



Departamento de Matemática  
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

**Contradomínios numéricos em espaços  
de Hilbert e em espaços de Krein**  
Teoria, algoritmos e implementação computacional

Ana Cristina Becerra Nata dos Santos

*Dissertação submetida à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática (especialidade em Matemática Pura)*

Coimbra, 2011



Aos meus pais  
Ao meu marido  
Ao meu filho José Dinis



# **FCT** Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR



UNIÃO EUROPEIA  
Fundo Social Europeu



QUADRO  
DE REFERÊNCIA  
ESTRATÉGICO  
NACIONAL  
PORTUGAL 2007.2013

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do Programa Operacional Potencial Humano (POPH) do QREN.



# Resumo

Esta dissertação centra-se na investigação do conceito de contradomínio numérico em espaços de Hilbert e em espaços de Krein. Estudam-se importantes resultados relativos ao contradomínio numérico (clássico e indefinido) e analisam-se as propriedades mais relevantes de uma das generalizações mais conhecidas deste conceito: o contradomínio numérico tracial.

Introduz-se o conceito de matriz de Toeplitz biperiódica (ou abreviadamente, matriz 2-Toeplitz). Estendem-se os resultados obtidos por Halmos [59], Klein [70] e Eiermann [45]. Estabelece-se uma região de inclusão para o contradomínio numérico clássico de uma matriz 2-Toeplitz de banda. Deduzem-se as equações paramétricas da curva geradora de fronteira e apresenta-se uma caracterização do contradomínio numérico clássico de um operador 2-Toeplitz de banda por redução ao caso  $2 \times 2$ .

Caracteriza-se o contradomínio numérico indefinido de uma classe especial de matrizes tridiagonais com contradomínio numérico hiperbólico, generalizando os resultados obtidos por Brown e Spitkovsky [27].

Deduzem-se as equações paramétricas da curva geradora de fronteira do contradomínio numérico tracial de uma matriz definida num espaço de Krein. Analisam-se condições favoráveis à ocorrência de porções planas na fronteira e caracteriza-se o contradomínio numérico tracial de uma matriz  $J$ -normal, em que  $J$  é a matriz de inércia.

Apresentam-se quatro algoritmos e respectivos códigos computacionais em suporte informático. Os dois primeiros algoritmos permitem traçar a fronteira do contradomínio numérico clássico de um operador 2-Toeplitz de banda arbitrário, por recurso a dois processos diferentes: um por redução ao caso  $2 \times 2$  e outro baseado no conceito de curva geradora de fronteira. O terceiro algoritmo permite traçar a fronteira do contradomínio numérico tracial (clássico e indefinido) de uma matriz complexa arbitrária com base no conceito de recta de suporte e o quarto algoritmo, além de permitir traçar graficamente a fronteira do contradomínio numérico (clássico e indefinido) de uma matriz complexa arbitrária, permite igualmente descrever a curva geradora de fronteira do mesmo.

Apresentam-se exemplos ilustrativos das diferentes situações analisadas.





# Abstract

This dissertation is devoted to the study of the concept of numerical range in Hilbert spaces and Krein spaces. Important results of the numerical range (classic and indefinite) are studied and some of the most relevant properties of the tracial numerical range, one of the best known generalizations of the concept of numerical range, are analyzed.

The concept of biperiodic Toeplitz matrix (or shortly, 2-Toeplitz matrix) is introduced. Halmos [59], Klein [70] e Eiermann [45] results are extended. An inclusion region for the numerical range of a 2-Toeplitz matrix is obtained. The parametric equations of the boundary generating curve are deduced and the numerical range of a banded 2-Toeplitz operator is investigated performing a reduction to the  $2 \times 2$  case.

A class of tridiagonal matrices with hyperbolic numerical range is investigated, generalizing the results obtained by Brown and Spitkovsky [27].

The parametric equations of the boundary generating curve of the tracial numerical range associated with matrices in a Krein space are obtained. Favorable conditions to the occurrence of flat portions on the boundary are analyzed and the tracial numerical range of a  $J$ -normal matrix is characterized, where  $J$  is the inertia matrix.

Four algorithms and respective computer codes are presented. The first two algorithms allow for plotting the boundary of a classical numerical range of an arbitrary 2-Toeplitz banded operator, using two different processes: one by a reduction to the case  $2 \times 2$  case and another based on the concept of boundary generating curve. The third algorithm allows for plotting the tracial numerical range of an arbitrary complex matrix. Our approach uses the elementary idea that the boundary may be traced by computing the supporting lines. The fourth algorithm allows for plotting the boundary of the numerical range (classic and indefinite) of an arbitrary complex matrix. The boundary generating curve is also plotted.

Illustrative examples of the different possibilities are given.



# Agradecimentos

Um trabalho de investigação desta natureza envolve um conjunto de pessoas e de instituições que directa ou indirectamente contribuíram para a sua realização.

Desta forma, gostaria de expressar o meu sincero agradecimento à Professora Doutora Natália Isabel Quadros Bebiano Pinheiro da Providência e Costa, minha orientadora científica, por ter aceite orientar esta dissertação, pela sugestão do tema, pelo seu empenho, pelo seu espírito crítico, pelos conselhos oportunos, pelo interesse, disponibilidade e amizade demonstrados.

O meu reconhecimento ao Professor Doutor João da Providência e Costa pela colaboração e pelos conselhos esclarecedores sobre o tema.

Agradeço à Doutora Graça Soares pelo espírito de entreaajuda demonstrado no início dos trabalhos de investigação.

Em termos institucionais gostaria de deixar presente uma palavra de apreço às seguintes entidades.

Ao Centro de Matemática da Universidade de Coimbra pela concessão de bolsas de curta duração que me permitiram participar em encontros científicos internacionais.

À biblioteca do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra pela excelente documentação científica disponibilizada.

À Fundação para a Ciência e a Tecnologia pelo apoio financeiro concedido através da atribuição da bolsa de doutoramento SFRH/BD/37613/2007.

Gostaria igualmente de agradecer aos meus pais por estarem sempre presentes e disponíveis, pelo carinho, pelo incentivo e por me terem proporcionado condições de trabalho.

Ao meu marido por todo o amor, compreensão e partilha.

Ao meu filho pela alegria de viver que me transmite diariamente.

**A todos, o meu sincero obrigado!**



# Índice

<b>Prefácio</b>	<b>v</b>
<b>Notação</b>	<b>ix</b>
<b>1 Contradomínios numéricos</b>	<b>1</b>
1.1 Em espaços de Hilbert . . . . .	1
1.1.1 Definição de contradomínio numérico. Algumas propriedades . . . . .	1
1.1.2 Teorema do contradomínio elíptico . . . . .	6
1.1.3 Teorema de Toeplitz-Hausdorff . . . . .	8
1.1.4 Curva geradora de fronteira . . . . .	9
1.1.5 Pontos não-diferenciáveis da fronteira de $W(A)$ . . . . .	22
1.1.6 Contradomínio numérico tracial . . . . .	24
1.2 Em espaços de Krein . . . . .	27
1.2.1 Introdução . . . . .	27
1.2.2 Definição de $J$ -contradomínio numérico. Algumas propriedades . . . . .	31
1.2.3 Teorema do contradomínio hiperbólico . . . . .	35
1.2.4 Curva geradora de fronteira . . . . .	37
1.2.5 $J$ -contradomínio numérico tracial . . . . .	41
<b>2 Contradomínio numérico clássico de matrizes 2-Toeplitz de banda</b>	<b>45</b>

2.1	Matrizes e operadores 2-Toeplitz . . . . .	45
2.2	Matrizes 2-Toeplitz e matrizes 2-circulantes . . . . .	49
2.3	O contradomínio numérico de operadores 2-Toeplitz de banda . . . . .	64
2.4	O contradomínio numérico de operadores 2-Toeplitz tridiagonais . . . . .	69
2.5	Curvas geradoras de fronteira de $W(T_f)$ . . . . .	77
2.6	Algoritmos e exemplos . . . . .	80
<b>3</b>	<b><math>J</math>-contradomínio numérico de uma classe de matrizes tridiagonais</b>	<b>85</b>
3.1	Motivação . . . . .	85
3.2	Uma classe de matrizes tridiagonais com contradomínio numérico hiperbólico . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Caracterização algébrica do <math>J</math>-contradomínio numérico tra-</b>	<b>99</b>
	<b>cial</b>	
4.1	Introdução . . . . .	99
4.2	Sobre a convexidade de $W_C^J(A)$ . . . . .	100
4.3	Formas especiais de $W_C^J(A)$ . . . . .	101
4.4	Curva geradora de fronteira de $W_C^J(A)$ . . . . .	105
4.5	Porções planas em $\partial W_C^J(A)$ . . . . .	112
	4.5.1 Uma condição suficiente . . . . .	112
	4.5.2 Pontos- $\sigma$ e $J$ -normalidade . . . . .	115
4.6	Algoritmo e exemplos . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Contradomínios numéricos e respectiva implementação com-</b>	<b>129</b>
	<b>putacional</b>	
5.1	Descrição do algoritmo . . . . .	129
5.2	Exemplos . . . . .	133
	<b>Considerações finais</b>	<b>139</b>
	<b>Lista de Figuras</b>	<b>143</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>147</b>

Índice Remissivo

157





*It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment.*

Gauss, Karl Friedrich (1777-1855)

## Prefácio

O objectivo desta dissertação centra-se na investigação do conceito de contradomínio numérico em espaços de Hilbert e em espaços de Krein, abordando paralelamente as vertentes teórica e computacional que o caracterizam.

O conceito de contradomínio numérico clássico foi introduzido, nas primeiras décadas do século XX por Toeplitz [104] e Hausdorff [60] que o designaram pelo termo alemão “Wertvorrat”, persistindo ainda hoje a letra “W” como o símbolo mais utilizado para o representar. Desde então, a teoria do contradomínio numérico clássico e das suas generalizações tem sido objecto de estudo e análise de vários matemáticos tais como M.-T. Chien, H. Nakazato, L. Rodman, M. Marcus, C.-K. Li e I. Spitkovsky, entre outros.

A riqueza da referida teoria prende-se com o largo espectro das suas aplicações em diferentes áreas da matemática pura e aplicada, tais como em análise matricial, análise funcional, teoria de operadores, álgebras- $C^*$ , álgebras de Banach e análise numérica. Mais recentemente surgiram também aplicações à Física [8, 11, 12, 16, 97], à arquitectura [95] e à computação quântica [41, 72, 98].

Tem havido igualmente interesse em estudar o contradomínio numérico de certos tipos especiais de matrizes, tais como as matrizes de Toeplitz [45, 59, 70], tridiagonais [27, 30, 34, 35, 45] e (quase)hiponormais.

A teoria dos contradomínios numéricos em espaços munidos de um produto interno indefinido, também conhecidos por espaços de Krein, surgiu apenas no final do século XX e tem-se revelado um ramo da matemática muito promissor

a avaliar pela diversidade de publicações que têm surgido sobre o tema [9, 10, 20, 21, 78, 79]. As propriedades básicas do contradomínio numérico indefinido foram estabelecidas por Bayasgalan [6] e por Li, Tsing e Uhlig [81].

A dissertação está organizada em cinco capítulos. No primeiro capítulo estabelece-se a notação e expõem-se os resultados essenciais para uma boa compreensão das matérias tratadas. Os restantes quatro capítulos são originais e os resultados obtidos deram origem a artigos científicos (em co-autoria) alguns dos quais já publicados em revistas internacionais da especialidade [13, 15, 18], existindo ainda um artigo em fase de submissão para publicação [17].

Cada capítulo divide-se em várias secções, cujos conteúdos passamos a pormenorizar.

A primeira secção do capítulo 1 inclui alguns resultados fulcrais relativos ao contradomínio numérico clássico de operadores lineares, entre os quais destacamos o teorema do contradomínio elíptico (subsecção 1.1.2) e o teorema de Toeplitz-Hausdorff (subsecção 1.1.3). As noções de recta de suporte e de curva geradora de fronteira constam na subsecção 1.1.4. Estes dois conceitos desempenham um papel fundamental no que se refere à análise das propriedades geométricas do contradomínio numérico. Descreve-se igualmente o método de Fiedler, para a obtenção da equação de pontos, extremamente útil na representação geométrica da curva geradora de fronteira. A subsecção 1.1.5 é dedicada à investigação de determinados pontos não-diferenciáveis da fronteira do contradomínio numérico (pontos angulosos). O conceito de contradomínio numérico tracial, que constitui uma das generalizações mais famosas do conceito de contradomínio numérico clássico, é abordado na subsecção 1.1.6.

Na segunda secção do primeiro capítulo introduz-se o conceito de contradomínio numérico em espaços de Krein. Restringimos o nosso estudo a espaços de dimensão finita  $n$  e identificaremos os operadores lineares com matrizes quadradas complexas de ordem  $n$ . Estabelecendo um paralelismo com o caso clássico, são estudados o teorema do contradomínio numérico hiperbólico (subsecção 1.2.3), o conceito de curva geradora de fronteira e uma generalização do teorema de Murnaghan-Kippenhahn a espaços de Krein (subsecção

1.2.4). Na subsecção 1.2.5 analisa-se o conceito de contradomínio numérico tracial indefinido e coligem-se algumas das suas propriedades mais relevantes.

O segundo capítulo centra-se no estudo do contradomínio numérico de uma matriz 2-Toeplitz de banda (finita e infinita) em espaços de Hilbert. Generalizam-se os resultados obtidos por Halmos [59], Klein [70] e Eiermann [45]. Nomeadamente, estabelece-se uma região de inclusão para o contradomínio numérico clássico de uma matriz 2-Toeplitz de banda. Deduzem-se as equações paramétricas da curva geradora de fronteira e apresenta-se uma caracterização do contradomínio numérico clássico de um operador 2-Toeplitz de banda, por redução ao caso  $2 \times 2$ . Estabelece-se igualmente a equivalência assintótica entre uma sequência de matrizes 2-Toeplitz de banda e uma sequência de matrizes 2-circulantes, generalizando os resultados obtidos por Gray [55]. Como aplicação, apresentam-se dois algoritmos que permitem gerar a representação geométrica do contradomínio numérico clássico de um operador 2-Toeplitz de banda arbitrário. O primeiro algoritmo tem por base a redução ao caso  $2 \times 2$  e o segundo algoritmo tem por base o conceito de curva geradora de fronteira.

O estudo do contradomínio numérico, em espaços de Krein, de uma classe especial de matrizes tridiagonais com contradomínio numérico hiperbólico é investigado no terceiro capítulo, estabelecendo-se deste modo um paralelismo com os resultados obtidos por Brown e Spitkovsky [27] em relação ao contradomínio numérico clássico.

O quarto capítulo é dedicado ao estudo do contradomínio numérico tracial indefinido usualmente denotado por  $W_C^J(A)$ . Restringimos o nosso estudo ao caso de  $C$  ser uma matriz real  $J$ -unitariamente diagonalizável. Deduzem-se as equações paramétricas da curva geradora de fronteira e analisam-se condições conducentes à ocorrência de porções planas na fronteira do contradomínio numérico tracial. Caracteriza-se o contradomínio numérico tracial para o caso de  $A$  ser uma matriz  $J$ -normal. Como aplicação, apresenta-se um algoritmo numérico que permite traçar a fronteira de  $W_C^J(A)$  para uma matriz complexa arbitrária  $A$  e uma matriz diagonal real arbitrária  $C$ . A abordagem apresentada utiliza a ideia fundamental de que a fronteira de  $W_C^J(A)$  pode ser traçada

por recurso ao cálculo das suas rectas de suporte.

O objectivo do último capítulo consiste em apresentar um algoritmo que permite descrever geometricamente a fronteira do contradomínio numérico de uma matriz complexa arbitrária, incluindo a representação gráfica de pontos que pertencem à curva geradora de fronteira. É de salientar que o algoritmo desenvolvido vem colmatar certas lacunas dos programas até então existentes (e.g. [78]) e é válido considerando o espaço  $\mathbb{C}^n$  munido quer da estrutura habitual de espaço de Hilbert quer da estrutura de espaço de Krein.

Acrescentamos ainda, como considerações finais, algumas potenciais linhas de investigação futuras motivadas pelos diferentes tópicos versados.

A vertente computacional da dissertação é assegurada pela implementação, em Matlab, de quatro algoritmos originais descritos nas secções 2.6, 4.6 e 5.1. O código implementado é disponibilizado em anexo à dissertação em suporte informático. Apresentam-se igualmente em suporte informático os ficheiros que geraram as figuras exibidas na dissertação.

Por decisão da autora, não foi adoptado o novo acordo ortográfico da língua portuguesa, uma vez que estamos num período considerado de transição.

Ana Cristina Nata  
Coimbra, Abril de 2011

# Notação

Símbolo	Significado
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	corpo dos números reais
$\mathbb{C}$	corpo dos números complexos
$\mathbb{R}^n$	espaço vectorial dos $n$ -úplos reais
$\mathbb{C}^n$	espaço vectorial dos $n$ -úplos complexos
$PR^2$	plano projectivo real
$PC^2$	plano projectivo complexo
$M_{m,n}(\mathbb{R})$	espaço vectorial das matrizes $m \times n$ com entradas reais
$M_{m,n}$	espaço vectorial das matrizes $m \times n$ com entradas complexas
$M_n(\mathbb{R})$	álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas reais
$M_n$	álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas complexas
$\mathcal{U}_n$	grupo das matrizes unitárias $n \times n$
$\mathcal{U}_{r,n-r}$	grupo das matrizes $J$ -unitárias $n \times n$ com assinatura $(r, n - r)$

Símbolo	Significado
$\mathcal{H}$	espaço de Hilbert complexo
$\mathcal{K}$	espaço de Krein complexo
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	conjunto de todos os operadores lineares limitados em $\mathcal{H}$
$x, y, z, \dots$	vectores coluna em $\mathbb{C}^n$
$x^*$	vector linha de componentes conjugadas do vector coluna $x \in \mathbb{C}^n$
$\operatorname{Re} z$	parte real do número complexo $z$
$\operatorname{Im} z$	parte imaginária do número complexo $z$
$\bar{z}$	conjugado do número complexo $z$
$\arg z$	um argumento do número complexo $z$
$\partial S$	fronteira do subconjunto $S$ de $\mathbb{C}$
$\bar{S}$	fecho topológico do subconjunto $S$ de $\mathbb{C}$
$\operatorname{conv} S$	invólucro convexo do subconjunto $S$ de $\mathbb{C}$
$\operatorname{pconv} S$	invólucro pseudo-convexo do subconjunto $S$ de $\mathbb{C}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno (definido)
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	produto interno indefinido, induzido pela matriz $H$ hermítica e não-singular
$I$	operador identidade
$I_n$	matriz identidade de ordem $n$
$\emptyset$	conjunto vazio
$E_{ij}$	elemento da base canónica de $M_n$ com 1 na posição $(i, j)$ e restantes entradas nulas
$J$	$I_r \oplus -I_{n-r}$ , com $1 \leq r \leq n$
$A, B, \dots$	operadores em $\mathcal{H}$ ou matrizes em $M_n$

Símbolo	Significado
$A^{-1}$	operador (ou matriz) inverso(a) de $A$
$A^{1/2}$	única raiz quadrada definida positiva da matriz $A$ , i.e., $(A^{1/2})^2 = A$
$A^*$	operador adjunto (ou matriz transconjugada) de $A$
$A^{[*]}$	operador (ou matriz) $J$ -adjunto(a) de $A$
$\operatorname{Re} A$	$(A + A^*) / 2$
$\operatorname{Im} A$	$(A - A^*) / (2i)$
$\operatorname{Re}^J A$	$(A + A^{[*]}) / 2$
$\operatorname{Im}^J A$	$(A - A^{[*]}) / (2i)$
$\det(A)$	determinante da matriz $A$
$\operatorname{tr}(A)$	traço da matriz $A$
$[A, B]$	comutador de $A, B \in M_n$ , i.e., $[A, B] := AB - BA$
$\oplus$	soma directa
$\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$	matriz diagonal de ordem $n$ com entradas principais $a_1, \dots, a_n$
$A[kl]$	submatriz principal de $A$ determinada pelas linhas e colunas $k$ e $l$ da matriz $A$
$A[k]$	forma abreviada de $A[k, k]$
$[k]$	maior número inteiro $r$ tal que $r \leq k$ , com $k \in \mathbb{R}$
$\sigma(A)$	espectro de $A$
$\sigma_J(A)$	conjunto dos valores próprios de $A$ com vectores próprios associados $J$ -anisotrópicos
$\sigma_J^+(A)$	conjunto dos valores próprios de $A$ com vectores próprios associados $J$ -positivos
$\sigma_J^-(A)$	conjunto dos valores próprios de $A$ com vectores próprios associados $J$ -negativos

Símbolo	Significado
$\sigma_J^0(A)$	conjunto dos valores próprios de $A$ com vectores próprios associados $J$ -isotrópicos
$W(A)$	contradomínio numérico de $A$
$W_J(A)$	$J$ -contradomínio numérico de $A$
$W_J^+(A)$	$J$ -contradomínio numérico positivo de $A$
$W_J^-(A)$	$J$ -contradomínio numérico negativo de $A$
$W_C(A)$	contradomínio numérico tracial de $A$
$W_C^J(A)$	$J$ -contradomínio numérico tracial de $A$
$C(A)$	curva geradora de fronteira de $W(A)$
$C_J(A)$	curva geradora de fronteira de $W_J(A)$
$\delta_{i,j}$	símbolo de Kronecker, i.e., 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$
$S_n$	grupo simétrico de grau $n$
$S_{r,n-r}$	conjunto de todas as permutações $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ , onde $\sigma_1 \in S_r$ e $\sigma_2 \in S_{n-r}$ tais que $\sigma_1(j) = j$ , se $j \in \{r+1, \dots, n\}$ e $\sigma_2(j) = j$ , se $j \in \{1, \dots, r\}$
$z_\sigma$	ponto- $\sigma$
$n!$	factorial $n(n-1) \dots 2.1$
$C_k^n$	coeficiente binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$	anel de todos os polinómios nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ e coeficientes inteiros
sup	supremo (menor limite superior)
inf	ínfimo (maior limite inferior)



# Capítulo 1

## Contradomínios numéricos

### 1.1 Em espaços de Hilbert

#### 1.1.1 Definição de contradomínio numérico. Algumas propriedades

A noção de contradomínio numérico está intimamente relacionada com o conceito de forma quadrática. Sejam  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert complexo munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  o conjunto de todos os operadores lineares limitados em  $\mathcal{H}$ . A *forma quadrática* associada a  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  é a aplicação

$$x \mapsto \langle Ax, x \rangle, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (1.1)$$

Considere-se  $\mathcal{H}$  munido da norma induzida pelo produto interno,  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ ,  $x \in \mathcal{H}$ , e seja

$$\mathbb{E}_{\mathcal{H}} := \{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}, \quad (1.2)$$

a esfera unitária. Para simplificar a notação, no caso de o espaço de Hilbert a considerar ser o plano complexo munido do produto interno usual, usaremos apenas o símbolo  $\mathbb{E}$  para representar o conjunto (1.2).

**Definição 1.1.1.** O *contradomínio numérico* ou *campo de valores* de um operador  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  denota-se por  $W(A)$  e é o contradomínio da forma quadrática (1.1) restrita a  $\mathbb{E}_{\mathcal{H}}$ . Simbolicamente,

$$W(A) := \{\langle Ax, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}. \quad (1.3)$$

Se escolhermos o espaço de todos os  $n$ -úplos complexos,  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ , munido do produto interno usual

$$\langle x, y \rangle := y^*x, \quad (1.4)$$

onde  $x^*$  denota o vector linha de componentes conjugadas do vector coluna  $x \in \mathbb{C}^n$ , então  $W(A)$  é dado por uma forma matricial equivalente

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}. \quad (1.5)$$

Em contraste com o caso de dimensão infinita, o contradomínio numérico de um operador definido num espaço de dimensão finita é compacto (por ser a imagem de um conjunto compacto pela aplicação contínua  $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ ). Em espaços de dimensão infinita, o conjunto  $\overline{W(A)}$  é compacto.

Ao longo deste trabalho vamos assumir que os espaços de Hilbert de dimensão infinita a considerar são separáveis, ou equivalentemente, têm dimensão numerável [38, 4.16]. Sempre que considerarmos um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensão finita  $n$ , identificaremos esse espaço com  $\mathbb{C}^n$  munido do produto interno usual (1.4) e identificaremos os respectivos operadores lineares,  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , com uma matriz quadrada de ordem  $n$  com entradas complexas.

Cumpramos referir que até ao final deste capítulo, caso não seja dito nada em contrário,  $A$  e  $B$  denotam operadores lineares em  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , sendo  $I$  o operador identidade. O símbolo  $A^*$  representa o operador adjunto de  $A$  e é o operador que satisfaz

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \text{para } x, y \in \mathcal{H}. \quad (1.6)$$

Se  $A = A^*$ , o operador  $A$  diz-se *auto-adjunto*, se  $AA^* = A^*A$  o operador diz-se *normal* e se  $AA^* = A^*A = I$  o operador diz-se *unitário*. O *espectro* de  $A$  é a união disjunta

$$\sigma(A) := \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A),$$

em que  $\sigma_p(A)$ ,  $\sigma_r(A)$  e  $\sigma_c(A)$  denotam respectivamente, o *espectro pontual*, *residual* e *contínuo* de  $A$  dados por

$$\begin{aligned}\sigma_p(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ é não invertível}\} \\ \sigma_r(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe, mas o seu domínio não é denso em } \mathcal{H}\} \\ \sigma_c(A) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe e o seu domínio é denso em } \mathcal{H}, \text{ mas} \\ &\quad \text{não é limitado}\}.\end{aligned}$$

Todo o elemento  $\lambda \in \sigma_p(A)$  diz-se um *valor próprio* de  $A$  e todo o vector  $x \neq 0$  tal que  $(A - \lambda I)x = 0$  diz-se um *vector próprio* de  $A$  associado a  $\lambda$ . Se  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , então  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ . No entanto, para espaços de dimensão infinita, podem existir valores espectrais que não são valores próprios de  $A$  [71, exemplo 7.2-2]. Chamamos a atenção para o facto de a fronteira do espectro de um operador  $A$  estar contida no *espectro pontual aproximado* de  $A$  que se denota por  $\sigma_{\text{app}}(A)$  e é constituído por todos os valores  $\lambda \in \mathbb{C}$  para os quais existe uma sequência de vectores unitários  $\{x_n\}_n$  tais que  $\|(A - \lambda I)x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  [59, Problema 63]. Se existir alguma sequência que satisfaça esta condição, mas que não contenha nenhuma subsucessão convergente, então  $\lambda$  pertence ao *espectro essencial* de  $A$ , denotado por  $\sigma_{\text{ess}}(A)$ .

Cumpre igualmente referir que o símbolo  $\text{conv } S$  representa o *invólucro convexo* de um subconjunto  $S$  de um determinado espaço vectorial e é o menor conjunto convexo que contém  $S$ , ou seja, é o conjunto de todas as combinações convexas de um número finito de elementos de  $S$ . Simbolicamente,

$$\text{conv } S = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_i \in S, i = 1, \dots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Definição 1.1.2.** Um subconjunto  $X$  de  $V$  diz-se *conexo* se não contiver dois subconjuntos abertos, disjuntos e não-vazios,  $A$  e  $B$ , tais que  $X = A \cup B$ .

Por outras palavras,  $X$  é conexo se os únicos subconjuntos de  $X$  simultaneamente abertos e fechados são  $X$  e  $\emptyset$ .

**Lema 1.1.3.** *Todo o conjunto convexo é conexo.*

**Demonstração:** Seja  $X$  um conjunto convexo. Suponhamos, por absurdo, que  $X = A \cup B$  é uma desconexão de  $X$ . Escolham-se  $x \in A$  e  $y \in B$  arbitrariamente. Como  $A \cap B = \emptyset$ , então  $x \neq y$  logo  $\delta = \|x - y\| > 0$ . Seja  $d = d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$ . Tem-se  $\delta \geq d > 0$ , donde  $0 < \frac{d}{\delta} \leq 1$ . Seja  $\lambda = 1 - \frac{d}{2\delta} \in ]0, 1[$ . Da convexidade de  $X$ , resulta que  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ . Mas,  $\|x - z\| = (1 - \lambda)\|x - y\| = \frac{d}{2} < d$ , logo  $z \notin B$ . De modo análogo, conclui-se que  $z \notin A$ . Então  $z \notin A \cup B = X$ , o que gera uma contradição. ■

Estabelecida a notação, destacam-se algumas propriedades básicas do contradomínio numérico clássico. As demonstrações destas propriedades não oferecem qualquer tipo de dificuldade e seguem directamente da definição 1.1.1, razão pela qual serão omitidas.

**W1.**  $W(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta W(A)$ , para quaisquer escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;

**W2.**  $W(U^*AU) = W(A)$ , para todo o operador unitário  $U$  (invariância unitária);

**W3.**  $W(A^*) = \{\bar{z} : z \in W(A)\}$ ;

**W4.**  $W(A + B) \subseteq W(A) + W(B)$  (subaditividade);

**W5.**  $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$  (inclusão espectral). Esta inclusão foi originalmente provada por Wintner [108] em 1929. Desde então, vários autores apresentaram demonstrações alternativas deste resultado (e.g. [57, teorema 1.2-1]).

Todo o operador  $A$  pode decompor-se na forma cartesiana

$$A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A, \quad (1.7)$$

em que  $\operatorname{Re} A$  e  $\operatorname{Im} A$  são os operadores auto-adjuntos univocamente determinados por

$$\operatorname{Re} A := \frac{A + A^*}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} A := \frac{A - A^*}{2i}. \quad (1.8)$$

Tendo em conta esta decomposição, obtêm-se as duas seguintes propriedades.

**W6.**  $W(A) \subseteq W(\operatorname{Re} A) + i W(\operatorname{Im} A)$ ;

**W7.**  $\operatorname{Re} W(A) = W(\operatorname{Re} A)$  e  $\operatorname{Im} W(A) = W(\operatorname{Im} A)$ , onde  $\operatorname{Re} W(A)$  e  $\operatorname{Im} W(A)$  denotam as projecções ortogonais de  $W(A)$  sobre os eixos real e imaginário, respectivamente.

As próximas propriedades ilustram a relação existente entre as propriedades geométricas de  $W(A)$  e as propriedades algébricas de um operador linear  $A$ .

**W8.**  $W(A) = \{\alpha\}$  se e só se  $A = \alpha I$ , para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

**W9.**  $W(A)$  é um intervalo real se e só se  $A$  for um operador auto-adjunto.

**Demonstração [57, p.7]:** Supondo que  $A$  é auto-adjunto, então  $\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$ , para todo o vector  $x \in \mathcal{H}$  e, portanto,  $W(A)$  é real. Reciprocamente, se  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ , para todo o vector unitário  $x \in \mathcal{H}$ , tem-se que  $\langle Ax, x \rangle - \langle x, Ax \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (A - A^*)x, x \rangle = 0$ . Logo  $W(A - A^*) = \{0\}$  e  $A = A^*$ . ■

**W10.** Se  $\overline{W(A)} = [m, M]$ , então  $m, M \in \sigma(A)$ .

**Demonstração [57, p.7]:** Como  $m \in \overline{W(A)}$ , existe uma sequência de vectores unitários  $\{x_n\}_n$  em  $\mathcal{H}$  tal que  $\langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow m$ . Então

$$\|\langle (A - mI)x_n, x_n \rangle\| = \|(A - mI)^{1/2} x_n\|^2 \rightarrow 0.$$

Logo, também  $\|(A - mI)x_n\| \rightarrow 0$  e, portanto,  $m \in \sigma_{app}(A) \subseteq \sigma(A)$ . Análogo para  $M$ . ■

Todas estas propriedades continuam válidas em espaços de dimensão finita. Nesse caso, não é necessário considerar o fecho topológico de  $W(A)$  na propriedade W10. Em espaços de dimensão finita acresce ainda o seguinte.

**W11.**  $W(B) \subseteq W(A)$ , para qualquer submatriz principal  $B$  de  $A \in M_n$ .

**W12.**  $W(A) = [\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)] \subset \mathbb{R}$  se e só se  $A$  é uma matriz hermítica, onde  $\lambda_{\min}(A)$  e  $\lambda_{\max}(A)$  denotam, respectivamente, os valores próprios mínimo e máximo de  $A$ .

### 1.1.2 Teorema do contradomínio elíptico

A descrição geométrica do contradomínio numérico de uma matriz  $A \in M_2$  é excepcionalmente simples e foi feita inicialmente, em 1932, por Murnaghan [88]. Ao longo dos anos foram surgindo demonstrações alternativas deste resultado. Destacamos a de Donoghue [42], em 1957, e as mais recentemente apresentadas por Gustafson e Rao [57] e Li [75], ambas em 1996.

**Teorema 1.1.4 (Teorema do contradomínio elíptico, 1932).** *Seja  $A \in M_2$  uma matriz com valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . O contradomínio numérico de  $A$  é o disco elíptico (possivelmente degenerado) com focos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , cujos eixos maior e menor têm comprimento, respectivamente,*

$$\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A) - 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}_1\lambda_2)} \quad e \quad \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2}. \quad (1.9)$$

**Demonstração [75]:** De acordo com o teorema da triangularização de Schur [63, p.79], toda a matriz  $A \in M_2$  é unitariamente semelhante a uma matriz triangular superior do tipo

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

em que  $b \in \mathbb{C}$ . Então, segundo a propriedade da invariância unitária,  $W(A) = W(B)$ . Na descrição do contradomínio numérico de  $A \in M_2$  vamos considerar dois casos distintos.

(i) Se  $A$  é normal, então  $b = 0$  e

$$W(B) = \left\{ \lambda_1 |x_1|^2 + \lambda_2 |x_2|^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\}$$

é um segmento de recta fechado de extremos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , ou dito de outra forma, é uma elipse degenerada com focos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e comprimento do eixo menor igual a zero. Se  $\lambda_1 = \lambda_2$ , então o contradomínio numérico reduz-se ao conjunto singular  $\{\lambda_1\}$  (caso em que  $A$  é uma matriz escalar).

(ii) Se  $A$  não é normal, então  $b \neq 0$ . Consideremos, em primeiro lugar, o caso  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Então  $B = \lambda_1 I_2 + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  e obtém-se que

$$W(B) = \lambda_1 + \left\{ bx_1x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\}.$$

Trata-se de um disco circular centrado em  $\lambda_1$  e de diâmetro  $|b|$ , ou dito de outra forma, é um disco elíptico degenerado com ambos os focos iguais a  $\lambda_1$  e comprimento do eixo menor igual a  $|b|$ . Suponhamos agora que  $b \neq 0$  e  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Então

$$B = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(B)I_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)V^*CV,$$

onde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2|c| \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i \arg b} \end{bmatrix}, \quad \text{com } c = \frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2} \neq 0.$$

Sendo  $V$  unitária, as propriedades W1 e W2 garantem que

$$W(B) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(B) + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)W(C), \quad (1.10)$$

pelo que basta estudar o contradomínio numérico de  $C$ . Seja

$$D = \operatorname{Re} C + i\gamma \operatorname{Im} C, \quad \text{com } \gamma = \frac{\sqrt{1 + |c|^2}}{|c|}.$$

Verifica-se facilmente que a matriz  $D$  tem um valor próprio nulo que é duplo e, portanto, de acordo com o teorema da triangularização de Schur,  $D$  é unitariamente semelhante a

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{1 + |c|^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, segundo o argumento anterior,  $W(D)$  é um disco circular centrado na origem e de raio  $\sqrt{1 + |c|^2}$ , ou seja, a fronteira de  $W(D)$  é o conjunto de pontos  $\left\{ \sqrt{1 + |c|^2} e^{it} : t \in \mathbb{R} \right\}$ . Claramente,

$$x + iy \in W(C) \Leftrightarrow x + i\gamma y \in W(D).$$

Logo, a fronteira de  $W(C)$  é o conjunto de pontos

$$\left\{ \sqrt{1 + |c|^2} \cos t + |c| \sin t : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Portanto,  $W(C)$  é um disco elíptico de focos  $-1$  e  $1$ , cujo comprimento dos eixos maior e menor é  $2\sqrt{1+|c|^2}$  e  $2|c|$ , respectivamente. Além disso, sendo  $W(B)$  uma translação do conjunto  $W(C)$  previamente multiplicado por  $b/(2|c|)$ , de (1.10) conclui-se que  $W(B)$  é um disco elíptico com focos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , cujos eixos menor e maior têm comprimento  $\sqrt{|\lambda_1 - \lambda_2| + |b|^2}$  e  $|b|$ , respectivamente. É agora simples reescrever estes comprimentos na forma (1.9). ■

### 1.1.3 Teorema de Toeplitz-Hausdorff

A convexidade de  $W(A)$ , estabelecida por Toeplitz [104] e Hausdorff [60] em 1918/19, é um resultado em si da maior relevância e que contribuiu de forma assinalável para o desenvolvimento da teoria dos contradomínios numéricos. Um factor que evidencia o grande interesse que este teorema sempre motivou, são as várias demonstrações alternativas publicadas (e.g. [42, 58, 64, 74]). A demonstração que seleccionámos processa-se por redução ao caso bidimensional evidenciando deste modo a grande utilidade do teorema do contradomínio elíptico (ver, teorema 1.1.4).

**Definição 1.1.5.** Seja  $\mathcal{V}$  um subespaço de  $\mathcal{H}$  e  $P_{\mathcal{V}}$  a projecção ortogonal de  $\mathcal{H}$  em  $\mathcal{V}$ . Dado um operador linear  $A$  em  $\mathcal{H}$ , chama-se *compressão* de  $A$  em  $\mathcal{V}$  e denota-se por  $A_{\mathcal{V}}$  ao operador  $P_{\mathcal{V}}A$  restrito ao subespaço  $\mathcal{V}$ .

**Lema 1.1.6.** *Se  $A$  é um operador linear em  $\mathcal{H}$ , então  $W(A)$  contém o contradomínio numérico de todas as compressões de  $A$ .*

**Demonstração [100]:** Seja  $\mathcal{V}$  um subespaço de  $\mathcal{H}$ . Para todo o  $x \in \mathcal{V}$ , tem-se que

$$\langle A_{\mathcal{V}}x, x \rangle = \langle P_{\mathcal{V}}Ax, x \rangle = \langle Ax, P_{\mathcal{V}}x \rangle = \langle Ax, x \rangle \in W(A),$$

logo  $W(A_{\mathcal{V}}) \subset W(A)$ . ■

**Teorema 1.1.7 (Teorema de Toeplitz-Hausdorff, 1918-1919).** *Se  $A$  é um operador linear em  $\mathcal{H}$ , então  $W(A)$  é um conjunto convexo.*



**Demonstração [57, p.4]:** Sejam  $z$  e  $w$  dois pontos distintos em  $W(A)$  e  $\ell$  o segmento de recta que os une. Tem-se que  $z = \langle Ax, x \rangle$  e  $w = \langle Ay, y \rangle$ , para alguns vectores unitários  $x, y \in \mathcal{H}$ . Seja  $A_{xy}$  a compressão de  $A$  ao subespaço de  $\mathcal{H}$  gerado por  $x$  e  $y$  (subespaço de dimensão 2, caso contrário  $z = w$ ). Como consequência do teorema do contradomínio elíptico,  $W(A_{xy})$  é um disco elíptico que contém  $z$  e  $w$ , e, conseqüentemente, também contém o segmento de recta  $\ell$ . Além disso, tendo em conta o lema 1.1.6, conclui-se que  $\ell \subset W(A_{xy}) \subset W(A)$ , vindo que  $W(A)$  é convexo. ■

Estabelecida a convexidade, estamos em condições de enunciar mais algumas propriedades do contradomínio numérico de um operador linear  $A$ .

**W13.**  $W(A)$  é um subconjunto conexo de  $\mathbb{C}$ .

Esta propriedade é uma consequência imediata do lema 1.1.3 e do teorema de Toeplitz-Hausdorff.

**W14.**  $\text{conv}(\sigma(A)) \subseteq \overline{W(A)}$ , ocorrendo igualdade se  $A$  for normal.

A inclusão é uma consequência imediata da propriedade W5 e do teorema 1.1.7. Para demonstrar a igualdade no caso de normalidade, veja-se e.g. [57, p.16].

Para espaços de dimensão finita, tem-se ainda que

**W15.**  $W(A \oplus B) = \text{conv} \{W(A) \cup W(B)\}$ , quaisquer que sejam  $A, B \in M_n$ . Em particular, se  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ , então  $W(A) = \text{conv}(a_1, \dots, a_n)$ .

Para uma demonstração desta propriedade veja-se [64, p.12-13].

#### 1.1.4 Curva geradora de fronteira

A caracterização geométrica do contradomínio numérico de um operador linear  $A$  faz-se essencialmente por recurso a dois conceitos fundamentais: o conceito de curva geradora de fronteira e o conceito de recta de suporte cujas definições apresentamos de seguida. Por motivos de simplicidade, ao longo desta subsecção iremos restringir o nosso estudo a espaços de Hilbert de dimensão finita  $n$ , identificaremos esse espaço com o espaço  $\mathbb{C}^n$  munido do pro-

duto interno (1.4) e identificaremos os operadores lineares com matrizes em  $M_n$ . No entanto, cumpre referir que todos os resultados desta subsecção são igualmente válidos em espaços de Hilbert de dimensão infinita separáveis,  $\mathcal{H}$ , e para operadores lineares  $A$  com norma de Hilbert-Schmidt finita, i.e., operadores que satisfazem a condição

$$\|A\|_{HS} := \sqrt{\sum_{n \geq 0} \|Ae_n\|^2} < \infty, \quad (1.11)$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma definida em  $\mathcal{H}$  e  $\{e_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  é uma base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . A condição (1.11) garante que o operador linear  $A$  é compacto (cfr. [38, corolário 18.7]) e, portanto, de acordo com o teorema espectral [48, p.2], se  $A$  for auto-adjunto, todos os seus valores próprios são reais e existe uma base de  $\mathcal{H}$  constituída por vectores próprios de  $A$ . Claro que em espaços de dimensão infinita é necessário considerar o fecho topológico de  $W(A)$  e substituir os termos “max” e “min” por “sup” e “inf”, respectivamente.

**Definição 1.1.8.** Seja  $S$  um subconjunto convexo de  $\mathbb{C}$ . Toda a recta que intersecta  $S$  em pelo menos um ponto e que define dois semi-planos, um contendo  $S$  e o outro não contendo ponto algum de  $S$ , diz-se uma *recta de suporte* de  $S$ .

Seja  $A \in M_n$ . Atendendo à decomposição cartesiana (1.7) e à propriedade W12 conclui-se que  $W(A)$  está contido no rectângulo (ver, figura 1.1) definido pelas rectas verticais

$$\mathcal{L}_1 := \{\lambda_{\min}(\operatorname{Re} A) + iy : y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_2 := \{\lambda_{\max}(\operatorname{Re} A) + iy : y \in \mathbb{R}\} \quad (1.12)$$

e pelas rectas horizontais

$$\mathcal{L}_3 := \{x + i\lambda_{\min}(\operatorname{Im} A) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_4 := \{x + i\lambda_{\max}(\operatorname{Im} A) : x \in \mathbb{R}\}, \quad (1.13)$$

onde  $\lambda_{\max}(\operatorname{Re} A)$  ( $\lambda_{\min}(\operatorname{Re} A)$ ) e  $\lambda_{\max}(\operatorname{Im} A)$  ( $\lambda_{\min}(\operatorname{Im} A)$ ) denotam, respectivamente, o maior (menor) valor próprio das matrizes hermiticas  $\operatorname{Re} A$  e  $\operatorname{Im} A$  definidas em (1.8).

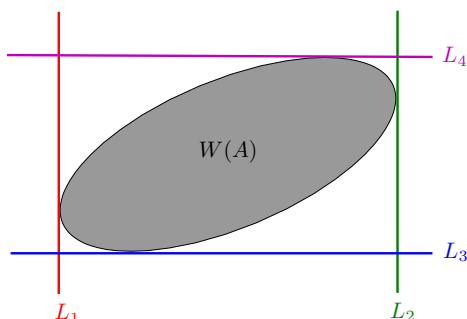


Figura 1.1:  $W(A)$  e rectas de suporte (1.12) e (1.13).

Ao considerarmos um vector próprio  $x$ , não-nulo, associado a cada um dos valores próprios máximo (e mínimo) de  $\operatorname{Re} A$ , o ponto  $z = \langle Ax, x \rangle$  é um ponto da fronteira de  $W(A)$  que pertence simultaneamente a  $\mathcal{L}_2$  (respectivamente, a  $\mathcal{L}_1$ ). Um raciocínio análogo é válido para os valores próprios máximo e mínimo de  $\operatorname{Im} A$ . Como consequência deste facto e da convexidade de  $W(A)$ , conclui-se que  $W(A)$  tem em comum com cada um dos lados do rectângulo atrás referido um ponto ou um segmento de recta e, portanto, as rectas (1.12) e (1.13), são rectas de suporte de  $W(A)$ .

Com o intuito de caracterizar geometricamente  $W(A)$ , vamos descrever um processo segundo o qual as rectas de suporte desempenham um papel fulcral. Esse processo consiste em determinar, através de uma rotação de  $W(A)$ , pontos que pertencem simultaneamente à fronteira e a uma recta de suporte de  $W(A)$ . Refira-se que para caracterizar  $W(A)$ , basta determinar a sua fronteira, pois  $W(A)$  é um conjunto convexo e compacto.

**Lema 1.1.9.** *Para toda a matriz  $A \in M_n$  e para todo o vector unitário  $x \in \mathbb{C}^n$ , as seguintes condições são equivalentes*

- (a)  $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle = \max \{ \operatorname{Re} z : z \in W(A) \};$
- (b)  $\langle \operatorname{Re} Ax, x \rangle = \max \{ \alpha : \alpha \in W(\operatorname{Re} A) \};$
- (c)  $\operatorname{Re} Ax = \lambda_{\max}(\operatorname{Re} A)x.$

**Demonstração [64, p.34–35]:** A equivalência entre as condições (a) e (b) é uma consequência imediata da propriedade W7 e do facto de

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Re} A x, x \rangle &= \frac{1}{2} \langle (A + A^*) x, x \rangle = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2} \langle A^* x, x \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{1}{2} \overline{\langle Ax, x \rangle} \\ &= \operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle.\end{aligned}$$

A equivalência entre (b) e (c) advém do facto de  $\operatorname{Re} A$  ser uma matriz hermítica e, portanto, ser válida a propriedade W12. ■

De acordo com o lema anterior, tem-se que

$$\max \{ \operatorname{Re} z : z \in W(A) \} = \max \{ \alpha : \alpha \in W(\operatorname{Re} A) \} = \lambda_{\max}(\operatorname{Re} A).$$

Portanto, se calcularmos  $\lambda_{\max}(\operatorname{Re} A)$  e um vector próprio unitário associado,  $x$ , obtemos um ponto  $\langle Ax, x \rangle$  que pertence simultaneamente à fronteira de  $W(A)$  e à recta de suporte  $\mathcal{L}_2$  definida em (1.12). Como  $e^{i\theta} W(e^{-i\theta} A) = W(A)$ , podemos obter, por rotação de  $W(A)$ , tantos pontos na fronteira de  $W(A)$  quantos queiramos. Para tal basta considerar  $\theta \in [0, 2\pi[$ , calcular

$$\lambda_\theta := \lambda_{\max}(\operatorname{Re}(e^{-i\theta} A)) \quad (1.14)$$

e um vector próprio unitário,  $x_\theta$ , associado a  $\lambda_\theta$ . A recta

$$\mathcal{L}_\theta := \left\{ e^{i\theta} (\lambda_\theta + iy) : y \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.15)$$

é uma recta de suporte de  $W(A)$  ilustrada na figura 1.2.

Denote-se o semi-plano determinado pela recta  $\mathcal{L}_\theta$  por

$$\mathcal{H}_\theta := \left\{ e^{i\theta} z : \operatorname{Re} z \leq \lambda_\theta \right\}. \quad (1.16)$$

Com base no argumento anterior, podemos enunciar o seguinte teorema que caracteriza pontos na fronteira de  $W(A)$ .

**Teorema 1.1.10. [64, p.36]** *Se  $A \in M_n$  e  $\theta \in [0, 2\pi[$ , então o número complexo  $p_\theta := \langle Ax_\theta, x_\theta \rangle$  pertence a  $\partial W(A) \cap \mathcal{L}_\theta$  e  $W(A) \subset \mathcal{H}_\theta$ .*

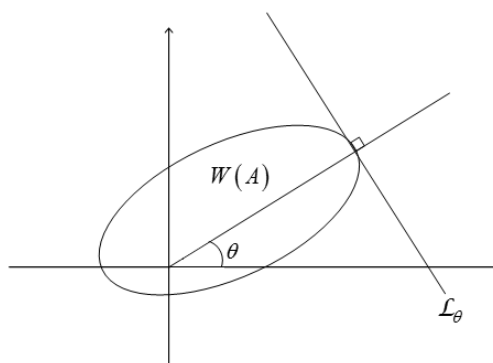


Figura 1.2:  $W(A)$  e recta de suporte (1.15).

Como, além disso,  $W(A)$  é um conjunto convexo e compacto, conclui-se que

$$W(A) = \text{conv} \{p_\theta : 0 \leq \theta < 2\pi\} = \bigcap_{0 \leq \theta < 2\pi} \mathcal{H}_\theta. \quad (1.17)$$

Refira-se ainda que tudo o que foi dito para o maior valor próprio de  $\text{Re}(e^{-i\theta}A)$  aplica-se, *mutatis mutandi*, para o menor valor próprio de  $\text{Re}(e^{-i\theta}A)$ .

É possível deduzir um processo alternativo que permite caracterizar  $W(A)$ . A descrição deste processo recorre a alguns conceitos de geometria algébrica que consideramos conveniente apresentar. Para um estudo mais aprofundado desta matéria remetemos o leitor para [47, 106].

Seja  $\mathbb{K}$  o corpo dos números reais,  $\mathbb{R}$ , ou o corpo dos números complexos,  $\mathbb{C}$ . O plano projectivo de  $\mathbb{K}$  define-se à custa do espaço tridimensional  $\mathbb{K}^3$ .

**Definição 1.1.11.** O *plano projectivo* de  $\mathbb{K}$  denota-se por  $P\mathbb{K}^2$  e consiste no conjunto das rectas de  $\mathbb{K}^3$  que passam pela origem. Estas rectas chamam-se *pontos* do plano projectivo.

Dado um ponto  $P$  em  $\mathbb{K}^3$ , diferente da origem  $O$ , de coordenadas rectangulares  $(x, y, z)$ , existe uma única recta que passa por  $P$  e  $O$ , determinando desta forma um único ponto de  $P\mathbb{K}^2$ . Denota-se esse ponto por  $(x : y : z)$ , diz-se que  $P$  é um seu *representante* e que  $x, y, z$  são as suas *coordenadas homogéneas*.

Impõe-se analisar as diferenças existentes entre os conceitos de curva algébrica (afim) em  $\mathbb{K}^2$  e curva algébrica (projectiva) em  $P\mathbb{K}^2$ . Considere-se um polinómio nas variáveis  $x$  e  $y$ ,

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j, \quad (1.18)$$

em que os coeficientes  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ . O grau do polinómio é o valor máximo de  $i + j$  associado a um coeficiente  $a_{ij} \neq 0$ .

**Definição 1.1.12.** Uma *curva algébrica (afim)* em  $\mathbb{K}^2$  é o conjunto dos zeros de um polinómio não-constante,  $f$ , de coeficientes em  $\mathbb{K}$ , nas variáveis  $x$  e  $y$ . Diz-se que

$$f(x, y) = 0$$

é a *equação da curva algébrica*. A *ordem* da curva algébrica é o grau do polinómio  $f$ .

As curvas algébricas de ordem 1 designam-se por *rectas* e as curvas algébricas de ordem 2 por *cónicas*. Uma cónica é definida por uma equação do segundo grau em duas variáveis do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \quad \text{em que } A, B, \dots, F \in \mathbb{R}.$$

Existem cinco tipos de cónicas: a parábola, a elipse, a hipérbole, a circunferência e um par de rectas congruentes. Estes dois últimos são casos particulares da elipse e da hipérbole, respectivamente.

Podemos estender o conceito de curva algébrica ao plano projectivo  $P\mathbb{K}^2$ . Contudo, é necessário considerar polinómios com três variáveis que sejam *homogéneos*, isto é, polinómios cujos termos têm todos o mesmo grau. A razão prende-se com o facto de as coordenadas homogéneas de um ponto do plano projectivo não serem únicas e serem da forma  $(\alpha x : \alpha y : \alpha z)$ , para  $\alpha \neq 0$ . Claro que se  $f$  for homogéneo de grau  $n$ , então

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^n f(x, y, z),$$

pelo que podemos afirmar que o ponto  $(x : y : z)$  é solução da equação  $f(x, y, z) = 0$ , uma vez que qualquer seu representante satisfaz a referida equação.

**Definição 1.1.13.** Uma *curva algébrica (projectiva)* em  $P\mathbb{K}^2$  é o conjunto dos pontos do plano projectivo que satisfazem uma equação da forma

$$f(x, y, z) = 0, \quad (1.19)$$

em que  $f$  é um polinómio homogéneo não-constante com coeficientes em  $\mathbb{K}$ . Diz-se que (1.19) é a *equação da curva algébrica* e que a *ordem* da curva algébrica é o grau do polinómio  $f$ .

Uma ferramenta útil na investigação das propriedades geométricas de uma curva no plano projectivo consiste na análise das suas *vistas afins*. Escolhendo  $x = 1$  ou  $y = 1$  ou  $z = 1$ , obtemos as *vistas afins principais* de uma curva algébrica definida em  $P\mathbb{K}^2$ . Com efeito, eliminando umas das variáveis  $x, y$  ou  $z$ , em (1.19) obtém-se um polinómio nas restantes duas variáveis, o qual representa uma curva algébrica em  $\mathbb{K}^2$ . Este processo designa-se por *processo de desomogenização*, uma vez que se elimina a homogeneidade de  $f$ . Convém igualmente referir que quando estudamos uma curva em  $PC^2$ , apenas podemos representar geometricamente as vistas afins da sua parte real (ou seja, o conjunto de pontos da referida curva que admitem um representante em  $\mathbb{R}^3$ ). Estas vistas afins dão uma ideia da curva algébrica no seu todo.

Para além da análise das vistas afins de uma curva definida num plano projectivo, o estudo das suas singularidades pode ser relevante para a compreensão das propriedades geométricas da curva. Consideremos, no plano projectivo  $P\mathbb{K}^2$ , uma curva algébrica  $\Gamma$  de ordem  $n$ . Seja  $\mathcal{C}$  uma vista afim da curva  $\Gamma$  de equação  $f(x, y) = 0$ . Seja  $\ell$  a recta afim que passa no ponto  $Q = (a, b)$  e que tem a direcção do vector  $(u, v)$ . Então,  $\ell$  é definida parametricamente por

$$x = x(t) = a + ut, \quad y = y(t) = b + vt.$$

Os valores do parâmetro  $t$ , correspondentes aos pontos de intersecção da recta  $\ell$  com a curva  $\mathcal{C}$  são as raízes da equação

$$\phi(t) := f(a + ut, b + vt) = 0. \quad (1.20)$$

O polinómio  $\phi \in \mathbb{K}[t]$  diz-se o *polinómio de intersecção* da recta  $\ell$  com a curva  $\mathcal{C}$ . Como consequência do teorema de Bézout (cfr. [106, p.59]) duas situações podem ocorrer:

- $\phi$  é identicamente nulo e, nesse caso, a curva  $\mathcal{C}$  contém a recta  $\ell$ ;
- $\phi$  tem grau  $\leq n$  e, nesse caso,  $\ell$  terá quando muito  $n$  pontos distintos de intersecção com a curva  $\mathcal{C}$ .

Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_r$  os pontos distintos de intersecção e  $t_1, t_2, \dots, t_r$  os respectivos parâmetros. A multiplicidade  $m_j$  da raiz  $t_j$  da equação (1.20) diz-se o *número de intersecção*, em  $P_j$ , da recta  $\ell$  com a curva  $\mathcal{C}$  e representa-se por  $I_{P_j}(\ell \cap \mathcal{C})$ . É fácil verificar que  $I_{P_j}(\ell \cap \mathcal{C})$  depende apenas do ponto  $P_j$ , sendo invariante por mudança do referencial afim. O *número (total) de intersecções* da recta  $\ell$  com a curva  $\mathcal{C}$ , é definido por

$$I(\ell \cap \mathcal{C}) := \sum_j I_{P_j}(\ell \cap \mathcal{C}).$$

Pelo exposto,  $I(\ell \cap \mathcal{C})$  é sempre inferior ou igual a  $n$ .

**Exemplo 1.1.14.** [101, p.59] Considere-se a quártica afim  $\mathcal{C}$ , no plano  $\mathbb{R}^2$ , de equação

$$y^2 - x^2 + x^4 = 0 \quad (1.21)$$

e, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a recta  $\ell_\lambda$  de equação  $y = \lambda x$  parametrizada por  $x = t$  e  $y = \lambda t$  (ver, figura 1.3). O polinómio que dá a intersecção da recta  $\ell_\lambda$  com a curva  $\mathcal{C}$  é

$$\phi_\lambda(t) = f(t, \lambda t) = \lambda^2 t^2 - t^2 + t^4. \quad (1.22)$$

As raízes de  $\phi_\lambda(t)$ , calculadas pela equação  $t^2(\lambda^2 - 1 - t^2) = 0$ , são

- se  $\lambda = \pm 1$ ,  $t_1 = 0$ , com multiplicidade 4, a que pertence o ponto  $O = (0, 0)$  e, portanto,

$$I_O(\ell_{\pm 1} \cap \mathcal{C}) = 4;$$

- se  $\lambda \neq \pm 1$ ,  $t_1 = 0$ , com multiplicidade 2, a que corresponde o ponto  $P_1 = O = (0, 0)$ . Além disso, se  $-1 < \lambda < 1$ , temos mais duas raízes reais de (1.22),  $t_{2,3} = \pm\sqrt{1 - \lambda^2}$ , a que correspondem dois pontos simples,  $P_2$  e  $P_3$ , com número de intersecção 1. Portanto,

$$I_{P_1}(\ell_\lambda \cap \mathcal{C}) = 2, \quad \text{para } \lambda \neq \pm 1$$

$$I_{P_2}(\ell_\lambda \cap \mathcal{C}) = I_{P_3}(\ell_\lambda \cap \mathcal{C}) = 1, \quad \text{para } -1 < \lambda < 1.$$



Portanto,  $I(\ell_\lambda \cap \mathcal{C}) = 4$ , para  $-1 \leq \lambda \leq 1$ .

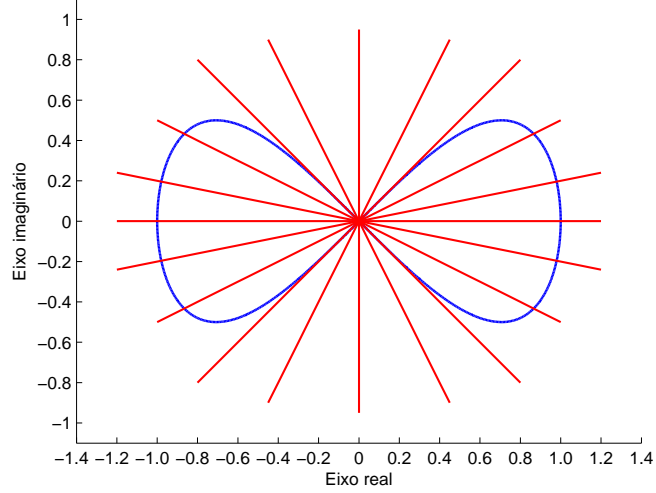


Figura 1.3: Quártica de equação (1.21) e rectas  $y = \lambda x$ .

Fixemos um ponto  $Q = (a, b)$  em  $\mathcal{C}$  de tal forma que  $f(a, b) = 0$  e consideremos o feixe de rectas  $\mathcal{F}(Q)$  baseado em  $Q$ . A multiplicidade de  $Q$  em  $\mathcal{C}$  define-se através de

$$m(Q) = m_{\mathcal{C}}(Q) := \min \{I_Q(\ell \cap \mathcal{C}) : \ell \in \mathcal{F}(Q)\}.$$

Como  $Q$  pertence a  $\mathcal{C}$ , temos automaticamente que  $t = 0$  é raiz do polinómio de intersecção e, portanto,

$$I_Q(\ell \cap \mathcal{C}) \geq 1, \quad \forall \ell \in \mathcal{F}(Q).$$

Pontos de multiplicidade 1, 2, 3, 4, ... dizem-se pontos *simples*, *duplos*, *triplos*, *quádruplos*, ... de  $\mathcal{C}$ . Um ponto de multiplicidade  $m$  é, grosso modo, um ponto de  $\mathcal{C}$  onde  $m$  ramos da curva se auto-intersectam.

Por exemplo, na figura 1.3, a multiplicidade da origem  $O$  é 2. Portanto  $O$  é um ponto duplo. No entanto, para as rectas  $y = \pm x$ , o número de intersecção, em  $O$ , é 4.

Os pontos  $Q \in \mathcal{C}$  de multiplicidade superior ou igual a 2 designam-se por pontos *singulares* da curva. Se expandirmos o primeiro membro da equação (1.20) numa série de Taylor em  $t$ , concluímos que  $Q = (a, b)$  é um ponto singular se e só se

$$f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Seja  $Q$  um ponto de multiplicidade  $m$  numa curva algébrica  $\mathcal{C}$ . Uma recta  $\ell$  que passa em  $Q$  diz-se uma *tangente* a  $\mathcal{C}$  em  $Q$  se

$$I_Q(\ell \cap \mathcal{C}) \geq m + 1. \quad (1.23)$$

No caso de  $Q$  ser um ponto duplo de  $\mathcal{C}$ , uma recta  $\ell$  que passa em  $Q$  é uma tangente a  $\mathcal{C}$ , em  $Q$ , se  $I_Q(\ell \cap \mathcal{C}) \geq 3$ . Nestas condições, podem ocorrer duas possibilidades:

- existem duas tangentes distintas. Neste caso,  $Q$  diz-se um *nodo*. Mais precisamente, se as tangentes forem ambas reais,  $Q$  diz-se um *crunodo*; se forem complexas conjugadas,  $Q$  diz-se um *acnodo*;
- as tangentes coincidem e, neste caso,  $Q$  diz-se um *cúspide*.

Em seguida, centrar-nos-emos no estudo da relação existente entre o contradomínio numérico de uma matriz e o polinómio definido em (1.24).

**Definição 1.1.15.** Chama-se *polinómio de Kippenhahn* de um matriz  $A \in M_n$  ao polinómio em três variáveis,  $u, v$  e  $w$ , dado por

$$f_A(u, v, w) = \det(u \operatorname{Re} A + v \operatorname{Im} A + wI), \quad (1.24)$$

em que  $\operatorname{Re} A$  e  $\operatorname{Im} A$  denotam as matrizes hermiticas univocamente determinadas pela decomposição cartesiana de  $A$  (cfr. (1.7) e (1.8)).

O polinómio de Kippenhahn é um polinómio homogéneo de grau  $n$ , pelo que

$$f_A(u, v, w) = 0 \quad (1.25)$$

pode entender-se como a equação de linhas homogéneas da curva dual,  $\Gamma^*$ , de uma curva algébrica  $\Gamma$  de classe  $n$  definida no plano projectivo complexo  $P\mathbb{C}^2$ . Mais precisamente,

$$\Gamma^* = \{(u : v : w) \in P\mathbb{C}^2 : f_A(u, v, w) = 0\};$$

$$\Gamma = \{(x : y : z) \in P\mathbb{C}^2 : ux + vy + zw = 0 \text{ é uma tangente de } \Gamma^*\}. \quad (1.26)$$

A parte real da vista afim de  $\Gamma$  segundo o plano  $z = 1$  representa uma curva em  $\mathbb{R}^2$  que denotaremos por  $C(A)$ , ou seja,

$$C(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x : y : 1) \in \Gamma\}. \quad (1.27)$$

Como facilmente se constata, os coeficientes de  $f_A(u, v, w)$  são todos reais e, portanto, a curva  $\Gamma$  de classe  $n$  definida em (1.26) tem  $n$  focos reais que coincidem exactamente com os valores próprios da matriz  $A$ , contando com as correspondentes multiplicidades [69, 88].

**Teorema 1.1.16 (Murnaghan [88] e Kippenhahn [69]).** *Suponha-se que  $ux + vy + w = 0$  é a equação de uma recta de suporte de  $W(A)$ . Então*

$$\det(u\operatorname{Re} A + v\operatorname{Im} A + wI) = 0,$$

onde  $\operatorname{Re} A$  e  $\operatorname{Im} A$  são as matrizes hermíticas definidas em (1.8).

Consequentemente, as rectas de suporte de  $W(A)$  são rectas tangentes de  $C(A)$ . Kippenhahn provou que o contradomínio numérico de  $A$  é o invólucro convexo da curva  $C(A)$  e que a fronteira de  $W(A)$  é uma união de arcos algébricos (arcos de  $C(A)$  e porventura segmentos de recta). Simbolicamente,

$$W(A) = \operatorname{conv} C(A). \quad (1.28)$$

Em virtude desta propriedade, Kippenhahn atribuiu a  $C(A)$  a designação de *curva geradora de fronteira* de  $W(A)$ . Recordamos que o procedimento para a obtenção da equação de pontos de  $C(A)$ , *método de dualização* (cfr. [46]), consiste em:

- (i) eliminar uma das variáveis  $u, v$  ou  $w$  entre

$$f_A(u, v, w) = 0 \quad \text{e} \quad ux + vy + w = 0;$$

- (ii) desomogeneizar o resultado fazendo uma das restantes variáveis igual a 1;
- (iii) eliminar a restante variável da equação obtida em (ii) e da sua derivada em ordem a essa variável.

Assim se em (i) optarmos, por exemplo, pela eliminação de  $w$  e fizermos em (ii)  $u = 1$  com vista à desomogenização, obteremos a equação

$$F(x, y, v) = f_A(1, v, -x - vy) = 0, \quad (1.29)$$

consistindo o passo (iii) na eliminação de  $v$  entre

$$F(x, y, v) = 0 \quad (1.30)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x, y, v) = \frac{\partial f_A}{\partial v}(1, y, -x - vy) - y \frac{\partial f_A}{\partial v}(1, y, -x - vy) = 0. \quad (1.31)$$

A curva geradora de fronteira é extremamente útil na análise das propriedades geométricas de  $W(A)$ . Efectivamente, apesar de a descrição geométrica do contradomínio numérico de uma matriz  $A \in M_n$  ser particularmente simples para  $n = 2$  (cfr. teorema 1.1.4), em geral pode revelar-se bastante complexa. De acordo com a classificação de Kippenhahn [69, teorema 26], a curva geradora de fronteira para  $n = 3$  pode assumir uma das seguintes formas:

- (i) três pontos (coincidentes ou não);
- (ii) um ponto e uma elipse;
- (iii) uma curva irredutível e limitada:
  - de ordem 4, com um cúspide e uma tangente dupla em dois dos seus pontos
  - de ordem 6, composta por uma componente oval e uma curva com três cúspides pertencentes ao seu interior.

Para ilustrar as duas possibilidades descritas em (iii) podemos considerar os dois seguintes exemplos devidos a Kippenhahn [69].

**Exemplo 1.1.17.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A curva geradora de fronteira de  $W(A)$  está representada na figura 1.4 e tem como equação de linhas  $uv^2 + \sqrt{2}v^2w - 4uw^2 - 2\sqrt{2}w^3 = 0$ .

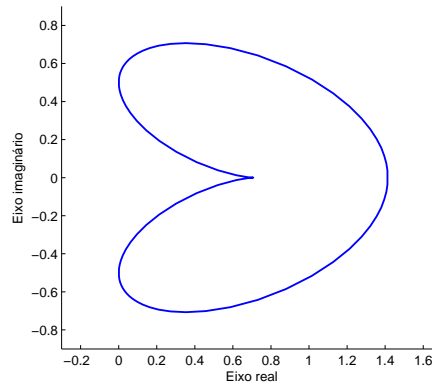


Figura 1.4: Curva geradora de fronteira de  $W(A)$ , sendo  $A$  a matriz do exemplo 1.1.17.

**Exemplo 1.1.18.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A curva geradora de fronteira de  $W(A)$  está representada na figura 1.5 e tem como equação de linhas  $\frac{\sqrt{2}}{2}uv^2 - 2u^2w - 2v^2w + 4w^3 = 0$ .

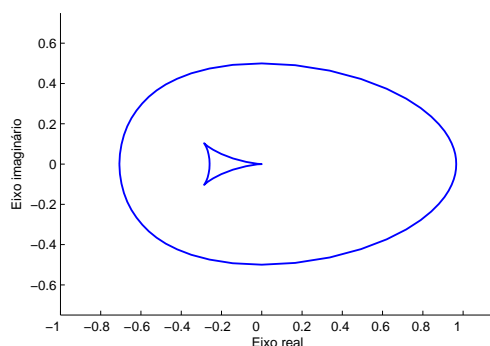


Figura 1.5: Curva geradora de fronteira de  $W(A)$ , sendo  $A$  a matriz do exemplo 1.1.18.

Para  $n \geq 4$ , é conhecido o contradomínio numérico de certas classes especiais de matrizes (e.g. [30, 32, 85, 90]), mas em geral, a sua caracterização não é simples. Por este motivo, a implementação de programas computacionais que representem graficamente o contradomínio numérico de uma matriz arbitrária reveste-se de grande utilidade prática (ver, capítulo 5).

### 1.1.5 Pontos não-diferenciáveis da fronteira de $W(A)$

**Definição 1.1.19.** Um *ponto anguloso* de um subconjunto convexo  $S$  de  $\mathbb{C}$  é um ponto  $z \in \partial S$  tal que existe  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que  $B(z, \epsilon) \cap S$  está contida num sector limitado por duas rectas que se intersectam em  $z$  e que definem um ângulo de medida inferior a  $\pi$  (ver, figura 1.6).

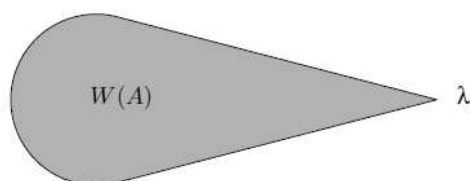


Figura 1.6:  $\lambda$  é um ponto anguloso.

Shapiro [100, p.13] provou, em 2004, que a fronteira de um conjunto convexo é uma curva diferenciável, excepto quando muito num conjunto numerável de pontos angulosos. Consequentemente, em virtude da convexidade do contradomínio numérico, todos os pontos não diferenciáveis de  $W(A)$  são pontos angulosos. Este resultado, originalmente formulado por Kippenhahn [69], é frequentemente atribuído a Donoghue [42] que o estabeleceu em condições mais gerais.

**Teorema 1.1.20 (Kippenhahn-Donoghue).** *Seja  $A$  um operador linear em  $\mathcal{H}$ . Se  $z \in \partial W(A)$  for um ponto angular de  $W(A)$ , então  $z$  é um valor próprio de  $A$ .*

**Demonstração [42]:** Seja  $x \in \mathcal{H}$  um vector unitário tal que  $z = \langle Ax, x \rangle$ . Dado  $0 \neq y \in \mathcal{H}$ , seja  $A_{xy}$  a compressão de  $A$  (cfr. definição 1.1.5) ao subespaço vectorial de  $\mathcal{H}$  gerado por  $x$  e  $y$  (subespaço de dimensão 2, caso contrário  $x = y$ ). Atendendo ao teorema do contradomínio elíptico (cfr. teorema 1.1.4) e ao lema 1.1.6,  $\partial W(A_{xy})$  é uma elipse (possivelmente degenerada) contida em  $W(A)$ . Como  $z$  é um ponto angular de  $\partial W(A)$  e  $z \in W(A_{xy})$ , então  $z$  é necessariamente um ponto angular de  $W(A_{xy})$ . Logo, o disco elíptico  $W(A_{xy})$  degenera num segmento de recta de extremo  $z$  ou reduz-se ao ponto  $z$ . Em ambos os casos,  $z$  é um valor próprio da compressão  $A_{xy}$  e, consequentemente, um valor próprio de  $A$  com vector próprio associado  $x$ . ■

É óbvio que o recíproco deste teorema pode não ser válido, conforme se pode constatar através do seguinte exemplo.

**Exemplo 1.1.21. [7, p.21]** Seja  $A = A_1 \oplus A_2$ , em que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = [1/2].$$

Simple cálculos permitem concluir que  $W(A_1)$  é um disco circular de centro em  $(0, 0)$  e raio  $1/2$ . Então, atendendo à propriedade W15, conclui-se que  $W(A) = \text{conv} \{W(A_1), W(A_2)\} = W(A_1)$ . Portanto,  $z = 1/2$  é um valor próprio de  $A$  e não é um ponto angular de  $W(A)$ .

### 1.1.6 Contradomínio numérico tracial

Ao longo desta subsecção admitiremos que  $A, C \in M_n$ . Uma das generalizações mais famosas do contradomínio numérico clássico, introduzida por Goldberg e Straus [51] é o conceito de  $C$ -contradomínio numérico ou *contradomínio numérico tracial* denotado e definido por

$$W_C(A) := \{\operatorname{tr}(CUAU^*) : U \in \mathcal{U}_n\}, \quad (1.32)$$

sendo  $\mathcal{U}_n$  o grupo das matrizes unitárias em  $M_n$ .

Se  $C = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n)$ , então  $W_C(A)$  reduz-se ao  $c$ -contradomínio numérico de  $A$  introduzido por Westwick [107], simplesmente denotado por  $W_c(A)$ , em que  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ .

Se  $C = I_k \oplus O_{n-k}$ , para  $k \in \{1, \dots, n\}$ , então  $W_C(A)$  reduz-se ao  $k$ -contradomínio numérico de  $A$  introduzido por Halmos [59, Sec.167], adaptado por Marcus e Filipenko [82], e denotado por  $W_k(A)$ . Obviamente que  $W_1(A) = W(A)$  e  $W_n(A) = \{\operatorname{tr}(A)\}$ .

O conjunto  $W_k(A)$  é convexo para qualquer matriz  $A \in M_n$  e qualquer  $k \in \{1, \dots, n\}$ , assim como o conjunto  $W_c(A)$ , para qualquer matriz  $A \in M_n$  e qualquer  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ . A convexidade de  $W_k(A)$ , problema proposto por Halmos, foi inicialmente demonstrada apenas para o caso de  $A$  ser uma matriz normal por Thompson [102] e posteriormente por Berger [22] para o caso geral. Por recurso a resultados da teoria de Morse, Westwick [107] demonstrou a convexidade de  $W_c(A)$  para  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  (veja-se também [96] para uma demonstração alternativa deste resultado segundo uma via algébrica). Westwick apresentou igualmente um exemplo que mostra que para vectores  $c \in \mathbb{C}^n$ , com  $n > 2$ ,  $W_c(A)$  pode não ser convexo. Au-Yeung e Tsing [4], obtiveram o seguinte resultado: para  $c \in \mathbb{C}^n$ ,  $W_c(A)$  é convexo para toda a matriz complexa  $A$  se e só se as entradas de  $c$  são pontos colineares em  $\mathbb{C}$ .

Em geral, o conjunto  $W_C(A)$  não é convexo, nem mesmo para matrizes normais em  $M_3$  (cfr. [4]). Não obstante, Tsing [105] demonstrou a conjectura de Straus (ver, [51]) segundo a qual  $W_C(A)$  é um conjunto estrelado relativamente



ao ponto  $n^{-1}(\text{tr } C)(\text{tr } A)$ , ou seja, para qualquer  $x \in W_C(A)$  e qualquer escalar  $0 \leq \alpha \leq 1$ , tem-se

$$\alpha n^{-1}(\text{tr } C)(\text{tr } A) + (1 - \alpha)x \in W_C(A).$$

Enunciamos, de seguida, algumas propriedades que se obtêm trivialmente da definição de  $W_C(A)$ .

**WC1.**  $W_C(\alpha I + \beta A) = \alpha \text{tr}(A) + \beta W_C(A)$ , para quaisquer escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;

**WC2.**  $W_C(A) = W_{V^*CV}(U^*AU)$ , para quaisquer matrizes unitários  $U, V$ ;

**WC3.**  $W_{C^*}(A^*) = \overline{W_C(A)}$ ;

**WC4.**  $W_C(A) = W_A(C)$ , i.e., os papéis de  $A$  e  $C$  são simétricos.

Dado que  $\mathcal{U}_n$  é compacto e conexo, como  $W_C(A)$  é o contradomínio da aplicação contínua  $U \rightarrow \text{tr}(CUAU^*)$ , decorre que  $W_C(A)$  é um conjunto compacto e conexo para quaisquer  $A, C \in M_n$ .

Saliente-se que a partir da propriedade WC2, podemos afirmar que  $W_C(A)$  é unitariamente invariante para transformações unitárias de semelhança de  $A$  ou  $C$ . Expressaremos este facto dizendo simplesmente que  $W_C(A)$  é unitariamente invariante. Assim, se  $C$  for normal, de acordo com o teorema da triangularização de Schur, podemos considerar sem perda de generalidade que  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ . Neste caso,  $W_C(A)$  permanece inalterado pela reordenação dos elementos principais da matriz  $C$ . Efectivamente, se  $S_n$  denotar o grupo simétrico de grau  $n$  e  $C_\sigma = P_\sigma^T C P_\sigma$ , onde  $P_\sigma$  é a matriz de permutação associada a  $\sigma \in S_n$ , então segundo a propriedade WC2, é válida a igualdade

$$W_{C_\sigma}(A) = W_C(A). \quad (1.33)$$

**Definição 1.1.22.** Seja  $A \in M_n$  e  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{C})$ . Designaremos por *pontos- $\sigma$*  os elementos da forma

$$z_\sigma := \sum_{j=1}^n c_j \alpha_{\sigma(j)}, \quad \text{com } \sigma \in S_n, \quad (1.34)$$

em que  $\alpha_j, j = 1, \dots, n$ , são os valores próprios de  $A$ .

No caso de a matriz  $C$  ser uma matriz diagonal real e a matriz  $A$  ser normal,  $W_C(A)$  está completamente caracterizado no seguinte teorema.

**Teorema 1.1.23.** *Se  $A \in M_n$  e  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{R})$ , então*

$$\text{conv} \{z_\sigma : \sigma \in S_n\} \subset W_C(A), \quad (1.35)$$

*verificando-se igualdade se  $A$  for normal.*

A inclusão (1.35) é uma consequência imediata do facto de os pontos- $\sigma$  pertencerem ao conjunto convexo  $W_C(A)$ . Para uma demonstração da igualdade veja-se [52] ou [83].

Goldberg e Straus [51] caracterizaram o  $C$ -contradomínio numérico de matrizes  $2 \times 2$ , quando  $C \in M_2$  é diagonal.

**Teorema 1.1.24 (Teorema do contradomínio elíptico para  $W_C(A)$ ).** *Sejam  $A \in M_2$ , com valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e  $C = \text{diag}(c_1, c_2) \in M_2$ . Então  $W_C(A)$  é um disco elíptico (possivelmente degenerado) com focos nos pontos- $\sigma$ ,  $z_{(11)} = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$  e  $z_{(12)} = c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1$ , e com eixos maior e menor de comprimento*

$$|c_1 - c_2| \sqrt{\text{tr}(A^*A) - 2\text{Re}(\bar{\lambda}_1\lambda_2)} \quad e \quad |c_1 - c_2| \sqrt{\text{tr}(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2},$$

*respectivamente.*

**Demonstração [51]:** Sendo  $E_{11}$  a matriz da base canónica de  $M_n$  com 1 na posição (1, 1) e restantes entradas nulas, tem-se que  $C = c_2I_2 + (c_1 - c_2)E_{11}$ . Como além disso,  $W_{E_{11}}(A) = W(A)$ , atendendo às propriedades WC1 e WC4, conclui-se que

$$W_C(A) = c_2\text{tr}(A) + (c_1 - c_2)W(A). \quad (1.36)$$

Se  $C$  for uma matriz escalar, é óbvio que  $W_C(A) = \{\text{tr}(A)\text{tr}(C)/2\}$ . Se  $C$  não for escalar, então  $W_C(A)$  é um disco elíptico (possivelmente degenerado), uma vez que resulta do contradomínio numérico de  $A$  por uma homotetia de razão  $c_1 - c_2$  seguida de uma translação, segundo  $c_2\text{tr}(A)$ . Conclui-se sem dificuldade, que os focos e o comprimento do eixo menor deste disco elíptico são os referidos. ■

Mais tarde, Nakazato [89] provou que o  $C$ -contradomínio numérico de  $A$  é um disco elíptico, para  $A, C \in M_2$  quaisquer, resultado cuja demonstração foi mais tarde simplificada por Li [76]. No entanto, apenas o caso  $2 \times 2$  está bem estudado. Para  $n > 2$ , a descrição de  $W_C(A)$  não é de modo algum simples. No caso de  $C$  ser uma matriz diagonal com elementos principais reais, conhece-se a caracterização deste conjunto apenas para certas classes especiais de matrizes. Por exemplo, para algumas classes de matrizes tridiagonais sabe-se que o  $C$ -contradomínio numérico é ainda um disco elíptico [31, 33, 34]. Contudo, foi a caracterização de Chien e Nakazato [31, 33] com base no conceito de curva geradora da fronteira de  $W_C(A)$ , para  $A \in M_n$  e  $C \in M_n(\mathbb{R})$  diagonal, que constituiu um grande avanço na caracterização do  $C$ -contradomínio numérico.

## 1.2 Em espaços de Krein

### 1.2.1 Introdução

Os espaços de Krein são espaços vectoriais munidos de um produto interno indefinido e estão amplamente estudados na literatura [5, 26, 49, 50]. A sua designação é atribuída em homenagem ao matemático ucraniano Mark Grigorievich Krein (1907-1989).

**Definição 1.2.1.** Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vectorial sobre o corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$ . Uma função  $[\cdot, \cdot]$  de  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  em  $\mathbb{C}$  diz-se um *produto interno indefinido* em  $\mathcal{V}$  se satisfizer os seguintes axiomas:

(i) *Linearidade no primeiro argumento:* para cada  $x_1, x_2, y \in \mathcal{V}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,

$$[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha [x_1, y] + \beta [x_2, y];$$

(ii) *Anti-simetria:* para cada  $x, y \in \mathcal{V}$ ,  $[x, y] = \overline{[y, x]}$ ;

(iii) *Não-degenerescência:* se  $[x, y] = 0$  para todo o  $y \in \mathcal{V}$ , então  $x = 0$ .

Portanto, um produto interno indefinido satisfaz todas as propriedades de um produto interno definido, excepto a propriedade  $[x, x] > 0$ , se  $x \neq 0$ , ou

$[x, x] = 0$ , se  $x = 0$ . Não só  $[x, x]$  pode ser negativo como pode ser nulo, mesmo que  $x \neq 0$ . Esta é precisamente a grande diferença que distingue os dois tipos de produtos internos.

**Definição 1.2.2.** Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vectorial munido de um produto interno indefinido  $[\cdot, \cdot]$ . Um vector  $x \in \mathcal{V}$  diz-se *positivo*, *negativo* ou *neutro* se  $[\cdot, \cdot] > 0$ ,  $[\cdot, \cdot] < 0$  ou  $[\cdot, \cdot] = 0$ , respectivamente.

Ao longo da dissertação usaremos a nomenclatura empregue por vários autores (e.g. [81, p.16]), segundo a qual os vectores neutros são também designados por *isotrópicos*, sendo os restantes vectores (positivos e negativos) incluídos na designação única de *anisotrópicos*. Usaremos igualmente a notação  $\mathcal{V}_+$ ,  $\mathcal{V}_-$  e  $\mathcal{V}_0$  para denotar os subespaços de  $\mathcal{V}$  tais que qualquer vector não-nulo desse subespaço é positivo, negativo ou isotrópico, respectivamente.

**Definição 1.2.3.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço vectorial sobre  $\mathbb{C}$  munido de um produto interno indefinido  $[\cdot, \cdot]$ . Diz-se que  $\mathcal{H}$  é um *espaço de Krein* se

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-, \quad (1.37)$$

onde  $(\mathcal{H}_+, [\cdot, \cdot])$  e  $(\mathcal{H}_-, [\cdot, \cdot])$  são dois espaços de Hilbert e  $[\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-] = \{0\}$ , i.e.,  $[x_+, x_-] = 0$ , para  $x_+ \in \mathcal{H}_+$  e  $x_- \in \mathcal{H}_-$  arbitrários.

Observe-se que em geral, a decomposição (1.37) não é única. Contudo,  $\mathcal{H}_+$  e  $\mathcal{H}_-$  são obrigatoriamente dois subespaços (positivo e negativo, respectivamente) de dimensões máxima, pelo que  $\dim \mathcal{H}_+$  e  $\dim \mathcal{H}_-$  não dependem da decomposição (1.37) que se considerar (cfr. [5, p.38]).

Seja  $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  um espaço de Hilbert. Dado um operador linear limitado  $H$  em  $\mathcal{V}$ , invertível e auto-adjunto, a igualdade

$$[x, y] := \langle Hx, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{V}, \quad (1.38)$$

define um produto interno indefinido em  $\mathcal{V}$ , que representamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ . Este produto interno induz em  $\mathcal{V}$  a estrutura de espaço de Krein. Portanto, todo o espaço de Hilbert pode ser munido da estrutura de um espaço de Krein. Reciprocamente, para todo o produto interno indefinido  $[\cdot, \cdot]$ , existe

um operador linear limitado, auto-adjunto e invertível  $H$  que verifica (1.38) (cfr. [50, p.8]). A correspondência  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H \leftrightarrow H$  é claramente uma bijecção.

Conforme referimos anteriormente, sempre que considerarmos um espaço de Hilbert de dimensão finita  $n$ , identificaremos esse espaço com  $\mathbb{C}^n$  munido do produto interno usual (1.4) e identificaremos os respectivos operadores lineares,  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , com uma matriz quadrada de ordem  $n$  com entradas complexas. Portanto, para cada matriz  $H \in M_n$  não-singular e hermítica, podemos munir  $\mathbb{C}^n$  da estrutura de espaço de Krein recorrendo ao produto interno indefinido

$$\langle x, y \rangle_H = \langle Hx, y \rangle = y^* Hx, \quad x, y \in \mathbb{C}^n. \quad (1.39)$$

Quando um produto interno indefinido é introduzido em  $\mathbb{C}^n$ , podemos construir naturalmente certas classes especiais de matrizes estabelecendo-se, deste modo, uma analogia com classes análogas definidas em  $\mathbb{C}^n$  quando munido do produto interno usual (1.4). Vejamos algumas dessas classes de matrizes mais relevantes.

**Definição 1.2.4.** Sejam  $A, H \in M_n$ , sendo  $H$  hermítica e não-singular.

- (i) A matriz  $H$ -adjunta de  $A$  denota-se por  $A^{[*]H}$  (ou simplesmente por  $A^{[*]}$ , nos casos em que não se coloque o problema de ambiguidade) e é a matriz univocamente determinada pela relação

$$\langle Ax, y \rangle_H := \left\langle x, A^{[*]}y \right\rangle_H, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

que se pode exprimir explicitamente em termos matriciais por

$$A^{[*]} = H^{-1}A^*H; \quad (1.40)$$

- (ii) A matriz  $A$  diz-se  $H$ -hermítica ou pseudo-hermítica se

$$A^{[*]} = A. \quad (1.41)$$

- (iii) A matriz  $A$  diz-se  $H$ -normal se

$$A^{[*]}A = AA^{[*]}. \quad (1.42)$$

(iv) A matriz  $A$  diz-se  $H$ -unitária se  $A$  for invertível e  $A^{-1} = A^{[*]}$ , ou seja,

$$A^{[*]}A = AA^{[*]} = I_n. \quad (1.43)$$

Em espaços de Krein  $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot]_H)$  de dimensão infinita, podem-se estabelecer definições análogas para operador  $H$ -adjunto,  $H$ -auto-adjunto,  $H$ -normal e  $H$ -unitário.

Introduzimos de seguida alguma nomenclatura que irá ser utilizada ao longo da dissertação, no caso de  $\mathcal{K}$  ser um espaço de Krein de dimensão finita. Usaremos  $\sigma_H^+(A)$  e  $\sigma_H^-(A)$  para representar os valores próprios de  $A \in M_n$  que têm vectores próprios associados com  $H$ -norma positiva e negativa, respectivamente,

$$\sigma_H^+(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : Ax = \lambda x, \text{ para algum } x \in \mathbb{C}^n, \langle x, x \rangle_H > 0\}; \quad (1.44)$$

$$\sigma_H^-(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : Ax = \lambda x, \text{ para algum } x \in \mathbb{C}^n, \langle x, x \rangle_H < 0\}. \quad (1.45)$$

O conjunto dos valores próprios de  $A$  cujos vectores próprios associados são  $H$ -anisotrópicos será denotado por  $\sigma_H(A)$ . Portanto,  $\sigma_H(A) = \sigma_H^+(A) \cup \sigma_H^-(A)$ .

**Definição 1.2.5.** Diz-se que os valores próprios de  $A$  não se entrelaçam quando

$$\max \sigma_H^-(A) < \min \sigma_H^+(A) \quad \text{ou} \quad \max \sigma_H^+(A) < \min \sigma_H^-(A). \quad (1.46)$$

A condição (1.46), regra geral exigida, desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da teoria dos contradomínios numéricos conforme iremos constatar nas matérias investigadas nos capítulos 3, 4 e 5.

Em analogia à bem conhecida *decomposição cartesiana* de um operador linear  $A$ , usaremos  $\text{Re}^H(A)$  e  $\text{Im}^H(A)$  para denotar os únicos operadores lineares  $H$ -auto-adjuntos que satisfazem

$$A = \text{Re}^H(A) + i \text{Im}^H(A), \quad (1.47)$$

ou seja,

$$\text{Re}^H(A) := \frac{A + A^{[*]}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Im}^H(A) := \frac{A - A^{[*]}}{2i}. \quad (1.48)$$

Se  $H = I$  a relação anterior reduz-se à decomposição cartesiana (1.7) de  $A$ .

### 1.2.2 Definição de $J$ -contradomínio numérico. Algumas propriedades

Em contraste com o caso clássico, o conceito de contradomínio numérico indefinido é relativamente recente [6], [9, 10], [13, 14], [18]-[21], [78]-[79] e [81]. Apresentamos de seguida a sua definição.

**Definição 1.2.6.** Seja  $H$  um operador linear limitado, auto-adjunto e invertível definido num espaço de Krein  $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ . O  $H$ -contradomínio numérico de um operador linear  $A$  é o subconjunto do plano complexo que se denota e define por

$$W_H(A) := \left\{ \frac{\langle Ax, x \rangle_H}{\langle x, x \rangle_H} : x \in \mathcal{K}, \langle x, x \rangle_H \neq 0 \right\}. \quad (1.49)$$

Contrariamente ao contradomínio numérico clássico, o  $H$ -contradomínio numérico pode não ser convexo. No entanto,

$$W_H(A) = W_H^+(A) \cup W_H^-(A), \quad (1.50)$$

onde os conjuntos

$$W_H^\pm := \{ \langle Ax, x \rangle_H : x \in \mathcal{K}, \langle x, x \rangle_H = \pm 1 \}, \quad (1.51)$$

que designaremos por  $H$ -contradomínio numérico positivo e negativo de  $A$ , são convexos. Claramente se constata que  $W_H^+(A) = -W_H^-(A)$ .

Listamos de seguida algumas propriedades do  $H$ -contradomínio numérico que decorrem directamente da definição.

**WJ1.**  $W_H(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta W_H(A)$ , para quaisquer escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;

**WJ2.**  $W_H(U^{[*]}AU) = W_H(A)$ , para todo o operador  $H$ -unitário  $U$ ;

**WJ3.**  $W_H(A^{[*]}) = \{\bar{z} : z \in W_H(A)\}$ ;

**WJ4.**  $W_H(A + B) \subseteq W_H(A) + W_H(B)$ ;

**WJ5.**  $W_H(A) \subseteq W_H(\operatorname{Re}^H(A)) + iW_H(\operatorname{Im}^H(A))$ ;

**WJ6.**  $\operatorname{Re} W_H(A) = W_H(\operatorname{Re}^H(A))$  e  $\operatorname{Im} W_H(A) = W_H(\operatorname{Im}^H(A))$

**WJ7.**  $\sigma_H(A) \subset \overline{W_H(A)}$ ;

**WJ8.**  $W_H(A) = \{\lambda\}$  se e só se  $A = \lambda I$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;

**WJ9.**  $W_H(A) \subseteq \mathbb{R}$  se e só se  $A$  é um operador  $H$ -auto-adjunto.

Importa referir que as propriedades anteriores continuam válidas ao substituímos  $W_H(A)$  por  $W_H^\pm(A)$ , excepto as propriedades WJ1 e WJ7 que, nesse caso, terão que ser substituídas por

**WJ1'.**  $W_H^\pm(\alpha I + \beta A) = \pm\alpha + \beta W_H^\pm(A)$ , para quaisquer escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;

**WJ7'.**  $\sigma_H^\pm(A) \subset \pm \overline{W_H^\pm(A)}$ .

As propriedades WJ8 e WJ9 continuam válidas para  $W_H^\pm(A)$ , desde que  $\sigma_H(A) \cap \mathbb{R}^\pm \neq \emptyset$  [81, p.5]. Cumpre igualmente referir, que se  $\lambda$  for um valor próprio de  $A$  cujos vectores próprios associados são todos  $H$ -isotrópicos, não podemos garantir que  $\lambda \in W_H(A)$ . O conjunto de tais vectores próprios denota-se por  $\sigma_H^0(A)$  e nem sempre  $\sigma_H^0(A) \subset W_H(A)$ . Para constatar este facto, basta considerar uma matriz  $H$ -hermítica  $A$  com valores próprios não-reais. De acordo com [50, p.50], os vectores próprios associados a esses valores próprios são sempre isotrópicos, ou seja, pertencem a  $\sigma_H^0(A)$ , mas não podem pertencer a  $W_H(A)$ , porque segundo a propriedade WJ9, nestas condições,  $W_H(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

Se  $H$  for um operador auto-adjunto definido positivo, então existe um único operador auto-adjunto definido positivo, a *raiz quadrada positiva* de  $H$ , tal que  $(H^{1/2})^2 = H$ . Claramente  $W_H(A) = W_H^+(A) = W(H^{1/2}AH^{-1/2})$  é convexo. De modo análogo, se  $H$  for um operador auto-adjunto definido negativo, então  $W_H(A) = W_{-H}^+(A) = W((-H)^{1/2}A(-H)^{-1/2})$  é convexo. Deste modo, se  $H$  é definido (positivo ou negativo), o estudo do  $H$ -contradomínio numérico reduz-se à teoria do contradomínio numérico clássico. Importa, portanto analisar o caso em que  $H$  é indefinido.

Em contraste com o caso clássico, quando  $H$  é indefinido e  $A$  não é o operador escalar, o conjunto  $W_H(A)$  é ilimitado e não necessariamente fechado [78, 81]. Além disso, apesar de  $W_H(A)$  ser a união de dois conjuntos convexos



(cfr. (1.50)), não é um conjunto convexo, mas sim um conjunto *pseudo-convexo*, i.e., para cada par de pontos distintos  $x, y \in W_H(A)$ , ou

$$\{\alpha x + (1 - \alpha)y : 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset W_H(A)$$

ou

$$\{\alpha x + (1 - \alpha)y : \alpha \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \alpha\} \subset W_H(A).$$

Este resultado deve-se a Li, Tsing e Uhlig [81, Lema 1.1]. A demonstração baseia-se no facto de o conceito de  $H$ -contradomínio numérico estar intimamente relacionado com o cone convexo

$$\begin{aligned} K(\operatorname{Re}(HA), \operatorname{Im}(HA), H) &:= \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha W(\operatorname{Re}(HA), \operatorname{Im}(HA), H) = \\ &= \{(\langle \operatorname{Re}(HA)x, x \rangle, \langle \operatorname{Im}(HA)x, x \rangle, \langle Hx, x \rangle) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathcal{K}\} \end{aligned}$$

em virtude de

$$W_H^\pm(A) = \{x + iy : (x, y, \pm 1) \in K(\operatorname{Re}(HA), \operatorname{Im}(HA), H)\}. \quad (1.52)$$

Recorde-se que um subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^3$  diz-se um *cone convexo* se satisfizer as seguintes condições:

- (i)  $\alpha x \in K$  sempre que  $x \in K$  e  $\alpha > 0$ ;
- (ii)  $x + y \in K$  sempre que  $x, y \in K$ .

**Teorema 1.2.7.** *Se  $A$  é um operador linear em  $\mathcal{K}$ , então  $W_H(A)$  é um conjunto pseudo-convexo.*

**Demonstração [81]:** Suponha-se que  $W_H(A)$  é um conjunto não-singular. Se  $H$  for definido positivo (negativo),  $W_H(A) = W_H^+(A)$  (respectivamente,  $W_H(A) = W_{-H}^+(A)$ ) e a convexidade de  $W_H^+(A)$  (respectivamente,  $W_{-H}^+(A)$ ) garante que  $W_H(A)$  contém os segmentos de recta que unem dois quaisquer pontos distintos em  $W_H(A)$ .

Se  $H$  for indefinido, então  $W_H^+(A)$  e  $W_{-H}^+(A)$  são ambos não-vazios. Sejam  $z \in W_H^+(A)$  e  $w \in W_{-H}^+(A)$  distintos. Considere-se  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ,  $u = \operatorname{Re} w$  e  $v = \operatorname{Im} w$ . Sendo um cone convexo,  $K(\operatorname{Re}(HA), \operatorname{Im}(HA), H)$

contém o segmento de recta  $\ell$  que une  $(x, y, 1)$  a  $-(u, v, 1)$ . Se  $\alpha \geq 1$ , então  $-\alpha^{-1}(u, v, 1) \in \alpha^{-1}\ell$  e

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, 1) + (1 - \alpha)(u, v, 1) &= \\ &= \alpha^2 (\alpha^{-1}(x, y, 1) + (1 - \alpha^{-1})(-\alpha^{-1})(u, v, 1)) \in \bigcup_{\alpha > 0} \alpha\ell. \end{aligned}$$

Como  $K(\operatorname{Re}(HA), \operatorname{Im}(HA), H)$  contém  $\bigcup_{\alpha > 0} \alpha\ell$ , atendendo a (1.52) facilmente se conclui que  $\alpha z + (1 - \alpha)w \in W_H^+(A)$ , para todo o  $\alpha \geq 1$ , e  $W_H^+(A)$  é um conjunto ilimitado. Se  $\alpha \leq 0$ , prova-se de modo análogo que

$$\alpha(x, y, 1) + (1 - \alpha)(u, v, 1) \in -K(\operatorname{Re}(HA), \operatorname{Im}(HA), H).$$

Este facto equivale a dizer que  $\alpha z + (1 - \alpha)w \in -W_H^-(A)$ . Portanto,

$$\{\alpha z + (1 - \alpha)w : \alpha \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \alpha\} \subset W_H(A),$$

logo  $W_H(A)$  é um conjunto ilimitado e pseudo-convexo. ■

Por motivos de simplicidade, até ao final desta subsecção restringimos o nosso estudo a espaços de Krein de dimensão finita e identificaremos os operadores lineares com matrizes em  $M_n$ .

**Definição 1.2.8.** Uma matriz  $U \in M_n$  diz-se *pseudo-unitária de assinatura*  $(r, n - r)$ ,  $0 \leq r \leq n$ , se a transformação linear correspondente preserva a forma quadrática hermitica

$$q(x) = |x_1|^2 + \cdots + |x_r|^2 - |x_{r+1}|^2 - \cdots - |x_n|^2, \quad x \in \mathbb{C}^n,$$

o que equivale a dizer que a matriz  $U$  é  $J$ -unitária em relação à matriz

$$J := I_r \oplus -I_{n-r}. \quad (1.53)$$

Nestas condições

$$J^* = J \quad \text{e} \quad J^2 = I_n, \quad (1.54)$$

i.e.,  $J$  é hermitica e não-singular, sendo  $J^{-1} = J$ . Usaremos  $\mathcal{U}_{r, n-r}$  para denotar o grupo das matrizes  $J$ -unitárias (ou pseudo-unitárias) de assinatura

$(r, n - r)$ . No caso de  $r = n$ ,  $\mathcal{U}_{n,0}$  reduz-se simplesmente ao grupo unitário  $\mathcal{U}_n$  que se trata de um grupo compacto.

De acordo com a *lei da inércia de Sylvester* [63, p.222-223], associada a cada matriz hermítica e não-singular  $H$ , com  $r$  valores próprios positivos (contando as multiplicidades), existe uma matriz não-singular  $S \in M_n$  tal que  $S^*HS = J$ . Claramente,

$$W_J(S^{-1}AS) = W_H(A),$$

logo não constitui restrição considerar, na definição 1.2.6, a matriz hermítica e não-singular  $H$  como sendo a matriz de inércia (1.53) satisfazendo  $0 \leq r \leq n$ . Nos casos em que  $r = n$  (i.e.,  $J$  é definida positiva) e  $r = 0$  (i.e.,  $J$  é definida negativa), a matriz de inércia  $J$  coincide com  $\pm I_n$ , logo  $\pm W_J^\pm(A) = W(A)$  e  $W_J^\mp(A) = \emptyset$ . Assim sendo, doravante e sem perda de generalidade, caso nada seja dito em contrário, admitiremos sempre que  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ , com  $0 \leq r \leq n$ .

**Definição 1.2.9.** Uma base  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de  $\mathbb{C}^n$  diz-se uma *base ortonormada* para  $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$  ou simplesmente uma *base  $J$ -ortonormada* se verificar

$$\langle x_k, x_l \rangle_J = j_k \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, n, \quad (1.55)$$

onde  $j_k$  denota a  $k$ -ésima entrada diagonal da matriz  $J$  e  $\delta_{kl}$  representa o símbolo de Kronecker.

### 1.2.3 Teorema do contradomínio hiperbólico

Em 1998, Li e Rodman [78], sugerem a forma hiperbólica de  $W_J(A)$  e a possibilidade de  $W_J^+(A)$  degenerar num subconjunto de uma recta, num semi-plano ou em todo o plano complexo. No entanto, foi em 2004, que Bebiano, Lemos, Providência e Soares estabeleceram [9, teorema 3.2], para o caso indefinido, um resultado paralelo ao teorema do contradomínio elíptico estabelecido em 1932 por Murnaghan [88] para o contradomínio numérico clássico. Mais recentemente, Bebiano, Providência e Teixeira, apresentaram em [19] uma demonstração alternativa de ambos os teoremas (do contradomínio elíptico e

do contradomínio hiperbólico) baseada nas propriedades geométricas da curva geradora de fronteira.

**Teorema 1.2.10 (Teorema do contradomínio hiperbólico, 2004).** *Sejam  $J = \text{diag}(1, -1)$  e  $A = [a_{ij}] \in M_2$  uma matriz com valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . O  $J$ -contradomínio numérico de  $A$  é limitado pela hipérbole (possivelmente degenerada) com focos em  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e com eixos transverso e não-transverso de comprimento,  $\sqrt{M}$  e  $\sqrt{N}$ , respectivamente, onde*

$$M = \text{tr}(A^{[*]}A) - 2\text{Re}(\bar{\lambda}_1\lambda_2) \quad e \quad N = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 - \text{tr}(A^{[*]}A).$$

*Nos casos degenerados,  $W_J(A)$  é um conjunto singular, uma recta, um subconjunto de uma recta, todo o plano complexo, ou todo o plano complexo excepto uma recta.*

A demonstração deste resultado é bastante extensa razão pela qual não a incluímos remetendo o leitor para [9, p.215-220]. Os sinais das constantes  $M$  e  $N$  permitem discernir os diferentes casos degenerados. Mais precisamente, se  $\mathcal{L}$  denotar a recta que passa por  $\alpha = \text{tr}A/2$  e é perpendicular à recta definida por  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , sabe-se que:

1. Se  $M > 0$  e  $N > 0$ ,  $W_J(A)$  é limitado pela hipérbole caracterizada no teorema 1.2.10;
2. Se  $M = 0$  e  $N > 0$ , então  $W_J(A)$  é
  - (i) a recta  $\mathcal{L}$ , se  $|a_{12}| = |a_{21}|$ ;
  - (ii) todo o plano complexo, excepto a recta  $\mathcal{L}$ , se  $|a_{12}| \neq |a_{21}|$ ;
3. Se  $M < 0$  e  $N > 0$ , então  $W_J(A)$  é todo o plano complexo;
4. Se  $M > 0$  e  $N = 0$ ,  $W_J(A)$  é a recta definida por  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , excepto o segmento de recta aberto que une  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ;
5. Se  $M = N = 0$ , então  $W_J(A)$  é
  - (i) o conjunto singular  $\alpha$ , se  $a_{11} = a_{22}$ ;
  - (i) a recta definida por  $a_{11}$  e  $a_{22}$ , excepto  $\alpha$ , se  $a_{11} \neq a_{22}$ .

Portanto, o  $J$ -contradomínio numérico de uma matriz  $A \in M_2$  está completamente caracterizado. Seguindo o método utilizado por Kippenhahn [69] para o caso clássico e a classificação de Newton para as cúbicas, o  $W_J(A)$  está igualmente caracterizado em [20, 21] para matrizes  $A \in M_3$ . No caso geral, apenas se conhece a caracterização de  $W_J(A)$  em algumas classes especiais de matrizes. Destacamos algumas dessas caracterizações mais relevantes.

**Teorema 1.2.11.** [10, p.20] *Se  $A \in M_n$  é uma matriz  $J$ -hermítica e os seus valores próprios não são todos reais, então  $W_J(A) = \mathbb{R}$ .*

**Definição 1.2.12.** Uma matriz  $A \in M_n$  diz-se *essencialmente  $J$ -hermítica* se  $\alpha I_n + \beta A$  é  $J$ -hermítica para algum  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $0 \neq \beta \in \mathbb{C}$ .

**Corolário 1.2.13.** [10, p.21] *Se  $A \in M_n$  é essencialmente  $J$ -hermítica e os valores próprios da matriz  $\alpha I_n + \beta A$ , com  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $0 \neq \beta \in \mathbb{C}$  não são todos reais, então  $W_J(A)$  é a recta que passa por  $-\alpha/\beta$  e que tem a direcção de  $-\arg \beta$ .*

Segundo a propriedade W14, o contradomínio numérico clássico de uma matriz normal é o invólucro convexo do seu espectro. Existe um resultado paralelo a este para  $W_J(A)$  quando  $A$  é uma matriz  $J$ -normal, válido mediante certas condições.

**Teorema 1.2.14.** [73, p.20] *Se  $A \in M_n$  é uma matriz  $J$ -normal cujos valores próprios são todos simples, então  $W_J(A)$  é o invólucro pseudo-convexo dos seus valores próprios.*

#### 1.2.4 Curva geradora de fronteira

As definições de recta de suporte e de ponto angular de um subconjunto convexo de  $\mathbb{C}$  constam nas definições 1.1.8 e 1.1.19, respectivamente. Sendo  $W_J(A)$  a união de dois conjuntos convexos (1.50), as rectas de suporte e os pontos angulosos de  $W_J(A)$  são as rectas de suporte e os pontos angulosos das suas componentes convexas  $W_J^+(A)$  e  $W_J^-(A)$ . Saliente-se que as rectas de suporte de  $W_J(A)$  podem não existir e existindo podem não ser únicas. Fazemos referência de seguida a dois resultados bastante úteis relacionados com os dois conceitos anteriores.

**Lema 1.2.15.** [9, p.206] *Sejam  $A \in M_n$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ . Se os valores próprios de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  não são todos reais, então  $W_J(A)$  não tem nenhuma recta de suporte na direcção  $\theta$ .*

**Lema 1.2.16.** [79, p.977] *Seja  $A \in M_n$ . Se  $z$  é um ponto angularo de  $\pm W_J^\pm(A)$ , então  $z \in \sigma_J^\pm(A)$  e existe  $x \in \mathbb{C}^n$  tal que  $Ax = zx$ ,  $A^{[*]}x = \bar{z}x$  e  $\langle x, x \rangle_J = \pm 1$ .*

Em [9, p.207], Bebiano, Lemos, Providência e Soares generalizaram o resultado bem conhecido de Murnaghan e Kippenhahn (cfr. teorema 1.1.16) para o  $J$ -contradomínio numérico de uma matriz.

**Teorema 1.2.17.** *Seja  $ux + vy + w = 0$  a equação de uma recta de suporte de  $W_J(A)$ , então*

$$\det(u\operatorname{Re}^J(A) + v\operatorname{Im}^J(A) + wI_n) = 0, \quad (1.56)$$

sendo  $\operatorname{Re}^J(A)$  e  $\operatorname{Im}^J(A)$  as matrizes  $J$ -hermíticas definidas em (1.48).

O polinómio homogéneo

$$f_A^J(u, v, w) := \det(u\operatorname{Re}^J(A) + v\operatorname{Im}^J(A) + wI_n), \quad (1.57)$$

de grau  $n$  pode entender-se como a equação de linhas homogéneas da curva dual,  $\Gamma_J^*$ , de uma curva algébrica  $\Gamma_J$  de classe  $n$  definida no plano projectivo complexo  $P\mathbb{C}^2$ . Mais precisamente,

$$\Gamma_J^* = \{(u : v : w) \in P\mathbb{C}^2 : f_A^J(u, v, w) = 0\};$$

$$\Gamma_J = \{(x : y : z) \in P\mathbb{C}^2 : ux + vy + zw = 0 \text{ é uma tangente de } \Gamma_J^*\}. \quad (1.58)$$

A parte real da vista afim de  $\Gamma_J$  segundo o plano  $z = 1$  representa uma curva em  $\mathbb{R}^2$  que denotaremos por  $C_J(A)$  e que se designa a *curva geradora de fronteira* de  $W_J(A)$ , ou seja,

$$C_J(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x : y : 1) \in \Gamma_J\}. \quad (1.59)$$

Como facilmente se constata, os coeficientes de  $f_A^J(u, v, w)$  são todos reais e, portanto, a curva  $\Gamma_J$  de classe  $n$  definida em (1.58) tem  $n$  focos reais que coincidem exactamente com os valores próprios de  $A$ , contando com as multiplicidades. Obviamente, se  $J = \pm I_n$ , então  $C_J(A)$  reduz-se à curva geradora de fronteira (1.27) de  $W(A)$ .

Kippenhahn provou em 1951 que o contradomínio numérico clássico é o invólucro convexo da sua curva geradora de fronteira. Em 2005, Bebiano, Lemos, Providência e Soares provaram que, mediante certas condições, o  $J$ -contradomínio numérico é o *invólucro pseudo-convexo* da sua curva geradora de fronteira. Simbolicamente,

$$W_J(A) = \text{pconv } C_J(A), \quad (1.60)$$

existindo, portanto um paralelismo entre o conceito de curva geradora de fronteira em espaços de Hilbert e em espaços de Krein. O processo de determinação do invólucro pseudo-convexo de  $C_J(A)$  consta em [10] e tem por base o lema 1.2.18. Trata-se de uma generalização o lema 1.1.9 a espaços de Krein.

**Lema 1.2.18.** *Sejam  $A \in M_n$  e  $x \in \mathbb{C}^n$  tal que  $\langle x, x \rangle_J = \pm 1$ . Se  $W_J^\pm(\text{Re}^J(A))$  é um segmento de recta fechado ou uma semi-recta fechada, então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a)  $\text{Re} \langle Ax, x \rangle_J$  é um ponto extremo de  $\pm \text{Re } W_J^\pm(A)$ ;
- (b)  $\langle \text{Re}^J Ax, x \rangle_J$  é um ponto extremo de  $\pm W_J^\pm(\text{Re}^J A)$ ;
- (c)  $\text{Re}^J Ax = \lambda_M x$ , onde  $\lambda_M$  é o máximo (ou o mínimo) de  $\sigma_J^\pm(\text{Re}^J A)$ .

**Demonstração [10, p.21]:** A equivalência entre (a) e (b) é uma consequência imediata da propriedade WJ6 e do facto de

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}^J Ax, x \rangle_J &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle \left( A + A^{[*]} \right) x, x \right\rangle_J = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle_J + \frac{1}{2} \left\langle A^{[*]} x, x \right\rangle_J \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle_J + \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle_J = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle_J + \frac{1}{2} \overline{\langle Ax, x \rangle_J} \\ &= \text{Re}^J (\langle Ax, x \rangle_J). \end{aligned}$$

Admita-se que  $z$  é um ponto extremo de  $W_J^\pm(\text{Re}^J A)$ . Então  $z$  é um ponto anguloso de  $W_J^\pm(\text{Re}^J A)$  e, segundo o lema 1.2.16,  $z$  é o maior (ou menor) valor próprio pertencente a  $\sigma_J^\pm(\text{Re}^J A)$ , ou seja,  $z = \lambda_M$ .

(c)  $\Rightarrow$  (b) Se  $x$  é um vector próprio de  $\operatorname{Re}^J A$  associado a  $\lambda_M$ , então  $\pm \langle \operatorname{Re}^J Ax, x \rangle_J = \lambda_M$ . Logo  $\pm \langle \operatorname{Re}^J Ax, x \rangle_J$  é um ponto extremo de  $W_J^\pm(\operatorname{Re}^J A)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c) (Por redução ao absurdo) Suponhamos que  $x$  não é um vector próprio de  $\operatorname{Re}^J A$  associado ao valor próprio  $\lambda_M$ , então  $\pm \langle \operatorname{Re}^J Ax, x \rangle_J \neq \lambda_M$  e  $\lambda_M$  não seria um ponto extremo de  $W_J^\pm(\operatorname{Re}^J A)$ , o que gera uma contradição. ■

Passemos à descrição do processo de determinação do invólucro pseudoconvexo de  $C_J(A)$ . Para cada  $A \in M_n$ , considere-se o subconjunto  $\Omega$  do intervalo  $[0, 2\pi[$  constituído por todos os ângulos  $\theta$  em relação aos quais os  $n$  valores próprios da matriz  $J$ -hermítica  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  são todos reais, distintos e cujos vectores próprios associados induzem uma base de vectores  $J$ -anisotrópicos,  $\{x_1(\theta), \dots, x_n(\theta)\}$ . Então, para  $k = 1, \dots, n$  e  $\theta \in \Omega$ , os pontos

$$p_k^J(\theta) := \frac{\langle Ax_k(\theta), x_k(\theta) \rangle_J}{\langle x_k(\theta), x_k(\theta) \rangle_J}, \quad (1.61)$$

pertencem à curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$  e

$$W_J(A) = \operatorname{pconv} \{p_k^J(\theta) : \theta \in \Omega, k = 1, \dots, n\}. \quad (1.62)$$

Mais concretamente, para cada par de pontos  $p_k^J(\theta)$  e  $p_s^J(\theta)$ , existem duas possibilidades, ou

- (i)  $\langle x_k(\theta), x_k(\theta) \rangle_J \langle x_s(\theta), x_s(\theta) \rangle_J > 0$  e, nesse caso,  $p_k^J(\theta)$  e  $p_s^J(\theta)$  pertencem ambos à mesma componente convexa,  $W_J^+(A)$  ou  $W_J^-(A)$ , de  $W_J(A)$ , razão pela qual  $W_J(A)$  contém o segmento de recta que une esses pontos, i.e.,

$$\{\alpha p_k^J(\theta) + (1 - \alpha)p_s^J(\theta) : 0 \leq \alpha \leq 1\},$$

ou

- (ii)  $\langle x_k(\theta), x_k(\theta) \rangle_J \langle x_s(\theta), x_s(\theta) \rangle_J < 0$  e nesse caso,  $p_k^J(\theta)$  e  $p_s^J(\theta)$  pertencem a componentes convexas diferentes de  $W_J(A)$ , o que significa que  $W_J(A)$  contém a recta definida por  $p_k^J(\theta)$  e  $p_s^J(\theta)$ , excepto o segmento de recta aberto que os une, i.e.,

$$\{\alpha p_k^J(\theta) + (1 - \alpha)p_s^J(\theta) : \alpha \leq 0 \text{ ou } \alpha \geq 1\};$$



Partindo da equação em coordenadas de linha homogéneas (1.56), a determinação da correspondente equação de pontos da curva  $C_J(A)$  consiste em aplicar o *método de dualização* descrito em (1.29), (1.30) e (1.31) substituindo o polinómio  $f_A(u, v, w)$  pelo polinómio  $f_A^J(u, v, w)$  definido em (1.57).

### 1.2.5 $J$ -contradomínio numérico tracial

A generalização de  $W_C(A)$  a espaços de Krein foi introduzida, em 2004, por Bebiano, Lemos, Providência e Soares [9] e tem sido alvo de uma intensa investigação (veja-se [13, 14, 91, 92, 93]). Introduzimos, de seguida, a sua definição.

**Definição 1.2.19.** Para duas matrizes arbitrárias  $A, C \in M_n$ , o  $J$ -contradomínio numérico tracial de  $A$  (em relação a  $C$ ) é denotado e definido por

$$W_C^J(A) := \left\{ \operatorname{tr} \left( CUAU^{[*]} \right) : U \in \mathcal{U}_{r, n-r} \right\}. \quad (1.63)$$

Trata-se de um subconjunto conexo do plano complexo pelo facto de grupo pseudo-unitário  $\mathcal{U}_{r, n-r}$  ser conexo (cfr. [53]) e  $W_C^J(A)$  ser o contradomínio da aplicação contínua de  $\mathcal{U}_{r, n-r}$  em  $\mathbb{C}$  definida por  $U \rightarrow \operatorname{tr} (CUAU^{[*]})$ .

Vejam algumas das propriedades básicas de  $W_C^J(A)$  que decorrem directamente da definição.

**WCJ1.**  $W_C^J(\alpha I_n + \beta A) = \alpha \operatorname{tr}(C) + \beta W_C^J(A)$ , para  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  arbitrários;

**WCJ2.**  $W_{V^{[*]}CV}^J(U^{[*]}AU) = W_C^J(A)$ , para  $U$  e  $V$  matriz  $J$ -unitárias arbitrárias;

**WCJ3.**  $W_{C^{[*]}}^J(A^{[*]}) = \{\bar{z} : z \in W_C^J(A)\}$ ;

**WCJ4.**  $W_C^J(A) = W_A^J(C)$ , i.e., os papéis das matrizes  $A$  e  $C$  são simétricos.

Note-se que à semelhança do que foi dito em relação ao  $J$ -contradomínio numérico, não constitui perda de generalidade admitir que a matriz  $J$  é sempre da forma (1.53). Efectivamente, utilizando a *lei de inércia de Sylvester* [63, p.222-223], facilmente se verifica que

$$W_C^H(A) = W_{C_R}^J(A_R), \quad (1.64)$$

onde  $R$  é uma matriz não-singular tal que  $R^*HR = J$ ,  $A_R = R^{-1}AR$  e  $C_R = R^{-1}CR$ .

Uma matriz  $U$ , de colunas  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$ , pertence a  $\mathcal{U}_{r,n-r}$  se e só se o conjunto de vectores  $x_1, \dots, x_n$  forma uma base  $J$ -ortonormada de  $\mathbb{C}^n$  (cfr. (1.55)). Nestas condições, decorre directamente da definição que se  $C = E_{kk}$ , onde  $\{E_{11}, \dots, E_{nn}\}$  denota a base canónica de  $M_n$ , então  $W_C^J(A)$  reduz-se a  $\pm W_J^\pm(A)$ , consoante  $j_k = \pm 1$ , sendo  $j_k$  a  $k$ -ésima entrada diagonal de  $J$ . No caso de  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n$ , então  $W_C^J(A)$  pode também ser definido do seguinte modo

$$W_C^J(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n j_k c_k \langle Ax_k, x_k \rangle_J : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n \text{ satisfazendo (1.55)} \right\}.$$

Além disso, da propriedade WCJ2 decorre que  $W_C^J(A)$  permanece inalterado por reordenação dos primeiros  $r$  e dos últimos  $n - r$  elementos principais de  $C$ . Efectivamente, se  $P_\sigma$  é a matriz de permutação associada a uma permutação do tipo  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \in S_n$ , o grupo simétrico de grau  $n$ , em que  $\sigma_1 \in S_r$  e  $\sigma_2 \in S_{n-r}$ , então para  $C_\sigma = P_\sigma^T C P_\sigma$ , tem-se que

$$W_C^J(A) = W_{C_\sigma}^J(A). \quad (1.65)$$

Recorrendo a um teorema devido a Tarski, Leal Duarte [44] mostrou que a fronteira de  $W_C(A)$  é uma união finita de arcos algébricos (ver também [94]). Seguindo a abordagem de Leal Duarte, em 2004, Bebiano, Lemos, Providência e Soares [9, p.209-210] provaram que a fronteira de  $W_C^J(A)$  também é uma união finita de arcos algébricos e, portanto, uma curva de classe  $\mathbb{C}^\infty$ , excepto possivelmente num número finito de pontos.

Prosseguindo neste contexto, apresentamos de seguida a caracterização do  $J$ -contradomínio tracial para o caso  $2 \times 2$  em que  $C$  é uma matriz diagonal e  $J = \text{diag}(1, -1)$ .

**Teorema 1.2.20 (Teorema do contradomínio hiperbólico para  $W_C^J(A)$ ).** *Sejam  $A \in M_2$ , com valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , e  $C = \text{diag}(c_1, c_2) \in M_2$ . Então,  $W_C^J(A)$  é limitado por um dos ramos da hipérbole (possivelmente degenerada) de focos  $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$  e  $c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1$ , cujos eixos transversos e não-*

-transverso têm comprimento

$$|c_1 - c_2| \sqrt{\operatorname{tr}(A^{[*]}A) - 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}_1 \lambda_2)} \quad e \quad |c_1 - c_2| \sqrt{|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 - \operatorname{tr}(A^{[*]}A)},$$

respectivamente. Nos casos degenerados,  $W_C^J(A)$  pode ser um conjunto singular, uma recta, um subconjunto de uma recta, um semi-plano aberto ou todo o plano complexo.

**Demonstração [9, p.220-221]:** Sendo  $j_1 = 1$ , tem-se que  $W_{E_{11}}^J(A) = W_J^+(A)$ . Como além disso,  $C = c_2 I_2 + (c_1 - c_2) E_{11}$ , atendendo às propriedades WCJ1 e WCJ4, conclui-se que

$$W_C^J(A) = c_2 \operatorname{tr}(A) + (c_1 - c_2) W_J^+(A). \quad (1.66)$$

Se  $C$  é uma matriz escalar, então  $c_1 = c_2$  e  $\operatorname{tr}(C) = 2c_2$ . Portanto,  $W_C^J(A) = \{\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(C)/2\}$ . Se  $C$  não é escalar, o resultado segue de (1.66) e do teorema 1.2.10. ■

Apesar do caso  $2 \times 2$  estar completamente caracterizado, para  $n > 2$ , apenas se conhece a descrição de  $W_C^J(A)$  em alguns casos especiais (cfr. [9, 14]), razão pela qual a caracterização da curva geradora de fronteira de  $W_C^J(A)$  revela-se de extrema importância. As suas equações paramétricas no caso de  $A \in M_n$  e  $C = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{R})$  serão deduzidas na secção 4.4, à semelhança do que foi feito por Chien e Nakazato [31, 33] em relação à curva geradora de fronteira de  $W_C(A)$ .



# Capítulo 2

## Contradomínio numérico clássico de matrizes 2-Toeplitz de banda

O conceito de matriz de Toeplitz (ou matriz diagonal-constante), introduzido por Otto Toeplitz [103], surge em diversos campos teóricos e aplicados no contexto da modelação matemática, física, estatística e processamento de imagem. Mais concretamente, os problemas típicos modelados por matrizes de Toeplitz são: a solução numérica de certas equações diferenciais e integrais [23, 28, 29], a análise de séries temporais [54, 55, 56], processamento de sinal e imagem [2, 37, 62, 66], modelo de cadeia de uma estrutura electrónica [61], teoria dos modos normais do cristal unidimensional [3], cadeias de Markov e teoria das filas [23, 24, 25], entre outros.

Neste capítulo vamos introduzir o conceito de matriz de Toeplitz biperiódica e analisar algumas das suas propriedades fundamentais.

### 2.1 Matrizes e operadores 2-Toeplitz

**Definição 2.1.1.** Uma *matriz de Toeplitz biperiódica* ou *matriz 2-Toeplitz*, é uma matriz  $T_n = [t_{ij}] \in M_n$  tal que

$$t_{i,j} := \begin{cases} a_{i-j} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ b_{i-j} & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Temos então,

$$T_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1-n} \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2-n} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{3-n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & \cdots & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}, \quad \text{se } n \text{ é ímpar} \quad (2.2)$$

e

$$T_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1-n} \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2-n} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{3-n} \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ b_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}, \quad \text{se } n \text{ é par.} \quad (2.3)$$

Portanto, as matrizes 2-Toeplitz são caracterizadas pelo facto de as diagonais paralelas à diagonal principal serem biperiódicas. É claro que toda a matriz 2-Toeplitz é completamente caracterizada pelas entradas das duas primeiras e das duas últimas linhas, tendo portanto  $4(n-1)$  entradas distintas e não as habituais  $n^2$  entradas de uma qualquer matriz em  $M_n$ .

O nosso estudo centra-se numa classe especial de matrizes 2-Toeplitz, a classe das matrizes de banda cuja definição apresentamos a seguir.

**Definição 2.1.2.** Uma matriz 2-Toeplitz  $T_n$  diz-se uma *matriz de banda* se existir um inteiro  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < n-1$ , tal que  $a_{i-j} = 0$  e  $b_{i-j} = 0$ , para  $|i-j| > m$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Neste caso, diz-se que a matriz  $T_n$  tem largura de banda  $2m+1$ .

**Definição 2.1.3.** Uma matriz  $A \in M_n$  diz-se *tridiagonal* se  $a_{ij} = 0$  sempre que  $|i-j| > 1$ .

Portanto, as matrizes tridiagonais são, em particular, matrizes 2-Toeplitz com largura de banda 3 e serão objecto de estudo na secção 2.4.

Toda a matriz 2-Toeplitz pode ser considerada uma submatriz principal de uma matriz 2-Toeplitz infinita

$$T_\infty = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Evidentemente que a matriz (2.4) é completamente caracterizada pelas sequências de números complexos

$$\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} := \{\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots\}$$

e

$$\{b_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} := \{\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots\}.$$

Doravante, admitiremos que a matriz 2-Toeplitz infinita (2.4) é uma matriz de banda, com largura de banda  $2m + 1$ . Nestas condições, a matriz  $T_\infty$  tem associada uma função  $f : \mathbb{E} \rightarrow M_2$ , em que  $\mathbb{E}$  é a esfera unitária, definida por

$$f(\phi) \equiv T_\phi := \begin{bmatrix} \hat{a}(\phi) & \check{a}(\phi) \\ \check{b}(\phi) & \hat{b}(\phi) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad (2.5)$$

onde, para  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\hat{a}(\phi) := \sum_{-m \leq 2k \leq m} a_{2k} e^{ik\phi}, \quad \check{a}(\phi) := \sum_{-m \leq 2k-1 \leq m} a_{2k-1} e^{ik\phi} \quad (2.6)$$

e

$$\check{b}(\phi) := \sum_{-m \leq 2k+1 \leq m} b_{2k+1} e^{ik\phi}, \quad \hat{b}(\phi) := \sum_{-m \leq 2k \leq m} b_{2k} e^{ik\phi}. \quad (2.7)$$

A função  $f$  assim definida diz-se o *símbolo* de  $T_\infty$  (ou, alternativamente, a matriz  $T_\phi$  denomina-se a *matriz símbolo* de  $T_\infty$ ) e desempenha um papel fulcral em toda a teoria desenvolvida ao longo deste capítulo. No caso de  $T_\infty$  não

ser de banda, as somas (2.6) e (2.7) são infinitas, sendo nesse caso necessário garantir a convergência absoluta das referidas somas.

Chamamos a atenção para o facto de as entradas da matriz  $T_\infty$  serem exactamente os *coeficientes de Fourier* de  $\hat{a}$ ,  $\check{a}$ ,  $\check{b}$  e  $\hat{b}$ , e poderem ser determinadas através das fórmulas,

$$a_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{a}(\phi) e^{-ik\phi} d\phi, \quad a_{2k-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{a}(\phi) e^{-ik\phi} d\phi \quad (2.8)$$

e

$$b_{2k+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{b}(\phi) e^{-ik\phi} d\phi, \quad b_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{b}(\phi) e^{-ik\phi} d\phi, \quad (2.9)$$

para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Seja  $\ell^2$  o espaço de Hilbert constituído por todas as sequências de números complexos  $x = \{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$  tais que a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$  é convergente, munido do produto interno usual,

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \bar{y}_n.$$

A matriz infinita (2.4) induz um operador linear  $T_f : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \ell^2 \times \ell^2$  que actua segundo a regra  $Y = T_\infty X$ , onde  $X$  é o vector  $(\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty) \in \ell^2 \times \ell^2$  escrito como um vector coluna na forma  $X = [x_0, y_0, x_1, y_1, \dots]^T$ .

Seja  $\mathcal{W}$  a álgebra de *Wiener*, i.e., o conjunto de todas as funções  $x : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  com série de Fourier absolutamente convergente, ou equivalentemente,

$$x(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{in\phi}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad \text{com} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n| < \infty,$$

munido do produto interno usual

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\phi) \bar{y}(\phi) d\phi.$$

Considere-se o subespaço fechado da álgebra de Wiener denotado por  $H^2(\mathbb{E})$ , ou simplesmente por  $H^2$ , denominado *espaço de Hardy*, constituído por todas



as funções  $x : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  cujos coeficientes de Fourier indexados por um inteiro negativo são nulos. Simbolicamente,

$$x(\phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^{in\phi}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad \text{com} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < \infty.$$

A função

$$\begin{aligned} \Phi : H^2 \times H^2 &\rightarrow \ell^2 \times \ell^2 \\ (x, y) &\mapsto (x_0, y_0, x_1, y_1, \dots) \end{aligned}$$

onde

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\phi) e^{-in\phi} d\phi \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\phi) e^{-in\phi} d\phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

estabelece um isomorfismo entre os espaços  $H^2 \times H^2$  e  $\ell^2 \times \ell^2$ . Portanto, o operador linear  $T_f$  pode ser considerado alternativamente como um operador em  $H^2 \times H^2$  definido para todo o  $g = (x, y) \in H^2 \times H^2$ , por

$$T_f(g) = P(fg), \tag{2.10}$$

onde  $P$  é a projecção ortogonal de  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$  sobre  $H^2 \times H^2$  e  $fg$  é a função definida em  $\mathbb{E}$  por

$$(fg)(\phi) = T_\phi \begin{bmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{bmatrix}, \quad \text{para todo o } \phi \in [0, 2\pi[.$$

A caracterização (2.10) do operador 2-Toeplitz  $T_f$  é uma generalização, ao caso biperiódico, da definição clássica de operador de Toeplitz (ver, [70]). Além disso, a igualdade (2.10) evidencia a existência de uma íntima relação entre o operador 2-Toeplitz  $T_f$  e o seu símbolo  $f$ . Conforme iremos ver nas secções 2.3, 2.4 e 2.5, existe igualmente uma íntima relação entre o contradomínio numérico de  $T_f$  e a matriz símbolo  $T_\phi$  que lhe está associada.

## 2.2 Matrizes 2-Toeplitz e matrizes 2-circulantes

Nesta secção iremos introduzir uma classe especial de matrizes 2-Toeplitz cuja definição apresentamos a seguir. Esta nova classe de matrizes é uma

generalização do conceito usual de matriz circulante (ver, [40, 55]) e vai-se revelar bastante útil no estudo de algumas propriedades relativas às matrizes 2-Toeplitz de banda.

**Definição 2.2.1.** Seja  $n \in \mathbb{N}$  par. Chama-se matriz *circulante biperiódica* ou matriz *2-circulante*,  $C_n = [c_{ij}] \in M_n$ , a toda a matriz 2-Toeplitz tal que

$$c_{i,j} := \begin{cases} a_{i-j} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ b_{i-j} & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

onde

$$a_k = a_{k-n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-2 \quad \text{e} \quad b_k = b_{k-n}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \quad (2.12)$$

Simbolicamente,

$$C_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & \dots & a_{2-n} & a_{1-n} \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & \dots & \dots & \dots & b_{3-n} & b_{2-n} \\ a_{2-n} & a_{1-n} & a_0 & a_{-1} & \dots & \dots & a_{4-n} & a_{3-n} \\ b_{3-n} & b_{2-n} & b_1 & b_0 & b_{-1} & \dots & b_{5-n} & b_{4-n} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ a_{-2} & a_{-3} & \dots & \dots & a_{2-n} & a_{1-n} & a_0 & a_{-1} \\ b_{-1} & b_{-2} & \dots & \dots & \dots & b_{2-n} & b_1 & b_0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Portanto, uma matriz 2-circulante é completamente caracterizada pelas suas entradas ao longo das duas primeiras linhas

$$\{a_{1-k}\}_{k=1}^n = \{a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{1-n}\} \quad \text{e} \quad \{b_{2-k}\}_{k=1}^n = \{b_1, b_0, b_{-1}, \dots, b_{2-n}\}.$$

Por este motivo, podemos denotar alternativamente a matriz (2.13) por

$$\text{circ}(a_0, a_{-1}, \dots, a_{1-n}; b_1, b_0, b_{-1}, \dots, b_{2-n}).$$

Refrá-se ainda que dada uma qualquer matriz 2-Toeplitz,  $T_n$ , de largura de banda  $2m + 1 < n$  e  $n \in \mathbb{N}$  par, é sempre possível construir uma matriz 2-circulante da mesma ordem,  $C_n$ , que difere de  $T_n$  apenas no canto superior direito e no canto inferior esquerdo. Mais precisamente, difere em

$2 \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) = m(m+1)$  elementos. As duas primeiras linhas de uma matriz  $C_n$  nestas condições são

$$\{a_0, a_{-1}, \dots, a_{-m}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-(2m+1)}, a_m, a_{m-1}, \dots, a_1\} \quad (2.14)$$

e

$$\{b_1, b_0, b_{-1}, \dots, b_{-m}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-(2m+1)}, b_m, b_{m-1}, \dots, b_2\}. \quad (2.15)$$

Por exemplo, a matriz 2-Toeplitz de ordem  $n = 6$  e largura de banda  $2m+1 = 5$

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

difere da matriz 2-circulante

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & 0 & a_2 & a_1 \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & 0 & b_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} \\ a_{-2} & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ b_{-1} & b_{-2} & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

em  $m(m+1) = 6$  elementos situados no canto superior direito e no canto inferior esquerdo.

Como iremos dedicar o nosso estudo às matrizes 2-Toeplitz de banda, iremos referir-nos à matriz  $C_n$  definida em (2.14) e (2.15) como sendo a matriz 2-circulante associada à matriz 2-Toeplitz de largura de banda  $2m+1$ .

Conhecidos estes resultados estamos em condições de deduzir os valores próprios de uma matriz 2-circulante associada a uma matriz 2-Toeplitz de banda.

Dado  $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ , os números complexos  $w$  que satisfazem  $w^n = z$  dizem-se as raízes índice  $n$  de  $z$ . Portanto, para  $n$  par, as  $n/2$  raízes complexas

da unidade são dadas por

$$\rho_k := e^{-i\phi_k}, \quad \text{onde } \phi_k = \frac{4k\pi}{n}, \quad \text{para } k = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1. \quad (2.16)$$

**Teorema 2.2.2.** *Seja  $C_n \in M_n$ , com  $n$  par, a matriz 2-circulante associada a uma matriz 2-Toeplitz de banda,  $T_n$ . Então, existe uma matriz unitária  $U \in M_n$  tal que*

$$C_n = U \left( T_{\phi_0} \oplus \dots \oplus T_{\phi_{\frac{n}{2}-1}} \right) U^*, \quad (2.17)$$

sendo  $T_{\phi_k} \in M_2$  a matriz símbolo<sup>1</sup> associada a  $T_n$  e  $\phi_k = 4k\pi/n$ , para  $k = 0, \dots, n/2 - 1$ . Além disso, os valores próprios de  $C_n$  são

$$\lambda_{\pm}(\phi_k) = \frac{\hat{a}(\phi_k) + \hat{b}(\phi_k) \pm \sqrt{(\hat{a}(\phi_k) - \hat{b}(\phi_k))^2 + 4\check{a}(\phi_k)\check{b}(\phi_k)}}{2}, \quad (2.18)$$

onde  $\hat{a}$ ,  $\check{a}$ ,  $\check{b}$  e  $\hat{b}$  são as funções definidas em (2.6) e (2.7), e para  $x_k^{\pm}, y_k^{\pm} \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos,  $z_k^{\pm} = \sqrt{\frac{2}{n(|x_k^{\pm}|^2 + |y_k^{\pm}|^2)}} w_k^{\pm}$ , em que

$$w_k^{\pm} = \left( x_k^{\pm}, y_k^{\pm}, x_k^{\pm} \rho_k, y_k^{\pm} \rho_k, \dots, x_k^{\pm} \rho_k^{\frac{n}{2}-1}, y_k^{\pm} \rho_k^{\frac{n}{2}-1} \right)^T, \quad (2.19)$$

é uma família de vectores próprios (normalizados) associados a  $\lambda_{\pm}(\phi_k)$ ,  $k = 0, \dots, n/2 - 1$ .

**Demonstração:** Sejam  $\rho_k$  as raízes índice  $n/2$  da unidade definidas em (2.16) e

$$u_k = \left( 1, 0, \rho_k, 0, \dots, \rho_k^{\frac{n}{2}-1}, 0 \right)^T, \quad v_k = \left( 0, 1, 0, \rho_k, \dots, 0, \rho_k^{\frac{n}{2}-1} \right)^T \in \mathbb{C}^n,$$

<sup>1</sup>Toda a matriz 2-Toeplitz de banda  $T_n$  tem igualmente associada uma matriz símbolo, uma vez que a definição (2.5) pode ser aplicada à matriz 2-Toeplitz infinita,  $T_{\infty}$ , que tem  $T_n$  como submatriz principal e todas as restantes entradas iguais a zero.

para  $k = 0, \dots, n/2 - 1$ . Então,

$$C_n u_k = \begin{bmatrix} a_0 + a_{-2}\rho_k + a_{-4}\rho_k^2 + \dots + a_{2-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} \\ b_1 + b_{-1}\rho_k + b_{-3}\rho_k^2 + \dots + b_{3-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} \\ a_{2-n} + a_0\rho_k + a_{-2}\rho_k^2 + \dots + a_{4-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} \\ b_{3-n} + b_1\rho_k + b_{-1}\rho_k^2 + \dots + b_{5-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} \\ \vdots \\ a_{-2} + a_{-4}\rho_k + \dots + a_{2-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-2} + a_0\rho_k^{\frac{n}{2}-1} \\ b_{-1} + b_{-3}\rho_k + \dots + b_{3-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-2} + b_1\rho_k^{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix}.$$

Como  $\rho_k$  é uma raiz índice  $n/2$  da unidade, então  $\rho_k^{\frac{n}{2}} = 1$  e, portanto,

$$C_n u_k = \begin{bmatrix} a_0 + a_{-2}\rho_k + a_{-4}\rho_k^2 + \dots + a_{2-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} \\ b_1 + b_{-1}\rho_k + b_{-3}\rho_k^2 + \dots + b_{3-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} \\ \left( a_{2-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} + a_0 + a_{-2}\rho_k + \dots + a_{4-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-2} \right) \rho_k \\ \left( b_{3-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} + b_1 + b_{-1}\rho_k + \dots + b_{5-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-2} \right) \rho_k \\ \vdots \\ \left( a_{-2}\rho_k + a_{-4}\rho_k^2 + \dots + a_{2-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} + a_0 \right) \rho_k^{\frac{n}{2}-1} \\ \left( b_{-1}\rho_k + b_{-3}\rho_k^2 + \dots + b_{3-n}\rho_k^{\frac{n}{2}-1} + b_1 \right) \rho_k^{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$C_n u_k = \left( \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{-2j}\rho_k^j \right) u_k + \left( \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} b_{-2j+1}\rho_k^j \right) v_k. \quad (2.20)$$

De forma análoga, conclui-se que

$$C_n v_k = \left( \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{-2j-1}\rho_k^j \right) u_k + \left( \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} b_{-2j}\rho_k^j \right) v_k. \quad (2.21)$$

Sendo  $C_n$  a matriz associada a uma matriz 2-Toeplitz de banda, com largura de banda  $2m + 1 < n$ , verifica-se (2.12), (2.14) e (2.15). Então, as equações (2.20) e (2.21) são equivalentes, respectivamente, a

$$C_n u_k = \left( \sum_{-m \leq 2j \leq m} a_{2j}\rho_k^{-j} \right) u_k + \left( \sum_{-m \leq 2j+1 \leq m} b_{2j+1}\rho_k^{-j} \right) v_k$$

e

$$C_n v_k = \left( \sum_{-m \leq 2j-1 \leq m} a_{2j-1} \rho_k^{-j} \right) u_k + \left( \sum_{-m \leq 2j \leq m} b_{2j} \rho_k^{-j} \right) v_k.$$

De acordo com (2.16),  $\rho_k = e^{-i\phi_k}$ . Logo, considerando a matriz unitária

$$U = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & \cdots & u_{\frac{n}{2}-1} & v_{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix} \in M_n$$

tem-se que  $U^* C_n U = T_{\phi_0} \oplus \cdots \oplus T_{\phi_{\frac{n}{2}-1}}$  vindo (2.17). Então, o espectro de  $C_n$  é a união dos valores próprios das matrizes  $T_{\phi_k}$ ,  $k = 0, \dots, n/2 - 1$  e, portanto, são dados por (2.18). Resta deduzir a expressão dos vectores próprios de  $C_n$ . Para  $k = 0, \dots, n/2 - 1$ , os vectores não-nulos,  $w_k^\pm$ , da forma (2.19), são vectores próprios de  $C_n$  se forem uma solução não-nula da equação

$$C_n w_k^\pm = \lambda_\pm(\phi_k) w_k^\pm$$

ou, equivalentemente, se satisfizerem, para  $s = 0, \dots, n/2 - 1$ , as  $n$  equações

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s-1} a_{-2j} x_k^\pm \rho_k^{j+s} + \sum_{j=\frac{n}{2}-s}^{\frac{n}{2}-1} a_{-2j} x_k^\pm \rho_k^{j-(\frac{n}{2}-s)} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s-1} a_{-2j-1} y_k^\pm \rho_k^{j+s} + \\ & + \sum_{j=\frac{n}{2}-s}^{\frac{n}{2}-1} a_{-2j-1} y_k^\pm \rho_k^{j-(\frac{n}{2}-s)} = \lambda_\pm(\phi_k) x_k^\pm \rho_k^s \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s-1} b_{-2j+1} x_k^\pm \rho_k^{j+s} + \sum_{j=\frac{n}{2}-s}^{\frac{n}{2}-1} b_{-2j+1} x_k^\pm \rho_k^{j-(\frac{n}{2}-s)} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s-1} b_{-2j} y_k^\pm \rho_k^{j+s} + \\ & + \sum_{j=\frac{n}{2}-s}^{\frac{n}{2}-1} b_{-2j} y_k^\pm \rho_k^{j-(\frac{n}{2}-s)} = \lambda_\pm(\phi_k) y_k^\pm \rho_k^s. \end{aligned}$$

Cancelando o factor  $\rho_k^s$  nas duas expressões obtidas vem

$$\begin{aligned}
 & x_k^\pm \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s-1} a_{-2j} \rho_k^j + x_k^\pm \rho_k^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=\frac{n}{2}-s}^{\frac{n}{2}-1} a_{-2j} \rho_k^j + \\
 & + y_k^\pm \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s-1} a_{-2j-1} \rho_k^j + y_k^\pm \rho_k^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=\frac{n}{2}-s}^{\frac{n}{2}-1} a_{-2j-1} \rho_k^j = \lambda_\pm(\phi_k) x_k^\pm
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 & x_k^\pm \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s-1} b_{-2j+1} \rho_k^j + x_k^\pm \rho_k^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=\frac{n}{2}-s}^{\frac{n}{2}-1} b_{-2j+1} \rho_k^j + \\
 & + y_k^\pm \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-s-1} b_{-2j} \rho_k^j + y_k^\pm \rho_k^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=\frac{n}{2}-s}^{\frac{n}{2}-1} b_{-2j} \rho_k^j = \lambda_\pm(\phi_k) y_k^\pm.
 \end{aligned}$$

Como  $\rho_k$  é uma raiz índice  $n/2$  da unidade, então  $\rho_k^{-n/2} = 1$  e, portanto,

$$x_k^\pm \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{-2j} \rho_k^j + y_k^\pm \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{-2j-1} \rho_k^j = \lambda_\pm(\phi_k) x_k^\pm, \quad (2.22)$$

$$x_k^\pm \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} b_{-2j+1} \rho_k^j + y_k^\pm \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} b_{-2j} \rho_k^j = \lambda_\pm(\phi_k) y_k^\pm. \quad (2.23)$$

Sendo  $C_n$  a matriz associada a uma matriz 2-Toeplitz de banda, conclui-se que as equações (2.22) e (2.23) são equivalentes a

$$\begin{cases} x_k^\pm \hat{a}(\phi_k) + y_k^\pm \check{a}(\phi_k) = \lambda_\pm(\phi_k) x_k^\pm \\ x_k^\pm \check{b}(\phi_k) + y_k^\pm \hat{b}(\phi_k) = \lambda_\pm(\phi_k) y_k^\pm \end{cases} \quad (2.24)$$

onde  $\hat{a}$ ,  $\check{a}$ ,  $\check{b}$  e  $\hat{b}$  são as funções definidas em (2.6) e (2.7). O sistema (2.24) tem soluções não-nulas se

$$\begin{vmatrix} \hat{a}(\phi_k) - \lambda_\pm(\phi_k) & \check{a}(\phi_k) \\ \check{b}(\phi_k) & \hat{b}(\phi_k) - \lambda_\pm(\phi_k) \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto, os valores próprios de  $C_n$  são os valores próprios das  $n/2$  matrizes  $T_{\phi_k}$  definidas em (2.5) e  $z_k^\pm = \sqrt{\frac{2}{n(|x_k^\pm|^2 + |y_k^\pm|^2)}} w_k^\pm$ , é um vector próprio normalizado associado ao valor próprio  $\lambda_\pm(\phi_k)$ ,  $k = 0, \dots, n/2 - 1$ . ■

Como as matrizes 2-circulantes,  $C_n$ , associadas a uma matriz 2-Toeplitz de banda são unitariamente semelhantes à soma directa de  $n/2$  matrizes quadradas de ordem 2 (cfr. (2.17)), a partir da propriedade W15 e do teorema do contradomínio elíptico (cfr. teorema 1.1.4) deduz-se facilmente a seguinte caracterização do contradomínio numérico de  $C_n$ .

**Corolário 2.2.3.** *Sejam  $C_n \in M_n$ , com  $n$  par, a matriz 2-circulante associada a uma matriz 2-Toeplitz de banda,  $\rho_k$  uma das raízes índice  $n/2$  da unidade definidas em (2.16) e  $\hat{a}, \check{a}, \check{b}$  e  $\hat{b}$  as funções definidas em (2.6) e (2.7). Então  $W(C_n)$  é o invólucro convexo de  $n/2$  elipses (possivelmente degeneradas) com centro em  $\frac{\hat{a}(\phi_k) + \hat{b}(\phi_k)}{2}$ , focos em  $\lambda_{\pm}(\phi_k)$  definidos em (2.18) e eixo menor de comprimento*

$$\sqrt{|\hat{a}(\phi_k)|^2 + |\check{a}(\phi_k)|^2 + |\hat{b}(\phi_k)|^2 + |\check{b}(\phi_k)|^2 - |\lambda_+(\phi_k)|^2 - |\lambda_-(\phi_k)|^2},$$

para  $k = 0, 1, \dots, n/2 - 1$ .

No que se refere ao espectro de uma matriz 2-Toeplitz, a sua caracterização revela-se bastante mais complexa. Iremos começar por enquadrar o espectro para o caso hermítico (ver, teorema 2.2.6). Para tal, necessitamos do seguinte lema auxiliar.

**Lema 2.2.4.** *Um operador 2-Toeplitz  $T_f$  é auto-adjunto se e só se a matriz símbolo,  $T_\phi$ , que lhe está associada é hermítica, para  $0 \leq \phi < 2\pi$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Suponha-se que  $T_f$  é auto-adjunto. Então de acordo com (2.6),

$$\bar{\hat{a}}(\phi) = \sum_{-m \leq 2k \leq m} \bar{a}_{2k} e^{-ik\phi} = \sum_{-m \leq 2k \leq m} a_{-2k} e^{-ik\phi} = \sum_{-m \leq 2k \leq m} a_{2k} e^{ik\phi} = \hat{a}(\phi).$$

De forma análoga, prova-se que  $\bar{\hat{b}}(\phi) = \hat{b}(\phi)$ . Além disso, de (2.6) e (2.7) segue-se que

$$\begin{aligned} \bar{\check{a}}(\phi) &= \sum_{-m \leq 2k-1 \leq m} \bar{a}_{2k-1} e^{-ik\phi} = \sum_{-m \leq -2k+1 \leq m} b_{-2k+1} e^{-ik\phi} \\ &= \sum_{-m \leq 2k+1 \leq m} b_{2k+1} e^{ik\phi} = \check{b}(\phi). \end{aligned}$$



Portanto,  $T_\phi$  é hermítica,  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha-se agora que  $T_\phi$  é hermítica,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Então  $\hat{a}(\phi)$  é uma função real e, portanto, de acordo com (2.8),

$$\bar{a}_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\hat{a}}(\phi) e^{ik\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{a}(\phi) e^{ik\phi} d\phi = a_{-2k}.$$

De modo análogo, concluiu-se que  $\bar{b}_{2k} = b_{-2k}$ . Além disso, de (2.8) e (2.9) vem que

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{\hat{a}}(\phi) e^{-ik\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\check{\hat{b}}}(\phi) e^{-ik\phi} d\phi = \bar{b}_{-2k+1},$$

conforme pretendido. ■

Para evitar dificuldades que ocorrem quando o valor máximo (ou mínimo) de uma função real ocorre num ponto isolado, iremos considerar o conceito de *supremo essencial* (*ínfimo essencial*) em vez do habitual conceito de supremo (ínfimo) de uma função.

**Definição 2.2.5.** Sejam  $X$  um espaço de medida e  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável. O *supremo essencial* (*ínfimo essencial*) de  $g$  denota-se por  $\text{ess sup } g$  ( $\text{ess inf } g$ ) e é o menor (respectivamente, maior) número real  $\alpha$  em relação ao qual  $g(x) \leq \alpha$  (respectivamente,  $g(x) \geq \alpha$ ), excepto possivelmente num conjunto de medida zero. Se não existir nenhum número real  $\alpha$  nestas condições, como no caso de  $g(x) = 1/x$ ,  $0 < x < 1$ , então o supremo essencial é  $\infty$ .

Claro que  $\text{inf } g \leq \text{ess inf } g \leq \text{ess sup } g \leq \text{sup } g$ . O teorema que se segue é uma generalização de [55, lema 4.1].

**Teorema 2.2.6.** *Seja  $T_n$  uma matriz 2-Toeplitz hermítica com valores próprios  $\lambda_{n,k}$ , para  $k = 0, \dots, n-1$ , e seja  $T_\phi \in M_2$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ , a matriz símbolo hermítica que lhe está associada com valores próprios  $\lambda_1(\phi) \leq \lambda_2(\phi)$ . Então*

$$m_f \leq \lambda_{n,k} \leq M_f, \tag{2.25}$$

onde

$$m_f := \text{ess inf}_{\phi \in [0, 2\pi[} \lambda_1(\phi) \quad e \quad M_f := \text{ess sup}_{\phi \in [0, 2\pi[} \lambda_2(\phi). \tag{2.26}$$

**Demonstração:** Como  $T_n$  é hermitica, os seus valores próprios extremos (máximo e mínimo) podem ser caracterizados pelo quociente de Rayleigh-Ritz [63, teorema 4.2.2]

$$\max_k \lambda_{n,k} = \max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{x^* T_n x}{x^* x} \quad \text{e} \quad \min_k \lambda_{n,k} = \min_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{x^* T_n x}{x^* x}.$$

Seja  $T_\infty$  a matriz infinita que tem  $T_n$  como submatriz principal e todas as restantes entradas iguais a zero e seja  $T_f$  o operador linear induzido por  $T_\infty$ .

Então

$$\max_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{x^* T_n x}{x^* x} \leq \max_{\substack{x \in H^2 \times H^2 \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\langle T_f x, x \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

e, como  $T_\phi$  é hermitica, de acordo com o teorema de Rayleigh-Ritz,

$$\langle T_f x, x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^*(\phi) T_\phi x(\phi) d\phi \leq \langle x, x \rangle M_f.$$

Portanto,

$$\lambda_{n,k} \leq \max_k \lambda_{n,k} \leq M_f.$$

Um argumento análogo é válido para o valor mínimo, vindo o pretendido. ■

Seja  $T_n$  uma matriz 2-Toeplitz de banda e  $C_n$  a matriz 2-circulante que lhe está associada. Iremos demonstrar que  $\{T_n\}$  e  $\{C_n\}$  são assintoticamente equivalentes (veja-se, teorema 2.2.9). Para estabelecer essa equivalência assintótica, é necessário definir uma métrica em  $M_n$ . Uma métrica conveniente para esse efeito é a norma da diferença de duas matrizes. Iremos considerar duas normas em  $M_n$ : a norma definida por

$$\|A\|_2 = \max_{x^* x = 1} \sqrt{x^* A^* A x} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)} \quad (2.27)$$

e a norma denotada e definida por

$$|A| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\frac{\text{tr}(A^* A)}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k(A^* A)}. \quad (2.28)$$

A norma (2.27) é a norma *espectral* e a quantidade  $\sqrt{n}|A|$  é a norma *Euclidiana*, também denominada norma de *Frobenius*. Tem-se que,

$$|A| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k(A^* A)} \leq \max_k \sqrt{\lambda_k(A^* A)} = \|A\|_2, \quad (2.29)$$

e devido a esta desigualdade, podemos dizer que a norma espectral é a norma “forte” e a norma (2.28) é norma “fraca”.

Além disso, se  $A$  for hermítica, os seus valores próprios são reais e, portanto,  $\lambda_k(A^*A) = \lambda_k^2(A)$ . Nestas condições,

$$\|A\|_2 = \max_k |\lambda_k(A)|. \quad (2.30)$$

**Definição 2.2.7.** [55, p.17] Duas sequências de matrizes  $n \times n$ ,  $\{A_n\}$  e  $\{B_n\}$ , dizem-se *asimptoticamente equivalentes* e escreve-se  $\{A_n\} \sim \{B_n\}$  se:

- (i)  $A_n$  e  $B_n$  são uniformemente limitadas em relação à norma espectral (e portanto, também em relação à norma de Frobenius),

$$\|A_n\|_2, \|B_n\|_2 \leq M < \infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

e

- (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |A_n - B_n| = 0$ .

Algumas propriedades básicas relativas à equivalência assintótica de matrizes são listadas no lema que se segue.

**Lema 2.2.8.** [55, p.17] *Sejam  $\{A_n\}$  e  $\{B_n\}$  duas sequências de matrizes com valores próprios  $\lambda_{n,k}(A_n)$  e  $\lambda_{n,k}(B_n)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , respectivamente.*

1. Se  $\{A_n\} \sim \{B_n\}$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |A_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |B_n|$ .
2. Se  $\{A_n\} \sim \{B_n\}$ , então  $\{B_n\} \sim \{A_n\}$ .
3. Se  $\{A_n\} \sim \{B_n\}$  e  $\{B_n\} \sim \{C_n\}$ , então  $\{A_n\} \sim \{C_n\}$ .
4. Se  $\{A_n\} \sim \{B_n\}$ , então  $\{\alpha A_n\} \sim \{\alpha B_n\}$ , para  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
5. Se  $\{A_n\} \sim \{B_n\}$  e  $\{C_n\} \sim \{D_n\}$ , então  $\{A_n + C_n\} \sim \{B_n + D_n\}$  e  $\{A_n C_n\} \sim \{B_n D_n\}$ .
6. Se  $\{A_n\} \sim \{B_n\}$  e  $\|A_n^{-1}\|, \|B_n^{-1}\| \leq K < \infty$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , então  $\{A_n^{-1}\} \sim \{B_n^{-1}\}$ .
7. Se  $\{A_n B_n\} \sim \{C_n\}$  e  $\|A_n^{-1}\| \leq K < \infty$ , então  $\{B_n\} \sim \{A_n^{-1} C_n\}$ .

8.  $\{A_n\} \sim \{B_n\}$ , então existem constantes,  $m$  e  $M$ , tais que

$$m \leq \lambda_{n,k}(A_n), \lambda_{n,k}(B_n) \leq M, \quad (2.32)$$

para  $n = 1, 2, \dots$  e  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Note-se que a relação binária  $\sim$  não é reflexiva, por isso, apesar de ser simétrica e transitiva, não é uma relação de equivalência. O próximo teorema é uma generalização de [55, lema 4.2].

**Teorema 2.2.9.** *Para  $n \in \mathbb{N}$  par, sejam  $T_n$  uma matriz 2-Toeplitz de banda e  $C_n$  a matriz 2-circulante que lhe está associada. Então, as seqüências de matrizes  $\{T_n\}$  e  $\{C_n\}$  são assintoticamente equivalentes.*

**Demonstração:** Suponha-se em primeiro lugar que a matriz  $T_n$  é hermítica com valores próprios  $\lambda_{n,k}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Sejam  $\lambda_1(\phi) \leq \lambda_2(\phi)$  os valores próprios da matriz hermítica  $T_\phi$  que lhe está associada,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Como  $T_n$  é hermítica, segundo (2.30),  $\|T_n\|_2 = \max_k |\lambda_{n,k}|$ . Logo, de acordo com o teorema 2.2.6,

$$\|T_n\|_2 \leq \max(|m_f|, |M_f|) \leq M_{|f|},$$

onde  $m_f$  e  $M_f$  são definidos tais como em (2.26) e  $M_{|f|} = \text{ess sup}_{\phi \in [0, 2\pi[} |\lambda_2(\phi)|$ .

Suponha-se agora que a matriz  $T_n$  não é hermítica. Considere-se a decomposição cartesiana  $T_n = \text{Re } T_n + i \text{Im } T_n$  (cfr. (1.7)). De acordo com a desigualdade triangular [71, p.137], sabe-se que

$$\|T_n\|_2 \leq \|\text{Re } T_n\|_2 + \|\text{Im } T_n\|_2 \leq M_{|f_r|} + M_{|f_i|}, \quad (2.33)$$

onde

$$M_{|f_r|} = \text{ess sup}_{\phi \in [0, 2\pi[} |\mu_2(\phi)| \quad \text{e} \quad M_{|f_i|} = \text{ess sup}_{\phi \in [0, 2\pi[} |\psi_2(\phi)|,$$

sendo, respectivamente,  $\mu_1(\phi) \leq \mu_2(\phi)$  e  $\psi_1(\phi) \leq \psi_2(\phi)$  os valores próprios das matrizes hermíticas  $\text{Re } T_\phi$  e  $\text{Im } T_\phi$  que definem a decomposição cartesiana de  $T_\phi$ .

Portanto, no caso geral, para  $M = \max(M_{|f|}, M_{|f_r|}, M_{|f_i|})$ , tem-se que  $\|T_n\|_2 \leq 2M$  e  $T_n$  é uniformemente limitada em relação à norma espectral. Note-se que  $M_{|f|}$ ,  $M_{|f_r|}$  e  $M_{|f_i|}$  são finitos por  $T_n$  ser de banda.

Como  $C_n$  é uma matriz 2-circulantes, de acordo com o teorema 2.2.2, existe uma matriz unitária  $U$  tal que

$$C_n = U^* \left( T_{\phi_0} \oplus \cdots \oplus T_{\phi_{\frac{n}{2}-1}} \right) U \quad \text{e} \quad C_n^* = U^* \left( T_{\phi_0}^* \oplus \cdots \oplus T_{\phi_{\frac{n}{2}-1}}^* \right) U.$$

Então, os valores próprios de  $C_n^* C_n$ , denotados por  $\alpha_{n,k}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , são os valores próprios das matrizes  $T_{\phi_{k'}}^* T_{\phi_{k'}}$ ,  $k' = 0, \dots, n/2 - 1$ . Logo,  $\|C_n\|_2^2 = \max_k \alpha_{n,k}$  e  $C_n$  é uniformemente limitada em relação à norma espectral.

Finalmente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |T_n - C_n| = 0$ , porque a matriz  $T_n - C_n$  difere da matriz nula apenas no canto superior direito e no canto inferior esquerdo e tem menos que  $2 \sum_{k=0}^{m-1} m - k = m(m+1)$  entradas não nulas. Logo, o factor  $1/n$  da norma definida em (2.28) garante que  $|T_n - C_n|$  converge para zero. ■

Conforme iremos constatar, os valores próprios de matrizes assintoticamente equivalentes comportam-se de modo semelhante. O lema que se segue é um prelúdio desse resultado.

**Lema 2.2.10.** *Dadas duas matrizes  $A, B \in M_n$  com valores próprios  $\alpha_k$  e  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , respectivamente, tem-se que*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \right| \leq |A - B|.$$

**Demonstração [55, p.19]:** Defina-se a matriz diferença  $D = A - B = [d_{ij}]$ . Então

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k = \text{tr}(A) - \text{tr}(B) = \text{tr}(D).$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz [71, p.14] a  $\text{tr}(D)$  vem que

$$\begin{aligned} |\text{tr}(D)|^2 &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} d_{kk} \right|^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 \sum_{k=0}^{n-1} |d_{kk}|^2 \leq n \sum_{k=0}^{n-1} |d_{kk}|^2 \\ &\leq n \sum_{i,j=0}^{n-1} |d_{ij}|^2 = n^2 |D|^2 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Dividindo ambos os membros por  $n^2$  e tomando a raiz quadrada, conclui-se o pretendido. ■

Uma consequência imediata do lema 2.2.10 é o seguinte corolário.

**Corolário 2.2.11.** *Sejam  $\{A_n\}$  e  $\{B_n\}$  duas seqüências de matrizes assintoticamente equivalentes com valores próprios  $\{\alpha_{n,k}\}$  e  $\{\beta_{n,k}\}$ , respectivamente. Então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k} - \beta_{n,k}) = 0$$

e, portanto, se ambos os limites existirem individualmente, tem-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k}. \quad (2.35)$$

**Demonstração [55, p.19]:** Seja  $D_n = [d_{ij}] = A_n - B_n$ . Obviamente que  $\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k} - \beta_{n,k}) = \text{tr}(D_n)$ . Dividindo por  $n^2$ , aplicando (2.34) e tomando limites, vem que

$$0 \leq \left| \frac{1}{n} \text{tr}(D_n) \right|^2 \leq |D_n|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

o que implica (2.35). ■

**Definição 2.2.12.** [55, p.23] Duas seqüências de números reais  $\{a_{n,k}\}$  e  $\{b_{n,k}\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , dizem-se *assintoticamente igualmente distribuídas*, e escreve-se  $\{a_{n,k}\} \sim \{b_{n,k}\}$ , se:

(i) existem constantes  $m$  e  $M$  tais que

$$m \leq a_{n,k}, b_{n,k} \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.36)$$

e

(ii) para toda a função  $F(x)$  contínua em  $[m, M]$ , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (F(a_{n,k}) - F(b_{n,k})) = 0. \quad (2.37)$$

**Teorema 2.2.13.** *Os valores próprios  $\{\alpha_{n,k}\}$  e  $\{\beta_{n,k}\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , de duas sequências de matrizes hermíticas  $\{A_n\}$  e  $\{B_n\}$  assintoticamente equivalentes, estão assintoticamente igualmente distribuídos.*

**Demonstração [55, p.23]:** De acordo com (2.32), existem constantes  $m$  e  $M$  que satisfazem (2.36). O limite (2.37) é uma consequência de [55, teoremas 2.2 e 2.3 e corolário 2.3]. ■

Portanto, segundo os teoremas 2.2.9 e 2.2.13, dada uma sequência de matrizes 2-Toeplitz de banda hermíticas,  $\{T_n\}$ , com largura de banda  $2m + 1 < n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  par, e dada a sequência de matrizes 2-circulantes,  $\{C_n\}$ , tal que para cada  $n$ ,  $C_n$  é a matriz 2-circulante associada a  $T_n$ , então os valores próprios de  $\{T_n\}$  e  $\{C_n\}$  estão assintoticamente igualmente distribuídos. Nestas condições,

$$\sigma(T_n) \sim \sigma(C_n) \sim \bigcup_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_{\pm}(\phi_k), \quad (2.38)$$

em que  $\lambda_{\pm}(\phi_k)$  são os valores próprios das matrizes  $T_{\phi_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n/2 - 1$ , que satisfazem  $C_n = U \left( T_{\phi_0} \oplus \dots \oplus T_{\phi_{\frac{n}{2}-1}} \right) U^*$ , para alguma matriz unitária  $U_n$  (cfr.(2.17)).

Sendo  $\{T_n\}$  uma sequência de matrizes 2-Toeplitz de banda hermíticas, com largura de banda  $2m + 1 < n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  ímpar, considera-se, para cada  $n$ , a submatriz principal,  $T_{n-1}$ , formada pelas primeiras  $n - 1$  linhas e colunas de  $T_n$ . De acordo com o teorema do entrelaçamento de Cauchy [63, teorema 4.3.8], os valores próprios

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \quad \text{e} \quad \alpha_n \leq \alpha_{n-1} \leq \dots \leq \alpha_3 \leq \alpha_2$$

de  $T_n$  e  $T_{n-1}$ , respectivamente, entrelaçam-se, ou seja,

$$\lambda_n \leq \alpha_n \leq \lambda_{n-1} \leq \alpha_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \alpha_2 \leq \lambda_1.$$

Portanto, para  $n$  ímpar, podemos dizer que os valores próprios de  $T_n$  entrelaçam-se com os valores próprios  $\lambda_{\pm}(\phi_k)$  das matrizes  $T_{\phi_k}$  que satisfazem  $C_n = U \left( T_{\phi_0} \oplus \dots \oplus T_{\phi_{\frac{n}{2}-1}} \right) U^*$ .

## 2.3 O contradomínio numérico de operadores 2-Toepliz de banda

Nesta secção, vamos caracterizar o contradomínio numérico de um operador 2-Toeplitz de banda. Os teoremas 2.3.1 e 2.3.5 são uma generalização, respectivamente, do teorema 1 e do corolário 2 de [70]. O teorema 2.3.2 é uma generalização de [45, lema 5] e estabelece-se uma região de inclusão para  $W(T_n)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 2.3.1.** *Seja  $T_f$  um operador 2-Toepliz de banda. Suponha-se que  $T_f$  é auto-adjunto e sejam  $\lambda_1(\phi) \leq \lambda_2(\phi)$  os valores próprios da matriz símbolo hermítica  $T_\phi \in M_2$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ , que lhe está associada. Então,*

$$\overline{W(T_f)} = [m_f, M_f], \quad (2.39)$$

em que  $m_f = \operatorname{ess\,inf}_{\phi \in [0, 2\pi[} \lambda_1(\phi)$  e  $M_f = \operatorname{ess\,sup}_{\phi \in [0, 2\pi[} \lambda_2(\phi)$ .

**Demonstração:** Seja  $T_\infty$  a matriz infinita (2.4) que induz o operador linear  $T_f$  e seja  $T_n$  a submatriz principal de  $T_\infty$  situada nas  $n$  primeiras linhas e colunas. Seja  $C_n$  a matriz 2-circulante associada a  $T_n$ . Tem-se que

$$\begin{aligned} z_k^* T_n z_k &= z_k^* C_n z_k + z_k^* (T_n - C_n) z_k \\ &= \lambda_{n,k} + z_k^* (T_n - C_n) z_k, \end{aligned} \quad (2.40)$$

em que  $\lambda_{n,k}$  são os valores próprios de  $C_n$  e  $z_k = (z_{k1}, \dots, z_{kn})$  é um vector próprio normalizado associado a  $\lambda_{n,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . De acordo com o teorema 2.2.2,  $z_k$  é da forma  $z_k = \sqrt{\frac{2}{n(|\gamma_{k1}|^2 + |\gamma_{k2}|^2)}} w_k$ , onde

$$w_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \dots, \gamma_{kn})^T, \quad (2.41)$$

em que as componentes  $\gamma_{kj}$ , para  $j = 1, \dots, n$ , são dadas por (2.19). Sejam  $k', k''$  tais que  $\lambda_{n,k'} = \min_k \lambda_{n,k}$  e  $\lambda_{n,k''} = \max_k \lambda_{n,k}$ . De (2.40) segue-se que

$$[\lambda_{n,k'} + z_{k'}^* (T_n - C_n) z_{k'}, \lambda_{n,k''} + z_{k''}^* (T_n - C_n) z_{k''}] \subseteq W(T_n). \quad (2.42)$$

Por outro lado, tem-se que

$$|z_k^* (T_n - C_n) z_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.43)$$



De facto, se considerarmos  $D = [d_{ij}] = T_n - C_n$ , simples cálculos permitem concluir que

$$\begin{aligned} |z_k^* D z_k| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \bar{z}_{ki} d_{ij} z_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n |\bar{z}_{ki}| |d_{ij}| |z_{kj}| = \frac{2}{n(|\gamma_{k1}|^2 + |\gamma_{k2}|^2)} \sum_{i,j=1}^n |\gamma_{ki}| |d_{ij}| |\gamma_{kj}|, \end{aligned}$$

em que  $\gamma_{ki}$  e  $\gamma_{kj}$  (não dependem de  $n$ ) são a  $i$ -ésima (respectivamente,  $j$ -ésima) componentes do vector (2.41). Como  $T_n$  é uma matriz de banda, então  $\sum_{i,j=1}^n |d_{ij}|$  também não depende de  $n$ . Logo, para  $n$  suficientemente grande, conclui-se (2.43). Além disso, é óbvio que  $m_f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{n,k'}$  e  $M_f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{n,k''}$ . Logo, considerando em (2.42)  $n \rightarrow +\infty$  conclui-se que

$$[m_f, M_f] \subseteq \overline{W(T_f)}.$$

Resta demonstrar a inclusão recíproca. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , a matriz  $T_n$  é hermitica. Logo, de acordo com a propriedade W12 e a condição (2.25), tem-se que  $W(T_n) \subseteq [m_f, M_f]$ . Fazendo  $n \rightarrow +\infty$  conclui-se que  $\overline{W(T_f)} \subseteq [m_f, M_f]$ . ■

O teorema que se segue estabelece uma região de inclusão para o contradomínio numérico de uma matriz 2-Toeplitz de banda. Para  $k \in \mathbb{R}$ , usaremos  $[k]$  para denotar o maior inteiro  $r$  tal que  $r \leq k$ .

**Teorema 2.3.2.** *Seja  $T_n$  uma matriz 2-Toeplitz de banda, com largura de banda  $2m + 1 < n$ . Então,*

$$W(T_n) \subseteq \text{conv} \left( \bigcup_{k=0}^{[\frac{n+m+1}{2}]-1} W(T_{\phi_k}) \right), \quad (2.44)$$

onde  $T_{\phi_k} \in M_2$  é a matriz símbolo associada a  $T_n$  e  $\phi_k$  é tal que  $e^{-i\phi_k}$ ,  $k = 0, \dots, [\frac{n+m+1}{2}] - 1$ , são as raízes índice  $[\frac{n+m+1}{2}]$  da unidade, ou seja,  $\phi_k = \frac{2k\pi}{[\frac{n+m+1}{2}]}$ ,  $k = 0, \dots, [\frac{n+m+1}{2}] - 1$ .

**Demonstração:** Toda a matriz 2-Toeplitz de banda,  $T_n$ , pode ser considerada uma submatriz principal de uma matriz 2-circulante de ordem apropriada. De facto, se  $n + m$  for par (respectivamente, ímpar), considera-se a matriz 2-Toeplitz  $T_{n+m}$  ( $T_{n+m+1}$ ), com o mesmo símbolo que  $T_n$ , e constrói-se a matriz 2-circulante  $C_{n+m}$  ( $C_{n+m+1}$ ) que difere de  $T_{n+m}$  ( $T_{n+m+1}$ ) apenas no canto superior direito e no canto inferior esquerdo (veja-se (2.14) e (2.15) para ordens  $n + m$  e  $n + m + 1$ , respectivamente). Então,  $T_n$  é uma submatriz principal de  $C_{n+m}$  ( $C_{n+m+1}$ ) e, portanto, segundo a propriedade W11,  $W(T_n) \subset W(C_{n+m})$ , se  $n$  é par (respectivamente,  $W(T_n) \subset W(C_{n+m+1})$ , se  $n$  é ímpar). A inclusão (2.44) segue directamente de (2.17) e W15. ■

As figuras 2.1 e 2.2 representam a região de inclusão (2.44) relativas às matrizes 2-Toeplitz da banda definidas nos exemplos 2.3.3 e 2.3.4.

**Exemplo 2.3.3.** Seja  $T_n$  a matriz 2-Toeplitz tridiagonal com entradas

$$a_0 = i, \quad b_0 = 1 + i, \quad b_1 = 3, \quad a_1 = 2 \quad \text{e} \quad a_{-1} = -b_{-1} = 1$$

O contradomínio numérico de  $T_n$  e a respectiva região de inclusão (2.44) para diferentes valores de  $n$  estão representados na figura 2.1.

**Exemplo 2.3.4.** Seja  $T_n$  a matriz 2-Toeplitz hendecadiagonal (ou seja, com largura de banda  $2m + 1 = 11$ ) com entradas

$$a_0 = a_3 = a_{-2} = 1, \quad b_0 = b_3 = b_{-2} = -1, \quad a_1 = a_5 = 2, \quad b_1 = b_5 = -2$$

e as restantes entradas nulas. Na figura 2.2 estão representados o contradomínio numérico de  $T_n$  e a respectiva região de inclusão (2.44) para diferentes valores de  $n$ .

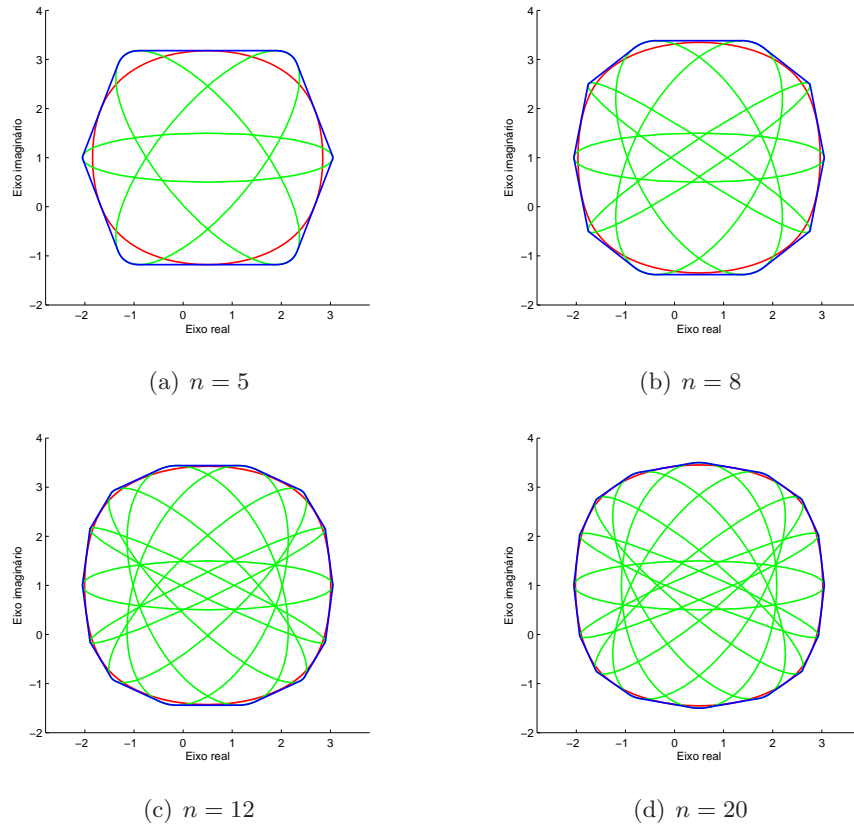


Figura 2.1:  $\partial W(T_n)$  (curva a vermelho),  $\partial W(T_{\phi_k})$  (curvas a verde), onde  $\phi_k = \frac{2k\pi}{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}$ ,  $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor - 1$ , e respectivo invólucro convexo (curva a azul), sendo  $T_n$  a matriz considerada no exemplo 2.3.3.

De acordo com (2.44), tem-se que

$$W(T_n) \subseteq W(T_{n+1}) \subseteq W(T_{n+2}) \subseteq \dots \subseteq \text{conv} \left( \bigcup_{0 \leq \phi < 2\pi} W(T_\phi) \right).$$

Logo,

$$\overline{W(T_f)} \subseteq \text{conv} \left( \bigcup_{\phi \in [0, 2\pi[} W(T_\phi) \right). \quad (2.45)$$

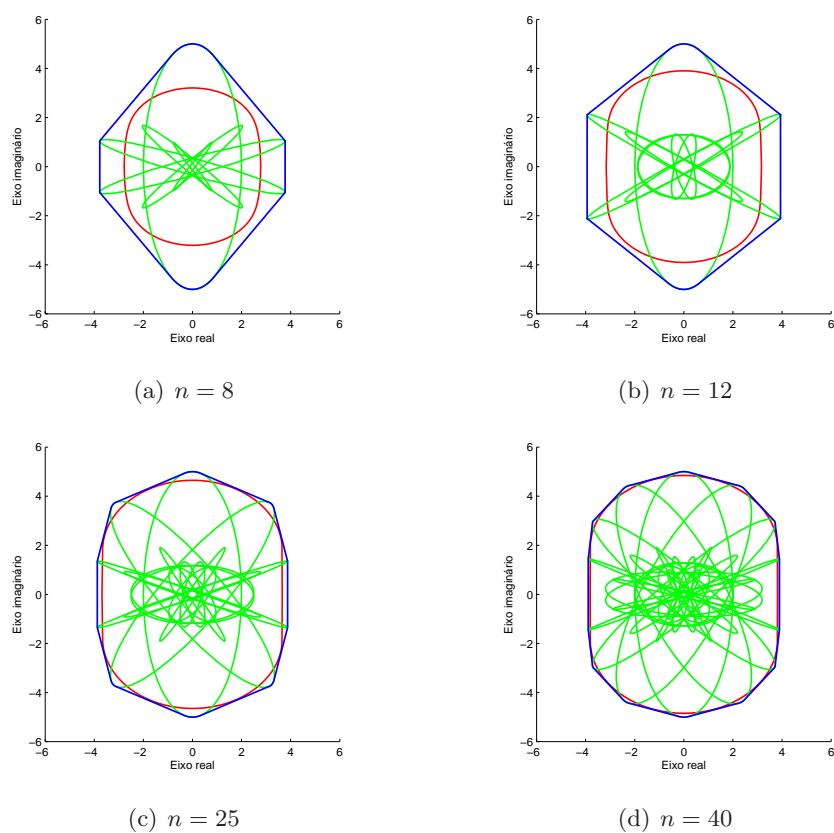


Figura 2.2:  $\partial W(T_n)$  (curva a vermelho),  $\partial W(T_{\phi_k})$  (curvas a verde), onde  $\phi_k = \frac{2k\pi}{\lfloor \frac{n+6}{2} \rfloor}$ ,  $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n+6}{2} \rfloor - 1$ , e respectivo invólucro convexo (curva azul), sendo  $T_n$  a matriz considerada no exemplo 2.3.4

No teorema que se segue, vamos demonstrar que existe de facto igualdade em (2.45).

**Teorema 2.3.5.** *Sejam  $T_f$  um operador 2-Toeplitz de banda e  $T_\phi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ , a matriz símbolo que lhe está associada. Então*

$$\overline{W(T_f)} = \text{conv} \left( \bigcup_{\phi \in [0, 2\pi[} W(T_\phi) \right). \quad (2.46)$$

**Demonstração:** Para  $\theta \in [0, 2\pi[$ , considere-se a recta de suporte  $\mathcal{L}_\theta$  de

$W(e^{-i\theta}T_f)$  perpendicular à direcção de argumento  $\theta$ . Efectue-se a sua projecção ortogonal na direcção do ângulo  $\theta$ , isto é,  $W(\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_f))$ . Submetendo a recta  $\mathcal{L}_\theta$  a uma rotação segundo o ângulo  $\theta$ , a fronteira do contradomínio numérico de  $T_f$  pode ser descrita como sendo a envolvente da família de rectas de suporte  $\mathcal{L}_\theta$ .

Verifica-se facilmente que o símbolo do operador 2-Toeplitz auto-adjunto  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_f)$  é a matriz hermítica  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_\phi) \in M_2$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Sejam  $\lambda_1(\theta, \phi) \leq \lambda_2(\theta, \phi)$  os valores próprios de  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_\phi)$ . Então, segundo teorema 2.3.1,

$$\overline{W(\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_f))} = [m_\theta, M_\theta],$$

onde  $m_\theta$  e  $M_\theta$  são, respectivamente, o ínfimo essencial e o supremo essencial de  $\lambda_1(\theta, \phi)$  e  $\lambda_2(\theta, \phi)$  no intervalo  $\phi \in [0, 2\pi[$ . Então,

$$\overline{W(\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_f))} = \operatorname{conv} \left( \bigcup_{\phi \in [0, 2\pi[} W(\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_\phi)) \right).$$

À medida que  $\theta$  percorre o intervalo  $[0, 2\pi[$  e tendo em conta a convexidade de  $W(T_f)$  conclui-se que

$$\overline{W(T_f)} = \operatorname{conv} \left( \bigcup_{\phi \in [0, 2\pi[} W(T_\phi) \right).$$

■

## 2.4 O contradomínio numérico de operadores 2-Toeplitz tridiagonais

Resultados interessantes têm sido publicados acerca do contradomínio numérico de matrizes e de operadores tridiagonais [27, 30, 34, 35, 45]. O próximo teorema segue a mesma linha de investigação, mas em relação a operadores 2-Toeplitz tridiagonais, e apesar de poder ser obtido como um corolário do teorema 2.3.5, a abordagem alternativa da demonstração efectuada permite apresentar uma caracterização directa de  $W(T_f)$ . Por motivos de simplicidade de cálculos, assumiremos que as entradas são reais, sendo o argumento igualmente válido para o caso complexo.

**Teorema 2.4.1.** *Seja  $T_f$  um operador 2-Toeplitz tridiagonal com entradas  $a_{-1}, a_0, a_1, b_{-1}, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$ . Então,*

$$\overline{W(T_f)} = \text{conv}(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2), \quad (2.47)$$

onde

$$\mathcal{C}_j = \{(\Lambda_j(\theta) \cos \theta - \Lambda'_j(\theta) \sin \theta) + i(\Lambda_j(\theta) \sin \theta + \Lambda'_j(\theta) \cos \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}, \quad (2.48)$$

para  $j = 1, 2$  e  $\Lambda_{1,2}(\theta)$  é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 + b_0}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} [a_1^2 + a_{-1}^2 + b_1^2 + b_{-1}^2 + (a_0 - b_0)^2 \cos^2 \theta + 2(a_{-1}b_1 + a_1b_{-1}) \cos(2\theta) \\ & \pm 2\sqrt{(a_1^2 + b_{-1}^2 + 2a_1b_{-1} \cos(2\theta))(a_{-1}^2 + b_1^2 + 2a_{-1}b_1 \cos(2\theta))}]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

**Demonstração:** Mediante as hipóteses, a matriz símbolo do operador  $T_f$  é dada por

$$T_\phi = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} + a_1 e^{i\phi} \\ b_{-1} e^{-i\phi} + b_1 & b_0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Alguns cálculos permitem concluir que os valores próprios,  $\lambda_\pm(\theta, \phi)$ , da matriz  $\text{Re}(e^{-i\theta} T_\phi)$  são dados por

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 + b_0}{2} \cos \theta \pm \frac{1}{2} [a_1^2 + a_{-1}^2 + b_1^2 + b_{-1}^2 + (a_0 - b_0)^2 \cos^2 \theta + 2(a_{-1}b_1 + a_1b_{-1}) \cos(2\theta) \\ & + 2(a_{-1}a_1 + b_{-1}b_1) \cos \phi + 2a_{-1}b_{-1} \cos(\phi + 2\theta) + 2a_1b_1 \cos(\phi - 2\theta)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Para caracterizar o contradomínio numérico de  $T_f$ , basta considerar um dos valores próprios, por exemplo,  $\lambda_+(\theta, \phi)$ . Um simples manuseamento de fórmulas trigonométricas permite concluir que os valores extremos de  $\lambda_+(\theta, \phi)$ , em relação a  $\phi$ , são dados por (2.49). Logo, as rectas de suporte de  $W(T_f)$  são dadas pelas equações

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \Lambda_j(\theta), \quad j = 1, 2.$$

À medida que  $\theta$  percorre o intervalo  $[0, 2\pi[$ , a fronteira de  $\overline{W(T_f)}$  pode ser descrita como sendo a envolvente da família de rectas de suporte perpendiculares à direcção de argumento  $\theta$ . Portanto, cada  $\Lambda_j(\theta)$ ,  $j = 1, 2$ , determina uma curva geradora de fronteira de  $\overline{W(T_f)}$  dada por (2.48) e o resultado obtém-se em virtude da convexidade de  $\overline{W(T_f)}$ . ■

Ilustramos o teorema 2.4.1 com o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.4.2.** Seja  $T_f$  o operador 2-Toeplitz tridiagonal definido por

$$b_{-1} = b_1 = a_0 = -a_1 = 1 \quad \text{e} \quad b_0 = a_{-1} = 2.$$

A matriz símbolo de  $T_f$  é

$$T_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 - e^{i\phi} \\ 1 + e^{-i\phi} & 2 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Então

$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta} T_\phi) = \begin{bmatrix} \cos \theta & z \\ \bar{z} & 2 \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{em que } z = \frac{e^{-i\theta}}{2} + \cos \theta + ie^{i\phi} \sin \theta,$$

sendo os valores próprios de  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} T_\phi)$  dados por

$$\lambda_{\pm}(\theta, \phi) = \frac{3 \cos \theta \pm \sqrt{1 + 9 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta - 12 \cos \theta \sin \theta \sin \phi - 4 \sin^2 \theta \cos \phi}}{2}.$$

Tendo em conta (2.49), conclui-se que os valores extremos de  $\lambda_+(\theta, \phi)$  são

$$\Lambda_{1,2}(\theta) = \frac{3 \cos \theta + \sqrt{1 + 9 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta \pm 4 \sin \theta \sqrt{9 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}}{2}.$$

As curvas geradoras de fronteira (2.48) do contradomínio numérico de  $T_f$  e a fronteira de  $\overline{W(T_f)}$  estão representadas na figura 2.3 (a) e (b), respectivamente.

No próximo resultado caracteriza-se o contradomínio numérico de uma classe especial de operadores 2-Toeplitz tridiagonais com contradomínio numérico elíptico e é uma generalização, ao caso infinito, de [27, teorema 3.3].

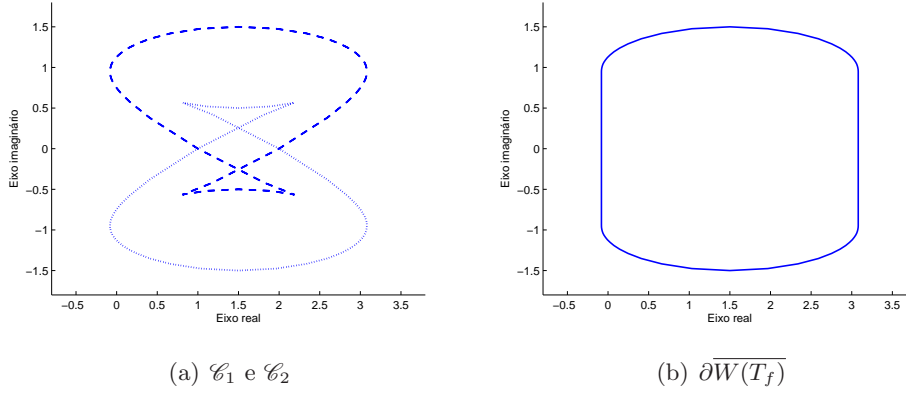


Figura 2.3:  $\partial\overline{W}(T_f)$  e respectivas curvas geradoras de fronteira relativas ao operador  $T_f$  definido no exemplo 2.4.2.

**Teorema 2.4.3.** *Seja  $T_f$  um operador 2-Toeplitz tridiagonal cujas entradas  $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ , para  $j = -1, 1$ , satisfazem*

$$\bar{b}_{-1} = ka_1 \quad e \quad \bar{b}_1 = ka_{-1}, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad (2.50)$$

e seja

$$\gamma_+ = \left( \frac{a_0 - b_0}{2} \right)^2 + (|a_1| + |a_{-1}|)^2 \bar{k}. \quad (2.51)$$

Então  $\overline{W}(T_f)$  é um disco elíptico (possivelmente degenerado) com centro em  $\frac{a_0 + b_0}{2}$ , focos  $\frac{a_0 + b_0}{2} \pm \bar{\gamma}_+^{1/2}$  e eixo menor de comprimento

$$\sqrt{\frac{1}{2} |a_0 - b_0|^2 + (|a_1| + |a_{-1}|)^2 (1 + |k|^2) - 2|\gamma_+|}. \quad (2.52)$$

**Demonstração:** Mediante as hipóteses, a matriz símbolo do operador  $T_f$  é dada por

$$T_\phi = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} + a_1 e^{i\phi} \\ b_{-1} e^{-i\phi} + b_1 & b_0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Para  $\theta \in [0, 2\pi[$ , considere-se a matriz hermitica  $\text{Re}(e^{-i\theta} T_\phi)$ . Os seus valores próprios  $\lambda_\pm(\theta, \phi)$  definem rectas de suporte de  $\overline{W}(e^{-i\theta} T_f)$  perpendiculares à direcção de argumento  $\theta$ . Submetendo essas rectas a uma rotação segundo o



ângulo  $\theta$ , obtém-se as rectas de suporte de  $e^{i\theta}\overline{W(e^{-i\theta}T_f)} = \overline{W(T_f)}$ . Ora, os valores próprios de  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_\phi)$  são

$$\lambda_{\pm}(\theta, \phi) = \frac{\operatorname{Re}((a_0 + b_0)e^{-i\theta})}{2} \pm \sqrt{\frac{(\operatorname{Re}(a_0 - b_0)e^{-i\theta})^2}{4} + |z|^2},$$

onde  $z = \frac{e^{i\phi}(a_1e^{-i\theta} + \bar{b}_{-1}e^{i\theta}) + (a_{-1}e^{-i\theta} + \bar{b}_1e^{i\theta})}{2}$ . Mediante as hipóteses,  $z$  pode ser escrito na forma

$$z = \frac{1}{2} \left( e^{-i\theta} + k e^{i\theta} \right) \left( a_1 e^{i\phi} + a_{-1} \right).$$

Verifica-se facilmente que

$$\max_{0 \leq \phi < 2\pi} \left| a_1 e^{i\phi} + a_{-1} \right|^2 = (|a_1| + |a_{-1}|)^2$$

e

$$\min_{0 \leq \phi < 2\pi} \left| a_1 e^{i\phi} + a_{-1} \right|^2 = (|a_1| - |a_{-1}|)^2.$$

Alguns cálculos permitem concluir que os extremos de  $\lambda_{\pm}(\theta, \phi)$ , em relação a  $\phi$ , são dados por

$$\Lambda_{1,2}(\theta) := \frac{\operatorname{Re}((a_0 + b_0)e^{-i\theta})}{2} + \sqrt{P_{\pm} + Q_{\pm} \cos(2\theta) + R_{\pm} \sin(2\theta)},$$

onde

$$\begin{aligned} P_{\pm} &= \frac{1}{8} |a_0 - b_0|^2 + \frac{1}{4} (|a_1| \pm |a_{-1}|)^2 (1 + |k|^2) \\ Q_{\pm} &= \frac{1}{8} \operatorname{Re}(a_0 - b_0)^2 + \frac{1}{2} (|a_1| \pm |a_{-1}|)^2 \operatorname{Re} \bar{k} \\ R_{\pm} &= \frac{1}{8} \operatorname{Im}(a_0 - b_0)^2 + \frac{1}{2} (|a_1| \pm |a_{-1}|)^2 \operatorname{Im} \bar{k}. \end{aligned}$$

Sejam

$$\alpha_{\pm} := P_{\pm} + \frac{1}{2} |\gamma_{\pm}| \quad \text{e} \quad \beta_{\pm} := P_{\pm} - \frac{1}{2} |\gamma_{\pm}|, \quad (2.53)$$

onde

$$\gamma_{\pm} := (a_0 - b_0)^2 / 4 + (|a_1| \pm |a_{-1}|)^2 \bar{k}.$$

Se  $Q_{\pm}^2 + R_{\pm}^2 = 0$ , então  $\alpha_{\pm} = \beta_{\pm} = P_{\pm}$  e  $\overline{W(T_f)}$  é um disco circular. Se  $Q_{\pm}^2 + R_{\pm}^2 \neq 0$ , para  $\cos(\Gamma_{\pm}) = \frac{Q_{\pm}}{\sqrt{Q_{\pm}^2 + R_{\pm}^2}}$ ,  $\sin(\Gamma_{\pm}) = \frac{R_{\pm}}{\sqrt{Q_{\pm}^2 + R_{\pm}^2}}$  e, consequentemente,  $\Gamma_{\pm} = \arg(\gamma_{\pm})$ , tem-se que

$$\begin{aligned} P_{\pm} + Q_{\pm} \cos(2\theta) + R_{\pm} \sin(2\theta) &= P_{\pm} + \sqrt{Q_{\pm}^2 + R_{\pm}^2} \cos(\Gamma_{\pm} - 2\theta) \\ &= \alpha_{\pm} \cos^2\left(\frac{\Gamma_{\pm}}{2} - \theta\right) + \beta_{\pm} \sin^2\left(\frac{\Gamma_{\pm}}{2} - \theta\right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,2}(\theta) &= \frac{\operatorname{Re}((a_0 + b_0)e^{-i\theta})}{2} + \sqrt{\alpha_{\pm} \cos^2\left(\frac{\Gamma_{\pm}}{2} - \theta\right) + \beta_{\pm} \sin^2\left(\frac{\Gamma_{\pm}}{2} - \theta\right)} \\ &= \frac{\operatorname{Re}((a_0 + b_0)e^{-i\theta})}{2} + \sqrt{\beta_{\pm} + (\alpha_{\pm} - \beta_{\pm}) \cos^2\left(\frac{\Gamma_{\pm}}{2} - \theta\right)}. \end{aligned}$$

A envolvente da família de rectas perpendiculares à direcção definida pelo ângulo  $\theta$  em relação ao eixo real e a uma distância  $\Lambda_j(\theta)$  da origem são as curvas  $\mathcal{C}_j$  de equações paramétricas

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = \Lambda_j(\theta) \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = \Lambda'_j(\theta) \end{cases}, \quad j = 1, 2. \quad (2.54)$$

Eliminando  $\theta$  em (2.54), obtêm-se as equações cartesianas

$$\frac{\left(X_{\pm} - \operatorname{Re}\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)\right)^2}{\alpha_{\pm}} + \frac{\left(Y_{\pm} - \operatorname{Im}\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)\right)^2}{\beta_{\pm}} = 1, \quad (2.55)$$

em que  $X_{\pm} = x \cos(\Gamma_{\pm}/2) - y \sin(\Gamma_{\pm}/2)$  e  $Y_{\pm} = x \sin(\Gamma_{\pm}/2) + y \cos(\Gamma_{\pm}/2)$ , sendo  $\Gamma_{\pm}/2$  o ângulo de rotação dos eixos. Como

$$P_{\pm} + Q_{\pm} \cos(2\theta) + R_{\pm} \sin(2\theta) = \left(\Lambda_j(\theta) - \frac{\operatorname{Re}((a_0 + b_0)e^{-i\theta})}{2}\right)^2 \geq 0, \quad j = 1, 2,$$

também  $\alpha_{\pm}, \beta_{\pm} \geq 0$ , porque

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\gamma_{\pm}| &= \frac{1}{2} \left| \left(\frac{a_0 - b_0}{2}\right)^2 + (|a_1| \pm |a_{-1}|)^2 \bar{k} \right| \\ &\leq \frac{1}{8} |a_0 - b_0|^2 + \frac{1}{2} (|a_1| \pm |a_{-1}|)^2 |k| \leq P_{\pm}. \end{aligned}$$

A última desigualdade é válida, porque

$$\begin{aligned} P_{\pm} - \frac{1}{8}|a_0 - b_0|^2 - \frac{1}{2}(|a_1| \pm |a_{-1}|)^2|k| &= \\ &= -\frac{1}{2}(|a_1| \pm |a_{-1}|)^2|k| + \frac{1}{4}(|a_1| \pm |a_{-1}|)^2(1 + |k|^2) \\ &= \frac{1}{4}(|a_1| \pm |a_{-1}|)^2(1 - |k|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, as curvas (2.55) são duas elipses (possivelmente degeneradas). As respectivas distâncias semi-focais são dadas por  $\sqrt{\alpha_{\pm} - \beta_{\pm}} = \sqrt{|\gamma_{\pm}|}$  e os focos das elipses (2.55) são  $(a_0 + b_0)/2 \pm \sqrt{|\gamma_{\pm}|}e^{-i\Gamma_{\pm}/2}$ . Como as elipses estão encaixadas uma na outra, conclui-se o pretendido. ■

Ilustramos o teorema 2.4.3 com o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.4.4.** Seja  $T_f$  o operador 2-Toeplitz tridiagonal definido por

$$a_0 = 3, b_0 = -1, b_1 = 4, a_1 = -4, a_{-1} = 2 \text{ e } b_{-1} = -8. \quad (2.56)$$

Então,  $k = 2$  em (2.50),  $P_+ = 47$ ,  $P_- = 7$ ,  $\gamma_+ = 76$  e  $\gamma_- = 12$ . Logo, de acordo com (2.53) e (2.55), as curvas  $\mathcal{C}_1 = \overline{\partial W(T_f)}$  e  $\mathcal{C}_2$  são as elipses de equações cartesianas, respectivamente,

$$\frac{(x-1)^2}{85} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(x-1)^2}{13} + y^2 = 1, \quad (2.57)$$

representadas na figura 2.4.

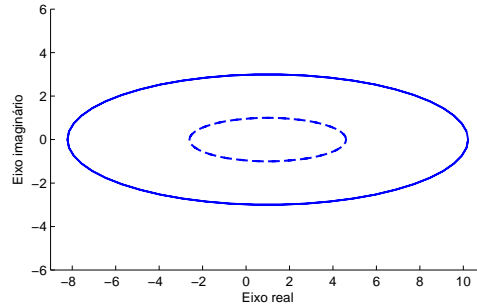


Figura 2.4:  $\overline{\partial W(T_f)} = \mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  (curva a tracejado) relativamente ao operador 2-Toeplitz tridiagonal definido no exemplo 2.4.4.

**Observação 2.4.5.** O contradomínio numérico de um operador 2-Toeplitz tridiagonal permanece inalterável se, para algum  $i$ , trocarmos as entradas  $(i, i+1)$  e  $(i+1, i)$ . Portanto, o teorema 2.4.3 continua válido se  $\bar{a}_{-1} = kb_1$  e  $\bar{a}_1 = kb_{-1}$ , ou  $\bar{b}_{-1} = ka_1$  e  $\bar{a}_{-1} = kb_1$ , ou  $\bar{a}_1 = kb_{-1}$  e  $\bar{b}_1 = ka_{-1}$ .

**Observação 2.4.6.** Se as condições (2.50) do teorema 2.4.3 não se verificarem, então  $W(T_f)$  não é necessariamente um disco elíptico. Basta considerar, por exemplo,  $T_f$  tal que  $a_0 = b_0 = 0$  e  $a_{-1} = b_1 = a_1 = -b_{-1} = 1$ . Nestas condições,

$$T_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 + e^{i\phi} \\ 1 - e^{-i\phi} & 0 \end{bmatrix},$$

para  $0 \leq \phi < 2\pi$ . Logo

$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_\phi) = \begin{bmatrix} 0 & z \\ \bar{z} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{em que } z = \cos \theta - i \sin \theta e^{i\phi}.$$

Portanto, os valores próprios de  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_\phi)$  são dados por

$$\lambda_\pm(\theta, \phi) = \pm \sqrt{1 + \sin(2\theta) \sin \phi}$$

e os valores extremos de  $\lambda_+(\theta, \phi)$ , em ordem a  $\phi$ , são

$$\Lambda_1(\theta) = \sqrt{1 + |\sin(2\theta)|} \quad \text{e} \quad \Lambda_2(\theta) = \sqrt{1 - |\sin(2\theta)|}.$$

Então,

- para  $0 < \theta < \pi/2$ ,  $f_1(\theta) = \sin \theta + \cos \theta$  representa o ponto  $1 + i$ ;
- para  $\pi/2 < \theta < \pi$ ,  $f_1(\theta) = \sin \theta - \cos \theta$  representa o ponto  $-1 + i$ ;
- para  $\pi < \theta < 3\pi/2$ ,  $f_1(\theta) = -\sin \theta - \cos \theta$  representa o ponto  $-1 - i$ ;
- para  $3\pi/2 < \theta < 2\pi$ ,  $f_1(\theta) = -\sin \theta + \cos \theta$  representa o ponto  $1 - i$ .

Logo  $\mathcal{C}_1 = \{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$ . Um argumento semelhante é válido para  $\Lambda_2(\theta)$ , sendo  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ . Nestas condições,  $W(T_f)$  é o quadrado de vértices  $1 + i, 1 - i, -1 + i$  e  $-1 - i$ .

**Corolário 2.4.7.** *Seja  $T_f$  nas mesmas condições que no teorema 2.4.3. Então  $\overline{W(T_f)}$  é um disco circular (possivelmente degenerado) com centro em  $(a_0 + b_0)/2$  se e só se*

$$\frac{a_0 - b_0}{2(|a_1| + |a_{-1}|)}$$

*é a raiz quadrada de  $-\bar{k}$ .*

**Demonstração:** Observe-se que  $|a_1| + |a_{-1}| = 0$  se e só se a matriz infinita (2.4) que representa  $T_f$  é diagonal, sendo nesse caso,  $W(T_f)$  o segmento de recta com pontos extremos  $a_0$  e  $b_0$ . Quando  $|a_1| + |a_{-1}| \neq 0$ , a condição

$$\left( \frac{a_0 - b_0}{2(|a_1| + |a_{-1}|)} \right)^2 + \bar{k} = 0$$

é necessária e suficiente para garantir que  $\gamma_+ = 0$  e, portanto,  $\alpha_+ = \beta_+$  definidos em (2.53), vindo o pretendido. ■

**Exemplo 2.4.8.** Seja  $T_f$  o operador 2-Toeplitz tridiagonal definido por

$$a_0 = 2, b_0 = -2, b_{-1} = b_1 = -1 \text{ e } a_{-1} = a_1 = 1.$$

Então,  $k = -1$  em (2.50),  $P_+ = 4$ ,  $P_- = 2$ ,  $\gamma_+ = 0$  e  $\gamma_- = 4$ . Logo, de acordo com (2.53) e (2.55), a curva  $\mathcal{C}_1 = \partial\overline{W(T_f)}$  é a circunferência de centro na origem e raio 2 e a curva  $\mathcal{C}_2$  degenera no segmento de recta  $[-2, 2]$  representado na figura 2.5.

## 2.5 Curvas geradoras de fronteira de $W(T_f)$

O conhecimento da curva geradora de fronteira de um contradomínio numérico reveste-se de grande utilidade prática na análise das suas propriedades geométricas. Sendo assim, apesar de  $W(T_f)$  estar completamente caracterizado em (2.46), apresentamos de seguida a dedução das equações paramétricas das curvas geradoras de fronteira de  $W(T_f)$ .

**Teorema 2.5.1.** *Seja  $T_f$  um operador 2-Toeplitz de banda. Seja  $\lambda(\theta, \phi)$  um valor próprio da matriz  $\text{Re}(e^{-i\theta}T_\phi)$ , para  $\theta, \phi \in [0, 2\pi[$ . Considere-se*

$$\Lambda_1(\theta) := \min_{\phi \in [0, 2\pi[} \lambda(\theta, \phi) \quad \text{e} \quad \Lambda_2(\theta) := \max_{\phi \in [0, 2\pi[} \lambda(\theta, \phi) \quad (2.58)$$

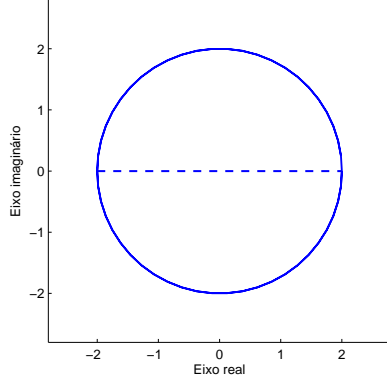


Figura 2.5:  $\overline{\partial W(T_f)} = \mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  (segmento de recta a tracejado), sendo  $T_f$  o operador tridiagonal definido no exemplo 2.4.8.

Então  $\overline{W(T_f)}$  é o invólucro convexo das curvas  $\{X_j(\theta) + iY_j(\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ , onde

$$\begin{cases} X_j(\theta) = \cos(\theta)\Lambda_j(\theta) - \sin(\theta)\Lambda_j'(\theta) \\ Y_j(\theta) = \sin(\theta)\Lambda_j(\theta) + \cos(\theta)\Lambda_j'(\theta) \end{cases}, \quad j = 1, 2. \quad (2.59)$$

**Demonstração:** Sabe-se que  $\operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_\phi)$  tem dois valores próprios  $\lambda_\pm(\theta, \phi)$ , mas para caracterizar  $W(T_f)$  basta considerar um dos seus valores próprios. Por isso, não constitui perda de generalidade considerar, por exemplo,  $\lambda(\theta, \phi) = \lambda_+(\theta, \phi)$ .

Para  $\theta \in [0, 2\pi[$ , seja  $\phi_j(\theta)$  tal que  $\Lambda_j(\theta) = \lambda(\theta, \phi_j(\theta))$  e seja  $\xi_j(\theta)$  um vector próprio associado ao valor próprio  $\Lambda_j(\theta)$ , para  $j = 1, 2$ . De acordo com (1.17) e (2.46), a imagem das aplicações  $F_j : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{C}$  definidas por

$$\begin{aligned} F_j(\theta) &= X_j(\theta) + iY_j(\theta) = \\ &= e^{i\theta} \left( \frac{\langle \operatorname{Re}(e^{-i\theta}T_{\phi_j(\theta)}) \xi_j(\theta), \xi_j(\theta) \rangle}{\langle \xi_j(\theta), \xi_j(\theta) \rangle} + i \frac{\langle \operatorname{Im}(e^{-i\theta}T_{\phi_j(\theta)}) \xi_j(\theta), \xi_j(\theta) \rangle}{\langle \xi_j(\theta), \xi_j(\theta) \rangle} \right), \end{aligned}$$

$j = 1, 2$ , descrevem duas curvas,  $\Gamma_j$ , contidas na fronteira de  $\overline{W(T_f)}$ . Como é usual, identifica-se cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  com  $(x : y : 1) \in P\mathbb{C}^2$ , e identifica-se cada ponto  $(x : y : z) \in P\mathbb{C}^2$ , tal que  $z \neq 0$ , com  $(x/z, y/z) \in \mathbb{C}^2$ .

Como  $\Lambda_j(\theta)$ ,  $j = 1, 2$ , são dois valores próprios de  $\operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} T_{\phi_j(\theta)} \right)$ , então

$$\det \left( \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} T_{\phi_j(\theta)} \right) - \Lambda_j(\theta) I_2 \right) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.60)$$

Por outro lado,  $\mathcal{L}_j(\theta) = \{ e^{i\theta} (\Lambda_j(\theta) + iy) : y \in \mathbb{R} \}$ ,  $j = 1, 2$ , são duas rectas de suporte de  $e^{i\theta} W \left( e^{-i\theta} T_f \right) = W(T_f)$ , na direcção do ângulo  $\theta$ , de equações

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \Lambda_j(\theta), \quad j = 1, 2.$$

À medida que  $\theta$  percorre o intervalo  $[0, 2\pi[$ , descrevem-se todas as rectas de suporte de  $W(T_f)$ . Assim, dada uma recta de suporte de  $W(T_f)$  de equação  $ux + vy + w = 0$ , existem ângulos  $\theta_j \in [0, 2\pi[$  e escalares reais não-nulos  $r_j$ ,  $j = 1, 2$ , tais que

$$u = r_j \cos \theta_j, \quad v = r_j \sin \theta_j \quad \text{e} \quad w = -r_j \Lambda_j(\theta_j), \quad (2.61)$$

para  $j = 1, 2$ . Tomando  $\theta = \theta_j$  em (2.60), atendendo a que

$$\operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} T_{\phi_j(\theta)} \right) = \cos \theta \operatorname{Re} T_{\phi_j(\theta)} + \sin \theta \operatorname{Im} T_{\phi_j(\theta)}$$

e a (2.61), obtém-se que  $r_j^{-n} \det(u \operatorname{Re} T_{\phi_j(\theta)} + v \operatorname{Im} T_{\phi_j(\theta)} + wI) = 0$ . Portanto, a curva dual,  $\Gamma_j^*$ , da curva  $\Gamma_j$ , é dada no plano projectivo complexo por

$$\Gamma_j^* = \{ (\cos \theta : \sin \theta : -\Lambda_j(\theta)) \in P\mathbb{C}^2 : 0 \leq \theta < 2\pi \}, \quad j = 1, 2,$$

ou equivalentemente, para todo o intervalo  $[\theta_1, \theta_2]$  tal que  $\Lambda_j(\theta) \neq 0$ , por

$$\Gamma_j^* = \left\{ \left( -\frac{\cos \theta}{\Lambda_j(\theta)} : -\frac{\sin \theta}{\Lambda_j(\theta)} : 1 \right) \in P\mathbb{C}^2 : \theta_1 \leq \theta < \theta_2 \right\}, \quad j = 1, 2.$$

Logo as curvas  $\Gamma_j^*$  são parametrizadas por

$$x = x(\theta) = -\frac{\cos \theta}{\Lambda_j(\theta)} \quad \text{e} \quad y = y(\theta) = -\frac{\sin \theta}{\Lambda_j(\theta)}, \quad j = 1, 2,$$

e as curvas  $\Gamma_j$  são dadas por

$$\begin{cases} X_j(\theta) = \frac{-y'(\theta)}{x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta)} = \cos(\theta)\Lambda_j(\theta) - \sin(\theta)\Lambda_j'(\theta) \\ Y_j(\theta) = \frac{x'(\theta)}{x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta)} = \sin(\theta)\Lambda_j(\theta) + \cos(\theta)\Lambda_j'(\theta) \end{cases}, \quad j = 1, 2.$$

■

**Definição 2.5.2.** As curvas  $\{X_j(\theta) + iY_j(\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ ,  $j = 1, 2$ , de equações paramétricas (2.59) dizem-se as *curvas geradoras de fronteira* de  $W(T_f)$ .

## 2.6 Algoritmos e exemplos

Nesta secção apresentam-se dois algoritmos que permitem traçar o contradomínio numérico de um operador 2-Toeplitz de banda. O primeiro algoritmo é baseado na igualdade (2.46) e consiste em reduzir a caracterização do contradomínio numérico de um operador 2-Toeplitz de banda,  $T_f$ , ao estudo do contradomínio numérico de uma família de matrizes  $2 \times 2$ . Mais precisamente, a família constituída pelas matrizes símbolo  $T_\phi \in M_2$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ , definidas em (2.5). O segundo algoritmo tem como base o conhecimento das equações paramétricas (2.59) das curvas geradoras de fronteira do contradomínio numérico de  $T_f$ .

Com base nestes dois algoritmos, procedemos à implementação de dois programas computacionais, em Matlab, disponíveis no CD-Rom em anexo. Ambos permitem traçar, de uma forma eficiente, a fronteira do contradomínio numérico de um operador 2-Toeplitz de banda arbitrário. Ao nível da rapidez de execução, o desempenho dos dois programas implementados é semelhante, mas ao nível da precisão, o programa baseado no algoritmo 1, revelou-se mais preciso. Com efeito, no programa implementado com base no segundo algoritmo, os extremos, em ordem a  $\phi$ , da matriz  $\text{Re}(e^{-i\theta}T_\phi)$ , assim como a derivada de  $\Lambda_j(\theta)$ ,  $j = 1, 2$ , são calculados numericamente o que poderá, em alguns casos conduzir ao surgimento de eventuais pontos espúrios resultantes de pequenos, mas inevitáveis, erros numéricos. Por este motivo, o programa baseado no algoritmo 1 revelou-se mais eficiente, mas a importância do algoritmo 2 deve ser salvaguardada uma vez que permite conhecer a representação geométrica das curvas geradoras de fronteira de  $W(T_f)$  e este facto constitui por si só, um grande progresso.

As figuras apresentadas nesta secção foram traçadas por recurso a estes dois programas implementados.

### Algoritmo 1

**Passo 1.** Calcular  $\phi_k = \frac{2(k-1)\pi}{n}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , para algum inteiro positivo  $n \geq 20$ .

**Passo 2.** Para cada  $k \in \{1, \dots, n\}$ , representar  $\partial W(T_{\phi_k})$  do seguinte modo:



- Calcular  $\theta_t = \frac{2(t-1)\pi}{m}$ ,  $t = 1, \dots, m$ , para algum inteiro positivo  $m \geq 20$ ;
- Para cada  $\theta_t$ , calcular os valores próprios da matriz  $\text{Re}(e^{-i\theta_t}T_{\phi_k})$  e os vectores próprios associados  $v_j(t, k)$ ,  $j = 1, 2$ .
- Calcular

$$\rho_j(t, k) := \frac{v_j^*(t, k)T_{\phi_k}v_j(t, k)}{v_j^*(t, k)v_j(t, k)}, \quad j = 1, 2 \text{ e } t = 1, \dots, m.$$

Estes pontos pertencem à curva geradora de fronteira de  $W(T_{\phi_k})$ .

- Representar  $\partial W(T_{\phi_k})$ , ou seja, representar o invólucro convexo dos pontos  $\rho_j(t, k)$ , para  $j = 1, 2$  e  $t = 1, \dots, m$ .

**Passo 3.** Representar  $\overline{\partial W(T_f)}$ , ou seja, representar o invólucro convexo de  $W(T_{\phi_k})$ , para  $k = 1, \dots, n$ .

### Algoritmo 2

**Passo 1.** Calcular a expressão dos valores próprios  $\lambda_{\pm}(\theta, \phi)$  da matriz de rotação  $\text{Re}(e^{-i\theta}T_{\phi})$ , para  $\theta, \phi \in [0, 2\pi[$  arbitrários.

**Passo 2.** Calcular  $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$ ,  $k = 0, \dots, n+1$ , para algum inteiro positivo  $n \geq 20$ .

**Passo 3.** Para cada  $\theta_k$ , determinar os valores extremos (máximo e mínimo), em ordem a  $\phi$ , de  $\lambda_+(\theta_k, \phi)$ . Suponha-se que os extremos são atingidos em  $\phi_1(\theta_k)$  e  $\phi_2(\theta_k)$ , e sejam  $\Lambda_j(\theta_k) := \lambda_+(\theta_k, \phi_j(\theta_k))$ , para  $j = 1, 2$ .

**Passo 4.** Calcular

$$\Lambda'_j(\theta_k) = \frac{\Lambda(\theta_{k+1}) - \Lambda(\theta_{k-1})}{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.62)$$

**Passo 5.** Representar os pontos  $X_j(\theta_k) + iY_j(\theta_k)$ , para  $j = 1, 2$  e  $k = 1, \dots, n$  tais que

$$\begin{cases} X_j(\theta_k) = \cos(\theta_k)\Lambda_j(\theta_k) - \sin(\theta_k)\Lambda'_j(\theta_k) \\ Y_j(\theta_k) = \sin(\theta_k)\Lambda_j(\theta_k) + \cos(\theta_k)\Lambda'_j(\theta_k) \end{cases}. \quad (2.63)$$

**Passo 6.** Representar o invólucro convexo dos pontos (2.63) que descrevem a curva geradora de fronteira de  $\overline{W(T_f)}$ .

Ilustramos este dois algoritmos com alguns exemplos.

**Exemplo 2.6.1.** Considere-se o operador 2-Toeplitz  $T_f$  pentadiagonal (i.e., com largura de banda  $2m + 1 = 5$ ) definido por

$$a_2 = a_1 = a_0 = a_{-2} = b_{-2} = b_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_{-1} = b_1 = b_2 = -b_{-1} = 1.$$

A matriz símbolo de  $T_f$  é dada por

$$T_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - e^{-i\phi} & e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

e a representação gráfica de  $\partial\overline{W(T_f)}$ , por recurso aos dois algoritmos anteriormente apresentados, é ilustrada na figura 2.6.

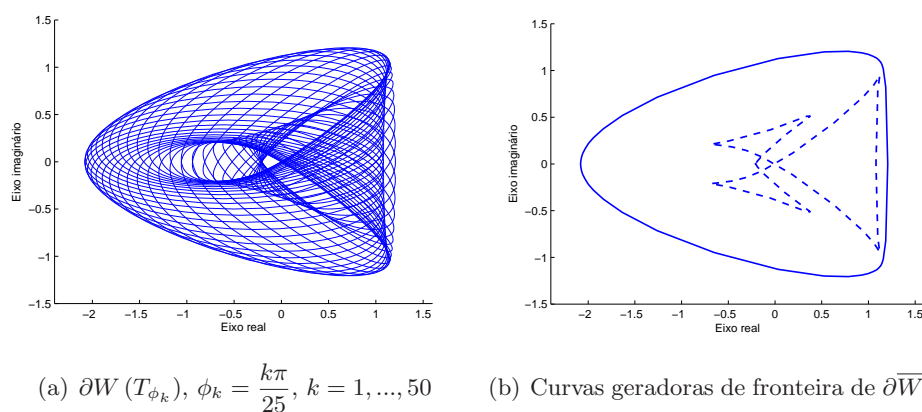


Figura 2.6: Representações de  $\partial\overline{W(T_f)}$ , sendo  $T_f$  o operador definido no exemplo 2.6.1.

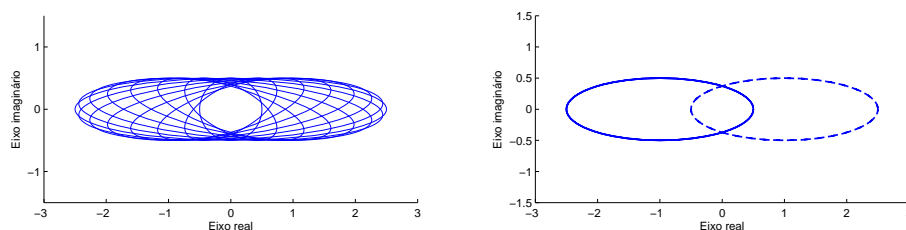
**Exemplo 2.6.2.** Considere-se o operador 2-Toeplitz  $T_f$  heptadiagonal (i.e., com largura de banda  $2m + 1 = 7$ ) definido por

$$b_1 = -b_3 = a_{-1} = 1, \quad a_{-3} = -2,$$

e as restantes componentes são nulas. A matriz símbolo de  $T_f$  é dada por

$$T_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 2e^{-i\phi} \\ 1 - e^{i\phi} & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

Na figura 2.7 ilustra-se  $\overline{\partial W(T_f)}$  por recurso aos dois algoritmos anteriormente descritos.



(a)  $\partial W(T_{\phi_k})$ , para  $\phi_k = \frac{k\pi}{7}$ ,  $k = 1, \dots, 14$  (b) Curvas geradoras de fronteira de  $\overline{W(T_f)}$

Figura 2.7: Representações de  $\overline{\partial W(T_f)}$ , sendo  $T_f$  o operador definido no exemplo 2.6.2.

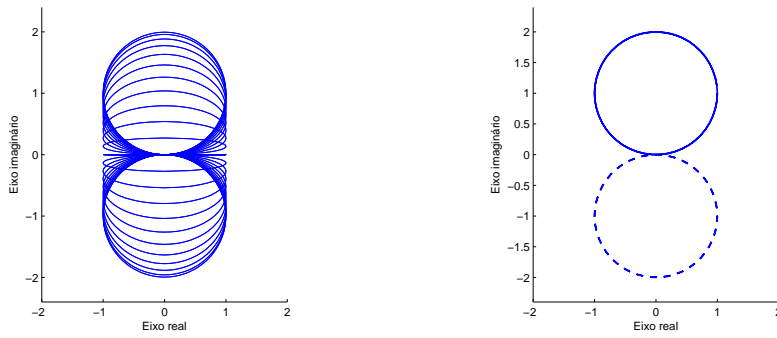
**Exemplo 2.6.3.** Considere-se o operador 2-Toeplitz  $T_f$  eneadiagonal (i.e., com largura de banda  $2m + 1 = 9$ ) tal que

$$a_{-4} = a_{-1} = b_1 = -a_4 = 1,$$

e as restantes componentes são nulas. A matriz símbolo de  $T_f$  é dada por

$$T_\phi = \begin{bmatrix} e^{-2i\phi} - e^{2i\phi} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

e a representação gráfica de  $\overline{\partial W(T_f)}$ , por recurso aos dois algoritmos apresentados, é ilustrada na figura 2.8.



(a)  $\partial W(T_{\phi_k})$ , para  $\phi_k = \frac{k\pi}{23}$ ,  $k = 1, \dots, 46$  (b) Curvas geradoras de fronteira de  $\overline{W(T_f)}$

Figura 2.8: Representações de  $\partial \overline{W(T_f)}$ , sendo  $T_f$  o operador definido no exemplo 2.6.3.

## Capítulo 3

### $J$ -contradomínio numérico de uma classe de matrizes tridiagonais

#### 3.1 Motivação

Os elementos não-nulos de uma matriz tridiagonal situam-se apenas ao longo da diagonal principal, da primeira subdiagonal e da primeira superdiagonal da matriz (cfr. definição 2.1.3). Por simplicidade de escrita, representaremos os elementos não-nulos de uma matriz tridiagonal com um único índice:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Existem alguns resultados relativos ao contradomínio numérico clássico e ao  $c$ -contradomínio numérico de matrizes tridiagonais. Mais precisamente, sabe-se que:

- $W(\text{tridiag}(0, 0, 1))$  é um disco circular centrado na origem de raio  $\cos(\pi/(n+1))$  [85, lema 3];

- $W$  (tridiag  $(\alpha, 0, \beta)$ ) é o disco elíptico

$$\{\alpha z + \beta \bar{z} : z \in \mathbb{C}, |z| \leq \cos(\pi/(n+1))\}$$

[45, corolário 4]; uma generalização deste resultado ao  $c$ -contradomínio numérico foi obtida em [31];

- $W_c(A)$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ , é um disco circular centrado na origem, se  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz tridiagonal com a diagonal principal nula e tal que  $a_{j,j+1}a_{j+1,j} = 0$ , para  $j = 1, \dots, n-1$  [34, corolário 3];
- Em [34, teorema 4] foram deduzidas condições suficientes para que  $W_c(A)$ , com  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $A$  uma matriz tridiagonal, seja um disco elíptico;
- Em [27, 36] encontram-se publicadas generalizações destes resultados.

Motivados por esta investigação, caracterizámos o contradomínio numérico de uma classe especial de matrizes tridiagonais, em espaços de Krein.

### 3.2 Uma classe de matrizes tridiagonais com contradomínio numérico hiperbólico

O lema que apresentamos a seguir é uma adaptação de [27, lema 3.1] a espaços de Krein.

**Lema 3.2.1.** *Sejam  $A \in M_n$  uma matriz tridiagonal e*

$$J = \text{diag}(1, -1, \dots, 1, -1) \quad \text{ou} \quad J = \text{diag}(1, -1, \dots, 1, -1, 1),$$

*consoante  $n$  seja par ou ímpar, respectivamente. O  $J$ -contradomínio numérico de  $A$  é invariante mediante a troca das entradas  $j, j+1$  e  $j+1, j$  da matriz  $A$ , para qualquer  $j = 1, \dots, n-1$ .*

**Demonstração:** Podemos admitir, sem perda de generalidade, que  $b_1$  troca com  $c_1$ . Seja  $\hat{A}$  a matriz que difere de  $A$  apenas pela troca de  $b_1$  com  $c_1$ , ou

seja,

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Considere-se um ponto arbitrário  $x^*JAx \in W_J(A)$ , tal que  $x^*Jx = 1$  onde  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ . Então

$$\begin{aligned} x^*JAx &= a_1|x_1|^2 - a_2|x_2|^2 + \cdots + (-1)^{k-1}a_k|x_k|^2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n|x_n|^2 \\ &\quad + b_1\bar{x}_1x_2 - b_2\bar{x}_2x_3 + \cdots + (-1)^{k-1}b_k\bar{x}_kx_{k+1} + \cdots + (-1)^{n-2}b_{n-1}\bar{x}_{n-1}x_n \\ &\quad - c_1\bar{x}_2x_1 + c_2\bar{x}_3x_2 + \cdots + (-1)^k c_k\bar{x}_{k+1}x_k + \cdots + (-1)^{n-1}c_{n-1}\bar{x}_n x_{n-1}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que existe  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T \in \mathbb{C}^n$  tal que

$$x^*Jx = \hat{x}^*J\hat{x} \quad \text{e} \quad x^*JAx = \hat{x}^*J\widehat{A}\hat{x}. \quad (3.3)$$

Para esta última igualdade ocorrer terá que

$$|x_1| = |\hat{x}_1|, \quad |x_2| = |\hat{x}_2|, \quad \bar{x}_1x_2 = -\hat{x}_1\bar{\hat{x}}_2 \quad \text{e} \quad \bar{x}_2x_1 = -\hat{x}_2\bar{\hat{x}}_1.$$

Se  $x_1 = 0$ , podemos simplesmente considerar  $\hat{x} = x$ . Caso contrário, considere-se

$$|\hat{x}_1| = |x_1|, \quad |\hat{x}_2| = |x_2|, \quad \arg(\hat{x}_1) = -\arg(x_1) + \pi \quad \text{e} \quad \arg(\hat{x}_2) = -\arg(x_2),$$

ou seja,

$$\hat{x}_1 = -\bar{x}_1 \quad \text{e} \quad \hat{x}_2 = \bar{x}_2. \quad (3.4)$$

Além disso, cálculos simples permitem concluir que para se verificar a igualdade  $x^*JAx = \hat{x}^*J\widehat{A}\hat{x}$ , além de (3.4), terá que

$$|x_k| = |\hat{x}_k| \quad \text{e} \quad \arg(\hat{x}_k) = \arg(x_k) - 2\arg(x_2), \quad \text{para } k > 2. \quad (3.5)$$

O vector  $\hat{x}$  definido em (3.4) e (3.5) satisfaz (3.3), logo  $\hat{x} \in W_J(\widehat{A})$  e, portanto,  $W_J(A) \subset W_J(\widehat{A})$ . A inclusão recíproca obtém-se trocando os papéis de  $A$  e  $\widehat{A}$ . ■

O próximo teorema é uma adaptação de [27, teorema 3.3] a espaços de Krein e descreve uma classe de matrizes tridiagonais com  $J$ -contradomínio numérico hiperbólico. Consiste na classe de todas as matrizes (3.1) com diagonal principal biperiódica, i.e.,

$$a_j = \begin{cases} a_1 & \text{se } j \text{ é par} \\ a_2 & \text{se } j \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.6)$$

e cujas entradas  $b_j, c_j$  satisfazem a seguinte condição:

$$\text{Para cada } j = 1, \dots, n-1, k\bar{b}_j = c_j \text{ ou } k\bar{c}_j = b_j, \text{ para alguma constante } k \in \mathbb{C}. \quad (3.7)$$

**Teorema 3.2.2.** *Seja  $A \in M_n$  uma matriz tridiagonal não essencialmente  $J$ -hermítica satisfazendo as condições (3.6) e (3.7). Considere-se*

$$J = \text{diag}(1, -1, \dots, 1, -1) \quad \text{ou} \quad J = \text{diag}(1, -1, \dots, 1, -1, 1),$$

consoante  $n$  seja par ou ímpar, respectivamente. Seja

$$\gamma = \left( \frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 + k\lambda_1^2, \quad (3.8)$$

onde  $\lambda_1$  é a norma espectral da matriz tridiagonal  $C$  cuja diagonal principal é nula e a primeira superdiagonal e primeira subdiagonal têm entradas, respectivamente,

$$(b_1, -b_2, b_3, -b_4, \dots, -b_{n-1}) \quad \text{e} \quad (\bar{b}_1, -\bar{b}_2, \bar{b}_3, -\bar{b}_4, \dots, -\bar{b}_{n-1}),$$

ou

$$(b_1, -b_2, b_3, -b_4, \dots, b_{n-1}) \quad \text{e} \quad (\bar{b}_1, -\bar{b}_2, \bar{b}_3, -\bar{b}_4, \dots, \bar{b}_{n-1})$$

consoante  $n$  seja par ou ímpar.

- (i) Se  $|\gamma| > \lambda_1^2 \left( \frac{1 + |k|^2}{2} \right) - \left| \frac{a_1 - a_2}{2} \right|^2$ , então  $\partial W_J(A)$  é a hipérbole (possivelmente degenerada) de centro em  $(a_1 + a_2)/2$ , focos em



$$\frac{(a_1 + a_2) \pm \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4k\lambda_1^2}}{2}$$

e semi-eixo transverso de comprimento

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left| \frac{a_1 - a_2}{2} \right|^2 - \frac{1}{4} \lambda_1^2 (1 + |k|^2) + \frac{1}{2} |\gamma|}.$$

(ii) Se  $|\gamma| = \lambda_1^2 \left( \frac{1 + |k|^2}{2} \right) - \left| \frac{a_1 - a_2}{2} \right|^2$ , então  $W_J(A)$  é todo o plano complexo excepto a recta que passa por  $(a_1 + a_2)/2$  e que tem a direcção de  $(\arg(\gamma) + \pi)/2$ .

(iii) Se  $|\gamma| < \lambda_1^2 \left( \frac{1 + |k|^2}{2} \right) - \left| \frac{a_1 - a_2}{2} \right|^2$ , então  $W_J(A)$  é todo o plano complexo.

**Demonstração:** Suponha-se em primeiro lugar que  $A$  é de ordem par. De acordo com o lema 3.2.1, podemos assumir, sem perda de generalidade, que as entradas situadas na primeira subdiagonal e na primeira superdiagonal de  $A$  são tais que  $c_j = k\bar{b}_j$ , para  $j = 1, \dots, n - 1$ . Sendo  $d = (a_1 - a_2)/2$ , a matriz  $A$  pode escrever-se na forma  $A = I_n(a_1 + a_2)/2 + B$ , onde  $B$  é a matriz que se obtém de  $A$  substituindo a diagonal principal por  $(d, -d, \dots, d, -d)$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $d > 0$ .

Para  $\theta \in [0, 2\pi[$ , considere-se a matriz  $J$ -hermítica  $\text{Re}^J(e^{-i\theta}B)$  definida em (1.48). Os seus valores próprios definem rectas de suporte de  $W_J(A)$  perpendiculares à direcção de argumento  $\theta$ . Submetendo essas rectas a uma rotação segundo o ângulo  $\theta$ , obtêm-se as rectas de suporte de  $e^{i\theta}W_J(e^{-i\theta}A) = W_J(A)$ . Começemos por determinar os valores próprios, denotados por  $\mu_j(\theta)$  da matriz  $\text{Re}^J(e^{-i\theta}B)$ . Como  $n$  é par, então  $\det(J) = 1$ , e como além disso  $J^2 = I$ , alguns cálculos permitem concluir que  $\det(\text{Re}^J(e^{-i\theta}B) - \mu(\theta)I_n)$  é igual a

$$2^{-n} \left| e^{-i\theta} - \bar{k} e^{i\theta} \right|^n \det \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \bar{b}_1 & d_2 & -b_2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & -\bar{b}_2 & d_1 & b_3 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{b}_3 & d_2 & -b_4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & -\bar{b}_{n-2} & d_1 & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \bar{b}_{n-1} & d_2 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

em que  $d_1 = 2 \frac{\operatorname{Re}(d e^{-i\theta}) - \mu(\theta)}{|e^{-i\theta} - \bar{k} e^{i\theta}|}$  e  $d_2 = 2 \frac{\operatorname{Re}(d e^{-i\theta}) + \mu(\theta)}{|e^{-i\theta} - \bar{k} e^{i\theta}|}$ . Considere-se

$$\lambda^2 = 4 \frac{((\operatorname{Re}(d e^{-i\theta}))^2 - \mu^2(\theta))}{|e^{-i\theta} - \bar{k} e^{i\theta}|^2}.$$

Então, o determinante da expressão (3.9) coincide com o determinante de  $C - \lambda I$ , em que  $C$  é a matriz tridiagonal hermítica definida no enunciado do teorema. Os valores próprios da matriz hermítica  $C$  ocorrem aos pares de números reais simétricos e serão denotados por

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n/2} > \cdots > \lambda_n, \quad \text{com } \lambda_{n-j+1} = -\lambda_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Os valores próprios,  $\mu_j(\theta)$ , da matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta} B)$  satisfazem a seguinte condição

$$\mu_j^2(\theta) = (\operatorname{Re}(d e^{-i\theta}))^2 - \lambda_j^2 \frac{|e^{-i\theta} - \bar{k} e^{i\theta}|^2}{4}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Vamos analisar em que condições os valores próprios,  $\mu_j(\theta)$ , são todos reais. Se o menor valor de  $\mu_j^2(\theta)$ , i.e.,  $\mu_1^2(\theta)$ , for não-negativo, então todos os  $\mu_j(\theta)$  são números reais. Logo, basta determinar  $\theta$  tal que  $\mu_1^2(\theta) \geq 0$ . Simples cálculos permitem concluir que

$$\mu_1^2(\theta) = P + Q \cos(2\theta) + R \sin(2\theta),$$

onde

$$\begin{aligned} P &= \frac{|d|^2}{2} - \frac{1+|k|^2}{4}\lambda_1^2 \\ Q &= \frac{\operatorname{Re}(d^2)}{2} + \frac{\operatorname{Re} k}{2}\lambda_1^2 \\ R &= \frac{\operatorname{Im}(d^2)}{2} + \frac{\operatorname{Im} k}{2}\lambda_1^2. \end{aligned}$$

Seja  $\gamma = 2(Q + iR) = d^2 + k\lambda_1^2$  e  $\Gamma = \arg(\gamma)$ . Tem-se que

$$\mu_1^2(\theta) = \alpha \cos^2\left(\frac{\Gamma}{2} - \theta\right) - \beta \sin^2\left(\frac{\Gamma}{2} - \theta\right),$$

onde

$$\alpha = \frac{|d|^2}{2} - \frac{1+|k|^2}{4}\lambda_1^2 + \frac{|\gamma|}{2} \quad (3.11)$$

e

$$\beta = -\frac{|d|^2}{2} + \frac{1+|k|^2}{4}\lambda_1^2 + \frac{|\gamma|}{2}. \quad (3.12)$$

Tem-se que  $\beta \geq 0$ . De facto, como

$$\frac{|\gamma|}{2} \geq \frac{|d|^2}{2} - \frac{|k|}{2}\lambda_1^2,$$

de (3.12) conclui-se que

$$\beta \geq \frac{1}{4}\lambda_1^2(1 - |k|)^2 \geq 0.$$

Mediante as hipóteses, a matriz tridiagonal  $A$  seria essencialmente  $J$ -hermítica se e só se  $|k| = 1$  e  $\arg(k) = 2\arg(d)$ . Como  $A$  não é essencialmente  $J$ -hermítica, então  $|k| \neq 1$ . Além disso, para evitar situações triviais, podemos supor que  $\lambda_1 \neq 0$ . Logo  $\beta > 0$ .

Se (i) for válido, então

$$|\gamma| > \lambda_1^2 \left( \frac{1+|k|^2}{2} \right) - |d|^2,$$

e, portanto,  $\alpha > 0$ . Logo, existe uma direcção  $\theta$  tal que  $\mu_1^2(\theta) \geq 0$  sendo

$$\mu_1(\theta) = \sqrt{\alpha \cos^2\left(\frac{\Gamma}{2} - \theta\right) - \beta \sin^2\left(\frac{\Gamma}{2} - \theta\right)}, \quad (3.13)$$

e

$$\mu_n(\theta) = -\mu_1(\theta). \quad (3.14)$$

Em relação a essa direcção, todos os  $\mu_j(\theta)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , são números reais, dois a dois simétricos. À medida que  $\theta$  percorre o intervalo  $[\Gamma/2, \Gamma/2 + 2\pi[$  a condição (3.13) descreve uma hipérbole de equações paramétricas dadas por

$$\begin{cases} x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = \mu_j(\theta) \\ -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) = \mu'_j(\theta) \end{cases}. \quad (3.15)$$

Eliminando  $\theta$  em (3.15), obtém-se a equação cartesiana

$$\frac{X^2}{\alpha} - \frac{Y^2}{\beta} = 1, \quad (3.16)$$

em que  $X = x \cos(\Gamma/2) - y \sin(\Gamma/2)$  e  $Y = x \sin(\Gamma/2) + y \cos(\Gamma/2)$ . Os focos da hipérbole são  $(a_1 + a_2)/2 \pm \sqrt{\gamma}$  e o comprimento do semi-eixo transversal é  $\sqrt{\alpha}$ .

Resta analisar o sinal da  $J$ -norma dos vectores próprios  $J$ -anisotrópicos associados a  $\mu_j(\theta)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e garantir que os valores próprios em  $\sigma_J^+(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}B))$  e em  $\sigma_J^-(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}B))$  não se entrelaçam (cfr. (1.46)). Se  $\nu_j = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$  é um vector próprio associado a  $\mu_j(\theta)$ , então  $\nu_{n-j+1} = (sx_1^{(j)}, x_2^{(j)}, sx_3^{(j)}, x_4^{(j)}, \dots, sx_{n-1}^{(j)}, x_n^{(j)})$  é um vector próprio associado a  $-\mu_j(\theta)$ , onde

$$s = \frac{\operatorname{Re}(de^{-i\theta}) - \mu_j(\theta)}{\operatorname{Re}(de^{-i\theta}) + \mu_j(\theta)}.$$

Cálculos simples permitem concluir que a  $J$ -norma de  $\nu_j$  é

$$\left(|x_1^{(j)}|^2 + |x_3^{(j)}|^2 + \dots + |x_n^{(j)}|^2\right) (1 - s),$$

enquanto que a  $J$ -norma de  $\nu_{n-j+1}$  é

$$\left(|x_1^{(j)}|^2 + |x_3^{(j)}|^2 + \dots + |x_n^{(j)}|^2\right) s(s - 1).$$

Podemos admitir, sem perda de generalidade que  $\operatorname{Re}(de^{-i\theta}) > 0$ . Logo,

$$\mu_j(\theta) \in \sigma_J^+(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}B)), \quad j = 1, \dots, n/2,$$

e

$$\mu_j(\theta) = -\mu_{n-j+1}(\theta) \in \sigma_J^-(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}B)), \quad j = n/2 + 1, \dots, n.$$

Consequentemente, como

$$0 < \mu_1(\theta) < \dots < \mu_{n/2}(\theta) \quad \text{e} \quad \mu_{n/2+1}(\theta) < \dots < \mu_n(\theta) < 0,$$

vem que

$$W_{-J}^+(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}B)) = ]-\infty, -\mu_1(\theta)] \quad \text{e} \quad W_J^+(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}B)) = [\mu_1(\theta), +\infty[. \quad (3.17)$$

Logo,  $\partial W_J(A)$  é a hipérbole (3.16).

Suponha-se agora que  $A$  tem ordem ímpar. A situação é análoga à situação abordada anteriormente. Os valores próprios de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}B)$  ocorrem aos pares de números reais simétricos, com excepção do valor próprio  $\operatorname{Re}(de^{-i\theta})$  que tem vector próprio associado  $(x_1, 0, x_3, \dots, 0, x_n)$  em que  $x_1 \neq 0$  e  $x_j = \frac{\bar{b}_{j-2}}{b_{j-1}} \left( \frac{e^{i\theta} - ke^{-i\theta}}{e^{-i\theta} - \bar{k}e^{i\theta}} \right) x_{j-2}$ ,  $j = 3, \dots, n$ , com  $J$ -norma positiva. Para  $\theta = 0$ , tem-se que

$$\alpha \leq |d|^2 - \frac{1}{4}\lambda_1^2(1 - |k|)^2.$$

Portanto,  $\sqrt{\alpha} \leq |d|$ , logo o ponto  $d$  pertence ao interior da hipérbole (3.16), vindo (i).

(ii) Se  $|\gamma| = \lambda_1^2(1 + |k|^2)/2 - |d|^2$ , então  $\alpha = 0$  e  $\mu_1^2(\theta) < 0$ , para todo o  $\theta \neq \Gamma/2$ . Logo, a matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}B)$  tem valores próprios imaginários puros em todas as direcções, excepto possivelmente na direcção  $\theta = \Gamma/2$ . Logo,  $W_J(A)$  só pode, eventualmente admitir uma recta de suporte na direcção do ângulo  $\Gamma/2$ . Portanto, a projecção ortogonal da rotação de  $W_J(A)$  em todas as direcções é todo a recta real, excepto eventualmente na direcção  $\theta = \Gamma/2$ . Mostremos de seguida que a recta que passa por  $(a_1 + a_2)/2$  e que tem a direcção de  $(\arg(\gamma) + \pi)/2$  não está contida em  $W_J(A)$ .

Como  $\mu_1^2(\Gamma/2) = 0$ , então 0 é um valor próprio múltiplo da matriz  $B^{\Gamma/2} := \operatorname{Re}^J(e^{-i\Gamma/2}B)$  e usamos a técnica da perturbação. Seja  $B_\epsilon^{\Gamma/2} = \operatorname{Re}^J(e^{-i\Gamma/2}B_\epsilon)$ , onde  $B_\epsilon$  é a matriz que se obtém de  $B$  substituindo  $d$  por  $d + \epsilon$ , com  $\epsilon \in \mathbb{R}$  escolhido da seguinte maneira. Sabendo que  $\alpha(\epsilon) = \alpha + \epsilon M + O(\epsilon^2)$ , onde  $M$

é um número real não-nulo, escolha-se  $\epsilon$  tal que  $\epsilon M > 0$ . Logo  $\alpha(\epsilon) > 0$  e por (3.17) podemos concluir que

$$W_{-J}^+(B_\epsilon^{\Gamma/2}) = ]-\infty, -\sqrt{\alpha(\epsilon)}] \quad \text{e} \quad W_J^+(B_\epsilon^{\Gamma/2}) = [\sqrt{\alpha(\epsilon)}, +\infty[.$$

Se  $\epsilon \rightarrow 0$ , então  $\alpha(\epsilon) \rightarrow 0$  e  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$  está contido em  $W_J(B^{\Gamma/2})$ .

De seguida mostramos que a origem não é um elemento de  $W_J(B^{\Gamma/2})$ . Suponha-se em primeiro lugar que  $n$  é par. Vamos usar a técnica da perturbação. Sejam  $\mu_1(\epsilon), \dots, \mu_{n/2}(\epsilon) \in \sigma_J^+(B_\epsilon^{\Gamma/2})$  e  $\mu_{n/2+1}(\epsilon), \dots, \mu_n(\epsilon) \in \sigma_J^-(B_\epsilon^{\Gamma/2})$  os valores próprios de  $B_\epsilon^{\Gamma/2}$  com vectores próprios associados

$$\nu_1(\epsilon), \nu_2(\epsilon), \dots, \nu_{n/2}(\epsilon) \quad \text{e} \quad \nu_{n/2+1}(\epsilon), \dots, \nu_n(\epsilon),$$

respectivamente. Assuma-se que  $0 < \mu_1(\epsilon) < \dots < \mu_{n/2}(\epsilon)$ . Considere-se a base  $\mathcal{B}(\epsilon)$  obtida da base anterior substituindo os vectores  $\nu_1(\epsilon)$  e  $\nu_n(\epsilon)$  pelos correspondentes vectores próprios normalizados,  $v_1(\epsilon)$  e  $v_n(\epsilon)$ , com  $J$ -normas 1 e  $-1$ , respectivamente. Nesta base, a matriz  $B_\epsilon^{\Gamma/2}$  é representada por  $B_1(\epsilon) \oplus B_2(\epsilon) \oplus B_3(\epsilon)$ , onde  $B_1(\epsilon) = \text{diag}(\mu_{n/2}(\epsilon), \dots, \mu_2(\epsilon))$ ,

$$B_2(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{1-\alpha(\epsilon)} \\ -\sqrt{1-\alpha(\epsilon)} & -1 \end{bmatrix},$$

e  $B_3(\epsilon) = \text{diag}(\mu_{n-1}(\epsilon), \dots, \mu_{n/2+1}(\epsilon))$ . Obviamente,

$$B_2(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{1-\alpha(\epsilon)} \\ -\sqrt{1-\alpha(\epsilon)} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tomando limites em cada elemento de  $\mathcal{B}(\epsilon)$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtém-se uma base em  $\mathbb{C}^n$  que iremos denotar por  $\mathcal{B}$ . Seja  $v = x_1 v_1 + x_n v_n + \sum_{i=2}^{n-1} x_i v_i$  um vector  $J$ -anisotrópico arbitrário em  $\mathbb{C}^n$  expresso em  $\mathcal{B}$ . Então

$$\frac{v^* J B^{\Gamma/2} v}{v^* J v} = \frac{|x_1 + x_n|^2 + \mu_2(|x_2|^2 + |x_{n-1}|^2) + \dots + \mu_{\frac{n}{2}}(|x_{\frac{n}{2}}|^2 + |x_{\frac{n}{2}+1}|^2)}{|x_1|^2 - |x_n|^2 + |x_2|^2 - |x_{n-1}|^2 + \dots + |x_{\frac{n}{2}}|^2 - |x_{\frac{n}{2}+1}|^2}.$$

Como  $v$  é  $J$ -anisotrópico, o denominador é diferente de zero e o numerador anula-se se e só se  $x_2 = x_{n-1} = \dots = x_{n/2} = x_{n/2+1} = 0$  e  $x_1 + x_n = 0$ , o que é impossível.

Se  $n$  for ímpar, usa-se um argumento análogo.

(iii) Se  $|\gamma| < \lambda_1^2(1+|k|^2)/2 - |d|^2$ , então  $\alpha < 0$ . Logo  $\mu_1^2(\theta) < 0$  e, portanto,  $\mu_1(\theta)$  é um número imaginário puro. Então, a projecção ortogonal da rotação de  $W_J(A)$  em cada direcção é toda a recta real, ou seja,  $W_J(A) = \mathbb{C}$ . ■

**Exemplo 3.2.3.** Sejam  $J = \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1)$  e  $A \in M_6$  uma matriz tridiagonal com entradas

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -2, \quad b_j = i \quad \text{e} \quad c_j = -2i, \quad j = 1, \dots, 5.$$

A matriz  $A$  satisfaz as condições (3.6) e (3.7), para  $k = 2$ . Além disso, de acordo com o teorema 3.2.2, a matriz  $C$  é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix},$$

e  $\lambda_1 = \|C\|_2 = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ é valor próprio de } C\} \approx 1.80194$  (cfr. (2.30)). Portanto,

$$|\gamma| = \left| \left( \frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 + k\lambda_1^2 \right| \approx 10.49397553$$

e

$$\lambda_1^2 \left( \frac{1 + |k|^2}{2} \right) - \left| \frac{a_1 - a_2}{2} \right|^2 \approx 4.117469409,$$

logo verifica-se a condição (i) do teorema 3.2.2 segundo o qual  $W_J(A)$  é limitado pela hipérbole de centro em  $(0, 0)$  e semi-eixo transverso de comprimento

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left| \frac{a_1 - a_2}{2} \right|^2 - \frac{1}{4} \lambda_1^2 (1 + |k|^2) + \frac{1}{2} |\gamma|} \approx 1.785567994.$$

Sejam  $\sigma_J^+(\operatorname{Re}^J(A)) = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3\}$  e

$$\beta_j = \sqrt{\gamma_j^2 - \alpha_j^2}, \quad j = 1, \dots, 6,$$

onde  $\sigma_J^+(A) = \{\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3\}$ . Então, a equação de linhas da curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$  (cfr. (1.56)) é factorizada por

$$(w^2 - \alpha_1^2 u^2 + \beta_1^2 v^2)(w^2 - \alpha_2^2 u^2 + \beta_2^2 v^2)(w^2 - \alpha_3^2 u^2 + \beta_3^2 v^2) = 0. \quad (3.18)$$

Seguindo o processo habitual de dualização descrito em (1.29), (1.30) e (1.31), conclui-se que cada um dos factores da equação (3.18) representa uma hipérbole de centro em  $(0,0)$  e semi-eixos transverso e não-transverso de comprimentos  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , respectivamente, representadas na figura 3.1. Os focos das hipérboles são os valores próprios da matriz  $A$ .

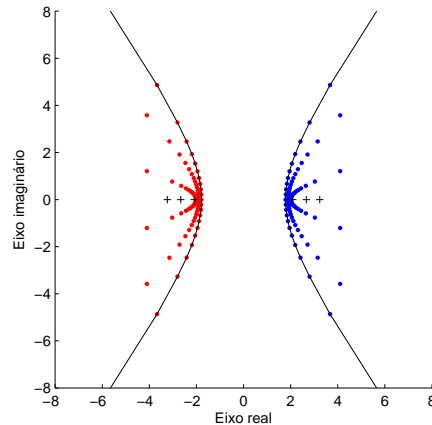


Figura 3.1:  $\partial W_J(A)$ , pontos que pertencem à curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$  e valores próprios, assinalados com o símbolo “+”, da matriz  $A$  definida no exemplo 3.2.3.

Observe-se que a fronteira do  $J$ -contradomínio numérico de uma matriz tridiagonal com a diagonal principal biperiódica pode não ser uma hipérbole se não forem satisfeitas as condições do teorema 3.2.2, conforme se pode constatar através do seguinte exemplo.



**Exemplo 3.2.4.** Seja  $J = \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1)$  e  $A \in M_6$  a matriz tridional definida por

$$a_1 = 2, a_2 = -2, b_j = 1 \text{ e } c_j = (-1)^j, \text{ para } j = 1, \dots, 6.$$

Os valores próprios de  $\text{Re}^J(A)$  são  $\lambda_1 = \sqrt{3}$  e  $\lambda_2 = -\sqrt{3}$ , ambos de multiplicidade 3. Logo, vão existir dois achatamentos na fronteira de  $W_J(A)$ . Sejam  $\{v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, v_3^{(j)}\}$ ,  $j = 1, 2$ , os vectores próprios associados a  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2$ , respectivamente. Considere-se um vector  $v^{(j)}$  pertencente ao subespaço próprio de  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2$ . Tem-se que,

$$-\frac{\sqrt{6}}{6} \leq \frac{v^{(j)*} J \text{Im}^J(A) v^{(j)}}{v^{(j)*} J v^{(j)}} \leq \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Logo os dois achatamentos na fronteira de  $W_J(A)$  são definidos pelos segmentos de recta

$$\left[ \sqrt{3} - i\frac{\sqrt{6}}{6}, \sqrt{3} + i\frac{\sqrt{6}}{6} \right] \text{ e } \left[ -\sqrt{3} - i\frac{\sqrt{6}}{6}, -\sqrt{3} + i\frac{\sqrt{6}}{6} \right], \quad j = 1, 2.$$

A equação de linhas da curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$  (cfr. (1.56)) é dada por

$$-27u^6 + w^2(v^2 + w^2)^2 + 3u^4(8v^2 + 9w^2) - u^2(4v^4 + 14v^2w^2 + 9w^4) = 0$$

e está representada na figura 3.2. Neste caso, o polinómio (1.57) não é factorizável.

**Observação 3.2.5.** Seja  $A = \text{Re}^J(A) + i \text{Im}^J(A) \in M_n$ , a decomposição (1.47) de  $A$ . A transformada de Levinger  $J$ -generalizada de  $A$  (ver, [1]) é definida por

$$\mathcal{L}_J(A, \alpha, \beta) = \alpha \text{Re}^J(A) + \beta \text{Im}^J(A), \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , verifica-se facilmente que

$$\text{Re}^J W(\mathcal{L}(A, \alpha, \beta)) = \alpha \text{Re}^J(W(A)) \quad \text{e} \quad \text{Im}^J W(\mathcal{L}(A, \alpha, \beta)) = \beta \text{Im}^J(W(A)).$$

Sendo assim, podemos escrever

$$W_J(\mathcal{L}_J(A, \alpha, \beta)) = \{\alpha x + i\beta y : x, y \in \mathbb{R}, x + iy \in W_J(A)\}.$$

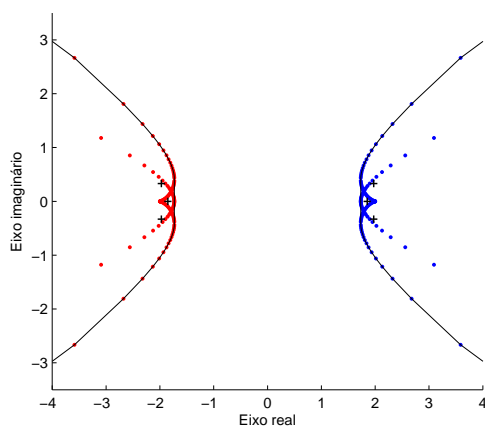


Figura 3.2:  $\partial W_J(A)$ , pontos que pertencem à curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$  e valores próprios, assinalados com o símbolo “+”, sendo  $A$  a matriz definida no exemplo 3.2.4.

Existe uma relação entre  $W_J(A)$  e  $W_J(\mathcal{L}_J(A, \alpha, \beta))$ , no caso de os conjuntos serem hiperbólicos. De facto, supondo que a fronteira de  $W_J(A)$ , no plano  $(x, y)$ , tem equação

$$\frac{x^2}{M^2} - \frac{y^2}{N^2} = 1, \quad \text{com } M, N > 0,$$

para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha \neq 0$  e  $\beta > 0$ , efectuando a mudança de variáveis  $x = \alpha^{-1}u$  e  $y = \beta^{-1}v$ , conclui-se que a fronteira de  $W_J(\mathcal{L}_J(A, \alpha, \beta))$  é a hipérbole

$$\frac{u^2}{\alpha^2 M^2} - \frac{v^2}{\beta^2 N^2} = 1.$$

# Capítulo 4

## Caracterização algébrica do $J$ -contradomínio numérico tracial

### 4.1 Introdução

Ao longo deste capítulo, restringir-nos-emos ao caso de  $C$  ser uma matriz  $J$ -hermítica com espectro real e cujos valores próprios não se entrelaçam, ou seja,

$$\sigma_J^+(C) = \{c_1 \geq \cdots \geq c_r\}, \quad \sigma_J^-(C) = \{c_{r+1} \geq \cdots \geq c_n\} \quad (4.1)$$

$$c_n > c_1 \quad \text{ou} \quad c_r > c_{r+1}. \quad (4.2)$$

Mediante estas condições,  $C$  é uma matriz  $J$ -unitariamente diagonalizável, i.e., diagonalizável por semelhança  $J$ -unitária. Por razões de simplicidade, regra geral iremos considerar  $C = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M_n(\mathbb{R})$  satisfazendo (4.1) e (4.2). Refira-se que conforme referimos em (1.65),  $W_C^J(A)$  não depende da ordenação dos primeiros  $r$  e dos últimos  $n - r$  elementos principais de  $C$ , pelo que não há perda de generalidade em considerar que as entradas principais de  $C$  estão ordenadas por ordem decrescente.

Usaremos  $A[kl]$  para denotar a matriz  $2 \times 2$  constituída pelas entradas

situadas ao longo das linhas e das colunas  $k$  e  $l$  da matriz  $A$ , ou seja,

$$A[kl] = \begin{bmatrix} a_{kk} & a_{kl} \\ a_{lk} & a_{ll} \end{bmatrix}.$$

## 4.2 Sobre a convexidade de $W_C^J(A)$

Nesta secção enunciamos um teorema relativo à convexidade do  $J$ -contra-domínio numérico tracial de uma matriz. Este teorema deve-se a Bebiano, Nakazato e Providência [93] e é análogo ao teorema de Westwick para espaços de Hilbert [107]. A sua demonstração é uma aplicação da teoria de Morse [86, 87]. A teoria de Morse foi introduzida em 1920 pelo matemático Marston Morse e é uma ferramenta fundamental para investigar a topologia de variedades diferenciáveis. Além disso, a teoria de Morse relaciona a análise com a topologia e, mais recentemente, com a física, razão pela qual, ao longo de décadas, tem desempenhado um papel crucial em novos e importantes desenvolvimentos matemáticos. A convexidade de  $W_C^J(A)$  é estabelecida no teorema que se segue (cfr. [93, teorema 1.1]).

**Teorema 4.2.1.** *Sejam  $A \in M_n$  e  $C$  uma matriz  $J$ -unitariamente diagonalizável e  $J$ -hermítica cujos valores próprios não se entrelaçam (cfr. (4.1) e (4.2)). Suponha-se que existe  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , com  $|\theta_1 - \theta_2| \leq \pi$ , tal que a matriz  $J$ -hermítica*

$$H_\theta := \operatorname{Re}^J(e^{-i\theta} A)$$

*é  $J$ -unitariamente diagonalizável e os seus valores próprios não se entrelaçam, i.e.,*

$$\sigma_J^+(H_\theta) = \{\lambda_1(\theta) \geq \dots \geq \lambda_r(\theta)\}, \quad \sigma_J^-(H_\theta) = \{\lambda_{r+1}(\theta) \geq \dots \geq \lambda_n(\theta)\},$$

$$\lambda_n(\theta) > \lambda_1(\theta) \quad \text{ou} \quad \lambda_r(\theta) > \lambda_{r+1}(\theta).$$

*Então  $W_C^J(A)$  é um conjunto convexo fechado em  $\mathbb{C}$  contido num cone fechado*

$$\{z_0 + re^{i\theta} : r \geq 0, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

*para algum  $z_0 \in \mathbb{C}$ .*

Não incluiremos a demonstração deste resultado devido à complexidade e extensão da mesma. No entanto, cumpre referir que a demonstração é feita por recurso à função de Morse

$$f_0(g) = \sum_{h,j=1}^n c_h \lambda_j |u_{hj}|^2 \epsilon_h \epsilon_j = \text{tr} (CgH_\theta g^{-1}),$$

onde  $\epsilon_h = 1$ , para  $1 \leq h \leq r$ ,  $\epsilon_h = -1$ , para  $r+1 \leq h \leq n$ . Além disso, supondo que  $c_n > c_1$  e  $\lambda_r > \lambda_{r+1}$ , o número complexo  $z_0$  é tal que  $\text{Re}(z_0) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j(0)$ . Os restantes casos reduzem-se a este substituindo  $C$  por  $-C$  e/ou  $H_\theta$  por  $H_{\theta+\pi}$ .

### 4.3 Formas especiais de $W_C^J(A)$

Um dos aspectos mais importantes no estudo de  $W_C^J(A)$  consiste na análise da relação existente entre as suas propriedades geométricas e as propriedades algébricas de  $A$ . Claro que sendo  $W_C^J(A)$  convexo, para caracterizar  $\partial W_C^J(A)$  basta determinar as suas rectas de suporte. Dado  $\theta \in [0, \pi[$ , como  $e^{i\theta} W_C^J(e^{-i\theta} A) = W_C^J(A)$ , podemos obter, por rotação de  $W_C^J(A)$ , tantos pontos na fronteira de  $W_C^J(A)$  quantos queiramos. Mais precisamente, se os valores próprios das matrizes  $\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)$  e  $C$  não se entrelaçarem, suponha-se que

$$\sigma_J^+(\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)) = \{\lambda_1(\theta) \geq \dots \geq \lambda_r(\theta)\};$$

$$\sigma_J^-(\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)) = \{\lambda_{r+1}(\theta) \geq \dots \geq \lambda_n(\theta)\};$$

$$\sigma_J^+(C) = \{c_1 \geq \dots \geq c_r\} \quad \text{e} \quad \sigma_J^-(C) = \{c_{r+1} \geq \dots \geq c_n\}.$$

Então a recta

$$\mathcal{L}_\theta := \left\{ e^{i\theta} (\lambda_\theta + iy) : y \in \mathbb{R} \right\},$$

é uma recta de suporte de  $W_C^J(A)$ , em que (cfr. [14, teorema 1.1])

- $\lambda_\theta = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j(\theta)$  se e só se  $(\lambda_k(\theta) - \lambda_l(\theta))(c_{k'} - c_{l'}) < 0$ , para todo  $1 \leq k, k', \leq r$  e  $r+1 \leq l, l' \leq n$ ;

$$\bullet \lambda_\theta = \sum_{j=1}^r c_j \lambda_{r-j+1}(\theta) + \sum_{j=r+1}^n c_j \lambda_{n+r-j+1}(\theta) \text{ se e só se}$$

$$(\lambda_k(\theta) - \lambda_l(\theta))(c_{k'} - c_{l'}) > 0,$$

para todo  $1 \leq k, k' \leq r$  e  $r+1 \leq l, l' \leq n$ .

Se denotarmos o semi-plano determinado pela recta  $\mathcal{L}_\theta$  por

$$\mathcal{H}_\theta := \left\{ e^{i\theta} z : \operatorname{Re} z \leq \lambda_\theta \right\},$$

então  $W_C^J(A) = \bigcap_{0 \leq \theta < 2\pi} \mathcal{H}_\theta$ .

Abordamos, de seguida, algumas condições que originam casos degenerados na representação geométrica de  $W_C^J(A)$  tais como: um conjunto singular, um subconjunto conexo de uma recta, um semiplano em  $\mathbb{C}$  ou todo o plano complexo  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 4.3.1.** [9, p.223] *Seja  $C \in M_n$  uma matriz diagonal não-escalar. Para  $A \in M_n$ ,  $W_C^J(A)$  é um conjunto singular se e só se  $A$  é uma matriz escalar.*

**Teorema 4.3.2.** [9, p.223] *Seja  $C \in M_n$  uma matriz diagonal não-escalar. Para  $A \in M_n$ ,  $W_C^J(A) \subseteq \mathbb{R}$  se e só se  $A$  é uma matriz  $J$ -hermítica.*

**Corolário 4.3.3.** [9, p.223] *Seja  $C \in M_n$  uma matriz diagonal não-escalar. Para  $A \in M_n$ ,  $W_C^J(A)$  é um subconjunto conexo de uma recta se e só se  $A$  é uma matriz essencialmente  $J$ -hermítica.*

De acordo com o teorema 4.3.2, se  $A$  é uma matriz  $J$ -hermítica, então  $W_C^J(A)$  é um subconjunto do eixo real. Apresenta-se de seguida uma condição suficiente para a ocorrência da igualdade  $W_C^J(A) = \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.3.4.** [14, p.135] *Sejam  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ , com  $0 < r < n$ , e  $C \in M_n$  uma matriz diagonal não-escalar. Se  $A \in M_n$  é uma matriz  $J$ -hermítica cujos valores próprios não são todos reais, então  $W_C^J(A)$  é toda a recta real.*

O recíproco de teorema 4.3.4 não é verdadeiro, pois  $W_C^J(A)$  pode ser toda a recta real, mesmo com os valores próprios da matriz  $J$ -hermítica  $A$  todos reais. Tal acontece, por exemplo, para  $A = \text{diag}(3, 1, 2)$ ,  $C = \text{diag}(1, 1, 0)$  e  $J = \text{diag}(1, 1, -1)$ , pois  $\sigma_J^+(A) = \{1, 3\}$ ,  $\sigma_J^-(A) = \{2\}$  e, portanto, existe entrelaçamento dos valores próprios de  $A$ .

Os dois resultados que se seguem são consequência do teorema 4.3.4 e generalizam os resultados apresentados em [73, corolários 1.2.1, 1.2.2].

**Corolário 4.3.5.** *Sejam  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ ,  $0 < r < n$ , e  $C \in M_n$  uma matriz diagonal não-escalar. Se  $A \in M_n$  é essencialmente  $J$ -hermítica e os valores próprios da matriz  $J$ -hermítica  $\alpha I_n + \beta A$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\beta \neq 0$ , não são todos reais, então  $W_C^J(A)$  é a recta que passa por  $-\alpha \text{tr}(C)/\beta$  e que tem a direcção de  $-\arg(\beta)$ .*

**Demonstração:** De acordo com o teorema 4.3.4,  $W_C^J(\alpha I_n + \beta A) = \mathbb{R}$ , e segundo a propriedade WCJ1,  $W_C^J(\alpha I_n + \beta A) = \alpha \text{tr}(C) + \beta W_C^J(A)$ , logo o resultado segue. ■

**Corolário 4.3.6.** *Sejam  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ ,  $0 < r < n$ ,  $C \in M_n$  uma matriz diagonal não-escalar,  $A \in M_n$  e  $\theta \in [0, \pi[$ . Se  $W_C^J(A)$  tem uma recta de suporte na direcção do ângulo  $\theta$ , então os valores próprios de  $\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)$  são todos reais.*

**Demonstração:** (Por redução ao absurdo) Se a matriz  $\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)$  admitisse pelo menos um valor próprio não real, segundo o teorema 4.3.4 ter-se-ia  $W_C^J(\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)) = \mathbb{R}$ . Como, além disso,

$$\text{Re} \left( e^{-i\theta} W_C^J(A) \right) = W_C^J \left( \text{Re}^J(e^{-i\theta} A) \right),$$

concluir-se-ia que a projecção ortogonal da rotação de  $W_C^J(A)$  segundo o ângulo  $\theta$  seria todo o eixo real. Portanto,  $W_C^J(A)$  não teria nenhuma recta de suporte na direcção do ângulo  $\theta$ , o que contradiz as hipóteses do corolário. ■

Como  $\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)$  é uma matriz  $J$ -hermítica, o teorema 4.3.4 permite deduzir uma condição suficiente à ocorrência da igualdade  $W_C^J(A) = \mathbb{C}$ .

**Teorema 4.3.7.** *Sejam  $A \in M_n$ ,  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ , com  $0 < r < n$ , e  $C \in M_n$  uma matriz diagonal.*

- (i) *Se para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , a matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  tiver valores próprios em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , então  $W_C^J(A)$  é todo o plano complexo;*
- (ii) *Se o espectro de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_0}A)$  for real, para algum  $\theta = \theta_0$ , e  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  tiver valores próprios em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , para  $\theta \neq \theta_0$ , então  $W_C^J(A)$  ou é um semi-plano ou é todo o plano complexo.*

**Demonstração:** Se para todo o  $\theta \in \mathbb{R}$ , a matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  tiver valores próprios em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , então de acordo com o teorema 4.3.4,  $W_C^J(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)) = \mathbb{R}$  e, portanto, a projecção de  $W_C^J(A)$  sobre a recta de inclinação  $\pi/2 + \theta$  é toda recta, o que equivale a dizer que  $W_C^J(A) = \mathbb{C}$ . Se existir um único  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  em relação ao qual o espectro de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_0}A)$  é real, então a projecção de  $W_C^J(A)$  sobre a recta de inclinação  $\pi/2 + \theta_0$  ou é uma semi-recta dessa recta ou é a própria recta, vindo o pretendido. ■

Os dois resultados que se seguem relacionam a  $J$ -normalidade de  $A$  com a forma geométrica de  $\partial W_C^J(A)$ .

**Teorema 4.3.8.** *Sejam  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ , com  $0 < r < n$ ,  $C \in M_n$  uma matriz diagonal e  $A \in M_n$ . Se os elementos de  $C$  forem todos distintos e existir, pelo menos, um ponto anguloso em  $W_C^J(A)$ , então  $A$  é  $J$ -normal.*

**Demonstração:** Para simplificar, escreva-se  $A_U = UAU^{[*]}$ . Dada uma matriz  $J$ -hermítica arbitrária  $S \in M_n$  e  $t \in \mathbb{R}$  numa vizinhança de zero, a matriz

$$e^{itS} = I + itS + \mathcal{O}(t^2)$$

é  $J$ -unitária em  $\mathcal{U}_{r,n-r}$ . Seja  $z_0 = \operatorname{tr}(CA_U)$  um ponto anguloso. Considere-se a função diferenciável

$$z(t) = \operatorname{tr}(Ce^{-itS}A_Ue^{itS}).$$



Como  $z_0$  é um ponto anguloso de  $W_C^J(A)$ , a derivada de  $z$  em relação a  $t$  no ponto  $t = 0$  é nula. Além disso, devido à propriedade cíclica do traço<sup>1</sup> conclui-se que

$$z'(0) = \text{itr}(CA_U S - CSA_U) = \text{itr}(S[C, A_U]),$$

onde  $[C, A_U]$  denota o comutador de  $C$  com  $A_U$ . Sendo  $S$  arbitrária, de  $z'(0) = 0$ , conclui-se que  $[C, A_U] = 0$  e sendo  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ , com  $c_1, \dots, c_n$  todos distintos, de  $[C, A_U] = 0$  conclui-se que  $A_U$  é uma matriz diagonal e, portanto, uma matriz  $J$ -normal. Consequentemente,  $A$  também é uma matriz  $J$ -normal. ■

**Corolário 4.3.9.** *Sejam  $J$  e  $C$  tais como no teorema 4.3.8 e seja  $A \in M_n$  uma matriz que não é  $J$ -normal. Então,  $\partial W_C^J(A)$  é uma curva  $C^{(1)}$ -regular.*

**Demonstração:** (Por redução ao absurdo) Como  $W_C^J(A)$  é um conjunto convexo, os únicos possíveis pontos não diferenciáveis são pontos angulosos. Deste modo, se existisse pelo menos um destes pontos em  $\partial W_C^J(A)$ , então segundo o teorema 4.3.8, a matriz  $A$  seria  $J$ -normal, o que é uma contradição. ■

## 4.4 Curva geradora de fronteira de $W_C^J(A)$

Utilizando o teorema de Tarski-Seidenberg [65] é possível provar que a fronteira de  $W_C^J(A)$  é uma união finita de arcos algébricos e, portanto, uma curva de classe  $C^\infty$ , excepto possivelmente num número finito de pontos [9, teorema 2.4]. No entanto, a dedução das equações desses arcos algébricos não é, de forma alguma, uma tarefa fácil, conforme se pode constatar através do seguinte exemplo.

---

<sup>1</sup>**Propriedade cíclica do traço:** o traço do produto de um número finito de matrizes quadradas não se altera por permutação circular das matrizes

$$\text{tr}(A_1 A_2 A_3 \dots A_k) = \text{tr}(A_2 A_3 \dots A_k A_1) = \text{tr}(A_3 \dots A_k A_1 A_2) = \dots$$

**Exemplo 4.4.1.** Sejam  $J = I_2 \oplus -I_1$ ,  $C = \text{diag}(1, 0, -1)$  e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & -2 \end{bmatrix}.$$

A fronteira de  $W_C^J(A)$  pertence à curva algébrica  $L(X, Y) = 0$ , de ordem 16, onde

$$\begin{aligned} L(X, Y) = & -19683X^{12}Y^4 + 76545X^{10}Y^6 - 79542X^8Y^8 - 8155X^6Y^{10} \\ & + 26514X^4Y^{12} + 8505X^2Y^{14} + 729Y^{16} + 1250964X^{10}Y^4 - 2579850X^8Y^6 \\ & + 2632812X^6Y^8 - 2244970X^4Y^{10} - 315900X^2Y^{12} + 73710Y^{14} \\ & - 30362202X^8Y^4 + 28179060X^6Y^6 - 2850861X^4Y^8 + 8523515X^2Y^{10} \\ & + 1233531Y^{12} - 186624X^{10} + 786240X^8Y^2 + 344964500X^6Y^4 \\ & - 101340750X^4Y^6 - 138483138X^2Y^8 - 32015970Y^{10} + 11321856X^8 \\ & - 25683840X^6Y^2 - 1775064187X^4Y^4 - 98335965X^2Y^6 + 131658345Y^8 \\ & - 255820032X^6 + 269156160X^4Y^2 + 3366850448X^2Y^4 + 323668800Y^6 \\ & + 2578065408X^4 - 920666880X^2Y^2 - 2084332032Y^4 - 10407481344X^2 \\ & - 603832320Y^2 + 8074100736. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Vamos descrever como deduzimos a expressão do polinómio  $L(X, Y)$  cuja representação gráfica se encontra na figura 4.1. A curva  $L(X, Y) = 0$  é definida como a curva dual de uma curva algébrica  $M(x, y, 1) = 0$  de ordem 6. Portanto, um ponto genérico  $(X_0, Y_0)$  da curva  $L(X, Y) = 0$  corresponde à recta tangente  $X_0x + Y_0y + 1 = 0$  da curva  $M(x, y, 1) = 0$  num ponto não-singular  $(x_0, y_0)$  da curva  $M(x, y, 1) = 0$ . Através desta relação, podemos obter o polinómio  $L(X, Y)$  a partir do polinómio homogéneo  $M(x, y, z)$  definido por

$$\begin{aligned} M(x, y, z) = & [z - (\phi_1(x, y) - \phi_2(x, y))][z - (\phi_1(x, y) - \phi_3(x, y))] \times \\ & \times [z - (\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y))][z - (\phi_2(x, y) - \phi_3(x, y))] \times \\ & \times [z - (\phi_3(x, y) - \phi_1(x, y))][z - (\phi_3(x, y) - \phi_2(x, y))] \end{aligned}$$

onde  $\phi_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , satisfazem, para todo o  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ , a equação

$$\begin{aligned} \det(x\operatorname{Re}^J(A) + y\operatorname{Im}^J(A) + zI_3) &= (z - \phi_1(x, y))(z - \phi_2(x, y))(z - \phi_3(x, y)) \\ &= z^3 + z^2x - 4zx^2 - 4x^3 + 4xy^2, \end{aligned}$$

onde  $\operatorname{Re}^J(A)$  e  $\operatorname{Im}^J(A)$  são as matrizes  $J$ -hermíticas definidas em (1.48). O polinómio  $M(x, y, z)$  tem coeficientes inteiros e  $L(X, Y)$  é obtido como um factor do resultado  $L_0(X, Y)$  do polinómio  $Y^6M(x, -1/Y - xX/Y, 1) = M(xY, -1 - xX, Y)$  e a sua derivada em relação a  $x$ . Factorizando  $L_0$  em  $\mathbb{Z}[x, y, z]$ , podemos obter o polinómio  $L(x, y, z)$ . Recorrendo ao Mathematica para efectuar essa factorização, obtém-se que

$$M(x, y, z) = z^6 - 26z^4x^2 + 169z^2x^4 - 144x^6 - 560x^4y^2 + 432x^2y^4.$$

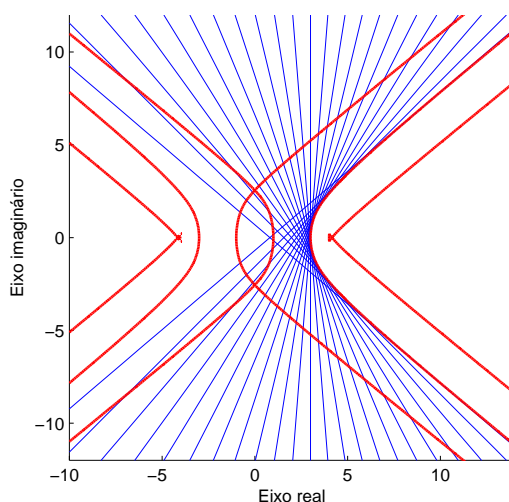


Figura 4.1: Curva algébrica  $L(X, Y) = 0$  e rectas de suporte de  $W_C^J(A)$ , para  $A, C$  e  $J$  como no exemplo 4.4.1.

Dada a complexidade que envolve a caracterização da fronteira de  $W_C^J(A)$ , o conhecimento da sua curva geradora de fronteira constitui por si só um grande progresso. No teorema que se segue deduzimos as equações paramétricas da curva geradora de fronteira de  $W_C^J(A)$ , resultado que estabelece um paralelismo com [33, teorema 2.3].

**Teorema 4.4.2.** *Sejam  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ , com  $0 < r < n$ ,  $A \in M_n$  uma matriz que não é  $J$ -normal e  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{R})$  com  $\sigma_J^+(C) = \{c_1 > \dots > c_r\}$ ,  $\sigma_J^-(C) = \{c_{r+1} > \dots > c_n\}$  e  $c_n > c_1$ . Suponha-se que existe  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ , com  $|\theta_1 - \theta_2| \leq \pi$ , tal que a matriz  $J$ -hermítica  $\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)$ , tem valores próprios reais, simples e que não se entrelaçam. Suponha-se que*

$$\lambda_1(\theta) > \dots > \lambda_r(\theta) > \lambda_{r+1}(\theta) > \dots > \lambda_n(\theta).$$

Então, a função

$$\Lambda(\theta) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j(\theta) \quad (4.4)$$

é convexa no domínio

$$\{re^{i\theta} : r > 0, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}, \quad (4.5)$$

e a curva  $\{X(\theta) + iY(\theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$  parametrizada por

$$\begin{cases} X(\theta) = \cos \theta \Lambda(\theta) - \sin \theta \Lambda'(\theta) \\ Y(\theta) = \sin \theta \Lambda(\theta) + \cos \theta \Lambda'(\theta) \end{cases}, \quad (4.6)$$

está contida em  $\partial W_C^J(A)$ .

**Demonstração:** Seja  $A = H + iK$ , onde  $H = \text{Re}^J(A)$  e  $K = \text{Im}^J(A)$  são as matrizes  $J$ -hermíticas definidas em (1.48). Mediante as hipóteses, a matriz  $J$ -hermítica  $\text{Re}^J(e^{-i\theta} A) = \cos \theta H + \sin \theta K$  tem valores próprios reais e simples, para  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ . Então, existe uma base  $J$ -ortogonal em  $\mathbb{C}^n$ ,  $\{\xi_1(\theta), \dots, \xi_n(\theta)\}$ , tal que  $\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)\xi_j(\theta) = \lambda_j(\theta)\xi_j(\theta)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . De acordo com as hipóteses e segundo [14, teorema 1.1], tem-se que

$$W_C^J\left(\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)\right) = ]-\infty, \Lambda(\theta)],$$

em que  $\Lambda(\theta)$  é a função definida em (4.4). Ora, cada valor próprio  $\lambda_j(\theta)$  pode ser visto como uma função analítica em  $\theta$ . Como, além disso, os valores próprios  $\lambda_j(\theta)$  são simples, podemos supor que cada  $\xi_j(\theta)$  é igualmente uma função analítica de  $\theta$ . A imagem da aplicação  $F : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\begin{aligned} F(\theta) &= X(\theta) + iY(\theta) = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j e^{i\theta} \left[ \frac{[\text{Re}^J(e^{-i\theta} A)\xi_j(\theta), \xi_j(\theta)]}{[\xi_j(\theta), \xi_j(\theta)]} + i \frac{[\text{Im}^J(e^{-i\theta} A)\xi_j(\theta), \xi_j(\theta)]}{[\xi_j(\theta), \xi_j(\theta)]} \right], \end{aligned}$$

descreve uma curva  $\Gamma$  contida na fronteira de  $W_C^J(A)$ .

Como é usual, identifica-se cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  com  $(x : y : 1) \in P\mathbb{C}^2$ , e cada ponto  $(x : y : z) \in P\mathbb{C}^2$  tal que  $z \neq 0$ , com  $(x/z, y/z) \in \mathbb{C}^2$ . É óbvio que  $\mathcal{L}_\theta = \{e^{i\theta}(\Lambda(\theta) + iy) : y \in \mathbb{R}\}$  é uma recta de suporte de  $e^{i\theta}W_C^J(e^{-i\theta}A) = W_C^J(A)$ , na direcção do ângulo  $\theta$ , de equação

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \Lambda(\theta). \quad (4.7)$$

À medida que  $\theta$  percorre o intervalo  $[\theta_1, \theta_2]$ , descrevem-se todas as rectas de suporte de  $W_C^J(A)$ . Assim, dada uma recta de suporte de  $W_C^J(A)$  de equação  $ux + vy + w = 0$ , existe um ângulo  $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$  e um escalar real não-nulo  $r$  tais que

$$u = r \cos \theta_0, \quad v = r \sin \theta_0 \quad \text{e} \quad w = -r\Lambda(\theta_0). \quad (4.8)$$

Tomando  $\theta = \theta_0$  em (4.7), conclui-se que a curva dual da curva  $\Gamma$  é dada no plano projectivo complexo por

$$\Gamma^* = \{(\cos \theta : \sin \theta : -\Lambda(\theta)) \in P\mathbb{C}^2 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

ou equivalentemente, para todo o intervalo  $[\theta_1, \theta_2]$  tal que  $\Lambda(\theta) \neq 0$ , por

$$\Gamma^* = \left\{ \left( -\frac{\cos \theta}{\Lambda(\theta)} : -\frac{\sin \theta}{\Lambda(\theta)} : 1 \right) \in P\mathbb{C}^2 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \right\}.$$

Logo a curva  $\Gamma^*$  é parametrizada por

$$x = x(\theta) = -\frac{\cos \theta}{\Lambda(\theta)} \quad \text{e} \quad y = y(\theta) = -\frac{\sin \theta}{\Lambda(\theta)},$$

e a curva  $\Gamma$  é dada por

$$\begin{cases} X(\theta) = \frac{-y'(\theta)}{x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta)} = \cos(\theta)\Lambda(\theta) - \sin(\theta)\Lambda'(\theta) \\ Y(\theta) = \frac{x'(\theta)}{x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta)} = \sin(\theta)\Lambda(\theta) + \cos(\theta)\Lambda'(\theta) \end{cases}.$$

Resta demonstrar que a função

$$f(x, y) = xf\left(1, \frac{y}{x}\right) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j (xH + yK) \quad (4.9)$$

é convexa no domínio (4.5). Para simplificar a notação, usaremos apenas  $f(y/x)$  para denotar  $f(1, y/x)$ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $f(x, y)$  é positiva. A demonstração da convexidade da função positiva e homogênea  $f(x, y)$  reduz-se à demonstração da convexidade de  $f(y/x)$ . Considerem-se dois pontos em (4.5) da forma

$$(x_0, y_0) + t_1(x_1, y_1), \quad (x_0, y_0) + t_2(x_1, y_1),$$

com  $x_0x_1 + y_0y_1 = 0$ . Substituindo  $H$  por  $x_0H + y_0K$  e  $K$  por  $x_1H + y_1K$ , podemos supor que  $y_0 = 0$  e  $x_1 = 0$ . Pela positividade e homogeneidade de  $f(x, y)$ , podemos supor que  $x_0 = 1$ . Então, a relação

$$f(1, ty_1 + (1-t)y_2) \leq tf(1, y_1) + (1-t)f(1, y_2), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

é reescrita como

$$f(ty_1 + (1-t)y_2) \leq tf(y_1) + (1-t)f(y_2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Vamos demonstrar a convexidade da função  $f(y)$ . Seja

$$H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n),$$

com  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r > \lambda_{r+1} > \dots > \lambda_n$  e seja  $K = (\mu_{tj})$ . Para simplificar a notação, considere-se  $\mu_{tt} = \mu_t$ . Por uma perturbação [68], tomando  $y$  uma quantidade pequena que tende para zero, os valores próprios de  $\text{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  podem ser escritos na forma

$$\lambda_t(H + yK) = \lambda_t + y\mu_t + y^2 \sum_{1 \leq j \leq r, j \neq t} \frac{-|\mu_{tj}|^2}{\lambda_j - \lambda_t} + y^2 \sum_{r+1 \leq j \leq n} \frac{|\mu_{tj}|^2}{\lambda_j - \lambda_t} + \mathcal{O}(y^3),$$

para  $t = 1, 2, \dots, r$  e

$$\lambda_t(H + yK) = \lambda_t + y\mu_t + y^2 \sum_{1 \leq j \leq r} \frac{|\mu_{tj}|^2}{\lambda_j - \lambda_t} + y^2 \sum_{r+1 \leq j \leq n, j \neq t} \frac{-|\mu_{tj}|^2}{\lambda_j - \lambda_t} + \mathcal{O}(y^3),$$

para  $t = r+1, r+2, \dots, n$ . Logo,

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{t=1}^n c_t \lambda_t(H + yK) = \sum_{t=1}^n c_t \lambda_t + y \sum_{t=1}^n c_t \mu_t + y^2 \sum_{1 \leq t < j \leq r} \frac{c_t - c_j}{\lambda_t - \lambda_j} |\mu_{tj}|^2 \\ &+ y^2 \sum_{r+1 \leq t < j \leq n} \frac{c_t - c_j}{\lambda_t - \lambda_j} |\mu_{tj}|^2 + y^2 \sum_{r+1 \leq t \leq n, 1 \leq j \leq r} \frac{c_j - c_t}{\lambda_t - \lambda_j} |\mu_{tj}|^2 + \mathcal{O}(y^3) \end{aligned}$$

e, portanto, a função  $f(y)$  satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f''(0) &= \sum_{1 \leq t < j \leq r} \frac{c_t - c_j}{\lambda_t - \lambda_j} |\mu_{tj}|^2 + \sum_{r+1 \leq t < j \leq n} \frac{c_t - c_j}{\lambda_t - \lambda_j} |\mu_{tj}|^2 + \\ &+ \sum_{r+1 \leq t \leq n, 1 \leq j \leq r} \frac{c_j - c_t}{\lambda_t - \lambda_j} |\mu_{tj}|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, a função  $f(y)$  é localmente convexa na origem. Como todo o ponto  $(x, y) \neq (0, 0)$  pode ser transformado, por rotação, num ponto  $(x_0, 0)$ , podemos concluir que a função  $\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j(xH + yK)$  é convexa no domínio (4.5) e a curva (4.6) não tem inflexões. ■

**Definição 4.4.3.** A curva  $\{X(\theta) + iY(\theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$  definida parametricamente em (4.6) é denominada a *curva geradora de fronteira* de  $W_C^J(A)$ .

**Observação 4.4.4.** A suposição de que os valores próprios de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  não se entrelaçam implica que  $\lambda_r(\theta) > \lambda_{r+1}(\theta)$  ou  $\lambda_n(\theta) > \lambda_1(\theta)$  (cfr. (1.46)). No entanto, como é possível reduzir a segunda alternativa à primeira mediante uma escolha apropriada de  $\theta$  (i.e., substituindo  $\theta$  por  $\theta + \pi$ ), podemos tratar apenas um dos casos anteriores, sem perda de generalidade.

Utilizando as equações paramétricas (4.6), podemos retomar o exemplo 4.4.1 e traçar a curva geradora de fronteira de  $W_C^J(A)$ .

**Exemplo 4.4.5.** Considerem-se as matrizes  $A, C$  e  $J$  tais como no exemplo 4.4.1. Efectuando a discretização do intervalo  $[0, \pi[$  dada por

$$\theta_r = \frac{\pi(r-1)}{2m}, \quad \text{para } r = 1, \dots, 2m \text{ e, e.g. } m = 30, \quad (4.10)$$

é possível calcular pontos que pertencem à curva parametrizada por (4.6). Para tal, calculam-se os valores próprios (e os respectivos vectores próprios) das matrizes  $J$ -hermíticas  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_r}A)$ ,  $r = 1, \dots, 2m$ . Em seguida, para cada valor de  $\theta_r$  em (4.10), calcula-se  $\Lambda(\theta_r)$  tal como em (4.4) e, posteriormente, calculam-se os pontos  $(X(\theta_r), Y(\theta_r))$ ,  $r = 1, \dots, 2m$ , dados por (4.6). Estes pontos estão assinalados na figura 4.2 e definem a curva geradora de fronteira de  $W_C^J(A)$ .

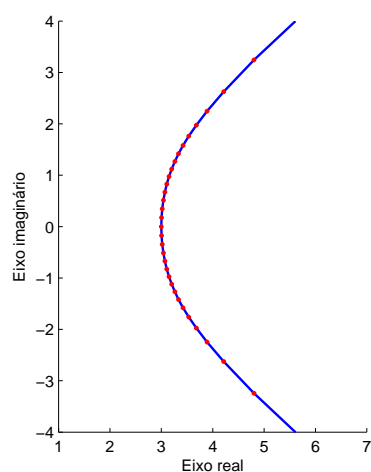


Figura 4.2:  $\partial W_C^J(A)$  e pontos que pertencem à curva geradora de fronteira de  $W_C^J(A)$ , para  $A, C$  e  $J$  como no exemplo 4.4.5.

## 4.5 Porções planas em $\partial W_C^J(A)$

Esta secção é dedicada à análise da existência de porções planas (ou achatamentos) em  $\partial W_C^J(A)$ . Começamos por apresentar uma condição suficiente para a ocorrência de uma porção plana em  $\partial W_C^J(A)$  (cfr. teorema 4.5.2). Seguidamente, analisamos o caso das matrizes  $J$ -normais. Mais concretamente, caracterizamos  $W_C^J(A)$  para o caso de  $A$  ser  $J$ -normal e  $C$  ser uma matriz diagonal real (cfr. teorema 4.5.9).

### 4.5.1 Uma condição suficiente

**Definição 4.5.1.** Suponha-se que

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ux + vy + w = 0, u, v, w \in \mathbb{R}\}$$

é uma recta de suporte de  $W_C^J(A)$ . Se  $\mathcal{L} \cap \partial W_C^J(A)$  contém mais que um ponto, então

$$\mathcal{L} \cap \partial W_C^J(A)$$

diz-se uma *porção plana* na fronteira de  $W_C^J(A)$ .



**Teorema 4.5.2.** *Sejam  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ , com  $0 < r < n$  e  $A = H + iK$ , onde  $H = \operatorname{Re}^J(A)$  e  $K = \operatorname{Im}^J(A)$  são as matrizes  $J$ -hermíticas definidas em (1.48). Suponha-se que  $H$  é  $J$ -unitariamente diagonalizável e que os seus valores próprios não se entrelaçam. Sejam  $\lambda'_1 > \dots > \lambda'_s$  os  $s$  valores próprios distintos de  $H$  com multiplicidades,  $n_1, \dots, n_s$ , respectivamente. Sejam  $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_s$ ,  $J = J_1 \oplus \dots \oplus J_s$  e*

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1s} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{s1} & K_{s2} & \cdots & K_{ss} \end{bmatrix},$$

onde  $C_j, J_j, K_{jj} \in M_{n_j}$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Se, pelo menos, um dos conjuntos  $W_{C_t}^{J_t}(K_{tt})$  é não-singular, então  $\partial W_C^J(A)$  tem uma porção plana paralela ao eixo imaginário.

**Demonstração:** Seja  $H = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , com  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} \geq \dots \geq \lambda_n$  e  $C = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n)$  com  $c_{r+1} \geq \dots \geq c_n > c_1 \geq \dots \geq c_r$ . Então, existe uma recta paralela ao eixo imaginário separando  $\sigma_J^+(A)$  e  $\sigma_J^-(A)$ . Logo, de acordo com [14, teorema 1.1]

$$\{\operatorname{tr}(CUHU^{-1}) : U \in \mathcal{U}_{r, n-r}\} = ]-\infty, a_0], \quad \text{com } a_0 = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j.$$

Vamos mostrar que

$$\begin{aligned} & \{\operatorname{tr}(CUKU^{-1}) : \operatorname{tr}(CUHU^{-1}) = a_0, U \in \mathcal{U}_{r, n-r}\} \\ & = W_{C_1}^{J_1}(K_{11}) + W_{C_2}^{J_2}(K_{22}) + \dots + W_{C_s}^{J_s}(K_{ss}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

De facto, sendo  $\operatorname{tr}(CUHU^{-1}) = a_0$ , então existem  $V, W \in \mathcal{U}_{r, n-r}$  tais que  $WCW^{-1} = C$ ,  $VHV^{-1} = H$  e  $U = WV$ . Logo, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $H = (\lambda'_1 I_{n_1}) \oplus \dots \oplus (\lambda'_s I_{n_s})$ . Obviamente,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ , onde cada  $V_j$  tem ordem  $n_j$  e  $V_j J_j V_j^* = J_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Além disso,

$$VKV^{-1} = \begin{bmatrix} V_1 K_{11} V_1^{-1} & \cdots & V_1 K_{1s} V_s^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_s K_{s1} V_1^{-1} & \cdots & V_s K_{ss} V_s^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\operatorname{tr}(CUKU^{-1}) = \sum_{j=1}^s \operatorname{tr}(C_j V_j K_{jj} V_j^{-1}),$$

logo verifica-se (4.11). Seja  $\mathcal{L}$  uma recta de suporte de  $W_C^J(A)$  paralela ao eixo imaginário. Então,

$$\mathcal{L} \cap \partial W_C^J(A) = \left\{ a_0 + i \sum_{j=1}^s \operatorname{tr}(C_j V_j K_{jj} V_j^{-1}) : V_j J_j V_j^* = J_j \right\}. \quad (4.12)$$

A intersecção (4.12) é um conjunto singular se e só se cada parcela da soma de Minkowski (4.11) é um conjunto singular. Logo, se em (4.11) existir pelo menos um conjunto  $W_{C_t}^{J_t}(K_{tt})$  que é não-singular, então  $\mathcal{L} \cap \partial W_C^J(A)$  é um segmento de recta, uma semi-recta ou toda a recta, de acordo com o seguinte critério:

- Se  $n_1 + \dots + n_t = r$ , então  $W_{C_k}^{J_k}(K_{kk}) = W_{C_k}(K_{kk})$  é um segmento de recta, para algum  $1 \leq k \leq s$ , e portanto  $\mathcal{L} \cap \partial W_C^J(A)$  é também um segmento de recta;
- Se  $n_1 + \dots + n_t < r < n_1 + \dots + n_{t+1}$  e  $W_{C_{t+1}}^{J_{t+1}}(K_{t+1,t+1})$  é um conjunto singular, então  $\mathcal{L} \cap \partial W_C^J(A)$  é um segmento de recta;
- Se não se verificar nenhuma das condições anteriores, então a intersecção (4.12) é uma semi-recta contida em  $\mathcal{L}$  ou a própria recta  $\mathcal{L}$ .

Daqui, resulta o pretendido. ■

**Exemplo 4.5.3.** Sejam  $J = I_2 \oplus -I_1$  e  $C = C_1 \oplus C_2$ , onde  $C_1 = \operatorname{diag}(1, 0)$  e  $C_2 = [-1] \in M_1$ . Considere-se a matriz  $A \in M_3$  definida por blocos por

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

onde  $A_{11} \in M_2$ ,  $A_{12} \in M_{2,1}$ ,  $A_{21} \in M_{1,2}$  e  $A_{22} \in M_1$  são as matrizes

$$A_{11} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ e } A_{22} = [2].$$

Então, as matrizes  $K_{11} \in M_2$  e  $K_{22} \in M_1$  do teorema 4.5.2 são

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } K_{22} = [0].$$

Apesar de  $W_{C_2}^{-I_1}(K_{22})$  ser o conjunto singular  $\{0\}$ , como  $W_{C_1}^{I_2}(K_{11})$  é o segmento de recta  $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$ , de acordo com o teorema 4.5.2,  $W_C^J(A)$  tem uma porção plana paralela ao eixo imaginário. Mais concretamente, o segmento de recta  $\{-2 + iy : 0 \leq y \leq 1\}$ , representada na figura 4.3.

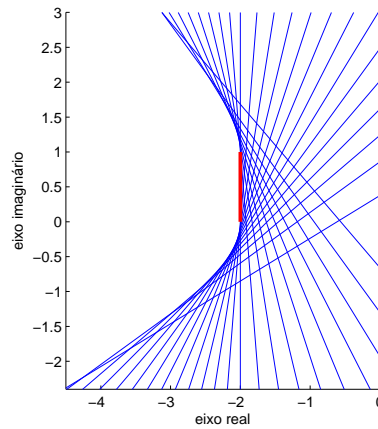


Figura 4.3: Rectas de suporte de  $W_C^J(A)$ , para  $A, C$  e  $J$ , como no exemplo 4.5.3 e segmento de recta  $\{-2 + iy : 0 \leq y \leq 1\}$  (a vermelho) que define o achatamento.

### 4.5.2 Pontos- $\sigma$ e $J$ -normalidade

Sejam  $A \in M_n$  e  $C \in M_n(\mathbb{R})$  duas matrizes cujos valores próprios não se entrelaçam. Suponha-se, como é habitual, que

$$\sigma_J^+(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}, \quad \sigma_J^-(A) = \{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\} \quad (4.13)$$

$$\sigma_J^+(C) = \{c_1 \geq \dots \geq c_r\}, \quad \sigma_J^-(C) = \{c_{r+1} \geq \dots \geq c_n\}. \quad (4.14)$$

**Definição 4.5.4.** Designar-se-ão por *pontos- $\sigma$*  (indefinidos) os  $r!(n-r)!$  pontos da forma

$$z_\sigma = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_{\sigma(j)}, \quad \text{com } \sigma \in S_{r,n-r}, \quad (4.15)$$

em que  $S_n$  é o grupo simétrico de grau  $n$  e  $S_{r,n-r}$  é o conjunto de todas as permutações da forma  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ , onde  $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$  são tais que  $\sigma_1(j) = j$ , para  $j \in \{r+1, \dots, n\}$  e  $\sigma_2(j) = j$ , para  $j \in \{1, \dots, r\}$ .

Como consequência da propriedade WCJ2 e do teorema da triangulação de Schur [63, teorema 2.3.1], segue-se obviamente que os pontos- $\sigma$  pertencem a  $W_C^J(A)$ . Para além de pertencerem a  $W_C^J(A)$ , os pontos  $z_\sigma$  desempenham um papel crucial em toda a teoria que se segue.

**Teorema 4.5.5.** *Se  $A \in M_n(\mathbb{C})$  e  $C \in M_n(\mathbb{R})$ , então*

$$\text{conv} \{z_\sigma : \sigma \in S_{r,n-r}\} \subseteq W_C^J(A).$$

**Demonstração:** O teorema é uma consequência imediata do facto de os pontos- $\sigma$  pertencerem a  $W_C^J(A)$  e de  $W_C^J(A)$  ser um conjunto convexo. ■

Doravante, e até ao fim desta subsecção, caso nada seja dito em contrário, além das condições (4.13) e (4.14) iremos considerar sempre que  $A$  é uma matriz  $J$ -normal e  $J$ -unitariamente diagonalizável o que, de acordo com a propriedade WCJ2, equivale a considerar

$$A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (4.16)$$

Iremos igualmente considerar

$$C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{R}), \quad \text{com } c_n > c_1. \quad (4.17)$$

**Lema 4.5.6.** *Sejam  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n$  e  $A = [a_{ij}] \in M_n$ . Então  $W_C^J(A)$  contém o conjunto*

$$W_{C_{kl}}^{J_{kl}}(A_{kl}) + \sum_{j \neq k,l} c_j a_{jj}, \quad (4.18)$$

onde  $J_{kl} = J[kl]$ ,  $C_{kl} = C[kl]$  e  $A_{kl} = A[kl]$ ,  $1 \leq k < l \leq n$ .

**Demonstração [73, p.41-42]:** Seja  $z$  um elemento arbitrário do conjunto (4.18), i.e.,

$$z = \operatorname{tr} (C_{kl}M^{-1}A_{kl}M) + \sum_{j \neq k,l} c_j a_{jj},$$

em que  $M \in M_2$  é uma matriz satisfazendo  $M^*J_{kl}M = J_{kl}$ . Sejam

$$A' = \begin{bmatrix} A_{kl} & A_{12} \\ A_{21} & \check{A}_{kl} \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} C_{kl} & 0 \\ 0 & \check{C}_{kl} \end{bmatrix},$$

e  $U_M$  as matrizes que se obtém de  $A, C$  e  $M \oplus I_{n-2}$ , respectivamente, permutando as linhas e colunas 1 e 2 pelas linhas e colunas  $k$  e  $l$ . Observe-se que

$$(M \oplus I_{n-2})^{-1} A' (M \oplus I_{n-2}) = \begin{bmatrix} M^{-1}A_{kl}M & M^{-1}A_{12} \\ A_{21}M & \check{A}_{kl} \end{bmatrix}.$$

Mediante simples cálculos, conclui-se que

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{tr} (C_{kl}M^{-1}A_{kl}M) + \operatorname{tr} (\check{C}_{kl}\check{A}_{kl}) = \\ &= \operatorname{tr} \left( C' (M \oplus I_{n-2})^{-1} A' (M \oplus I_{n-2}) \right) \\ &= \operatorname{tr} \left( CU_M^{[*]}AU_M \right), \end{aligned}$$

onde  $U_M \in M_n$  satisfaz  $U_M^*JU_M = J$ . Portanto,  $z \in W_C^J(A)$ . ■

**Lema 4.5.7.** Para  $\sigma \in S_{r,n-r}$  fixo e

$$k, l \in \{1, \dots, r\} \quad \text{ou} \quad k, l \in \{r+1, \dots, n\},$$

tem-se que os  $r(r-1)/2 + (n-r)(n-r-1)/2$  segmentos de recta

$$\ell_{k,l}^\sigma = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j \alpha_{\sigma(j)} - t(\alpha_{\sigma(k)} - \alpha_{\sigma(l)})(c_k - c_l) : 0 \leq t \leq 1 \right\} \quad (4.19)$$

estão contidos em  $W_C^J(A)$ .

**Demonstração:** Começemos por demonstrar que os segmentos de recta (4.19) são gerados pelas matrizes de rotação  $J$ -unitárias obtidas da matriz identidade

por substituição das entradas  $(k, k)$ ,  $(k, l)$ ,  $(l, k)$ ,  $(l, l)$  por  $\cos \theta$ ,  $-\sin \theta$ ,  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ , respectivamente. Seja  $z_\sigma = \sum_{j=1}^n c_j \alpha_{\sigma(j)}$  e  $z_\sigma^{(kl)}$  o ponto- $\sigma$  que se obtém de  $z_\sigma$  por substituição das parcelas  $c_k \alpha_{\sigma(k)}$ ,  $c_l \alpha_{\sigma(l)}$  respectivamente por  $c_l \alpha_{\sigma(k)}$ ,  $c_k \alpha_{\sigma(l)}$ . Simbolicamente,

$$z_\sigma^{(kl)} = z_\sigma - (c_k \alpha_{\sigma(k)} + c_l \alpha_{\sigma(l)}) + c_l \alpha_{\sigma(k)} + c_k \alpha_{\sigma(l)} = z_\sigma - (\alpha_{\sigma(k)} - \alpha_{\sigma(l)})(c_k - c_l).$$

Tem-se,

$$\begin{aligned} & \left\{ z_\sigma - t \left( z_\sigma - z_\sigma^{(kl)} \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} = \\ & = \left\{ z_\sigma - t \left( z_\sigma - (z_\sigma - (\alpha_{\sigma(k)} - \alpha_{\sigma(l)})(c_k - c_l)) \right) : 0 \leq t \leq 1 \right\} \\ & = \left\{ z_\sigma - t (\alpha_{\sigma(k)} - \alpha_{\sigma(l)})(c_k - c_l) : 0 \leq t \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

e, portanto, a expressão (4.19) representa o segmento de recta que une os pontos  $z_\sigma$  e  $z_\sigma^{(kl)}$ . Resta provar que (4.19) está contido em  $W_C^J(A)$ . Sejam  $\tilde{C} = C[1n]$ ,  $\tilde{A} = A[1n]$  e  $\tilde{J} = J[1n]$ . Segundo o lema 4.5.6,

$$W_{\tilde{C}}^{\tilde{J}}(\tilde{A}) + \sum_{j=2}^{n-1} c_j \alpha_j \subset W_C^J(A). \quad (4.20)$$

Além disso, de [14, teorema 1.1] conclui-se que  $W_{\tilde{C}}^{\tilde{J}}(\tilde{A})$  contém os segmentos de recta gerados pelo grupo  $\tilde{J}$ -unitário

$$\left\{ \left[ \begin{array}{cc} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{array} \right] : \theta \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.21)$$

Logo, de (4.20) e (4.21) segue o pretendido. ■

**Lema 4.5.8.** *Para  $\sigma \in S_{r, n-r}$  fixo e  $l \in \{1, \dots, r\}$ ,  $k \in \{r+1, \dots, n\}$ , as  $r(n-r)$  semi-rectas*

$$\mathcal{L}_{k,l}^\sigma = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j \alpha_{\sigma(j)} + t(\alpha_k - \alpha_l) : 0 \leq t < \infty \right\} \quad (4.22)$$

*estão contidas em  $W_C^J(A)$ .*

**Demonstração:** Como as semi-rectas  $\mathcal{L}_{k,l}^\sigma$  são geradas pelas matrizes  $J$ -unitárias obtidas da matriz identidade pela substituição das entradas  $(k, k)$ ,  $(k, l)$ ,  $(l, k)$ ,  $(l, l)$ , respectivamente, por  $\cosh \theta$ ,  $\sinh \theta$ ,  $\sinh \theta$  e  $\cosh \theta$ , a demonstração prossegue usando um raciocínio análogo ao utilizado na demonstração do lema 4.5.7. ■

No próximo teorema caracterizamos  $W_C^J(A)$  como sendo o invólucro convexo das semi-rectas (4.22), no caso de  $A$  ser uma matriz  $J$ -normal e  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{R})$ . Trata-se de uma generalização de [7, teorema 4.4, p.56].

**Teorema 4.5.9.** *Seja  $A$  uma matriz  $J$ -normal e  $J$ -unitariamente diagonalizável cujos valores próprios não se entrelaçam, digamos  $\sigma_J^+(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  e  $\sigma_J^-(A) = \{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ . Seja  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{R})$  com  $c_{r+1} \geq \dots \geq c_n > c_1 \geq \dots \geq c_r$ . Então,*

$$W_C^J(A) = \text{conv} \{ \mathcal{L}_{k,l}^\sigma : \sigma \in S_{r,n-r}, l = 1, \dots, r, k = r + 1, \dots, n \}. \quad (4.23)$$

**Demonstração:** Como  $A$  é  $J$ -normal e  $J$ -unitariamente diagonalizável, podemos supor sem perda de generalidade que  $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Como  $W_C^J(A)$  é um conjunto convexo, então

$$\text{conv} \{ \mathcal{L}_{k,l}^\sigma : \sigma \in S_{r,n-r}, l = 1, \dots, r, k = r + 1, \dots, n \} \subseteq W_C^J(A).$$

Mostremos a inclusão recíproca. Seja  $z$  um ponto arbitrário em  $\partial W_C^J(A)$ . Necessariamente  $z$  será ou um ponto angular ou um ponto regular. Se  $z$  for um ponto angular, então  $z$  é um ponto- $\sigma$  e a inclusão pretendida é trivial. Se  $z$  for um ponto regular, existe uma única recta de suporte de  $W_C^J(A)$  que passa em  $z$ . Sejam  $H_\theta = \text{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  e  $K_\theta = \text{Im}^J(e^{-i\theta}A)$ , para algum  $\theta \in [0, \pi[$ , então  $H_\theta$  e  $K_\theta$  comutam devido à  $J$ -normalidade de  $A$ . Suponha-se que  $H_\theta$  tem  $s$  valores próprios distintos,  $\lambda'_1(\theta) = \lambda_1(\theta) > \lambda'_2(\theta) = \lambda_{n_1+1}(\theta) > \dots > \lambda'_s(\theta) = \lambda_{n_1+\dots+n_{s-1}+1}(\theta)$  com multiplicidades  $n_1, \dots, n_s$ , respectivamente. Então  $H_\theta$  e  $K_\theta$  são  $J$ -unitariamente diagonalizáveis sendo  $n_1, \dots, n_s$  as ordens dos blocos diagonais. Sejam  $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_s$ ,  $J = J_1 \oplus \dots \oplus J_s$  e

$$K_\theta = \begin{bmatrix} K_{11}(\theta) & K_{12}(\theta) & \cdots & K_{1s}(\theta) \\ K_{21}(\theta) & K_{22}(\theta) & \cdots & K_{2s}(\theta) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{s1}(\theta) & K_{s2}(\theta) & \cdots & K_{ss}(\theta) \end{bmatrix},$$

onde  $C_j, J_j, K_{jj}(\theta) \in M_{n_j}, j = 1, \dots, s$ . Usando um raciocínio análogo ao utilizado no teorema 4.5.2, podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \{ \operatorname{tr}(CUK_\theta U^{-1}) : \operatorname{tr}(CUH_\theta U^{-1}) = z, U \in \mathcal{U}_{r, n-r} \} \\ & = W_{C_1}^{J_1}(K_{11}(\theta)) + W_{C_2}^{J_2}(K_{22}(\theta)) + \cdots + W_{C_s}^{J_s}(K_{ss}(\theta)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

e

$$\mathcal{L}_\theta \cap \partial W_C^J(A) = \left\{ z + i \sum_{j=1}^s \operatorname{tr}(C_j V_j K_{jj}(\theta) V_j^{-1}) : V_j J_j V_j^* = J_j \right\}, \quad (4.25)$$

onde  $\mathcal{L}_\theta$  é a recta de suporte perpendicular à direcção  $\arg(z) = \theta$ . A intersecção (4.25) é um conjunto singular se e só se cada parcela da soma do tipo de Minkowski (4.24) for um conjunto singular e, nesse caso, (4.25) reduz-se a  $\sum_{j=1}^n c_j \alpha_{\sigma(j)}$ , para algum  $\sigma \in \mathcal{S}_{r, n-r}$ . Se em (4.24) existir pelo menos um conjunto  $W_{C_t}^{J_t}(K_{tt}(\theta))$  que não é um conjunto singular, então  $\mathcal{L}_\theta \cap \partial W_C^J(A)$  é um segmento de recta, uma semi-recta ou a própria recta  $\mathcal{L}_\theta$ . ■

De acordo com o teorema 4.5.9,  $\partial W_C^J(A)$  é um polígono convexo, se  $A$  for  $J$ -normal e  $J$ -unitariamente diagonalizável. No entanto, cumpre referir que existem matrizes  $A$  não  $J$ -normais em relação às quais  $\partial W_C^J(A)$  é igualmente um polígono convexo, conforme se ilustra no próximo exemplo.

**Exemplo 4.5.10.** Considere-se  $J = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, -1)$ ,  $C = \operatorname{diag}(1, 0, 0, 0, 0)$

e

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

com  $b \in \mathbb{R}$ . Alguns cálculos permitem concluir que



$$\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A) = \begin{bmatrix} \cos \theta + \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta - \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cos \theta & \frac{b}{2} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} e^{i\theta} & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix},$$

com

$$\sigma_J^+(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)) = \left\{ 2 \cos \theta + \frac{|b|}{2}, 2 \cos \theta - \frac{|b|}{2}, \cos \theta + \sin \theta, \cos \theta - \sin \theta \right\}$$

e

$$\sigma_J^-(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)) = \{-\cos \theta\}.$$

Como  $C = E_{11}$ , onde  $\{E_{11}, \dots, E_{nn}\}$  denota a base canónica de  $M_n$ , e  $j_1 = 1$ , então  $W_C^J(A) = W_J^+(A)$ . Logo, podemos recorrer ao polinómio (1.57) para determinar a curva geradora de fronteira de  $W_J^+(A)$ . A equação de linhas da curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$  é

$$(u - w)(u - v + w)(u + v + w)(-4(2u + w)^2 + |b|^2(u^2 + v^2)) = 0. \quad (4.26)$$

Recorrendo ao método da dualização descrito em (1.29), (1.30) e (1.31) conclui-se que os três primeiros factores de (4.26) representam os pontos  $(-1, 0)$ ,  $(1, -1)$  e  $(1, 1)$ , respectivamente. O último factor de (4.26) corresponde à circunferência de centro em  $(2, 0)$  e raio  $|b|/2$ . Note-se que como  $W_C^J(A) = W_J^+(A)$ , a curva geradora de fronteira de  $W_C^J(A)$  não inclui o ponto  $(-1, 0)$ . Portanto,

- Para  $|b| \leq 2$ ,  $W_C^J(A)$  é o polígono

$$W_C^J(A) = [1 - i, 1 + i] \cup \{1 + i + (2 + i)t : t \geq 0\} \cup \{1 - i + (2 - i)t : t \geq 0\};$$

- Para  $2 < |b| < 6$ ,  $W_C^J(A)$  não é um polígono. Alguns cálculos permitem concluir que

$$W_C^J(A) = \left\{ 2 + \frac{|b|}{2} e^{i\theta} : \pi - \arctan\left(\frac{d}{2-c}\right) \leq \theta \leq \pi + \arctan\left(\frac{d}{2-c}\right) \right\} \\ \cup \{c + id + ((c + 1) + id)t : t \geq 0\} \cup \{c - di + ((c + 1) - id)t : t \geq 0\}$$

em que  $c = 2 - \frac{b^2}{12}$  e  $d = \frac{\sqrt{36b^2 - b^4}}{12}$ ;

- Para  $|b| = 6$ ,  $W_C^J(A)$  é o semi-plano direito definido pela recta vertical  $\operatorname{Re} z = -1$ , porque existe uma única direcção,  $\theta = 0$ , em relação à qual os valores próprios de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta} A)$  não se entrelaçam;
- Para  $|b| > 6$ ,  $W_C^J(A)$  é todo o plano complexo, porque não existe nenhuma direcção em relação à qual os valores próprios de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta} A)$  não se entrelaçam.

Ilustramos as representações geométricas de  $W_C^J(A)$ , para alguns valores de  $b$ , na figura 4.4.

**Teorema 4.5.11.** *Seja  $A$  uma matriz  $J$ -normal e  $J$ -unitariamente diagonalizável cujos valores próprios não se entrelaçam, digamos  $\sigma_J^+(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  e  $\sigma_J^-(A) = \{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ . Seja  $C = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{R})$  com*

$$c_{r+1} \geq \dots \geq c_n > c_1 \geq \dots \geq c_r.$$

Se  $z \in \partial W_C^J(A)$ , então verifica-se uma das seguintes condições:

- (i)  $z$  é um ponto- $\sigma$ ;
- (ii)  $z \in [z_{\sigma'}, z_{\sigma''}]$ , onde  $\sigma'$  e  $\sigma''$  são duas permutações em  $S_{r, n-r}$  que diferem apenas em dois pontos  $k, l \in \{1, \dots, r\}$  ou  $k, l \in \{r+1, \dots, n\}$ ;
- (iii)  $z \in \{z_\sigma + t(\alpha_k - \alpha_l) : t \geq 0\}$ , para  $l \in \{1, \dots, r\}$  e  $k \in \{r+1, \dots, n\}$ .

**Demonstração:** De acordo com o teorema 4.5.9,  $W_C^J(A)$  é o invólucro convexo fechado das semi-rectas (4.22). Se  $z \in \partial W_C^J(A)$ , tendo em conta que  $\partial W_C^J(A)$  é uma curva convexa, segue-se que  $z$  ou é um ponto angular ou é um ponto regular. No primeiro caso,  $z$  é um ponto- $\sigma$  e verifica-se (i). Se  $z$  for um ponto regular, seja  $\pi/2 + \theta$  a inclinação da recta de suporte que passa em  $z$ . Cada par de valores próprios de  $A$  define uma direcção, logo existem  $C_2^n$  direcções diferentes. Por uma perturbação, podemos admitir sem perda de

generalidade que  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  tem precisamente um valor próprio duplo, logo a intersecção da recta de suporte perpendicular à direcção de argumento  $\theta$  com  $\partial W_C^J(A)$  ou é um segmento de recta cujas extremidades são pontos- $\sigma$  que diferem por uma transposição, ou é uma semi-recta, verificando-se respectivamente (ii) ou (iii). ■

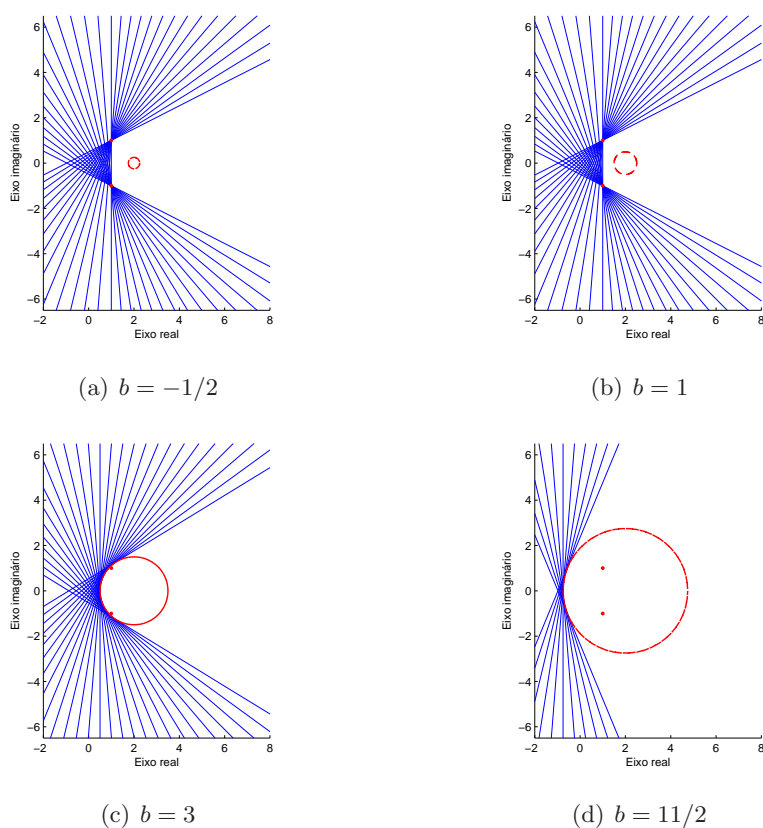


Figura 4.4: Rectas de suporte e curva geradora de fronteira de  $W_C^J(A)$ , para diferentes valores de  $b$ , sendo  $A$  a matriz definida no exemplo 4.5.10.

## 4.6 Algoritmo e exemplos

Baseado no teorema de Westwick, Li *et al* [80] desenvolveram um algoritmo que permite representar graficamente  $\partial W_C(A)$  no caso de  $C$  ser uma matriz diagonal real. No que se refere a  $W_C^J(A)$ , até ao presente, apenas se conhece a sua representação gráfica em alguns casos particulares, pelo que a implementação de um algoritmo e respectivo código computacional que funcione para uma qualquer matriz  $A \in M_n$  e uma qualquer matriz real  $J$ -unitariamente diagonalizável  $C$  é um desafio importante, não só pela utilidade prática, como também pela sua originalidade. Esta secção versa, portanto, a descrição de um algoritmo que permite traçar a fronteira de  $W_C^J(A)$ . Os teoremas 1.1 e 2.1 de [14] contêm o princípio geral da nossa abordagem e o algoritmo tem como ideia elementar o facto de a fronteira de  $W_C^J(A)$  poder ser traçada por recurso ao cálculo das rectas de suporte de  $W_C^J(A)$ . Por último, refira-se que o programa, em *Matlab*, implementado (disponível no CD-Rom em anexo) é muito eficiente em termos de velocidade e de desempenho. Todas as figuras apresentadas nesta secção foram geradas pelo programa implementado.

### Descrição do algoritmo

Sejam  $A \in M_n$  uma matriz complexa arbitrária,  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$ , para algum  $0 \leq r \leq n$ , e  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n) \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Passo 1:** Calcular os valores próprios de  $C$  em  $\sigma_J^+(C)$  e em  $\sigma_J^-(C)$ . Se os valores próprios de  $C$  não se entrelaçarem, o algoritmo prossegue para o passo 2; caso contrário, avançar para o passo 7 (casos degenerados).

**Passo 2:** Calcular os valores próprios da matriz  $H_{\theta_k} := \text{Re}^J(e^{-i\theta_k} A)$ , com

$$\theta_k = \frac{\pi(k-1)}{2m}, \quad k = 1, \dots, 2m, \quad (4.27)$$

para algum inteiro positivo  $m \geq 10$ . Se existir algum valor de  $k$  tal que a matriz  $H_{\theta_k}$  tem espectro real com vectores próprios anisotrópicos, o algoritmo prossegue para o passo 3; caso contrário, avançar para o passo 7 (casos degenerados).

**Passo 3:** Para cada  $\theta_k$  descrito em (4.27), calcular os valores próprios da matriz  $H_{\theta_k}$  em  $\sigma_J^+(H_{\theta_k})$  e em  $\sigma_J^-(H_{\theta_k})$ . Verificar se existem direcções em relação às quais os valores próprios de  $H_{\theta_k}$  não se entrelaçam. Caso existam tais direcções, digamos  $k = k_1, \dots, k_{n'}$ , o algoritmo prossegue para o passo 4; caso contrário, avançar para o passo 7 (casos degenerados).

**Passo 4:** Para cada  $k = k_1, \dots, k_{n'}$ , calcular os  $r!(n-r)!$  pontos

$$z_\sigma(\theta_k) = \sum_{s=1}^n c_s \lambda_{\sigma(s)}(H_{\theta_k}),$$

onde  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \in S_{r,n-r}$  e  $\lambda_1(H_{\theta_k}), \dots, \lambda_n(H_{\theta_k})$  são os valores próprios de  $H_{\theta_k}$ .

**Passo 5:** Como os valores próprios de  $C$ , assim como os valores próprios de cada  $H_{\theta_k}$ ,  $k = k_1, \dots, k_{n'}$ , não se entrelaçam, podemos ter uma de entre as duas relações dadas em (1.46). Se a relação (1.46) for a mesma para os valores próprios das matrizes  $C$  e  $H_{\theta_k}$ ,  $k = k_1, \dots, k_{n'}$ , considera-se

$$\lambda(k) := \min z_\sigma(\theta_k);$$

caso contrário, considera-se

$$\lambda(k) := \max z_\sigma(\theta_k).$$

**Passo 6:** Para cada  $k = k_1, \dots, k_{n'}$ , traçar a recta de suporte de  $W_C^J(A)$  definida por

$$x \cos(\theta_k) + y \sin(\theta_k) = \lambda(k).$$

**Passo 7:** No que se refere aos casos degenerados, vamos apenas apresentar uma mensagem que descreve a sua forma geométrica. Para tal, calculam-se os pontos

$$\sum_{s=1}^n c_s \frac{\zeta_{j_s}^* J A \zeta_{j_s}}{\zeta_{j_s}^* J \zeta_{j_s}},$$

para uma amostra de  $[m]/2$  vectores próprios anisotrópicos  $\zeta_j = (\zeta_{j_1}, \dots, \zeta_{j_n})$ ,  $j = 1, \dots, [m]/2$ , arbitrariamente escolhidos. A distribuição destes pontos

permite concluir se  $W_C^J(A)$  é todo o plano complexo (ou possivelmente um semi-plano), ou uma recta (possivelmente uma semi-recta).

**Observação 4.6.1.** Obviamente que se  $J = \pm I$ , então  $W_C^J(A)$  reduz-se ao  $C$ -contradomínio numérico e o algoritmo anteriormente descrito continua igualmente válido.

De seguida, ilustramos o algoritmo com alguns exemplos.

**Exemplo 4.6.2.** Seja  $J = I_2 \oplus -I_2$ ,  $C = \text{diag}(2, 1, -1, -2)$  e  $A \in M_4$  a matriz dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & -1 & -i \\ 0 & 0 & -i & -2 \end{bmatrix}.$$

A fronteira de  $W_C^J(A)$  está representada na figure 4.5.

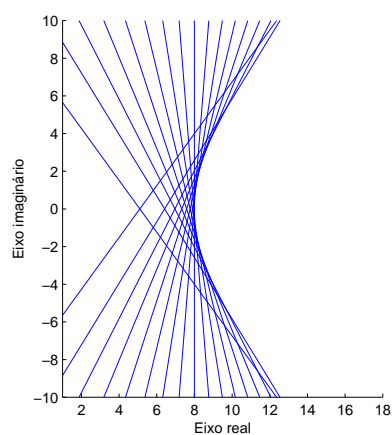


Figura 4.5: Rectas de suporte de  $W_C^J(A)$ , sendo  $A$ ,  $C$  e  $J$  as matrizes definidas no exemplo 4.6.2.

**Exemplo 4.6.3.** Sejam  $J = I_2 \oplus -I_2$ ,  $C = \text{diag}(2, 1, -1, -2)$  e  $A \in M_4$  a matriz dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 & 0 \\ i & 2 & i & 0 \\ 0 & -i & -1 & -i \\ 0 & 0 & -i & -2 \end{bmatrix}.$$

A fronteira de  $W_C^J(A)$  está representada na figure 4.6. Esta figura tem uma porção plana que é definida pelo segmento de recta  $[10 - i, 10 + i]$  que pertence à fronteira de  $W_C^J(A)$ .

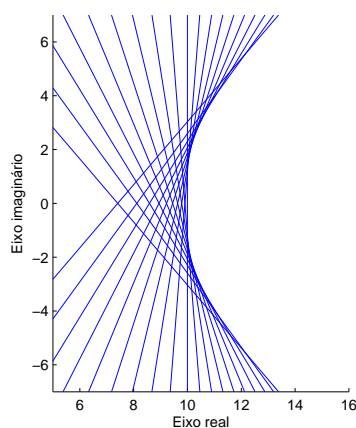


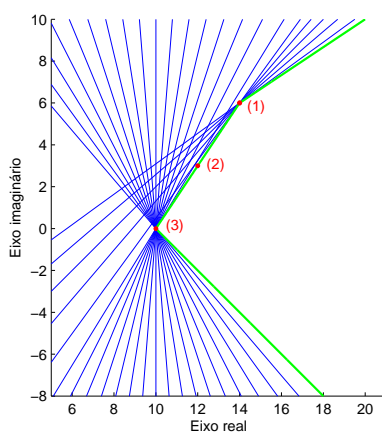
Figura 4.6: Rectas de suporte de  $W_C^J(A)$ , sendo  $A, C$  e  $J$  as matrizes definidas no exemplo 4.6.3.

**Exemplo 4.6.4.** Sejam  $J = I_2 \oplus -I_2$ ,  $C = \text{diag}(2, 1, -1, -2)$  e  $A \in M_4$  a matriz dada por  $A = \text{diag}(3 + 2i, 1 - i, -1 + i, -3 - 2i)$ . Neste caso, de acordo com (4.23), conclui-se que

$$\partial W_C^J(A) = \{10 + (1 - i)t : t \geq 0\} \cup [10, 14 + 6i] \cup \{14 + 6i + (3 + 2i)t : t \geq 0\}.$$

A fronteira de  $\partial W_C^J(A)$  está representada na figure 4.7. Os pontos- $\sigma$ , cujas coordenadas e processo de cálculo estão na tabela 4.1, são igualmente incluídos nessa figura.

$\sigma_J^+(A) = \{3 + 2i, 1 - i\}$ $\sigma_J^-(A) = \{-1 + i, -3 - 2i\}$ $\sigma_J^+(C) = \{2, 1\}$ $\sigma_J^-(C) = \{-1, -2\}$				$\sum_{j=1}^4 c_j \alpha_{\sigma(j)}$	Numeração
$3 + 2i$	$1 - i$	$-1 + i$	$-3 - 2i$	$14 + 6i$	(1)
$3 + 2i$	$1 - i$	$-3 - 2i$	$-1 + i$	$12 + 3i$	(2)
$1 - i$	$3 + 2i$	$-1 + i$	$-3 - 2i$	$12 + 3i$	(2)
$1 - i$	$3 + 2i$	$-3 - 2i$	$-1 + i$	10	(3)

Tabela 4.1: Pontos- $\sigma$  para as matrizes do exemplo 4.6.4Figura 4.7: Rectas de suporte de  $W_C^J(A)$ , sendo  $A, C$  e  $J$  as matrizes definidas no exemplo 4.6.4.



# Capítulo 5

## Contradomínios numéricos e respectiva implementação computacional

### 5.1 Descrição do algoritmo

A criação de algoritmos e a implementação de programas que permitem traçar graficamente a fronteira do contradomínio numérico é um tema que tem sido abordado por vários autores. No que se refere ao contradomínio numérico clássico e suas generalizações veja-se, e.g. [43, 67, 77, 80, 84].

Em [78], foi apresentado um programa, em Matlab, que permite traçar a fronteira de  $W_J^+(A)$ , para  $A \in M_n$  e  $J$  uma matriz hermítica. No entanto, os autores mencionam que haveria melhorias a fazer no programa. Efectivamente, em alguns casos, como nos exemplos 5.2.1 e 5.2.2 e também nos casos em que  $A$  é uma matriz diagonal, detectámos que o programa desenvolvido em [78] falha.

Em [9] descreve-se um algoritmo que permite representar graficamente uma aproximação do  $J$ -contradomínio numérico com base no conceito de curva geradora de fronteira.

O objectivo deste capítulo consiste em apresentar um algoritmo que vem colmatar certas lacunas dos programas existentes. O programa, em Matlab, implementado segue uma abordagem semelhante à apresentada em [9], mas

constitui um indubitável progresso, na medida em que além de serem tratados os casos degenerados, foi criada uma rotina relativa ao invólucro pseudo-convexo de um conjunto finito de pontos que permite representar a fronteira do  $J$ -contradomínio numérico. A precisão do nosso programa é muito boa e a sua velocidade ao nível da execução é equivalente à do programa implementado em [78]. As rotinas que constituem o programa encontram-se no CD-Rom em anexo.

Cumprе referir que, em certos casos degenerados, o programa implementado em vez de traçar  $W_J(A)$ , pode apresentar uma mensagem descrevendo a forma geométrica do conjunto. Tal sucede quando não existem rectas de suporte de  $W_J(A)$ . Nesse caso,  $W_J(A)$  pode ser uma recta (em alguns casos, com excepção de um subconjunto conexo dessa recta) ou todo o plano complexo (em alguns casos, com excepção de uma recta).

A nossa abordagem usa a ideia elementar, descrita em (1.61) e (1.62), de que a fronteira de  $W_J(A)$  pode ser traçada por recurso ao cálculo dos valores próprios extremos da matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$ , em  $\sigma_J^+(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A))$  e em  $\sigma_J^-(\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A))$ , e do cálculo dos respectivos vectores próprios associados,  $\nu_\theta^+$  e  $\nu_\theta^-$ , com  $\theta$  percorrendo uma discretização finita do intervalo  $[0, \pi[$ . Nestas condições, os pontos

$$\frac{\langle A\nu_\theta^+, \nu_\theta^+ \rangle_J}{\langle \nu_\theta^+, \nu_\theta^+ \rangle_J} \quad \text{e} \quad \frac{\langle A\nu_\theta^-, \nu_\theta^- \rangle_J}{\langle \nu_\theta^-, \nu_\theta^- \rangle_J}$$

pertencem à curva geradora de fronteira das componentes  $W_J^+(A)$  e  $-W_J^-(A)$ , respectivamente. De acordo com o lema 1.2.15, à medida que  $\theta$  varia no intervalo  $[0, \pi[$ , se existirem direcções  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , em relação às quais os valores próprios da matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  não são todos reais, então  $W_J(A)$  não tem nenhuma recta de suporte nessa direcção e estamos perante um caso degenerado. Por este motivo, procuraremos apenas as direcções  $e^{i\theta}$  para as quais os valores próprios da matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta}A)$  são todos reais. Certificar-nos-emos igualmente de que os vectores próprios associados são  $J$ -anisotrópicos. Nestas condições, a curva geradora da fronteira de  $W_J(A)$  existe e  $W_J(A)$  é o seu invólucro pseudo-convexo.

### Descrição do algoritmo

**Passo 1:** Sejam  $J = I_r \oplus -I_{n-r}$  e  $A \in M_n$  arbitrária. Calcular

$$\theta_s = \frac{\pi(s-1)}{2m}, \quad s = 1, \dots, 2m,$$

para algum inteiro positivo  $m \geq 20$ . Para cada escolha de  $s$ , calcular os valores próprios da matriz

$$\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_s} A) = \frac{e^{-i\theta_s} A + e^{i\theta_s} J A^* J}{2}.$$

Construir o vector, denominado “*direc*”, constituído por todos os valores de  $s$  tais que a matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_s} A)$  tem, pelo menos, um valor próprio real com vector próprio associado  $J$ -anisotrópico. Para cada valor de  $s$  nessas condições, fixo, testar a multiplicidade dos valores próprios de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_s} A)$ . Se existir, pelo menos, um valor próprio múltiplo de  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_s} A)$ , perturbar ligeiramente essa direcção, com incremento  $\epsilon = 10^{-10}$ , com o intuito de eliminar eventuais pontos espúrios que possam aparecer e que não pertencem à curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$ . Se não existir nenhum valor de  $s$  tal que os valores próprios da matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_s} A)$  são todos reais, simples e com vectores próprios associados  $J$ -anisotrópicos, está-se perante um caso degenerado e avança-se para o passo 5. Caso contrário, o algoritmo prossegue para o passo 2. Repare-se que o número de vectores próprios com  $J$ -norma positiva é fixado pela inércia da matriz  $J$  e é independente da escolha considerada para  $\theta_s$ .

**Passo 2:** Verificar se existe alguma direcção  $(\cos \theta_s, \sin \theta_s)$ , com  $s$  pertencente ao vector “*direc*”, tal que os valores próprios da matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_s} A)$  não se entrelaçam. Se existir, o algoritmo prossegue para o passo 3. Caso contrário, está-se na presença de um caso degenerado e avança-se para o passo 5.

**Passo 3:** Para cada valor de  $s$  pertencente ao vector “*direc*”, calcular os  $n$  vectores próprios,  $\nu_i(s)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , linearmente independentes associados aos valores próprios da matriz  $\operatorname{Re}^J(e^{-i\theta_s} A)$ . Calcular os pontos

$$\rho_i(s) = \frac{\langle A\nu_i(s), \nu_i(s) \rangle_J}{\langle \nu_i(s), \nu_i(s) \rangle_J}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

e construir dois vectores, denotados por  $X_1$  e  $X_2$ , constituídos pelos elementos  $\rho_i(s)$  tais que  $\langle \nu_i(s), \nu_i(s) \rangle_J > 0$  e  $\langle \nu_i(s), \nu_i(s) \rangle_J < 0$ , respectivamente. As componentes destes vectores são pontos que pertencem à curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$ . Como a matriz  $J$  tem assinatura  $(r, n-r)$ , então em (5.1) são gerados  $r$  pontos em  $W_J^+(A)$  e  $n-r$  pontos em  $-W_J^-(A)$ .

**Passo 4:** Para gerar o invólucro pseudo-convexo dos pontos (5.1), procede-se do seguinte modo. Se os elementos dos vectores  $X_1$  e  $X_2$  forem colineares, basta traçar a semi-recta definida pelos pontos em  $X_1$  e a semi-recta definida pelos pontos em  $X_2$ , para obter o invólucro pseudo-convexo dos pontos (5.1) que nesse caso será uma recta, com excepção possivelmente de um subconjunto conexo dessa recta. Caso contrário, consideram-se alguns valores  $\alpha \leq 0$ , e.g.  $\alpha = -3, -2, -1, 0$ , e armazenam-se os valores de

$$\alpha X_1(t_1) + (1 - \alpha)X_2(t_2)$$

numa matriz  $M_1$ , para  $t_1 = 1, \dots, n_1$  e  $t_2 = 1, \dots, n_2$ , onde  $n_1$  e  $n_2$  são as ordens dos vectores  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente. Efectua-se o mesmo procedimento para  $\alpha \geq 1$ , e.g.  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ , construindo deste modo uma matriz  $M_2$ . Nestas condições, as matrizes  $M_1$  e  $M_2$  são ambas de ordem  $4 \times n_1 n_2$  e cada coluna representa uma semi-recta  $\alpha X_1(t_1) + (1 - \alpha)X_2(t_2)$ , para  $\alpha \leq 0$  e  $\alpha \geq 1$ , respectivamente. Deste modo, traçar o invólucro pseudo-convexo dos pontos (5.1) equivale a traçar o invólucro pseudo-convexo dos elementos das matrizes  $M_1$  e  $M_2$ . Para tal, aplica-se a rotina “convhull”, incorporada no software Matlab, aos elementos de  $M_1$  e  $M_2$ , obtendo-se dois vectores  $Ind_1$  e  $Ind_2$  constituídos pelos elementos que definem o invólucro convexo de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Seguidamente, reordenam-se os elementos de  $Ind_k$ ,  $k = 1, 2$ , de modo que os elementos que pertencem simultaneamente a  $Ind_k$  e a  $X_k$  apareçam consecutivamente. Uma vez reordenados, para obter o invólucro pseudo-convexo de (5.1) basta unir os pontos que pertencem simultaneamente a  $Ind_k$  e a  $X_k$ , acrescido do elemento de  $Ind_k$  imediatamente antecedente ao primeiro elemento de  $X_k$  em  $Ind_k$  e do elemento de  $Ind_k$  imediatamente subsequente ao último elemento de  $X_k$  em  $Ind_k$ , para  $k = 1, 2$ .

**Passo 5:** No que se refere aos casos degenerados, não vamos proceder à sua representação gráfica. Vamos apenas apresentar uma mensagem que descreve a sua forma geométrica. Para tal, calculam-se os pontos

$$\frac{\langle A\zeta_i, \zeta_i \rangle_J}{\langle \zeta_i, \zeta_i \rangle_J},$$

para uma amostra de  $[m/2]$  vectores  $J$ -anisotrópicos  $\zeta_i$ ,  $i = 1, \dots, [m/2]$ , escolhidos aleatoriamente. A distribuição destes pontos permitirá concluir quando  $W_J(A)$  é todo o plano complexo (possivelmente excepto uma recta) ou uma recta (possivelmente excepto um subconjunto conexo dessa recta).

**Observação 5.1.1.** Obviamente que se  $J = \pm I$ , então  $W_J(A)$  reduz-se ao contradomínio numérico clássico e nesse caso, o algoritmo consiste apenas nos passos 1, 3 e 4, com as devidas adaptações, sendo que o invólucro pseudo-convexo dá lugar ao invólucro convexo dos pontos (5.1). Portanto, o algoritmo apresentado representa o contradomínio numérico tanto em espaços de Hilber como em espaços de Krein (de dimensão finita).

## 5.2 Exemplos

Ilustramos o algoritmo apresentado com alguns exemplos. Em todas as figuras, os pontos assinalados com uma cruz representam os valores próprios da matriz  $A$  que coincidem com os focos da curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$ .

**Exemplo 5.2.1.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para  $J = I_3$  e  $J = \text{diag}(1, 1, -1)$ , cálculos simples permitem concluir que os polinómios  $f_A(u, v, w)$  e  $f_A^J(u, v, w)$  definidos em (1.24) e (1.57), respectivamente, coincidem e são dados por  $(2u - w)(u^2 + v^2 - w^2)$ . Portanto, a equação de linhas da curva geradora de fronteira de  $W(A)$  e de  $W_J(A)$  é a mesma

$$(2u - w)(u^2 + v^2 - w^2) = 0. \quad (5.2)$$

Seguindo o método habitual de dualização descrito em (1.29), (1.30) e (1.31), conclui-se que o primeiro factor de (5.2) representa o ponto  $(-2, 0)$  e o segundo factor representa a circunferência de centro na origem e raio 1. A matriz  $A$  tem valores próprios,  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = 0$  (duplo). A fronteira de  $W_J(A)$ , para  $J = I_3$  e  $J = \text{diag}(1, 1, -1)$  está representada na figura 5.1.

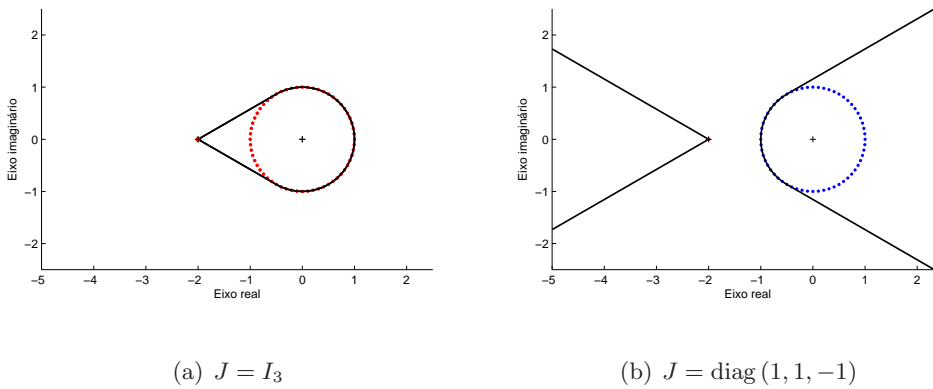


Figura 5.1:  $\partial W_J(A)$  (curva a cheio),  $C_J(A)$  (curva a ponteados) e  $\sigma(A)$  (pontos assinalados com uma cruz), sendo  $A$  a matriz definida no exemplo 5.2.1.

**Exemplo 5.2.2.** Seja

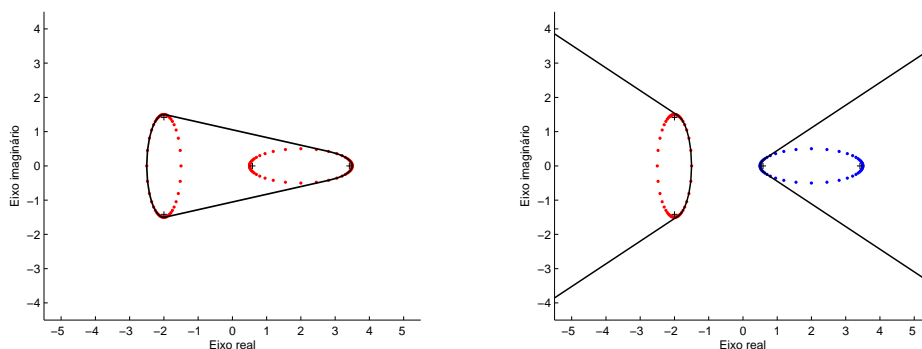
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para  $J = I_4$  e  $J = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ , alguns cálculos permitem concluir que a equação de linhas da curva geradora de fronteira de  $W(A)$  e de  $W_J(A)$  coincidem

$$(15u^2 - 9v^2 - 16uw + w^2)(7u^2 - v^2 + 16uw + 4w^2) = 0. \quad (5.3)$$

O primeiro factor de (5.3) representa a elipse de eixo vertical centrada em  $(-2, 0)$  cujos eixos maior e menor têm comprimento 3 e 1, respectivamente. O

segundo factor representa a elipse de eixo horizontal centrada em  $(2, 0)$  e com o mesmo comprimento de eixos da elipse anterior (cfr. figura 5.2). Os valores próprios de  $A$  coincidem com os focos das elipses e são as raízes da equação característica  $\lambda^4 - 8\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$ .



(a)  $J = I_4$

(b)  $J = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$

Figura 5.2:  $\partial W_J(A)$  (curva a cheio),  $C_J(A)$  (curva a ponteados) e  $\sigma(A)$  (pontos assinalados com uma cruz), sendo  $A$  a matriz definida no exemplo 5.2.2.

**Exemplo 5.2.3.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para  $J = I_4$  e  $J = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ , alguns cálculos permitem concluir a equação de linhas da curva geradora de fronteira de  $W(A)$  e de  $W_J(A)$  é a mesma

$$(u - v - w)(u + v - w)(u - v + w)(u + v + w) = 0. \tag{5.4}$$

Cada um dos factores de (5.4) representam, respectivamente, os pontos  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$  e  $(1, 1)$  representados na figura 5.3.

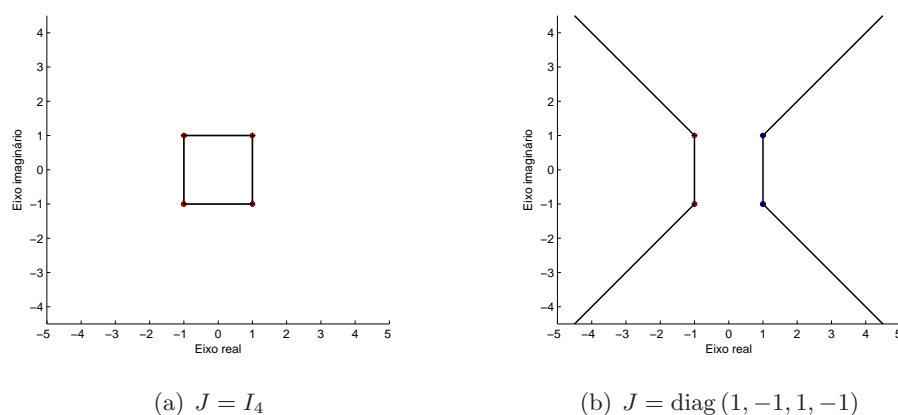


Figura 5.3:  $\partial W_J(A)$  (curva a cheio), os quatro pontos que constituem a curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$  e  $\sigma(A)$  (pontos assinalados com uma cruz), sendo  $A$  a matriz definida no exemplo 5.2.3.

**Exemplo 5.2.4.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Cálculos simples permitem concluir que o polinómio de Kippenhahn (1.24) é dado por

$$f_A(u, v, w) = 2u^3 - uv^2 - 2u^2w - v^2w - uw^2 + w^3,$$

enquanto que para  $J = \text{diag}(1, -1, -1)$  o polinómio (1.57) é dado por

$$f_A^J(u, v, w) = u^3 - 2uv^2 - u^2w - uw^2 + w^3.$$

As curvas geradoras de fronteira  $f_A(u, v, w) = 0$  e  $f_A^J(u, v, w) = 0$  de  $W(A)$  e  $W_J(A)$  estão representadas, respectivamente, na figura 5.4 (a) e (b).



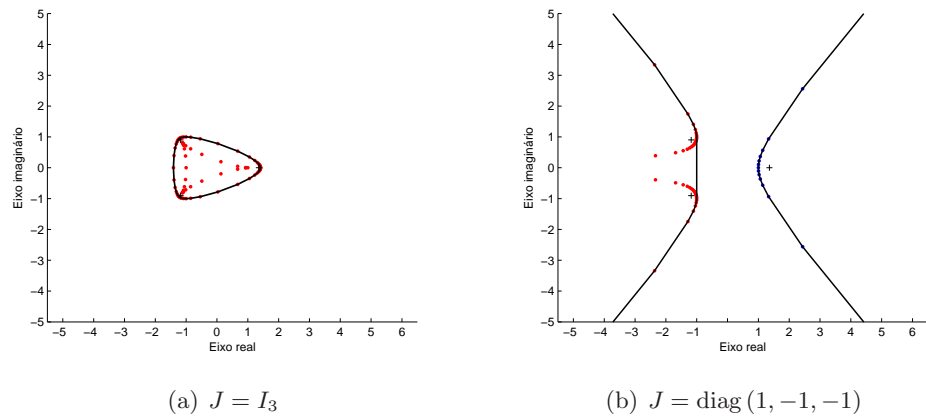


Figura 5.4:  $\partial W_J(A)$  (curva a cheio), pontos que constituem a curva geradora de fronteira de  $W_J(A)$  e  $\sigma(A)$  (pontos assinalados com uma cruz), sendo  $A$  a matriz definida no exemplo 5.2.4.



## Considerações finais

No final desta dissertação cumpre fazer um balanço do trabalho desenvolvido. Tendo por base o conceito de contradomínio numérico investigámos no presente trabalho duas vertentes fundamentais: a vertente teórica e a vertente computacional.

O ponto de partida para esta dissertação foi o estudo do contradomínio numérico de operadores de Toeplitz biperiódicos (capítulo 2). Com o decorrer da investigação surgiram temas paralelos e fomos, deste modo, conduzidos aos problemas tratados nos capítulos 3, 4 e 5, originais na sua totalidade. Assim, os temas investigados englobam a caracterização do contradomínio numérico de operadores 2-Toeplitz de banda, a caracterização do  $J$ -contradomínio numérico de uma classe especial de matrizes tridiagonais e o estudo do  $J$ -contradomínio numérico tracial.

A vertente computacional é assegurada pela implementação, em Matlab, de quatro algoritmos relativos às diversas matérias analisadas. Os dois primeiros algoritmos traçam a fronteira do contradomínio numérico de um operador 2-Toeplitz de banda baseados, respectivamente, na redução ao caso  $2 \times 2$  e no conceito de curva geradora de fronteira (secção 2.6). O terceiro algoritmo traça a fronteira do  $J$ -contradomínio numérico tracial de uma matriz arbitrária, baseado no conceito de recta de suporte (secção 4.6). O quarto algoritmo traça a fronteira do contradomínio numérico, definido e indefinido, de uma matriz arbitrária tendo por base o conceito de curva geradora de fronteira (secção 5.1).

A temática dos contradomínios numéricos em espaços de Krein é muito recente, razão pela qual proporciona um leque alargado de questões em aberto e constitui uma matéria promissora na investigação. Nesta linha, em trabalhos futuros pretendemos estender os resultados relativos ao contradomínio numérico de operadores 2-Toeplitz de banda ao caso indefinido, investigar condições suficientes para a ocorrência de  $J$ -contradomínios hiperbólicos e investigar a ocorrência de achatamentos na fronteira

Parece-nos igualmente interessante referir que os resultados relativos a operadores de Toeplitz biperiódicos apresentados no capítulo 2, podem ser estendidos a operadores de Toeplitz  $p$ -periódicos, ou sucintamente, operadores  $p$ -Toeplitz. Nesse caso, a matriz símbolo  $T_\phi$  será uma matriz  $p \times p$ . Por exemplo, no caso de um operador 3-Toeplitz associado à matriz infinita

$$T_\infty = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & b_{-3} & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & c_{-2} & c_{-3} & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_{-1} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$T_\phi = \begin{bmatrix} \sum_{-m \leq 3k \leq m} a_{3k} e^{ik\phi} & \sum_{-m \leq 3k-1 \leq m} a_{3k-1} e^{ik\phi} & \sum_{-m \leq 3k-2 \leq m} a_{3k-2} e^{ik\phi} \\ \sum_{-m \leq 3k+1 \leq m} b_{3k+1} e^{ik\phi} & \sum_{-m \leq 3k \leq m} b_{3k} e^{ik\phi} & \sum_{-m \leq 3k-1 \leq m} b_{3k-1} e^{ik\phi} \\ \sum_{-m \leq 3k+2 \leq m} c_{3k+2} e^{ik\phi} & \sum_{-m \leq 3k+1 \leq m} c_{3k+1} e^{ik\phi} & \sum_{-m \leq 3k \leq m} c_{3k} e^{ik\phi} \end{bmatrix},$$

supondo que  $T_f$  tem de largura de banda  $2m + 1$ .

Outras questões em aberto nesta linha de investigação irão obviamente surgir. Não seria realista da nossa parte crermos esgotar todas as possibilidades de estudo que o tema desta dissertação oferece. Acreditamos, no entanto, que o trabalho constitui um contributo para uma melhor compreensão do conceito de contradomínio numérico.



## Lista de Figuras

1.1	$W(A)$ e rectas de suporte. . . . .	11
1.2	$W(A)$ e $\mathcal{L}_\theta$ . . . . .	13
1.3	Quártica de equação (1.21) e rectas $y = \lambda x$ . . . . .	17
1.4	Curva geradora de fronteira de $W(A)$ , sendo $A$ a matriz do exemplo 1.1.17. . . . .	21
1.5	Curva geradora de fronteira de $W(A)$ , sendo $A$ a matriz do exemplo 1.1.18. . . . .	22
1.6	Ponto anguloso. . . . .	22
2.1	$\partial W(T_n)$ , para $n = 5, 8, 12, 20$ , $\partial W(T_{\phi_k})$ , $\phi_k = \frac{2k\pi}{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}$ , para $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor - 1$ , e respectivo invólucro convexo, sendo $T_n$ a matriz do exemplo 2.3.3. . . . .	67
2.2	$\partial W(T_n)$ , para $n = 8, 12, 25, 40$ , $\partial W(T_{\phi_k})$ , $\phi_k = \frac{2k\pi}{\lfloor \frac{n+6}{2} \rfloor}$ , para $k = 0, \dots, \lfloor \frac{n+6}{2} \rfloor - 1$ , e respectivo invólucro convexo, sendo $T_n$ a matriz do exemplo 2.3.4. . . . .	68
2.3	$\overline{\partial W(T_f)}$ e curvas geradoras de fronteira de $W(T_f)$ , sendo $T_f$ o operador definido no exemplo 2.4.2. . . . .	72
2.4	$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ relativamente ao operador 2-Toeplitz tridiagonal definido no exemplo 2.4.4. . . . .	75
2.5	$\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ relativamente ao operador 2-Toeplitz tridiagonal definido no exemplo 2.4.8 . . . . .	78

2.6	$\overline{\partial W(T_f)}$ , sendo $T_f$ o operador 2-Toeplitz pentadiagonal definido no exemplo 2.6.1. . . . .	82
2.7	$\overline{\partial W(T_f)}$ , sendo $T_f$ o operador 2-Toeplitz heptadiagonal definido no exemplo 2.6.2. . . . .	83
2.8	$\overline{\partial W(T_f)}$ , sendo $T_f$ o operador 2-Toeplitz eneadiagonal definido no exemplo 2.6.3. . . . .	84
3.1	$\partial W_J(A)$ e curva geradora de fronteira de $W_J(A)$ , sendo $A$ a matriz definida no exemplo 3.2.3. . . . .	96
3.2	$\partial W_J(A)$ e curva geradora de fronteira de $W_J(A)$ , sendo $A$ a matriz definida no exemplo 3.2.4. . . . .	98
4.1	Curva algébrica $L(X, Y) = 0$ e rectas de suporte de $W_C^J(A)$ , para $A, C$ e $J$ como no exemplo 4.4.1. . . . .	107
4.2	$\partial W_C^J(A)$ e pontos que pertencem à curva geradora de fronteira de $W_C^J(A)$ , sendo $A, C$ e $J$ as matrizes definidas no exemplo 4.4.5. . . . .	112
4.3	Rectas de suporte de $W_C^J(A)$ , sendo $A, C$ e $J$ , as matrizes definidas no exemplo 4.5.3. . . . .	115
4.4	Rectas de suporte e curva geradora de fronteira de $W_C^J(A)$ , para diferentes valores de $b$ , sendo $A$ a matriz definida no exemplo 4.5.10. . . . .	123
4.5	Rectas de suporte de $W_C^J(A)$ , sendo $A, C$ e $J$ as matrizes definidas no exemplo 4.6.2. . . . .	126
4.6	Rectas de suporte de $W_C^J(A)$ , sendo $A, C$ e $J$ as matrizes definidas no exemplo 4.6.3. . . . .	127
4.7	Rectas de suporte de $W_C^J(A)$ , sendo $A, C$ e $J$ as matrizes definidas no exemplo 4.6.4. . . . .	128
5.1	$\partial W_J(A)$ , curva geradora de fronteira de $W_J(A)$ e $\sigma(A)$ , sendo $A$ a matriz definida no exemplo 5.2.1. . . . .	134
5.2	$\partial W_J(A)$ , curva geradora de fronteira de $W_J(A)$ e $\sigma(A)$ , sendo $A$ a matriz definida no exemplo 5.2.2. . . . .	135



---

5.3	$\partial W_J(A)$ , curva geradora de fronteira de $W_J(A)$ e $\sigma(A)$ , sendo $A$ a matriz definida no exemplo 5.2.3. . . . .	136
5.4	$\partial W_J(A)$ , curva geradora de fronteira de $W_J(A)$ e $\sigma(A)$ , sendo $A$ a matriz definida no exemplo 5.2.4. . . . .	137



## Bibliografia

- [1] M. Adam e J. Maroulas, *The generalized Levinger transformation*, Fevereiro, 2008 (disponível em:  
[http://arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/0712/0712.3883v1.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0712/0712.3883v1.pdf)).
- [2] H. Andrews e B. Hunt, *Digital image restoration*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
- [3] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin, *Solid State Physics*, HRW International Editions, Saunders College, Philadelphia, 1976.
- [4] Y.-H. Au-Yeung e N.-K. Tsing, A conjecture of Marcus on the generalized numerical range, *Linear Multilin. Algebra* **14** (1983), 235–239.
- [5] T. Ya. Azizov e I. S. Iokhvidov, *Linear operators in spaces with an indefinite metric*, John Wiley & Sons, New York, 1989 (tradução de E. R. Dawson).
- [6] T. Bayasgalan, The numerical range of linear operators in spaces with an indefinite metric, *Acta Math. Hungar.* **57** (1991), n° 1–2, 7–9.
- [7] N. Bebiano, *Contradomínios numéricos generalizados de matrizes: variações sobre este tema*, dissertação de doutoramento, Universidade de Coimbra, 1984.
- [8] N. Bebiano, R. Lemos e J. da Providência, Numerical ranges of unbounded operators arising in quantum physics, *Linear Algebra Appl.* **381** (2004), 259–279.

- [9] N. Bebiano, R. Lemos, J. da Providência e G. Soares, On generalized numerical ranges of operators on an indefinite inner product space, *Linear Multilin. Algebra* **52** (2004), n° 3–4, 203–233.
- [10] \_\_\_\_\_, On the geometry of numerical ranges in spaces with an indefinite inner product, *Linear Algebra Appl.* **399** (2005), 17–34.
- [11] N. Bebiano, C.-K. Li e J. da Providência, Some results on the numerical range of a derivation, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **14** (1993), n° 4, 1084–1095.
- [12] \_\_\_\_\_, Generalized numerical ranges of permanental compounds arising from quantum systems of bosons, *Electron. J. Linear Algebra* **7** (2000), 73–91.
- [13] N. Bebiano, H. Nakazato, A. Nata e J. da Providência, The boundary of the Krein space tracial numerical range, an algebraic approach and a numerical algorithm, *Ann. Mat. Pura Appl.* **189** (2010), n° 4, 539–551.
- [14] N. Bebiano, H. Nakazato, J. da Providência, R. Lemos e G. Soares, Inequalities for  $J$ -Hermitian matrices, *Linear Algebra Appl.* **407** (2005), 125–139.
- [15] N. Bebiano, A. Nata e J. da Providência, Field of values of banded 2-Toeplitz operators, *Proceedings of the International Conference on Engineering and Mathematics*, Bilbao, Spain (2007), 95–102.
- [16] N. Bebiano e J. da Providência, Numerical ranges in physics, *Linear Multilin. Algebra* **43** (1998), n° 4, 327–337.
- [17] N. Bebiano, J. da Providência e A. Nata, Numerical ranges of banded biperiodic Toeplitz operators, *J. Math. Anal. Appl.*, submetido para publicação.
- [18] N. Bebiano, J. da Providência, A. Nata e G. Soares, Krein spaces numerical ranges and their computer generation, *Electron. J. Linear Algebra* **17** (2008), 192–208.

- 
- [19] N. Bebiano, J. da Providência e R. Teixeira, The elliptical and the hyperbolic range theorems revisited, *Proceedings of the International Conference on Engineering and Mathematics*, Bilbao, Spain (2007), 15–22.
- [20] \_\_\_\_\_, Flat portions on the boundary of the indefinite numerical range of  $3 \times 3$  matrices, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), n° 11–12, 2863–2879.
- [21] \_\_\_\_\_, Indefinite numerical range of  $3 \times 3$  matrices, *Czech. Math. Journal* **59** (2009), n° 1, 221–239.
- [22] C. A. Berger, *Normal dilations*, Ph. D dissertation, Cornell University, 1963.
- [23] D. Bini, *Toeplitz matrices, algorithms and applications*, ECRIM News Online Edition, n° 22, 1995.
- [24] D. Bini, G. Latouche e B. Meini, *Numerical methods for structured Markov chains*, Oxford University Press, 2005.
- [25] D. Bini e B. Meini, Exploiting the Toeplitz structure in certain queueing problems, *Calcolo* **33** (1996), n° 3–4, 289–305.
- [26] J. Bognár, *Indefinite inner product spaces*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [27] E. S. Brown e I. M. Spitkovsky, On matrices with elliptical numerical ranges, *Linear Multilin. Algebra* **52** (2004), n° 3–4, 177–193.
- [28] J. R. Bunch, Stability of methods for solving Toeplitz systems of equations, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **6** (1985), 349–364.
- [29] R. H. Chan e M. K. Ng, Conjugate gradient methods for Toeplitz systems, *SIAM Rev.* **38** (1996), n° 3, 427–482.
- [30] M.-T. Chien, On the numerical range of tridiagonal operators, *Linear Algebra Appl.* **246** (1996), 203–214.
- [31] \_\_\_\_\_, The envelope of the generalized numerical range, *Linear Multilin. Algebra* **43** (1998), n° 4, 363–376.

- [32] M.-T. Chien e J.-M. Huang, Numerical range of a continuant matrix, *Appl. Math. Lett.* **14** (2001), n° 2, 213–216.
- [33] M.-T. Chien e H. Nakazato, Boundary generating curves of the  $c$ -numerical range, *Linear Algebra Appl.* **294** (1999), n° 1–3, 67–84.
- [34] \_\_\_\_\_, The  $c$ -numerical range of tridiagonal matrices, *Linear Algebra Appl.* **335** (2001), n° 1–3, 55–61.
- [35] \_\_\_\_\_, The numerical range of a tridiagonal operator, *J. Math. Anal. Appl.* **373** (2011), n° 1, 297–304.
- [36] M.-T. Chien, L. Yeh, Y.-T. Yeh e F.-Z. Lin, On geometric properties of the numerical range, *Linear Algebra Appl.* **274** (1998), 389–410.
- [37] C. Chui e A. Chan, Application of approximation theory methods to recursive digital filter design, *IEEE Trans. Acoust. Speech. Signal Process* **30** (1982), 18–34.
- [38] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [39] C. Davis, The Toeplitz-Hausdorff theorem explained, *Canad. Math. Bull.* **14** (1971), 245–246.
- [40] P. J. Davis, *Circulant matrices*, Wiley, New York, 1979.
- [41] G. Dirr, U. Helmke, M. Kleinstauber e T. Schulte-Herbrüggen, A new type of  $C$ -numerical range arising in quantum computing, *Proc. Appl. Math. Mech.* **6** (2006), 711–712.
- [42] W. F. Donoghue Jr., On the numerical range of a bounded operator, *Michigan Math. J.* **4** (1957), 261–263.
- [43] J. L. M. Dorsselaer, An algorithm to compute sets enclosing  $M$ -numerical ranges with applications in numerical analysis, *Linear Multilin. Algebra* **41** (1996), n° 1, 49–61.

- [44] A. L. Duarte, *O Teorema de Tarski e suas aplicações em teoria de matrizes*, Universidade de Coimbra, 1993.
- [45] M. Eiermann, *Fields of values and iterative methods*, *Linear Algebra Appl.* **180** (1993), 167–197.
- [46] M. Fiedler, Geometry of the numerical range of matrices, *Linear Algebra Appl.* **37** (1981), 81–96.
- [47] W. Fulton, *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1969.
- [48] P. Garrett, *Compact operators on Hilbert space*, Fevereiro, 2005 (disponível em:  
[http://www.math.umn.edu/~garrett/m/fun/Notes/04b\\_cpt\\_ops\\_hsp.pdf](http://www.math.umn.edu/~garrett/m/fun/Notes/04b_cpt_ops_hsp.pdf)).
- [49] I. Gohberg, P. Lancaster e L. Rodman, *Matrices and indefinite scalar products*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.
- [50] \_\_\_\_\_, *Indefinite linear algebra and applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [51] M. Goldberg e E. G. Straus, Elementary inclusion relations for generalized numerical ranges, *Linear Algebra Appl.* **18** (1977), 1–24.
- [52] \_\_\_\_\_, Norm properties of  $C$ -numerical radii, *Linear Algebra Appl.* **24** (1979), 113–131.
- [53] V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, E. B. Vinberg e A. Kozłowski, *Lie groups and Lie algebras I: foundations of Lie theory. Lie transformation groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [54] R. M. Gray, On unbounded Toeplitz matrices and nonstationary time series with an application to information theory, *Info. & Control* **24** (1974), n° 2, 181–196.
- [55] \_\_\_\_\_, Toeplitz and circulants matrices: a review, *Found. Trends Commun. Inf. Theory* **2** (2006), n° 3, 155–239.

- [56] U. Grenander e M. Rosenblatt, *Statistical analysis of stationary time series*, John Wiley & Sons, New York, 1957.
- [57] K. E. Gustafson e D. K. M. Rao, *Numerical range: the field of values of linear operators and matrices*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [58] E. Gutkin, E. A. Jonckheer e M. Karow, Convexity of the joint numerical range: topological and differential geometric viewpoints, *Linear Algebra Appl.* **376** (2004), 143–171.
- [59] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, Princeton, New York, 1967.
- [60] F. Hausdorff, Der Wertvorrat einer Bilinearform, *Math. Zeit.* **3** (1919), 314–316.
- [61] R. Haydock, The recursive solution of the Schrödinger equations, *Solide State Phys* **35** (1980), 215–294.
- [62] S. Haykin, *Adaptive filter theory*, Prentice-Hall, 2nd ed., Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [63] R. A. Horn e C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.
- [64] \_\_\_\_\_, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1991.
- [65] N. Jacobson, *Basic algebra I*, 2nd ed., W. H. Freeman & Company, New York, 1985.
- [66] A. Jain, *Fundamentals of digital image processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [67] C. R. Johnson, Numerical determination of the field of values of a general complex matrix, *SIAM J. Numer. Anal* **15** (1978), 595–602.
- [68] T. Kato, *A short introduction to the perturbation theory of linear operators*, Springer-Verlag, New York, 1982.



- [69] R. Kippenhahn, Über den Wertevorrat einer matriz, *Math. Nachr.* **6** (1951), 193–228.
- [70] E. M. Klein, The numerical range of a Toeplitz operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* **35** (1972), n°1, 101–103.
- [71] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [72] D. W. Kribs, A. Pasieka, M. Laforest, C. Ryan e M. Silva, Research problems on numerical ranges in quantum computing, *Linear Multilin. Algebra* **57** (2009), n° 5, 491–502.
- [73] R. Lemos, *Contradomínio numérico, desigualdades matriciais e suas aplicações em Física*, dissertação de doutoramento, Universidade de Aveiro, 2005.
- [74] C.-K. Li,  $C$ -Numerical ranges and  $C$ -numerical radii, *Linear Multilin. Algebra* **37** (1994), 51–82.
- [75] \_\_\_\_\_, A simple proof of the elliptical range theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), n° 7, 1985–1986.
- [76] \_\_\_\_\_, Some convexity theorems for the generalized numerical ranges, *Linear Multilin. Algebra* **40** (1996), n° 3, 235–240.
- [77] C.-K. Li e H. Nakazato, Some results on the  $q$ -numerical range, *Linear Multilin. Algebra* **43** (1998), n° 4, 385–409.
- [78] C.-K. Li e L. Rodman, Shapes and computer generation of numerical ranges of Krein space operators, *Electron. J. Linear Algebra* **3**, (1998) 31–47.
- [79] \_\_\_\_\_, Remarks of numerical ranges of operators in spaces with an indefinite metric, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), n° 4, 973–982.
- [80] C.-K. Li, C. H. Sung e N.-K. Tsing,  $c$ -Convex matrix: characterizations, inclusion relations and normality, *Linear Multilin. Algebra* **25** (1989), 275–287.

- 
- [81] C.-K. Li, N.-K. Tsing e F. Uhlig, Numerical ranges of an operator on an indefinite inner product space, *Electron. J. Linear Algebra* **1** (1996), 1–17.
- [82] M. Marcus e I. Filippenko, Nondifferentiable boundary points of the higher numerical range, *Linear Algebra Appl.* **21** (1978), 217–232.
- [83] M. Marcus, B. N. Moys e I. Filippenko, Normality and the higher numerical range, *Canad. J. Math.* **30** (1978), 419–430.
- [84] M. Marcus e C. Pesce, Computer generated numerical ranges and some resulting theorems, *Linear Multilin. Algebra* **20** (1987), 121–157.
- [85] M. Marcus e B. N. Shure, The numerical range of certain 0–1 matrices, *Linear Multilin. Algebra* **7** (1979), 111–120.
- [86] J. W. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Studies, **51**, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [87] M. Morse, Relations between the critical points of a real function of  $n$  independent variables, *Trans. Am. Math. Soc.* **27** (1925), 345–396.
- [88] F. D. Murnaghan, On the field of values of a square matrix, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **18** (1932), 246–248.
- [89] H. Nakazato, The  $C$ -numerical range of a  $2 \times 2$  matrix, *Sci. Rep. Hirosaki Univ.* **41** (1994), n° 2, 197–206.
- [90] \_\_\_\_\_, Numerical range of certain weighted bilateral shift matrices, *Bull. Fac. Sci. Technol. Hirosaki Univ.* **6** (2003), n° 1, 1–18.
- [91] H. Nakazato, N. Bebiano e J. da Providência, The numerical range of 2-dimensional Krein space operators, *Can. Math. Bull.* **51** (2008), n° 1, 86–99.
- [92] \_\_\_\_\_, The  $J$ -numerical range of a  $J$ -Hermitian matrix and related inequalities, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), n° 11–12, 2995–3014.

- [93] \_\_\_\_\_, Convexity of the Krein space tracial numerical range and Morse theory, *Mathematical Reports of the Academy of Science, Royal Society of Canada* **32**, n° 4, 2010.
- [94] H. Nakazato, Y. Nishikawa e M. Takaguchi, On the boundary of the  $C$ -numerical range of a matrix, *Linear Multilin. Algebra* **39** (1995), n° 3, 231–240.
- [95] H. Nakazato e K. Tsumura,  $k$ -Numerical range and the structural performance of buildings, *Sci. Math. Japonicae* **53** (2000), n° 1, 101–117.
- [96] Y. T. Poon, Another proof of a result of Westwick, *Linear Multilin. Algebra* **9** (1980), 35–37.
- [97] J. da Providência, The numerical ranges of derivations and quantum physics, *Linear Multilin. Algebra* **37** (1994), n° 1–3, 213–220.
- [98] T. Schulte-Herbrüggen, G. Dirr, U. Helmke e J. S. Glaser, The significance of the  $C$ -numerical range and the local  $C$ -numerical range in quantum control and quantum information, *Linear Multilin. Algebra* **56** (2008), n° 1–2, 3–26.
- [99] H. Shapiro, A conjecture of Kippenhahn about the characteristic polynomial of a pencil generated by two hermitian matrices II, *Linear Algebra Appl.* **45** (1982), 97–108.
- [100] J. Shapiro, *Notes on the numerical range*, Lecture Notes, Michigan State University, 2004.
- [101] J. N. Tavares, *Tópicos de Geometria*, FCUP, manual da licenciatura em Matemática, 2006.
- [102] R. C. Thompson, A note on normal matrices, *Canad. J. Math.* **15** (1963), 220–225.
- [103] O. Toeplitz, Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. I. Teil: Theorie der L-Formen, *Math. Annal.* **70** (1911), 351–376.

- 
- [104] \_\_\_\_\_, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, *Math. Z.* **2** (1918), 187–197.
- [105] N.-K. Tsing, On the shape of the generalized numerical range, *Linear Multilin. Algebra* **10** (1981), 173–182.
- [106] R. J. Walker, *Algebraic Curves*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1950.
- [107] R. Westwick, A theorem on numerical range, *Linear Multilin. Algebra* **2** (1975), 311–315.
- [108] A. Wintner, Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen, *Math. Z.* **30** (1929), 228–282.

# Índice Remissivo

## A

$A[kl]$ , 99–100

álgebra de Wiener, 48

algoritmo que permite gerar a re-  
presentação geométrica

de  $W_J(A)$ , 131–133

de  $W_C^J(A)$ , 124–126

de  $W(T_f)$ , 80–82

## B

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , 1, 2

## C

coeficientes de Fourier, 48

cone convexo, 33

conjunto conexo, 3

contradomínio numérico

clássico

definição, 2

propriedades, 4–5, 9

indefinido

definição, 31

propriedades, 31–32

tracial (definido)

definição, 24

propriedades, 25

tracial (indefinido)

definição, 41

propriedades, 41

curva algébrica

afim, 14

projectiva, 15

curva geradora de fronteira

de  $W(A)$ , 19

de  $W_J(A)$ , 38

de  $W_C^J(A)$ , 111

de  $W(T_f)$ , 79

## D

decomposição cartesiana

clássica, 4

indefinida, 30

## E

equivalência assintótica de matrizes

definição, 59

propriedades, 59–60

espaço

de Hardy, 48, 49

de Hilbert, 1, 2

- de Krein, 28  
 $\ell^2$ , 48
- espectro  
 definição, 2–3  
 $\sigma_{\text{app}}(A)$ , 3  
 $\sigma_c(A)$ , 3  
 $\sigma_p(A)$ , 3  
 $\sigma_r(A)$ , 3  
 $\sigma_{\text{ess}}(A)$ , 3  
 $\sigma_H^+(A)$ , 30  
 $\sigma_H^-(A)$ , 30
- F**  
 forma quadrática, 1
- G**  
 grupo  $J$ -unitário, 34  
 grupo simétrico de grau  $n$ , 25, 42, 116  
 grupo unitário, 24, 35
- I**  
 ínfimo essencial, 57  
 invólucro  
   convexo, 3, 19, 26, 65, 67–70, 116, 119  
   pseudo-convexo, 33, 39
- L**  
 lei da inércia de Sylvester, 35, 41
- M**  
 método  
   de desomogenização, 15  
   de dualização, 19–20  
 matriz
- 2-Toeplitz  
   de banda, 46  
   definição, 45  
 2-circulante, 50  
 símbolo, 47  
 tridiagonal, 46, 85
- N**  
 norma  
   espectral, 58  
   Euclideana ou de Frobenius, 58
- O**  
 operador linear/matriz  
   adjunto(a), 2  
   auto-adjunto/hermítica, 2  
   essencialmente  $J$ -auto-adjunto/  
     essencialmente  $J$ -hermítica, 37  
    $H$ -adjunto(a), 29  
    $H$ -auto-adjunto/ $H$ -hermítica, 29  
    $H$ -normal, 29  
    $H$ -unitári(o)a, 30  
   normal, 2  
   unitário(a), 2
- P**  
 plano projectivo, 13  
 polinómio  
   de Kippenhahn, 18  
   homogéneo, 14  
 ponto anguloso, 22, 38  
 ponto- $\sigma$   
   definido, 25  
   indefinido, 116

- porção plana, 112
- produto interno
- definido, 1
  - indefinido
    - definição, 27
    - induzido por uma matriz hermitica e não-singular, 29
- positivo, 28
- próprio, 3

**Z**

$\mathbb{Z}[x, y, z]$ , 107

**R**

- raízes índice  $n$  de  $z$ , 51
- recta de suporte, 10

**S**

- supremo essencial, 57

**T**

- teorema
- de Kippenhahn-Donoghue, 23
  - de Murnaghan-Kippenhahn, 19
  - de Toeplitz-Hausdorff, 8
  - do contradomínio elíptico
    - para  $W(A)$ , 6
    - para  $W_C(A)$ , 26
  - do contradomínio hiperbólico
    - para  $W_J(A)$ , 36
    - para  $W_C^J(A)$ , 42

**V**

- valores próprios
- definição, 3
  - não entrelaçados, 30
- vector
- anisotrópico, 28
  - isotrópico, 28
  - negativo, 28

