k^2 >} u, \text{ i.e.,}$$

$\tilde{u} = \phi_s(x)u$ onde ϕ_s é um polinómio de grau exactamente $s-1$. Assim,

$$< \tilde{u}, P_m P_n >=< u, \phi_s P_m P_n >= \begin{cases} 0 \ , \ |m-n| \geq s \\ \neq 0 \ , \ |m-n| = s-1. \ \square \end{cases}$$

1.4 Operadores em $\mathbb{P}$ que Preservam a Ortogonalidade

Aqui vamos analisar o seguinte <u>problema</u>:

— Determinar todos os operadores lineares de $\mathbb{P}$ em $\mathbb{P}$, L, satisfazendo a seguinte condição

$$\text{se } (B_n) \text{ é uma S.P.O.M. associada a } u \text{ então } (L(B_n)) \text{ é uma S.P.O.M.}$$

Note–se que aqui estamos a impor que LB_n seja ainda um polinómio de grau n, i.e, L tem que ser um operador linear que mantém o grau do polinómio.

Na verdade, existem operadores lineares que mantêm a ortogonalidade:

Teorema 1.4.1 (Al–Salam e Verma,1969) *Um operador linear L de $\mathbb{P}$ em $\mathbb{P}$ que mantém o grau dos polinómios, admitindo a seguinte representação*

$$Lx^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_{n-k} x^k \;\; n = 0, 1, \dots$$

é um operador que mantém a ortogonalidade quando, e só quando, $L = s\tau_0 \circ h_a$.

Teorema 1.4.2 (Al–Salam e Verma,1975) *Um operador linear L de $\mathbb{P}$ em $\mathbb{P}$ que mantém o grau dos polinómios, admitindo a seguinte representação*

$$Lx^n = a_n x^n \;\; n = 0, 1, \dots$$

é um operador que mantém a ortogonalidade quando, e só quando, $L = s\tau_{-b} \circ h_1$.

As demonstrações destes dois resultados encontram–se em [7] e [8].

Analisemos primeiro quais, dentre os operadores lineares definidos na secção 2, mantêm o grau dos polinómios:
— Vê–se facilmente que os três primeiros operadores lineares definidos na secção 2 não mantêm o grau dos polinómios e que os restantes dois sim.

Estudaremos a composição desses dois operadores numa tentativa de generalização destes dois teoremas:

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{P} & \to & \mathbb{P} \\ & B_n(x) & \mapsto & sa^{-n} B_n(ax+b) \end{array}$$

onde $b \in \mathbb{R}$ e $a, s \in \mathbb{R} - \{0\}$. É claro que $L = s\tau_{-b} \circ h_a$ é um homomorfismo algébrico. Seja v a funcional de momentos quase–definida associada a $(L(B_n))$; então,

$$\begin{aligned} < v, (LB_n)(LB_m) > &= < v, s^2\tau_{-b} \circ h_a(B_n B_m)(x) > \\ &= < v \circ (s^2\tau_b \circ h_a), B_n B_m > \\ &= K_n \delta_{n,m}; \end{aligned}$$

e, portanto, $u = v \circ (s^2\tau_b \circ h_a)$, ou seja, $v = u \circ (s^2\tau_{-b} \circ h_a)^{-1}$; logo, $v = u \circ (s^{-2} h_{\frac{1}{a}} \circ \tau_{-b})$.

Acabamos de ver que $\frac{1}{s}L = \tau_{-b} \circ h_a$, com os operadores τ_b e h_a definidos atrás, transforma S.P.O.M. em S.P.O.M; além disso, preserva o grau dos polinómios. Verifiquemos que se tem o recíproco deste resultado:

Teorema 1.4.3 (Allaway,1987) *Sejam L um operador linear de $\mathbb{P}$ em $\mathbb{P}$ que preserva o grau dos polinómios e (B_n) uma S.P.O.M.. Uma condição necessária e suficiente para que $(\frac{1}{s}LB_n)$ seja ainda uma S.P.O.M. é que existam $b \in \mathbb{R}$ e $a, s \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que $L = s\tau_{-b} \circ h_a$.*
Além disso, $(\frac{1}{s}LB_n) = (R_n)$ satisfaz uma relação de recorrência de segunda ordem

$$\begin{array}{l} xR_n = R_{n+1} + \frac{\beta_n - b}{a} R_n + \frac{\gamma_n}{a^2} R_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots \\ R_0(x) = 1 \text{ e } R_1(x) = x - \frac{\beta_0 - b}{a} \end{array} \tag{1.35}$$

onde β_n e γ_{n+1} são os coeficientes da relação de recorrência satisfeita pelos (B_n).

A demonstração deste resultado vai ser feita usando uma técnica semelhante à usada por W.R.Allaway em [4].

Comecemos por introduzir o seguinte resultado:

Seja $u_{(i)} = x^i u$ uma funcional de momentos associada à S.P.O. (B_n^i). Como (x^n) é uma base de $\mathbb{P}$, os B_n admitem a seguinte representação

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k.$$

Assim, pelo teorema 1.3.2, a pseudo–base associada a (B_n), (α_n), vem dada por

$$\alpha_n = \frac{1}{< u, B_n^2 >} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_{(k)}. \tag{1.36}$$

Observação

Aqui suposemos a regularidade das funcionais $u_{(i)}$, por isso não nos preocupamos com questões de existência de famílias livres de polinómios associadas. Veremos na secção 1 do próximo capítulo uma condição necessária e suficiente para a regularidade de $x^i u$ sempre que u o seja.

O resultado seguinte será fundamental na demonstração do teorema 1.4.3:

Teorema 1.4.4 *Seja L um operador que mantém o grau e a ortogonalidade de uma qualquer S.P.O., verificando $L(1) = s$ e $L(x) = s(ax + b)$. Se para todo o n,i $\in \mathbb{N}$, tivermos*

$$s < u_{(i)}, xB_n^i > = < u_{(i)}, L^{-1}((Lx)(LB_n^i)) > \tag{1.37}$$

então $L = s\tau_{-b} \circ h_a$.

Demonstração

Se multiplicarmos ambos os membros de (1.37) por $\frac{1}{<u,B_k^2>} \sum_{i=0}^{k} a_{k,i}$, obtemos

$$s < \alpha_k, xB_n^i > = < \alpha_k, L^{-1}((Lx)(LB_n^i)) > ;$$

e, portanto,

$$s < \alpha_k, xq >=< \alpha_k, L^{-1}((Lx)(Lq)) > \tag{1.38}$$

para todo o $q \in \mathbb{P}$, pois (B_n) é uma base de $\mathbb{P}[x]$.

Expressemos δ_y como combinação linear dos elementos da pseudo–base (α_n):

$$\delta_y = \sum_{k\geq 0} a_k \alpha_k$$

onde $a_k =< \delta_y, B_k >$; e, portanto,

$$\delta_y = \sum_{k\geq 0} B_k(y)\alpha_k$$

para todo o $y \in \mathbb{R}$.

Se multiplicarmos ambos os membros de (1.38) por $\sum_{k\geq 0} B_k(y)$, obtemos

$$s < \delta_y, xB_n^i >=< \delta_y, L^{-1}((Lx)(LB_n^i)) > \text{ para todo o } y \in \mathbb{R};$$

ou seja, $sL(xx^n) = L(x)L(x^n)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Por indução conclui–se que

$$L(x^n) = s(ax+b)^n \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}. \ \square$$

<u>Demonstração do teorema 1.4.3</u>

Demonstrámos já que a condição é necessária. Demonstremos a suficiência.

Como L é um operador linear que preserva o grau dos polinómios temos

$$L(1) = s \text{ e } L(x) = s(ax+b).$$

Sejam $(B_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ S.P.O.M associadas a $u_{(i)}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$ e $(LB_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ S.P.O. associadas a $v_{(i)}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots$; então,

1.

$$\frac{<v_{(i)},(LB_n^i)(LB_0^i)>}{<v_{(i)},s^2>} = \delta_{n,0} = \frac{<u_{(i)},B_n^iB_0^i>}{<u_{(i)},1>} \text{ i.e.,}$$
$$< \frac{sv_{(i)}\circ L}{<v_{(i)},s^2>}, B_n^i >= \delta_{n,0} =< \frac{u_{(i)}}{<u_{(i)},1>}, B_n^iB_0^i >$$

e, portanto,

$$v_{(i)} = s\frac{< v_{(i)}, 1 >}{< u_{(i)}, 1 >}u_{(i)} \circ L^{-1}. \tag{1.39}$$

2.

$$\frac{<v_{(i)},(LB_n^i)(LB_1^i)>}{<v_{(i)},(LB_1^i)^2>} = \delta_{n,1} = \frac{<u_{(i)},B_n^iB_1^i>}{<u_{(i)},(B_1^i)^2>} \text{ i.e.,}$$
$$\frac{<v_{(i)},(LB_n^i)(Lx)>}{<v_{(i)},(LB_1^i)^2>} = \delta_{n,1} = \frac{<u_{(i)},B_n^ix>}{<u_{(i)},(B_1^i)^2>};$$

e, portanto,

$$< u_{(i)}, xB_n^i >= \frac{< u_{(i)}, (B_1^i)^2 >}{< v_{(i)}, (LB_1^i)^2 >} < v_{(i)}, (LB_n^i)(Lx) > . \tag{1.40}$$

Assim,

$$\begin{aligned} s < u_{(i)}, xB_n^i > &= s\tfrac{<u_{(i)},(B_1^i)^2>}{<v_{(i)},(LB_1^i)^2>} < v_{(i)}, (LB_n^i)(Lx) > \\ &= s^2\tfrac{<v_{(i)},1><u_{(i)},(B_1^i)^2>}{<v_{(i)},(LB_1^i)^2><u_{(i)},1>} < u_{(i)}, L^{-1}((LB_n^i)(Lx)) > \text{ (por (1.39))}; \end{aligned}$$

e, portanto, podemos determinar s verificando

$$< v_{(i)}, 1 >< u_{(i)}, (B_1^i)^2 > s^2 =< v_{(i)}, (LB_1^i)^2 >< u_{(i)}, 1 > \text{ , i.e.,}$$

de forma que

$$s < u_{(i)}, xB_n^i >=< u_{(i)}, L^{-1}((LB_n^i)(Lx)) >$$

para todo o n,$i \in \mathbb{N}$. Podemos então aplicar o teorema 1.4.4 e concluir que $L = s\tau_{-b} \circ h_a$.

Demonstremos agora que se tem (1.35):

Por hipótese, os B_n satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$xB_n(x) = B_{n+1}(x) + \beta_n B_n(x) + \gamma_n B_{n-1}(x) \; n \in \mathbb{N};$$

e, portanto, substituindo x por $ax + b$, temos

$$(ax + b)B_n(ax + b) = B_{n+1}(ax + b) + \beta_n B_n(ax + b) + \gamma_n B_{n-1}(ax + b)$$

ou ainda

$$\begin{gathered} axB_n(ax + b) = B_{n+1}(ax + b) + (\beta_n - b)B_n(ax + b) + \gamma_n B_{n-1}(ax + b) \\ aa^{-(n+1)}xB_n(ax + b) = a^{-(n+1)}B_{n+1}(ax + b) + a^{-(n+1)}(\beta_n - b)B_n(ax + b) + a^{-(n+1)}\gamma_n B_{n-1}(ax + b) \\ xR_n = R_{n+1} + \tfrac{\beta_n - b}{a}R_n + \tfrac{\gamma_n}{a^2}R_{n-1}. \;\square \end{gathered}$$

Chapter 2

S.P.O.M. Semi–Clássicas

Neste capítulo vamos estudar uma classe particular de S.P.O.M.— aquela cuja S.P.M. derivados, é quase–ortogonal de ordem s relativamente a uma determinada funcional de momentos. Seja então, (P_n) uma S.P.O.M. associada à funcional de momentos regular u e $(\frac{P'_{n+1}}{n+1})$ quase–ortogonal de ordem s relativamente a $\tilde{u}$.

Veremos, na primeira secção, que as S.P.O.M. associadas a funcionais de momentos que verifiquem uma relação do tipo

$$\begin{cases} (\phi(x)w(x))' = \psi(x)w(x) \\ \\ \phi(x)w(x) = 0 \quad \text{para} \quad x = a, b \end{cases} \tag{2.1}$$

são tais que a S.P.M. derivados é quase–ortogonal relativamente a ϕw.

Vamos começar por fazer um apanhado histórico sobre o tema que nos propomos estudar:

— As S.P.O.M. associadas a funcionais de momentos regulares definidas por

$$< u, x^n >= \int_a^b x^n w(x) dx \ , \ n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

verificando equações diferenciais do tipo (2.1) onde w é uma função integrável e de derivada integrável, começaram por ser estudadas por J.Shohat em [96].

Shohat provou que se w satisfizesse uma equação diferencial do tipo referido, então a S.P.O.M. que lhe está associada verifica uma relação diferencial em diferenças— dita de estrutura de primeira ordem

$$\psi(x)P_n(x) + \phi(x)P'_n(x) = \sum_{k=n-s}^{n+s} a_{n,k} P_k \ , \ n \geq s \tag{2.3}$$

onde $s = \max\{\text{gr}\psi - 1, \text{gr}\phi - 2\}$. Mais ainda, (P_n) verifica uma equação diferencial de segunda ordem

$$A_n(x)P_n''(x) + B_n(x)P_n'(x) + C_n(x)P_n(x) = 0 \tag{2.4}$$

onde A_n,B_n,C_n são polinómios com coeficientes dependentes de n, mas cujos graus não dependem de n.

Esta equação pode ser deduzida de uma forma mais simples do que foi feito nessa altura, como veremos no decorrer da segunda secção (ver [79], [76], [57] e [61]).

Mais tarde, em 1960, G.Szegö e S.Karlin (ver [60]) propuseram o problema de determinar todas as S.P.O.M. que verificavam uma relação do tipo (2.3).

Este problema foi resolvido por P.Maroni em [81]. Ele provou que estas S.P.O.M. são aquelas cujas S.P.M. derivados é quase–ortogonal de uma determinada ordem. Antes dele, já W.Al–Salam e T.S.Chihara, em [6], tinham estudado o problema no caso $s = 0$.

Em 1979, A.Ronveaux (ver [93]) verificou que, as S.P.O.M. associadas às funcionais de momentos definidas por

$$< u, x^n >= \int_0^\infty x^n(x^\alpha e^{Q(x)})dx \ , \ n \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

onde $Q(x) = \sum_{i=0}^q a_i x^i$ e $\alpha > -1$, constituem exemplos de S.P.O.M. cuja S.P.M. derivados é quase–ortogonal de uma determinada ordem, abrindo assim o caminho para o estudo destas famílias.

As funcionais definidas por (2.5) são uma generalização das funcionais tipo Laguerre.

Inspirados no trabalho de A.Ronveaux, H. Van Rossum e E.Hendriksen provaram (ver [56]) que, se (P_n) é uma S.P.O.M. associada à funcional de momentos (2.2), onde w verifica uma equação diferencial do tipo

$$(\phi(x)w(x))' = \psi(x)w(x)$$

com ϕ e ψ polinómios de um grau pré–fixado, então $(\frac{P_{n+1}'}{n+1})$ é uma S.P.M. quase–ortogonal relativamente a uma determinada funcional de momentos.

Seja agora (P_n) uma S.P.O.M. associada à funcional de momentos, u, definida por

$$< u, x^n >= \int_a^b x^n d\sigma(x) \ , \ n \in \mathbb{N},$$

onde σ é uma função não decrescente de espectro infinito. Nestas condições W.N.Everitt e F.V.Atkinson (ver [10]) provaram que se

$$F(z) =< u_t, \frac{1}{z-t} >$$

satisfizer uma equação diferencial de primeira ordem

$$\phi_1(z)F'(z) + \phi_2(z)F(z) = \phi_3(z) \tag{2.6}$$

com ϕ_1,ϕ_2 e ϕ_3 polinómios de grau pré–fixado, então (P_n) verifica uma equação do tipo (2.4).

Mais ainda, se considerarmos uma funcional linear v definida à custa de u por

$$u + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i},$$

então sempre que exista e seja regular, a S.P.O.M. associada verifica uma equação da forma (2.4). Uma forma interessante de obter esta nova equação de segunda ordem, foi descoberta por F.Marcellán e A.Ronveaux em [79].

Em 1985 H. Van Rossum e E.Hendriksen demonstraram este mesmo resultado considerando

$$F(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{< u, x^n >}{z^{n+1}}$$

e usando a teoria das Fracções Contínuas (ver [57]).

M.Guerfi encontrou uma fórmula que nos dá a expressão explícita dos polinómios ϕ_i com $i = 1, 2, 3$ de (2.6) em termos dos polinómios ϕ e ψ de (2.12) (ver [51]). Veremos na segunda secção que se u verifica (2.12) então F verifica (2.6).

Exemplos de S.P.O.M. associadas a funcionais clássicas mais deltas de Dirac tomadas nos extremos do verdadeiro intervalo de ortogonalidade podem ser encontrados nos trabalhos de T.S.Chihara, [31], A.M.Krall, S.Shore e L.L.Littlejohn [62], [63], [74], [70], [71], [73], no texto [61] de T.H.Koornwinder, e ainda no trabalho de F.Marcellán e P.Maroni [78]. Um boa resenha destes resultados pode ser visto em [72].

Em 1983 W.Hahn encerrou, de certa forma, o ciclo destes resultados, ao provar em [52] que se (P_n) é uma S.P.O.M. associada a uma funcional de momentos u, e verifica uma equação diferencial de segunda ordem da forma (2.4), então u verifica uma relação do tipo (2.12).

Organização do capítulo:

— Começaremos por introduzir o conceito fundamental deste capítulo— S.P.O.M. semi–clássica.

— Daremos na segunda secção algumas caracterizações destas sucessões. Vamos deduzir recorrentemente os coeficientes da fórmula de estrutura (2.3), e mostraremos que essa fórmula contém toda a informação sobre as S.P.O.M..

— Na terceira secção damos alguns exemplos de S.P.O.M..

2.1 Classe de uma Funcional de Momentos

Comecemos por introduzir o conceito fundamental deste capítulo:

Definição 2.1.1 (Maroni,1987) Seja (P_n) uma S.P.O.M. associada à funcional de momentos u; (P_n) é *semi–clássica de classe* s se e só se $(\frac{P'_{n+1}}{n+1})$ for uma S.P.M. quase–ortogonal de ordem s relativamente a uma determinada funcional de momentos, $\tilde{u}$.

Tentemos relacionar estas duas funcionais:

— Como (P_n) é uma S.P.O.M., da observação **(a)** do teorema 1.1.14, sabemos existirem duas sucessões de números reais (β_n) e (γ_n) com $\gamma_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ verificando

$$\begin{aligned} & xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \ , \ n = 1, 2, \ldots \\ & P_0(x) = 1 \text{ e } P_1(x) = x - \beta_0 \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Derivando (2.7)

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) + \beta_n P'_n(x) + \gamma_n P'_{n-1}(x) - xP'_n(x), \tag{2.8}$$

Assim,

$$\begin{aligned} < \tilde{u}, P_n x^m > \ &= \ < \tilde{u}, x^m (P'_{n+1}(x) + \beta_n P'_n + \gamma_n P'_{n-1} - xP'_n) > \\ &= \ 0 \ , \ n - m \geq s + 3 \ , \end{aligned}$$

pois $(\frac{P'_{n+1}}{n+1})$ é quase–ortogonal de ordem s relativamente a $\tilde{u}$. Agora, da alínea (**c**) do teorema 1.3.4 concluímos que

$$\exists \ \phi \in \mathbb{P}_{s+2} : \ \tilde{u} = \phi(x) u. \tag{2.9}$$

Podemos então pensar em caracterizar a S.P.O.M. semi–clássica, (P_n), em termos da funcional de momentos que lhe está associada, u. De facto, de (2.8) deduzimos que

$$\begin{aligned} < D\tilde{u}, P_n x^m > \ &= \ - < \tilde{u}, P'_n x^m + m P_n x^{m-1} > \\ &= \ - < \tilde{u}, P'_n x^m > - m < \tilde{u}, x^{m-1}(P'_{n+1} + \beta_n P'_n + \gamma_n P'_{n-1} - xP'_n) > \\ &= \ 0 \ , \ n - m \geq s + 2. \end{aligned}$$

Então, da alínea (**c**) do teorema 1.3.4 sabemos que existe $\psi \in \mathbb{P}_{s+1}$ verificando

$$D\tilde{u} = \psi(x) u. \tag{2.10}$$

Além disso,

$$< D(x\tilde{u}), P_n x^m >= \begin{cases} 0 \ , \ n-m \geq s+2 \\ \\ \neq 0 \ , \text{ para algum } m \geq s+2; \end{cases}$$

e, portanto, existe um e um só ζ de grau exactamente $s+2$ verificando

$$D(x\tilde{u}) = \zeta(x)u. \tag{2.11}$$

De (2.9) e (2.10), obtemos a seguinte relação para a funcional de momentos u

$$D(\phi(x)u) = \psi(x)u \tag{2.12}$$

e de (2.11) concluímos que $\zeta(x) = \phi(x) + x\psi(x)$, i.e., u é uma funcional de momentos regular verificando (2.12) e $\mathrm{gr}(\phi(x) + x\psi(x)) = s+2$.

Acabámos de provar o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1 *Se (P_n) é uma S.P.O.M. semi–clássica associada à funcional de momentos u, então existem polinómios $\psi \in \mathbb{P}_{s+1}$, com $gr(\psi) \geq 1$ e $\phi \in \mathbb{P}_{s+2}$ verificando (2.12) e $gr(\phi(x) + x\psi(x)) = s+2$.*

Corolário 2.1 *Nas condições do teorema tem–se*
(i) $\phi(x) \neq 0$ para todo o x.
(ii) $gr(\zeta) \geq 1$ onde $\zeta(x) = \phi(x) + x\psi(x)$.

Demonstração

(i) Se $\phi(x) \equiv 0$ então $\psi(x)u = 0$, i.e., $\psi \equiv 0$; pois u é regular— o que contradiz a hipótese $\mathrm{gr}(\psi) \geq 1$.

(ii) (Demonstremos por redução ao absurdo)
Suponhamos que ζ é uma constante e multipliquemos ambos os membros de (2.12) por x. Assim, obtemos sucessivamente

$$xD(\phi(x)u) = x\psi(x)u$$

$$xD(\phi(x)u) = (-\phi(x) + \zeta(x))u$$

$$D(x\phi(x)u) = \zeta(x)u;$$

em particular, temos que

$$< \zeta(x)u, 1 >= 0$$

e, portanto, $\zeta(x) \equiv 0$, pois u é regular. Mas, neste caso, (2.12) toma a forma

$$D(x\phi(x)u) = 0;$$

e, mais uma vez, da regularidade de u concluímos que $\phi(x) \equiv 0$.

Na verdade, daqui também podemos concluir que ψ não pode ser uma constante; e, portanto, podemos retirar da condição da definição que $\mathrm{gr}(\psi) \geq 1$. □

Vamos ver que condições temos que impor para que se tenha o recíproco do teorema anterior. O estudo que aqui se vai fazer segue as ideias contidas no texto [85] de P.Maroni.

Definição 2.1.2 Uma funcional de momentos u diz–se *semi–clássica* se

1. u é regular
2. $\exists\ \phi,\psi \in \mathbb{P} : D(\phi(x)u) = \psi(x)u$ com $\mathrm{gr}(\psi) \geq 1$.

Vê–se facilmente que uma funcional de momentos semi–clássica, satisfaz uma infinidade de equações do tipo (2.12), i.e.,

$$D(p(x)\phi(x)u) = (p(x)\psi(x) + p'(x)\phi(x))u$$

com $p \in \mathbb{P}$. Então, podemos considerar a aplicação

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{P}\times\mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (\phi,\psi) & \longmapsto & \mathrm{gr}(x\psi+\phi)-2 \end{array}$$

onde ϕ e ψ verificam a condição 2 da definição anterior. Assim:

Definição 2.1.3 Seja u uma funcional de momentos semi–clássica; a

$$\min_{(\phi,\psi)\in\mathcal{A}_u} h(\phi,\psi)$$

chamamos *classe de u,* onde

$$\mathcal{A}_u = \{(\phi,\psi) \in \mathbb{P}\times\mathbb{P}{:}D(\phi u) = \psi u,\ gr(\psi) \geq 1\ \ e\ n\frac{\phi^{(s+2)}(0)}{(s+2)!} + \frac{\psi^{(s+1)}(0)}{(s+1)!} \neq 0,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Verifiquemos que a definição anterior é consistente, i.e., o par $(\phi,\psi) \in \mathcal{A}_u$ que nos dá a classe é único:

— Comecemos por provar o seguinte resultado:

Lema 2.1 *Seja u uma funcional semi–clássica e* (ϕ_1,ψ_1),$(\phi_2,\psi_2)\in\mathcal{A}_u$, *i.e.,*

$$\begin{cases} D(\phi_1 u)=\psi_1 u \ \text{com}\ s_1= \ gr(x\psi_1+\phi_1)-2 \\ \\ D(\phi_2 u)=\psi_2 u \ \text{com}\ s_2= \ gr(x\psi_2+\phi_2)-2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Seja $\Phi=$ *m.d.c*(ϕ_1,ϕ_2)*; então, existe um polinómio* Ψ *verificando*

$$D(\Phi u)=\Psi u$$

com $gr(x\Psi+\Phi)-2=\begin{cases} s_1-gr\phi_1+gr\Phi \\ s_2-gr\phi_2+gr\Phi. \end{cases}$

Demonstração

Pela definição de Φ sabemos que existem ϕ_{11}, $\phi_{22}\in\mathbb{P}$ tais que

$$\phi_1=\Phi\phi_{11} \text{ e } \phi_2=\Phi\phi_{22}.$$

Multilicando a primeira equação de (2.13) por ϕ_{22}, a segunda equação de (2.13) por ϕ_{11} e subtraindo o resultados, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
&\phi_{22}D(\phi_1 u)-\phi_{11}D(\phi_2 u)=(\phi_{22}\psi_1-\phi_{11}\psi_2)u \\
&\phi_{22}(\phi_1 Du+\phi_1' u)-\phi_{11}(\phi_2 Du+\phi_2' u)=(\phi_{22}\psi_1-\phi_{11}\psi_2)u \\
&(\phi_{22}\Phi\phi_{11}-\phi_{11}\Phi\phi_{22})Du=(\phi_{22}\psi_1-\phi_{11}\psi_2-\phi_{22}\phi_1'+\phi_{11}\phi_2')u \\
&[\phi_{22}(\psi_1-\phi_1')-\phi_{11}(\psi_2-\phi_2')]u=0.
\end{aligned}$$

Então, como u é regular

$$(\psi_1-\phi_1')\phi_{22}=\phi_{11}(\psi_2-\phi_2')$$

ou seja

$$(\psi_1-\Phi\phi_{11}')\phi_{22}=\phi_{11}(\psi_2-\Phi\phi_{22}')\ .$$

Então, $\exists\ \Psi\in\mathbb{P}$: $\begin{cases} \psi_1-\Phi\phi_{11}'=\Psi\phi_{11} \\ \\ \psi_2-\Phi\phi_{22}'=\Psi\phi_{22}. \end{cases}$

Se na primeira equação de (2.13) substituirmos ϕ_1 por $\Phi\phi_{11}$, obtemos

$$\phi_{11}D(\Phi u)=(\psi-\Phi\phi_{11}')u$$

e, portanto,

$$\phi_{11}D(\Phi u)=\phi_{11}(\Psi u)\ . \tag{2.14}$$

Analogamente se prova que

$$\phi_{22} D(\Phi u) = \phi_{22}(\Psi u) \ . \tag{2.15}$$

Como ϕ_{11} e ϕ_{22} não têm raízes em comum concluímos que

$$D(\Phi u) = \Psi u$$

com $s_1 = \mathrm{gr}(\Phi + x\Psi) - 2 + \mathrm{gr}(\phi_1) - \mathrm{gr}(\Phi)$ e $s_2 = \mathrm{gr}(\Phi + x\Psi) - 2 + \mathrm{gr}(\phi_2) - \mathrm{gr}(\Phi)$. $\square$

Para provarmos que o par (ϕ,ψ) que nos dá a classe de u é único, suponha–se em (2.13) que $s_1 = s_2 = \min\limits_{(\phi,\psi)\in\mathcal{A}_u} h(\phi,\psi)$; então, por definição, $s_1 = s_2 = \mathrm{gr}(\Phi + x\Psi) - 2$ e, portanto, $\Phi = \phi_1 = \phi_2$ e $\Psi = \psi_1 = \psi_2$.$\square$

Estamos em condições de resolver o problema proposto, i.e., dar uma caracterização da S.P.O.M. semi–clássica em termos da funcional de momentos que lhe está associada.

Teorema 2.1.2 *Seja u uma funcional de momentos semi–clássica de classe*

$$s = \min_{(\phi,\psi)\in\mathcal{A}_u} h(\phi,\psi) \ ;$$

então a S.P.O.M., (P_n), que lhe está associada é semi–clássica de classe s.

<u>Demonstração</u>

Seja (Φ,Ψ) o par de polinómios em $\mathcal{A}_u$ tal que $s + 2 = \mathrm{gr}(\Phi + x\Psi)$; então

$\left(\frac{P'_{n+1}}{n+1}\right)$ é quase–ortogonal de ordem s relativamente a Φu :

— De facto,

$$\begin{aligned}
< \Phi u, \tfrac{P'_{n+1}}{n+1} x^m > &= \tfrac{1}{n+1} < \Phi u, (P_{n+1}x^m)' - mP_{n+1}x^{m-1} >= \\
&= -\tfrac{1}{n+1} < D(\Phi u), P_{n+1}x^m > - \tfrac{m}{n+1} < \Phi u, P_{n+1}x^{m-1} > \\
&= -\tfrac{1}{n+1} < \Psi u, P_{n+1}x^m > - \tfrac{m}{n+1} < \Phi u, P_{n+1}x^{m-1} > \\
&= \begin{cases} 0 \ , \ \ n - m \geq \mathrm{gr}(\Phi + x\Psi) - 3 \\ \\ \neq 0 \ , \ \ m = n - s \ . \ \square \end{cases}
\end{aligned}$$

<u>Observação</u>

Dos teoremas 2.1.1 e 2.1.2 concluímos que (P_n) é uma S.P.O.M. semi–clássica de classe s se, e somente se, a funcional de momentos que lhe está associada, u, for semi-clássica de classe s.

Necessitamos então de um critério que nos dê, dentre todos os elementos de $\mathcal{A}_u$, o minimizante de h.

Teorema 2.1.3 *A funcional semi–clássica, u, é de classe $s = \min_{(\phi,\psi)\in\mathcal{A}_u} h(\phi,\psi)$ se, e somente se,*

$$\prod_{c\in\mathcal{Z}_\phi} \left(|\psi(c)-\phi'(c)| + |< u, \theta_c\psi - \theta_c^2\phi >|\right) > 0 \ , \tag{2.16}$$

onde $\mathcal{Z}_\phi$ é o conjunto de todas as raízes de ϕ e θ_c^2 representa a composição do operador θ_c— definido em (1.28)— consigo mesmo.

Demonstração

Seja c uma raiz de ϕ; tome–se $\phi(x) = (x-c)\phi_c(x)$ e substituamos em $D(\phi u) = \psi u$. Assim,

$$D((x-c)\phi_c u) = \psi u$$

$$(x-c)D(\phi_c u) = (\psi - \phi_c)u \ ;$$

dividindo $\psi - \phi_c$ por $x-c$ obtemos

$$\psi - \phi_c = (x-c)\psi_c + r_c. \tag{2.17}$$

e, portanto, a equação anterior toma a forma

$$(x-c)(D(\phi_c u) - \psi_c u) = r_c u$$

ou equivalentemente,

$$D(\phi_c u) - \psi_c u = A\delta_c + (x-c)^{-1} r_c u \tag{2.18}$$

onde $A =< D(\phi_c u) - \psi_c u, 1 >=< \psi_c u, 1 >$.

Além disso, de (2.17) conclui–se facilmente que $r_c = \psi(c) - \phi'(c)$ e $\psi_c(x) = (\theta_c\psi)(x) - (\theta_c^2\phi)(x)$.

Provemos (por absurdo) que a condição é necessária:

— Suponhamos que c é tal que $r_c = 0$ e $< u, \theta_c\psi - \theta_c^2\phi >= 0$; então, por (2.18), u satisfaz $D(\phi_c u) = \psi_c u$, i.e., u é de classe $s-1$!

Provemos que a condição é suficiente:

— Suponhamos que u é de classe $s_1 \leq s$ com $D(\phi_1 u) = \psi_1 u$. Então, do lema 2.1, existe um polinómio p tal que

$$\phi = p\phi_1 \ ; \ \ \psi = p\psi_1 + p'\phi_1.$$

Se $s_1 < s$, então $\mathrm{gr}(p) \geq 1$; seja c uma raiz de de p, i.e., $p(x) = (x-c)p_c(x)$. Assim, temos

$$\psi - \phi_c = (x-c)(p_c\psi_1 + p_c'\phi_1)$$

logo

$$r_c = 0 \text{ e } \ \psi_c(x) = p_c\psi_1 + p_c'\phi_1;$$

temos também que

$$\begin{aligned} < u, \psi_c > \ &= \ < u, p_c\psi_1 > + < u, p_c'\phi_1 > \\ &= \ < D(\phi_1 u) - \psi_1 u, p_c > \\ &= \ 0! \text{ (pois contradiz (2.16))}. \end{aligned}$$

Donde se conclui que $s_1 = s$, e pela unicidade do representante da classe temos que $\phi = \phi_1$ e $\psi = \psi_1$. □

Vimos já que os únicos operadores lineares que preservam a ortogonalidade são da forma $s\tau_{-b} \circ h_a$, onde $s, b, a \in \mathbb{R}$ e τ, h_a são os operadores definidos por (1.28)— ver teorema 1.4.3. Demonstremos, agora que mantêm a classe.

Teorema 2.1.4 (Belmehdi,1990) *Seja u uma funcional de momentos semi–clássica de classe s e $\tilde{u} = (\tau_{-b} \circ h_a)u$; então, $\tilde{u}$ é semi–clássica de classe s.*

Demonstração

Resulta directamente do facto dos operadores D e $\tau_{-b} \circ h_a$ comutarem. De facto, da definição 2.1.3 sabemos existirem ϕ e ψ polinómios de graus não superiores a $s+2$ e $s+1$, respectivamente, tais que

$$D(\phi(x)u) = \psi(x)u \ ;$$

i.e.,

$$< D(\phi(x)u) - \psi(x)u, P_n(x) >= 0 \ , \ \ n \in \mathbb{N}$$

e, portanto,

$$< D(\phi(x)u) - \psi(x)u, \underbrace{a^{-n}P_n(ax+b)}_{(\tau_{-b}\circ h_a)(P_n)} >= 0 \ , \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$< (h_{\frac{1}{a}} \circ \tau_b) \left(D(\phi(x)u) - \psi(x)u\right), P_n(x) >= 0 \ , \ \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

e pela comutatividade supracitada tiramos que $\tilde{u}$ satisfaz a equação

$$D(\tilde{\phi}(x)u) = \tilde{\psi}(x)u \ , \tag{2.19}$$

onde $\begin{cases} \tilde{\phi}(x) = (h_{\frac{1}{a}} \circ \tau_b)\phi(x) \\ \\ \tilde{\phi}(x) = (h_{\frac{1}{a}} \circ \tau_b)\phi(x) \ . \end{cases}$ □

Observação

Temos assim que os polinómios ϕ e ψ que nos dão a classe de uma dada S.P.O.M. são únicos a menos de uma transformação afim na variável. Isto leva–nos a considerar as chamadas formas canónicas que, no caso $s = 0$ e $s = 1$, foram estabelecidas, respectivamente, por C.W.Cryer [33] e S.Belmehdi [13].

2.2 Algumas Caracterizações

Antes de demonstrar algumas caracterizações das S.P.O.M. semi–clássicas, demonstraremos um resultado que terá um papel fundamental nesta secção:

Lema 2.2 (Magnus,1984) *Seja (P_n) uma S.P.O.M., i.e., existem duas sucessões de números reais (β_n) e (γ_n) com $\gamma_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\begin{cases} xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \\ P_0(x) = 1 \ \ e \ P_1(x) = x - \beta_0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Suponhamos que $f_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ verifica

$$a_n(x) f_n'(x) = b_n(x) f_n^2(x) + c_n(x) f_n(x) + d_n(x) \ , \ n \in \mathbb{N} \tag{2.21}$$

onde a_n, b_n, c_n e d_n são polinómios de graus limitados; então,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ \\ b_{n+1} = \dfrac{d_n}{\gamma_{n+1}} \\ \\ c_{n+1} = -c_n - 2(x - \beta_{n+1}) \dfrac{d_n}{\gamma_{n+1}} \\ \\ d_{n+1} = a_n + \gamma_{n+1} b_n + (x - \beta_{n+1}) c_n + (x - \beta_{n+1})^2 \dfrac{d_n}{\gamma_{n+1}} \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Demonstração

Dividindo ambos os membros de (2.20) por P_n obtemos a seguinte equação

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = (x - \beta_{n+1}) - \gamma_n \frac{P_{n-1}}{P_n}$$

ou seja,

$$f_n = (x - \beta_{n+1}) - \gamma_n \frac{1}{f_{n-1}} \text{ para } n \geq 1. \tag{2.23}$$

Derivando a expressão que resulta desta por substituição de n por $n+1$ vem

$$f'_{n+1} = 1 + \gamma_{n+1}\frac{f'_n}{f_n^2} \ ,$$

que multiplicada por a_n e aplicando (2.21) origina

$$a_n f'_{n+1} = a_n + \gamma_{n+1}\frac{b_n f_n^2 + c_n f_n + d_n}{f_n^2},$$

ou seja,

$$a_n f'_{n+1} = (a_n + \gamma_{n+1} b_n) + \gamma_{n+1}\frac{c_n}{f_n} + \gamma_{n+1}\frac{d_n}{f_n^2} \ ;$$

de (2.23) obtemos

$$a_n f'_{n+1} = (a_n + \gamma_{n+1} b_n) + c_n(x - \beta_{n+1} - f_{n+1}) + \frac{d_n}{\gamma_{n+1}}((x-\beta_{n+1})^2 + f_{n+1}^2 - 2(x-\beta_{n+1})f_{n+1});$$

e então,

$$a_n f'_{n+1} = \frac{d_n}{\gamma_{n+1}} f_{n+1}^2 + (-c_n - 2(x-\beta_{n+1})\frac{d_n}{\gamma_{n+1}})f_{n+1} + (a_n + \gamma_{n+1} b_n + (x-\beta_{n+1})c_n + (x-\beta_{n+1})^2\frac{d_n}{\gamma_{n+1}}). \tag{2.24}$$

Comparando (2.24) e (2.21), com $n+1$ no lugar de n, obtemos (2.22). □

Observação

Este resultado é muito importante pois, como veremos, se uma S.P.O.M. for semi–clássica, a sucessão (f_n) associada verifica uma equação do tipo (2.21).

No teorema que se segue compilamos algumas caracterizações das S.P.O.M. semi–clássicas, que podem ser encontradas nos trabalhos de P.Maroni [81], [83], [84], [85], S.Belmehdi [12] e [13], F.Marcellán [77], e E.Hendriksen e H.Van Rossum [56].

Teorema 2.2.1 *Seja (P_n) uma S.P.O.M. associada à funcional de momentos u; então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *(P_n) é a S.P.O.M. semi–clássica de classe s associada a u;*

(b) *(P_n) verifica*

$$\phi(x)P'_{n+1} = C_n P_{n+1}(x) + D_n P_n(x) \ , \ n \geq 0 \tag{2.25}$$

onde os polinómios C_n e D_n de graus, respectivamente, menores que $s+1$ e s, são dados por

$$\begin{cases} C_{n+1}(x) = -(C_n(x) - C_0(x)) - (x - \beta_{n+1})\dfrac{D_n(x)}{\gamma_{n+1}} \\ \\ D_{n+1(x)} = \phi + \gamma_{n+1}\dfrac{D_n(x)}{\gamma_n} + (x - \beta_{n+1})(2C_n(x) - C_0(x)) + (x - \beta_{n+1})^2\dfrac{D_n(x)}{\gamma_{n+1}} \\ \\ C_0(x) = \phi'(x) - \psi(x) \\ \\ D_{-1}(x) = 0 \ , \quad D_0(x) = -(\theta_0\psi)(x) + (\theta_0^2\phi)'(x) \end{cases}$$

(c) *quaiquer dois polinómios consecutivos de* (P_n) *verificam*

$$\begin{aligned} \phi(x)(P_{n+1}(x)'P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n'(x)) = \frac{D_{n-1}(x)}{\gamma_n}P_{n+1}^2(x) - \\ (2C_n - C_0)P_{n+1}(x)P_n(x) + D_n(x)P_n^2(x),\ n \in \mathbb{N}; \end{aligned} \tag{2.26}$$

(d) *existem* $s, t \in \mathbb{N}$ *com* $t \leq s + 2$ *e um polinómio* $\phi \in \mathbb{P}_t$ *tais que*

$$D(\phi(x)\frac{P_n(x)}{< u, P_n^2(x) >}u) = -\{\sum_{k=n-t+1}^{n+s+1} a_{k-1,n}\frac{P_k(x)}{< u, P_k^2(x) >}\}u \ , \tag{2.27}$$

onde os $a_{n,n-s} \neq 0$ *para algum* $n \geq s$.

Observação

A alínea (c) deste teorema é uma generalização da caracterização de P.J.McCarthy (ver [86]) para o caso $s = 0$. Além disso, é uma caracterização quadrática como aquela que provamos na alínea (e) do teorema 1.3.2. (d) foi–nos sugerida por F.Marcellán.
Os polinómios ϕ e ψ são os mesmos que aparecem na definição 2.1.2.

Demonstração

Esquema de demonstração:

$$\begin{gathered} (\mathbf{a}) \Rightarrow (\mathbf{b}) \Rightarrow (\mathbf{d}) \Rightarrow (\mathbf{a}) \\ (b) \Leftrightarrow (c) \end{gathered}$$

Verifiquemos que $(\mathbf{a}) \ \Rightarrow \ (\mathbf{b})$:

— Como (P_n) é uma S.P.O.M. semi–clássica de classe s, existem ϕ, $\psi \in \mathbb{P}_{s+2}$ tais que

$$D(\phi u) = \psi u \ . \tag{2.28}$$

Tentemos escrever

$$\phi P'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+\text{gr}\phi} a_{n,k} P_k \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} a_{n,k} < u, P_k^2 > &= < u, \phi P'_{n+1} P_k > = < \phi u, (P_{n+1}P_k)' - P_{n+1}P'_k > = \\ &\overset{(2.28)}{=} - < \psi u, P_{n+1}P_k > - < \phi u, P_{n+1}P'_k > \\ &= 0\ ,\ \ k + \text{gr}\psi < n+1 \text{ e } \ k - 1 + \text{gr}\phi < n+1 \\ &= 0\ ,\ \ k < n - \max\{\text{gr}\psi - 1, \text{gr}\phi - 2\} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\phi P'_{n+1} = \sum_{k=n-s}^{n+\text{gr}\phi} a_{n,k} P_k\ ,\ \ n \geq s \tag{2.29}$$

e $a_{n,n-s} \neq 0$ para algum $n \geq s$.

Aplicando agora a fórmula de recorrência a três termos satisfeita pelos P_n obtemos (2.25).

Determinação dos polinómios C_n e D_n:

— Se tomarmos em (2.25) n no lugar de $n+1$ vem

$$\phi(x)P'_n = C_{n-1}P_n(x) + D_{n-1}P_{n-1}(x)\ ,\ n \geq 1$$

e de (2.20),

$$P_{n-1} = -\frac{1}{\gamma_n}(P_{n+1} - (x - \beta_n)P_n);$$

e, portanto,

$$\phi(x)P'_n = -\frac{D_{n-1}}{\gamma_n}P_{n+1}(x) + (C_{n-1} + (x-\beta_n)\frac{D_{n-1}}{\gamma_n})P_n(x)\ . \tag{2.30}$$

Multiplicando a equação (2.25) por $\frac{1}{P_n}$, e subtraindo o resultado de multiplicarmos a equação (2.30) por $\frac{P_{n+1}}{P_n^2}$, obtemos

$$\phi(\frac{P'_{n+1}}{P_n} - \frac{P_{n+1}P'_n}{P_n^2}) = C_n\frac{P_{n+1}}{P_n} + D_n + \frac{D_{n-1}}{\gamma_n}(\frac{P_{n+1}}{P_n})^2 - (C_{n-1} + (x-\beta_n)\frac{D_{n-1}}{\gamma_n})\frac{P_{n+1}}{P_n}\ ,$$

ou seja,

$$\phi(\frac{P_{n+1}}{P_n})' = \frac{D_{n-1}}{\gamma_n}(\frac{P_{n+1}}{P_n})^2 + (C_n - C_{n-1} + (x-\beta_n)\frac{D_{n-1}}{\gamma_n})\frac{P_{n+1}}{P_n} + D_n\ . \tag{2.31}$$

Estamos em condições de aplicar o lema 2.2 com

$$\begin{cases} a_n = \phi \\ \\ b_n = \frac{D_{n-1}}{\gamma_n} \\ \\ c_n = C_n - C_{n-1} - (x-\beta_n)\frac{D_{n-1}}{\gamma_n} \\ \\ d_n = D_n. \end{cases}$$

Agora, de (2.22) saem duas relações entre os C_n e D_n:

$$\begin{cases} C_{n+1} - C_n - (x-\beta_{n+1})\frac{D_n}{\gamma_{n+1}} = -(C_n - C_{n-1} - (x-\beta_n)\frac{D_{n-1}}{\gamma_n}) - 2(x-\beta_{n+1})\frac{D_n}{\gamma_{n+1}} \\ \\ D_{n+1} = \phi + \gamma_{n+1}\frac{D_{n-1}}{\gamma_n} + (x-\beta_{n+1})(C_n - C_{n-1} - (x-\beta_n)\frac{D_{n-1}}{\gamma_n}) + (x-\beta_{n+1})^2\frac{D_n}{\gamma_{n+1}}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Simplificando a primeira equação

$$\underbrace{C_{n+1} - C_{n-1}}_{(C_{n+1}-C_n)+(C_n-C_{n-1})} = (x-\beta_n)\frac{D_{n-1}}{\gamma_n} - (x-\beta_{n+1})\frac{D_n}{\gamma_{n+1}} \tag{2.33}$$

e, portanto,

$$C_{n+1} + C_n = -(x-\beta_{n+1})\frac{D_n}{\gamma_{n+1}} + C_0 + \underbrace{C_1 + (x-\beta_1)\frac{D_0}{\gamma_1}}_{\overset{(2.33)}{=}0}$$

ou seja,

$$C_{n+1} = -(C_n - C_0) - (x-\beta_{n+1})\frac{D_n}{\gamma_{n+1}}. \tag{2.34}$$

Da segunda equação de (2.32) tiramos

$$D_{n+1} = \phi + \gamma_{n+1}\frac{D_{n-1}}{\gamma_n} + (x-\beta_{n+1})(2C_n - C_0) + (x-\beta_{n+1})^2\frac{D_n}{\gamma_{n+1}}. \tag{2.35}$$

Verifiquemos que (**b**) $\Rightarrow$ (**c**):

— Basta multiplicar (2.31) por P_n^2 para obter

$$\phi(P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1}) = \frac{D_{n-1}}{\gamma_n}P_{n+1}^2 + (C_n - C_{n-1} - (x-\beta_n)\frac{D_{n-1}}{\gamma_n})P_{n+1}P_n + D_nP_n^2$$

e de (2.34) obtemos (2.26).

Verifiquemos que (**c**) $\Rightarrow$ (**b**):

— De (2.26) vem que

$$(\phi P'_{n+1} - (2C_n - C_0)P_{n+1} + D_n P_n)P_n = (\phi P'_n + \frac{D_{n-1}}{\gamma_n} P_{n+1})P_{n+1}$$

então, como P_n e P_{n+1} não possuem raízes em comum (resultado que se pode provar directamente a partir a alínea (e) do teorema 1.3.2), sabemos que existe $q_n \in \mathbb{P}$ tal que

$$\begin{cases} \phi P'_{n+1} - (2C_n - C_0)P_{n+1} + D_n P_n = q_n P_{n+1} \\ \phi P'_n + \frac{D_{n-1}}{\gamma_n} P_{n+1} = q_n P_n; \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} \phi P'_{n+1} - (2C_n - C_0)P_{n+1} + D_n P_n = q_n P_{n+1} \\ \phi P'_n + \frac{D_{n-1}}{\gamma_n} P_{n+1} = q_n P_n, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \phi P'_{n+1} = (2C_n - C_0 + q_n)P_{n+1} + D_n P_n \\ \phi P'_n = -\dfrac{D_{n-1}}{\gamma_n} P_{n+1} + q_n P_n. \end{cases} \tag{2.36}$$

Da segunda equação

$$\phi P'_{n+1} = -\frac{D_n}{\gamma_{n+1}} \underbrace{P_{n+2}}_{(x-\beta_{n+1})P_{n+1} - \gamma_{n+1} P_n} + q_{n+1} P_{n+1},$$

ou seja,

$$\phi P'_{n+1} = (q_{n+1} - \frac{D_n}{\gamma_{n+1}}(x - \beta_{n+1}))P_{n+1} + D_n P_n$$

que comparada com a primeira equação de (2.36) nos dá uma fórmula para os q_n

$$q_{n+1} - q_n = 3C_n + C_{n+1} - 2C_0 \ , \ \ n \geq -1.$$

Verifiquemos que (**b**) $\Rightarrow$ (**d**):

— Seja (α_n) a pseudo–base associada à S.P.O.M. (P_n); tentemos escrever

$$D(\phi \alpha_n) = \sum_{k \geq 0} \lambda_{n,k} \alpha_k$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_{n,k} &= \ < D(\phi\alpha_n), P_k >= - < \alpha_n, \phi P'_k >= \\ &\overset{(2.29)}{=} - < \alpha_n, \textstyle\sum_{j=k-1-s}^{k-1+\mathrm{gr}\phi} a_{k-1,j} P_j > \\ &= \begin{cases} 0 \ , \ \ k-1-s > n \text{ ou } \ k-1+\mathrm{gr}\phi < n \\ -a_{k-1,n} \ , \ \ n+1-\mathrm{gr}\phi \leq k \leq n+1+s. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$D(\phi\alpha_n) = -\sum_{k=n+1-\mathrm{gr}\phi}^{n+1+s} a_{k-1,n}\alpha_k \ , \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Pela alínea (c) do teorema 1.3.2 obtemos a equação (2.27).

Que (**d**) $\Rightarrow$ (**a**) é evidente pois, basta tomar $n = 0$ em (2.27). □

Damos, de seguida, uma demonstração elementar de uma caracterização das S.P.O.M. semi–clássicas, devida a W.Hahn (ver [52]).

Teorema 2.2.2 (Hahn,1983) *(P_n) é a S.P.O.M. semi–clássica de classe s associada a u quando, e só quando, verifica uma equação diferencial de segunda ordem*

$$A_n(x)P_n''(x) + B_n(x)P_n'(x) + C_n(x)P_n(x) = 0 \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.37}$$

onde A_n, B_n e C_n são polinómios cujos graus só dependem de s.

Demonstração

Comecemos por demonstrar que a condição (2.37) é necessária:

— Como (P_n) é uma S.P.O.M. semi–clássica de classe s da alínea (b) teorema 2.2.1 sabemos que (P_n) verifica (2.25), i.e., existem polinómios c_n e d_n de graus dependentes de s tais que

$$\phi(x)P_{n+1}' = c_nP_{n+1}(x) + d_nP_n(x) \ , \ n \geq 0. \tag{2.38}$$

Podemos também tentar expressar $\phi P_{n+1}'' + \psi P_{n+1}'$ em termos dos P_k; assim,

$$\phi(x)P_{n+1}''(x) + \psi(x)P_{n+1}'(x) = \sum_{k=0}^{n+s+1} b_{n,k}P_k(x)$$

onde os $b_{n,k}$ verificam

$$\begin{aligned} < u, P_k^2(x) > b_{n,k} &= < u, (\phi(x)P_{n+1}''(x) + \psi(x)P_{n+1}'(x))P_k(x) > \\ &= < \phi(x)u, (P_{n+1}'(x))P_k(x))' - P_{n+1}'(x)P_k'(x) > + < \psi(x)u, P_{n+1}'(x)P_k(x) > \\ &= - < \phi(x)u, P_{n+1}'(x)P_k'(x) > \end{aligned}$$

e por (2.38) podemos concluir que $b_{n,k} = 0$ sempre que $k \leq n - s$, i.e.,

$$\phi(x)P_{n+1}''(x) + \psi(x)P_{n+1}'(x) = \sum_{k=n-s+1}^{n+s+1} b_{n,k}P_k(x). \tag{2.39}$$

Assim, existem polinómios a_n e b_n de grau inferior ou igual a $\max\{\mathrm{gr}\psi,\mathrm{gr}\phi - 2\}$ tais que

$$\phi(x)P''_{n+1}(x) + \psi(x)P'_{n+1}(x) = a_n(x)P_{n+1}(x) + b_n(x)P_n(x). \tag{2.40}$$

Agora, de (2.38) e (2.40), sai que

$$P_{n+1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \phi(x)P'_{n+1}(x) & d_n(x) \\ \phi(x)P''_{n+1}(x) + \psi(x)P'_{n+1}(x) & b_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_n(x) & d_n(x) \\ a_n(x) & b_n(x) \end{vmatrix}}$$

ou seja,

$$d_n(x)\phi(x)P''_{n+1}(x) + (d_n(x)\psi(x) - b_n(x)\phi(x))P'_{n+1} + \begin{vmatrix} c_n(x) & d_n(x) \\ a_n(x) & b_n(x) \end{vmatrix} P_{n+1}(x) = 0.$$

Note–se que os graus dos polinómios A_n, B_n e C_n são limitados por $2\mathrm{gr}\phi{+}1$, $\max\{2\mathrm{gr}\phi, \mathrm{gr}\phi + \mathrm{gr}\psi\}$ e $\max\{\mathrm{gr}\phi + \mathrm{gr}\psi + 1, 2\mathrm{gr}\phi - 2\}$, respectivamente.

Determinação de a_n e b_n [1]:

— Derivando duas vezes a equação (2.20), satisfeita pelos P_n, obtemos

$$\begin{cases} P_{n+1} = P'_{n+2} - (x - \beta_{n+1})P'_{n+1} + \gamma_{n+1}P'_n \\ 2P'_{n+1} = P''_{n+2} - (x - \beta_{n+1})P''_{n+1} + \gamma_{n+1}P''_n. \end{cases} \tag{2.41}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.41) por ψ e adicionando o resultado de multiplicarmos a segunda por ϕ obtemos, depois de eliminarmos P_{n+2} e P_{n-1},

$$\begin{aligned} 2\phi P'_{n+1} = {} & ((x - \beta_{n+1})(a_{n+2} - a_{n+1}) + b_{n+2} - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}b_n - \psi)P_{n+1} + \\ & (-\gamma_{n+1}(a_{n+2} - a_{n+1}) - ((x - \beta_{n+1})b_{n+1} - (x - \beta_n)b_n))P_n \ ; \end{aligned}$$

e, portanto, os a_n e b_n estão relacionados com os C_n e D_n de (2.25) por

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{(x - \beta_{n+1})(a_{n+2} - a_{n+1}) + b_{n+2} - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}b_n - \psi}{2} \\ D_n = -\dfrac{\gamma_{n+1}(a_{n+2} - a_{n+1}) + ((x - \beta_{n+1})b_{n+1} - (x - \beta_n)b_n)}{2} \end{cases}.$$

A demonstração de que a condição (2.37) é suficiente para que a S.P.O.M. (P_n) seja semi–clássica está baseada numa conjectura de A.Magnus (ver [76])

> se (P_n) verifica (2.37) então a sucessão (f_n)— ver lema 2.2— que lhe está associada verifica uma equação do tipo (2.21).

[1] Será provado, mais tarde, que estes polinómios contêm toda a informação acerca da S.P.O.M. (P_n).

De (2.37) e da fórmula de recorrência a três termos satisfeita pelos P_n deduzimos que

$$\exists\ E_n \in \mathbb{P} : \begin{cases} E_n P_n' = \Theta_n P_n + \Lambda_n P_{n-1} \\ \\ E_n P_{n-1}' = \Gamma_n P_n + \Delta_n P_{n-1}\ , \end{cases} \tag{2.42}$$

onde Θ_n, Λ_n, Γ_n e Δ_n são polinómios cujus graus só dependem de s.

Multiplicando a primeira equação de (2.42) por $\frac{1}{P_{n-1}}$ e subtraindo o resultado de multiplicarmos a segunda por $\frac{P_n}{P_{n-1}^2}$ obtemos

$$E_n\left(\frac{P_n'}{P_{n-1}} - \frac{P_{n-1}'P_n}{P_{n-1}^2}\right) = \Theta_n\frac{P_n}{P_{n-1}} + \Lambda_n - \Gamma_n\frac{P_n^2}{P_{n-1}^2} - \Delta_n\frac{P_n}{P_{n-1}}$$

ou seja,

$$E_n f_{n-1}' = (\Theta_n - \Delta_n) f_{n-1} - \Gamma_n f_{n-1}^2 + \Lambda_n\ ; \tag{2.43}$$

e pelo lema 2.2

$$\begin{cases} E_{n+1} = E_n \\ \\ -\Gamma_{n+1} = \frac{\Lambda_n}{\gamma_{n+1}} \\ \\ \Theta_{n+1} - \Delta_{n+1} = -\Theta_n + \Delta_n - 2(x - \beta_{n+1})\frac{\Lambda_n}{\gamma_{n+1}} \\ \\ \Lambda_{n+1} = E_n - \gamma_{n+1}\Gamma_n + (x - \beta_{n+1})(\Theta_n - \Delta_n) + (x - \beta_{n+1})^2\frac{\Lambda_n}{\gamma_{n+1}}\ ; \end{cases}$$

e, portanto, E_n é um polinómio cujos coeficientes não dependem de n, i.e., $\phi \in \mathbb{P}$. Podemos então reescrever (2.43) na forma

$$\phi(P_n'P_{n-1} - P_{n-1}'P_n) = (\Theta_n - \Delta_n)P_nP_{n-1} - \Gamma_n P_n^2 + \Lambda_n P_{n-1}^2. \tag{2.44}$$

Da alínea (c) do teorema 2.2.1 concluímos que (P_n) é uma S.P.O.M. semi–clássica. □

Observação

Com este resultado provamos também que o facto de $f_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$ verificar uma equação do tipo (2.21) caracteriza as S.P.O.M. semi–clássicas, i.e., a generalização da fórmula de McCarthy para as S.P.O.M. semi–clássicos dá–nos uma nova caracterização para as mesmas.

Dissemos já, na introdução deste capítulo, que se

$$F(z) =< u_t, \frac{1}{z-t} >$$

satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem completa com coeficientes polinomiais, então a S.P.O.M. associada a u satisfaz uma equação do tipo (2.37); e pelo teorema anterior temos que essa S.P.O.M. é semi–clássica. Vamos ver que este resultado pode ser provado de uma forma directa (ver [22]):

Teorema 2.2.3 *Seja u uma funcional de momentos regular e (P_n) a S.P.O.M. associada; então u é semi–clássica de classe s quando, e só quando, a funcional de Stieltjes associada a u satisfizer uma equação diferencial de primeira ordem completa*

$$\phi(z)F'(z) + B(z)F(z) = C(z) \tag{2.45}$$

onde ϕ, B e C são polinómios de graus dependentes de s.

Demonstração

Comecemos por demonstrar que a condição é necessária

$$\begin{aligned}
\phi(z)F'(z) &= < u_t, \tfrac{\phi(z)}{(t-z)^2} >=< u_t, \tfrac{\phi(z)-\phi(t)}{(t-z)^2} + \tfrac{\phi(t)}{(t-z)^2} > \\
&= < \phi(t)u_t, \tfrac{1}{(t-z)^2} > - < u_t, \tfrac{\phi(t)-\phi(z)}{(t-z)^2} > \\
&= - < \phi(t)u_t, D_t(\tfrac{1}{t-z}) > - < u_t, \textstyle\sum_{j=1}^{\mathrm{gr}\phi} \tfrac{\phi^{(j)}(z)}{j!}(t-z)^{j-2} > \\
&= < D_t(\phi(t)u_t), \tfrac{1}{t-z} > -\phi'(z) < u_t, \tfrac{1}{t-z} > - \textstyle\sum_{j=2}^{\mathrm{gr}\phi} \tfrac{\phi^{(j)}(z)}{j!} < u_t, (t-z)^{j-2} > \\
& \quad [\text{Por Hipótese } D(\phi u) = \psi u] \\
&= < \psi(t)u_t, \tfrac{1}{t-z} > -\phi'(z)F(z) - C_1(z) \\
&= < u_t, \tfrac{\psi(t)-\psi(z)}{t-z} > +\psi(z) < u_t, \tfrac{1}{t-z} > -\phi'(z)F(z) + C_1(z) \\
&= (\psi(z) - \phi'(z))F(z) + \textstyle\sum_{j=1}^{\mathrm{gr}\psi} \tfrac{\psi^{(j)}}{j!} < u_t, (t-z)^{j-1} > \\
&= (\psi(z) - \phi'(z))F(z) + C(z)
\end{aligned}$$

onde $C(z) = -\sum_{j=1}^{\mathrm{gr}\phi-1} (\frac{\phi^{(j+1)}(z)}{(j+1)!} + \frac{\psi^{(j)}(z)}{(j)!}) < u_t, (t-z)^{j-1} >$, i.e.,

$$\phi(z)F'(z) + (\psi(z) - \phi'(z))F(z) = C(z).$$

Verifiquemos agora que se tem o recíproco

Seja $F(z) =< u_t, \frac{1}{t-z} >$ associada a u, verificando

$$\phi(z)F'(z) + B(z)F(z) = C(z)$$

então,

$$A(z) < u_t, \frac{1}{(t-z)^2} > +B(z) < u_t, \frac{1}{t-z} >= C(z)$$

e utilizando a mesma técnica apresentada acima obtemos

$$< D(Au_t), \frac{1}{t-z} > + < Bu_t, \frac{1}{t-z} > -A'(z) < u_t, \frac{1}{t-z} >= C(z) + \sum_{j=1}^{\max\{\mathrm{gr}B, \mathrm{gr}A\}} (\frac{A^{(j+1)}(z)}{(j+1)!} + \frac{B^{(j)}(z)}{j!}) < u_t, (t-z)^{j-1} >$$

e, portanto,

$$< D(Au_t) + (B - A')u_t, \frac{1}{t-z} >= E(z) \tag{2.46}$$

onde E é um polinómio.

Como (2.46) é uma funcional analítica numa vizinhança de ∞ e D é um polinómio, concluímos que

$$D(Au_t) + (B - A')u_t = 0. \square$$

2.3 Exemplos de S.P.O.M. Semi–Clássicas

Vamos ver como deduzir os coeficientes da relação de recorrência satisfeita pelas S.P.O.M., no caso delas serem semi–clássicas. O processo aqui descrito vai ser utilizado com bastante frequência ao longo deste trabalho. Será posto em evidência que o conhecimento dos a_n e b_n da fórmula (2.40) é suficiente para a determinação dos coeficientes da relação de recorrência a três termos satisfeita pelos P_n.

Vamos somente calcular os coeficientes no caso $s = 0$ e veremos, mais tarde, alguns exemplos de S.P.O.M. de classe 1. O estudo dessa família não o faremos por já ter sido feito por S.Belmehdi (ver [11] e [13]).

2.3.1 Caso Particular $s = 0$

Introduzamos agora o seguinte conceito:

Definição 2.3.1 Seja (P_n) uma S.P.O.M. associada à funcional de momentos u; (P_n) diz–se *clássica* se (P_n) for semi–clássica de classe 0 relativamente a u.

Assim, como caracterizações destas S.P.O.M. temos as dadas na secção anterior com $s = 0$ (ver [5]), i.e.,

— da alínea (b) do teorema 2.2.1

$$\phi(x)P'_{n+1}(x) = (n+1)\phi_2 P_{n+2}(x) + b_{n+1}P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) \tag{2.47}$$

com $a_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$;

— da alínea (d) do teorema 2.2.1

$$\begin{aligned} D(\phi(x)\tfrac{P_n(x)}{<u,P_n^2(x)>}u) = -((n-1)\phi_2 \tfrac{P_{n-1}(x)}{<u,P_{n-1}^2(x)>} + \\ b_n \tfrac{P_n(x)}{<u,P_n^2(x)>} + a_n \tfrac{P_{n+1}(x)}{<u,P_{n+1}^2(x)>})u \ ; \end{aligned} \tag{2.48}$$

— e particularizando $n = 0$ nesta última equação

$$D(\phi(x)u) = \underbrace{-\frac{a_0}{\gamma_1}(x-\beta_0)}_{=\psi(x)} u \ , \tag{2.49}$$

pois $b_0 = 0$.

Além disso, (ver [17], [102], [1], [21], [2] e [85]):

Teorema 2.3.1 (Bochner,1929) *Uma S.P.O.M., (P_n), é clássica quando, e só quando, satisfizer uma equação diferencial linear de segunda ordem do tipo*

$$\phi(x)P''_n(x) + \psi(x)P'_n(x) = \lambda_n P_n(x) \ , \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.50}$$

onde os polinómios ϕ e ψ são os mesmos que figuram na equação (2.49).

<u>Observação</u>

Este teorema vai ser demonstrado mais tarde, no capítulo V, como introdução a um problema mais geral.

Vamos expressar os coeficientes da relação de recorrência que a S.P.O.M. clássica, (P_n), verifica em termos dos coeficientes de ϕ e ψ de (2.49), i.e., em termos de

$$\phi(x) = \phi_2 x^2 + \phi_1 x + \phi_0$$

$$\psi(x) = \psi_1 x + \psi_0 \ .$$

É bem sabido que (ver [30, pag. 24])

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} - (\sum_{i=0}^{n}\beta_i)x^n + (\sum_{0\leq i<j\leq n}\beta_i\beta_j - \sum_{k=1}^{n}\gamma_k)x^{n-1} + \ldots$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Tentemos calcular os coeficientes de x^n e de x^{n-1} na expressão anterior em termos dos coeficientes de ϕ e ψ:

— Comecemos por reescrever (2.50) com $n+1$ no lugar de n

$$\begin{aligned}&(\phi_2 x^2+\phi_1 x+\phi_0)((n+1)nx^{n-1}+n(n-1)A_{n+1}x^{n-2}+(n-1)(n-2)B_{n+1}x^{n-3}+\ldots)+\\&(\psi_1 x+\psi_0)((n+1)x^n+nA_{n+1}x^{n-1}+(n-1)B_{n+1}x^{n-2}+\ldots)=\\&\qquad\underbrace{(n+1)(n\phi_2+\psi_1)}_{=\lambda_{n+1}}(x^{n+1}+A_{n+1}x^n+B_{n+1}x^n+\ldots)\end{aligned}$$

onde $A_{n+1}=-\sum_{i=0}^{n}\beta_i$ e $B_{n+1}=\sum_{0\le i<j\le n}\beta_i\beta_j-\sum_{k=1}^{n}\gamma_k$, $n\in\mathbb{N}$.

Assim,

(a) da comparação dos coeficientes de x^n resulta

$$n(n+1)\phi_1+n(n-1)\phi_2 A_{n+1}+(n+1)\psi_0+n\psi_1 A_{n+1}=(n+1)(n\phi_2+\psi_1)A_{n+1}$$

ou seja,

$$A_{n+1}=\frac{(n+1)(n\phi_1+\psi_0)}{2n\phi_2+\psi_1}\ ,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{2.51}$$

(b) da comparação dos coeficientes de x^{n-1} tiramos

$$\begin{aligned}(n-1)(n-2)B_{n+1}\phi_2+n(n-1)\tfrac{(n+1)(n\phi_1+\psi_0)}{2n\phi_2+\psi_1}\phi_1+n(n+1)\phi_0+(n-1)B_{n+1}\psi_1+\\ n\psi_0\tfrac{(n+1)(n\phi_1+\psi_0)}{2n\phi_2+\psi_1}=(n+1)(n\phi_2+\psi_1)B_{n+1}\end{aligned}$$

ou seja,

$$B_{n+1}=\frac{n(n+1)}{(4n-2)\phi_2+2\psi_1}\left\{\frac{(n\phi_1+\psi_0)((n-1)\phi_1+\psi_0)}{2n\phi_2+\psi_1}+\phi_0\right\}\ ,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{2.52}$$

Da equação (2.48) obtemos depois de multiplicarmos escalarmente por xP_{n-1}, xP_n, xP_{n+1} e xP_{n+2}

$$(n\beta_n-(n-2)\beta_{n-1})\phi_2=(b_n-b_{n-1})-\phi_1\ ,\ \ n\ge 1\ ; \tag{2.53}$$

$$((n+1)\gamma_{n+1}-(n-2)\gamma_n)\phi_2+\phi(\beta_n)=a_n-a_{n-1}\ ,\ \ n\ge 1\ ; \tag{2.54}$$

$$((b_{n+1}-b_n)+(\beta_{n+1}+\beta_n)\phi_2+\phi_1)\gamma_{n+1}=a_n(\beta_{n+1}-\beta_n)\ ,\ \ n\ge 0\ ; \tag{2.55}$$

$$\frac{\gamma_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{\gamma_{n+1}}{a_n}=\frac{\gamma_{n+1}}{a_n}\frac{\gamma_{n+2}}{a_{n+1}}\phi_2\ ,\ \ n\ge 0\ ; \tag{2.56}$$

Agora, conhecendo a_n e b_{n+1} de (2.47) em termos de β_n e γ_n, da relação de recorrência a três termos satisfeita pelos (P_n), e conhecendo o valor de λ_n em (2.50), vamos conseguir resolver o nosso problema.

Seja então

$$xP_{n+1} = P_{n+2} + \beta_{n+1}P_{n+1} + \gamma_{n+1}P_n \tag{2.57}$$

a fórmula de recorrência a três termos satisfeita pelos P_n. Derivando esta última expressão obtemos

$$P_{n+1}(x) = P'_{n+2}(x) + \beta_{n+1}P'_{n+1}(x) + \gamma_{n+1}P'_n(x) - xP'_{n+1}(x), \tag{2.58}$$

e derivando novamente

$$2P'_{n+1}(x) = P''_{n+2}(x) + \beta_{n+1}P''_{n+1}(x) + \gamma_{n+1}P''_n(x) - xP''_{n+1}(x). \tag{2.59}$$

Multiplicando (2.58) por ψ, (2.59) por ϕ e aplicando (2.50) vem que

$$2\phi P'_{n+1} = \lambda_{n+2}P_{n+2} - ((x-\beta_{n+1})\lambda_{n+1} + \psi)P_{n+1} + \gamma_{n+1}\lambda_n P_n$$

onde ϕ e ψ são dados por (2.49). Aplicando a fórmula (2.57) obtemos

$$\phi P'_{n+1} = (n+1)\phi_2 P_{n+2} - \frac{1}{2}\psi(\beta_{n+1})P_{n+1} - (n\phi_2 + \psi_1)\gamma_{n+1}P_n. \tag{2.60}$$

Substituindo b_n por $-\frac{1}{2}\psi(\beta_n)$ em (2.53) vem

$$\phi_2(n\beta_n - A_n) = -\tfrac{1}{2}\psi(\beta_n) + \tfrac{1}{2}\psi(\beta_0) - n\phi_1$$

$$(n\phi_2 + \tfrac{1}{2}\psi_1)\beta_n = A_n\phi_2 - n\phi_1 - \tfrac{1}{2}\psi_0 \ , \ \ n \in \mathbb{N},$$

e, portanto,

$$\beta_n = 2\frac{A_n\phi_2 - n\phi_1 - \frac{1}{2}\psi_0}{2n\phi_2 + \psi_1} \ , \ \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.61}$$

onde A_n é dado por (2.51).

Substituindo a_n por $-(n\phi_2 + \psi_1)\gamma_{n+1}$ em (2.54) vem

$$\phi_2((n+1)\gamma_{n+1} - (n-2)\gamma_n) + \phi(\beta_n) = -(n\phi_2 + \psi_1)\gamma_{n+1} + ((n-1)\phi_2 + \psi_1)\gamma_n$$
$$((2n+1)\phi_2 + \psi_1)\gamma_{n+1} + 2\phi_2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i + (\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2)\phi_2 + (\sum_{i=1}^{n}\beta_i)\phi_1 + \phi_0 = (\psi_1 + \phi_2)\gamma_1.$$

Tendo em conta que

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2 = (\sum_{i=0}^{n}\beta_i)^2 - 2\sum_{0\le i<j\le n}\beta_i\beta_j - \beta_0^2$$

concluímos que

$$\gamma_{n+1} = \frac{2\phi_2 B_{n+1} - \phi(-A_{n+1}) + ((\psi_1 + \phi_2)\gamma_1 + \phi(\beta_0) - n\phi_0)}{(2n+1)\phi_2 + \psi_1} \ , \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.62}$$

onde B_{n+1} é dado por (2.52).

Mas de [21] sabemos que ϕ e ψ são dados pela tabela 2.1. Assim, para termos perfeitamente determinados os coeficientes da relação de recorrência das S.P.O.M. clássicas, necessitamos conhecer γ_1. Mas, por definição,

$$\gamma_1 = \frac{< u, P_1^2 >}{< u, 1 >} = \frac{< u, x^2 >}{< u, 1 >} - 2\beta_0 \frac{< u, x >}{< u, 1 >} + \beta_0^2,$$

e de (2.49) obtemos a seguinte equação para os momentos

$$(n\phi_2 + \psi_1) < u, x^{n+1} > + (n\phi_1 + \psi_0) < u, x^n > + n\phi_0 < u, x^{n-1} > \ , \ n \in \mathbb{N};$$

donde de conclui que

$$\gamma_1 = -\frac{\phi_0 - \frac{\psi_0}{\psi_1}(\phi_1 + \psi_0)}{\phi_2 + \psi_1} + 2\beta_0 \frac{\psi_0}{\psi_1} + \beta_0^2. \tag{2.63}$$

Estamos então em condições de calcular os coeficientes (ver tabela 2.2).

ϕ	ψ	P_n
1	$-2x$	H_n
x	$-x+\alpha+1$	L_n^{α}
$1-x^2$	$-(\alpha+\beta+2)x-(\alpha-\beta)$	$P_n^{\alpha,\beta}$
x^2	$(\alpha+2)x+2$	B_n^{α}

Table 2.1: Equação de Pearson

β_n	γ_{n+1}	Re
0	$\dfrac{n+1}{2}$	
$2n+\alpha+1$	$(n+1)(1+\alpha+n)$	α
$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$4(n+1)\dfrac{(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)^2(2n+\alpha+\beta+3)}$	$\alpha,$
$-\dfrac{2\alpha}{(\alpha+2n)(2+\alpha+2n)}$	$-4(n+1)\dfrac{n+\alpha+1}{(1+\alpha+2n)(2+\alpha+2n)^2(3+\alpha+2n)}$	$\alpha\neq -$

Table 2.2: Relação de recorrência

2.3.2 Modificações Mediante Deltas de Dirac

As sucessões que vamos encontrar são as já bem conhecidas S.P.O.M. Tipo Hermite, Tipo Laguerre, Tipo Jacobi e Tipo Bessel, estudadas por A.M.Krall, L.L.Littlejhon, S.Shore e E.Hendriksen (ver [55]).

Formulação do Problema:

— Seja u uma funcional de momentos regular e $c \in \mathbb{N}$; para que valores de $\lambda \in \mathbb{C}$

$$v = u + \lambda\delta_c \tag{2.64}$$

é regular?

Além disso, se u é clássico, o que é que podemos dizer de v?

Este problema foi resolvido por P.Maroni e F.Marcellán em [78]. Aí pode ver–se que os elementos da S.P.O.M. associada a v satisfazem uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes dependentes de n. Determinaremos também uma equação diferencial de segunda ordem satisfeita por esses polinómios, mas será deduzida de uma forma diferente.

Comecemos por demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.3.2 (Maroni e Marcellán, 1988) *A funcional de momentos v definida por (2.64) é regular quando, e só quando,*

$$\lambda \neq (K_{n-1}(c,c))^{-1} \ , \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.65}$$

onde $K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(y)}{r_k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Seja (P_n) a S.P.O.M. associada a u e (R_n) a S.P.M. associada a v. Tentemos relacionar estas duas S.P.M.:

— Da relação (2.64) concluímos que (R_n) é estritamente quase–ortogonal de ordem 1 relativamente a $(x-c)u$. Assim, podemos pensar em expressar $(x-c)R_n$ como combinação linear dos P_n, i.e.,

$$(x-c)R_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}P_k(x) \quad \text{onde}$$

$$a_{n,k} < u, P_k^2 >=< (x-c)u, R_nP_k >= 0 \quad \text{se} \quad k = 0, \ldots, n-2.$$

Assim,

$$(x-c)R_n(x) = a_{n,n-1}P_{n-1}(x) + a_{n,n}P_n(x) + P_{n+1}(x) \ , \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.66}$$

e $P_{-1}(x) = 0$.

Assim, temos a ortogonalidade de (R_n) relativamente a v se, e somente se,

$$\begin{array}{l} < v, R_n(x)P_k(x) >= 0 \ \text{ se } \ k = 0, 1, \ldots, n \\ < v, R_n(x)P_n(x) >\neq 0 \ \text{ e } \ n \in \mathbb{N} \end{array}$$

ou seja,

$$R_n(x) = P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k} P_k(x) \ \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} b_{n,k} < u, P_k^2 > \ &= \ < u, R_n P_k > \ = \ < v - \lambda\delta_c, R_n P_k >= \\ &= \ -\lambda R_n(c) P_k(c) \ , \text{ i.e.,} \end{aligned}$$

$$R_n(x) = P_n(x) - \lambda R_n(c) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(c)}{< u, P_k^2 >} P_k(x)$$

e pelo teorema 1.1.15 resulta

$$R_n(x) = P_n(x) - \lambda R_n(c) K_{n-1}(x, c) \ . \tag{2.67}$$

Substituindo nesta última expressão x por c obtemos

$$R_n(c)(1 + \lambda K_{n-1}(c, c)) = P_n(c) \ , \ \ c \in \mathbb{C}.$$

Em conclusão, temos a ortogonalidade desejada quando, e só quando, λ satisfaz (2.65).

$\square$

Nas condições do teorema anterior podemos pensar em relacionar os coeficientes das relações recorrência que estas S.P.O.M. verificam, i.e., relacionar as sucessões de números reais (β_n), (γ_n), (ξ_n) e (η_n) definidas por

$$\left\{ \begin{array}{l} xP_n = P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_n \\ \\ xR_n = R_{n+1} + \xi_n R_n + \eta_n R_n \ , \ \ n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \tag{2.68}$$

Antes de mais determinemos os coeficientes de (2.66) à custa de (2.67):

— Tendo em conta que $R_n(c) = \frac{P_n(c)}{1+\lambda K_{n-1}(c,c)}$ e a igualdade de Darboux–Christoffel (ver teorema 1.1.15), a fórmula (2.67) toma a forma

$$R_n(x) = P_n(x) - \frac{\lambda P_n(c)}{1 + \lambda K_{n-1}(c, c)} \frac{P_n(x)P_{n-1}(c) - P_{n-1}(x)P_n(c)}{x - c}$$

e, portanto,

$$(x-c)R_n(x) = P_{n+1}(x)-(c-\beta_n+\frac{\lambda P_n(c)P_{n-1}(c)}{1+\lambda K_{n-1}(c,c)})P_n(x)+(\gamma_n+\frac{\lambda P_n(c)^2}{1+\lambda K_{n-1}(c,c)})P_{n-1}(x)\ . \tag{2.69}$$

Para determinarmos as relações pretendidas, basta multiplicar a segunda equação de (2.68) por $x-c$ e aplicar a fórmula (2.69). Temos então,

$$\begin{aligned} P_{n+2} = {} & (x-\xi_n-a_{n+1,n+1}+a_{n,n})P_{n+1}+(\eta_n-a_{n+1,n}+a_{n,n-1}-a_{n,n}(\xi_n+\beta_n))P_n+ \\ & (a_{n-1,n-1}\eta_n+a_{n,n}\gamma_n-a_{n,n-1}(\xi_n-\beta_{n-1}))P_{n-1}+(a_{n-1,n-2}\eta_n+a_{n,n-1}\gamma_n)P_{n-2} \end{aligned} \tag{2.70}$$

e, portanto,

(i) $\xi_n = a_{n+1,n+1}-a_{n,n}+\beta_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$;

(ii) $\eta_n-a_{n+1,n}+a_{n,n-1}-a_{n,n}(\xi_n+\beta_n)=\gamma_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$;

(iii) $a_{n-1,n-1}\eta_n+a_{n,n}\gamma_n-a_{n,n-1}(\xi_n-\beta_{n-1})$, $n\geq 1$;

(iv) $a_{n-1,n-2}\eta_n+a_{n,n-1}\gamma_n$, $n\geq 2$;

e de (ii) e (iii) obtemos uma representação para η_1.

Suponhamos agora que u é uma funcional de momentos regular e clássica, i.e., existem dois polinómios $\phi\in\mathbb{P}_2$ e ψ de grau exactamente 1 tais que $D(\phi u)=\psi u$. Então, multiplicando por $x-c$ esta última expressão obtemos

$$D((x-c)\phi v)-\phi u=(x-c)\psi v\ ,$$

pois de (2.64) $(x-c)u=(x-c)v$. Assim,

$$D((x-c)\phi v)=(\phi+(x-c)\psi)v-\lambda\phi(c)\delta_c\ ,$$

ou ainda,

$$D(\phi v)-\psi v=-\lambda\phi(c)(x-c)^{-1}\delta_c+<D(\phi v)-\psi v,1>\delta_c.$$

Mas, $(x-c)^{-1}\delta_c$ é dada por:

$$\begin{aligned} <(x-c)^{-1}\delta_c,p(x)> &= <\delta_c,\tfrac{p(x)-p(c)}{x-c}>= \\ &= <\delta_c,p'(c)+\tfrac{p''(c)}{2!}(x-c)+\ldots>= \\ &= <-\delta_c',p(x)>\ ,\ \ p\in\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Finalmente, v satisfaz a seguinte equação distribucional

$$D(\phi v)-\psi v=\lambda\phi(c)\delta_c'-\lambda\psi(c)\delta_c \tag{2.71}$$

logo v é semi–clássica de classe quando muito 2.

Determinação da <u>equação diferencial de segunda ordem</u> satisfeita pelos R_n:

1. Da fórmula (2.69) sai que

$$(x-c)R_n(x) = ((a_{n,n}-\beta_n)+x)P_n(x) + (a_{n,n-1}-\gamma_n)P_{n-1}(x)\ . \tag{2.72}$$

2. Derivando a mesma fórmula obtemos

$$(x-c)R_n' + R_n = P_{n+1}' + a_{n,n}P_n' + a_{n,n-1}P_{n-1}' \tag{2.73}$$

que multiplicada por ϕ dá

$$(x-c)\phi R_n' + \phi R_n = A_n P_n + B_n P_{n-1} \tag{2.74}$$

onde A_n e B_n são dados por

$$\begin{cases} A_n(x) = b_{n,n+2}((x-\beta_n)(x-\beta_{n+1})-\gamma_{n+1}) + (b_{n,n+1}+a_{n,n}b_{n-1,n+1})(x-\beta_n) \\ b_{n,n}+a_{n,n}b_{n-1,n}+a_{n,n-1}b_{n-2,n} - \dfrac{a_{n,n-1}b_{n-2,n-2}}{\gamma_{n-1}} \\ \\ B_n(x) = -b_{n,n+2}\gamma_n(x-\beta_{n+1}) - (b_{n,n+1}+a_{n,n}b_{n-1,n+1})\gamma_n + \\ a_{n,n}b_{n-1,n-1}+a_{n,n-1}b_{n-2,n-1} + \dfrac{a_{n,n-1}b_{n-2,n-2}}{\gamma_{n-1}}(x-\beta_{n-1}). \end{cases}$$

3. Derivando (2.73) obtemos

$$(x-c)R_n'' + 2R_n' = P_{n+1}'' + a_{n,n}P_n'' + a_{n,n-1}P_{n-1}''. \tag{2.75}$$

Adicionando o resultado de multiplicarmos (2.73) por ψ e (2.75) por ϕ, e tendo em atenção que (P_n) satisfaz (2.50), obtemos

$$(x-c)\phi R_n'' + (2\phi+(x-c)\psi)R_n' + \psi R_n = \lambda_{n+1}P_{n+1} + a_{n,n}\lambda_n P_n + a_{n,n-1}\lambda_{n-1}P_{n-1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (x-c)\phi R_n'' + (2\phi+(x-c)\psi)R_n' + (\psi-\lambda_{n+1}(x-c))R_n = \\ a_{n,n}(\lambda_n-\lambda_{n+1})P_n + a_{n,n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1})P_{n-1}, \end{aligned} \tag{2.76}$$

Agora, de (2.72), (2.74), (2.76) obtemos

$$\begin{vmatrix} (x-c)R_n & (a_{n,n}-\beta_n)+x & a_{n,n-1}-\gamma_n \\ (x-c)\phi R_n' + \phi R_n & A_n & B_n \\ \begin{matrix}(x-c)\phi R_n'' + (2\phi+(x-c)\psi)R_n' + \\ (\psi-\lambda_{n+1}(x-c))R_n\end{matrix} & a_{n,n}(\lambda_n-\lambda_{n+1}) & a_{n,n-1}(\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1}) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.77}$$

$n \in \mathbb{N}$, que é uma equação diferencial de segunda ordem satisfeita pelos (R_n).

Chapter 3

Modificações Polinomiais das Funcionais

Estudámos já o efeito de fazermos actuar sobre uma S.P.O.M., (B_n), o operador $s\tau_{-b}\circ h_a$, e verificámos que a funcional de momentos regular que lhe está associada, u, é dada por $u\circ(s\tau_b\circ h_a)$. Na primeira secção vamos estudar os seguintes problemas:

Secção 1 Sejam p um polinómio e u uma funcional regular; encontrar condições necessárias e suficientes para que $\tilde{u} = p(x)u$ seja ainda uma funcional regular, e construir a S.P.O.M. associada.

Secção 2 Se u é uma funcional de momentos semi–clássica de classe s, qual a classe de $\tilde{u}$.

Consideraremos somente os casos em que

$$p(x) = \begin{cases} x - x_1 \\ (x-x_1)^2 \\ (x-x_1)(x-x_2) \end{cases}$$

que vão ser os que mais necessitaremos neste texto.

Vários autores abordaram este problema sob vários pontos de vista. A primeira tentativa deveu–se a E.B.Christoffel (ver [32]), que tratou o caso em que u é a funcional associada à função peso $w\equiv 1$ em $[-1,1]$. G.Szegö em [99] e L.R.Shenton em [94], estudaram o caso em que u é representada por uma medida positiva. V.B.Uvarov e A.Nikiforov (ver [89], [100],[101]), e S.Paszkowski (ver [90]) estudaram o caso em que u é representada por uma função peso positiva e p pode ter raízes múltiplas. Todos estes autores, consideraram a situação em que os zeros de p se encontram fora do espectro de u; e portanto a questão da regularidade de $\tilde{u}$ não se coloca. T.S.Chihara, foi o primeiro a interessar–se pela questão da regularidade de $\tilde{u} = (x-x_1)u$ (ver [30]) pois supôs que x_1 podia ser um ponto do espectro de u.

Este problema geral encontra–se resolvido nos trabalhos de Dini e Belmehdi (ver [37] e [12]). Daremos uma demonstração deste resultado baseada nos trabalhos supracitados.

Na segunda secção, daremos exemplos de famílias de polinómios ortogonais semi–clássicas, geradas a partir das clássicas, por uma modificação polinomial, do tipo referido, sobre a funcional.

Este problema, e outros que resolveremos ao longo deste trabalho, estão relacionados com dois outros problemas (ver [42] e [15]):

— Sejam u e v funcionais de momentos regulares; dar condições necessárias e suficientes para que $u+v$ seja ainda uma funcional de momentos regular.

— Quando é que podemos dizer que $u+v$ é semi–clássica.

3.1 Estudo Geral

Equacionemos de novo o problema:

— Seja u uma funcional de momentos regular, e $(P_n)_{n\in N}$ a S.P.O.M. correspondente verificando

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x). \tag{3.1}$$

Por outro lado, seja

$$p(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - x_i)^{m_i}$$

um polinómio de grau $r \geq 1$ e $C = (x_1, \ldots, x_r)$[1].

(1) Quando é que temos a regularidade da funcional de momentos $\tilde{u} = p(x)u$?

(2) Se $(\tilde{P}_n)_{n\in N}$ for a S.P.O.M. associada a $\tilde{u}$, i.e.,

$$x\tilde{P}_n(x) = \tilde{P}_{n+1}(x) + \tilde{\beta}_n \tilde{P}_n(x) + \tilde{\gamma}_n \tilde{P}_{n-1}(x) \ , \tag{3.2}$$

qual a relação entre os coeficientes das relações (3.1) e (3.2)?

A resposta a **(1)** é dada pelo seguinte:

Teorema 3.1.1 ([37] e [12]) *Sejam u uma funcional de momentos regular e $\tilde{u}$ a funcional linear definida por $\tilde{u} = p(x)u$ onde p é o polinómio definido acima. Então $\tilde{u}$ é regular quando, e só quando,*

$$D(C, n) \neq 0 \ , \ n \in \mathbb{N}$$

onde

$$D(C,n) = \begin{vmatrix} P_n(x_1) & \ldots & P_{n+r-1}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n^{(m_1-1)}(x_1) & \ldots & P_{n+r-1}^{(m_1-1)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(x_s) & \ldots & P_{n+r-1}(x_s) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n^{(m_s-1)}(x_s) & \ldots & P_{n+r-1}^{(m_s-1)}(x_s) \end{vmatrix}.$$

[1]Note–se que os x_i podem ser tomados em $\mathbb{C}$.

Demonstração

Comecemos por demonstrar que a condição $D(C,n) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, é suficiente para que se tenha a regularidade de $\tilde{u}$.

Considere–se o seguinte polinómio

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & \dots & P_{n+r}(x) \\ P_n(x_1) & \dots & P_{n+r}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n^{(m_1-1)}(x_1) & \dots & P_{n+r}^{(m_1-1)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(x_s) & \dots & P_{n+r}(x_s) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n^{(m_s-1)}(x_s) & \dots & P_{n+r}^{(m_s-1)}(x_s) \end{vmatrix};$$

construído à custa de $D(C;n)$. Vê–se claramente que F_n é um polinómio de grau $n+r$ e tem pelo menos as mesmas raízes que p, i.e.,

$$F_n(x) = p(x)q_n(x) \ , \ n \in \mathbb{N}$$

onde q_n é um polinómio de grau exactamente n.

Podemos pensar expressar q_n em termos dos primeiros n termos da sucessão (P_k):

$$q_n(x) = (-1)^n D(C;n)P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}P_k(x) \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Definimos assim uma família livre de polinómios associados a (P_n), à qual está associada a seguinte família de polinómios mónicos

$$Q_n(x) = \frac{q_n(x)}{(-1)^n D(C;n)} \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Provemos que (Q_n) é a S.P.O.M. associada a $\tilde{u}$:

— Comecemos por supor $m < n$ então

$$\begin{aligned} < \tilde{u}, Q_nQ_m > &= < u, (pQ_n)Q_m >=< u, F_nQ_m >= \\ &= \begin{vmatrix} < u, P_nQ_m > & \dots & < u, P_{n+r}Q_m > \\ P_n(x_1) & \dots & P_{n+r}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n^{(m_1-1)}(x_1) & \dots & P_{n+r}^{(m_1-1)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(x_s) & \dots & P_{n+r}(x_s) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n^{(m_s-1)}(x_s) & \dots & P_{n+r}^{(m_s-1)}(x_s) \end{vmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma se prova que, para $m > n$, $< \tilde{u}, Q_n Q_m >= 0$. Quando $m = n$ tem–se

$$< \tilde{u}, Q_n^2 >= D(C; n+1) < u, P_n^2 > \quad , n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Reciprocamente, se $\tilde{u}$ é regular, por (3.3) concluímos que $D(C; n) \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. □

Podemos então falar na S.P.O.M. $(\tilde{P}_n)$ associada a $\tilde{u}$; e pela observação **(a)** do teorema 1.1.14 a questão **(2)** tem sentido.

O método que vamos utilizar para resolver a questão **(2)** consiste dos seguintes passos:

(i) Determinação de uma fórmula de estrutura existente entre estas duas S.P.O.M., i.e.,

$$p(x)\tilde{P}_n(x) = P_{n+\mathrm{gr}(p)}(x) + \sum_{k=n}^{n+\mathrm{gr}p-1} a_{n,k} P_k(x). \tag{3.4}$$

(ii) Cálculo dos $a_{n,k}$ em função dos P_k e das suas derivadas nas raízes de p.

(iii) Cálculo dos coeficientes da relação de recorrência (3.1) em termos dos $a_{n,k}$.

(iv) Relação existente entre $a_{n,n+1}$ e β_{n+1} (nos casos em que $p(x) = (x - x_1)^2$ e $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$).

Antes de mais verifiquemos que se tem (3.4):

— Como (P_n) é uma S.P.O.M. associada a u e $p(x)\tilde{P}_n(x)$ é um polinómio de grau $n + \mathrm{gr}(p)$ temos que

$$p(x)\tilde{P}_n(x) = P_{n+\mathrm{gr}(p)}(x) + \sum_{k=0}^{n+\mathrm{gr}(p)-1} a_{n,k} P_k(x)$$

onde os $a_{n,k}$ são dados por

$$\begin{aligned} < u, P_k^2 > a_{n,k} &= < u, p(x)\tilde{P}_n P_k > \\ &= < p(x)u, \tilde{P}_n P_k > \\ &= < \tilde{u}, \tilde{P}_n P_k > \\ &= 0 \text{ se } k < n. \ \square \end{aligned}$$

Nas demonstrações dos três casos que dissemos que iríamos estudar suporemos que a condição de regularidade já está provada (pois demonstrámos o teorema 3.1.1).

Teorema 3.1.2 (Chihara,1978) *Para que a funcional de momentos $\tilde{u} = (x - x_1)u$ seja regular, é condição necessária e suficiente que $P_{n+1}(x_1) \neq 0$, $n \in N$. Nesse caso, temos*

$$(x - x_1)\tilde{P}_n(x) = P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(x_1)}{P_n(x_1)} P_n(x) \tag{3.5}$$

$$\tilde{\beta}_n = \beta_{n+1} + \frac{P_{n+2}(x_1)P_n(x_1) - P_{n+1}^2(x_1)}{P_{n+1}(x_1)P_n(x_1)} \tag{3.6}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \frac{P_{n+2}(x_1)P_n(x_1)}{P_{n+1}^2(x_1)}\gamma_{n+1} \tag{3.7}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Como o $\mathrm{gr}(p) = 1$, de (3.4) sai que

$$(x - x_1)\tilde{P}_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{n,n}P_n(x);$$

e substituindo x por x_1 na expressão anterior concluímos que

$$a_{n,n} = -\frac{P_{n+1}(x_1)}{P_n(x_1)},$$

ou seja, temos (3.5).

Verificação de (3.6) e (3.7):

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_n &= \frac{< \tilde{u}, \tilde{P}_n^2(x) >}{< \tilde{u}, \tilde{P}_{n-1}^2(x) >} = \frac{-\frac{P_{n+1}(x_1)}{P_n(x_1)} < u, P_n^2(x) >}{-\frac{P_n(x_1)}{P_{n-1}(x_1)} < u, P_{n-1}^2(x) >} \\
&= \frac{P_{n+1}(x_1)P_{n-1}(x_1)}{P_n^2(x_1)}\gamma_n
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_n &= \frac{< \tilde{u}, x\tilde{P}_n^2(x) >}{< \tilde{u}, \tilde{P}_n^2(x) >} = \frac{< u, (x - x_1)^2\tilde{P}_n^2(x) > + x_1 < \tilde{u}, \tilde{P}_n^2(x) >}{< \tilde{u}, \tilde{P}_n^2(x) >} \\
&= x_1 + \frac{< u, (x - x_1)\tilde{P}_n(x)(x - x_1)\tilde{P}_n(x) >}{< u, (x - x_1)\tilde{P}_n^2(x) >} \\
&= x_1 + \frac{< u, (P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(x_1)}{P_n(x_1)}P_n(x))^2 >}{< u, (P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(x_1)}{P_n(x_1)}P_n(x))\tilde{P}_n(x) >} \\
&= x_1 + \frac{< u, P_{n+1}^2(x) > + (\frac{P_{n+1}(x_1)}{P_n(x_1)})^2 < u, P_n^2(x) >}{-\frac{P_{n+1}(x_1)}{P_n(x_1)} < u, P_n^2(x) >} \\
&= x_1 - \frac{P_{n+1}(x_1)}{P_n(x_1)} - \frac{P_n(x_1)}{P_{n+1}(x_1)}\gamma_{n+1}.
\end{aligned}$$

Mas, de (3.1), substituindo $x = x_1$ tiramos

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{P_n(x_1)}((x_1 - \beta_{n+1})P_{n+1}(x_1) - P_{n+2}(x_1)), \tag{3.8}$$

que substituído na anterior expressão dá (3.6).□

Quando fazemos uma modificação polinomial por um polinómio de grau 2 temos, como vimos, dois caso a considerar:

Teorema 3.1.3 *Para que a funcional de momentos $\tilde{u} = (x - x_1)(x - x_2)u$ com $x_1 \neq x_2$ seja regular é condição necessária e suficiente que $|d_n(x_1, x_2)| \neq 0$, onde*

$$d_n = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x_1) & P_n(x_1) \\ P_{n+1}(x_2) & P_n(x_2) \end{bmatrix}$$

para todo o inteiro positivo n. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)\tilde{P}_n(x) = (x - x_1 - (x_1 - x_2)\tfrac{P_n(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1,x_2;n)})P_{n+1}(x) + \\ (x_1 - x_2)\tfrac{P_{n+1}(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1,x_2;n)}P_n(x)\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\beta_{n+1} = a_{n,n+1} + (x_1 - x_2)\frac{P_n(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1, x_2; n)} + x_1 \tag{3.10}$$

$$\gamma_{n+1} = a_{n,n} - (x_1 - x_2)\frac{P_{n+1}(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1, x_2; n)} \tag{3.11}$$

$$\tilde{\beta}_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}}\gamma_{n+1} + (x_2 - x_1)\frac{P_n(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1, x_2; n)} + x_2 \tag{3.12}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}\gamma_{n+1} \tag{3.13}$$

onde,

$$\begin{bmatrix} a_{n,n+1} \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = -d_n^{-1} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1) \\ P_{n+2}(x_2) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

<u>Demonstração</u>

Como gr(p)=2, de (3.4) sai que

$$(x - x_1)(x - x_2)\tilde{P}_n(x) = P_{n+2}(x) + a_{n,n+1}P_{n+1}(x) + a_{n,n}P_n(x); \tag{3.15}$$

e tomando $x = x_1$, x_2 na expressão anterior temos

$$\begin{bmatrix} a_{n,n+1} \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = -\frac{1}{D(x_1, x_2; n)} \begin{bmatrix} P_n(x_2) & -P_n(x_1) \\ -P_{n+1}(x_2) & P_{n+1}(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1) \\ P_{n+2}(x_2) \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$a_{n,n+1} = \frac{P_n(x_1)P_{n+2}(x_2) - P_n(x_2)P_{n+2}(x_1)}{D(x_1, x_2; n)}$$

e

$$a_{n,n} = \frac{P_{n+1}(x_2)P_{n+2}(x_1) - P_{n+1}(x_1)P_{n+2}(x_2)}{D(x_1, x_2; n)}.$$

Então, tendo em conta as equações (3.1) e (3.15), tiramos

$$(x - x_1)(x - x_2)\tilde{P}_n(x) = (x - \beta_{n+1} + a_{n,n+1})P_{n+1}(x) + (a_{n,n} - \gamma_{n+1})P_n(x) \tag{3.16}$$

e

$$(x - x_1)(x - x_2)\tilde{P}_n(x) = (x - x_1 - b_n)P_{n+1}(x) + c_n P_n(x). \tag{3.17}$$

Assim, se conhecermos b_n e c_n de (3.17) temos os β_n e γ_n de (3.1). De facto tomando $x = x_1,\ x_2$ na última expressão vem

$$\begin{cases} -b_n P_{n+1}(x_1) + c_n P_n(x_1) & = 0 \\ -b_n P_{n+1}(x_2) + c_n P_n(x_2) & = (x_1 - x_2)P_{n+1}(x_2) \end{cases}$$

e, portanto,

$$b_n = (x_1 - x_2)\frac{P_n(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1, x_2; n)}$$

e

$$c_n = (x_1 - x_2)\frac{P_{n+1}(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1, x_2; n)}$$

que substituídos em (3.17) confirmam(3.9).

Comparando (3.16) com (3.17)

$$\begin{cases} \beta_{n+1} & = a_{n,n+1} + x_1 + (x_1 - x_2)\frac{P_n(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1,x_2;n)} \\ \\ \gamma_{n+1} & = a_{n,n} - (x_1 - x_2)\frac{P_{n+1}(x_1)P_{n+1}(x_2)}{D(x_1,x_2;n)} \end{cases}$$

Determinação de $\tilde{\beta}_n$ e $\tilde{\gamma}_n$:

$$\tilde{\gamma}_{n+1} \quad = \quad \frac{< \tilde{u}, \tilde{P}^2_{n+1}(x) >}{< \tilde{u}, \tilde{P}^2_n(x) >} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}\gamma_{n+1}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_n &= \frac{< \tilde{u}, (x-x_2)\tilde{P}_n^2(x) > +x_2 < \tilde{u}, \tilde{P}_n^2(x) >}{< \tilde{u}, \tilde{P}_n^2(x) >} \\
&= x_2 + \frac{< u, (x-x_2)\tilde{P}_n(x)((x-x_1)(x-x_2)\tilde{P}_n(x)) >}{< u, (x-x_1)(x-x_2)\tilde{P}_n^2(x) >} \\
&= x_2 + \frac{< u, (x-x_2)\tilde{P}_n(x)(P_{n+2}(x) + a_{n,n+1}P_{n+1}(x) + a_{n,n}P_n(x)) >}{a_{n,n} < u, P_n^2(x) >} \\
&= x_2 + \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}}\frac{< u, P_{n+1}^2(x) >}{< u, P_n^2(x) >} + \frac{< u, (x-x_2)\tilde{P}_n(x)P_n(x) >}{< u, P_n^2(x) >} \\
&= x_2 + \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}}\gamma_{n+1} + \frac{< u, (x-x_2)\tilde{P}_n(x)P_n(x) >}{< u, P_n^2(x) >}
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros de (3.17) por $x - x_1$ obtemos

$$(x-x_2)\tilde{P}_n(x) = P_{n+1}(x) - (x_1 - x_2)\frac{P_{n+1}(x_2)P_n(x_1)}{D(x_1, x_2; n)}Q_n(x)$$

onde Q_n é um polinómio mónico de grau n; logo

$$< u, (x-x_2)\tilde{P}_n(x)P_n(x) >= -(x_1 - x_2)\frac{P_{n+1}(x_2)P_n(x_1)}{D(x_1, x_2; n)} < u, P_n^2(x) > ;$$

e finalmente

$$\tilde{\beta}_n = x_2 + \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}}\gamma_{n+1} - (x_1 - x_2)\frac{P_{n+1}(x_2)P_n(x_1)}{D(x_1, x_2; n)}. \ \square$$

O seguinte resultado surge como caso limite do anterior:

Teorema 3.1.4 (Maroni,1990) *Para que a funcional de momentos $\tilde{u} = (x - x_1)^2 u$ seja regular é condição necessária e suficiente que $|d_n(x_1, x_1)| \neq 0$, onde*

$$d_n = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x_1) & P_n(x_1) \\ P'_{n+1}(x_1) & P'_n(x_1) \end{bmatrix}$$

para todo o inteiro positivo n. Nesse caso, temos

$$(x-x_1)^2\tilde{P}_n(x) = (x - x_1 - \frac{P_n(x_1)P_{n+1}(x_1)}{D(x_1, x_1; n)})P_{n+1}(x) + \frac{P_{n+1}^2(x_1)}{D(x_1, x_1; n)}P_n(x) \tag{3.18}$$

$$\beta_{n+1} = a_{n,n+1} + \frac{P_{n+1}(x_1)P_n(x_1)}{D(x_1, x_1; n)} + x_1 \tag{3.19}$$

$$\gamma_n = a_{n,n} - \frac{P_{n+1}^2(x_1)}{D(x_1, x_1; n)} \tag{3.20}$$

$$\tilde{\beta}_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}}\gamma_{n+1} - \frac{P_{n+1}(x_1)P_n(x_1)}{D(x_1, x_1; n)} + x_1 \tag{3.21}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}\gamma_{n+1} \tag{3.22}$$

onde

$$\begin{bmatrix} a_{n,n+1} \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = -d_n^{-1} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1) \\ P'_{n+2}(x_1) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

com $n \in \mathbb{N}$.

<u>Demonstração</u>

Como $\mathrm{gr}(p) = 2$, de (3.4) tiramos que

$$(x - x_1)^2 \tilde{P}_n(x) = P_{n+2}(x) + a_{n,n+1}P_{n+1}(x) + a_{n,n}P_n(x), \tag{3.24}$$

onde $a_{n,n+1}$ e $a_{n,n}$ são dados por

$$\begin{bmatrix} a_{n,n+1} \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = -\frac{1}{D(x_1, x_1; n)} \begin{bmatrix} P'_n(x_1) & -P_n(x_1) \\ -P'_{n+1}(x_1) & P_{n+1}(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1) \\ P'_{n+2}(x_1) \end{bmatrix}$$

Esta última expressão resulta da resolução do sistema linear formado por (3.24) tomada em $x = x_1$ e da sua derivada também tomada em $x = x_1$.

De (3.24) e (3.1) sai

$$(x - x_1)^2 \tilde{P}_n(x) = (x - (\beta_{n+1} - a_{n,n+1}))P_{n+1}(x) + (a_{n,n} - \gamma_{n+1})P_n(x). \tag{3.25}$$

Podemos reescrever (3.25) na forma

$$(x - x_1)^2 \tilde{P}_n(x) = ((x - x_1) - b_n)P_{n+1}(x) + c_nP_n(x), \tag{3.26}$$

e pela unicidade desta representação, determinar β_n e γ_n da equação (3.1), à custa do b_n e c_n de (3.26). Assim,

$$\begin{cases} -b_nP_{n+1}(x_1) + c_nP_n(x_1) = 0 \\ -b_nP'_{n+1}(x_1) + c_nP'_n(x_1) = -P_{n+1}(x_1) \end{cases}$$

e, portanto,

$$b_n = \tfrac{P_{n+1}(x_1)P_n(x_1)}{D(x_1,x_1;n)}$$

e

$$c_n = \tfrac{P_{n+1}^2(x_1)}{D(x_1,x_1;n)}$$

que substituídos em (3.26) confirmam (3.18).

Por outro lado, temos também, β_n e γ_n perfeitamente determinados

$$\begin{cases} \beta_{n+1} & = a_{n,n+1} + \frac{P_{n+1}(x_1)P_n(x_1)}{D(x_1,x_1;n)} + x_1 \\ \gamma_n & = a_{n,n} - \frac{P^2_{n+1}(x_1)}{D(x_1,x_1;n)} \end{cases} \tag{3.27}$$

Determinação dos coeficientes de (3.2):

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{n+1} &= \frac{< \tilde{u}, \tilde{P}^2_{n+1}(x) >}{< \tilde{u}, \tilde{P}^2_n(x) >} = \frac{a_{n+1,n+1} < u, P^2_{n+1}(x) >}{a_{n,n} < u, P^2_n(x) >} \\ &= \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \gamma_{n+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_n &= \frac{< \tilde{u}, (x-x_1)\tilde{P}^2_n(x) > + x_1 < \tilde{u}, \tilde{P}^2_n(x) >}{< \tilde{u}, \tilde{P}^2_n(x) >} \\ &= x_1 + \frac{< u, (x-x_1)\tilde{P}_n(x)((x-x_1)^2\tilde{P}_n(x)) >}{< u, (x-x_1)^2\tilde{P}^2_n(x) >} \\ &= x_1 + \frac{< u, (x-x_1)\tilde{P}_n(x)(P_{n+2}(x) + a_{n,n+1}P_{n+1}(x) + a_{n,n}P_n(x)) >}{a_{n,n} < u, P^2_n(x) >} \\ &= x_1 + \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}} \frac{< u, P^2_{n+1}(x) >}{< u, P^2_n(x) >} + \frac{< u, (x-x_1)\tilde{P}_n(x)P_n(x) >}{< u, P^2_n(x) >} \\ &= x_1 + \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}} \gamma_{n+1} + \frac{< u, (x-x_1)\tilde{P}_n(x)P_n(x) >}{< u, P^2_n(x) >} \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros de (3.26) por $x - x_1$ obtemos

$$(x-x_1)\tilde{P}_n(x) = P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(x_1)P_n(x_1)}{D(x_1,x_1;n)} Q_n(x)$$

onde Q_n é um polinómio mónico de grau n; e, portanto,

$$< u, (x-x_1)\tilde{P}_n(x)P_n(x) >= -\frac{P_{n+1}(x_1)P_n(x_1)}{D(x_1,x_1;n)} < u, P^2_n(x) > .$$

Assim,

$$\tilde{\beta}_n = x_1 + \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \gamma_{n+1} - \frac{P_{n+1}(x_1)P_n(x_1)}{D(x_1,x_1;n)}. \ \square$$

3.2 Estabilidade das Funcionais Semi–Clássicas

Vamos analisar o terceiro problema, que é o de verificar como varia a classe de uma S.P.O.M. semi–clássica por uma modificação polinomial sobre a funcional que lhe está associada. É evidente que estas modificações mantêm o carácter semi–clássico da funcional, pois se u é a funcional de momentos semi–clássica de classe s associada a (P_n), existem $\psi \in \mathbb{P}_{s+1}$ e $\phi \in \mathbb{P}_{s+2}$ tais que

$$D(\phi u) = \psi u \tag{3.28}$$

verificando a condição (2.16); então, $\tilde{u} = p(x)u$ verifica

$$D(p\phi\tilde{u}) = (2p'\phi + p\psi)\tilde{u}; \tag{3.29}$$

logo $\tilde{u}$ é semi-clássica de classe quando muito $s + \mathrm{gr}(p)$. Para estudarmos a classe da nova S.P.O.M., (R_n), associada a $\tilde{u}$, basta estudar a seguinte equação funcional obtida de (3.29)

$$D(\phi\tilde{u}) - \psi\tilde{u} = p^{-1}p'\phi\tilde{u} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k}\delta_{x_i}^{(k-1)}, \tag{3.30}$$

onde $\sum_{i=1}^{r} m_i = \mathrm{gr}(p)$.

Estudemos somente os casos dados na secção anterior, i.e.,

(a) $p(x) = x - x_1$

(b) $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

(c) $p(x) = (x - x_1)^2$.

Em (a), temos dois casos a considerar:

1. se x_1 é raiz de ϕ, então $\tilde{u}$ verifica a seguinte equação distribucional

$$D(\phi\tilde{u}) = (\frac{\phi}{x - x_1} + \psi)\tilde{u}; \tag{3.31}$$

   logo $\tilde{u}$ é uma funcional de momentos semi–clássica de classe s;

2. se x_1 não é raiz de ϕ, então $\tilde{u}$ é uma funcional de momentos semi–clássica de classe $s + 1$.

Em (b), temos três casos a considerar:

1. se x_1 e x_2 são raízes de ϕ, então $\tilde{u}$ é uma funcional de momentos semi–clássica de classe s;

2. se x_1 é raiz de ϕ e x_2 não (ou x_2 é raiz de ϕ e x_1 não), então $\tilde{u}$ é uma funcional de momentos semi–clássica de classe $s + 1$.

3. caso contrário $\tilde{u}$ é uma funcional de momentos semi–clássica de classe $s + 2$.

Em (c), temos três casos a considerar:

1. se x_1 é raiz dupla de ϕ, então $\tilde{u}$ verifica a seguinte equação distribucional

$$D(\phi\tilde{u}) = (2\frac{\phi}{x-x_1} + \psi)\tilde{u}; \tag{3.32}$$

   e portanto $\tilde{u}$ é uma funcional semi–clássica de classe s;

2. se x_1 é raiz simples de ϕ, então $\tilde{u}$ verifica a seguinte equação distribucional

$$D(\phi\tilde{u}) = (2\frac{\phi}{x-x_1} + \psi)\tilde{u} + \underbrace{< (2\frac{\phi}{x-x_1} + \psi)\tilde{u}, 1 >}_{\lambda_1} \delta_{x_1}; \tag{3.33}$$

   assim,

   (a) se $\lambda_1 = 0$, $\tilde{u}$ é de classe s

   (b) se $\lambda_1 \neq 0$, $\tilde{u}$ é de classe $s+1$.

3. se x_1 não é raiz de ϕ, então $\tilde{u}$ verifica a seguinte equação distribucional

$$D(\phi\tilde{u}) = (2\frac{\phi}{x-x_1} + \psi)\tilde{u} + \underbrace{< \psi\tilde{u}, 1 >}_{\lambda_1} \delta_{x_1} + \underbrace{< (\phi + (x-x_1)\psi)\tilde{u}, 1 >}_{\lambda_2} \delta'_{x_1}; \tag{3.34}$$

   logo,

   (a) se $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$, $\tilde{u}$ é uma funcional de momentos semi–clássica de classe s;

   (b) se $\lambda_2 = 0$, $\tilde{u}$ é uma funcional de momentos semi–clássica de classe $s+1$;

   (c) se λ_2 e λ_1 não se anularem, $\tilde{u}$ é uma funcional de momentos semi–clássica de classe $s+2$.

Observação

Podemos determinar os coeficientes da relação de recorrência das S.P.O.M. clássicas à custa de modificações polinomiais com $p(x) \equiv \phi(x)$ e da fórmula de Rodrigues[2] que estas S.P.O.M. verificam.

2

$$w(x)P_n(x) = K_n \frac{d^n}{dx}((\phi(x))^n w(x)) \ , \ \ n \in \mathbb{N} \tag{3.35}$$

onde w é a função peso associada às funcionais de momentos clássicas e k_n é uma constante não nula para cada n (ver [33] e [91]).

3.3 Aplicação a Algumas S.P.O.M. Clássicas

3.3.1 Caso Hermite

Vamos estudar dois tipos de modificações da funcional de momentos de Hermite dada no capítulo anterior:

— Uma modificação por x^2 e outra por $x - i$, onde i é a unidade imaginária.

O primeiro exemplo serve para pôr em evidência a insuficiência do método de W.Gautschi (ver [46] e [48]) ou do método de B.Fischer e G.H.Golub em [44]; de facto, para estudarmos a funcional x^2u, onde u é a funcional de momentos de Hermite, não podemos estudar primeiro a funcional xu e depois a funcional $x(xu)$, pois xu não é regular!

O segundo exemplo que aqui apresentamos, serve para testar o método no caso em que x_1 está em $\mathbb{C}$.

Comecemos então o nosso estudo:

1. Caso $\tilde{u} = x^2u$ onde u é a funcional de momentos definida por

$$< u, x^n >= \int_{\mathbb{R}} x^n \exp(-x^2)dx \ , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

Comecemos por verificar que a funcional de momentos assim definida é regular:

— Pelo teorema 3.1.4 temos regularidade quando, e só quando,

$$|d_n| = \begin{vmatrix} H_{n+1}(0) & H_n(0) \\ H'_{n+1}(0) & H'_n(0) \end{vmatrix} \neq 0 \ , \quad n \in \mathbb{N},$$

onde (H_n) é a S.P.O.M. de Hermite; portanto

$$\begin{vmatrix} H_{n+1}(0) & H_n(0) \\ (n+1)H_n(0) & nH_{n-1}(0) \end{vmatrix} \neq 0 \ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim, como $H_{2n+1}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$|d_n| = \begin{cases} (2k-1)H_{2k}(0)H_{2k-2}(0) \ , & \text{se} \quad n = 2k-1 \\ (2k+1)H_{2k}^2(0) \ , & \text{se} \quad n = 2k \end{cases}$$

Mas $H_{2n}(x) = L_n^{-1/2}(x^2)$ (ver [9]), então a condição anterior pode reescrever–se na seguinte forma

$$|d_n| = \begin{cases} (2k-1)L_k^{-1/2}(0)L_{k-1}^{-1/2}(0) \ , & \text{se} \quad n = 2k-1 \\ (2k+1)(L_k^{-1/2}(0))^2 \ , & \text{se} \quad n = 2k \ , \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.37}$$

que é sempre diferente de zero.

Para determinarmos os coeficientes da relação de recorrência satisfeita pelos (R_n), associados a $\tilde{u}$, vamos utilizar o programa "Mathematica":

— A partir das fórmulas (3.21) e (3.22) obtemos com $\beta_n = 0$ e $\gamma_{n+1} = \frac{n+1}{2}$ (ver tabela 2.2)

(a) $\tilde{\beta}_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $$\tilde{\gamma}_{n+1} = \begin{cases} -\frac{(2k+3)(k+1)}{2k+1}\left(\frac{L_{k+1}^{-1/2}(0)}{L_k^{-1/2}(0)}\right)^2 & \text{se } n = 2k+1 \\ \\ -\frac{(2k+1)}{2}\frac{L_k^{-1/2}(0)}{L_{k+1}^{-1/2}(0)} & \text{se } n = 2k+2 \end{cases}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Estudemos ainda a classe da nova S.P.O.M.:

— Considere–se a equação distribucional $Du = -2xu$, satisfeita pela funcional de Heremite e multipliquemo-la por x^3

$$D(x\tilde{u}) = (3 - 2x^2)\tilde{u}$$

que é a equação distribucional satisfeita por $\tilde{u}$; e, portanto, $\tilde{u}$ é de classe 1.

2. Caso $\tilde{u} = (x - i)u$ onde u é a funcional de momentos definida por (3.36) e i é a unidade imaginária.

   Comecemos por verificar que a funcional de momentos assim definida é regular:

   — Pelo teorema 3.1.2 temos regularidade quando, e só quando,

   $$H_n(i) \neq 0 \; , \;\; n \in \mathbb{N}.$$

   Mas $H_n(x) = \begin{cases} L_k^{-1/2}(x^2) & \text{se } n = 2k \\ xL_k^{1/2}(x^2) & \text{se } n = 2k-1 \end{cases}$ (ver [9]); e portanto a condição anterior pode reescrever–se na seguinte forma

   $$L_n^{-1/2}(-1)L_n^{1/2}(-1) \neq 0 \; , \;\; n \in \mathbb{N}.$$

   Para determinarmos os coeficientes da relação de recorrência satisfeita pelos, (R_n), associados a $\tilde{u}$, vamos utilizar o programa "Mathematica":

   — A partir das fórmulas (3.6) e (3.7) obtemos

   (a) $$\tilde{\beta}_n = \begin{cases} -\frac{L_{k+1}^{-1/2}(-1)+L_k^{-1/2}(-1)}{L_k^{-1/2}(-1)}i & \text{se } n = 2k \\ \\ \frac{L_{k-1}^{-1/2}(-1)+L_k^{-1/2}(-1)}{L_k^{-1/2}(-1)L_{k-1}^{-1/2}(-1)}i & \text{se } n = 2k-1 \end{cases}, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\text{(b)}\ \tilde{\gamma}_{n+1} = \begin{cases} -(k+1)\frac{L_k^{-1/2}(-1)}{L_{k+1}^{-1/2}(-1)} & \text{se} \ \ n = 2k+1 \\ \\ -\frac{2k+3}{2}\frac{L_k^{-1/2}(-1)}{L_{k+1}^{-1/2}(-1)} & \text{se} \ \ n = 2k+2 \end{cases} , \ n \in \mathbb{N}.$$

Estudemos ainda a classe da nova S.P.O.M.:

— Facilmente se obtém a equação diferencial distribucional satisfeita por $\tilde{u}$

$$D((x-i)\tilde{u}) = 2(-x^2 + ix + 1)\tilde{u};$$

logo $\tilde{u}$ é semi–clássica de classe 1.

3.3.2 Caso Laguerre

Vamos ver agora um exemplo de modificação polinomial de uma funcional que lhe mantém a classe. Seja u a funcional de momentos de Laguerre, i.e.,

$$< u, x^n >= \int_0^{+\infty} x^n x^\alpha \exp(-x) dx \ , \ \ n \in \mathbb{N};$$

então, a modificação por x^r com $r \in \mathbb{N}$ é uma funcional de Laguerre pois, a funcional de momentos $\tilde{u} = x^r u$ verifica a seguinte equação

$$D(x\tilde{u}) = (r + \alpha + 1 - x)\tilde{u};$$

consequentemente é clássica.

Chapter 4

Modificações Inversas Polinomiais

No seguimento do que fizemos no capítulo anterior vamos analisar o seguinte problema

Problema Sejam p um polinómio e v uma funcional regular; encontrar condições necessárias e suficientes para que u definida por $v = p(x)u$ seja ainda uma funcional regular, e construir a S.P.O.M. associada.

Além disso, se v é uma funcional de momentos semi–clássica, que poderemos dizer acerca de u?

Mais uma vez interessar–nos–emos somente pelos casos

$$p(x) = \begin{cases} x - x_1 \\ (x - x_1)^2 \\ (x - x_1)(x - x_2) \end{cases}$$

pois a partir destes podemos chegar às modificações por polinómios de grau mais elevado.

O primeiro problema vai ser estudado na primeira secção.

No caso em que estas funcionais sejam definidas positivas, o problema enunciado no início do capítulo anterior e este condensam–se num só:

Problema Geral Encontrar uma S.P.O. associada a $\tilde{w}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} w(x)$, $(P_n(x; \tilde{w}))$, quando conhecemos $(P_n(x; w))$, onde $p(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)$, $q(x) = \prod_{j=1}^{l}(x - y_j)$ e $x_i \neq y_j$.

Isto porque se tivermos $q(x)u = v$ e v regular, admitindo uma representação integral

$$< v, r(x) >= \int_I r(x) w(x) dx,$$

então u admite a seguinte representação integral

$$< u, r(x) >= \int_I r(x) \frac{w(x)}{q(x)} dx.$$

De facto, como $u = q^{-1}(x)v + \sum_{j=1}^{l} < l_j(x)u, 1 > \delta_{y_j}$ (ver teorema 1.2.6)

$$\begin{aligned} < u, r(x) > &= < v, \tfrac{r(x)-Lr(X)}{q(x)} w(x) > + \textstyle\sum_{j=1}^{l} < l_j(x)u, 1 > r(y_j) \\ &= \textstyle\int_I \tfrac{r(x)}{q(x)} w(x)dx - \int_I \tfrac{Lr(X)}{q(x)} w(x)dx + \sum_{j=1}^{l} < l_j(x)u, 1 > r(y_j) \\ &= \textstyle\int_I r(x) \tfrac{w(x)}{q(x)} dx - \sum_{j=1}^{l} \int_I l_j(x) \tfrac{w(x)}{q(x)} dx r(y_j) + \sum_{j=1}^{l} < l_j(x)u, 1 > r(y_j) \\ &= \textstyle\int_I r(x) \tfrac{w(x)}{q(x)} dx \ \square \end{aligned}$$

A resposta a esta questão vem dada pelo seguinte (ver [89]):

Teorema IV.0.1 (Teorema Generalizado de Christoffel) *Sejam w e $\tilde{w}$ duas funções peso relacionadas por $\tilde{w}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} w(x)$. Com as notações anteriores os $P(x;\tilde{w})$ vêm dados pela seguinte fórmula (de estrutura)*

$$p(x)P(x;\tilde{w}) = A_n^{-1} \begin{vmatrix} P_{n-l}(x) & \dots & P_{n+k}(x) \\ P_{n-l}(x_1) & \dots & P_{n+k}(x_1) \\ & \dots & \\ P_{n-l}(x_k) & \dots & P_{n+k}(x_k) \\ R_{n-l}(y_1) & \dots & R_{n+k}(y_1) \\ & \dots & \\ R_{n-l}(y_l) & \dots & R_{n+k}(y_l) \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

onde A_n é uma constante não nula para cada n— condição de regularidade— e as funções R_n (funções meromorfas), são definidas por

$$R_n(x) = P_{n-1}^{(1)}(x;w) - P_n(x) \int_I \frac{w(t)}{x-t} dt. \tag{4.2}$$

Uma fórmula semelhante para o caso em que $l < n$ é devida a Uvarov (ver [101]). O caso $l = 0$ foi estudado por Christoffel (ver [32]). Esta fórmula não tem grande interesse prático, devido à grande dificuldade computacional de que se reveste o cálculo de determinantes de ordem elevada. Recentemente, Gautschi (ver [46] e [48]) construiu um algoritmo de geração de polinómios P_n com passos lineares e quadráticos, a partir das relações existentes entre os coeficientes das respectivas relações de recorrência.

Quando não estamos num caso definido positivo $p^{-1}(x)v$ não é regular pois $< p^{-1}(x)v, 1 >= 0$. Têm então fundamento as questões propostas acima.

Estudaremos ainda a estabilidade da família das S.P.O.M. semi–clássicas por estas modificações.

Daremos na terceira secção um exemplo de problema inverso, i.e., a partir de uma fórmula que relaciona uma S.P.M. e uma S.P.O.M., determinar condições para que a primeira seja ortogonal; faremos aplicação destes resultados aos polinómios ortogonais clássicos.

4.1 Formulação do Problema

Formulação do problema

— Seja v uma funcional de momentos regular e $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a S.P.O.M. correspondente verificando

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x). \tag{4.3}$$

Por outro lado, seja

$$p(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - x_i)^{m_i}$$

um polinómio de grau $r + 1 \geq 1$ e $C = (x_1, \ldots, x_{r+1})$.

- Quando é que temos a regularidade da funcional linear $u: \quad v = p(x)u$?
- Se $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for a S.P.O.M. associada a u, i.e.,

  $$xR_n(x) = R_{n+1}(x) + \xi_n R_n(x) + \eta_n R_{n-1}(x); \tag{4.4}$$

  qual a relação entre os coeficientes das relações (4.3) (dos (P_n) associados a v) e (4.4)?

De (4.2), vemos que vão desempenhar um papel muito importante os polinómios definidos à custa de (P_n) por

$$P_{n+1}(x; c) = P_{n+1}(x) - cP_n^{(1)}(x)\ , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Definição 4.1.1 (Chihara,1957) Às S.P.O.M. definidas por (4.5)[1] chamamos *co–recursivas* associadas à S.P.O.M. (P_n).

Antes de prosseguirmos o estudo da regularidade de u, vamos definir o que se entende por $p^{-1}(pu)$:

— De (1.33)

$$\begin{aligned}
< p^{-1}(x)(p(x)u), f > &= < p(x)u, \Theta_C f > = < p(x)u, \tfrac{f(x)-(\mathcal{L}f)(X)}{p(x)} > \\
&= < u, f(x) - (\mathcal{L}f)(X) > = < u, f(x) - \textstyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} f^{(k-1)}(x_i)L_{ik}(x) > \\
&= < u, f(x) > - \textstyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} < u, L_{ik}(x) >< \tfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_{x_i}^{(k-1)}, f > \\
&= < u - \textstyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} < u, L_{ik}(x) > \tfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta_{x_i}^{(k-1)}, f >
\end{aligned}$$

[1]Note-se que estes polinómios verificam a mesma relação de recorrência a três termos que (P_n) com as condições iniciais $P_0(x; c) = 1$ e $P_1(x; c) = P_1(x) - c$.

e, portanto,

$$p^{-1}(x)(p(x)u) = u - \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k}\delta_{x_i}^{(k-1)}. \quad \square \tag{4.6}$$

Concluímos assim que a condição de regularidade virá em função dos primeiros r momentos de u e das raízes de $p(x)$. De facto,

$$u = p^{-1}(x)v + \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k}\delta_{x_i}^{(k-1)}$$

onde os $\lambda_{i,j}$ estão definidos, univocamente, à custa dos primeiros r momentos e das raízes de $p(x)$.

Determinemo–los nos casos que iremos estudar:

(i) $v = (x - x_1)u$

De $v = (x-x_1)u$ tiramos que $(x-x_1)^{-1}((x-x_1)u) = (x-x_1)^{-1}v$. Resta–nos somente determinar $(x - x_1)^{-1}((x - x_1)u)$:

$$\begin{aligned} < (x - x_1)^{-1}((x - x_1)u), f(x) > &= < (x - x_1)u, \tfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} > \\ &= < u, f(x) - f(x_1) > \\ &= < u - u_0\delta_{x_1}, f(x) > ; \end{aligned}$$

e, portanto, $\lambda_{1,1} = -u_0$.

(ii) $v = (x - x_1)(x - x_2)u$

De $v = (x - x_1)(x - x_2)u$ tiramos que $(x - x_1)^{-1}(x - x_2)^{-1}((x - x_1)(x - x_2)u) = (x - x_1)^{-1}(x - x_2)^{-1}v$. Resta–nos somente determinar $(x - x_1)^{-1}(x - x_2)^{-1}((x - x_1)(x - x_2)u)$:

$$\begin{aligned} &< (x - x_1)^{-1}(x - x_2)^{-1}((x - x_1)(x - x_2)u), f(x) >= \\ &\qquad =< (x - x_1)(x - x_2)u, \frac{\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x-x_2} >= \\ &\qquad =< u, f(x) - \tfrac{x-2x_1-x_2}{x_2-x_1} f(x_1) + \tfrac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) >= \\ &\qquad =< u + \tfrac{u_1-x_2u_0}{x_2-x_1}\delta_{x_1} + \tfrac{x_1u_0-u_1}{x_2-x_1}\delta_{x_2}, f(x) > ; \end{aligned}$$

e, portanto, $\lambda_{1,1} = \frac{u_1-(2x_1+x_2)u_0}{x_2-x_1}$ e $\lambda_{2,1} = \frac{x_1u_0-u_1}{x_2-x_1}$.

(iii) $v = (x - x_1)^2u$

De $v = (x - x_1)^2u$ tiramos que $(x - x_1)^{-2}((x - x_1)^2u) = (x - x_1)^{-2}v$. Resta–nos somente determinar $(x - x_1)^{-2}((x - x_1)^2u)$:

$$\begin{aligned} < (x - x_1)^{-2}((x - x_1)^2u), f(x) > &= < (x - x_1)^2u, \frac{\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} - f'(x_1)}{(x-x_1)^2} > \\ &= < (x - x_1)^2u, \tfrac{f(x)-f(x_1)-(x-x_1)f'(x_1)}{(x-x_1)^2} > \\ &= < u, f(x) - f(x_1) - (x - x_1)f'(x_1) > \\ &= < u - u_0\delta_{x_1} + (u_1 - x_1u_0)\delta'_{x_1}, f(x) > ; \end{aligned}$$

e, portanto, $\lambda_{1,1} = -u_0$ e $\lambda_{1,2} = u_1 - x_1u_0$.

Analisemos então cada um destes casos separadamente.

4.1.1 Caso (i)

Este problema foi estudado por P.Maroni em [83] mas numa outra perspectiva.

Teorema 4.1.1 (Maroni,1990) *Sejam v uma funcional de momentos regular e $x_1 \in \mathbb{C}$; para que a funcional linear u definida por $v = (x - x_1)u$ seja regular é necessário e suficiente que $u_0 P_{n+1}(x_1; -\frac{1}{u_0}) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. A S.P.O.M. associada a u vem dada por*

$$R_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) \tag{4.7}$$

onde $a_n = \frac{P_{n+1}(x_1; -\frac{1}{u_0})}{P_n(x_1; -\frac{1}{u_0})}$, $n \in \mathbb{N}$, e $P_n(x, -\frac{1}{u_0})$ está definido por (4.5). Os coeficientes da relação de recorrência dos R_n, vêm dados por

$$\xi_{n+1} = \beta_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) \ , \ n \geq -1 \tag{4.8}$$

e

$$\begin{cases} \eta_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \gamma_n \ , \ n \geq 1 \\ \eta_1 = \gamma_1 + a_0(\beta_0 - \xi_1) \end{cases} \tag{4.9}$$

Demonstração

Como (P_n) é uma base do espaço $\mathbb{P}$, temos que $R_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} P_k(x)$, onde os $a_{n,k}$ vêm dados por

$$\begin{aligned} < v, P_k^2 > a_{n,k} &= < u, (x - x_1) R_{n+1} P_k > \\ &= \begin{cases} 0, \text{ se } k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ < u, R_{n+1}^2 > \end{cases} ; \end{aligned}$$

e portanto, tomando $a_{n,n} = a_n$, vem

$$R_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) + a_n P_n(x), \tag{4.10}$$

tendo–se regularidade para u se e somente se $a_n \neq 0$ (pelo teorema 1.1.14).

Determinemos a_n:

— Substituindo x por x_1 em (4.10) e subtraindo de (4.10) a equação encontrada vem

$$R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x_1) = (P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x_1)) + a_n(P_n(x) - P_n(x_1));$$

que dividida por $x - x_1$ toma a forma

$$\frac{R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x_1)}{x - x_1} = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x_1)}{x - x_1} + a_n \frac{P_n(x) - P_n(x_1)}{x - x_1}. \tag{4.11}$$

Aplicando a funcional regular v a ambos os membros de (4.11) obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
< v, \tfrac{R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x_1)}{x-x_1} > &= < v, \tfrac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(x_1)}{x-x_1} > + a_n < v, \tfrac{P_n(x)-P_n(x_1)}{x-x_1} > \\
< u, R_{n+1}(x) - R_{n+1}(x_1) > &= P_n^{(1)}(x_1) + a_n P_{n-1}^{(1)}(x_1) \\
-R_{n+1}(x_1)u_0 &= P_n^{(1)}(x_1) + a_n P_{n-1}^{(1)}(x_1) \text{ (pois } n \geq 0) \\
a_n(P_n(x_1)u_0 + P_{n-1}^{(1)}(x_1)) &= -(P_{n+1}(x_1)u_0 + P_n^{(1)}(x_1)) \\
\\
a_n &= -\frac{P_{n+1}(x_1)u_0 + P_n^{(1)}(x_1)}{P_n(x_1)u_0 + P_{n-1}^{(1)}(x_1)}, \ n \in \mathbb{N};
\end{aligned}$$

e da definição 4.1.1 obtemos a representação desejada para os a_n. Assim, temos que a condição de regularidade vem dada em termos do primeiro momento e do valor dos polinómios P_n e $P_n^{(1)}$ em x_1, i.e.,

$$u_0 P_{n+1}(x_1; -\frac{1}{u_0}) \neq 0, \, n \in \mathbb{N}.$$

Determinação dos coeficientes da relação de recorrência (4.4):

— Sustituindo R_{n+1} em (4.4) por $P_{n+1}(x)+a_nP_n(x)$ e aplicando a relação de recorrência (4.3) obtemos

$$\begin{aligned}
x(P_{n+1}(x) + a_n P_n(x)) = (P_{n+2}(x) + a_{n+1}P_{n+1}(x)) + \xi_{n+1}(P_{n+1}(x)+ \\
a_n P_n(x)) + \eta_{n+1}(P_n(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n x P_n(x) = (a_{n+1} + \xi_{n+1} - \beta_{n+1})P_{n+1}(x) + (a_n\xi_{n+1} \\
+\eta_{n+1} - \gamma_{n+1})P_n(x) + \eta_{n+1}a_{n-1}P_{n-1}(x) \ , \, n \geq 1
\end{aligned}$$

que, por comparação com (4.3), dá

(a) $\eta_{n+1}\frac{a_{n-1}}{a_n} = \gamma_n, \, n \geq 1;$

(b) $a_n\xi_{n+1} + \eta_{n+1} - \gamma_{n+1} = a_n\beta_n, \, n \geq 0;$

(c) $a_{n+1} + \xi_{n+1} - \beta_{n+1} = a_n, \, n \geq -1.$

De **(a)** $\eta_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}\gamma_n$; de **(b)**, com $n = 0$ sai que $\eta_1 = a_0\beta_0 + \gamma_1 - a_0\xi_1$; e por **(c)** $\xi_{n+1} = \beta_{n+1} - (a_{n+1} - a_n)$.

Fixado u_0 tal que $P_{n+1}(x_1)u_0 + P_n^{(1)}(x_1) \neq 0$, temos perfeitamente determinada a S.P.O.M. (R_n). Verifiquemos:

— Como $< u, R_1 >= 0$ e $R_1(x) = x - \xi_0$, temos que

$$\xi_0 = \frac{u_1}{u_0}. \tag{4.12}$$

Agora, por um lado

$$< v, R_1 >= -a_0 v_0$$

e por outro
$$< v, R_1 >=< v, (x-\beta_0)+(\beta_0-\xi_0) >= (\beta_0-\xi_0)v_0;$$
e, portanto, $-a_0 = \beta_0 - \xi_0$, i.e., $a_0 = \xi_0 - \beta_0$.

Mas podemos reescrever (4.12) na forma

$$\begin{aligned} 0 =< u, R_1 > &= < u, (x-x_1)+(x_1-\xi_0) >= \\ &= < (x-x_1)u, 1 > +(x_1-\xi_0)u_0 = \\ &= v_0 + (x_1-\xi_0)u_0. \end{aligned}$$

Assim, para cada a_0 e x_1, temos um e um só u_0; e este vai determinar os momentos seguintes, por (**i**) da secção 1 deste capítulo.

Em conclusão:

— Cada u_0 determina uma e uma só sucessão (a_n) e, portanto, uma e uma só S.P.O.M., (R_n), sempre e quando $u_0 P_{n+1}(x_1; -\frac{1}{u_0}) \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. □

4.1.2 Caso (ii)

O estudo que aqui vamos fazer é bastante importante, pois existem na literatura exemplos muito importantes destas modificações. Por exemplo, aos Polinómios de Bernstein–Szegö (ver [90] e [50]).

Teorema 4.1.2 *Sejam v uma funcional de momentos regular e $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$; para que a funcional linear u definida por $v = (x-x_1)(x-x_2)u$ seja regular é necessário e suficiente que*

$$|d_{n+1}| \neq 0, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

onde

$$d_n = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x_1; -\frac{1}{(\xi_0-x_2)u_0}) & P_n(x_1; -\frac{1}{(\xi_0-x_2)u_0}) \\ P_{n+1}(x_2; -\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0}) & P_n(x_2; -\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0}) \end{bmatrix}.$$

A S.P.O.M. associada a u vem dada por

$$R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + b_n P_{n+1}(x) + a_n P_n(x) \ , \ n \geq -1. \tag{4.13}$$

onde

$$\begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix} = -d_n^{-1} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1; -\frac{1}{(\xi_0-x_2)u_0}) \\ P_{n+2}(x_2; -\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0}) \end{bmatrix} \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Os coeficientes da relação de recorrência (4.4) verificam

$$\xi_{n+1} = \beta_{n+1} - (b_n - b_{n-1}) \ , \ n \geq -1 \tag{4.15}$$

e

$$\begin{cases} \eta_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\gamma_{n-1} \ , \ n \geq 2 \\ \eta_2 = \gamma_1 + b_{-1}(\beta_0 - \xi_1) + a_{-1} - a_0 \\ \eta_1 = \gamma_2 + b_0(\beta_1 - \xi_2) + a_0 - a_1. \end{cases} \tag{4.16}$$

Demonstração

Como (P_n) é uma base do espaço $\mathbb{P}$, temos que $R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}P_k(x)$, onde os $a_{n,k}$ vêm dados por

$$\begin{array}{rcl} < v, P_k^2 > a_{n,k} & = & < u, (x-x_1)(x-x_2)R_{n+2}P_k > \\ & = & \begin{cases} 0, \text{ se } \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ < u, (x-x_1)(x-x_2)R_{n+2}P_n > \text{se } \ k = n \\ < u, (x-x_1)(x-x_2)R_{n+2}P_{n+1} > \text{se } \ k = n+1 \end{cases} ; \end{array}$$

e, portanto,

$$R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + b_nP_{n+1}(x) + a_nP_n(x), \tag{4.17}$$

onde $b_n = a_{n,n+1}$ e $a_n = a_{n,n}$; tendo–se regularidade para u quando e só quando $a_n \neq 0$ (pelo teorema 1.1.14).

Determinemos b_n e a_n:

— Substituindo x por x_1 em (4.17) e subtraindo de (4.17) a equação encontrada vem

$$R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1) = (P_{n+2}(x) - P_{n+2}(x_1)) + b_n(P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x_1)) + a_n(P_n(x) - P_n(x_1));$$

que dividida por $x - x_1$ toma a forma

$$\frac{R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1)}{x - x_1} = \frac{P_{n+2}(x) - P_{n+2}(x_1)}{x - x_1} + b_n\frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x_1)}{x - x_1} + a_n\frac{P_n(x) - P_n(x_1)}{x - x_1}. \tag{4.18}$$

Aplicando a funcional regular v a ambos os membros de (4.18) obtemos sucessivamente

$$\begin{array}{c} < v, \frac{R_{n+2}(x)-R_{n+2}(x_1)}{x-x_1} >=< v, \frac{P_{n+2}(x)-P_{n+2}(x_1)}{x-x_1} > +b_n < v, \frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(x_1)}{x-x_1} > + \\ a_n < v, \frac{P_n(x)-P_n(x_1)}{x-x_1} > \\ < u, (x-x_2)(R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1)) >= P_{n+1}^{(1)}(x_1) + b_nP_n^{(1)}(x_1) + a_nP_{n-1}^{(1)}(x_1), \ n \in \mathbb{N}; \end{array}$$

e, portanto, como $x - x_2 = \underbrace{(x - \xi_0)}_{R_1(x)} + (\xi_0 - x_2)$ temos

$$-(\xi_0 - x_2)R_{n+2}(x_1)u_0 = P_{n+1}^{(1)}(x_1) + b_nP_n^{(1)}(x_1) + a_nP_{n-1}^{(1)}(x_1) \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.19}$$

Utilizando o mesmo processo acima descrito com x_2 em vez de x_1 obtemos

$$-(\xi_0 - x_1)R_{n+2}(x_2)u_0 = P_{n+1}^{(1)}(x_2) + b_nP_n^{(1)}(x_2) + a_nP_{n-1}^{(1)}(x_2) \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.20}$$

Tendo em conta (4.17) obtemos

$$\begin{cases} P_{n+1}(x_1;-\frac{1}{(\xi_0-x_2)u_0})b_n + P_n(x_1;-\frac{1}{(\xi_0-x_2)u_0})a_n = P_{n+2}(x_1;-\frac{1}{(\xi_0-x_2)u_0}) \\ P_{n+1}(x_2;-\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0})b_n + P_n(x_2;-\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0})a_n = P_{n+2}(x_2;-\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0}) \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} ((\xi_0-x_2)u_0P_{n+1}(x_1)+P_n^{(1)}(x_1))b_n + ((\xi_0-x_2)u_0P_n(x_1)+P_{n-1}^{(1)}(x_1))a_n = -(P_{n+1}^{(1)}(x_1)+ \\ \qquad (\xi_0-x_2)u_0P_{n+2}(x_1)) \\ \\ ((\xi_0-x_1)u_0P_{n+1}(x_2)+P_n^{(1)}(x_2))b_n + ((\xi_0-x_1)u_0P_n(x_2)+P_{n-1}^{(1)}(x_2))a_n = -(P_{n+1}^{(1)}(x_2)+ \\ \qquad (\xi_0-x_1)u_0P_{n+2}(x_2)) \end{cases}$$

donde se tira que a relação (4.14).

Determinação dos coeficientes da relação de recorrência (4.4):

— Sustituindo R_{n+1} em (4.4) por $P_{n+1}(x)+b_nP_n(x)+a_nP_{n-1}(x)$ e aplicando a relação de recorrência (4.3) obtemos

$$x(P_{n+1}(x)+b_nP_n(x)+a_nP_{n-1}(x)) = (P_{n+2}(x)+b_{n+1}P_{n+1}(x)+a_{n+1}P_n(x))+$$
$$\xi_{n+1}(P_{n+1}(x)+b_nP_n(x)+a_nP_{n-1}(x)) + \eta_{n+1}(P_n(x)+b_{n-1}P_{n-1}(x)+a_{n-1}P_{n-2}(x))$$

$$(P_{n+2}+\beta_{n+1}P_{n+1}+\gamma_{n+1}P_n)+b_{n-1}((P_{n+1}+\beta_nP_n+\gamma_nP_{n-1}))-$$
$$a_{n-1}((P_n+\beta_{n-1}P_{n-1}+\gamma_{n-1}P_{n-2})) = P_{n+2}+(b_n+\xi_{n+1})P_{n+1}+(a_n+\xi_{n+1}b_{n-1}+\eta_{n+1})P_n$$
$$(\xi_{n+1}a_{n-1}+\eta_{n+1}a_{n-2})P_{n-1}+\eta_{n+1}a_{n-2}P_{n-2}$$

e por comparação dos coeficientes dos P_k com $k = n-2, n-1, n, n+1$

(a) $\eta_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\gamma_{n-1}$, $n \geq 2$

(b) $b_{n-1}\gamma_n + a_{n-1}\beta_{n-1} = \xi_{n+1}a_{n-1} + \eta_{n+1}b_{n-2}$, $n \geq 0$

(c) $\gamma_{n+1} + b_{n-1}\beta_n + a_{n-1} = a_n + \xi_{n+1}b_{n-1} + \eta_{n+1}$, $n \geq 0$

(d) $\xi_{n+1} = \beta_{n+1} - (b_n - b_{n-1})$, $n \geq -1$

Determinemos as condições iniciais:

Como $< u, R_1 >= 0$ e $R_1(x) = x - \xi_0$, temos que

$$u_1 = \xi_0 u_0. \tag{4.21}$$

Se substituirmos R_1 por $P_1 + b_{-1}P_0$, ou por $P_1 + (\beta_0 - \xi_0)$, em $< v, R_1 >$ obtemos $b_{-1} = \xi_0 - \beta_0$; logo b_{-1} é dado.

Se tomarmos $n = 0$ em (**c**) então

$$\eta_1 = \gamma_1 + b_{-1}\beta_0 - a_0 - \xi_1 b_{-1}. \tag{4.22}$$

Assim, se conhecermos ξ_1 temos η_1 perfeitamente determinado; mas, de (**d**) tiramos que $\xi_1 = \beta_1 - (b_0 - b_{-1})$, i.e., ξ_1 depende de b_0, que é um dado— basta tomar n=0 em (4.14).

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
0 =< u, R_2 > &= < u, (x-\xi_1)(x-\xi_0) - \eta_1 > \\
&= < u, x^2 - (\xi_1+\xi_0)x + \xi_0\xi_1 - \eta_1 > \\
&= < u, (x-x_1)(x-x_2) + (x_1+x_2)x - x_1x_2 - (\xi_1+\xi_0)x + \xi_0\xi_1 - \eta_1 > \\
&= v_0 + (x_1+x_2-(\xi_1+\xi_0))u_1 + (\xi_0\xi_1 - \eta_1 - x_1x_2)u_0 \\
&= v_0 + [(x_1+x_2-\xi_0-\xi_1)\xi_0 + \xi_0\xi_1 - \eta_1 - x_1x_2]u_0 \\
&= v_0 + [(x_1+x_2)\xi_0 - (\xi_0^2+\eta_1) - x_1x_2]u_0;
\end{aligned}
$$

e, portanto, u_0 está perfeitamente determinado pelo conhecimento de ξ_0, x_1 e x_2. De (4.21) e (**ii**) temos univocamente determinados os momentos u_n. Desta forma construímos (R_n).

Conclusão

Cada u_0 e ξ_0 determinam univocamente duas sucessões (a_n) e (b_n) e, portanto, uma e uma só S.P.O.M., (R_n), sempre e quando $|d_{n+1}| \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. $\square$

4.1.3 Caso (iii)

Vamos estudar um caso limite do anterior; este problema foi já estudado por P.Maroni em [84].

Teorema 4.1.3 (Maroni,1991) *Sejam v uma funcional de momentos regular e $x_1 \in \mathbb{C}$; para que a funcional linear u definida por $v = (x-x_1)^2 u$ seja regular é necessário e suficiente que*

$$|d_{n+1}| \neq 0, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

onde d_n é a matriz

$$
\begin{bmatrix}
P_{n+1}(x_1; -\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0}) & P_n(x_1; -\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0}) \\
(\xi_0-x_1)P'_{n+1}(x_1; -\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0}) + P_{n+1}(x_1) & (\xi_0-x_1)P'_n(x_1; -\frac{1}{(\xi_0-x_1)u_0}) + P_n(x_1)
\end{bmatrix}.
$$

A S.P.O.M. associada a u vem dada por

$$R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + b_nP_{n+1}(x) + a_nP_n(x) \ , \ n \geq -1 \ , \tag{4.23}$$

onde

$$\begin{bmatrix} b_n \\ a_n \end{bmatrix} = -d_n^{-1} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1; -\frac{1}{(\xi_0 - x_1)u_0}) \\ (\xi_0 - x_1)P'_{n+2}(x_1; -\frac{1}{(\xi_0 - x_1)u_0}) - P_{n+2}(x_1) \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Os coeficientes da relação de recorrência dos R_n estão relacionados com os de (4.3) pelas seguintes fórmulas

$$\xi_{n+1} = \beta_{n+1} - (b_n - b_{n-1}) \ , \ n \geq -1 \tag{4.25}$$

e

$$\begin{cases} \eta_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\gamma_{n-1} \ , \ n \geq 2 \\ \eta_2 = \gamma_1 + b_{-1}(\beta_0 - \xi_1) + a_{-1} - a_0 \\ \eta_1 = \gamma_2 + b_0(\beta_1 - \xi_2) + a_0 - a_1. \end{cases} \tag{4.26}$$

Demonstração

Como (P_n) é uma base do espaço $\mathbb{P}$, temos que $R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}P_k(x)$, onde os $a_{n,k}$ vêm dados por

$$\begin{aligned} < v, P_k^2 > a_{n,k} &= < u, (x - x_1)^2 R_{n+2} P_k > \\ &= \begin{cases} 0, \text{ se } k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ < u, (x - x_1)^2 R_{n+2} P_n > \text{se } k = n \\ < u, (x - x_1)^2 R_{n+2} P_{n+1} > \text{se } k = n+1 \end{cases} ; \end{aligned}$$

e, portanto,

$$R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + b_n P_{n+1}(x) + a_n P_n(x), \tag{4.27}$$

onde $b_n = a_{n,n+1}$ e $a_n = a_{n,n}$; tem–se regularidade para u quando e só quando $a_n \neq 0$ (pelo teorema 1.1.14).

Determinemos b_n e a_n:

— Substituindo x por x_1 em (4.27) e subtraindo de (4.27) a equação encontrada vem

$$R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1) = (P_{n+2}(x) - P_{n+2}(x_1)) + b_n(P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x_1)) + a_n(P_n(x) - P_n(x_1));$$

que dividida por $x - x_1$ toma a forma

$$\frac{R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1)}{x - x_1} = \frac{P_{n+2}(x) - P_{n+2}(x_1)}{x - x_1} + b_n \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x_1)}{x - x_1} + a_n \frac{P_n(x) - P_n(x_1)}{x - x_1}. \tag{4.28}$$

Aplicando a funcional regular v a ambos os membros de (4.28) obtemos sucessivamente

$$< v, \frac{R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1)}{x - x_1} > = < v, \frac{P_{n+2}(x) - P_{n+2}(x_1)}{x - x_1} > + b_n < v, \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x_1)}{x - x_1} > + a_n < v, \frac{P_n(x) - P_n(x_1)}{x - x_1} >$$

$$< u, (x - x_1)(R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1)) > = P_{n+1}^{(1)}(x_1) + b_n P_n^{(1)}(x_1) + a_n P_{n-1}^{(1)}(x_1), \ \ n \in \mathbb{N};$$

e, portanto, como $x - x_1 = \underbrace{(x - \xi_0)}_{=R_1(x)} + (\xi_0 - x_1)$, temos

$$-(\xi_0 - x_1) R_{n+2}(x_1) u_0 = P_{n+1}^{(1)}(x_1) + b_n P_n^{(1)}(x_1) + a_n P_{n-1}^{(1)}(x_1). \tag{4.29}$$

Por outro lado, derivemos a equação (4.27) e tomemos $x = x_1$, i.e.,

$$R'_{n+2}(x_1) = P'_{n+2}(x_1) + b_n P'_{n+1}(x_1) + a_n P'_n(x_1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1) - (x - x_1)R'_{n+2}(x_1) &= (P_{n+2}(x) - P_{n+2}(x_1) - (x - x_1)P'_{n+2}(x_1)) + \\ & b_n(P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x_1) - (x - x_1)P'_{n+1}(x_1)) + a_n(P_n(x) - P_n(x_1) - (x - x_1)P'_n(x_1)) \end{aligned}$$

e dividindo ambos os membros desta igualdade por $(x - x_1)^2$ e aplicando a funcional linear v obtemos

$$-R_{n+2}(x_1)u_0 + (x_1 - \xi_0)u_0 R'_{n+2}(x_1) = (P^{(1)}_{n+1})'(x_1) + b_n(P^{(1)}_n)'(x_1) + a_n(P^{(1)}_{n-1})'(x_1) \quad (4.30)$$

Substituindo em (4.29) e (4.30), $R_{n+2}(x_1)$ e $R'_{n+2}(x_1)$ por

$R_{n+2}(x_1) = P_{n+2}(x_1)+b_nP_{n+1}(x_1)+a_nP_n(x_1)$ e $R'_{n+2}(x_1) = P'_{n+2}(x_1)+b_nP'_{n+1}(x_1)+a_nP'_n(x_1)$

obtemos as seguintes expressões

$$\begin{cases} ((\xi_0 - x_1)u_0P_{n+1}(x_1) + P^{(1)}_n(x_1))b_n + ((\xi_0 - x_1)u_0P_n(x_1) + P^{(1)}_{n-1}(x_1))a_n = -(P^{(1)}_{n+1}(x_1) + \\ \qquad (\xi_0 - x_1)u_0P_{n+2}(x_1)) \\ \\ ((P^{(1)}_n)'(x_1) + ((\xi_0 - x_1)P'_{n+1}(x_1) + P_{n+1}(x_1))u_0)b_n + \\ \qquad ((P^{(1)}_{n-1})'(x_1) + ((\xi_0 - x_1)P'_n(x_1) + P_n(x_1))u_0)a_n = \\ \qquad -((P^{(1)}_{n+1})'(x_1) + ((x_1 - \xi_0)P'_{n+2}(x_1) - P_{n+2}(x_1))u_0) \end{cases}$$

consequentemente, temos (4.24).

Determinação dos coeficientes da relação de recorrência (4.4):

— Sustituindo R_{n+1} em (4.4) por $P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + a_nP_{n-1}(x)$ e aplicando a relação de recorrência (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} & x(P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + a_nP_{n-1}(x)) = (P_{n+2}(x) + b_{n+1}P_{n+1}(x) + a_{n+1}P_n(x)) + \\ & \xi_{n+1}(P_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + a_nP_{n-1}(x)) + \eta_{n+1}(P_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x) + a_{n-1}P_{n-2}(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (P_{n+2} + \beta_{n+1}P_{n+1} + \gamma_{n+1}P_n) + b_{n-1}((P_{n+1} + \beta_nP_n + \gamma_nP_{n-1})) - \\ & a_{n-1}((P_n + \beta_{n-1}P_{n-1} + \gamma_{n-1}P_{n-2})) = P_{n+2} + (b_n + \xi_{n+1})P_{n+1} + (a_n + \xi_{n+1}b_{n-1} + \eta_{n+1})P_n \\ & (\xi_{n+1}a_{n-1} + \eta_{n+1}a_{n-2})P_{n-1} + \eta_{n+1}a_{n-2}P_{n-2} \end{aligned}$$

e por comparação dos coeficientes dos P_k com $k = n-2, n-1, n, n+1$

(a) $\eta_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\gamma_{n-1}$, $n \geq 2$

(b) $b_{n-1}\gamma_n + a_{n-1}\beta_{n-1} = \xi_{n+1}a_{n-1} + \eta_{n+1}b_{n-2}$, $n \geq 0$

(c) $\gamma_{n+1} + b_{n-1}\beta_n + a_{n-1} = a_n + \xi_{n+1}b_{n-1} + \eta_{n+1}$, $n \geq 0$

(d) $\xi_{n+1} = \beta_{n+1} - (b_n - b_{n-1}),\ n \geq -1$

Determinemos as condições iniciais:

Como $< u, R_1 >= 0$ e $R_1(x) = x - \xi_0$, temos que

$$u_1 = \xi_0 u_0. \tag{4.31}$$

Se substituirmos R_1 por $P_1 + b_{-1}P_0$, ou por $P_1 + (\beta_0 - \xi_0)$, em $< v, R_1 >$ obtemos $b_{-1} = \xi_0 - \beta_0$; logo b_{-1} é dado.

Se tomarmos $n = 0$ em (**c**) então

$$\eta_1 = \gamma_1 + b_{-1}\beta_0 - a_0 - \xi_1 b_{-1}. \tag{4.32}$$

Assim, se conhecermos ξ_1 temos η_1 perfeitamente determinado; mas, de (**d**) tiramos que $\xi_1 = \beta_1 - (b_0 - b_{-1})$, i.e., ξ_1 depende de b_0, que é um dado— basta tomar n=0 em (4.24).

Por outro lado

$$\begin{aligned}
0 =< u, R_2 > &= < u, (x - \xi_1)(x - \xi_0) - \eta_1 > \\
&= < u, x^2 - (\xi_1 + \xi_0)x + \xi_0\xi_1 - \eta_1 > \\
&= < u, (x - x_1)^2 + 2x_1 x - x_1^2 - (\xi_1 + \xi_0)x + \xi_0\xi_1 - \eta_1 > \\
&= v_0 + (2x_1 - (\xi_1 + \xi_0))u_1 + (\xi_0\xi_1 - \eta_1 - x_1^2)u_0 \\
&= v_0 + ((2x_1 - \xi_1 - \xi_0)\xi_0 + \xi_0\xi_1 - \eta_1 - x_1^2)u_0 \\
&= v_0 + (2x_1\xi_0 - (\xi_0^2 + \eta_1) - x_1^2)u_0;
\end{aligned}$$

e, portanto, u_0 está perfeitamente determinado pelo conhecimento de ξ_0 e x_1. De (4.31) e (**iii**) temos univocamente determinados os momentos u_n. Desta forma construímos (R_n).

Conclusão

Cada u_0 e ξ_0 determinam univocamente duas sucessões (a_n) e (b_n) e, portanto, uma e uma só S.P.O.M., (R_n), sempre e quando $|d_n| \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. $\square$

4.2 Estabilidade das Funcionais Semi–Clássicas

Vamos analisar o terceiro problema, que é o de verificar como varia a classe de uma S.P.O.M. semi–clássica por uma modificação inversa polinomial sobre a funcional que lhe está associada. É evidente que estas modificações mantêm o carácter semi–clássico da funcional, pois se v é a funcional de momentos semi–clássica de classe s associada a (P_n), existem $\psi \in \mathbb{P}_{s+1}$ e $\phi \in \mathbb{P}_{s+2}$ tais que

$$D(\phi v) = \psi v \tag{4.33}$$

verificando a condição (2.16); então, $u: \;\; v = p(x)u$ verifica

$$D(p\phi u) = p\psi u; \tag{4.34}$$

logo u é semi-clássica de classe quando muito $s + \mathrm{gr}(p)$. Para estudarmos a classe da nova S.P.O.M., (R_n), associada a u, basta estudar a seguinte equação funcional obtida de (4.34)

$$D(\phi u) - \psi u = -p^{-1}p'\phi u + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} \lambda_{i,k}\delta_{x_i}^{(k-1)}, \tag{4.35}$$

onde $\sum_{i=1}^{r} m_i = \mathrm{gr}(p)$.

Estudemos somente os casos dados na secção anterior, i.e.,

(a) $p(x) = x - x_1$

(b) $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

(c) $p(x) = (x - x_1)^2$.

Em (a), temos dois casos a considerar:

1. se x_1 é raiz de ϕ, então u verifica a seguinte equação distribucional

   $$D(\phi u) - \psi u = <\psi u, 1> \delta_{x_1}; \tag{4.36}$$

   logo, u é uma funcional de momentos semi–clássica de classe s quando, e só quando, $<\psi u, 1> = 0$;

2. se x_1 não é raiz de ϕ, então u é uma funcional de momentos semi–clássica de classe $s + 1$.

Em (b), temos três casos a considerar:

1. se x_1 e x_2 são raízes de ϕ, então u verifica

   $$D(\phi u) - (\psi - p')u = -\frac{<(\phi + (x - 2x_1 - x_2)\psi)u, 1>}{x_2 - x_1}\delta_{x_1} + \frac{<(\phi + (x - x_1)\psi)u, 1>}{x_2 - x_1}\delta_{x_1}$$

   logo é uma funcional de momentos semi–clássica de classe

   (a) $s + 2$ se $<(\phi + (x - 2x_1 - x_2)\psi)u, 1> \neq 0$ e $<(\phi + (x - x_1)\psi)u, 1> \neq 0$

   (b) $s + 1$ se $<(\phi + (x - 2x_1 - x_2)\psi)u, 1> = 0$ ou $<(\phi + (x - x_1)\psi)u, 1> = 0$

   (c) s se $<(\phi + (x - 2x_1 - x_2)\psi)u, 1> = 0$ e $<(\phi + (x - x_1)\psi)u, 1> = 0$;

2. se x_1 é raiz de ϕ e x_2 não (ou x_2 é raiz de ϕ e x_1 não), então u é uma funcional de momentos semi–clássica de classe compreendida entre $s + 1$ e $s + 2$.

3. caso contrário u é uma funcional de momentos semi–clássica de classe $s+2$.

Em (c), temos três casos a considerar:

— x_1 é raiz dupla, ou raiz simples ou não é raiz de ϕ.

Estes casos correspondem aos tratados no tipo anterior.

4.3 Um Exemplo de Problema Inverso

Na primeira secção estudámos o seguinte problema:

— Dada v, funcional de momentos regular, e (P_n) a S.P.O.M. que lhe está associada, determinar sob que condições u definida por $v = (x - x_1)u$ é regular.

Vimos também que, nesse caso, a S.P.O.M. que lhe está associada verifica

$$R_n(x) = P_n(x) + \sigma_n P_{n-1}(x) \ , \ \ n \in \mathbb{N} \tag{4.37}$$

onde $(\sigma_n) \subset \mathbb{R}$.

Aqui vamos estudar um problema inverso deste, i.e.,

> dada a S.P.O.M. (P_n) associada a uma funcional v, e (R_n) uma S.P.M. que verifica (4.37)
>
> 1. Determinar sob que condições (R_n) é uma S.P.O.M. e determiná–la
> 2. Relacionar, nesse caso, as funcionais que lhes estão associadas
> 3. Determinar (R_n) no caso em que (P_n) é uma S.P.O.M. clássica.

Comecemos por dar a seguinte definição

Definição 4.3.1 Dizemos que (R_n) é *compatível* com a S.P.O.M. (P_n) se estiverem relacionados por uma fórmula do tipo (4.37). Neste caso a (R_n, P_n) chamaremos *par compatível.*

Como exemplo de S.P.O.M. compatíveis temos as já mencionadas na secção IV.1.1.

Assim, o nosso problema pode reescrever-se na seguinte forma:

1. Determinar dentre todas as S.P.M. compatíveis com uma dada S.P.O.M. aquelas que são S.P.O.M. e defini–las

2. Relacionar, neste caso, as funcionais que lhes estão associadas

3. Determinar as S.P.O.M. compatíveis com as clássicas.

Comecemos por resolver as duas primeiras questões:

— Sejam (α_n) e (α'_n), as pseudo–bases associadas a (P_n) e (R_n), respectivamente. Tentemos expressar α_n em termos dos α'_n, i.e.,

$$\alpha_n = \sum_{k\geq 0} \lambda_{n,k}\alpha'_k,$$

onde

$$\begin{aligned}\lambda_{n,k} &= <\alpha_n, R_k> = <\alpha_n, P_k - \sigma_k P_{k-1}> = \\ &= \begin{cases} 1 \ , \ k=n \\ \\ -\sigma_{n+1} \ , \ k=n+1 \\ \\ 0 \ , \ \text{caso contrário} \end{cases}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\alpha_n = \alpha'_n - \sigma_{n+1}\alpha'_{n+1} \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.38}$$

Pela alínea (c) do teorema 1.3.2, (R_n) é uma S.P.O.M. associada a u quando, e só quando, $\alpha'_n = \frac{R_n}{<u,R_n^2>}u$ para todo o $n \in \mathbb{N}$; e portanto (4.38) pode ser reescrita na forma

$$\frac{P_n}{<v,P_n^2>}v = \left(\frac{R_n}{<u,R_n^2>} - \sigma_{n+1}\frac{R_{n+1}}{<u,R_{n+1}^2>}\right)u \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.39}$$

Procuremos relações entre os parâmetros das relações de recorrência

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \tag{4.40}$$

e

$$xR_n(x) = R_{n+1}(x) + \xi_n R_n(x) + \eta_n R_{n-1}(x). \tag{4.41}$$

(i) Multiplicando escalarmente (4.39) por xP_{n+1} obtemos sucessivamente

$$<v, \tfrac{P_n}{<v,P_n^2>}xP_{n+1}> = <u, (\tfrac{R_n}{<u,R_n^2>} - \sigma_{n+1}\tfrac{R_{n+1}}{<u,R_{n+1}^2>})xP_{n+1}>$$

$$\gamma_{n+1} = \tfrac{<u,xR_nP_{n+1}>}{<u,R_n^2>} - \sigma_{n+1}\tfrac{<u,xR_{n+1}P_{n+1}>}{<u,R_{n+1}^2>}$$

Mas de (4.37) tiramos que

$$P_n = R_n + \sigma_n R_{n-1} + \sigma_n\sigma_{n-1}R_{n-2} + \ldots + \prod_{i=1}^{n}\sigma_i R_0; \tag{4.42}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1} &= \tfrac{<u,xR_n(R_{n+1}+\sigma_{n+1}R_n+\sigma_n\sigma_{n-1}R_{n-2}+\ldots)>}{<u,R_n^2>} - \\
&\qquad\qquad \sigma_{n+1}\tfrac{<u,xR_{n+1}(R_{n+1}+\sigma_{n+1}R_n+\ldots)>}{<u,R_{n+1}^2>} \\
&= \eta_{n+1} + \sigma_{n+1}\xi_n + \sigma_{n+1}\sigma_n - \sigma_{n+1}\xi_{n+1} - \sigma_{n+1}^2,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\eta_{n+1} = \gamma_{n+1} + \sigma_{n+1}((\xi_{n+1} - \xi_n) + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)) \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.43}$$

(ii) Multiplicando escalarmente (4.39) por xP_n obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \tfrac{<u,xR_n(R_n+\sigma_n R_{n-1}+\ldots)>}{<u,R_n^2>} - \sigma_{n+1}\tfrac{<u,xR_{n+1}R_n>}{<u,R_{n+1}^2>} \\
&= \xi_n - (\sigma_{n+1} - \sigma_n)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi_n = \beta_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.44}$$

Substituindo (4.44) em (4.43) encontramos uma representação para η_n em termos de (σ_n) e (β_n). De facto,

$$\eta_{n+1} = \gamma_{n+1} + \sigma_{n+1}((\beta_{n+1} - \beta_n) + (\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1})) \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.45}$$

(iii) Multiplicando escalarmente (4.39) por xP_{n+2} obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
0 &= < u, \tfrac{xR_n}{<u,R_n^2>}(R_{n+2} + \sigma_{n+2}R_{n+1} + \sigma_{n+2}\sigma_{n+1}R_n + \sigma_{n+2}\sigma_{n+1}\sigma_n R_{n-1}) > - \\
&\qquad\qquad \sigma_{n+1}\tfrac{<u,xR_{n+1}(R_{n+2}+\sigma_{n+2}R_{n+1}+\sigma_{n+2}\sigma_{n+1}R_n)>}{<u,R_{n+1}^2>} \\
&= 0 + \sigma_{n+2}\eta_{n+1} + \sigma_{n+2}\sigma_{n+1}\xi_n + \sigma_{n+2}\sigma_{n+1}\sigma_n - \\
&\qquad\qquad \sigma_{n+1}\eta_{n+2} - \sigma_{n+2}\sigma_{n+1}\xi_{n+1} - \sigma_{n+2}\sigma_{n+1}^2 \\
&= \sigma_{n+2}[\sigma_{n+1}(\xi_{n+1} - \xi_n) + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)] + (\sigma_{n+2}\eta_{n+1} - \sigma_{n+1}\eta_{n+2}),
\end{aligned}$$

e, aplicando (4.43), a anterior expressão toma a forma

$$\sigma_{n+2}(\eta_{n+1} - \gamma_{n+1}) + (\sigma_{n+2}\eta_{n+1} - \sigma_{n+1}\eta_{n+2}) = 0,$$

ou seja,

$$\eta_{n+2} = -\frac{\sigma_{n+2}}{\sigma_{n+1}}\gamma_{n+1} \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.46}$$

Os parâmetros da relação de recorrência (4.41) estão determinados pela sucessão (σ_n). Verifiquemos que esta sucessão depende somente dos dados:

— Substituindo (4.44) em (4.43) e tendo em conta (4.46) obtemos

$$(\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1}) + (\beta_{n+1} - \beta_n) + (\frac{\gamma_{n+1}}{\sigma_{n+1}} - \frac{\gamma_n}{\sigma_n}) = 0$$

donde

$$\sigma_{n+2} + \beta_{n+1} + \frac{\gamma_{n+1}}{\sigma_{n+1}} = \sigma_2 + \beta_1 + \frac{\gamma_1}{\sigma_1}\ ,\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.47}$$

Com o objectivo de obtermos uma representação para σ_n vamos resolver o segundo problema, i.e., relacionemos as duas funcionais de momentos, v associada a (P_n) e u associada a (R_n)[2]:

Tomando $n = 0$ em (4.39) obtemos sucessivamente

$$\frac{v}{< v, 1 >} = (\frac{1}{< u, 1 >} - \sigma_1 \frac{R_1}{< u, R_1^2 >})u$$

$$\frac{< u, 1 >}{< v, 1 >} v = (1 - \frac{\sigma_1}{\eta_1} R_1)u$$

$$\eta_1 \frac{< u, 1 >}{< v, 1 >} v = [\eta_1 - \sigma_1 x - \sigma_1 \xi_0]u$$

$$-\frac{\eta_1}{\sigma_1} \frac{< u, 1 >}{< v, 1 >} v = (x - (\xi_0 + \frac{\eta_1}{\sigma_1}))u.$$

Mas, $\eta_1 = \gamma_1 + \sigma_1((\beta_1 - \beta_0) + (\sigma_2 - \sigma_1))$; consequentemente, a última expressão toma a forma

$$-(\frac{\gamma_1}{\sigma_1} + (\beta_1 - \beta_0) + (\sigma_2 - \sigma_1)) \frac{< u, 1 >}{< v, 1 >} v = (x - (\frac{\gamma_1}{\sigma_1} + \beta_1 + \sigma_2))u,$$

ou seja,

$$-c \frac{v}{< v, 1 >} = (x - \xi) \frac{u}{< u, 1 >}, \tag{4.48}$$

onde $c = (\sigma_2 - \sigma_1) + (\beta_1 - \beta_0) + \frac{\gamma_1}{\sigma_1}$ e $\xi = \sigma_2 + \beta_1 + \frac{\gamma_1}{\sigma_1}$.

Do teorema 4.1.1 obtemos a seguinte representação para σ_n

$$\sigma_n = \frac{P_{n+1}(\xi; \frac{1}{c})}{P_n(\xi; \frac{1}{c})}\ ,\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.49}$$

Em conclusão:

[2]Este estudo poderia ser feito baseado na técnica apresentada por A.Iserles, P.E.Koch, S.P.Nørset e J.M.Sanz–Serna em [59]; mas aqui vamos ver que podemos utilizar os resultados obtidos neste capítulo.

Teorema 4.3.1 *Seja (R_n, P_n) um par compatível; (R_n) é uma S.P.O.M. quando, e só quando,*

$$\sigma_n \equiv 0 \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

ou

$$\sigma_n \neq 0 \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

está definido por (4.49), onde $\xi = \sigma_2 + \beta_1 + \frac{\gamma_1}{\sigma_1}$ e $c = (\sigma_2 - \sigma_1) + (\beta_1 - \beta_0) + \frac{\gamma_1}{\sigma_1}$.
Neste caso os coeficientes da relação de recorrência satisfeita pelos (R_n) vêm dados por

$$\begin{cases} \xi_n = \beta_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \\ \\ \eta_{n+1} = \gamma_{n+1} + \sigma_{n+1}((\beta_{n+1} - \beta_n) + (\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1})) \end{cases} , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observação

Necessitamos conhecer σ_1 e σ_2 para definirmos a nova S.P.O.M., pois neste caso as funcionais de momentos que lhes estão associadas verificam (4.48) (ver teorema 4.1.1).

Damos, de seguida, uma demonstração alternativa deste resultado:

— Multipliquemos (4.37) por x e apliquemos a relação de recorrência (4.40)

$$\begin{aligned} xR_n &= (P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}) - \sigma_n(P_n + \beta_{n-1}P_{n-1} + \gamma_{n-1}P_{n-2}) \\ &= P_{n+1} + (\beta_n - \sigma_n)P_n + (\gamma_n - \sigma_n\beta_{n-1})P_{n-1} + (-\sigma_n\gamma_{n-1})P_{n-2}. \end{aligned}$$

Apliquemos agora (4.42) a esta última equação

$$\begin{aligned} xR_n = \ & (R_{n+1} + \sigma_{n+1}R_n + \sigma_{n+1}\sigma_n R_{n-1} + \ldots + \textstyle\prod_{i=1}^{n+1} \sigma_i R_0) + \\ & (\beta_n - \sigma_n)(R_n + \sigma_n R_{n-1} + \sigma_n\sigma_{n-1}R_{n-2} + \ldots + \textstyle\prod_{i=1}^{n} \sigma_i R_0) + \\ & (\gamma_n - \sigma_n\beta_{n-1})(R_{n-1} + \sigma_{n-1}R_{n-2} + \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}R_{n-3} + \ldots + \textstyle\prod_{i=1}^{n-1} \sigma_i R_0)) + \\ & (-\sigma_n\gamma_{n-1})(R_{n-2} + \sigma_{n-2}R_{n-3} + \ldots + \textstyle\prod_{i=1}^{n-2} \sigma_i R_0)). \end{aligned}$$

Uma condição necessária e suficiente para que (R_n) satisfaça uma relação de recorrência a três termos é que

(i) $\xi_n = \beta_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\eta_{n+1} = \gamma_{n+1} + \sigma_{n+1}((\beta_{n+1} - \beta_n) + (\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1}))$, $n \in \mathbb{N}$

(iii) $0 = \sigma_{n-1}\{\gamma_n + \sigma_n((\beta_n - \beta_{n-1}) + (\sigma_{n+1} - \sigma_n))\} - \ \sigma_n\gamma_{n-1}$, $n \geq 2$

$\vdots$

(iv) $\prod_{i=1}^{n} \sigma_i\{\sigma_{n+1} + (\beta_n - \sigma_n) + (\frac{\gamma_n}{\sigma_n} - \beta_{n-1}) - \frac{\gamma_{n-1}}{\sigma_{n-1}}\} = 0$ para todo o $n \geq 1$, que coincidem com as condições encontradas anteriormente.

Tendo em atenção o teorema 4.3.1 e a equação (4.48) podemos formar todas as S.P.O.M. compatíveis com as S.P.O.M. clássicas:

— De facto, basta definirmos as sucessões (σ_n) não nulas verificando (4.49); e, portanto, necessitamos somente conhecer $P_n^{(1)}(\xi)$. Mas de [30, pg.86] sabemos que

$$P_n^{(1)}(\xi) = P_{n+1}(\xi)\left(\frac{1}{P_1(\xi)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{k}\gamma_i}{P_{k+1}(\xi)P_k(\xi)}\right) , \quad n \in \mathbb{N};$$

e os polinómios (P_n) clássicos estão perfeitamente determinados pelas fórmulas deduzidas na secção 3.1 do capítulo II.

4.4 Segundo Exemplo

Seguindo o mesmo raciocínio da secção anterior, estudemos o seguinte problema

> estudar as S.P.M., (R_n), *compatíveis de ordem dois* com (P_n), onde (P_n) é uma S.P.O.M., i.e., estudar as S.P.M. que verificam a seguinte equação
>
> $$R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + \sigma_{n+1}P_{n+1}(x) + \tau_n P_n(x) , \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.50}$$
>
> onde (σ_n), $(\tau_n) \subset \mathbb{R}$.

Como exemplo de S.P.O.M. compatíveis de ordem dois temos as já mencionadas na secção IV.1.2. e IV.1.3.

Assim, o nosso problema pode reescrever-se na seguinte forma:

1. Determinar dentre todas as S.P.M. compatíveis de ordem dois com uma dada S.P.O.M. aquelas que são S.P.O.M.; e determiná–las
2. Relacionar, neste caso, as funcionais que lhes estão associadas.

Comecemos por resolver a primeira questão:

— Sejam (α_n) e (α'_n) as pseudo–bases associadas a (P_n) e (R_n), respectivamente. Tentemos expresar α_n em termos dos α'_n, i.e.,

$$\alpha_n = \sum_{k\geq 0} \lambda_{n,k}\alpha'_k,$$

onde

$$\begin{aligned}\lambda_{n,k} &= <\alpha_n, R_k> = <\alpha_n, P_k + \sigma_{k-1}P_{k-1} + \tau_{k-2}P_{k-2}> = \\ &= \begin{cases} 1 \ , \ k = n \\ \sigma_n \ , \ k = n+1 \\ \tau_n \ , \ k = n+2 \\ 0 \ , \ \text{caso contrário} \end{cases}\end{aligned}$$

e portanto

$$\alpha_n = \alpha'_n + \sigma_n \alpha'_{n+1} + \tau_n \alpha'_{n+2} \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.51}$$

Pela alínea (c) do teorema 1.3.2, (R_n) é uma S.P.O.M. associada a u quando, e só quando, $\alpha'_n = \frac{R_n}{<u,R_n^2>}u$ para todo o $n \in \mathbb{N}$; e portanto (4.51) pode ser reescrita na forma

$$\frac{P_n}{< v, P_n^2 >} v = \left(\frac{R_n}{< u, R_n^2 >} + \sigma_n \frac{R_{n+1}}{< u, R_{n+1}^2 >} + \tau_n \frac{R_{n+2}}{< u, R_{n+2}^2 >}\right) u \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.52}$$

Antes de determinarmos relações entre os coeficientes das relações de recorrência das S.P.O.M. (P_n) e (R_n)

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \tag{4.53}$$

e

$$xR_n(x) = R_{n+1}(x) + \xi_n R_n(x) + \eta_n R_{n-1}(x). \tag{4.54}$$

vamos dar uma relação que elas verificam[3]

$$\begin{aligned} P_{n+2}(x) = R_{n+2}(x) - \sigma_{n+1}R_{n+1}(x) - (\tau_n - \sigma_n\sigma_{n+1})R_n(x) + \\ (\sigma_{n+1}\tau_{n-1} + \sigma_{n-1}(\tau_n - \sigma_n\sigma_{n+1}))R_{n-1}(x) + q_{n-2}(x) \ , \ \ n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

onde $q_{n-2} \in \mathbb{P}_{n-2}$.

(i) Multiplicando escalarmente (4.52) por xP_n obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}\beta_n &= \tfrac{<u, xR_n(R_n - \sigma_{n-1}R_{n-1} + \ldots)>}{<u,R_n^2>} + \sigma_n \tfrac{<u, xR_{n+1}R_n>}{<u,R_{n+1}^2>} \\ &= \xi_n - \sigma_{n-1} + \sigma_n\end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi_n = \beta_n - (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.56}$$

[3]Obtem–se directamente de (4.50).

(ii) Multiplicando escalarmente (4.52) por xP_{n+1} obtemos sucessivamente

$$\gamma_{n+1} = \frac{<u,xR_nP_{n+1}>}{<u,R_n^2>} + \sigma_n \frac{<u,xR_{n+1}P_{n+1}>}{<u,R_{n+1}^2>} + \tau_n$$

Mas, de (4.55) tiramos que

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1} &= \frac{<u,xR_n(R_{n+1}-\sigma_nR_n-(\tau_{n-1}-\sigma_n\sigma_{n-1})R_{n-1}+\ldots)}{<u,R_n^2>} - \\ &\qquad \sigma_n \frac{<u,xR_{n+1}(R_{n+1}-\sigma_nR_n+\ldots)>}{<u,R_{n+1}^2>} + \tau_n \\ &= \eta_{n+1} - \sigma_n\xi_n - (\tau_{n-1} - \sigma_{n-1}\sigma_n) + \tau_n + \sigma_n(\eta_{n+1} - \sigma_n),\end{aligned}$$

i.e.,

$$\eta_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1} + \sigma_n\beta_n - \tau_n + \tau_{n-1}}{1+\sigma_n}\ , n \in \mathbb{N}. \tag{4.57}$$

(iii) Multiplicando escalarmente (4.52) por xP_{n+2} obtemos

$$\begin{aligned}0 = &-\sigma_{n+1}\eta_{n+1} - (\tau_n - \sigma_n\sigma_{n+1})\xi_n + \sigma_{n+1}\tau_{n-1} + \\ &\sigma_{n-1}(\tau_n - \sigma_n\sigma_{n+1}) + \sigma_n(\eta_{n+2} - \sigma_{n+1}\xi_{n+1} - (\tau_n - \sigma_n\sigma_{n+1})) + \tau_n(\xi_{n+2} - \sigma_{n+1}), n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Aplicando (4.57) e (4.56) à anterior encontramos uma equação que nos dá σ_n e τ_n em função dos dados.

Com o objectivo de obtermos uma representação para os σ_n e τ_n, vamos resolver o segundo problema, i.e., relacionemos as duas funcionais de momentos, v associada a (P_n) e u associada (R_n):

Tomando $n = 0$ em (4.52) obtemos

$$\frac{v}{< v, 1 >} = (1 + \frac{\sigma_0}{\eta_1} R_1 + \frac{\tau_0}{\eta_2\eta_1} R_1)\frac{u}{< u, 1 >}, \tag{4.58}$$

que é uma modificação do tipo já estudado (ver teorema 4.1.2 e 4.1.3).

Chapter 5

Problemas Inversos Diferenciais

Os problemas que aqui vamos estudar foram motivados pelos trabalhos de J.Shohat (ver [96]), S.Bonan, D.Lubinsky e P.Nevai (ver [18] e [19]) e P.Maroni (ver [81] e [84]).

De facto, foi Shohat quem propôs este tipo de problemas, ao afirmar em [96, l.16,pg.405] que se conhecermos os $\lambda_{n,k}$ da fórmula de estrutura de segundo grau, (5.54), podemos determinar os coeficientes da relação de recorrência da S.P.O.M. (P_n), i.e., caracterizar (P_n). O objectivo desse trabalho, era o de dar um método construtivo de geração de equações diferenciais de segunda ordem que as S.P.O.M. (P_n) associadas a uma função peso p, tal que

$$(Ap)' + Bp = 0$$

para algum $A,B \in \mathbb{P}$, verificam. No decorrer desse trabalho provou que essas S.P.O.M. verificavam

- uma fórmula de estrutura de primeira ordem (ver (2.3))
- uma fórmula de estrutura de segunda ordem (ver (2.39)).

Em 1979 P.Nevai (ver [87]) conseguiu determinar, a partir do conhecimento dos coeficientes da relação de recorrência que a S.P.O.M. (P_n) verifica, a função peso a respeito da qual estes são ortogonais; abrindo assim caminho para o estudo dos

<u>Problema Inversos Diferenciais</u>

> a partir das fórmulas de estrutura de primeira e segunda ordem determinar a funcional de momentos (função peso, no caso definido positivo) que lhe está associada, bem como os coeficientes da relação de recorrência.

Começou por provar que, (P_n) é uma S.P.O.M. verificando uma relação de estrutura do tipo (5.38) quando, e só quando, a função peso a respeito da qual ela é ortogonal é dada por

$$p(x) = D\exp(-\frac{c}{4}(x-b)^4 - \frac{k}{2}(x-b)^2)\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

onde a,b,c,D e K são constantes reais.

Mais tarde (ver [19]) Bonan Lubinsky e Nevai caracterizaram completamente as S.P.O.M. (P_n) e (R_n) relacionadas por

$$Q(x)R_n^{(j)}(x) = \sum_{k=n-j-s}^{n-j+p} c_{n,k}P_k(x) \tag{5.1}$$

onde Q é uma fracção racional e os $c_{n,k}$ são reais tais que $c_{n,k} = 0$ se $k < 0$.

Esta caracterização foi obtida à custa das transformadas de Fourier.

Pode ver–se que o polinómio que aparece no numerador de Q, que notaremos por ϕ, tem um papel fundamental. De facto, (5.1) é equivalente a (5.6).

Se, por exemplo, considerarmos a relação

$$\phi(x)R_{n+j}^{(j)}(x) = \sum_{k=n-j-s}^{n-j+p} a_{n,k}^{(j)}P_k(x)$$

satisfeita pelas S.P.O.M. (P_n) e (R_n), então derivando j vezes a relação de recorrência a três termos satisfeita pelos R_n tiramos que

$$j!\phi(x)R'_{n+1}(x) = \sum_{k=n-s}^{n+p} a_{n,k}^{(1)}P_k(x).$$

Praticamente na mesma altura P.Maroni caracterizou de uma forma sistemática as S.P.O.M. que verificam uma fórmula de estrutura de primeira ordem que são, como se sabe, as S.P.O.M. semi–clássicas.

É importante realçar que em [19] se pretendia generalizar a classe das S.P.O.M. semi–clássicos— o que na verdade não foi conseguido.

Em 1991 P.Maroni (ver [84]) tentou, em vão, caracterizar as S.P.O.M. semi–clássicos à custa de uma fórmula de estrutura de segunda ordem.

Uma primeira resposta, ainda que parcial, a esta pergunta foi dada em 1992 por M.Alfaro, A.Branquinho, F.Marcellán e J.Petronilho em [2].

Organização do Capítulo

Neste capítulo vamos começar por generalizar os resultados de [19], para o caso em que (P_n) é uma S.P.O.M. associada a uma funcional de momentos regular, não necessariamente definida positiva. Determinaremos relações que nos permitirão calcular os coeficientes das relações de recorrência satisfeitas por (P_n) e (R_n). Ainda na secção 1 estudaremos alguns casos particulares deste problema.

Seguidamente— na secção 2— daremos uma nova caracterização para as S.P.O.M. semi–clássicas (ver teorema 5.2.1).

Como existem S.P.O.M. relacionadas por fórmulas de estrutura de segunda ordem do tipo (5.67) (ver (2.76)) tentamos caracterizar as funcionais de momentos que lhes estão associadas, como pode ser visto na secção 3.

Nas secções anteriores verificámos que as funcionais lineares são modificações racionais uma da outra, reduzindo–se estes problemas aos já estudados nos capítulos anteriores. Assim, daremos na secção 4 uma aplicação dos resultados deduzidos neste capítulo, aproveitando alguns exemplos dados anteriormente— resolvendo assim um problema proposto por L.L.Littlejohn em [72]. O problema que pretendemos resolver vem no seguimento de um trabalho que Littlejohn vem realizando, tentando relacionar dois problemas de grande importância nesta teoria

1. Classificar todas as equações diferenciais do tipo (2.37) tendo como soluções S.P.O.M.
2. Classificar todas as equações diferenciais do tipo

$$\sum_{i=0}^{n} b_i(x)y^{(i)} = \lambda_n y(x) \ , \tag{5.2}$$

onde $b_i \in \mathbb{P}$, tendo como soluções S.P.O.M..

Recentemente, L.L.Littlejohn, K.H.Kwon, J.K.Lee e B.H.Yoo (ver [69]) provaram que

(P_n) é uma S.P.O.M. verificando (5.2) com $n = 2r$[1] quando, e só quando, existirem $r+1$ funcionais de momentos, $(\tau_i)_{i=0}^{r}$, tais que τ_r não é a funcional nula e

$$\sum_{i=0}^{r} < \tau_i, P_m^{(i)} P_m^{(i)} >= M_n \delta_{m,n} \ , \ \ n \in \mathbb{N} \ , \tag{5.3}$$

onde M_n são constantes. Além disso, podemos exigir $M_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, se necessário.

Assim este problema encontra–se relacionado com outro que já aqui falámos:

— Dadas k funcionais de momentos, (u_j), que condições temos de impor para que $\sum_{j=1}^{k} u_j$ seja regular.

Note–se que (5.3) se pode reescrever na forma $< w, P_m P_n >= M_n \delta_{m,n}$; e à custa de w podemos definir uma forma bilinear simétrica, B, de forma que seja auto–adjunta relativamente a t^{r+2}, i.e.,

$$B(t^{r+2} f, g) = B(f, t^{r+2} g) \ , \ \ f, g \in \mathbb{P}$$

a respeito da qual (P_n) é uma S.P.O.M. (ver [41]).

[1] H.L.Krall provou que se (5.2) possui como soluções uma S.P.O.M., então esta terá que ser de ordem par (ver [66]).

Poderíamos ainda analisar o seguinte problema[2]:

— Sejam (P_n) e (R_n) duas S.P.O.M. associadas a v e u, respectivamente e relacionadas por

$$R_n(x) = \sum_{k=n-t}^{n} a_{n,k} \frac{P'_{k+1}(x)}{k+1} \tag{5.4}$$

com $a_{n,n-t} \neq 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Determinar que relações existem entre as funcionais v e u[3].

Facilmente se verifica que (P_n) é uma S.P.O.M. semi–clássica, de classe quando muito t; então, pelo teorema 5.2.1, sabemos existirem polinómios ϕ e ψ tais que

$$\phi(x)P''_{n+1}(x) + \psi(x)P'_{n+1}(x) = \sum_{k=n-t+1}^{n+t+1} \lambda_{n,k} P_k(x) \ .$$

Derivando (5.4) e aplicando esta relação, obtemos

$$\phi(x)R'_n(x) + \psi(x)R_n(x) = \sum_{k=n-2t}^{n+s} c_{n,k} P_k(x) \ , \tag{5.5}$$

que é uma relação do tipo já estudada.

[2]Generalização do proposto por A.Iserles, P.E.Koch, S.P.Nørset e J.M.Sanz–Serna em [59].

[3]Pois, se $R_n = P_n$, vê–se facilmente que (P_n) é uma S.P.O.M. semi–clássica.

5.1 Tipo Szegö e Karlin

Vamos começar por definir o conceito fundamental deste capítulo:

Definição 5.1.1 Sejam (P_n) e (R_n) duas S.P.O.M. associadas a u e v, respectivamente, e $\phi \in \mathbb{P}_p$; então, dizemos que (P_n, R_n) é um par (s,p)*–compatível* se

$$\begin{cases} \phi(x)R'_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=n-s}^{n+p} \lambda_{nk}P_k(x) \ , \ n \geq s \\ \\ \phi(x)R'_{n+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+p} \lambda_{nk}P_k(x) \ , \ 0 \leq n \leq s. \end{cases} \tag{5.6}$$

Caracterizemo–las.

Teorema 5.1.1 *Se (P_n, R_n) é um par (s,p)–compatível, então as funcionais de momentos que lhes estão associadas verificam*

$$\phi(x)u = h(x)v \tag{5.7}$$

onde $h(x)$ é um polinómio dado por

$$h(x) =< u_y, \phi(y)[K^{(0,1)}_{s+2}(x,y) - P_1(x)K^{(0,1)}_{s+1}(x,y)] >$$

e

$$K^{(r,s)}_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{R^{(r)}_j(x)R^{(s)}_j(y)}{< v, R^2_j >}.$$

Além disso, v é uma funcional de momentos semi–clássica.

Demonstração

Sejam (α_n) e (α'_n) as pseudo–bases associadas a (P_n) e (R_n), respectivamente. Tome–se

$$D(\phi\alpha_n) = \sum_{j\geq 0} a_{nj}\alpha'_j \tag{5.8}$$

onde

$$\begin{aligned} a_{nj} &= < D(\phi\alpha_n), R_j > \\ &= - < \alpha_n, \phi R'_j > \\ &= - \textstyle\sum_{k=j-s-1}^{j+p-1} \lambda_{j-1,k} < \alpha_n, P_k > . \end{aligned}$$

De (5.6)

$$a_{nj} = \begin{cases} 0 \ , \ j-s-1 > n \text{ ou } j+p-1 < n \\ \\ -\lambda_{j-1,n} \ , \ n-p+1 \leq j \leq n+s+1 \end{cases}$$

e portanto (5.8) pode reescrever–se na forma

$$D(\phi\alpha_n) = -\sum_{j=n-p+1}^{n+s+1} \lambda_{j-1,n}\alpha'_j \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$

Como $\alpha_n = \frac{P_n}{<u,P_n^2>}u$ e $\alpha'_j = \frac{R_j}{<v,R_j^2>}v$, obtemos

$$D(\phi\frac{P_n}{< u, P_n^2 >}u) = \psi_{n,n+s+1}v \tag{5.10}$$

onde $\psi_{n,n+s+1}$ é um polinómio de grau $n+s+1$ dado por

$$\psi_{n,n+s+1} = -\sum_{j=n-p+1}^{n+s+1} \lambda_{j-1,n}\frac{R_j}{< v, R_j^2 >}.$$

Tomando $n = 0$ e $n = 1$ em (5.10) obtemos

$$D(\phi u) =< u, 1 > \psi_{0,s+1}v \tag{5.11}$$

e

$$D(\phi\frac{P_1}{< u, P_1^2 >}u) = \psi_{1,s+2}v. \tag{5.12}$$

Mas (5.12) pode ser reescrita na forma

$$P_1 D(\phi u) + \phi u =< u, P_1^2 > \psi_{1,s+2}v$$

e aplicando (5.11) concluímos que

$$\phi u =< u, P_1^2 > \psi_{1,s+2}v- < u, 1 > P_1\psi_{0,s+1}v,$$

i.e.,

$$\phi u = \Psi_{s+2}v, \tag{5.13}$$

onde $\Psi_{s+2} \in \mathbb{P}_{s+2}$ é dado por

$$< u, P_1^2 > \psi_{1,s+2}- < u, 1 > P_1\psi_{0,s+1}. \tag{5.14}$$

Derivando (5.13) e aplicando (5.11), obtemos uma equação diferencial distribucional para v

$$D(\Psi_{s+2}v) =< u, 1 > \psi_{0,s+1}v; \tag{5.15}$$

logo v é uma funcional de momentos semi–clássica, de classe quando muito s. Mais ainda, como u é uma modificação racional de v, u é também semi–clássica (ver [84]).

Se, em particular, tomarmos $s = 0$ em (5.15) concluímos que v é uma funcional de momentos clássica; e, portanto, u é uma modificação racional de uma funcional clássica.

Se tomarmos $u = v$, de (5.11) tiramos que $D(\phi u) =< u, 1 > \psi_{0,s+1}u$; e, portanto, u é uma funcional semi–clássica, de classe quando muito max$\{p-2,s\}$.

Determinemos uma expressão explícita para Ψ_{s+2}.

De (5.14)

$$\begin{aligned}\Psi_{s+2} &= < u, P_1^2 > \psi_{1,s+2} - < u, 1 > P_1 \psi_{0,s+1} \\ &= -\sum_{j=0}^{s+2} \lambda_{j-1,1} \frac{<u,P_1^2>}{<v,R_j^2>} R_j + \sum_{j=0}^{s+1} \lambda_{j-1,0} \frac{<u,1>}{<v,R_j^2>} P_1 R_j ;\end{aligned}$$

e de (5.6) tiramos que

$$\begin{cases} \lambda_{j-1,0} = \frac{<u,\phi R_j'>}{<u,1>} \\ \\ \lambda_{j-1,1} = \frac{<u,\phi R_j'>}{<u,P_1^2>}. \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\Psi_{s+2}(x) &= -\sum_{j=0}^{s+2} < u, \phi(y) \frac{R_j'(y)}{<v,R_j^2(y)>} > R_j(x) + P_1(x) \sum_{j=0}^{s+1} < u, \phi(y) \frac{R_j'(y)}{<v,R_j^2(y)>} > R_j(x) \\ &= - < u_y, \phi(y) \sum_{j=0}^{s+2} \frac{R_j'(y) R_j(x)}{<v,R_j^2(y)>} > + P_1(x) < u_y, \phi(y) \sum_{j=0}^{s+1} \frac{R_j'(y) R_j(x)}{<v,R_j^2(y)>} > \\ &= - < u_y, \phi(y) [K_{s+2}^{(0,1)}(x,y) + P_1(x) K_{s+1}^{(0,1)}(x,y)] > ,\end{aligned}$$

onde u_y significa que a funcional de momentos u actua sobre a variável y.

Assim, como $h = \Psi_{s+2}$ obtemos (5.7). $\square$

Vamos ver, de seguida, que a equação (5.9) contém toda a informação sobre as S.P.O.M. (P_n) e (R_n), i.e., a fórmula de estrutura é mais geral que as fórmula de recorrência a três termos que estão associadas a (P_n) e (R_n):

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \tag{5.16}$$

e

$$xR_n(x) = R_{n+1}(x) + \xi_n R_n(x) + \eta_n R_{n-1}(x). \tag{5.17}$$

De facto, vimos já que esta equação admite a seguinte representação

$$D(\phi P_n u) = -\{ \sum_{j=n-p+1}^{n+s+1} \lambda_{j-1,n} \frac{< u, P_n^2 >}{< v, R_j^2 >} R_j \} v \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.18}$$

(i) Multiplicando escalarmente (5.18) por xR_{n+s+2} obtemos

$$- < \phi u, \frac{P_n}{<u,P_n^2>} \{ R_{n+s+2} + xR_{n+s+2}' \} >= -\lambda_{n+s,n} \frac{<v,R_{n+s+2}^2>}{<v,R_{n+s+1}^2>}$$

$$< \phi u, \frac{P_n}{<u,P_n^2>} \{ R_{n+s+2} + xR_{n+s+2}' \} >= \lambda_{n+s,n} \eta_{n+s+2}.$$

Analisemos o primeiro membro desta última expressão

$$< \phi u, P_n R_{n+s+2} > + < \phi u, x P_n R'_{n+s+2} >=< \Psi_{s+2} v, P_n R_{n+s+2} > + < u, x P_n (\phi R'_{n+s+2}) >=$$

$$=< v, (-\lambda_{s+1,1} \tfrac{<u,P_1^2>}{<v,R_{s+2}^2>} + \lambda_{s,0} \tfrac{<u,1>}{<v,R_{s+1}^2>}) R_{n+s+2}^2 > + < u, x P_n (\textstyle\sum_{k=n+1}^{n+s+p+1} \lambda_{n+s+1,k} P_k) >=$$

$$= (-\lambda_{s+1,1} \tfrac{<u,P_1^2>}{<v,R_{s+2}^2>} + \lambda_{s,0} \tfrac{<u,1>}{<v,R_{s+1}^2>}) < v, R_{n+s+2}^2 > + \lambda_{n+s+1,n+1} < u, P_{n+1}^2 >$$

Dividindo ambos os membros desta última expressão por $< u, P_n^2 >$, e comparando com a expressão acima, vem

$$\lambda_{n+s,n} \eta_{n+s+2} = (-\lambda_{s+1,1} \tfrac{<u,P_1^2>}{<v,R_{s+2}^2>} + \lambda_{s,0} \tfrac{<u,1>}{<v,R_{s+1}^2>}) \tfrac{<v,R_{n+s+2}^2>}{<u,P_n^2>} + \lambda_{n+s+1,n+1} \gamma_{n+1}$$

$$\lambda_{n+s,n} \eta_{n+s+2} - \lambda_{n+s+1,n+1} \gamma_{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n+s+2} \eta_k}{\prod_{i=1}^{n} \gamma_i} \{ -\lambda_{s+1,1} \tfrac{<u,P_1^2>}{\prod_{k=1}^{s+2} \eta_k} + \lambda_{s,0} \tfrac{<u,1>}{\prod_{k=1}^{s+1} \eta_k} \}$$

e portanto

$$\lambda_{n+s,n} \eta_{n+s+2} - \lambda_{n+s+1,n+1} \gamma_{n+1} = \frac{\prod_{k=s+2}^{n+s+2} \eta_k}{\prod_{i=1}^{n} \gamma_i} \{ -\tfrac{\lambda_{s+1,1} <u,P_1^2>}{\eta_{s+2}} + \lambda_{s,0} < u, 1 > \} \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.19}$$

Obtivemos assim γ_{n+1} em função dos restantes elementos das relações de recorrência.

(ii) Multiplicando escalarmente (5.18) por $x R_{n+s+1}$ obtemos

$$< \phi u, \tfrac{P_n}{<u,P_n^2>} \{ R_{n+s+1} + x R'_{n+s+1} \} >= \lambda_{n+s-1,n} \tfrac{<v,R_{n+s+1}^2>}{<v,R_{n+s}^2>} + \lambda_{n+s,n} \tfrac{<v,x R_{n+s+1}^2>}{<v,R_{n+s+1}^2>}$$

$$< \Psi_{s+2} v, \tfrac{P_n}{<u,P_n^2>} R_{n+s+1} > + < u, \tfrac{x P_n}{<u,P_n^2>} (\phi R'_{n+s+1}) >= \lambda_{n+s-1,n} \eta_{n+s+1} + \lambda_{n+s,n} \xi_{n+s+1}$$

$$< \Psi_{s+2} v, \tfrac{P_n}{<u,P_n^2>} R_{n+s+1} >= - < u, \tfrac{x P_n}{<u,P_n^2>} (\textstyle\sum_{k=n}^{n+s+p} \lambda_{n+s,k} P_k) > + \lambda_{n+s-1,n} \eta_{n+s+1} + \lambda_{n+s,n} \xi_{n+s+1}.$$

Assim,

$$\tfrac{1}{<u,P_n^2>} < \Psi_{s+2} v, P_n R_{n+s+1} >= -\lambda_{n+s,n} \beta_n - \lambda_{n+s,n+1} \gamma_{n+1} + \lambda_{n+s-1,n} \eta_{n+s+1} + \lambda_{n+s,n} \xi_{n+s+1}. \tag{5.20}$$

Se calcularmos $< \Psi_{s+2} v, P_n R_{n+s+1} >$ da anterior expressão, temos perfeitamente determinada mais uma relação entre os coeficientes de (5.16) e (5.17):

$< \Psi_{s+2}v, P_n R_{n+s+1} >=< v, (P_n\Psi_{s+2})R_{n+s+1} >=$

$= -\lambda_{s+1,1}\frac{<u,P_1^2>}{<v,R_{s+2}^2>} < v, (P_nR_{s+2})R_{n+s+1} > -\lambda_{s,1}\frac{<u,P_1^2>}{<v,R_{s+1}^2>} < v, (P_nR_{s+1})R_{n+s+1} > +$
$\lambda_{s,0}\frac{<u,1>}{<v,R_{s+1}^2>} < v, P_1(P_nR_{s+1})R_{n+s+1} > +\lambda_{s-1,0}\frac{<u,1>}{<v,R_s^2>} < v, P_1(P_nR_s)R_{n+s+1} >=$

$= -\lambda_{s+1,1}\frac{<u,P_1^2>}{<v,R_{s+2}^2>} < v, [x^{n+s+2} - (\sum_{i=0}^{s+1}\xi_i + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i)x^{n+s+1} + \ldots]R_{n+s+1} > -$
$\lambda_{s,1}\frac{<u,P_1^2>}{<v,R_{s+1}^2>} < v, R_{n+s+1}^2 > +$
$\lambda_{s,0}\frac{<u,1>}{<v,R_{s+1}^2>} < v, P_1[x^{n+s+1} - (\sum_{i=0}^{s}\xi_i + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i)x^{n+s} + \ldots]R_{n+s+1} > +$
$\lambda_{s-1,0}\frac{<u,1>}{<v,R_s^2>} < v, R_{n+s+1}^2 >$

$= (-\lambda_{s+1,1}\frac{<u,P_1^2>}{\gamma_{s+2}} + \lambda_{s,0} < u, 1 >)\frac{<u,x^{n+s+2}R_{n+s+1}>}{<u,R_{s+1}^2>} + (\lambda_{s+1,1}A_{n,s}\frac{<u,P_1^2>}{\gamma_{s+2}\gamma_{s+1}} +$
$\lambda_{s,1}\frac{<u,P_1^2>}{\gamma_{s+1}} + \lambda_{s-1,0} < u, 1 > -\lambda_{s,0}(A_{n-1,s-1} + \beta_0)\frac{<u,1>}{\gamma_{s+1}})\frac{<u,R_{n+s+1}^2>}{<u,R_s^2>}$

onde $A_{n,s} = \sum_{i=0}^{s+1}\xi_i + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i$.

Como

$$\frac{< u, x^{n+s+2}R_{n+s+1} >}{< u, R_{s+1}^2 >} = \prod_{i=s+2}^{n+s+1}\eta_i \sum_{i=0}^{n+s+1}\xi_i,$$

obtemos, depois de alguns cálculos, que (5.20) toma a forma

$$\frac{\prod_{k=s+2}^{n+s+1}\eta_k}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_i}\{B_n\sum_{i=0}^{n+s+1}\xi_i + C_n\eta_{s+1}\} = -\lambda_{n+s,n}\beta_n - \lambda_{n+s,n+1}\gamma_{n+1} + \lambda_{n+s-1,n}\eta_{n+s+1} + \lambda_{n+s,n}\xi_{n+s+1}. \quad (5.21)$$

onde

$$\begin{cases} B_n = -\lambda_{s+1,1}\frac{<u,P_1^2>}{\gamma_{s+2}} + \lambda_{s,0} < u, 1 > \\ C_n = \lambda_{s+1,1}A_{n,s}\frac{<u,P_1^2>}{\gamma_{s+2}\gamma_{s+1}} + \lambda_{s,1}\frac{<u,P_1^2>}{\gamma_{s+1}} + \lambda_{s-1,0} < u, 1 > - \lambda_{s,0}(A_{n-1,s-1} + \beta_0)\frac{<u,1>}{\gamma_{s+1}}. \end{cases}$$

Obtivemos assim β_n em função dos restantes elementos das relações de recorrência.

(iii) Multiplicando escalarmente (5.18) por xR_{n-p+1} obtemos

$$\frac{<u,P_n\phi(xR'_{n-p+1}+R_{n-p+1})>}{<u,P_n^2>} = \lambda_{n-p,n}\frac{<v,xR_{n-p+1}^2>}{<v,R_{n-p+1}^2>} + \lambda_{n-p+1,n}\frac{<v,xR_{n-p+2}R_{n-p+1}>}{<v,R_{n-p+2}^2>}$$

$$\frac{<u,xP_n\sum_{k=n-p-s}^{n}\lambda_{n-p,k}P_k>}{<u,P_n^2>} + \frac{<u,P_n\phi(x^{n-p+1}-\sum_{i=0}^{n-p}\xi_i x^{n-p}+\ldots)>}{<u,P_n^2>} = \lambda_{n-p,n}\xi_{n-p+1} + \lambda_{n-p+1,n}$$

e, portanto,

$$(n-p+1)(\beta_n - \xi_{n-p+1})\phi_p = \phi_p(\sum_{i=0}^{n-p}\xi_i - \sum_{i=0}^{n}\beta_i) - \phi_{p-1} + \lambda_{n-p+1,n} - \lambda_{n-p,n-1} \quad (5.22)$$

onde ϕ_i é o coeficiente de ordem i do polinómio ϕ.

5.1.1 Caso Particular: Tipo S.Belmehdi

O estudo das S.P.O.M. semi–clássicas de classe 1 foi feito por S.Belmehdi em (ver [11], [12] e [13]). Aqui, vamos somente estudar o caso particular em que a S.P.O.M. (P_n) verifica

$$P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + a_{n+1}P_{n-1}(x)\ ,\ n \in \mathbb{N} \quad (5.23)$$

que corresponde ao caso $\left\{\begin{array}{l} P_n \equiv R_n \\ p=0 \\ s=1 \end{array}\right.$.

De seguida estudaremos os pares $(1,0)$–compatíveis, i.e., as S.P.O.M. (P_n, R_n) verificando

$$R'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + a_{n+1}P_{n-1}(x)\ ,\ n \in \mathbb{N}. \quad (5.24)$$

Teorema 5.1.2 *Seja (P_n) uma S.P.M. verificando (5.23); então, ela é ortogonal sempre que os coeficientes da relação de recorrência satisfeita pelos P_n, (5.16)— β_n e γ_n— satisfizerem*

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_{n+1} - \beta_n = -\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{n+1} \\[2ex] a_{n+2}(\beta_{n+2}-\beta_n) = (n+2)\gamma_{n+1} - (n+1)\gamma_{n+2} \\[2ex] a_{n+2}\gamma_{n+3} - a_{n+3}\gamma_{n+1} = 0 \end{array}\right.\ ,\ n \in \mathbb{N}. \quad (5.25)$$

onde (a_n) verifica as seguintes relações

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2k+2}{a_{2k+2}}\gamma_1\prod_{i=1}^{2k}\dfrac{a_{2i+1}}{2i} = 2\dfrac{\gamma_1}{a_2} - \sum_{i=1}^{2k}(\dfrac{a_{i+3}-a_{i+2}}{i+2}+\dfrac{a_{i+2}-a_{i+1}}{i+1}) \quad se \quad n=2k \\ \\ \dfrac{2k+1}{a_{2k+1}}(2\gamma_1+\dfrac{a_2}{2}(a_3+3a_2))\prod_{i=2}^{2k-1}\dfrac{a_{2i}}{2i-1} = 2\dfrac{\gamma_1}{a_2}- \\ \qquad\qquad\qquad \sum_{i=1}^{2k-1}(\dfrac{a_{i+3}-a_{i+2}}{i+2}+\dfrac{a_{i+2}-a_{i+1}}{i+1}) \quad se \quad n=2k-1 \end{array}\right. \tag{5.26}$$

e $k \in \mathbb{N}$.

Neste caso, a funcional de momentos que lhe está associada, u, *verifica a seguinte equação diferencial distribucional*

$$D(u) = \underbrace{-<u,1>\{\frac{P_1}{<u,P_1^2>}+a_2\frac{P_2}{<u,P_2^2>}\}}_{=\psi_2x^2+\psi_1x+\psi_0} u \ ; \tag{5.27}$$

portanto u *é uma funcional de momentos semi–clássica de classe* 1.
Além disso, $a_n = -\psi_2\gamma_n\gamma_{n-1}$, $n \geq 2$ *e os coeficientes da relação de recorrência (5.16) estão relacionados por*

$$-(n+1) = (\psi_1+\psi_2(\beta_{n+1}+\beta_{n+2}))\gamma_{n+1} \ , \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.28}$$

donde se conclui que estas S.P.O.M. não podem ser simétricas.

Demonstração

Derivando (5.16) e aplicando (5.23) obtemos

$$P_{n+1} = (n+2)P_{n+1} + a_{n+2}P_n - (x-\beta_{n+1})((n+1)P_n + a_{n+1}P_{n-1}) + \gamma_{n+1}(nP_{n-1}+a_nP_{n-2})$$

e portanto

$$\begin{array}{l} xP_n = P_{n+1} + \dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}+(n+1)\beta_{n+1}}{n+1}P_n + \\ \qquad \dfrac{a_{n+1}(\beta_{n+1}-\beta_{n-1})-n\gamma_{n+1}}{n+1}P_{n-1} + \dfrac{a_n\gamma_{n+1}-a_{n+1}\gamma_{n-1}}{n+1}P_{n-2} \end{array} \tag{5.29}$$

que, comparado com (5.16), dá (5.25).

Para obtermos (5.26), multipliquemos ambos os membros da segunda equação de (5.25) por $(a_{n+2})^{-1}$ e apliquemos as outras duas equações de (5.25); assim

$$\frac{n+2}{a_{n+2}}\gamma_{n+1} = 2\frac{\gamma_1}{a_2} - \sum_{i=1}^{n}(\frac{a_{i+3}-a_{i+2}}{i+2}+\frac{a_{i+2}-a_{i+1}}{i+1}) \ , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.30}$$

Mas, da terceira equação de (5.25), tiramos que

$$\begin{cases} \gamma_{2n+1} = \gamma_1 \prod_{i=1}^{n} \frac{a_{2i+1}}{a_{2i}} \\ \\ \gamma_{2n} = \gamma_2 \prod_{i=2}^{n} \frac{a_{2i}}{a_{2i-1}} \end{cases}$$

e da segunda com $n = 0$

$$\gamma_2 = 2\gamma_1 + \frac{a_2}{2}(a_3 + 3a_2).$$

Substituindo estas expressões em (5.30) obtemos (5.26).

Para obtermos (5.27) basta tomar em (5.10) $n = 0$ e $u = v$.

Derivando (5.23) e aplicando duas vezes (5.23) vem que

$$P''_{n+1} = n(n+1)P_{n-1} + ((n+1)a_n + (n-1)a_{n+1})P_{n-2} + a_{n+1}a_{n-1}P_{n-3}. \tag{5.31}$$

A partir desta relação podemos determinar uma expressão para os a_n. De facto,

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_{n-1} < u, P_{n-3}^2 > \quad &= \quad < u, P''_{n+1}P_{n-3} >= \\ &= \quad < u, (P'_{n+1}P_{n-3})' - P'_{n+1}P'_{n-3} >= \\ &\overset{(5.27)}{=} \quad - < \psi u, P'_{n+1}P_{n-3} >= \\ &= \quad - < (\psi_2 x^2 + \psi_1 x + \psi_0)u, ((n+1)P_n + a_{n+1}P_{n-1})P_{n-3} >= \\ &= \quad -\psi_2 < u, P_{n-1}^2 > a_{n+1} \ , \ \ n \geq 3 \ ; \end{aligned}$$

logo, $a_{n-1} = -\psi_2\gamma_{n-1}\gamma_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Vamos usar esta expressão para os a_n, na determinção de (5.28):

— Facilmente se vê que

$$(n+1)a_n + (n-1)a_{n+1} = (n+1)\underbrace{(-\psi_2\gamma_n\gamma_{n-1})}_{=a_n} - \psi_1 a_{n+1}\gamma_{n-1} - a_{n+1}(\beta_{n-1} + \beta_{n-1})\gamma_{n-1}\psi_2$$

que coincide com (5.28). □

Caracterizemos agora os pares $(1, 0)$–compatíveis.

Teorema 5.1.3 *Sejam (P_n, R_n) um par $(1, 0)$–compatível verificando (5.24) e u e v as funcionais de momentos associadas; então, u e v estão relacionados por*

$$u = [\frac{< u, 1 >}{< v, R_1^2 >}P_1R_1 + (a_2\frac{< u, 1 >}{< v, R_2^2 >}P_1R_2 - 2\frac{< u, P_1^2 >}{< v, R_2^2 >}R_2) - a_3\frac{< u, P_1^2 >}{< v, R_3^2 >}R_3]v \tag{5.32}$$

e os coeficientes das relações de recorrência satisfeitas por (P_n), *(5.16), e* (R_n), *(5.17) estão relacionados por*

$$\begin{cases} a_{n+2}\eta_{n+3} - a_{n+3}\gamma_{n+1} = \dfrac{\prod_{k=3}^{n+3}\eta_k}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_i}(a_3\dfrac{\gamma_1}{\eta_3} + a_2) < u, 1 > \\ \\ \dfrac{\prod_{k=3}^{n+2}\eta_k}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_i}\{(-a_3\dfrac{\gamma_1}{\gamma_3} + a_2)\sum_{i=0}^{n+2}\xi_i + (a_3(\sum_{i=0}^{2}\xi_i + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i)\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2\gamma_3} + 2\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} + 1 \\ -\dfrac{a_2}{\gamma_2}(\xi_0 + \xi_1 + \beta_0 + \sum_{i=0}^{n-2}\beta_i))\eta_2\} < u, 1 >= a_{n+2}(\xi_{n+2} - \beta_n) + \\ (n+1)\eta_{n+2} - (n+2)\gamma_{n+1} \\ \\ (n+1)(\beta_n - \xi_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n}(\xi_i - \beta_i) + a_{n+2} - a_{n+1} \end{cases} , \ n \in \mathbb{N} \quad (5.33)$$

onde os a_n *vêm dados por*

$$a_{n+1} = -n\sum_{i=0}^{n}\xi_i + (n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i. \quad (5.34)$$

Além disso, v *é semi–clássica de classe quando muito* 1.

Demonstração

Sejam (α_n) e (α'_n) as pseudo–bases associadas a (P_n) e (R_n), respectivamente; então,

$$D(P_n u) = -< u, P_n^2 > [(n+1)\frac{R_{n+1}}{< v, R_{n+1}^2 >} + a_{n+2}\frac{R_{n+2}}{< v, R_{n+2}^2 >}]v \ , \ n \in \mathbb{N}. \quad (5.35)$$

Para determinarmos (5.33) basta tomar $\lambda_{n,n} = n+1$, $\lambda_{n,n-1} = a_{n+1}$ em (5.19), (5.21), (5.22), respectivamente.

Tomando $n = 0, 1$ em (5.35) obtemos

$$\begin{cases} \frac{Du}{<u,1>} = -(\frac{R_1}{<v,R_1^2>} + a_2\frac{R_2}{<v,R_2^2>})v \\ \\ \frac{D(P_1 u)}{<u,P_1^2>} = -(2\frac{R_2}{<v,R_2^2>} + a_3\frac{R_3}{<v,R_3^2>})v \end{cases} \quad (5.36)$$

e por um processo análogo ao utilizado na secção anterior concluímos que u e v estão relacionados por (5.32).

Que a funcional de momentos v é semi–clássica, de classe quando muito 1, resulta de aplicarmos o operador D à equação (5.32) e compararmos com a primeira equação de (5.36). De facto, v verifica

$$\begin{aligned} D[(\tfrac{<u,1>}{<v,R_1^2>}P_1R_1 + (a_2\tfrac{<u,1>}{<v,R_2^2>}P_1R_2 - 2\tfrac{<u,P_1^2>}{<v,R_2^2>}R_2) - a_3\tfrac{<u,P_1^2>}{<v,R_3^2>}R_3)v] = \\ < u, 1 > [\tfrac{R_1}{<v,R_1^2>} + a_2\tfrac{R_2}{<v,R_2^2>}]v \ . \square \end{aligned} \quad (5.37)$$

5.1.2 Caso Particular: Tipo P.Nevai

Em 1984 P.Nevai e S.Bonan (ver [18]) caracterizaram as S.P.O.M. que verificavam

$$P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + a_n P_{n-2}(x) \ , \ n \geq 1 \tag{5.38}$$

que corresponde ao caso em que $\begin{cases} P_n \equiv R_n \\ p = 0 \\ s = 2 \end{cases}$.

Usando a técnica desenvolvida na secção anterior, vamos deduzir os coeficientes da relação de recorrência dos P_n e a equação distribucional que a funcional de momentos associada verifica. De seguida estudaremos o caso

$$R'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + a_n P_{n-2}(x) \ , \ n \geq 1. \tag{5.39}$$

Teorema 5.1.4 (Bonan e Nevai, 1985) *Seja (P_n) uma S.P.O.M.*[4] *verificando (5.38); então os coeficientes da relação de recorrência (5.16) são dados por*

$$\begin{cases} \beta_{n+1} = \beta_n \quad [\beta_{n+1} = b \ (b \text{ constante real})] \\ \\ (n+1)\gamma_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)\gamma_{n+1} \quad , \ n \in \mathbb{N}. \\ \\ a_{n+2}\gamma_{n+4} + a_{n+3}\gamma_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{5.40}$$

onde β_n e γ_n são os coeficientes da relação de recorrência (5.16) satisfeita pelos P_n.

Neste caso, a funcional de momentos que lhe está associada, u, verifica a equação diferencial distribucional

$$D(u) = \underbrace{- < u, 1 > \{\frac{P_1}{< u, P_1^2 >} + a_2 \frac{P_3}{< u, P_3^2 >}\}}_{=\psi_3 x^3 + \psi_2 x^2 + \psi_1 x + \psi_0} u \ ; \tag{5.41}$$

e portanto u é uma funcional de momentos semi–clássica de classe 2.
Além disso, $a_n = -\psi_3 \gamma_{n+1}\gamma_n\gamma_{n-1}$, $n \geq 2$, e os coeficientes da relação de recorrência (5.16) estão relacionados por

$$-(n+1) = (\psi_1 + 2b\psi_2 + (\gamma_n + \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} + 3b^2))\gamma_{n+1} \ , \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.42}$$

<u>Demonstração</u>

Derivando (5.16) e aplicando (5.38), obtemos

$$-(n+1)P_{n+1} = -(x-\beta_{n+1})(n+1)P_n + (n\gamma_{n+1} + a_{n+1})P_{n-1} - (x-\beta_{n+1})a_n P_{n-2} + a_{n+1}\gamma_{n+1}P_{n-3}$$

e portanto

[4] Podiamos determinar condições sobre os a_n por forma que (P_n) definida por (5.38) seja uma S.P.O.M., como fizemos no teorema 5.1.2

$$\begin{aligned} P_{n+1} = (x-\beta_{n+1})P_n - \frac{n\gamma_{n+1}+a_{n+1}-a_n}{n+1}P_{n-1}+ \\ \frac{a_n(\beta_{n-2}+\beta_{n+1})}{n+1}P_{n-2}+\frac{a_{n-1}\gamma_{n+1}-a_n\gamma_{n-2})}{n+1}P_{n-3} \end{aligned} \tag{5.43}$$

que comparado com (5.16) dá (5.40).

Para obtermos (5.41) basta tomar $n = 0$ e $u = v$ em (5.10).

Derivando (5.23) e aplicando duas vezes (5.38) vem que

$$P''_{n+1} = n(n+1)P_{n-1} + ((n+1)a_{n-1} + (n-2)a_n)P_{n-3} + a_n a_{n-3} P_{n-5}. \tag{5.44}$$

A partir desta relação podemos determinar uma expressão para os a_n. De facto,

$$\begin{aligned} a_n a_{n-3} < u, P^2_{n-5} > &= \; < u, P''_{n+1}P_{n-5} >= \\ &= \; < u, (P'_{n+1}P_{n-5})' - P'_{n+1}P'_{n-5} >= \\ &\overset{(5.41)}{=} - < \psi u, P'_{n+1}P_{n-5} >= \\ &= - < (\psi_3 x^3 \psi_2 x^2 + \psi_1 x + \psi_0)u, ((n+1)P_n + a_n P_{n-2})P_{n-5} >= \\ &= -\psi_3 < u, P^2_{n-2} > a_n \;,\;\; n \geq 5 \;; \end{aligned}$$

logo, $a_{n-3} = -\psi_3\gamma_{n-2}\gamma_{n-3}\gamma_{n-4}$ para $n \geq 5$.

Vamos usar esta expressão para os a_n, na determinção de (5.42):

— Facilmente se vê que

$$\begin{aligned} (n+1)a_{n-1} + (n-2)a_n = -(n+1)\underbrace{(-\psi_3\gamma_n\gamma_{n-1}\gamma_{n-2})}_{=a_{n-1}} - \psi_1 a_n\gamma_{n-2} - a_n\psi_2(\beta_{n-2}\gamma_{n-2} + \beta_{n-3}\gamma_{n-2}) \\ a_n\psi_3((\gamma_{n-1} + \beta^2_{n-2} + \gamma_{n-2})\gamma_{n-2} + (\beta_{n-2}\gamma_{n-2} + \beta_{n-3}\gamma_{n-2})\beta_{n-3} + \gamma_{n-2}\gamma_{n-3}) \end{aligned}$$

que coincide com (5.42).

□

Observação

Por uma modificação afim na variável, da forma $y = x - \beta_0$, transformamos esta S.P.O.M. numa simétrica, i.e., uma S.P.O.M. tal que $\beta_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Como dissemos no início desta secção, vamos caracterizar os pares $(2,0)$–compatíveis. Assim:

Teorema 5.1.5 *Sejam (P_n, R_n) um par $(2,0)$–compatível verificando (5.39) e u e v as funcionais de momentos associadas; então, u e v estão relacionados por*

$$\begin{aligned} u = [< u,1 > P_1(\tfrac{R_1}{<v,R_1^2>} + a_2\tfrac{R_3}{<v,R_3^2>}) - \\ < u, P_1^2 > (2\tfrac{R_2}{<v,R_2^2>}) + a_3\tfrac{R_4}{<v,R_4^2>}]v \end{aligned} \tag{5.45}$$

e os coeficientes das relações de recorrência satisfeitas por (P_n), (5.16), e (R_n), (5.17) estão relacionados por

$$\begin{cases} a_{n+2}\eta_{n+4} - a_{n+3}\gamma_{n+1} = \dfrac{\prod_{k=4}^{n+4}\eta_k}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_i}(-a_3\dfrac{\gamma_1}{\eta_3} + a_2) < u,1 > \\ \dfrac{\prod_{k=4}^{n+3}\eta_k}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_i}\{(-a_3\dfrac{\gamma_1}{\gamma_4} + a_2)\sum_{i=0}^{n+3}\xi_i + (a_3(\sum_{i=0}^{3}\xi_i + \sum_{i=0}^{n-1}\beta_i)\dfrac{\gamma_1}{\gamma_3\gamma_4} \\ -\dfrac{a_2}{\gamma_3}(\xi_0+\xi_1+\xi_2+\beta_0+\sum_{i=0}^{n-2}\beta_i))\eta_3\} < u,1 >= a_{n+2}(\xi_{n+3}-\beta_n) \\ (n+1)(\beta_n - \xi_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n}(\xi_i - \beta_i) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.46}$$

onde os a_n vêm dados por

$$a_n = (n-1)(\sum_{0\le i<j\le n}\xi_i\xi_j - \sum_{i=1}^{n}\eta_i) - (n+1)(\sum_{0\le i<j\le n-1}\beta_i\beta_j - \sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i). \tag{5.47}$$

Além disso, v é semi–clássica de classe quando muito 2.

Demonstração

Sejam (α_n) e (α'_n) as pseudo–bases associadas a (P_n) e (R_n), respectivamente; então

$$D(P_n u) = - < u, P_n^2 > [(n+1)\frac{R_{n+1}}{< v, R_{n+1}^2 >} + a_{n+2}\frac{R_{n+3}}{< v, R_{n+3}^2 >}]v \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.48}$$

Para determinarmos (5.46) basta tomar $\lambda_{n,n} = n+1$, $\lambda_{n,n-1} = 0$, $\lambda_{n,n-2} = a_n$ em (5.19), (5.21), (5.22), respectivamente.

Tomando $n = 0, 1$ em (5.48) obtemos

$$\begin{cases} \frac{Du}{<u,1>} = -(\frac{R_1}{<v,R_1^2>} + a_2\frac{R_3}{<v,R_3^2>})v \\ \frac{D(P_1 u)}{<u,P_1^2>} = -(2\frac{R_2}{<v,R_2^2>} + a_3\frac{R_4}{<v,R_4^2>})v \end{cases} \tag{5.49}$$

e por um processo análogo ao utilizado na primeira secção concluímos que u e v estão relacionados por (5.45).

Que a funcional de momentos v é semi–clássica, de classe quando muito 2, resulta de aplicarmos o operador D à equação (5.45), e comparamos com a primeira equação de (5.49). De facto, v verifica

$$\begin{array}{r} D[(<u,1> P_1(\frac{R_1}{<v,R_1^2>} + a_2\frac{R_3}{<v,R_3^2>}) - <u,P_1^2> (2\frac{R_2}{<v,R_2^2>}) + a_3\frac{R_4}{<v,R_4^2>})v] = \\ <u,1> [\frac{R_1}{<v,R_1^2>} + a_2\frac{R_3}{<v,R_3^2>}]v. \ \square \end{array} \tag{5.50}$$

5.2 Tipo S.Bochner

A caracterização mais importante das S.P.O.M. clássicos (Hermite, Laguerre, Jacobi, Bessel) foi dada por S. Bochner num trabalho de 1929 [17]. Bochner provou que as S.P.O.M. clássicas são as únicas S.P.O.M., (P_n), que verificam a seguinte condição existem ϕ,$\psi \in \mathbb{P}_2$ com gr$(\psi) = 1$, tais que

$$\phi(x)P_n''(x) + \psi(x)P_n'(x) = \lambda_n P_n(x)\ ,\ n \geq 0. \tag{5.51}$$

Este resultado pode ser obtido usando a seguinte técnica (ver [2]):

— Seja (α_n) a base dual de (P_n)— S.P.O.M. associada a u, funcional de momentos regular— e $(\tilde{\alpha}_n)$ a base dual de (Q_n), onde $Q_n = \frac{P_{n+1}'}{n+1}$. Para $n = 0, 1, \ldots$

$$D(\phi(x)\alpha_n) - \psi(x)\alpha_n = \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}\tilde{\alpha}_j$$

onde

$$\begin{aligned} t_{nj} &= <D(\phi(x)\alpha_n) - \psi(x)\alpha_n, Q_j> \\ &= -<\phi(x)\alpha_n, Q_j'> - <\psi(x)\alpha_n, Q_j> \\ &= -<\alpha_n, \phi(x)Q_j' + \psi(x)Q_j> \\ &= -<\alpha_n, \frac{\phi(x)P_{j+1}'' + \psi(x)P_{j+1}'}{j+1}> \\ &= -\frac{1}{j+1} <\alpha_n, \lambda_{j+1}P_{j+1}> \\ &= -\frac{\lambda_{j+1}}{j+1}\delta_{n,j+1} \end{aligned} \tag{5.52}$$

Então,

$$t_{n,j} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ j \neq n-1 \\ -\frac{\lambda_n}{n} & \text{if } \ j = n-1 \end{cases} \qquad n \geq 1$$

e

$t_{0,j} = 0$. Assim,

1. $D(\phi(x)\alpha_0) = \psi(x)\alpha_0$
2. $D(\phi(x)\alpha_n) = \psi(x)\alpha_n - \frac{\lambda_n}{n}\tilde{\alpha}_{n-1}$, $n \geq 1$.

Mas (P_n) é a S.P.O.M. associada à funcional de momentos regular, u, logo $\alpha_k = \frac{P_k u}{<u,P_k^2>}$ (ver alínea (c) do teorema 1.3.2). Então, de 1. tiramos que

$$D(\phi(x)u) = \psi(x)u \tag{5.53}$$

e portanto u é uma funcional de momentos clássica. □

É bem sabido que, se (P_n) for uma S.P.O.M. semi–clássica de classe s, então existem polinómios ϕ e ψ de graus não superiores a $s+2$ tais que

$$\phi(x)P''_{n+1}(x) + \psi(x)P'_{n+1}(x) = \sum_{k=n-s+1}^{n+s+1} \lambda_{n,k}P_k(x) \tag{5.54}$$

com $\lambda_{n,n-s+1} \neq 0$, $n \geq s-1$ (ver [96]).

Vamos provar que também se tem o recíproco— esta questão foi proposta por P.Maroni em [84] e parcialmente resolvida por M.Alfaro, A.Branquinho, F.Marcellán e J.Petronilho em [2].

Teorema 5.2.1 *Seja (P_n) uma S.P.O.M. associada à funcional de momentos u; u é semi–clássica de classe quando muito s quando, e só quando, existe $\psi \in \mathbb{P}_{s+1}$ e $\phi \in \mathbb{P}_{s+2}$ tais que*

$$\phi(x)P''_{n+1}(x) + \psi(x)P'_{n+1}(x) = \sum_{k=n-s+1}^{n+s+1} \lambda_{n,k}P_k(x)$$

com $\lambda_{n,n-s+1} \neq 0$ para $n \geq s-1$.

Demonstração

Comecemos por demonstrar que a condição é necessária:

— Seja u uma funcional semi–clássica de classe s tal que $D(\phi u) = \psi u$, com gr(ψ)≥ 1 e $s = \max\{\text{gr}\phi - 2, \text{gr}\psi - 1\}$; considere–se o desenvolvimento

$$\phi(x)P''_{n+1}(x) + \psi(x)P'_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n+s+1} \lambda_{n,j}P_j(x) \tag{5.55}$$

onde

$$\begin{aligned} < u, P_j^2 > \lambda_{n,j} &= < u, (\phi P''_{n+1} + \psi P'_{n+1})P_j > \\ &= < \phi u, P''_{n+1}P_j > + < \psi u, P'_{n+1}P_j > \\ &= - < D(\phi u), P'_{n+1}P_j > - < \phi u, P'_{n+1}P'_j > + < \psi u, P'_{n+1}P_j > \\ &= - < u, \phi P'_{n+1}P'_j > \end{aligned}$$

Mas se u é semi–clássica, pode provar–se (ver alínea (b) teorema 2.2.1) que

$$\phi(x)P'_{n+1}(x) = \sum_{l=n-s}^{n+\text{gr}(\phi)} r_{n,l}P_l(x) \qquad r_{n,n-s} \neq 0. \tag{5.56}$$

Consequentemente, $\lambda_{n,j} = 0$ se $j-1 < n-s$, i.e., $j < n-s+1$. Além disso, $\lambda_{n,n-s+1} = -\frac{n-s+1}{\gamma_{n-s+1}} r_{n,n-s}$ onde $\gamma_k = \frac{<u,P_k^2>}{<u,P_{k-1}^2>}$.

Reciprocamente, se a relação diferencial em diferenças (5.54) for satisfeita, analisemos a correspondente funcional de momentos.

Considerem–se as pseudo–bases (α_n) e (α'_n) associadas a (P_n) e (P'_n); então

$$D(\phi\alpha_0) - \psi\alpha_0 = \sum_{j=0}^{\infty} t_{0,j}\alpha'_j$$

onde

$$\begin{aligned} t_{0,j} &= < D(\phi\alpha_0) - \psi\alpha_0, Q_j > \\ &= -\tfrac{1}{j+1} < \alpha_0, \phi P''_{j+1} + \psi P'_{j+1} > . \end{aligned}$$

Assim,

$$t_{0,j} = \begin{cases} 0 \text{ se } j \geq s \\ \\ -\frac{1}{j+1} < \alpha_0, \phi P''_{j+1} + \psi P'_{j+1} > \text{ se } 0 \leq j \leq s. \end{cases}$$

Então dois casos se podem dar:

a) Se $s = 0$, $D(\phi\alpha_0) = \psi\alpha_0$, i.e., $D(\phi u) = \psi u$; e, pelo teorema de Bochner, u é uma funcional clássica.

b) Se $s \geq 1$,

$$D(\phi\alpha_0) - \psi\alpha_0 = \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j}\alpha'_j; \tag{5.57}$$

E por outro lado

$$D(\phi\alpha_1) - \psi\alpha_1 = \sum_{j=0}^{\infty} t_{1,j}\alpha'_j, \tag{5.58}$$

onde

$$\begin{aligned} t_{1,j} &= < D(\phi\alpha_1) - \psi\alpha_1, Q_j > \\ &= -\tfrac{1}{j+1} < \alpha_1, \phi P''_{j+1} + \psi P'_{j+1} > \end{aligned}$$

Assim,

$$t_{1,j} = \begin{cases} 0 \text{ se } j \geq s+1 \\ \\ -\frac{<u,(\phi P''_{j+1} + \psi P'_{j+1})P_1>}{<u,P_1^2>} \text{ se } 0 \leq j \leq s \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} D(\phi P_1 u) - \psi P_1 u &= \textstyle\sum_{j=0}^{s} t_{1,j} < u, P_1^2 > \alpha'_j \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{s} \bar{t}_{1,j}\alpha'_j \end{aligned}$$

Consequentemente, u verifica simultaneamente

$$\begin{cases} D(\phi u) - \psi u = \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j}\alpha_j' \\ \\ D(P_1\phi u) - P_1\psi u = \sum_{j=0}^{s} \bar{t}_{1,j}\alpha_j' \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} D(\phi u) - \psi u = \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j}\alpha_j' \\ \\ \phi u + P_1 D(\phi u) - P_1\psi u = \sum_{j=0}^{s} \bar{t}_{1,j}\alpha_j' \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{cases} D(\phi u) - \psi u = \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j}\alpha_j' \\ \\ \phi u + \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j} P_1 \alpha_j' = \sum_{j=0}^{s} \bar{t}_{1,j}\alpha_j' \end{cases} \tag{5.59}$$

Derivando a segunda equação

$$D(\phi u) + \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j}\alpha_j' - \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j}(j+1)P_1\alpha_{j+1} = -\sum_{j=0}^{s} \bar{t}_{1,j}(j+1)\alpha_{j+1}$$

e tendo em conta a primeira, obtemos

$$2D(\phi u) - \psi u = \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j}(j+1)\frac{P_1 P_{j+1} u}{< u, P_{j+1}^2 >} - \sum_{j=0}^{s} \bar{t}_{1,j}(j+1)\frac{P_{j+1} u}{< u, P_{j+1}^2 >},$$

ou seja,

$$D(\phi u) = \frac{1}{2}(\psi + \psi_{s+1})u \tag{5.60}$$

onde ψ_{s+1} é dado por

$$\begin{aligned} \psi_{s+1}(x) &= -\sum_{j=0}^{s}(j+1)\bar{t}_{1,j}\tfrac{P_{j+1}(x)}{<u,P_{j+1}^2(x)>} + \sum_{j=0}^{s-1}(j+1)t_{0,j}\tfrac{(x-\alpha_0')P_{j+1}(x)}{<u,P_{j+1}^2(x)>} \\ &= \left(-\tfrac{(s+1)\bar{t}_{1,s}}{<u,P_{s+1}^2(x)>} + \tfrac{s t_{1,s-1}}{<u,P_s^2(x)>}\right)P_{s+1}(x) + \\ &\quad \left(-\tfrac{s\bar{t}_{1,s-1}}{<u,P_s^2(x)>} + \tfrac{(s-1)t_{0,s-2}}{<u,P_{s-1}^2(x)>} + \tfrac{s t_{0,s-1}(\alpha_s'-\alpha_0')}{<u,P_s^2(x)>}\right)P_s(x) + \\ &\quad \sum_{j=2}^{s-1}\left(-\tfrac{\bar{t}_{1,j-1}}{<u,P_j^2(x)>} + \tfrac{(j-1)t_{0,j-2}}{<u,P_{j-1}^2(x)>} + \tfrac{j(\alpha_j'-\alpha_0')t_{0,j-1}}{<u,P_j^2(x)>} + \tfrac{(j+1)t_{0,j}\gamma_{j+1}}{<u,P_{j+1}^2(x)>}\right)P_j(x) + \\ &\quad \left(-\tfrac{\bar{t}_{1,0}}{<u,P_1^2(x)>} + \tfrac{(\alpha_1'-\alpha_0')t_{0,0}}{<u,P_1^2(x)>} + \tfrac{2t_{2,0}\gamma_2}{<u,P_2^2(x)>}\right)P_1(x) + \tfrac{t_{0,0}\gamma_1 P_0(x)}{<u,P_1^2(x)>} \end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{l} xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \\ P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x - \beta_0 \text{ e } \gamma_n \neq 0; \end{array} \tag{5.61}$$

com

$$st_{0,s-1} = < u, \phi P''_{s-1} + \psi P'_{s-1} >$$

$$(s+1)\bar{t}_{1,s} = \frac{<u,(\phi P''_s + \psi P'_s)P_1>}{<u,P_1^2>}$$

Note–se que $\psi_{s+1} \in \mathbb{P}_{s+1}$. Mas, por outro lado, tendo em conta (5.59),

$$\frac{1}{2}(\psi_{s+1} - \psi)u = \sum_{j=0}^{s-1} t_{0,j}\alpha'_j.$$

Derivando esta última expressão

$$\begin{array}{rcl} D(\frac{1}{2}(\psi_{s+1} - \psi)u) & = & -\sum_{j=0}^{s-1}(j+1)t_{0,j}\frac{P_{j+1}u}{<u,P_{j+1}^2>} \\ & = & \phi_s u \end{array} \tag{5.62}$$

onde $\phi_s = -\sum_{j=1}^{s} jt_{0,j-1}\frac{P_j u}{<u,P_j^2>}$. Temos então, duas equações diferenciais distribucionais para u— (5.60) e (5.62)[5]. □

Observação

O resultado que obtivemos é natural pois, derivando (5.61), obtemos

$$P_n(x) = P'_{n+1}(x) + \beta_n P'_n(x) + \gamma_n P'_{n-1}(x) - xP'_n(x) \tag{5.63}$$

e derivando novamente

$$2P'_n(x) = P''_{n+1}(x) + \beta_n P''_n(x) + \gamma_n P''_{n-1}(x) - xP''_n(x) \tag{5.64}$$

Se adicionarmos as equações resultantes da multiplicação de (5.63) por ψ e de (5.64) por ϕ, temos que

$$\begin{array}{rcl} \psi(x)P_n(x) + 2\phi(x)P'_n(x) & = & \sum_{j=n-s+1}^{n+s+1}\lambda_{n,j}P_j(x) + \beta_n\sum_{j=n-s}^{n+s}\lambda_{n-1,j}P_j(x) + \\ & & \gamma_n\sum_{j=n-s-1}^{n+s-1}\lambda_{n-2,j}P_j(x) - x\sum_{j=n-s}^{n+s}\lambda_{n-1,j}P_j(x) \\ & = & \sum_{j=n-s-1}^{n+s+1}\tilde{\lambda}_{n,j}P_j(x) \end{array} \tag{5.65}$$

Facilmente se prova— a partir de (5.61)— que

[5] Na verdade u é uma funcional semi–clássica de classe $\leq s-1$, sempre que $s \geq 2$.

$$\psi(x)P_n(x) = \sum_{j=n-\mathrm{gr}(\psi)}^{n+\mathrm{gr}(\psi)} \mu_{n,j} P_j(x)$$

Por (5.65)

$$\phi P_n'(x) = \sum_{j=n-s-1}^{n+s+1} \tilde{\mu}_{n,j} P_j(x) = \sum_{j=n-s-1}^{n-1+\mathrm{gr}(\phi)} \tilde{\mu}_{n,j} P_j(x) \tag{5.66}$$

Então u é semi–clássica; mas nada podemos dizer acerca da classe, pois não sabemos se $\tilde{\mu}_{n,n-s-1}$ é diferente de zero para todo o $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Uma Generalização

Vamos generalizar o resultado fundamental da secção anterior, i.e.,

Sejam (P_n) e (R_n) duas S.P.O.M.[6] verificando

$$\phi(x)R_n''(x) + \psi(x)R_n'(x) + \eta(x)R_n(x) = \sum_{k=n-s}^{n+t} a_{n,k} P_k(x) \tag{5.67}$$

com $a_{n,n-s} \neq 0$ para todo o $n \geq s$.

Caracterizar as funcionais de momentos que lhes estão associadas.

Vamos ver que estas funcionais são uma modificação racional uma da outra, estando assim este problema intimamente relacionado com o já estudado nos dois capítulos anteriores.

Existem S.P.O.M. verificando relações do tipo (5.67). De facto,

(i) Se (R_n) é a S.P.O.M. tipo Laguerre–Sobolev e (P_n) a S.P.O.M. Laguerre, então

$$\begin{array}{l} \eta(x) = x, \ \ \psi(x) = -\lambda(\alpha - x), \ \ \phi(x) = -\lambda x \\ t = s = 1 \end{array}$$

(ver [80]).

[6]Note–se que (P_n) é uma S.P.O.M. associada a um produto interno usual e os (R_n) a um produto interno tipo Sobolev.

(ii) Se (R_n) é a S.P.O.M. tipo Legendre–Sobolev e (P_n) a S.P.O.M. Legendre, então

$$\begin{array}{lll} \eta(x) = x^2 - 1 & \psi(x) = 0 & \phi(x) = -\lambda(x^2-1) \\ t = s = 2 & & \end{array}$$

(ver [3]).

Teorema 5.3.1 *Se (P_n) e (R_n) satifazem uma relação do tipo (5.67), então as funcionais de momentos que lhes estão associadas, u e v, respectivamente, verificam*

$$2\phi(x)u =< u_y, \phi(y)L^{(0,2)}(x,y) + \psi(y)L^{(0,1)}(x,y) + \eta(y)L^{(0,0)}(x,y) > v \tag{5.68}$$

onde $L^{(0,j)}$ é um polinómio dado por

$$L^{(0,j)}(x,y) = P_2(y)K^{(0,j)}_{s+2}(x,y) - P_2'(x)P_1(y)K^{(0,j)}_{s+1}(x,y) + (P_1(x)P_2'(x) - P_2(x))K^{(0,j)}_s(x,y).$$

Além disso, v é uma funcional de momentos semi–clássica.

Demonstração

Sejam (α_n) e (α'_n) as pseudo–bases associadas a (P_n) e (R_n), respectivamente. Tentemos expressar

$$D^2(\phi\alpha_n) - D(\psi\alpha_n) + \eta\alpha_n = \sum_{k\geq 0} \lambda_{n,k}\alpha'_k \ , \tag{5.69}$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_{n,k} &= < D^2(\phi\alpha_n) - D(\psi\alpha_n) + \eta\alpha_n, R_k > \\ &= < \alpha_n, \phi R''_k + \psi R'_k + \eta R_k > \\ &= < \alpha_n, \textstyle\sum_{j=k-s}^{k+t} a_{k,j}P_j > \\ &= \begin{cases} 0 \text{ se } k-s > n \text{ ou } k+t < n \\ a_{k,n} \text{ se } n-t \leq k \leq n+s \end{cases} \end{aligned}$$

i.e., (5.69) toma a forma

$$D^2(\phi\alpha_n) - D(\psi\alpha_n) + \eta\alpha_n = \sum_{k=n-t}^{n+s} \lambda_{n,k}\alpha'_k \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.70}$$

Tomemos nesta última expressão $n = 0$, 1 e 2

$$\begin{cases} D^2(\phi\alpha_0) - D(\psi\alpha_0) + \eta\alpha_0 = \sum_{k=0}^{s} \lambda_{0,k}\alpha'_k \\ D^2(\phi\alpha_1) - D(\psi\alpha_1) + \eta\alpha_1 = \sum_{k=0}^{s+1} \lambda_{1,k}\alpha'_k \\ D^2(\phi\alpha_2) - D(\psi\alpha_2) + \eta\alpha_2 = \sum_{k=0}^{s+2} \lambda_{2,k}\alpha'_k \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} D^2(\phi u) - \psi D(u) + (\eta - \psi')u = < u, 1 > \sum_{k=0}^{s} \lambda_{0,k}\alpha'_k \\ \\ P_1 D^2(\phi u) + (\phi - P_1\psi)D(u) + (\eta P_1 + \phi' - \psi - P_1\psi')u = \\ \qquad\qquad < u, P_1^2 > \sum_{k=0}^{s+1} \lambda_{1,k}\alpha'_k \\ \\ P_2 D^2(\phi u) + (2P'_2\phi - P_2\psi)D(u) + (\eta P_2 + 2(\phi + \phi') - (P_2\psi)')u = \\ \qquad\qquad < u, P_2^2 > \sum_{k=0}^{s+2} \lambda_{2,k}\alpha'_k. \end{cases} \tag{5.71}$$

Das primeiras duas expressões de (5.71) tiramos a seguinte relação

$$\phi D(u) + (\phi' - \psi)u = < u, P_1^2 > \sum_{k=0}^{s+1} a_{k,1}\alpha'_k - < u, 1 > P_1 \sum_{k=0}^{s} a_{k,0}\alpha'_k \tag{5.72}$$

e da primeira e terceira

$$2P'_2\phi D(u) + (2(\phi' + \phi) - P'_2\psi)u = < u, P_2^2 > \sum_{k=0}^{s+2} a_{k,2}\alpha'_k - < u, 1 > P_2 \sum_{k=0}^{s} a_{k,0}\alpha'_k \ . \tag{5.73}$$

Multiplicando (5.72) por $-2P'_2$ e adicionando a (5.73) vem

$$\begin{aligned} [-2P'_2(\phi' - \psi) + 2(\phi' + \phi) - P'_2\psi]u = & < u, P_2^2 > \textstyle\sum_{k=0}^{s+2} a_{k,2}\alpha'_k - < u, 1 > P_2 \sum_{k=0}^{s} a_{k,0}\alpha'_k \\ & -2P'_2\{< u, P_1^2 > \textstyle\sum_{k=0}^{s+1} a_{k,1}\alpha'_k - < u, 1 > P_1 \sum_{k=0}^{s} a_{k,0}\alpha'_k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(P'_2(x)(\psi(x) - \phi'(x)) + (\phi(x) + \phi'(x)))u = & < u, P_2^2 > \textstyle\sum_{k=0}^{s+2} a_{k,2}\alpha'_k - \\ & 2P'_2 < u, P_1^2 > \textstyle\sum_{k=0}^{s+1} a_{k,1}\alpha'_k + (2P_1P'_2 - P_2) < u, 1 > \sum_{k=0}^{s} a_{k,0}\alpha'_k. \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que (R_n) é uma S.P.O.M. associada a v (i.e., $\alpha'_n = \frac{R_n}{<v, R_n^2>} v$, $n \in \mathbb{N}$), e como $a_{n,k} = \frac{<u, (\phi R''_n + \psi R'_n + \eta R_n)P_k>}{<u, P_k^2>}$, concluímos

$$\begin{aligned} & 2(P'_2(x)(\psi(x) - \phi'(x)) + (\phi(x) + \phi'(x)))u = \\ & \qquad < u_y, \phi(y)L^{(0,2)}(x, y) + \psi(y)L^{(0,1)}(x, y) + \eta(y)L^{(0,0)}(x, y) > v \end{aligned} \tag{5.74}$$

onde

$$L^{(0,j)}(x, y) = P_2(y)K_{s+2}^{(0,j)}(x, y) - 2P'_2(x)P_1(y)K_{s+1}^{(0,j)}(x, y) + (2P_1(x)P'_2(x) - P_2(x))K_s^{(0,j)}(x, y).$$

De (5.74) e (5.72) sai que v é uma funcional semi–clássica; e portanto u é também semi–clássica. □

Este problema podia ter sido abordado de uma outra forma. De facto, usando o facto de (R_n) e (P_n) satisfazerem uma relação de recorrência a três termos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \tag{5.75}$$

e

$$0 = R_{n+1}(x) + \xi_n R_n(x) + \eta_n R_{n-1}(x) - xR_n(x), \tag{5.76}$$

obtemos derivando duas vezes esta última expressão

$$R_n(x) = R'_{n+1}(x) + \xi_n R'_n(x) + \eta_n R'_{n-1}(x) - xR'_n(x) \tag{5.77}$$

e

$$2R'_n(x) = R''_{n+1}(x) + \xi_n R''_n(x) + \eta_n R''_{n-1}(x) - xR''_n(x). \tag{5.78}$$

Adicionando as expressões resultantes de multiplicar (5.76) por η, (5.77) por ψ e (5.78) por ϕ, e supondo verificada a relação (5.67), obtemos

$$\psi(x)R_n(x) + 2\phi(x)R'_n(x) = \sum_{k=n-s-1}^{n+t+1} b_{n,k}P_k(x) \ , \tag{5.79}$$

onde $b_{n,n-s-1} = a_{n-1,n-1-s} - a_{n,n-s}\gamma_{n-s}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Conclusão

Se (P_n) e (R_n) satisfizerem uma relação do tipo (5.67) então, em particular, verificam

$$\phi(x)R'_n(x) = \sum_{k=n-l-1}^{n+t} c_{n,k}P_k(x)$$

onde $l = \max\{s, \mathrm{gr}(\psi)-1\}$; e portanto (P_n, R_n) forma um par (r,t)–compatível, com $r < s$.

5.4 Uma Aplicação

Como aplicação dos resultados dados ao longo deste trabalho, vamos resolver o seguinte problema proposto por L.L.Littlejohn em [72]:

— Determinar relações entre as S.P.O.M. associadas a $v = u + M\delta_0$ e $w = x^{-1}u + M\delta_0$, onde u é a funcional de momentos de Laguerre, definida por

$$< u, x^n >= \int_0^{+\infty} x^n x^\alpha e^{-x} dx \ , \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Este problema vem no seguimento de outro, também proposto por Littlejohn e resolvido na seção 3.2 do capítulo II (ver (2.77)).

É evidente que v e w assim definidas são regulares[7], pois são modificações da funcional de Laguerre, u,

$$\begin{cases} v = u + M\delta_0 \\ \\ xw = u \ , \end{cases}$$

respectivamente. Além disso, estão relacionadas por $xv = x^2 w$; portanto

[7]Confirmar (2.65) e teorema 4.1.1, respectivamente.

$$v = \underbrace{xw}_{=u} + \underbrace{< v, 1 >}_{=M} \delta_0 \ . \tag{5.80}$$

Sejam $(L_n^{\alpha,0})$ e $(L_n^{\alpha,-1})$ as S.P.O.M. associadas, respectivamente a v e u; partamos o problema em dois outros:

1. Determinação dos coeficientes da relação de recorrência de $(L_n^{\alpha,0})$

$$xL_n^{\alpha,0}(x) = L_{n+1}^{\alpha,0}(x) + \xi_n L_n^{\alpha,0}(x) + \eta_n L_{n-1}^{\alpha,0}(x); \tag{5.81}$$

2. Determinação dos coeficientes da relação de recorrência de $(L_n^{\alpha,-1})$

$$xL_n^{\alpha,-1}(x) = L_{n+1}^{\alpha,-1}(x) + \tilde{\xi}_n L_n^{\alpha,-1}(x) + \tilde{\eta}_n L_{n-1}^{\alpha,-1}(x); \tag{5.82}$$

em termos de (β_n) e (γ_n) de

$$xL_n^{\alpha}(x) = L_{n+1}^{\alpha}(x) + \beta_n L_n^{\alpha}(x) + \gamma_n L_{n-1}^{\alpha}(x). \tag{5.83}$$

De (2.70) relacionamos (ξ_n) e (η_n) com (β_n) e (γ_n):

$$\begin{cases} \xi_n = 2\beta_{n+1} - \beta_n - M(\dfrac{L_{n+1}^{\alpha}(0)L_n^{\alpha}(0)}{1 + MK_n(0,0)} - \dfrac{L_n^{\alpha}(0)L_{n-1}^{\alpha}(0)}{1 + MK_{n-1}(0,0)}) \\ \\ \eta_n = 2\gamma_{n+1} - \gamma_n - (\xi_n + \beta_n)(\beta_n - \dfrac{ML_n^{\alpha}(0)L_{n-1}^{\alpha}(0)}{1 + MK_{n-1}(0,0)}) + \\ M(\dfrac{(L_{n+1}^{\alpha}(0))^2}{1 + MK_n(0,0)} - \dfrac{(L_n^{\alpha}(0))^2}{1 + MK_{n-1}(0,0)}) \end{cases} , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.84}$$

onde $K_n(0,0) = (L_{n+1}^{\alpha})'(0)L_n^{\alpha}(0) - (L_n^{\alpha})'(0)L_{n+1}^{\alpha}(0)$.

Pelo teorema 4.1.1 relacionamos $(\tilde{\xi}_n)$ e $(\tilde{\eta}_n)$ com (β_n) e (γ_n):

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_{n+1} = \beta_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) \\ \\ \tilde{\eta}_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\gamma_{n+1} \end{cases} , \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.85}$$

onde $a_n = \frac{L_{n+1}^{\alpha}(0)<u,1>+(L_n^{\alpha})^{(1)}(0)}{L_n^{\alpha}(0)<u,1>+(L_{n-1}^{\alpha})^{(1)}(0)}$. Necessitamos conhecer $(L_n^{\alpha})^{(1)}(0)$ para ter os a_n perfeitamente determinados, e portanto $(\tilde{\xi}_n)$ e $(\tilde{\eta}_n)$ perfeitamente determinados. Determinemo–lo:

— De [30, pg.86] sabemos que

$$(L_n^{\alpha})^{(1)}(0)L_n^{\alpha}(0) - (L_{n-1}^{\alpha})^{(1)}(0)L_{n+1}^{\alpha}(0) = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i$$

que dividido por $L_n^{\alpha}(0)L_{n+1}^{\alpha}(0)$ dá

$$\frac{(L_n^\alpha)^{(1)}(0)}{L_{n+1}^\alpha(0)} - \frac{(L_{n-1}^\alpha)^{(1)}(0)}{L_n^\alpha(0)} = \frac{\prod_{i=1}^n \gamma_i}{L_n^\alpha(0) L_{n+1}^\alpha(0)}$$

e portanto

$$(L_n^\alpha)^{(1)}(0) = L_{n+1}^\alpha(0) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\prod_{i=1}^k \gamma_i}{L_k^\alpha(0) L_{k+1}^\alpha(0)} + \frac{1}{\beta_0} \right) \ , \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.86}$$

De (5.84) e (5.85) obtemos duas relações entre os coeficientes das relações (5.81) e (5.83)

$$\begin{cases} \xi_n = 2(\tilde{\xi}_{n+1} + a_{n+1} - a_n) - (\tilde{\xi}_n + a_n - a_{n-1}) - \\ \qquad M(\dfrac{L_{n+1}^\alpha(0) L_n^\alpha(0)}{1 + MK_n(0,0)} - \dfrac{L_n^\alpha(0) L_{n-1}^\alpha(0)}{1 + MK_{n-1}(0,0)}) \\ \\ \eta_n = 2\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \tilde{\eta}_{n+2} - \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \tilde{\eta}_{n+1} - (\xi_n + \beta_n)(\beta_n - \dfrac{M L_n^\alpha(0) L_{n-1}^\alpha(0)}{1 + MK_{n-1}(0,0)}) \\ \qquad M(\dfrac{(L_{n+1}^\alpha(0))^2}{1 + MK_n(0,0)} - \dfrac{(L_n^\alpha(0))^2}{1 + MK_{n-1}(0,0)}) \ , \ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{5.87}$$

Determinação de uma fórmula de estrutura de segunda ordem entre as S.P.O.M. $(L_n^{\alpha,0})$ e $(L_n^{\alpha,-1})$:

Vimos já que as S.P.O.M. $(L_n^{\alpha,0})$ e (L_n^α) estão relacionadas por (ver (2.76))

$$\begin{aligned} x^2 (L_n^{\alpha,0})''(x) + x(2+\psi)(L_n^{\alpha,0})'(x) + (\psi - \lambda_{n+1} x) L_n^{\alpha,0}(x) = \\ a_{n,n}(\lambda_n - \lambda_{n+1}) L_n^\alpha(x) + a_{n,n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1}) L_{n-1}^\alpha(x), \end{aligned} \tag{5.88}$$

onde ψ é dado pela fórmula (2.49) e λ_{n+1} são dados por (2.50). Assim sendo, basta determinarmos uma relação entre (L_n^α) e $(L_n^{\alpha,-1})$ para termos o pretendido; mas

$$x L_n^\alpha(x) = L_{n+1}^{\alpha,-1}(x) + \prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\tilde{\eta}_i} L_n^{\alpha,-1}(x) \ , \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

logo

$$x^3 (L_n^{\alpha,0})''(x) + x^2(2+\psi)(L_n^{\alpha,0})'(x) + x(\psi - \lambda_{n+1} x) L_n^{\alpha,0}(x) = \sum_{k=n-1}^{n+1} c_{n,k} L_k^{\alpha,-1}(x) \tag{5.89}$$

onde os $c_{n,k}$ são conhecidos.

Bibliography

[1] J.ACZEL. *Sur l'equation diférentielle des polynômes orthogonaux classiques*. Ann. Univ. Scient. Budapest 2. (1959). 27-29.

[2] M.ALFARO, A.BRANQUINHO, F.MARCELLÁN, J.PETRONILHO. *A generalization of a theorem of S.Bochner*. Publicaciones del Seminario Matemático García Galdeano.Serie II.11(1).(1992).

[3] M.ALFARO, F.MARCELLÁN, M.L.REZOLA. *Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: Old and new directions*. (Aparecerá no Journal of Computational and Applied Mathematics).

[4] W.R. ALLAWAY. *Orthogonality preserving maps and the Laguerre functional*. Proc. Amer. Math. Soc. 100(I).(1987). 82-86.

[5] W.AL SALAM. *Characterizations theorems for orthogonal polynomials*. In Orthogonal Polynomials: Theory and Practice. P.NEVAI Ed. Kluwer Academic Publishers. 1990. 1-24. Dordrecht.

[6] W.AL SALAM, T.S.CHIHARA. *Another characterization of the classical orthogonal polynomials*. SIAM J.Math. Anal.. 3(1). (1972). 65-70.

[7] W.AL SALAM, A.VERMA. *Some orthogonality preserving operators*. Proc. Amer. Math. Soc. 23. (1969). 136-139.

[8] W.AL SALAM, A.VERMA. *Orthogonality preserving operators*. Accad. Naz. Lincei. 58. (1975). 833-838.

[9] R.ASKEY. *Orthogonal polynomials and special functions*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, Pennsylvania 19103. 1975.

[10] F.V.ATKINSON, W.N.EVERITT. *Ortogonal polynomials which satisfy second order differential equations*. In E.B.Christoffel, the Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences. P.L.BUTZER e F.FEHER Eds. Birkhaüser. Basel. 1981. 173-181.

[11] S.BELMEHDI. *A study of the class one of semiclassical orthogonal polynomials*. Actas *V* Simposium Polinomios Ortogonales. A.CACHAFEIRO e E.GODOY Eds. Vigo. (1988). 57-70.

[12] S.BELMEHDI. *Formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi–classiques de classe* $s = 1$. *Description et classification.* Thèse d'Etat. Univ. P.et M. Curie. Paris 1990.

[13] S.BELMEHDI. *On semiclassical linear functionals of class* $s = 1$. *Classification and integral representations.* Indagationes Math. N.S. 3(3). (1992).253-275.

[14] S.BELMEHDI, J.DINI, P.MARONI, A.RONVEAUX. *Fourth–orther differential equation for the co–modified of semi–classical orthogonal polynomials.* Journal of Computational and Applied Mathematics. 29(2). (1990). 225-231.

[15] S.BELMEHDI, F.MARCELLAN, A.RONVEAUX. *Orthogonality with respect to the sum of two semiclassical regular linear forms.* Journal of Computational and Applied Mathematics. 37(1-3). (1991). 265-272.

[16] R.P.BOAS. *The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation.* Bull. of the Amer. Math. Soc. 45.(1939). 399-404.

[17] S.BOCHNER. *Uber Sturm-Liouvillesche polynomsysteme.* Math.Zeit.29. (1929). 65-70.

[18] S.BONAN, P.NEVAI. *Orthogonal polynomials and their derivatives.* J. Aprox. Theory. 40. (1984). 134-147.

[19] S.BONAN, D.LUBINSKY, P.NEVAI. *Orthogonal polynomials and their derivatives II.* SIAM Journ. Math. Anal. 18. (1987). 1163-1176.

[20] A.BRANQUINHO, F.MARCELLÁN, J.PETRONILHO. *On inverse problems for orthogonal polynomials I.* Journal of Computational and Applied Mathematics. 49(1-3).(1993).

[21] A.BRANQUINHO, F.MARCELLÁN, J.PETRONILHO. *Classical orthogonal polynomials: A functional approach.* (Submetido).

[22] A.BRANQUINHO, J.BUSTOZ, J.PETRONILHO. *A note on orthogonal polynomials satisfying second order linear differential equations.* (Submetido).

[23] C.BREZINSKI. *A direct proof of the Christoffel–Darboux identity and its equivalence to the recurrence relationship.* Journal of Computational and Applied Mathematics. 32(1-2). (1990). 17-25.

[24] R.BULIRSCH, J.STOER. Introduction to Numerical Analysis. Springer Verlag. 1980.

[25] T.CARLEMAN. *Sur les problème des moments.* Comptes Rendus de l'Academie de Sciences de Paris. 174. (1922). 1680-1682.

[26] T.CARLEMAN. *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et simétrique.* Uppsala Univ. Årsskrift. (1923). 228.

[27] T.CARLEMAN. *Les fonctions quasi–analytiques*. Gauthier–Villars. Paris. (1926). 115.

[28] T.S.CHIHARA. *On quasi–orthogonal polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. 8.(1957). 765-767.

[29] T.S.CHIHARA. *On co–recursive orthogonal polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. 8.(1957). 899-905.

[30] T.S.CHIHARA. *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach. New York 1978.

[31] T.S.CHIHARA. *Orthogonal polynomials and measures with end point masses*. Rocky Mount. J. Math. 15(3). (1985). 705-719.

[32] E.B.CHRISTOFFEL. *Über die Gaussische quadratur and eine verallgemeinerung derselben*. J. Reine Angew. Math. 55. (1958). 61-82.

[33] C.W.CRYER. *Rodrigues formulas and the classical orthogonal polynomials*. Boll. Un. Mat. Ital. (3) 25. (1970). 1-11.

[34] A.CSASZAR. *Sur les polynômes orthogonaux classiques*. Ann. Univ. Scient. Budapest 1. (1958). 33-39.

[35] J.S.DEHESA, F.MARCELLÁN, A.RONVEAUX. *On orthogonal polynomials with perturbed relations*. Journal of Computational and Applied Mathematics. 30(2). (1990). 203-212.

[36] D.J.DICKINSON. *On quasi–orthogonal polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. 12.(1961). 185-194.

[37] J.DINI. *Sur les formes linéaires et les polynômes orthogonaux de Laguerre–Hahn*. Thèse de Doctorat. Univ. P.et M. Curie. Paris 1988.

[38] J.DINI, P.MARONI. *The product of a linear form by a rational fraction: Application to Laguerre–Hahn forms*. L.N.M. 117. 131-138. M.Dekker 1989. New York.

[39] A.DURAN. *The Stieltjes moments problem for rapidly decreasing functions*. Proc. Amer.Math.Soc. 107. (1989). 731-741.

[40] A.DURAN. *Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials*. Aparecerá na Rocky. Mountain. J. Math.

[41] A.DURAN. *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*. (Manuscrito).

[42] S.ELHAY, G.GOLUB, J.KAUTSKY. *Jacobi matrices for sums of weight functions*. B.I.T. 32.(1992). 144-166.

[43] J.FAVARD. *Sur les polynômes de Tchebicheff*. C.R. Acad. Sci. Paris. 200. (1935).2052-2053.

[44] B.FISCHER, G.H.GOLUB. *How to generate unknown orthogonal polynomials out of known orthogonal polynomials.* Journal of Computational and Applied Mathematics. 43(1-2). (1992). 99-115.

[45] G.FREUD. Orthogonal polynomials. Pergamon Press. Oxford. 1971

[46] W.GAUTSCHI. *An algorithmic implementation of the generalized Christoffel theorem.*In Numerical Integration. G.HÄMMERLIN. Ed. Internat. Ser. Numer. Math.57. Birkhäuser. Bassel. (1982). 89-106.

[47] W.GAUTSCHI. *Some new applications of orthogonal polynomials.* In Polynômes Orthogonaux et Applications. C.BREZINSKI, A.DRAUX, A.P.MAGNUS, P.MARONI e A.RONVEAUX Eds. L.N.M. 1171. Springer Verlag . Berlin. (1985). 63-73.

[48] W.GAUTSCHI. *Computational aspects of orthogonal polynomials.* In Orthogonal Polynomials: Theory and Practice. P.NEVAI Ed. Kluwer Academic Publishers. 1990. 181-216. Dordrecht.

[49] Ya.L.GERONIMUS. *On polynomials orthogonal with respect to numerical sequences and on Hahn's theorem.*(em Russo) Izv. Akad. Nauk. 4. (1940). 215-228.

[50] Z.S.GRINSHPUN. *Differential equations for the Bernshtein–Szegö orthogonal polynomials.* Differential Equations. 26 (5). (1990). 545-550.

[51] M.GUERFI. *Les polynômes de Laguerre–Hahn affines discrets.* Thèse de troisième Cycle. Univ. P.et M. Curie. Paris. (1988).

[52] W.HAHN. *Über differentialgleichungen für orthogonalpolynome.* Monat. Math. 95. (1983). 269-274.

[53] S.S.KIM, K.H.KWON, S.S.HAN. *Application of hyperfunctions to orthogonal polynomials.* In Differential Equations and Feynman Integrals. KILL H. KWON Ed. Proceedings of the 10$^{\underline{\text{th}}}$ Workshop on Pure and Applied Mathematics. Seoul National University. (1990). 354-361.

[54] G.H.HARDY. *On Stieltjes "problèmes de moments".* Messenger of Math. 46(a). (1917). 175-182; 47(b). (1917). 81-88.

[55] E.HENDRIKSEN. *A Bessel type orthogonal polynomials system.* Indagat. Math. 46.(1984). 407-414.

[56] E.HENDRIKSEN, H.VAN ROSSUM. *Semi–classical orthogonal polynomials.* In Polynômes Orthogonaux et Applications. C.BREZINSKI, A.DRAUX, A.P.MAGNUS, P.MARONI e A.RONVEAUX Eds. L.N.M. 1171. Springer Verlag . Berlin. (1985). 354-361.

[57] E.HENDRIKSEN, H.VAN ROSSUM. *A Padé–type approach to non–classical orthogonal polynomials.* J. Math. Anal. Appl. 106.(1985). 237-248.

[58] A.ISERLES, S.P.NØRSET. *On the theory of biorthogonal polynomials*. Trans. of the Amer. Math. Soc. 306(2). (1988). 455-474.

[59] A.ISERLES, P.E.KOCH, S.P.NØRSET e J.M.SANZ–SERNA. *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*. J. of Appr. Theory. 65. (1991). 151-175.

[60] D.KARLIN, G.SZEGÖ. *On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials*. J. d'Analyse Math. 8. (1961). 1-157.

[61] T.H.KOORNWINDER. *Orthogonal polynomials with weight function* $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}+M\delta(x+1)+N\delta(x-1)$. Canad. Math. Bull. 27 (2). (1984). 205-214.

[62] A.M.KRALL, L.L.LITTLEJOHN. *Orthogonal Polynomials and singular Sturm–Liouville systems I*. Rocky Mount. J.Math. 16. (1986). 435-479.

[63] A.M.KRALL, L.L.LITTLEJOHN. *On the classification of differential equations having orthogonal Polynomials solutions II*. Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV). CXLIX. (1987). 77-102.

[64] A.M.KRALL, R.D.MORTON. *Distributional weight functions for orthogonal polynomials*. SIAM J.Math. Anal.. 9. (1978). 604-626.

[65] H.L.KRALL. *On derivatives of orthogonal polynomials*. Bull. Amer. Math. Soc. 42. (1936). 423-428.

[66] H.L.KRALL. *Certain differential equations for Tchebycheff polynomials*. Duke.Math.Jour. 4. (1938). 705-718.

[67] H.L.KRALL. *On derivatives of orthogonal polynomials II*. Bull. Amer. Math. Soc. 47. (1941). 261-264.

[68] H.L.KRALL, O.FRINK. *A new class of orthogonal polynomials. The Bessel polynomials*. Trans.Amer.Math.Soc. 65. (1949). 100-115.

[69] K.H.KWON, L.L.LITTLEJOHN, J.K.LEE e B.H.YOO. *Characterization of Bochner–Krall orthogonal polynomials*. (Manuscrito).

[70] L.L.LITTLEJOHN. *The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials*. Quaest. Math. 5. (1982). 255-265.

[71] L.L.LITTLEJOHN. *On the classification of differential equations having orthogonal polynomials solutions*. Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV). LXXXVIII. (1984). 35-53.

[72] L.L.LITTLEJOHN. *A survey of recent results on the connection between orthogonal polynomials and differential equations*. Research Report. Department of Mathematics. Utah State University. Logan. USA.

[73] L.L.LITTLEJOHN. *An application of a new theorem on orthogonal polynomials*. Quaest. Math. 10. (1986). 49-61.

[74] L.L.LITTLEJOHN, S.SHORE. *Non classical orthogonal polynomials as solutions to second order differential equations*. Canad. Math. Bull. 25 (3). (1982). 291-295.

[75] YU.I.LYUBICH. *Functional analysis I: Linear functional analysis*. In Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Vol. 19. N.K.NIKOL'SKIJ Ed. Springer Verlag. Berlin. (1991).

[76] A.MAGNUS. *Riccati acceleration of the Jacobi continued fractions and Laguerre–Hahn orthogonal polynomials. In Padé Approximation and it's Applications Bad Honnef 1983. H.WERNER e H.J.BÜNGER Eds. L.N.in Mat. 1071. Springer Verlag. Berlin. (1984). 213-230.*

[77] F.MARCELLAN. *Polinomios ortogonales semiclásicos. Una aproximacion constructiva.* Actas *V* Simposium Polinomios Ortogonales. A.CACHAFEIRO e E.GODOY Eds. Vigo. (1988). 100-123.

[78] F.MARCELLAN, P.MARONI. *Sur l'adjonction d'une masse de Dirac à une forme regulière et semi–classique.* Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV). CLXII. (1992).1-22.

[79] F.MARCELLAN, A.RONVEAUX. *Differential equations for classical type orthogonal polynomials*. Can. Math. Bull. 32. (4). (1989). 404-411.

[80] F.MARCELLÁN, T.PEREZ. M.PIÑAR. *Laguerre–Sobolev orthogonal polynomials.* Preprint 1992.

[81] P.MARONI. *Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semiclassiques.* Annal.di Mat.Pur. ed Appl.149(4).(1987).165-184.

[82] P.MARONI. *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semiclassiques*. In Orthogonal Polynomials and Their Applications. M.ALFARO, J.S.DEHESA, F.J.MARCELLAN, J.L.RUBIO DE FRANCIA e J.VINUESA. Eds. L.N.in Mat.1329. Springer Verlag . Berlin. (1988). 279-290.

[83] P.MARONI. *Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme* $u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}L$. Period.Math.Hung.21(3).(1990). 223-248.

[84] P.MARONI. *Une théorie algébrique des polynômes ortogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semiclassiques*. In "Orthogonal Polynomials and their Applications". C.BREZINSKI, L.GORI e A.RONVEAUX. Eds. J.C.Baltzer AG. IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics. 9.(1991).95-130.

[85] P.MARONI. *Variations around classical orthogonal polynomials. Connected problems.* C.R.Acad.Sc.Paris.$n^{\underline{o}}$92001.(1992).1-20.

[86] P.J.McCARTHY. *Characterizations of classical polynomials.*. Portugaliae Mathematica.20(1). (1961). 47-52.

[87] P.NEVAI. *Orthogonal polynomials*. Memoirs of the Amer. Math. Soc. 213. Providence Rhode Island 1979.

[88] P.NEVAI. *Orthogonal polynomials defined by recurrence relations*. Trans. Amer. Math. Soc. 250. (1979). 369-384.

[89] A.F.NIKIFOROV, V.B.UVAROV. Special functions of mathematical physics: An unified Approach. Birkhaüser Verlag. Basel. 1988.

[90] S.PASZKOWSKI. *Sur des transformations d'une function poinds*. In Polynômes Orthogonaux et Applications. C.BREZINSKI, A.DRAUX, A.P.MAGNUS, P.MARONI e A.RONVEAUX Eds. L.N.M. 1171. Springer Verlag . Berlin. (1985). 239-246.

[91] R.RASALA. *The Rodrigues formula and polynomial differential operators*. Journ. of Math. Anal. and Appl. 84. (1981). 443-482.

[92] S.M.ROMAN, G.C.ROTA. *The umbral calculus*. Advances in Mathematics. 27. (1978). 95-188.

[93] A.RONVEAUX. *Ortogonal polynomials whose derivatives are quasi–orthogonal*. C.R.Acad.Sc.Paris. Sér. A 289. (1979).433-436.

[94] L.R.SHENTON. *A determinantal expression for a class of definite integral*. Proc. Edimburg Math. Soc. 9(2). (1953). 44-52. 10(2). (1954). 78-91, 134-140, 153-188.

[95] J.A.SHOHAT. *On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients*. Trans. A.M.S. 42.(1937).461-496.

[96] J.A.SHOHAT. *A differential equation for orthogonal polynomials*. Duke. Math. J.5.(1939).401-417.

[97] J.A.SHOHAT, J.D.TAMARKIN. *The problem of moments*. Amer. Math. Soc. New York. (1943).

[98] T.STIELTJES. *Recherches sur les fractions continues*. Annal. de la Faculté de Sciences de Toulouse.(1)8.(1894). T 1-122; (1)9.(1895).A 5-47.

[99] G.SZEGÖ. *Orthogonal polynomials*.Amer.Math.Soc.Colloq.Publ.vol.23. Providence. Rhode Island 1975. (Quarta Edição).

[100] V.B.UVAROV. *Relation entre deux systèmes de polynômes orthogonaux relatifs à différent poids*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR. (1) 126. (1959). 25-36.

[101] V.B.UVAROV. *The connection between systems of polynomials orthogonal with respect to different distribution functions*. USSR Compt. Math. Phys. (6) 9. (1969). 33-36.

[102] M.S.WEBSTER. *Orthogonal polynomials with orthogonal derivatives*. Bull. Amer. Math. Soc. 44. (1938). 880-888.

[103] D.V.WIDDER. *Laplace Transform*.University Press. Princeton.1946.

Contents

Introdução **i**

1 Motivação **1**
1.1 Noções Gerais 2
1.2 Operadores em $\mathbb{P}^*$ 12
1.3 Quase–Ortogonalidade 21
1.4 Operadores em $\mathbb{P}$ que Preservam a Ortogonalidade 27

2 S.P.O.M. Semi–Clássicas **31**
2.1 Classe de uma Funcional de Momentos 34
2.2 Algumas Caracterizações 41
2.3 Exemplos de S.P.O.M. Semi–Clássicas 51
2.3.1 Caso Particular $s = 0$ 51
2.3.2 Modificações Mediante Deltas de Dirac 57

3 Modificações Polinomiais das Funcionais **61**
3.1 Estudo Geral 63
3.2 Estabilidade das Funcionais Semi–Clássicas 72
3.3 Aplicação a Algumas S.P.O.M. Clássicas 74
3.3.1 Caso Hermite 74
3.3.2 Caso Laguerre 76

4 Modificações Inversas Polinomiais **77**
4.1 Formulação do Problema 79
4.1.1 Caso (i) 81
4.1.2 Caso (ii) 83
4.1.3 Caso (iii) 86
4.2 Estabilidade das Funcionais Semi–Clássicas 89
4.3 Um Exemplo de Problema Inverso 91
4.4 Segundo Exemplo 96

5 Problemas Inversos Diferenciais **99**
5.1 Tipo Szegö e Karlin 103
5.1.1 Caso Particular: Tipo S.Belmehdi 108
5.1.2 Caso Particular: Tipo P.Nevai 111
5.2 Tipo S.Bochner 115

5.3 Uma Generalização 120
5.4 Uma Aplicação 123

Bibliografia **132**