

*II Encontro de Matemática  
Computacional, Porto 1975*

## DETERMINAÇÃO DE LIMITES DE CEDENCIA POR PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Luis Miguel da Cruz Simões  
Departamento de Engenharia Civil  
Universidade de Coimbra, Portugal

### RESUMO

São indicados os programas matemáticos que correspondem à análise de uma viga sujeita a um carregamento proporcional com comportamento elastoplástico e que assenta numa fundação elastoplástica. Para se estabelecer como a capacidade resistente da viga e a variação do limite de cedência do solo vão influenciar as deformações observadas efectua-se a análise de sensibilidades através da resolução de um programa quadrático convexo. Por último é abordado a resolução do problema de identificação por programação matemática. Com base nas medições efectuadas e admitindo que as características elásticas e geométricas do modelo estrutura/ fundação são conhecidas, obtém-se valores mais realistas para os limites de cedência do solo. O problema de programação quadrática complementar correspondente é resolvido com recurso ao princípio da entropia máxima.

### ABSTRACT

An elastic-perfectly plastic discretized structure subjected to given proportional loads, undergoes displacements, some of which are measured. On the basis of this experimental data assumed as exact (unaffected by measurement errors) the yield limits are sought, whereas the elastic and geometric properties are known. This special problem of identification under suitable hypothesis of piecewise linear yield surfaces and no local unstressing under increasing loads is shown to be amenable to the minimization of a convex quadratic function under linear and complementarity constraints and is solved by using the maximum entropy formalism.

## 1. INTRODUÇÃO

Pouca atenção tem sido prestada a problemas inversos de elastoplasticidade. Contudo há motivos práticos para identificar os parâmetros que caracterizam a resistência de maciços rochosos e outras formações geotécnicas, a partir de medições do comportamento do sistema no próprio local. Neste contexto, a calibração do modelo matemático elastoplástico de cedência de Mohr-Coulomb foi efectuada na ref.[1]. Nesse trabalho foram aplicadas técnicas de pesquisa directa para minimizar a função de erro (que é a discrepância entre os resultados observados e os referentes ao modelo matemático). Outras aplicações da programação matemática à geotecnia encontram-se referenciadas em [2]. O problema de identificação de limites de cedência com base na resposta do sistema estrutural a um dado carregamento foi resolvido na ref.[3] através da utilização de um modelo discretizado em que são consideradas leis elasto-plásticas com troços rectos e se assumiram leis constitutivas holonómicas. Para resolver o programa quadrático complementar correspondente foi aplicado um algoritmo de duas fases. De notar que para evitar as situações em que se verifica recuperação elástica das secções pode efectuar-se uma análise elasto-plástica incremental aos resultados obtido. Neste trabalho, este programa de identificação dos limites de cedência é resolvido por um outro algoritmo em que os multiplicadores são gerados automaticamente maximizando a entropia do sistema.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ANALISE ELASTOPLASTICA

Para simplificar o modelo matemático referem-se apenas estruturas articuladas. As relações matriciais que representam a resposta elastoplastica deste tipo de estruturas, permitem estudar outros sistemas estruturais discretizados em que relações constitutivas são linearizadas em troços rectos.

$u$  e  $F$  representam, respectivamente, os vectores de deslocamentos dos nós livres ( $n$  graus de liberdade cinemática) e de cargas nodais.  $Q$  e  $q$  representam, respectivamente, os vectores dos esforços e dos alongamentos das  $m$  barras. As equações de equilíbrio e compatibilidade podem ser escritas na forma,

$$q = Cu \quad (1)$$

$$C^T Q = F \quad (2)$$

onde  $C$  é uma matriz  $m$  por  $n$  que depende apenas da geometria inicial do sistema. Se a lei constitutiva de cada membro que relaciona as forças com os alongamentos for constituído por troços rectos (Fig. 1), tem-se:

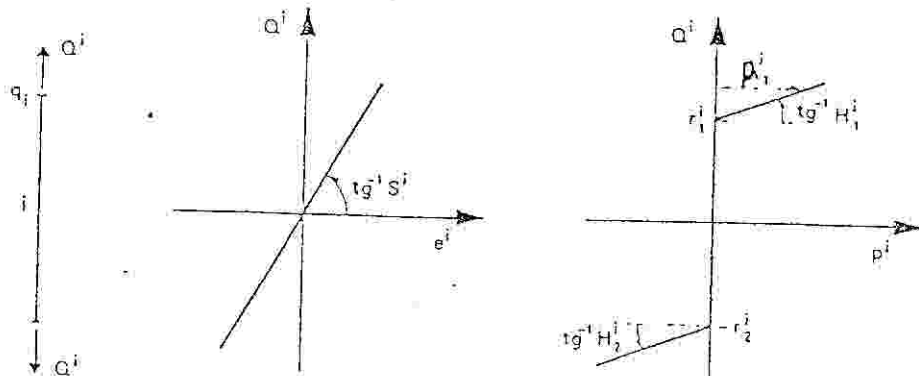


Figura 1

$$q^i = e^i + p^i = (S^i)^{-1} Q^i + p_1^i - p_2^i \quad (3a)$$

$$\phi_1^i = -Q^i + (r_1^i + H_1^i p_1^i) \geq 0 \quad (3b)$$

$$\phi_2^i = Q^i + (r_2^i + H_2^i p_2^i) \geq 0 \quad (3c)$$

$$p_1^i, p_2^i \geq 0 \quad ; \quad \phi_1^i p_1^i = 0 \quad ; \quad \phi_2^i p_2^i = 0 \quad (3d)$$

onde  $p_j^i$ ,  $\phi_j^i$  representam, respectivamente, o multiplicador plástico e a função de cedência.  $H_j^i$  é um módulo de endurecimento (não-negativo) para cada, e  $i$  dado por  $a^i E^i k_j^i / l^i$  onde  $k_j^i$ ,  $a^i$ ,  $E^i$ ,  $l^i$  representam coeficientes de endurecimento, área de secção, módulo de elasticidade e comprimento do membro  $i$ . O elemento  $i$  da matriz de rigidez diagonal  $S^i$  é a rigidez elástica.  $r_j^i$ ,  $j=1,2$  são os parâmetros de cedência que se pretende determinar e que para treliças são dados pelo produto  $\sigma_j^i a^i$  onde  $\sigma_j^i$ ,  $j=1,2$  são as tensões de cedência à compressão e tracção do membro  $i$ . Podem-se agrupar estas relações para todos os membros, obtendo-se:

$$q = (S)^{-1} Q + p_1 - p_2 \quad (4a)$$

$$\phi_1 = -Q + (r_1 + H_1 p_1) \geq 0 \quad (4b)$$

$$\phi_2 = Q + (r_2 + H_2 p_2) \geq 0 \quad (4c)$$

$$p_1, p_2 \geq 0 \quad ; \quad \phi_1 p_1 + \phi_2 p_2 = 0 \quad (4d)$$

Substituindo os vectores  $q$  e  $Q$  nas expressões (1), (2) e (4), vem:

$$K u - C^t S p_1 + C^t S p_2 = F \quad (5a)$$

$$-N^t S C u + (N^t S N + H) p + r \geq 0 \quad (5b)$$

$$\phi \geq 0 \quad ; \quad p \geq 0 \quad ; \quad \phi^t p = 0 \quad (5c)$$

onde  $K = C^t S C$  é a matriz de rigidez da estrutura e  $N = [I \ -I]$ . De (5a), tem-se:

$$u = u^e + G N p \quad (6)$$

onde,

$$u^e = K^{-1} F \quad \text{and} \quad G = K^{-1} C^t S \quad (7)$$

O vector  $u^e$  representa deslocamentos elásticos e os elementos da matriz  $G$  são os deslocamentos da estrutura provocados pelas deformações plásticas. O problema de análise de sistemas estruturais que possuem leis constitutivas elastoplásticas com endurecimento, pode ser resolvido com recurso à programação quadrática convexa. Pretende-se minimizar os vectores dos esforços nas barras  $Q$  e os multiplicadores plásticos  $p$ :

$$\text{Min } 1/2 Q^t S^{-1} Q + 1/2 p_1^t H_1 p_1 + 1/2 p_2^t H_2 p_2 \quad (8a)$$

sujeito a,

$$C^t Q = F \quad (8b)$$

$$\phi_1 = -Q + H_1 p_1 + r_1 \geq 0 \quad (8c)$$

$$\phi_2 = Q + H_2 p_2 + r_2 \geq 0 \quad (8d)$$

$$Q \text{ real} \quad ; \quad p_1 \geq 0 \quad ; \quad p_2 \geq 0 \quad (8d)$$

que é idêntico a:

$$\text{Min } 1/2 Q^t S^{-1} Q + 1/2 p^t H p \quad (9a)$$

e cumpre as restrições,

$$C^t Q = F \quad (9b)$$

$$\phi = -N^t Q + H p + r \geq 0 \quad (9c)$$

$$Q \text{ real}; p \geq 0 \quad (9d)$$

Para o modelo elásto-plástico perfeito,  $H = 0$  e o programa quadrático (9) pode ser simplificado:

$$\text{Min } 1/2 Q^t S^{-1} Q \quad (10a)$$

cujo domínio é definido por,

$$C^t Q = F \quad (10b)$$

$$0 = -N^t Q + r \geq 0 \quad (10c)$$

$$Q \text{ real} \quad (10d)$$

Este programa só tem solução se o dimensionamento permitir que o sistema tenha capacidade resistente para suportar as cargas.

O programa dual de (8) é o programa quadrático convexo,

$$\text{Min } 1/2 [u^t \quad p_1^t \quad p_2^t] \begin{vmatrix} C^t S C & -C^t S & C^t S \\ -S C & S+H_1 & -S \\ S C & -S & S+H_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} + [-F^t \quad r_1^t \quad r_2^t] u \quad (11a)$$

para,

$$u \text{ real}; p_1 \geq 0; p_2 \geq 0 \quad (11b)$$

cuja solução dá o vector dos deslocamentos nodais e os multiplicadores plásticos.

É mais vantajoso do ponto de vista computacional utilizar a formulação dual em lugar do primal. Além de não ter restrições, possui normalmente um número de variáveis mais reduzido. A solução óptima dos programas de análise elasto-plástica possui as seguintes propriedades: (i) Todas as matrizes e vectores envolvidos são diferenciáveis (ii) as restrições activas definem vectores linearmente independentes.

#### 4. ANALISE DAS SENSIBILIDADES

É necessário verificar o modo como uma pequena diferença nos parâmetros vai afectar o comportamento do sistema expresso através das variáveis de estado: esforços nas barras, deslocamentos nodais, deformações plásticas.

As matrizes  $S$ ,  $H_1$  e  $H_2$  e os vectores  $r_1$  e  $r_2$  são diferenciáveis em ordem a cada um dos parâmetros, tendo por derivadas, respectivamente,  $S^i a^i$ ,  $H_1^i a^i$ ,  $H_2^i a^i$ ,

$r_1^{ai}, r_2^{ai}$ . A derivada à direita de  $[u^i \ p_1^i \ p_2^i]^t$  para um incremento positivo  $\Delta a_i$  do parâmetro  $a_i$  é obtida através da resolução do programa quadrático convexo dual de análise elastoplástica (12a):

$$\text{Min } 1/2 [u^{ai} \ p_1^{ai} \ p_2^{ai}] \begin{vmatrix} C^t \ S \ C - C^t \ S & C^t \ S \\ -S \ C & S+H_1 & -S \\ S \ C & -S & S+H_2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} u^{ai} \\ p_1^{ai} \\ p_2^{ai} \end{bmatrix} + [-F^t(r_1^{ai}-r_1)(r_2^{ai}-r_2)^t] \begin{bmatrix} u^{ai} \\ p_1^{ai} \\ p_2^{ai} \end{bmatrix}$$

onde,

$u^{ai}$  é real

$$p_1^{ai} = 0 \quad \text{para} \quad \phi_1^i = -Q^i + (r_1^i + H_1^i p_1^i) > 0 \quad (12b)$$

$$p_2^{ai} = 0 \quad \text{para} \quad \phi_2^i = Q^i + (r_2^i + H_2^i p_2^i) > 0 \quad (12c)$$

$$p_1^{ai} < 0 \quad \text{para} \quad \phi_1^i = -Q^i + (r_1^i + H_1^i p_1^i) = 0 \quad (12d)$$

$$p_2^{ai} < 0 \quad \text{para} \quad \phi_2^i = Q^i + (r_2^i + H_2^i p_2^i) = 0 \quad (12e)$$

A sensibilidade  $Q^{ai}$  é calculada directamente através das equações de compatibilidade,

$$Q^{ai} = S \ C \ u^{ai} + S \ p_1^{ai} - S \ p_2^{ai} \quad (13)$$

e as funções de cedência são,

$$\phi^{ai} = -N^t \ Q^{ai} + H^{ai} \ p^{ai} + r^{ai} \quad (14)$$

As derivadas à esquerda são os valores simétricos destas, desde que se considere o mesmo conjunto de restrições activas. Como o conjunto de restrições activas depende não só do carregamento como da distribuição das capacidades resistentes, este método produz apenas semiderivadas.

#### 4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE IDENTIFICAÇÃO DOS LIMITES DE CEDENCIA

##### 4.1 - O problema inverso elastoplástico

Apesar da rigidez elástica ser conhecida, as capacidades resistentes  $r$  dependem de  $\alpha$  parâmetros independentes  $a$ , sendo a relação entre estes representada pela restrição linear,

$$T \ a = r \quad (15)$$

onde  $T$  é uma matriz binária de dimensão  $2m \times 2a$ . Deste modo, as capacidades resistentes dos membros são subdivididas em  $\alpha$  grupos com as mesmas características resistentes. Obtêm-se os deslocamentos  $u_{hk}^M$  em  $d$  locais  $h$  que correspondem a  $t$  medições efectuadas durante o carregamento ( $h=1, \dots, d$ ;  $k=1, \dots, t$ ). Pretende-se que esta informação seja explorada de modo a obterem-se os parâmetros  $a$  que identificam as características resistentes do

local. Se  $u_{hk}^c$  indicarem os deslocamentos (nos mesmos locais onde se efectuam as observações) calculados a partir do modelo matemático sob a acção das mesmas cargas verifica-se que estes valores são dependentes dos  $\alpha$  parâmetros especificados. Toma-se para medida da discrepância entre os resultados reais e os resultados teóricos o quadrado da norma Euclidiana,

$$z = \sum_{h=1,d} \sum_{k=1,t} (u_{hk}^M - u_{hk}^c)^2 \quad (16)$$

A minimização desta função de erro em ordem aos parâmetros permite identificar estes valores. Se a matriz binária B (dxn) seleccionar os d deslocamentos nodais que vão ser medidos,

$$u^c = B (u_k^E + G p_k) \quad (17)$$

tem-se, com base em (16) e (17) que a função a minimizar é quadrática em termos dos multiplicadores plásticos,

$$\text{Min } z = \sum_{k=1,t} (p_k^t M p_k + b_k^t p_k + c_k) \quad (18a)$$

onde,

$$M = G^t B^t B G \quad (18b)$$

$$b_k = 2 G^t B^t (B u_k^e - u_k^m) \quad (18c)$$

$$c_k = (u_k^{m\ t} - u_k^{e\ t} B^t) (u_k^m - B u_k^e) \quad (18d)$$

A função objectivo dependente dos parâmetros a através dos multiplicadores plásticos  $p_k$ . Como M é uma matriz positiva semidefinida, (18a) é uma função convexa. As restrições que caracterizam o comportamento do sistema são:

$$\phi_{1k} + Q_k - (r_{1k} + H_{1k} p_{1k}) = 0 \quad (18e)$$

$$\phi_{2k} - Q_k - (r_{2k} + H_{2k} p_{2k}) = 0 \quad (18f)$$

$$p_{1k}, p_{2k} \geq 0 \quad ; \quad \phi_{1k}, \phi_{2k} \geq 0 \quad (18g)$$

$$\phi_{1k} p_{1k} + \phi_{2k} p_{2k} = 0 \quad (18h)$$

Um aspecto que caracteriza a formulação matemática deste programa de optimização é a restrição de complementaridade (18h) que impõe que em cada par de variáveis  $\phi_{jk} p_{jk}$ , uma delas seja nula. Esta condição é responsável pelo domínio do problema (18) ser não convexo.

O algoritmo de programação matemática descrito neste trabalho consiste em resolver um problema min-max, que é obtido reescrevendo a função objectivo (18a) e as restrições (18e-h) numa forma normalizada. Se  $z$  representar o erro de referência que se pretende diminuir,  $\phi_1, \phi_2, p_1$  e  $p_2$  os potenciais estáticos e multiplicadores plásticos que correspondem a este ponto, o objectivo (18a) transforma-se em,



$$\sum_{k=1,t} (p_k^t M p_k + b_k^t p_k + c_k) \leq z$$

$$\Rightarrow g_1(a) = \frac{\sum_{k=1,t} (p_k^t M p_k + b_k^t p_k + c_k)}{z} - 1 \leq 0 \quad (19a)$$

As restrições de sinal que limitam as variações em  $\phi_1, \phi_2, p_1$  e  $p_2$  conduzem a,

$$g_2(a) = - \frac{1}{\phi_{1k}} \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial a} - 1 \leq 0 \quad (19b)$$

$$g_3(a) = - \frac{1}{\phi_{2k}} \frac{\partial \phi_{2k}}{\partial a} - 1 \leq 0 \quad (19c)$$

$$g_4(a) = - \frac{1}{p_{1k}} \frac{\partial p_{1k}}{\partial a} - 1 \leq 0 \quad (19d)$$

$$g_5(a) = - \frac{1}{p_{2k}} \frac{\partial p_{2k}}{\partial a} - 1 \leq 0 \quad (19e)$$

Cada restrição de complementaridade é satisfeita implicitamente em cada iteração.

Este problema multicritério pode ser enunciado no formato minimax,

$$\min_F \max_k (g_1, \dots, g_k, \dots, g_4) \quad (20)$$

#### 4.2 - Optimização Minimax

Considere-se o problema de optimização minimax,

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \text{Max} \langle g_j(x) \rangle \\ x \in X & j \in J \end{array} \quad (21)$$

e a desigualdade de Jensen, igualmente designada desigualdade de norma  $\rho$  (ref.[4]), para valores crescentes de  $\rho$  no intervalo  $1 \leq \rho \leq \infty$ :

$$\left( \sum_{j=1}^J U_j^\rho \right)^{1/\rho} \leq \left( \sum_{j=1}^J U_j^q \right)^{1/q} \quad (22)$$

Fazendo  $U_j = \exp [g_j(x)]$ ,  $j=1, \dots, J$  e aplicando limites ao lado esquerdo, vem:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[\rho g_j(x)] \right\}^{1/\rho} = \text{Max}_{j \in J} \langle \exp[g_j(x)] \rangle \quad (23)$$

Calculando o logaritmo natural da expressão (23) tem-se,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (1/\rho) \log \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[\rho g_j(x)] \right\} = \text{Max}_{j \in J} \langle g_j(x) \rangle \quad (24)$$

O resultado (24) é verdadeiro para qualquer conjunto de vectores  $g(x)$ , incluindo o conjunto que resulta da minimização de ambos os lados da igualdade (24) qualquer que seja  $x \in X$ . Deste modo esta igualdade é aplicável ao programa matemático:

$$\text{Min}_{x \in X} \text{Max}_{j \in J} \langle g_j(x) \rangle = \text{Min}_{x \in X} (1/\rho) \log \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[\rho g_j(x)] \right\} \quad (25)$$

para valores crescentes de  $\rho$  no intervalo  $1 \leq \rho \leq \infty$ .

Este resultado indica que o problema de optimização minimax (21) pode ser resolvido através da minimização da função escalar do lado direito de (25). A desigualdade (26a) pode ser obtida utilizando a desigualdade de Cauchy e transforma-se numa igualdade se o lado direito for maximizado em ordem a  $\lambda$  satisfazendo as condições (26b).

$$\text{Min}_{x \in X} \text{Max}_{j \in J} \langle g_j(x) \rangle \geq \text{Min}_{x \in X} \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x) - (1/\rho) \sum_{j=1}^J \lambda_j \log \lambda_j \quad (26a)$$

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j = 1 \quad ; \quad \lambda_j \geq 0 \quad ; \quad j=1, \dots, J \quad (26b)$$

O segundo termo do lado direito da expressão (26a) é constante relativamente à minimização nas variáveis  $x \in X$  e tende para 0 à medida que  $\rho \rightarrow \infty$ . A forma deste termo adicional é pois idêntica à função de entropia de Shannon (ref.[5]), onde  $k=1/\rho$

$$S = -k \sum_{j=1}^J \lambda_j \log \lambda_j \quad (27)$$

onde  $S$  é a entropia,  $k$  é uma constante positiva e os  $\lambda_j$ ,  $j=1, \dots, J$  satisfazem o conjunto de condições (26b). A função de entropia de Shannon é medida da incerteza associada a um processo aleatório discretizado na qual  $\lambda_j$  é a probabilidade associada ao acontecimento  $j$ . Jaynes (ref.[6]) utilizou a função de



entropia (27) para definir o princípio da entropia máxima, segundo o qual,

$$\lambda_k = \exp[\rho g_k(x)] / \left\{ \sum_{j=1}^J \exp[\rho g_j(x)] \right\} \quad ; \quad k=1, \dots, J \quad (28)$$

Para um dado  $x \in X$ , considere-se o problema,

$$\text{Max}_{\lambda} \sum_{j=1}^J \lambda_j g_j(x) - (1/\rho) \sum_{j=1}^J \lambda_j \log \lambda_j \quad (29a)$$

sujeito a,

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j = 1 \quad ; \quad \lambda_j \geq 0 \quad ; \quad j=1, \dots, J \quad (29b)$$

Subtraindo os multiplicadores associados à entropia máxima (28) na função objectivo (29a) chega-se à função escalar que se viu ser idêntica ao problema de optimização minimax.

#### 4.3 - Optimização da função escalar

A função escalar em (25) possui propriedades muito importantes do ponto de vista da optimização. Trata-se de uma aproximação convexa dos critérios, o que permite a utilização de métodos para optimização convexa. Por outro lado, a qualidade das aproximações melhora para valores de  $\rho$  mais elevados. Há um grande número de métodos que podem ser utilizados para resolver problemas de optimização sem restrições (que corresponde à minimização da função escalar) e que são classificados em duas categorias: métodos de pesquisa directa e métodos descendentes. Os métodos de pesquisa directa só necessitam do cálculo da função objectivo e não utilizam a informação relativa às suas derivadas parciais para obter o extremo. Por esse motivo são mais aconselhados para a resolução de problemas de pequena dimensão ou que envolvam funções não diferenciáveis e a sua eficiência é normalmente menor que a dos métodos descendentes. Estes últimos, além do cálculo da função objectivo utilizam normalmente a primeira derivada e em alguns casos derivadas de ordem superior. Como  $p$  e  $\phi$  são funções das restrições activas que correspondem a um dado conjunto de parâmetros, a minimização da função escalar deveria ser efectuada por um algoritmo para optimização não diferenciável. Por outro lado como  $p$  e  $\phi$  são "semismooth" (ref.[7]) pode utilizar-se um algoritmo para optimização diferenciável. As derivadas da função escalar vão possuir produtos de termos exponenciais com valores superiores aos das funções primitivas, pelo que são particularmente desaconselhados algoritmos que utilizem as derivadas analíticas de 2ª ordem.

#### 5. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere-se a viga com comportamento elásto-plástico perfeito que assenta na fundação elásto-plástica representada na Fig.2. A estrutura tem 26 graus de liberdade e possui 50 membros deformáveis: as 24 rótulas onde se concentra a deformabilidade da viga e das 26 molas de fundação que não opõem

qualquer resistência a tracções.

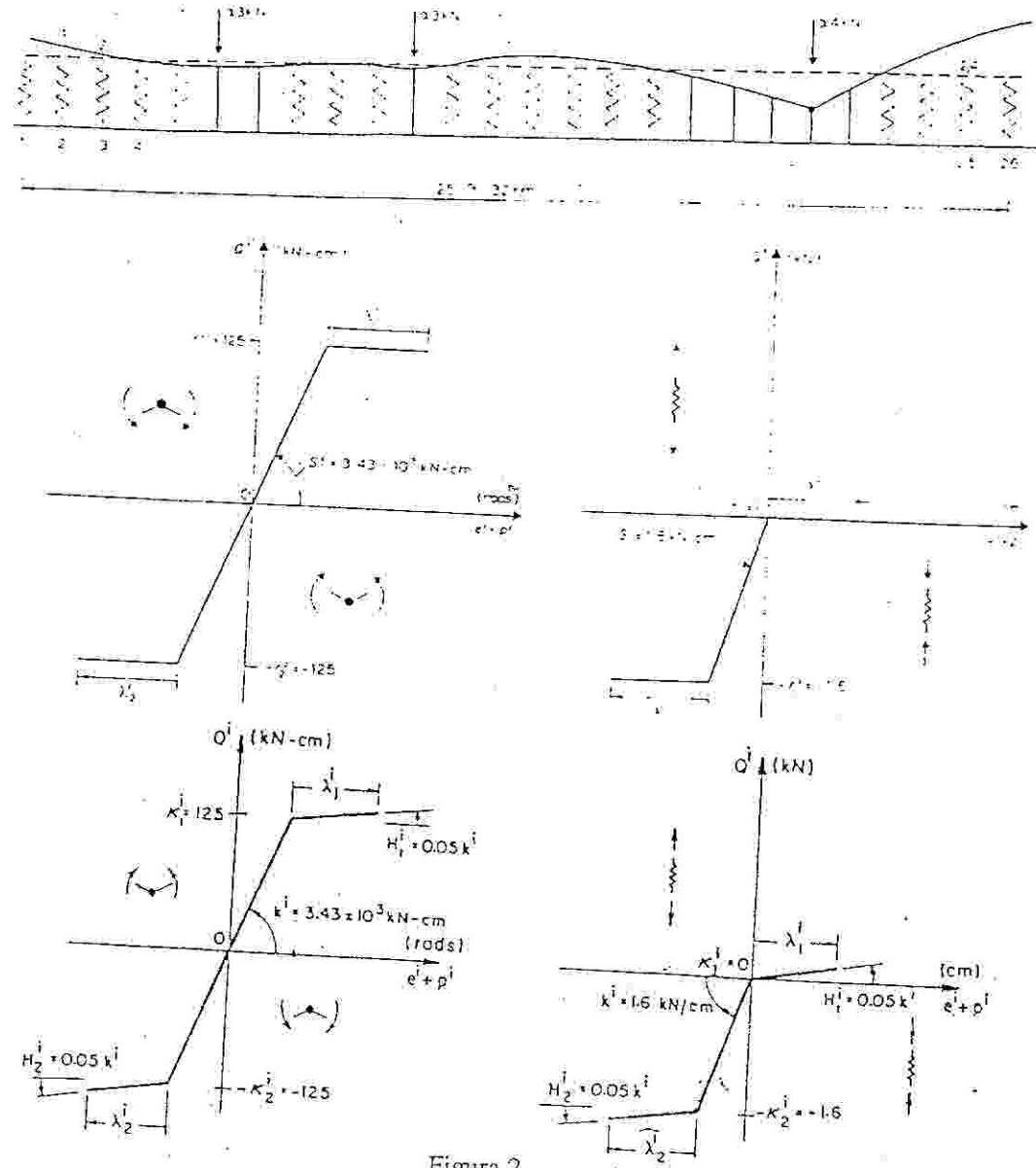


Figura 2

Na Fig.3 está representada a forma como o endurecimento  $H$  afecta os valores do multiplicador plástico correspondente à mola 18. Este é activo para um comportamento elástico-plástico perfeito ( $H = 0$ ) e anula-se quando o endurecimento aumenta. A sensibilidade é descontínua, sendo negativa quando o multiplicador plástico é positivo e nula a partir do momento que o multiplicador plástico deixa de pertencer à base.

Na Fig.4 está representada a influência do endurecimento no afundamento vertical no ponto de aplicação da carga vertical. Verifica-se que uma mudança de base na zona em que  $H \cong 0$  altera significativamente o valor do afundamento.

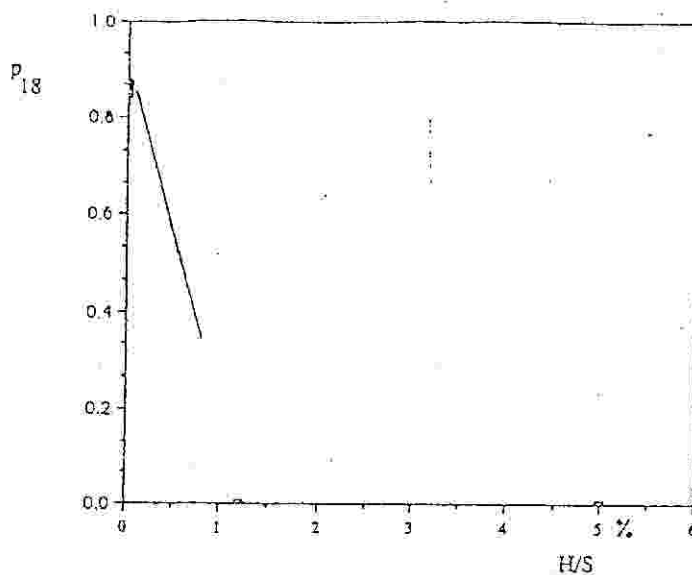
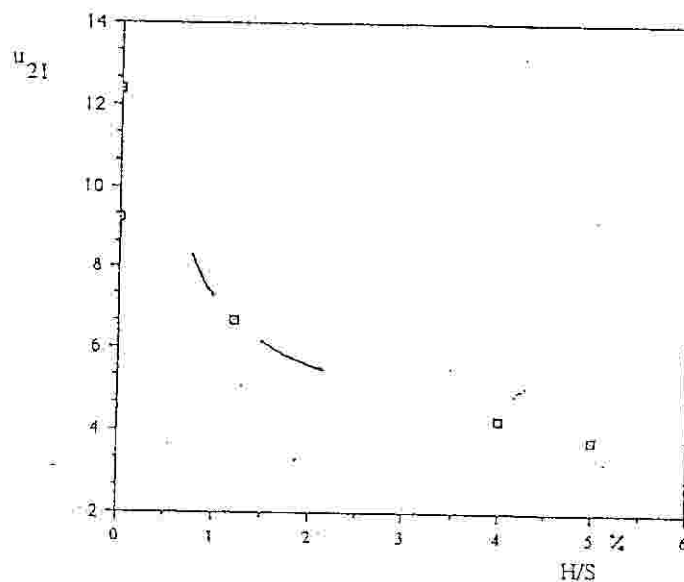
Figura 3<sup>a</sup>

Figura 4

O problema da identificação dos limites de cedência com base em medições efectuadas no sistema estrutural consiste na minimização de uma função quadrática dos multiplicadores plásticos (e indirectamente dos parâmetros a determinar) sujeita a um conjunto de restrições lineares e uma restrição (não linear e não convexa) de complementaridade. São necessários pelo menos  $\alpha$  medições para identificar  $\alpha$  parâmetros. Para resolver o problema da identificação dos limites de cedência da viga e do solo à compressão, mede-se o assentamento vertical das rótulas. É contudo necessário que o número de deslocamentos a serem medidos não seja inferior ao número de incógnitas. Chama-se a atenção para o facto de não ser possível identificar as características pretendidas se o sistema não chegar a entrar em cedência.

Na Fig.5 estão representados os resultados obtidos para o problema de

identificação de parâmetros quando se considera a viga com um comportamento plástico-perfeito e se utilizam como medições os afundamentos na zona mais solicitada (entre as molas 17 e 21, inclusivé). Pretende-se determinar os limites de cedência da viga e à compressão do solo. Despreza-se a resistência do solo à tracção. Introduziram-se os valores obtidos no modelo real, que foram afectados de erros de 5 e 10% para se estudar a sensibilidade do método a erros de medição. Verifica-se que estes erros são bastante mais importantes que os erros introduzidos pelo modelo de identificação de parâmetros.

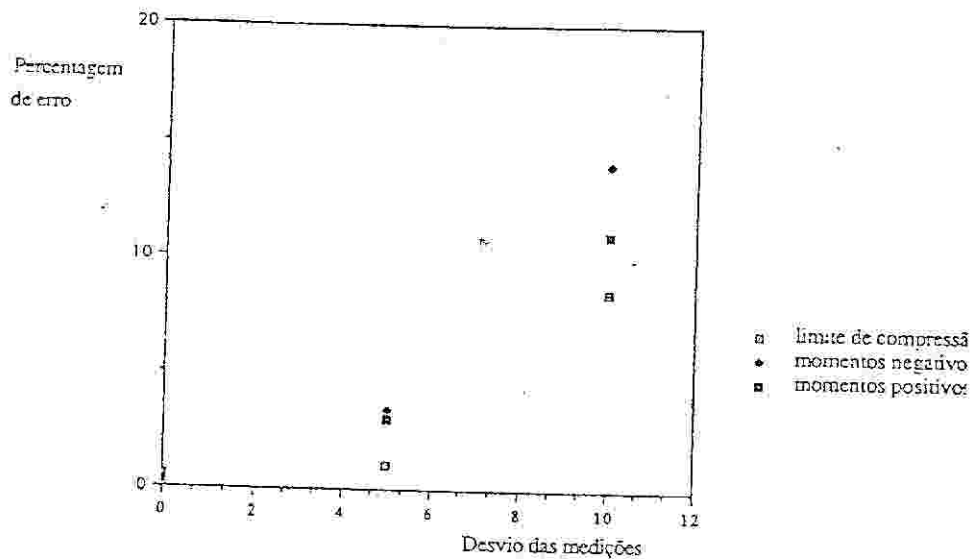


Figura 5

De notar que a solução é grande parte dependente no número e posições onde se efectuam as medições.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi estudado o problema de identificação de parâmetros (ou problema inverso) de uma viga com comportamento elastoplástico e que assenta numa fundação elastoplástica. O problema de identificação consiste em três aspectos distintos: análise, análise das sensibilidades e optimização. Enquanto os dois primeiros podem ser resolvidos com recurso à programação quadrática, o último é bastante mais difícil de resolver em virtude das restrições de complementaridade que possui. Em lugar de se caminhar para um sistema que integre esses três aspectos, talvez seja preferível a utilização da optimização de um modo interactivo, sendo assim possível ir controlando os resultados obtidos. A formulação minimax proposta substitui a última fase pela minimização de uma função escalar, em que existe um único parâmetro de controle. Este parâmetro é especificado pelo utilizador, sendo ajustado à estrutura de dados do problema. No algoritmo descrito, os multiplicadores são indirectamente calculados de modo a maximizar a entropia do conjunto, sendo obtida uma solução de Pareto.

O modelo matemático adoptado não exclui à partida um certo grau de conhecimento do sistema real. Por outro lado, os parâmetros a identificar estão confinados a um intervalo de variação que se estabelece inicialmente. Em situações reais, quer as medições quer o modelo do sistema são afectados por

incertezas que possuem determinadas propriedades estatísticas. Os métodos que "filtram" esse "ruído" não são o objectivo desta comunicação já que se admite que o mínimo da função de erro poderá ser nulo.

#### AGRADECIMENTOS

O autor deseja agradecer o apoio financeiro concedido pela JNICT (Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica, Proj. 87.230).

#### BIBLIOGRAFIA

1. Gioda, G. e Maier, G. "Direct Search Solution of an Inverse Problem in Elastoplasticity: Identification of Cohesion, Friction Angle and "in situ" Stress by Pressure Tunnel Tests", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15, 1823-1848, 1980.
2. Gioda, G. "A Numerical Procedure for Defining the values of Soil Parameters affecting Consolidation", *Proc. 7th E.C.S.M.F.E.*, Brighton, 1979.
3. Maier, G. e Gianessi, F. "Indirect Identification of Yield Limits by Mathematical Programming", *Eng. Struct.*, 4, 86-98, 1982.
4. Charalambous, C. e Bandler, J.W. "Nonlinear Minimax Optimization as a sequence of least pth optimization with finite values of p", *Int. J. of Systems Science*, 7, 377-391, 1976.
5. Greenberg, H.J. e Pierskalla "Surrogate Mathematical Programming", *Op. Res.*, 18 924-939, 1970.
6. Shannon, C.E. "A Mathematical Theory of Communication", *Bell System Technical Journal*, 27, 379-428, 1948.
7. Mifflin, R. "Semismooth and Semiconvex Functions in Constrained Optimization", *SIAM J. Control and Optimization*, 15, 959-972, 1977.