MARIA DAS NEVES VIEIRO REBOCHO

# Problemas de Momentos e Polinómios ortogonais

~ ◊ ~

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
2001

*Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, especialidade em Matemática Pura, ramo de Teoria da Aproximação*

# Conteúdo

# Introdução

## Motivação

Este trabalho versa, essencialmente, sobre Problemas de Momentos e Sucessões de Polinómios Ortogonais.

Vejamos o que é, actualmente, um problema de momentos. Trata-se de dar resposta a duas questões. Dada uma sucessão de números $c_n$,

$(Q1)$ Determinar uma medida $\mu$, tal que $c_n = \int x^n d\mu(x)\ n = 0, 1, 2, ...$

$(Q_2)$ No caso de existir, averiguar se $\mu$ é única.

No caso de a resposta à segunda questão ser afirmativa, chamar-se-à Problema de Momentos *Determinado*, e no caso contrário o Problema de Momentos é dito *Indeterminado.*

Surgido num contexto de fracções contínuas [45], a sua importância reside não só no facto de estar na base de novos resultados na Análise Real e Complexa, tais como o denominado *Integral de Stieltjes*, como também pela ligação a diversas áreas, principalmente com a Teoria de Operadores e a Análise Complexa. Efectivamente, e de acordo com Simon, em [44], "Aproximantes de Padé, polinómios ortogonais, extensões de funcionais lineares ..., valores de fronteira de funções analíticas ..., todos têm a sua origem no estudo do Problema de Momentos."

## Enquadramento dos temas tratados

As origens dos Problemas de Momentos remontam aos trabalhos de Chebyschev (1874) em Teoria das Probabilidades [10], onde são estudadas aproximações de integrais, onde $f$ é uma função desconhecida, $\int_a^b f(x)dx$, através do conhecimento de

$$\int_a^b f(x)dx,\ \int_a^b xf(x)dx, ..., \int_a^b x^m f(x)dx,\ m \in \mathbb{N}.$$

Já Chebyschev tinha associado o problema com a expansão do integral

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}dx$$

numa fracção contínua do tipo

$$\cfrac{1}{\alpha z+\beta+\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1+\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2+...}}}$$

e estudado as propriedades dos denominadores dos aproximantes das fracções contínuas.

Em 1894/95, Stieltjes edita o trabalho, "Recherches sur les fractions continues", onde estabelece e resolve o chamado *Problema de Momentos de Stieltjes.*

Neste trabalho são estabelecidos resultados de convergência de fracções contínuas do tipo

$$\frac{1|}{|a_1 z}+\frac{1|}{|a_2}+\frac{1|}{|a_3 z}+...+\frac{1|}{|a_{2p-1}z}+\frac{1|}{|a_{2p}}+...,\ a_i>0,\ z\in\mathbb{C} \tag{0.0.1}$$

É definido o *Integral de Stieltjes*, e, entre outros, é estabelecido o resultado de convergência de sucessões de funções de variável complexa, conhecido na literatura como o Teorema de Stieltjes-Vitali.

Pela primeira vez é enunciado o problema de momentos (pg. 449 de [45]):

*"Nous appellerons problème de moments le problème suivant: trouver une distribution de masse positive sur une droite* $]0,+\infty[$ *les moments d'orde* $k$, $k=0,1,2,...$ *étant donnés* "

No trabalho de Stieltjes, a existência e unicidade dependem da natureza da fracção contínua. O problema de momentos associado a uma sucessão $(c_n)$ tem solução se e somente se os $a_n$ da fracção contínua (0.0.1) correspondente à série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{c_n}{z^{n+1}}$$

forem positivos. É determinado se e somente se $\sum a_n$ divergir.

De entre as tentativas de extensão do problema de momentos de Stieltjes ao eixo real, salientam-se as de Van Vleck [49] e de Grommer [17].

Mas foi Hamburguer [18] quem, em 1919, resolveu e enunciou o problema de momentos que ficou conhecido por *Problema de Momentos de Hamburguer.*

A noção de problema de momentos determinado ou indeterminado é, a partir do trabalho de Hamburguer, independente da fracção contínua.

O terceiro problema de momentos que estudaremos foi estabelecido por Hausdorff.

Em 1920, Hausdorff [20] resolveu o problema de momentos no intervalo $[0,1]$. Inicialmente, resolve o problema de momentos utilizando a teoria de fracções contínuas de Stieltjes, e é só mais tarde, em 1923, que o problema de momentos é resolvido sem qualquer ligação com fracções contínuas.

Com os trabalhos de Nevanlinna [34] o problema de momentos é tratado num contexto de Teoria de Funções de Variável Complexa. Nos trabalhos de Hellinger, Riesz, Nevanlinna e Weil (cf. [2]) é utilizada a Análise complexa para estudar as soluções do problema de momentos de Hausdorff, em termos de funções

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(x)}{z-x},$$

onde $\mu$ é uma função não-decrescente. Uma exposição acerca destes temas pode ser consultada no capítulo 3 de [2].

Destacamos também os trabalhos de Carleman [8], onde se estabelecem condições suficientes de unicidade do problema de momentos de Hamburguer e de Stieltjes que resultam de critérios de quasi-analiticidade.

Riesz foi o primeiro a resolver o problema de momentos utilizando a Análise Funcional. Em 1923 mostrou que o problema de momentos correspondente à sucessão $(c_n)$ tem solução se e somente se a funcional linear $\mathcal{L} : \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}(x^n) = c_n$ for definida-positiva.

Das extensões e generalizações dos problemas de momentos salientam-se o problema de momentos trignométrico (cf. [2]), e os trabalhos de Boas [3] e Duran [15],[16].

## Objectivos do trabalho

De seguida indicamos pormenorizadamente o percurso tomado neste trabalho. Indicamos não só os temas a tratar em cada um dos capítulos, como também os principais resultados focados.

No primeiro capítulo começaremos por definir a classe de funções quasi-analíticas. Estas funções têm a propriedade de serem definidas de modo único pelos valores que assumem, assim como as suas derivadas, num subconjunto do domínio. De entre os principais resultados, salientamos a condição suficiente para a quasi-analiticidade de classes de funções diferenciáveis de variável real, dada por Denjoy [13], e as condições necessárias e suficientes devidas a Mandelbrojt [30] e Carleman [8].

Além destes resultados de quasi-analiticidade, e com vista à posterior aplicação ao problema tratado na secção 1.6 e a problemas de momentos, apresentaremos um breve estudo de várias classes de funções, das quais se referem os Produtos de Blaschke e as Funções de Círculo Fundamental.

A quasi-analiticidade de uma família de funções diferenciáveis de variável real é equivalente ao *Problema de Watson*, (cf. [8] e [30]) o qual consiste na seguinte questão: determinar as condições necessárias e suficientes que devem verificar as constantes $B_n$ de modo que uma função analítica no conjunto $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ que verifica as desigualdades

$$|f(z)| \leq B_n|z-1|^n,\ z \in \Delta,\ n = 0, 1, 2, ...$$

seja identicamente nula $\Delta$.

G. López sugeriu-nos a seguinte generalização do Problema de Watson:
seja $\{f_n(z)\}$ uma sucessão de funções definidas em $\Delta$ e que verificam as desigualdades

$$|f_n(z)| \leq M_{n,k} \prod_{i=1}^{k} |z - w_{n,i}|,\ k \leq n,\ n \in \mathbb{N},\ \text{com} \lim_{n\to\infty} w_{n,k} = 1,\ k = 0, 1, ..., n.$$

Que condições devem verificar as constantes $M_{n,k}$ de modo que $f_n \rightrightarrows 0,\ z \in \Delta$?

No estudo deste problema, consideraremos várias hipóteses sobre a sucessão $(w_{n,k})$,

**(a)** $\lim_{n\to\infty} w_{n,k} = 1$ por rectas contidas no círculo unidade.

**(b)** $\lim_{n\to\infty} w_{n,k} = 1$ e $(w_{n,k}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in (\pi - \epsilon, \pi + \epsilon) \wedge |z| \leq 1,\ \epsilon < \pi\}$

Apresentamos o resultado de G. López, em 1.6, que resolve o problema no caso (a).

No segundo capítulo exporemos um estudo do trabalho de Stieltjes, "Recherches sur les fractions continues".

Para efectuar tal estudo, começaremos por indicar algumas propriedades de fracções contínuas. Discutiremos o resultado de existência e unicidade devido a Stieltjes: dada uma sucessão de números reais $(c_n)$, esta sucessão admite a representação

$$c_n = \int_0^{+\infty} x^n d\mu(x),\ n = 0, 1, 2, ... \tag{0.0.2}$$

onde $\mu$ é uma função não-descrescente e cujo conjunto de pontos de crescimento é infinito, se e somente se a fracção contínua

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ...,\ z \in \mathbb{C} \tag{0.0.3}$$

correspondente da série $\sum (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}}$ for tal que $(a_n) \subseteq \mathbb{R}^+$. A função $\mu$ é única a menos de uma constante se e somente se $\sum a_n$ divergir.

Observe-se que a série formal $\sum (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}}$, correpondente à função de Stieltjes que denotaremos por $\hat{\mu}$, e definida por $\int_0^{+\infty} \frac{1}{z+x} d\mu(x)$ (cf. 2.5.), pode ser divergente e não representar a função. Mas, através da fracção contínua correspondente da série podemos definir uma melhor aproximação de $\hat{\mu}$ (cf. 2.4).

Obteremos, então, soluções do problema de momentos de Stiletjes. De facto, considerando $\{P_n/Q_n\}$ a sucessão dos aproximantes da fracção contínua (0.0.3) onde os elementos $a_n$ verificam $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, definimos uma sucessão de funções não decrescentes $\mu_n$, cujo espectro é constituído pelos zeros dos polinómios $Q_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Mediante certas condições existe convergência uniforme dessa sucessão de funções para uma função de espectro infinito que é solução do problema de momentos (cf. 3.6).

Não caracterizámos tal função limite.

Após este estudo, várias questões se colocam, nomeadamente,

(a) Será que podemos caracterizar a função limite partindo apenas dos momentos?

(b) Qual a relação entre o suporte dos zeros $Q_n$ e a solução do problema de momentos? Veremos que no caso determinado, os zeros de $Q_n$ são densos . No caso de indeterminação, ainda não se obteve resposta a esta questão.

(c) No que diz respeito à unicidade, existem (se sim, quais) condições que envolvem os momentos e nos permitem conlcuir que o problema de momentos é determinado?

Respostas à primeira questão serão dadas não só no capítulo seguinte, através da fórmula de inversão de Stieltjes-Perron [46], como também em 4.5, onde apresentamos o trabalho de Pollaczek [37], de A. Krall [24], A. Krall e D. Morton [25] e Duran [16]. A questão (b) também está enquadrada em questões que serão discutidas em 4.4 e 5.3. Finalmente, a questão (c) é estudada em 3.3.

No capítulo 3 indicaremos o surgimento de outros problemas de momentos, nomeadamente o problema de momentos de Hamburguer (1919), e o problema de momentos de Hausdorff (1921).

Segundo Hamburguer, para que o problema de momentos associado a uma sucessão de números reais $(c_n)$ tenha solução cujo espectro está em $\mathbb{R}$ é necessário e suficiente que $\Delta_n > 0,\ n = 0, 1, 2, ....$ Uma condição necessária e suficiente para que o problema de momentos de Hausdorff seja solúvel é dada na secção 3.2. De referir que o problema de momentos de Hausdorff, se solúvel, é determinado (cf. 3.2).

Indicamos algumas extensões do problema de momentos de Stieltjes. Boas [3] estabelece que se em (0.0.2) não se impuser a condição sobre a monotonia da solução $\mu$, supondo apenas que $\mu$ é uma função de variação limitada, o problema de momentos tem sempre solução e é indeterminado. Duran [15] extendeu o problema de momentos de Stieltjes a sucessões $(c_n) \subseteq \mathbb{C}$ e ao espaço de funções $\mathcal{S}^+ \cap \mathcal{S}$, sendo $\mathcal{S}$ o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty$

definidas em $\mathbb{R}$ e de contradomínio em $\mathbb{C}$, onde juntamente com as suas derivadas, são funções rapidamente decrescentes e

$$\mathcal{S}^{+} = \{f \in \mathcal{S} : f(t) = 0,\ t < 0,\ \text{e}\ \parallel f \parallel_{k,n} < \infty,\ \forall k, n \in \mathbb{N}\}$$

onde $\parallel f \parallel_{k,n} = \sup_{t \in ]0,+\infty[} t^k |f^{(n)}(t)|$.

Discutiremos ainda questões de unicidade. Da aplicação à teoria das funções quasi--analíticas resultam, entre outras, a condição suficiente de unicidade conhecida por Critério de Carleman [8]. Outras condições suficientes, tais como as condições dadas em [44] resultam da ligação existente entre problemas de momentos e Transformadas de Fourier (ver 4.5.2).

A relação de recorrência a três termos

$$P_n(x) = (x - \beta_n) P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x),\ n = 1, 2, ...$$

$$P_{-1} = 0,\ P_0(x) = 1.$$

verificada por uma sucessão de polinómios é uma condição necessária e suficiente para que $\{P_n\}$ seja uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma funcional linear $\mathcal{L}$ [47], funcional esta definida no espaço dos polinómios por $\mathcal{L}(x^n) = c_n,\ n = 0, 1, ...$

Enunciámos já o teorema de Boas, segundo o qual toda a sucesão $c_n$ de números reais é representável na forma

$$c_n = \int x^n d\mu(x),\ \mu \text{ função de variação limitada}$$

Facilmente se verifica que toda a funcional definida através de um Integral de Stieltjes associado a uma função peso $\mu$ não-decrescente é positiva-definida desde que o espectro de $\mu$ seja um conjunto infinito.

Reciprocamente, o teorema de Hamburguer mostra-nos que $\Delta_n > 0$ se e somente se a funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L}(x^n) = c_n,\ n \in \mathbb{N}$ for representável através de um Integral de Stieltjes associado a uma função peso $\mu$ não-decrescente.

Se, adicionalmente, $\Delta_n^{(1)} > 0$, recordamos (Teorema de Stieltjes) que o espectro de $\mu$ está em $[0, +\infty)$, ou seja, $\mathcal{L}$ é da forma :

$$\mathcal{L}(x^n) = \int_0^{+\infty} x^n d\mu(x).$$

As funcionais de momentos positivas-definidas são então caracterizadas como integrais de Stieltjes associados a funções peso não-decrescentes com espectro infinito.

Além desta caracterização, outros resultados permitem estabelecer relações entre uma funcional de momentos e a respectiva sucessão de polinómios ortogonais.

Utilizando a fórmula de Quadratura de Gauss (cf. [11], pg. 32), o autor mostra que

$$\mathcal{L}(x^k) = \int x^k d\psi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} A_{ni} x_{ni}^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., 2n-1$$

onde $x_{n,1} < x_{n,2} < ... < x_{n,n}$ são os zeros do polinómio $p_n$ de grau $n$ ortogonal em relação a $\mathcal{L}$ e $\psi_n$ é função em escada não-decrescente com saltos em $x_{ni}$, de amplitude $A_{ni} = \mathcal{L}\left(\frac{P_n(x)}{(x-x_{ni})P'_n(x_{ni}))}\right)$.

Daqui se observa a importância dos zeros das sucessões de polinómios ortogonais na caracterização da funcional de momentos, nomeadamente no que se refere ao espectro da medida de ortogonalidade. Em 4.3 indicaremos algumas propriedades dos zeros de sucessões de polinómios ortogonais.

Ainda em relação à representação da funcional linear $\mathcal{L}$, vemos que no caso de o fecho do conjunto constituído pelos zeros de $p_n$, $n = 0, 1, 2...$ ser um intervalo limitado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, verifica-se [11] que $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$, onde $\psi$ é uma função não decrescente e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) d\psi_n(x) = \int_a^b f(x) d\psi, \forall f \in \mathcal{C}[a, b].$$

Mas, no caso de tal intervalo não ser limitado, se $\mathcal{L}$ for definida-positiva e $\psi_n$ sucessão de funções definidas como anteriormente, existe uma subsucessão que converge para uma função $\psi$ não-decrescente, com espectro infinito em $]-\infty, +\infty[$ e cujos momentos são finitos, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\psi(x) = c_n.$$

Este resultado é conhecido por Teorema de Helly (cf. [11]).

Do que foi referido, concluímos que procurar uma medida de ortogonalidade, ou seja, uma função peso que define a funcional de momentos em relação à qual a sucessão $\{p_n\}$ é sucessão de polinómios ortogonais, é equivalente a resolver um problema de momentos.

De entre os problemas de momentos determinados, salientaremos no capítulo 4, 4.2, os problemas de momentos associados aos Polinómios Ortogonais Clássicos. Esta classe de polinómios caracteriza-se pelo facto de cada $p_n$ verificar uma equação diferencial, designada equação de Pearson [21]. Podemos ver outros resultdos respeitantes à caracterização dos Polinómios Ortogonais Clássicos, bem como generalizações destas famílias de polinómios, em [5].

Terminaremos o capítulo 4 com os trabalhos de Pollaczek [37], onde se estabelece a relação entre medidas de ortogonalidade complexas e sucessão de polinómios ortogonais, e os resultados de A. Krall [24], A. Krall e D. Morton [25] onde se aplica um método para obter a função peso de vários sistemas de Polinómios Ortogonais através da representação de funcionais em séries-$\delta$. Veremos também alguns resultados de convergência fraca de medidadas no caso de os coeficientes da relação de recorrência a três termos

$$xp_n = a_n p_{n+1} + b_n p_n + a_{n-1} p_{n-1},\ n = 1, 2, ...$$

$$p_{-1}(x) = 0,\ p_0(x) = 1$$

de sucessões ortonormais reais verificarem $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a}{2}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. As medidas de ortogonalidade que satisfazem estas condições foram estudadas por Blumenthal Nevai, em 1898. Serão apresentados dois teoremas (cf. [48]) que estabelecem a representação para os limites das sucessões $\{p_{n-1}/p_n\}$ em (compactos de) $\mathbb{C}\setminus\text{supp}(\mu)$, e em $\text{supp}(\mu)\setminus[b-a, b+a]$, sendo $\mu$ a medida de ortogonalidade de $\{p_n.\}$

Não terminaremos este trabalho sem estudar o problema de momentos de Hamburguer num contexto da teoria de operadores, uma vez que dada uma sucessão de momentos de Hamburguer, poderemos encontrar $(a_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ e $(b_n) \subseteq \mathbb{R}$ tal que o problema de momentos de Hamburguer é associado a extensões auto-adjuntas de um operador de Jacobi, definido por matrizes tridiagonais simétricas

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & ... & ... \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... \end{pmatrix},\ a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}.$$

Reciprocamente, dado um operador de Jacobi no espaço de $\ell^2(\mathbb{C})$, podemos encontrar uma sucessão de momentos $(c_n)$ tais que $c_n = \langle e_0, j^n e_0\rangle$ (cf. [12]).

Do teorema 5.3.1. [44], vemos que existe uma equivalência entre a unicidade do Problema de Momentos de Stieltjes e de Hamburguer e a existência de extensões auto-adjuntas do operador $J$. O nosso estudo incidiu apenas sobre o problema de momentos de Hamburguer. Uma vez que, segundo o terorema 5.3.1, o problema de momentos de Stieltjes é determinado se e somente se o operador $J$ tiver uma única extensão não-negativa, seria necessário proceder a um estudo de operadores não-negativos. Estes resultados são tratados em [44].

Estudamos a relação entre medidas de ortogonalidade da sucessão de polinómios ortogonais reais e as medidas espectrais dos respectivos operadores de Jacobi. De referir que estes operadores de Jacobi têm defeito $(0, 0)$ ou $(1, 1)$. No caso de operadores de Jacobi com defeito $(n, n)$, com $n \geq 2$, surgirão ligações com sucessão de polinómios ortogonais matriciais. Alguns destes resultados podem ser consultados em [26].

Devemos ainda referir que os problemas de momentos estudados são apenas os conhecidos na literatura como *Problemas de Momentos Clássicos*, os problemas de momentos de Stieltjes, Hamburguer e de Hausdorff. Não será estudado o problema de momentos trignométrico,

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\mu(\theta),\ n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

onde $\overline{c}_n = c_{-n}$, nem a sua relação com os polinómios ortogonais sobre a circunferência $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Podemos ver um estudo destas questões em [6].

Também não trataremos de questões tais como extensões de problemas de momentos a espaços de dimensão superior a um. Para tal, indicamos as referências: capítulo 3 de [43], e [2].

## Notações e expressões utilizadas

Indicamos a notação para espaços de funções referido ao longo do texto.

1. $\mathcal{H}(\Omega),\ \Omega \subseteq \mathbb{C}$, espaço das funções analíticas no domínio $\Omega$.
2. $\mathcal{C}(]a, b[)$, espaço das funções contínuas no intervalo real $]a, b[$.
3. $\mathcal{C}^{\infty}$, espaço das funções com derivada de todas as ordens finita.

Damos significado a algumas expressões que ocorrem ao longo do texto.

1. $f \equiv 0$ se vericar $f(x) = 0$ para todo o $x$ no seu domínio. Nestas condições, também diremos que $f$ é uma função identicamente nula.
2. *Domínio* designa um conjunto aberto e conexo.
3. $f_n \rightrightarrows f$, a sucessão $f_n$ converge uniformemente pra $f$.
4. $\varphi(x)$ é uma função de variação limitada em $[0, +\infty)$ se verificar $\int_0^{+\infty} |d\varphi| < \infty$
5. Designaremos por sucessões de momentos de Stieltjes, Hamburguer ou Hausdorff sucessões de momentos associadas a soluções do respectivo problema de momentos.
6. A função logaritmo e exponencial por, serão designadas respectivamente, por log e exp.
7. cosh, designa o coseno hiperbólico.

Vejamos ainda outras notações:

1. $V_{x_0}$, Vizinhança de $x_0$.

2. $B(x_0, r)$, bola aberta de centro $x_0$ e raio $r$.

3. $\overline{D}$, fecho do conjunto $D$.

4. supp $\mu$, Suporte de uma medida $\mu$.

5. $f_n \rightrightarrows 0$ $z \in D$, $f$ converge uniformemente para a função nula em $D$.

6. $\mu(x_0^-) = \lim_{\lambda \to x,\, \lambda < x_0}$

7. $\mu(x_0^+) = \lim_{\lambda \to x,\, \lambda > x_0}$

8. $-A = \{-a : a \in A\}$

9. $\sigma(T)$, espectro do operador T.

## Agradecimentos

Gostaria de expressar aqui os meus sinceros agradecimentos:

- Ao professor Amílcar Branquinho, pelas sugestões e pela disponibilidade incondicional ao longo da elaboração deste trabalho;
- Ao Centro de Matemática da Universidade da Beira Interior;
- Ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

# Capítulo 1

# Quasi-Analiticidade

Começaremos por definir uma classe de funções de variável real que são univocamente definidas pelos valores que assumem, juntamente com as suas derivadas, numa porção do seu domínio de definição. As funções com esta propriedade são designadas funções quasi-analíticas (cf. [8]). Trata-se de uma classe que contém a classe das funções analíticas de variável real.

Após uma breve resenha histórica da teoria das funções quasi-analíticas, de onde salientamos os trabalhos de Borel [4], enunciamos os principais resultados que permitem caracterizar a quasi-analiticidade de uma família de funções diferenciáveis de variável real. Enunciaremos uma condição suficiente, o teorema de Denjoy [13], e condições necessárias e suficientes, o Teorema de Carleman [8] e de Mandelbrojt [30].

Apresentaremos a generalização de um problema conhecido na literatura como problema de Watson (ver 2.6),

*Se* $z = 1$ *e* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, *quais as condições necessárias e suficientes que devem verificar as constantes* $B_n$ *de modo que as desigualdades*

$$|f(z)| \leq B_n |z-1|^n, \;\; n = 0, 1, 2, ...$$

*impliquem* $f(z) = 0, \; z \in D$.

Veremos também que existe equivalência entre a quasi-analiticidade e o Problema de Watson.

Faremos ainda uma breve incursão pelas classes de Funções Racionais de Círculo Fundamental, também definidas como funções cujos zeros e pólos se dispõem alternadamente sobre o eixo real. Estas funções têm propriedades de convergência (cf. [33], [32]) que utilizaremos (3.5) para estabelecer a existência do problema de momentos de Stieltjes.

## 1.1 Analiticidade *versus* Quasi-Analiticidade

O conceito de classe de funções quasi-analíticas é uma generalização do conceito de funções analíticas, tendo as funções quasi-analíticas em comum com estas o facto de serem univocamente determinadas no seu domínio de definição pelos valores que assumem, assim como as suas derivadas, numa porção de domínio, por mais pequena que seja.

Recordemos que uma função é *analítica* no intervalo $]a, b[\subset \mathbb{R}$ se, para todo o $x_0$ do intervalo $]a, b[$ se verificarem:

**(a)** A série de Taylor de $f$ em $x_0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, converge uniformemente sobre um intervalo centrado em $x_0$ e contido em $]a, b[$,

**(b)** A soma da série nesta vizinhança é igual a $f(x)$,

ou ainda (cf.[9]),

**Teorema 1.1.1 (Teorema da Equivalência)** *Uma função de variável real $x$, diferenciável, definida num intervalo aberto $D \subseteq \mathbb{R}$ é analítica, se e somente se para cada $x_0 \in D$ existe $V_{x_0}$, vizinhança de $x_0$, tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq Mk^n n! \; \forall x \in V_{x_0}$$

*onde $M$ e $k$ são constantes que apenas dependem de $f$.*

Antes de vermos como surgiu e evoluiu a teoria das funções quasi-analíticas, damos a definição de classe de funções quasi-analíticas reais (as únicas por nós consideradas ao longo deste trabalho).

**Definição 1.1.1** Seja $C_{m_n}$ a classe de funções diferenciáveis num intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e tais que para cada $f$ existe $k$, *tal que*

$$|f^{(n)}(x)| < k^n m_n, \; x \in I, \; n \in \mathbb{N},$$

*onde* $k$ é uma constante que depende apenas de $f$.

A classe $C_{m_n}$ é dita *Quasi-Analítica* se cada função que verifica

$$f^{(n)}(\xi) = 0, \; \textit{para um certo } \xi \in I, \; n = 0, 1, 2...$$

for identicamente nula em I.

Pode ver-se que a classe das funções analíticas é a classe das funções $C_{n!}$. Basta ter em atenção o Teorema de Equivalência e o seguinte resultado, conhecido na literatura como o Primeiro Teorema de Unicidade [1].

**Teorema 1.1.2** *Seja $f$ função analítica num domínio $D$, e tal que para algum $x_0 \in D$ se verifica*

$$f^{(n)}(x_0) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

*Então, $f \equiv 0$ em $D$.*

Logo, vemos que a classe de funções analíticas é uma subclasse da classe das funções quasi-analíticas. Veremos que se trata de um subconjunto próprio.

## 1.2 Nota Histórica

Vejamos como surgiu o conceito de quasi-analiticidade e os principais resultados subjacentes.

No início do século XX, Borel introduziu novas classes de funções definidas no campo complexo, denominadas *funções monogéneas* [4]. Trata-se de uma classe de funções de variável complexa definidas sobre certos domínios, não necessariamente abertos e conexos, e que o autor designa como domínios de Cauchy do tipo C.

Sobre tais domínios C, as funções monogéneas de Borel gozam de propriedades análogas às propriedades clássicas das funções analíticas, tais como a unicidade do prolongamento analítico, desenvolvimento em série sobre curvas interiores a C, e verificam propriedades tais como a existência da primeira derivada implicar a existência de todas as outras, representações através de integrais duplos análogos aos de Cauchy, entre outras.

Toda a função monogénea de Borel, $f(z)$, ao ser definida sobre curvas

$$z = \varphi(t), \ t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

pode ser considerada como função de variável real, $f(t) = f(\varphi(t))$ e daqui a relação entre a monogeneidade do campo complexo para a quasi-analiticidade de funções reais de variável real.

No seu trabalho (cf. pg. 62-63), Borel definiu sucessões de polinómios

$$P_n(u) = c_{n,0} + c_{n,1}u + ... + c_{n,n}u^n$$

e, relativamente a cada uma destas sucessões, deu exemplos de famílias de funções (contendo não só funções analíticas, mas também não analíticas) diferenciáveis num intervalo $I = [a, b]$ de modo que, para todo o elemento $x_0$ desse intervalo, se tivesse:

**(a)** A série $\sum P_n(x - x_0; f)$, com

$$P_n(x - x_0; f) = c_{n,0}f(x_0) + c_{n,1}f'(x_0)(x - x_0) + ... + c_{n,n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

converge uniformemente, assim como todas as suas derivadas, sobre todo o segmento de $I$.

**(b)** $\forall x \in I$, a soma da série é $f(x)$.

Obviamente que toda a classe de funções à qual juntamos uma sucessão de polinómios que verifica (a) e (b) é uma classe de funções quasi-analíticas, uma vez que o conhecimento de $f^{(p)}(\xi), p \geq 0$, num ponto qualquer $\xi$ de $I$, determina $P_n(x-a; f)$ e, consequentemente, $f$ sobre $I$.

Exemplos de funções monogéneas e de funções de variável real $\varphi(t)$ não necessariamente analíticas que admitem desenvolvimentos do tipo $\sum P_n(t;\varphi)$ podem ser encontradas em [4], pg. 55-66.

Estas questões estão também relacionadas com Problemas de Cauchy.

Consideremos o sistema diferencial

$$\begin{aligned} u_{x^2} &= F(u_{y^2}, u_x, u_y, u, x, y) \\ u(0,y) &= \psi(y) \\ u_x(0,y) &= \varphi(y), \end{aligned}$$

A regularidade de $F$ nas suas variáveis e a analiticidade de $\varphi$ e de $\psi$ permitem concluir a existência de $u(x,y)$, solução do problema. Mas, no caso de estas condições não serem impostas, e, por exemplo, no caso da equação do calor $u_{x^2} - u_y = 0$, de acordo com [8], é indicada a condição necessária e suficiente para a resolução do Problema de Cauchy: $\psi$ e $\varphi$ verificam

$$\psi(y) = \frac{-1}{\pi}\int_0^y \frac{\varphi'(\alpha)}{\sqrt{y-\alpha}}d\alpha + g(y),$$

onde $g$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ tal que

$$|g^{(n)}(y)| < \frac{(2n+1)!}{\rho^{2n+1}},$$

para certo $\rho > 0$. Trata-se de uma classe maior que a classe das funções analíticas.

## 1.3 Principais Resultados

Todos estes resultados de prolongamento analítico de funções estão enquadrados em questões relacionadas com séries assimptóticas.

**Definição 1.3.1** [8] Diz-se que uma função $f$ é representada pela série assimptótica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

no domínio $D$ *se verificar*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c_0,\ x \in D$$
$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}}\right] = c_{n+1},\ x \in D.$$

Vejamos um resultado que nos permite concluir a existência de uma infinidade de funções analíticas com a mesma série assimptótica.

**Teorema 1.3.1 (Borel)** *Dada a série* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$, *existe uma função analítica num domínio* $D$, *representada por esta série assimptótica, desde que*

$$D \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon\ -\alpha\frac{\pi}{2} \leq \arg(x-x_0) \leq \alpha\frac{\pi}{2}\},\ \alpha > 0.$$

*Mais: existe uma infinidade de funções analíticas com esta série assimptótica, desde que* $\alpha < 1$.

**Observação**: De facto, se a cada função $f$ somarmos $k\exp\left(-\log^2(\frac{1}{x-x_0})\right)$, com $k$ uma constante qualquer, obtemos outra função com igual representação que a primeira, desde que

$$D \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon\ -\alpha\frac{\pi}{2} \leq \arg(x-x_0) \leq \alpha\frac{\pi}{2}\},\ 0 < \alpha < 1.$$

Mediante certas condições sobre os coeficientes de Taylor, a função é univocamente definida [50].

**Teorema 1.3.2 (Teorema de Watson)** *Seja*

$$m_n = \sup_{z\in D}\left|(f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k)/z^n\right|,\ D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < \rho \wedge -\frac{\pi}{2} \leq \arg(x) \leq \frac{\pi}{2}\},$$

*para certo* $\rho > 0$. *Então, existe uma única função* $f$ *tal que*

$$m_n < k^n(1-\epsilon)n!\ \epsilon \geq 0$$

Todas estas questões conduziram ao enunciar da seguinte questão, conhecida como *Problema de Watson*:

*Dado um domínio* $D$ *e um ponto* $z_0$ *da sua fronteira, que condições necessárias e suficientes devem verificar as constantes* $(B_n)$ *de modo que as desigualdades*

$$\left|\frac{f(z)-\sum_{k=0}^{n-1} c_k(z-z_0)^n}{(z-z_0)^n}\right| \leq B_n,\ z \in D$$

*impliquem o conhecimento de $f$ em $D$.*

Sem perda de generalidade, suponhamos que $z_0 = 1$ e que $D$ é o círculo unitário centrado na origem. Então, o Problema de Watson toma a forma:

*Se $z = 1$ e $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, quais as condições necessárias e suficientes que devem verificar as constantes $B_n$ de modo que as desigualdades*

$$|f(z)| \leq B_n|z-1|^n,\ z \in D,\ n = 0, 1, 2, ...$$

*impliquem $f(z) = 0,\ z \in D$.*

Veremos que o problema de Watson é equivalente à quasi-analiticidade de uma classe de funções de variável real.

Em 1912, Denjoy enuncia uma condição suficiente para a quasi-analiticidade de uma classe de funções reais de variável real diferenciáveis, $C_{m_n}$, definidas num intervalo $[a, b]$.

**Teorema 1.3.3 (Denjoy)** *Cada função $f$ da classe $C_{m_n}$ definida em $I = [a, b]$ é univocamente determinada em $I$ pelo conhecimento de $f^{(n)}(\xi_0),\ n = 0, 1, 2, ...,$ para certo $\xi_0 \in [a, b]$ se*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} m_n^{-\frac{1}{n}} = \infty$$

Carleman [8] obteve uma condição necessária e suficiente.

**Teorema 1.3.4 (Carleman)** *A classe $C_{m_n}$ de funções diferenciáveis definidas em $[a, b]$ é quasi-analítica se e somente se*

$$\int_1^{+\infty} \log\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{2n}}{m_n^2}\right) \frac{dr}{r^2} \tag{1.3.1}$$

*divergir.*

**Definição 1.3.2** *Seja $(\beta_n)$ a sucessão definida por $\beta_n = \sqrt[n]{m_n},\ n \in \mathbb{N}$. O Minorante de Faber da sucessão $\beta_n$* é definido por:

$$\beta_n^* = \min_{k \geq 0} \beta_{n+k},\ n \in \mathbb{N}.$$

**Teorema 1.3.5** [8] *A divergência do integral (1.3.1) é equivalente à divergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\beta_n^*}$$

*sendo $(\beta_n^*)$ o Minorante de Faber da sucessão $(\beta_n = \sqrt[n]{m_n})$.*

Em 1935, Mandelbrojt [30] apresenta a seguinte condição para a resolução do problema de Watson,

**Teorema 1.3.6** *Seja* $\varphi \in \mathcal{H}(D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\})$ *que verifica as desigualdades*

$$|\varphi(z)| \leq m_n |z-1|^n,\ z \in D,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.3.2}$$

*Então,* $\varphi \equiv 0$ *em* $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ *se e somente se* $\int_1^{+\infty} \log(T(r)) \frac{dr}{r^2}$ *divergir, onde* $T(r) = \limsup_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n},\ r \in [0, +\infty]$.

Concluindo, temos três critérios para averiguar a quasi-analiticidade de uma classe de funções diferenciáveis de variável real, num intervalo $[a, b]$: a divergência de uma (e consequentemente de todas) das três expressões,

- $\sum 1/\beta_n^*$
- $\int_1^{+\infty} \log\left(\{\sum (\frac{r^n}{m_n})^p\}\right) \frac{dr}{r^2},\ p \in \mathbb{N}$
- $\int_1^{+\infty} \log(T(r)) \frac{dr}{r^2}$

**Observação**: Ostrowski mostrou que $\sum 1/\beta_n^*$ e $\int_1^{+\infty} (\log(T(r)) \frac{dr}{r^2}$ têm a mesma natureza [36]. Mostrou também que a convergência de $\sum 1/\beta_n^*$ é equivalente à convergência de $\int_1^{+\infty} \{\sum (\frac{r^n}{m_n})^p\} \frac{dr}{r^2}\ p \geq 2,\ p \in \mathbb{N}$.

Enunciados os principais resultados que nos permitem averiguar a quasi-analiticidade de uma família de funções, outras questões se colocam, nomeadamente sobre a relação entre várias classes quasi-analíticas,

- Que condições necessárias e suficientes devem ser impostas às sucessões $(m_n)$ e $(m_{n'})$ de modo que as classes $C_{m_n}$ e $C_{m_{n'}}$ sejam idênticas, ou seja, que toda a função pertencente a uma classe pertença também à outra;

- Em particular, quais as condições necessárias e suficientes para que $f$, pertencente a $C_{m_n}$, seja analítica em $[a, b] \subset \mathbb{R}$;

- No caso de uma função ser representável por uma série de Fourier, quais as condições que os coeficientes da série devem verificar para que a função seja univocamente definida pelos valores de $f$ e das suas derivadas num ponto.

Uma vez que pretendemos apenas relacionar as questões da quasi-analiticidade com os teoremas de unicidade e posterior aplicação aos Problemas de Momentos, remetemos o leitor interessado para as referências [8], [31] e [4], onde podem ser encontradas respostas (algumas são parciais) a estas questões.

## 1.4 Teoremas de Unicidade e Produtos de Blaschke

Sem perda de generalidade, considere-se domínio o círculo aberto unitário centrado na origem (basta atender ao Teorema de Riemmann, cf. [1], pg. 229-235 ).

Os produtos de Blasche, que definiremos de seguida, são um exemplo das transformações de Mobius, ou seja, transformações do tipo

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ a, b, c, d constantes.}$$

Têm a propriedade de preservar rectas e círculos no plano complexo extendido, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. De facto, são composições de translações, rotações e inversões, que gozam desta propriedade.

**Definição 1.4.1** Designaremos por *Produto de Blaschke* uma função, $B(z)$, do tipo

$$B(z) = z^p \prod_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z} \right)^{p_k} \tag{1.4.3}$$

*onde*

**(a)** $p_1, p_2, p_n, ..., p \in \mathbb{N}_0$

**(b)** $0 < |\alpha_n| < 1$

**(c)** O produto $\prod_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^{p_k}$ é convergente.

O termo produto de Blaschke será também utilizado quando se tiver apenas um número finito de termos, não existindo, neste caso, questões de convergência.

Note-se que, em (1.4.3), cada um dos factores é um automorfismo do disco unidade que transforma a fronteira na fronteira. Tal produto infinito converge sempre, e temos convergência uniforme sobre subconjuntos compactos do disco unitário se e somente se $\prod_{k=1}^{+\infty} |\alpha_n|^{p_n}$ convergir, ou seja, se e somente se $\sum(1 - |\alpha_n|) < \infty$, caso em que o produto define uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, pelo teorema de Weierstrass. Neste caso, $B(z)$ será uma função que verifica $|B(z)| < 1$ *e* $|B(e^{i\theta})| = 1$ quase certamente em $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. O produto de Blaschke é univocamente determinado pelos seus (únicos) zeros $(\alpha_n)$.

Enunciamos ainda o teorema conhecido como Segundo Teorema de Unicidade.

**Teorema 1.4.1** *Seja $f$ função analítica num domínio $D$, que verifica*

$$\exists\ (z_n) \subset D \text{ tal que } f(z_n) = 0,\ \lim_{n \to \infty} z_n = z_0 \in D.$$

*Então, $f \equiv 0$ em $D$.*

Dos dois teoremas de unicidade enunciados concluímos que uma função analítica não identicamente nula num domínio $D \subset \mathbb{C}$ ou tem um número finito de zeros ou, no caso de ter uma infinidade numerável de zeros, estes acumular-se-ão na fronteira de $D$. Temos ainda o Terceiro Teorema de Unicidade, o qual nos permite concluir que, ainda que tal aconteça, a função é identicamente nula desde que a convergência não seja "muito rápida" [41].

**Teorema 1.4.2** *Seja $f \in \mathcal{H}(D)$ que verifica*

$$\exists \, (z_n) \subset D \;\; \textit{tal que} \; f(z_n) = 0$$

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = M < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - |x_n|) = \infty$$

*Então $f \equiv 0$ em $D$.*

**Observação**: Este teorema também é válido para funções de Nevanlinna, ou seja, funções do tipo $g/h$, com $|g| < 1, \; |h| < 1 \; e \; g \neq 0, \forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

## 1.5 Funções Racionais de Termos Enterlaçados

Nesta secção apresentaremos um breve estudo da classe de Funções de Círculo Fundamental, também conhecidas como Funções de Termos Entrelaçados. Designemos por semi--planos complexos superior e inferior, respectivamente, os conjuntos $\{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) > 0\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) < 0\}$, denotados, respectivamente, por $\mathbb{C}^+$ e $\mathbb{C}^-$.

**Definição 1.5.1** Uma função racional diz-se de *Círculo Fundamental* se conservar o eixo real e conservar ou trocar os dois semi-planos complexos superior e inferior.

Trata-se de uma generalização das transformações de Mobius, o exemplo mais simples de funções com esta propriedade: conservam os semi-planos complexos no caso de serem funções crescente para $z \in \mathbb{R}$ e trocam os semi-planos no caso de serem funções decrescentes. O eixo real é conservado.

Um outro modo de definir as Funções de Círculo Fundamental é defini-las como funções de termos enterlaçados, ou seja, funções cujos zeros e pólos se dispõem alternadamente no eixo real. Vejamos que estas duas definições são equivalentes (cf. [33]).

**Teorema 1.5.1** *Se $R(z)$ é uma função racional que conserva ou troca os semi-planos superior e inferior e conserva o eixo real, os seus zeros e pólos serão necessariamente reais, e dispõem-se alternadamente sobre o eixo real.*

**Demonstração:** Provemos o resultado apenas para o caso de $R$ conservar os semi-planos. Mostremos que os zeros de $R$ são reais.

Se existisse um zero de $R$, $\beta$, no semi-plano superior, poder-se-ia traçar uma circunferência centrada em $\beta$, totalmente contida em $\mathbb{C}^+$, e tal que a imagem da bola aberta $B(\beta, \delta)$ por $R$ é $B(o, \epsilon)$, para certos $\epsilon, \delta > 0$. Mas esta última região contém a origem e outros pontos de $\mathbb{C}^+$ e de $\mathbb{C}^-$, o que contradiz a hipótese de $R$ preservar ou trocar os semi-planos.

Vejamos agora que os zeros de $R$ são simples.

Seja $\beta$ um zero de $R$. Consideremos uma curva em torno de $\beta$, no domínio. Se $\beta$ fosse um zero de ordem $p > 1$, a esta curva no domínio corresponderia no contradomínio uma outra curva que contorna a origem $p$ vezes. Mas percorrendo uma vez a primeira curva e partindo de um ponto real, estaríamos (no contradomínio) no semi-plano superior, depois no semi-plano inferior, e assim sucessivamente $p$ vezes, enquanto que a primeira curva seria percorrida uma só vez. Tal constitui uma contradição em relação aos semi-planos serem conservados.

Analogamente se prova que os zeros de $R'(z)$ são reais.

Uma vez que a fracção $1/R(z)$ é também de círculo fundamental, resulta do que foi dito anteriormente que os pólos de $R$ são reais e simples.

Resta verificar que os zeros e pólos de $R$ se dispõem alternadamente sobre o eixo real.

Verifica-se que os pólos de $R'$ são duplos. Donde, $R'$ mantém o sinal constante sobre o eixo real e, consequentemente, $R$ varia sempre do mesmo modo, para $z$ real. É então evidente que os zeros e os pólos estão dispostos alternadamente sobre $\mathbb{R}$. $\square$

**Teorema 1.5.2** *Uma fracção racional de termos enterlaçados é, a menos de uma constante complexa, uma fracção de círculo fundamental.*

**Demonstração:** Uma vez que os zeros e os pólos são reais, podemos supor que os coeficientes de $R$ são reais, e que o numerador e o denominador são, cada um deles, o produto de um polinómio com coeficientes reais por uma constante complexa, ou seja,

$$R(z) = e^{i\theta} R_1(z)$$

em que $R_1$ é a fracção de termos enterlaçados e de coeficientes reais.

A decomposição em elementos simples da fracção toma a forma:

$$R(z) = A + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A_k}{z - \alpha_k}, \ A, \ A_k, \ \alpha_k \in \mathbb{R},$$

onde $A = \lim_{z\to\infty} R(z)$ e $A_k = \lim\limits_{\substack{z\to\alpha_k \\ z\in\mathbb{R}}} (z - \alpha_k)R(z)$ são reais.

Além disso, todos os $A_k$ têm o mesmo sinal, já que quando $z$ é real, o valor de $R$ nas vizinhanças de $\alpha_k$ varia de $+\infty$ a $-\infty$ se $A_k < 0$, ou de $-\infty$ a $+\infty$ se $A_k < 0$.

Se $z = x + iy, \ R(z) = X + iY$, obtemos

$$Y = -y \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A_k}{(x - \alpha_k)^2 + y^2}.$$

Se $A_k < 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$, os semi-planos são conservados, e se $A_k > 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$, os semi-planos são trocados. Daqui concluímos que uma fracção de termos entrelaçados, é, a menos de uma constante, uma função de círculo fundamental. $\square$

Vejamos alguns exemplos. As transformações de Mobius do tipo $w(z) = \frac{d}{z+e}, \ d, \ c$ constantes, são transformações que permutam os dois semi-planos complexos superior e inferior se $d > 0$, e os conservam se $d < 0$. De facto, se $z = x + iy$,

$$\Im(w(z)) = \frac{-yd}{(x+e)^2 + y^2}.$$

Logo, no caso $d > 0$, $w(z)$ pertence ao semi-plano inferior/superior sempre que $z$ esteja no semi-plano superior/inferior, respectivamente. Se $d < 0$, os semi-planos são conservados.

Finalmente, apresentamos um teorema [33] que nos fornece uma condição suficiente e necessária para que uma função racional seja de termos enterlaçados:

**Teorema 1.5.3** *$R$ é função racional de termos enterlaçados se e somente se todas as raízes da equação $R(z) - h = 0$ forem distintas e reais,* $\forall h \in \mathbb{R}$.

Vejamos agora alguns resultados de convergência respeitantes a esta classe de funções.

**Definição 1.5.2** [32] Uma família $\mathcal{F}$ de funções holomorfas definidas num domínio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é dita *Normal* na região $\Omega$ se cada sucessão de funções $\{f_n\} \in \mathcal{F}$ contiver uma subsucessão que converge uniformemente em todo o compacto de $\Omega$, e é dita *Quasi--normal* se de toda a subsucessão de funções de $\mathcal{F}$ se poder extraír uma subsucessão de funções que converge no interior de $\Omega$, excepto, quando muito, num número finito de pontos de $\Omega$.

**Observação**: Os limites de sucessões $\{f_n\}$ de uma Família Normal $\mathcal{F}$ não são necessariamente elementos de $\mathcal{F}$.

**Teorema 1.5.4 (Montel)** *Uma família de funções analíticas num domínio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, onde cada função omite pelo menos dois valores, é Normal neste domínio.*

**Teorema 1.5.5 (Montel)** *Uma família de funções analíticas num domínio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ onde cada função não admite o valor um mais que $p$ vezes e o valor zero mais que $q$ vezes, é uma Família Quasi-Normal em $\Omega$, e de ordem quando muito igual ao mínimo entre $p$ e $q$.*

## 1.6 Generalização do Problema de Watson

O problema que apresentaremos está enquadrado em questões de unicidade de funções. Para o seu estudo utilizaremos, entre outros, os Teoremas de Unicidade enunciados e os Produtos de Blaschke. Nesta secção, denotaremos por $\Delta$ o círculo aberto de raio um centrado na origem e por $\partial\Delta$ a sua fronteira, $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

Enunciámos já o *Problema de Watson*: Dada $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ e tal que

$$|f(z)| \leq M_n |z-1|^n, \ z \in \Delta,$$

que condições deverão verificar as contantes $M_n$ de modo que $f$ seja identicamente nula em $\Delta$.

Tal como indicámos, este problema foi resolvido, entre outros, por Carleman, que deu a condição suficiente:

$$\sum M_n^{-1/n} = \infty$$

O nosso objectivo será, numa primeira etapa, a generalização deste resultado. Tal generalização consiste na seguinte questão:

Seja $\{f_n(z)\}$ uma sucessão de funções definidas em $\Delta$ e que verificam

$$|f_n(z)| \leq M_{n,k} \prod_{i=1}^{k} |z - w_{n,i}|, \ k \leq n, \ n \in \mathbb{N}, \ \text{com} \ \lim_{n\to\infty} w_{n,k} = 1, \ k = 0, 1, ..., n.$$

Que condições devem verificar as constantes $M_{n,k}$ de modo que $f_n \rightrightarrows 0, \ z \in \Delta$?

Consideraremos várias hipóteses sobre a sucessão $(w_{n,k})$:

**(a)** $\lim_{n\to\infty} w_{n,k} = 1$ por rectas contidas no círculo unidade.

**(b)** $\lim_{n\to\infty} w_{n,k} = 1$ e $(w_{n,k}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \ \pi - \epsilon \leq \arg(z) \leq \pi + \epsilon, \ |z| \leq 1, \ \epsilon < \pi\}$

Observe-se que para o caso (a) não se perde generalidade em considerar que a sucessão $w_{n,k}$ é real, uma vez que se $(w_{nk})$ estiver contida na recta $\{z \in \mathbb{C}\colon \arg(z) = \theta, \theta \neq 0\}$,

$$\left|f_n(e^{i\theta}z)\right| \leq M_{n,k}\prod_{l=1}^{k}|e^{i\theta}z-w_{n,l}| = M_{n,k}\prod_{l=1}^{k}|e^{i\theta}||z-w_{n,l}e^{-i\theta}|,$$

ficando este caso reduzido ao caso de $w_{n,l}e^{-i\theta} \in [0,1]\times\{0\}$.

Veremos que o facto de $w_{n,k}$ não serem reais torna o problema consideravelmente mais complexo.

A resposta ao Problema Generalizado de Watson no caso particular de $w_{n,i} \in [0,1]\times\{0\}$ foi dada por G. López, em [29].

**Lema 1.6.1 (G. López)** *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções holomorfas e uniformemente limitadas em $\Delta$ e tal que*

$$|f_n(z)| \leq M_{n,k}\prod_{i=1}^{k}|z-w_{n,i}|,\ k\leq n,\ n\in\mathbb{N},\ (w_{n,k})\subseteq[0,1]\times\{0\}.$$

*Se $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{M_{n,k}}} = \infty$, a sucessão de funções $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente para a função nula em $\Delta$.*

Antes de apresentarmos a demonstração deste resultado, vejamos o seguinte lema (cf. pg. 221 de [29]).

**Lema 1.6.2** *Se a sucessão de funções $\{f_n\}$, holomorfas em $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \Re e(z) > 1\}$, for uniformemente limitada em $\Omega$ e verificar as seguintes desigualdades, para $m,n\in\mathbb{N}$*

$$|f_n(z)| \leq c\left(\frac{d_{n,m}}{|z|}\right)^m, z\in\overline{\Omega},\ c \text{ constante},\ m\leq n,$$

$$(d_{n,m})\subset\mathbb{R} \text{ tal que } d_{n,m_1} < d_{n,m2} < ... < d_{n,n}$$

*então existe $I\subset\mathbb{N}$, tal que $\{f_n\}\rightrightarrows 0,\ z\in\Omega,\ n\in I$.*

Apresentamos agora a demonstração do lema 2.6.1.

**Demonstração:** Se $w_{n,k}\in[0,r]\times\{0\}$, $\forall n,k\in\mathbb{N}$, para certo $r<1$, pelo Segundo Teorema de Unicidade trivialmente se concluiria que $f\equiv 0$, uma vez que o conjunto dos zeros de $\{f_n\}$ teria um ponto de acumulação no interior de $\Delta$.

O caso interessante é quando $\lim_{n\to\infty} w_{n,k} = 1,\ k = 0,1,...,n$ sem que se verifique a condição anterior.

Uma vez que $w_{n,k}$ são zeros de $f_n,\ k\leq n$, as funções

$$\frac{f_n(z)}{\prod_{l=1}^{k}(z-w_{n,l})} \in \mathcal{H}(D).$$

Temos a limitação
$$\left|\frac{f_n(z)}{\prod_{l=1}^{k}(z-w_{n,l})}\right| \leq M_{n,k}.$$

Por outro lado, das propriedades dos Produtos de Blaschke podemos escrever
$$\left|\frac{f_n(z)}{\prod_{l=1}^{k}(z-w_{n,l})\prod_{l=k+1}^{n}(\frac{z-w_{n,l}}{1-w_{n,l}z})}\right| \leq M_{n,k}.$$

Logo,
$$|f_n(z)| \leq M_{n,k}\prod_{l=1}^{k}|z-w_{n,l}|\prod_{l=k+1}^{n}\left|\frac{z-w_{nl}}{1-w_{n,l}z}\right|.$$

Agora há que considerar os dois casos:

Caso 1: se $\prod_{l=k+1}^{n}(\frac{z-w_{n,l}}{1-w_{n,l}z}) \rightrightarrows 0,\ z\in\Delta$ então $f_n \rightrightarrows 0,\ z\in\Delta$.

caso2: se existir $I\subset\mathbb{N}$ tal que
$$B_{n,k} = \prod_{l=k+1}^{n}\left(\frac{z-w_{nl}}{1-w_{n,l}z}\right) \rightrightarrows B(z)\neq 0,\ n\in I \tag{1.6.4}$$

então:
$$\log|B_{nk}(z)| = \log\prod_{l=k+1}^{n}(\frac{z-w_{n,l}}{1-w_{n,l}z}) = \sum_{l=k+1}^{n}\log|\frac{z-w_{n,l}}{1-w_{n,l}z}|$$
$$= \sum_{l=k+1}^{n}\log\left|1-(1-w_{n,l})\frac{z+1}{1-w_{n,l}z}\right|,$$

e, da convergência de (1.6.4) concluímos que
$$\sum_{l=k+1}^{n}(1-w_{n,l}) \leq M_1,\ n\in I,\ z\in\overline{\Delta}. \tag{1.6.5}$$

Consideremos agora a sucesão de funções $g_n(z) = \frac{(1-z)^{n+2}}{\prod_{l=1}^{n}(1-w_{n,l}z)}$, as quais verificam
$$|g_n(z)| \geq C_1(r) > 0\ |z|\leq r, r\leq 1, n\in I$$

Daqui concluímos que a sucessão de funções $\tilde{f}_n(z) = g_n(z)f_n(z),\ z\in\Delta,\ n\in I$, é uniformemente limitada em $\Delta$ e que $f_n(z)\rightrightarrows 0$ se e somente se $\tilde{f}_n(z)\rightrightarrows 0$.

Mostremos que $\tilde{f}_n \rightrightarrows 0:$
$$|\tilde{f}_n(z)| = |g_n(z)f_n(z)| \leq M_{n,k}\left|\prod_{l=1}^{k}(z-w_{n,l})\prod_{l=k+1}^{n}\left(\frac{z-w_{n,l}}{1-w_{n,l}z}\right)\frac{(1-z)^{n+2}}{\prod_{l=k+1}^{n}(1-w_{n,l}z)}\right|$$
$$\leq M_{n,k}\prod_{l=k+1}^{n}\left|\frac{1-z}{1-w_{n,l}z}\right||1-z|^k.$$

Mas o máximo de $\left|\frac{1-z}{1-w_{n,i}z}\right|$ é atingido em $z=-1$ e é igual a $\frac{2}{1+w_{n,i}} \leq 2-w_{n,i}$. De (1.6.5) obtemos a desigualdade

$$|\tilde{f}_n(z)| \leq M_{n,k}|1-z|^k e^{M_1},\ z \in \Delta \tag{1.6.6}$$

Conseguimos, deste modo, reduzir o caso inicial (multipontual)

$$|f_n(z)| \leq M_{n,k}\prod_{i=1}^{k}|z-w_{n,i}|,\ w_{n,k} \subseteq [0,1]\times\{0\}.$$

ao caso de um só ponto, $w_{n,i}=1,\ \forall n,k \in \mathbb{N}$:

$$|\tilde{f}_n(z)| \leq M_{n,k}|1-z|^k e^{M_1},\ k \leq n.$$

Defina-se $d_{n,k} = M_{n,k}^{1/k}$ e, para cada $n$ fixo, consideremos os índices $k_i$ para os quais

$$d_{n,k_i} = \min_{k_i \leq k \leq n} d_{n,k}\ i = 1,2...,n$$

Tais números dependem de $n$, mas referiremos apenas $k_i$ em vez de $k_i(n),\ \ i=1,2...n$. Temos as desigualdades:

$$k_1 < k_2 < ... < k_l = n,$$

$$d_{n,k_1} < d_{n,k_2} < ... < d_{n,k_l} = d_{n,n},$$

$$d_{n_k} \geq d_{n,k_i}\ \text{ se } k_{i-1} < k < k_i,\ i = 1,2,...,n.$$

Em particular, segue-se que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d_{n,k}} \leq \sum_{i=1}^{l}(k_i-k_{i-1})\frac{1}{d_{n,k_i}}.$$

Da hipótese segue-se que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{l_n}(k_i-k_{i-1})\frac{1}{d_{n,k_i}} = \infty.$$

Consideremos a transformação

$$z = \frac{w-1}{w},\ w = \frac{1}{1-z},$$

a qual transforma o círculo unitário no semi-plano $\Re e(w) > \frac{1}{2}$. Seja

$$\Omega^* = \{w \in \mathbb{C} : \Re e(w) > 1\}.$$

Definam-se

$$y_i = e d_{n,k_i},\ i = 1,2,...,n$$
$$y_{n+1} = \infty.$$

Seja $\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k$, com $\Delta_k = \{w = 1 + ky,\ y_k \leq |y| \leq y_{k+1},\ k = 1, 2..., n\}$.

Obtemos deste modo a estimativa para $f_n$ :

$$|\tilde{f}_n| \leq CM_{n,k}\frac{1}{|w|^k} = C\left(\frac{d_{n,k}}{|w|}\right)^k,\ k \leq n.$$

Resta agora aplicar o lema 2 para concluirmos o requerido. □

Observe-se que no caso de $(w_{n,i}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \pi - \epsilon \leq \arg(z) \leq \pi + \epsilon,\ |z| \leq 1,\ \epsilon < \pi\}$, se efectuarmos os mesmo cálculos obtemos a desigualdade:

$$|\tilde{f}_n| \leq M_{n,k} \prod_{i=k+1}^{n} \frac{|1-z|}{|1-\overline{w}_{n,i}z|}|1-z|^k.$$

O nosso problema é a limitação, em $\Delta$, de $\displaystyle\prod_{i=k+1}^{n} \frac{|1-z|}{|1-\overline{w}_{n,i}z|}|1-z|^k$. De facto, no caso de $w_{n,k}$ ser real, $\dfrac{|1-z|}{|1-w_{n,k}z|}$ atinge o máximo em $z = -1$. Tal máximo é $2/1 + w_{n,k}$, o que nos permite obter a desigualdade (1.6.5), e consequentemente, a desigualdade (1.6.6).

Se $w_{n,k}$ não for necessariamente real, o cálculo do máximo desta função complica-se consideravelmente. Mas sabemos que $\lim_{n\to\infty} w_{n,k} = 1$ é equivalente a

$$\lim_{n\to\infty} \Re e(w_{n,k}) = 1 \text{ e } \lim_{n\to\infty} \Im m(w_{n,k}) = 0.$$

Será de esperar que o máximo desta função seja atingido num ponto próximo de $-1$.

Efectivamente, o máximo da função $\dfrac{|1-z|^2}{|1-\overline{w}_{n,k}z|^2}$ (e se considerarmos, por uma questão de simplificação de escrita, $w_{n,k} = a + ib$) é atingido em

$$x = \frac{-1 + 4a - 6a^2 + 4a^3 - a^4 + 2b^2 + 4ab^2 - 2a^2b^2 - b^4}{1 - 4a + 6a^2 - 4a^3 + a^4 + 6b^2 - 4ab^2 + 2a^2b^2 + b^4}$$

e

$$y = \frac{4b(1 - 2a + a^2 + b^2)}{1 - 4a + 6a^2 - 4a^3 + a^4 + 6b^2 - 4ab^2 + 2a^2b^2 + b^4}$$

Ainda não obtivémos uma relação entre $x$ e $y$ que nos permita resolver o problema geral de Watson no caso (b). Será um estudo a continuar num próximo trabalho.

# Capítulo 2

# Problema de Momentos de Stieltjes

Apresentaremos a relação entre fracções contínuas e o Problema de Momentos de Stieltjes (1894/1895).

Para tal, definiremos e caracterizaremos o Integral de Stieltjes, e apresentaremos propriedades de fracções contínuas, necessárias à compreensão dos resultados apresentados.

Consideremos a transformada de Stieltjes-Markov de uma função não-decrescente $\mu$ com espectro infinito, que denotaremos por $\hat{\mu}$. Discutiremos a relação entre a série assimptótica desta função, $\sum \frac{(-1)^n c_n}{z^{n+1}}$, e fracções contínuas da forma

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ... \, , z \in \mathbb{C}.$$

Apresentaremos um estudo das condições de existência e unicidade devidas a Stieltjes [45], para uma sucessão de momentos $(c_n) \subseteq \mathbb{R}$,

- **Existência** O problema de momentos de Stieltjes tem solução se e somente se os $a_n$ da fracção contínua correspondente da série forem positivos.

- **Unicidade** O problema de momentos é determinado se e somente se $\sum a_n$ divergir.

## 2.1 Integral de Stieltjes

Seja $\mu$ uma função não decrescente de variação limitada e, eventualmente, com descontinuidades de primeira espécie. O integral

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) \tag{2.1.1}$$

é o limite da soma $\mathcal{S}(P_n) = \sum_{p=1}^{n} f(\xi_p)[\mu(x_p)-\mu(x_{p-1})], \quad \xi_p \in (x_p, x_{p+1})$ para as sucessões de partições $P_n : \ a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ que satisfazem

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x_i \in P_n} |x_{i+1} - x_i| = 0.$$

**Definição 2.1.1** Designa-se por *Integral de Stieltjes* da função $f,$ associado à função peso $\mu$, o integral (2.1.1).

A esta noção de função não-decrescente podemos associar uma comparação em termos de distribuição de massa. Num ponto de descontinuidade $x_0$ diremos que há uma concentração de massa finita, de valor $\mu(x_0^+)-\mu(x_0^-)$, e $\mu(b)-\mu(a)$ será a massa distribuída pelo intervalo $]a, b[$.

**Definição 2.1.2** Ao conjunto dos pontos de crescimento de uma função não-decrescente $\mu$ chamaremos *suporte* ou *espectro,* e escrevemos supp $\mu$ para indicar tal conjunto.

Da definição conclui-se que o integral de $f$ é invariante segundo funções peso do tipo $\mu(x)$ e $\mu(x) + c$, onde $c$ é uma constante.

Além disso, facilmente se vê que o valor do integral não se altera se a função peso diferir de uma constante nos pontos de descontinuidade que se encontram no interior do intervalo $[a, b]$, mas o mesmo não acontece se procedermos a uma alteração no valor de $\mu(a)$ ou $\mu(b)$. De facto, ao efectuar uma alteração num ponto de descontinuidade de $\mu$ respeitando as desigualdades $\mu(x_0^-) < \mu(x_0) < \mu(x_0^+)$, não estamos a alterar a distribuição de massa, mas sim a massa concentrada nesse ponto. Deste modo, podemos sempre substituir $\mu(x_0)$ por $(\mu(x_0^+) + \mu(x_0^-))/2$ desde que $x_0$ esteja no interior do intervalo $[a, b]$.

Obviamente que se $\mu(x) = x$ ou $\mu(x) = x + c$ para certa constante c, o integral de Stieltjes é o já conhecido integral de Riemann. No caso de $\mu$ ser uma função contínua, teremos

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = \int_a^b f(x)\mu'(x)dx.$$

Se $\mu$ for uma função em escada cujos saltos nos pontos de descontinuidade

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

forem respectivamente $m_1, ..., m_n$, temos

$$\int_a^b f(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k f(x_k).$$

Neste caso, determinar uma solução do problema de momentos $(c_n)$ equivale a determinar um sistema de pares ordenados $(m_n, x_n)$, $n = 0, 1, ...$ tal que $c_k = \sum_{n=1}^{+\infty} m_n x_n^k$, $k = 0, 1, ...$

Tal como no integral de Riemann,

$$\int_0^{+\infty} f(x)d\mu(x) = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)d\mu(x).$$

O exemplo seguinte é um exemplo que ilustra a não unicidade do problema de momentos de Stieltjes em relação aos momentos $\sqrt{\pi}e^{(n+1)^2/4}$.

Uma vez que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2)\sin(2\pi u)du = 0$, mediante a substituição $u = \log(x) - \frac{n+1}{2}$ obtemos

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-\log^2(x))dx = \sqrt{\pi}\exp((n+1)^2/4)$$

e

$$\int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi\log(x))\exp(-\log^2(x))dx = 0,$$

donde

$$\int_0^{+\infty} x^n[1 + c\sin(2\pi\log(x))]\exp(-\log^2(x))dx = \sqrt{\pi}\exp{(n+1)^2/4}.$$

Assim, para toda a constante $c$ que verifique $|c| < 1$, as funções

$$\mu_c(x) = \int_0^x [1 + c\sin(2\pi\log(t))]\exp\left(-\log^2(t)\right)dt$$

são soluções do problema de momentos $c_n = \sqrt{\pi}e^{\frac{(n+1)^2}{4}}$.

Adiante veremos também exemplos de problema de momentos de Stieltjes determinados, que surgem no contexto de estudo de frações contínuas.

## 2.2 Alguns tópicos acerca de fracções contínuas. Definições e propriedades

Antes de mais, introduzimos as fracções contínuas e apresentaremos as suas principais propriedades analíticas e geométricas, assim como alguns resultados de convergência.

**Definição 2.2.1** Dadas as sucessões $(a_n), (b_n)$, chamamos *fracção contínua* a uma expressão do tipo

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + ...}}}},$$

a qual, segundo a notação de Pringsheim, indicaremos por

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + ... + \frac{a_n|}{|b_n} + ...,$$

e *Reduzida de ordem* $n$ de uma fracção contínua a

$$R_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + ... + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

De seguida indicamos algumas propriedades das fracções contínuas que utilizaremos ao longo deste trabalho.

### 2.2.1 Relação de recorrência

Uma das particularidades da fracção contínua é a relação de recorrência a três termos entre as reduzidas de ordem $p,\ p \geq 1$ :

$$A_p = b_p A_{p-1} + a_p A_{p-2} \tag{2.2.2}$$

$$B_p = b_p B_{p-1} + a_p B_{p-2} \tag{2.2.3}$$

$$A_0 = b_0, \quad B_0 = 1$$

Mostremos que tal relação de recorrência é válida para todo o $p$, utilizando indução em $p \in \mathbb{N}$.

Verifica-se que

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{B_0} &= b_0 \\ \frac{A_1}{B_1} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} \\ \frac{A_2}{B_2} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_0}{b_1 b_2 + a_2}. \end{aligned}$$

Assim, se

$$A_0 = b_0,\ A_1 = b_0 b_1 + a_1,\ B_0 = 1,\ B_1 = b_1,$$

obtemos para a reduzida de ordem 2,

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{b_2 A_1 + a_2 A_0}{b_2 B_1 + a_2 B_0}.$$

Admitamos que esta relação é válida para $p$. Então, para $p+1$ vem

$$\begin{aligned}\frac{A_{p+1}}{B_{p+1}} &= \frac{(b_p + \frac{a_{p+1}}{b_{p+1}})A_{p-1} + a_p A_{p-2}}{(b_p + \frac{a_{p+1}}{b_{p+1}})B_{p-1} + a_p B_{p-2}} = \\ &= \frac{b_{p+1}(b_p A_{p-1} + a_p A_{p-2}) + a_{p+1} A_{p-1}}{b_{p+1}(b_p B_{p-1} + a_p B_{p-2}) + a_{p+1} B_{p-1}} =\end{aligned}$$

que, pela hipótese, é igual a

$$\frac{b_{p+1} A_p + a_{p+1} A_{p-1}}{b_{p+1} B_p + a_{p+1} B_{p-1}}.$$

Logo, podemos considerar, para $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}A_p &= b_p A_{p-1} + a_p A_{p-2} \\ B_p &= b_p B_{p-1} + a_p B_{p-2} \\ A_0 &= b_0,\ B_0 = 1\end{aligned}$$

e daqui se concluem as igualdades requeridas.

### 2.2.2 Relação entre duas reduzidas consecutivas

Das relações de recorrência (2.2.2) e (2.2.3) resulta a igualdade

$$A_{p+1} B_p - A_p B_{p+1} = -a_{p+1}(A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p).$$

Se considerarmos $\delta_p = A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p$, obtemos $\delta_{p+1} = -a_{p+1}\delta_p$. Logo,

$$\delta_{p+1} = (-1)^p a_1 a_2 ... a_{p+1}.$$

Dividindo por $B_p B_{p+1}$, obtemos

$$\frac{A_{p+1}}{B_{p+1}} - \frac{A_p}{B_p} = (-1)^p \frac{a_1 a_2 ... a_{p+1}}{B_p B_{p+1}},\ p = 0, 1, 2, ...$$

Esta igualdade será útil para o estudo da convergência.

### 2.2.3 Fracções contínuas equivalentes

**Definição 2.2.2** Duas fracções contínuas dizem-se *equivalentes* se tiverem a mesma sucessão de reduzidas, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, se considerarmos a fracção contínua

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + ... + \frac{a_n|}{|b_n} + ... \tag{2.2.4}$$

e $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ números não nulos, obtemos uma fracção contínua equivalente à dada definindo:

$$b_0 + \frac{c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2|}{|c_2 b_2} + ... + \frac{c_n c_{n-1} a_n|}{|c_n b_n} + ... \tag{2.2.5}$$

De facto, se $A_n/B_n$ designar a reduzida de ordem $n$ da primeira fracção contínua e se $A'_n/B'_n$ a reduzida desta última, obtemos

$$A'_n = c_1 c_2 ... c_n A_n \text{ e } B'_n = c_1 c_2 ... c_n B_n, \ n \in \mathbb{N}$$

Logo, as fracções contínuas (2.2.4) e (2.2.5) são equivalentes.

### 2.2.4 Fracção contínua Associada e Correspondente

Considermos a fracção contínua

$$\frac{a_1 z|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \frac{a_3 z|}{|1} + ... + \frac{a_n z|}{|1} + ..., \ a_n \neq 0, \ n \in \mathbb{N} \tag{2.2.6}$$

Uma vez que $A_p B_{p-1} - B_p A_{p-1} = (-1)^{p-1} a_1 a_2 ... a_p z^p$, $B_p = 1 + ...$, a sucessão de reduzidas verifica $R_p(z) - R_{p-1}(z) = (-1)^{p-1} a_1 a_2 ... a_p z^p + ...$, ou seja, coincidem até à ordem $p$. Consideremos os desenvolvimentos de $R_p$ em série de Taylor, $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
R_1(z) &= c_1 z \\
R_2(z) &= c_1 z + c_2 z^2 + c'_3 z^3 + ..., \ \ c'_3 \neq c_3 \\
R_3(z) &= c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c'_4 z^4 + ..., \ \ c'_4 \neq c_4 \\
&... \\
R_p(z) &= c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ... + c_p z^p + c'_{p+1} z^{p+1} + ..., \ \ c_{p+1} \neq c'_{p+1}
\end{aligned}$$

**Definição 2.2.3** A série

$$c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ... \tag{2.2.7}$$

designa-se por *Elemento Correspondente* da fracção contínua (2.2.6), e a fracção contínua (2.2.6) é designada por *Fracção Contínua Correspondente* da série (2.2.7).

Temos uma correspondência bijectiva entre (2.2.6) e (2.2.7) (cf [33], pg. 186). De facto, dada

$$R_n(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ... + c_n z^n + c'_{n+1} z^{n+1} + ...,$$

os $a_p$ verificam $a_2a_4...a_{2p} = (-1)^p \frac{\Delta_p^{(1)}}{\Delta_p}$, com

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_p \\ c_2 & ... & ... & c_{p+1} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_p & ... & ... & c_{2p-1} \end{vmatrix}, \ \Delta_p^{(1)} = \begin{vmatrix} c_2 & c_1 & ... & c_{p+1} \\ c_3 & ... & ... & c_{p+2} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{p+1} & ... & ... & c_{2p} \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$a_{2p} = -\frac{\Delta_{p-1}}{\Delta_p}\frac{\Delta_p^{(1)}}{\Delta_{p-1}^{(1)}}.$$

Por outro lado, $a_1a_3...a_{2p-1} = (-1)^{p-1}\frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}^{(1)}}$, donde

$$a_{2p-1} = -\frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}}\frac{\Delta_{p-2}^{(1)}}{\Delta_{p-1}^{(1)}}.$$

Observemos que uma vez que $a_p \neq 0$, então $\Delta_p \neq 0$ e $\Delta_p^{(1)} \neq 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, se $\Delta_p \neq 0$ e $\Delta_p^{(1)} \neq 0$, podemos obter os $c_p$ através dos $a_p$. Temos $c_1 = a_1,\ c_2 = -c_1a_2 = -a_1a_2, ...$ e, supondo que calculámos $c_1, c_2, ..., c_{2p-2}$, a equação

$$a_1a_3...a_{2p-1} = (-1)^{p-1}\frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}^{(1)}} \Leftrightarrow a_1a_3...a_{2p-1}\Delta_{p-1}^{(1)} = (-1)^{p-1}\left(c_{2p-1}\Delta_{p-1} + ...\right)$$

permite obter $c_{2p-1}$ de modo único. Analogamente,

$$a_2a_4...a_{2p} = (-1)^p\frac{\Delta_p^{(1)}}{\Delta_p} \Leftrightarrow a_2a_4...a_{2p}\Delta_p = (-1)^p\left(c_{2p}\Delta_{p-1}^{(1)} + ...\right)$$

permite obter $c_{2p}$ de modo único.

Considermos agora a fracção contínua do tipo

$$\frac{d_1z|}{|1+e_1z} + \frac{d_2z^2|}{|1+e_2z} + ... + \frac{d_pz^2|}{|1+e_pz} + ...,\ d_p \neq 0,\ p = 1, 2, ... \qquad (2.2.8)$$

Uma vez que

$$R_p - R_{p-1} = (-1)^{p-1}d_1d_2...d_pz^{2p-1} + ...,$$

O desenvolvimento em série de Taylor das reduzidas $R_p$ e $R_{p-1}$ coincidem até à potência de ordem $2p-2$.

Logo, teremos para cada $R_p(z)$,

$$
\begin{aligned}
R_1(z) &= c_1 z + c_2 z^2 + c_3' z^3 + ..., \ \ c_1 = d_1 \\
R_2(z) &= c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5' z^5 + ..., \ \ c_5' \neq c_5 \\
&... \\
R_p(z) &= c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ... + c_p z^p + c_{p+1}' z^{p+1} + ..., c_{p+1} \neq c_{p+1}'
\end{aligned}
$$

**Definição 2.2.4** A série

$$c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_n z^n + ... \tag{2.2.9}$$

é designada por *Série Associada a* (2.2.8), e a fracção contínua (2.2.8) é designada por *Fracção Contínua Associada* da série (2.2.9).

Também aqui a correspondência entre (2.2.8) e (2.2.9) é bijectiva (cf. [33], pg. 206).

Mostremos que se $\Delta_p \neq 0$ se verificam, para $p \geq 2$, as igualdades:

$$d_p = -\frac{\Delta_p \Delta_{p-2}}{(\Delta_{p-1})^2}, \tag{2.2.10}$$

$$e_p = \frac{\Delta_{p-1}'}{\Delta_{p-1}} - \frac{\Delta_p'}{\Delta_p} \tag{2.2.11}$$

com $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = c_1, d_1 = c_1$ e

$$\Delta_p' = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & ... & c_{p-1} & c_{p+1} \\ c_2 & ... & ... & ... & c_{p+2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ c_p & ... & ... & c_{2p-2} & c_{2p} \end{vmatrix}$$

De facto, a fracção contínua associada da série (2.2.9), ou seja, a fracção contínua que verifica $R_k = S_k, \ \ k = 0, 1, 2, ...$ e que é da forma,

$$\frac{d_1 z|}{|1 + e_1 z} + \frac{d_2 z^2|}{|1 + e_2 z} + ... + \frac{d_p z^2|}{|1 + e_p z} + ... \tag{2.2.12}$$

se existir, será única. Determinemos os coeficientes $d_p$ e $e_p$ a partir dos $c_p$.

Por um lado, sabemos que $R_p = \frac{D_p}{E_p}$ para certos polinómios $D_p$ e $E_p$. Se (2.2.12) é associado a (2.2.9), temos de ter

$$R_p = c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_{2p} z^{2p} + c_{2p+1}' z^{2p+1} + ... = \frac{D_p}{E_p} \tag{2.2.13}$$

com $c_{2p+1}' \neq c_{2p+1}$.

Das relações de recorrência para $D_p$ e $E_p$ temos

$$\begin{aligned} D_p &= (z+e_p)D_{p-1} + d_p D_{p-2} \\ E_p &= (z+e_p)E_{p-1} + d_p E_{p-2} \\ E_1 &= 1 + e_1 z,\ D_1 = d_1 \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros de (2.2.13) por $E_p$, $E_p(z) = \epsilon_1 z + ... + \epsilon_p z^p$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} c_1\varepsilon_p + c_2\varepsilon_{p-1} + ... + c_p\varepsilon_1 + c_{p+1} &= 0 \\ c_2\varepsilon_p + c_3\varepsilon_{p-1} + ... + c_{p+1}\varepsilon_1 + c_{p+2} &= 0 \\ ... &= 0 \\ c_p\varepsilon_p + c_{p+1}\varepsilon_{p-1} + ... + c_{2p-1}\varepsilon_1 + c_{2p} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Se resolvermos em ordem a $\varepsilon_1$ obtemos

$$\varepsilon_1 = -\frac{\Delta'_p}{\Delta_p}.$$

Da relação de recorrência temos $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + ... + e_p = -\frac{\Delta'_p}{\Delta_p}$, donde

$$e_p = (e_1 + e_2 + ... + e_p + e_{p+1}) - (e_1 + e_2 + ... + e_p) = -\frac{\Delta'_p}{\Delta_p} + \frac{\Delta' p - 1}{\Delta_{p-1}}.$$

Calculemos agora os $d_p$. Se na igualdade

$$R_{p+1} - R_p = (-1)^p d_1 d_2 ... d_{p+1} z^{2p+1} + ...$$

identificarmos os termos em $z^{2p+1}$, obtemos

$$c_{2p+1} - c'_{2p+1} = (-1)^p d_1 d_2 ... d_p d_{p+1} = U$$

Da identificação dos termos em $R_p E_p = D_p$, vem

$$c_{p+1}\varepsilon_p + c_{p+2}\varepsilon_{p-1} + ... c_{2p}\varepsilon_1 + c'_{2p+1} = 0,$$

ou seja,

$$c_{p+1}\varepsilon_p + c_{p+2}\varepsilon_{p-1} + ... + c_{2p}\varepsilon_1 + c_{2p+1} - U = 0$$

Temos o sistema de $p+1$ equações e $p+1$ incógnitas:

$$\begin{aligned} c_1\varepsilon_p + c_2\varepsilon_{p-1} + ... + c_p\varepsilon_1 + c_{p+1} + 0 &= 0 \\ ... &= 0 \\ c_p\varepsilon_p + c_{p+1}\varepsilon_{p-1} + ... + c_{2p-1}\varepsilon_1 + c_{2p} + 0 & ... \\ c_{p+1}\varepsilon_p + c_{p+2}\varepsilon_{p-1} + ... + c_{2p}\varepsilon_1 + c_{2p} + U &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $U = \frac{\Delta_{p+1}}{\Delta_p} = (-1)^p d_1 d_2 ... d_p d_{p+1}$, donde

$$d_p = -\frac{\Delta_p \Delta_{p-2}}{(\Delta_{p-1})^2}\ \forall p \geq 2,\quad \Delta_0 = 1 \text{ e } \Delta_1 = c_1.$$

Reciprocamente, $c_1 = d_1$, $c_2 = -d_1 e_1$. Suponhamos que obtivemos $c_1, c_2, ..., c_{2p-1}$. A equação $\frac{\Delta'_p}{\Delta_p} = \frac{\Delta'_{p-1}}{\Delta_{p-1}} - e_p$, linear em $c_p$, tem uma solução única, $c_{2p}$. Por outro lado, a equação

$$\frac{\Delta_{p+1}\Delta_{p-1}}{(\Delta_p)^2} = -d_{p+1},$$

linear em $c_{2p+1}$, tem uma única solução, $c_{2p+1}$.

**Observação**: Pelo que foi referido, concluímos que existe uma fracção contínua correspondente se e somente se $\Delta_p \neq 0$ e $\Delta_p^{(1)} \neq 0$. Para que exista uma fracção contínua associada, é necessário e suficiente que $\Delta_p \neq 0$.

### 2.2.5 Convergência de fracções contínuas

Consideremos a fracção contínua escrita na notação de Pringsheim,

$$\frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + ... + \frac{b_n|}{|a_n} + ... \tag{2.2.15}$$

A fracção contínua (2.2.15) é dita convergente e tem por valor $R$ se

$$\lim_{n\to\infty} R_n = R,$$

com

$$R_n = \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + ... + \frac{b_n|}{|a_n}.$$

Caso contrário, será dita divergente.

**Teorema 2.2.1** *Uma condição necessária e suficiente para a convergência da fracção contínua* (2.2.15)*, no caso de os termos serem positivos e* $b_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$*, é a divergência de* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Consideremos agora a fracção contínua

$$\frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1}} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ... \tag{2.2.16}$$

com $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em [33], temos o resultado:

**Teorema 2.2.2 (Van Vleck)** *Se os afixos dos denominadores* $a_n$ *da fracção contínua* (2.2.16) *estiverem no interior da região angular*

$$|\arg(z)| < \frac{\pi}{2} - \theta,\quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

*e se* $\Gamma$ *designar a série* $\sum a_n$*, então: a fracção contínua converge se e somente se* $\Gamma$ *diverge.*

Antes de demonstrarmos este teorema, apresentaremos a demonstração do lema seguinte:

**Lema 2.2.1** *Nas condições do teorema enunciado, existem os limites das reduzidas da fracção contínua* (2.2.16) *de ordem par e das reduzidas de ordem ímpar.*

**Demonstração:** As reduzidas de ordem $p$ da fracção contínua (2.2.16), $R_p = A_p/B_p$, verificam

$$R_{p+1} - R_{p-1} = (-1)^p \frac{a_{p+1}}{B_{p+1}B_{p-1}}.$$

Se $\overline{B}_{p+1}$ designar o conjugado de $B_{p+1}$, teremos

$$|R_{p+1} - R_{p-1}| = \frac{|a_{p+1}||B_p|^2}{|\overline{B}_p B_{p-1}||B_p \overline{B}_{p+1}|} \tag{2.2.17}$$

Por outro lado, da relação de recorrência para $B_p$, $B_{p+1} = a_{p+1}B_p + B_{p-1}$, obtemos, após a multiplicação desta igualdade por $\overline{B}_p$,

$$B_{p+1}\overline{B}_p = a_{p+1}|B_p|^2 + B_{p-1}\overline{B}_p \tag{2.2.18}$$

Consideremos $a'_p = \Re e(a_p)$ e $\Re e(B_{p-1}\overline{B}_p) = \beta_p$. Após igualar as partes reais de (2.2.18), resultam as desigualdades $\beta_{p+1} - \beta_p = a'_{p+1}|B_p|^2 > 0$ e $\beta_1 > 0$. Logo,

$$\beta_p > \beta_{p-1} > ... > \beta_1 = \Re e(a_1) > 0 \tag{2.2.19}$$

Mas $\dfrac{a'_p}{|a_p|} = \cos(\arg(a_p)) > \cos(\dfrac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$, donde

$$1 < \frac{|a_{p+1}|}{a'_{p+1}} < \frac{1}{\sin(\theta)} \tag{2.2.20}$$

De (2.2.17) e (2.2.20) temos a desigualdade

$$|R_{p+1} - R_{p-1}| < \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\beta_{p+1} - \beta_p}{\beta_p \beta_{p+1}} = \frac{1}{\sin(\theta)} \left( \frac{1}{\beta_p} - \frac{1}{\beta_{p+1}} \right).$$

Uma vez que a série $\sum \left( \frac{1}{\beta_p} - \frac{1}{\beta_{p+1}} \right)$, igual a $\dfrac{1}{\beta_1} - \lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{1}{\beta_p}$, é convergente, conclui-se que existem os limites de $R_{2p}$ e de $R_{2p+1}$, $p \in \mathbb{N}$. $\square$

Apresentamos agora a demonstração do Teorema de Van Vleck.

**Demonstração:** Mostremos que a condição $\sum a_n = \infty$ é necessária.

Suponhamos que $\sum a_n$ converge. Logo, também converge a série $\sin\theta \sum |a_n|$.

Mas

$$|R_p - R_{p-1}| = \frac{1}{|B_p B_{p-1}|}$$

e

$$|B_p| < \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|).$$

Uma vez que $\sum |a_n|$ converge, também converge o produto, e teremos para certo $P$, $\prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) < P$. Logo,

$$|R_p - R_{p-1}| > \frac{1}{P^2}.$$

Consequentemente, $R_p$ não converge.

Mostremos que a condição é suficiente.

Suponhamos que $\sum a_n$ diverge. Mostremos que a sucessão $(\beta_n)$ não é limitada. De facto, se tal acontecer, teremos $|R_p - R_{p-1}| = \frac{1}{|B_p B_{p-1}|} < \frac{1}{\beta_p}$, e concluiremos que existe $\lim_{n\to\infty} R_n$.

Mas se a sucessão $(\beta_n)$ for limitada, ou seja, $\beta_1 < \beta_p < \beta,\ p \in \mathbb{N}$, a série $\sum(\beta_{n+1} - \beta_n)$ é convergente. Por outro lado, da relação de recorrência $B_p = a_p B_{p-1} + B_{p-2}$, temos

$$\frac{B_p}{B_{p-2}} = 1 + a_p \frac{B_{n-1}}{B_{n-2}} = 1 + a_p \frac{|B_{p-1}|^2}{B_{p-2}\overline{B}_{p-1}},$$

donde

$$\left|\frac{B_p}{B_{p-2}}\right| \leq 1 + \frac{a_p}{a'_p}\frac{a'p|B_{p-1}|^2}{|\overline{B}_{p-1}B_{p-2}|} \leq 1 + \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{1}{\beta_1}(\beta_p - \beta_{p-1}).$$

Se $k = \dfrac{1}{\beta_1 \sin(\theta),}$ obtemos as desigualdades

$$\begin{aligned} |B_p| &\leq |B_0| \prod_{j=2}^{p} \left(1 + k(\beta_j - \beta_{j-1})\right),\ p \text{ par} \\ |B_p| &\leq |B_1| \prod_{j=3}^{p} \left(1 + k(\beta_j - \beta_{j-1})\right),\ p \text{ ímpar} \end{aligned}$$

Mas, uma vez que a série $\sum(\beta_{p+1} - \beta_p)$ é convergente, os produtos também convergem, donde $|B_p| < M$ para certa constante $M$. Por outro lado, da definição de $\beta_p$, temos

$$|\overline{B}_{p-1} B_p| \geq \beta_p \geq \beta_1.$$

Donde, $|B_{p-1}| \geq \beta_1 / M = h$. Mas de (2.2.19) temos $\beta_p - \beta_{p-1} > h^2 \sin(\theta)|a_{p+1}|$.

Mas, assim, concluir-se-ia que $\sum(\beta_{p+1} - \beta_p)$ diverge, contradição em relação ao suposto.

□

## 2.3 Ligação do Problema de Momentos de Stieltjes com as fracções contínuas

No artigo de Stieltjes,"Recherches sur les fractions continues", o primeiro trabalho onde o problema de momentos de Stieltjes foi enunciado tal como o conhecemos actualmente, verificamos que o ponto de partida para o estabelecer do problema de momentos foram as fracções contínuas. Neste artigo são estudadas fracções contínuas do tipo

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ... \; a_i > 0, z \in \mathbb{C},$$

e aí se estabelecem não só as principais propriedades analíticas de $P_n(z)$ e $Q_n(z)$, numerador e denominador das reduzidas de ordem $n$, como também resultados de convergência da fracção contínua.

Para tal, são estudadas as sucessões $P_{2n}(z)/Q_{2n}(z)$ e $P_{2n+1}(z)/Q_{2n+1}(z), n \in \mathbb{N}$. Mostra-se que se $\sum a_n$ divergir, as reduzidas terão um mesmo limite, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, e se $\sum a_n$ convergir, tais limites serão distintos.

Mas, em ambos os casos, o limite é uma função analítica que se pode representar na forma de um Integral de Stieltjes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(x)}{z+x}, \; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi_1(x)}{z+x}, \; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$$

para certas funções não-decrescentes $\phi$ e $\phi_1$.

Pelo que foi dito, obviamente que tais funções representam iguais distribuições de massa se $\sum a_n$ divergir e serão distintas se $\sum a_n < \infty$.

De facto, Stieltjes obtém as decomposições em fracções simples:

$$\frac{P_{2n(z)}}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_{2n,1}}{z + x_{2n,1}} + \frac{M_{2n,2}}{z + x_{2n,}} + ... + \frac{M_{2n,n}}{z + x_{2n,n}}$$

Temos também que

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n,k} = \lambda_k \;\; e \;\; \lim_{n\to\infty} M_{2n,k} = \mu_k \;\; k = 1, 2, ...$$

O momento de ordem $i$ é definido por

$$c_i = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k \lambda_k^i.$$

Enquanto que para a sucessão dos ímpares,

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_{2n+1,1}}{z + x_{2n+1,1}} + ... + \frac{N_{2n+1,n}}{z + x_{2n+1,n}}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} N_{2n+1,k} = \nu_k, \quad \lim_{n\to\infty} x_k = \theta_k \;\; k = 0, 1, 2, ....$$

O momento de ordem $i$ é então definido como $c_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k \;\; e \;\; c_i = \sum_{k=1}^{+\infty} \nu_k \theta_k^i$.

Reciprocamente, suponhamos que o integral de onde partimos é

$$\hat{\mu}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(x)}{z + x},$$

e que a partir da sua série assimptótica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}} \tag{2.3.21}$$

se define a fracção contínua do tipo

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ... \; a_i > 0, z \in \mathbb{C} \tag{2.3.22}$$

cujos aproximantes de ordem par e ímpar verficam

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(x)}{z + x} = F(z)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi_1(x)}{z + x} = F_1(z)$$

Veremos depois em que condições a fracção contínua assim obtida converge para o integral que lhe deu origem, ou seja, qual a relação entre $F_1, \;\; F \;\; e \;\; \hat{\mu}$, equivalentemente, qual a relação entre as funções $\phi, \;\; phi_1 \; e \; \mu$.

Os principais resultados que podemos deduzir deste trabalho são:

**Existência** O problema de momentos de Stieltjes tem solução se e somente se os $a_n$ da fracção contínua (2.3.22) correspondente da série (2.3.21) forem positivos.

**Unicidade** O problema de momentos é determinado se e somente se $\sum a_n$ divergir.

Stieltjes enuncia também uma condição que envolve os momentos, condição necessária e suficiente para a existência de solução do problema de momentos.

**Teorema 2.3.1 (Stieltjes)** *O problema de momentos correspondente à sucessão de números reais* $(c_n)$ *tem solução cujo espectro é um subconjunto de* $[0, +\infty[$ *se e somente se*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & ... & c_n \\ c_1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ c_n & ... & ... & c_{2n} \end{vmatrix} > 0 \;\; e \;\; \Delta_n^{(1)} = \begin{vmatrix} c_1 & c_1 & ... & c_{n+1} \\ c_2 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n+1} & ... & ... & c_{2n+1} \end{vmatrix} > 0, \; n = 0, 1, ...$$

## 2.4 A Fracção Contínua Correspondente

Consideremos a sucessão $c_n$ e seja $F$ a função geradora desta sucessão, ou seja, que admite a representação formal em série

$$F(z) = \sum_n (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}}, \quad |z| > R, \tag{2.4.23}$$

com $R > 0$.

Se $\mu$ for uma solução do problema de momentos de Stieltjes, teremos

$$c_n = \int_0^{+\infty} x^n d\mu(x),$$

e $F$ será a função de Stieltjes-Markov,

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{z+x} d\mu(x).$$

De facto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n c_n}{z^n} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\int_{\mathrm{supp}\mu} (-x)^n d\mu(x)}{z^n} \\
&= \frac{1}{z} \sum \int (\frac{-x}{z})^n d\mu(x) \\
&= \int \frac{1}{z+x} d\mu(x),
\end{aligned}$$

ainda que não se tenha unicidade de $\mu$.

Suponhamos então que o integral de onde partimos é

$$\hat{\mu}(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(x)}{z+x},$$

função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{supp}\mu\}$.

A questão que se coloca é em relação ao cálculo deste integral, ou seja, em relação à aproximação desta função.

A série assimptótica de $\hat{\mu}(z)$ pode ser divergente e não representar a função. De facto, duas situações podem ocorrer, ou $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda < \infty$, e a série converge em $|z| > \lambda$, onde representa uma função analítica (e neste caso o suporte da medida é $[a, b]$ para certos $a$ e $b$ tais que $\max\{|a|, |b|\} \leq \lambda$), ou $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \infty$, e a série será divergente (situação que corresponde ao caso de o suporte de $\mu$ ser não limitado).

Contudo, apesar da divergência, podemos utilizar a série para obter a fracção contínua do tipo

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ..., \quad a_i > 0, z \in \mathbb{C},$$

que converge para $\hat{\mu}(z)$ em alguma região do plano complexo, e obteremos deste modo o prolongamento analítico dessa série.

Consideremos então a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}}.$$

O teorema seguinte [33], garante a existência de uma fracção contínua associada desta série.

**Teorema 2.4.1** *Seja $(c_n)$ uma sucessão de momentos. Então, existe uma fracção contínua associada da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}}.$$

*Se a solução do problemas de momentos verificar $\mu(t) = 0$ para $t < 0$, existe uma fracção contínua correspondente.*

**Demonstração:** Após a identificação $(-1)^{n-1} c_{n-1} = u_n$, consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{z^n} \tag{2.4.24}$$

e a forma quadrática em $x_0, x_1, ..., x_p$,

$$S = \sum_{j,k=0}^{p-1} u_{k+j} x_k x_j.$$

Temos que

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j,k=0}^{p-1} ((-t)^k x_k)((-t)^j x_j) d\mu(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ x_0 - t x_1 + t^2 x_2 + ... + (-1)^{p-1} t^{p-1} x_{p-1} \right]^2 d\mu(t). \end{aligned}$$

$S$ é positiva-definida, e tal é equivalente a afirmar que o discriminante de $S$, $\Delta_p$, é positivo. Veremos de seguida que esta condição nos permite concluir que a série admite uma fracção contínua associada.

A segunda parte do teorema é a consequência do seguinte: se $\mu(t) = 0, \;\; t < 0$, a forma quadrática

$$S' = \sum_{j,k=0}^{p-1} -u_{k+j+1} x_k x_j$$

pode escrever-se na forma:

$$\begin{aligned} S' &= \int_0^{+\infty} \sum_{j,k=0}^{p-1} \left[(-t)^{k+j} x_k x_j\right] t d\mu(t) \\ &= \int_0^{+\infty} t \left[x_0 - t x_1 + t^2 x_2 + + + (-1)^{p-1} t^{p-1} x_{p-1}\right]^2 d\mu(t) \end{aligned}$$

Logo, também é uma forma definida-positiva, e o seu discriminante $(-1)^p \Delta_p^{(1)}$ é positivo. Mas para a existência da fracção contínua correspondente basta que $\Delta_p^{(1)} \neq 0$.

Logo, concluímos que existe uma fracção contínua correspondente. $\square$

**Lema 2.4.1** *Seja* $(c_n)$ *uma sucessão de números reais. Se existir uma solução* $\mu$ *do problema de momentos de Stieltjes, os elementos* $a_n$ *da fracção contínua correspondente da função de Stieltjes-Markov*

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ..., \ z \in \mathbb{C},$$

*são positivos.*

**Demonstração:** Consideremos a série $\sum \frac{u_n}{z^n}$ com $u_n = (-1)^{n-1} c_{n-1}, \ n \geq 1$

Se $z = \frac{1}{\xi}$, temos

$$u_1 \xi + u_2 \xi^2 + ... + u_n \xi^n + ... \tag{2.4.25}$$

A fracção contínua associada da série é dada por

$$\frac{d_1 \xi|}{|1 + e_1 \xi} + \frac{d_2 \xi^2|}{|1 + e_2 \xi} + ... + \frac{d_p \xi^2|}{|1 + e_p \xi ...} + ..., \quad \xi = \frac{1}{z}, \ d_p \neq 0,$$

a qual é equivalente a

$$\frac{d_1|}{|z + e_1} + \frac{d_2|}{|z + e_2} + ... + \frac{d_p|}{|z + e_p} + ... \tag{2.4.26}$$

onde $d_1 = u_1 > 0$,

$$d_p = -\frac{\Delta_p \Delta_{p-2}}{(\Delta_{p-1})^2}, \ p \geq 2, \tag{2.4.27}$$

$$e_p = \frac{\Delta'_{p-1}}{\Delta_{p-1}} - \frac{\Delta'_p}{\Delta_p} \tag{2.4.28}$$

com $\Delta_0 = 1$ e $\Delta_p$, $\Delta'_p$ definidos anteriormente (cf. 3.2.4).

Passamos à fracção contínua correspondente,

$$\frac{b_1 \xi|}{|1} + \frac{b_2 \xi|}{|1} + ... + \frac{b_p \xi|}{|1} + ..., \ \xi = \frac{1}{z}.$$

Ter-se-à

$$
\begin{aligned}
b_1 &= d_1 > 0 && (2.4.29)\\
b_2 b_4 ... b_{2p} &= (-1)^p \frac{\Delta_p^{(1)}}{\Delta_p} > 0 && (2.4.30)\\
b_1 b_3 ... b_{2p-1} &= (-1)^{p-1} \frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}^{(1)}} > 0 && (2.4.31)
\end{aligned}
$$

donde facilmente se conclui que $b_p > 0$. Mas esta fracção contínua pode escrever-se ainda na forma

$$\frac{b_1|}{|z} + \frac{b_2|}{|1} + \frac{b_3|}{|z} + ... + \frac{b_{2p-1}|}{|z} + \frac{b_{2p}|}{|1} + ...$$

que por sua vez é equivalente a

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ...$$

com $a_1 = \dfrac{1}{b_1}$, $a_2 = \dfrac{b_1}{b_2}$, $a_3 = \dfrac{b_2}{b_1 b_3}$, e em geral

$$a_{2p-1} = \frac{b_2 b_4 ... b_{2p-2}}{b_1 b_3 ... b_{2p-1}} > 0$$

$$a_{2p} = \frac{b_1 b_3 ... b_{2p-1}}{b_2 b_4 ... b_{2p}} > 0$$

□

Consideremos $R_n(z)$ a reduzida de ordem $n$ da fracção contínua (2.4.26), função de variável complexa $z \in \mathbb{C}$. Vejamos algumas propriedades geométricas dos aproximantes da fracção contínua associada à função de Stieltjes.

**Lema 2.4.2** *$R_n(z)$ e $z$ estão separados pelo eixo real, $n \in \mathbb{N}$.*

**Demonstração:** Utilizemos indução em $n \in \mathbb{N}$ para mostrar que $R_n$ são funções racionais de círculo fundamental.

Temos $d_n < 0,\ n \geq 2$ e $d_1 > 0$.

Se $n = 1$, $R_1(z) = \dfrac{d_1}{z + e_1}$ é uma transformação homográfica que permuta os dois semi-planos complexos superior e inferior (cf. 2.2.5).

Admitamos que também é assim para

$$R_n(z) = \frac{d_1|}{|z + e_1} + \frac{d_2|}{|z + e_2} + ... + \frac{d_n|}{|z + e_n}.$$

Mostremos que também se verifica para

$$R_{n+1}(z) = \frac{d_1|}{|z + e_1} + \frac{d_2|}{|z + e_2} + ... + \frac{d_n|}{z + e_n} + \frac{d_{n+1}|}{|z + z_{n+1}},$$

onde $z_{n+1} = \dfrac{d_{n+1}}{z+e_{n+1}}$.

Efectivamente, se $d_n < 0$, $z_{n+1}$ conserva os semi-planos, de acordo com o que foi dito no capítulo 2.

Logo, se $R_n$ permuta os dois semi-planos e $z_{n+1}$ os conserva, resulta que $R_{n+1}$ permuta os dois semi-planos. Concluímos, deste modo, que $R_n(z)$ e $z$ estão separados pelo eixo real, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

**Lema 2.4.3** *Se todos os $a_n$ da fracção contínua*

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ..., \ z \in \mathbb{C},$$

*forem positivos, o problema de momentos de Stieltjes subjacente tem solução.*

**Demonstração:** Consideremos a fracção contínua

$$\frac{d_1|}{|z+e_1} + \frac{d_2|}{|z+e_2} + ... \frac{d_n|}{|z+e_n} + ...,$$

equivalente à fracção contínua dada.

O desenvolvimento assimptótico das reduzidas de ordem $n$ é dado por:

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + .. + (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{\alpha_n}{z^{n+1}} + ..., \ \alpha_n \neq c_n$$

Uma vez que $d_n < 0$ se $p \geq 2$ e $d_1 > 0$, pelo lema anterior concluímos que $z$ e $R_n(z)$ estão separados pelo eixo real. Logo, $R_n(z)$ são funções racionais de círculo fundamental. Sabemos já que tal é equivalente a afirmar que são fracções de termos entrelaçados, ou seja, funções cujos zeros e pólos se dispõem alternadamente sobre o eixo real.

Uma vez que $R_n(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ com $P_n(z) = d_1 z^{n-1} + ...$ e $Q_n(z) = z^n + ...$, obtemos a decomposição para $R_n(z)$ :

$$R_n(z) = \frac{M_0}{z} + \frac{M_1}{z+x_1} + ... + \frac{M_n}{z+x_n}$$

em que $M_i > 0, \ \ x_i \in \mathbb{R}^+ \ \ \forall i = 1, 2, ..., n$ e $M_0$ eventualmente 0.

Se considerarmos a função $\mu_n$ não decrescente e em escada cujos saltos em $x_i$ são respectivamente $M_i$, obtemos a representação em Integral de Stieltjes:

$$R_n(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_n(x)}{z+x}$$

com

$$M_0 + M_1 + ... + M_n = \int_0^{\infty} d\mu_n(x) = u_1$$

Mas as fracções racionais de termos entrelaçados formam uma família normal em todo o domínio que esteja contido no semi-plano superior ou no semi-plano inferior (já que omitem pelo menos dois valores). Nos pontos do eixo real, a família é quasi-normal de ordem um, uma vez que cada função não assume cada um dos valores reais mais que uma vez.

Dos teoremas de convergência para famílias de funções normais e quasi-normais enunciados podemos então concluir que de toda a sucessão $R_n(z)$ se pode extrair uma subsucessão $R_{n_k}$ tal que $R_{n_k}(z) \rightrightarrows F(z)$, para certa função $F$, sobre cada compacto de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Obtemos deste modo uma solução do Problema de Momentos. $\square$

Note-se que não poderemos concluir que $R_n$ converge uniformemente para $F$ em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. De facto, veremos que tal convergência depende da unicidade de solução do problema de momentos, e que $R_n$ converge uniformemente para $F$ se e somente se o problema de momentos for determinado.

## 2.5 Análise da convergência da fracção contínua

Consideremos a fracção contínua

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + ... + \frac{1|}{|b_p} + ..., \; b_p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

As conclusões em relação à natureza desta fracção contínua podem ser deduzidas do teorema de Van Vleck.

De acordo com esse teorema, temos convergência, quando muito, na região

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \; |\arg(z)| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

Mas este teorema pode extender-se ao caso de os afixos de $b_{2n+1}$ estarem na região angular de abertura $\pi - 2\theta_0$ para algum $\theta_0$ suficientemente pequeno, e $b_{2n}$ na região simétrica em relação ao eixo $Ox$, ou vice-versa.

Suponhamos que ocorre a primeira situação, ou seja, que os afixos de $b_{2n+1}$ estão na região angular $x'Oy'$ de amplitude $\pi - 2\theta_0$, para algum $\theta_0 > 0$ .

Ora, as fracções contínuas

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + ... + \frac{1|}{|b_{2p-1}} + \frac{1|}{|b_{2p}} + ...$$

e

$$\frac{e^{-i\varphi}|}{|b_1 e^{-i\varphi}} + \frac{1|}{|b_2 e^{i\varphi}} + \frac{1|}{|b_3 e^{-i\varphi}} + ... + \frac{1|}{|b_{2p-1} e^{-i\varphi}} + \frac{1|}{|b_{2p} e^{i\varphi}} + ...$$

são equivalentes, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Assim, se $\theta_0$ designar o ângulo que $Ox'$ faz com o eixo $Ox$, podemos considerar

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta - \theta_0$$

e após a rotação de $\varphi$, o ângulo entre $Ox'$ e $Ox$ é igual a $\frac{\pi}{2} - \theta$ e o ângulo entre $Oy'$ e $Ox$ é de $-(\frac{\pi}{2} - \theta)$. Os afixos de $b_n$ verificarão

$$|\arg(b_n)| < \frac{\pi}{2} - \theta, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

O resultado é agora imediatamente transposto para a fracção contínua

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ... \;\; a_i > 0, z \in \mathbb{C}.$$

Uma vez que $\arg(a_n z) = \arg(z)$, conlcuímos que a fracção contínua converge em

$$|\arg(z)| < \pi - 2\theta, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Além do mais, $R_n(z)$ é uniformemente convergente para uma função analítica no domínio

$$\{z \in \mathbb{C} : \; |\arg(z)| < \pi - 2\theta\}, \; 0 < \theta \leq \pi/2.$$

A convergência uniforme resulta da limitação de $R_n$ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Conclui-se que o problema de momentos é determinado se e somente a fracção contínua

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ... \; a_i > 0, \; z \in \mathbb{C}.$$

se a série $\sum a_n$ for for tal que a série $a_n$ diverge.

Em relação à representação da função limite, verifica-se que a função limite é precisamente a função de Stieltjes,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \int \frac{d\mu(x)}{z + x} = \hat{\mu}(z).$$

Do estudo efectuado, concluímos que o suporte de $\mu$ é um subconjunto dos limites dos zeros de $Q_n$. Consideremos então as raízes de $Q_k$ ordenadas por ordem crescente,

$$x_{k1} < x_{k2} < ... < x_{kk}, \; k \geq 1.$$

Duas situações podem ocorrer:

**(a)** $\lim_{n \to \infty} x_{nk} = \lambda < \infty$

**(b)** $\lim_{n \to \infty} x_{nk} = \infty$

Estas situações correspondem, respectivamente, aos casos de suporte de $\mu = [a, b]$ ou suporte de $\mu = [0, +\infty)$. Na primeira situação, a convergência para $\hat{\mu}$ é uniforme em $\mathbb{C} \setminus [-b, -a]$. Se o suporte de $\mu$ for $[0, +\infty)$, a convergência será uniforme em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

Devemos também salientar que o facto de a fracção contínua convergir não implica que a série convirja, e pode mesmo acontecer que o desenvolvimento em série seja divergente e o problema de momentos determinado.

A série gerada pelos momentos de Laguerre ilustra esta situação. De facto,

$$\frac{1!}{z} - \frac{2!}{z^2} - \frac{3!}{z^3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n} + ...$$

é uma série divergente em todo o plano complexo, mas a fracção contínua correspondente

$$F(z) = \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|z} + ...,$$

converge, pois verifica $a_{2k+1} = 1$ e $a_{2k} = 1/k$, e, logo, $\sum a_n$ é divergente.

O problema de momentos associado aos momentos $c_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$ é determinado, e a solução é $\mu(x) = 1 - e^{-x}$, ou seja,

$$c_n = (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} x^{n-1} d\mu(x) = (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = (-1)^{n-1}\Gamma(n)$$

A forma integral para $F$ é dada em termos do integral de Laguerre,

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{z+x} dx.$$

<u>**Observação**</u>: No caso de $\sum_n a_n < \infty$, a fracção contínua diverge e não teremos qualquer ligação entre o valor do integral $\displaystyle\int \frac{d\mu(x)}{z+x} = \hat{\mu}(z)$, que originou a fracção contínua, e os limites dados pelas reduzidas da fracção contínua,

$$F(z) = \lim_n \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int \frac{d\phi(z)}{z+x}$$

$$F_1(z) = \lim_n \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \int \frac{d\phi_1(z)}{z+x}.$$

Mas, ainda assim, temos (cf. pg. 500 de [45]) as desigualdades para $z = x$ real positivo:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \le \int_0^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{x+t} \le F_1(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)}$$

e verifica-se que se existir um $x_0$ para o qual uma das desigualdades seja igualdade, se tem a respectiva igualdade para todo o $z$ da região de analiticidade de $F(z)$ e $F_1(z)$, ou seja, $\mu = \phi$ ou $\mu = \phi_1$, respectivamente.

# Capítulo 3

# Outros Problemas de Momentos

Indicamos o surgimento de outros problemas de momentos, nomeadamente o problema de momentos de Hamburguer (1919), no qual o espectro de $\mu$ está contido em $\mathbb{R}$ e o problema de momentos de Hausdorff (1921), correspondente a um intervalo finito $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Discutimos resultados relacionados com a existência e unicidade de soluções de problemas de momentos.

Veremos que o problema de momentos de Hausdorff, se solúvel, é sempre determinado (ver 4.2).

Analisaremos condições que permitem concluir a unicidade do problema de momentos através de critérios sobre o crescimento dos momentos. De entre os trabalhos referidos, salientam-se os de Carleman [8] e de Simon [44]. Estas condições resultam das relações existentes entre problemas de momentos, quasi-analiticidade e e Transformadas de Fourier (ver 3.3).

## 3.1 Problema de Momentos de Hamburguer

Em 1919, o matemático alemão Hamburguer extendeu o problema de momentos ao eixo real, e formulou o chamado *Problema de Momentos de Hamburguer*:

dada a sucessão $(c_n)$, procurar $\mu(x)$ não decrescente em $\mathbb{R}$, tal que

$$c_n = \int x^n d\mu(x) \tag{3.1.1}$$

Foram necessários novos métodos e extensões a uma classe maior de fracções contínuas para a extensão do Problema de Momentos de Stieltjes ao eixo real.

Hamburguer estudou a convergência de fracções contínuas não só do tipo

$$\frac{1|}{|a_1 z} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3 z} + ... + \frac{1|}{|a_{2p-1} z} + \frac{1|}{|a_{2p}} + ..., \ a_i > 0, z \in \mathbb{C}$$

mas também do tipo

$$\frac{\alpha_0|}{|\beta_1 - z} - \frac{\alpha_1|}{|\beta_2 - z} - \frac{\alpha_2|}{|\beta_2 - z} - ...$$

correspondentes a séries de potências

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}} \tag{3.1.2}$$

Para que exista solução de (3.1.1) é necessário e suficiente que no desenvolvimento de (3.1.2) em fracção contínua do tipo

$$\frac{\alpha_0|}{|\beta_1 - z} - \frac{\alpha_1|}{|\beta_2 - z} - \frac{\alpha_2|}{|\beta_2 - z} - ...$$

todos os $\alpha_n$ sejam positivos [35].

Em 1920, Hamburguer [18] estabelece o critério seguinte:

**Proposição 3.1.1 (Hamburguer)** *O problema de momentos de Hamburguer tem solução se e somente se*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & ... & c_n \\ c_1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ c_n & ... & ... & c_{2n} \end{vmatrix} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mostrou também que (cf. [43]) se

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z+u} d\varphi(u) \tag{3.1.3}$$

converge uniformemente em todo o compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e se a função $f$ tiver a expansão assimptótica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}} \quad z = iy, \quad y \to \infty \tag{3.1.4}$$

então todos os momentos $\int_{\mathbb{R}} x^n d\varphi(x)$ existem e são iguais a $c_n$. Reciprocamente, se todos os momentos existirem, a função (3.1.3) é analítica em compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e tem o desenvolvimento assimptótico (3.1.4) para $|z| \to \infty$, em regiões angulares

$$\{z \in \mathbb{C} : \ \delta \leq \arg(z) \leq \pi - \delta, -\pi + \delta \leq \arg(z) \leq -\delta\}, \ \delta > 0.$$

Vejamos um exemplo.

Consideremos a medida

$$d\mu(x) = C_{\alpha,\gamma} e^{-\gamma|x|^\alpha} dx,$$

onde $C_{\alpha,\gamma}$ é uma constante positiva. Os momentos de $d\mu$ podem ser calculados utilizando a função Gamma,

$$\int_0^{+\infty} x^{c-1} e^{-bx} dx = b^{-c} \Gamma(c), \ c > 0, \ \Re e(b) > 0.$$

Consideremos a mudança de variável $x = y^\alpha, \ c = \frac{2n+1}{\alpha}$. Obtemos

$$\frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^{2n} e^{-b|y|^\alpha} dy = b^{-2n+1/\alpha} \Gamma(\frac{2n+1}{\alpha}).$$

Considerando a parte real de ambos os membros da igualdade,

$$\frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^{2n} e^{-\Re e(b)|y|^\alpha} \cos(-\Im m(b)|y|^\alpha) dy = |b|^{-2n+1/\alpha} \cos\left(-\arg(b)\frac{2n+1}{\alpha}\right) \Gamma(\frac{2n+1}{\alpha}).$$

Mas o lado direito da igualdade é nulo quando $\arg(b) = \frac{\alpha\pi}{2}$. Uma vez que $\Re e(b) > 0$, resulta que o problema de momentos de Hamburguer é indeterminado se $0 < \alpha < 1$ (pois se a uma solução do problema de momentos adicionarmos uma destas funções peso, obtemos uma função com os mesmos momentos). Veremos em 5.3. que no caso de $\alpha \geq 1$ este problema de momentos é indeterminado.

## 3.2 Problema de Momentos de Hausdorff

Em 1921, Hausdorff resolveu o problema de momentos num intervalo fechado e limitado. Este problema de momentos é chamado *Problema de Momentos de Hausdorff*.

Tratou-se do primeiro trabalho no qual o problema de momentos foi tratado sem qualquer ligação com fracções contínuas.

Sem perda de generalidade, consideremos de agora em diante tal intervalo $[0,1]$, o qual é equivalente a qualquer outro intervalo limitado e fechado através de uma transformação linear.

Hausdorff caracterizou sucessões de momentos de funções crescentes em $[0,1]$ servindo-se de resultados de Teoria de Operadores. A cada polinómio

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

associou a funcional linear

$$\mathcal{L}(f)(x) = a_0 c_0 + a_1 c_1 + ... + a_n c_n$$

e procurou encontrar uma função não-decrescente $\mu$ tal que para todo o polinómio $f$, definido em $[0,1]$, se verificasse

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^1 f(x) d\mu(x).$$

O problema de momentos de Hausdorff consiste, então, em definir uma funcional no espaço dos Polinómios e averiguar se tal funcional linear pode ser representada como um Integral de Stieltjes.

**Definição 3.2.1** Uma funcional diz-se *Positiva-Definida* se verificar $\mathcal{L}[p(x)] \geq 0$ sempre que $p(x)$, polinómio de variável real, for não-negativo e não identicamente nulo.

Em (1923), Riesz [40] enunciou o resultado:

**Teorema 3.2.1 (Riesz)** *O problema de momentos correspondente à sucessão $(c_n)$ tem solução se e somente se a funcional linear $\mathcal{L} : \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(x^n) = c_n$, for definida-positiva.*

Antes de enunciarmos o critério de Hausdorff, definimos os polinómios de Bernstein.

**Definição 3.2.2** O *Polinómio de Bernstein de grau $n$* associado a uma função $f$, definida em $[0,1]$, é dado por

$$B_n(t; f) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) C_k^n t^k (1-t)^{n-k}, \text{ onde } C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Verifica-se que (cf. [2]) todo o polinómio de grau $m$, não-negativo no intervalo $[0,1]$, se pode representar como

$$P_m(t) = B_n(t; P_m) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{p_{m_k}(t)}{n^k},$$

onde $p_{m_k}$ é um polinómio de grau menor ou igual que $m$, independente de $n$ e $m \leq n$.

O resultado seguinte é devido a Hausdorff, [20].

**Teorema 3.2.2 (Hausdorff)** *O problema de momentos de Hausdorff tem solução se e somente se* $\Delta^n c_k \geq 0, k = 0, 1, 2...,$ *onde*

$$\Delta^0 c_k = c_k$$

$$\Delta^1 c_k = c_k - c_{k+1}$$

$$\Delta^n c_k = c_k - C_1^n c_{k+1} + C_2^n c_{k+2} + ... + (-1)^n c_{n+k},\ C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**Demonstração:** Para que exista uma solução, é necessário e suficiente que, para qualquer polinómio $p_n$, se verifique a condição

$$\text{Se } p_n(x) \geq 0, \text{então } \mathcal{L}[p(x)] \geq 0 \tag{3.2.5}$$

onde $\mathcal{L}$ é a funcional definida por $\mathcal{L}(x^n) = c_n$.

Note-se, antes de mais, que a condição $\Delta^n c_k \geq 0$ é precisamente $\mathcal{L}[t^k(1-t)^{n-k}] \geq 0$. Mostremos agora que a condição (3.2.5) é equivalente a

$$\mathcal{L}[t^k(1-t)^{n-k}] \geq 0,\ k = 0, 1, ..., n\ \ n = 0, 1, 2...,\ t \in [0, 1].$$

Se a funcional for positiva-definida, teremos $\mathcal{L}[t^k(1-t)^{n-k}] \geq 0$.

Reciprocamente, se $\Delta^n c_k \geq 0$, mostremos que $\mathcal{L}$ é definida-positiva. Seja $P_m$ polinómio não negativo em $[0, 1]$, de grau $m$. Temos

$$B_n(t, P_m) = P_m(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{p_{m_k}}{n^k},$$

onde $B_n(t, P_m)$ é o polinómio de Bernstein associado a $P_m$ e $p_{m_k}$ tem grau menor ou igual que $m,\ m \leq n$.

Aplicando $\mathcal{L}$ a ambos os membros da equação, temos

$$\mathcal{L}(B_n) = \mathcal{L}(P_m) + \sum_{k=1}^{m-1} \mathcal{L}[p_{m_k}(t)] n^{-k}.$$

Mas $B_n$ é combinação linear com coeficientes positivos de $t^k(1-t)^{n-k}$. Consequentemente, $\mathcal{L}(B_n) \geq 0$. Por outro lado, fazendo $n \to \infty$, obtemos $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(p_{m_k}) n^{-k} = 0$, e concluímos o requerido. □

Mostremos agora que o problema de momentos de Hausdorff, quando solúvel, é sempre determinado.

Seja $(c_n)$ uma sucessão de momentos e $\mu$ uma solução do problema de momentos de Hausdorff. A transformada de Stieltjes é uma função geradora para os momentos da medida, ou seja,

$$\int_{\text{supp}\mu} \frac{1}{x-z} d\mu(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}},\ c_k = \int_{\text{supp }\mu} x^k d\mu(x).$$

No caso de supp $\mu = [0,1]$, então $c_k \leq 1$, e a série converge absoluta e uniformemente para $|z| > 1$. Logo, a transformada de Stieltjes é uma função analítica nesta região e, consequentemente, completamente determinada pelos momentos. O teorema da inversão de Stieltjes-Perron [46] permite obter a medida.

**Teorema 3.2.3 (Stieltjes-Perron)** *Seja* $f(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-z} d\mu(x)$, $\Im m(z) > 0$, *sendo* $\mu$ *uma medida finita positiva em* $\mathbb{R}$. *Então:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im(f(x+i\varepsilon))dx = \mu\left(]a,b[\right) + 1/2\left(\mu(a) + \mu(b)\right)$$

Reciprocamente, se a série convergir em $|z| > \lambda$, o suporte de $\mu$ é compacto e da fórmula de inversão de Stieltjes-Perron concluímos que o problema de momentos é determinado.

É de salientar que, mediante certas condições sobre os momentos, um problema de momentos de Stieltjes pode ser um problema de momentos de Hausdorff. De facto, temos o resultado (cf. exercício de [11]):

**Lema 3.2.1** *Seja* $(c_n)$ *sucessão de momentos de Stieltjes limitada. Então,* $(c_n)$ *é sucessão de momentos de Hausdorff.*

**Demonstração:** Seja $(c_n)$ uma sucessão de momentos cuja solução é $\mu$. Em primeiro lugar mostremos que $c_n$ verifica a desigualdade

$$c_n^2 \leq c_{n+1}c_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.2.6}$$

Consideremos o espaço de Hilbert $L^2(\mu)$ munido com o habitual produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)d\mu(x).$$

Logo,

$$c_n^2 = \left(\int_0^{+\infty} x^n d\mu(x)\right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} x^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} d\mu(x)\right)^2.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$c_n^2 \leq \int_0^{+\infty} x^{n+1} d\mu(x) \int_0^{+\infty} x^{n-1} d\mu(x) = c_{n+1}c_{n-1},$$

conforme requerido.

Vejamos se a a função geradora de $(c_n)$, $\sum (-1)^n \frac{c_n}{z^{n+1}}$, tem raio de convergência finito. De (3.2.6) resulta

$$\left|\frac{c_n}{c_{n-1}}\right| \leq \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde se conclui que a sucessão $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ é crescente.

Por outro lado, uma vez que $0 < a < |c_n| < b$, para certas constantes $a$ e $b$, tal sucessão é limitada,

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < \frac{b}{a}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Logo, a série é convergente para todo o $|z| > \lambda$, e o suporte da medida é compacto, ou seja, o problema de momentos é de Hausdorff. □

Vejamos ainda algumas extensões do problemas de momentos de Stieltjes.

Em 1939, [3], o autor generaliza o resultado de Stieltjes, e mostra que:

**Teorema 3.2.4 (Boas)** *Toda a sucessão $(c_n)$ de números reais pode ser representada na forma*

$$c_n = \int_0^{+\infty} x^n d\varphi(x),$$

*onde $\varphi(x)$ é uma função de variação limitada em $[0, +\infty)$.*

Em 1989, Duran [15] extendeu o problema de momentos de Stieltjes ao espaço $\mathcal{S}^+ \cap \mathcal{S}$, sendo $\mathcal{S}$ o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty$ definidas em $\mathbb{R}$ e de contradomínio em $\mathbb{C}$, onde juntamente com as suas derivadas, são funções rapidamente decrescentes e

$$\mathcal{S}^+ = \{f \in \mathcal{S} : f(t) = 0,\ t < 0,\ \text{e}\ \parallel f \parallel_{k,n} < \infty,\ \forall k, n \in \mathbb{N}\}$$

onde $\parallel f \parallel_{k,n} = \sup_{t\in]0,+\infty[} t^k |f^{(n)}(t)|$.

**Teorema 3.2.5** *Seja $(c_n)$ uma sucessão de números complexos. Então, existe uma função $f$ tal que*

**(a)** $f \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^+$

**(b)** $c_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) dx,\ n \in \mathbb{N}.$

Além disso, o autor mostra que este problema de momentos é indeterminado.

## 3.3 Problemas de Momentos e Quasi-Analiticidade

Nesta secção procuraremos responder a certas questões de existência e unicidade utilizando directamente a sucessão dos momentos.

A primeira questão que se coloca é a de saber se podemos, *à priori* averiguar se o problema de momentos é determinado ou não, dependendo do crescimento dos momentos.

De facto, já verificámos que toda a sucessão de momentos de Stieltjes limitada tem solução única. Por outro lado, o resultado seguinte [3] permite concluir que o problema de momentos de Stieltjes é indeterminado sempre que os momentos verifiquem uma determinada condição de crescimento.

**Teorema 3.3.1** *Se $(c_n) \subseteq \mathbb{R}$ verificar*

$$c_0 \geq 1 \text{ e } c_n \geq (nc_{n-1})^n, \tag{3.3.7}$$

*então existe uma solução do problema de momentos de Stieltjes, ou seja,*

$$c_n = \int_0^{+\infty} x^n d\varphi(x), \ n = 0, 1, 2...$$

*Além disso, este problema de momentos é indeterminado.*

**Demonstração: (existência)** Façamos a prova por indução em $n \in \mathbb{N}$. Consideremos

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & \ldots & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} \text{ e } \Delta_n^{(1)} = \begin{vmatrix} c_1 & c_1 & \ldots & c_{n+1} \\ c_2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n+1} & \ldots & \ldots & c_{2n+1} \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Stieltjes, é suficiente mostrar que que $\Delta_n$ e $\Delta_n^{(1)}$ são positivos, $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que se verifica a condição $\Delta_n \geq 1$ e $\Delta_n^{(1)} \geq 1$.

Temos as igualdades

$$\Delta_n = c_{2n}\Delta_{n-1} + \sum_{k=n}^{2n-1} \pm c_k D_k, \quad n = 1, 2, ... \tag{3.3.8}$$

e

$$\Delta_n^{(1)} = c_{2n+1}\Delta_{n-1}^{(1)} + \sum_{k=n+1}^{2n} \pm c_k D'_k, \tag{3.3.9}$$

onde cada $D_k$ é o minorante da linha $n$ que não contém $c_{2n}$ e $D'_k$ minorante da linha $n$ que não contém $c_{2n+1}$.

Admitamos que

$$\Delta_{2k} \geq 1 \text{ e que } \Delta_{2k}^{(1)} \geq 1$$

são válidas para $k \leq n-1$, e mostremos que também é verdade para $k = n$.

Uma vez que $c_n \geq 1, \ n = 1, 2, ...,$

$$c_n \geq (nc_{n-1})^n > 2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n+4}{4}} c_{n-1}^{\frac{n+2}{2}}, \ n = 2, 3, ...$$

obtemos as desigualdades

$$c_{2n} > 1 + n^{\frac{n+2}{2}} c_{2n-1}^{n+1} \tag{3.3.10}$$

$$c_{2n-1} > 1 + n^{\frac{n+2}{2}} c_{2n}^{n+1} \tag{3.3.11}$$

Agora, (3.3.7) implica que os elementos do determinante $D_k$ são inferiores a $c_{2n-1}$, e os elementos de $D'_k$ são inferiores a $c_{2n}$.

Da desigualdade $\Delta_n \leq c_1...c_n,\ n \in \mathbb{N}$ (cf. [38]) obtemos

$$|D_k| \leq c_{2n-1}^n n^{\frac{n}{2}},\ k = n, ..., 2n-1$$

e

$$\left|D'_k\right| \leq c_{2n}^n n^{\frac{n}{2}},\ k = n+1, ..., 2n$$

As desigualdades (3.3.7) a (3.3.10) permitem concluir que

$$\Delta_n \geq c_{2n} - n^{1+\frac{n}{2}} c_{2n-1}^{n+1} > 1$$

e

$$\Delta_n^{(1)} \geq c_{2n+1} - n^{1+\frac{n}{2}} c_{2n}^{n+1} > 1.$$

Pelo teorema de Stieltjes, conclui-se o requerido.

**(unicidade)** Seja $c_n$ tal que

$$c_0 \geq 1,\ \ c_n \geq (nc_{n-1})^n,\ \ n \geq 1$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $c_2$ é o primeiro elemento para o qual se verifica a desigualdade estrita, $c_2 > (2c_1)^2$, e que

$$c_2 \geq (2c_1 + \epsilon)^2 = \left(2\left(c_1 + \frac{\epsilon}{2}\right)\right)^2,\ \text{para um certo } \epsilon > 0.$$

A sucessão $\nu_n$, definida por

$$\nu_1 = c_1 + \frac{\epsilon}{2},\quad \nu_n = c_n,\quad n \neq 1$$

verifica a condição (3.3.7).

Logo, existe $\beta$ tal que $\nu_{2n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n} d\beta(x),\ n = 0, 1, 2....$

Após uma mudança de variável, temos

$$\nu_{2n} = \int_0^{+\infty} x^n d\beta(\sqrt{x}) = \int_0^{+\infty} x^n d\gamma(x),$$

enquanto que

$$\nu_{2n} = \mu_{2n} = \int_0^{+\infty} x^n d\delta(x),$$

com $\delta$ $e$ $\gamma$ não decrescentes.

Mas $\delta \neq \gamma$, uma vez que

$$\nu_1 = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} d\gamma(x) = c_1 + \epsilon = \epsilon + \int_o^{+\infty} \sqrt{x}\delta(x).$$

Logo, o problema de momentos para a sucessão $(c_{2n})_n$ é indeterminado. $\square$

Concluímos que o problema de momentos de Stieltjes é indeterminado sempre que os momentos verificarem a condição de crescimento(3.3.7).

Mas devemos salientar que não existe uma equivalência entre o crescimento dos momentos e a unicidade da respectiva solução.

Dada uma sucessão de momentos $(c_n)$, defina-se a partir desta a sucessão

$$c_n(\alpha) = \sum_{j=0}^{n} C_j^n \alpha^j c_{n-j}.$$

No caso de existir solução,

$$c_n(\alpha) = \int_{\text{supp}\mu} (x+\alpha)^n d\mu(x).$$

Para o problema de momentos de Hamburguer, as soluções de $c_n$ e de $c_n(\alpha)$ estão em correspondência biunívoca. De facto, se $\mu(x)$ é solução do problema de momentos associado a $c_n$, então $\mu(x-\alpha)$ é solução de $(c_n)$, e vice-versa. No caso do problema de momentos de Stieltjes, a situação é diferente, uma vez que a translacção não preserva o suporte.

Em [44] é estabelecido o resultado seguinte:

**Proposição 3.3.1** *Seja* $(c_n)$ *um problema de momentos de Stieltjes indeterminado.*

*Então, existe* $\alpha_0$ *tal que :*

**(i)** *Para todo o* $\alpha > \alpha_0$, *o problema de momentos de Stieltjes* $c_n(\alpha)$ *é indeterminado,*

**(ii)** *Para todo o* $\alpha < \alpha_0$, *o problema de momentos* $c_n(\alpha)$ *não tem solução cujo suporte esteja em* $[0, +\infty)$,

**(iii)** $c_n(\alpha_0)$ *é um problema de momentos de Stieltjes determinado, mas problema de momentos de Hamburguer indeterminado.*

Antes de enunciarmos um resultado que estabelece algumas relações entre Transformadas de Fourier e problemas de momentos [44], vejamos um exemplo.

Seja $f$ uma função cujo suporte é $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Consideremos a sua transformada de Fourier, $\mathcal{F}(f)(x) = g(x)$. Por um lado, temos

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}(f)(\lambda).$$

Se existir a inversa de $\mathcal{F}$, obtém-se

$$f^{(n)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^n g(x) e^{i\lambda x} dx,$$

donde

$$\sqrt{2\pi}(-i)^n f^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n g(x) dx.$$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n g(x) dx = 0$$

Nestas condições, se considerarmos $\mu_1$ e $\mu_2$ definidas por

$$d\mu_1(x) = (\Re e(g) + x)dx, \; d\mu_2(x) = (\Re e(g) - x)dx,$$

teremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\mu_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\mu_2(x).$$

Logo, o problema de momentos é indeterminado, pois $\mu_1$ e $\mu_2$ são soluções distintas.

**Proposição 3.3.2** *Seja $(c_n)$ uma sucessão de momentos de Stieltjes. Defina-se*

$$\Gamma_{2n} = c_n, \; \Gamma_{2n+1} = 0, \; n = 0, 1, 2, ...$$

*Se o problema de momentos de Hamburguer $(\Gamma_n)$ for determinado, então $(c_n)$ é problema de momentos de Stieltjes determinado.*

**Demonstração:** Seja $\mu$ solução do problema de momentos de Stieltjes,

$$\int_{0}^{+\infty} x^n d\mu(x) = c_n, \; n = 0, 1, 2, ...$$

Defina-se

$$d\rho(x) = \begin{cases} 1/2 d\mu(x^2), & \text{se } x \geq 0 \\ -1/2 d\mu(x^2), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

cujos momentos são $(\Gamma_n)_n$.

Da unicidade de $\rho$ segue-se a unicidade de $\mu$ em $[0, +\infty[$. $\square$

**Proposição 3.3.3** [44]

**(a)** *Seja $(c_n)$ uma sucessão de momentos de Hamburguer tal que*

$$|c_n| \leq C R^n n!, \; n = 0, 1, ... \tag{3.3.12}$$

*onde $C, R$ são constantes positivas. Então, o problema de momentos de Hamburguer é determinado.*
**(b)** *Se $(c_n)$ for uma sucessão de momentos de Stieltjes que verifica*

$$|c_n| \leq CR^n(2n!), \; n = 0, 1, ... \tag{3.3.13}$$

*para certas constantes positivas $C, R$ o problema de momentos de Stieltjes é determinado.*

**Demonstração: (a)** Seja $\mu$ uma solução do problema de momentos de Hamburguer. Então, $x^{2n} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu)$. Por outro lado, verifica-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh(x/2R) d\mu(x) &= \lim_{N \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} (x/2R)^{2n} \frac{1}{(2n)!} d\mu(x) \\ &\leq C \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (\frac{1}{2})^{2n} < L, \end{aligned}$$

onde $L$ é uma constante. Concluímos que $e^{\alpha x} \in L^1(\mathbb{R}, \mu), \; |\alpha| < 1/2R$.

Segue-se que $F_\mu(z) = \int e^{i\alpha z} d\mu(z)$ tem prolongamento analítico na região

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |\Im m(z)| < 1/2R\}.$$

Seja agora $\rho$ outra solução do problema de momentos de Hamburguer. Pelas mesmas razões, $F_\rho$ é também analítica em $D$ e verifica

$$(-i)^n \frac{dF_\rho^n}{dz^n}(0) = (-i)^n \frac{dF_\mu^n}{dz^n}(0) = c_n, \; n = 0, 1, 2, ...$$

Pelo Primeiro Teorema de Unicidade de funções analíticas, concluímos que $F_\mu = F_\rho$ em $D$. Pela fórmula de inversão de Stieltjes-Perron, concluímos que $\mu = \rho$.

O segundo resultado, **(b)**, é consequência da proposição anterior. □

**Observação**: As condições (3.3.12) e (3.3.13) não são necessárias para o estabelecer da unicidade, são apenas suficientes.

Em [43] temos o Critério de Carleman, uma condição que pode permitir concluir a unicidade utilizando apenas os momentos.

**Proposição 3.3.4 (Critério de Carleman)** *Se*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n}^{-1/2n} = \infty,$$

*o problema de momentos de Hamburguer $(c_n)$ é determinado.*

*Se*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^{-1/2n} = \infty$$
*onde* $(c_n)$ *é uma sucessão de momentos de Stieltjes, o problema de momentos de Stieltjes é determinado.*

**Demonstração:** Consideremos a função de Stieltjes-Markov
$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(x)}{z-x},\ z \notin \mathbb{R} \tag{3.3.14}$$
onde $\mu$ é uma função não-decrescente, de espectro infinito, e tal que os seus momentos existem, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$F$ é função analítica em $\Im m(z) > 0$.

Uma vez que
$$\frac{1}{z-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{z^{n+1}} + (\frac{x}{z})^N \frac{1}{z-x} = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{x^n}{z^{n+1}} + \frac{x^{2N}}{z^{2N+1}} \frac{1}{1-x/z},$$
a sua expansão assimptótica quando $|z| \to \infty$ em todo o sector do tipo
$$\{z \in \mathbb{C}:\ \epsilon < \arg(z) < \pi - \epsilon,\ \epsilon \in ]0, \pi/2[\}$$
é
$$F(z) = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{c_n}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^{2N+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2N}}{1-x/z} d\mu(x),\ c_n = \int x^n d\mu(x).$$

Suponhamos agora que $\psi_1$ e $\psi_2$ são duas soluções do problema de momentos. Definam--se
$$F_k(z) = \int \frac{d\psi_k(x)}{z-x},\ k = 1, 2.$$

No sector angular em questão, é válida a desigualdade
$$|z - x| \geq |z| \sin(\epsilon).$$
Logo, se $z = re^{i\theta}$, temos
$$|F_1(z) - F_2(z)| \leq \frac{2}{|z|^{2n+1}} \left| \int x^{2N} d\psi(x) \right| \sup \left| \frac{1}{1-x/z} \right|$$
com $d\psi = d\psi_1 + d\psi_2$. Uma vez que $\int \left| x^{2N} \right| d\psi = \int x^{2N} d\psi$,
$$|F_1(z) - F_2(z)| \leq \frac{2}{|z|^{2N+1}} \frac{1}{|\sin(\theta)|} \left( \int |x|^{2N} d\psi_1(x) + \int |x|^{2N} d\psi_2(x) \right) = \frac{2c_{2N}}{|z|^{2N} \Im m(z)}$$

Se $\Im(z) > 1$ verifica-se a desigualdade
$$|F_1(z) - F_2(z)| < \frac{2c_{2N}}{|z|^{2N}},$$

e basta aplicar o teorema da secção inicial (cf. 1.6) para concluir que $F_1 \equiv F_2$. Mas tal é equivalente a afirmar que $\psi_1 - \psi_2$ diferem por uma constante.

A segunda parte do do teorema resulta da identificação feita anteriormente, entre as sucessões $\Gamma_n$ e $c_n$. $\square$

É de salientar que para que se verifique a primeira condição do teorema é suficiente supôr que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_{2n}} = \infty,$$

onde $\gamma_{2n} = \inf_{k \geq n} (c_{2k})^{1/2k}$.

**Demonstração:** Consideremos para $\in \mathbb{N}$,

$$\beta_n^* = \inf_{k \geq n} \left[ \int |x|^k d\psi_1(x) + \int |x|^k d\psi_2(x) \right]^{1/k}.$$

Uma vez que

$$\int |x|^{2n} d\psi_1(x) + \int |x|^{2n} d\psi_2(x) = c_{2n}, n \in \mathbb{N}$$

teremos $\beta_n^* \leq 2\gamma_{2n}$.

Logo, se $\sum 1/\gamma_n$ divergir, o mesmo acontece com $\sum \beta_n^*$.

Pelo resultado de 1.3., um critério de unicidade para funções quasi-analíticas, a divergência desta série implica que as funções definidas em (3.3.14) verificam $F_1 - F_2 \equiv 0$ em $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 1\}$. Daqui se conclui o requerido. $\square$

Como consequência do Critério de Carleman temos [19]:

**Corolário 3.3.1.1** *Se o problema de momentos de Hamburguer tem uma solução $\psi(x)$ definida por $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx$, onde $\varphi(x) \geq 0$ e*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x))^q e^{\delta|x|} dx < \infty \tag{3.3.15}$$

*para algum $q \geq 1$ e $\delta > 0$, então o problema de momentos é determinado.*

*Analogamente, o problema de Stieltjes é determinado se $\int_0^{+\infty} (\varphi(x))^q e^{\delta\sqrt{x}} < \infty$.*

**Demonstração:** Façamos a prova para o problema de momentos de Hamburguer. Para o caso Stieltjes procede-se de modo análogo.

Se a condição (3.3.15) se verificar para $q > 1$, pela desigualdade de Holder teremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{\delta|x|} dx < \infty.$$

Logo, basta fazer a prova para $q = 1$. Temos

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} d\psi(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{\delta|x|} e^{-\delta|x|} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Mas o máximo da função $e^{-\delta|x|}x^{2n}$, atingido em $x = \pm\frac{2n}{\delta}$, é igual a

$$e^{-2n} \left(\frac{2n}{\delta}\right)^{2n} = (\delta e)^{-2n}(2n)^{2n}.$$

Logo,

$$c_{2n} \leq \max\left(e^{-\delta|x|}x^{2n}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x)) e^{\delta|x|} dx.$$

Da hipótese resulta a desigualdade

$$c_{2n} \leq (2n)^{2n} c,$$

onde $c$ designa uma constante.

Consequentemente, a série $\sum c_{2n}^{-1/2n}$ diverge. Pelo critério de Carleman, concluímos o requerido. □

# Capítulo 4

# Teoria Geral de Polinómios Ortogonais

Neste capítulo apresentamos a relação existente entre a teoria dos Polinómios Ortogonais e problemas de momentos. Para tal, começaremos por definir uma Funcional de Momentos, associada a uma sucessão de momentos $(c_n)$.

Tentaremos, essencialmente, responder a duas questões:

$Q_1$) Que condições se devem impôr à sucessão de momentos de modo a garantir a existência de uma sucessão de polinómios ortogonais? Se existir, quais as condições que garantem a unicidade?

$Q_2$) Qual a representação para $\mathcal{L}$, em função de $(c_n)$?

Obter a representação para a funcional de momentos é equivalente a determinar uma função peso para os sistemas de polinómios ortogonais em relação a essa funcional (ver 4.1). No sentido de dar algumas respostas à segunda questão, apresentamos:

- O trabalho de Pollazek [37], onde se estabelece a relação entre medidas de ortogonalidade complexas e sucessão de polinómios ortogonais,

- Os trabalhos [16] e [25], onde se estabelece um método para obter a função peso de vários sistemas de Polinómios Ortogonais através da representação de funcionais em séries-$\delta$. Veremos, então, a aplicação das condições da proposição 3 na determinação da medida de ortogonalidade.

- A classe de Blumenthal Nevai (cf. [48]), onde se obtém convergência fraca de medidas de ortogonalidade.

## 4.1 Funcionais de Momentos

Dada a sucessão $(c_n)$, defina-se, no espaço dos Polinómios $\mathbb{P}$, a funcional

$$\mathcal{L} : \mathbb{P} \to \mathbb{C},\ \mathcal{L}(x^n) = c_n.$$

Utilizaremos também a notação $\langle w, x^n \rangle$ para $\mathcal{L}(x^n)$.

$\mathcal{L}$ será chamada *Funcional de momentos* e $c_n$ *sucessão de momentos* de $\mathcal{L}$.
Damos a definição:

**Definição 4.1.1** A sucessão de polinómios $\{p_n\}$ é dita *Sucessão de Polinómios Ortogonais* em relação à funcional de momentos $\mathcal{L}$ se

**(i)** grau$(p_n)$=$n$, $n = 0, 1, 2...$

**(ii)** $\mathcal{L}(p_n p_m) = A_n \delta_{m,n},\ A_n = \mathcal{L}(p_n^2) \neq 0,\ n = 0, 1, 2...$

A sucessão $\{p_n\}$ é univocamente definida quando fixado o coeficiente principal de cada $p_n$, ou quando fixada a constante $A_n$, apesar de diferentes concretizações destas constantes darem origem a sucessões distintas. A unicidade verifica-se ainda que o problemas de momentos seja indeterminado.

Se cada $p_n$ for mónico, ou seja, com coeficiente principal igual a 1, $\{p_n\}$ será chamada *Sucessão de Polinómios Mónicos*, e adoptaremos a notação $\{P_n\}$. Se cada $p_n$ verificar a condição $\| p_n \| = 1$, a sucessão será denominada *Sucessão de Polinómios Ortonormais.*

Responda-se à questão de existência.

Note-se que nem todas as sucessões de momentos dão origem a uma sucessão de polinómios ortogonais, como é o caso de, por exemplo, uma sucessão onde $c_0 = \mathcal{L}(1) = 0$, pois ter-se-ia $\mathcal{L}(p_0^2) = 0$, o que constitui uma contradição.

Um outro exemplo é o caso de $\mathcal{L}$ com momentos $\mathcal{L}(x^n) = a^n,\ a$ constante. Não pode existir uma sucessão de polinómios ortogonais para $\mathcal{L}$ assim definida, pois se

$$p_0(x) = b \neq 0,\ \ p_1(x) = cx + d,\ c \neq 0,$$

ter-se-ia

$$0 = \mathcal{L}[p_0(x)p_1(x)] = \mathcal{L}[b(cx + d)] = bca + db.$$

Logo, $ca = -d$, e $\mathcal{L}[p_1^2] = c^2a^2 + d^2 + 2dca = 0$, o que constitui uma contradição em relação ao facto de $p_n$ ser uma sucessão de polinómios ortogonais.

Contudo, se

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & ... & c_n \\ c_1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ c_n & ... & ... & c_{2n} \end{vmatrix} \neq 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta_{-1} = 1,$$

podemos obter uma sucessão de polinómios ortogonais em relação a $\mathcal{L}$ no sentido da definição dada, bastando para tal definir

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_n(z) &= \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & ... & c_n \\ c_1 & ... & ... & c_{n+1} \\ c_{n-1} & ... & ... & c_{2n-1} \\ 1 & z & ... & z^n \end{vmatrix}, n = 1, 2, 3... \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

A sucessão de polinómios $\{p_n\}$ definidos em (4.1.1) é designada por *Polinómios do tipo Chebyschev.*

Antes de verificarmos que $p_n$ é polinómio de grau $n$ e que

$$\mathcal{L}[p_n(x)p_m(x)] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \delta_{m,n},$$

vejamos o seguinte resultado:

**Lema 4.1.1 (Chihara)** *Seja $\mathcal{L}$ funcional de momentos e $\{p_n\}$ sucessão de polinómios. São equivalentes:*

1. *$\{p_n\}$ é sucessão de polinómios ortogonais relativamente a $\mathcal{L}$;*

2. *$\mathcal{L}(x^m p_n) = A_n \delta_{n,m},\ A_n \neq 0,\ 0 \leq m \leq n-1;$*

3. *Para todo o polinómio $\pi(x)$ não identicamente nulo, verifica-se que $\mathcal{L}(\pi(x)p_n(x)) = 0$ se grau($\pi$) $< n$, e $\mathcal{L}(\pi(x)p_n(x)) \neq 0$ se grau($\pi$) $= n$.*

**Lema 4.1.2** *A sucessão definida por* (4.1.1) *é uma sucessão de polinómios onde cada $p_n$ é polinómio mónico de grau $n$.*

**Demonstração:** Sejam $\{p_n\}$ definidos por (4.1.1). Ao desenvolvermos o determinante segundo a última linha obtemos

$$p_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & ... & c_n \\ c_1 & ... & ... & c_{n+1} \\ c_{n-1} & ... & ... & c_{2n-1} \\ 1 & z & ... & z^n \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \left(\Delta_{n-1} z^n + r(x)\right) \tag{4.1.2}$$

onde $r(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual que $n-1$.

Além disso,

$$\mathcal{L}[z^m P_n(z)] = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \mathcal{L} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & \dots & \dots & c_{n+1} \\ c_{n-1} & \dots & \dots & c_{2n-1} \\ z^m & z^{m+1} & \dots & z^{n+m} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & \dots & \dots & c_{n+1} \\ c_{n-1} & \dots & \dots & c_{2n-1} \\ c_m & c_{m+1} & \dots & c_{n+m} \end{vmatrix}$$

Este determinante é nulo para $m = 0, 1, 2, ..., n-1$ já que teremos uma matriz com duas linhas iguais. Pela condição 2 da proposição anterior concluímos o requerido. □

Mas a condição $\Delta_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, não é só suficiente, sendo também necessária.

**Lema 4.1.3 (Chihara)** *Seja $\mathcal{L}$ funcional de momentos com sucessão de momentos $c_n$. Existe uma única sucessão de polinómios ortogonais em relação à funcional de momentos $\mathcal{L}$ se e somente se $\Delta_n \neq 0\ \ n = 0, 1, 2....$ Tal sucessão de polinómios ortogonais, a menos de uma constante, é dada por* (4.1.1).

Antes de referirmos as relações de recorrência, vejamos as definições:

**Definição 4.1.2** A funcional de momentos $\mathcal{L}$ é dita *quasi-definida* se a sucessão de momentos $c_n$ o for, ou seja, se verificar $\Delta_n \neq 0,\ \ n = 0, 1, ...$ *e positiva-definida* se $c_n$ o for, ou seja, se $\Delta_n > 0,\ \ n = 0, 1, ...$

**Observação**: No caso de $\mathcal{L}$ ser positiva-definida, mostra-se que os momentos são reais. Obtemos, neste caso, uma sucessão de polinómios ortogonais reais.

Seja $\mathcal{L}$ funcional quasi-definida e $p_n$ sucessão de polinómios ortogonais relativamente a $\mathcal{L}$. Sem perda de generalidade, consideremos que cada $\{p_n\}$ é mónico. Mostremos que existem constantes $\beta_n$ e $\lambda_n$ tais que

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x),\ n = 1, 2, ...$$

$$P_{-1}(x) = 0,\ P_0(x) = 1.$$

De facto, uma vez que $xP_n(x)$ é um polinómio de grau $n+1$,

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} P_k(x), \quad \text{onde } a_{n,k} = \frac{\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Mas $xP_k$ é polinómio de grau $k+1$, donde $a_{n,k} = 0$ se $k < n-1$.

Uma vez que $xP_n$ é mónico, $a_{n,n+1} = 1$. Logo,

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{n,n}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Se considerarmos $a_{n-1,n-1} = \beta_n$ e $a_{n-1,n-2} = \lambda_n$, obtemos a relação de recorrência a três termos para polinómios mónicos,

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x) \tag{4.1.3}$$

$$P_{-1}(x) = 0, \; P_0(x) = 1 \;\; n = 1, 2, 3...,$$

$\lambda_1$ qualquer. Consideraremos $\lambda_1 = \mathcal{L}(1) = c_0$.

As sucessões $\beta_n$ e $\lambda_n$ são também definidas através dos momentos (cf. [11]),

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1} &= \frac{\mathcal{L}(x^n P_n)}{\mathcal{L}(x^{n-1}P_{n-1})} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} \\
\beta_n &= \frac{\mathcal{L}(xP_{n-1}^2)}{\mathcal{L}(P_{n-1}^2)} \\
\mathcal{L}(P_n^2) &= \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_{n+1}
\end{aligned}$$

desde que $\lambda_1 = c_0 = \Delta_0$.

Efectivamente, trata-se de uma equivalência [47],

**Teorema 4.1.1 (Favard)** *Sejam $(\beta_n)$, $(\lambda_n)$ sucessões de números complexos e $\{P_n\}$ sucessão de polinómios definidos pela relação de recorrência*

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}, \; n = 1, 2, ...$$

$$P_{-1} = 0, \; P_0(x) = 1.$$

*Então, existe uma única funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que*

$$\mathcal{L}(1) = \lambda_1, \;\; \mathcal{L}(P_m P_n) = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_{n+1} \delta_{m,n}.$$

*Além disso, $\mathcal{L}$ é quasi-definida se e $\{P_n\}$ é a sucessão de polinómios mónicos ortogonais relativamente a $\mathcal{L}$ se e somente se $\lambda_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, enquanto que $\mathcal{L}$ é positiva-definida se e somente se $(\beta_n) \subseteq \mathbb{R}$ e $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$.*

**Demonstração:** Demonstraremos apenas a primeira parte. Defina-se $\mathcal{L}$ do seguinte modo:

$$\mathcal{L}[1] = c_0 = \lambda_1$$
$$\mathcal{L}[P_n] = 0,\ n = 1, 2, ..., \tag{4.1.4}$$

A relação de recorrência pode escrever-se na forma

$$xP_n = P_{n+1} + \beta_{n+1}P_n + \lambda_{n+1}P_{n-1},\ n \geq 1 \tag{4.1.5}$$

Mas, de (4.1.4) obtemos

$$\mathcal{L}[xP_n(x)] = 0,\ n \geq 2.$$

Multiplicando ambos os membros de (4.1.5) por $x$ e aplicando novamente $\mathcal{L}$ a ambos os membros da equação,

$$\mathcal{L}[x^2P_n(x)] = 0,\ n \geq 3.$$

Deste modo, obteremos

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[x^kP_n(x)\right] = 0, & 0 \leq k < n \\ \mathcal{L}\left[x^nP_n(x)\right] = \lambda_{n+1}\mathcal{L}\left[x^{n-1}P_{n-1}(x)\right], & n \geq 1 \end{cases}$$

Do lema 4.1.1 concluímos que $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a $\mathcal{L}$. $\square$

**Observação**: No caso de serem polinómios ortonormais reais, a relação de recorrência a três termos é

$$xp_n = a_{n+1}p_{n+1} + b_np_n + a_np_{n-1}$$
$$p_0(x) = 1,\quad p_{-1}(x) = 0.$$

com

$$p_n = \gamma_nx^n + \delta_nx^{n-1} + ...$$
$$a_n = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} > 0,\ b_n = \frac{\delta_n}{\gamma_n} - \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}.$$

**Definição 4.1.3** seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associados à funcional de momentos $\mathcal{L}$. A sucessão de polinómios definidos por

$$P_n^{(1)}(x) = \mathcal{L}_t\left(\frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x - t}\right),$$

onde $\mathcal{L}_t$ representa a acção de $\mathcal{L}$ sobre a variável $t$, designa-se por *Sucessão de Polinómios Ortogonais associada a $\{P_n\}$ de primeira espécie.*

**Observação**: Esta sucessão de polinómios satisfaz a mesma relação de recorrência a três termos que $\{P_n\}$, e verifica as condições iniciais $P_{-1}(x) = 1,\ P_o(x) = 0$. Trata-se de uma sucessão de polinómios ortogonais, onde grau$(P_n) = n - 1,\ n = 1, 2, ...$

## 4.2 Polinómios Ortogonais Clássicos

As soluções dos problemas de momentos associados às sucessões $c_n = 2^n n!$, $c_n = n!$ e $c_n = (-1)^n$ são funções que verificam uma equação diferencial do tipo Pearson,

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{d+ex}{a+bx+cx^2}, \ a,b,c,d,e \text{ constantes} \tag{4.2.6}$$

Estas funções são funções peso para as sistemas de Polinómios Ortogonais conhecidos na literatura como *Polinómios Ortogonais Clássicos.* A $c_n = 2^n n!$ correspondem os Polinómios de Jacobi, a $c_n = n!$ os Polinómios de Laguerre, e a $c_n = (-1)^n$ os Polinómios de Hermite (cf. [21]).

De facto, as soluções da equação de Pearson que, adicionalmente, satisfazem a condição

$$\int x^k dw(x) < \infty, \ k = 0, 1, 2, ...$$

são essencialmente de três tipos, dependendo da natureza do denominador [21].

1. Se $c \neq 0$ e $cx^2 + bx + a$ tem duas raízes reais $a$ e $b$, $b < a$, que, sem perda de generalidade, são $a = 1$, $b = -1$, a solução geral é

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \ \ x \in [-1, 1], \ \alpha, \ \beta > -1.$$

2. Se $c = 0, b \neq 0$, $\frac{w'(x)}{w(x)} = -\frac{\alpha}{x} - 1$ tem solução

$$w(x) = x^{\alpha}e^{-x}, \ \alpha > -1, \ x \in [0, +\infty[.$$

3. Se $b = c = 0$, $\frac{w'(x)}{w(x)} = -x$ tem solução

$$w(x) = e^{-x^2}, \ x \in ]-\infty, +\infty[.$$

Estas soluções correspondem, respectivamente, às sucessões de polinómios de Jacobi, Laguerre e Hermite.

As sucessões de polinómios ortogonais Clássicas caracterizam-se por satisfazerem a Fórmula de Rodrigues e uma equação diferencial do tipo

$$\sigma(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma_n y(x) = 0, \tag{4.2.7}$$

Cada $p_n$ verifica a equação diferencial (4.2.7) onde $\sigma(x)$ é precisamente $a + bx + cx^2$, polinómio de grau inferior ou igual a 2, $\beta(x)$ é um polinómio de primeiro grau independente de $n$, e $\gamma_n$ apenas depende de $n$.

Para que tal equação tenha como solução um polinómio de grau $n$ obtemos, após a comparação do coeficiente líder,

$$\gamma_n = -n(n-1)\frac{\sigma''(x)}{2} - n\beta'(x).$$

Além disso, as soluções serão polinómios ortogonais.

Cada $p_n$ verifica a Fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{c_n w(x)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n [w(x)\sigma^n(x)],$$

onde $c_n$ é uma constante (dependendo apenas de $n$), $w(x)$ é não negativo num certo intervalo real, $\sigma(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a 2, independente de $n$, $\dfrac{w'}{w} = \dfrac{\beta(x) - \sigma'(x)}{\sigma(x)}$ é uma função racional, e $\beta(x)$ polinómio de grau no máximo um.

## 4.3 Propriedades dos zeros de Sucessões de Polinómios Ortogonais

De seguida listamos algumas propriedades dos zeros de uma sucessão de polinómios ortogonais.

No que se segue, e salvo indicação contrária, consideramos $\mathcal{L}$ definida-positiva e $\{P_n\}$ sucessão de polinómios ortogonais reais mónicos, que verificam a relação de recorrência

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n)P_n(x) - \lambda_n P_{n-1}(x), n = 1, 2, 3...,$$

$$P_{-1}(x) = 0,\ P_0(x) = 1$$

onde as sucessões $\beta_n$ e $\lambda_n$ são tais que $\beta_n \in \mathbb{R},\ \lambda_n \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}$.

**Teorema 4.3.1** *Os zeros de $P_n$ são reais, simples, e precisamente $n$.*

**Demonstração:** Consideremos a sucessão de polinómios ortonormais, resultantes da normalização de cada $P_n$, ou seja, resultantes da divisão de cada $P_n$ pela sua norma. Esta sucessão verifica a relação de recorrência

$$xp_n = a_{n+1}p_n(x) + b_n p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1},\ a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R},$$

$$p_{-1}(x) = 0,\ p_0(x) = 1$$

O facto de os zeros serem reais resulta das propriedades de matrizes de Jacobi. Da relação de recorrência a três termos para sucessão de polinómios ortonormais obtemos a igualdade

$$\begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & ... & ... \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ ... \\ ... \\ p_n(x) \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ ... \\ ... \\ p_n(x) \end{pmatrix} - a_n p_{n+1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo, se $p_n(x_0) = 0,\ x_0$ é valor próprio da matriz

$$J_n = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & ... & ... \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

Uma vez que a matriz é simétrica, os seus valores próprios são reais e são precisamente $n$. A simplicidade resulta da fórmula de Chrstoffel-Darboux [47],

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k^2(x)}{\lambda_1 ... \lambda_{k+1}} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\lambda_1 ... \lambda_{n+1}}.$$

Se existisse um zero duplo de algum $P_n$, ter-se-ia que $P_n(x_0) = P'_n(x_0) = 0$. Mas, da igualdade de Chrstoffel-Darboux, viria $\sum_{k=0}^{n} P_k^2(x_0) = 0$. Deste modo concluir-se-ia que $P_0(x_0) = 0$, o que constitui uma contradição, pois $P_0(x)$ é constante e não nulo.

Logo, os zeros terão de ser simples. □

O verifcar da fórmula de Chrstoffel-Darboux é também uma condição suficiente para que a sucessão de polinómios seja ortogonal (cf. [7]).

**Teorema 4.3.2** *Se $\{P_n\}$ verificam a identidade de Chrstoffel-Darboux, então $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais.*

**Demonstração:** Se $\{P_n\}$ verificam

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k^2(x), \quad r_k = \prod_{j=1}^{k+1} \lambda_j,$$

temos

$$\begin{aligned} P'_{n+1}P_n - P'_nP_{n+1} &= P_n^2 + \lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_{n-1}}{r_k} P_k^2 \\ &= P_n^2 + \lambda_n (P'_nP_{n-1} - P'_{n-1}P_n) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(P'_{n+1}+\lambda_n P'_{n-1})P_n - P'_n(P_{n+1}+\lambda_n P_{n-1}) &= P_n^2\\ \Leftrightarrow \left(\frac{P_{n+1}+\lambda_n P_{n-1}}{P_n}\right)' &= 1\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{P_{n+1}+\lambda_n P_{n-1}}{P_n} = (x-\beta_n),$$

e os polinómios $P_n$ satisfazem uma relação de recorrência a três termos:

$$P_{n+1}+\lambda_n P_{n-1} = (x-\beta_n)P_n.$$

Pelo teorema de Favard, são ortogonais. □

Apresentamos o caso geral, relativo a sucessões de polinómios ortogonais não necessariamente reais [42].

**Teorema 4.3.3 (Saff)** *Se $P_n$ é sucessão de polinómios ortogonais associados à medida de Borel positiva $\mu$ com suporte em $\mathbb{C}$, as raízes de $P_n$ estão em $C_o(supp\mu)$, sendo $C_0$ o invólucro convexo de $\mu$.*

Outra propriedade característica dos zeros de sucessões de polinómios ortogonais tem a ver com o seu interlaçamento.

Denotemos por $(x_{n,j}),\ j=1,...,n$ os zeros de $P_n$ ordenados por ordem crescente.

**Teorema 4.3.4** *Os zeros de quaisquer dois polinómios consecutivos $P_n$ e $P_{n+1}$ são enterlaçados, ou seja,*

$$x_{n+1,j} < x_{n,j} < x_{n+1,j+1} \quad j=1,2,...,n$$

Esta é outra propriedade que caracteriza completamente as sucessão de polinómios ortogonais (cf. [51]).

**Teorema 4.3.5 (Wendroff)** *Dados $a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b,$ e $y_i, i=1,2,...,n-1$ tais que*

$$x_i < y_i < x_{i+1} \quad i=1,2,...n-1,$$

*existe $\{P_n\}$, sucessão de polinómios ortogonaisem $[a,b]$ cujos zeros de cada $P_n$ são precisamente $x_i$ e $y_i$ :*

$$P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

$$P_{n-1}(x) = (x-y_1)(x-y_2)...(x-yn)$$

**Teorema 4.3.6** *Seja $\mathcal{L}$ funcional de momentos e tal que $\mathcal{L}(x^n) = \int_{supp\ \mu} x^n d\mu(x)$. Então, o espectro de $\mu$ contém pelo menos um ponto em cada intervalo $]x_{n,i}, x_{n,i+1}[,\ i = 1, 2, ..., n$, $n = 2, 3, ...$.*

*Equivalentemente, o intervalo onde $\mu$ for constante contém quando muito um zero de qualquer $P_n$.*

**Demonstração:** Seja $]a, b[$ um intervalo onde $\mu$ é constante. Suponhamos que existem dois zeros de $P_n$, $x_1$ e $x_2$ em $]a, b[$.

Então, $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_{n-2}(x)$, onde $Q_{n-2}$ é polinómio de grau $n - 2$.

Da ortogonalidade de $\{P_n\}$ resulta, por um lado,

$$I_n = \int P_n(x) q_{n-2}(x) d\mu(x) = 0,$$

e por outro,

$$I_n = \int (x - x_1)(x - x_2) Q_{n-2}^2(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}\backslash]a,b[} (x - x_1)(x - x_2) Q_{n-2}^2(x) d\mu(x) > 0,$$

pois a função integranda $(x - x_1)(x - x_2)Q_n^2(x)$ é estritamente positiva em $\mathbb{R}\backslash]a, b[$.

Logo, não poderão existir dois zeros em $]a, b[$. □

**Teorema 4.3.7** [11] *Seja $\{p_n\}$ sucessão de polinómios densos em $L_1(\mu)$, ortogonais relativamente à funcional $\mathcal{L}$, com $\mathcal{L}(x^n) = \int x^n d\mu(x)$. Seja $s$ um elemento do espectro de $\mu$. Então, toda a vizinhança de $s$ contém um zero de $P_n$, para $n$ suficientemente grande.*

**Demonstração:** Suponhamos que tal não se verifica, ou seja, que existe uma vizinhança $]a, b[$ tal que $\mu\left(]a, b[\right) > 0$, na qual não existe um zero de $P_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $q_m$ um polinómio de grau $m$ e tal que $q_m(x) \leq 0,\ x \in \mathbb{R}\backslash]a, b[$.

Defina-se a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in ]-\infty, a] \cup [b, +\infty[ \\ (x - a)(x - b) & \text{se } x \in ]a, b[ \end{cases}$$

então, $f$ é positiva em $L^1(\mu)$ e é contínua em $]a, b[$.

Da densidade resulta que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $q_m(x)$, polinómio negativo em $\mathbb{R}\backslash]a, b[$, para o qual

$$\parallel f - q_m \parallel \leq \epsilon.$$

Assim, para $n$ suficientemente grande, temos:

$$\int f(x) d\mu(x) \leq \int |f(x) - q_m(x)| d\mu(x) + \int q_m(x) d\mu(x) \leq \epsilon.$$

Mas se tal é válido para qualquer $\epsilon$ positivo, temos uma contradição em relação à positividade de $f$. □

## 4.4 Representação de medidas de ortogonalidade

Após a apresentação de resultados que permitem estabelecer a relação entre sucessões de polinómios ortogonais, sucessões de momentos e funcionais lineares, nomeadamente no que diz respeito ao espectro da funcional linear, coloca-se a questão de obter explicitamente a medida de ortogonalidade dos sistemas de polinómios ortogonais.

Apresentaremos, em primeiro lugar, um resultado de Pollazek. Este resultado é similar aos obtidos no capítulo 3. Aí não tratámos os numeradores e denominadores das reduzidas de ordem $n$ das fracções contínuas como polinómios ortogonais, o que resulta da relação de recorrência a três termos.

### 4.4.1 Método de Pollaczek

Vejamos a relação entre medidas de ortogonalidade complexas e fracções contínuas.

Consideremos a sucessão de polinómios ortogonais mónica definida pela relação de recorrência a três termos

$$P_n(z) = (z - \beta_n)P_{n-1}(z) - \lambda_n P_{n-2}(z), \quad n = 1, 2, ...$$
$$P_{-1}(z) = 0, \ \ P_0(z) = 1$$

onde $\beta_n, \lambda_n$ são constantes reais ou complexas.

O teorema de Favard assegura a existência de uma funcional linear $\mathcal{L}$ tal que

$$\mathcal{L}\left[P_n(z)P_m(z)\right] = A_n\delta_{n,m}, \ A_n \neq 0 \tag{4.4.8}$$

com $A_n = \lambda_1...\lambda_{n+1}$.

Observámos já que se $\mathcal{L}(x^n) = c_n$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = r < \infty \tag{4.4.9}$$

a função de Stieltjes-Markov $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-z} d\mu(x)$ é representada pela série

$$\chi(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}},$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.

**Teorema 4.4.1 (Pollaczek)** *Seja $\{P_n\}$ sucessão de polinómios ortogonais mónicos cuja sucessão de momentos $(c_n)$ verifica a condição (4.4.9). Então, a função $\chi(z)$ é uma medida de ortogonalidade complexa para a sucessão $\{P_n\}$.*

**Demonstração:** Mostremos que se tem a igualdade

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C P_n(z)P_m(z)\chi(z)dz = A_n\delta_{m,n},\ n\in\mathbb{N}$$

onde $C$ é um círculo de raio maior que $r$.

De facto, se $C$ for um círculo centrado na origem de raio $R > r$, aplicando o teorema de Cauchy para integrais temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C z^n\chi(z)dz = c_n,\ n = 0, 1, 2, ...$$

Logo, para um polinómio $P$, obtemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C P(z)\chi(z)dz = \mathcal{L}[P(z)],\ n = 0, 1, 2, ...$$

De (4.4.8) segue-se a igualdade requerida. □

Consideremos agora os polinómios associados a $P_n$,

$$P^{(1)}_{n+1}(z) = (z-\beta_n)P^{(1)}_n(z) - \lambda_n P^{(1)}_{n-1}(z),\ n = 1, 2, ... \tag{4.4.10}$$

onde grau $(P^{(1)}_n) = n-1,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Da relação de recorrência de $\{P_n\}$ e de (4.4.10) concluímos que $P^{(1)}_n(z)/P_n(z)$ é a reduzida de ordem $n$ da fracção contínua (cf. 2.2.1)

$$X(z) = \frac{\gamma_1|}{|z-\beta_1} - \frac{\gamma_2|}{|z-\beta_2} - \frac{\gamma_3|}{|z-\beta_3} - ...$$

No caso de tal fracção contínua convergir uniformemente em $|z| > r$, teremos

$$X(z) = \frac{P^{(1)}_n(z)}{P_n(z)} + \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\lambda_1\lambda_2...\lambda_{k+1}}{P_k(z)P_{k+1}(z)}$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C P_n(z)P_m(z)X(z)dz = A_n\delta_{m,n}.$$

De facto,

$$\int_C P_n(z)P_m(z)X(z)dz = \int_C P_n(z)P_m(z)\left[\frac{P^{(1)}_n(z)}{P_n(z)} + \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\gamma_1\gamma_2...\gamma_{k+1}}{P_k(z)P_{k+1}(z)}\right]dz.$$

Mas

$$\int_C \frac{P_n(z)P_m(z)P^{(1)}_n(z)}{P_n(z)}dz = \int_C P_m(z)P^{(1)}_n(z) = 0$$

e

$$\int_C \frac{P_n(z)P_m(z)_n(z)}{P_k(z)P_{k+1}(z)}dz = 0,\ 0\le m\le n-1,\ \ k = n, n+1, ...$$

Se $m = n$, temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P_n(z)}{P_{n+1}}(z)dz = \lambda_1 ... \lambda_{n+1}.$$

Agora, se a fracção contínua convergir,verifica-se a igualdade

$$X(z) = \chi(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n^{(1)}(z)}{P_n(z)}, \quad |z| > r.$$

Observe-se que este resultado parte da hipótese de ser finito o limite da sucessão $(\sqrt[n]{|c_n|})$. Logo, os zeros de $P_n$ estão em $\{|z| < r\}$.

Mas como obter uma representação para a medida de ortogonalidade real da sucessão de polinómios ortogonais $\{P_n\}$ a partir de $\chi(z)$? Apresentaremos uma resposta a esta questão na próxima secção.

### 4.4.2 Função Geradora dos Momentos

Motivados pela questão de obter a função peso utilizando directamente os momentos da medida, vários matemáticos, entre outros Krall [24], Krall e Morton [25] e Duran [16], utilizaram representações de funcionais em séries-$\delta$ e, através de transformadas de Fourier e da representação de funcionais de Cauchy, obtiveram a função peso para vários sistemas de polinómios ortogonais.

Vejamos alguns destes resultados.

Por construção, (cf. 4.1) os polinómios do tipo Chebyschev são ortogonais em relação a qualquer funcional que satisfaça

$$\langle w, x^n \rangle = c_n, \; n = 0, 1, 2, ...$$

Suponhamos que $w$ actua também sobre funções analíticas, $\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} x^n$, ou seja,

$$\langle w, \psi(x) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!} \langle w, x^n \rangle.$$

Donde, no sentido das distribuições,

$$w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \delta^{(n)}(x)}{n!} c_n \tag{4.4.11}$$

com $\delta$ a função de Dirac, $\langle \delta^{(n)}, \psi \rangle = (-1)^n \psi^{(n)}(0), \; n \in \mathbb{N}$.

Em [24], o autor considera a representação formal de Cauchy de funcionais,

$$\hat{w}(z) = \frac{1}{2\pi i} \langle w(x), \frac{1}{x - z} \rangle.$$

Se $w(x)$ tiver a representação (4.4.11), obteremos

$$\hat{w}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{z^{n+1}}$$

Conhecidos os momentos, esta expansão permite, mediante certas restrições no crescimento de $(c_n)$, obter uma função peso complexa para vários sistemas de polinómios ortogonais.

Assuma-se que $|c_n| < cM^n, \ \ n = 0, 1, 2...,$ onde c e M são constantes. Nestas condições, $\hat{w}(z)$ é uma função holomorfa em $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\}$.

**Definição 4.4.1** Defina-se $\hat{w}$ como $\langle w, \phi\rangle = -\int_C \phi(z)\hat{w}(z)dz$, onde $C$ é um caminho no exterior de $\{z \in \mathbb{C} : |z| = M\}$.

**Teorema 4.4.2 (Krall)** *Seja $w$ tal que $\langle w, x^n\rangle = c_n, \ n = 0, 1, 2, ....$ Então, os polinómios do tipo Chebyschev são ortogonais em relação a $\hat{w}$, ou seja,*

$$\langle w, p_n p_m\rangle = \int p_n(z)p_m(z)\hat{w}(z)dz = -\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\delta_{n,m}$$

*com $\Delta_0 = c_0$ e $\Delta_{-1} = 1$*

Krall obtém a função peso complexa para os sistemas de polinómios de Legendre, Jacobi e de Bessel.

Mas este método não é aplicável, por exemplo, aos polinómios de Laguerre, uma vez que para $c_n = n!$, $\psi(x) = e^{-x^2}$, $\psi^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!}$, a série

$$\langle w, \psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{n!},$$

diverge.

Em [25] considera-se a restrição de crescimento mais fraca, $|c_n| < cM^n n!$ onde $C$ e $M$ são constantes.

Seja $F$ a transformada de Fourier. Considerem-se os espaços $Z$ e $D$ definidos por $Z = \{F(\phi) : \phi$ é função $\mathcal{C}^\infty$ com suporte compacto$\}$, $D$ o espaço das funções $\mathcal{C}^\infty$ com suporte compacto, e os subespaços

$$Z_{M\epsilon} = \{\psi \in Z : \text{ suporte de } F^{-1}(\psi) \subset [-\frac{1}{M+\epsilon}, \frac{1}{M+\epsilon}]\}$$

$$D_{M\epsilon} = \{\phi \in D : \text{ suporte de } \phi \subset [-\frac{1}{M+\epsilon}, \frac{1}{M+\epsilon}]\},$$

para algum $\epsilon > 0$. Note-se que $x^n \notin Z_M$.

Temos o resultado [25]:

**Teorema 4.4.3** *Se $|c_n| < cM^n n!$, $n = 0, 1, ...$, então a funcional $w(x)$ definida por $\sum(-1)^n c_n \delta^{(n)}(x)$ é contínua em $Z_{M\epsilon}$.*

Utilizando inversas de transformadas de Fourier, é depois possível extender a funcional $w$ para actuar em $\mathbb{P}$, espaço dos polinómios. Uma vez que $F(D_{M\epsilon}) = Z_{M\epsilon}$, teremos $F^{-1}(Z_{M\epsilon}) = D_{M\epsilon}$.

**Teorema 4.4.4** ([25]) *Se $|c_n| < M^n n!$, a função $F^{-1}w$ definida por*

$$F^{-1}w(t) = \frac{1}{2\pi} \sum c_n \frac{(-it)^n}{n!}$$

*representa uma função analítica em $|Mt| < 1$.*

São obtidas extensões ao espaço $\mathbb{P}$.

**Teorema 4.4.5** *Seja $f$ a continuação analítica de $F^{-1}w$, onde $w = \sum(-1)^n c_n \delta^{(n)}(x)$ é uma distribuição em $Z_{M\epsilon}$. Assuma-se que para $f = s + it$, $f$ verifica:*

1. *$f$ é analítica em $\{z \in \mathbb{C} : |\Im m(z)| < s_0\}$ para algum $s_0 > 0$,*

2. *Se $|t| < s_0$, $|f(z)| \leq h_0(t)$ e $|f'(z)| \leq h_1(t)$, onde $h_0$ e $h_1$ são funções que verificam $\lim_{|t|\to\infty} h_0(t) = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)dt$ é convergente.*

*Então, a transformada de Fourier da função $f$ é funcional linear contínua em $P$, e é uma extensão de $w$.*

**Observação**: No caso dos polinómios de Bessel, cujos momentos são

$$c_n = \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!},$$

e verificam a condição de limitação $|c_n| < M^n n!$, não foi possível aos autores a obtenção de uma função peso utilizando a inversa da Transformada de Fourier.

Em 1989, Duran [16] deu uma resposta ao problema, definiu uma função geradora dos momentos de Bessel. Mostrou que o problema de momentos de Bessel é indeterminado.

Littlejohn [28] obteve também uma solução para o problema de momentos de Bessel, mas utilizando resultados de equações diferenciais.

### 4.4.3 A classe de Blumenthal-Nevai

Consideremos a sucessão de polinómios ortonormais reais definidos por

$$xp_n = a_n p_{n+1} + b_n p_n + a_{n-1} p_{n-1}$$

$$p_{-1}(x) = 0,\ p_0(x) = 1$$

onde $a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$

Se as sucessões $(a_n)$ e $(b_n)$ verificarem

$$\lim a_n = \frac{a}{2},\ \lim_n b_n = b,$$

para cada valor de $a$ e $b$ é definida uma classe de medidas. Tal classe foi estudada em 1898 por Blumental Nevai e é importante na Teoria dos Polinómios Ortogonais, pois permite estudar comportamentos assimptóticos das sucessões $\dfrac{p_{n-1}(z)}{p_n(z)}$, e tal pode ser interpretado como a convergência fraca de medidas discretas cujo suporte são os zeros dos polinómios ortogonais.

Antes de apresentar alguns resultados de convergência, vejamos a definição:

**Definição 4.4.2** Diz-se que *a medida de probabilidade* $\mu$ associada a uma sucessão de polinómios ortogonais reais *pertence à classe* $\mathcal{M}(a, b)$, $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$ se

$$\lim a_n = \frac{a}{2},\ lim_n b_n = b,$$

Vejamos, antes de mais, um resultado optimizado em relação aos apresentados em 4.3, que relaciona a medida de ortogonalidade com os zeros de $p_n(x)$ (cf. [48]),

**Teorema 4.4.6** *Suponhamos que $\mu \in \mathcal{M}(a, b)$. Então, para todo o $\epsilon > 0$, o suporte de $\mu$ tem, quando muito, $2m(\epsilon)$ pontos fora de $[b - a - \epsilon, b + a + \epsilon]$, onde $2m(\epsilon)$, é um número independente de $n$.*

Consideremos a fracção

$$\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)},$$

que tem a decomposição

$$\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,j}}{x - x_{n,j}},$$

onde $a_{n,j}$ é o resíduo de $\dfrac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}$ em $x_{n,j}$.

Do teorema seguinte tiramos conclusões acerca do comportamento de $p_{n-1}(x)/p_n(x)$ em $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu)$ [48].

**Teorema 4.4.7** *Seja $\mu$ uma medida pertencente à classe $\mathcal{M}(a, b)$, $a > 0$ e $K$ compacto em $\mathbb{C} \setminus supp(\mu)$. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = \frac{1}{x - b + \sqrt{(x-b)^2 - a^2}}$$

*uniformemente em $K$. Além disso, $supp(\mu) = [b - a, b + a] \cup E^*$, onde $E^*$ é um conjunto numerável com possível ponto de acumulação em $b \pm a$.*

Em $\mathrm{supp}(\mu)\backslash[b-a,b+a]$, temos o comportamento assimptótico

**Teorema 4.4.8** *Se $\mu \in \mathcal{M}(a,b)$, com $a>0$, e $x \in supp(\mu) \setminus [b-a,b+a]$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = \frac{x-b+\sqrt{(x-b)^2-a^2}}{a}$$

# Capítulo 5

# Polinómios Ortogonais e Teoria de Operadores

Neste capítulo veremos alguns tópicos acerca da relação entre Polinómios Ortogonais e Teoria de Operadores. Tal ligação resulta de podermos associar um operador de Jacobi definido no espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{C})$ a uma sucessão de polinómios ortogonais reais,

$$xp_n = a_n p_{n+1} + b_n p_n + a_{n-1} p_{n-1},$$

$$p_{-1}(x) = 0,\ p_1(x) = 1$$

onde $a_n > 0,\ \ b_n \in \mathbb{R}$, através de uma matriz tridiagonal e simétrica

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & ... & ... \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

As sucessões $(a_n),\ (b_n)$ são limitadas se e somente se $J$ é um operador limitado (ver 5.1).

Faremos uma breve incursão pela Teoria de Operadores de Jacobi. Começaremos por referir propriedades de operadores auto-adjuntos, tais como a representação através de um Integral de Stieltjes (cf. teorema 5.2.1), limitação e caracterização do espectro. São resultados que podem ser consultados em [27].

O teorema principal é o teorema 5.3.1, que estabelece a equivalência entre a unicidade de problema de momentos de Stieltjes e de Hamburguer e unicidade de extensões auto-adjuntas de $J$.

Terminaremos com o estudo dos resultados devidos a Weil e Nevanlinna (ver 5.4.), [2].

## 5.1 Operadores de Jacobi

O teorema de Favard permite estabelecer uma relação biunívoca entre medidas com suporte compacto em $\mathbb{R}$ e operadores de Jacobi (ou seja, operadores representados por matrizes tridiagonais simétricas) limitados (cf. [12]). De facto, dada uma medida $\mu$ com suporte compacto em $\mathbb{R}$, existe uma sucessão de polinómios reais, ortogonais em relação a $\mu$ e, a partir dos coeficientes da relação de recorrência a três termos

$$xp_n = a_n p_{n+1} + b_n p_n + a_{n-1} p_{n-1} \tag{5.1.1}$$

$$p_0(x) = 1,\ p_{-1}(x) = 0,\ a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$$

definimos a matriz

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \ldots & \ldots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{5.1.2}$$

onde $(a_n)$ e $(b_n)$ são sucessões limitadas.

Reciprocamente, se o operador representado pela matriz $J$ for limitado, a sucessão de polinómios definida por (5.1.1) é ortogonal em relação a uma medida com suporte compacto.

Antes de vermos como esta relação permite associar o problema de momentos a operadores de Jacobi em $\ell^2$, estabelecemos algumas notações assim como alguns resultados introdutórios.

Utilizaremos a notação $(T, \mathcal{D}(T))$ para indicar o operador $T$, definido no seu domínio $\mathcal{D}(T)$. Esta notação será omitida quando não existir ambiguidade em relação ao domínio considerado, caso em que indicaremos apenas $T$.

**Definição 5.1.1** Seja $(T, \mathcal{D}(T))$ um operador não-limitado definido num conjunto denso de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. O *adjunto de* $T$, que indicaremos por $T^*$, é o operador definido por

$$\mathcal{D}(T^*) = \{v \in \mathcal{H} : u \mapsto \langle Tu, v\rangle \quad \textit{é contínua em} \mathcal{D}(T)\}$$

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^* v\rangle,\ \forall u \in \mathcal{D}(T),\ \forall v \in \mathcal{D}(T^*).$$

**Definição 5.1.2** Um operador $T$ designa-se *auto-adjunto* se $T = T^*$.

Utilizaremos ainda o conceito de extensão.

**Definição 5.1.3** Diz-se que um operador $(T, \mathcal{D}(T))$ é uma extensão de $(S, \mathcal{D}(S))$, e indicaremos $S \subset T$, se

$$\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T), \text{ e } Sv = Tv, \ \forall v \in S.$$

No espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{C}) = \left\{ v = (v_n)_{n \geq 0} : v_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2 < \infty \right\}$, munido com o produto interno usual,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \overline{v}_k, \quad u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k e_k, \ v = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k e_k,$$

o operador $J$ é formalmente definido em relação à base $(e_k)$ por

$$Je_k = \begin{cases} a_k e_{k+1} + b_k e_k + a_{k-1} e_{k-1} & \text{se } k \geq 1 \\ a_0 e_1 + b_o e_o & \text{se } k = 0 \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Consideremos $J$ definido no espaço das combinações lineares finitas de $e_k$, ao qual chamaremos $\mathcal{D}$.

De (5.1.3) segue-se que $\langle Jv, w \rangle = \langle v, Jw \rangle, \ \forall v, w \in \mathcal{D}$, donde se conclui que $J$ é um operador simétrico.

Existe uma relação entre os coeficientes $(a_n), (b_n)$ e a limitação de $J$ (cf. [23]).

**Lema 5.1.1** *Se $J$ for operador limitado, as sucessões $(a_n)$ e $(b_n)$ são limitadas. Reciprocamente, se $(a_n)$ e $(b_n)$ forem limitadas e tal que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n| \leq M,$$

*então $J$ extende-se a um operador auto-adjunto tal que $\| J \| \leq 2M$.*

**Demonstração:** Seja

$$v = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k e_k \ \in \mathcal{D}, \text{ com } \| v \| = 1.$$

Se as sucessões $(a_n)$ e $(b_n)$ verificarem $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| = A$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n| = B$, com $A + B \leq M$, então

$$\| Jv \|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k v_{k-1} + b_k v_k + a_{k-1} v_{k+1}|^2$$
$$= |\cancel{a_k} v_{k-1} + b_k v_k + a_{k-1} v_{k+1}|^2$$
$$= a_k^2 |v_{k-1}|^2 + b_k^2 |v_k|^2 + a_{k-1}^2 |v_{k+1}|^2 + 2a_k b_k \Re(v_{k-1} \overline{v}_k) + 2a_k a_{k-1} \Re e(v_{k-1} \overline{v}_{k+1})$$
$$+ 2b_k a_k \Re e(v_{k+1} \overline{v}_k) \leq A^2(|v_{k-1}|^2 + |v_{k+1}|^2) + B^2 |v_k|^2 + 2A^2 |\Re e(v_{k-1} \overline{v}_{k+1})|$$
$$+ 2AB |\Re e(v_{k-1} \overline{v}_k)| + 2AB |\Re e(v_{k+1} \overline{v}_k)|$$

Das desigualdades

$$|\Re e(v_{k-1}\overline{v}_{k+1})| \leq |v_{k-1}\overline{v}_{k+1}| \leq \parallel \langle v, S^2 v\rangle \parallel,$$

com $S$ operador definido por $S(e_k) = e_{k+1}$, resulta que

$$\parallel Jv \parallel^2 \leq 2A^2 + B^2 + 2A^2 \parallel \langle S^2 v, v\rangle \parallel +4AB \parallel \langle Sv, v\rangle \parallel .$$

Mas $\parallel S \parallel = 1$, donde

$$\parallel Jv \parallel^2 \leq 4A^2 + B^2 + 4AB = (A+B)^2 + 2AB + 3A^2 \leq 6M^2.$$

Reciprocamente, se $J$ for limitado, temos $\langle Je_k, e_l\rangle \leq \parallel J \parallel$ . Fazendo $l = k+1$, e $l = k$, obtemos, respectivamente, $|a_k| \leq \parallel J \parallel$, $|b_k| \leq \parallel J \parallel$ □

## 5.2 Teorema Espectral

**Definição 5.2.1** Designa-se por *Família Espectral* uma família de projecções $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ definidas num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ que verificam:

**(i)** $E_\lambda \leq E_\mu \Rightarrow E_\lambda E\mu = E_\mu E\lambda = E\lambda,\ \lambda < \mu$;

**(ii)** $\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda x = 0,\ \forall x \in \mathcal{H}$;

**(iii)** $\lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda x = x,\ \forall x \in \mathcal{H}$;

**(iv)** $\lim_{\mu\to\lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x, \forall x \in \mathcal{H}$.

Ao longo deste capítulo, denotaremos por $(J, \mathcal{D})$ o operador definido em $\mathcal{D}$ por (5.1.3), representado pela matriz de Jacobi (5.1.2) no espaço de Hilbert $\ell^2$.

No caso de $J$ ser operador limitado, $J$ extende-se a um operador auto-adjunto limitado, por continuidade [27] (cf. pg. 100). Veremos que lhe está associada uma medida de probabilidade com suporte compacto e tal que

$$J = \int_{[a,b]} t dE(t).$$

Estamos também interessados nas extensões dos operadores não limitados.

No caso de $J$ não ser limitado, situação que ocorre quando pelo menos uma das sucessões $(a_n)$ ou $(b_n)$ não é limitada, o operador $(J, \mathcal{D})$ extende-se a $\ell^2$ formalmente da seguinte forma:

$$J^* v = (a_0 v_1 + b_0 v_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k v_{k+1} + b_k v_k + a_{k-1} v_{k-1}) e_k, \tag{5.2.4}$$

onde $v = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n e_n$.

Note-se que tal vector não é, em geral, um elemento de $\ell^2$. Mas as extensões auto-adjuntas de $J$ existem sempre, pois $J\overline{v} = \overline{Jv}$ (cf. [39]), onde $\overline{v}$ designa o conjugado de $v$.

**Proposição 5.2.1** [44] *O adjunto de* $(J, \mathcal{D})$ *é* $(J^*, \mathcal{D}^*)$*, onde* $J^*$ *é dado por (5.2.4) e*

$$\mathcal{D}^* = \{v \in \ell^2(\mathbb{C}) : J^* v \in \ell^2(\mathbb{C})\}.$$

No caso de existir apenas uma extensão auto-adjunta, verifica-se que $(J^*, \mathcal{D}^*)$ é auto-adjunto e $(J^*, D^*)$ é o fecho de $J$.

Em ambos os caso, o operador $J$ (aqui não distinguindo entre $J$ e a extensão, que indicaremos por $\tilde{J}$, ) é representável através de uma família espectral, por um integral de Stieltjes (cf. [27], pg. 505).

**Teorema 5.2.1** *Seja* $T : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ *um operador auto-adjunto definido no espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Então, existe uma única família espectral* $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *em relação à qual* $T$ *tem a representação*

$$T = \int_{\mathbb{R}} t dE(t),$$

*onde*

$$\langle Tu, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} t dE_{u,v}(t),\ u \in \mathcal{D},\ v \in \mathcal{H},\ \ E_{u,v}(t) = \langle E_t u, v\rangle.$$

*Além disso,* $E$ *é suportado no espectro de* $T$*, o qual verifica* $\sigma(T) \subseteq [-\parallel T \parallel, \parallel T \parallel]$ *se* $T$ *for limitado e* $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ *no caso não limitado.*

**Observação**: Para toda a função limitada de $J$, é válida a representação

$$f(J) = \int_{\mathrm{supp} f} f(t) dE(t),\ u \in \mathcal{D}(f(T)),\ v \in \mathcal{H},$$

onde $\mathcal{D}(f(T)) = \{u \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dE_{u,v}(t) < \infty\}$

Concluímos, deste modo, que existe sempre uma extensão auto-adjunta do operador de Jacobi $J$, e associada a cada extensão, uma medida espectral $d\mu$.

A fórmula de inversão de Stieltjes-Perron permite obter a medida espectral através do operador resolvente.

**Teorema 5.2.2** *Seja* $T$ *um operador definido no espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Se* $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$*, verifica-se a igualdade:*

$$E_{u,v}\left(]a, b[\right) = \lim_{\delta\searrow 0} \lim_{\epsilon\searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\delta}^{b-\delta} \langle R(x + i\epsilon)u, v > - < R(x - i\epsilon)u, v\rangle dx,\ \forall u \in \mathcal{D}(T),\ v \in \mathcal{H},$$

*onde* $R$ *é o operador resolvente.*

No caso de $J$ ser um operador limitado, podemos considerar a medida $\mu$ definida sobre subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}$,

$$\mu(A) = E_{e_0,e_0}(A) = \langle E(A)e_0, e_0\rangle.$$

$\mu$ é uma medida de probabilidade, que verifica $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq [-\parallel J \parallel, \parallel J \parallel]$.

De facto, uma vez que $E_\lambda$ é uma família espectral, e cada elemento $E$ desta família é uma projecção, temos $\mu(A) = \langle E(A)^2 e_0, e_0\rangle = \langle E(A)e_0, E(A)e_0\rangle$. Mas

$$\langle E(A)e_0, E(A)e_0\rangle \geq 0,$$

para todo o subconjunto $A$.

Por outro lado, $E(\mathbb{R}) = 1$, donde $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Das propriedades de $E_\lambda$ resulta que $\mu$ é não-decrescente.

O lema seguinte permite concluir que a medida espectral é completamente determinada por $\mu$ [12].

**Lema 5.2.1** *O conjunto $\{p(J)e_0 : p$ polinómio$\}$ é denso em $\ell^2(\mathbb{C})$.*

**Demonstração:** Utilizaremos indução no grau de $p$, sendo $p$ o monómio $x^k$.

Ora,

$$\begin{aligned} Je_0 &= e_0 \\ Je_0 &= a_0e_1 + b_0e_0 \\ J^2e_0 &= J(a_0e_1 + b_0e_0) = a_0a_1e_2 + u_1,\ u_1 \in < \{e_0, e_1\} > \end{aligned}$$

onde $< \{e_0, e_1\} >$ é o subespaço gerado pelos vectores $e_0$ e $e_1$.

Suponhamos que a propriedade é válida para $k$. Observemos que

$$J^k e_0 = a_0a_1...a_{k-1}e_k + u_k,$$

com $u_k\ in < \{e_0, ..., e_{k-1}\} >$

Para $k+1$ obtemos $J^{k+1}e_0 = a_0a_1...a_{k-2}Je_k + Ju_{k-1}$, $u_{k-1} \in < \{e_0, ..., e_k\} >$ . Logo,

$$\begin{aligned} J^{k+1}e_0 &= a_0a_1...a_{k-2}(a_ke_{k+1} + b_ke_{k+1} + a_{k-1}e_{k-1}) + Ju_{k-1} \\ &= a_0...a_ke_{k+1} + u_k, \end{aligned}$$

onde $u_k \in < \{e_0, ..., e_k\} >$ .

Consequentemente, $\{p(J)e_0 : p$ polinómio$\}$ é denso em $\ell^2(\mathbb{C})$. $\square$

Podemos agora verificar que a medida espectral é completamente determinada por $\mu$.

De facto, $\langle E(A)e_k, e_l\rangle = \langle E(A)p_k(J)e_0, p_l(J)e_o\rangle$ onde $p_k$ e $p_l$ são polinómios. Uma vez que $J$ é operador auto-adjunto,

$$\langle E(A)p_k(J)e_0, p_l(J)e_o\rangle = \langle p_k(J)p_l(J)E(A)e_o, e_0\rangle = \int_A p_k(x)p_l(x)d\mu(x).$$

Da densidade do conjunto $\{p(J)e_0 : p \text{ polinómio}\}$ resulta o requerido.

Em particular, para um elemento $z$ do conjunto resolvente, temos a igualdade

$$\langle e_0, \frac{1}{J-z}e_0\rangle = \int_{\mathrm{supp}\mu} \frac{d\mu(t)}{t-z}, z \notin \mathrm{supp}\mu$$

Consequentemente, após considerarmos os respectivos desenvolvimentos em série (cf. pg. 548 de [27] para o lado esquerdo da igualdade) e compararmos os respectivos coeficientes obtemos

$$\langle e_0, J^k e_0\rangle = \int t^k d\mu(t),\ k = 0, 1, 2....$$

## 5.3 Extensões de operadores de Jacobi

**Definição 5.3.1** Um operador simétrico densamente definido designa-se *essencialmente auto-adjunto* se tiver uma única extensão auto-adjunta.

**Observação**: Para que esta condição se verifique, basta garantir que o fecho desse operador seja auto-adjunto (proposição 5.2.1.).

O teorema seguinte estabelece uma relação entre extensões de operadores de Jacobi e Problemas de Momentos de Hamburguer e de Stieltjes.

**Teorema 5.3.1** [44]

**(i)** *O problema de momentos de Hamburguer é determinado se e somente se $J$ for essencialmente auto-adjunto.*

**(ii)** *O problema de momentos de Stieltjes é determinado se e somente se $J$ tiver uma única extensão auto-adjunta não negativa.*

Vejamos um exemplo, uma aplicação do teorema anterior.

Consideremos a medida definida por

$$d\mu(x) = C_{\alpha,\gamma}e^{-\gamma|x|^\alpha},\ \gamma,\ C_{\alpha,\gamma} \text{ constantes positivas,}$$

já referida em 3.1.

A relação entre esta medida e o e operador de Jacobi $J$ é dada pelo teorema seguinte.

**Teorema 5.3.2** [12] *Seja $d\mu$ a medida definida por*

$$d\mu(x) = C_{\alpha,\gamma} e^{-\gamma|x|^\alpha}, \ \alpha \geq 1, \gamma > 0, \ \textit{com } C_{\alpha,\gamma} \textit{ constante.}$$

*O operador de Jacobi $J$ associado a esta medida é essencialmente auto-adjunto em $\ell^2$, e $d\mu(x)$ é a medida espectral da extensão auto-adjunta de $J$, $\tilde{J}$.*

**Demonstração:** Daremos apenas uma ideia da demonstração. Os detalhes podem ser consultados em [12], pg. 34..

Seja $\hat{J}$ uma extensão auto-adjunta de $J$, sendo $J$ o operador definido em (5.1.3) no espaço $\mathcal{D} = \{$combinações lineares finitas de $e_k\}$.

Para demonstrar este resultado é suficiente provar que para todo o real $x$ se verifica a igualdade

$$\langle e_0, e^{i\hat{J}x}\rangle = \int e^{ixs} d\mu(s) \tag{5.3.5}$$

Observámos já que o adjunto (proposição 5.2.1) é definido por (5.2.4), e

$$\mathcal{D}(J^*) = \{v \in \ell^2(\mathbb{C}) : J^* v \in \ell^2(\mathbb{C})\}.$$

Logo, se $\hat{J}$ é uma extensão auto-adjunta de J, teremos $\hat{J} = \hat{J}^*$, e $J^*$ é uma extensão de $\hat{J}^*$. Consequentemente, $\hat{J}$ é uma restrição de $J^*$ a algum domínio $\mathcal{D}(\hat{J}) \subset \mathcal{D}(J^*)$.

Mas $e_0 \in \mathcal{D}(J) \subset \mathcal{D}(\hat{J})$, donde

$$\frac{d}{dx} e^{i\hat{J}x} e_0 = i e^{i\hat{J}x} \hat{J} e_0 = i e^{i\hat{J}x} J e_0$$

Uma vez que $e_0 \in \mathcal{D}(J) \subset \mathcal{D}(\hat{J})$, após derivarmos sucessivamente a expressão anterior, concluir-se-à que existe $\dfrac{d^m}{dx^m} e^{i\hat{J}x} e_0, \ \forall m \in \mathbb{N}$.

Se derivarmos ambos os membros de (5.3.5) obtemos a igualdade

$$\langle J^k e_0, e^{i\hat{J}x} J^l e_0\rangle = \int e^{ixs} s^{k+l} d\mu(s), \ k, l \in \mathbb{N} \tag{5.3.6}$$

Uma vez que o conjunto $\{J^k e_0\}$ é total em $\ell^2$ (cf. lema 5.2.1), o operador $e^{i\hat{J}x}$ é univocamente determinado por (5.3.6). Logo, o operador $\hat{J}$ é único, e teremos $\hat{J} = \tilde{J}$. □

Procuremos agora condições necessárias e suficientes para a unicidade das extensões auto-adjuntas do operador $J$.

A existência de tais extensões pode ser averiguada através do estudo do subespaço

$$N_z = \{v \in \mathcal{D}(J^*) : J^* v = zv\}$$

Uma vez que $\dim N_z$ é constante para $\Im m(z) > 0$ (cf. [14]) e para $\Im m(z) < 0$, defina-se

$$n_+ = \dim N_i,\ n_- = \dim N_{-i}$$

Ao par $(n_-, n_+)$ chamamos *defeito* associado ao operador $J$.

Do teorema seguinte [14], concluímos que um operador $T$ tem extensões auto-adjuntas se e somente se $n_- = n_+$.

**Proposição 5.3.1** *Seja $(T, \mathcal{D}(T))$ operador simétrico densamente definido. Então:*

**(i)** $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T^{**}) + N_i + N_{-i}$, *como uma soma directa ortogonal em relação à norma do gráfico para* $T^*$, $\langle u, v\rangle_{T^*} = \langle u, v\rangle + \langle T^* u, T * v\rangle$ *e* $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T^{**}) + N_z + N_{\overline{z}}, z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

**(ii)** *Seja $(S, \mathcal{D}(S))$ uma extensão auto-adjunta de $(T, \mathcal{D}(T))$, e tal que $T^{**} \subset S \subset T^*$. Então, existe uma bijecção isométrica $U : N_i \mapsto N_{-i}$ tal que*

$$\mathcal{D}(S) = \{u + v + Uv : u \in \mathcal{D}(T^{**}), v \in N_i\},\ Sw = T^* w,$$

*e toda a extensão auto-adjunta de $T$ se define deste modo.*

No caso de $n_+ = n_- = 0$, vemos que $J$ é essencialmente auto-adjunto.

Os espaços $N_z$ são ou zero-dimensionais ou uni-dimensionais, uma vez que as soluções da equação $J^* v = zv$, equivalentemente, soluções da relação de recorrência

$$zv_n = a_n v_{n+1} + b_n v_n + a_{n-1} v_{n-1},$$

com $v = (v_0, v_1, ..., v_n, ...)$, $v_{-1} = 0$, são proporcionais à sucessão de polinómios ortogonais $\{p_n\}$, associados a $J$, que verificam as condições iniciais $p_0(x) = 1,\ p_{-1}(x) = 0$.

Se existisse uma solução com $v_0 = 0$, tal solução seria nula, pois

$$v_{n+1} = a_n^{-1}[(-b_n + z)v_n - a_{n-1} v_{n-1}],\ n \geq 1$$

e

$$a_0^{-1}[(-b_0 + z)v_0] \text{ se } n = 0.$$

Por indução, ter-se-ia que $v \equiv 0$.

Além disso, observe-se que se

$$\pi(z_0) = (p_0(z_0), p_1(z_0), ..., p_n(z_0), ...) \in \ell^2,$$

$z_0$ é, formalmente, valor próprio do operador $J$. Mas $\pi \notin \mathcal{D}(J)$ uma vez que $\pi$ nunca é uma sucessão finita (o que decorre do interlaçamento das raízes de $p_n$). Se $\pi \in \mathcal{D}(J^*)$, esta relação formal corresponde a um valor próprio de $J^*$.

No caso de $n_+ = n_- = 1$, existe uma família de extensões auto-adjuntas de $J$.

Uma vez que o único elemento possível em $N_z$ é $\{p_k(z)\}$, obtemos o corolário da proposição anterior.

**Corolário 5.3.2.1** *O operador* $(J, \mathcal{D})$ *é essencialmente auto-adjunto se e somente se* $\sum |p_k(z)|^2 = \infty \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Na secção seguinte veremos que para que se verifique a segunda condição é suficiente que exista $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k(z_0)|^2 = \infty$.

Vejamos ainda o resultados seguinte, o qual nos permite obter conclusões acerca da unicidade das extensões auto-adjuntas do operador de Jacobi.

**Proposição 5.3.2** **(i)** *Se* $\sum 1/a_k = \infty$, *o operador* $J$ *é essencialmente auto-adjunto.*

**(ii)** *Se* $a_k + b_k + a_{k-1} \leq M < \infty \forall\, k \in \mathbb{N}$, ou se $a_k - b_k + a_{k-1} \leq M < \infty \forall\, k \in \mathbb{N}$, *então* $J$ *é essencialmente auto-adjunto.*

## 5.4 Aplicação à Teoria dos Polinómios Ortogonais

Consideremos a sucessão $\{P_n\}$, de polinómios ortogonais em relação a uma medida $\mu$, e seja $\{Q_n\}$ a sucessão de polinómios de segunda espécie,

$$Q_n(z) = \int \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} d\mu(x).$$

Consideremos a transformada de Stieltjes-Markov de $\mu$ definida por $\hat{\mu} = \displaystyle\int \frac{d\mu(x)}{x - z}$. As funções

$$R_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{x - z} d\mu(x), \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{5.4.7}$$

analíticas em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e designadas de segunda espécie, verificam

$$R_n(z) = P_n(z)\hat{\mu}(z) + Q_n(z) \tag{5.4.8}$$

De facto,

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \int \frac{P_n(x)}{x - z} d\mu(x) = \int \frac{P_n(x) - P_n(z) + P_n(z)}{x - z} d\mu(x) \\ &= \int \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} d\mu(x) + P_n(z)\hat{\mu}(z) \\ &= Q_n(z) + P_n(z)\hat{\mu}(z). \end{aligned}$$

Em [35] encontramos vários lemas em relação a estas funções, dos quais referimos

**Lema 5.4.1** *Seja* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *Então, as séries* $\sum |Q_n(z)|^2$ *e* $\sum |P_n(z)|^2$ *têm a mesma natureza.*

**Demonstração:** De (5.4.8) conclui-se que as sucessões $\{P_n\}$ e $\{Q_n\}$ são combinação linear de $\{R_n\}$.

Mostremos que

$$\sum |R_k(z)|^2 < \infty, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Consideremos o espaço $L^2_\mu$. Uma vez que a sucessão $\{P_n\}$ é sucessão de polinómios ortogonais neste espaço (ainda que não necessariamente total), de (5.4.7) resulta que $R_n$ é o coeficiente de Fourier da função $1/z - x$, $x \in \mathbb{R}$. Da desigualdade de Bessel conclui-se que

$$\sum_n |R_n(z)|^2 \leq \int \frac{d\mu(x)}{|x-z|^2} < \infty \tag{5.4.9}$$

Uma vez que $(R_n)_n$ está no espaço $\ell^2(\mathbb{C})$, segue-se o resultado requerido. $\square$

**Lema 5.4.2** *Se a série* $\sum |P_n(z)|^2$ *convergir para algum* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *então converge para todo o* $z \in \mathbb{C}$.

**Definição 5.4.1** A quantidade $r(z) = \dfrac{1}{2|\Im m(z)|}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |P_k(z)|^2\right)^{-1}$ é chamada *raio de Weil (no ponto z).*

Note-se que $r(z) = 0$ ou $r(z) < 0$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Uma vez que

$$\sum_n |R_n(z)|^2 \leq \int \frac{d\mu(x)}{|x-z|^2},$$

ou seja,

$$\sum_n |\hat{\mu} P_n(z) + Q_n(z)|^2 \leq \int \frac{d\mu(x)}{|x-z|^2} = \frac{\Im m(\hat{\mu})}{\Im m(z)},$$

concluímos que para cada $z$, $\hat{\mu}(z)$ está no conjunto

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : \sum_{k=0}^{+\infty} |wP_n(z) + Q_n(z)|^2| \leq \frac{w - \overline{w}}{z - \overline{z}} \right\}$$

Mas, para cada $z$ fixo, a equação

$$\frac{w - \overline{w}}{z - \overline{z}} = \sum_{k=0}^{n-1} |wP_k(z) + Q_k(z)|^2$$

descreve uma circunferência, que designaremos por $K_n$.

Uma vez que $K_n(z) \subseteq K_{n-1}(z)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, concluímos que a sucessão de circunferências $(K_n)$ ou tem um ponto limite quando $n \to \infty$, ou existe uma circunferência limite, de raio $r(z)$, a qual designaremos por $K_\infty$,

$$K_\infty(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} |wP_n(z) + Q_n(z)|^2.$$

**Definição 5.4.2** Uma matriz de Jacobi designa-se *matriz do tipo C* se estiver no caso de uma circunferência como limite, e designa-se *matriz do tipo D* se o limite for um ponto.

Vejamos agora o resultado que relaciona estes conceitos e a unicidade do problema de momentos de Hamburguer.

**Teorema 5.4.1 (Akhieser)** *A matriz de Jacobi $J$ é do tipo $D$ se e somente se o problema de momentos de Hamburguer for determinado.*

Observe-se que no caso de $J$ não ser limitado, nem toda a solução do problema de momentos é solução resultante de uma extensão auto-adjunta de $J$. Dos teoremas 5.3.1 e 5.4.1 conlcui-se que uma solução do problema de momentos é medida espectral de alguma extensão auto-adjunta associada ao operador $J$ se e somente se $\hat{\mu}$ estiver na circunferência $K_\infty$ para algum, e consequentemente para todo, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Observe-se que no caso de $J$ não ser limitado, nem toda a solução do problema de momentos é solução resultante de uma extensão auto-adjunta de $J$ ( cf. [2]), como veremos a partir do próximo exemplo.

Podemos agora indicar as condições necessárias e suficientes para a (não) unicidade do problema de momentos de Hamburguer, relacionadas com a sucessão de polinómios ortogonais reais $\{P_n\}$,

**Teorema 5.4.2** [44] *São equivalentes:*

**(a)** *O problema de momentos de Hamburguer é indeterminado;*

**(b)** $P_n(z_0) \in \ell^2(\mathbb{C})$ *para algum* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*;*

**(c)** $Q_n(z_0) \in \ell^2(\mathbb{C})$ *para algum* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*;*

**(d)** $\forall z \in \mathbb{C},\ \ P_n(z) \in \ell^2$ *e* $Q_n(z) \in \ell^2(\mathbb{C})$*;*

**(e)** *Para algum* $x_0 \in \mathbb{R}$*, ambos* $P_n(x_0)$ *e* $\dfrac{dP_n}{dx}(x_0) \in \ell^2(\mathbb{C})$*;*

**(f)** *Para algum* $x_0 \in \mathbb{R}$*, ambos* $Q_n(x_0)$ *e* $\dfrac{dQ_n}{dx}(x_0) \in \ell^2(\mathbb{C})$*;*

**(g)** *A matriz de Jacobi associada é do tipo $C$.*

**Observação**: Resta demonstrar a equivalência entre $(a)$, $(f)$ e $(e)$. Esta equivalência foi enunciada e demonstrada em [44].

Relembremos que a igualdade em (5.4.9), designada por *Igualdade de Parseval*, ocorre se e somente se o conjunto $\{P_n(z)\}$ for um conjunto total em $L^2(\mu)$ (cf. [27]), ou seja, se o subespaço gerado por $\{P_n(z)\}$ for denso em $L^2(\mu)$. Logo, $\{P_n(z)\}$ é um conjunto total em $L^2(\mu)$ se e somente se $\hat{\mu}(z)$ pertencer à circunferência $K_\infty$.

Consequentemente, obtemos o resultado seguinte,

**Proposição 5.4.1** *Se o problema de momentos for determinado e tiver solução $\mu$, então o conjunto dos polinómios é total em $L^2(\mu)$.*

**Observação**: Utilizando o resultado enunciado, podemos justificar que o problema de momentos de Hambruguer associado à sucessão $c_n = \sqrt{\pi}\exp((n+1)^2/4)$ é indeterminado.

Basta ter em atenção a igualdade já referida em 2.1. De facto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \exp(-\ln^2|x|)\sin(2\pi\ln|x|)dx = 0, \ k = 0, 1, 2, ....$$

Logo, qualquer função que possa ser aproximada por polinómios em $L^2(\mu)$ é ortogonal à função $\sin(2\pi\ln|x|)$. Uma vez que $\sin(2\pi\ln|x|) \in L^2(\mu)$, e é ortogonal a todo o elemento do subespaço gerado por $\{P_n\}$, a sucessão de polinómios ortogonais associada à função peso $d\mu(x) = \exp(-\ln^2|x|)dx$ não é um conjunto total em $L^2(\mu)$.

# Bibliografia


[1] L. Ahlfors, *Complex analysis*, McGraw-Hill International Editions, New York, 1978 (terceira edição).

[2] N.I. Akhiezer, *The classical moment problem and some realted questions in analysis*, Hafner, New York, 1965.

[3] R.P. Boas, *The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation*, Bull. of the Amer. Math. Soc. 45, 1939, 399-404.

[4] E. Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*, Gauthier-Villars, Paris, 1917.

[5] A. Branquinho, *Polinómios Ortogonais e funcionais de momentos: Problemas inversos*, Tese de Mestrado, Univ. Coimbra, Departamento de Matemática, Coimbra, 1993.

[6] A. Branquinho, *Problemas inversos na teoria dos polinómios ortogonais*, Tese de Doutoramento, Univ. Coimbra, Departamento de Matemática, Coimbra, 1996.

[7] C. Brezinski, *A direct proof of the Christoffel-Darboux identity and its equivalence to the recurrence relationship*, Journal of Computational and Applied Mathematics 32 (1-2), 1990, 17-25.

[8] T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[9] H. Cartan, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Editions Scientifiques Hermann, Paris, 1963.

[10] P. Chebyschev, *Sur les valeurs limites des intégrales*, Journal de Mathematiques pures et apliquées (2)19, 1874, 157-160.

[11] T.S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[12] P. Deift, *Orthogoanal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Aproach*, Courant Lectures notes in mathematics, 1999.

[13] A. Denjoy, *Introduction a la theorie das fonctions de variables réelles*, Hermann Editeurs, Paris, 1937.

[14] N. Dunford, T. Schwartz, *Linear Operators II: Spectral theory*, Interscience, 1963.

[15] A. Duran, *The Stieltjes moment problem for rapidly decreasing functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 107, 1989, 731-741.

[16] A. Duran, *Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials*, Rocky Mountain J. Math, vol. 23, 1993, 87-104.

[17] J. Grommer, *Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen*, Journal fur die Reine und Angewande in Matematik 144, 114-166, 1914.

[18] H. Hamburguer, *Beitrage sur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbruche*, Mathematische Zeitschrift 4, 1919, 186-222.

[19] G.H. Hardy, *On Stieltjes "problèmes de moments"*, Messenger of Math. 46(a), 1917, 175-182.

[20] F. Hausdorff, *Summationsmethoden und Momentfolgen*, Mathematische Zeitschrift 9, 1921, 74-109, 280-299.

[21] D. Jackson, *Fourier Series and orthogonal polynomials*, The Carus Mathematical Monographs, The Mathematical Association of America, 1941.

[22] T.H. Kjeldsen, *The early history of the moment problem*, Historia Math.20, 1993, 19-44.

[23] E. Koelink, *Spectral theory and special functions*, Apontamentos do curso "Orthogonal polynomials and special functions", Laredo, 2000.

[24] A.M. Krall, *Orthogonal Polynomials through moment generating functionals*, Siam J. Math. Anal. 9, 1978, 600-603.

[25] A.M. Krall, R.D. Morton, *Distributional weight functions for orthogonal polynomials*, Siam J. Math.Anal.9, 1978, 604-642.

[26] M.G. Krein, *Fundamental propositions of the representation theory of Hermitian operators with deficiency index (m,m)*, Ukrain. Mat. Zh. 1, (1949), n. 2, 3-66; Amer. Math. Soc. Transl. (2) 97 (1971), 75-143.

[27] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, 1989.

[28] L.L. Littlejohn, *A solution to the Bessel moment problem*, (manuscrito).

[29] G.L. López, *Convergence of Padé Approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials*, Translations of the Amer. Math. Society, vol. 64, 1989, 207-227.

[30] S. Mandelbrojt, *Series de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*, Gauthier--Villars, Paris, 1935.

[31] S. Mandelbrojt, H. Cartan, *Solution du problème d'équivalence de classes de fonctions indèfinement dèrivables*, Acta Mathematica 72, 1940.

[32] P. Montel, *Leçons sur les Familles Normales de fonctions analytilques et leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

[33] P. Montel, *Leçons sur les récurrences et leurs applications*, Gauthier-Villars. Paris, 1957.

[34] R. Nevanlinna, *Asymptotische Entwicklungen beschrankkter Funktionene und das Stieltjessche Momentproblem*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae 18,5, 1-53, 1922.

[35] E.M. Nikishin, V.N. Sorovkin, *Rational Approximation and orthogonality*, Translations of the Amer. Math. Soc., vol 92, Providence, Rhode Island, 1991.

[36] A. Ostrowski, *Uber quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelungen*, Acta Mathematica, 53, 1929, 181-266.

[37] F. Pollaczek, *Sur la generalization des polynomes de Jacobi*, vol. 131, Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[38] G. Polya, G. Hardy, J. Littlewood, *Inequalities*, Cambridge at the University Press, 1934.

[39] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern Mathematical Physics*, Academic Press, New York, 1975.

[40] M. Riesz, *Sur le problème de moments*, Troisième note. Arkiv fur Matematik, Astronomi och Fysik 17, 1923, 1-52.

[41] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mcgraw-Hill International Edition (segunda edição), 1974.

[42] E.B. Saff, *Orthogonal polynomials from a complex perspective*, In orthogonal polynomials: theory and practic (P.Nevai ed.), Nato-Asi Series C, vol. 294, Kluwer, Dordrecht, 1990, 363-393.

[43] J.A. Shohat, J.D. Tamarkin, *The problem of moments*, Amer. Math. Soc. New York, 1943.

[44] B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, Adv. Math. 137, 1998, 82-203.

[45] T. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues*, Annal. de la Faculté de Sciences de Toulouse,(1) 8 1894, 1-122.

[46] M. Stone, *Linear transformations in Hilbert spaces and their applications to Analysis*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol.15, Providence, Rhode Island, 1932.

[47] G. Szego, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 23. Providence. Rhode Island 1975. (Quarta edição)

[48] W. Van Assche, *Analytic aspects of Orthogonal polynomials*, Tech. report, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 1993.

[49] E. Van Vleck, *On an extension of the 1894 memoir of Stieltjes*, Transactions of the American Mathematical Society 4, 297-332.

[50] G.N. Watson, *A treatise on theory of Bessel funcions*, MacMillan, 1922.

[51] B. Wendroff, *On orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 12, 1961, 554-555.