A UTILIZAÇÃO DOS CONCEITOS DE ENTROPIA NA SINTESE DE ESTRUTURAS COM COMPORTAMENTO ELASTOPLASTICO

L.M.C. Simões *

Resumo: É intenção deste trabalho dar a conhecer uma nova técnica de optimização cujas potencialidades estão actualmente a ser investigadas no Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Coimbra. Consiste na aplicação do princípio da entropia, formulada por Shannon para medir a incerteza num processo estocástico, à síntese de estruturas com comportamento elastoplastico. Deste modo é possível ultrapassar algumas das dificuldades decorrentes das restrições de complementaridade que determinam que o domínio do programa matemático seja não-convexo.

1. Introdução

Os métodos de optimização que actualmente se utilizam no dimensionamento de estruturas com comportamento elástico foram desenvolvidos nos últimos vinte anos. Tem-se verificado que não são muito eficientes quando se aplicam a outros problemas de optimização, tais como a optimização de forma de estruturas que se apoia na discretização por elementos finitos e a síntese elastoplástica em que estão presentes restrições de complementaridade. Julga-se ser conveniente propor estratégias baseadas em conceitos fundamentalmente diferentes. Entre estes, os métodos baseados em entropia da informação[1,2] tem um potencial considerável, embora ainda se encontrem num estádio primário de investigação.
O problema genérico da optimização de estruturas com comportamento elastoplástico não tem sido objecto de muitos trabalhos, com excepção de alguns problemas problemas particulares[3,4]. Pretende-se neste trabalho analizar uma classe suficientemente alargada de problemas de optimização de estruturas elastoplásticas (com ou sem endurecimento) que suportam um determinado carregamento e estão sujeitas a restrições de ordem tecnológica e deformações que não excedem certos limites impostos.

* Professor Associado de Engenharia Civil
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Uma hipótese de base normalmente aceite é que a lei constitutiva corresponde à plasticidade holonómica quando o carregamento varia proporcionalmente. Por outro lado, supõe-se que a função objectivo é linearmente dependente das variáveis de decisão identificadas com parametros de resistencia local. Um dos aspectos mais dignos de realce da formulação matemática deste tipo de problemas de optimização é que existe uma relação de complementaridade entre pares de variáveis de estado. O problema de análise elastoplastica, inverso do dimensiomento conduziria a um problema de complementaridade linear.

No caso mais geral de comportamento das secções da estrutura, admite-se que as variáveis de decisão afectem a resistência e a rigidez das secções correspondentes, o que acontece em estruturas metálicas dúcteis e nas de betão armado em que se admite variarem as dimensões da secção e as armaduras.

No caso de se pretender minimizar a armadura em estruturas de betão armado em que a secção se mantém constante, pode assumir-se que as variáveis de decisão não alteram a rigidez elástica e rigidez plástica .

2. Formulação do problema

Por hipótese, a função objectivo é linearmente dependente das variáveis de decisão r, e como se admite que o custo é proporcional ao volume do material, tem-se:

$$\text{Min } w = c^t r \tag{1}$$

Se u e F representarem, respectivamente, os vectores dos deslocamentos nodais e do carregamento aplicado (β grau de liberdade) e supondo que a análise se pode basear na geometria inicial as equações de compatibilidade e equilíbrio escritas na forma matricial são:

$$q = C u \tag{2}$$

$$C^t Q = F \tag{3}$$

onde a matriz C ($m \times \beta$) tem traço β desde que a estrutura seja isocinemática, Q e q são os vectores com m elementos dos esforços e das deformações das barras.

Em cada membro i admite-se que as relações constitutivas que ligam os esforços às deformações são holonómicas e constituídas por troços lineares (Fig.1),

$$q^i = e^i + p^i = (S^i)^{-1} Q^i + \lambda^i_1 - \lambda^i_2 \tag{4a}$$

$$\phi^i_1 = r^i_1 + H^i_1 \lambda^i_1 - Q^i \geq 0 \tag{4b}$$

$$\phi^i_2 = r^i_2 + H^i_2 \lambda^i_2 - Q^i \geq 0 \tag{4c}$$

$$\lambda^i_1 , \lambda^i_2 \geq 0 \quad ; \quad \phi^i_1 \lambda^i_1 = 0 \quad ; \quad \phi^i_2 \lambda^i_2 = 0 \tag{4d}$$

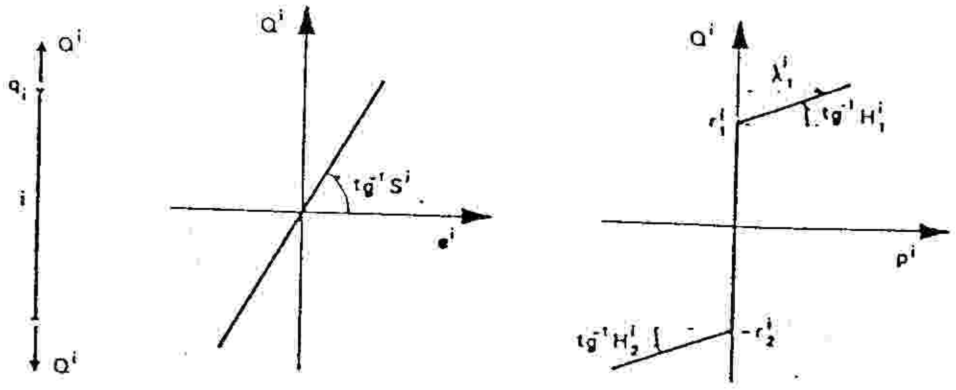

Figura 1

Nestas expressões λ^i_j e ϕ^i_j representam, respectivamente, o multiplicador plástico e a função de cedência e H^i_j é o módulo de endurecimento. Agrupando estas relações para o conjunto de membros m, tem-se na forma matricial,

$$q = S^{-1} Q + p \tag{5a}$$

$$p = N \lambda \quad ; \quad \lambda \geq 0 \tag{5b}$$

$$\phi = r + H \lambda - N^t Q \geq 0 \tag{5c}$$

$$\phi^T \lambda = 0 \tag{5d}$$

onde, $N = [I \ \ -I]$

Substituindo os vectores q e Q as expressões (2), (3) e (5) vem:

$$K u - C^t \lambda = F \tag{6a}$$

$$r - N^T S C u + (N^t S N + H) \lambda = \phi \tag{6b}$$

$$\phi \geq 0 \quad ; \quad \lambda \geq 0 \quad ; \quad \phi^T \lambda = 0 \tag{6c}$$

onde, $K = C^t S C$ é a matriz de rigidez da estrutura.

De (6a) tem-se que:

$$u = u^E + G N \lambda \tag{7}$$

onde,

$$u^E = K^{-1} F \quad \text{e} \quad G = K^{-1} C^t S \tag{8}$$

Do ponto de vista mecânico o vector u^E representa os deslocamentos elásticos e a matriz G dá os coeficientes de influência dos deslocamentos devidos às deformações λ. Em geral a rigidez das barras, composta da rigidez elástica representada por S e da rigidez plástica (endurecimento) que se designa H, varia com a resistência r da barra, porque todos os parâmetros que definem o comportamento dos membros dependem das características geométricas das secções das barras (que são as variáveis de decisão). Então para um determinado conjunto de variáveis r a expressão que dá a resposta da estrutura às cargas pode ser representada do seguinte modo:

$$\phi = r + (H(r) - N^t Z(r) N) \lambda - N^t Q^E(r) \geq 0 \quad ; \quad \lambda \geq 0 \qquad (9a)$$

$$\phi^t \lambda = 0 \qquad (9b)$$

onde,

$$Q^E(r) = S(r)\ C\ K(r)^{-1} F \quad e \quad Z(r) = (S(r)\, C\, K(r)^{-1} C^T S(r) - S(r)) \qquad (10)$$

$Q^E(r)$ é o vector das tensões elásticas devidas ás cargas e $Z(r)$ é a matriz simétrica dos coeficientes de influência das tensões internas que são produzidas pelas deformações. De notar que a formulação (9) equivale ao problema de análise elastoplástica holonómica.
Para entrar com estados limites de utilização, impõe-se limites superiores nos deslocamentos respectivos:

$$-U \leq B\, u^E(r) + B\, G(r)\, N\, \lambda \leq U \qquad (11)$$

A escolha destes deslocamentos é feita através da matriz binária B.
Se o material tiver ductilidade limitada, impõe-se limites superiores multiplicadores plásticos:

$$\lambda \leq \Lambda \qquad (12)$$

Por outro lado, as variáveis de decisão podem estar sujeitas a restrições tecnológicas (por exemplo, várias barras representadas pela mesma variável de decisão, simetria no dimensionamento). Estas restrições lineares podem ser representadas através de:

$$T\, r = 0 \quad ; \quad r \geq 0 \qquad (13)$$

No caso particular do modelo ser elástico-plástico perfeito, $H = 0$ e tem de se assegurar que existe capacidade resistente suficiente para suportar as cargas aplicadas. Q^E representa um estado de tensão em equilíbrio com as cargas e $Z\, N \lambda$ é um estado de tensão auto-equilibrado qualquer que seja o valor de λ. As desigualdades (9a) garantem que as cargas são estatisticamente admissíveis e não excedem a capacidade resistente r dos membros da estrutura.

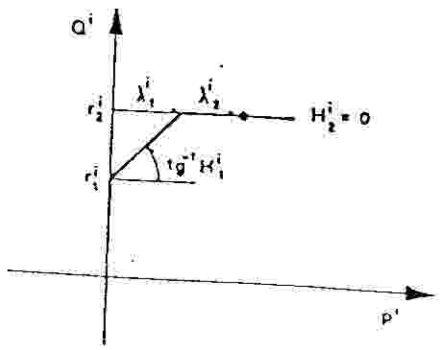

Figura 2

A lei de deformabilidade representada na Fig.2, onde se segue a um estado de endurecimento um comportamento plástico perfeito tem interesse prático (betão armado). Os ramos onde se verifica o endurecimento vão afectar as mudanças de geometria ainda que a carga de colapso plástico não seja alterada.

3. Conceitos Básicos de Entropia

Considerar o programa de optimização a seguir indicado (Problema A):

$$\mathrm{Min}_{xi} \; f(x) \qquad i = 1,\ldots,N \tag{14a}$$

$$\text{sa} \quad g_j(x) \leq 0 \qquad j = 1,\ldots,M \tag{14b}$$

A forma surrogada equivalente do Problema A (Problema B) é:

$$\mathrm{Min}_{xi} \; f(x) \qquad i = 1,\ldots,N \tag{15a}$$

$$\text{sa} \quad \Sigma_{j=1,M} \; \alpha_j \; g_j(x) \leq 0 \tag{15b}$$

onde os multiplicadores surrogados tem de obedecer a:

$$\alpha_j \geq 0 \tag{16a}$$

$$\Sigma_{j=1,M} \; \alpha_j = 1 \tag{16b}$$

Uma solução x* do Problema A também resolve o Problema B com α*. Tem-se:

$$f_B(\alpha) \leq f_B(\alpha^*) \tag{17}$$

3.1. Possível esquema de solução:

Um possível esquema de resolução consistiria em escolher em primeiro lugar um conjunto inicial α^o. Em segida, resolve-se o Problema B com α^o de modo a obter-se x^o e $f_B(\alpha^o)$.

Para a iteração seguinte, tem de se actualizar de qualquer forma α^o para α^1, e resolver o Problema B com α^1 de modo a ter-se x^1 e $f_B(\alpha^1) > f_B(\alpha^o)$.

Continuar a actualizar α até encontrar um valor de x* que satisfaça todas as restrições do Problema A. Esse valor de x* é uma solução do problema A.

Para um dado valor de x, o problema de encontrar uma melhor tentativa para α tem a seguinte forma:

Determinar,

$$\alpha = \alpha_j^{[k]} \qquad ; \; j = 1,...,M \tag{18}$$

de modo que,

$$\Sigma_{j=1,M} \; \alpha_j^{[k]} \; g_j(x)^{[k-1]} = \varepsilon \tag{19}$$

e uma função objectivo desconhecida $f_B(\alpha)$ tenda para um valor máximo.

Os conceitos de entropia são aqui introduzidos como substitutos da função objectivo implícita $f_B(\alpha)$. Assim, tem-se:

$$\text{Max } (S/K) = - \Sigma_{j=1,M} \alpha_j \ln \alpha_j \tag{20a}$$

$$\text{sa} \qquad \Sigma_{j=1,M} \alpha_j = 1 \tag{20b}$$

$$\Sigma_{j=1,M} \alpha_j \, g_j(x) = \varepsilon \tag{20c}$$

A solução para este problema é a estimativa de α com menor erro:

$$\alpha_j^{[k]} = \frac{e^{\beta^{[k]}} \; g_j\,(x^{[k-1]})}{\Sigma_{j=1,M} \; e^{\beta^{[k]}} \; g_j\,(x^{[k-1]})} \tag{21}$$

3.2. Implementação

1. $k = 0$

$$\alpha_j^{[o]} = 1/M \qquad ; \qquad j = 1, ... M$$

2. Resolver:

$$\text{Min}_x \; f(x)$$

$$\text{sa} \qquad \Sigma_{j=1,M} \; \alpha_j^{[k]} \; g_j(x) = 0$$

que tem por solução $x_i^{[k]}$, $i = 1,...,N$

3. Verificar convergência:

$$g_j(x^{[k]}) < \varepsilon^+ , \qquad \forall_j \quad ?$$

a) SIM $\Rightarrow$ Terminar $x^{[k]} = x^*$.

b) NÃO $\Rightarrow$ Passo 4.

4. $k = k+1$; Escolher $\beta^{[k]} > 0$ de modo que $\beta^{[k]} > \beta^{[k-1]}$

5.

$$\alpha_j^{[k]} = \frac{e^{\beta[k]\, g_j (x^{[k-1]})}}{\Sigma_{j=1,M}\, e^{\beta[k]\, g_j (x^{[k-1]})}} \qquad j = 1,...M$$

voltar ao Passo 2.

3.3. Interpretação

A restrição no Problema B tem um valor esperado nulo. Os valores de α_j são as possibilidades de que cada uma das restrições do Problema A seja activa na solução óptima. Maximizando a entropia, pretende-se encontrar em cada iteração os valores de α_j com menor erro baseados na informação do g(x) calculado na iteração anterior.

4. Aplicação do Conceito de Entropia à Síntese de Estruturas Elastoplásticas

Nos casos práticos a variação dos valores das resistências locais r vai afectar a rigidez (elástica S e plástica H) de uma forma complexa. Contudo há cásos em que as modificações em r não produzem variações significativas na rigidez elástica: Em estruturas de betão armado pode-se minimizar a armadura supondo constantes as dimensões das secções e um comportamento elástico-plástico perfeito do material (embora se possa admitir um endurecimento plástico constante). Deste modo as matrizes S, G, Z e H e os vectores Q^E, u^E são constantes e o programa matemático transforma-se num problema de programação complementar: Trata-se de um programa linear onde é adicionada a relação de complementaridade, que o torna não linear e não-convexo.

$$\text{Min} \quad w = c^t r \tag{22a}$$

$$\text{sa} \quad \phi = [H - N^t Z N]\, \lambda - N^t Q^E \geq 0 \tag{22b}$$

$$-U \leq B U^E + B G N \lambda \leq U \tag{22c}$$

$$\lambda \leq \Lambda \tag{22d}$$

$$\lambda \geq 0 \quad ; \quad r \geq 0 \tag{22e}$$

$$\phi^T \lambda = 0 \tag{22f}$$

Este problema pode ser resolvido utilizando o algoritmo descrito no parágrafo anterior.
Em primeiro lugar, reduz-se o número de variáveis de decisão independentes com base no conjunto de restrições tecnológicas:

$$T r = 0 \tag{23}$$

Para utilizar os métodos baseados em entropia, a condição de complementaridade (22f) é inicialmente relaxada, sendo imposta numa fase ulterior através da manipulação dos multiplicadores surrogados α_j. É necessário um ponto de partida r^o que pertença ao domínio para iniciar o algoritmo. Para forçar a que a condição de complementaridade seja cumprida, utiliza-se a relação

$$\phi_m \alpha_m = \lambda_n \alpha_n \tag{24}$$

que liga os multiplicadores surrogados α_m, α_n aos potenciais plásticos e multiplicadores plásticos ϕ_m, λ_n, respectivamente e fornece uma indicação sobre as variáveis que se encontram na base.

Se a rigidez (S e H) variar quando r for alterado, os vectores Q^E, u^E e as matrizes Z, H, S e G ao depender dos valores das variáveis de decisão aumentam a não-linearidade e a não convexidade do programa de optimização. Embora seja possível neste caso mais geral utilizar o mesmo método, descreve-se em seguida um algoritmo que reduz as oscilações entre iterações sucessivas e evita to trabalho numérico de cálculo de $Q^E(r)$, $H(r)$, $Z(r)$, $u^E(r)$ e $G(r)$ de cada vez que é obtido um novo r.

4.1. Algoritmo OD

Cada iteração deste algoritmo consiste essencialmente em resolver dois programas matemáticos. Na Fase O tenta melhorar-se o dimensionamento obtido na iteração anterior. Verifica-se em seguida se o resultado obtido pertence ou não ao domínio do problema inicial (Fase D).

Na fase de optimização (Fase O) deste método iterativo resolve-se o problema (22a)-(22e) em ordem a r, definindo-se Q^E, H, Z, u^E e G a partir de r^o, ou seja: Calcula-se um novo r^* supondo que as modificações em r não produzem variações significativas na rigidez. Se a solução deste programa der $r^* = r^o$, está encontrada uma solução local.

Se isso não acontecer ($r^* \neq r^o$) e tenta encontrar-se uma solução pertencente ao domínio (Fase D). Normalmente limita-se o passo máximo $| r - r^o |$.

Nesta fase é resolvido o sistema a seguir indicado em ordem e ϕ e λ,

$$\phi = [H(r^*) - N^t Z(r^*) N] \lambda + r^* - N^t Q^E(r^*) \geq 0 \quad ; \quad \lambda \geq 0 \tag{25a}$$

$$- U \leq B\, U^E (r^*) + B\, G\, (r)\, N\, \lambda \leq U \tag{25b}$$

$$\lambda \leq \Lambda \tag{25c}$$

$$\phi^t \lambda = 0 \tag{25d}$$

o que se consegue utilizando a função objectivo artificial (em lugar da função objectivo w com $r = r^*$):

$$\text{Min } \Sigma_i \, \phi_i + \Sigma_i \, \lambda_i \tag{26}$$

A condição de complementaridade (25d) seria obedecida indirectamente através da escolha dos multiplicadores surrogados. Se este sistema tiver solução, r^* pertence ao domínio do problema inicial e r^o é substituído por r^* na iteração seguinte em virtude de se ter $c^t r^* \leq c^t r^o$. Se r^* não pertencer ao domínio, fazia-se $r^* = (r^* + r^o)/2$ e recomeçaria a fase D.

5. Aplicação

O exemplo normalmente utilizado é a treliça representada na Fig.3.

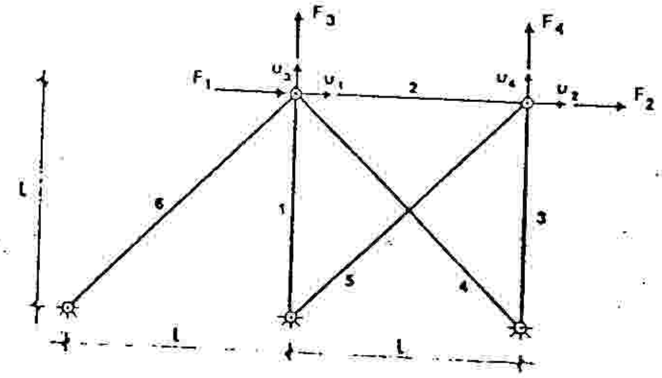

Figura 3

Pressupõe-se que cada barra possui um único modo de cedência à compressão, $H^i_1 = 0$, que é a carga crítica de Euler $\pi^2 E\, I_i/l_i^2$. Considerando secções do tipo "sandwich" com uma altura útil h_i em todas as barras, o momento de inércia $I_i = 1/2\, h_i^2 A_i$ é proporcional à área A_i dos banzos que suportam as tensões instaladas. Admite-se geralmente que a resistência r_i, a rigidez elástica S_i e o custo de cada membro c_i são proporcionais a A_i. Escolhendo convenientemente as dimensões, tem-se:

$$r_{1,2,3} = 3\,A_1 \quad ; \quad r_{4,5,6} = 2\,A_2$$

$$S_{1,2,3} = 3\,A_1 \quad ; \quad S_{4,5,6} = 2\,A_2$$

Supondo que o enlongamento no limite de cedência é uma unidade e a rigidez elástica das barras é idêntica às resistências, impondo o mesmo limite em todos os deslocamentos, tem-se:

$$U^t = [\,4 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 4\,] \quad ; \quad B = I$$

Este exemplo foi resolvido considerando diferentes matrizes tecnológicas e carregamentos:

Caso 1

Supor que todas as barras com o mesmo comprimento são representadas pela mesma variável de decisão, tem-se:

$$r' = r_1 = r_2 = r_3 \quad ; \quad r'' = r_4 = r_5 = r_6$$

Considera-se para carregamento,

$$F^t = [9 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$$

Caso 2

Utiliza-se a matriz tecnológica do exemplo anterior e o carregamento é dado por:

$$F^t = [7 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 0]$$

Caso 3

Considera-se o carregamento indicado no Caso 1 e supõe-se que as seis variáveis de decisão podem variar independentemente.

6. Discussão

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia para a solução do problema de síntese elastoplastica de estruturas, baseada em conceitos radicalmente diferentes dos tradicionalmente adoptados. No escasso número de artigos onde aquele assunto é tratado, são utilizados métodos que se baseiam em programação matemática ou em critérios de optimalidade. Os métodos que se apoiam em entropia tem sobre a programação matemática a vantagem de evitar a utilização de árvores combinatórias que tornam muito morosa a resolução destes problemas não lineares e não-convexos. Além disso constituem por si próprios uma estratégia para a escolha do conjunto de restrições activas através da informação produzida pelo comportamento do modelo, o que é reconhecidamente a grande deficiência dos métodos baseados em critérios de optimalidade. Contudo, ainda constituem uma área nova de investigação.

Bibliografia

1. Templeman, A.B. e Xingsi, L., "A Maximum Entropy Approach to Constrained Non-linear Programming", Engrg. Opt., 12, 191-205, 1987.

2. Basu, P.C. e Templeman, A.B. , "An Efficient Algorithm to Generate Maximum Entropy Distributions", Int. J. Num. Meths. Engrg., 20, 1039-1055, 1984.

3. Kaneko, I. e Maier, G. , "Optimum Design of Plastic Structures under Displacement Constraints", Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg., 27, 369-391, 1981.

4. Cinquini, C. e Contro, R. , "Optimal Design of Elastic-plastic Structures", Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems, C.A. Mota Soares Ed.,Springer-Verlag, 1987.