

Dimensionamento de Estruturas Dúcteis com Base em Critérios Probabilísticos

Reability-Based Synthesis of Ductile Structures

Luis Miguel da Cruz Simões *

SUMÁRIO

Consideram-se neste artigo pórticos com comportamento plástico perfeito e lajes discretizadas em elementos finitos triangulares cujo comportamento está de acordo com a teoria das linhas de rotura. Descreve-se uma técnica de programação matemática que minimiza o volume médio total de aço de uma estrutura metálica ou o volume médio total de armadura de uma estrutura em betão armado, de modo a garantir uma probabilidade de rotura inferior a um valor estipulado. São resolvidos alternadamente uma minimização convexa e uma maximização quadrática convexa até se obter a solução de volume mínimo que cumpre os condicionamentos probabilísticos. O algoritmo é implementado através de exemplos numéricos.

ABSTRACT

A portal frame and a reinforced concrete slab discretized into triangular finite elements both exhibiting perfectly-plastic behaviour are considered in this work. A mathematical programming technique is described which minimizes the total average volume of steel of a portal frame or the total average volume of reinforcement of a reinforced concrete slab for a specified failure probability. It consists of solving alternatively a quadratic convex maximization and a convex minimization until the best reliability-based design against collapse occurs. The proposed computational technique is illustrated by means of numerical examples.

1 — INTRODUÇÃO

Os métodos de optimização que se baseiam em critérios de segurança determinísticos podem diminuir o nível de segurança de uma estrutura ao minimizar o seu volume. Esta limitação é significativa porque os critérios de segurança não são especificados em termos do risco da rotura enquanto as características do carregamento e a resistência da estrutura são aleatórias. Por conseguinte os métodos mais apropriados para analisar as incertezas associadas ao comportamento aleatório baseiam-se em conceitos de fiabilidade. Ainda que este raciocínio seja naturalmente aceite, os programas de optimização baseados em conceitos de fiabilidade não tem gozado da mesma popularidade que os determinísticos. Pelo menos três razões se sugerem: Em primeiro lugar há vários métodos para avaliar a insegurança para situações semelhantes e que conduzem a resultados diferentes (Ellingwood e Galambos¹, Shinozuka²). Em segundo lugar, os projectistas consideram que um sistema estrutural tem uma segurança idêntica à dos seus membros; contudo, o desenvolvimento de métodos para avaliação da fiabilidade das estruturas onde se estabelece a diferença entre comportamento dúctil e frágil e a inclusão das correlações entre cargas e entre resistências, tem permitido ultrapassar essa dificuldade (Ditlevsen³, Ang e Ma⁴, Chou, McIntosh e Corotis⁵). Em último lugar, é necessário identificar os cenários de rotura mais importantes do ponto de vista probabilístico que são problemas do tipo NP. Alguns autores que utilizam modelos baseados na análise plástica limite (Nafday, Corotis e Cohon⁶, Rashedi e Moses⁷) não conseguem encontrar alguns dos mecanismos de rotura mais importantes do ponto de vista estocástico.

Neste artigo utiliza-se aproximação dos momentos de 2.^a ordem para calcular a fiabilidade da estrutura, cujo volume de material (ou armadura, no caso de estruturas em betão armado) é mínimo. As variáveis aleatórias são as cargas e resistências e o colapso de estrutura verifica-se quando a acção do carregamento excede a capacidade de resistência plástica da estrutura. Admite-se que o comprimento dos membros nas estruturas metálicas e as dimensões da secção, braço de momentos e comprimento da armadura nas estruturas em betão armado tem um comportamento determinístico. É indicada a probabilidade de rotura máxima que a estrutura optimizada não pode ultrapassar. Para calcular a probabilidade de rotura é necessário identificar os mecanismos com índices de fiabilidade mais baixos e forçar que estes valores não sejam inferiores a valores estipulados. Para se resolver este programa matemático com optimização nas restrições, utiliza-se um método baseado em planos de corte.

2 — DIMENSIONAMENTO COM CONDICIONANTES PROBABILÍSTICAS

2.1 — Hipóteses de Cálculo

As hipóteses básicas que são consideradas para a optimização de estruturas de modo a satisfazer condicionantes probabilísticas são: a) Geometria da estrutura, posicionamento das cargas, localização das secções críticas (no caso de estruturas reticuladas) e linhas de rotura (em estruturas laminares) são dados determinísticos; b) Não se consideram as deformações devidas ao esforço transversal; c) Admite-se que as cargas e os momentos resistentes são as únicas variáveis aleatórias; d) A dependência estatística entre as cargas e entre os momentos resistentes pode ser analisada através da matriz de correlação; e) Além da formação de

* Professor Associado, Departamento de Engenharia Civil Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra

mecanismos de rotura, não se consideram outras causas possíveis para cedência, nomeadamente a fractura local e instabilidade.

2.2 — Formulação

O problema de dimensionamento satisfazendo a critérios probabilísticos tem, em termos genéricos, a seguinte formulação:

$$\text{Min } V = f(d) \quad (1a)$$

sujeito a,

$$g_1(d, m, \lambda, \theta, u, \theta_*, u_*) = 0 \quad (1b)$$

$$g_2(d, m, \lambda, \theta, u, \theta_*, u_*) \leq 0 \quad (1c)$$

$$g_3(d) \leq 0 \quad (1d)$$

$$P[Z_k \leq 0] \leq p_k \quad k = 1, \dots, m \quad (1e)$$

$$P[U_{k=1, m} Z_k \leq 0] \leq p_o \quad (1f)$$

onde $d, m, \lambda, \theta, u, \theta_*, u_*$ são respectivamente, vectores de variáveis de decisão, momentos resistentes, cargas, rotações das secções críticas (ou das linhas de rotura, no caso das lajes), deslocamentos nodais, rotações totais das secções críticas associadas à mesma variável aleatória e deslocamentos totais associados à mesma variável aleatória. A função objectivo e as restrições (1b)-(1d) são lineares. Esta formulação é diferente da que corresponde à síntese plástica limite, em virtude das restrições que correspondem aos modos individuais de rotura (1e) e probabilidade de rotura de estrutura (1f), para a qual contribuem os diferentes modos de colapso.

2.3 — Restrições que correspondem a modos individuais de rotura

A probabilidade de rotura p_k que corresponde ao mecanismo de k define-se como sendo a probabilidade de que a função de estado limite Z_k seja negativa.

$$Z_k = U_k - E_k = m^{+} \theta_*^{+} + m^{-} \theta_*^{-} - F^t u_* \quad (2)$$

Na equação (2), U_k e E_k são os trabalhos alcatórios e externos, respectivamente, produzidos pelo mecanismo k . Utilizando a formulação probabilística dos momentos de 2.ª ordem, a probabilidade de rotura só é função das médias e dos desvios padrão das variáveis aleatórias. Assim sendo, a segurança à rotura segundo o mecanismo k está directamente relacionada com o índice de fiabilidade β_k , que se define como sendo a distância entre a origem e a superfície de rotura no sistema de coordenadas das variáveis normais reduzidas,

$$\beta_k = \mu_{Z_k} / \sigma_{Z_k} \quad (3)$$

A restrição que corresponde ao modo individual de rotura pode ser re-escrita:

$$1 - \Phi(\beta_k) \leq p_k \Rightarrow \beta_k \geq \Phi^{-1}(1 - p_k) \quad (4)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função normal. É conveniente assinalar que a probabilidade de ocorrência de um mecanismo vai aumentando se houver uma correlação positiva entre os momentos resistentes e/ou entre as cargas. Para verificar se as restrições respeitantes a modos de rotura individuais são satisfeitas é necessário resolver um programa de optimização denominado problema interior.

2.4 — Restrição respeitante a modos de rotura múltiplos

O cálculo de probabilidade de rotura da estrutura para a qual contribuem vários mecanismos e a inequação a ela associada é um dos maiores problemas que se colocam no dimensionamento com restrições probabilísticas. O cálculo exacto de $P[\cdot]$ é praticamente impossível, porque é necessário integrar em ordem as variáveis aleatórias e conhecer "a priori" as correlações entre os diferentes mecanismos. Por esse motivo utilizam-se métodos aproximados. Como a probabilidade de rotura máxima da estrutura é de um modo geral muito pequena utiliza-se o limite superior de 1.ª ordem de Cornell como aproximação da probabilidade dos modos de rotura múltiplos, e que é do lado de segurança:

$$\text{Max}_{\text{all } k} [P(Z_k \leq 0)] \leq pf \leq 1 - \prod_{k=1, m} [1 - P(Z_k \leq 0)] \quad (5)$$

O limite inferior indicado em (5) representa a probabilidade de rotura do mecanismo estocasticamente mais importante e só seria exacto se houvesse uma correlação perfeita entre todos os cenários de rotura Z_k . Deste modo, a probabilidade de rotura de estrutura que corresponde aos vários modos de rotura é igual à soma das probabilidades de rotura dos modos individuais e (1e) vem,

$$\sum_{k=1, m} P[Z_k \leq 0] = \sum_{k=1, m} p_k \leq p_o \quad (6)$$

Para utilização de um algoritmo de optimização e como as probabilidades de rotura tem valores numéricos muito reduzidos em comparação com as outras variáveis a restrição (1e) pode ser aproximada pela função,

$$1n \sum_{k=1, m} c_1 e^{-2\beta_k^2} c_2 \beta_k^2 \leq 1n p_o \quad (7)$$

onde p_o é a probabilidade de rotura admissível da estrutura, c_1, c_2 e c_3 são constantes.

Cornell demonstrou que nas regiões onde a probabilidade de rotura $p_k \cong 10^{-4}$, o valor de c_2 , que depende da simetria da função de densidade probabilística, varia entre 0.5 e 1.5 para as distribuições probabilísticas mais utilizadas. A constante c_3 é aproximadamente 2, para a distribuição normal.

Estes limites de 1.ª ordem podem ser melhorados calculando a probabilidade dos mecanismos i e k se verificarem simultaneamente, $P(F_i \cap F_k) = P(Z_i \leq 0 \cap Z_k \leq 0)$. Os limites inferior e superior de 2.ª ordem são, respecti-

vamente:

$$p_f \geq P(F_1) + \sum_{i=2}^m \text{Max} \left\{ \left[P(F_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(F_i \cap F_j) \right]; 0 \right\} \quad (8)$$

$$p_f \leq \sum_{i=1}^m P(F_i) - \sum_{i=2, j < i}^m \text{Max} P(F_i \cap F_j) \quad (9)$$

Se as variáveis aleatórias forem Gaussianas, a probabilidade $P(F_i \cap F_j)$ pode ser aproximada pelo método de Ditlevsen³, onde se calculam, para cada par de mecanismos, os valores:

$$P(F_i \cap F_j) \geq \text{Max} \left\{ \Phi(\beta_j) \Phi \left(-\frac{\beta_i - \beta_j \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right); \Phi(\beta_i) \Phi \left(-\frac{\beta_j - \beta_i \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) \right\} \quad (10)$$

$$P(F_i \cap F_j) \leq \Phi(-\beta_j) \Phi \left(-\frac{\beta_i - \beta_j \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) + \Phi(-\beta_i) \Phi \left(-\frac{\beta_j - \beta_i \rho_{ij}}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \right) \quad (11)$$

β_i, β_j são os índices de fiabilidade dos mecanismos i e j e ρ_{ij} exprime a correlação entre os modos de rotura i e j . Para uma correlação positiva, os limites superior e inferior de p_f são calculados substituindo (11) em (8) e (10) em (9).

A probabilidade de rotura da estrutura pode ser igualmente calculada através do método de decomposição dos modos de rotura baseado numa filosofia diferente (Moses e Kinser⁸):

$$p_f = P(F_1) + \sum_{i=2}^m a_i P(F_i) \quad (12)$$

em que,

$$a_i = P(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{i-1} | F_i) \quad (13)$$

é a probabilidade condicional que os primeiros $i-1$ mecanismos não ocorram, quando se verifica o mecanismo i . Para avaliar a fiabilidade da estrutura para modos de rotura múltiplos é necessário ordenar as probabilidades dos vários mecanismos de rotura $P(F_1) \leq P(F_2) \leq \dots \leq P(F_i) \leq \dots \leq P(F_m)$, dado que o valor da probabilidade condicional vai depender da ordenação efectuada. O método de Vanmarke⁹ reduz o número de mecanismos considerados em (13) a um único, de modo que:

$$a_i \leq \text{Min}_{j=1}^{i-1} P(S_j | F_i) = a^*_i \quad (14)$$

Tem-se que, $a^*_1 = a_1 = 1, a^*_2 = a_2$

O valor,

$$P(F_1) + \sum_{i=2}^m a_i P(F_i) \quad (15)$$

é um limite superior para a probabilidade de rotura da estrutura. Supondo que a probabilidade do mecanismo i só depende de β_i , a probabilidade condicional $P(S_i | F_i)$ é calculada a partir dos índices de fiabilidade β_i, β_j e do

coeficiente de correlação ρ_{ij} entre os mecanismos F_i, F_j utilizando a aproximação:

$$P(S_j | F_i) \cong 1 - \frac{\Phi[\text{MAX}(\beta_j / |\rho_{ij}|, \beta_i)]}{\Phi[\beta_i]} \quad (16)$$

3 — MÉTODO DE RESOLUÇÃO

A estratégia para a resolução do problema (1) pode ser dividida em duas operações que se realizam alternadamente até se obter o óptimo pretendido:

- Método de optimização para o problema interior não convexo que identifica para um dado conjunto de variáveis de decisão (momentos plásticos resistentes) o mecanismo a que corresponde a probabilidade de rotura mais elevada e enumera os outros mecanismos dominantes do ponto de vista estocástico.
- Método de optimização convexo para o problema global que tem por solução o dimensionamento de custo mínimo que satisfaz condicionamentos tecnológicos e relativos aos estados limites de utilização e as restrições probabilísticas. Para que estas sejam satisfeitas é necessário expandir o número de restrições de modo a incluir outros modos de rotura dominantes.

Este procedimento é repetido até que se verifique convergência nos valores das variáveis de decisão. A optimização satisfazendo critérios probabilísticos é semelhante ao problema de optimização paramétrica desenvolvido por Kwak e Haug¹⁰, embora neste caso os domínios dos problemas interiores sejam função das variáveis de decisão, bem como das variáveis aleatórias. Esta dificuldade foi ultrapassada por Lee e Kwak¹¹ para treliças com comportamento elástico e em que os problemas interiores tem uma solução única. Esta hipótese não é válida para estruturas com comportamento plástico perfeito, porque cada mecanismo é uma solução local do problema interior.

4 — PROBLEMA INTERIOR

4.1 — Descrição Nodal da Cinemática

No caso de pórticos com comportamento plástico perfeito a descrição nodal tem por base o conceito de mecanismos elementares. Estes são do tipo viga, do tipo painel e combinações deste para pórticos rectangulares (Fig. 1).

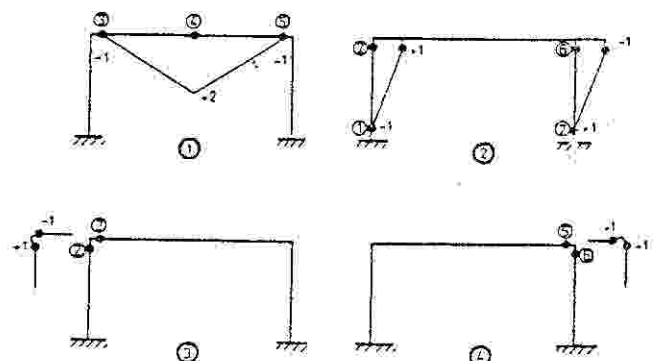


Figura 1

As deformações plásticas estão neste caso concentradas nas secções críticas c , sendo estas associadas através das equações de compatibilidade ao vector de deslocamentos nodais que tem b elementos,

$$\theta = C_q \quad (17)$$

onde C é uma matriz, c , xb , c_r , $b = c_r - \alpha$ e α são, respectivamente, o número de secções críticas, o número do mecanismo básico e o grau de indeterminação estática.

Como o deslocamento em qualquer secção crítica é linearmente dependente dos deslocamentos nodais,

$$u = C_o q \quad (18)$$

A discretização de uma laje conduz a uma aproximação do modelo contínuo, embora a sua existência e qualidade sejam função da modelação por elementos finitos. Uma das formulações cinemáticas mais simples corresponde à automatização do método das linhas de rotura. Qualquer que seja o padrão escolhido para os elementos finitos as deformações plásticas são confinadas aos lados dos elementos, enquanto que o interior dos elementos se mantém indeformável. Um conjunto de deformações plásticas que conduz à formação de um mecanismo constitui um modo de colapso. Estas deformações podem ser escritas em termos dos deslocamentos dos nós dos elementos finitos triangulares, através das equações de compatibilidade. As rotações θ_i e (das normais) aos três lados do elemento da Fig. 2 estão relacionados com os deslocamentos verticais q_j do seguinte modo (Munro e Da Fonseca¹²):

$$\begin{vmatrix} \theta_1 e \\ \theta_2 e \\ \theta_3 e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/h_1 & b_1/(l_1 h_1) & a_1/(l_1 h_1) \\ a_2/(l_2 h_2) & -1/h_2 & b_2/(l_2 h_2) \\ b_3/(l_3 h_3) & a_3/(l_3 h_3) & -1/h_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{vmatrix} \quad (19)$$

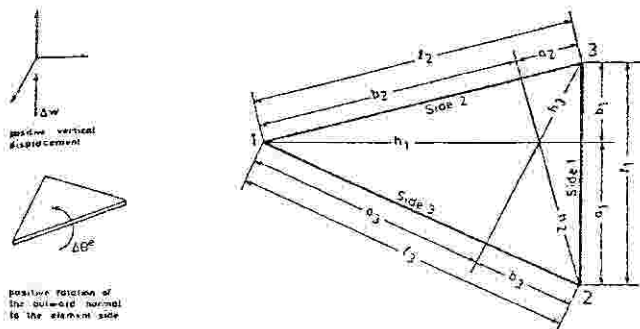


Figura 2

A descontinuidade angular θ_i é a soma algébrica das rotações θ_i e das duas normais dos elementos finitos que partilham o mesmo lado. Entrando com as condições de fronteira, o número dos deslocamentos verticais que deve ser considerado é o número de cantos (NC) que pode sofrer esse tipo de deformação. O vector θ contém uma componente para cada lado capaz de resistir a momentos flectores. Se o seu número for NS, o agrupamento das relações (19) em ordem a todos os elementos finitos pode ser escrita na forma matricial,

$$\theta = C q \quad (20)$$

onde C é a matriz de transformação cinemática. Como estas deformações nodais são função de deslocamentos nodais linearmente independentes, pode concluir-se que as deformações plásticas são compatíveis e as relações entre as rotações e os deslocamentos são relações de compatibilidade.

4.2 — Descrição Malha da Estática e Cinemática para pórticos

Um pórtico hiperestático pode reduzir-se por diversos meios a uma estrutura isostática. Os momentos flectores nas secções críticas são obtidos a partir das coordenadas dos diagramas de influência associados com intensidades unitárias das cargas e dos esforços indeterminados (Fig. 3),

$$m = B_p + b_o F \quad (21)$$

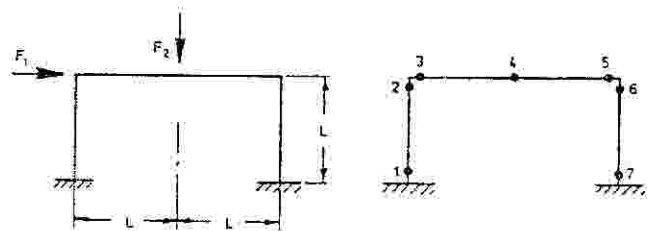


Figura 3

Se um mecanismo se produzir como consequência de deformações por flexão, as relações cinemáticas que asseguram compatibilidade são,

$$0 = B' \theta \quad (22)$$

Os deslocamentos das secções críticas são linearmente dependentes das rotações das secções críticas e podem ser obtidos através do produto matricial:

$$u = B_o' \theta \quad (23)$$

A familiaridade dos engenheiros de estruturas com as estruturas reduzidas a isostáticas através de sistemas de libertações físicas tem impedido que a descrição malha tenha uma divulgação mais ampla, uma vez que para pórticos com maiores dimensões a determinação das matrizes B e b_o torna-se um processo moroso. Deste modo, a selecção do sistema de libertação mais apropriado é um problema da maior importância. Para o pórtico da Fig. 4, a base mais conveniente é composta pelas malhas regionais indicadas (Munro¹³).

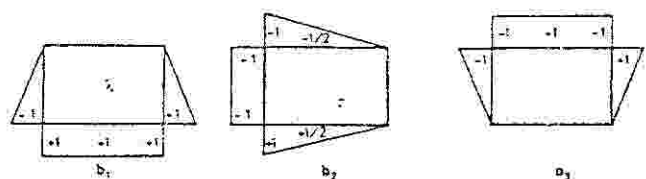


Figura 4

A matriz das malhas B resultante da aplicação dos diagramas unitários b1, b2 e b3 da Fig. 4 é de simples determinação. É necessário contudo ter em atenção à convenção de sinais para os momentos flectores associada à orientação dos membros representados na Fig. 5.

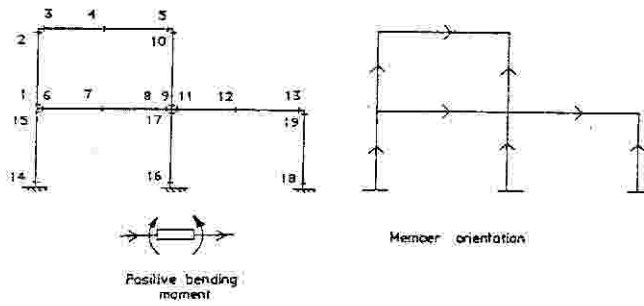


Figura 5

As submatrizes são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 \\ +1 & +1/2 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B_4 = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

e a matriz das malhas vem:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 \\ B_3 & B_2 & 0 \\ B_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & B_4 & B_1 \\ 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}$$

Desde que as secções críticas se mantenham nas mesmas posições relativas os valores dos elementos na matriz B são independentes das dimensões das malhas rectangulares. Os elementos da matriz b_i podem ser obtidos a partir de qualquer conjunto de momentos em equilíbrio com as cargas aplicadas.

A principal vantagem da utilização da descrição da malha em pórticos consiste em reduzir substancialmente o número de equações de compatibilidade e variáveis em relação à descrição nodal, aumentando a eficiência dos programas de optimização.

4.3 — Relações Constitutivas

A plastificação de pórticos com comportamento dúctil fica restringida às secções críticas. O critério de cedência impõe limites nos momentos a que podem estar sujeitas as

secções críticas. Se o momento plástico resistente positivo e negativo na secção i for m^{*i+} e m^{*i-} tem-se:

$$-m_i^{*-} \leq m_i \leq m_i^{*+} \quad (24)$$

Em virtude das rotações θ serem variáveis reais e como os algoritmos de programação matemática funcionam com variáveis não-negativas, a rotação θ_i da secção crítica i é obtida a partir das variáveis θ_i⁺ e θ_i⁻:

$$\theta_i = \theta_i^+ - \theta_i^- \quad (25)$$

Deste modo, a secção i pode ser:

a) uma rótula plástica positiva que participa no mecanismo de rotura, se:

$$\theta_i^+ > 0 ; \quad \theta_i = \theta_i^+ > 0 ; \quad m_i = m_i^{*+} \quad (26a)$$

b) uma rótula plástica negativa que participa no mecanismo de rotura, se:

$$\theta_i^- > 0 ; \quad \theta_i = -\theta_i^- < 0 ; \quad m_i = -m_i^{*-} \quad (26b)$$

c) uma secção com comportamento elástico ou uma rótula plástica que não participa no mecanismo de rotura se:

$$\theta_i^+ = 0 = \theta_i^- ; \quad \theta_i = 0 ; \quad m_i^{*-} \leq m_i \leq m_i^{*+} \quad (26c)$$

A teoria das linhas de rotura considera um critério de cedência muito simples que diz respeito apenas ao momento flector e à rotação do lado a ele associado. As condições de cedência impõem pois limites para os valores absolutos dos momentos em cada lado. Para o lado i, tem-se:

$$-m_i^{*-} \leq m_i \leq m_i^{*+} \quad (27)$$

onde m^{*i+} e m^{*i-} são respectivamente os valores dos momentos plásticos resistentes positivos e negativos do lado i. Se α_i for o ângulo entre o lado i cujo comprimento é l_i e o eixo dos Y:

$$m_i^{*+} = l_i (\cos^2 \alpha_i) m_x^+ + l_i (\sin^2 \alpha_i) m_y^+ \quad (28a)$$

$$m_i^{*-} = l_i (\cos^2 \alpha_i) m_x^- + l_i (\sin^2 \alpha_i) m_y^- \quad (28b)$$

As deformações que contribuem para a formação dos mecanismos só se verificam nos lados em que o momento flector atinge um dos limites. Isto significa que a descontinuidade angular θ_i do lado i tem um valor positivo θ_i⁺ se m_y igualar m^{*i+} e é o simétrico de θ_i⁻ se m_y igualar m^{*i-}. Não é necessário entrar com deformações elastoplásticas, dado que na fase de colapso plástico as deformações são suficientemente pequenas para o comportamento plástico se basear na geometria da estrutura antes da aplicação do carregamento. Como, em geral, o comportamento plástico das

lajes não se restringe aos lados dos elementos, esta representação por elementos finitos triangulares conduz a um modelo aproximado no caso das lajes.

4.4 — Identificação do mecanismo estocasticamente mais importante

O programa determina o padrão de linhas de rotura com maior probabilidade de ocorrência, pressupondo que as linhas de rotura coincidem com alguns dos lados dos elementos finitos triangulares. Deste modo obtém-se a probabilidade de rotura condicional da estrutura para um dado carregamento. Para as variáveis normais m^* , F estaticamente independentes, a identificação do mecanismo estocasticamente mais importante resume-se a minimizar o índice de fiabilidade β :

$$\min \beta = \frac{[\mu_m + \theta^{**} + \mu_m - \theta^{*-} - \mu_F u^*]}{\sqrt{(\sigma_m^+)^2 (\theta^{**})^2 + (\sigma_m^-)^2 (\theta^{*-})^2 + (\sigma_F^+)^2 (u^*)^2}} \quad (29)$$

sujeito às equações de compatibilidade (20) ou (22), às restrições de sinal:

$$\theta^+ \geq 0, \theta^- \geq 0, q \geq 0, \theta^{**} \geq 0, \theta^{*-} \geq 0, u^* \geq 0 \quad (30)$$

e às relações de incidência,

$$\theta^{**} = J_{\theta^+}^+ \theta^+ ; \theta^{*-} = J_{\theta^-}^- \theta^- ; u^* = J_u q \quad (31)$$

As matrizes de incidência $J_{\theta^+}^+$, $J_{\theta^-}^-$ e J_u são calculadas adicionando, respectivamente, rotações dos lados representados pela mesma variável aleatória e deslocamentos dos pontos de aplicação das cargas (ou dos centros de gravidade dos elementos finitos no caso de cargas distribuídas) associados à mesma variável aleatória.

Se as correlações entre os momentos plásticos resistentes e entre as cargas forem representados pelas matrizes $C_{\theta^+}^+$, $C_{\theta^-}^-$ e C_u , o índice de fiabilidade é obtido minimizando o quociente

$$\beta = \frac{[\mu_m + \theta^{**} + \mu_m - \theta^{*-} - \mu_F u^*]}{\sqrt{(\theta^{**})^2 \sigma_m^+ C_{\theta^+}^+ \sigma_m^+ + (\theta^{*-})^2 \sigma_m^- C_{\theta^-}^- \sigma_m^- + (u^*)^2 \sigma_F^+ C_u \sigma_F^+}} \quad (32)$$

Variáveis normais correlacionadas podem ser transformadas num conjunto de variáveis normais reduzidas não correlacionadas através de uma transformação ortogonal. Se o comportamento das variáveis aleatórias não for Gaussiano, pode utilizar-se a transformação de Rosenblatt¹⁴, que consiste em estabelecer uma distribuição normal equivalente.

O programa matemático interior é um programa fracionário. Minimizar β é equivalente a resolver o programa de maximização de uma função convexa quadrática:

$$\max 1/\beta^2 = (\sigma_m^+)^2 (\theta^{**})^2 + (\sigma_m^-)^2 (\theta^{*-})^2 + (\sigma_F^+)^2 (u^*)^2 \quad (33a)$$

sujeito a,

$$\mu_m + \theta^{**} + \mu_m - \theta^{*-} - \mu_F u^* = 1 \quad (33b)$$

$$\theta^{**} = J_{\theta^+}^+ \theta^+ ; \theta^{*-} = J_{\theta^-}^- \theta^- ; u^* = J_u q \quad (33c)$$

$$\theta = C q \text{ ou } B^t \theta = 0 \quad (33d)$$

$$\theta^+ \geq 0, \theta^- \geq 0, q \geq 0, \theta^{**} \geq 0, \theta^{*-} \geq 0, u^* \geq 0 \quad (33e)$$

Este programa não pode ser resolvido através de técnicas de programação convexa em virtude da possibilidade de ocorrência de mínimos locais. Os valores das variáveis no mínimo global deste programa dão as deformações plásticas do mecanismo estocasticamente mais importante e a partir destes valores obtém-se os valores das variáveis normais reduzidas,

$$m^{**} = -\sigma_m^+ \theta^{**} \beta^2 \quad (34a)$$

$$m^{*-} = -\sigma_m^- \theta^{*-} \beta^2 \quad (34b)$$

$$\lambda_F^+ = \sigma_F^+ u^* \beta^2 \quad (34c)$$

4.5 — Resolução do Programa de Maximização de uma Função Quadrática Convexa

Há dois métodos baseados em filosofias diferentes que são utilizados na resolução de problemas não-convexos: "branch and bound" e técnicas de plano de corte. A primeira estratégia consiste em substituir a função objectivo por uma aproximação convexa que subestime a função quadrática concava de que se parte. Os ingredientes principais desta metodologia são uma árvore combinatória (cujos nós estão associados a subintervalos em que as variáveis são definidas) e limites superiores e inferiores obtidos em cada um dos nós da árvore. Em cada nó é resolvido o programa linear cuja função objectivo é a sobrestimativa da função convexa inicial no subintervalo associado a esse nó. Este algoritmo está descrito em maior detalhe na ref. [15]. Com base num algoritmo deste tipo foram resolvidos problemas de maximização de uma acção quadrática convexa com 50 variáveis não-lineares e 400 variáveis lineares num computador CRAY2 com processamento paralelo em 15 seg. (Phillips e Rosen¹⁶). A necessidade de gerar soluções subóptimas (ou seja: outros mecanismos importantes do ponto de vista estocástico) sem se reiniciar o problema, justifica a utilização da técnica de plano de corte que a seguir se indica. No método de plano de corte de Konno¹⁷ define-se um programa com uma função objectivo bilinear equivalente à maximização da função quadrática. O algoritmo funciona fixando de cada vez um dos conjuntos de variáveis e utilizando a teoria da dualidade de programação linear. Chega-se a um máximo local e aproveitando a estrutura simétrica do BLP é gerado um plano de corte a partir deste ponto. Na iteração seguinte ou se obtém um máximo local com um valor superior ao obtido na iteração anterior ou gera um plano de corte mais profundo. Este algoritmo é repetido até que se chegue a uma solução que

cumpra o critério de convergência. O plano de corte gerado por este método é mais eficiente do que o indicado por Tui¹⁸ que utiliza apenas a informação local e que se torna menos eficiente à medida que a dimensão do problema aumenta. Embora não seja habitual a utilização dos métodos de plano, que se tornam menos eficientes à medida que o número de variáveis e restrições cresce, a natureza específica deste problema justifica que tenha sido adoptado: possibilidade de gerar planos de corte muito profundos e capacidade de obter outros máximos locais (que correspondem a outros modos de rotura dominantes) sem grande esforço computacional.

4.6 — Enumeração de outros mecanismos estocasticamente importantes

O método de Konno para programação bilinear divide o domínio em vectores básicos e não básicos. A selecção da variável que entra na base para gerar outras soluções ou para prosseguir para a iteração seguinte é feita com base na informação fornecida pelo programa dual. É pois mais eficiente do que o algoritmo de Murty¹⁹ que enumera e ordena todos os vértices possíveis (soluções locais) do domínio sem atender à forma explícita da função objectivo do programa bilinear que pode ser utilizada para definir o domínio do programa dual. Deste programa parte a informação relativa à escolha de outras regiões que poderiam entrar em cedência plástica e contribuir para a formação de outros mecanismos dominantes do ponto de vista aleatório.

5 — PROBLEMA EXTERIOR

5.1 — Função Objectivo

A importância na escolha da função objectivo é ainda um assunto em estudo, com consequências importantes relativas à solução óptima (Surahman e Rojiani²⁰). a determinação do menor volume médio de material em estruturas metálicas pode considerar-se proporcional ao produto dos momentos médios resistentes pelo comprimento dos membros correspondentes, ou seja:

$$\text{Min } V = l^T \mu_m \quad (35)$$

Pretende-se que o dimensionamento assim obtido satisfaça as restrições probabilísticas relativas aos modos de rotura individuais e múltiplos. Para uma estrutura em betão armado, o problema de dimensionamento com restrições probabilísticas consiste em minimizar o volume total de armadura. Para secções subarmadas com comportamento dúctil em que o braço dos momentos é conhecido, o momento plástico resistente é directamente proporcional à área de armadura:

$$\text{Min } V = 1^{+T} \mu_m^+ + 1^{-T} \mu_m^- \quad (36)$$

Se numa laje em betão armado for colocada a armadura ortotrópica e μ_{mx}^{+i} (μ_{mx}^{-i}) for o momento plástico resistente por unidade de comprimento do elemento i na direcção x e que resistem aos momentos positivos (negativos) e μ_{my}^{+i}

(μ_{my}^{-i}) for o momento plástico resistente por unidade de comprimento do elemento i na direcção y e que resistem a momentos positivos (negativos), o volume total de armadura é:

$$V = \rho \sum_{i=1, FE} A_i \left[\frac{\mu_{mx}^{+i}}{a_x^{+i}} + \frac{\mu_{my}^{+i}}{a_y^{+i}} + \frac{\mu_{mx}^{-i}}{a_x^{-i}} + \frac{\mu_{my}^{-i}}{a_y^{-i}} \right] \quad (37)$$

onde a_x^{+i} , a_y^{+i} são os braços de momentos, A_i é a área do elemento finito e ρ é um factor de proporcionalidade. Deste modo, em lajes de betão armado o volume de armadura pode escrever-se em termos de função linear,

$$\text{Min } V = C^T d = a^{+T} \mu_m^+ + a^{-T} \mu_m^- \quad (38)$$

onde a^+ e a^- são vectores de constantes e μ_m^+ , μ_m^- são os vectores das variáveis de decisão: médias dos momentos plásticos resistentes positivos e negativos.

5.2 — Restrições Tecnológicas e de Utilização

Para atender a situações de simetria e simplificar pormenores construtivos, pode reduzir-se o número de secções diferentes a dimensionar em pórticos metálicos. Estas restrições são do tipo tecnológico,

$$T \mu_m = 0 \quad (39)$$

Em estruturas de betão armado estabelecem-se "à priori" relações entre as armaduras em várias secções críticas (ou regiões nas lajes) de modo a simplificar as peças desenhadas,

$$T^+ \mu_m^+ + T^- \mu_m^- = 0 \quad (40)$$

onde T , T^+ e T^- são matrizes tecnológicas. Se a armadura for escolhida tendo apenas em atenção o comportamento plástico e sem atender ao comportamento da estrutura para cargas de serviço, o resultado obtido poderá não satisfazer os estados limites de utilização. Estes condicionamentos podem ser garantidos através do estudo probabilístico simplificado de Parimi e Cohn²¹. Para efeito de cálculo do estado limite de utilização considera-se a formação da primeira rótula plástica (ou linha de rotura) e para garantir que estes estados limites não são violados são impostos valores mínimos às variáveis de decisão.

5.3 — Restrições de Fiabilidade

Ao fixar os valores das variáveis de decisão, o problema interior calcula as rotações plásticas das secções (linhas de rotura) e os deslocamentos nodais associados ao mecanismo estocasticamente mais importante e a outros modos de rotura dominantes. A análise de fiabilidade de uma estrutura para um outro conjunto de variáveis de decisão (mas para o mesmo mecanismo de rotura) conduzirá a rotações e deslocamentos nodais proporcionais. Por este motivo se for especificado o limite mínimo para o índice de fiabilidade β ,

(ou seja um limite máximo para a probabilidade de rotura de um modo individual), as restrições de fiabilidade para os modos individuais de rotura são satisfeitas se (41),

$$\mu_m + \theta^* k + \mu_m - \theta^* k - \mu_{Fm} * k \geq \beta^*$$

$$\left[\sqrt{\sigma_m^2 \theta^{*+2} k + \sigma_m^2 \theta^{*-2} k + \sigma_{Fm}^2 * k^2} \right] \text{ para } k = 1, \dots, m.$$

Estas restrições são convexas em ordem às variáveis de decisão $d^* = [\mu_m^* \mu_m^{-1}]$. Como também é convexa a aproximação para a restrição que corresponde aos modos de rotura múltiplos, o problema exterior pode ser resolvido por qualquer técnica para programação convexa. A função objecto é linear e o domínio está definido por restrições lineares e não lineares, que podem ser linearizadas utilizando os primeiros termos do desenvolvimento em série de Taylor. O problema daí resultante poderia ser resolvido por programação linear. Com os resultados obtidos efectuava-se uma nova linearização e resolvia-se o programa linear daí resultante até que verificasse a convergência do resultado. Como as variações máximas dos valores das variáveis de decisão em cada iteração podem ser críticas para uma convergência rápida, este método pode ser substituído com vantagem por uma sequência de programas quadráticos em que se utilizam termos de série de Taylor de 2.ª ordem na função objectivo ou por uma sequência de programas convexos em que se utilizam variáveis recíprocas das variáveis de decisão (Vanderplaats²²).

6 -- EXEMPLOS NUMÉRICOS

6.1 -- Pórtico não-simétrico com dois andares e dois vãos

Pretende-se dimensionar o pórtico metálico representado na Fig. 6 de modo a satisfazer determinadas condicionantes probabilísticas. Consideram-se 5 variáveis de decisão que correspondem aos momentos resistentes dos pilares andar e das vigas.

$$d_1 = \mu_{m14} = \mu_{m15} = \mu_{m16} = \mu_{m17} = \mu_{m18} = \mu_{m19}$$

$$d_2 = \mu_{m6} = \mu_{m7} = \mu_{m8} ; d_3 = \mu_{m11} = \mu_{m12} = \mu_{m13}$$

$$d_4 = \mu_{m1} = \mu_{m2} = \mu_{m9} = \mu_{m10} ; d_5 = \mu_{m5} = \mu_{m4} = \mu_{m5}$$

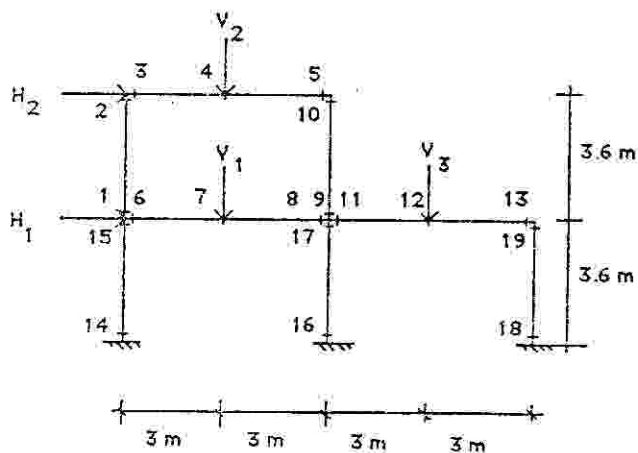


Figura 6

As cargas tem as características aleatórias a seguir indicadas:

$$\mu_{V1} = 169 \text{ kN} ; \Omega_{V1} = 0.15 ; \mu_{V2} = 89 \text{ kN} ; \Omega_{V2} = 0.25$$

$$\mu_{V3} = 116 \text{ kN} ; \Omega_{V3} = 0.25$$

$$\mu_{H1} = 62 \text{ kN} ; \Omega_{H1} = 0.25 ; \mu_{H2} = 31 \text{ kN} ; \Omega_{H2} = 0.25$$

Consideram-se as situações a seguir indicadas, que exprimem diversos tipos de correlação entre as variáveis e entre as cargas:

Caso I - Correlação perfeita dentro e entre os pilares (e vigas) representados pela mesma variável de decisão. Variáveis de decisão estatisticamente independentes. Cargas estatisticamente independentes excepto as cargas horizontais que se supõe perfeitamente correlacionadas.

Caso II - Correlação perfeita entre todas as variáveis de decisão. Cargas estatisticamente independentes excepto as cargas horizontais que se supõe perfeitamente correlacionadas.

Caso III - Correlação perfeita dentro e entre os pilares (e vigas) representados pela mesma variável de decisão. Variáveis de decisão estatisticamente independentes. Correlação perfeita entre todas as cargas.

Caso IV - Correlação perfeita entre todas as variáveis de decisão. Correlação perfeita entre todas as cargas.

A Fig. 7 traduz a variação do volume de material mínimo em função da probabilidade de rotura da estrutura, calculada através do método do limite superior de Ditlevsen.

Consideram-se os Casos I e II para um coeficiente de variação dos momentos resistentes,

$$\Omega_m = \Omega_{d1} = \Omega_{d2} = \Omega_{d3} = \Omega_{d4} = \Omega_{d5} = 0.15$$

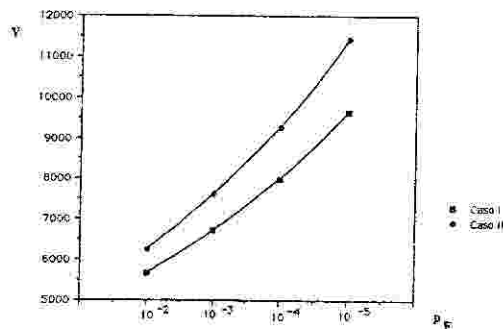


Figura 7

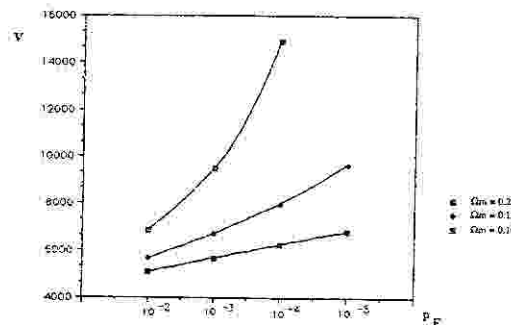


Figura 8

Na Fig. 8 está representada a variação do custo mínimo em função da probabilidade de rotura da estrutura (calculada através do método do limite superior de Ditlevsen) para o Caso I, supondo que os coeficientes de variação dos momentos resistentes são 0.10, 0.15 e 0.20.

Na Fig. 9 para o Caso I e um coeficiente de variação dos momentos resistentes de 0.15 indica-se a variação de volume mínimo em função da probabilidade de rotura da estrutura calculada através dos métodos de Cornell (limite superior), Vanmarcke (limite superior), Ditlevsen (limite superior), Ditlevsen (limite inferior) e Cornell (limite inferior).

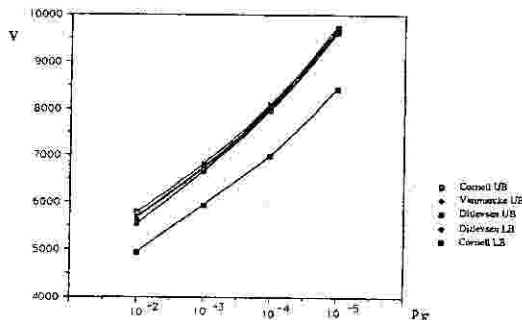


Figura 9

Supondo que só se considera as restrições relativas aos modos individuais de rotura (limite inferior de Cornell) e $\Omega_m = 0.15$, na Fig. 10 está representado o volume de material mínimo em função da probabilidade de rotura desses mecanismos para os Casos I, II, III e IV.

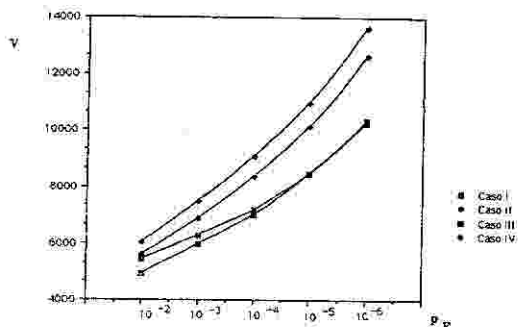


Figura 10

Admitindo-se apenas modos individuais, a Fig. 11 indica a forma como o coeficiente de variação das cargas verticais pode afectar o dimensionamento mínimo.

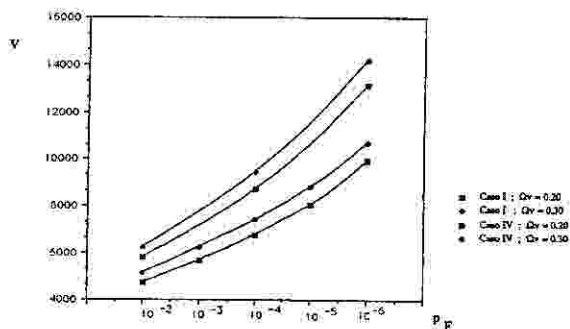


Figura 11

As Fig. 12 e 13 traduzem o modo como o coeficiente de variação das cargas horizontais e o tipo de distribuição probabilística (de Gauss ou Assintótica do tipo I) pode afectar o dimensionamento mínimo para os Casos I e IV, respectivamente, considerando apenas os modos de rotura individuais.

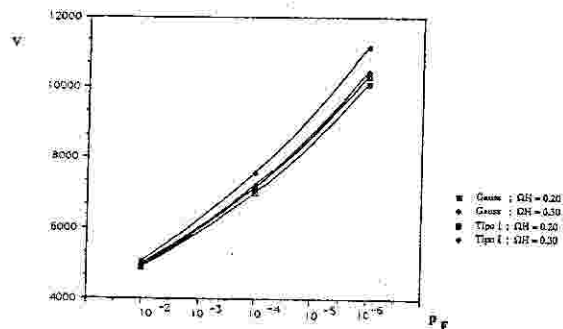


Figura 12

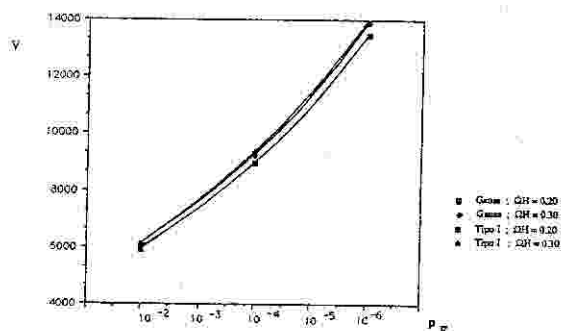


Figura 13

As Fig. 14 e 15 reflectem a forma como o coeficiente de variação dos momentos resistentes e o tipo de distribuição probabilística (de Gauss ou Lognormal) pode afectar o dimensionamento mínimo para os Casos I e IV, respectivamente, considerando apenas os modos de rotura individuais.

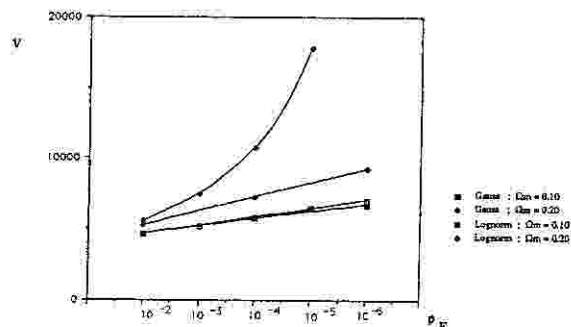


Figura 14

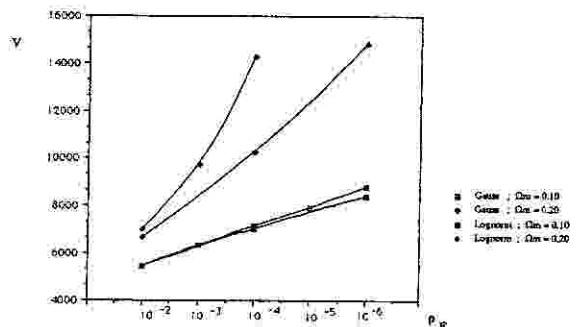


Figura 15

6.2 — Laje Quadrada Encastrada sujeita a uma carga uniformemente distribuída

Pretende-se calcular a armadura de tracção e de compressão em regiões distintas de uma laje quadrada ($l = 10$ m) encastrada nos quatro bordos que satisfaz condicionantes probabilísticas. A simetria isotrópica das propriedades dos materiais e a simetria da geometria da laje, armadura e carregamento permite que se considere apenas um quarto da laje. Neste exemplo consideram-se 3 variáveis de decisão para cada tipo de armadura (X_1 , X_2 , armadura de tracção e compressão), como se representa na Fig. 16, totalizando 12 momentos plásticos resistentes.

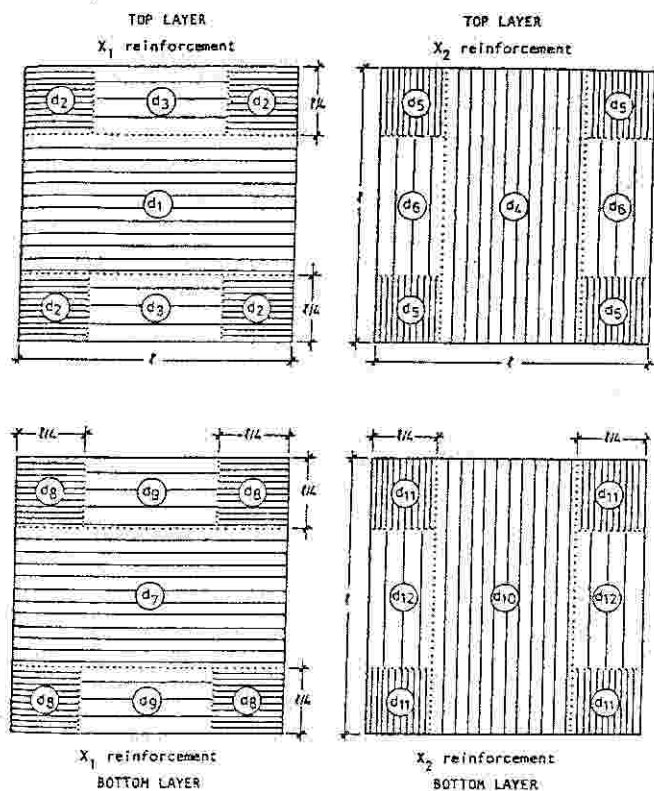


Fig. 16 — Regiões para o dimensionamento das armaduras

Admite-se que as variáveis aleatórias, carregamento ($\mu_F = 5$ kN/m²; $\Omega_F = 0,3$) e variáveis de decisão ($\Omega_m^+ = \Omega_m^- = 0,15$) seguem a distribuição de Gauss e são estatisticamente independentes. A discretização do quarto da laje é efectuada através de 16 elementos finitos (Fig. 17), de modo que os lados entre elementos estejam colocados na zona de variação de armaduras, ou seja nas linhas que dividem as regiões distintas.

Utiliza-se o limite superior de Vanmarcke para calcular a probabilidade de rotura da estrutura com vários modos de rotura, limitando-se esse valor a $P_0 = 3,75 \times 10^{-3}$. A probabilidade de rotura máxima para cada um dos modos individuais é de 2×10^{-3} ($\beta_s = 2,865$). Foram utilizadas as restrições tecnológicas a seguir indicadas e que evitam um dimensionamento de armaduras inaceitável ao impor certas relações entre as variáveis de decisão.

$$d_1 = d_4; d_2 = d_5; d_3 = d_6; d_7 = d_{10}; d_8 = d_{11}; d_9 = d_{12}; d_2 = 3/4 d_7$$

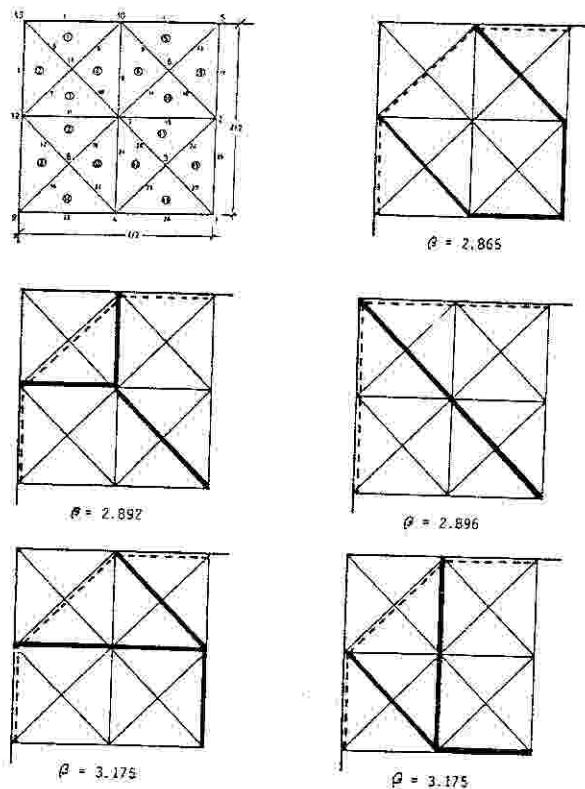


Fig. 17 — Discretização e mecanismos mais importantes estocasticamente

A solução óptima (em kNm/m),

$$d_1 = d_4 = 13,33; d_2 = d_5 = d_8 = d_{11} = 20; d_3 = d_6 = 15; d_7 = d_{10} = 26,67; d_9 = d_{12} = 0.$$

foi obtida considerando a contribuição de 16 mecanismos, dos quais os 5 principais tem índices de fiabilidade 2,865, 2,892, 2,896 e 3,175 (2), respectivamente. De notar que as probabilidades de rotura da laje para este dimensionamento obtidas a partir dos métodos de Cornell e Ditlevsen (limites superior e inferior) são $8,94 \times 10^{-3}$, $4,03 \times 10^{-3}$ e $2,25 \times 10^{-3}$.

7 — CONCLUSÕES

Neste artigo foi aplicada uma técnica de programação matemática ao dimensionamento de pórticos e lajes com comportamento dúctil, de modo a minimizar o volume médio total de aço numa estrutura metálica ou de armadura numa estrutura em betão armado, sem deixar de satisfazer um conjunto de condicionantes probabilísticas. O método de resolução pode ser dividido em dois programas de optimização que se resolvem alternadamente: a) Optimização do programa fraccionário interior não convexo que permite calcular o índice de fiabilidade do mecanismo estocasticamente mais importante (e que enumera as restantes soluções locais com índices de fiabilidade significativos); b) Optimização do programa convexo exterior em que é minimizado o volume de aço ou armadura.

A aplicabilidade desta técnica foi exemplificada num pórtico metálico e numa laje em betão armado. Trata-se de um utensílio poderoso com aplicações práticas tendo em vista a implementação de um regulamento de nível 2, tendo como base o comportamento aleatório dos materiais e das cargas.

REFERÊNCIAS

- [1] ELLINGWOOD, B. R. e GALAMBOS, T. V. "Probability-based Criteria for Structural Design", *Structural Safety*, 1, 15-26, 1982..
- [2] SHINOZUKA M. "Basic Analysis of Structural Safety", *J. Struct. Division ASCE*, 109, 721-740, 1983.
- [3] DITLAVSEN, O. "Generalized Second Moment Reliability Index", *J. Struct. Mech.*, 7, 453-472, 1979.
- [4] ANG, A. H. S. e MA, H. F. "On the Reliability of Structural Systems", *3rd Int. Conf. on Structural Safety and Reliability*, Throndeim, 1982.
- [5] CHOU, K. C. McINTOSH, C. e COROTIS, R. B. "Observations on Structural System Reliability and the role of Modal Correlations", *Structural Safety*, 1, 189-198, 1983.
- [6] NAFDAY, A. M., COROTIS, R. B. e COHON, J. L. "Failure Mode Identification for Structural Frames", *J. of Struct. Engrg. ASCE*, Vol. 113, 1415-1432, 1987.
- [7] RASHEDI, M. e MOSES, F. "Applications of Linear Programming to Structural Systems Reliability", *Comp. Struct.*, 24, 375-384, 1986.
- [8] MOSES, F. KINSER, D. E. "Optimum Structural Design with Failure Probability Constraints", *AIAA J.*, 5, 1152-1158, 1967.
- [9] VANMARCKE, E. H. "Matrix Formulation of Reliability Analysis and Reability-based Design", *Comp. and Struct.*, 3, 757-770, 1971.
- [10] KWAK, B. M. e HAUG, E. J. "Optimum Design in the presence of Parametric Uncertainty", *J. Optim. Theory Appl.*, 19, 527-545, (1976).
- [11] LEE, T. W. e KWAK, B. M. "A Reliability-based Optimal Design using Advanced First Second Moment Method", *Mech. Struct. and Mach.*, 15, 523-542, 1987-1988.
- [12] MUNRO, J. e DA FONSECA, A. M. A. "Yield Line Method by Finite Elements and Linear Programming", *The Structural Engineer*, 2 (1978) 37-44.
- [13] MUNRO, J. "Optimal Design of plastic Frames" in NATO-ASI on *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*, Cohn, M. Z. e Maier, G., Ed., Pergamon Press, 1979.
- [14] ROSENBLATT, M. "Remarks on a Multivariate Transformation", *Annal of Math. Stat.*, Vol. 23, 1952.
- [15] SIMÕES, L. M. C. "Branch and Bound Strategy for finding the Reliability Index with Nonconvex Performance Functions", *Struct. Safety*, 5, 95-108, 1988.
- [16] PHILLIPS, A. T. e ROSEN, J. B. "A Parallel algorithm for Constrained Concave Quadratic Global Minimization", *Math. Prog.*, 42, 421-448, 1988.
- [17] KONNO, H. "Maximization of a Convex Quadratic Function under Linear Constraints", *Math. Program.*, 11, 117-127, 1976.
- [18] TUI, H. "Concave Programming under Linear Constraints", *Soviet Mathematics*, 1437-1440, 1964.
- [19] MURTY, K. G., "An algorithm for ranking all assignments in increasing order of costs", *Op. Research*, 16, 682-687, 1969.
- [20] SURAHMAN, A. e ROJANI, K. "Reliability-Based Optimum Design of Concrete Structures", *J. Struct. Eng. ASCE*, 109, 741-757, 1983.
- [21] PARIMI, S. R. e COHN, M. Z. "Optimal Solutions in Probabilistic Structural Design", *J. Mec. Appl.*, 2, 47-90, 1978.
- [22] VANDERPLAATS, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications*, McGraw-Hill, 1984.