



FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS  
E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA MECÂNICA

# **Avaliação pelo Método dos Elementos Finitos das Cargas Críticas de “Bending-Buckling”**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia  
Mecânica na Especialidade de Energia e Ambiente

**Autor**

**Daniel Gomes Pais**

**Orientadores**

**Professora Doutora Ana Paula Bettencourt Martins Amaro**

**Professora Doutora Maria Augusta Neto**

**Júri**

**Presidente** Professor Doutor Fernando Jorge Ventura Antunes  
Professor Auxiliar da Universidade de Coimbra

**Vogais** Professor Doutor Rogério Augusto da Costa Pereira Leal  
Professor Auxiliar da Universidade de Coimbra

**Coimbra, Julho, 2011**

Aos meus pais,  
à minha irmã,  
e à minha namorada.

## Agradecimentos

O trabalho que aqui se apresenta só foi possível graças à colaboração e apoio de algumas pessoas, às quais não posso deixar de prestar o meu reconhecimento.

Em primeiro lugar, o meu agradecimento e reconhecimento especial à minha orientadora, Professora Doutora Maria Augusta Neto, por todo o apoio prestado durante a realização desta dissertação, pela sua inestimável e cuidada orientação a cada dificuldade, bem como os conselhos dados, boa disposição e paciência que sempre demonstrou no decurso deste trabalho, empenho, dedicação, constante disponibilidade, incentivo, partilha de conhecimentos e ensinar contribuindo em muito para a execução desta dissertação.

À Professora Doutora Ana Paula Bettencourt Martins Amaro, também orientadora da minha dissertação, agradeço o apoio, partilha de conhecimento, contribuição e disponibilidade para a realização desta dissertação.

Ao Professor Doutor Rogério Augusto da Costa Pereira Leal, pela disponibilidade demonstrada e por me ter facultado e disponibilizado material de apoio para a escrita da presente dissertação.

Aos meus Pais, Vitória e Valdir, e à minha irmã Cristina, pela oportunidade que me deram, pelo amor, paciência, força com que sempre me acompanharam e apoio incondicional ao longo de todos estes anos,

À minha namorada Vânia, pelo seu carinho, apoio, força, incentivo, dedicação, paciência, permanente encorajamento, e por tornar os momentos maus simplesmente em momentos menos bons. Obrigado pela enorme ajuda, amizade e por estares sempre comigo pois sem ti não teria sido fácil. Obrigado por tudo!!

A todos os meus amigos e colegas, especialmente aqueles que me acompanharam ao longo dos últimos anos, pelo apoio, pelo equilíbrio que me proporcionaram atingir, pela amizade, ajuda e todos os momentos de alegria e folia.

**A todos o meu sincero Muito Obrigado e profundo Reconhecimento!**

## Resumo

Na última década, a utilização de materiais compósitos na indústria aeroespacial tem aumentado consideravelmente. A sua aplicação deixou de ser unicamente em componentes secundários, tais como superfícies de controlo de voo, e passou a ser na construção da estrutura do avião.

O conhecimento das cargas críticas é essencial no projecto estrutural dos componentes, como por exemplo de uma aeronave, nomeadamente, na previsão da intensidade dos ventos laterais que a asa pode suportar sem entrar em rotura.

O *Bending Buckling*, ou seja, flambagem em flexão, ocorre quando a deformação atinge um nível crítico e a estrutura fica instável fazendo com que surjam deslocamentos fora do plano de solicitação que, inclusivamente, são superiores aos deslocamentos verificados no plano.

Nesta sequência, e dado o facto de ainda não se encontrar disponível na literatura referências significativas do efeito conjunto *Bending-Buckling* em materiais compósitos, surge esta dissertação com o objectivo de determinar o valor da carga crítica para a qual ocorre esse efeito, através do *software* VABS e DYMORE, pela análise de elementos finitos.

Neste caso em concreto, serão analisados laminados compósitos com diferentes orientações, de matriz orgânica, nomeadamente matriz termoendurecível em epóxido, reforçada com fibras contínuas de vidro-E.

**Palavras-chave:** Flambagem em Flexão, Materiais Compósitos, Elementos Finitos, VABS, DYMORE.

## Abstract

In the last decade, the use of composites in the aerospace industry has increased considerably. Their application is no longer only on components such as secondary flight control surfaces and became the construction of the airframe.

The knowledge of critical loads is essential in the structural design of components such as an aircraft, particularly in forecasting the intensity of the winds that the kite can handle without going into failure.

The *Bending Buckling* occurs when the deformation reaches a critical level and the structure becomes unstable causing displacements arising out of the load plane, in some cases the out of plane displacements may be higher than those seen in the load plan.

In this context, and taking in account that in the literature is still not available a great number of references related with the study of the effect of *Bending-Buckling* on composite materials, this dissertation arises in order to determine the critical load values, for which this effect occurs. This evaluation will be performed through the software VABS and DYMORE using a finite element analysis.

In this work, laminates with different orientations of the organic matrix, including thermosetting epoxy matrix reinforced with continuous glass fiber-E, will be study.

**Keywords** Bending Buckling, Composite Materials, Finite Elements, VABS, DYMORE.

## Índice

Índice de Figuras.....	v
Simbologia.....	vi
1. Introdução.....	1
2. Análise de Vigas .....	4
2.1. Conceitos Básicos.....	4
2.1.1. Leis Constitutivas de Materiais Isotrópicos .....	4
2.1.2. Leis Constitutivas de Materiais Ortotrópicos.....	5
2.2. Teoria de Timoshenko .....	16
2.3. Validação numérica do VABS .....	19
2.3.1. Secção quadrada .....	20
2.3.2. Secção rectangular .....	23
2.4. Análise de convergência do VABS .....	25
3. Flambagem em Flexão – “ <i>Bending Buckling</i> ” .....	27
3.1. Solução Analítica.....	27
3.2. Solução Numérica.....	30
3.3. Procedimento Numérico.....	31
3.4. Exemplos de Aplicação.....	33
3.4.1. Material Isotrópico.....	33
3.4.2. Material Compósito .....	34
4. Conclusões.....	37
5. Referências bibliográficas .....	39
6. Anexo A.....	40
6.1. Placa laminada $[0]_{24}$ .....	40
6.2. Placa laminada $[0]_{16}$ .....	41
6.3. Placa laminada $[0_2^\circ/45_2^\circ]_{2s}$ .....	42
6.4. Placa laminada $[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$ .....	43
6.5. Placa laminada $[45_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$ .....	44
6.6. Placa laminada $[-45_2^\circ/45_2^\circ]_{2s}$ .....	45

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 a) Várias lâminas com fibras unidireccionais; b) Compósito laminado .....	3
Figura 2- Uma lâmina ortotrópica com representação dos sistemas material e global. ....	6
Figura 3- Uma lâmina em estado plano de tensão. ....	13
Figura 4- Rotações da secção transversal da viga de Timoshenko. ....	16
Figura 5- Secção transversal quadrada. ....	20
Figura 6- Secção transversal rectangular. ....	23
Figura 7. Variação dos valores diferentes de zero da matriz de rigidez da secção transversal quadrada. ....	26
Figura 8. Variação dos valores diferentes de zero da matriz de rigidez da secção transversal rectangular. ....	26
Figura 9. Viga encastrada de secção rectangular carregada com uma carga $P$ . ....	27
Figura 10. Conversão de um modelo tridimensional para um modelo unidimensional e bidimensional. ....	31
Figura 11. a) Representação do sistema de eixos global; b) Representação da deformação da placa. ....	33
Figura 12. Secção transversal da geometria rectangular da viga. ....	33
Figura 13. Variação do deslocamento com o incremento de carga para a placa isotrópica. ....	34
Figura 14. Variação do deslocamento com o incremento de carga para a placa laminada $[0]_{24}$ . ....	35
Figura 15. Variação do deslocamento com o incremento de carga para as restantes placas laminadas. ....	36
Figura 16. Variação do deslocamento com o incremento de carga para $[0^\circ]_{24}$ . ....	40
Figura 17. Variação do deslocamento com o incremento de carga para $[0^\circ]_{16}$ . ....	41
Figura 18. Variação do deslocamento com o incremento de carga para $[0_2^\circ/45_2^\circ]_{2s}$ . ....	42
Figura 19. Variação do deslocamento com o incremento de carga para $[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$ . ....	43
Figura 20. Variação do deslocamento com o incremento de carga para $[45_2/90_2]_{2s}$ . ....	44
Figura 21. Variação do deslocamento com o incremento de carga para $[-45_2/45_2]_{2s}$ . ....	45

---

## SIMBOLOGIA

### Convenções

$A$  – Escalar

$\mathbf{A}$  – Matriz

### Sobrescrito

$\mathbf{A}^T$  – Transposta de uma matriz

$\mathbf{A}^{-1}$  – Inversa de uma matriz

### Símbolos

$x_1, x_2, x_3$  – Sistema de eixos genérico

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  – Sistemas de eixos material

$\sigma$  – Tensor das tensões

$\varepsilon$  – Tensor das deformações

$C$  – Coeficientes elásticos de rigidez

$S$  – Coeficientes de flexibilidade

$Q$  – Coeficientes de rigidez reduzidos

$E_i \quad i = 1,2,3$  – Modulo de Young

$G_{ij} \quad i, j = 1,2,3$  – Modulo de elasticidade transversal

$\nu_{ij} \quad i, j = 1,2,3$  – Coeficiente de Poisson

$\delta_{ij} \quad i, j = 1,2,3$  – Símbolo de Kronecker

$\varepsilon_{mn} \quad m, n = 1,2,3$  – Tensor das deformações

$E$  – Módulo de Elasticidade

$u$  – Deslocamento

$\phi$  – Ângulo de torção da secção transversal

$k$  – Factor de correcção ao corte

$M_t$  – Momento torçor

$I$  – Momento de Inércia



## 1. INTRODUÇÃO

A isotropia é a propriedade que caracteriza as substâncias que possuem as mesmas propriedades físicas independentemente da direcção considerada.

Um material é pois isotrópico se as suas propriedades mecânicas e térmicas são as mesmas em todas as direcções. Podem ter estruturas microscópicas homogéneas ou heterogéneas, como por exemplo o aço que demonstra comportamento isotrópico, apesar da sua estrutura microscópica ser heterogénea.

As propriedades elásticas de um material isotrópico são normalmente definidas pelo Módulo de elasticidade ( $E$ ) e pelo Coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Um material ortotrópico é definido como aquele que apresenta três planos de simetria, onde as propriedades do material são independentes da direcção dentro de cada plano, como o caso de alguns materiais compósitos.

Um material compósito é formado por uma mistura ou combinação, de dois ou mais materiais numa escala macroscópica, que diferem na forma, composição química e que na sua essência são insolúveis uns nos outros, com o objectivo de atingir melhores propriedades, mecânicas ou outras, usualmente não satisfeitas pelas ligas metálicas convencionais, cerâmicos e polímeros.

As suas propriedades mecânicas e físicas dependem das propriedades dos seus constituintes, geometria, distribuição do reforço e da combinação das fases.

Podemos destacar como vantagens dos materiais compósitos a sua elevada rigidez e resistência específica, elevada resistência à fadiga, boa resistência à corrosão, condutibilidade eléctrica variável com o projecto, estabilidade dimensional com a temperatura, anisotropia, podendo ser projectados para dar apenas a resistência e rigidez necessária em cada direcção mas, a principal vantagem dos materiais compósitos é o facto de poderem ser projectados para possuírem propriedades específicas. No entanto também

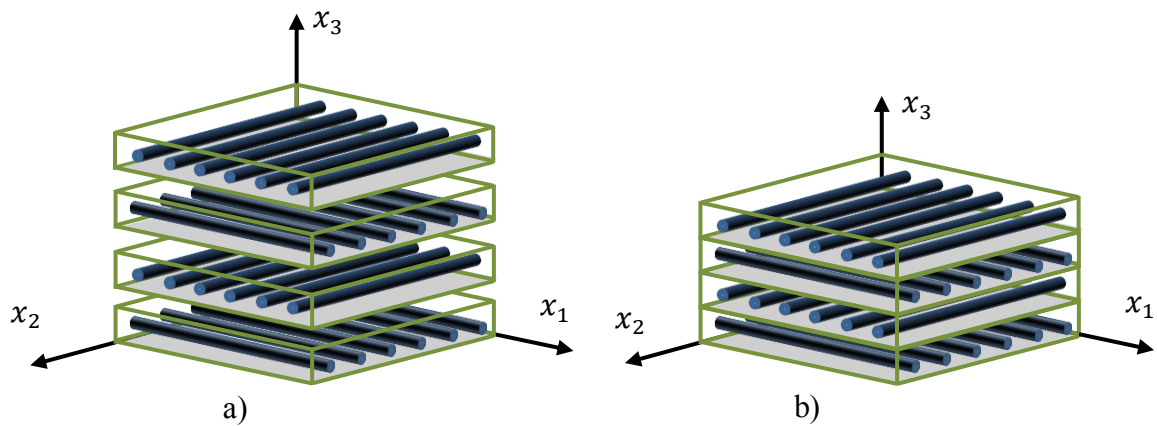
possuem algumas desvantagens, como é o caso da grande dispersão nas propriedades, sensibilidade aos processos de produção, necessidade de uma análise complexa devido a possuírem propriedades muito variáveis, comportamento não linear e serem materiais frágeis.

A maioria dos materiais compósitos fabricados industrialmente, são constituídos por um material de reforço, usualmente designado por fibra, e um material de base designado por matriz. A matriz transmite os esforços mecânicos aos reforços, mantendo-os em posição, e contribuindo com alguma ductilidade, em geral pequena, para o compósito. O reforço é o elemento que suporta os esforços no compósito e é em geral de elevada resistência e rigidez.

Podemos classificar as matrizes utilizadas em materiais compósitos como inorgânicas que são formadas a partir de cimentos, de gesso, de materiais metálicos ou cerâmicos e as orgânicas que são compostos orgânicos resultantes de reacções de polimerização por adição ou condensação de vários compostos base, podendo ser poliméricas termoplásticas ou termoendurecíveis. No que diz respeito ao reforço, este normalmente é constituído por fibras de forma cilíndrica podendo ser curtas ou longas, contínuas ou descontínuas, unidireccionais, bidireccionais ou distribuídas aleatoriamente.

Dentro dos materiais compósitos podemos definir o subgrupo dos laminados, sendo o seu elemento base de construção as lâminas como mostra a Figura 1.

Os principais constituintes de um compósito laminado são as fibras e a matriz. As fibras fornecem ao laminado a maior parte da sua resistência actuando portanto como principal elemento de suporte das cargas aplicadas. Os materiais mais usados como fibras são o vidro, o carbono e a aramida ou kevlar. A matriz envolve as fibras protegendo-as do ambiente exterior, garante a arquitectura do empilhamento e actua como elemento de transferência das cargas entre fibras, sendo as resinas poliméricas as mais usadas. As mais vulgares são as de poliéster, vinilo ester, epóxicas e fenólicas. (Neto, 2005; Leal, 2007/8a)



**Figura 1** a) Várias lâminas com fibras unidirecionais; b) Compósito laminado

O *Bending Buckling*, ou seja, flambagem em flexão, ocorre quando a deformação atinge um nível crítico e a estrutura fica instável fazendo com que surjam deslocamentos fora do plano de solicitação que, inclusivamente, são superiores aos deslocamentos verificados no plano.

Nesta sequência, e dado o facto de ainda não se encontrar disponível na literatura referências significativas do efeito conjunto *Bending-Buckling* em materiais compósitos, surge esta dissertação com o objectivo de determinar o valor da carga crítica para a qual ocorre esse efeito, através do *software* VABS e DYMORE, pela análise de elementos finitos.

Neste caso em concreto, serão analisados laminados compósitos com diferentes orientações, de matriz orgânica, nomeadamente matriz termoendurecida em epóxico, reforçada com fibras contínuas de vidro-*E*.

## 2. ANÁLISE DE VIGAS

### 2.1. Conceitos Básicos

#### 2.1.1. Leis Constitutivas de Materiais Isotrópicos

Um material isotrópico é definido como aquele que apresenta um número infinito de planos de simetria. Por esse motivo podemos dizer, de forma equivalente, que não existem direcções preferenciais. Assim, para um sistema de eixos  $x_1 x_2 x_3$  genérico, as relações constitutivas para materiais isotrópicos são (Neto, 2005; Leal, 2007/8b)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

Os coeficientes elásticos de rigidez  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) da matriz do segundo membro da equação (1), são relacionados com as constantes elásticas de engenharia,  $E_i$ ,  $\nu_{ij}$  e  $G_{ij}$  através das equações (Reddy, 1997)

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{22} = c_{33} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_{23} = c_{31} = c_{32} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_{44} = c_{55} = c_{66} = G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (2)$$

Sendo os restantes  $c_{ij}$  iguais a zero.

Usando as relações constitutivas inversas, ou seja, colocando as deformações em função das tensões, a equação (1) pode ser expressa como (Neto, 2005; Leal, 2007/8b)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

Onde  $s_{ij}$  são os coeficientes de flexibilidade, representados por  $S$  no segundo membro da equação (3) e que verificam a igualdade  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ .

Para estes materiais, o número de coeficientes elásticos independentes reduz-se a 2, podendo a equação (1) ser escrita em notação indicial na forma

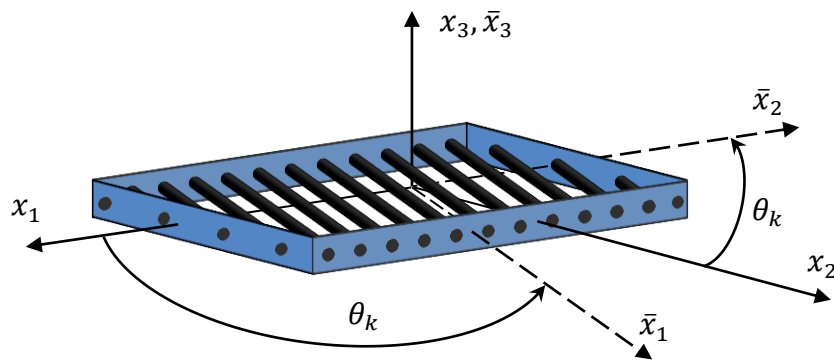
$$\sigma_{ij} = \left[ \frac{E}{1+\nu} \delta_{im} \delta_{jn} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{mn} \right] \varepsilon_{mn} \quad (4)$$

### 2.1.2. Leis Constitutivas de Materiais Ortotrópicos

O sistema de eixos material da lâmina é definido como  $\bar{x}_1$  sendo coincidente com a direcção de fibra,  $\bar{x}_2$  perpendicular a  $\bar{x}_1$  no plano do laminado e  $\bar{x}_3$  perpendicular aos outros dois eixos. Este sistema de eixos ortonormado e directo é apresentado na Figura 2. Neste sistema de eixos a lâmina possui três planos de simetria, podendo o material que a constitui ser designado por ortotrópico. As relações constitutivas desse material podem ser escritas na forma (Neto, 2005):

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \bar{c}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & \bar{c}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_{31} & \bar{c}_{32} & \bar{c}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix}_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \bar{\sigma} = \bar{C}\bar{\varepsilon} \quad (5)$$

em que todas as grandezas no sistema material serão assinaladas com um traço sobreposto.



**Figura 2-** Uma lâmina ortotrópica com representação dos sistemas material e global.

Os coeficientes elásticos de rigidez  $\bar{c}_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) da matriz do segundo membro da equação (5), são relacionados com as constantes elásticas de engenharia,  $E_i$ ,  $\nu_{ij}$  e  $G_{ij}$  através das equações (Reddy, 1997)

$$\begin{aligned} \bar{c}_{11} &= E_1 \frac{(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}, & \bar{c}_{12} = \bar{c}_{21} &= E_1 \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} = E_2 \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta} \\ \bar{c}_{22} &= E_2 \frac{(1 - \nu_{13}\nu_{31})}{\Delta}, & \bar{c}_{13} = \bar{c}_{31} &= E_1 \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta} = E_3 \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta} \\ \bar{c}_{33} &= E_3 \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta}, & \bar{c}_{23} = \bar{c}_{32} &= E_2 \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta} = E_3 \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta} \\ \bar{c}_{44} &= G_{23}, & \bar{c}_{55} &= G_{13}, & \bar{c}_{66} &= G_{12} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \end{aligned} \quad (6)$$

Usando as relações constitutivas inversas, ou seja, colocando as deformações em função das tensões, a equação (5) pode ser expressa como (Neto, 2005)

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{pmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{s}_{31} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix}_k \Leftrightarrow \bar{\varepsilon} = \bar{S}\bar{\sigma} \quad (7)$$

Onde  $\bar{s}_{ij}$  são os coeficientes de flexibilidade, representados por  $\bar{S}$  no segundo membro da equação (7) e que verificam a igualdade  $\bar{S} = \bar{C}^{-1}$ .

O sistema de coordenadas usado para definir a orientação do laminado, em geral, não coincide com o sistema de coordenadas material de cada lâmina. Por outro lado, o sistema de coordenadas para o qual é obtida a solução dos problemas é o sistema de coordenadas cartesianas associado ao laminado  $(x_1, x_2, x_3)$ . Assim, existe necessidade de estabelecer as relações de transformação das tensões e das deformações, dos coeficientes de flexibilidade e de rigidez para as quantidades correspondentes no outro sistema de coordenadas.

O tensor das tensões em coordenadas material e em coordenadas do laminado pode ser escrito, respectivamente, como

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} & \bar{\sigma}_{12} & \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{21} & \bar{\sigma}_{22} & \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{31} & \bar{\sigma}_{32} & \bar{\sigma}_{33} \end{bmatrix}, \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sendo as tensões um tensor de segunda ordem, a relação entre os dois conjuntos de componentes é definido como,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{A} \quad (9)$$

e a relação inversa é definida por

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{A}^T \quad (10)$$

onde a matriz de transformação  $\mathbf{A}$ , entre os dois sistemas de eixos, tem uma dimensão 3x3 e contém os co-senos directores, isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) & 0 \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} \quad (11)$$

em que os co-senos directores são os coeficientes da matriz de transformação sendo definidos como

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{e}}^T \quad (12)$$

sendo  $\bar{\mathbf{e}}$  e  $\hat{\mathbf{e}}$  os versores dos sistemas de coordenadas material e do laminado, respectivamente.

A relação de transformação entre os dois sistemas de coordenadas para o tensor das tensões é estabelecida pelas equações (9) e (10). Contudo, será importante determinar a relação de transformação entre os dois sistemas de coordenadas quando as tensões são descritas na forma pseudo-vectorial, definida na equação (5). Fazendo as operações matriciais explicitamente definidas na equação (9) e tendo em conta a simetria do tensor das tensões, a equação (9) pode ser escrita de forma equivalente por (Reddy, 1997)



$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_k & \sin \theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 \\ \sin \theta_k \cos \theta_k & -\sin \theta_k \cos \theta_k & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{33} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ou de forma compacta

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (14)$$

onde  $\mathbf{T}$  é a nova matriz de transformação. A forma pseudo-vectorial da equação (10), utilizando o mesmo procedimento é dada por

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \quad (15)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz de transformação que pode ser obtida a partir da matriz  $\mathbf{T}$  substituindo  $\theta_k$  por  $-\theta_k$ .

As deformações também são um tensor de segunda ordem, pelo que as equações de transformação definidas anteriormente para as tensões, permanecem válidas para o tensor das deformações, ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{A} \quad (16)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{A}^T \quad (17)$$

Em que,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , são o tensor de deformações nos sistemas de coordenadas do laminado e material, respectivamente, definidos como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{21} & \bar{\varepsilon}_{22} & \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{31} & \bar{\varepsilon}_{32} & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Recorrendo ao mesmo procedimento que foi utilizado para obter as equações (14) e (15), substituindo os componentes da tensões pelos componentes das deformações é possível obter relações semelhantes. Contudo, é necessário efectuar uma pequena alteração das equações (13) a (15) como consequência da forma vectorial das componentes da deformação ser diferente da forma vectorial das componentes da tensão, o que conduz às seguintes relações:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_k \cos \theta_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_k & \sin \theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 \\ \sin 2\theta_k & -\sin 2\theta_k & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Em que a matriz de transformação do segundo termo da equação (19) é a transposta da matriz  $\mathbf{R}$  da equação (15), podendo a equação (19) ser representada de forma compacta como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (20)$$

De forma semelhante a relação inversa é dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_k \cos \theta_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_k & -\sin \theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 \\ -\sin 2\theta_k & \sin 2\theta_k & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (21)$$

A matriz de transformação na equação (21) é a transposta da matriz  $T$  da equação (13). Então, a equação (21) pode ser escrita de forma compacta por

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (22)$$

A lei de transformação para converter os componentes da deformação entre os sistemas de coordenadas material e do laminado é estabelecida pelas equações (19) e (21).

As restantes quantidades que necessitam de ser transformadas são os coeficientes de rigidez  $\bar{c}_{ij}$  e de flexibilidade  $\bar{s}_{ij}$  do material. Para obter estas transformações vamos utilizar as relações tensão-deformação, definidas na equação (5), na relação de transformação das tensões (14), e escreve-las como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{C}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (23)$$

Substituindo a equação (22), na equação (23), conduz a

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{C}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (24)$$

onde  $\bar{\mathbf{C}}$  é a matriz dos coeficientes de rigidez do material definida no sistema de coordenadas material.

Por outro lado, as relações constitutivas do material no sistema de coordenadas do laminado são

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (25)$$

em que  $\mathbf{C}$  é a matriz dos coeficientes de rigidez do material definida no sistema de coordenadas do laminado.

Comparando as equações (24) e (25) obtemos a igualdade

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{C}}\mathbf{T}^T \quad (26)$$

Para uma lâmina  $k$  a equação (25) pode ser escrita de forma extensiva, como

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}_k \end{pmatrix} \quad (27)$$

onde  $c_{ij}$  representa os coeficientes elásticos de rigidez definidos no sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ . A matriz  $\mathbf{C}$  depende directamente da orientação da lâmina de material ortotrópico.

Para obter a relação dos coeficientes de flexibilidade nos dois sistemas de coordenadas, é utilizada a equação (7) na equação (20), obtendo

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{S}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (28)$$

Substituindo a equação (15) na equação (28), obtemos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{S}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \quad (29)$$

cuja forma expandida, é

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{54} & S_{55} & 0 \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \end{pmatrix}_k \quad (30)$$

A quantidade  $\mathbf{S} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{S}} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{R}$  é a matriz dos coeficientes de flexibilidade definidos no sistema de coordenadas do laminado.

As equações (27) e (30) estão escritas para o caso geral. Porém, a generalidade dos laminados apresentam frequentemente um estado plano de tensão, o qual é definido como o estado em que as tensões transversais  $\bar{\sigma}_{33}$ ,  $\bar{\sigma}_{13}$  e  $\bar{\sigma}_{23}$  são desprezáveis.

Na Figura 3 é apresentado o estado plano de tensão para uma lâmina no plano  $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ .

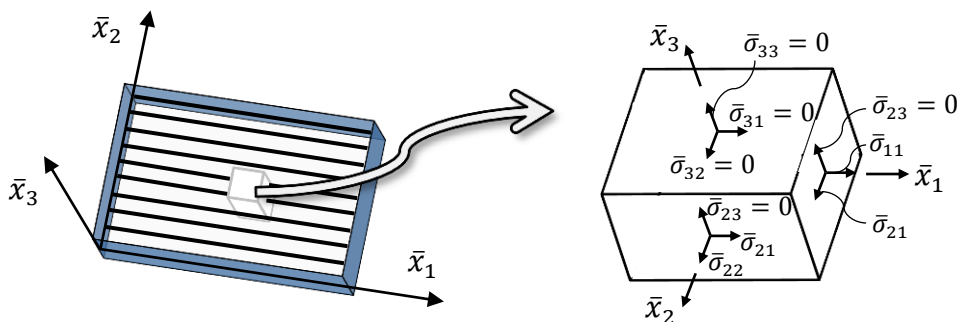


Figura 3- Uma lâmina em estado plano de tensão.

Para uma lâmina ortotrópica, a condição  $\bar{\sigma}_{33} = 0$ , quando utilizada na equação (7) leva a uma deformação transversal dada por

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \bar{s}_{13} \bar{\sigma}_{11} + \bar{s}_{23} \bar{\sigma}_{22} \quad (31)$$

Para a mesma lâmina ortotrópica, a condição  $\bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{13} = 0$ , quando utilizada na equação (7), conduz a deformações angulares nulas

$$\bar{\varepsilon}_{23} = \bar{\varepsilon}_{13} = 0 \quad (32)$$

Tendo em conta que a maior resistência das fibras se encontra na direcção  $\bar{x}_1$ , os compósitos reforçados com fibras, nas direcções transversais apresentam uma resistência baixa. Ainda que em comparação com os valores de  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$  e  $\bar{\sigma}_{12}$ , as tensões transversais sejam baixas, estas podem levar à rotura do laminado nas direcções transversais.

Consequentemente, na análise de laminados as tensões transversais não podem ser sempre desprezadas. Assim, desprezando a tensão transversal normal mas incluindo as tensões de corte e utilizando as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \bar{s}_{11} &= \frac{1}{E_1}, & \bar{s}_{12} = \bar{s}_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ \bar{s}_{22} &= \frac{1}{E_2}, & \bar{s}_{66} &= \frac{1}{G_{13}} \\ \bar{s}_{44} &= \frac{1}{G_{12}}, & \bar{s}_{55} &= \frac{1}{G_{23}} \end{aligned} \quad (33)$$

a equação (7) das relações constitutivas inversas, assume a forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{s}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{s}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Para se obter a relação tensão-deformação, a equação (34) pode ser invertida, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{23} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{23} \\ 2\bar{\varepsilon}_{13} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (35)$$

onde os coeficientes  $\bar{Q}_{ij}$ , são designados por coeficientes de rigidez reduzidos, definidos como

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= \frac{E_1}{\Delta}, & \bar{Q}_{22} &= \frac{E_2}{\Delta}, & \bar{Q}_{12} &= \frac{E_2\nu_{12}}{\Delta} \\ \bar{Q}_{44} &= G_{23}, & \bar{Q}_{55} &= G_{13}, & \bar{Q}_{66} &= G_{12} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} \end{aligned} \quad (36)$$

A equação (36) é a relação constitutiva de uma lâmina ortotrópica no seu sistema material. Nas condições enunciadas as relações tensão-deformação expressas no sistema de coordenadas do laminado, equação (27), são dadas por

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (37)$$

ou numa forma condensada

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (38)$$

Onde  $\boldsymbol{\sigma}_p = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ 2\sigma_{23} \ 2\sigma_{13} \ 2\sigma_{12}]^T$  é o pseudo-vector de tensão,  $\boldsymbol{\varepsilon}_p = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{13} \ 2\varepsilon_{12}]^T$  é o pseudo-vector de deformações e em que  $\mathbf{Q}$  é a matriz dos coeficientes de rigidez reduzidos, definidos no sistema de coordenadas do laminado, como

$$Q = T_p \bar{Q} T_p^T \quad (39)$$

A matriz  $T_p$  é obtida a partir da matriz de transformação do segundo membro da equação (13) pela eliminação da terceira linha e da terceira coluna.

## 2.2. Teoria de Timoshenko

Na teoria de Timoshenko, ou teoria de deformações de primeira ordem, são assumidas as seguintes hipóteses, (Oñate, 1992)

- 1) Os deslocamentos verticais de todos os pontos de uma secção transversal são pequenos e iguais ao deslocamento do ponto situado no eixo da viga  $x_1$ .
- 2) As secções planas normais ao eixo da viga antes da deformação permanecem planas, mas não necessariamente normais ao eixo após a deformação. (Figura 4)

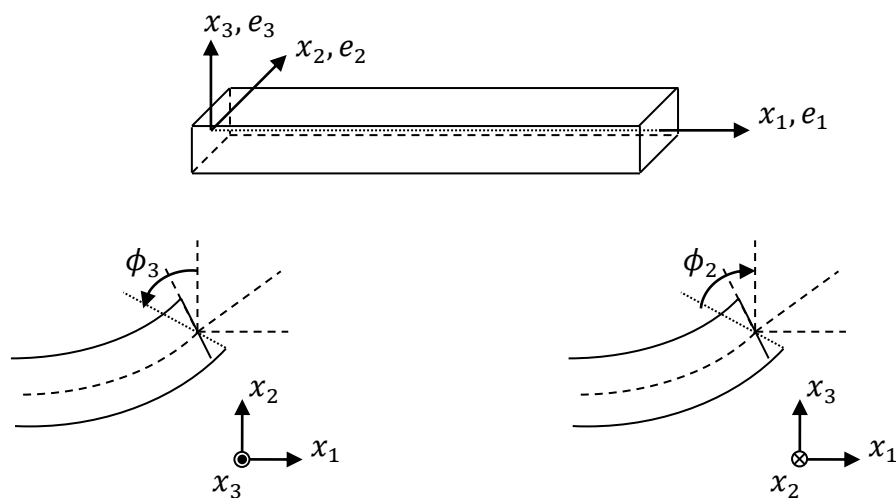


Figura 4- Rotações da secção transversal da viga de Timoshenko.

Para o desenvolvimento do campo de deslocamentos vamos considerar um conjunto de vectores unitários  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  fixos ao centróide da secção transversal da viga, de tal modo que,  $e_1$  se encontra alinhado com o eixo da viga e  $e_2$ ,  $e_3$  definem o plano da secção transversal, como representado na Figura 4.



O campo de deslocamentos  $u_1(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $u_2(x_1, x_2, x_3, t)$  e  $u_3(x_1, x_2, x_3, t)$  de um ponto arbitrário da viga na direcção  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  é descrito por, (Neto, 2005)

$$u_1(x_m, t) = u_1^0(x, t) + x_3\phi_2(x_1, t) - x_2\phi_3(x_1, t) \quad (40)$$

$$u_2(x_m, t) = u_2^0(x_1, t) - x_3\phi_1(x_1, t) \quad (41)$$

$$u_3(x_m, t) = u_3^0(x_1, t) - x_2\phi_1(x_1, t) \quad (42)$$

onde  $u_i^0$  é o deslocamento do eixo neutro na direcção  $x_i$  e  $\phi_1$  é o ângulo de torção da secção transversal em torno de  $x_1$ . As rotações da secção transversal  $\phi_2(x_1, t)$  e  $\phi_3(x_1, t)$  são consideradas positivas quando provocam uma rotação no sentido positivo dos eixos  $e_2$  e  $e_3$ , respectivamente.

Considerando as relações cinemáticas e as equações (40), (41) e (42) do campo de deslocamentos da teoria de Timoshenko, o campo de deformações é definido como

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_{13} \\ k_{12} \end{bmatrix} \quad (43)$$

ou, escrito numa forma compacta,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\delta} \quad (44)$$

com,

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{du_1^0}{dx_1}, \quad (45)$$

$$k_1 = \frac{d\phi_1}{dx_1}, \quad k_2 = \frac{d\phi_2}{dx_1}, \quad k_3 = \frac{d\phi_3}{dx_1}, \quad (46)$$

$$k_{12} = -\phi_3 + \frac{du_2^0}{dx_1}, \quad k_{13} = \phi_2 + \frac{du_3^0}{dx_1} \quad (47)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\delta = [\varepsilon^0 \quad K_t^T \quad K_s^T]^T = [\chi_t^T \quad K_s^T] \quad (49)$$

$$K_t = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T, \quad K_s = [k_{13} \quad k_{12}]^T, \quad \chi_t = [\varepsilon^0 \quad K_t^T]^T \quad (50)$$

onde  $k_1$  é a curvatura de torção,  $k_2, k_3$  são os termos de curvatura e  $k_{12}, k_{13}$  as deformações angulares.

A energia de deformação da secção transversal, ou a densidade de energia da viga por unidade de comprimento, pode ser escrita na forma

$$2U_0 = \int_S \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dS \quad (51)$$

Substituindo a equação (44) na equação (51), a energia de deformação da secção transversal é definida por

$$2U_0 = \int_S \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\delta} dS \quad (52)$$

Na equação (52) o vector  $\delta$  não depende das coordenadas que definem a secção transversal, podendo ser colocado fora do símbolo de integral, como

$$2U_0 = \delta^T \int_S \lambda^T C \lambda dS \delta \quad (53)$$

A relação constitutiva de uma lâmina ortotrópica, cuja orientação das fibras é arbitrária, é definida pela equação (27), utilizando esta equação na equação (53) é possível definir uma matriz  $D$ , como

$$D = \int_S \begin{bmatrix} c_{11} & -x_3 c_{16} & x_3 c_{11} & -x_2 c_{11} & 0 & c_{16} \\ -x_3 c_{61} & x_2^2 c_{55} + x_3^2 c_{66} & -x_3^2 c_{61} & x_2 x_3 c_{61} & x_2 c_{55} & -x_3 c_{66} \\ x_3 c_{11} & -x_3^2 c_{16} & x_3^2 c_{11} & -x_2 x_3 c_{11} & 0 & x_3 c_{16} \\ 0 - x_2 c_{11} & x_2 x_3 c_{16} & -x_2 x_3 c_{11} & x_2^2 c_{11} & 0 & -x_2 c_{16} \\ 0 & x_2 c_{55} & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ c_{61} & -x_3 c_{66} & x_3 c_{61} & -x_2 c_{16} & 0 & c_{66} \end{bmatrix} dS \quad (54)$$

e, conseqüentemente, a equação (53) pode ser escrita numa forma compacta, como

$$2U_0 = \delta^T D \delta \quad (55)$$

A matriz  $D$  é função das propriedades do material e da geometria da secção transversal.

O cálculo da matriz  $D$  é feito pelo programa VABS, utilizando o procedimento numérico apresentado e descrito por Neto (2005).

### 2.3. Validação numérica do VABS

No sentido de verificar a metodologia programada no VABS, vamos calcular analiticamente a matriz  $D$  definida na equação (54) e posteriormente comparar com os

resultados obtidos pelo VABS. Neste procedimento vamos considerar dois tipos de secção transversal: secção quadrada e secção rectangular.

### 2.3.1. Secção quadrada

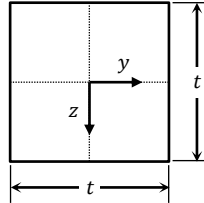


Figura 5- Secção transversal quadrada.

Calculando o integral definido na equação (54), considerando a secção transversal representada na Figura 5 obtém-se

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_{11}t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{16}t^2 \\ 0 & c_{55}\frac{t^4}{12} + c_{66}\frac{t^4}{12} & c_{16}\frac{t^4}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11}\frac{t^4}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11}\frac{t^4}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}t^2 & 0 & 0 \\ c_{16}t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}t^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Substituindo na equação (56) os respectivos coeficientes elásticos de rigidez definidos na equação (6) obtém-se

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E_1A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{13}I + G_{12}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13}A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12}A \end{bmatrix} \quad (57)$$

Onde  $A$  e  $I$  representam, a área da secção transversal e o momento de inércia respectivamente.

Na matriz  $D$  obtida pelo VABS, a ordem das linhas da matriz não corresponde à ordem apresentada na equação (57). Assim de modo a que fique coerente e seja mais fácil comparar os valores obtidos a equação (57) é reorganizada na forma

$$D = \begin{bmatrix} E_1 A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{12} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13} I + G_{12} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I \end{bmatrix} \quad (58)$$

Uma vez que na teoria de vigas de Timoshenko as deformações transversais de corte são constantes ao longo da espessura, as tensões de corte também apresentam uma distribuição constante ao longo da espessura e não satisfazem a condição das tensões de corte transversais nulas nas faces superior e inferior. Na prática, nas placas a tensão transversal de corte apresenta uma variação parabólica ao longo da espessura. Esta diferença, entre os dois estados de tensão, é corrigida no cálculo das resultantes das forças transversais de corte através da introdução de um factor multiplicativo  $k$ , chamado de factor de correcção ao corte na equação (58), ou seja (Neto, 2005; Oñate, 1992)

$$D = \begin{bmatrix} E_1 A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{12} A k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} A k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (G_{13} I + G_{12} I) k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 I \end{bmatrix} \quad (59)$$

Para uma placa de material homogéneo e secção rectangular de dimensões  $a \times b$ , considera-se  $k = 5/6$ . Em placas laminadas gerais, o factor de correcção ao corte depende

das propriedades do material e da sequência do laminado, podendo encontrar diferentes valores de correção em Lardeur (1990).

Assumindo um material isotrópico com as propriedades materiais apresentadas na Tabela 1 e tendo em conta a geometria da secção transversal apresentada na Figura 5, considerando  $t = 0.003 \text{ m}$ , a equação (59) assume a forma

<b>Propriedades</b>	
Modulo de Young (E)	210 GPa
Modulo de Elasticidade Transversal (G)	84 Gpa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,26
Massa Especifica ( $\rho$ )	7860 kg/m <sup>3</sup>

**Tabela 1-** Propriedades do aço.

$$D_{analitica} = \begin{bmatrix} 1,89E + 09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,30E + 05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,30E + 05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,45E - 01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42E + 00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42E + 00 \end{bmatrix} \quad (60)$$

A utilização do programa VABS no cálculo da matriz  $D$  vai conduzir à matriz  $D$  a seguir representada

$$D_{VABS} = \begin{bmatrix} 1,89E + 09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,27E + 05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,27E + 05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,41E - 01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42E + 00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42E + 00 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Como podemos constatar todos os valores estão dentro da mesma ordem de grandeza. Contudo, é importante salientar que este procedimento não é exacto, envolvendo na realidade um problema de minimização. O método estima a variação dos coeficientes de rigidez ao corte em função da relação da espessura/largura da secção transversal.

### 2.3.2. Secção rectangular

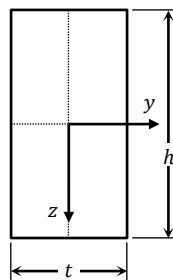


Figura 6- Secção transversal rectangular.

Calculando o integral definido na equação (54), considerando a secção transversal representada na Figura 6 obtém-se

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_{11}ht & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{16}ht \\ 0 & c_{55} \frac{ht^3}{12} + c_{66} \frac{h^3t}{12} & -c_{16} \frac{h^3t}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} \frac{h^3t}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} \frac{ht^3}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}ht & 0 \\ c_{16}ht & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}ht \end{bmatrix} \quad (62)$$

Considerando novamente os coeficientes elásticos de rigidez da equação (6) e substituindo-os na equação (62) obtém-se:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E_1 A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{13} I_z + G_{12} I_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 I_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1 I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} A \end{bmatrix} \quad (63)$$

Onde  $A$  e  $I$  representam respectivamente, a área e o momento de inércia da secção transversal apresentada na Figura 6.

Utilizando o procedimento anteriormente descrito e considerando  $t = 0.003m$  e  $h = 0.03m$ , a matriz  $\mathbf{D}$  é definida por

$$\mathbf{D}_{analitica} = \begin{bmatrix} 1,89E + 07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,30E + 06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,30E + 06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,77E + 02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42E + 03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42E + 01 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Para a mesma secção transversal e propriedades materiais, a matriz  $\mathbf{D}$  calculada pelo VABS é

$$\mathbf{D}_{VABS} = \begin{bmatrix} 1,89E + 07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,68E + 06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,30E + 06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,13E + 01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42E + 03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,42E + 01 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Como podemos constatar todos os valores estão dentro da mesma ordem de grandeza com excepção do componente 44 que diz respeito à torção. Isto acontece porque estamos a comparar os resultados obtidos pelo VABS, com a Teoria de Timoshenko que



não considera o empenamento da secção transversal. Contudo existem soluções da teoria da elasticidade que no caso da torção consideram também o empenamento da secção transversal. Os valores obtidos pelo VABS nesta situação estão mais próximos da solução proposta por Saint-Venant em que é considerado o empenamento da secção transversal. Nesta situação a solução é corrigida por um factor  $k$  que vai depender da relação  $h/t$  (Yu & Hodges, 2004). Para a relação  $h/t = 10$ , o factor de correção à torção é de 0.312.

## 2.4. Análise de convergência do VABS

Para calcular a matriz de rigidez da secção transversal de uma viga, utilizando o programa VABS, é necessário criar o modelo geométrico e fazer a discretização em elementos finitos da secção transversal da viga. A cada elemento finito são atribuídas propriedades materiais tais como  $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}, \rho$  e orientação das fibras.

Foi feita uma análise de convergência considerando várias discretizações nomeadamente, 5x5, 10x10, 15x15, 20x20, 24x24, 30x30 e 35x35 para a secção quadrada e 5x50, 10x100, 15x150, 20x200, 24x240, 30x300 e 35x350 para a secção rectangular. Nas Figura 7 e Figura 8 é apresentada a variação dos valores diferentes de zero da matriz de rigidez da secção transversal para as secções quadrada e rectangular, respectivamente, considerando as várias discretizações. Nestes gráficos o eixo das abcissas contém os índices dos componentes da matriz de rigidez  $D$  e, o eixo das ordenadas contém os respectivos valores numéricos.

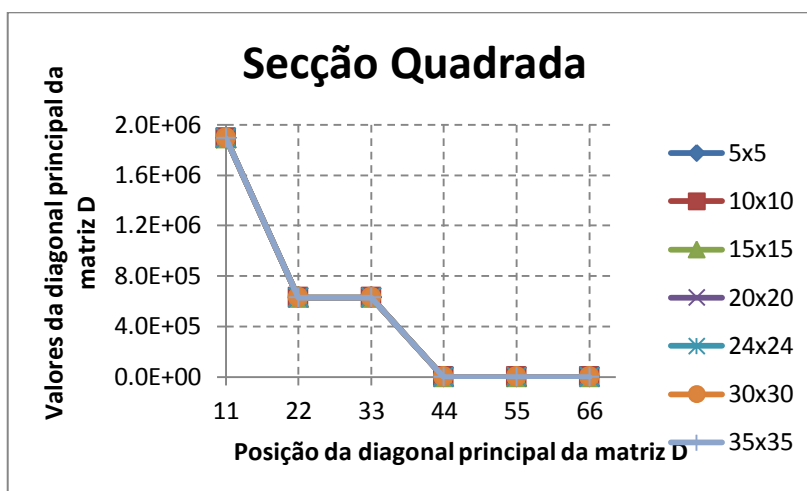


Figura 7. Variação dos valores diferentes de zero da matriz de rigidez da secção transversal quadrada.

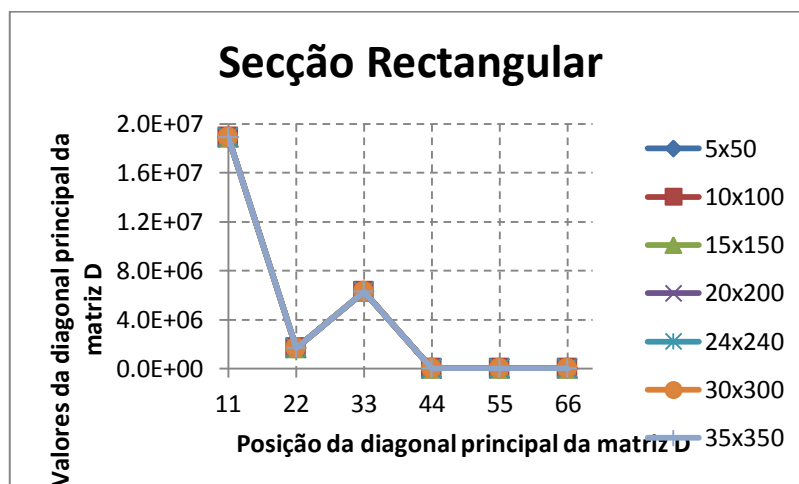


Figura 8. Variação dos valores diferentes de zero da matriz de rigidez da secção transversal rectangular.

Através desta análise podemos verificar que, tanto na secção quadrada como na secção rectangular, a partir da discretização 10x10 e 10x100 respectivamente a convergência de valores é total. Conforme apresentado nas Figura 7 e Figura 8 as curvas para as diferentes discretizações apresentam diferenças inferiores a 0.2%, pelo que as curvas estão sobrepostas. Perante esta análise e de forma a garantir a maior precisão possível, vamos utilizar uma discretização 24x24 e 24x240 para a secção quadrada e para a secção rectangular, respectivamente.

Através desta análise podemos concluir que de uma forma geral, o VABS não é sensível ao número de elementos.

### 3. FLAMBAGEM EM FLEXÃO – “BENDING BUCKLING”

#### 3.1. Solução Analítica

Considere a viga isotrópica encastrada na Figura 9, com módulo de Young longitudinal  $E$ , módulo de elasticidade transversal  $G$ , sujeita a uma carga vertical  $P$  a actuar no centro geométrico da secção transversal, na extremidade livre da viga encastrada.

Suponha-se também que, a altura  $h$  da viga é consideravelmente maior do que a espessura  $t$ ,  $v$  é o deslocamento lateral e  $\varphi$  é o ângulo de rotação. (Neto et al., 2008; Den Hartog, 1952)

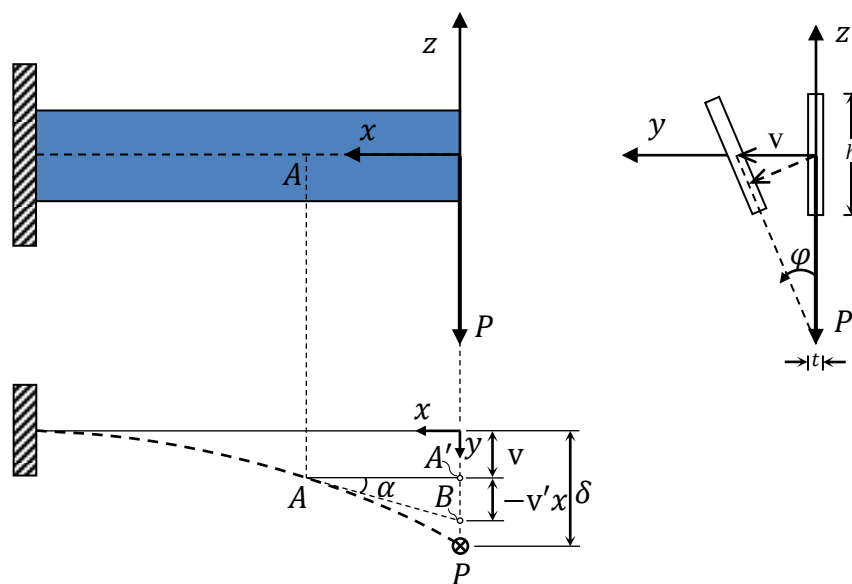


Figura 9. Viga encastrada de secção rectangular carregada com uma carga  $P$ .

$$\tan \alpha = \frac{\overline{BA'}}{x} \Rightarrow \overline{BA'} = \tan \alpha x = -v'x \quad (66)$$

Para pequenos deslocamentos:

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{dv}{dx} = v' \quad (67)$$

$$\delta = \overline{PB} + \overline{BA'} + v \Leftrightarrow \delta = \overline{PB} - v'x + v \quad (68)$$

$$\overline{PB} = \delta + v'x - v \quad (69)$$

Para que a força  $\mathbf{P}$  não produza um momento torçor na secção em  $A$ , a força  $P$  devia estar aplicada no ponto  $B$ . Contudo, devido à curvatura da viga no plano  $xy$ , vai existir um momento de torção na secção em  $A$  definido por:

$$M_t = P \overline{PB} = P(\delta + v'x - v) \quad (70)$$

A equação diferencial para o veio sem momento torçor distribuído ao longo do seu eixo é dada por:

$$GI_P \frac{d\varphi}{dx} = -M_t \quad (71)$$

Igualando a equação (70) e a equação (71), obtemos a equação diferencial para a torção

$$P(\delta + v'x - v) = -GI_P \varphi' \quad (72)$$

com

$$I_P = \frac{ht^3}{3} \quad (73)$$

A equação diferencial da viga no plano  $xy$  é definida por:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = M_z \quad (74)$$

O momento  $M_z$  é definido por

$$M_z = P\varphi x \quad (75)$$

Onde resulta a equação final na forma

$$P\varphi x = EI_z v'' \quad (76)$$

com

$$I_z = \frac{ht^3}{12} \quad (77)$$

Para resolver o problema formulado pelas equações (72) e (76) elimina-se o  $v$  da primeira equação através da primeira derivada

$$P(v''x + v' - v') = -\frac{Ght^3}{3} \varphi'' \quad (78)$$

de modo que

$$v'' = -\frac{Ght^3}{3Px} \varphi'' \quad (79)$$

No entanto, a partir da equação (76), é possível obter uma outra expressão para  $v''$

$$v'' = \frac{12P\varphi x}{Eht^3} \quad (80)$$

Igualando estas duas expressões obtém-se

$$\varphi'' + k^2 x^2 \varphi = 0 \quad (81)$$

com

$$k^2 = \frac{36P^2}{GEh^2t^6} \quad (82)$$

A equação (81) é não-linear e não tem solução simples. No entanto, Den Hartog (1952) mostrou que a menor raiz da equação é  $k = 4.17/l^2$ . Usando esta solução na equação (82), a carga crítica de flambagem em flexão para materiais isotrópicos é obtida como

$$P = \frac{4,17}{l^2} \sqrt{\frac{GEh^2t^6}{36}} \quad (83)$$

Neste trabalho a equação (83) é utilizada para obter a solução analítica da carga crítica de flambagem em flexão das vigas isotrópicas.

### 3.2. Solução Numérica

Alternativamente à solução analítica é possível obter a solução numérica. Nesse sentido o programa DYMORE (Bauchau, 7 June 2010) pode ser utilizado.

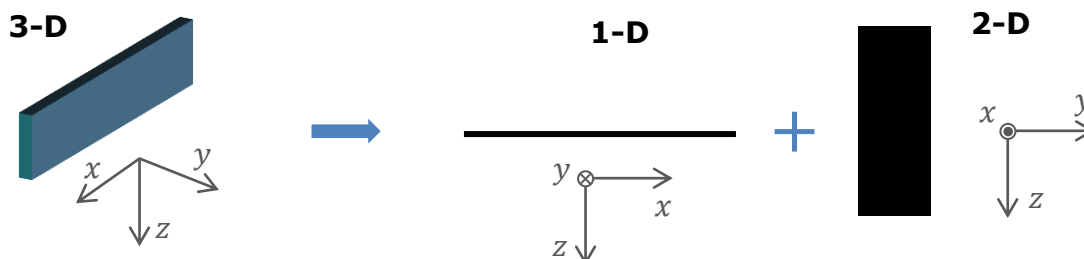
O DYMORE é um *software* baseado no método dos elementos finitos, utilizado na análise de sistemas elásticos não-lineares. O seu desenvolvimento teve início na década de 1980, pelo Prof. Olivier A. Bauchau. Essa modelação proporciona um nível de generalidade e flexibilidade necessárias para resolver problemas complexos, com componentes estruturais de forma variada. A metodologia disponível no programa

DYMORE permite considerar as não linearidades geométricas de estruturas tipo viga. Os elementos de viga disponíveis no DYMORE utilizam a matriz rigidez definida pelo VABS. O cálculo da carga crítica de flambagem em flexão é feito admitindo que a carga de flexão é aplicada de forma incremental. Nesse sentido, é possível calcular a carga de flambagem em flexão monitorizando o deslocamento com o incremento de carga.

De facto, como a carga aplicada é segundo o eixo  $z$ , é de esperar que só ocorra deslocamento no plano  $xz$ . Contudo, quando a deformação atinge um nível crítico, a estrutura fica instável e surgem deslocamentos fora do plano de solicitação que, inclusivamente, são superiores aos deslocamentos verificados no plano. A intensidade de carga para o qual se verifica este comportamento pode ser considerada como a carga crítica de flambagem em flexão.

### 3.3. Procedimento Numérico

As estruturas analisadas neste trabalho possuem uma geometria tridimensional. Contudo, atendendo a que uma das dimensões é muito superior às restantes, podemos analisar o comportamento geral da mesma como uma combinação de um modelo unidimensional e um modelo bidimensional. Este procedimento é apresentado de forma esquemática na Figura 10.



**Figura 10.** Conversão de um modelo tridimensional para um modelo unidimensional e bidimensional

O modelo bidimensional é considerado quando utilizamos o VABS para definir a matriz  $\mathbf{D}$ , matriz de rigidez da secção transversal.

O modelo unidimensional permite-nos utilizar o método dos elementos finitos para analisar o comportamento estático e dinâmico da estrutura.

De uma forma geral e sintética, podemos considerar que no modelo unidimensional a nível dos elementos finitos precisamos calcular a matriz  $k$ .

$$k = \int_0^l \int_A B^T \lambda^T C \lambda B \, dA \, dx = \int_0^l B^T \int_A \lambda^T C \lambda \, dA \, B \, dx \quad (84)$$

Esta matriz representa a rigidez da viga ou a rigidez do elemento finito e para a calcular, precisamos de determinar o integral na área definido na equação (85), ou seja, a matriz  $\mathbf{D}$

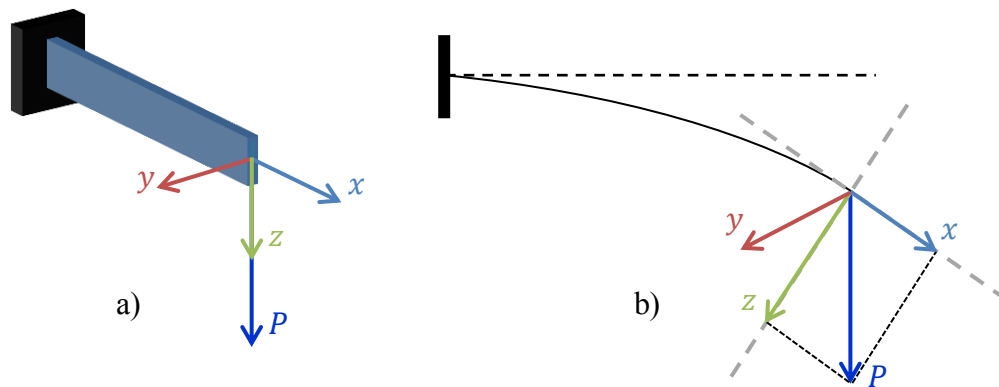
$$\mathbf{D} = \int_A \lambda^T C \lambda \, dA \quad (85)$$

Esta matriz tem em conta as propriedades do material que está a ser utilizado e também a geometria da secção transversal.

O DYMORE vai receber a informação do VABS, ou seja, a matriz  $\mathbf{D}$  e a discretização do modelo de elementos finitos da viga, como, o número de elementos finitos, comprimento da viga, condições de fronteira e carga aplicada, sendo esses dados fornecidos ao DYMORE através de um ficheiro de input. O DYMORE através de uma análise não linear permite-nos conhecer o campo de deslocamentos para os diferentes valores da intensidade de carga.

Atendendo a que o DYMORE permite considerar as não linearidades geométricas, a cada elemento finito está associado um sistema de eixos local cuja orientação é dependente da deformação da estrutura. Na Figura 11 a) o sistema de eixos global está representado no centro geométrico da secção transversal e na Figura 11 b) o sistema de eixos local no estado deformado. A carga  $\mathbf{P}$  de flexão no estado deformado apresenta componentes segundo  $x$  e  $z$ .





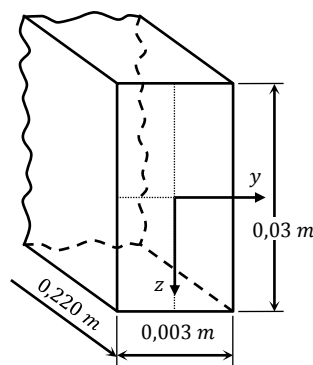
**Figura 11.** a) Representação do sistema de eixos global; b) Representação da deformação da placa

### 3.4. Exemplos de Aplicação

Nos vários exemplos de aplicação considerados neste trabalho foi utilizado um elemento finito de ordem 3 com 6 graus de liberdade por nó. Em todas as estruturas foi considerada uma discretização de 20 elementos.

#### 3.4.1. Material Isotrópico

Considerando um material isotrópico, com as propriedades materiais apresentadas na Tabela 1 e as dimensões representadas na Figura 12, podemos concluir, usando a equação (83), que a carga crítica de flambagem em flexão é de 1544,81N.



**Figura 12.** Secção transversal da geometria rectangular da viga.

A solução obtida numericamente utilizando o programa VABS e DYMORE para o mesmo caso isotrópico apresentado, vai-nos conduzir a um valor de carga crítica de 1462 N, ou seja, uma diferença de 5,7% relativamente à solução obtida analiticamente e um deslocamento de 0,004 m.

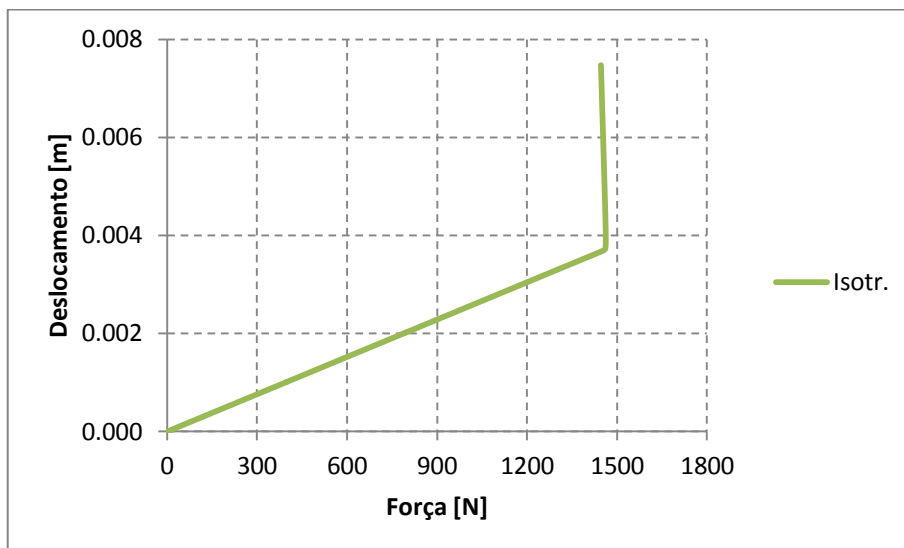


Figura 13. Variação do deslocamento com o incremento de carga para a placa isotrópica.

### 3.4.2. Material Compósito

No nosso caso de estudo em concreto vamos analisar placas laminadas de vidro epóxico com as propriedades materiais apresentadas na Tabela 2 e tendo em conta a geometria da secção transversal apresentada na Figura 6.

Propriedades	
Modulo de Young $E_1$	30,57 GPa
Modulo de Young $E_2=E_3$	6,00 GPa
Modulo de Elasticidade Transversal $G_{12}=G_{13}$	2,31 GPa
Modulo de Elasticidade Transversal $G_{23}$	2,79 GPa
Coefficiente de Poisson $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$	0,26
Massa Especifica $\rho$	1600 kg/m <sup>3</sup>

Tabela 2- Propriedades materiais das placas laminadas de vidro-epóxico.

Através das propriedades do material apresentadas anteriormente, da discretização da secção transversal para as diferentes orientações através do VABS, da discretização do modelo de elementos finitos da viga e utilizando o programa DYMORE de elementos finitos para numericamente avaliar a carga crítica de flambagem à flexão de placas compósitas, utilizando uma metodologia baseada na Análise Não Linear de vigas chegamos ao deslocamento máximo admitido bem como ao valor de carga crítica.

Foram analisadas seis placas laminadas diferentes.

A primeira é designada por  $[0^\circ]_{24}$ , constituída por 24 laminas e com dimensão  $0,0035m \times 0,035m \times 0,220m$ .

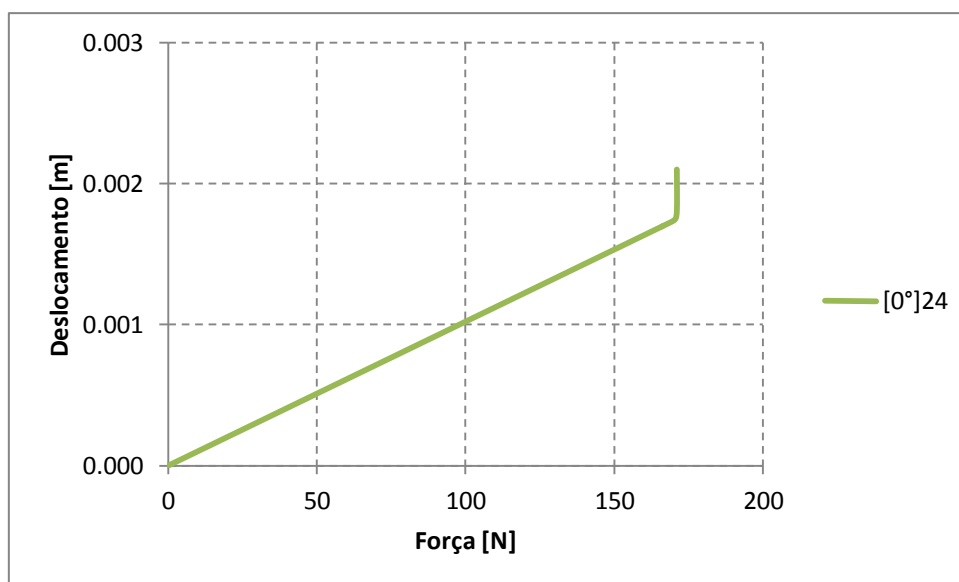


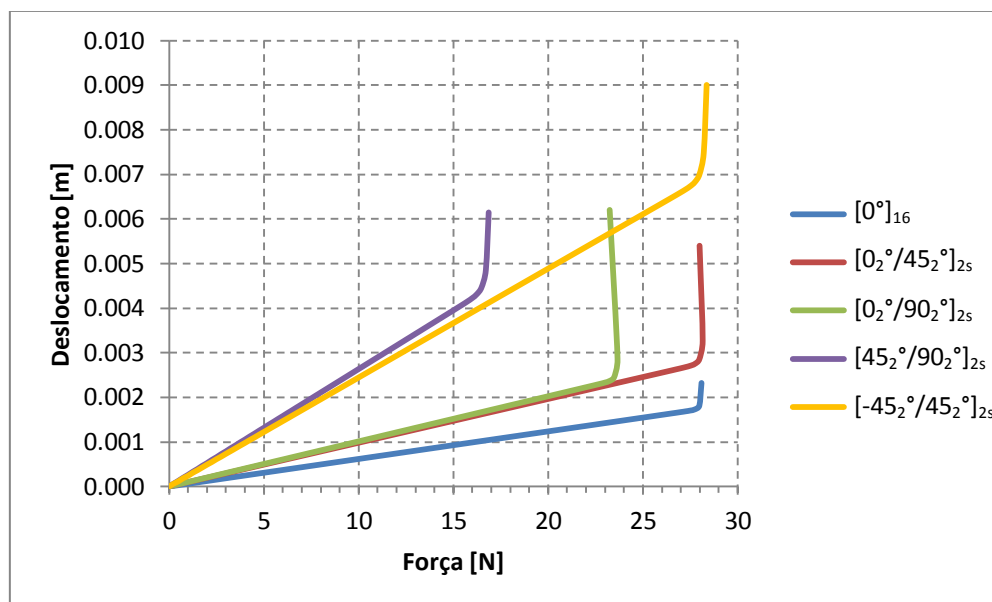
Figura 14. Variação do deslocamento com o incremento de carga para a placa laminada  $[0]_{24}$ .

Pela análise da Figura 14 podemos verificar que o valor de carga crítica, ou seja, o valor de carga mais elevado suportado pela placa laminada antes de esta entrar em flambagem por flexão, ocorre para um valor de carga de  $171,07 N$ , com um deslocamento máximo de  $0,002 m$ .

As restantes placas laminadas são designadas pela nomenclatura apresentada na Tabela 3, constituídas por 16 lâminas cada e com dimensão  $0,0022m \times 0,022m \times 0,220m$ . Estes laminados diferem apenas na orientação das fibras que as constituem.

$[0^\circ]_{16}$
$[0^\circ_2/90^\circ_2]_{2s}$
$[0^\circ_2/45^\circ_2]_{2s}$
$[45^\circ_2/90^\circ_2]_{2s}$
$[-45^\circ_2/45^\circ_2]_{2s}$

**Tabela 3-** Orientações das fibras nas placas de vidro-epóxico.



**Figura 15.** Variação do deslocamento com o incremento de carga para as restantes placas laminadas

Analisando a Figura 15, relativamente às restantes placas laminadas podemos verificar que as orientações com um valor de carga crítica mais elevadas e mais próximas são  $0^\circ$ ,  $0^\circ/45^\circ$  e  $-45^\circ/45^\circ$ , com valores de carga,  $28,09\text{ N}$ ,  $28,15\text{ N}$ ,  $28,36\text{ N}$ , e deslocamentos de  $0,002\text{ m}$ ,  $0,003\text{ m}$ ;  $0,009\text{ m}$ , respectivamente. Seguidamente segue-se a orientação  $0^\circ/90^\circ$  com uma carga crítica de  $23,66\text{ N}$  e deslocamento de  $0,003\text{ m}$ . Por fim obteve-se uma carga crítica de  $16,86\text{ N}$  e deslocamento  $0,006\text{ m}$  para a orientação a  $45^\circ/90^\circ$ .

## 4. CONCLUSÕES

Através da validação numérica do VABS podemos concluir que este é confiável e eficiente para calcular a matriz de rigidez da secção transversal podendo facilmente ser incorporada na análise de elementos finitos.

O VABS está programado para calcular a sensibilidade da rigidez transversal no que diz respeito às orientações das camadas. É capaz de ter em conta materiais isotrópicos e materiais ortotrópicos e representar geometrias transversais gerais, não exigindo a utilização dispendiosa de discretização de elementos finitos 3-D, nem a perda de precisão inerentes a representações simplificadas da secção transversal.

O DYMORE proporciona um nível de generalidade e flexibilidade necessária para resolver problemas complexos, com componentes estruturais complexos e permite considerar as não linearidades geométricas de estruturas tipo viga.

Podemos concluir que através do VABS e DYMORE, em comparação com a solução analítica para materiais isotrópicos, se obtêm resultados com uma discrepância apenas de 5,7%, obtendo-se como solução analítica uma carga crítica de 1544,81 N e solução numérica 1462 N com um deslocamento de 0,004 m.

Através dos resultados expressos sob a forma de tabela apresentados na Tabela 4 podemos verificar que o valor da carga crítica mais elevado ocorre para a placa laminada  $[0^\circ]_{24}$ , com orientação das fibras a  $0^\circ$  e 24 camadas. Contudo, as dimensões transversais desta viga são superiores às dimensões utilizadas nas restantes placas. Assim, considerando as placas com as mesmas dimensões, e orientações  $0^\circ/45^\circ$ ,  $0^\circ/90^\circ$  e  $-45^\circ/45^\circ$ , verifica-se que o laminado com fibras orientadas a  $0^\circ$  possui maior rigidez em termos de deslocamento vertical.

Comparando as orientações  $0^\circ/45^\circ$  e  $0^\circ/90^\circ$  podemos concluir que para laminados com lâminas orientadas a  $0^\circ$ , a introdução de lâminas orientadas a  $45^\circ$  permite aumentar a carga crítica de flambagem em flexão em cerca de 19%, relativamente à introdução de lâminas com fibras orientadas a  $90^\circ$ .

Considerando agora as orientações  $0^\circ/90^\circ$  e  $45^\circ/90^\circ$ , verifica-se que o laminado  $0^\circ/90^\circ$  tem uma maior rigidez na direcção da aplicação da força e suporta cargas de ordem de 40% superiores à orientação  $45^\circ/90^\circ$ , sem que ocorra flambagem em flexão.

Por fim comparando as orientações  $0^\circ/45^\circ$  e  $-45^\circ/45^\circ$  podemos verificar que introduzindo fibras orientadas a  $-45^\circ$  em vez de fibras orientadas a  $0^\circ$  obtemos um ganho muito pequeno de carga crítica, ou seja, 0,75%, que é quase nenhum. No entanto, no que diz respeito ao deslocamento este aumenta para o triplo, o que implica que a rigidez seja  $3 \times$  menor em relação à introdução de fibras orientadas a  $0^\circ$ .

	$[0^\circ]_{24}$	$[0^\circ]_{16}$	$[0_2^\circ/45_2^\circ]_{2s}$	$[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$	$[45_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$	$[-45_2^\circ/45_2^\circ]_{2s}$
<b>Carga Crítica [N]</b>	171,07	28,09	28,15	23,66	16,86	28,36
<b>Deslocamento [m]</b>	0,002	0,002	0,003	0,003	0,006	0,009

**Tabela 4-** Resultados obtidos para as várias placas laminadas analisadas.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bauchau, O. A. (7 June 2010). *DYMORE USER'S MANUAL*. School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA.
- Den Hartog, J. P. (1952). Twist–bend buckling of beams. *Advanced Strength of Materials*, New York:McGraw-Hill, 283-291.
- Lardeur, P. (1990). *Development e Evaluation de Deux Elements Finitis de Plaque e Coques Composites avec Influence du Cisalhement Transversal*. Ph.D. Thesis, Université de Technologie de Compiègne, France.
- Leal, R. A. (2007/8a). *Apontamentos de apoio à cadeira de Materiais Compósitos*. Departamento Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Leal, R. A. (2007/8b). *Apontamentos de apoio à cadeira de Mecânica de Sólidos*. Departamento Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Neto, M. A. (2005). *Optimização de Sistemas Dinâmicos Multicorpo Flexíveis em Materiais Compósitos*. Dissertação para Obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Mecânica, Departamento Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra.
- Neto, M. A., Yu, W., & Leal, R. P. (2008). 'Generalized Timoshenko modelling of composite beam structures: sensitivity analysis and optimal design'. *Engineering Optimization*, 40:10, pp. 891-906.
- Oñate, E. (1992). *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos - Análisis estático linear, Primera Edición*. Barcelona, España: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- Reddy, J. N. (1997). *Mechanics of Laminated Composite Plates: theory and analysis*. CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida, USA.
- Yu, W., & Hodges, D. H. (2004). "Elasticity Solutions versus Asymptotic Sectional Analysis of Homogeneous, Isotropic, Prismatic Beams". *Journal of Applied Mechanics*, 71, pp. 15-23.

## 6. ANEXO A

Os resultados apresentados neste anexo foram obtidos considerando as propriedades do material apresentadas na Tabela 2 e a secção transversal apresentada na Figura 6.

### 6.1. Placa laminada $[0]_{24}$

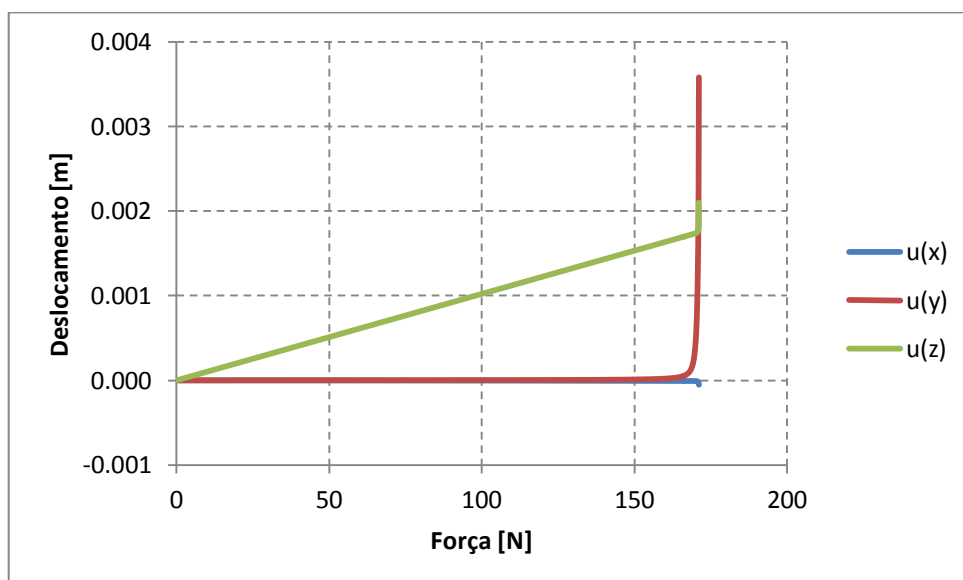


Figura 16. Variação do deslocamento com o incremento de carga para  $[0]_{24}$ .

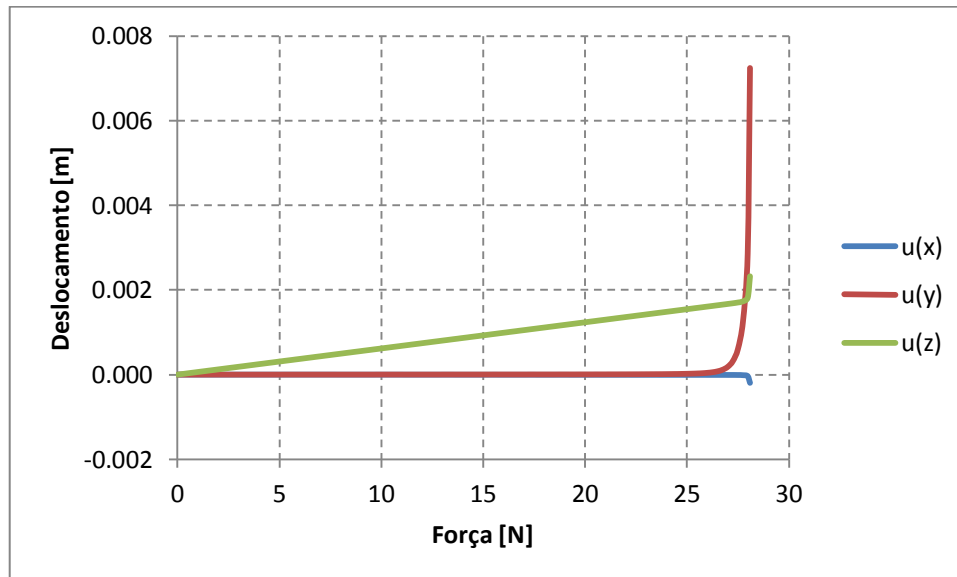
Os resultados obtidos com base na Figura 16 são apresentados de forma resumida na Tabela 5.

	Força [N]	$u(x)$ [m]	$u(y)$ [m]	$u(z)$ [m]
$[0]_{24}$	171,07	0,000	0,004	0,002

Tabela 5- Resultados obtidos.



## 6.2. Placa laminada $[0]_{16}$



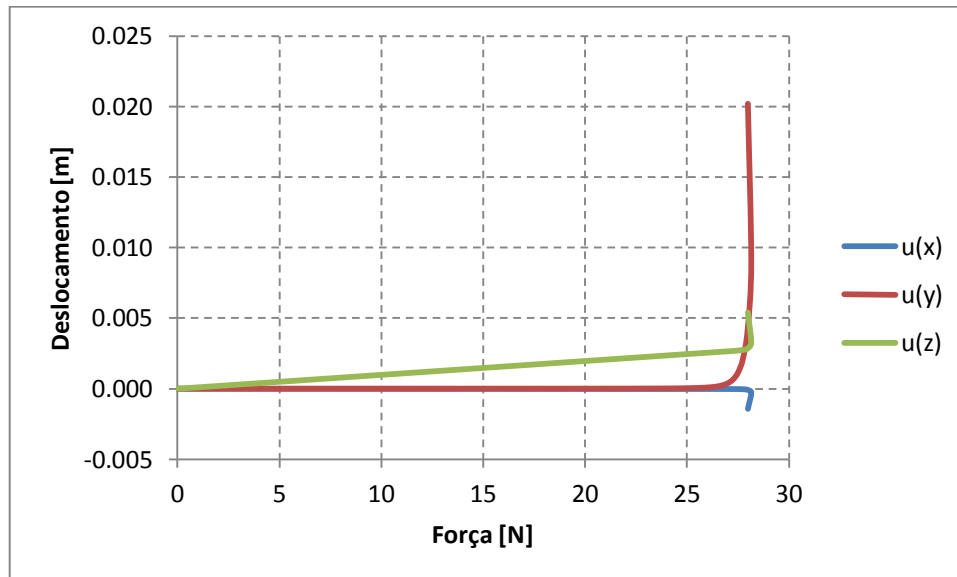
**Figura 17.** Variação do deslocamento com o incremento de carga para  $[0]_{16}$ .

Os resultados obtidos com base na Figura 17 são apresentados de forma resumida na Tabela 6.

	Força [N]	$u(x)$ [m]	$u(y)$ [m]	$u(z)$ [m]
$[0]_{16}$	28,09	0,000	0,007	0,002

**Tabela 6-** Resultados obtidos.

### 6.3. Placa laminada $[0_2^\circ/45_2^\circ]_{2s}$



**Figura 18.** Variação do deslocamento com o incremento de carga para  $[0_2^\circ/45_2^\circ]_{2s}$ .

Os resultados obtidos com base na Figura 18 são apresentados de forma resumida na Tabela 7.

	Força [N]	$u(x)$ [m]	$u(y)$ [m]	$u(z)$ [m]
$[0^\circ/45^\circ]_{2s}$	28,15	0,000	0,009	0,003

**Tabela 7-** Resultados obtidos.

### 6.4. Placa laminada $[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$

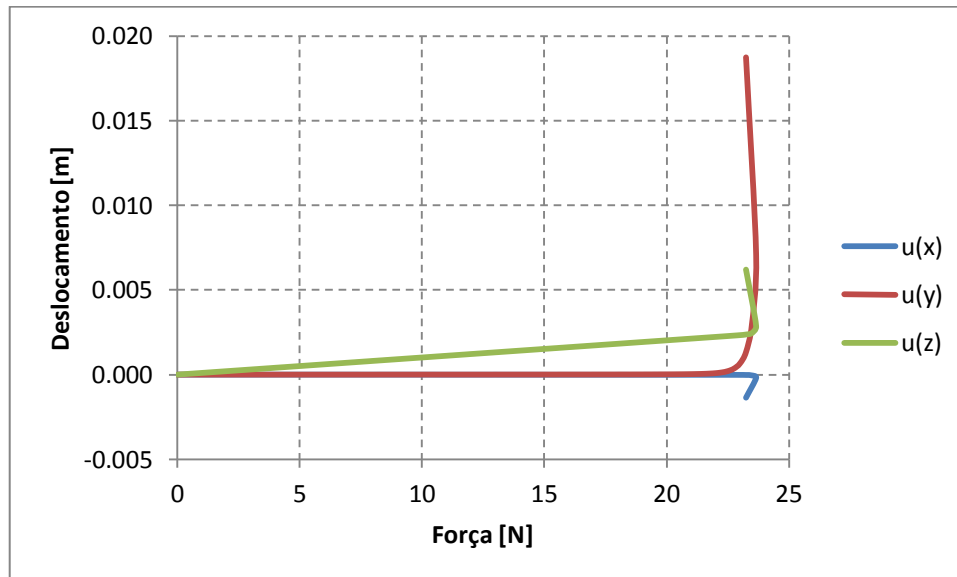


Figura 19. Variação do deslocamento com o incremento de carga para  $[0_2^\circ/90_2^\circ]_{2s}$ .

Os resultados obtidos com base na Figura 19 são apresentados de forma resumida na Tabela 8.

	Força [N]	$u(x)$ [m]	$u(y)$ [m]	$u(z)$ [m]
$[0^\circ/90^\circ]_{2s}$	23,66	0,000	0,007	0,003

Tabela 8- Resultados obtidos.

### 6.5. Placa laminada $[45_2/90_2]_{2s}$

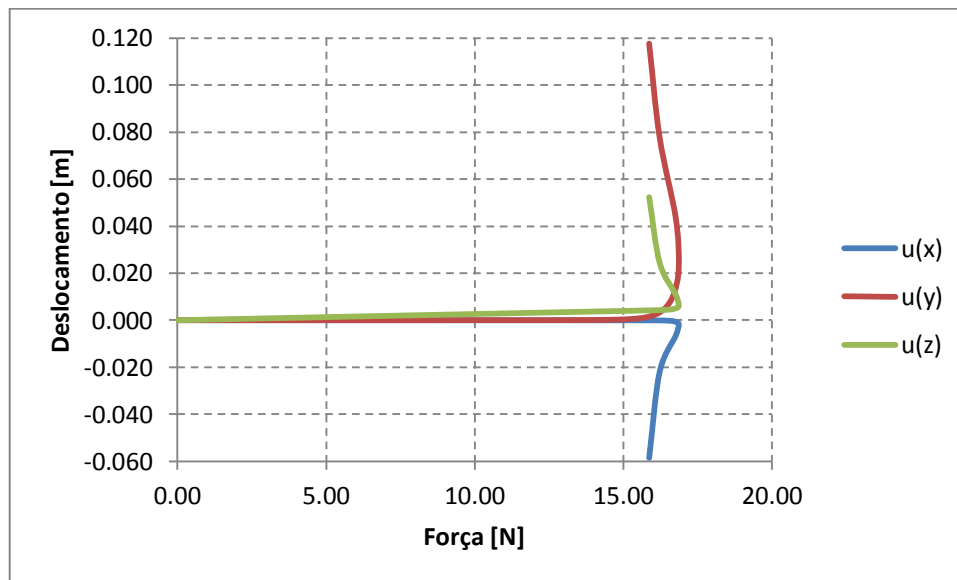


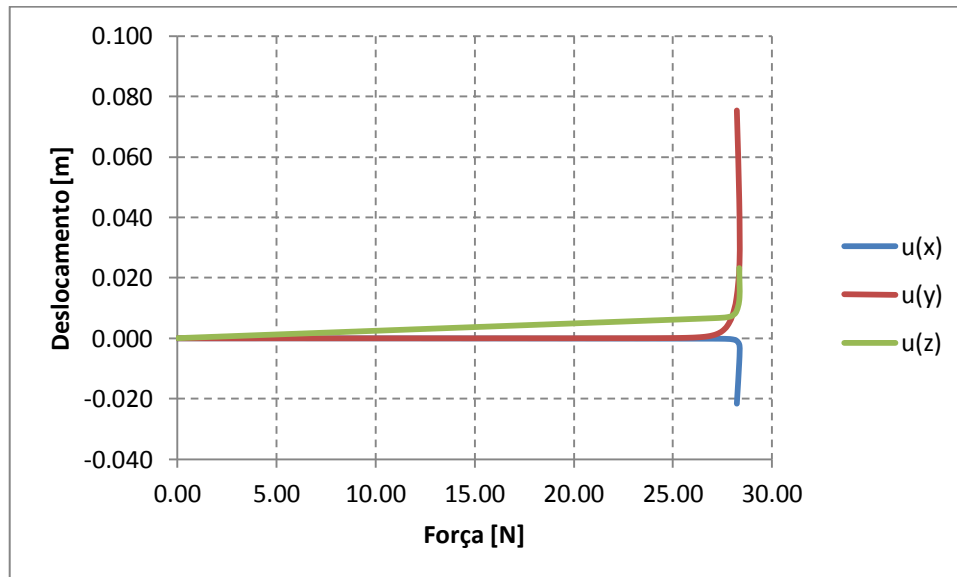
Figura 20. Variação do deslocamento com o incremento de carga para  $[45_2/90_2]_{2s}$ .

Os resultados obtidos com base na Figura 20 são apresentados de forma resumida na Tabela 9.

	Força [N]	$u(x)$ [m]	$u(y)$ [m]	$u(z)$ [m]
$[45^\circ/90^\circ]_{2s}$	16,86	-0,002	0,023	0,006

Tabela 9- Resultados obtidos.

## 6.6. Placa laminada $[-45_2/45_2]_{2s}$



**Figura 21.** Variação do deslocamento com o incremento de carga para  $[-45_2/45_2]_{2s}$ .

Os resultados obtidos com base na Figura 21 são apresentados de forma resumida na Tabela 10.

	Força [N]	$u(x)$ [m]	$u(y)$ [m]	$u(z)$ [m]
$[-45_2/45_2]_{2s}$	28,36	-0,002	0,025	0,009

**Tabela 10-** Resultados obtidos.