Mário António Rodrigues Grande Abrantes

Polinómios Ortogonais de Uma e Duas Variáveis. Funções Geradoras

Universidade de Coimbra

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática

2001

Dissertação submetida para satisfação parcial dos requisitos do programa de Mestrado em Matemática Pura, na Universidade de Coimbra

ÍNDICE

Introdução

Motivação

Esta dissertação foi escrita em 2000/2001, por proposta e sob a orientação do Professor Amílcar José Pinto Lopes Branquinho, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

Pretende-se com este trabalho, abrir um caminho para a caracterização de famílias de polinómios ortogonais em duas variáveis que verifiquem uma fórmula de *Rodrigues*, (5.3.4), pg.76.

Enquadramento Histórico

A teoria geral de polinómios em duas variáveis, vem sendo estabelecida desde há mais de um século.

- Já em 1865, *C. Hermite* considerou dois pares de sequências de polinómios biortogonais, em duas variáveis, quando o domínio de ortogonalidade é o plano ou o disco unitário.

- Em 1881, *P. Appell* introduz polinómios em duas variáveis, biortogonais sobre um triângulo.

- Também em 1881, *G. Orlov* considera polinómios ortogonais de duas variáveis, determinados por uma fórmula análoga à fórmula de *Rodrigues*.

- Em 1937, *D. Jackson*, [14], considera algumas propriedades simples de polinómios ortogonais sobre um domínio abstracto, em relação a uma função peso w arbitrária, sendo a relação de ortogonalidade estabelecida por meio de uma funcional do tipo

$$\langle w, f \rangle = \iint_D f w(x,y) dx dy \ .$$

Se a funcional é definida positiva, então uma sequência de polinómios em duas variáveis pode sempre ser ortogonalizada, usando o método de Gram-Schmidt. Para isso, a sequência dupla de polinómios deve ser ordenada sob a forma de uma sequência simples. Diferentes ordenamentos originam diferentes sequências de polinómios ortogonais. Isto constitui um obstáculo ao estudo de polinómios ortogonais de duas e mais variáveis.

. Entretanto, em 1967, *Krall e Sheffer*, [20], desenvolvem os resultados de *Jackson*. Estes autores trabalham com os espaços vectoriais associados a uma sequência polinomial de duas variáveis, o que lhes permite de certa forma contornar o problema acima referido, e apresentam uma definição de ortogonalidade fraca. Com base nessa definição, classificam as soluções de uma equação diferencial de segunda ordem de variáveis parciais, obtendo assim um certo tipo de analogia, via equação diferencial, com as famílias clássicas de uma variável. No capítulo 4 deste texto, fazemos uma abordagem a este trabalho de *Krall* e *Sheffer*.

. Por outro processo, *G. Engelis* obtém resultados semelhantes aos de *Krall* e *Sheffer*, em 1974. Neste trabalho, *Engelis* obtém fórmulas de *Rodrigues*, para alguns casos de polinómios ortogonais em duas variáveis.

. Ainda em 1974, *T. Koornwinder* constrói classes de polinómios ortogonais de duas variáveis, que constituem análogos dos polinómios de *Chebyshev* de primeira e segunda ordens, bem como dos polinómios de *Jacobi*.

. Em 1982, *M. Kowalski*, fazendo uso da notação vectorial de *Krall* e *Sheffer*, demonstra um análogo do teorema de *Favard*, do qual apresentamos no capítulo

4 uma versão simplificada, devida a *Y. Xu*, [37].

Estrutura do Trabalho

Começamos por abordar no capítulo 1, algumas propriedades estruturais das sequências de polinómios, $\{P_n\}$, que decorrem da ortogonalidade relativa a uma função peso, w:
(i) unicidade dos P_n, $n = 0, 1, \cdots$, a menos de um factor constante para cada P_n ;
(ii) existência de uma relação de recorrência a três termos que gera os polinómios da sequência, que é única a menos das condições iniciais.
Damos condições necessárias e suficientes para que se verifique o recíproco de (ii) (teorema de *Favard*, 1.3.2, pg.7), isto é, para que a uma sequência de polinómios que verifica uma relação de recorrência a três termos, corresponda uma e uma só funcional de momentos, com a ortogonalidade garantida por uma condição sobre o parâmetro λ_n da relação (1.3.1), pg.6.
Damos condições necessárias e suficientes para que a funcional de momentos seja definida-positiva, podendo neste caso definir-se à custa de uma medida de *Borel* positiva. Daí que a sequência polinomial possa ser ortonormalizada usando o método de *Gram-Schmidt*.
Vemos também quando é que, partindo de uma sequência de momentos, podemos construir uma sequência de polinómios ortogonais. Uma condição suficiente para que o suporte da funcional associada a esta sucessão de momentos esteja em $\mathbb{R}$, é-nos dada pelos teoremas de *Boas* e de *Durán*, pg.9. Essa sequência, única a menos de factor constante para cada polinómio, aparece na demonstração construtiva do teorema 1.2.4, pg.4.
Apresentamos a definição de função geradora de uma sequência polinomial. A partir de uma função geradora, podem obter-se propriedades algébricas e analíticas, que nos permitirão caracterizar certas famílias de polinómios ortogonais. Podem também estudar-se quanto à convergência desenvolvimentos em série em termos de polinómios de uma família ortogonal.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo da teoria dos polinómios ortogonais clássicos. Usamos o Operador de Bochner para definir as famílias clássicas. Enunciamos e demonstramos um teorema de *Vicente Gonçalves*, 2.2.1, pg.13, que estabelece condições para a unicidade de soluções polinomiais da equação diferencial de Bochner, e determina expressões para os coeficientes das relações de recorrência a três termos correspondentes. Como consequência de mais dois teoremas de *Vicente Gonçalves*, 2.3.2, pg.23 e 2.3.3, 28, concluimos que as famílias de polinómios ortogonais clássicos, são as soluções polinomiais ortogonais da equação de Bochner, e são essencialmente as únicas sequências polinomiais ortogonais às quais corresponde uma fórmula de *Rodrigues*. Usamos este último facto para definir famílias clássicas através de uma fórmula de *Rodrigues*.
No capítulo 3, secção 3.4, usamos um teorema de *Lagrange* para definir funções geradoras para famílias de polinómios, das quais se conheça uma fórmula de *Rodrigues*. A partir da fórmula de *Rodrigues*, é possivel obter a equação diferencial de *Bochner*, a relação de recorrência a três termos e a função geradora, associadas a estas famílias. Na secção 3.5, vemos como se pode, a partir da função geradora, obter a relação de recorrência a três termos. Na secção 3.6, apresentamos exemplos de obtenção da relação de recorrência a três termos a partir da fórmula de *Rodrigues*, para os polinómios de *Hermite* e *Laguerre*.

O desenvolvimento de uma teoria de polinómios ortogonais de duas variáveis, leva-nos a estender, por analogia, a ideia de famílias clássicas. No capítulo 4, exploramos a este respeito o trabalho de *Krall* e *Sheffer*, [20]. Estes autores adoptam uma definição fraca de ortogonalidade (cf. a definição 4.2.7, pg.50), adaptada à estrutura de espaço vectorial, que resulta do facto de uma sequência polinomial, $\{P_n\}$, com $P_n = [p_{n0}, p_{n-1,1}, \cdots, p_{0n}]$, se poder representar, para cada P_n, por meio de uma base vectorial qualquer, associada ao espaço V_n, $(n+1)$-dimensional, gerado por $\{p_{n0}, p_{n-1,1}, \cdots, p_{0n}\}$. Isto quer dizer que cada sequência polinomial, $\{P_n\}$, tem associada uma sequência de espaços $\{V_n\}$. A ortogonalidade verifica-se entre cada par V_i , V_j, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \cdots, n, \cdots$, isto é, $\langle w, v_k^i v_s^j \rangle = 0$, $k = 0, \cdots, i$, $s = 0, \cdots, j$, com $v_k^i \in V_i$ e $v_s^j \in V_j$. A unicidade de uma sequência polinomial ortogonal, no caso de uma variável, tem como análoga a unicidade dos espaços vectoriais, $\{V_n\}$, associada a uma sequência $\{P_n\}$, no caso de duas variáveis. Usando notação vectorial apresentamos na secção 4.3, uma relação de recorrência a três termos e um análogo fraco do teorema de *Favard*, (Y. Xu, [37]). *Krall* e *Sheffer*, classificam as soluções polinomiais de uma equação diferencial de segunda ordem às derivadas parciais, com coeficientes polinomiais, admissível (cf. a definição 4.4.1, pg.59, e a secção 4.6). Temos assim o Operador de *Krall* e *Sheffer*, análogo ao Operador de *Bochner* do capítulo 2. Essa classificação, é baseada em resultados obtidos trabalhando com certos parâmetros invariantes para transformações lineares não singulares, nas variáveis (cf. o teorema 4.5.2, pg.66). Cada família de polinómios considerada é ortogonal relativamente a uma funcional canónica σ, tal que $\langle \sigma, 1 \rangle = 1$ e $\langle \sigma, P_n \rangle = 0$, $n = 0, 1, \cdots$, sendo $\langle \sigma, P_n \rangle$ o vector coluna $[\langle \sigma, p_{n-j,j} \rangle]_{j=0}^{n}$. As nove classes de famílias de polinómios obtidas por *Krall* e *Sheffer*, são de certa forma um análogo das famílias clássicas no caso dos polinómios ortogonais de uma variável.

No capítulo 5, expomos os resultados de *Kim et al.*, [19], que permitem obter fórmulas do tipo *Rodrigues* para as famílias de polinómios classificadas por *Krall* e *Sheffer*, das quais se conhece a função peso. Apresenta-se uma extensão da fórmula de *Lagrange* ao caso bidimensional, que se utiliza para obter a função geradora para os polinómios circulares.

A obtenção para o caso de duas variáveis, de famílias análogas às clássicas, não se esgota na abordagem de *Krall* e *Sheffer*. De facto, abre-se a possibilidade de estabelecer essa analogia trabalhando com fórmulas de *Rodrigues*, de um modo independente da equação diferencial. Pretende-se responder à seguinte pergunta: quais são as famílias de polinómios ortogonais de duas variáveis, $\{P_n\}$,

$P_n = [p_{n0}, p_{n-1,1}, \cdots, p_{0n}]$, às quais corresponde uma fórmula de *Rodrigues*, isto é

$$\psi_{mn} w = \partial_x^m \partial_y^n [p^m q^n w],$$

sendo $\psi_{mn},\ p, q$ polinómios tais que $grau(\psi_{mn}) = m + n$, $grau(p), grau(q) \leq 2$. Note-se que neste caso, os polinómios são ortogonais relativamente ao peso w . Fazendo na equação anterior $m = n = 1$, obtemos um sistema de equações que se pode tomar, formalmente, como um análogo de uma equação de *Pearson* em uma variável

$$\psi_{10} w = \partial_x [pw]$$
$$\psi_{01} w = \partial_y [qw] \ .$$

A resposta a esta pergunta, está por nós a ser trabalhada segundo o seguinte plano:
1. Resolver o sistema de forma a obter todas as funções peso possíveis, a menos de uma mudança de variáveis linear e não singular. Para tal, substituem-se p e q por polinómios de grau não superior a 2.
2. Verificar quais os casos a que corresponde uma fórmula de *Rodrigues*, isto é, uma fórmula do tipo (5.3.4), pg.76, sendo ψ_{mn} um polinómio de grau $m + n$.

Notação

(i) Nas ocorrências mais importantes de polinómios ortogonais de uma variável, a funcional de momentos é definida da forma

$$\langle w, f \rangle = \int_a^b f(x) w(x) dx,$$

sendo w uma função peso. Uma funcional de momentos tem sempre associada a si uma função peso, pelo que neste texto designamos por w a própria funcional, para simplificar a notação. Procedimento análogo se adopta para o caso de uma funcional em duas variáveis.

(ii) Escrevemos também $\{(*)\}$ significando $\{(*)\}_{n=0}^{\infty}$, sendo que $(*)$, dependendo do contexto, pode representar μ_n, $P_n(x)$, $P_n(x,y)$.

(iii) A numeração de teoremas, lemas, corolários e definições, é feita utilizando uma referência do tipo $c.s.k$, sendo c o número do capítulo, s o número da secção e k o número de ordem em cada secção, com a ordenação independente para cada um dos tipos de objectos referenciados. A numeração de fórmulas obedece ao mesmo critério, aparecendo as referências na forma $(c.s.k)$.

(iv) No texto, aparecem expressões do tipo $p_n \perp H$, sendo p_n um polinómio e H um espaço vectorial de polinómios. Esta notação significa que, relativamente a uma dada funcional w, se verifica $\langle w, p_n h\rangle = 0$, para todo o elemento h pertencente a H .

Agradecimentos

Não poderia deixar de prestar os seguintes agradecimentos.

1. Ao Professor Amílcar Branquinho, por todo o apoio e entusiasmo que dedicou a este trabalho, principalmente em alguns momentos mais difíceis. O que hoje sei sobre investigação em Matemática, a ele o devo.

2. Ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

3. Ao Ministério da Educação, por me ter concedido uma dispensa de serviço docente durante três semestres lectivos, no âmbito da Medida 5-Acção 5.2-Financiamento à Formação Avançada no Ensino Superior (PRODEP/98).

4. À Escola Superior de Tecnologia e de Gestão, do Instituto Politécnico de Bragança.

5. A todos os colegas que mantiveram comigo conversas sobre o mestrado, escutando-me e dando-me opiniões e conselhos.

Capítulo 1

Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais de Uma Variável

1.1 Introdução

Estabelecem-se algumas propriedades fundamentais dos polinómios ortogonais em uma variável: existência de uma relação de recorrência a três termos; unicidade de uma funcional de momentos, a menos de uma constante (teorema de *Favard*); condição de existência e unicidade de uma sequência de polinómios ortogonais associada a uma funcional de momentos. Referimos a existência de uma funcional de momentos associada a uma sequência de momentos (teoremas de *Boas* e *Durán*). Apresentamos a definição de função geradora. Adoptamos neste capítulo a notação de *T.S. Chihara*, [6].

1.2 Propriedades Gerais

Definição 1.2.1. *Por* `sequência de polinómios de uma variável`*, entende-se uma sequência infinita,* $\{P_n(x)\}$*, sendo* $P_n(x)$ *um polinómio de grau* n*,* $n \in \mathbb{N}$.

Uma sequência de polinómios ortogonais, $\{P_n(x)\}$, diz-se *mónica*, se o coeficiente do termo de maior grau de $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, é igual a 1 .

Definição 1.2.2 ([6]). *Sejam* $\{\mu_n\}$ *uma sequência de números complexos e* w *uma* *funcional linear definida no espaço vectorial dos polinómios, por*

$$\langle w, x^n \rangle = \mu_n, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\langle w, \alpha_1 \pi_1(x) + \alpha_2 \pi_2(x) \rangle = \alpha_1 \langle w, \pi_1(x) \rangle + \alpha_2 \langle w, \pi_2(x) \rangle \quad ,$$

sendo α_1 , α_2 *números complexos quaisquer e* π_1 , π_2 *polinómios. Então* μ_n *dizem-se* **momentos de ordem** n *e* w *diz-se* **funcional de momentos** *associada à sequência de momentos* μ_n *.*

Definição 1.2.3 ([6]). *Uma sequência* $\{P_n(x)\}$ *diz-se* ***sequência de polinómios ortogonais****, relativamente a uma funcional de momentos* w*, se e só se, para quaisquer inteiros não negativos* m, n*, se verifica:*

(i) $P_n(x)$ *é um polinómio de grau* n*;*

(ii) $\langle w, P_m(x) P_n(x) \rangle = 0$*, para* $m \neq n$*;*

(iii) $\langle w, P_n^2 \rangle \neq 0$ *.*

A teorema seguinte enuncia a unicidade da representação de um polinómio de grau n, como combinação linear dos elementos de grau menor ou igual a n, de uma sequência de polinómios.

Teorema 1.2.1. *Seja* $\{P_n(x)\}$ *uma sequência de polinómios mónicos e* $\pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$*, com os* c_i *constantes, um polinómio de grau* n*. Então o polinómio tem a representação*

$$\pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i(x) \ , \tag{1.2.1}$$

com os a_i *constantes. Isto significa que* $\{P_n(x)\}$ *é uma base do espaço vectorial dos polinómios com coeficientes em* $\mathbb{C}$ *.*

O resultado seguinte enuncia uma representação dos coeficientes de (1.2.1), que usa os polinómios da sequência ortogonal.

Teorema 1.2.2 ([6]). *Seja $P_n(x)$ uma sequência de polinómios ortogonais com respeito a w. Então, para todo o polinómio $\pi_n(x)$ de grau n, verifica-se*

$$\pi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x) \ ,$$

com

$$c_k = \frac{\langle w, \pi_n(x).P_k(x) \rangle}{\langle w, P_k^2 \rangle} \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, n \ .$$

Prova

Consequência do teorema anterior e da ortogonalidade dos polinómios da sequência.

□

Corolário 1.2.1 ([6]). *Se $\{P_n(x)\}$ é sequência de polinómios ortogonais relativa a w, então cada $P_n(x)$, $n = 0, 1, \cdots$, é unicamente determinado, a menos de um factor não nulo arbitrário, i.e., se $\{Q_n(x)\}$ é também sequência de polinómios ortogonais para w, existem constantes c_n, tais que*

$$c_n \neq 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2 \cdots$$

e

$$Q_n(x) = c_n P_n(x) \quad , \quad n = 0, 1, 2 \cdots \ .$$

Teorema 1.2.3 ([6]). *Seja w uma funcional de momentos, $\{P_n(x)\}$ uma sequência de polinómios e $\pi_k(x)$ um polinómio de grau k. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) $\{P_n(x)\}$*, é sequência de polinómios ortogonais relativamente a* w*;*

(ii) $\langle w, \pi_k(x) P_n(x) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } k < n; \\ K \neq 0 & \text{se } k = n; \end{cases}$,
com K constante dependente de n e do coeficiente de x^k do polinómio $\pi_k(x)$.

(iii) $\langle w, x^m P_n(x) \rangle = k_n \delta_{mn}$*, com* $k_n \neq 0$*,* $m = 0, 1, \cdots, n$*, sendo* δ_{mn} *o símbolo de Kronecker.*

Prova

(i)⇒(ii)

$\pi_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i P_i(x)$, pelo teorema 1.2.1, e

$$\langle w, \pi_k P_n(x)\rangle = \sum_{i=0}^{k} a_i \langle w, P_i(x)P_n(x)\rangle = a_k k'_n \delta_{nk} \ ,$$

com $k'_n \neq 0$.

(ii)⇒(iii)

Da igualdade anterior, fazendo $k_n = a_k k'_n$ e $\pi_k = x^k$.

(ii)⇒(i)

Imediato, fazendo $\pi_k(x) = P_k(x)$, e atendendo à definição 1.2.3.

(iii)⇒(ii)

Fazendo $\pi_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$, temos

$$\langle w, \pi_k(x)P_n(x)\rangle = \sum_{i=0}^{k} b_i \langle w, x^k P_n(x)\rangle \ .$$

Se $k < n$, todos os $\langle w, x^k P_n(x)\rangle$ são nulos. Se $k = n$, então $\langle w, x^n P_n(x)\rangle \neq 0$ e $\langle w, \pi_n P_n(x)\rangle \neq 0$. □

Definição 1.2.4 ([6]). *Dada uma sequência de momentos μ_n, designam-se por* ***determinantes de Hankel de ordem*** n*, os determinantes Δ_n definidos da forma*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \ .$$

Teorema 1.2.4 ([6]). *Seja w uma funcional de momentos, com sequência de momentos $\{\mu_n\}$. Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma sequência de polinómios ortogonais para w é*

$$\Delta_n \neq 0 \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \ .$$

Prova ([6])

Suponhamos que existe uma funcional, w, com sequência de momentos $\{\mu_n\}$, à qual corresponde uma sequência de polinómios ortogonais $\{P_n(x)\}$. Temos, para $n = 0, 1, \ldots$ e $m \leq n$, e tomando $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_{nj} x^j$

$$
\begin{aligned}
\langle w, x^m P_n(x) \rangle = \langle w, x^m \sum_{j=0}^{n} c_{nj} x^j \rangle &= \langle w, \sum_{j=0}^{n} c_{nj} x^{m+j} \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{n} c_{nj} \mu^{m+j} \\
&= k_n \delta_{mn}
\end{aligned}
\tag{1.2.2}
$$

com $k_n \neq 0$, $m = 0, 1, \cdots, n$, e sendo δ_{mn} o símbolo de Kronecker. Escrevendo a igualdade $\langle w, x^m P_n(x) \rangle = \sum_{j=0}^{n} c_{nj} \mu^{m+j}$ para $0 \leq m \leq n$, obtém-se o sistema

$$
\begin{bmatrix}
\mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\
\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_n
\end{bmatrix}
\tag{1.2.3}
$$

Cada polinómio da sequência de polinómios ortogonais, $\{P_n(x)\}$, é unicamente determinado pelo seu coeficiente de maior ordem (cf. corolário 1.2.1, pg.3). Considere-se $\{P_n\}$ uma sucessão mónica. Então $k_n = \Delta_n / \Delta_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, se e somente se $\Delta_n \neq 0$, $n = 1, 2, \cdots$. □

Esta demonstração, dá-nos uma representação para os polinómios ortogonais mónicos associados a uma sucessão de momentos verificando $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. De facto, aplicando a regra de `Cramer` ao sistema (1.2.3), obtemos como representação para P_n

$$
P_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}}
\begin{vmatrix}
\mu_0 & \cdots & \mu_n \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\mu_{n-1} & \cdots & \mu_{2n-1} \\
1 & \cdots & x^n
\end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad P_0 = 1
$$

.

Definição 1.2.5. *A funcional w diz-se* ***`quase-definida`*** *(respectivamente* ***`definida-positiva`****) se e somente se $\Delta_n \neq 0$ (respectivamente $\Delta_n > 0$), $n = 0, 1, 2, \cdots$.*

1.3 Teorema de Favard

Definição 1.3.1. *Dada uma sequência de polinómios,* $\{P_n(x)\}$*, diz-se que esta verifica uma* **`relação de recorrência a três termos`***, se e só se existem duas sequências infinitas de funções de* n*, (e eventualmente de* x*),* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$*, tais que*

$$P_n = a_n P_{n-1} + b_n P_{n-2}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.3.1 ([6]). *Seja* w *uma funcional de momentos que tem associada uma sequência de polinómios ortogonais mónica,* $\{P_n(x)\}$ *. Então, existem as sequências numéricas*

$$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \quad , \quad \gamma_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

tais que a sequência $\{P_n(x)\}$ *verifica a relação de recorrência a três termos*

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \gamma_n P_{n-2}(x), \qquad n = 1, 2, \cdots, \tag{1.3.1}$$

definindo-se

$$P_{-1}(x) = 0 \quad , \quad P_0(x) = 1.$$

Prova([6])

Seja $\{P_n(x)\}$ a sequência de polinómios ortogonais mónica associada à funcional w . Por ser grau$(xP_n(x)) = n + 1$, temos

$$xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_{n,i} P_i(x) \ , \ a_{n,i} = \frac{\langle w, xP_n(x)P_i(x)\rangle}{\langle w, P_i^2(x)\rangle} .$$

Como grau$(xP_i(x)) = i + 1$, temos

$$\langle w, xP_n(x)P_i(x)\rangle = 0 \quad , \quad i < n - 1 ,$$

e

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{nn}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x) \ , \ n \geq 1 ,$$

ou, substituindo n por $n - 1$,

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + a_{n-1,n-1}P_{n-1}(x) + a_{n-1,n-2}P_{n-2}(x) \ , \ n \geq 2 ,$$

que equivale a

$$P_n(x) = (x - a_{n-1,n-1})P_{n-1}(x) - a_{n-1,n-2}P_{n-2}(x) \ , \ n \geq 2 \ . \tag{1.3.2}$$

Esta fórmula, do tipo de (1.3.1), pg.6, é também válida para $n = 1$, definindo

$$P_{-1}(x) = 0 \ , \ P_0(x) = 1 \quad \text{e} \quad \beta_1 = P_1(0) \ . \tag{1.3.3}$$

Note-se que γ_1 é arbitrário (para tal tome-se $n = 1$ em (1.3.1)). Se w é definida-positiva, então β_n é real e $\gamma_n > 0$, $n \geq 2$. □

Teorema 1.3.2 (Favard, [6]). *Sejam* $\{\beta_n\}$ *e* $\{\gamma_n\}$*, sequências numéricas arbitrárias de números complexos. Seja a sequência de polinómios mónica* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$*, definida pela relação de recorrência a três termos*

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \gamma_n P_{n-2}(x) \qquad n = 1, 2, \cdots \ , \tag{1.3.4}$$

com

$$P_{-1}(x) = 0 \quad , \quad P_0(x) = 1.$$

Então, existe uma única funcional de momentos, w*, tal que*

$$\langle w, 1 \rangle = \gamma_1 \quad , \quad \langle w, P_m(x)P_n(x) \rangle = 0 \quad , \quad \textit{para } m \neq n \quad , \quad m, n = 0, 1, \cdots \ .$$

A funcional w *é quase-definida (definida-positiva) e* $\{P_n(x)\}$ *é a correspondente sequência de polinómios ortogonais, se e só se* $\gamma_n \neq 0$ *(* $\gamma_n > 0$*),* $n = 1, 2, \cdots$ *.*

Prova([6])

A funcional w define-se de forma construtiva.

Seja $\langle w, 1 \rangle = \mu_0 = \gamma_1$, e $\langle w, P_n(x) \rangle = 0$, $n = 1, 2, \cdots$.

Como $P_1(x) = x + c$, com $c = \beta_1$ (ver equação (1.3.3)), temos $\langle w, P_1(x) \rangle = \mu_1 + c\mu_0 = 0$, o que define o momento μ_1 .

Por ser $P_2(x) = (x - \beta_2)P_1(x) - \gamma_2 P_0$, por hipótese de verificação da relação de recorrência a três termos, vem

$$\begin{aligned}\langle w, P_2(x)\rangle &= \langle w, xP_1(x)\rangle - \beta_2\langle w, P_1(x)\rangle - \gamma_2\mu_0 \\ &= \langle w, x(x-\beta_1)P_0(x)\rangle - \beta_2\langle w, (x-\beta_1)P_0(x)\rangle - \gamma_2\mu_0 \\ &= \langle w, x^2\rangle - \beta_1\langle w, x\rangle - \beta_2\langle w, x\rangle + \beta_1\beta_2\langle w, 1\rangle - \gamma_2\mu_0 \\ &= \mu_2 - (\beta_1+\beta_2)\mu_1 + (\beta_1\beta_2 - \gamma_2)\langle w, 1\rangle \ ,\end{aligned}$$

o que define o momento μ_2, etc.

Reescrevendo a equação (1.3.4) da forma

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_{n+1}P_n(x) + \gamma_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \cdots \ ,$$

temos

$$\begin{aligned}&\langle w, x^2P_n(x)\rangle = 0 \ , \ n \geq 2 \\ &\ldots \\ &\langle w, x^kP_n(x)\rangle = 0 \ , \ 0 \leq k < n \\ &\langle w, x^nP_n(x)\rangle = \gamma_{n+1}\langle w, x^{n-1}P_{n-1}(x)\rangle \ , \ n \geq 1 \ .\end{aligned}$$

Por indução obtém-se

$$\langle w, x^nP_n(x)\rangle = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n+1} \ , \ n \geq 0$$

e

$$\langle w, P_n(x)P_n(x)\rangle = \langle w, x^nP_n(x)\rangle = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n+1} \neq 0 \ , \ n \geq 0 \ ,$$

pelo que $\{P_n(x)\}$ é sequência de polinómios ortogonais se e somente se $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 1$. □

1.4 Teoremas de Boas e Durán

Põe-se o problema de, dada uma sucessão de momentos reais ou complexos, existir uma correspondente funcional de momentos. A resposta é afirmativa, e é dada pelos seguintes teoremas.

Teorema 1.4.1 (Boas, [2]). *Seja $\{\mu_n\}$, uma sucessão arbitrária de números reais. Então existe uma função ϕ, de variação limitada, tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n d\phi = \mu_n, \qquad n = 0, 1, \cdots \quad .$$

Teorema 1.4.2 (Durán,[2]). *Sejam*

- $I \subset \mathbb{R}$;
- $S(I) = \{f \in C^{\infty}(I) : \|f\|_{I,k,n} = sup_{t\in I}|t^k f^{(n)}(t)| < +\infty, \forall_{k,n} \in \mathbb{N}\}$
- $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, *uma sucessão de números complexos.*

Então, existe $\Psi \in S(\mathbb{R})$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \Psi(x) dx = \mu_n, \quad n = 0, 1, \cdots .$$

1.5 Funções Geradoras

Definição 1.5.1. *Designa-se por* ***função geradora*** *de uma sequência de polinómios, $\{P_n(x)\}$, a série*

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

.

No Capítulo 2, consideraremos os polinómios ortogonais clássicos como coeficientes das séries de *Taylor* correspondentes às funções geradoras.

Por agora vai mostrar-se (cf. [6]) que a função

$$G(x,t) = e^{-\alpha}(1+t)^x \ , \tag{1.5.1}$$

com $\alpha \neq 0$, sendo α constante, é formalmente a função geradora da sequência de Polinómios de *Charlier*. De facto, dado que

$$e^{-\alpha t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^k}{k!} \quad \text{e} \quad (1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k,$$

com $\left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array}\right) = \frac{1}{k!}x(x-1)\cdots(x-k+1), \quad k=1,2,\cdots,n$, podemos escrever (1.5.1) da forma

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array}\right) t^k .$$

Do produto de Cauchy das duas séries, resulta a seguinte série de Taylor na variável t

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array}\right) \frac{(-\alpha)^{n-k}}{(n-k)!} \right\} t^n . \tag{1.5.2}$$

Como $\left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array}\right)$ é polinómio de grau k, os coeficientes de t^n na série (1.5.2), são polinómios de grau n, para cada $n=0,1,\cdots$, ditos Polinómios de *Charlier*. Designando por $\{P_n\}$ esses polinómios, podemos escrever (1.5.2) da forma

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n . \tag{1.5.3}$$

Vamos ver que estes polinómios satisfazem uma relação de ortogonalidade. Com efeito, da igualdade

$$\alpha^x G(x,v)G(x,w) = e^{-\alpha(v+w)}[\alpha(1+v)(1+w)]^x$$

temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k G(k,v)G(k,w)}{k!} = e^{-\alpha(v+w)} e^{\alpha(1+v)(1+w)} = e^{\alpha} e^{\alpha vw}$$
$$= e^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha vw)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\alpha}\alpha^n (vw)^n}{n!} . \tag{1.5.4}$$

De (1.5.3), temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k G(k,v)G(k,w)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \sum_{m,n=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k)v^m w^n$$
$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k)\frac{\alpha^k}{k!} v^m w^n . \tag{1.5.5}$$

Comparando os coeficientes de $v^m w^n$ de (1.5.4) e (1.5.5), temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k)\frac{\alpha^k}{k!} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{e^{\alpha}\alpha^n}{n!}, & \text{se } m = n \end{array} \right. \tag{1.5.6}$$

Definindo agora a funcional discreta ρ^* da forma

$$\langle \rho^*, x^n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{\alpha^k}{k!}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots ,$$

então (1.5.6) permite escrever

$$\langle \rho^*, P_m P_n \rangle = \frac{e^{\alpha} \alpha^n}{n!} \delta mn, \qquad m, n = 0, 1, 2, \cdots ,$$

sendo δ_{mn} o delta de *Kronecker*.

Acabamos de verificar, que a relação (1.5.6) pode ser descrita pela funcional linear $\rho*$. Temos então que os polinómios de *Charlier* são ortogonais relativamente a uma distribuição de massa discreta. Se ψ representar uma função em escada, que é nula no intervalo $(-\infty, 0)$, e constante nos intervalos $(k, k+1)$, com $k = 0, 1, 2, \cdots$, tendo em cada um destes pontos a variação $\alpha^k/k!$, então (1.5.6) pode ser escrita em termos da integral de *Stieltjes*

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m P_n d\psi(x) = \frac{e^{\alpha} \alpha^n}{n!} \delta_{mn} \ .$$

Capítulo 2

Polinómios Ortogonais Clássicos de Uma Variável

2.1 Introdução

Dentro dos polinómios ortogonais, tomam especial importância os chamados Polinómios Ortogonais Clássicos. Uma caracterização das famílias de Polinómios Ortogonais Clássicos, reside no facto de satisfazerem uma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes polinomiais (2.2.1), pg.12, dita equação de *Bochner*. Vamos mostrar, usando resultados devidos a *Vicente Gonçalves*, [34],[35], que se uma família de polinómios $\{P_n\}$ satisfaz uma equação de *Bochner*, então essa família de polinómios satisfaz uma fórmula de *Rodrigues*, (2.3.1), pg.30. O inverso também se verifica, isto é, se uma família de polinómios verifica uma fórmula de *Rodrigues*, então também verifica uma equação de *Bochner*. Podemos então estabelecer a seguinte caracterização: famílias de Polinómios Ortogonais Clássicos, são as famílias de polinómios ortogonais que satisfazem uma fórmula de *Rodrigues*.

2.2 Equação Diferencial de Bochner

Definição 2.2.1 ([4]). `Equação Diferencial de Bochner`*, é uma equação diferencial com coeficientes polinomiais, do tipo*

$$L_n[y] = [\sigma(x)D^2 + \tau(x)D + \lambda_n I]y = 0$$

com

$$\sigma(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \qquad \tau(x) = b_0 x + b_1, \qquad \lambda_n = -n[(n-1)a_0 + b_0],$$

e sendo D o operador derivada total em ordem à variável x. $L_n[.]$ diz-se ***operador de Bochner****.*

Teorema 2.2.1 (Vicente Gonçalves, [4]).

[A] *Seja $E^n_{i,\xi} = a_i \xi(\xi-1) + b_i \xi + \lambda_{i,n}$, com a_i, b_i, $i = 0, 1, 2$, $b_2 = 0$, coeficientes de $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ e $\lambda_{i,n} = \lambda_n \delta_{i,0}$, sendo $\delta_{i,0}$ o símbolo de Kronecker. Então (2.2.1) admite, para cada n, uma solução polinomial mónica única de grau n, se e somente se a equação*

$$E^n_{0,\xi} = 0,$$

tem $\xi = n$ como única solução em $\mathbb{N}$.

[B] *As soluções polinomiais mónicas de (2.2.1), $P_n = x^n + p_{1,n} x^{n-1} + p_{2,n} x^{n-2} + \cdots$, verificando-se a condição (2.2.1), satisfazem a relação de recorrência a três termos*

$$xP_n = P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}\ , \quad \textit{com} \quad n \in \mathbb{Z}^+\ , \quad P_0 = 1\ , \ P_1 = x - \beta_0\ ,$$

sendo

$$\beta_n = \frac{(2a_0 - b_0)b_1 - 2a_1 n((n-1)a_0 + b_0)}{(2na_0 + b_0)(2(n-1)a_0 + b_0)}, \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

e

$$\gamma_{n+1} = \frac{2a_2 n + 4a_0 \frac{-E^{n+1}_{1,n} E^{n+1}_{1,n+1} + E^{n+1}_{2,n+1} E^{n+1}_{0,n}}{E^{n-1}_{0,n} E^{n+1}_{0,n}} + 2\sigma\left(\frac{E^{n+1}_{1,n+1}}{E^{n+1}_{0,n}}\right)}{\lambda_{0,n} - \lambda_{0,n+2}}, \qquad n \in \mathbb{Z}^+\ .$$

Prova([4])

[A] Substituindo a expressão de P_n em (2.2.1), e tendo em atenção que

$$P_n = x^n + p_{1,n}x^{n-1} + p_{2,n}x^{n-2} + \cdots + p_{k,n}x^{n-k} + \cdots$$

$$(P_n)' = nx^{n-1} + (n-1)p_{1,n}x^{n-2} + \cdots + (n-(k-1))p_{k-1,n}x^{n-k} + \cdots$$

$$(P_n)'' = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)p_{1,n}x^{n-3} + \cdots +$$

$$+ (n-(k-2))(n-(k-1))p_{k-2,n}x^{n-k} + \cdots$$

$$\sigma(P_n)'' = x^n[a_0n(n-1)] + x^{n-1}[a_1n(n-1) + a_0p_{1,n}(n-1)(n-2)] +$$

$$+ \cdots + x^{n-k}[a_0(n-k)(n-(k+1))p_{k,n} + a_1(n-(k-1))(n-k)p_{k-1,n} +$$

$$+ a_2(n-(k-2))(n-(k-1)p_{k-2,n}] + \cdots$$

$$\tau(P_n)' = x^nb_0n + x^{n-1}[b_0(n-1)p_{1,n} + b_1n] + \cdots +$$

$$+ x^{n-k}[b_0(n-k)p_{k,n} + b_1(n-(k-1))p_{k-1,n}] + \cdots$$

$$\lambda_nP_n = x^n\lambda_n + x^{n-1}\lambda_np_{1,n} + \cdots + x^{n-k}\lambda_np_{k,n} + \cdots \ ,$$

temos

$$\begin{aligned} L_n[P_n] \ = \ & x^n[a_0n(n-1) + b_0n + \lambda_n] + \\ & + x^{n-1}[a_1n(n-1) + a_0p_{1,n}(n-1)(n-2) + b_0(n-1)p_{1,n} + b_1n + \lambda_np_{1,n}] + \cdots + \\ & + x^{n-k}[a_0(n-k)(n-(k+1))p_{k,n} + a_1(n-(k-1))(n-k)p_{k-1,n} + \\ & + a_2(n-(k-2))(n-(k-1))p_{k-2,n} + \\ & + b_0(n-k)p_{k,n} + b_1(n-(k-1))p_{k-1,n} + p_{k,n}\lambda_n] + \cdots \ . \end{aligned} \tag{2.2.-15}$$

Igualando a zero os coeficientes de $L_n[P_n] + \cdots$, obtém-se o sistema

$$a_0n(n-1) + b_0n + \lambda_n = 0 \tag{2.2.-14}$$

$$a_1n(n-1) + a_0p_{1,n}(n-1)(n-2) + b_0(n-1)p_{1,n} + b_1n + \lambda_np_{1,n} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_0(n-k)(n-(k+1))p_{k,n} + a_1(n-(k-1))(n-k)p_{k-1,n} +$$

$$+a_2(n-(k-2))(n-(k-1))p_{k-2,n}+$$

$$+b_0(n-k)p_{k,n}+b_1(n-(k-1))p_{k-1,n}+p_{k,n}\lambda_n=0$$

$$\vdots\,.$$

Observe-se que o coeficiente de x^{n-k} em (2.2.-15) se pode escrever

$$[a_0(n-k)(n-(k+1))+b_0(n-k)+\lambda_n]p_{k,n}+$$

$$+[a_1(n-(k-1))(n-k)+b_1(n-(k-1))]p_{k-1,n}+$$

$$+a_2(n-(k-2))(n-(k-1))p_{k-2,n}\,,$$

que é o mesmo que $p_{k,n}E^n_{0,n-k}+p_{k-1,n}E^n_{1,n-k+1}+p_{k-2,n}E^n_{2,n-k+2}$.

O sistema (2.2.-14) toma a forma

$$\begin{aligned}
&E^n_{0,n}=0\\
&p_{1,n}E^n_{0,n-1}+E^n_{1,n}=0\\
&p_{2,n}E^n_{0,n-2}+p_{1,n}E^n_{1,n-1}+E^n_{2,n}=0\\
&\vdots\\
&p_{k,n}E^n_{0,n-k}+p_{k-1,n}E^n_{1,n-k+1}+p_{k-2,n}E^n_{2,n-k+2}=0\\
&\vdots\\
&p_{n,n}E^n_{0,0}+p_{n-1,n}E^n_{1,1}+p_{n-2,n}E^n_{2,2}=0\,.
\end{aligned} \tag{2.2.-23}$$

Deste sistema podemos concluir que:

. Se a solução polinomial da equação de *Bochner* é única, então verifica-se que $E^n_{0,\xi}=0$ tem como única solução em $\mathbb{N}$, $\xi=n$.

. Se $E^n_{0,\xi}=0$ tem $\xi=n$ como única solução em $\mathbb{N}$, então o sistema tem solução única.

[B] A segunda parte da demonstração é feita em três etapas.

[1] Calcula-se $u_n(x)=L_{n+1}((x-\beta_n)P_n)$ e β_n, de forma a ser $grau(u_n(x))=n-1$. Isto porque, para ser verificada a relação de recorrência a três termos devemos ter $L_{n+1}=L_{n+1}[(x-\beta_n)P_n-\gamma_nP_{n-1}]=0$.

[2] Verificar que $u_n(x)$ é da forma $u_n(x) = k_n P_{n-1}$, sendo k_n um parâmetro dependente de n.

[3] Determina-se γ_n tal que $L_{n+1}((x-\beta_n)P_n - P_{n+1} - \gamma_n P_{n-1}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Vamos então efectuar cada um dos três passos da demonstração.

[1]

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= [\sigma D^2 + \tau D + \lambda_{n+1}](x-\beta_n)P_n \\
&= \sigma[2P_n^{'} + (x-\beta_n)P_n^{''}] + \tau[P_n + (x-\beta_n)P_n^{'}] + \\
&\quad +(x-\beta_n)\lambda_{n+1}P_n \\
&= 2\sigma P_n^{'} + \tau P_n + (x-\beta_n)[\sigma P_n^{''} + \tau P_n^{'} + \\
&\quad +\lambda_n P_n] - (x-\beta_n)\lambda_n P_n + (x-\beta_n)\lambda_{n+1}P_n \, .
\end{aligned}$$

Como $\lambda_{n+1} - \lambda_n = -(2na_0 + b_0)$, temos

$$u_n(x) = 2\sigma P_n^{'} + \tau P_n - (2na_0 + b_0)(x-\beta_n)P_n, \tag{2.2.-33}$$

e em termos das potências de x, dado ser

$$2\sigma P_n^{'} = 2[a_0x^2 + a_1x + a_2]P_n^{'} = x^{n+1}[2na_0] + x^n[2a_1n + 2(n-1)p_{1,n}a_0] +$$

$$+\, x^{n-1}[2a_2n + 2a_1(n-1)p_{1,n} + 2(n-2)p_{2,n}a_0] + \cdots \, ,$$

$$\tau P_n = x^{n+1}b_0 + x^n[b_0p_{1,n} + b_1] + x^{n-1}[b_0p_{2,n} + b_1p_{1,n}] + \cdots \, ,$$

$$-\,(2a_0n + b_0)(x-\beta_n)P_n = x^{n+1}[-(2a_0n + b_0)] + x^n[-(2a_0n + b_0)(p_{1,n} - \beta_n)] +$$

$$x^{n-1}[-(2a_0n + b_0)][p_{2,n} - \beta_n p_{1,n}] + \cdots$$

obtemos

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= x^n[2a_1n + 2a_0(n-1)p_{1,n} + b_0p_{1,n} + b_1 - \\
&\quad -(2a_0n + b_0)p_{1,n} + (2a_0n + b_0)\beta_n] + \\
&\quad +x^{n-1}[2a_2n + 2a_1(n-1)p_{1,n} + 2(n-2)a_0p_{2,n} + b_0p_{2,n} + b_1p_{1,n} - \\
&\quad -(2a_0n + b_0)p_{2,n} + \beta_n(2a_0n + b_0)p_{1,n}] + \\
&\quad \cdots
\end{aligned}$$

$$= x^n[(2a_0n + b_0)\beta_n + (b_1 + 2a_1n) - 2a_0p_{1,n}] +$$
$$+x^{n-1}[2a_2n - 4a_0p_{2,n} + (2a_1(n-1) + b_1 + \beta_n(2a_0n +$$
$$+b_0))p_{1,n}] + \cdots .$$

Obrigando $u_n(x)$ a ser um polinómio de grau exactamente $n-1$[1] define-se β_n. De facto

$$(2a_0n + b_0)\beta_n + (b_1 + 2a_1n) - 2a_0p_{1,n} = 0$$

isto é

$$\beta_n = \frac{2a_0p_{1,n} - (b_1 + 2a_1n)}{2a_0n + b_0} .$$

[2] Vejamos que $u_n(x) = k_nP_{n-1}(x)$, i.e.,

$$L_{n-1}[2\sigma P_n^{'} + \tau P_n - (2na_0 + b_0)(x - \beta_n)P_n] = 0 .$$

Temos

$$\begin{aligned} & L_{n-1}[u_n] = (\sigma D^2 + \tau D + \lambda_{n-1})u_n \\ = \; & \sigma[2(\sigma^{''}P_n^{'} + 2\sigma^{'}P_n^{''} + \sigma P_n^{'''}) + \tau^{''}P_n + 2\tau^{'}P_n^{'} + \tau P_n^{''} - \\ & -(2a_0n + b_0)(2P_n^{'} + (x - \beta_n)P_n^{''})] + \tau[2(\sigma^{'}P_n^{'} + \sigma P_n^{''}) + \tau^{'}P_n + \tau P_n^{'} - \\ & -(2a_0n + b_0)(P_n + (x - \beta_n)P_n^{'})] + \\ & +\lambda_{n-1}[2\sigma P_n^{'} + \tau P_n - (2a_0n + b_0)(x - \beta_n)P_n] . \end{aligned}$$

Fazendo no último membro da expressão anterior as simplificações seguintes

1. $2(L_n[P_n])^{'} = 2[\sigma^{'}P_n^{''} + \sigma P_n^{'''} + \tau^{'}P_n^{'} + \tau P_n^{''} + \lambda_nP_n^{'}] = 0$, substitui-se por $-\tau P_n^{''} - 2\lambda_nP_n^{'}\sigma$;

2. $-(2a_0n + b_0)(x - \beta_n)[\sigma P_n^{''} + \tau P_n^{'} + \lambda_nP_n]$ substitui-se por $(2a_0n + b_0)(x - \beta_n)\lambda_nP_n$;

[1] $L_{n+1}[\lambda_nP_{n-1}] = \lambda_nL_{n+1}[P_{n-1}]$, tem grau $n-1$. Como deve ser $L_{n+1}[P_{n+1}] = L_{n+1}[(x - \beta_n)P_n - \lambda_nP_{n-1}]$, então $L_{n+1}[(x - \beta_n)P_n]$ deve ter grau $n-1$.

3. $2\sigma'[\sigma P_n'' + \tau P_n' + \lambda_n P_n]$ substitui-se por $-2\sigma'\lambda_n P_n$;

4. $-\tau[\sigma P_n'' + \tau P_n' + \lambda_n P_n]$ substitui-se por $\tau\lambda_n P_n + 2\tau^2 P_n'$;

5. $\tau[2\sigma P_n'' + 2\tau P_n' + 2\lambda_n P_n]$ substitui-se por $-2\tau\lambda_n P_n$;

obtemos

$$L_{n-1}(u_n) = \sigma 2[\sigma'' P_n' - (2a_0 n + b_0)P_n'] + \tau[\tau' P_n - (2a_0 n + b_0)P_n]$$
$$+ \lambda_{n-1}[2\sigma P_n' + \tau P_n - (2a_0 n + b_0)(x - \beta_n)P_n] +$$
$$+ (2a_0 n + b_0)(x - \beta_n)\lambda_n P_n - 2\sigma'\lambda_n P_n - 2\lambda_n P_n'\sigma - \lambda_n \tau P_n \ .$$

A igualdade anterior pode escrever-se

$$L_{n-1}(u_n) = P_n'\sigma[2\sigma'' - 2(2a_0 n + b_0) + 2\lambda_{n-1} - 2\lambda_n] +$$
$$+ P_n[\tau\tau' - (2a_0 n + b_0)\tau + \lambda_{n-1}(\tau - (2a_0 n + b_0)(x - \beta_n)) +$$
$$+ (2a_0 n + b_0)(x - \beta_n)\lambda_n + \lambda_n(-2\sigma' - \tau)] \ .$$

O coeficiente de P_n' é zero:

$$2\sigma'' - 2(2a_0 n + b_0) + 2\lambda_{n-1} - 2\lambda_n =$$
$$= 4a_0 - 4a_0 n - 2b_0 + 2n[(n-1)a_0 + b_0] - 2(n-1)[(n-2)a_0 + b_0] = 0 \ .$$

A expressão (2.2) reduz-se a

$$L_{n-1}(u_n) = P_n[\tau\tau' - (2a_0 n + b_0)\tau + \lambda_{n-1}(\tau - (2a_0 n + b_0)(x - \beta_n)) +$$
$$+ (2a_0 n + b_0)(x - \beta_n)\lambda_n + \lambda_n(-2\sigma' - \tau)] \ .$$

A expressão (2.2) simplifica-se por via das igualdades

$$\tau\tau' = (b_0 x + b_1)b_0 = b_0^2 x + b_0 b_1$$
$$-(2a_0 n + b_0)\tau = -(2a_0 n + b_0)(b_0 x + b_1) =$$

$$= -(2a_0n + b_0)b_0x - (2a_0n + b_0)b_1$$

$$\lambda_{n-1}(\tau - (2a_0n + b_0)(x - \beta_n)) + (2a_0n + b_0)(x - \beta_n)\lambda_n =$$

$$= x[(\lambda_n - \lambda_{n-1})(2a_0n + b_0) + \lambda_{n-1}b_0] - \beta_n(2a_0n + b_0)(\lambda_n - \lambda_{n-1}) + \lambda_{n-1}b_1$$

$$\lambda_n(-2\sigma^{'} - \tau)] = \lambda_n[-2(2a_0x + a_1) - b_0x - b_1] =$$

$$= \lambda_n x[-4a_0 - b_0] + \lambda_n[-2a_1 - b_1] \ .$$

O coeficiente de x da expressão que multiplica P_n em (2.2) é nulo, já que se reduz a

$$b_0^2 - (2a_0n + b_0)b_0 + \lambda_{n-1}b_0 + \lambda_n(-4a_0 - b_0)$$
$$+ (2a_0n + b_0)(-2a_0n + 2a_0 - b_0) = 0 \ .$$

Então, (2.2) fica

$$L_{n-1}(u_n) =$$

$$= P_n[b_0b_1 - (2a_0n + b_0)b_1 + \beta_n(2a_0n + b_0)(2a_0(n-1) + b_0)$$

$$+ b_1(\lambda_{n-1} - \lambda_n) - 2a_1\lambda_n]$$

$$= P_n[(-2a_0 + b_0)b_1 + 2a_1n((n-1)a_0 + b_0) + \beta_n(2a_0n + b_0)(2a_0(n-1) + b_0)] \ .$$

Por ser grau de $u_n(x)$ menor ou igual a $n-1$, (ver nota de rodapé na pg.17), decorre que o segundo membro de (2.2) é nulo. Dada a hipótese de unicidade de soluções da equação de Bochner, conclui-se que $u_n = k_nP_{n-1}$. Esta equação é geralmente atribuida a Tricomi (cf. [4]).

Vamos calcular k_n.

Usando a equação (2.2), pg.16, temos

$$u_n(x) = 2\sigma P_n^{'} + \tau P_n - (2na_0 + b_0)(x - \beta_n))P_n$$
$$= 2(a_0x^2 + a_1x + a_2)P_n^{'} + (b_0x + b_1)P_n - (2na_0 + b_0)(x - \beta_n))P_n$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{n+1}[2a_0 n + b_0 - (2na_0 + b_0)] \\
&\quad + x^n[(2a_0(n-1)p_{1,n} + 2a_1 n + b_0 p_{1,n} + b_1 \\
&\quad - (2na_0 + b_0)p_{1,n} + (2na_0 + b_0)\beta_n] \\
&\quad + x^{n-1}[2a_0(n-2)p_{2,n} + 2a_1(n-1)p_{1,n} + 2a_2 n + b_0 p_{2,n} \\
&\quad + b_1 p_{1,n} - (2na_0 + b_0)p_{2,n} + (2na_0 + b_0)\beta_n p_{1,n}] + ...
\end{aligned}
$$

Os coeficientes de x^{n+1} e de x^n são nulos. O coeficiente de x^{n-1} é k_n. Temos então

$$k_n = -4a_0 p_{2,n} + ((2na_0 + b_0)\beta_n + 2a_1(n-1) + b_1)p_{1,n} + 2a_2 n \ .$$

[3] Quer-se calcular γ_n de forma a ser

$$L_{n+1}[(x-\beta_n)P_n - P_{n+1} - \gamma_n P_{n-1}] = 0 \ .$$

Atendendo aos resultados já obtidos nesta demonstração (pontos **[1.]** e **[2.]**), e às propriedades de linearidade e homogeneidade do operador de Bochner, temos sucessivamente

$$
\begin{aligned}
&L_{n+1}[(x-\beta_n)P_n - P_{n+1} - \gamma_n P_{n-1}] = 0 \\
&L_{n+1}[(x-\beta_n)P_n] - L_{n+1}[\gamma_n P_{n-1}] = 0 \\
&u_n = \gamma_n L_{n+1}(P_{n-1}) \\
&\gamma_n = \frac{u_n}{L_{n+1}(P_{n-1})} = \frac{k_n P_{n-1}}{(-\lambda_{0,n-1} + \lambda_{0,n+1})P_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Como $L_{n-1}[P_{n-1}] = 0 \Leftrightarrow P''_{n-1} + \tau P'_{n-1} + \lambda_{n-1}P_{n-1} = 0$, obtém-se

$$L_{n+1}[P_{n-1}] = \sigma P''_{n-1} + \tau P'_{n-1} + \lambda_{n+1}P_{n-1} = -\lambda_{n-1}P_{n-1} + \lambda_{n+1}P_{n-1}.$$

Podemos então escrever

$$\gamma_n = \frac{k_n}{-\lambda_{0,n-1} + \lambda_{0,n+1}}.$$

A unicidade das soluções polinomiais da equação diferencial de Bochner, obriga a que seja verificada a relação de recorrência a três termos seguinte[2]

$$xP_n = P_{n+1} + \beta P_n + \gamma_n P_{n-1} \ .$$

Vamos agora obter as expressões para β_n e γ_n apresentadas na parte **[B]** do enunciado do teorema.

Expressão para β_n.

A expressão para β_n em (2.2), pg.17, vem em função do coeficiente $p_{1,n}$ de P_n. Pode obter-se de (2.2), pg.19, uma expressão para β_n que dependa apenas dos coeficientes de $\sigma(x)$ e $\tau(x)$. Como atrás se viu, o segundo membro desta equação é nulo. Temos então

$$(-2a_0 + b_0)b_1 + 2a_1 n((n-1)a_0 + b_0) + \beta_n(2a_0 n + b_0)(2a_0(n-1) + b_0) = 0$$

A expressão de β_n é

$$\beta_n = \frac{(2a_0 - b_0)b_1 - 2a_1 n((n-1)a_0 + b_0)}{(2a_0 n + b_0)(2a_0(n-1) + b_0)} \ .$$

Expressão para γ_n.

Substituindo em (2.2), pg.20, β_n pela expressão em (2.2), pg.17, fica

$$k_n = -4a_0 p_{2,n} + 2(a_0(-p_{1,n})^2 + a_1(-p_{1,n}) + a_2) + 2a_2(n-1) \ .$$

Utilizando as expressões (2.2.-23), pg.15, podemos escrever sucessivamente

$$\begin{aligned} p_{1,n} E^n_{0,n-1} + E^n_{1,n} &= 0 \\ p_{1,n} &= -\frac{E^n_{1,n}}{E^n_{0,n-1}} \end{aligned}$$

e

$$p_{2,n} E^n_{0,n-2} + p_{1,n} E^n_{1,n-1} + E^n_{2,n} = 0$$

[2]Como $(x - \beta_n)P_n - P_{n+1} - \gamma_n P_{n-1}$ tem $grau \leq n+1$, deve verificar-se (2.2), devido à unicidade das soluções polinomiais de grau n.

$$p_{2,n} = \frac{E^n_{1,n}.E^n_{1,n-1}}{E^n_{0,n-1}.E^n_{0,n-2}} - \frac{E^n_{2,n}}{E^n_{0,n-2}} \ .$$

Substituindo estas expressões em (2.2), temos

$$k_n = -\,4a_0\frac{E^n_{1,n}.E^n_{1,n-1} - E^n_{2,n}.E^n_{0,n-1}}{E^n_{0,n-1}.E^n_{0,n-2}} + 2\sigma\big[\frac{E^n_{1,n}}{E^n_{0,n-1}}\big] + 2a_2(n-1).$$

Substituindo este resultado em (2.2), pg.20, temos

$$\gamma_n = \frac{k_n}{-\lambda_{0,n-1} + \lambda_{0,n+1}}$$

ou seja

$$\gamma_n = \frac{-4a_0\frac{E^n_{1,n}.E^n_{1,n-1}-E^n_{2,n}.E^n_{0,n-1}}{E^n_{0,n-1}.E^n_{0,n-2}} - 2\sigma[\frac{E^n_{1,n}}{E^n_{0,n-1}}] + 2a_2(n-1)}{-\lambda_{0,n-1} + \lambda_{0,n+1}}, \quad n = 1, 2, \cdots ,$$

com $\sigma[\cdots] = a_0[\cdots]^2 + a_1[\cdots] + a_2$. □

Dado ser arbitrário o valor de γ_1 (cf. o teorema 1.3.1, pg.6), podemos escrever

$$\gamma_{n+1} = \frac{2a_2n + 4a_0\frac{-E^{n+1}_{1,n}E^{n+1}_{1,n+1}+E^{n+1}_{2,n+1}E^{n+1}_{0,n}}{E^{n-1}_{0,n}E^{n+1}_{0,n}} + 2\sigma(\frac{E^{n+1}_{1,n+1}}{E^{n+1}_{0,n}})}{\lambda_{0,n} - \lambda_{0,n+2}}, \qquad n \in \mathbb{Z}^+ \ .$$

Deste teorema, decorre a seguinte caracterização das famílias de polinómios ortogonais clássicos.

Teorema 2.2.2 ([4]). *Uma sequência de polinómios mónicos,* $\{P_n\}$*, que satisfaz a equação diferencial de* `Bochner` *é clássica, se e somente se os coeficientes de* σ *e* τ *verificam*

$$\gamma_{n+1} \neq 0 \ , \ \ n \in \mathbb{Z}_0^+$$

isto é

$$\frac{2a_2n + 4a_0\frac{-E^{n+1}_{1,n}E^{n+1}_{1,n+1}+E^{n+1}_{2,n+1}E^{n+1}_{0,n}}{E^{n-1}_{0,n}E^{n+1}_{0,n}} + 2\sigma\big[\frac{E^{n+1}_{1,n+1}}{E^{n+1}_{0,n}}\big]}{\lambda_{0,n} - \lambda_{0,n+2}} \neq 0 \ .$$

2.3 Fórmula de Rodrigues

Vamos agora estabelecer um resultado fundamental, que associa a cada família de polinómios ortogonais clássicos, $\{P_n\}$, uma fórmula de *Rodrigues* [3]:

$$P_n = \frac{k_n}{w} D^n[\sigma^n w] \ , \tag{2.3.0}$$

sendo k_n um parâmetro, e σ um polinómio de $grau \leq 2$ (ver (2.2.1),pg.12).

Teorema 2.3.1. *Uma sequência de polinómios mónicos associados a uma dada função peso, w, verifica uma equação de* **`Bochner`** *se e somente se é definida por uma fórmula de* **`Rodrigues`**.

A demonstração deste teorema resulta das demonstrações dos dois teoremas seguintes, devidos a *Vicente Gonçalves.*

Teorema 2.3.2 ([4]). *Cada família de polinómios, $\{P_n(x)\}$, solução de uma equação de* `Bochner`

$$[\sigma(x)D^2 + \tau(x)D + \lambda_n I]y = 0 \tag{2.3.0}$$

é representada por uma expressão do tipo

$$y = P_n = \frac{1}{w(x)} D^n[w(x)\sigma^n(x)(C + \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{w(t)\sigma^{n+1}(t)} dt)] \ , \tag{2.3.0}$$

sendo $N(t)$ um polinómio de grau menor que n, $C \in \mathbb{R}$, e

$$\sigma(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 \quad , \quad \tau(x) = b_0x + b_1 \ , \tag{2.3.0}$$

tais que $w(x)$, é a função definida pela equação de **`Pearson`**

$$[\sigma(x)w(x)]' = \tau(x)w(x). \tag{2.3.0}$$

[3]Originalmente, esta fórmula foi estabelecida pelo matemático e economista Olinde Rodrigues para os Polinómios de Legendre ("Mémoire sur l'Attraction des Spheroides", Correspondence sur l'Ecole Polytechnique 3 (1816), 361-385), cf. [6]

Prova([4])

Para simplificar a notação, omitimos a seguir o argumento nas funções $\sigma(x), w(x), \tau(x)$.

De (2.3.2), temos

$$\sigma' w + \sigma w' = \tau w \Leftrightarrow (\tau - \sigma')w = \sigma w'$$

$$\frac{w'}{w} = \frac{\tau - \sigma'}{\sigma} \Leftrightarrow w = \frac{1}{\sigma}\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\tau(t)}{\sigma(t)}dt\right) = \frac{1}{\sigma}e^{A} ,$$

com $A = \int_{x_0}^{x} \frac{\tau(t)}{\sigma(t)}dt$.

Multiplicando (2.3.2) por w, temos

$$[(\sigma D^2 + \tau D + \lambda_n I)y]w = 0 \Leftrightarrow \sigma w y'' + \tau w y' + \lambda_n w y = 0 .$$

Fazendo

$$(\tau w)y' = (\frac{\tau}{\sigma}\sigma w)y' = A' e^{A} y' = (e^{A})' y' ,$$

fica

$$\sigma w y'' + \tau w y' + \lambda_n w y = 0 \Leftrightarrow e^{A} y'' + (e^{A})' y' + \lambda_n y w = 0 ,$$

i.e.

$$[e^{A} y']' + \lambda_n y w = 0 . \qquad (2.3.0)$$

Usando nesta última expressão a igualdade $e^{A} y = \sigma z$,temos sucessivamente

$$e^{A} y' = (e^{A} y)' - A' e^{A} y = (\sigma z)' - A' \sigma z ,$$

$$(e^{A} y')' = (\sigma z)'' - A''(\sigma z) - A'(\sigma z)' .$$

Como

$$A'' \sigma z = [\frac{\tau}{\sigma}]' \sigma z = \frac{\tau' \sigma - \tau \sigma'}{\sigma^2} \sigma z = \tau' z - \tau \frac{\sigma'}{\sigma} z \qquad (2.3.0)$$

e

$$A'(\sigma z)' = \frac{\tau}{\sigma}[\sigma' z + \sigma z'] = \tau \frac{\sigma'}{\sigma} z + \tau z' , \qquad (2.3.0)$$

temos, somando membro a membro (2.3) e (2.3),

$$A''(\sigma z) + A'(\sigma z') = \tau' z + \tau z' = (\tau z)' .$$

Então, (2.3), fica

$$
\begin{aligned}
&(e^A y')' + \lambda_n \frac{e^A}{\sigma} y = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sigma z)'' - (\tau z)' + \lambda_n z = 0 && (2.3.0) \\
&\Leftrightarrow \sigma'' z + 2\sigma' z' + \sigma z'' - (\tau' z + \tau z') + \lambda_n z = 0 \\
&\Leftrightarrow \sigma z'' + (2\sigma' - \tau) z' + (\sigma'' - \tau' + \lambda_n) z = 0\,. && (2.3.0)
\end{aligned}
$$

Fazendo em (2.3.0) a substituição $z = v^{(n)}$, temos

$$\sigma v^{(n+2)} + (2\sigma' - \tau) v^{(n+1)} + (\sigma'' - \tau' + \lambda_n) v^{(n)} = 0\,. \qquad (2.3.0)$$

Procuremos agora a equação diferencial de segunda ordem, cuja derivada n-ésima coincide com (2.3).

$$A_1 v'' + A_2 v' + A_3 v = N'\,, \qquad (2.3.0)$$

com grau de N menor que n, grau$(A_1) \leq 2$, grau$(A_2) = 1$ e grau$(A_3) = 0$. Derivando (2.3) n vezes, temos

$$(A_1 v^{(n+2)} + nA_1' v^{(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2} A_1'' v^{(n)}) + (A_2 v^{(n+1)} + nA_2' v^{(n)}) + A_3 v^{(n)} = 0$$

$$A_1 v^{(n+2)} + [nA_1' + A_2] v^{(n+1)} + [\frac{n(n-1)}{2} A_1'' + nA_2' + A_3] v^{(n)} = 0\,.$$

Comparando esta última equação com (2.3), temos

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \sigma \\
&nA_1' + A_2 = 2\sigma' - \tau \Leftrightarrow A_2 = 2\sigma' - \tau - n\sigma' \\
&\frac{n(n-1)}{2} A_1'' + nA_2' + A_3 = \frac{n(n-1)}{2} \sigma'' + n[2\sigma'' - \tau' - n\sigma''] + A_3 \\
&= \sigma'' - \tau' + \lambda_n && (2.3.\text{-}2)
\end{aligned}
$$

Desta última igualdade e de (2.3.2), temos

$$A_3 = \sigma'' - \tau' + \lambda_n - n[a_0(3-n) - b_0]\,.$$

Substituindo em (2.3) A_1, A_2 e A_3 pelas expressões acima calculadas, obtemos sucessivamente

$$\sigma v'' + (2\sigma' - \tau - n\sigma')v' + [\sigma'' - \tau' + \lambda_n - n(a_0(3-n) - b_0)]v = N'$$

$$\sigma v'' + \sigma' v' + [(1-n)\sigma' - \tau]v' + [(1-n)\sigma' - \tau]' v = N'$$

$$(\sigma v')' + [((1-n)\sigma' - \tau)v]' = N'$$

Esta última igualdade permite escrever

$$\sigma v' + ((1-n)\sigma' - \tau)v = N \, . \tag{2.3.-5}$$

A solução desta equação diferencial linear determina-se a seguir.

Solução da equação homogénea: $v' + \frac{(1-n)\sigma' - \tau}{\sigma} v = 0$

Temos

$$\frac{v'}{v} = \frac{(n-1)\sigma' + \tau}{\sigma} \Leftrightarrow \ln|v| = \int_{x_0}^{x} \frac{(n-1)\sigma'(t) + \tau(t)}{\sigma(t)} dt \, ,$$

e

$$\begin{aligned} v &= C \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{(n-1)\sigma'(t) + \tau(t)}{\sigma(t)} dt \right) \\ &= C \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\tau}{\sigma} dt \right) \exp\left(\int_{x_0}^{x} (n-1) \frac{\sigma'}{\sigma} dt \right) \\ &= K \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\tau}{\sigma} dt \right) \sigma^{n-1}(x) \, , \end{aligned}$$

sendo C e K parâmetros reais.

Solução da equação não-homogénea:

$$v' + \frac{(1-n)\sigma' - \tau}{\sigma} v = \frac{N}{\sigma} \, . \tag{2.3.-8}$$

Utilizando o método de variação das constantes, procuremos a solução sob a forma

$$v(x) = s(x)u(x) \, , \tag{2.3.-8}$$

sendo

$$u(x) = exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{(n-1)\sigma'(t) + \tau(t)}{\sigma(t)} dt \right)$$

Substituindo (2.3) em (2.3), e usando para simplificar a notação s e u em vez de, respectivamente, $s(x)$ e $u(x)$, temos

$$su' + s'u + su\frac{(1-n)\sigma' - \tau}{\sigma} = \frac{N}{\sigma}$$

ou

$$s[u' + u\frac{(1-n)\sigma' - \tau}{\sigma}] + s'u = \frac{N}{\sigma} \, .$$

Como

$$u' + u\frac{(1-n)\sigma' - \tau}{\sigma} = 0 \, ,$$

temos

$$s'u = \frac{N}{\sigma} \, .$$

Podemos então escrever

$$\frac{ds}{dx} = \frac{N}{u\sigma} \, ,$$

e vem

$$s = \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{u(t)\sigma} dt \, ,$$

A solução particular é

$$v = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\tau(t)}{\sigma(t)}dt} . \sigma^{n-1}(x) \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{u(t)\sigma} dt \, .$$

A solução geral de (2.3) é

$$\begin{aligned} v \quad &= Ce^{\int_{x_0}^{x} \frac{\tau(t)}{\sigma(t)}dt} . \sigma^{n-1}(x) + e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\tau(t)}{\sigma(t)}dt} . \sigma^{n-1}(x) \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{u(t)\sigma} dt \\ &= e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\tau(t)}{\sigma(t)}dt} . \sigma^{n-1}(x) [C + \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{u(t)\sigma} dt] \\ &= w\sigma^n(x)[C + \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{w\sigma^{n+1}} dt] \end{aligned}$$

e

$$z = D^n w\sigma^n(x)[C + \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{w\sigma^{n+1}} dt] \, ,$$

e também

$$y = \frac{z}{w} = \frac{1}{w} D^n w\sigma^n(x)[C + \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{w\sigma^{n+1}} dt] \, .$$

Se fizermos $N \equiv 0$ e $C = 1$, fica

$$y = \frac{1}{w} D^n [w\sigma^n] \, ,$$

que é a fórmula de *Rodrigues* para polinómios ortogonais clássicos. □

Teorema 2.3.3 ([4]). *Se uma sequência de polinómios, $\{P_n\}$, verifica uma fórmula de* `Rodrigues`*, então verifica também uma equação de* `Bochner`*.*

Prova([4])

Seja $\{P_n\}$ uma sequência de polinómios que verifica uma fórmula de *Rodrigues*. Fazendo na fórmula $n = 1$, (ver (2.3) , pg.23), temos

$$\frac{wP_1}{k_1} = (\sigma\omega)'$$

Designando $\tau(x) = \frac{P_1}{k_1}$ fica

$$w\tau = (\sigma w)' \, .$$

A função peso satisfaz uma equação de *Pearson*.

Consideremos agora

$$\begin{aligned} (\sigma^n w)' &= (\sigma^{n-1}(\sigma w))' \\ &= (n-1)\sigma^{n-2}\sigma'(\sigma w) + \sigma^{n-1}(\tau w) \end{aligned}$$

Multiplicando por σ os primeiro e terceiro membros desta dupla igualdade, temos

$$\sigma(\sigma^n w)' = (n-1)\sigma^{n-1}\sigma'(\sigma w) + \sigma^{n-1}\tau(\sigma w)$$

Derivando $n+1$ vezes ambos os membros desta última igualdade (Regra de Leibniz), obtém-se

$$\begin{aligned} &\sigma(\sigma^n w)^{(n+2)} + \binom{n+1}{1}\sigma'(\sigma^n w)^{(n+1)} + \binom{n+1}{2}\sigma''(\sigma^n w)^{(n)} = \\ &= (n-1)[\sigma'(\sigma^n w)^{(n+1)} + (n+1)\sigma''(\sigma^n w)^{(n)}] + \tau(\sigma^n w)^{(n+1)} + (n+1)\tau'(\sigma^n w)^{(n)} \, , \end{aligned}$$

ou seja

$$\sigma[(\sigma^n w)^{(n)}]'' + (2\sigma' - \tau)[(\sigma^n w)^n]' - (n+1)(\frac{n-2}{2}\sigma'' + \tau')(\sigma^n w)^{(n)} = 0 \ .$$

Como por hipótese temos $wP_n = k_n(\sigma^n w)^{(n)}$, a igualdade anterior pode escrever-se

$$\sigma(wP_n)'' + (2\sigma' - \tau)(wP_n)' = (n+1)(\frac{n-2}{2}\sigma'' + \tau')wP_n \ .$$

Subtraindo as duas igualdades seguintes

$$(\sigma w P_n)'' = \sigma(wP_n)'' + 2\sigma'(wP_n)' + \sigma''(wP_n)$$

e

$$(\tau w P_n)' = \tau(wP_n)' + \tau'(wP_n)$$

temos

$$(\sigma w P_n)'' - (\tau w P_n)' = \sigma(wP_n)'' + (2\sigma' - \tau)(wP_n)' + (\sigma'' - \tau')(wP_n) \ .$$

De (2.3) e (2.3) vem

$$(\sigma w P_n)'' - (\tau w P_n)' = [(n+1)(\frac{n-2}{2}\sigma'' + \tau') + \sigma'' - \tau']wP_n$$

$$\Rightarrow$$

$$(\sigma w)P_n'' + 2(\sigma w)'P_n' + (\sigma w)''P_n - (\tau w)P_n' - (\tau w)'P_n = (\frac{n^2-n}{2}\sigma'' + n\tau')wP_n$$

$$\Rightarrow$$

$$w[\sigma P_n'' + \tau P_n'] = wn[\frac{n-1}{2}\sigma'' + \tau']P_n$$

$$\Rightarrow$$

$$\sigma P_n'' + \tau P_n' - n[\frac{n-1}{2}\sigma'' + \tau']P_n = 0$$

Fazendo

$$-\, n[\frac{n-1}{2}\sigma'' + \tau'] = \lambda_n$$

obtemos a equação de *Bochner* (cf. definição 2.2.1,pg.12). Podemos então caracterizar as sequências de polinómios ortogonais clássicos do modo seguinte.

Definição 2.3.1. ***Sequência de polinómios ortogonais clássicos*** *é uma sequência de polinómios ortogonais que admite a seguinte representação*

$$w(x)P_n(x) = k_n D^n[\sigma^n(x)w(x)] \;,\; (n = 0, 1, \cdots) \,, \tag{2.3.-29}$$

dita fórmula de ***Rodrigues****, sendo* $\sigma(x)$ *um polinómio de grau menor ou igual a 2,* D^n *a derivada n-ésima em ordem à variável* x *e* k_n *uma constante.*

2.4 Exemplos

Vamos usar resultado do teorema 2.3.3, pg.28, para obter as equações de *Bochner* referentes aos polinómios de *Hermite* e *Laguerre*. Notar que a constante k_n é irrelevante para a determinação dos coeficientes da equação de *Bochner*.

Polinómios de Hermite

Fazendo na equação diferencial (2.2.1), pg.12, as substituições seguintes (ver tabela na pg.46)

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1 \\ \sigma''(x) &= 0 \\ \tau(x) &= -2x \\ \tau'(x) &= -2 \,, \end{aligned}$$

temos

$$H_n''(x) - 2xHn'(x) + nH_n(x) = 0 \,,$$

que é a equação diferencial de segunda ordem dos polinómios de *Hermite*.

Polinómios de Laguerre

Fazendo na equação diferencial (2.2.1), pg.12, as substituições

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= x\\ \sigma''(x) &= 0\\ \tau(x) &= x-\alpha+1\\ \tau'(x) &= -1\ ,\end{aligned}$$

temos

$$x(L_n^\alpha(x))'' + (-x+\alpha+1)(L_n^\alpha(x))' + nL_n^\alpha(x) = 0\ ,\quad \alpha > -1\ ,$$

que é a equação diferencial de segunda ordem dos polinómios de *Laguerre.*

Capítulo 3

Funções Geradoras dos Polinómios Ortogonais Clássicos

3.1 Introdução

Vamos ver como obter as funções geradoras dos polinómios ortogonais clássicos, a partir da fórmula de *Lagrange*.

Começaremos por catalogar as medidas clássicas. Demonstramos depois o Teorema de *Lagrange* e aplicamo-lo na determinação das funções geradoras correspondentes às quatro famílias de polinómios ortogonais clássicos.

Terminamos com um método para obter os coeficientes da relação de recorrência a três termos, para algumas sequências de polinómios ortogonais clássicos.

3.2 Estudo da Equação de Pearson

Definição 3.2.1. ***Equação de Pearson****, é uma equação diferencial do tipo*

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{c_0 x + c_1}{a_0 x^2 + a_1 x + a_2}$$

sendo $c_0 \neq 0$ *. As soluções da equação de Pearson dizem-se* ***funções de Pearson****.*

Uma funcional de momentos, w , associada a uma família de polinómios ortogonais clássicos, verifica uma fórmula de Rodrigues, (2.3), pg.23, a qual para $n = 1$ toma a forma

$$\frac{P_1}{k_1} w = (\sigma w)' = \sigma' w + \sigma w'$$

ou seja, fazendo

$$\frac{P_1}{k_1} = \tau(x)$$

temos

$$\frac{w'}{w} = \frac{\tau - \sigma'}{\sigma} ,$$

que é uma equação de *Pearson.* Concluimos pois, que uma função peso associada a uma família clássica de polinómios ortogonais, é solução de uma equação de Pearson com a forma

$$\tau w = (\sigma w)' .$$

As soluções da equação de Pearson dependem do tipo de raízes do denominador, no segundo membro de (3.2.1). Os casos de interesse são aqueles em que se verifica o resultado do teorema seguinte.

Teorema 3.2.1 ([13], [29]).

Para que a função peso w *tenha associada a si uma família clássica de polinómios ortogonais no intervalo real* (c, d) *, podendo* c*,* d *ser infinitos, deve verificar-se*

$$\lim_{x \to c} x^m \sigma(x) w = 0$$
$$\lim_{x \to d} x^m \sigma(x) w = 0 ,$$

para qualquer $m \in \mathbb{Z}_0^+$ *.*

Estas soluções são definidas-positivas nos respectivos intervalos de definição, (c, d), nos casos *Hermite*, *Laguerre* e *Jacobi.* No caso dos polinómios de *Bessel*, w é quase-definida, no intervalo (c, ∞) . Nesses intervalos as medidas têm momentos finitos, isto é, existem e são finitas as integrais

$$\mu_n = \int_c^d x^n y dx, \qquad n = 0, 1, \cdots .$$

Pode enunciar-se o seguinte resultado.

Teorema 3.2.2 ([6]). *Se uma função peso w associada a uma sequência de polinómios ortogonais verifica uma equação de Pearson, então a sequência de polinómios ortogonais é clássica.*

Vamos obter as funções peso que resolvem (3.2.1), correspondentes aos polinómios ortogonais clássicos de medida definida-positiva.

- **Caso Jacobi: Raízes Reais Distintas**

  Sejam c, d essas raízes, com $d > c$.

  Dividindo ambas as partes do segundo membro de (3.2.1) por a_0 , podemos escrever a equação do modo

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{x-d} + \frac{\beta}{x-c} \ .$$

  A solução tem a forma

$$\ln|y| = \beta \ln|x-d| + \alpha \ln|x-c| + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$y = k\,|x-d|^{\beta}\,|x-c|^{\alpha}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

  Para que existam os momentos (3.2), estes não podem ser calculados em intervalos infinitos, porque para algum inteiro positivo n teriamos $n+\alpha+\beta > 1$, e o momento de ordem n não existiria. Agora, pretendemos que y seja uma função real, e que se cumpra o enunciado do teorema 3.2.1. Se não impusermos restrições sobre α e β , isso acontecerá no intervalo $c \le x \le d$. Nesse intervalo, podemos escrever a solução da forma

$$y = k(x-d)^{\beta}(x-c)^{\alpha}.$$

  Para que a função seja definida positiva em (c, d) , tem que ser $k > 0$, e também $\alpha, \beta > -1,$ para que o momento de ordem zero exista.

  A equação (3.2) representa a função peso associada aos polinómios de *Jacobi*.

- **Caso Laguerre:** σ **linear não constante**

  Neste caso a equação de Pearson tem a forma

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{x} - \beta$$

  sendo a solução

$$\ln|y| = \alpha \ln|x| - \beta x + K$$
$$y = kx^{\alpha} e^{-\beta x}$$

  sendo k, K parâmetros reais.

  Esta função é real para $x \in (0, \infty)$. Os momentos existem neste intervalo se for $\alpha > -1$ e $\beta > 0$. A função y , é a função peso para os polinómios de *Laguerre.*

- **Caso Hermite:** σ **constante**

  Neste caso a equação de Pearson tem a forma

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\beta x$$

  cuja solução é

$$\ln y = -\frac{1}{2}\beta x^2 + K, \quad K \in \mathbb{R}$$
$$y = ke^{-\beta \frac{x^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

  Esta função é real para $x \in (-\infty, \infty)$. Os momentos existem neste intervalo se for $\beta > 0$. A função y , é a função peso para os polinómios de *Hermite.*

3.3 Invariância do Tipo de Intervalo de Ortogonalidade, Relativamente a Uma Transformação Linear na Variável

Seja $\{P_n(x)\}$, uma sequência de polinómios ortogonais de medida definida-positiva, com respeito a uma funcional w, tal que é verificada uma equação de *Pearson*

$$(\sigma w)' = \tau w \, ,$$

sendo σ e τ polinómios de graus respectivamente menor ou igual a 2 e igual a 1, e w a função peso.

Faça-se a mudança de variável $x = Ax^* + B$. Seja $S_k(x^*) = P_k(Ax^* + B), \quad k = 0, 1, \cdots$. Então

$$\begin{aligned}
&\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{mn}k_n \\
&\Rightarrow \int_{\frac{a-B}{A}}^{\frac{b-B}{A}} P_n(Ax^* + B)P_m(Ax^* + B)w(Ax^* + B)Adx^* = \delta_{nm}k_n \,, \\
&= \int_{\frac{a-B}{A}}^{\frac{b-B}{A}} S_n(x^*)S_m(x^*)w(Ax^* + B)Adx^* = \delta_{nm}k_n \,,
\end{aligned}$$

sendo k_n um parâmetro dependente de n. Decorre que $\{S_n(x^*)\}$, é sequência de polinómios ortogonais relativamente à função $w^*(x^*) = w(Ax^* + B)A$.

Seja σ^* a transformada de σ. Então temos $\sigma^*(x^*) = \sigma(Ax^* + B)$. A derivada de primeira ordem de $\sigma^* w^*$ em ordem a x^* é

$$D_{x^*}[\sigma^* w^*] = D_{x^*}[\sigma^*]w^* + \sigma^* D_{x^*}[w^*] \,.$$

Como

$$D_{x^*}[\sigma^*] = \{D_x[\sigma]\}_{x=Ax^*+B} D_{x^*}[x] = A\{D_x[\sigma]\}_{x=Ax^*+B} \,,$$

e

$$D_{x^*}[w^*] = \{D_x[w^*]\}_{x=Ax^*+B} D_{x^*}[x] = A^2 D_x[w]_{x=Ax^*+B} \,,$$

temos

$$\begin{aligned}
D_{x^*}[\sigma^* w^*] \quad &= A^2\{D_x[\sigma w]\}_{x=Ax^*+B} \\
&= A^2\{\omega\tau\}_{x=Ax^*+B} \\
&= A\tau(Ax^* + B)\ w^*(x^*) \\
&= \tau^*(x^*)\sigma^*(x^*) \,,
\end{aligned}$$

com $\tau^*(x^*) = A\tau(Ax^* + B)$.

Podemos definir três tipos de intervalos de ortogonalidade, invariantes para uma transformação linear : $]a, +\infty[$, $]-\infty$, $+\infty[$, $]a$, $b[$. A cada um destes intervalos corresponde uma família de polinómios ortogonais clássicos de medida definida-positiva - vêr tabela na pg.46. Verifica-se pois que $\{S_n(x^*)\}$ é sequência de polinómios ortogonais clássica da mesma família que $\{P_n(x)\}$.

3.4 Teorema de Lagrange

A função geradora de uma família de polinómios ortogonais clássicos, pode obter-se conhecendo a fórmula de *Rodrigues* e aplicando o teorema de *Lagrange*, 3.4.3,pg.37. Começamos por enunciar dois teoremas subsidiários à demonstração do teorema de *Lagrange*.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Rouché, [26]). *Sejam $\Omega \subset \mathcal{C}$ um domínio conexo, e γ uma curva de Jordan fechada em Ω . Sejam f e g , funções analíticas em Ω , satisfazendo sobre γ a desigualdade*

$$| f(z) - g(z) | < | g(z) |$$

Então, f e g têm o mesmo número de zeros no interior da região delimitada por γ .

Teorema 3.4.2 ([26]). *Sejam $\varphi(t)$ e $\tau(t)$ funções analíticas numa vizinhança de z_0, com*

$$\varphi(z_0) \neq 0 \ , \ \tau(z_0) = 0 \ , \ \tau'(z_0) \neq 0 \, .$$

Então z_0 é pólo simples de $\varphi(z)/\tau(z)$, e o resíduo desta função nesse ponto é

$$(res \frac{\varphi}{\tau})(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\tau'(z_0)} \, .$$

Teorema 3.4.3 (Fórmula de Lagrange,[11]). *Sejam $f(z)$, uma função analítica definida num domínio $G \subset \mathbf{C}$, contendo o ponto $z = a$; $F(z) = z - a - uf(z)$, sendo u um parâmetro complexo; γ, uma circunferência centrada em $z = a$, contida em G , e tal que f não se anula no interior do círculo correspondente; $\pi(z)$, uma função analítica no interior do círculo delimitado por γ.*

Então existe um valor m positivo tal que, para $\mid u \mid < m$, a função $\pi(z)/F(z)$ tem um e um só pólo, ξ, no interior do círculo delimitado por γ e

$$\frac{\pi(\xi)}{\pi(a)F'(\xi)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k[\pi(z).f^k(z)]_{z=a}}{\pi(a)} \frac{u^k}{k!} \ . \tag{3.4.0}$$

□

Prova([36])

Seja $m = min_{z\in\gamma} \left|\frac{z-a}{f(z)}\right|$.

Se for $|u| < m$, temos

$$\left|\frac{F(z)-(z-a)}{z-a}\right| = \left|\frac{u}{\frac{z-a}{f(z)}}\right| < \frac{m}{\left|\frac{z-a}{f(z)}\right|} < 1 \ ,$$

i.e.

$$|F(z)-(z-a)| < |z-a| \ ,$$

pelo que o Teorema de Rouché nos permite concluir que F e $z-a$ têm o mesmo número de zeros, ou seja um zero, no interior do círculo delimitado por γ. Seja ξ esse zero. Temos $F(\xi) = 0$.

Seja agora $\pi(z)$ uma função analítica no interior do círculo delimitado por γ. Então, $\frac{\pi(z)}{F(z)}$, tem um só pólo no interior de γ, que é ξ.

O resíduo de $\frac{\pi(z)}{F(z)}$ em $z = \xi$ é $\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)}$ (teorema 3.4.2).

Aplicando a fórmula dos resíduos

$$\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\pi(z)}{F(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\pi(z)}{z-a-uf(z)}dz \ .$$

Como $\mid \frac{uf(z)}{z-a} \mid < 1$, temos

$$\frac{1}{z-a-uf(z)} = \frac{1}{z-a}.\frac{1}{1-\frac{u.f(z)}{z-a}} = \frac{1}{z-a}.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k(z)}{(z-a)^k}u^k$$

e fica

$$\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\pi(z).f^k(z)}{(z-a)^{k+1}}u^k dz \ .$$

Utilizando a forma integral para a k-ésima derivada de uma função g(z) no ponto z=a (derivada essa que vamos representar por $D^k g(a)$),

$$D^k g(a) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{k+1}}dz \,,$$

temos

$$\frac{\pi(\xi)}{\pi(a)F'(\xi)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k[\pi(z).f^k(z)]_{z=a}}{\pi(a)}\frac{u^k}{k!} \,, \tag{3.4.0}$$

que é a fórmula de *Lagrange.* □

Fazendo para cada família de polinómios ortogonais, as seguintes substituições na equação (3.4)

$$\pi(x) = w(x) \qquad f(x) = \sigma(x) \qquad a = x \,,$$

temos

$$\frac{1}{w(x)}\frac{w(\xi)}{F'(\xi)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w(x)}D^k[w(x).\sigma^k(x)]\frac{u^k}{k!} \,. \tag{3.4.0}$$

Como $\frac{1}{w(x)}D^k[w(x).\sigma^k(x)]$ é uma fórmula de *Rodrigues*, o primeiro membro de (3.4) é uma função geradora.

3.5 Aplicação aos Polinómios Ortogonais Clássicos

Vamos utilizar o teorema de *Lagrange*, para obter as funções geradoras dos polinómios de *Hermite*, *Laguerre*, *Jacobi* e *Bessel.*

1. **Polinómios de Hermite**

Fazendo as seguintes substituições na fórmula de Lagrange, (3.4)

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= w(x) = e^{-x^2} \\
f(z) &= \sigma(z) = 1 \\
F(z) &= z - x - u \\
F(z) &= 0 \Rightarrow z = x + u = \xi \\
F'(z) &= 1 \\
F'(\xi) &= 1 \\
\pi(\xi) &= w(\xi) = e^{-(x+u)^2},
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(x)}\frac{w(\xi)}{F'(\xi)} &= e^{x^2}e^{-(x+u)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{x^2}D^k[e^{-x^2}].\frac{u^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Designando a função geradora por $G(x,u)$, temos

$$G(x,u) = e^{-2xu-u^2} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x)\frac{u^k}{k!},$$

sendo $H_k(x) = e^{x^2}D^k[e^{-x^2}]$ o polinómio de *Hermite* de grau k.

2. Polinómios de Laguerre

Fazendo as seguintes substituições na fórmula de *Lagrange* (3.4)

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= w(x) = x^\alpha.e^{-x} \\
f(z) &= \sigma(z) = z \\
F(z) &= z - x - uz \\
F(z) &= 0 \Rightarrow z = \frac{x}{1-u} = \xi \\
F'(z) &= 1-u \\
F'(\xi) &= 1-u \\
\pi(\xi) &= w(\xi) = (\frac{x}{1-u})^\alpha e^{-\frac{x}{1-u}},
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(x)}\frac{w(\xi)}{F'(\xi)} &= x^{-\alpha}e^x\frac{x^\alpha}{(1-u)^{\alpha+1}}e^{-\frac{x}{1-u}} \\
&= \frac{1}{(1-u)^{\alpha+1}}e^{-\frac{xu}{1-u}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{-\alpha}e^x D^k[x^{\alpha+k}e^{-x}].\frac{u^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Designando a função geradora por $G(x,u)$, temos

$$G(x,u) = \frac{1}{(1-u)^{\alpha+1}}e^{-\frac{xu}{1-u}} = \sum_{k=0}^{\infty} L_k^\alpha(x)\frac{u^n}{n!},$$

sendo $L_k^\alpha(x) = x^{-\alpha}e^x D^k[x^{\alpha+k}e^{-x}]$ o polinómio de *Laguerre* de grau k , com parâmetro α .

3. Polinómios de Jacobi

Façamos as substituições abaixo indicadas, na fórmula de *Lagrange*, (3.4).

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \\
f(z) &= \sigma(z) = 1-z^2 \\
F(z) &= z - x - u(1-z^2) \\
F(z) &= 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4u(u+x)}}{2u} \ .
\end{aligned}$$

Como $\lim_{u\to 0} F(z) = x$, se tomamos a raíz que corresponde ao sinal '-' à esquerda do radical, e $\lim_{u\to 0} F(z) = \infty$, se tomamos a raíz que corresponde ao sinal '+' à esquerda do radical, temos

$$\xi = \frac{-1 + \sqrt{1+4u(u+x)}}{2u} \ .$$

Substituamos ainda

$$\begin{aligned}
F'(z) &= 1 + 2zu \\
F'(\xi) &= +\sqrt{1+4u(u+x)} \\
\pi(\xi) &= w(\xi) = \left(1 + \frac{1-\sqrt{1+4u(u+x)}}{2u}\right)^\alpha \left(1 - \frac{1-\sqrt{1+4u(u+x)}}{2u}\right)^\beta .
\end{aligned}$$

Fazendo

$$R = \sqrt{1+4u(u+x)} \ ,$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(x)}\frac{w(\xi)}{F'(\xi)} &= \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta R}\left(1+\frac{1-R}{2u}\right)^\alpha\left(1-\frac{1-R}{2u}\right)^\beta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} D^k[(1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k}]\frac{u^k}{k!} \ .
\end{aligned}$$

Designando a função geradora por $G(x,u)$, temos

$$G(x,u) = \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta R}\left(1+\frac{1-R}{2u}\right)^\alpha\left(1-\frac{1-R}{2u}\right)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\alpha,\beta}\frac{u^k}{k!} \ ,$$

sendo $P_k^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} D^k[(1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k}]$ o polinómio de *Jacobi* de grau k , com parâmetros $\alpha,\ \beta$.

4. Polinómios de Bessel

Os polinómios de *Bessel*, têm a sua função peso definida sobre o círculo unitário. São ortogonais no sentido quase-definido (cf. definição 1.2.5).

É-lhes aplicável o teorema de *Lagrange*. Façamos as substituições abaixo indicadas, na fórmula de *Lagrange*, (3.4).

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= w(x) = x^\alpha e^{-2/x} \\
f(z) &= \sigma(z) = z^2 \\
F(z) &= z - x - uz^2 \\
F(z) &= 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4ux}}{2u} \ .
\end{aligned}$$

Como $\lim_{u\to 0} = x$, se tomamos a raíz que corresponde ao sinal '-' à esquerda do radical, e $\lim_{u\to 0} = \infty$, se tomamos a raíz que corresponde ao sinal '+' à esquerda do radical, temos

$$\xi = \frac{1-\sqrt{1-4ux}}{2u} \ .$$

Substituamos ainda

$$\begin{aligned}
F'(z) &= 1 - 2zu \\
F'(\xi) &= \sqrt{1-4ux} \\
\pi(\xi) &= w(\xi) = \left(\frac{1-\sqrt{1-4ux}}{2u}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{4u}{1-\sqrt{1-4ux}}\right).
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{w(x)}\frac{w(\xi)}{F'(\xi)} &= x^{-\alpha}e^{2/x}\left(\frac{1-\sqrt{1-4ux}}{2u}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{4u}{1-\sqrt{1-4ux}}\right)\Big/\sqrt{1-4ux} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{-\alpha}e^{2/x}D^k[x^{\alpha+2k}e^{-2/x}]\frac{u^k}{k!} \ .
\end{aligned}$$

Designando a função geradora por $G(x,u)$, temos

$$G(x,u) = x^{-\alpha}e^{2/x}\left(\frac{1-\sqrt{1-4ux}}{2u}\right)^{\alpha}\exp\left(-\frac{4u}{1-\sqrt{1-4ux}}\right)\Big/\sqrt{1-4ux} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{\alpha}\frac{u^k}{k!} \ ,$$

sendo $B_k^{\alpha}(x) = x^{-\alpha}e^{2/x}D^k[x^{\alpha+2k}e^{-2/x}]$ o polinómio de *Bessel* de grau k , com parâmetro α .

3.6 Relação de Recorrência a Três Termos

Vamos obter as relações de recorrência a três termos para os polinómios de *Hermite* e *Laguerre.*

1. Polinómios de Hermite

Derivando em ordem a u a função geradora

$$G(x,u) = e^{2xu-u^2} \ ,$$

temos

$$\frac{\partial G(x,u)}{\partial u} = (2x-2u)e^{2xu-u^2} = (2x-2u)G(x,u) \ .$$

Substituindo nesta expressão $G(x,u)$ pelo seu desenvolvimento em série,

$$G(x,u) = H_0 + H_1 u + \cdots + H_n\frac{u^n}{n!} + \cdots \ ,$$

fica

$$[H_1+H_2u+\cdots+H_n\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots] = (2x-2u)[H_0+H_1u+\cdots+H_{n-1}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}+H_n\frac{u^n}{n!}+\cdots] \ .$$

Igualando os coeficientes de u^n dos dois membros, obtém-se

$$\frac{1}{n!}H_{n+1} = \frac{2x}{n!}H_n - \frac{2}{(n-1)!}H_{n-1} \ ,$$

i.e.

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0 \ ,$$

que é a relação de recorrência pretendida.

2. Polinómios de Laguerre

Derivando em ordem a u a função geradora

$$G(x,u) = \frac{1}{(1-u)^{\alpha+1}} . \exp^{-(xu)/(1-u)} ,$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(x,u)}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}[\frac{1}{(1-u)^{\alpha+1}} \exp^{-xu/(1-u)}] \\
&= \frac{\exp^{-xu/(1-u)}}{(1-u)^{\alpha+1}}[-\frac{x}{(1-u)^2} + \frac{\alpha+1}{1-u}] \\
&= G(x,u)[-\frac{x}{(1-u)^2} + \frac{\alpha+1}{1-u}]
\end{aligned}$$

i.e.

$$(1-u)^2 \frac{\partial G(x,u)}{\partial u} + [x - (\alpha+1) + (\alpha+1)u)]G(x,u) = 0 .$$

Substituindo $G(x,u)$ pela sua representação em série

$$G(x,u) = L_o^\alpha + L_1^\alpha . u + \cdots + L_n^\alpha \frac{u^n}{n!} + \cdots ,$$

fica

$$\begin{aligned}
&(1-2u+u^2)[\cdots + L_{n-1}^\alpha \frac{u^{n-2}}{(n-2)!} + L_n^\alpha \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} + L_{n+1}^\alpha \frac{u^n}{n!} + \cdots] + \\
&+[x-(\alpha+1)+(\alpha+1)u][\cdots + L_{n-1}^\alpha \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} + L_n^\alpha \frac{u^n}{n!} + \cdots] = 0 .
\end{aligned}$$

Igualando a zero o coeficiente de u^n, temos

$$L_{n+1}^\alpha - 2nL_n^\alpha + n(n-1)L_{n-1}^\alpha + [x-(\alpha+1)]L_n^\alpha + (\alpha+1)nL_{n-1}^\alpha = 0 .$$

Finalmente

$$L_{n+1}^\alpha + (-2n + x - (\alpha+1))L_n^\alpha + n(n+\alpha)L_{n-1}^\alpha = 0 ,$$

que é a relação de recorrência pretendida.

3.7 Resumo de Propriedades

As famílias de polinómios ortogonais clássicos, têm propriedades só por elas partilhadas dentro das famílias de polinómios ortogonais, sendo as seguintes algumas das mais relevantes, ([1]) :

(i) Satisfazem uma equação diferencial do tipo *Bochner*

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0\,, \tag{3.7.0}$$

sendo $\sigma(x)$ polinómio de grau menor ou igual a 2 e $\tau(x)$ polinómio de grau 1, ambos independentes de n; λ_n, é independente de x.

(ii) A sequência das derivadas de uma sequência de polinómios ortogonais clássica, é ainda uma sequência de polinómios ortogonais clássica.

(iii) Satisfazem uma fórmula de *Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{k_n}{w(x)} D^n[w(x).\sigma^n(x)],$$

sendo k_n um parâmetro numérico, $w(x)$ uma medida definida-positiva ou quase-definida, e $\sigma(x)$ o coeficiente da equação de *Bochner.*

(iv) São ortogonais com respeito a uma função peso, w, que satisfaz uma equação diferencial do tipo *Pearson*

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{P(x)}{\sigma(x)}\,,$$

com $[\sigma(x).w(x)]' = \tau(x)w(x)$ e $P(x) = \tau(x) - \sigma'(x)$, sendo σ, w, τ como referido em (i).

Estas propriedades são equivalentes, i.e., cada uma delas pode ser usada para definir sequências de polinómios ortogonais clássicas. Por outro lado, a inversa de cada uma das propriedades (i)-(iv) é válida, o que significa que, uma sequência de polinómios , $\{P_n(x)\}$, que satisfaça alguma destas propriedades, é necessáriamente uma sequência de polinómios ortogonais clássica. Alguns dos autores de demonstrações das inversas destas quatro propriedades : *Bochner*, (cf. [1][10]) e *Vicente Gonçalves*, (cf. [4]), provaram a inversa de (i) ; *W.Hahn* (cf. [1]), *N. Sonine* (cf. [29]), *H.L.Krall* (cf.[10]) e *Vicente Gonçalves*, (cf. [4]), provaram a inversa de (ii); *Tricomi* (cf. [10]), *Hildebrandt* (cf. [1]) e *Hebert* (cf. [10]), provaram a inversa de (iii); *Hildebrandt* (cf. [1]), provou a inversa de (iv).

Existem três famílias de sequências de polinómios ortogonais clássicos de medida definida-positiva: polinómios de *Hermite*, H_n, polinómios de *Laguerre*, L_n^α, e polinómios de *Jacobi*, $P_n^{\alpha,\beta}$. A tabela seguinte (cf. [25]), representa para cada uma destas famílias de polinómios, expressões normalizadas para as funções $\sigma(x)$ e $\tau(x)$, coeficientes da equação diferencial (3.7), a função peso w, e o intervalo I de ortogonalidade.

Tabela 3.7

P_n	σ	τ	I	w
H_n	1	$-2x$	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}
L_n^α	x	$-x+\alpha+1$	$(0,\infty)$	$x^\alpha e^{-x},\ \alpha>-1$
$P_n^{\alpha,\beta}$	$1-x^2$	$-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$	$[-1,+1]$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \alpha,\beta>-1$

Existe também uma família clássica de medida quase-definida, que são os polinómios de Bessel, caracterizados na tabela seguinte ([23]).

P_n	σ	τ	I	w
B_n^α	x^2	$2(x+1)$	circ. unitária	$\begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ -e^{-\frac{2}{x}}\int_x^\infty \frac{e^{\frac{2}{t}}e^{-\frac{t}{4}}sent^{\frac{1}{4}}}{t^2}dt & \text{se } x>0 \end{cases}$

Capítulo 4

Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais de Duas Variáveis

4.1 Introdução

Neste capítulo estendem-se a duas variáveis, alguns aspectos da teoria de polinómios ortogonais, exposta nos capítulos 1 e 2, como sejam os conceitos de funcional de momentos, determinantes de Hankel, funcional quase–definida e definida-positiva. Apresenta-se uma relação de recorrência a três termos. A propósito duma forma vectorial para a relação de recorrência a três termos, apresentamos um análogo fraco do teorema de *Favard*, [37].

À semelhança do que foi feito para polinómios de uma variável, procuram-se os polinómios ortogonais que verifiquem uma equação diferencial linear de segunda ordem, neste caso às derivadas parciais. Neste ponto, resume-se o trabalho e os resultados de *Krall* e *Sheffer*, [20], que enfraquecendo a definição de ortogonalidade, obtêm uma classificação das soluções da equação diferencial, estabelecendo uma analogia fraca com as famílias de polinómios clássicos em uma variável, caracterizadas no capítulo 2. Adoptamos definições, resultados e notação de *Krall* e *Sheffer*, [20], de *Kim et al.*, [19], e de *L. Littlejohn*, [22].

4.2 Propriedades Gerais

Definição 4.2.1. ***Polinómio real em duas variáveis*** *x,y de grau $m+n$, p_{mn}, é uma expressão do tipo*

$$p_{mn} = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{j=0}^{k} a_{k-j,j} x^{k-j} y^j \ ,$$

sendo os $a's$ reais.

Definição 4.2.2 ([19]). *Seja $\mathcal{P}_n$, $n \geq 0$, o espaço vectorial dos polinómios de grau n em duas variáveis, e $\mathcal{P} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{P}_n$.*

Diz-se ***sequência de polinómios em duas variáveis****, uma sequência do tipo $\{p_{n-j,j}\}_{j=0,n=0}^{n \ \infty}$, tal que*

(i) $\text{grau}(p_{n-j,j}) = n$, $0 \leq j \leq n$;

(ii) $\{p_{n0}, p_{n-1,1}, \cdots, p_{0n}\}$ *são funções linearmente independentes, a menos de um polinómio pertencente a $\mathcal{P}_{n-1}$, ($n \geq 0$, $\mathcal{P}_{-1} = 0$).*

Definição 4.2.3 ([19]). *Seja $P_n := [p_{n,0} \ p_{n-1,1} \ \cdots \ p_{0,n}]^T$, e denote-se a sequência de polinómios, $\{p_{n-j,j}\}_{j=0,n=0}^{n \ \infty}$, por $\{P_n\}$. Esta sequência designa-se por* ***sequência de polinómios mónica****, se for*

$$p_{n-j,j} = x^{n-j} y^j + (\textit{termo de } \mathcal{P}_{n-1}) \ , \ 0 \leq j \leq n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Definição 4.2.4 ([19]). *Dada a sequência de polinómios, $\{P_n\}$, onde $p_{n-j,j}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}^n x^{n-k} y^k + (\textit{ termo de } \mathcal{P}_{n-1})$, $0 \leq j \leq n$, diz-se* ***normalização*** *de $\{P_n\}$, a sequência de polinómios $\{\mathbb{P}_n\}$, definida por $\mathbb{P}_n = A_n^{-1} P_n$, com $A_n = [a_{jk}^n]_{j,k=0}^n$, $n \geq 0$, matriz de de dimensão $(n+1)(n+1)$, de determinante não nulo.*

Observação. Dada uma sequência de polinómios , $\{P_n\}$, podemos escrever

$$P_n = \begin{bmatrix} p_{n,0} \\ \vdots \\ p_{0,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{0,0}^n & \cdots & a_{0,n}^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,0}^n & \cdots & a_{n,n}^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^n \\ x^{n-1}y \\ \vdots \\ xy^{n-1} \\ y^n \end{bmatrix} + \mathcal{Q}_{n-1}^* \ ,$$

com

$$\mathcal{Q}^*_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & a^{n-1}_{00} & \cdots & a^{n-1}_{0,n-1} \\ 0 & a^{n-1}_{10} & \cdots & a^{n-1}_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^{n-1}_{n,0} & \cdots & a^{n-1}_{n,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ x^{n-1} \\ x^{n-2}y \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^{n-2}_{00} & \cdots & a^{n-2}_{0,n-2} \\ 0 & 0 & a^{n-2}_{10} & \cdots & a^{n-2}_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a^{n-2}_{n,0} & \cdots & a^{n-2}_{n,n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x^{n-2} \\ x^{n-3}y \\ \vdots \\ y^{n-2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \cdots + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a^{0}_{00} \\ 0 & \cdots & 0 & a^{0}_{10} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^{0}_{n,0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Temos então

$$\mathbb{P}_n = A_n^{-1} P_n = \begin{bmatrix} x^n \\ x^{n-1}y \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} + A_n^{-1}\mathcal{Q}^*_{n-1} \tag{4.2.0}$$

Corolário 4.2.1. *Dada uma sequência de polinómios , $\{P_n\}$, as matrizes de normalização, A_n, são únicas.*

Definição 4.2.5. *Dada uma função peso, w, dizem-se* ***`momentos de ordem`*** *m, n* ***`de`*** *w, os números reais α_{mn}, definidos da forma*

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \langle w, (x^m y^n) \rangle \\ &= \iint_D x^m y^n w(x,y) dxdy = \langle w, x^m y^n \rangle \ . \end{aligned} \tag{4.2.0}$$

A funcional linear w, diz-se ***`funcional de momentos`*** *.*

Definição 4.2.6 ([19]). *Dada uma função peso, w, para a qual existam os momentos definidos em (4.2.1), dizem-se* ***`determinantes de Hankel de`*** *w, os determinantes definidos da forma*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \cdots & \alpha_{0,n} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{2,0} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{0,n} & \alpha_{1,n} & \cdots & \alpha_{0,2n} \end{vmatrix} , \ n \geq 0 \quad .$$

A matriz Δ_n, é uma matriz de ordem $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, sendo a primeira linha constituida pelos elementos

$$\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{02}, \cdots, \alpha_{n0}, \alpha_{n-1,1}, \cdots, \alpha_{0n} \ ,$$

e obtendo-se as linhas subsequentes, adicionando os inteiros (i,j) *aos índices da primeira linha, com* (i,j) *tomando para cada linha, respectivamente, os valores seguintes*

$$(i,j) = (1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),\cdots,(n,0),(n-1,1),\cdots,(0,n)\ .$$

Se $\Delta_n \neq 0$, *(respectivamente,* $\Delta_n > 0$ *),* $n \geq 0$, *então a funcional* w *diz-se* ***quase-definida*** *(respectivamente,* ***definida-positiva****) .*

Teorema 4.2.1 ([19]). *Para qualquer sequência de polinómios ,* $\{P_n\}$*, existe uma única funcional de momentos (a menos de um factor constante não nulo),* w*, dita* ***funcional de momentos canónica*** *de* $\{P_n\}$*, definida a partir dos seus momentos por*

$$\langle w,1\rangle = 1\ ,\quad \langle w,P_n\rangle = 0,\quad n = 1,2,\cdots,$$

sendo $\langle w,P_n\rangle$ *o vector coluna* $[\langle w,p_{n-j,j}\rangle]_{j=0}^{n}$ *.*

Prova

Definir a funcional de momentos w, corresponde a definir os momentos α_{mn}, $m,n = 0,1,2,\cdots$.

Seja

$$\alpha_{00} = \langle w,1\rangle = 1\ .$$

Então

$$\langle w,P_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \langle w,p_{10}\rangle \\ \langle w,p_{01}\rangle \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^1_{00}\langle w,x\rangle + a^1_{01}\langle w,y\rangle + a^0_{00}\langle w,1\rangle \\ a^1_{10}\langle w,x\rangle + a^1_{11}\langle w,y\rangle + a^0_{10}\langle w,1\rangle \end{bmatrix} = 0\ , \qquad (4.2.0)$$

sendo os coeficientes os referidos na observação da página 48.

Como $\begin{vmatrix} a^1_{00} & a^1_{01} \\ a^1_{10} & a^1_{11} \end{vmatrix} \neq 0$ (cf. a definição 4.2.4, pg.48), então $\alpha_{10} = \langle w,x\rangle$ e $\alpha_{01} = \langle w,y\rangle$, ficam definidos de forma única. É imediato verificar que esta unicidade de definição se estende a todos os momentos α_{ij}, $i,j = 0,1,\cdots$. $\square$

Definição 4.2.7 ([19]). *Uma sequência de polinómios, $\{P_n\}$, diz-se* ***sequência de polinómios fracamente ortogonal****, relativamente a uma medida w, se w é uma funcional de momentos não nula tal que*

$$\langle w, P_m P_n^T \rangle = 0, \quad m \neq n \, .$$

Se além disso for não singular e diagonal a matriz $H_n := \langle w, P_n P_n^T \rangle$, $n \geq 0$, então $\{P_n\}$ diz-se ***sequência de polinómios ortogonais*** *relativamente a w.*

Observação. Notar que

(i)

$$\begin{aligned}
\langle w, P_m P_n^T \rangle &= \langle w, \begin{bmatrix} p_{m0} \\ p_{m-1,1} \\ \vdots \\ p_{0m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n0} & p_{n-1,1} & \cdots & p_{0n} \end{bmatrix} \rangle \\
&= \begin{bmatrix} \langle w, p_{m0} p_{n0} \rangle & \cdots & \langle w, p_{m0} p_{0n} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle w, p_{0m} p_{n0} \rangle & \cdots & \langle w, p_{0m} p_{0n} \rangle \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(ii) Seja a sequência de polinómios fracamente ortogonal $\{P_n\}$, com $P_n = [p_{n0}, p_{n-1,1}, \cdots, p_{0n}]^T$. Se cada um dos polinómios $p_{n-j,j}$, $0 \leq j \leq n$ for substituido, respectivamente, por $p^*_{n-j,j}$, com

$$p^*_{n-j,j} = \sum_{i=0}^{n} a_i p_{n-i,i}$$

sendo os a_i não todos nulos, e mantendo-se a independência linear entre os $p^*_{n-j,j}$, a sequência de polinómios resultante continua a ser uma sequência de polinómios fracamente ortogonal. De facto, com

$$p^*_{n-j,j} = \sum_{s=0}^{n} a_s p_{n-s,s} \quad e \quad p^*_{m-i,i} = \sum_{k=0}^{n} b_k p_{n-k,k} \; ,$$

temos

$$\langle w, p^*_{n-j,j} p^*_{m-i,i} \rangle = \langle w, \sum_{s=0}^{n} a_s p_{n-s,s} \sum_{k=0}^{n} b_k p_{n-k,k} \rangle = \sum_{s,k=0}^{n} \langle w, p_{n-s,s} p_{m-k,k} \rangle = 0, \quad m \neq n. \tag{4.2.-2}$$

Isto significa que o conjunto de polinómios que constitui P_n é base de um espaço vectorial $(n+1)$-dimensional, V_n, pode ser substituido por qualquer base para V_n, continuando a sequência de polinómios resultante a ser uma sequência de polinómios fracamente ortogonal. As condições de unicidade de uma sequência de polinómios fracamente ortogonal relativamente a uma funcional w, são estabelecidas no teorema 4.2.3.

Teorema 4.2.2 ([19]).

(i) Se $\{P_n\}$ é sequência de polinómios fracamente ortogonal relativamente a w, então w difere da funcional canónica de momentos de $\{P_n\}$, σ, de um factor constante não nulo.

(ii) Se $\{P_n\}$ é sequência de polinómios ortogonais relativamente a w, então a normalização de $\{P_n\}$, $\{\mathbb{P}_n\}$, é uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mas não necessariamente uma sequência de polinómios ortogonais.

Prova

(i) Tem que ser $\langle w, 1\rangle \neq 0$, porque caso contrário teriamos $\langle w, x^i y^j\rangle = 0, \quad i,j = 0,1,2,\cdots$ (cf. a equação (4.2)), e w seria identicamente nula.

Seja então $\langle w, 1\rangle = c$, sendo c uma constante, e portanto $\langle \frac{w}{c}, 1\rangle = 1$. Como $\{P_n\}$ é sequência de polinómios , é-lhe aplicável o teorema 4.2.1. A prova deste teorema deixa claro que

$$\langle \sigma, x^i y^j\rangle = \langle \frac{w}{c}, x^i y^j\rangle, \quad i,j = 0,1,\cdots$$

e portanto são iguais as funcionais $c\sigma$ e w.

(ii) Dada a sequência de polinómios ortogonais $\{P_n\}$, a sua normalização é $\{A_n^{-1}P_n\}$ (cf. a definição 4.2.4, pg.48).
Temos

$$\begin{aligned} \langle w, (A_n^{-1}P_n)(A_n^{-1}P_n)^T\rangle &= \langle w, A_n^{-1}P_nP_n^T(A_n^{-1})^T\rangle \\ &= A_n^{-1}\langle w, P_nP_n^T\rangle(A_n^{-1})^T \ . \end{aligned} \qquad (4.2.-2)$$

Embora a matriz $\langle w, P_n P_n\rangle$ seja diagonal, $A_n^{-1}\langle w, P_n P_n\rangle(A_n^{-1})^T$ só o é se A_n^{-1} for matriz ortogonal, i.e., a inversa coincide com a transposta. □

Corolário 4.2.2 ([19]). *Se $\{P_n\}$ é sequência de polinómios fracamente ortogonal, então a sua normalização, $\{\mathbb{P}_n\}$, é ainda sequência de polinómios fracamente ortogonal.*

Os dois lemas seguintes, enunciam resultados que vão ser usados na demonstração do teorema 4.2.3.

Lema 4.2.1 ([20]). *Seja w uma funcional de momentos e n um inteiro positivo. Para que a cada polinómio homogéneo de grau n, $H_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j} y^j$ (podendo ser todos os a_j nulos), corresponda um único polinómio R_{n-1} de grau $n-1$, tal que*

$$P(x,y) = H_n(x,y) + R_{n-1}(x,y)\ ,$$

seja ortogonal ao espaço vectorial dos polinómios de grau menor ou igual a $n-1$, $\mathcal{P}_{n-1}$, é necessário e suficiente que se verifique $\Delta_{n-1} \neq 0$, $n = 1, 2, \cdots,$ sendo Δ_{n-1} o determinante de `Hankel` *de ordem $n-1$ (cf. definição 4.2.6,pg.49).*

Lema 4.2.2 ([20]). *Seja $\{P_n\}$ uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, correspondente a uma dada funcional w. Então para cada n, o espaço vectorial V_n (cf. (ii), na observação da pg.51), tem uma base $\{q_{n0}, \cdots, q_{0n}\}$, satisfazendo a condição*

$$\langle w, q_{n-k,k} q_{n-j,j}\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ K \neq 0, & k = j \end{cases} \tag{4.2.-2}$$

sendo K um parâmetro dependente de n e j, e $k, j = 0, 1, \cdots, n$.

Observação.

A base que satisfaz (4.2.2) não é única. De facto, uma transformação ortogonal sobre uma base para o espaço V_n, produz uma outra base, para a qual é válida (4.2.2).

Como decorre do teorema 4.2.3 abaixo enunciado, as mudanças de bases adequadas nos espaços V_n, associados a uma sequência de polinómios fracamente ortogonal mónica e única, relativa a uma dada função peso, permitem obter infinitas sequências de polinómios ortogonais.

Teorema 4.2.3 ([19]). *Dada uma funcional de momentos, w, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) A funcional w, é quase-definida, i.e., $\Delta_n \neq 0\,,\; n \geq 0\,.$

(ii) Existe uma sequência de polinómios ortogonais, $\{P_n\}$, relativa a w.

(iii) Existe uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica e única, $\{\mathbb{P}_n\}$, relativa a w.

(iv) Existe uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica, $\{\mathbb{P}_n\}$, relativa a w, tal que $H_n := \langle w, \mathbb{P}_n \mathbb{P}_n^T \rangle$ é não singular.

Prova

(i)⇒(iii)

O resultado do lema 4.2.1 e (i), permitem construir uma sequência de polinómios mónica, $\{P_n\}$, com

$$P_n = \left[\begin{array}{ccc} p_{n0} & \cdots & p_{0n} \end{array}\right]^T \,,$$

e

$$p_{n-j,j} = x^{n-j}y^j + (\text{termo de } \mathcal{P}_{n-1})\,,\; 0 \leq j \leq n\,,$$

de forma a termos

$$p_{n-j,j} \perp \mathcal{P}_{n-1}\ , \quad 0 \leq j \leq n\,,$$

isto é,

$$\langle w, P_m P_n^T \rangle = 0\,,\; m \neq n\,.$$

O termo de grau inferior a n é único para cada polinómio, e portanto a sequência de polinómios é única. Então $\{P_n\}$ é sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica e única.

(iii)⇒(i)

O lema 4.2.1 é condição necessária e suficiente.

(iii)⇒(ii)

Esta implicação demonstra-se com base no lema 4.2.2.

(ii)⇒(iii)

Normalizando a sequência de polinómios ortogonais, temos uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica. Essa sequência de polinómios fracamente ortogonal só pode ser a que é construida na demonstração da implicação (i)⇒(iii), que é única.

(ii) ⇒ (iv)

Seja $\{P_n\}$ a sequência de polinómios ortogonais referida em (ii).
A matriz, $\langle w, P_n P_n^T \rangle$ é diagonal. Então, a sequência de polinómios , $\{A_n P_n\}$, (com, A_n, matriz regular) é uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, porque

$$\langle w, (A_n P_n)(A_m P_m)^T \rangle = A_n \langle w, P_n P_m \rangle A_m^T = 0 \ , \ n \neq m \ .$$

Também a matriz $\langle w, (A_n P_n)(A_n P_n)^T \rangle$ é não singular, porque

$$\langle w, (A_n P_n)(A_n P_n)^T \rangle = A_n \langle w, P_n P_n \rangle A_n^T$$

é o produto de 3 matrizes não singulares.

(iv) ⇒ (ii)

Se $\{\mathbb{P}_n\}$ é sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica, tal que $H_n := \langle w, \mathbb{P}_n \mathbb{P}_n^T \rangle$ é não singular, então as bases dos espaços vectoriais, V_n, associados à sequência de polinómios fracamente ortogonal, podem ser ortogonalizados (cf. o lema 4.2.2), obtendo-se uma sequência de polinómios, $\{P_n\}$, para a qual se tem a matriz $H_n := \langle w, P_n P_n^T \rangle$ não singular e diagonal, para $n = 0, 1, \cdots$, isto é, $\{P_n\}$ é sequência de polinómios ortogonais. □

Teorema 4.2.4 ([20]). *Seja $\{P_n\}$ uma sequência de polinómios , com $P_n = [p_{n0} \cdots p_{0n}]^T$. Então um polinómio qualquer de grau n, Q_n, é representável por uma combinação* *linear única dos elementos dos vectores* P_k , $k = 0, .., n$, *não contendo elementos de nenhum vector* P_j , $j > n$.

Prova

Imediato, pelo facto de os termos homogéneos de grau menor ou igual a k de $Q_n(x, y)$, serem gerados pelos polinómios de V_k de forma única, $k = 0, 1, \cdots, n$. □

Teorema 4.2.5 ([20]). *Seja* w *uma funcional quase-definida, e* $\{\mathbb{P}_n\}$ *a sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica, associada. O polinómio* $Q_n(x, y)$ *de grau* n, *é ortogonal a todos os polinómios de grau menor que* n, *se e somente se* $Q_n \in V_n$.

Prova([20])

(⇐) Imediato.

(⇒) Se $Q_n = 0$, então $Q_n \in V_n$.

Seja Q_n não identicamente nulo, grau(Q_n)=n e $Q_n \perp \mathcal{P}_{n-1}$, com

$$Q_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j} y^j + R_{n-1}(x, y)$$

e grau de $R_{n-1}(x, y)$ menor ou igual a $n - 1$.

Então

$$Q_n(x, y) - \sum_{j=0}^{n} a_j p_{n-j,j}(x, y) = R^*_{n-1}(x, y) , \qquad (4.2.-2)$$

com grau de $R^*_{n-1}(x, y)$ menor ou igual a $n - 1$.

O primeiro membro da equação (4.2) é ortogonal a todos os polinómios de grau inferior a n, e portanto também o é R^*_{n-1}. Temos então

$$R^*_{n-1} = \sum_{i+j=0}^{n-1} a_{ij} x^i y^j \quad \text{e} \quad R^*_{n-1} \perp x^i y^j, \qquad 0 \leq i + j \leq n - 1 .$$

Podemos escrever

$$\begin{array}{l} \langle w, R^*_{n-1} x^0 y^0 \rangle = 0 \\ \langle w, R^*_{n-1} x^1 y^0 \rangle = 0 \\ \cdots \\ \langle w, R^*_{n-1} x^i y^j \rangle = 0 \\ \cdots \\ \langle w, R^*_{n-1} x^0 y^{n-1} \rangle = 0 \end{array}$$

com $0 \leq i+j \leq n-1$. Temos então o sistema de $\frac{1}{2}n(n+1)$ equações a $\frac{1}{2}n(n+1)$ incógnitas, a_{ij} , $0 \leq i+j \leq n-1$,

$$\begin{array}{l} a_{00} + a_{10}\langle w, x\rangle + a_{01}\langle w, y\rangle + \cdots + a_{0,n-1}\langle w, y^{n-1}\rangle = 0 \\ a_{00}\langle w, x\rangle + a_{10}\langle w, x^2\rangle + a_{01}\langle w, xy\rangle + \cdots + a_{0,n-1}\langle w, xy^{n-1}\rangle = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{00}\langle w, y^{n-1}\rangle + a_{10}\langle w, xy^{n-1}\rangle + a_{01}\langle w, y\rangle + \cdots + a_{0,n-1}\langle w, y^{2n-2}\rangle = 0 \ . \end{array}$$

O determinante da matriz do sistema é

$$\Delta_{n-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{10} & \alpha_{01} & \cdots & \alpha_{0,n-1} \\ \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{0,n-1} & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{0n} & \cdots & \alpha_{0,2n-2} \end{bmatrix} \neq 0 \ .$$

Então, $a_{ij} = 0 \quad , \quad 0 \leq i+j \leq n-1$, o que implica $R^*_{n-1} = 0$, e portanto a equação (4.2) representa $Q_n(x,y)$ como combinação linear dos elementos do vector P_n. $\square$

4.3 Teorema de Favard

O teorema seguinte, associa a uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica, o análogo duma relação de recorrência a três termos.

Teorema 4.3.1 ([20]). *Seja w uma funcional quase-definida, e $\{\mathbb{P}_n\}$ a sequência de polinómios fracamente ortogonal mónica, única, associada . Seja V_n o espaço vectorial associado a $\mathbb{P}_n$. Então, para cada polinómio $Q_n \in V_n$, os produtos $xQ_n(x,y)$ e $yQ_n(x,y)$ são representados pela soma de três polinómios de graus diferentes e consecutivos, pertencentes a cada um dos espaços V_{n+1}, V_n, V_{n-1}. Em particular, se $Q_n = p_{n-k,k}$, temos*

$$\left\{ \begin{array}{l} xp_{n-k,k} = p_{n+1-k,k} + \sum_{i=0}^{n} c^i_{n-k,k} p_{n-i,i} + \sum_{i=0}^{n-1} d^i_{n-k,k} p_{n-i,i} \\ yp_{n-k,k} = p_{n-k,k+1} + \sum_{i=0}^{n} e^i_{n-k,k} p_{n-i,i} + \sum_{i=0}^{n-1} f^i_{n-k,k} p_{n-i,i} \end{array} \right. \tag{4.3.0}$$

com $(k = 0, 1, \cdots, n \ ; \quad n = 0, 1, \cdots)$ e sendo c_s, d_s, e_s, f_s, constantes adequadas.

Prova([20])

Se $Q_n = 0$, então os segundos membros da equação (4.3.1) são nulos, sendos nula cada uma das três parcelas respectivas.

Suponhamos então que $Q_n \neq 0$, grau(Q_n)$= n$. Do teorema 4.2.4, pg.55, sabemos que xQ_n é uma combinação linear de polinómios de $V_0, \cdots, V_{n+1}$, i.e.,

$$xQ_n = \sum_{j=0}^{n+1} R_j, \quad R_j \in V_j \ . \tag{4.3.0}$$

O lema 4.2.2, pg.53, diz-nos que, para cada espaço V_n existe uma base que verifica a condição na equação (4.2.2) .

Seja então $\{q_{j0}, \cdots, q_{0j}\}$ a base nessa condiçao, associada a V_j , $(0 \leq j \leq n-2)$.

Pode escrever-se

$$\sum_{j=0}^{n-2} R_j = \sum_{i+j=0}^{n-2} a_{ij} q_{ij}$$

e a equação (4.3) fica

$$xQ_n = R_{n+1} + R_n + R_{n-1} + \sum_{i+j=0}^{n-2} a_{ij} q_{ij} \ .$$

Multiplicando esta última igualdade por q_{ij} , $(0 \leq i+j \leq n-2)$, e aplicando a funcional w a cada membro da igualdade anterior, vem, para cada par (i,j)

$$\langle w, xQ_n q_{ij} \rangle = \langle w, Q_n x q_{ij} \rangle = a_{ij} \langle w, q_{ij} q_{ij} \rangle = 0 \ ,$$

porque $Q_n \in V_n$ e grau$(xq_{ij}) \leq n-1$.

Então tem que ser $a_{ij} = 0$, $0 \leq i+j \leq n-2$, e a equação (4.3) fica

$$xQ_n = R_{n+1} + R_n + R_{n-1} \ .$$

Uma expressão semelhante obtém-se para yQ_n.

Como $xp_{n-k,k}$ é mónico, sendo $x^{n-k+1}y^k$ o seu termo de grau mais elevado, temos $R_{n+1} = p_{n+1-k,k}$. De modo análogo para $yp_{n-k,k}$, o termo de ordem mais elevada é $x^{n-k}y^{k+1}$, e vem $R_{n+1} = p_{n-k,k+1}$. $\square$

No trabalho de Y. Xu, ([37]), é apresentada a seguinte versão vectorial desta relação de recorrência. Seja $\{P_n\}$, uma sequência de polinómios. Já vimos na Observação da pg. 48, que cada P_n pode ser representado na forma

$$P_n = G_n \mathbf{x}^n + G_{n-1} \mathbf{x}^{n-1} + \cdots \ ,$$

em que as matrizes G e os vectores $\mathbf{x}$ têm significados óbvios. Se $\{P_n\}$ é uma sequência de polinómios ortonormal, então para $n \in \mathbb{N}_0$, temos

$$x_i P_n = A_{n,i} P_{n+1} + B_{n,i} P_n + A^T_{n-1,i} P_{n-1},$$

onde definimos $P_{-1} = 0$, $A_{-1,i} = 0$ e entendendo x_i como uma variável qualquer das que definem o domínio de ortogonalidade, isto é, $x_1 = x$ e $x_2 = y$. Esta definição pode ser estendida a polinómios de um número qualquer de variáveis.
O interesse de uma representação deste tipo, reside no facto de ser possível enunciar uma versão fraca do teorema de *Favard* para polinómios de várias variáveis. Essa versão para duas variáveis é a seguinte.

Teorema 4.3.2 ([37]). *Seja $\{P_n\}$ uma sequência de polinómios arbitrária, $P_0 = 1$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(1) Existe uma funcional linear definida positiva, relativamente à qual $\{P_n\}$ é ortonormal.

(2) Existem matrizes $A_{n,i}$ e $B_{n,i}$, , $i = 1, 2$, tais que ***a)*** *a sequência $\{P_n\}$ satisfaz a relação (4.3);* ***b)*** *a característica das matrizes $A_{n,i}$ e $B_{n,i}$, é igual a $n + 1$.*

4.4 Equação Diferencial de Segunda Ordem às Derivadas Parciais

Definição 4.4.1 ([20]). *Dada a equação diferencial na incógnita $u = u(x, y)$,*

$$\sum_{i+j=1}^{r} Q_{ij}(x, y) D^i_x D^j_y u + \lambda u = 0 \,, \tag{4.4.0}$$

sendo λ um parâmetro, diz-se que esta é ***admissível*** *se e só se existe uma sequência numérica infinita, $\{\lambda_n\}$, $n = 0, 1, \cdots$, tal que para $\lambda = \lambda_n$ não existem soluções polinomiais não nulas de grau menor que n, e existem exactamente $n + 1$ soluções polinomiais linearmente independentes, de grau n.*

Se (4.4.1) é admissível, então as soluções de grau n para $\lambda = \lambda_n$, formam juntamente com a solução nula um espaço vectorial de dimensão $n+1$. Uma equação admissível gera a famílias de espaços vectoriais $\{V_n\}$, correspondentes a uma dada sequência de polinómios em duas variáveis. Os dois resultados seguintes, são caracterizações da equação (4.4.1), no caso de esta ser admissível.

Teorema 4.4.1 ([20]). *Se (4.4.1) é admissível, então cada coeficiente Q_{ij} é um polinómio e o grau de Q_{ij} é menor ou igual a $i+j$.*

O teorema seguinte afirma que se a equação diferencial (4.4.1) é admissível, então o conjunto das suas soluções polinomiais constitui uma sequência de polinómios .

Teorema 4.4.2 ([20]). *Se (4.4.1) é admissível, então não existem soluções polinomiais não nulas para $\lambda \neq \lambda_0, \lambda_1, \cdots$. Além disto, para $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, \cdots$, as únicas soluções polinomiais da equação diferencial, são as correspondentes ao espaço V_n, gerado pelas $n+1$ soluções referidas na definição 4.4.1 .*

O resultados seguintes, justificam a forma da equação (4.4.1), no caso de admissibilidade, para $r \leq 2$.

Teorema 4.4.3 ([20]). *A equação (4.4.1) é admissível se e só se*

(i) $\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_m \neq \lambda_n, \qquad (m \neq n)$

(ii) $\lambda_n = -n! \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!}, \qquad n = 1, 2, \cdots ,$
sendo os a_k constantes, coeficientes dos monómios de grau mais elevado dos polinómios coeficientes da equação diferencial, tais que $(k > r) \Rightarrow (a_k = 0)$.

(iii) A equação (4.4.1) toma a forma

$$\sum_{s=i+j=1}^{r} \left\{ \begin{pmatrix} s \\ j \end{pmatrix} a_s x^i y^j + M_{ij}(x,y) \right\} D_x^i D_y^j u + \lambda u = 0 \ , \qquad (4.4.0)$$

com grau de (M_{ij}) menor que $i+j$.

Teorema 4.4.4 ([20]). *Não existem sequências de polinómios fracamente ortogonais que satisfaçam a equação diferencial (4.4.1), para* $r = 1$ *.*

Prova([20])

Fazendo $r = 1$ em (4.4.1), temos

$$(ax + h_1)u_x + (ay + h_2)u_y + \lambda_n u = 0 \,, \tag{4.4.0}$$

com $\lambda = -na, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$, (cf. o teorema 4.4.3, pg.60).

Fazendo na equação diferencial obtida a translacção

$$x = \frac{x^* - h_1}{a} \qquad y = \frac{y^* - h_2}{a} \,,$$

obtém-se, sem perda de generalidade (cf. Observação na página 62), a equação

$$ax^* v_{x^*}(x^*, y^*) + ay^* v_{y^*}(x^*, y^*) + \lambda_n v(x^*, y^*) = 0, \tag{4.4.0}$$

sendo $v(x^*, y^*) = u(x^* + \frac{h_1}{a}, y^* + \frac{h_2}{a})$ e $u_x = \frac{dv}{dx^*}\frac{dx^*}{dx} = v_{x^*} a$, $u_y = \frac{dv}{dy^*}\frac{dy^*}{dy} = v_{y^*} a$. Para simplificar a notação, escreve-se a equação (4.4) da forma

$$axv_x + ayv_y + \lambda_n v = 0, \tag{4.4.0}$$

Suponhamos agora que (4.4) é admissível, i.e., existe uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica e única, que satisfaz, para cada n, a equação (4.4) . A essa sequência de polinómios fracamente ortogonal, corresponde uma sequência de espaços vectoriais $\{V_n\}$ (cf. (ii) na Observação da página 51). Uma base mónica para V_n é $\{p_{n-k,k} = x^{n-k}y^k\}$, $k = 0, 1, \cdots, n$, já que cada um dos monómios $x^{n-k}y^k$ é solução de (4.4) . Pelo lema 4.2.2, pg.53 para cada n existe uma base $V_n^* = span\{q_{n0}, \cdots, q_{0n}\}$, tal que

$$\langle w, q_{n-k,k} q_{n-j,j} \rangle \begin{cases} = 0 \,, \; k \neq j \\ K \neq 0 \,, \; k = j \,, \end{cases}$$

sendo K um parâmetro dependente de n e $k, j = 0, 1, \cdots, n$. A base $\{p_{n0}, \cdots, p_{0n}\}$ é uma base mónica para V_n^*, devido à unicidade de cada V_n, uma vez que, por hipótese, (4.4) é admissível. Então, cada $q^2_{n-k,k}$ é polinómio homogéneo de grau $2n$, e por consequência uma combinação linear de $\{p_{2n-s,s} = x^{2n-s}y^s\}$, $s = 0, 1, \cdots, 2n$. Temos por isso

$$(q_{n-k,k})^2 = \sum_{s=0}^{2n} c_s p_{2n-s,s}$$

sendo os c_s constantes, e

$$\begin{aligned}\langle w, q_{n-k,k} \cdot q_{n-k,k} \rangle &= \langle w, \sum_{s=0}^{2n} c_s p_{2n-s,s} \rangle \\ &= \sum_{s=0}^{2n} c_s \langle w, p_{2n-s,s} \rangle = 0\,,\end{aligned}$$

porque $p_{2n-s,s} \in V_{2n}$ e $V_{2n} \perp V_0$, o que implica $p_{2n-s,s} \perp 1$. É contradito o lema 4.2.2, pg.53. Então, não existe uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica e única, solução de (4.4). $\Box$

Observação.

O facto de a equação diferencial (4.4) ser admissível, é invariante para uma transformação linear nas variáveis x, y, de jacobiano não nulo. Tal justifica que a translacção nas variáveis efectuada na demonstração do teorema 4.4.4, não afecta a generalidade do resultado obtido.

De facto, seja $u(x, y)$ um polinómio de grau n que satisfaz (4.4). Fazendo nesta equação a substituição de variáveis

$$x = Ax^* + By^* \text{ e } y = Cx^* + Dy^*\,, \tag{4.4.-3}$$

com $AD - BC \neq 0$, temos $x^* = A_1 x + B_1 y$, $y^* = C_1 x + D_1 y$, com $A_1 D1 - B_1 C_1 \neq 0$. Fazendo $v(x^*, y^*) := u(Ax^* + By^*, Cx^* + Dy^*)$, temos

$$\begin{aligned} u_x = v_x &= v_{x^*}\frac{\partial x^*}{\partial x} + v_{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial x} \\ &= v_{x^*}A_1 + v_{y^*}C_1 \\ u_y = v_y &= v_{x^*}\frac{\partial x^*}{\partial y} + v_{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial y} \\ &= v_{x^*}B_1 + v_{y^*}D_1 \end{aligned}$$

e

$$ax + h_1 = a(Ax^* + By^*) + h_1$$
$$ay + h_2 = a(Cx^* + Dy^*) + h_2 \ ,$$

A equação (4.4) fica

$$s_1(x^*, y^*)v_x(x^*, y^*) + s_2(x^*, y^*)v_y(x^*, y^*) + \lambda_n v = 0 \ , \qquad (4.4.\text{-}9)$$

com $s_1(x^*, y^*)$, $s_2(x^*, y^*)$polinómios de grau 1 em x^*, y^*. Atendendo a que o jacobiano da transformação linear é não nulo, então a cada par (x, y) corresponde um e um só transformado (x^*, y^*), e vice-versa, pelo que se (x, y) verifica (4.4), o transformado (x^*, y^*) verifica (4.4), e vice-versa. Além disto, $v(x^*, y^*)$, continua a ser um polinómio de grau n, em x^*, y^*. Também é verdade que, se $u_1(x, y), u_2(x, y)$ são polinómios e

$$\iint_D u_1(x, y)u_2(x, y)w(x, y)dxdy = 0 \ , \qquad (4.4.\text{-}9)$$

então, fazendo a transformação de variáveis (4.4) e, sendo G o transformado do domínio D e $v_1(x^*, y^*), v_2(x^*, y^*)$ os transformados de respectivamente, $u_1(x, y), u_2(x, y)$, temos

$$\iint_G v_1(x^*, y)v_2(x^*, y^*)w(x^*, y^*) \left| \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(x^*,y^*)} \ \right| dx^*dy^* = 0 \ , \qquad (4.4.\text{-}9)$$

sendo v_1 e v_2 ortogonais relativamente à função peso $w(x^*, y^*) \left| \ \frac{\partial(x,y)}{\partial(x^*,y^*)} \ \right|$. Então, se para $\lambda = \lambda_n$ a equação (4.4) admite $n + 1$ soluções polinomiais de grau n, o mesmo acontece com (4.4), e vice-versa; se para $\lambda \neq \lambda_n$, $n = 0, 1, \cdots$, a equação (4.4) não admite soluções polinomiais não nulas, o mesmo acontece com (4.4), e vice-versa isto é, (4.4) e (4.4) são ou não ambas admissíveis. Por outro lado, as equações (4.4) e (4.4) mostram que se (4.4) admite como solução uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, $\{P_n(x, y)\}$, também (4.4) admite como solução uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, $\{P_n(Ax^* + By^*, Cx^* + Dy^*)\}$.

Teorema 4.4.5 ([20]). *Se for* $r = 2$ *na equação diferencial (4.4.1), então esta é* *admissível se e somente se tiver a forma*

$$(ax^2 + d_1x + e_1y + f_1)u_{xx} + (2axy + d_2x + e_2y + f_2)u_{xy}+$$
$$+ (ay^2 + d_3x + e_3y + f_3)u_{yy} + (gx + h_1)u_x + (gy + h_2)u_y + \lambda_n u = 0 \ ,$$

com

$$\lambda_n = -n[(n-1)a + g] \ , \tag{4.4.-10}$$

e

$$g + na \neq 0 \quad (n = 0, 1, \cdots) \ . \tag{4.4.-10}$$

Esta última condição é equivalente a $\lambda_m \neq \lambda_n$ *para* $m \neq n$.

Prova

Que a equação diferencial, (4.4.1), toma para $r = 2$ a forma (4.4.5), é consequência da proposição 4.4.3,(iii), pg.60. Da mesma proposição, (ii), vem a equação (4.4.5), porque

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= -n! \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!} \quad (n = 1, 2, \cdots) \\
&= -n! [\frac{a_1}{(n-1)!} + \frac{a_2}{(n-2)!}] \\
&= -n[a_1 + (n-1)a_2] \ ,
\end{aligned}$$

com $a_1 = g$ e $a_2 = a$. A equivalência das condições $g + na \neq 0 \quad n = 0, 1, \cdots$ e $\lambda_m \neq \lambda_n \quad (m \neq n)$, pode demonstrar-se da seguinte forma.

Seja $m \neq n$. Por exemplo, $m = n + k$, $n \geq 1$, sem perda de generalidade. Seja, também por hipótese, $\lambda_m \neq \lambda_n$, i.e., $-m[g + (m-1)a] \neq -n[g + (n-1)]$. Desta última igualdade, vem

$$\begin{aligned}
& -(n+k)[g + (n+k-1)a] \neq -n[g + (n-1)] \\
\Leftrightarrow \quad & -n[g + (n-1)a] - nka - k[g + (n+k-1)a] \neq -n[g + (n-1)] \\
\Leftrightarrow \quad & -nka - k[g + (n+k-1)a] \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (k-1)a + g \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

Como $k - 1$ pode ser qualquer número natural, fica demonstrada a equivalência.

Teorema 4.4.6 ([18]). *Se* $\{P_n\}$ *é solução de uma equação diferencial do tipo (4.4.5), então a sua normalização,* $\{\mathbb{P}_n\}$*, também satisfaz essa equação.*

Prova

Sejam $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ polinómios satisfazendo uma equação diferencial do tipo (4.4.5). Então qualquer combinação linear desses polinómios satisfaz essa equação. Ora $\mathbb{P}_n = A_n^{-1} P_n$ é uma coluna de vectores, sendo cada um deles uma combinação linear dos vectores $p_{n-j,j}$, $j = 0, \cdots, n$ de P_n. Logo, cada elemento de $\mathbb{P}_n$ satisfaz a equação diferencial, o mesmo acontecendo portanto com a sequência $\{\mathbb{P}_n\}$. □

4.5 Sequências de Polinómios Ortogonais Admissíveis

As sequências de polinómios que são ao menos fracamente ortogonais (cf. definição 4.5.2, adiante), soluções da equação diferencial (4.4.5), podem ser caracterizadas a partir da respectiva equação diferencial, de um modo análogo, embora mais fraco, ao utilizado para obter os polinómios ortogonais clássicos em uma variável. Tal caracterização é feita no teorema 4.5.2.

Teorema 4.5.1 ([20]). *Seja* $\{P_n\}$*, uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica e única, associada à medida* w*, com* $P_n = [p_{n0}\ p_{n-1,1}\ \cdots\ p_{0n}]^T$*. Então, para cada* n*, temos*

$$p_{ij}(x,y) = \frac{\Delta_{n,ij}(x,y)}{\Delta_{n-1}}\ , \quad i+j=n \tag{4.5.0}$$

sendo $\Delta_{n,ij}(x,y)$ *o determinante de ordem* $1+\frac{1}{2}n(n+1)$*, obtido da matriz correspondente ao determinante de Hankel* Δ_{n-1}*, da forma:*

(i) Acrescentar uma coluna à direita da matriz correspondente a Δ_{n-1}*, cujo primeiro elemento é o momento* α_{ij}*, e os elementos subsequentes se obtêm adicionando ao par de índices* (i,j)*, respectivamente, os seguintes pares*

$$(1,0),(0,1),\cdots,(n-1,0),(n-2,1),\cdots,(0,n-1)\ .$$

(ii) Acrescentar na matriz resultante em (i), uma linha abaixo da última, cujos elementos são

$$1, x, y, \cdots, x^{n-1}, x^{n-2}y, \cdots, y^{n-1}, x^i y^j .$$

Definição 4.5.1 ([20]). *Dada uma sequência dupla* $\{\alpha_{mn}\}$, $m, n = 0, 1, \cdots$ *, e os determinantes de Hankel associados,* $\{\Delta_n\}$*, suponha-se que* $\Delta_n \neq 0$, $n = 0, 1, \cdots$*. Então, a equação (4.5.1) determina uma sequência de polinómios mónica,* $\{\mathbb{P}_n\}$*, que se designa* ***sequência ortogonal mónica generalizada*** *associada a* $\{\alpha_{mn}\}$*.*

Definição 4.5.2 ([20]). *Seja* $\{\alpha_{mn}\}$, $m, n = 0, 1, \cdots$*, uma sequência dupla, tal que* $\alpha_{00} \neq 0$*. Seja* T*, um funcional linear definido sobre o espaço de todos os polinómios, da forma*

$$\langle T, x^m y^n \rangle = \alpha_{mn}, \qquad m, n = 0, 1, \cdots .$$

Então, uma sequência de polinómios, $\{P_n\}$*, diz-se* ***sequência fracamente ortogonal mónica generalizada*** *relativa a* $\{\alpha_{mn}\}$*, se se verificar*

$$p_{mn} \perp \mathcal{P}_{m+n-1} ,$$

sendo $\mathcal{P}_{m+n-1}$ *o conjunto dos polinómios em* x, y*, de grau inferior a* $m + n$*.*

Krall e *Sheffer* ([20]) mostram que as sequências polinomiais que são soluções da equação diferencial (4.4.5), pg.64, são pelo menos sequências de polinómios fracamente ortogonais generalizadas. O teorema seguinte, refere os aspectos mais importantes que levaram a essa caracterização.

Teorema 4.5.2. *Dada a equação diferencial (4.4.5), e uma sequência numérica dupla,* $\{\alpha_{mn}\}$*, sejam*

$$\begin{aligned}
A_{mn} &:= (m+n)[a(m+n-1)+g]\alpha_{mn} + m[d_1(m-1)+e_2n]\alpha_{m-1,n} + \\
&+ n[d_2m+e_3(n-1)]\alpha_{m,n-1} + f_1m(m-1)\alpha_{m-2,n} + \\
&+ f_2mn\alpha_{m-1,n-2} + f_2n(n-1)\alpha_{m,n-2} + \\
&+ e_1m(m-1)\alpha_{m-2,n+1} + d_3n(n-1)\alpha_{m+1,n-2} \\
B_{mn} &:= 2[a(m+n)+g]\alpha_{m,n+1} + me_2\alpha_{m-1,n+1} + \\
&+ [d_2m+2ne_3]\alpha_{m,n} + mf_2\alpha_{m-1,n} + 2nf_3\alpha_{m,n-1} + \\
&+ 2nd_3m(m-1)\alpha_{m+1,n-1} \\
C_{mn} &:= 2[a(m+n)+g]\alpha_{m+1,n} + [2md_1+ne_2]\alpha_{m,n} + \\
&+ d_2n\alpha_{m+1,n-1} + 2mf_1\alpha_{m-1,n} + nf_2\alpha_{m,n-1} + \\
&+ 2me_1\alpha_{m-1,n+1}
\end{aligned}$$

com $m, n = 0, 1, \cdots,$

e

$$D_{mn} = C_{m-1,n} - B_{m,n-1} \ , \ \ m, n \geq 1 \ ,$$

verifica-se o seguinte.

(i) Se duas de entre as três relações $A_{mn} = 0, B_{mn} = 0, C_{mn} = 0$, *se verificam para* $m, n = 0, 1, \cdots,$ *então verificam-se as três.*

(ii) Se a sequência de polinómios mónica $\{p_{mn}\}$ *satisfaz a equação diferencial (4.4.5), pg.64; se definirmos* $\{\alpha_{mn}\}$, *com* $\alpha_{00} \neq 0$, *tal que* $A_{mn} = 0, \ \ m, n = 0, 1, \cdots$; *então se* $D_{mn} = 0$ *a sequência de polinómios é pelo menos sequência de polinómios fracamente ortogonal generalizada.*

(iii) Seja $\{p_{mn}\}$ *solução da equação diferencial (4.4.1), pg.59. Se* $A_{mn} = 0$, $D_{mn} = 0, \ \ m, n = 0, 1, \cdots,$ *i.e.,* $\{p_{mn}\}$ *é sequência de polinómios fracamente ortogonal generalizada, e se as variáveis* x, y, *forem transformadas linearmente, com jacobiano não nulo, sendo* A^*_{mn} *transformado de* A_{mn}, D^*_{mn} *transformado de* D_{mn}, $\alpha^*_{mn} \neq 0$ *transformado de* $\alpha_{mn} \neq 0$, p^*_{mn} *transformado de* p_{mn}, *então temos* $A^*_{mn} = 0$ *e* $D^*_{mn} = 0$, *isto é,* $\{p^*_{mn}\}$ *é sequência de polinómios fracamente ortogonal generalizada.*

Note-se que a definição de $\{\alpha_{mn}\}$ em (ii) substitui a existência de uma fórmula para a funcional w, relativamente à qual a sequência de polinómios, $\{p_{mn}\}$, seja ortogonal. A sequência $\{\alpha_{mn}\}$ é única, a menos de um factor multiplicativo. O ponto (iii) da proposição é fundamental na análise de *Krall* e *Sheffer*: a propriedade de uma sequência de polinómios ser sequência de polinómios fracamente ortogonal generalizada, é invariante para uma transformação linear não singular (cf. Observação na página pg.62). São encontradas nove classes de sequências de polinómios, soluções da equação diferencial, que são no mínimo sequências de polinómios fracamente ortogonais generalizadas, sendo que um dado representante de uma classe é-o a menos de uma transformação linear não singular. Pertencer a uma destas classes, é um análogo fraco de ter um determinado tipo de intervalo de ortogonalidade, no caso dos polinómios clássicos em uma variável - 'fraco', com o sentido de "a menos de uma forma explícita para a funcional w".

4.6 Soluções Polinomiais da Equação Diferencial Admissível de Segunda Ordem

As nove sequências de polinómios ortogonais encontradas por *Krall* e *Sheffer*, soluções de uma equação diferencial do tipo (4.4.5), pg.64, e que são pelo menos sequências fracamente ortogonais generalizadas, são as seguintes ([20]).

1. Polinómios de Hermite

$\{H_{n-k,k}(x,y), \quad k=0,1,\cdots,n\}$, com $H_{n-k,k}(x,y) = H_{n-k}(x)H_k(y)$

Função Peso : $w(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

Domínio de Ortogonalidade : $-\infty < x, y < \infty$

Equação Diferencial : $u_{xx} - u_{yy} - (xu_x + yu_y) + \lambda u = 0$.

2. Polinómios de Laguerre

$\{L_{n-k,k}^{(\alpha,\beta)}(x,y), \quad k=0,1,\cdots,n\}$, com $L_{n-k}^{(\alpha,\beta)} = L_{n-k}^{\alpha}(x)L_k^{\beta}(y)$

Função Peso : $w(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}e^{-(x+y)}$

Domínio de Ortogonalidade : $0 < x, y < \infty$

Equação Diferencial :

$$xu_{xx} + yu_{yy} + (1+\alpha-x)u_x + (1+\beta-y)u_y + \lambda u = 0.$$

3. Polinómios de Hermite-Laguerre

$\{P_{n-k,k}^{\alpha}(x,y), \quad k=0,1,\cdots,n\}$, com$P_{n-k}^{\alpha} = H_{n-k}(x)L_k^{\alpha}(y)$

Função Peso : $w(x,y) = y^{\alpha}e^{-y-x^2}$

Domínio de Ortogonalidade : $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$

Equação Diferencial : $u_{xx} + yu_{yy} - xu_x + (1+\alpha-y)u_y + \lambda u = 0$.

4. Polinómios de Laguerre-Hermite

$\{P_{n-k,k}^{\alpha}(x,y), \quad k=0,1,\cdots,n\}$, com $P_{n-k}^{\alpha} = L_{n-k}^{\alpha}(x)H_{n-k}(y)$

Função Peso : $w(x,y) = x^{\alpha}e^{-x-y^2}$

Domínio de Ortogonalidade : $-\infty < y < \infty$, $0 < x < \infty$

Equação Diferencial : $xu_{xx} + u_{yy} + (1+\alpha-x)u_x - yu_y + \lambda u = 0$.

5. Polinómios Circulares

$\{P_{n-k,k}(x,y), \quad k=0,1,\cdots,n\}$

Função Peso : $w(x,y) = (1-x^2-y^2)^{\frac{g-3}{2}}$

Domínio de Ortogonalidade : $x^2+y^2 \leq 1$

Equação Diferencial :

$$(x^2-1)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (y^2-1)u_{yy} + g(xu_x + yu_y) + \lambda u = 0 .$$

6. Polinómios Triangulares

$\{P_{n-k,k}(x,y), \quad k = 0, 1, \cdots, n\}$

Função Peso : $w(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} (1-x-y)^{\gamma}$, $(\alpha, \beta, \gamma > -1)$

Domínio de Ortogonalidade : $x, y > 0$, $x + y < 1$

Equação Diferencial :

$$(x^2 - x)u_{xx} + 2xyu_{xy} + (y^2 - y)u_{yy} + [\alpha + \beta + \gamma + 3)x -$$

$$- (1+\alpha)]u_x + [(\alpha + \beta + \gamma + 3)y - (1+\beta)]u_y + \lambda u = 0 \ .$$

7. $3yu_{xx} + 2u_{xy} - (xu_x + yu_y) + \lambda u = 0$

8. $(x^2 + y + 1)u_{xx} + (2xy + 2x)u_{xy} + (y^2 + 2y + 1)u_{yy} + g(xu_x + yu_y) + \lambda u = 0$

9. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + (y^2 - y)u_{yy} + g[(x-1)u_x + (y-\alpha)u_y] + \lambda u = 0$

Capítulo 5

Generalização da Fórmula de Lagrange

5.1 Introdução

No capítulo 3, vimos como obter a função geradora de uma sequência de polinómios ortogonais, utilizando a fórmula de *Rodrigues* e o teorema de *Lagrange*. Neste capítulo, vamos utilizar os resultados de *Kim et al.*, [19],[18], e *Littlejohn*, [22], para obter uma fórmula de *Rodrigues* para os polinómios Circulares e Triangulares. Enunciamos e demonstramos uma extensão do teorema de *Lagrange* para o caso de duas variáveis. Utilizamos essa extensão, para obter a função geradora para os polinómios Circulares.

5.2 Polinómios Pertencentes à Classe Básica

Seja $L[u]$ o operador de *Krall* e *Sheffer*, definido pela equação

$$L[u] = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + \lambda_n u \ .$$

Definição 5.2.1 ([18]). *Diz-se que o operador $L[.]$ em (5.2) pertence à* `classe básica`, *se e somente se*

$$A_y = C_x = 0$$

isto é

$$A(x,y) = A(x) = ax^2 + d_1 x + f_1$$
$$C(x,y) = C(y) = ay^2 + e_3 y + f_3 \ .$$

Os teoremas 5.2.1 e 5.2.2, caracterizam sequências de polinómios ortogonais que, pertencem à classe básica e são soluções de uma equação do tipo (5.2), admissível.

Teorema 5.2.1 ([18],[21]). *Se* $\{\mathbb{P}_n\}$ *é uma solução polinomial mónica da equação admissível (5.2), então são equivalentes as seguintes afirmações.*

(i) $A_y = C_x = 0$, *isto é,* $L[.]$ *pertence à classe básica.*

(ii) $p_{n0}(x,y) = p_{n0}(x)$ *e* $p_{0n}(x,y) = p_{0n}(y)$, $n \geq 0$, *i.e.,* $p_{n0}(x,y)$ *e* $p_{0n}(x,y)$ *são funções respectivamente de* x *e de* y.

(iii) $p_{20}(x,y) = p_{20}(x)$ *e* $p_{02}(x,y) = p_{02}(y)$, *i.e.,* $p_{20}(x,y)$ *e* $p_{02}(x,y)$ *são funções respectivamente de* x *e de* y.

(iv) p_{n0} *e* p_{0n} *satisfazem, respectivamente,*

$$A(p_{n0})_{xx} + D(p_{n0})_x = \lambda_n p_{n0} \ , \quad n \geq 0$$

e

$$C(p_{0n})_{yy} + E(p_{0n})_y = \lambda_n p_{0n} \ , \quad n \geq 0.$$

(v) p_{20} *e* p_{02} *satisfazem, respectivamente,*

$$A(p_{20})_{xx} + D(p_{20})_x = \lambda_2 p_{20}$$

e

$$C(p_{02})_{yy} + E(p_{02})_y = \lambda_2 p_{02} \ .$$

Neste caso, $\{p_{n0}(x)\}$ *e* $\{p_{0n}(y)\}$ *são sequências de polinómios fracamente ortogonais em uma variável, e podemos representar* $\{\mathbb{P}_n\}$ *na forma*

$$p_{mn}(x,y) = p_{m0}(x)p_{0n}(y) + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}^{(mn)} p_{i0}(x)p_{0j}(y) \ , \quad m,n \geq 0 \ ,$$

sendo os $c_{ij}^{(mn)}$ *parâmetros numéricos dependentes de* m *e* n.
Mais ainda, se a funcional de momentos canónica de $\{\mathbb{P}_n\}$ *é definida-positiva, então* $\{p_{n0}(x)\}$ *e* $\{p_{0n}(y)\}$ *são sequências de polinómios ortogonais clássicas, definidas positivas.*

O resultado que se segue fornece condições suficientes para que a sequência polinomial $\{\mathbb{P}_n\}$, solução da equação admissível (5.2), seja igual ao produto de duas sequências de polinómios mónicos em uma variável.

Teorema 5.2.2 ([18]). *Sejam* $\{\mathbb{P}_n\}$ *uma sequência de polinómios mónicos, solução da equação admissível (5.2),* σ *a funcional canónica de* $\{\mathbb{P}_n\}$, *e* $A_y = C_x = B = 0$. *Então, verifica-se o seguinte.*

(i) $p_{n0}(x,y) = p_{n0}(x)$ *e* $p_{0n}(x,y) = p_{0n}(y)$, *e* $p_{mn}(x,y) = p_{m0}(x)p_{0n}(y)$, $m,n \geq 0$.

(ii) $\{\mathbb{P}_n\}$ *é sequência de polinómios fracamente ortogonal.*

(iii) *São equivalentes as seguintes afirmações.*

- $\{\mathbb{P}_n\}$ *é sequência de polinómios ortogonais (respectivamente, sequência de polinómios ortogonais definida-positiva).*
- σ *é quase-definida (respectivamente, definida-positiva).*
- $\{p_{n0}(x)\}$ *e* $\{p_{0n}(y)\}$ *são sequências de polinómios ortogonais clássicas (respectivamente, sequências de polinómios ortogonais clássicas definidas-positivas).*

Teorema 5.2.3 ([18]). *Se na equação (5.2) admissível for* $B = 0$, *e se (5.2) tem como solução uma sequência de polinómios ortogonais* $\{P_n\}$, *então* $\{P_n\}$ *é o produto de duas sequências de polinómios ortogonais clássicos em uma variável, que são ou do tipo Laguerre ou do tipo Hermite.*

O teorema 5.2.3, caracteriza as sequências de polinómios ortogonais correspondentes às equações diferenciais dos primeiros 4 casos da secção 4.6. *Kim et al.*,[18], demonstram que a sequência polinomial solução da equação diferencial 7, secção 4.6, não é definida-positiva.

5.3 Fórmula do tipo Rodrigues, para Polinómios de Duas Variáveis

Definição 5.3.1 ([19]). *O operador diferencial em (5.2) diz-se* **`simétrico`**, *se* $L[.] = L^*[.]$, *sendo* $L^*[.]$ *o adjunto formal de Lagrange de* $L[.]$, *dado por*

$$L^*[u] = (Au)_{xx} + 2(Bu)_{xy} + (Cu)_{yy} - (Du)_x - (Eu)_y$$

Diz-se que $L[.]$ *é* **`simetrizável`** *se existe uma função* $s(x, y)$, *não nula, tal que* $s(x, y)$ *tem derivadas de segunda ordem contínuas em algum aberto, e* $s(x, y)L[.]$ *é simétrico. Neste caso,* $s(x, y)$ *diz-se* **`factor de simetria`** *de* $L[.]$.

Teorema 5.3.1 ([19]). *A função* $s(x, y)$ *é factor de simetria de* $L[.]$ *se e somente se satisfaz o sistema de equações*

$$M_1[s] = (As)_x + (Bs)_y - Ds = 0$$

$$M_2[s] = (Bs)_x + (Cs)_y - Es = 0 \ ,$$

ditas **`equações de simetria`**.

Teorema 5.3.2 ([19]). *Se a equação (5.2) tem como solução uma sequência de polinómios ortogonais,* $\{P_n\}$, *então* $L[.]$ *é simetrizável.*

Suponha-se então que o operador $L[.]$ em (5.2) é simetrizável e que $w(x, y)$, não identicamente nula, é um factor de simetria de $L[.]$. Então w é qualquer solução não identicamente nula das equações de simetria:

$$M_1[w] = (Aw)_x + (Bw)_y - Dw = 0$$

$$M_2[w] = (Bw)_x + (Cw)_y - Ew = 0 \ .$$

Vamos resolver este sistema em ordem a w_x e w_y . Temos

$$\begin{cases} A_x w + Aw_x + B_y w + Bw_y - Dw = 0 \\ B_x w + Bw_x + C_y w + Cw_y - Ew = 0 \end{cases}$$

isto é

$$w_x = \frac{[-C(A_x + B_y - D) + B(B_x + C_y - E)]w}{AC - B^2}$$
$$w_y = \frac{[-A(B_x + C_y - E) + B(A_x + B_y - D)]w}{AC - B^2} \ .$$

Fazendo

$$\alpha = B^2 - AC$$

$$\beta = C(A_x + B_y - D) - B(B_x + C_y - E)$$

$$\gamma = A(B_x + C_y - E) - B(A_x + B_y - D) \ ,$$

podemos escrever

$$\begin{cases} \alpha w_x = \beta w \\ \alpha w_y = \gamma w \end{cases}$$

O teorema seguinte garante que nos casos de interesse, $B^2 - AC$ não é identicamente nula.

Teorema 5.3.3 ([19]). *Se a equação (5.2) tem uma sequência de polinómios ortogonais como solução então* $B^2 - AC$ *é não identicamente nula, em qualquer subconjunto aberto do plano.*

Notar que na equação (5.3) se tem, grau de α menor ou igual a 3, grau de β menor ou igual a 2 e grau de γ menor ou igual a 2 .

Decomponham-se A,B e C da forma

$$A = A_1 A_2 \ , \qquad B = A_1 B_1 C_1 \ , \qquad C = C_1 C_2$$

com A_1, C_1 não identicamente nulos. Temos então

$$\alpha = A_1 C_1 \alpha_0 \ , \qquad \beta = C_1 \beta_0 \ , \qquad \gamma = A_1 \gamma_0 \ ,$$

sendo

$$\alpha_0 = A_1 B_1^2 C_1 - A_2 C_2$$

$$\beta_0 = A_1 B_1 (E - B_x - C_y) - C_2 (D - A_x - B_y)$$

$$\gamma_0 = B_1 C_1 (D - A_x - B_y) - A_2 (E - B_x - C_y) \ .$$

A equação (5.3) fica

$$\begin{cases} pw_x = \beta_0 w \\ qw_y = \gamma_0 w \end{cases}$$

com

$$p = A_1\alpha_0 \ , \qquad q = C_1\alpha_0 \ .$$

Notar que $\alpha_0 = A_1B_1^2C_1 - A_2C_2 = B_1B - \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{B^2-AC}{A_1C_1}$. Como $B^2 - AC$ não é identicamente nula, o mesmo acontece com α_0, $p = A_1\alpha_0$ e $q = C_1\alpha_0$. Também

$$grau(p) \leq grau(A_1) + grau(\alpha_0) \leq grau(\alpha) \leq 3$$

$$grau(q) \leq grau(C_1) + grau(\alpha_0) \leq grau(\alpha) \leq 3$$

$$grau(\beta_0) \leq grau(\beta) \leq 2$$

$$grau(\gamma_0) \leq grau(\gamma) \leq 2 \ .$$

Teorema 5.3.4 ([19]). *Seja* $\{P_n\}$ *uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, solução da equação (5.2). Seja* σ *a respectiva funcional canónica de momentos, tal que*

$$p\sigma_x = \beta_0\sigma \ , \qquad q\sigma_y = \gamma_0\sigma \ . \tag{5.3.-18}$$

Verificam-se os seguintes resultados.

(i) *Se*

$$(A_1)_y = (C_1)_x = 0 \ , \tag{5.3.-18}$$

então, para quaisquer inteiros $m, n \geq 0$ *, temos*

$$\partial_x^m \partial_y^n [p^m q^n \sigma] = \psi_{mn}\sigma \ ,$$

sendo $\psi_{mn}(x, y)$ *um polinómio de grau menor ou igual a* $2(m + n)$ *e*

$$\langle \sigma, x^k y^l \psi_{mn} \rangle = 0, \quad 0 \leq k + l \leq m + n, \qquad (k, l) \neq (m, n) \ .$$

A equação (5.3.4) é uma fórmula de Rodrigues.

(ii) *Se se verificam as condições (5.3.4), e*

$$\begin{cases} grau(p), grau(q) \leq 2 \\ grau(\beta_0), grau(\gamma_0) \leq 1 \end{cases}$$

então verifica-se (5.3.4), com grau de ψ_{mn} *menor ou igual a* $m+n$ *, e*

$$\langle \sigma, x^k y^l \psi_{mn} \rangle = 0 \ , \qquad 0 \leq k+l \leq m+n \ , \qquad (k,l) \neq (m,n)$$

(iii) *Se* σ *é quase-definida e se se verificam (5.3.4) e (5.3.4), então verifica-se (5.3.4) e* $\{\Psi_n\}$ *, com* $\Psi_n = [\psi_{n0}, \psi_{n-1,1}, \cdots, \psi_{0n}]$, *é uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, relativa a* σ *, e satisfaz a equação (5.2).*

Prova([19])

(i),(ii)

Suponhamos que se verifica (5.3.4). Então, para qualquer polinómio $\pi = \pi(x,y)$ e quaisquer inteiros m e n, temos

$$\begin{aligned} \partial_x(p^m q^n \pi \sigma) &= m p_x (p^{m-1} q^n \pi \sigma) + n q_x (p^m q^{n-1} \pi \sigma) + (p^m q^n \pi_x \sigma) + (p^m q^n \pi \sigma_x) \\ &= p^{m-1} q^n \sigma [m p_x \pi + n q_x \frac{p}{q} \pi + p \pi_x + p \pi \frac{\sigma_x}{\sigma}] \ . \end{aligned}$$

Atendendo a que

$$n q_x \frac{p}{q} \pi = n[(C_1)_x \alpha_0 + C_1 (\alpha_0)_x] \frac{A_1}{C_1} \pi = n A_1 (\alpha_0)_x \pi$$

e

$$p \pi \frac{\sigma_x}{\sigma} = p \pi \frac{\beta_0}{p} = \beta_0 \pi \ ,$$

temos

$$\partial_x(p^m q^n \pi \sigma) = p^{m-1} q^n \sigma [m p_x \pi + n A_1 (\alpha_0)_x \pi + p \pi_x + \beta_0 \pi] \ .$$

Fazendo

$$\pi_1 = m p_x \pi + n A_1 (\alpha_0)_x \pi + p \pi_x + \beta_0 \pi$$

temos

$$\partial_x(p^m q^n \pi \sigma) = (p^{m-1} q^n \pi_1) \sigma \ .$$

De forma análoga se demonstra

$$\partial_y(p^m q^n \pi\sigma) = (p^m q^{n-1}\pi_2)\sigma \ ,$$

com

$$\pi_2 = mC_1(\alpha_0)_y\pi + nq_y\pi + q\pi_y + \gamma_0\pi \ .$$

Graus de π_1 e π_2 : de (5.3) e (5.3), temos

$$\begin{cases} grau(\pi_1) \leq grau(\pi) + max\{grau(p) - 1, grau(\beta_0)\} \\ grau(\pi_2) \leq grau(\pi) + max\{grau(q) - 1, grau(\gamma_0)\} \end{cases}$$

com

$$0 \leq max\{grau(q) - 1, grau(\gamma_0)\}, max\{grau(p) - 1, grau(\beta_0)\} \leq 2$$

De (5.3) e (5.3), vem

$$\partial_y[\partial_x(p^m q^n \pi\sigma)] = \partial_y[(p^{m-1}q^n\pi_1)\sigma] = (p^{m-1}q^{n-1}\pi_2^*)\sigma \ ,$$

sendo, por via de (5.3)

$$grau(\pi) \leq grau(\pi_2^*) \leq grau(\pi) + 4 \ .$$

Após $m+n$ derivações, temos

$$\partial_y^n \partial_x^m (p^m q^n \pi\sigma) = \pi_{n+m}\sigma \ ,$$

com

$$grau(\pi) \leq grau(\pi_{n+m}) \leq grau\pi + 2(n+m) \ .$$

Fazendo $\pi \equiv 1$, temos $grau(\psi_{mn}) \leq 2(m+n)$. Por outro lado, se for $grau(p,q) \leq 2$ e grau$(\beta_0, \gamma_0) \leq 1$, então (5.3) escreve-se

$$0 \leq max\{grau(q) - 1, grau(\gamma_0)\}, max\{grau(p) - 1, grau\beta_0\} \leq 1 \ ,$$

e (5.3) fica

$$grau(\pi) \leq grau(\pi_{n+m}) \leq grau(\pi) + (n+m) \ .$$

Fazendo

$$\pi \equiv 1 \ ,$$

temos

$$\partial_y^n \partial_x^m (p^m q^n \sigma) = \psi_{mn} \sigma \ ,$$

com

$$grau(\psi_{mn}) \leq m+n \ .$$

A equação (5.3.4), resulta de $\langle \sigma, x^k y^l \psi_{mn} \rangle = \langle \psi_{mn} \sigma, x^k y^l \rangle$, ou seja $\langle \partial_x^m \partial_y^n (p^m q^n \sigma), x^k y^l \rangle = (-1)^{m+n} \langle p^m q^n \sigma, \partial_x^m \partial_y^n (x^k y^l) \rangle = 0$, sendo $0 \leq k+l \leq m+n$, $(k,l) \neq (m,n)$.

(iii)

Vamos agora mostrar que, se σ é quase definida, temos $grau(\psi_{mn}) = m+n$ e $\langle \sigma, x^m y^n \psi_{mn} \rangle \neq 0$, $m, n \geq 0$. Suponhamos por hipótese que $grau(\psi_{mn}) \leq m+n-1$, $m+n \geq 1$. Então, $\psi_{mn} \equiv 0$, porque $\langle \sigma, \pi \psi_{mn} \rangle = 0$, para $\pi \in \mathcal{P}_{m+n-1}$, por (5.3.4), e por ser σ quase-definida. De facto, o lema 4.2.1, pg.53, permite-nos afirmar o seguinte. Dado o monómio $x^m y^n$, existe um e um só resto, r_{m+n-1}, de grau menor ou igual a $m+n$, tal que

$$x^m y^n + r_{m+n-1} \perp \mathcal{P}_{m+n-1} \ .$$

Mas então também se verifica

$$(x^m y^n + r_{m+n-1} + \psi_{mn}) \perp \mathcal{P}_{m+n-1} \ ,$$

que contradiz o lema, a menos que seja ψ_{mn} identicamente nulo. Temos então $\partial_x^m \partial_y^n (p^m q^n \sigma) = 0$, pelo que $p \equiv 0$ ou $q \equiv 0$, o que é uma contradição. Então, $grau(\psi_{mn}) = m+n$ e $\langle \sigma, x^m y^n \psi_{mn} \rangle \neq 0$, para $m, n \geq 0$.

Vamos também mostrar que os $\{\psi_{n-j,j}\}_{j=0}^{n}$, $n = 0, 1, \cdots$, , são linearmente independentes, a menos de parcelas pertencentes a $\mathcal{P}_{n-1}$, isto é, $\{\Psi_n\}$, com $\Psi_n = [\psi_{n0}, \psi_{n-1,1}, \cdots, \psi_{0n}]$, é uma sequência polinomial. Suponhamos que $\phi(x,y) = \sum_{j=0}^{n} C_j \psi_{n-j,j}$, sendo os $C_i's$ constantes, é um polinómio de grau menor que n . Por (5.3.4), temos $\langle \sigma, \phi(x,y)\pi(x,y)\rangle = 0$, para qualquer $\pi(x,y) \in \mathcal{P}_{n-1}$. Como σ é quase-definida, resulta $\phi(x,y) \equiv 0$. Como consequência temos $\langle \sigma, \phi(x,y)x^{n-k}y^k\rangle = C_k\langle \sigma, \psi_{n-k,k}x^{n-k}y^k\rangle = 0$, $0 \le k \le n$, o que implica $C_0 = C_1 = \cdots = C_n = 0$. $\{\Psi_n\}$ é então uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, relativamente a σ . Além disto, $\{\Psi_n\}$ também satisfaz a equação diferencial correspondente a $\{P_n\}$ (cf. teoremas 4.2.3, pg.54, e 4.4.6, pg.65). $\square$

Corolário 5.3.1.

1. *Se (5.2) é admissível e se se verificam as condições de (iii) do teorema 5.3.4, pg.76, então a sequência de polinómios* $\{\Psi_n\}$ *, tal que* $\Psi_n = [\psi_{n0}, \psi_{n-1,1}, \cdots, \psi_{0n}]$ *, com*

$$\frac{1}{w}\partial_x^m \partial_y^n (p^m q^n w) = \psi_{mn} \ , \quad n \ge 0 \ , \tag{5.3.-23}$$

e p, q *definidas como em (5.3), pg.76, é uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, solução de (5.2).*

2. *Se (5.2) tem como solução uma sequência de polinómios ortogonais, e se são verificadas as condições de (iii), então existe uma sequência de polinómios fracamente ortogonal, mónica e única,* $\{\mathbb{P}_n\}$ *, que é solução de (5.2), e que é a normalização de* Ψ_n *.*

5.4 Exemplos

1. Fórmula do tipo Rodrigues para Polinómios Circulares

Equação diferencial.

Equação 5, pg.69.

$$(x^2-1)u_{xx}+2xyu_{xy}+(y^2-1)u_{yy}+g(xu_x+yu_y)+\lambda_n u=0\ .$$

Fazendo a decomposição (5.3), pg.75 temos

$$A=x^2-1 \qquad B=xy \qquad C=y^2-1 \qquad D=gx \qquad E=gy$$

$$A_1=C_1=1 \qquad B_1=B=xy \qquad A_2=x^2-1 \qquad C_2=y^2-1\ ,$$

e de (5.3), pg.75 vem

$$\alpha_0=x^2y^2-(x^2y^2-x^2-y^2+1)=x^2+y^2-1$$
$$\beta_0=xy(gy-3y)-(y^2-1)(gx-3x)=(g-3)x$$
$$\gamma_0=xy(gx-3x)-(x^2-1)(gy-3y)=(g-3)y\ .$$

Temos então

$$\alpha=\alpha_0=p=q=x^2+y^2-1\ .$$

Pelos teoremas 5.3.2, pg.74 e 5.3.4, pg.76 temos

$$\frac{1}{w}\partial_x^m\partial_y^n[(x^2+y^2-1)^{m+n}w]=\psi_{mn}(x,y)\ , \qquad m,n\geq 0\quad ,$$

sendo

$$w(x,y)=(x^2+y^2-1)^{\frac{g-3}{2}}\ ,$$

um factor de simetria do operador diferencial (5.4), pg.81 - é verificado o sistema (5.3).

A fórmula de Rodrigues associada aos polinómios circulares, pode escrever-se

$$\psi_{mn}(x,y)=(x^2+y^2-1)^{\frac{3-g}{2}}\partial_x^m\partial_y^n[(x^2+y^2-1)^{\frac{g-3}{2}+m+n}]$$

com $grau(\psi_{mn})=m+n$ e $m,n\geq 0$.

2. Fórmula do tipo Rodrigues para Polinómios Triangulares

<u>Equação diferencial.</u>

Equação 6, pg.70.

$$(x^2-x)u_{xx}+2xyu_{xy}+(y^2-y)u_{yy}+[(\alpha+\beta+\gamma+3)x-$$
$$-(1+\alpha)]u_x+[(\alpha+\beta+\gamma+3)y-(1+\beta)]u_y+\lambda_n u=0\ .$$

Fazendo a decomposição (5.3), pg.75, temos

$$A=x^2-x \qquad B=xy \qquad C=y^2-y$$
$$D=(\alpha+\beta+\gamma+3)x-(1+\alpha) \qquad E=(\alpha+\beta+\gamma+3)y-(1+\beta)$$
$$A_1=x \qquad B_1=1 \qquad A_2=x-1 \qquad C_1=y \qquad C_2=y-1\ .$$

De (5.3), pg.75, vem

$$\alpha_0=xy-(x-1)(y-1)=x+y-1\ .$$

Temos então

$$p=A_1\alpha_0=x(x+y-1) \quad , \quad q=C_1\alpha_0=y(x+y-1)\ .$$

Pelo teorema 5.3.4, pg.76,

$$\frac{1}{w}\partial_x^m\partial_y^n[x^my^n(x+y-1)^{m+n}w]=\psi_{mn}(x,y)\ , \qquad m,n\geq 0\ ,$$

sendo

$$w(x,y)=x^\alpha y^\beta(x+y-1)^\gamma\ ,$$

um factor de simetria do operador diferencial (5.4), pg.81, - é verificado o sistema (5.3), pg.75,.

A fórmula de *Rodrigues* associada aos polinómios triangulares, pode escrever-se

$$x^{-\alpha}y^{-\beta}(x+y-1)^{-\gamma}\partial_x^m\partial_y^n[x^my^n(x+y-1)^{m+n}w]=\psi_{mn}(x,y)\ , \qquad m,n\geq 0,$$

com $grau(\psi_{mn})=m+n$.

Observação. Note-se que as fórmulas de *Rodrigues* encontradas para os polinómios

Circulares e Triangulares se referem, para cada caso, a uma sequência de polinómios fracamente ortogonal que satisfaz a mesma equação diferencial que esses polinómios. O elo de ligação entre a sequência produzida pela função geradora e a família correspondente, reside no facto de lhes estar associada a mesma sequência normalizada - a única sequência de polinómios fracamente ortogonal mónica que resolve a equação diferencial (cf. o teorema 4.2.3, pg.54, e o corolário 5.3.1, pg.80).

5.5 Extensão da Fórmula de Lagrange

Vamos demonstrar uma extensão para duas variáveis do teorema de *Lagrange*, 3.4.3, pg.37. Para tal, é necessário o seguinte lema.

Lema 5.5.1 (Favard, [11]). *Sejam $f(z_1, z_2)$ e $\phi(z_1, z_2)$ funções holomorfas num domínio D, anulando-se $\phi(z_1, z_2)$ no ponto $(\xi_1, \xi_2) \in D$ e tendo neste ponto derivadas parciais de primeira ordem nulas, de modo que*

$$\phi = a_{11}(z_1 - \xi_1)^2 + 2a_{12}(z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2) + a_{22}(z_2 - \xi_2)^2 + \cdots$$

supondo que $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Então

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1^+} dz_1 \int_{\gamma_2^+} \frac{f}{\phi} dz_2 = \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}} \ ,$$

sendo a_{11}, a_{12}, a_{22} calculados no ponto $(\xi_1,\ \xi_2)$ e definindo γ_1, γ_2 um domínio contido em D ao qual pertence contém o ponto $(\xi_1,\ \xi_2)$.

Prova

A igualdade $\phi = a_{11}(z_1 - \xi_1)^2 + 2a_{12}(z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2) + a_{22}(z_2 - \xi_2)^2 + \cdots$, pode escrever-se da forma

$$\phi = a_{11}(z_1-\xi_1)^2+2a_{12}(z_1-\xi_1)(z_2-\xi_2)+a_{22}(z_2-\xi_2)^2-\|(z_1-\xi_1, z_2-\xi_2)\|R_2(z_1-\xi_1, z_2-\xi_2),$$

com $\lim_{(z_1,z_2)\to(\xi_1,\xi_2)} R_2 = 0$. Fazendo $G = a_{11}(z_1 - \xi_1)^2 + 2a_{12}(z_1 - \xi_1)(z_2 - \xi_2) + a_{22}(z_2 - \xi_2)^2$, temos

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma_2} \frac{f}{\phi} dz_1 \wedge dz_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma_2} \frac{f}{G}\frac{1}{1 - \|(z_1 - \xi_1, z_2 - \xi_2)\|R_2/G} dz_1 \wedge dz_2 \ .$$

Escolhendo γ_1 e γ_2 tais que $|\|(z_1-\xi_1, z_2-\xi_2)\|R_2/G| < 1$, fica

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma_2}\frac{f}{\phi}dz_1\wedge dz_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma_2}\frac{f}{G}\sum_{n=0}^{\infty}(\|(z_1-\xi_1, z_2-\xi_2)\|R_2)^n/G^n dz_1\wedge dz_2$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\gamma_1\times\gamma_2}\frac{f}{G}(\|(z_1-\xi_1, z_2-\xi_2)\|R_2)^n/G^n dz_1\wedge dz_2 \ .$$

Como $\frac{f}{G}(\|(z_1-\xi_1, z_2-\xi_2)\|R_2)^n/G^n$ é analítica para $n > 0$, no domínio limitado definido por $\gamma_1\times\gamma_2$, temos

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma_2}\frac{f}{\phi}dz_1\wedge dz_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma_2}\frac{f}{G}dz_1\wedge dz_2 \ .$$

Vamos então calcular o integral

$$I = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1\times\gamma_2}\frac{f}{a_{11}(z_1-\xi_1)^2+2a_{12}(z_1-\xi_1)(z_2-\xi_2)+a_{22}(z_2-\xi_2)^2}dz_1\wedge dz_2 \ .$$

Podemos escrever G da forma

$$G = \begin{bmatrix} z_1-\xi_1, z_2-\xi_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1-\xi_1 \\ z_2-\xi_2\end{bmatrix} \ .$$

Como a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}$ é simétrica, existe uma matriz U, unitária, tal que

$$U^T A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix},$$

sendo λ_1, λ_2 os valores próprios da matriz A.

Fazendo então a mudança apropriada de variáveis, temos

$$I = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1^*\times\gamma_2^*}\frac{f^*(t_1,t_2)}{\lambda_1 t_1^2+\lambda_2 t_2^2}dt_1\wedge dt_2,$$

correspondendo $f^*(t_1,t_2), \gamma_1^*(t_1), \gamma_2^*(t_2)$, respectivamente a $f(z_1,z_2), \gamma_1(z_1), \gamma_2(z_2)$, após a mudança de variáveis. Escrevendo agora

$$\lambda_1 t_1^2+\lambda_2 t_2^2 = (\sqrt{\lambda_1}t_1 - \sqrt{-\lambda_2}t_2)(\sqrt{\lambda_1}t_1 + \sqrt{-\lambda_2}t_2),$$

e fazendo a mudança de variáveis

$$v_1 = \sqrt{\lambda_1}t_1 - \sqrt{-\lambda_2}t_2, \qquad v_2 = \sqrt{\lambda_1}t_1 + \sqrt{-\lambda_2}t_2,$$

temos

$$2\sqrt{\lambda_1}t_1 = v_1 + v_2, \qquad 2\sqrt{-\lambda_2}t_2 = v_2 - v_1,$$

e

$$I = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1^{**}\times\gamma_2^{**}} \frac{f^{**}(v_1,v_2)}{v_1v_2}\frac{1}{2\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}dv_1\wedge dv_2 = f^{**}(0,0)/(2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}),$$

correspondendo $f^{**}(v_1,v_2), \gamma_1^{**}(v_1), \gamma_2^{**}(v_2)$, respectivamente a $f^*(t_1,t_2), \gamma_1^*(t_1), \gamma_2^*(t_2)$, depois de operada a mudança de variáveis. Note-se que $f^{**}(0,0) = f(\xi_1,\xi_2)$. □

Teorema 5.5.1 (Extensão da fórmula de Lagrange [11]). *Sejam* $f_1 = f_1(z_1,z_2)$ *e* $f_2 = f_2(z_1,z_2)$ *funções holomorfas numa vizinhança do ponto* $(a_1,a_2) \in \mathbb{C}^2$ *, tais que o sistema*

$$\phi_1 = z_1 - a_1 - u_1 f_1(z_1,z_2) = 0$$
$$\phi_2 = z_2 - a_2 - u_2 f_2(z_1,z_2) = 0,$$

defina z_1 *e* z_2 *como funções de* u_1 *e* u_2 *, na vizinhança do ponto* $(z_1,z_2) = (\xi_1,\xi_2)$ *com* $\phi_1(\xi_1,\xi_2) = \phi_2(\xi_1,\xi_2) = 0$ *. Seja ainda* $f = f(z_1,z_2)$ *uma função holomorfa na vizinhança de* (a_1,a_2) *. Então, é válida a seguinte igualdade*

$$\frac{f(\xi_1,\xi_2)}{f(a_1,a_2)\left[\frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(z_1,z_2)}\right]_{(\xi_1,\xi_2)}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\partial^m\partial^n}{\partial_{z_1^m}\partial_{z_2^n}}(f_1^m f_2^n f)\right]_{(z_1,z_2)=(a_1,a_2)}}{f(a_1,a_2)} \frac{u_1^m u_2^n}{m!n!} \tag{5.5.-2}$$

Prova([19])

Vamos mostrar que

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1^+} dz_1 \int_{\gamma_2^+} \frac{f}{\phi_1\phi_2}dz_2 = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{u_1^m u_2^n}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}}{\partial z_1^m \partial z_2^n}(f f_1^m f_2^n)\ ,$$

com a_1 pertencendo ao interior geométrico de γ_1 e a_2 pertencendo ao interior geométrico de γ_2 . Vamos obter um desenvolvimento em série para a expressão $1/(\phi_1\phi_2)$. Admitindo u_1 e u_2 tais que $|u_1 f_1(z_1,z_2)/(z_1 - a_1)| < 1$ e

$|u_2 f_2(z_1, z_2)/(z_2 - a_2)| < 1$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\phi_1\phi_2} &= \frac{1}{z_1 - a_1 - u_1 f_1}\frac{1}{z_2 - a_2 - u_2 f_2} \\
&= \frac{1/(z_1 - a_1)}{1 - u_1 f_1/(z_1 - a_1)}\frac{1/(z_2 - a_2)}{1 - u_2 f_2/(z_2 - a_2)} \ . \\
&= \frac{1}{z_1 - a_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u_1^m f_1^m}{(z_1 - a_1)^m}\frac{1}{z_2 - a_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_2^n f_2^n}{(z_2 - a_2)^n} \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{u_1^m u_2^n f_1^m f_2^n}{(z_1 - a_1)^{m+1}(z_2 - a_2)^{n+1}} \ .
\end{aligned}$$

A série é uniformemente convergente. Podemos por isso escrever

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1^+} dz_1 \int_{\gamma_2^+}\frac{f}{\phi_1\phi_2}dz_2 = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m,n=0}^{\infty} u_1^m u_2^n \int_{\gamma_1^+\times\gamma_2^+}\frac{f f_1^m f_2^n}{(z_1 - a_1)^{m+1}(z_2 - a_2)^{n+1}}dz_1 \wedge dz_2 \ .$$

Aplicando o teorema de *Cauchy*, obtém-se

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1^+,\gamma_2^+}\frac{f}{\phi_1\phi_2}dz_1 \wedge dz_2 = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{u_1^m u_2^n}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}}{\partial z_1^m \partial z_2^n}(f f_1^m f_2^n)\bigg|_{(z_1,z_2)=(a_1,a_2)} \ .$$

O segundo membro é uma fórmula de *Rodrigues*.

Vamos agora mostrar que

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_1^+,\gamma_2^+}\frac{f}{\phi_1\phi_2}dz_1 \wedge dz_2 = \frac{f(\xi_1,\xi_2)}{\left[\frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(z_1,z_2)}\right]_{(\xi_1,\xi_2)}} \ .$$

Façamos $G = \phi_1\phi_2$. Temos

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial z_1^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z_1^2}\phi_2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial z_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_1} + \frac{1}{2}\phi_1\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z_1^2} \\
a_{12} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial z_1\partial z_2} = \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z_1\partial z_2}\phi_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial z_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial z_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_1} + \frac{1}{2}\phi_1\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z_1\partial z_2} \\
a_{22} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial z_2^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z_2^2}\phi_2 + \frac{\partial\phi_1}{\partial z_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_2} + \frac{1}{2}\phi_1\frac{\partial^2\phi_2}{\partial z_2^2} \ .
\end{aligned}$$

No ponto ξ_1, ξ_2, fica

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\partial\phi_1}{\partial z_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_1} \\
a_{12} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial z_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial z_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_1} \\
a_{22} &= \frac{\partial\phi_1}{\partial z_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_2},
\end{aligned}$$

e

$$2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial z_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi_1}{\partial z_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_1}\right)^2 - \frac{\partial\phi_1}{\partial z_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial z_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_2}},$$

ou seja

$$2\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_2} - \frac{\partial\phi_1}{\partial z_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial z_1}\right)^2} = \left[\frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(z_1,z_2)}\right]_{(\xi_1,\xi_2)}.$$

Utilizando agora o resultado do lema 5.5.1, obtemos a expressão (5.5), concluindo a demonstração. □

5.6 Exemplos de Funções Geradoras

1. Polinómios de Hermite

Façamos as seguintes substituições na fórmula de Lagrange, (5.5.1).

$$f(z_1,z_2) = w(z_1,z_2) = \exp^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_1(z_1,z_2) = 1 = \sigma(z_1)$$

$$f_2(z_1,z_2) = 1 = \sigma(z_2)\ .$$

É imediato o cálculo do zero (ξ_1,ξ_2) do sistema

$$\phi_1 = z_1 - a_1 - u_1 = 0$$

$$\phi_2 = z_2 - a_2 - u_2 = 0\ .$$

Temos

$$z_1 = u_1 + a_1 = \xi_1$$

$$z_2 = u_2 + a_2 = \xi_2\ .$$

Fazendo na fórmula de Lagrange, (5.5.1),pg.85 $(z_1, z_2) = (\xi_1, \xi_2)$ e depois $(a_1, a_2) = (x, y)$, obtemos a seguinte expressão para uma função geradora, $G(x, y, u_1, u_2)$

$$
\begin{aligned}
G(x, y, u_1, u_2) = \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{f(a_1, a_2)\left[\frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(z_1,z_2)}\right]} &= \exp^{-[(u_1+a_1)^2+(u_2+a_2)^2)]} \Big/ \exp^{-(a_1^2+a_2^2)} \\
&= \exp[-[(u_1^2 + 2u_1a_1) + (u_2^2 + 2u_2a_2)]] \\
&= \exp[-(u_1^2 + 2xu_1 + u_2^2 + 2xu_2)]
\end{aligned}
$$

com

$$
\left[\frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(z_1, z_2)}\right] = 1 \ .
$$

2. Polinómios Circulares

Façamos as seguintes substituições na fórmula de Lagrange, (5.5.1) - ver (5.4), pg.81.

$$
\begin{aligned}
f(z_1, z_2) &= w(z_1, z_2) = (1 - z_1^2 - z_2^2)^{\frac{g-3}{2}} \\
f_1(z_1, z_2) &= p(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 - 1 \\
f_2(z_1, z_2) &= q(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2 - 1 \ .
\end{aligned}
$$

Calculemos um zero (ξ_1, ξ_2) do sistema

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= z_1 - a_1 - u_1(z_1^2 + z_2^2 - 1) = 0 \\
\phi_2 &= z_2 - a_2 - u_2(z_1^2 + z_2^2 - 1) = 0 \ .
\end{aligned}
$$

De (5.6) vem

$$
\begin{aligned}
& u_1z_1^2 - z_1 + a_1 + u_1(z_2^2 - 1) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4u_1[a_1 + u_1(z_2^2 - 1)]}}{2u_1} \ .
\end{aligned}
$$

Se $u_1 \to 0$, então uma raíz de (5.6) tende para infinito e a outra para a_1 . Como a_1 pertence ao domínio limitado definido pelo caminho de integração γ_1 , o zero que interessa na fórmula de Lagrange é

$$\xi_1 = \frac{1-\sqrt{1-4u_1[a_1+u_1(z_2^2-1)]}}{2u_1} \ .$$

Substituindo esta expressão para z_1 em (5.6), fica (com $A = 1-4u_1[a_1+u_1(z_2^2-1)]$)

$$z_2 - a_2 - u_2[\frac{1-2\sqrt{A}+A}{4u_1^2} + z_2^2 - 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4u_1^2 z_2 - 4u_1^2 a_2 - u_2(1+A) + 2u_2\sqrt{A} - u_2 4u_1^2(z_2^2-1) = 0$$

$$4u_1^2 z_2 - 4u_1^2 a_2 - 2u_2 + 4u_1u_2a_1 + 2u_2\sqrt{A} = 0$$

$$4u_1^2 z_2 - 4u_1^2 a_2 - 2u_2 + 4u_1u_2a_1 = -2u_2\sqrt{A}$$

Quadrando ambos os membros

$$u_2^2 A = [(2u_1^2 z_2 - 2u_1^2 a_2) + (-u_2 + 2u_1u_2a_1)]^2$$

$$\Leftrightarrow u_2^2[1-4u_1(a_1+u_1(z_2^2-1)] =$$

$$= [2u_1^2(z_2-a_2)]^2 + 4u_1^2(z_2-a_2)(-1+2u_1a_1)u_2 + u_2^2(-1+2u_1a_1)^2$$

$$= 4u_1^4(z_2^2 - 2a_2z_2 + a_2^2) + 4u_1^2u_2(z_2-a_2)(-1+2u_1a_1) +$$

$$+ u_2^2(1-4u_1a_1+4u_1^2a_1^2)$$

$$= 4u_1^4z_2^2 - 8a_2u_1^4z_2 + 4u_1^4a_2^2 + 4u_1^2u_2(-1+2u_1a_2)z_2 -$$

$$- 4u_1^2u_2a_2(-1+2u_1a_1) + u_2^2(1-4u_1a_1+4u_1^2a_1^2)$$

$$= 4u_1^4z_2^2 + [4u_1^2u_2(-1+2u_1a_2) - 8a_2u_1^4]z_2 + 4u_1^4a_2^2 -$$

$$- 4u_1^2u_2a_2(-1+2u_1a_2) + u_2^2(1-4u_1a_1+4u_1^2a_1^2) \ ,$$

isto é

$$u_2^2(1-4u_1(a_1+u_1(z_2^2-1))) = 4u_1^4z_2^2 + [4u_1^2u_2(-1+2u_1a_2) - 8a_2u_1^4]z_2 + 4u_1^4a_2^2 -$$

$$- 4u_1^2u_2a_2(-1+2u_1a_2) + u_2^2(1-4u_1a_1+4u_1^2a_1^2) \ ,$$

Designando por B o segundo membro de (5.6), temos

$$[(-1+\tfrac{B}{u_2^2})\tfrac{-1}{4u_1} - a_1]\tfrac{1}{u_1} + 1 = z_2^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\tfrac{1}{4u_1^2} - \tfrac{B}{4u_1^2u_2^2} - \tfrac{a_1}{u_1} + 1 = z_2^2 \ . \qquad (5.6.\text{-}31)$$

De (5.6), temos

$$\frac{B}{4u_1^2u_2^2} = z_2^2\frac{u_1^2}{u_2^2} + [\frac{1}{u_2}(-1+2u_1a_2) - 2a_2\frac{u_1^2}{u_2^2}]z_2 + a_2^2\frac{u_1^2}{u_2^2} -$$
$$-\frac{a_2}{u_2}(-1+2u_1a_1) + \frac{1}{4u_1^2}(1-4u_1a_2+4u_1^2a_1^2)$$

Substituindo esta expressão em (5.6.-31), fica

$$\Leftrightarrow \quad -\tfrac{u_1^2+u_2^2}{u_2^2}z_2^2 - [\tfrac{1}{u_2}(-1+2u_1a_2) - 2a_2\tfrac{u_1^2}{u_2^2}]z_2 - a_2^2\tfrac{u_1^2}{u_2^2} + \tfrac{a_2}{u_2}(-1+2u_1a_1) -$$
$$-\tfrac{1}{4u_1^2}(1-4u_1a_1+4u_1^2a_1^2) + \tfrac{1}{4u_1^2} - \tfrac{a_1}{u_1} + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (u_1^2+u_2^2)z_2^2 + [u_2(2u_1a_1-1) - 2a_2u_1^2]z_2 + a_2^2u_1^2 - a_2u_2(-1+2u_1a_1) +$$
$$+\tfrac{u_2^2}{4u_1^2}(-4u_1a_1+4u_1^2a_1^2) - [1-\tfrac{a_1}{u_1}]u_2^2 = 0\ .$$

Temos então a seguinte expressão para z_2

$$z_2 = \frac{2a_2u_1^2 - u_2(2u_1a_1-1) \pm \sqrt{[u_2^2 + 4u_1^2u_2^2 + 4u_2^4 - 4u_1u_2^2a_1 - 4u_2^4a_1^2 - 4u_2^3a_2 + 8u_1u_2^3a_1a_2 - 4u_1^2u_2^2a_2^2}}{2(u_1^2+u_2^2)}\ .$$

Fazendo $u_1 \to 0$ temos

$$lim_{u_1\to 0}z_2 = \frac{u_2 \pm \sqrt{u_2^2 - 4u_2^4(-1+a_1^2) - 4u_2^3a_2}}{2u_2^2}\ .$$

Se nesta expressão fizermos $u_2 \to 0$, tomando o sinal '-' à esquerda do radical, temos $z_2 = a_2$. Se tomarmos o sinal '+' à esquerda do radical, temos $z_2 = \infty$. Como a_2 pertence ao interior do caminho de integração γ_2 , o zero que interessa na fórmula de Lagrange é

$$\xi_2 = \frac{2a_2u_1^2 - u_2(2u_1a_1-1) - \sqrt{u_2^2 + 4u_1^2u_2^2 + 4u_2^4 - 4u_1u_2^2a_1 - 4u_2^4a_1^2 - 4u_2^3a_2 + 8u_1u_2^3a_1a_2 - 4u_1^2u_2^2a_2^2}}{2(u_1^2+u_2^2)}\ .$$

Fazendo na fórmula de Lagrange, $(z_1, z_2) = (\xi_1, \xi_2)$ e depois $(a_1, a_2) = (x, y)$, obtemos a seguinte expressão para uma função geradora, $G(x, y, u_1, u_2)$

$$G(x,y,u_1,u_2) = \frac{f(\xi_1,\xi_2)}{f(a_1,a_2)\left[\frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(z_1,z_2)}\right]} = \frac{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{(g-3)/2}}{1+2(u_1\xi_1-u_2\xi_2)}\frac{1}{(1-x^2-y^2)^{(g-3)/2}}$$
$$= \sum_{m,n}\left[\partial_x^m\partial_y^n[(x^2+y^2-1)^{\frac{g-3}{2}+m+n}\right]\frac{u_1^m u_2^n}{m!n!}\ ,$$

com

$$\left[\frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(z_1,z_2)}\right] = (1-2u_1z_1)(1-2u_2z_2) - 4u_1u_2z_1z_2 = 1 + 2(u_1z_1 - u_2z_2)$$

e

$$\xi_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4u_1[a_1 + u_1(\xi_2^2 - 1)]}}{2u_1} \; .$$

$$\xi_2 = \frac{2yu_1^2 - u_2(2u_1x - 1) - \sqrt{u_2^2 + 4u_1^2u_2^2 + 4u_2^4 - 4u_1u_2^2x - 4u_2^4x^2 - 4u_2^3y + 8u_1u_2^3xy - 4u_1^2u_2^2y^2}}{2(u_1^2 + u_2^2)} \; .$$

Bibliografia

[1] W. Al-Salam, *Characterization Theorems For Orthogonal Polynomials*, in 'Orthogonal Polynomials : Theory and Practice' (P. Nevai, ed.), NATO-ASI Series C, vol.294, Kluwer, Dordrecht, 1990, pp. 1-24.

[2] A. Branquinho, *Polinómios Ortogonais e Funcionais de Momentos: Problemas Inversos*, Tese de Mestrado, Univ. Coimbra, Depto Matemática. Coimbra. Portugal, 1993.

[3] A. Branquinho, *Contribuição de Vicente Gonçalves na Teoria dos Polinómios Ortogonais*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, n. 37, 1997, pp. 17-20.

[4] A. Branquinho, *Problemas Inversos na Teoria dos Polinómios Ortogonais*, Tese de Doutoramento, Univ. Coimbra, Depto Matemática. Coimbra. Portugal, 1996.

[5] A. Branquinho e A. Foulquié Moreno : *A Non-Homogeneous Linear Differential Equation that has Orthogonal Polynomial Solutions.* Pré-Publicações. Dep. Mat. Univ. Coimbra, n. 95-2,2 1995.

[6] T.S.Chihara : *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, NY, 1978.

[7] F.R. Dias Agudo, *Análise Real Vol. I*, Escolar Editora, Lisboa, 1989.

[8] F.R. Dias Agudo, *Notas para um Curso de Funções de Variável Complexa*, Univ. da Beira-Interior, 1996.

[9] *Encyclopaedia of Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[10] A. Erdélyi et al., *Higher Transcendental Functions*, Vol.2, McGraw-Hill Pub., 1953.

[11] J. Favard, *Cours D'Analyse de L'École Polythechnique*, Gauthier-Villards, Éditeur-Imprimeur-Libraire, Paris, 1960.

[12] M. Goossens, F. Mittelbach, A. Samarin, *The Lateχ Companion*, Addison-Wesley Longman, Inc., 1999, pp. 1-24.

[13] J. van Iseghem, *Polynomes Orthogonaux*, Université des Sciences et Techniques de Lille, Flandres Artois, Pub. Irma, Lille, vol.16, n.II, 1998.

[14] D. Jackson, *Formal Properties of Orthogonal Polynomials in Two Variables*, Duke Math. Journal 2, 1936, pp. 423-434.

[15] D. Jackson, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, Pub. by The Math. Assoc. of America, 1941.

[16] T.H. Koornwinder, *Orthogonal Polynomials in Two Variables which are Eigenfunctions of Two Algebraically Independent Partial Differential Operators*, I, II, Proc. Kon. Ned Akad. Wetensch. A 77, 1974, n.1; Indag. math. 36, 1974, n.1 pp.48-66.

[17] T.H. Koornwinder, *Orthogonal Polynomials in Two Variables which are Eigenfunctions of Two Algebraically Independent Partial Differential Operators*, III, IV, Proc. Kon. Ned Akad. Wetensch. A 77, 1974, n.4; Indag. math. 36, 1974, n.4, pp.357-381.

[18] Y.J.Kim, K.H.Kwon, J.K. Lee, *Orthogonal Polynomials in Two Variables, and Second Order Partial Differential Equations*, Jour. Comp. Appl. Math., 82, 1997, pp.239-260.

[19] Y.J.Kim, K.H.Kwon, J.K. Lee, *Partial Differential Equations Having Orthogonal Polynomial Solutions*, Jour. Comp. Appl. Math., 99, 1998, pp.239-253.

[20] H.L. Krall, I.M. Sheffer, *Orthogonal Polynomials in Two Variables*, Ann. Mat. Pure Appl., ser. 4, 76, 1967, 325-376.

[21] J. Lee, *Bivariate Version of the Hahn-Sonine Theorem*, Proc. of the American Math. Soc., vol.128, n.8, 2000, pp.2381-2391 .

[22] L.L. Littlejohn, *Orthogonal Polynomial Solutions to Ordinary and Partial Differential Equations*,Lect. Notes Math., vol.1329, Springer, Berlin, 1998, pp. 98-124.

[23] L.L. Littlejohn, W.D. Evans, W.N. Everitt, K.H. Kwon, *Real Orthogonal Weights for Bessel Polynomials*, J. Comput. Appl. Math., 49, 1993, 51-57

[24] A.S. Lyskova, *Orthogonal Polynomials in Several Variables* , Soviet Math Doklady, vol. 43, nº1, 1991, pp. 264-268.

[25] F. Marcellán, A. Branquinho, J. Petronilho, *Classical Orthogonal Polynomials: a Functional Approach*, Acta Appl. Math. 34, 1994, pp. 283-303.

[26] Markushevich, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, PRENTICE-HALL, Inc., Englewood Cliffs, N.J., vol. 1967.

[27] Markushevich, A. I., *Sequências Recorrentes*, Editora MIR, 1975.

[28] P. Montel, *Leçons sur les Recorrences et leurs Applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[29] A. Nikiforov e V. Uvarov, *Éléments de la Théorie des Fonctions Spéciales*, Éditions MIR, Moscou Birkhäuser Verlag, 1988.

[30] E.M. Nikishin, V.N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Translactions of Amer. Math. Soc., vol.92, Providence, R.I., 1991.

[31] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl, *The Not So Short Introduction to Lateχ (ver. 3.16)*, (http://www.tug.org/), 2000.

[32] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1987.

[33] P.K. Suetin, *Orthogonal Polynomials in Two Variables*, Gorddon and Breach, NY, OPA, 1999.

[34] J. Vicente Gonçalves, *Sur une Formule de Récurrence* , Portugaliæ Math. **3**, n.3, 1942, pp. 222-233

[35] J. Vicente Gonçalves, *Sur la Formule de Rodrigues* , Portugaliæ Math. **4**, n.1, 1943, pp. 52-64

[36] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 4th Ed., 1999.

[37] Y. Xu *On Orthogonal Polynomials in Several Variables*, Se. Fields Inst. Commun., 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.