DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Ortogonalidade Matricial:

Caso não-simétrico

Autor: Ana Isabel Gonçalves Mendes
Orientadores: Professor Doutor Amílcar José Branquinho
Professor Doutor Francisco Marcellán Español

Coimbra

Novembro, 2009

Dissertação para obtenção do grau
de Doutor em Matemática, especialidade
em Matemática Pura, na Universidade
de Coimbra.

Resumo

Neste trabalho vamos estudar sistemas de polinómios ortogonais relativamente a sistemas de funcionais lineares, apresentando o que se entende por ortogonalidade vectorial à esquerda e ortogonalidade vectorial à direita. A ortogonalidade vectorial apresentada, permite reinterpretar, generalizando, o que se entende na literatura por ortonormalidade matricial. Os sistemas de polinómios estudados satisfazem relações de recorrência a três termos com coeficientes matriciais, que não apresentam nenhum tipo de simetria. Além disso, prova-se que os sistemas de polinómios matriciais que as satisfazem são de facto ortonormais relativamente a uma medida matricial complexa de ortogonalidade. Estabelecem-se ainda, problemas de aproximação tipo Hermite-Padé que nos dão uma reinterpretação do modelo de ortogonalidade estudado. Assim, a reinterpretação vectorial permite estudar um caso não simétrico da ortogonalidade matricial. Neste contexto, apresentam-se resultados assimptóticos para sucessões de polinómios ortogonais matriciais, como é exemplo disso um teorema tipo Markov. Define-se um novo conceito de classe Nevai e para sucessões de polinómios pertencentes a esta classe estuda-se o comportamento assimptótico do quociente entre dois polinómios consecutivos da mesma sucessão. Por outro lado, estuda-se ainda, uma modificação da funcional vectorial por meio de uma funcional Delta. Dão-se condições para a existência de sucessões de polinómios associados a estas novas funcionais vectoriais e, à custa deste novo modelo, reinterpretam-se os produtos internos de Sobolev discretos. A modificação da funcional vectorial estudada permite, ainda, reencontrar resultados estudados por outros autores, como é exemplo disso, os resultados relativos a medidas matriciais onde se adiciona uma delta matricial. Este estudo leva-nos a encontrar o comportamento assimptótico relativo entre uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais pertencente à classe matricial Nevai apresentada neste trabalho e uma sucessão que é ortogonal a uma modificação por uma funcional Delta.

Palavras chave: Polinómios ortogonais matriciais e vectoriais, funcionais lineares, relações de recorrência, matriz tridiagonal por blocos, teorema de Favard, fórmulas de Christoffel-Darboux, produtos internos de Sobolev discretos, modificações por funcionais Delta, classe Nevai, assimptóticas de polinómios ortogonais.

Abstract

In this thesis we present the results of our research on systems of orthogonal polynomials with respect to the systems of linear functionals focusing on the so-called left and right vector orthogonality. The vector orthogonality presented provides a re-interpretation of what is known in the literature as matrix orthogonality. The systems of orthogonal polynomials researched satisfy three terms recurrence relations with matrix coefficients that do not obey to any type of symmetry. We also prove that symmetric systems are indeed orthonormal in relation to a complex measure of orthogonality. Hermite-Padé approximation problems are also discussed giving a reinterpretation of the orthogonality. The vectorial re-interpretation allow us to study a non-symmetric case of the matrix orthogonality. In this sense, new asymptotic results for matrix orthogonal polynomials are presented. A new concept of the Nevai class is presented and is given the behavior of the ratio between two consecutive polynomials belonging to this class. On the other hand, we also present a modification of the vectorial functional using a vector functional of Dirac deltas and their derivatives. Finally, we demonstrate necessary and sufficient conditions for the existence of a sequence of polynomials with respect to this new vectorial functional which provides a new model for the re-interpretation of a discrete Sobolev's inner product. The study of the modification of the vectorial functional also allow us to recover some known results studied by several authors when a Dirac delta is added to a matrix measure. This study take us to find the relative asymptotic behavior between a sequence of orthogonal polynomials that belongs to the generalized Nevai matrix class and a sequence that is orthogonal to a modification of it by a Delta funcional.

Key words: Matrix and vector orthogonal polynomials, Hermite-Padé approximation problems, linear functionals, recurrence relations, tridiagonal operator, Favard type theorems, Christoffel-Darboux formulas, discrete Sobolev inner products, modifications by Deltas functionals, Nevai class, asymptotics of orthogonal polynomials.

Conteúdo

Introdução

Motivação

Uma questão em aberto no final dos anos oitenta do século XX consistia em saber quando é que uma relação de recorrência com um número finito de termos da forma

$$h(x)p_n(x) = c_{n,0}p_n(x) + \sum_{k=1}^{N} [c_{n,k}p_{n-k}(x) + c_{n+k,k}p_{n+k}(x)] \tag{1}$$

onde h é um polinómio de grau N, p_0 uma constante diferente de zero e $c_{n,k}$, $n \geq 0$ são sucessões números reais para $k = 0, 1, 2, ..., N$ e $c_{n,N} \neq 0$, estaria relacionada com algum tipo de ortogonalidade. Desde então, vários autores, dos quais destacamos A.J. Durán, F. Marcellán, P. Nevai e W. Van Assche, entre outros, interessaram-se por este tema, mantendo-o actual, até aos dias de hoje. Os trabalhos de investigação nesta área revelam uma enorme interdisciplinariedade entre as diferentes famílias de polinómios ortogonais. De entre os inúmeros trabalhos existentes destacamos os trabalhos [**13, 14, 17, 20, 32, 37, 42, 46, 47, 48, 49, 50**].

No trabalho [**13**], A.J. Durán apresenta, pela primeira vez, um teorema de Favard para sucessões de polinómios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo relações de recorrência da forma (1).

O resultado acaba por ser mais tarde reformulado pelo o mesmo autor e W. Van Assche em [**17**], onde se estabelece a conexão entre *sucessões de polinómios ortonormais matriciais* e sucessões de polinómios que satisfazem relações de recorrência de ordem superior. Como exemplo dessa conexão os autores apresentam uma interpretação dos *produtos internos de Sobolev discretos* na forma matricial, que mais tarde revela ser pouco eficiente no que respeita à sua manipulação.

No que respeita à *ortogonalidade matricial* esta foi estudada de forma pouco continuada no século passado. Na década de quarenta aparecem resultados sobre o problema de momentos matricial por parte de M. Krein, [**24**] e [**25**], usando teoria de operadores e só na década de oitenta voltam aparecer resultados sobre ortogonalidade matricial na recta real relacionada com a teoria de dispersão "*scattering* *theory*" dos quais destacamos os trabalhos de J. S. Geronimo, [**22**], e de A.I. Aptekarev e E.M. Nikishin, [**4**]. A grande visibilidade da teoria sobre a ortogonalidade matricial é dada no início da década de noventa quando A.J. Durán começou um estudo sistemático da ortogonalidade matricial resultante da surpreendente relação entre a ortogonalidade matricial e a ortogonalidade escalar. No trabalho [**14**], A.J. Durán mostra como interpretar matricialmente a ortogonalidade escalar e como a teoria dos polinómios ortogonais matriciais pode ser uma ferramenta poderosa para resolver problemas da teoria escalar clássica. É com base nestas ideias de A.J. Durán e na teoria desenvolvida por ele e pelos seus colaboradores, que o problema que nos propusemos resolver, parece ter encontrado uma reinterpretação. Não poderíamos ainda deixar de referir os trabalhos [**13, 14, 15, 17, 19**] como referências importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Tendo em consideração a actualidade deste tema, o nosso trabalho tratará de considerar relações de recorrência de ordem superior, no caso de ordem $2N+1$, da forma:

$$h(x)p_n(x) = c_{n+N}^{n+N-1} p_{n+N}(x) + \sum_{k=0}^{2N-1} c_{n+N-1-k}^{n+N-1} p_{n+N-1-k}(x) \tag{2}$$

onde h é um polinómio qualquer de grau fixo N e onde c_j^{n+N-1}, $n \geq 0$ são sucessões de números complexos para $j = n-N, \ldots, n+N-1$ e $c_{n-N}^{n+N-1} \neq 0$. Consideramos ainda, que são dados como condições iniciais $p_0, \ldots, p_{N-1}$.

Comecemos por observar que na estrutura da relação de recorrência (2), que h é um polinómio genérico de grau fixo N, e que não existe nenhuma restrição de simetria nos coeficientes da relação de recorrência, como acontecia na relação (1).

Como já referimos, recordamos que casos particulares desta relação de recorrência, na presença de simetria dos coeficientes da relação de recorrência, tinham já sido anteriormente estudados quer do ponto de vista dos polinómios de Sobolev discretos quer sob o ponto de vista da ortogonalidade matricial.

Motivados pelo estudo das equações em diferenças não simétricas de ordem $2N+1$, o propósito deste trabalho é por um lado estudar as suas soluções polinomiais e respectiva ortogonalidade e, por outro lado, reencontrar resultados conhecidos sobre a ortogonalidade matricial bem como obter suas generalizações.

Com este objectivo, começámos por observar que este tipo de relações tinham uma interpretação sob um ponto de vista vectorial. Este facto, levou-nos à construção de uma estrutura vectorial adequada que permite estudar quaisquer sucessões vectoriais de polinómios ortogonais que satisfaçam uma relação de recorrência a três termos cujos coeficientes matriciais não satisfaçam nenhum tipo de simetria da forma

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) = A_m\mathcal{B}_{m+1}(x) + B_m\mathcal{B}_m(x) + C_m\mathcal{B}_{m-1}(x)$$

onde $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios vectoriais e A_m, B_m e C_m são matrizes numéricas de dimensão $N \times N$, com uma determinada estrutura.

Às sucessões vectoriais de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que estudámos, surgem naturalmente associadas, sucessões de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que satisfazem relações de recorrência da três termos da forma

$$xV_m(x) = A_mV_{m+1}(x) + B_mV_m(x) + C_mV_{m-1}(x) \tag{3}$$

onde A_m, B_m e C_m são matrizes numéricas de dimensão $N \times N$, com uma estrutura específica.

Neste contexto, observámos, que podíamos estudar sucessões de polinómios matriciais não necessariamente ortonormais nem necessariamente ortonormais relativamente a um produto interno induzido por uma matriz de medidas definida positiva. No entanto, rapidamente observámos que o caso ortonormal reaparece como um caso particular.

Uma das preocupações que tivemos em mente foi saber quando é que existia uma matriz de medidas não necessariamente definida positiva relativamente à qual a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que satisfaz (3) é ortogonal.

Conhecíamos já, uma resposta parcial a esta questão, dada nos trabalhos de A.J. Durán (cf. [**13**], [**17**]) para o caso ortonormal e, também, uma outra tentativa parcial para a resolução deste problema pode ser encontrada no trabalho [**12**], onde H. Dette e outros autores, deram condições necessárias e suficientes para que este problema tivesse solução. Neste trabalho, os autores partiram do pressuposto que existia uma sucessão de matrizes numéricas que permitia simetrizar a relação de recorrência, isto é, ficando assim reduzidos ao caso tratado por A.J. Durán.

Outro facto importante, que devemos salientar, é que a ortogonalidade vectorial estudada admite uma interpretação integral e, nesta perspectiva, foi-nos possível estender resultados assimptóticos para famílias de polinómios que satisfazem relações de recorrência a três termos matriciais não simétricas.

Por outro lado, observámos que à custa da ortogonalidade relativamente a uma funcional vectorial qualquer produto interno de Sobolev discreto pode ser reinterpretado de uma forma muito natural que apenas consiste em adicionar à funcional vectorial original um vector cujas componentes são combinações lineares de deltas de Dirac e suas derivadas.

Estas observações, que inicialmente despertaram a nossa curiosidade, têm como resultado o trabalho que aqui apresentamos.

Estrutura e objectivos

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos que descreveremos brevemente.

O objectivo do *primeiro capítulo* consiste na recolha e apresentação de resultados conhecidos sobre sucessões de polinómios ortonormais matriciais.

Nesse sentido definiremos a noção de produto interno sobre o espaço de polinómios matriciais induzido por uma matriz de medidas definida positiva, bem como a noção de sucessão de polinómios ortonormais relativamente a esse produto interno. Para além disso, estabelecemos as propriedades usuais, como é o caso da relação de recorrência a três termos, fórmulas algébricas, núcleo, identidade de Christoffel-Darboux, entre outras. Apresenta-se, ainda, como a ortogonalidade matricial está relacionada com a ortogonalidade escalar mostrando um análogo do conhecido para sucessões de polinómios vectoriais e matriciais e, simultaneamente, a título de consideração, apresentamos a relação existente entre sucessões de polinómios matriciais e as sucessões de polinómios vectoriais. Ainda, relacionado com este facto, apresenta-se como exemplo uma interpretação dos produtos internos de Sobolev discretos à custa dos produtos internos induzidos por uma matriz de medidas definida positiva, indicando explicitamente como tem de ser construída essa matriz de medidas.

Apresentamos, também neste capítulo, um conjunto de resultados assimptóticos sobre sucessões de polinómios matriciais ortonormais. Nesse sentido, apresentamos um *teorema de Markov* e resultados relativos a assimptóticas do quociente.

Finalmente, por forma a motivar o que apresentamos no segundo capítulo, damos uma reinterpretação algébrica na forma vectorial de uma relação de recorrência a $(2N+1)-$termos cujos coeficientes não satisfazem qualquer tipo de simetria. Ou seja, prova-se que se uma sucessão de polinómios satisfaz uma relação de recorrência a $(2N+1)-$termos existe sempre uma sucessão de polinómios vectoriais, que sabemos como construir, que satisfaz uma relação de recorrência a três termos e vice-versa.

No *segundo capítulo* motivados pela reinterpretação vectorial dada no primeiro capítulo comeceçamos por apresentar a teoria algébrica de sucessões de polinómios ortogonais vectoriais. Assim, define-se o que se entende por funcional vectorial e sucessão de polinómios vectoriais. À custa destas duas noções descrevemos o que entendemos por ortogonalidade vectorial à esquerda e ortogonalidade vectorial à direita. Prova-se a existência e unicidade a menos de uma constante matricial multiplicativa de sucessões de polinómios associadas a estes conceitos de ortogonalidade.

Neste capítulo, prova-se ainda que, a relação de recorrência a três termos caracteriza a ortogonalidade em qualquer caso, isto é, demonstram-se dois teoremas tipo Favard, correspondentes a cada uma das noções de ortogonalidade.

Apresenta-se o conceito de função de Markov generalizada, provando que esta função não é mais do que a função resolvente associada a um operador linear de dimensão infinita.

Introduz-se ainda o conceito de espaço dual e base dual, bem como o que se entende por bi-ortogonalidade. À custa da noção de bi-ortogonalidade e de uma escolha adequada para decompor a base dual, prova-se a equivalência entre as duas noções de ortogonalidade vectorial, anteriormente apresentadas.

No *terceiro capítulo*, e porque as sucessões de polinómios ortogonais à esquerda e à direita estão relacionadas com sucessões de polinómios ortogonais matriciais, prova-se que a ortogonalidade vectorial à esquerda e à direita são equivalentes à ortogonal matricial à esquerda e à direita, respectivamente. Estabelecendo assim a conexão entre a ortogonalidade vectorial e a ortogonalidade matricial.

Nesta perspectiva, generaliza-se o teorema de Favard matricial, em que se prova que se uma sucessão de polinómios matriciais satisfaz uma relação de recorrência a três termos cujos coeficientes são não simétricos então existe uma matriz de medidas não necessariamente definida positiva à qual a sucessão de polinómios é ortogonal.

À custa da função de Markov generalizada, apresentada no segundo capítulo, dois problemas tipo Hermite-Padé são estabelecidos. Mostramos que estes problemas caracterizam a ortogonalidade vectorial, quer à esquerda quer à direita.

Apresentamos ainda um resultado de caracterização das sucessões vectoriais de polinómios ortogonais à esquerda e à direita à custa da bi-ortogonalidade relativamente à função de Markov generalizada, apresentando assim um interpretação integral da ortogonalidade vectorial.

Finalmente, apresentamos alguns resultados algébricos como a identidade de Christoffel-Darboux e, suas consequências, como é o caso da propriedade reprodutora do núcleo, que generalizam o caso matricial.

No *quarto capítulo* apresentamos um teorema tipo Markov para sucessões de polinómios matriciais que são ortogonais no sentido descrito no terceiro capítulo. Para tal, será também apresentada uma fórmula tipo quadratura. Apresentaremos também uma generalização da definição de classe Nevai matricial. Nesta classe, iremos estudar o comportamento assimptótico do quociente entre dois polinómios matriciais consecutivos da mesma sucessão.

Além disso, introduziremos o conceito de modificação de uma funcional vectorial por meio uma funcional Delta. Entenda-se como funcional Delta uma funcional vectorial cujos elementos são combinações lineares de deltas de Dirac e suas derivadas. Estudaremos quando é que estas modificações por Deltas funcionais têm associada uma sucessão de polinómios vectoriais, isto é, daremos condições para a existência de uma sucessão de polinómios vectoriais associada à funcional vectorial obtida por uma modificação por uma funcional Delta.

Nestas condições, estudaremos também, as sucessões de polinómios vectoriais associadas à funcional obtida por uma modificação por uma funcional Delta, bem como as propriedades por esta satisfeitas.

Como um exemplo de aplicação, mostraremos que à custa das funcionais vectoriais obtidas por uma modificação por uma funcional Delta, podemos descrever qualquer produto de Sobolev discreto [**2, 20, 27, 28, 30**] e como podemos descrever um produto interno matricial modificado por uma Delta matriz [**44, 45**].

Para finalizar, apresentamos o comportamento assimptótico relativo entre duas sucessões de polinómios ortogonais matriciais quando uma destas sucessões pertence à classe Nevai matricial generalizada e a outra sucessão é ortogonal a uma modificação por uma funcional Delta.

Trabalho futuro

Com este trabalho prevêm-se como possíveis projectos de investigação futuros a interpretação dos problemas de Riemann-Hilbert com respeito à ortogonalidade neste trabalho estabelecida, o estudo de modificações racionais da medida de ortogonalidade e a caracterização dos clássicos Sobolev.

Agradecimentos

Começo por agradecer ao Professor Doutor Amílcar Branquinho, meu orientador. Trabalho com ele há vários anos e foi com ele que aprendi muito do que sei. Agradeço sobretudo toda a dedicação e esforço que permitiram que este trabalho se concretizasse.

Ao Professor Doutor Francisco Marcellán agradeço toda a amizade e disponibilidade durante o ano em que estive em Madrid. Agradeço também, a forma generosa como me cedeu o seu gabinete para que eu pudesse trabalhar. A estadia nesse local de trabalho deu-me o previlégio de ter acesso a uma das melhores bibliotecas pessoais que conheço.

Agradeço à minha "complexa" família (pai, mãe, irmão, irmã, mulher do pai, marido da mãe, avós, avôs, madrinha, padrinho e tios, etc ...) que estiveram sempre presentes com as suas palavras de afecto e preocupação, mesmo tendo dificuldade em memorizar as palavras "polinómios ortogonais".

Aos meus AMIGOS que, em português ou em castelhano, me han dado sonrisas, carinho, que me han escuchado, que me obrigaram a comer quando não me apetecia, que me han arropado, um: Muito obrigado, vos quiero!!!

Agradeço ao Instituto Politécnico de Leiria o apoio concedido que permitiu que este trabalho fosse realizado no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e no Departamento de Matemática da Universidade Carlos III de Madrid.

CAPíTULO I

Teoria geral sobre a ortogonalidade matricial

Este capítulo tem como objectivo introduzir noções e resultados existentes sobre a teoria de polinómios ortogonais matriciais na recta real. Os resultados apresentados neste capítulo podem ainda ser consultados nos trabalhos [**6, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 34, 40, 44, 45**].

1. Relação de recorrência simétrica e interpretação matricial

O resultado "clássico" conhecido como teorema de Favard, (cf. [**10, 41, 43**]), estabelece que qualquer sucessão de polinómios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com p_n de grau n, satisfazendo uma relação de recorrência da forma

$$tp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $a_n > 0$ e $b_n \in \mathbb{R}$, é ortonormal relativamente a uma medida de Borel positiva μ.

No final dos anos oitenta do século XX perguntou-se quando é que uma relação de recorrência da forma

$$x^N p_n(x) = c_{n,0}p_n(x) + \sum_{k=1}^{N}(\overline{c}_{n,k}p_{n-k}(x) + c_{n+k,k}p_{n+k}(x)), \tag{I.1}$$

estava relacionada com algum tipo de ortogonalidade, onde $p_k = 0$, $k < 0$, $c_{n,0}$, $n \geq 0$, são sucessões de números reais, $c_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$ são sucessões de números complexos para $k = 1, \ldots, N$ com $c_{n,N} \neq 0$, onde os coeficientes da relação de recorrência (I.1) satisfazem, claramente, um tipo de simetria.

No trabalho [**13**], A.J. Durán apresenta, pela primeira vez, um teorema de Favard para sucessões de polinómios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo relações de recorrência da forma (I.1).

Nesse sentido, o autor considera, para um número inteiro positivo N, os operadores $R_{N,m}$, $m = 0, 1, \ldots, N-1$, definidos no espaço linear dos polinómios, $\mathbb{P}$, da forma

$$R_{N,m}(p)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{(nN+m)}(0)}{(nN+m)!}x^n,$$

ou seja, o operador $R_{N,m}$ toma do polinómio p as potências de x congruentes com m módulo N, depois remove o factor comum x^m e altera x^N para x, provando o seguinte resultado:

TEOREMA I.1. *Se os polinómios* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *com* p_n *de grau* n *satisfazem uma relação de recorrência a* $(2N+1)-$*termos como (I.1), então existe uma matriz de medidas definida positiva* $\mu = (\mu_{m,m'})$ *para* $0 \leq m, m' \leq N-1$*, tal que os polinómios* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *são ortonormais relativamente ao produto interno* B *definido por*

$$B(p,q) = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{m'=0}^{N-1} \int R_{N,m}(p)(x)R_{N,m'}(q)(x)d\mu_{m,m'}(x). \tag{I.2}$$

Com este teorema, a relação entre os polinómios escalares satisfazendo relações de recorrência de ordem superior e polinómios ortogonais matriciais é estabelecida num trabalho posterior do mesmo autor com W. Van Assche, [**17**], da seguinte forma:

TEOREMA I.2. *Seja* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de polinómios satisfazendo a relação de recorrência a* $(2N+1)-$*termos da forma* (I.1) *e seja* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de polinómios matriciais definida por*

$$P_n(x) = \begin{bmatrix} R_{N,0}(p_{nN}(x)) & R_{N,1}(p_{nN}(x)) & \cdots & R_{N,N-1}(p_{nN}(x)) \\ R_{N,0}(p_{nN+1}(x)) & R_{N,1}(p_{nN+1}(x)) & \cdots & R_{N,N-1}(p_{nN+1}(x)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N,0}(p_{(n+1)N-1}(x)) & R_{N,1}(p_{(n+1)N-1}(x)) & \cdots & R_{N,N-1}(p_{(n+1)N-1}(x)) \end{bmatrix}.$$

Então, a sucessão de polinómios matriciais é ortonormal relativamente a uma matriz de medidas com suporte na recta real e definida positiva.

Reciprocamente, se $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, com* $P_n = (P_n^{m,j})_{m,j=0}^{N-1}$*, é uma sucessão de polinómios ortonormais matriciais, ou equivalentemente, satisfaz uma relação de recorrência a três termos matricial. Então, os polinómios escalares definidos por*

$$p_{nN+m}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} x^j P_n^{m,j}(x^N), \quad n \in \mathbb{N},\ 0 \leq m \leq N-1, \tag{I.3}$$

satisfazem uma relação de recorrência de $(2N+1)-$*termos da forma* (I.1).

A conexão entre a ortogonalidade escalar e a ortogonalidade matricial fornece uma interpretação não trivial da ortogonalidade escalar em termos da ortogonalidade matricial. Esta interpretação não trivial é a chave, da aplicação de resultados da ortogonalidade matricial, para a resolução de problemas na teoria de polinómios ortogonais escalares, relativamente a uma medida definida positiva.

Observe que se reescrever a relação de recorrência (I.1) substituindo n por $n+N-1$,

$$x^N p_{n+N-1}(x) = c_{n+N-1,0}\, p_{n+N-1}(x) + \sum_{k=0}^{N} \left(\overline{c}_{n+N-1,k}\, p_{n+N-1-k}(x) + c_{n+N-1+k,k}\, p_{n+N-1+k}(x)\right) \quad \text{(I.4)}$$

e considerarmos as N equações que decorrem de (I.1) a (I.4), através de cálculos elementares podemos observar que estas N equações podem ser reescritas na seguinte forma matricial

$$x^N \begin{bmatrix} p_n(x) \\ p_{n+1}(x) \\ \vdots \\ p_{n+N-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{n+N,N} & 0 & \dots & 0 \\ c_{n+N,N-1} & c_{n+N+1,N} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+N,1} & c_{n+N+1,2} & \dots & c_{n+2N-1,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n+N}(x) \\ p_{n+N+1}(x) \\ \vdots \\ p_{n+2N-1}(x) \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} c_{n,0} & c_{n+1,1} & \dots & c_{n+N-1,N-1} \\ \overline{c}_{n+1,1} & c_{n+1,0} & \dots & c_{n+N-1,N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c}_{n+N-1,N-1} & \overline{c}_{n+N-1,N-2} & \dots & c_{n+N-1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_n(x) \\ p_{n+1}(x) \\ \vdots \\ p_{n+N-1}(x) \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \overline{c}_{n,N} & \overline{c}_{n,N-1} & \dots & \overline{c}_{n,1} \\ 0 & \overline{c}_{n+1,N} & \dots & \overline{c}_{n+1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{c}_{n+N-1,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n-N}(x) \\ p_{n-N+1}(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix}. \quad \text{(I.5)}$$

Ao efectuarmos a mudança de variável $n = nN$ na relação (I.5) tem-se:

$$x^N \mathcal{B}_n(x) = A_{n+1}\mathcal{B}_{n+1}(x) + B_n \mathcal{B}_n(x) + A_n^* \mathcal{B}_{n-1}(x),$$

com

$$\mathcal{B}_n(x) = \left[p_{nN}(x)\, p_{nN+1}(x)\, \dots\, p_{(n+1)N-1}(x)\right]^T, \quad \text{(I.6)}$$

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} c_{(n+1)N,N} & 0 & \dots & 0 \\ c_{(n+1)N,N-1} & c_{(n+1)N+1,N} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(n+1)N,1} & c_{(n+1)N+1,2} & \dots & c_{(n+2)N-1,N} \end{bmatrix},$$

e

$$B_n = \begin{bmatrix} c_{nN,0} & c_{nN+1,1} & \dots & c_{(n+1)N-1,N-1} \\ \overline{c}_{nN+1,1} & c_{nN+1,0} & \dots & c_{(n+1)N-1,N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{c}_{(n+1)N-1,N-1} & \overline{c}_{(n+1)N-1,N-2} & \dots & c_{(n+1)N-1,0} \end{bmatrix}.$$

No entanto, se considerarmos o vector $\mathcal{P}_0$ dado por $\mathcal{P}_0 = [1\, x \ \dots\ x^{N-1}]^T$ e a base canónica $\{1, x, x^2, \dots\}$ para $\mathbb{P}$, o vector de polinómios $\mathcal{B}_n$ definido por (I.6) pode escrever-se na forma

$$\mathcal{B}_n(x) = V_n(x^N)\mathcal{P}_0(x),$$

onde $V_n(x^N) = \sum_{j=0}^{n} A_j^n (x^N)^j$, com A_j^n matrizes numéricas. Por outro lado, de (I.3) observamos que o vector $\mathcal{B}_n$, se escreve na forma

$$\mathcal{B}_n(x) = P_n(x^N)\mathcal{P}_0(x).$$

Assim, concluímos que $V_n(x) = P_n(x)$, com P_n definido como no teorema I.2.

Estabelecemos, desta forma, que as relações de recorrência a $(2N+1)-$termos admitem uma representação vectorial e que, para além disso, esta representação está intimamente relacionada com a representação destas relaçãoes na forma matricial. Mais detalhes, desta conexão serão discutidos ao longo deste trabalho.

As sucessões de polinómios satisfazendo relações de recorrência a $(2N+1)-$termos como (I.1) aparecem no contexto dos chamados produtos internos de Sobolev, isto é, de um produto interno da forma

$$\langle p, q\rangle_S = \int p(x)q(x)d\mu(x) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_j}\sum_{m=1}^{n_j} M_{k,m}^{(j)}\, p^{(k)}(x_j)\, q^{(m)}(x_j),$$

onde μ é uma medida positiva, $M_{k,m} \geq 0$ e $(x_j)_{j=1}^n$ são números reais.

Nesse sentido, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo I.1. Uma aplicação que relaciona a ortogonalidade escalar de Sobolev com a ortogonalidade matricial pode ser encontrada em **[17]**. Neste trabalho, os autores consideraram o produto escalar de Sobolev discreto (caso diagonal)

$$\langle p, q\rangle_S = \int p(x)q(x)d\mu(x) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=0}^{M_i} \lambda_{i,j} p^{(j)}(c_i)q^{(j)}(c_i) \tag{I.7}$$

onde p, q são polinómios, $\lambda_{i,j} \geq 0$, e $N = M + \displaystyle\sum_{i=1}^{M} M_i$. Aqui, as derivadas são tomadas em M pontos $c_i \in \mathbb{R}$, e no ponto c_i a derivada de maior ordem é de ordem M_i. Assim, é introduzido o polinómio

$$h(x) = \prod_{i=1}^{M}(x - c_i)^{M_i+1},$$

de ordem N (com zeros nos pontos c_i onde as derivadas do produto escalar são calculadas). Com este polinómio, considera-se em vez da base canónica para o espaço vectorial $\mathbb{P}$, a base $\{1, x, \dots, x^{N-1}, h, xh, \dots, x^{N-1}h, h^2, \dots\}$.

Nestas condições, qualquer polinómio p de grau $Nk+l$ com $0 \leq l < N$, pode ser expandido nesta base como

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{k} a_{n,m} x^n h^m(x),$$

onde $a_{n,k} = 0$ sempre que $n > l$.

Tomando os termos em x^n e fazendo

$$R_{h,N,n}(p)(x) = \sum_{m=0}^{k} a_{n,m} x^m,$$

então, para $0 \leq n < N$, cada polinómio $R_{h,N,n}(p)$ tem no máximo grau k (no caso em que $n > l$, o grau é menor que k) e

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N-1} x^n R_{h,N,n}(p)(h(x)).$$

Com estes entes, o produto escalar (I.7) é reescrito em **[17]**, na forma

$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle_S &= \int [R_{h,N,0}(p)(h(x)) \cdots R_{h,N,N-1}(p)(h(x))]\, dM(x) \\ &\times \begin{bmatrix} R_{h,N,0}(q)(h(x)) \\ \vdots \\ R_{h,N,N-1}(q)(h(x)) \end{bmatrix} + [R_{h,N,0}(p)(0) \cdots R_{h,N,N-1}(p)(0)]\, L \begin{bmatrix} R_{h,N,0}(q)(0) \\ \vdots \\ R_{h,N,N-1}(q)(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde M é uma matriz $N \times N$ de medidas dada explicitamente por

$$dM(x) = \begin{bmatrix} d\mu(x) & xd\mu(x) & \dots & x^{N-1}d\mu(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{N-1}d\mu(x) & x^N d\mu(x) & \dots & x^{2N-2}d\mu(x) \end{bmatrix}$$

e onde L é a matriz

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=0}^{M_i} \lambda_{i,j} L(i,j),$$

com $L(i,j)$ a matriz de dimensão $N \times N$

$$L(i,j) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ j! \\ \vdots \\ \frac{k!}{(k-j)!} c_i^{k-j} \\ \vdots \\ \frac{(N-1)!}{(N-1-j)!} c_i^{N-1-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & j! & \cdots & \frac{k!}{(k-j)!} c_i^{k-j} & \cdots & \frac{(N-1)!}{(N-1-j)!} c_i^{N-1-j} \end{bmatrix}.$$

Assim, os polinómios matriciais

$$P_n(x) = \begin{bmatrix} R_{h,N,0}(p_{nN}(x)) & \cdots & R_{h,N,N-1}(p_{nN}(x)) \\ R_{h,N,0}(p_{nN+1}(x)) & \cdots & R_{h,N,N-1}(p_{nN+1}(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ R_{h,N,0}(p_{(n+1)N-1}(x)) & \cdots & R_{h,N,N-1}(p_{(n+1)N-1}(x)) \end{bmatrix}$$

são então ortonormais relativamente à matriz de medidas $M(h^{-1})$ onde foi adicionado um ponto massa em zero, com peso dado pela matriz L. A matriz de medidas $M(h^{-1})$ é tal que

$$\int F(x)dM(h^{-1}(x)) = \int F(h(x)dM(x)),$$

onde F é uma função vectorial (ver [**31**]).

Desta forma, polinómios ortogonais relativamente a um produto interno de Sobolev discreto podem ser sempre expressos como polinómios ortogonais matriciais, onde a medida espectral que lhe está associada tem sempre um ponto massa na origem. Veremos, neste trabalho, como também é possível fazer uma reinterpretação dos produtos internos de Sobolev discretos através de um modelo vectorial.

2. Ortogonalidade matricial

Designemos por $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{K})$ o espaço vectorial das matrizes escalares de dimensão $N\times N$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ e para um N inteiro positivo, fixo.

A matriz polinomial P, de dimensão $N\times N$ e de grau n, é uma matriz quadrada cujas entradas são polinómios escalares de grau quanto muito n, o que é equivalente a considerar o polinómio

$$P(t) = P_{0,n}t^n + P_{1,n-1}t^{n-1} + \cdots + P_{n-1,n}t + P_{n,n},$$

onde $P_{0,n}, P_{1,n-1}, \cdots, P_{n,n} \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ e $P_{0,n}$ é não-singular. A matriz polinomial P assim definida é designada por *polinómio matricial.*

Sejam ainda, designados por $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{P})$ o espaço dos polinómios matriciais com coeficientes em $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ e por $\mathcal{M}^n_{N\times N}(\mathbb{P})$ o subespaço de $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{P})$ formado por todos os polinómios matriciais de grau menor ou igual a n, sendo n um número natural.

Seja também, W uma matriz de medidas de dimensão $N\times N$ definida positiva, isto é, para qualquer conjunto de Borel $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}$, tem-se que a matriz numérica $W(\mathcal{A})$ é uma matriz numérica semi-definida positiva, tal que todo o número natural k,

$$S_k = \int_{\mathbb{R}} t^k dW(t),$$

existe. Designamos S_k por *momento de ordem* k associado a W.

Assumindo que W tem momentos de todas as ordens e é não degenerada, ou seja, $\int_{\mathbb{R}} P(t)dW(t)P^*(t)$ é uma matriz não-singular para qualquer polinómio matricial P com coeficiente principal não-singular, estamos em condições de definir o produto interno hermitiano sobre o espaço de polinómios matriciais $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{P})$ da seguinte forma:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{\mathbb{R}} P(t)dW(t)Q^*(t). \tag{I.8}$$

Observemos ainda, que o produto interno induzido por W, definida positiva, satisfaz as propriedades:

$$\begin{aligned} \langle P, Q\rangle &= \langle Q, P\rangle^*, \\ \langle C_1P_1 + C_2P_2, DQ\rangle &= C_1\langle P_1, Q\rangle D^* + C_2\langle P_2, Q\rangle D^*, \end{aligned}$$

para $P, P_1, P_2, Q \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{P}) \quad \text{e} \quad C_1, C_2, D \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$.

Definição I.1. Diz-se que uma sucessão $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polinómios matriciais, de grau n, é *ortogonal* relativamente a um produto interno da forma (I.8) se

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(t)dW(t)P_m^*(t) = \Gamma_n\delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0, \quad \text{e} \quad \Gamma_n \text{ é definida positiva.}$$

Diz-se que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é *ortonormal* relativamente ao produto interno (I.8) se

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(t)dW(t)P_m^*(t) = I_{N\times N}\delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0.$$

Devemos fazer notar que outros autores, como por exemplo B. Simon em **[11]**, consideram também o produto interno matricial definido por

$$\langle P, Q\rangle = \int_{\mathbb{R}} P^*(t)dW(t)Q(t). \tag{I.9}$$

Relacionado com este produto interno tem-se outra definição de ortogonalidade matricial. Na literatura, para as distinguir, designa-se a ortogonalidade matricial associada ao produto interno (I.8) por *ortogonalidade matricial à esquerda* e designa-se ortogonalidade matricial associada ao produto interno (I.9) por *ortogonalidade matricial à direita.*

De notar ainda que, $\langle P, P\rangle$ é não-singular se P tem coeficiente principal não-singular. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à sucessão $\{I, tI, t^2I, \cdots\}$, obtém-se uma sucessão $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polinómios matriciais ortonormais relativamente a (I.8), de grau n, e com coeficiente principal não-singular. Assim sendo, concluímos que se W é definida positiva, com momentos de todas as ordens, então existe uma sucessão de polinómios ortonormais relativamente a W.

Das relações de ortonormalidade para $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tendo em consideração que P_n é de grau n, observe-se que uma relação de recorrência a três termos é satisfeita pela sucessão de polinómios matriciais $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t),\ n \geq 0, \tag{I.10}$$

com as condições iniciais $P_{-1}(t) = 0_{N\times N}$ e $P_0(t) = I_{N\times N}$, sendo

$$A_n = \langle tP_{n-1}, P_n\rangle \quad \text{e} \quad B_n = \langle tP_n, P_n\rangle,$$

de onde deduzimos que as matrizes A_n são não-singulares e as matrizes B_n são hermitianas.

Observe que a sucessão $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é definida a menos de um factor multiplicativo à esquerda por uma sucessão de matrizes unitárias, isto é, se $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão arbitrária de matrizes unitárias, $U_nU_n^* = I$, para $n \geq 0$, então a sucessão de polinómios matriciais $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $R_n(t) = U_nP_n(t)$ é também ortonormal relativamente ao produto interno (I.8). Para além disso, a sucessão de polinómios $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz a seguinte relação de recorrência a três termos:

$$tR_n(t) = U_nA_{n+1}U_{n+1}^*R_{n+1}(t) + U_nB_nU_nR_n(t) + U_nA_n^*U_{n-1}^*R_{n+1}(t).$$

A relação de recorrência (I.10) caracteriza a ortonormalidade das sucessões de polinómios matriciais que a satisfazem relativamente a uma matriz de medidas definida positiva, isto é, existe um *Teorema de Favard* para sucessões de polinómios matriciais que satisfaçam (I.10).

No trabalho [**40**] encontramos este resultado e uma possível prova do mesmo, de compreensão muito acessível. Outras referências para o mesmo resultado são ainda os trabalhos [**4**] e [**19**]:

TEOREMA I.3. *Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de matrizes não-singulares, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de matrizes hermitianas e $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais com $P_n(t) = P_{n,n}t^n + \cdots + P_{n,0}$ definidos pela fórmula de recorrência*

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t),\ n \geq 0,$$

com as condições iniciais $P_{-1}(t) = 0_{N\times N}$ e $P_0(t) = P_{0,0}$ onde $\det P_{0,0} \neq 0$.

Então, existe uma sucessão de momentos $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ onde cada S_k é uma matriz hermitiana e definida positiva tal que

$$I_{N\times N} = \langle P_0, P_0\rangle = P_{0,0}S_0P_{0,0}^* \quad e \quad \langle P_n, P_m\rangle = 0_{N\times N},\ m \neq n,\ m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Consideremos novamente a relação de recorrência (I.10). Se as matrizes não-singulares A_n que aparecem na relação de recorrência não são matrizes triangulares inferiores, podemos sempre encontrar uma sucessão de matrizes unitárias $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $D_n = U_{n-1}A_nU_n^*$ seja triangular inferior. Sem perda de generalidade, a partir de agora consideramos as matrizes A_n da relação de recorrência (I.10) triangulares inferiores.

Definição I.2. Dada uma sucessão de polinómios ortogonais $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ relativamente a uma matriz de medidas definida positiva W, designamos por *polinómio de segundo tipo ou associado de primeira espécie*, que iremos denotar por $P_n^{(1)}$, com grau $P_n^{(1)}$ igual a n, o polinómio definido por

$$P_n^{(1)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} dW(t),\ n \geq 1.$$

A sucessão de polinómios associados $\{P_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz a relação de recorrência (I.10), mas com as condições iniciais $P_{-1}^{(1)}(x) = 0_{N\times N}$ e $P_0^{(1)}(t) = A_1^{-1}$. Esta sucessão de polinómios terá um papel fundamental nesta secção e nas secções posteriores.

Em [**7**], A. Branquinho prova o seguinte resultado no qual demonstra como a identidade de Christoffel-Darboux e a sua fórmula confluente caracterizam as sucessões de polinómios ortonormais matriciais.

Teorema I.4. *Seja $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais tal que, para cada n, o grau de P_n é igual a n. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de polinómios ortonormais matriciais.*

(b) $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *verifica, para todo o $n \in \mathbb{N}$, a identidade de Christoffel-Darboux*

$$P_{n-1}^*(z)A_nP_n(w) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}(w) = (w-z)\sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)P_k(w),\ w, z \in \mathbb{C}.$$

(c) $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *verifica, para todo o $n \in \mathbb{N}$, a fórmula confluente*

$$P_{n-1}^*(z)A_nP_n'(z) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k^*(z)P_k(z),\ z \in \mathbb{C},$$

e a relação

$$P_{n-1}^*(z)A_nP_n(z) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-1}(z) = 0_{N\times N},\ z \in \mathbb{C}.$$

Observe que da relação de recorrência a três termos, satisfeita pelas sucessões de polinómios ortogonais matriciais se obtém de forma quase directa que estas sucessões satisfazem identidade de Christoffel-Darboux, bem como um seu caso particular designado por fórmula confluente. A mais valia do anterior resultado é que este garante que a identidade de Christoffel-Darboux permite caracterizar a ortogonalidade.

Pode-se ainda obter-se de uma forma directa, partindo da relação de recorrência, a seguinte relação:

$$P_{n-1}^*(z)A_nP_{n-1}^{(1)}(z) - P_n^*(z)A_n^*P_{n-2}^{(1)}(z) = I_{N\times N},\ z \in \mathbb{C},$$

bem como a *fórmula de Liouville-Ostrogradski*:

$$P_{n-1}^{(1)}(z)P_{n-1}^*(z) - P_n(z)(P_{n-2}^{(1)})^*(z) = A_n^{-1},\ z \in \mathbb{C}.$$

Define-se ainda

$$K_n(w,z) = \sum_{j=0}^{n-1} P_j^*(z)P_j(w), \tag{I.11}$$

por *n-ésimo núcleo reprodutor* visto satisfazer a seguinte propriedade:

Para qualquer polinómio matricial $\Pi_m(w)$ de grau $m \leq n-1$, tem-se

$$\langle \Pi_m, K_n(.,z)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \Pi_m(w)dW(z)K_n^*(w,z) = \Pi_m(z).$$

3. Análise assimptótica

Nesta secção apresentamos resultados sobre o comportamento assimptótico dos polinómios ortogonais matriciais. Apresentamos um teorema de Markov que ilustra o comportamento assimptótico do quociente entre o n-ésimo polinómio ortonormal relativamente a uma medida definida positiva e o n-ésimo polinómio associado de primeira espécie. Apresenta-se também, nesta secção, o comportamento assimptótico do quociente entre dois polinómios ortogonais consecutivos da mesma sucessão relativamente a uma medida definida positiva quando esta pertence à denominada *classe Nevai* matricial.

3.1. Espectro de J. Comecemos por apresentar a seguinte definição:

Definição I.3. O número $\mathbf{a}$ é um zero do polinómio matricial P_n, de grau n e dimensão $N \times N$, definido por

$$P_n(t) = P_{n,n} + P_{n-1,n}t + P_{n-2,n}t^2 + \ldots P_{0,n}t^n,$$

se $\mathbf{a}$ é um zero do polinómio escalar $\det P_n(t)$.

Tendo em consideração a definição e propriedades dos determinantes resulta que

$$\det P_n(t) = (\det P_{0,n})t^{nN} + \text{ termos de grau inferior.}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, concluí-se que o polinómio matricial P_n tem exactamente nN zeros, em geral complexos, considerando as suas multiplicidades.

Consideremos a matriz de dimensão infinita J construída a partir das sucessões $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que aparecem na relação de recorrência (I.10)

$$J = \begin{bmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & A_2^* & B_2 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{I.12}$$

É de salientar que a matriz J é uma matriz hermitiana tridiagonal por blocos de dimensão $N \times N$. Esta matriz é designada por *matriz N-Jacobi* associada aos polinómios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. A matriz N-Jacobi tem um papel muito importante no estudo dos zeros dos polinómios matriciais, bem como na demonstração de resultados assimpóticos.

O seguinte lema mostra como o espectro do operador J está relacionado com os zeros da sucessão de polinómios ortogonais.

LEMA I.1. *Para $n \in \mathbb{N}$, os zeros dos polinómio matricial P_n são os mesmos do polinómio escalar $\det(tI_{nN\times nN} - J_n)$ (com a mesma multiplicidade) onde $I_{nN\times nN}$ é a matriz identidade de dimensão $nN\times nN$ e J_n é a matriz Jacobi por blocos truncada de dimensão $nN \times nN$.*

Em conclusão, os zeros do polinómio matricial P_n são reais, quando $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios ortonormais com respeito à matriz de medidas definida positiva W.

Define-se por *matriz adjunta* da matriz A de dimensão $N \times N$, $\operatorname{adj}(A)$, como sendo a matriz que satisfaz a seguinte propriedade:

$$A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A)A = \det(A)I_{N\times N}.$$

No que diz respeito aos zeros de um polinómio matricial têm-se ainda os seguintes resultados:

Lema I.2. *Seja $P(t)$ um polinómio matricial de dimensão $N \times N$ e seja $\boldsymbol{a}$ um zero de $P(t)$ de multiplicidade p. Sejam*

$$L(\boldsymbol{a}, P) = \{v \in \mathcal{M}_{1\times N}(\mathbb{C}) : vP(\boldsymbol{a}) = 0_{1\times N}\}$$

e

$$R(\boldsymbol{a}, P) = \{v \in \mathcal{M}_{1\times N}(\mathbb{C}) : P(\boldsymbol{a})v^* = 0_{N\times 1}\}.$$

Se $dim\, L(\boldsymbol{a}, P) = dim\, R(\boldsymbol{a}, P) = p$ então,

$$(\mathrm{adj}\,(P(t)))^{(l)}(\boldsymbol{a}) = 0_{N\times N}, \ \textit{para} \quad l = 0, \dots, p-2 \quad e \quad (\mathrm{adj}\,(P(t)))^{(p-1)}(\boldsymbol{a}) \neq 0_{N\times N}.$$

Além disso,

$$Car\,(\mathrm{adj}\,(P(t)))^{(p-1)}(\boldsymbol{a}) = p \quad e \quad (\mathrm{adj}\,(P(t)))^{(p-1)}(\boldsymbol{a}),$$

define uma aplicação linear de $\mathcal{M}_{1\times N}(\mathbb{C})$ em $L(\boldsymbol{a}, P)$ que é um isomorfismo de $R(\boldsymbol{a}, P)$ em $L(\boldsymbol{a}, P)$.

No trabalho [**6**], podemos encontrar o seguinte resultado:

Lema I.3. *Sejam $t_{n,k}$, $k = 1, \dots, s$ com $s \leq nN$ os zeros distintos do polinómio matricial P_n. Para qualquer polinómio $P(t)$, de grau menor ou igual a $n-1$, temos a decomposição em fracções próprias para $t \in \mathbb{C} \setminus \{t_{n,1}, \dots, t_{n,s}\}$,*

$$P(t)(P_n(t))^{-1} = \sum_{k=1}^{s} \frac{C_{n,k}}{t - t_{n,k}},$$

onde

$$C_{n,k} = \frac{l_k}{(\det\,(P_n(t)))^{(l_k)}(t_{n,k})} P(t_{n,k})(\mathrm{adj}\,(P_n(t)))^{(l_k-1)}(t_{n,k})$$

e onde l_k é a multiplicidade de $t_{n,k}$ ($l_k \leq N$).

Teorema (Teorema de Stieltjes-Vitali). Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções analíticas numa região aberta G do plano complexo. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em conjuntos compactos de G e converge num subconjunto E de G onde E tem um ponto de acumulação em G então $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto de G.

Uma matriz de medidas definida positiva W diz-se *determinada* se nenhuma outra matriz de medidas definida positiva tem os mesmos momentos que os momentos da matriz W, isto é, a matriz de medidas definida positiva W é unicamente determinada pelos seus momentos S_k, $k \in \mathbb{N}$.

O próximo resultado foi estabelecido por A.J. Durán em [**15**] e exibe o comportamento assimptótico do quociente entre o n-ésimo polinómio ortogonal relativamente a uma matriz de medidas definida positiva e o seu correspondente polinómio associado.

Teorema (Teorema de Markov Matricial). Seja $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortonormais relativamente a uma matriz de medidas W que é determinada. Seja ainda, $\{P_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios associados. Então,

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{-1}(z)P_{n-1}^{(1)}(z) = \int \frac{dW(t)}{z-t},$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ e a convergência é uniforme sobre compactos em $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, onde

$$\Gamma = \cap_{N\geq 0} M_N, \quad M_N = \overline{\cup_{n\geq N}\{\text{zeros de}\, P_n\}}.$$

A F definido por $F(z) = \displaystyle\int \frac{dW(t)}{z-t}$ chama-se *função de Stieltjes (Markov)* associada à matriz de medidas W.

3.2. Classe Nevai. Dadas duas matrizes A e B (com A não-singular e B hermitiana) dizemos que uma sucessão de polinómios matriciais ortonormais $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo a relação de recorrência (I.10) pertence à *classe Nevai*, $M(A,B)$, se $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ e $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Diz-se que uma matriz de medidas definida positiva W está na *classe Nevai* $M(A,B)$ se alguma das suas sucessões polinómios ortonormais está em $M(A,B)$.

Seja A uma matriz não-singular. A sucessão de polinómios matriciais $\{U_n^{A,B}\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida pela relação de recorrência

$$tU_n^{A,B}(t) = A^*U_{n+1}^{A,B}(t) + BU_n^{A,B}(t) + AU_{n-1}^{A,B}(t),\ n \geq 0$$

com condições iniciais $U_0^{A,B} = I_{N\times N}$ e $U_{-1}^{A,B} = 0_{N\times N}$, de acordo com o teorema de Favard, é uma sucessão de polinómios ortonormais relativamente a uma matriz de medidas definida positiva $W_{A,B}$. A sucessão $\{U_n^{A,B}\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é mais do que o análogo matricial dos *polinómios de Chebyshev de segundo tipo* designando-se, então, da mesma forma. Observe ainda que, a matriz de Jacobi associada à sucessão de polinómios ortonormais na classe Nevai não é mais do que uma perturbação compacta da matriz de Jacobi, ou seja, é da forma:

$$J_1 = \begin{bmatrix} B & A & & & \\ A^* & B & A & & \\ & A^* & B & A & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{I.13}$$

Se designarmos por $F_{A,B}$ a função de Stieltjes associada à matriz de medidas $W_{A,B}$ e, sempre que, A seja uma matriz não-singular, tem-se, de acordo com o trabalho [**16**]:

TEOREMA I.5. *Seja* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de polinómios ortonormais matriciais satisfazendo a relação de recorrência a três termos* (I.10). *Assuma-se ainda que,* $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ *e* $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ *com* A *não-singular. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} P_{n-1}(z)P_n^{-1}(z)A_n^{-1} = F_{A,B}(z),\ z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma,$$

onde $W_{A,B}$ *é a matriz de pesos para os polinómios matriciais de Chebyshev de segundo tipo. A convergência é uniforme para* z *em subconjuntos compactos de* $\mathbb{C}\setminus\Gamma$*, onde*

$$\Gamma = \cap_{N\geq 0} M_N, \quad M_N = \overline{\cup_{n\geq N}\{zeros\ de\, P_n\}}.$$

De acordo com os trabalhos [**16, 34**] sabe-se que $F_{A,B}$ é solução da equação matricial quadrática

$$A^*XAX + (B - zI_{N\times N})X + I_{N\times N} = 0_{N\times N}.$$

Em particular, se A é uma matriz definida positiva pode encontrar-se uma expressão explícita para $F_{A,B}$. Para tal, seja $S(z) = \frac{1}{2}A^{-1/2}(zI_{N\times N} - B)A^{-1/2}$, então tem-se

$$F_{A,B}(z) = A^{-1/2}\left[S(z) - (S^2(z) - I_{N\times N})^{1/2}\right]A^{-1/2}.$$

Além disso, a matriz S é diagonalizável a menos um conjunto finito de números complexos z e, também o é, a matriz $A^{1/2}F_{A,B}A^{1/2}$. Tem-se que, se a é um valor próprio de S, então tem-se que $a - (a^2-1)^{1/2}$ é um valor próprio de $A^{1/2}F_{A,B}A^{1/2}$, assumindo que $|\,a - (a^2-1)^{1/2}| < 1$, para $a \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$. Facto este, garante a existência da raiz quadrada apropriada. Como, para $x \in \mathbb{R}$, $I_{N\times N} - S^2(x)$ é hermitiana, então tem-se a decomposição:

$$I_{N\times N} - S^2(x) = U(x)N(x)U^*(x)$$

onde $N(x)$ é uma matriz diagonal cujas entradas são $\{d_{i,i}\}_{i=1}^N$ e $U(x)$ é uma matriz unitária.

Neste caso, a matriz de pesos $W_{A,B}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é dada por

$$dW_{A,B}(x) = \frac{1}{\pi}A^{-1/2}U(x)[N^+(x)]^{1/2}U^*(x)A^{-1/2}\,dx,$$

onde $N^+(x)$ é a matriz diagonal cujas entradas são dadas por $d^+_{i,i}(x) = \max\{d_{i,i}(x), 0\}$.

O suporte de $W_{A,B}$ é então o conjunto de números reais

$$\{y \in \mathbb{R} : S(y) \text{ tem um valor próprio em } [-1,1]\}.$$

De facto, $W_{A,B}$ é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue multiplicada por uma matriz identidade, e o suporte é a união finita de no máximo N intervalos limitados e disjuntos.

No trabalho [**16**] é ainda dada uma expressão dos polinómios matriciais de Chebyshev como funções matriciais dos polinómios escalares de Chebyshev da seguinte forma:

$$U_n^{A,B} = A^{-1/2} u_n\left(S(z)\right) A^{-1/2},$$

onde $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão de polinómios escalares de Chebyshev de segundo tipo.

Exemplo I.2. Tomemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que,

$$S^2(z) - 4I_{N\times N} = \begin{bmatrix} z^2 & -10z \\ -10z & 16z^2 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem o seguinte sistema de valores próprios e vectores próprios:

$$\frac{17z^2 - 5\sqrt{16z^2+9z^4}}{2}\left[\frac{3z}{4} + \frac{\sqrt{16z^2+9z^4}}{4z}, 1\right],$$

$$\frac{17z^2 + 5\sqrt{16z^2+9z^4}}{2}\left[\frac{3z}{4} - \frac{\sqrt{16z^2+9z^4}}{4z}, 1\right].$$

De acordo com a escolha da raiz quadrada, tem-se que $F_{A,B}$ vem dado por:

$$\begin{aligned} F_{A,B}(z) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} z & -4 \\ -4 & 16z \end{bmatrix} \\ &- \frac{1}{2\sqrt{17z^2 - 5\sqrt{16z^2+9z^4}} + 2\sqrt{17z^2 + 5\sqrt{16z^2+9z^4}}} \\ &\times \begin{bmatrix} \sqrt{2}z^2 + \sqrt{32z^4 - 200z^2} & -20\sqrt{2}z \\ -20\sqrt{2}z & 64\sqrt{2}z^2 + 4\sqrt{32z^4-200z^2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde as raízes foram escolhidas por forma a que $F_{A,B}$ fosse analítica em $\mathbb{C}\setminus[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}]$. Como $4I_{N\times N} - S^2(z)$ é diagonalizável na forma:

$$U(x)N(x)U^*(x),$$

tem-se que

$$(N^+(x))^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5\sqrt{16x^2+9x^4}-17x^2}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de onde se obtém:

$$\begin{aligned} dW_{A,B}(x) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{5\sqrt{16x^2+9x^4}-17x^2}}{\sqrt{16+9x^2}}\chi_{[-5/2,5/2]} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{3|x|+\sqrt{16+9x^2}}{2\sqrt{2}} & 2\sqrt{2}\operatorname{sign}(x) \\ 2\sqrt{2}\operatorname{sign}(x) & \frac{-6|x|+2\sqrt{16+9x^2}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

com

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ -1, & \text{se } x < 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

No caso de A ser apenas hermitiana, é apresentado um exemplo em [**16**] onde $W_{A,B}$ é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue multiplicada pela matriz identidade mas com derivada de Radon-Nikodym ilimitada. No caso geral, onde A é não-singular, nada é sabido acerca do suporte de $W_{A,B}$. Além disso, nada se conhece acerca da continuidade absoluta das entradas da matriz relativamente à medida de Lebesgue, ou seja, podem aparecer Deltas de Dirac envolvidas.

4. Interpretação vectorial da relação de recorrência não simétrica

Dado N um inteiro positivo e dada uma sucessão de polinómios escalares $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, consideremos a relação de recorrência de ordem superior,

$$h(x)p_n(x) = c_{n+N}^{n+N-1}p_{n+N}(x) + \sum_{k=0}^{2N-1} c_{n+N-1-k}^{n+N-1}p_{n+N-1-k}(x),\ n \geq 0 \tag{I.14}$$

onde h é um polinómio de grau fixo N, c_j^{n+N-1} são sucessões de números complexos para $j = n-N, n-N+1, ..., n+N-1$ e $c_{n-N}^{n+N-1} \neq 0$.

Consideremos ainda, que são dadas p_i condições iniciais com $i = 0, \ldots, N-1$.

Em primeiro lugar, queremos provar que se uma sucessão de polinómios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma relação de recorrência como (I.14) então existe uma sucessão de polinómios vectoriais, que designaremos por $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e com uma estrutura bem definida, que satisfaz uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais e que o recíproco também é válido.

Teorema I.6. *Seja $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios escalares e $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais com o vector de polinómios $\mathcal{B}_m$ definido por*

$$\mathcal{B}_m(x) = \left[p_{mN}(x)\, p_{mN+1}(x)\ \ldots\ p_{(m+1)N-1}(x)\right]^T.$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *A sucessão de polinómios escalares* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfaz* (I.14);

(b) *A sucessão de polinómios vectoriais* $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *satisfaz*

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) = A_m\mathcal{B}_{m+1}(x) + B_m\mathcal{B}_m(x) + C_m\mathcal{B}_{m-1}(x),\ m \geq 1$$

com condições iniciais

$$\mathcal{B}_{-1}(x) = 0_{N\times 1} \quad e \quad \mathcal{B}_0(x) = [p_0(x)\, p_1(x)\, \ldots\, p_{N-1}(x)]^T .$$

As matrizes A_m, B_m *e* C_m *são determinadas por*

$$A_m = \begin{bmatrix} c^{(m+1)N-1}_{(m+1)N} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{(m+2)N-2}_{(m+1)N} & \ldots & c^{(m+2)N-2}_{(m+2)N-1} \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} c^{(m+1)N-1}_{mN} & \ldots & c^{(m+1)N-1}_{(m+1)N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{(m+2)N-2}_{mN} & \ldots & c^{(m+2)N-2}_{(m+1)N-1} \end{bmatrix}$$

$$e \quad C_m = \begin{bmatrix} c^{(m+1)N-1}_{(m-1)N} & \ldots & c^{(m+1)N-1}_{mN-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & c^{(m+2)N-2}_{mN-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. A prova da implicação $(b) \Rightarrow (a)$ é imediata, bastando ter em consideração a estrutura da relação de recorrência a três termos e a forma dos vectores $\mathcal{B}_m$. Para provar que (a) implica (b), comecemos por reescrever (I.14) substituindo n por $n+N-1$,

$$h(x)p_{n+N-1}(x) = c^{n+2(N-1)}_{n+2N-1}p_{n+2N-1}(x) + \sum_{k=0}^{2N-1} c^{n+2(N-1)}_{n+2(N-1)-k}p_{n+2(N-1)-k}(x) \quad \text{(I.15)}$$

e consideremos as N equações que decorrem de (I.14) a (I.15).

Através de cálculos elementares podemos observar que estas N equações podem ser reescritas na seguinte forma matricial

$$\begin{aligned} h(x)\begin{bmatrix} p_n(x) \\ \vdots \\ p_{n+N-1}(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c^{n+N-1}_{n+N} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n+2N-2}_{n+N} & \ldots & c^{n+2N-2}_{n+2N-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{n+N}(x) \\ \vdots \\ p_{n+2N-1}(x) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} c^{n+N-1}_{n} & \ldots & c^{n+N-1}_{n+N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n+2N-2}_{n} & \ldots & c^{n+2N-2}_{n+N-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_n(x) \\ \vdots \\ p_{n+N-1}(x) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} c^{n+N-1}_{n-N} & \ldots & c^{n+N-1}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & c^{n+2N-2}_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{n-N}(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix}. \quad \text{(I.16)} \end{aligned}$$

Ao efectuarmos a mudança de variável $n = mN$ na relação (I.16) obtemos o pretendido. $\square$

Acabámos então de observar que podemos reinterpretar as relações entre (I.14) e (I.15) como uma relação de recorrência a três termos satisfeita por um vector de polinómios onde os coeficientes da relação de recorrência são matrizes de $N \times N$ com entradas complexas, isto é, A_m, B_m, $C_m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$.

Pretendemos em seguida dar significado à relação de recorrência obtida. Veremos, no próximo capítulo, que esta relação nos dá uma caracterização da ortogonalidade vectorial que passaremos a definir.

Genericamente, podemos dizer, que um *polinómio vectorial* $\mathcal{P}$ é um vector cujas componentes são polinómios escalares na variável x.

Seja $\mathbb{P}^N$ o espaço vectorial dos polinómios vectoriais com N componentes munido das operações usuais de soma e multiplicação de um escalar em $\mathbb{C}$.

Neste espaço vectorial definimos *grau* de $\mathcal{P}$ onde $\mathcal{P} = [p_1 \, \ldots \, p_N]^T$, da seguinte forma:

$$\mathrm{gr}(\mathcal{P}) = \left[\left(\max_{j=1,\ldots,N} \{\mathrm{gr}\ \ p_j\} \right) /N \right],$$

onde $[\ .\ ]$ representa a parte inteira do número.

Considerando h um polinómio de grau fixo N, o espaço vectorial dos polinómios escalares $\mathbb{P}$ tem também como uma possível base

$$\begin{aligned}\{1, ..., x^{N-1}, h, xh, ..., x^{N-1}h, h^2, ..., x^{N-1}h^2, ...\} \\ = \{x^k h^j \,:\, k = 0, 1, ..., N-1,\ j = 0, 1, 2, ...\}.\end{aligned} \tag{I.17}$$

Para além disso, no caso particular em que tomamos $h(x) = x^N$ estamos perante a base canónica.

Qualquer polinómio escalar p de grau $mN + i$, com $i = 0, 1, \ldots, N-1$ pode então ser expandido nesta base como

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{N-1} a_{k,j} x^k (h(x))^j, \quad \text{com} \quad a_{k,j} \in \mathbb{C}.$$

Tendo em consideração a base (I.17) para $\mathbb{P}$ podemos então, observar que o conjunto

$$\{\mathcal{P}_0,\, \mathcal{P}_1,\, \ldots,\, \mathcal{P}_j,\, \ldots\}, \tag{I.18}$$

onde

$$\mathcal{P}_j(x) = (h(x))^j \mathcal{P}_0(x) \quad \text{com} \quad \mathcal{P}_0(x) = \left[1\, x\, \ldots\, x^{N-1}\right]^T$$

é uma base para espaço vectorial $\mathbb{P}^N$.

Definição I.4. A sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{Q}_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{P}^N$ onde $\mathcal{Q}_m$ é, para cada $m \in \mathbb{N}$, um polinómio vectorial de grau m, é dita uma *família livre de polinómios vectoriais.*

No espaço $\mathbb{P}^N$, consideremos então, a família de polinómios da forma

$$\mathcal{B}_m(x) = \left[p_{mN}(x)\, p_{mN+1}(x)\ \dots\ p_{(m+1)N-1}(x)\right]^T.$$

Qualquer elemento desta família pode ser escrito à custa dos elementos da base (I.18), isto é, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma única sucessão de matrizes $\{\beta_j^m\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ tal que

$$\mathcal{B}_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j^m \mathcal{P}_j(x), \tag{I.19}$$

com β_m^m uma matriz triangular inferior não-singular.

Definição I.5. Uma família livre de polinómios vectoriais $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ diz-se uma família de polinómios mónicos se o seu coeficiente principal, isto é, β_m^m na decomposição (I.19) for uma matriz numérica triangular inferior com os elementos da diagonal principal todos de valor igual a um.

A primeira conexão natural entre polinómios vectoriais e polinómios matriciais surge quando observamos que qualquer polinómio vectorial se escreve como o produto de um polinómio matricial por um polinómio vectorial específico na seguinte forma

$$\mathcal{B}_m = V_m(h(x))\mathcal{P}_0(x),$$

onde

$$V_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j^m (h(x))^j, \quad \text{com} \quad \beta_j^m \subset \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}).$$

Observe que o polinómio escalar p_{mN+k} de grau $mN+k$ com $0 \le k \le N-1$ pode ser escrito na base (I.17) na forma

$$p_{mn+k}(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{N-1} a_{i,j} x^j h^i(x).$$

Se considerarmos o operador $R_{h,N,j}$ que toma de p_{mN+k} os termos da forma $a_{i,j}x^j h^i(x)$ e, então, remove o factor comum x^j e altera $h(x)$ por x, tem-se que

$$p_{mN+k}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} x^j R_{h,N,j}(p_{mN+k})(h(x)).$$

Então, é fácil observar que, podemos escrever $\mathcal{B}_m$ na forma

$$\mathcal{B}_m(x) = V_m(h(x))\mathcal{P}_0(x), \tag{I.20}$$

onde V_m é um polinómio matricial de grau m e dimensão $N \times N$ dado por

$$V_m(h(x)) = \begin{bmatrix} R_{h,N,0}(p_{nN})(h(x)) & \cdots & R_{h,N,N-1}(p_{nN})(h(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{h,N,0}(p_{(n+1)N-1})(h(x)) & \cdots & R_{h,N,N-1}(p_{(n+1)N-1})(h(x)) \end{bmatrix}$$

e onde $\mathcal{P}_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & x^{N-1} \end{bmatrix}^T$. Equivalentemente, se podem escrever os elementos da sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ na forma

$$V_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m} B_j^m (h(x))^j, \tag{I.21}$$

onde $\{B_j^m\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de matrizes numéricas com B_m^m uma matriz não-singular.

CAPíTULO II

Teoria geral sobre a ortogonalidade vectorial

Neste capítulo, partindo da reinterpretação vectorial, apresentada no anterior capítulo, para uma relação de recorrência de ordem superior, impõe-se que seja definida uma estrutura vectorial adequada para dar sentido à mesma. Assim, apresentam-se neste capítulo, os conceitos de funcional vectorial e o de sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma funcional vectorial.

Nesse sentido, descrevem-se então, dois tipos de ortogonalidade, que designaremos por ortogonalidade vectorial à esquerda e ortogonalidade vectorial à direita. Apresentam-se teoremas que garantem a existência de uma sucessão de polinómios ortogonais relativamente a uma funcional vectorial, bem como caracterizações da ortogonalidade à custa de uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais. Em resumo, estabelecemos os conceitos necessários para a compreensão da ortogonalidade vectorial.

A maioria dos resultados neste capítulo encontram-se no trabalho [**9**].

1. Funcionais vectoriais

Seja então, $(\mathbb{P}^N)^*$, o espaço linear das funcionais lineares definidas sobre o espaço linear dos polinómios vectoriais com coeficientes em $\mathbb{C}$, $\mathbb{P}^N$, que designaremos por *espaço dual* algébrico. Neste espaço, podemos então definir o que se entende por *funcional vectorial.*

Definição II.1. Sejam $u^j : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ com $j = 1, \ldots, N$, funcionais lineares. Designamos o vector $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} u^1 \ \ldots \ u^N \end{bmatrix}^T$ actuando em $\mathbb{P}^N$ e tomando valores em $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$, definido por

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}) := (\mathcal{U}.\mathcal{P}^T)^T = \begin{bmatrix} \langle u^1, p_1\rangle & \ldots & \langle u^N, p_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u^1, p_N\rangle & \ldots & \langle u^N, p_N\rangle \end{bmatrix}, \tag{II.1}$$

por *funcional vectorial*, onde "(.)" assim definido é o produto simbólico entre os vectores $\mathcal{U}$ e $\mathcal{P}^T$, com $\mathcal{P}^T = [p_1 \ \ldots \ p_N]$.

Naturalmente, a funcional vectorial $\mathcal{U}$, definida anteriormente, é uma funcional linear, isto é,

$$\mathcal{U}(A\mathcal{P} + B\mathcal{Q}) = A\mathcal{U}(\mathcal{P}) + B\mathcal{U}(\mathcal{Q}), \tag{II.2}$$

para A, $B \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ arbitrárias e quaisquer polinómios $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \in \mathbb{P}^N$.

No espaço dual, $(\mathbb{P}^N)^*$, consideremos as seguintes definições e propriedades que nos permitirão operar neste espaço.

Definição II.1. Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial. Definimos a funcional vectorial $x^k\mathcal{U}$ definida em $\mathbb{P}^N$ sobre $\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ como sendo a funcional vectorial linear definida por

$$(x^k\mathcal{U})(\mathcal{P}) := ((x^k\mathcal{U}).\mathcal{P}^T)^T = \mathcal{U}(x^k\mathcal{P}). \tag{II.3}$$

Considerando a base $\{\mathcal{P}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ para $\mathbb{P}^N$, definida em (I.18) onde cada $\mathcal{P}_j$ vem dado por

$$\mathcal{P}_j(x) = (h(x))^j\mathcal{P}_0(x),$$

com $\mathcal{P}_0(x) = [1\, x\, \cdots\, x^{N-1}]^T$ passamos a denotar $(x^k\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)$ por $\mathcal{U}_j^k$. Designamos $\mathcal{U}_j^k$ por *j-ésimo momento* associado à funcional $x^k\mathcal{U}$.

Definição II.2. Seja $\widehat{\mathcal{A}} = \sum_{k=0}^{l} A_k x^k$ um polinómio matricial de grau l onde cada $A_k \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ e seja $\mathcal{U} \in (\mathbb{P}^N)^*$. Definimos *funcional produto à esquerda de* $\mathcal{U}$ *por um polinómio matricial* $\widehat{\mathcal{A}}$, e denotamo-la por $\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{U}$, como sendo a funcional definida por

$$(\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{U})(\mathcal{P}) := ((\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{U}).\mathcal{P}^T)^T = \sum_{k=0}^{l}(x^k\mathcal{U})(\mathcal{P})A_k^T.$$

Observe-se que a funcional $\widehat{\mathcal{A}}\mathcal{U}$ é linear. Para além disso, no caso particular de $l = 0$, tem-se a definição de *funcional produto à esquerda por uma matriz numérica.*

Definição II.2. Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial. Designamos por *funcional vectorial normalizada* associada à funcional vectorial $\mathcal{U}$, a funcional vectorial definida por

$$\widehat{\mathcal{U}} = ((\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1})^T\mathcal{U},$$

onde $\mathcal{P}_0(x) = \left[1,\, x,\, \ldots,\, x^{N-1}\right]^T$. Para além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{P}_0) &= (((\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1})^T\mathcal{U})(\mathcal{P}_0)\\ &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_0)(\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1}\\ &= I_{N\times N}.\end{aligned}$$

De agora em diante, sempre que for necessário e considerarmos conveniente, trabalharemos com funcionais vectoriais normalizadas.

2. Ortogonalidade vectorial

2.1. Ortogonalidade vectorial à esquerda. Definamos em seguida o que se entende por sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente a uma funcional vectorial.

Definição II.3. Seja $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios escalares com grau de p_n igual a n, para $n \in \mathbb{N}$. Seja h um polinómio de grau fixo N, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais com $\mathcal{B}_m(x) = \left[p_{mN}(x)\, p_{mN+1}(x)\, \ldots\, p_{(m+1)N-1}(x)\right]^T$ e seja $\mathcal{U} = \left[u^1\, \ldots\, u^N\right]^T$ uma funcional vectorial linear. $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é dita *sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda* relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ se

(a) $(h^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = 0_{N\times N}$, $k = 0, 1, ..., m-1$;
(b) $(h^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \Delta_m$, $m \in \mathbb{N}$ onde Δ_m é uma matriz triangular superior não-singular.

Lema II.1. *Se $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$, então para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_m$ é unicamente determinado. Assim, verificam-se as seguintes afirmações:*

(a) *Se $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ e $\mathcal{B}_m(x) = C_m\mathcal{A}_m(x)$, $m \geq 0$, com C_m uma matriz triangular superior não-singular então $\{\mathcal{A}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$.*
(b) *Se $\{\mathcal{A}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ são sucessões vectoriais de polinómios ortogonais à esquerda relativamente a $\mathcal{U}$, então existem matrizes numéricas triangulares superiores não-singulares C_m tais que*

$$\mathcal{B}_m(x) = C_m\mathcal{A}_m(x), \quad m \geq 0.$$

Demonstração. Se $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ e existe uma matriz triangular superior não-singular C_m tal que

$$\mathcal{B}_m(x) = C_m\mathcal{A}_m(x), \quad m \geq 0,$$

então

$$(h^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = (h^k\mathcal{U})(I_{N\times N}\mathcal{B}_m) = (h^k\mathcal{U})\left(C_m^{-1}C_m\mathcal{B}_m\right) = C_m^{-1}(h^k\mathcal{U})(\mathcal{A}_m).$$

Logo,

$$C_m^{-1}(h^k\mathcal{U})\,(\mathcal{A}_m) = \Delta_m\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N},$$

onde $\delta_{k,m}$ é o símbolo de Kronecker. Então,

$$(h^k\mathcal{U})\,(\mathcal{A}_m) = \Delta_m^1\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N},$$

com $\Delta_m^1 = C_m\Delta_m$ uma matriz triangular superior não-singular. Isto é, a sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{A}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal relativamente a $\mathcal{U}$.

Sejam $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{A}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucessões vectoriais de polinómios ortogonais à esquerda relativamente a $\mathcal{U}$.

Como $\{\mathcal{A}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma família livre de polinómios, isto é, para cada $m \in \mathbb{N}$ o grau de $\mathcal{A}_m$ é m então $\{\mathcal{A}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ constitui uma base para $\mathbb{P}^N$. Logo, existem matrizes $C_k \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ tais que

$$\mathcal{B}_m(x) = \sum_{k=0}^{m} C_k\mathcal{A}_k(x).$$

Pela ortogonalidade de $\{\mathcal{A}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ relativamente a $\mathcal{U}$ tem-se que

$$(h^k\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) = \sum_{k=0}^{m} C_k(h^k\mathcal{U})(\mathcal{A}_k) = \Delta_m\delta_{k,m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N},$$

ou seja, $C_k = 0_{N\times N}$ para $k = 0, 1, ..., m-1$ e então,

$$\mathcal{B}_m(x) = C_m\mathcal{A}_m(x),$$

com $C_m = (h^m\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m)\,(h^m\mathcal{U})(\mathcal{A}_m))^{-1}$ uma matriz triangular superior não-singular, isto é, existe uma matriz C_m tal que

$$\mathcal{B}_m(x) = C_m\mathcal{A}_m(x), \quad m \geq 0,$$

como pretendíamos demonstrar. $\square$

Antes de obter novos resultados devemos preocupar-nos com questões de existência, isto é, quando é que existe uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$. O seguinte teorema dá-nos uma condição necessária e suficiente para que exista uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$. Para tal, definimos *matriz de Hankel por blocos* associada à funcional vectorial $\mathcal{U}$.

DEFINIÇÃO II.3. Definimos como *matriz de Hankel* por blocos associada à funcional vectorial $\mathcal{U}$ a matriz dada por

$$D_m = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 & \dots & \mathcal{U}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_m & \dots & \mathcal{U}_{2m} \end{bmatrix}, \, m \in \mathbb{N}, \tag{II.4}$$

onde $\mathcal{U}_j$ são os momentos de ordem j associados à funcional vectorial linear $\mathcal{U}$.

DEFINIÇÃO II.4. Uma funcional vectorial é dita *quasi-definida* se todas as sub-matrizes principais de D_m, com D_m dado por (II.4), são não-singulares, para todo o $m \in \mathbb{N}$.

TEOREMA II.4. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear. Então, $\mathcal{U}$ é quasi-definida se, e somente se, existe uma única sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m \mathcal{P}_j$, onde $\alpha_j^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ com α_m^m uma matriz triangular inferior não-singular e uma única sucessão, $\{\Delta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, de matrizes triangulares superiores não-singulares, tais que*

$$\left(h^k\mathcal{U}\right)(\mathcal{B}_m) = \Delta_m \delta_{k,m}, \; k = 0, 1, \dots, m, \;\; m \in \mathbb{N}. \tag{II.5}$$

Além disso,

$$\mathcal{B}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \Delta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}(\mathcal{P}_0) & \cdots & \mathcal{U}(\mathcal{P}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}(\mathcal{P}_m) & \cdots & \mathcal{U}(\mathcal{P}_{2m}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{P}_m \end{bmatrix}. \tag{II.6}$$

DEMONSTRAÇÃO. Para provar que $\mathcal{U}$ é quasi-definida. Seja $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais com $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m \mathcal{P}_j$, onde $\alpha_j^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ e $\{\mathcal{P}_j\}$ é uma base em $\mathbb{P}^N$, tal que $\mathcal{P}_j(x) = (h(x))^j \mathcal{P}_0(x)$, com $\mathcal{P}_0(x) = \begin{bmatrix} 1 \, x \, \cdots \, x^{N-1} \end{bmatrix}^T$.

Das condições de ortogonalidade, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ se, para $k = 0, \dots, m-1$, se tem

$$\left(h^k\mathcal{U}\right)(\mathcal{B}_m) = \left(h^k\mathcal{U}\right)(\sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m \mathcal{P}_j) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m (h^k\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = 0_{N\times N},$$

e, para todo o $m \in \mathbb{N}$, se tem

$$(h^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = (h^m\mathcal{U})(\sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m \mathcal{P}_j) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m \, (h^m\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = \Delta_m.$$

Tendo em consideração que $(h^k\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = \mathcal{U}(\mathcal{P}_{j+k})$, as condições acima podem ser lidas na forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_0^m & \alpha_1^m & \cdots & \alpha_m^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}(\mathcal{P}_0) & \cdots & \mathcal{U}(\mathcal{P}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}(\mathcal{P}_m) & \cdots & \mathcal{U}(\mathcal{P}_{2m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \Delta_m \end{bmatrix}. \quad \text{(II.7)}$$

Para $m = 0$, em (II.7) temos que $\alpha_0^0\mathcal{U}_0 = \Delta_0$. Usando a não-singularidade das matrizes α_0^0 e Δ_0, tem-se $\mathcal{U}_0$ uma matriz não-singular. De forma análoga, tomando $m = 1$ em (II.7), tem-se

$$\begin{cases} \alpha_0^1\,\mathcal{U}_0 + \alpha_1^1\,\mathcal{U}_1 = 0_{N\times N} \\ \alpha_0^1\,\mathcal{U}_1 + \alpha_1^1\,\mathcal{U}_2 = \Delta_1, \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \alpha_1^1(\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1\mathcal{U}_0^{-1}\mathcal{U}_1) = \Delta_1.$$

Como Δ_1 e α_1^1 são matrizes não-singulares então $\det(\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1\mathcal{U}_0^{-1}\mathcal{U}_1) \neq 0$ e, como consequência, a segunda submatriz principal é não singular. Este argumento pode ser indutivamente repetido obtendo assim que $\mathcal{U}$ é quasi-definida.

Reciprocamente, para encontrar a sucessão de polinómios tal que $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ com $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^m \alpha_j^m \mathcal{P}_j$, onde $\alpha_j^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ e onde α_m^m é uma matriz triangular inferior não-singular tal que $(h^k\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) = \Delta_m\delta_{k,m}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, é equivalente a resolver o sistema (II.7), para $m \in \mathbb{N}$.

Para $m = 0$, tem-se $\alpha_0^0\mathcal{U}_0 = \Delta_0$. Usando a não-singularidade de $\mathcal{U}_0$ e a decomposição LU, podemos encontrar unicamente uma matriz triangular inferior não-singular α_0^0 e uma matriz triangular superior não singular Δ_0 tal que $\alpha_0^0\mathcal{U}_0 = \Delta_0$.

Para $m = 1$, tem-se

$$\begin{cases} \alpha_0^1\,\mathcal{U}_0 + \alpha_1^1\,\mathcal{U}_1 = 0_{N\times N} \\ \alpha_0^1\,\mathcal{U}_1 + \alpha_1^1\,\mathcal{U}_2 = \Delta_1, \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \alpha_1^1(\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1\mathcal{U}_0^{-1}\mathcal{U}_1) = \Delta_1.$$

Novamente, usando o facto de a segunda submatriz principal $\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1\mathcal{U}_0^{-1}\mathcal{U}_1$ ser não-singular e a decomposição LU podemos encontrar unicamente α_1^1 uma matriz triangular inferior não-singular e Δ_1 uma matriz triangular superior não-singular tal que $\alpha_1^1 = (\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1\mathcal{U}_0^{-1}\mathcal{U}_1) = \Delta_1$. Obtemos também de $\alpha_0^1\,\mathcal{U}_0 + \alpha_1^1\,\mathcal{U}_1 = 0_{N\times N}$, de forma única a matriz α_0^1. Este argumento pode ser indutivamente repetido e o resultado é estabelecido. □

Uma das características mais importantes das sucessões de polinómios ortogonais escalares é que estes satisfazem uma relação de recorrência a três termos. A mesma propriedade é identificada quando consideramos uma sucessão polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente a uma funcional vectorial $\mathcal{U}$.

TEOREMA II.5. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial e seja $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a correspondente sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$. Então, existem sucessões de matrizes numéricas de dimensão N, $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, com C_m uma matriz triangular superior não-singular, tal que*

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) = A_m\mathcal{B}_{m+1}(x) + B_m\mathcal{B}_m(x) + C_m\mathcal{B}_{m-1}(x), \quad m \geq 1 \tag{II.8}$$

com $\mathcal{B}_{-1}(x) = 0_{N\times 1}$ e $\mathcal{B}_0(x) = \mathcal{P}_0(x)$, onde $\mathcal{P}_0(x) = \begin{bmatrix}1\, x\, \ldots\, x^{N-1}\end{bmatrix}^T$.

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos por considerar $h\mathcal{B}_m$. Observe-se que $h\mathcal{B}_m$ é um polinómio de grau $m+1$, o que permite escrevê-lo na forma

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) = \sum_{k=0}^{m+1} A_k^m \mathcal{B}_k(x),\ A_k^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}). \tag{II.9}$$

Comecemos, então, por provar que $A_k^m = 0_{N\times N}$, para $k = 0, 1, ..., m-2$. De facto, se aplicarmos a funcional vectorial $\mathcal{U}$ a ambos os membros de (II.9), obtemos $A_0^m = 0_{N\times N}$.

Então, podemos reescrever (II.9) na forma

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) = \sum_{k=1}^{m+1} A_k^m \mathcal{B}_k(x)\,. \tag{II.10}$$

Novamente, multiplicando ambos os membros de (II.10) por h e aplicando $\mathcal{U}$, obtemos $A_1^m = 0_{N\times N}$.

Continuando o processo, isto é, multiplicando em seguida por h^2, depois por h^3 e, assim sucessivamente, aplicando $\mathcal{U}$, obtemos que

$$A_k^m = 0_{N\times N}\,, \quad \text{para} \quad k = 0, 1, ..., m-2\,.$$

Assim sendo, podemos reescrever (II.9) na forma

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) = A_{m-1}^m \mathcal{B}_{m-1}(x) + A_m^m \mathcal{B}_m(x) + A_{m+1}^m \mathcal{B}_{m+1}(x). \tag{II.11}$$

Ao multiplicarmos (II.11) por h^{m-1} e, ao fazer actuar $\mathcal{U}$ posteriormente, obtemos que:

$$A_{m-1}^m = (h^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)\left((h^{m-1}\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m-1})\right)^{-1} = \Delta_m\Delta_{m-1}^{-1}, \quad m \geq 1.$$

Utilizando a mesma técnica, obtém-se que

$$\begin{aligned} A_m^m &= \left[(h^{m+1}\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) - A_{m-1}^m (h^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m-1})\right]\left[(h^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)\right]^{-1} \\ &= \left[(h^{m+1}\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) - \Delta_m\Delta_{m-1}^{-1}(h^m\mathcal{U})(\mathcal{B}_{m-1})\right]\Delta_m^{-1} \end{aligned}$$

e

$$A_{m+1}^{m} = \left[(h^{m+2}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) - A_{m-1}^{m}(h^{m+1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_{m-1}) - A_{m}^{m}(h^{m+1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m)\right]\Delta_{m+1}^{-1}.$$

A comparação com os coeficientes em (II.8) leva-nos à seguinte expressão explícita para os coeficientes na relação de recorrência

$$\begin{aligned}
A_m &= \left[(h^{m+2}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) - A_{m-1}^{m}(h^{m+1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_{m-1}) - A_{m}^{m}(h^{m+1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m)\right]\Delta_{m+1}^{-1},\\
B_m &= \left[(h^{m+1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) - A_{m-1}^{m}(h^{m}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_{m-1})\right]\Delta_{m}^{-1},\\
C_m &= \Delta_m\Delta_{m-1}^{-1},
\end{aligned}$$

como prentendíamos demonstrar. □

Em notação matricial a relação de recorrência a três termos obtida escreve-se como

$$J\begin{bmatrix}\mathcal{B}_0\\ \vdots\\ \mathcal{B}_m\\ \vdots\end{bmatrix} = h(x)\begin{bmatrix}\mathcal{B}_0\\ \vdots\\ \mathcal{B}_m\\ \vdots\end{bmatrix}$$

onde J é uma matriz tridiagonal por blocos

$$J = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{II.12}$$

que designamos à semelhança do caso matricial simétrico por *matriz de N-Jacobi.*

Em seguida indicaremos um importante recíproco do teorema anterior. Este teorema estabelece que qualquer sucessão de polinómios vectoriais satisfazendo uma relação de recorrência do tipo (II.8) é uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente a uma funcional vectorial $\mathcal{U}$.

TEOREMA II.6 (Tipo Favard). *Sejam $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucessões de matrizes numéricas de dimensão $N\times N$ com C_m uma matriz triangular superior não-singular. Seja $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais definida pela fórmula de recorrência*

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) \;=\; A_m\mathcal{B}_{m+1}(x) + B_m\mathcal{B}_m(x) + C_m\mathcal{B}_{m-1}(x), \quad m\geq 1$$

onde $\mathcal{B}_{-1}(x) = 0_{N\times 1}$ e $\mathcal{B}_0(x) = \mathcal{P}_0(x)$, com $\mathcal{P}_0(x) = \left[1\; x\; \ldots\; x^{N-1}\right]^T$.

Então, existe uma funcional vectorial $\mathcal{U}$ tal que

$$(h^k\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) = \Delta_m\delta_{k,m}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m,\, m\in\mathbb{N} \tag{II.13}$$

onde Δ_m é uma matriz triangular superior não-singular de dimensão $N \times N$, dada por

$$\Delta_m = C_m \, \dots \, C_1 \, \Delta_0, \; m \geq 1,$$

onde Δ_0 é uma matriz triangular superior não-singular de dimensão $N \times N$.

Demonstração. O primeiro passo consiste em construir uma funcional vectorial linear $\mathcal{U}$ que verifique (II.13) definida de forma única à custa dos seus momentos $\{\mathcal{U}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a partir das condições:

$$\mathcal{U}\left(\mathcal{B}_0\right) = \Delta_0, \quad \mathcal{U}\left(\mathcal{B}_m\right) = 0_{N\times N}, \; m \geq 1, \tag{II.14}$$

onde Δ_0 é uma matriz não singular triangular superior. Como $\{\mathcal{P}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ com

$$\mathcal{P}_j(x) = (h(x))^j \mathcal{P}_0(x) \quad \text{com} \quad \mathcal{P}_0(x) = \left[1 \, x \, \dots \, x^{N-1}\right]^T,$$

é uma base para $\mathbb{P}^N$, então existe uma única sucessão $\{\gamma_j^m\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ tal que o polinómio vectorial $\mathcal{B}_m$ pode ser escrito na forma $\mathcal{B}_m(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \gamma_j^m \mathcal{P}_j(x)$. Logo,

- Para $m = 0$, $\mathcal{U}(\mathcal{B}_0) = \gamma_0^0 \mathcal{U}(\mathcal{P}_0)$, i.e., $\mathcal{U}_0 = (\gamma_0^0)^{-1}\Delta_0$;
- Para $m = 1$, $\mathcal{U}(\mathcal{B}_1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{1} \gamma_j^1 \mathcal{U}(\mathcal{P}_j)$, i.e., $\mathcal{U}_1 = -(\gamma_1^1)^{-1}\gamma_0^1\mathcal{U}_0$;
- Para $m = 2$, $\mathcal{U}(\mathcal{B}_2) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} \gamma_j^2 \mathcal{U}(\mathcal{P}_j)$, i.e., $\mathcal{U}_2 = -\displaystyle\sum_{j=0}^{1} (\gamma_2^2)^{-1}\gamma_j^2\mathcal{U}_j$.

Para $m \geq 3$, temos $\mathcal{U}_m = -\sum_{j=0}^{m-1} (\gamma_m^m)^{-1}\gamma_j^m \mathcal{U}_j$.

Mostremos, em primeiro lugar que, com $\mathcal{U}$ assim definido, se tem

$$\left(h^k\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_m\right) = 0_{N\times N}\,, \quad m \geq k+1.$$

Para tal, apliquemos $\mathcal{U}$ à relação de recorrência:

$$\mathcal{U}\left(h\mathcal{B}_m\right) = A_m\mathcal{U}\left(\mathcal{B}_{m+1}\right) + B_m\mathcal{U}\left(\mathcal{B}_m\right) + C_m\mathcal{U}\left(\mathcal{B}_{m-1}\right) = 0_{N\times N}\,, \quad m \geq 2,$$

ou seja, $\left(h\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_m\right) = 0_{N\times N}$, $m \geq 2$.

De novo, multiplicando ambos os membros da relação de recorrência a três termos por h, tem-se que

$$h^2(x)\mathcal{B}_m(x) \;=\; h(x)A_m\mathcal{B}_{m+1}(x) + h(x)B_m\mathcal{B}_m(x) + h(x)C_m\mathcal{B}_{m-1}(x),$$

e ao aplicarmos $\mathcal{U}$ a ambos os membros desta última equação, tem-se que

$$\left(h^2\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_m\right) = A_m\left(h\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_{m+1}\right) + B_m\left(h\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_m\right) + C_m\left(h\mathcal{U}\right)\left(\mathcal{B}_{m-1}\right) = 0_{N\times N},\; m \geq 3.$$

Procedendo de forma semelhante, concluímos que

$$(h^k\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) = 0_{N\times N}\,, \quad m \geq k+1, \quad \text{i.e.,} \quad (h^k\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) = 0_{N\times N},\ k = 0,1,...,m-1.$$

Para $k = m$ vem que

$$(h^m\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) = A_m(h^{m-1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_{m+1}) + B_m(h^{m-1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) + C_m(h^{m-1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_{m-1})\,,$$

de onde se obtém

$$(h^m\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_m) = C_m(h^{m-1}\mathcal{U})\,(\mathcal{B}_{m-1}) = C_mC_{m-1}\ldots C_1\Delta_0,\ m \geq 1.$$

Assim, os momentos associados com a funcional vectorial $\mathcal{U}$ são unicamente determinados por (II.14) e obtemos as condições de ortogonalidade (II.13). Assim, obtemos o resultado pretendido. $\square$

O lema II.1 diz-nos que uma sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ortogonal à esquerda é unicamente determinada a menos da multiplicação à esquerda por uma matriz numérica não-singular, isto é, se $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é sucessão de matrizes numéricas não-singulares então a sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{Q}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ onde os seus elementos são determinados por $\mathcal{B}_m = D_m\mathcal{Q}_m$ é também ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$. A sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{Q}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz então a relação de recorrência

$$h(x)\mathcal{Q}_m(x) = D_m^{-1}A_mD_{m+1}\mathcal{Q}_{m+1}(x) + D_m^{-1}B_mD_m\mathcal{Q}_m(x) + D_m^{-1}C_mD_{m-1}\mathcal{Q}_{m-1}(x),$$

com $m \geq 1$ e condições iniciais $\mathcal{Q}_{-1}(x) = 0_{N\times1}$ e $\mathcal{Q}_0(x) = D_0\mathcal{P}_0(x)$, onde $\mathcal{P}_0(x) = \left[1\,x\,\ldots\,x^{N-1}\right]^T$.

No exemplo que se segue analisaremos o que acontece se considerarmos outras condições iniciais na relação de recorrência a três termos vectorial.

Exemplo II.1. Consideremos a relação de recorrência

$$h(x)\mathcal{W}_m(x) = A_m\mathcal{W}_{m+1}(x) + B_m\mathcal{W}_m(x) + C_m\mathcal{W}_{m-1}(x), \quad m \geq 1, \tag{II.15}$$

e tomemos a sucessão $\{\mathcal{W}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, solução desta relação, que resulta de considerarmos as condições iniciais:

$$\mathcal{W}_{-1}(x) = 0_{N\times1} \quad \text{e} \quad \mathcal{W}_0(x) = b_0^0\mathcal{P}_0(x),$$

com $b_0^0 \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ não-singular e $\mathcal{P}_0(x) = \left[1\,x\,\ldots\,x^{N-1}\right]^T$.

Esta solução está obviamente relacionada com a sucessão de polinómios vectoriais $\{\widetilde{\mathcal{W}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\widetilde{\mathcal{W}}_m(x) = (b_0^0)^{-1}\mathcal{W}_m(x).$$

Dizer que $\{\mathcal{W}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ verifica (II.15) é equivalente a dizer que se cumprem as relações

$$\begin{aligned} h(x)b_0^0(b_0^0)^{-1}\mathcal{W}_m(x) &= A_m b_0^0(b_0^0)^{-1}\mathcal{W}_{m+1}(x) \\ &\quad + B_m b_0^0(b_0^0)^{-1}\mathcal{W}_m(x) + C_m b_0^0(b_0^0)^{-1}\mathcal{W}_{m-1}(x), \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

e

$$h(x)b_0^0\widetilde{\mathcal{W}}_m(x) = A_m b_0^0\widetilde{\mathcal{W}}_{m+1}(x) + B_m b_0^0\widetilde{\mathcal{W}}_m(x) + C_m b_0^0\widetilde{\mathcal{W}}_{m-1}(x), \quad m \geq 1.$$

Então, a sucessão de polinómios vectoriais $\{\widetilde{\mathcal{W}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz a relação de recorrência

$$h(x)\widetilde{\mathcal{W}}_m(x) = \widetilde{A}_m\widetilde{\mathcal{W}}_{m+1}(x) + \widetilde{B}_m\widetilde{\mathcal{W}}_m(x) + \widetilde{C}_m\widetilde{\mathcal{W}}_{m-1}(x), \quad m \geq 1$$

com condições iniciais

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{-1}(x) = 0_{N\times 1} \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{W}}_0(x) = \mathcal{P}_0(x),$$

onde $\mathcal{P}_0(x) = \left[1\, x\, \ldots\, x^{N-1}\right]^T$. Os coeficientes da relação de recorrência obtida vêm dados por

$$\widetilde{A}_m = (b_0^0)^{-1}A_m b_0^0, \quad \widetilde{B}_m = (b_0^0)^{-1}B_m b_0^0 \quad \text{e} \quad \widetilde{C}_m = (b_0^0)^{-1}C_m b_0^0.$$

Observe ainda que, os coeficientes matriciais, da relação de recorrência satisfeita pela sucessão de polinómios vectoriais $\{\widetilde{\mathcal{W}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, são matrizes com a característica de serem matrizes completas, independentemente da estrutura das matrizes A_m, B_m e C_m. Por outro lado, o teorema de Favard garante-nos ainda que esta se trata de uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$.

2.2. Ortogonalidade vectorial à direita. À semelhança do que apresentámos anteriormente começamos por indicar o que se entende por ortogonalidade vectorial à direita.

Definição II.7. Seja $\mathcal{U} = \left[u^1\, \ldots\, u^N\right]^T$ uma funcional vectorial linear e consideremos a sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. A sucessão $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é dita uma *sucessão de polinómios matriciais ortogonais à direita* relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ se

(a) G_m é um polinómio de grau m;
(b) $\left(G_m^T(h(x))\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_j) = 0_{N\times N}$, $j = 0, 1, ..., m-1$;
(c) $\left(G_m^T(h(x))\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_m) = \Theta_m$, $m \in \mathbb{N}$ onde Θ_m é uma matriz triangular inferior não-singular.

LEMA II.2. *Seja h um polinómio de grau fixo N. Se $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais em h ortogonais à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$, então para cada $m \in \mathbb{N}$, G_m é unicamente determinado. Assim, verificam-se as seguintes afirmações:*

(a) *Se $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios matriciais em h ortogonal à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ e $G_m(h(x))) = T_m(h(x))C_m$, para $m \geq 0$, com $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de matrizes triangulares inferiores não-singulares, então $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios matriciais em h ortogonal à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$.*

(b) *Sejam $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucessões de polinómios matriciais em h ortogonais à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$, então existe uma sucessão $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de matrizes triangulares inferiores não-singulares tais que*

$$G_m(h(x))) = T_m(h(x))C_m, \quad m \geq 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ e seja $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de matrizes triangulares inferiores não-singulares tal que

$$G_m(h(x)) = T_m(h(x))C_m,$$

ou equivalentemente, que

$$G_m^T(h(x)) = C_m^T T_m^T(h(x)).$$

Multiplicando a última relação à direita por $\mathcal{U}$ e, posteriormente, aplicando a relação obtida a um qualquer elemento $\mathcal{P}_j$ da base de $\mathbb{P}^N$, tem-se que:

$$\begin{aligned}(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) &= (C_m^T T_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) \\ &= (T_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)C_m.\end{aligned}$$

Então, das condições de ortogonalidade para a sucessão de polinómios $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, obtém-se que

$$(T_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = \Theta_m \delta_{k,m} C_m^{-1}, \quad k = 0, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N},$$

onde $\delta_{k,m}$ é o símbolo de Kronecker. Logo, tem-se que a sucessão de polinómios $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais à direita relativamente a $\mathcal{U}$, com as seguintes condições de ortogonalidade:

$$(T_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = \Theta_m^1 \delta_{k,m}, \quad k = 0, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N},$$

onde $\Theta_m^1 = \Theta_m C_m^{-1}$.

Sejam $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucessões de polinómios matriciais ortogonais à direita relativamente a $\mathcal{U}$. Como $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma família livre de polinómios matriciais em h, isto é, para cada $m\in\mathbb{N}$ o grau de T_m é m então $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ forma uma base para o espaço vectorial dos polinómios matriciais em h. Assim, existe uma única sucessão de matrizes $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tal que

$$G_m(h(x)) = \sum_{k=0}^{m} T_m(h(x))C_k.$$

Pela ortogonalidade de $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{T_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ relativamente a $\mathcal{U}$ tem-se que

$$(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = \sum_{k=0}^{m}(T_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j)C_k = \Theta_m\delta_{k,m}, \quad k=0,\ldots,m,\ m\in\mathbb{N},$$

ou seja, $C_k = 0_{N\times N}$ para $k = 0\ldots,m-1$ e, então, tem-se que

$$G_m(h(x)) = T_m(h(x))C_m,$$

com $C_m = (G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m)((T_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m))^{-1}$ uma matriz numérica triangular inferior não-singular. $\square$

Teorema II.8. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear. Então, $\mathcal{U}$ é quasi-definida se, e somente se, existe uma única sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, com $G_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m}\beta_j^m(h(x))^j$, para $\beta_j^m\in\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ onde β_m^m é uma matriz triangular superior não-singular e existe uma única sucessão de matrizes triangulares inferiores, $\{\Theta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tais que*

$$\left(G_m^T(h(x))\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_m) = \Theta_m\delta_{j,m},\ j=0,1,\ldots,m-1,\ m\in\mathbb{N}.$$

Além disso,

$$G_m(h(x)) = \begin{bmatrix} I & hI & \cdots & h^mI \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{U}(\mathcal{P}_0) & \cdots & \mathcal{U}(\mathcal{P}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}(\mathcal{P}_m) & \cdots & \mathcal{U}(\mathcal{P}_{2m}) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Theta_m \end{bmatrix}. \quad \text{(II.16)}$$

Demonstração. Para provar que $\mathcal{U}$ é quasi-definida. Seja $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais onde G_m, é para cada $m\in\mathbb{N}$, um polinómio matricial da forma $G_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m}\beta_j^m(h(x))^j$, com $\beta_j^m\in\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$. Assim,

$$G_m^T(h(x)) = \sum_{j=0}^{m}(\beta_j^m)^T(h(x))^j.$$

Fazendo actuar $\mathcal{U}(\mathcal{P}_k)$, onde $k = 0, \ldots, m$, em ambos os membros, vem

$$\left(G_m^T(h(x))\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_k) = \sum_{j=0}^{m} ((h(x))^j \mathcal{U})(\mathcal{P}_k)\beta_j^m = \sum_{j=0}^{m} \mathcal{U}_{j+k}\beta_j^m.$$

Matricialmente temos,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 & \ldots & \mathcal{U}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_m & \ldots & \mathcal{U}_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0^m \\ \vdots \\ \beta_m^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(G_m^T(h(x))\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_0) \\ \vdots \\ \left(G_m^T(h(x))\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_m) \end{bmatrix}$$

Pelas condições de ortogonalidade, a sucessão de polinómios $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 & \ldots & \mathcal{U}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{U}_m & \ldots & \mathcal{U}_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0^m \\ \vdots \\ \beta_m^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Theta_m \end{bmatrix}, \tag{II.17}$$

onde Θ_m é uma matriz triangular inferior não-singular de dimensão $N \times N$.

Para $m = 0$, em (II.17) temos que $\mathcal{U}_0\beta_0^0 = \Theta_0$. Usando a não-singularidade das matrizes β_0^0 e Θ_0, tem-se $\mathcal{U}_0$ uma matriz não-singular. De forma análoga, tomando $m = 1$ em (II.17), tem-se

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0\,\beta_0^1 + \mathcal{U}_1\,\beta_1^1 = 0_{N\times N} \\ \mathcal{U}_1\,\beta_0^1 + \mathcal{U}_2\,\beta_1^1 = \Theta_1 \quad \text{i.e.} \quad (\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1(\mathcal{U}_0)^{-1}\mathcal{U}_1)\beta_1^1 = \Theta_1. \end{cases}$$

Como Θ_1 e β_1^1 são matrizes não-singulares então $\det(\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1(\mathcal{U}_0)^{-1}\mathcal{U}_1) \neq 0$ e, como consequência, a segunda submatriz principal é não singular. Este argumento pode ser indutivamente repetido obtendo assim que $\mathcal{U}$ é quasi-definida. Reciprocamente, para encontrar a sucessão de polinómios matriciais tal que $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ com $G_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j^m (h(x))^j$, para $\beta_j^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ onde β_m^m é uma matriz triangular superior não-singular tal que $\left(G_m^T(h(x))\mathcal{U}\right)(\mathcal{P}_m) = \Theta_m\delta_{j,m}$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, é equivalente a resolver o sistema (II.17), para todo $m \in \mathbb{N}$.

Para $m = 0$, tem-se $\mathcal{U}_0\beta_0^0 = \Theta_0$. Usando a não-singularidade de $\mathcal{U}_0$ e a decomposição LU, podemos encontrar unicamente uma matriz triangular superior não-singular β_0^0 e uma matriz triangular inferior não singular Θ_0 tal que $\mathcal{U}_0\beta_0^0 = \Theta_0$.

Para $m = 1$, tem-se

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0\,\beta_0^1 + \mathcal{U}_1\,\beta_1^1 = 0_{N\times N} \\ \mathcal{U}_1\,\beta_0^1 + \mathcal{U}_2\,\beta_1^1 = \Theta_1 \quad \text{i.e.} \quad (\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1(\mathcal{U}_0)^{-1}\mathcal{U}_1)\beta_1^1 = \Theta_1. \end{cases}$$

Novamente, usando o facto de a segunda submatriz principal $\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1(\mathcal{U}_0)^{-1}\mathcal{U}_1$ ser não-singular e a decomposição LU podemos encontrar unicamente β_1^1 uma matriz triangular superior não-singular e Θ_1 uma matriz triangular inferior não-singular tal que $(\mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_1(\mathcal{U}_0)^{-1}\mathcal{U}_1)\beta_1^1 = \Theta_1$. Obtemos também de $\mathcal{U}_0\,\beta_0^1 + \mathcal{U}_1\,\beta_1^1 = 0_{N\times N}$, de forma única a matriz β_0^1. Este argumento pode ser indutivamente repetido e o resultado é estabelecido. $\square$

O próximo resultado garante que qualquer sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ortogonais à direita relativamente a uma funcional vectorial $\mathcal{U}$ satisfaz uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais.

TEOREMA II.9. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial e seja $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a correspondente sucessão de polinómios matriciais ortogonal à direita relativamente a $\mathcal{U}$. Então, existem sucessões de matrizes numéricas, de dimensão $N\times N$, $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{E_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ com F_m uma matriz triangular inferior não-singular tal que*

$$h(x)G_m(h(x)) = G_{m+1}(h(x))D_m + G_m(h(x))E_m + G_{m-1}(h(x))F_m,\ m\geq 1 \tag{II.18}$$

com condições iniciais $G_{-1}(x) = 0_{N\times N}$ e $G_0(x) = I_{N\times N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos por escrever hG_m^T. Observe-se que, se trata de um polinómio de grau $m+1$ em h:

$$h(x)G_m^T(h(x)) = \sum_{j=0}^{m+1} A_j^m G_j^T(h(x)), \quad A_j^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}).$$

Fazendo actuar $\mathcal{U}(\mathcal{P}_k)$, para $k=0,\dots,m$, em ambos os membros da última equação, tem-se que

$$(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{k+1}) = \sum_{j=0}^{m+1}(G_j^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_k)(A_j^m)^T.$$

Das condições de ortogonalidade, observamos que para $k=0$ tem-se $A_0^m = 0_{N\times N}$. Para $k=1$ tem-se que $A_1^m = 0_{N\times N}$, e, assim sucessivamente, até considerarmos $k=m-2$ onde também se tem $A_{m-2}^m = 0_{N\times N}$. Então, podemos escrever hG_m^T como

$$h(x)G_m^T(h(x)) = A_{m-1}^m G_{m-1}^T(h(x)) + A_m^m G_m^T(h(x)) + A_{m+1}^m G_{m+1}^T(h(x)).$$

Determinemos em seguida os coeficientes matriciais A_{m-1}^m, A_m^m e A_{m+1}^m. Para tal, multipliquemos a última equação à direita pela funcional vectorial $\mathcal{U}$:

$$h(x)G_m^T(h(x))\mathcal{U} = [A_{m-1}^m G_{m-1}^T(h(x)) + A_m^m G_m^T(h(x)) + A_{m+1}^m G_{m+1}^T(h(x))]\mathcal{U}.$$

Ao fazer actuar esta equação em $\mathcal{P}_{m-1}$ tem-se que

$$\begin{aligned}(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m) = A_{m-1}^m&(G_{m-1}^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m-1}) + A_m^m(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m-1})\\ &+A_{m+1}^m(G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m-1}),\end{aligned}$$

ou seja,

$$A^m_{m-1} = (G^T_m(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m)((G^T_{m-1}(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m-1}))^{-1} = \Theta_m(\Theta_{m-1})^{-1}.$$

Ao fazer actuar esta equação em $\mathcal{P}_m$, tem-se que

$$\begin{aligned}(G^T_m(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m+1}) &= A^m_{m-1}(G^T_{m-1}(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m)\\ &\quad + A^m_m(G^T_m(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m) + A^m_{m+1}(G^T_{m+1}(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m),\end{aligned}$$

ou seja,

$$A^m_m = [(G^T_m(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m+1}) - A^m_{m-1}(G^T_{m-1}(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m)](\Theta_m)^{-1}.$$

De forma semelhante tem-se que

$$\begin{aligned}A^m_{m+1} &= (G^T_m(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m+2})(\Theta_m)^{-1}\\ &\quad - A^m_{m-1}(G^T_{m-1}(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m+1})(\Theta_m)^{-1} - A^m_m(G^T_m(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m+1})(\Theta_m)^{-1}.\end{aligned}$$

Tomando $D_m = (A^m_{m+1})^T$, $E_m = (A^m_m)^T$ e $F_m = (A^m_{m-1})^T$, obtém-se o pretendido. $\square$

A primeira observação que devemos fazer é que efectuando a mudança de variável $h(x) = x$ na relação de recorrência (II.18) obtemos a relação

$$xG_m(x) = G_{m+1}(x)D_m + G_m(x)E_m + G_{m-1}(x)F_m,\ m \geq 1,$$

satisfeita pela sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Naturalmente, estamos na presença de sucessões de polinómios que também irão satisfazer algum um tipo de ortogonalidade matricial. Este facto, serve-nos de motivação ao capítulo seguinte em que relacionamos os resultados por nós obtidos com os resultados referentes à ortogonalidade matricial. A ortogonalidade matricial foi introduzida no primeiro capítulo e, no caso, em que esta podia ser caracterizada por relações de recorrência a três termos matriciais onde os seus coeficientes satisfaziam uma determinada simetria. É, então, nossa intenção vir a caracterizar sucessões de polinómios ortogonais que satisfaçam uma relação de recorrência a três termos matricial bastante mais geral. Pretendemos, então, alcançar um análogo do teorema de Favard matricial, isto é, provar que existe uma matriz de medidas não necessariamente definida positiva para a qual a sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal.

Estamos em condições de provar que se uma sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma relação de recorrência da forma (II.18) então é ortogonal à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$.

Teorema II.10 (Tipo Favard). *Sejam* $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{E_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *e* $\{F_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *sucessões de matrizes numéricas de dimensão* $N\times N$ *com* F_m *uma matriz triangular inferior não-singular. Seja* $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de polinómios matriciais definida pela fórmula de recorrência*

$$h(x)G_m(h(x)) = G_{m+1}(h(x))D_m + G_m(h(x))E_m + G_{m-1}(h(x))F_m,\ m\geq 1,$$

com $G_{-1}(x) = 0_{N\times N}$ *e* $G_0(x) = I_{N\times N}$.

Então, existe uma funcional vectorial $\mathcal{U}$ *tal que*

$$\begin{aligned}(G_m^T(h(x))\mathcal{U})\,(\mathcal{P}_j) &= 0_{N\times N}\,, \quad j=0,1,...,m-1,\\ (G_m^T(h(x))\mathcal{U})\,(\mathcal{P}_m) &= \Theta_m\,, \quad m\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

onde Θ_m *é uma matriz triangular inferior não-singular.*

Demonstração. O primeiro passo consiste em definir de forma recorrente os momentos associados à funcional $\mathcal{U}$ através das condições:

$$|\mathcal{U}_0|\neq 0 \quad \text{onde} \quad \mathcal{U}_j := \mathcal{U}(\mathcal{P}_j),$$

$$\mathcal{U}\,(\mathcal{P}_0) \quad \text{é uma matriz triangular inferior não-singular,}$$

$$(G_m^T(h(x))\mathcal{U})\,(\mathcal{P}_0) = 0_{N\times N}\,, m\geq 1.$$

O polinómio G_m^T admite sempre a representação

$$G_m^T(h(x)) = \sum_{k=0}^{m}\alpha_k^m(h(x))^k, \quad \alpha_k^m\in\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}).$$

Multiplicando à direita a última expressão por $\mathcal{U}$ e aplicando esta relação ao elemento $\mathcal{P}_0$ da base para $\mathbb{P}^N$, obtemos que

$$(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) = \sum_{k=0}^{m}((h(x))^k\mathcal{U})(\mathcal{P}_0)(\alpha_k^m)^T,$$

ou, equivalentemente, que

$$(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) = \sum_{k=0}^{m}\mathcal{U}(\mathcal{P}_k)(\alpha_k^m)^T.$$

Para $m=1$, definimos $\mathcal{U}_1$ pela condição:

$$(G_1^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) = \mathcal{U}(\mathcal{P}_0)(\alpha_0^1)^T + \mathcal{U}(\mathcal{P}_1)(\alpha_1^1)^T.$$

Assim, $\mathcal{U}_1$ vem dado por $\mathcal{U}_1 := \mathcal{U}(\mathcal{P}_1) = -\mathcal{U}_0(\alpha_0^m)^T(\alpha_1^1)^{-T}$. Da mesma forma $\mathcal{U}_2$ é dado pela condição

$$(G_2^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_0) = \mathcal{U}(\mathcal{P}_0)(\alpha_0^2)^T + \mathcal{U}(\mathcal{P}_1)(\alpha_1^2)^T + \mathcal{U}(\mathcal{P}_2)(\alpha_2^2)^T,$$

de onde se obtém

$$\mathcal{U}_2 := -[\mathcal{U}_0(\alpha_0^2)^T + \mathcal{U}_1(\alpha_1^2)^T](\alpha_2^2)^{-T},$$

e, assim sucessivamente, se obtêm todos os momentos.

Mostremos em primeiro lugar que com $\mathcal{U}$ assim definido se tem

$$(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = 0_{N\times N}, \quad m \geq j+1.$$

Para tal, começamos por transpor a relação de recorrência (II.18) e, em seguida, multiplica-mo-la à direita por $\mathcal{U}$,

$$h(x)G_m^T(h(x))\mathcal{U} = D_m^T G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U} + E_m^T G_m^T(h(x))\mathcal{U} + F_m^T G_{m-1}^T(h(x))\mathcal{U}. \quad \text{(II.19)}$$

Aplicando esta relação a $\mathcal{P}_0$ obtém-se

$$\begin{aligned}(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_1) = (G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_0)D_m + (G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_0)E_m \\ + (G_{m-1}^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_0)F_m = 0_{N\times N}, \quad m \geq 2.\end{aligned}$$

De novo, multiplicando por h a relação (II.19) e aplicando o resultado obtido a $\mathcal{P}_0$ obtém-se

$$\begin{aligned}(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_2) = (G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_1)D_m + (G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_1)E_m \\ + (G_{m-1}^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_1)F_m = 0_{N\times N}, \quad m \geq 3.\end{aligned}$$

Procedendo de forma semelhante, concluímos que

$$(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j) = 0_{N\times N}, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Finalmente, multiplicando a relação (II.19) por h^{m-1} e aplicando a equação resultante a $\mathcal{P}_0$, vem que

$$\begin{aligned}(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_m) &= (G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m-1})D_m + (G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m-1})E_m \\ &+ (G_{m-1}^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_{m-1})F_m \\ &= \mathcal{U}(\mathcal{P}_0)F_1 \ldots F_{m-1}F_m.\end{aligned}$$

Provámos então, que $\mathcal{U}$ assim definido, satisfaz as condições de ortogonalidade

$$\begin{aligned}(G_m^T(h(x))\mathcal{U})\,(\mathcal{P}_j) &= 0_{N\times N}\,, \quad j = 0, 1, ..., m-1, \\ (G_m^T(h(x))\mathcal{U})\,(\mathcal{P}_m) &= \Theta_m\,, \quad m \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

onde Θ_m é uma matriz triangular inferior não-singular, dada por

$$\Theta_m = \mathcal{U}(\mathcal{P}_0)F_1 \ldots F_{m-1}F_m,$$

obtendo assim o resultado pretendido. □

3. Teoria da dualidade

Nesta secção pretendemos dar a conhecer o que se entende por bi-ortogonalidade e o que se entende por *base dual* para os elementos do espaço dual algébrico. A base encontrada verifica certas propriedades como é exemplo disso o facto de esta satisfazer uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais.

A teoria geral de polinómios ortogonais escalares diz que se $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios escalares mónicos e se $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funcionais lineares, onde $L_n \in \mathbb{P}^*$, então $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita *sucessão dual* de $\{p_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ se $L_n(p_m) = \delta_{m,n},\ \ m, n \in \mathbb{N}$.

Consideremos agora, a sucessão de funcionais lineares $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{P}^*$ e a sucessão de funcionais vectoriais lineares $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\mathcal{L}_n = \left[L_{nN} \cdots L_{(n+1)N-1}\right]^T,\ \ n \in \mathbb{N}\,,$$

que dizemos ser a *sucessão de funcionais vectoriais associada a* $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Tomando em consideração a definição de funcional vectorial temos que

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_m) = \begin{bmatrix} L_{nN}(p_{mN}) & \cdots & L_{(n+1)N-1}(p_{mN}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{nN}(p_{(m+1)N-1}) & \cdots & L_{(n+1)N-1}(p_{(m+1)N-1}) \end{bmatrix} = I_{N\times N}\delta_{m,n}\,.$$

Analogamente ao caso escalar, tem-se então a seguinte definição:

Definição II.11. Seja $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais. A sucessão de funcionais vectoriais $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita *sucessão vectorial dual* se

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_m) = I_{N\times N}\,\delta_{m,n}\,,\quad n, m \in \mathbb{N}\,,$$

onde $\mathcal{B}_m(x) = \left[p_{mN}(x)\ \ldots\ p_{(m+1)N-1}(x)\right]^T$.

Qualquer funcional vectorial $\widetilde{\mathcal{U}}$ pode escrever-se à custa dos elementos da sucessão dual $\{\mathcal{L}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma:

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathcal{L}_m,$$

onde $(\alpha_n)^T = \widetilde{\mathcal{U}}(\mathcal{B}_n)$, $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_n \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$. Por isso, muitas vezes a sucessão vectorial dual $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é apenas designada por *base dual.*

Observe ainda que, se pretendermos escrever $\mathcal{U}$, funcional vectorial à qual a sucessão de polinómios $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal, em função da base dual tem-se que

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}(\mathcal{B}_0))^T\mathcal{L}_0 = (\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^T\mathcal{L}_0,$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{L}_0 = ((\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^T)^{-1}\mathcal{U}.$$

Os próximos dois resultados dão-nos a conexão entre a ortogonalidade vectorial à esquerda e à direita através de condições equivalentes destes dois tipos de ortogonalidade vectorial.

TEOREMA II.12. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial quasi-definida, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais e $\{\mathcal{L}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão dual que lhe é associada. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial* $\mathcal{U}$.

(b) *Existem sucessões de matrizes de dimensão $N \times N$, $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, com C_m uma matriz triangular superior não-singular tal que $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz a relação de recorrência a três termos*

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) = A_m\mathcal{B}_{m+1}(x) + B_m\mathcal{B}_m(x) + C_m\mathcal{B}_{m-1}(x), \quad m \geq 1, \tag{II.20}$$

com $\mathcal{B}_{-1}(x) = 0_{1\times N}$ e $\mathcal{B}_0(x) = \mathcal{P}_0(x)$ onde $\mathcal{P}_0(x) = \begin{bmatrix}1\, x\, \ldots\, x^{N-1}\end{bmatrix}^T$.

(c) *Existem sucessões de matrizes de dimensão $N \times N$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com C_{n+1} uma matriz triangular superior não-singular tais que $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é definida pela relação de recorrência a três termos*

$$h(x)\mathcal{L}_n = (C_{n+1})^T\mathcal{L}_{n+1} + (B_n)^T\mathcal{L}_n + (A_{n-1})^T\mathcal{L}_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{II.21}$$

onde $\mathcal{L}_0 = ((\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^T)^{-1}\mathcal{U}$ e $\mathcal{L}_1 = (C_1^T)^{-1}(h(x)I - (B_0)^T)[\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^T]^{-1}\mathcal{U}$.

(d) *Existem polinómios matriciais $G_n(h(x))$ da forma $G_n(h(x)) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j^n (h(x))^j$, com β_n^n uma matriz não-singular, tais que os elementos da base dual $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se podem expressar em função da funcional vectorial $\mathcal{U}$ da seguinte forma*

$$\mathcal{L}_n = (G_n(h(x)))^T\,\mathcal{U}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{II.22}$$

(e) *A sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida em* (II.22) *satisfaz*

$$h(x)G_n(h(x)) = G_{n-1}(h(x))A_{n-1} + G_n(h(x))B_n + G_{n+1}(h(x))C_{n+1},\ n \geq 1, \tag{II.23}$$

com condições iniciais $G_{-1}(h(x)) = 0_{N\times N}$ e $G_0(h(x)) = \mathcal{U}(\mathcal{P}_0)^{-1}$.

(f) *A sucessão de polinómios matriciais $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida em* (II.22) *é ortogonal à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ normalizada.*

DEMONSTRAÇÃO. Demonstraremos as equivalências seguindo o esquema:

$(a) \Leftrightarrow (b)$, $(e) \Leftrightarrow (f)$, $(b) \Leftrightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (d)$, $(d) \Rightarrow (e)$ e $(e) \Rightarrow (c)$.

A demonstração das equivalências $(a) \Leftrightarrow (b)$ e $(e) \Leftrightarrow (f)$ é imediata e resulta dos teoremas II.5 II.6, II.9 e II.10.

Comecemos por provar que $(b) \Rightarrow (c)$: Seja

$$h(x)\mathcal{L}_n = \sum_{j=0}^{n+1} \beta_j^n \mathcal{L}_j, \quad \text{onde} \quad (\beta_j^n)^T = (h(x)\mathcal{L}_n)(\mathcal{B}_j) = \mathcal{L}_n(h(x)\mathcal{B}_j),\ j \in \mathbb{N}.$$

Aplicando a funcional vectorial linear $\mathcal{L}_n$ a ambos os membros da relação de recorrência a três termos satisfeita por $\{\mathcal{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, vem que

$$\begin{aligned} (\beta_k^n)^T &= A_k\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_{k+1}) + B_k\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_k) + C_k\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_{k-1}) \\ &= \begin{cases} A_{n-1}, & j = n-1 \\ B_n, & j = n \\ C_{n+1}, & j = n+1 \\ 0_{N\times N}, & j \neq n-1, n, n+1, \end{cases} \end{aligned}$$

isto é, $\beta_{n-1}^n = A_{n-1}^T$, $\beta_n^n = B_n^T$ e $\beta_{n+1}^n = C_{n+1}^T$, obtendo-se assim a relação de recorrência a três termos para a sucessão de funcionais vectoriais $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Para mostrar que $(c) \Rightarrow (b)$: Seja $h\mathcal{B}_m = \displaystyle\sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^m \mathcal{B}_j$, $\quad \gamma_j^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$. Aplicando a funcional vectorial $\mathcal{L}_n$ a ambos os membros desta representação temos que $h\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_m) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^m \mathcal{L}_n(\mathcal{B}_j) = \gamma_n^m$. Aplicando a hipótese, vem

$$\begin{aligned} \gamma_n^m &= \mathcal{L}_{n+1}(\mathcal{B}_m)C_{n+1} + \mathcal{L}_n(\mathcal{B}_m)B_n + \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{B}_m)A_{n-1} \\ &= \begin{cases} C_m, & n = m-1 \\ B_n, & n = m \\ A_m, & n = m+1 \\ 0_{N\times N}, & n \neq m-1, m, m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, verifica-se (II.20).

Provemos que $(c) \Rightarrow (d)$: Por indução matemática, vamos mostrar que os elementos de $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se representam na forma $\mathcal{L}_n = (G_n(h(x)))^T\,\mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 0$, temos que, $\mathcal{L}_0 = ((\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^T)^{-1}\mathcal{U}$. Suponhamos que esta propriedade é válida para $k = 0, 1, \ldots, p$, isto é, $\mathcal{L}_k = (G_k(h(x)))^T\,\mathcal{U}$ com grau $G_k = k$, $k = 0, \ldots, p$ e verifiquemos que também é válida para $k = p+1$, isto é, $\mathcal{L}_{p+1} = (G_{p+1}(h(x)))^T\,\mathcal{U}$, $p \in \mathbb{N}$. Considerando a relação de recorrência satisfeita por $\{\mathcal{L}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ e tomando em consideração a hipótese de indução, vem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p+1} &= (C_{p+1})^{-T}\left[(h(x)I - (B_p^T))G_p(h(x)) - (A_{p-1})^T G_{p-1}(h(x))\right]\mathcal{U} \\ &= \left[(G_p(h(x))^T((h(x)I - (B_p)) - G_{p-1}^T(h(x))A_{p-1}))C_{p+1}^{-1}\right]^T\mathcal{U}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{L}_{p+1} = (G_{p+1}(h(x)))^T\, \mathcal{U}$, $p \in \mathbb{N}$, isto é, se a condição for verdadeira para $k = 1, \ldots, p$, também o é para $p + 1$.

Provemos que $(d) \Rightarrow (e)$: Comecemos por escrever hG_n^T em função dos elementos $\{G_j^T\}_{j\in\mathbb{N}}$, isto é,

$$h(x)G_n^T(h(x)) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j^n G_j^T(h(x)), \quad \text{onde} \quad \alpha_j^n \in \quad \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}). \tag{II.24}$$

Logo, ao multiplicar à direita ambos os membros da última equação por $\mathcal{U}$, tem-se que

$$h(x)G_n^T(h(x))\mathcal{U} = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j^n G_j^T(h(x))\mathcal{U}.$$

Aplicando ambos os membros da última relação a um elemento $\mathcal{B}_k$ vem

$$(h(x)G_n^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{B}_k) = \sum_{j=0}^{n+1} (\alpha_j^n G_j^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{B}_k).$$

Como, $\mathcal{L}_n = (G_n(h(x)))^T\, \mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$\mathcal{L}_n\left(h(x)\mathcal{B}_k\right) = \sum_{j=0}^{n+1} \mathcal{L}_j\left(\mathcal{B}_k\right)(\alpha_j^n)^T = (\alpha_k^n)^T.$$

Utilizando (II.20) em (II.24) vemos que

$$\begin{aligned}(\alpha_k^n)^T &= C_k\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_{k-1}) + B_k\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_k) + A_k\mathcal{L}_n(\mathcal{B}_{k+1}) \\ &= \left\{\begin{array}{ll} A_{n-1}, & k = n-1 \\ B_n, & k = n \\ C_{n+1}, & k = n+1 \\ 0_{N\times N}, & k \neq n-1, n, n+1 \end{array}\right. .\end{aligned}$$

Assim, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz

$$h(x)G_n(h(x)) = G_{n-1}(h(x))A_{n-1} + G_n(h(x))B_n + G_{n+1}(h(x))C_{n+1}.$$

Finalmente, para provar que $(e) \Rightarrow (c)$, basta transpor ambos os membros da relação (II.23) e multiplicar ambos os membros da relação obtida por $\mathcal{U}$, obtendo assim de forma imediata (II.21). $\square$

O anterior teorema é um resultado muito completo e de enorme importância. Em primeiro lugar, porque demonstra que a ortogonalidade à direita relativamente a uma funcional vectorial $\mathcal{U}$ é equivalente à ortogonalidade à esquerda. Em segundo lugar, porque demonstra os polinómios matriciais G_n que aparecem na representação dos elementos da base dual $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são os mesmos que surgem no conceito de ortogonalidade vectorial à direita. Em último lugar, porque relaciona as diferentes sucessões de polinómios apresentadas, bem como as relações de recorrência a três termos por estas satisfeitas.

TEOREMA II.13. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial quasi-definida, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por* (II.6) *e* (II.16)*, respectivamente. Então, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são bi-ortogonais relativamente a $\mathcal{U}$, isto é,*

$$((G_n(h(x)))^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = I_{N\times N}\delta_{n,m}, n,\, m \in \mathbb{N},$$

se, e somente se, $\Delta_m = (\beta_m^m)^{-1}$ e $\Theta_m = (\alpha_m^m)^{-1}$. Como consequência, a sucessão dual $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associada a $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é dada por $\mathcal{L}_n = (G_n(h(x)))^T\mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Existe uma única sucessão de matrizes $\{\alpha_j^m\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ tal que $\mathcal{B}_m = \sum_{j=0}^m \alpha_j^m \mathcal{P}_j$, onde α_m^m é uma matriz não-singular. Logo,

$$(G_n^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = (G_n^T(h(x))\mathcal{U})(\sum_{j=0}^m \alpha_j^m \mathcal{P}_j) = \sum_{j=0}^m \alpha_j^m (G_n^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{P}_j).$$

Como $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ tem-se

$$(G_n^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \begin{cases} \alpha_m^m\Theta_m, & m = n \\ 0_{N\times N}, & m > n. \end{cases}$$

Logo, $(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = I_{N\times N}$ se, e somente se, $\alpha_m^m\Theta_m = I_{N\times N}$, ou seja, $\Theta_m = (\alpha_m^m)^{-1}$. Por outro lado, consideremos

$$(G_n^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = ((\sum_{j=0}^n \beta_j^n (h(x))^j)^T\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \sum_{j=0}^n (h(x)^j\mathcal{U})(\mathcal{B}_m)\beta_j^n.$$

Analogamente, como $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda relativamente a $\mathcal{U}$ temos

$$(G_n^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = \begin{cases} \Delta_m\beta_m^m, & m = n \\ 0_{N\times N}, & m > n. \end{cases}$$

Logo, $(G_m^T(h(x))\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = I_{N\times N}$ se, e somente se, $\Delta_m\beta_m^m = I_{N\times N}$, isto é, $\Delta_m = (\beta_m^m)^{-1}$. Assim, obtém-se o pretendido. □

4. Função Resolvente

Nesta secção trabalharemos apenas com funcionais lineares vectoriais normalizadas, isto é, com funcionais vectoriais que satisfaçam

$$\mathcal{U}(\mathcal{P}_0) = I_{N\times N}.$$

Ainda nesta secção, iremos definir o que se entende como *função de Markov matricial generalizada* e como esta se encontra relacionada com a *função resolvente* de um operador linear de dimensão infinita.

DEFINIÇÃO II.5. Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear. Definimos a *função de Markov generalizada* associada a $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$, por:

$$\mathcal{F}(z) := \mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right) = \begin{bmatrix} \langle u_x^1, \frac{1}{z-h(x)}\rangle & \cdots & \langle u_x^N, \frac{1}{z-h(x)}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_x^1, \frac{x^{N-1}}{z-h(x)}\rangle & \cdots & \langle u_x^N, \frac{x^{N-1}}{z-h(x)}\rangle \end{bmatrix}, \tag{II.25}$$

com z tal que $|h(x)| < |z|$ e com $x \in \mathsf{L}$ onde $\mathsf{L} = \cup_{j=1,\ldots,N} \operatorname{supp} u_x^j$. Aqui $\mathcal{U}_x$ representa a acção de $\mathcal{U}$ na variável x e $\mathcal{P}_0(x) = \left[1\, x\, \ldots\, x^{N-1}\right]^T$.

Ao considerarmos o seguinte desenvolvimento formal

$$\frac{1}{z-h(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h(x))^n}{z^{n+1}}, \quad |h(x)| < |z|,$$

podemos ainda, encontrar outra representação possível para $\mathcal{F}$, dada por

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((h(x))^n \mathcal{U})(\mathcal{P}_0)}{z^{n+1}}.$$

Vejamos que a função de Markov generalizada está directamente relacionada com a *função resolvente* associada a um operador linear de dimensão infinita que é representado pela matriz de Jacobi (II.12) tridiagonal por blocos associada a relação de recorrência a $(2N+1)-$termos de que partimos inicialmente, ou de forma equivalente, associada as relações de recorrência a três termos (II.20) e (II.23).

DEFINIÇÃO II.6. Define-se como *função resolvente* associada a um operador linear de dimensão infinita representado por uma matriz de Jacobi J, a função R dada por

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(J^n\, e_0, e_0)}{z^{n+1}}$$

onde

$$e_0 = [I_{N\times N}\ 0_{N\times N}\ \cdots]^T \quad \text{e} \quad (J^n\, e_0, e_0) = e_0^T J^n e_0.$$

TEOREMA II.14. *Sejam $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear normalizada, $\mathcal{F}$ a função de Markov generalizada e R a função resolvente associada ao operador de dimensão infinita representado pela matriz de blocos J definida em* (II.12)*. Então, tem-se que*

$$R(z) = \mathcal{F}(z),$$

para z tal que $|h(x)| < |z|$ e com $x \in \mathsf{L}$ onde $\mathsf{L} = \cup_{j=1,\ldots,N} \operatorname{supp} u_x^j$.

Demonstração. Com vista a determinar o valor de $(J^n e_0, e_0), n \in \mathbb{N}$, consideremos a igualdade matricial

$$J \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = h(x) \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

da qual se obtém

$$J^n \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = (h(x))^n \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0(x) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_m(x) \\ \vdots \end{bmatrix}, \ m \in \mathbb{N}. \tag{II.26}$$

Logo, da primeira equação da relação (II.26) temos que

$$(J^n e_0, e_0)\mathcal{B}_0 + \cdots = (h(x))^n \mathcal{B}_0.$$

Aplicando a funcional vectorial $\mathcal{U}_x$ à anterior relação e considerando as respectivas condições de ortogonalidade, tem-se que

$$(J^n e_0, e_0)\mathcal{U}_x(\mathcal{B}_0) = ((h(x))^n \mathcal{U}_x)(\mathcal{B}_0),$$

ou seja,

$$(J^n e_0, e_0) = ((h(x))^n \mathcal{U}_x)(\mathcal{B}_0)(\mathcal{U}_x(\mathcal{B}_0))^{-1}.$$

Mas como pelas condições iniciais da relação de recorrência (II.20) se tem $\mathcal{B}_0 = \mathcal{P}_0$, obtemos que

$$(J^n e_0, e_0) = ((h(x))^n \mathcal{U})(\mathcal{P}_0)(\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1}.$$

Assim,

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((h(x))^n \mathcal{U})(\mathcal{P}_0)(\mathcal{U}(\mathcal{P}_0))^{-1}}{z^{n+1}}.$$

Como se considera que a funcional vectorial é normalizada tem-se $R(z) = \mathcal{F}(z)$, como pretendíamos demonstrar. □

CAPíTULO III

Interpretação matricial da ortogonalidade vectorial

No presente capítulo estudaremos em detalhe as sucessões de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sob o ponto de vista da teoria geral da ortogonalidade matricial. Ao estudar estas sucessões, observamos que estão associadas a dois tipos de ortogonalidade matricial que iremos relacionar com a ortogonalidade vectorial à esquerda e à direita apresentada no anterior capítulo, provando que se tratam de conceitos de ortogonalidade equivalentes. Neste contexto, definiremos também o que se entende por sucessão de polinómios associados de primeira espécie e respectivas propriedades. Estabelecemos dois problemas tipo Hermite-Padé que caracterizam os distintos conceitos de ortogonalidade. Apresentamos ainda relações algébricas satisfeitas por estas sucessões como é exemplo disso uma identidade do tipo Christoffel-Darboux. Finalmente, provamos que a função de Markov generalizada apresentada no anterior capítulo se trata de uma medida complexa de ortogonalidade.

A maioria dos resultados neste capítulo encontram-se nos trabalhos [**9, 8**].

1. Ortogonalidade matricial à esquerda

O vector de polinómios $\mathcal{B}_m$ pode escrever-se em função de $\mathcal{P}_0$, da seguinte forma

$$\mathcal{B}_m(x) = V_m(h(x))\mathcal{P}_0(x), \tag{III.1}$$

com $\mathcal{P}_0(x) = \left[1\, x\, \ldots\, x^{N-1}\right]^T$ e onde $V_m(h(x))$ é um polinómio matricial da forma

$$V_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m (h(x))^j, \quad \alpha_j^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}).$$

No caso particular em que $h(x) = x$, tem-se

$$V_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m x^j.$$

Teorema III.1. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial. Sejam $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais e $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios matriciais definida por* (III.1). *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonais à esquerda relativamente à funcional vectorial* $\mathcal{U}$.

(b) *A sucessão de polinómios vectoriais* $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *satisfaz*

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) = A_m\mathcal{B}_{m+1}(x) + B_m\mathcal{B}_m(x) + C_m\mathcal{B}_{m-1}(x), \quad m \geq 1$$

onde $\mathcal{B}_{-1}(x) = 0_{N\times 1}$ *e* $\mathcal{B}_0(x) = \mathcal{P}_0(x)$.

(c) *A sucessão de polinómios matriciais* $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *satisfaz*

$$xV_m(x) = A_mV_{m+1}(x) + B_mV_m(x) + C_mV_{m-1}(x) \quad m \geq 1 \tag{III.2}$$

onde $V_{-1}(x) = 0_{N\times N}$ *e* $V_0(x) = I_{N\times N}$.

Demonstração. Para demonstrar este teorema seguimos o seguinte esquema: $(a) \Leftrightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$ e $(c) \Rightarrow (b)$. A equivalência $(a) \Leftrightarrow (b)$, foi obtida no capítulo anterior, no teorema II.12.

Demonstremos então que $(a) \Rightarrow (c)$:

Sabemos que existem matrizes $\gamma_j^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ tal que

$$h(x)V_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^m V_j(h(x)).$$

Multiplicando à direita ambos os membros desta equação por $\mathcal{P}_0$ e aplicando $\mathcal{U}$ tem-se que

$$(h(x)\mathcal{U})(\mathcal{B}_m(x)) = \sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^m \mathcal{U}(\mathcal{B}_j(x)).$$

Das condições de ortogonalidade à esquerda satisfeitas pela sucessão $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tem-se que $\gamma_0^m = 0_{N\times N}$. Multiplicando a equação resultante por h e tendo em consideração as condições de ortogonalidade à esquerda obtém-se também que $\gamma_1^m = 0_{N\times N}$. Procedendo de forma recorrente, isto é, multiplicando a equação resultante por h^k, com $k = 2, \ldots, m-2$ e utilizando as condições de ortogonalidade prova-se que $\gamma_j^m = 0_{N\times N}$, $j = 2, \ldots, m-2$. Assim, a sucessão $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma relação de recorrência a três termos da forma

$$h(x)V_m(h(x)) = \gamma_{m-1}^m V_{m-1}(h(x)) + \gamma_m^m V_m(h(x)) + \gamma_{m-1}^m V_{m+1}(h(x)).$$

Observe-se ainda que, multiplicando à direita a última equação por $\mathcal{P}_0$, vem que

$$h(x)\mathcal{B}_m(x) \;\; = \;\; \gamma_{m+1}^m\mathcal{B}_{m+1}(x) + \gamma_m^m\mathcal{B}_m(x) + \gamma_{m-1}^m\mathcal{B}_{m-1}(x)$$

e, tendo em consideração, a hipótese $(a) \Leftrightarrow (b)$, por comparação dos coeficientes da relação de recorrência tem-se que $A_m = \gamma_{m+1}^m$, $B_m = \gamma_m^m$ e $C_m = \gamma_{m-1}^m$, como pretendíamos demonstrar. Finalmente, para provar que $(c) \Rightarrow (b)$, basta multiplicar à direita (III.2) por $\mathcal{P}_0$, obtendo-se de imediato o pretendido. $\square$

Observámos então, que a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma recorrência a três termos com coeficientes matriciais não simétricos. O que, no momento, levanta uma questão: será que existe uma matriz de medidas relativamente à qual a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ seja ortogonal?

Em parte, a resposta a esta questão é dada nos trabalhos de A.J. Durán (cf. [**13**], [**17**]) onde se encontra uma prova deste teorema para sucessões de polinómios matriciais que satisfazem uma relação de recorrência da forma (I.10) (simetria dos coeficientes da relação de recorrência) e, onde, se prova que estas sucessões são ortonormais relativamente a uma matriz de medidas definida positiva.

Uma outra tentativa parcial para a resolução deste problema pode ser encontrada no trabalho [**12**], onde H. Dette e colaboradores dão condições necessárias e suficientes para que este problema tenha solução partindo do pressuposto que existe uma sucessão de matrizes numéricas que permitem simetrizar a relação de recorrência.

Devemos observar que apenas alguns autores, quando lidam com ortogonalidade matricial, fazem uma distinção clara entre ortogonalidade matricial à direita e ortogonalidade matricial à esquerda. Isto porque, o usual é trabalhar-se com sucessões de polinómios matriciais ortonormais onde as noções de ortogonalidade matricial à esquerda e à direita são praticamente equivalentes, na medida em que as relações de recorrência satisfeitas pelas sucessões são a mesma a menos de uma transposição.

Para dar resposta à questão que se nos coloca comecemos por definir o que entendemos por sucessão de polinómios ortogonais matriciais à esquerda.

Seja W uma matriz de medidas em $\mathbb{R}$ de dimensão $N \times N$ não-singular e não necessariamente definida positiva, isto é, para qualquer conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, temos que $W(A)$ é uma matriz numérica não-singular, tal para todo o número natural k existem $S_k = \int_{\mathbb{R}} z^k dW(z)$, que designamos por *momentos de ordem k*.

Definição III.1. Diz-se que uma sucessão $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de polinómios matriciais, com V_m de grau m, é ortogonal à esquerda relativamente à matriz de medidas W se

$$\int_{\mathbb{R}} V_m(z)dW(z)z^k = \Omega_m^1 \delta_{k,m}, \quad k, m \geq 0, \text{ e } \Omega_m^1 \text{ é triangular superior não-singular.}$$

O próximo teorema inclui claramente um análogo do teorema de Favard para o caso matricial não simétrico onde não se impõe que a matriz de medidas encontrada seja definida positiva, isto é, a matriz de medidas não tem por que ser simétrica.

TEOREMA III.2. *Seja $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda relativamente a uma matriz de medidas W.*

(b) *Existem sucessões de matrizes numéricas $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, com A_m uma matriz triangular inferior e C_m uma matriz triangular superior, para $m \in \mathbb{N}$, tal que a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz*

$$zV_m(z) = A_m V_{m+1}(z) + B_m V_m(z) + C_m V_{m-1}(z), \quad m \geq 1 \tag{III.3}$$

onde $V_{-1}(z) = 0_{N\times N}$ e $V_0(z) = I_{N\times N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Provemos primeiro que (a) implica (b). Como a sucessão $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é também uma base para o espaço vectorial dos polinómios matriciais podemos escrever zV_m na forma

$$zV_m(z) = \sum_{k=0}^{m+1} A_k^m V_k(z), \quad A_k^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}).$$

Tem-se então, das condições de ortogonalidade, que

$$A_j^m \int V_j(z)dW(z)z^j = \int V_m(z)dW(z)z^{j+1} = 0_{N\times N} \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, m-2.$$

Assim,

$$zV_m(z) = A_{m-1}^m V_{m-1}(z) + A_m^m V_m(z) + A_{m+1}^m V_{m+1}(z),$$

onde

$$A_m^m = \left(\int V_m(z)dW(z)z^{m+1}\right)(\Omega_m^1)^{-1}, \; A_{m-1}^m = \left(\int V_m(z)dW(z)z^{m-1}\right)(\Omega_{m-1}^1)^{-1},$$

e

$$A_{m+1}^m = \left(\int V_m(z)dW(z)z^{m+2}\right)(\Omega_{m+1}^1)^{-1}.$$

Tomando $A_m = A_{m+1}^m$, $B_m = A_m^m$ e $C_m = A_{m-1}^m$, obtém-se o pretendido.

Finalmente, para provar que (b) implica (a), devemos começar por definir de forma recorrente os momentos matriciais associados à matriz de medidas W a partir das condições

$$S_0 = \int dW(z) = \Omega_0^1 \quad \text{e} \quad \int V_m(z)dW(z) = 0_{N\times N}, \; m \geq 1,$$

onde Ω_0^1 é uma matriz triangular superior não-singular.

Tendo em consideração que V_m se pode escrever como

$$V_m(z) = V_{m,m}z^m + \cdots + V_{m,1}z + V_{m,0},$$

com $V_{m,m}$ uma matriz não-singular, então tem-se que

$$0_{N\times N} \quad = \quad \int V_m(z)dW(z) = V_{m,m}S_m + \cdots + V_{m,0}S_0.$$

Logo, os momentos são definidos de forma recorrente através de

$$S_m = V_{m,m}^{-1}\sum_{j=0}^{m-1} V_{m,j}S_j.$$

Mostremos, então, que se tem

$$\int V_m(z)dW(z)z^k = 0_{N\times N}, \quad k = 0,\ldots,m-1 \quad \text{e} \quad \int V_m(z)dW(z)z^m = \Omega_m^1.$$

Da relação (III.3) tem-se que $\int V_m(z)dW(z)z = 0_{N\times N}$, $m \geq 2$. De novo, multiplicando ambos os membros da relação de recorrência a três termos por z tem-se que

$$z^2V_m(z) = A_m zV_{m+1}(z) + B_m zV_m(z) + C_m zV_{m-1}(z)$$

e, consequentemente que,

$$\int V_m(z)dW(z)z^2 = 0_{N\times N}, \quad m \geq 3.$$

Procedendo de forma semelhante, concluímos que

$$\int V_m(z)dW(z)z^k = 0_{N\times N}, \quad k = 0,\ldots,m-1.$$

Para $k = m$ tem-se que

$$\begin{aligned}\int V_m(z)dW(z)z^m &= \int (A_mV_{m+1}(z) + B_mV_m(z) + C_mV_{m-1}(z))dW(z)z^{m-1} \\ &= C_m\int V_{m-1}(z)dW(z)z^{m-1} = C_mC_{m-1}\ldots C_1\Omega_0^1.\end{aligned}$$

Provámos então que

$$\int V_m(z)dW(z)z^k = 0_{N\times N}, \quad k = 0,\ldots,m-1$$

e

$$\int V_m(z)dW(z)z^m = \Omega_m^1,$$

com $\Omega_m^1 = C_mC_{m-1}\ldots C_1\Omega_0^1$ triangular superior não-singular. □

Devemos observar que o teorema que aqui apresentamos, III.2, juntamente com o teorema III.1, ilustram a equivalência entre a ortogonalidade vectorial à esquerda e a ortogonalidade matricial à esquerda.

Definição III.3. Seja $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais e seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear quasi-definida. A sucessão de polinómios matriciais $\{\mathcal{B}_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de expressão

$$\mathcal{B}_m^{(1)}(z) := \mathcal{U}_x\left(\frac{V_{m+1}(z) - V_{m+1}(h(x))}{z - h(x)}\mathcal{P}_0(x)\right),$$

onde $\mathcal{U}_x$ representa a acção de $\mathcal{U}$ na variável x, é designada por *sucessão de polinómios associados de primeira espécie* a $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e a $\mathcal{U}$.

Observe que a sucessão de polinómios associados que acabámos de definir se trata de uma sucessão de polinómios matriciais. Podemos então, verificar que a sucessão $\{\mathcal{B}_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz a mesma relação de recorrência que a sucessão $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mas com diferentes condições iniciais.

Teorema III.4. *Sejam $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear quasi-definida e $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente a $\mathcal{U}$. Então, a sucessão de polinómios associados a $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e a $\mathcal{U}$, $\{\mathcal{B}_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$, satisfaz a relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de dimensão $N \times N$ dada por*

$$z\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(z) \;=\; A_m\mathcal{B}_m^{(1)}(z) + B_m\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(z) + C_m\mathcal{B}_{m-2}^{(1)}(z), \quad m \geq 1,$$

com condições iniciais $\mathcal{B}_{-1}^{(1)}(z) = 0_{N\times N}$ e $\mathcal{B}_0^{(1)}(z) = A_0^{-1}$.

Demonstração. Recordemos que $\mathcal{B}_m$ se escreve como

$$\mathcal{B}_m(x) = V_m(h(x))\mathcal{P}_0(x),$$

com $\mathcal{P}_0(x) = \left[1\, x\, \ldots\, x^{N-1}\right]^T$ e que a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz a relação de recorrência

$$h(x)V_m(h(x)) = A_mV_{m+1}(h(x)) + B_mV_m(h(x)) + C_mV_{m-1}(h(x)), \quad m \geq 1.$$

Consideremos esta última relação assim escrita e a mesma relação tomando $h(z) = z$. Se subtrairmos a equação escrita na variável $h(x)$ à equação escrita em z e multiplicarmos esse resultado à direita por $\dfrac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}$ tem-se

$$\frac{zV_m(z)-h(x)V_m(h(x))}{z-h(x)}\mathcal{P}_0(x) = A_m\frac{V_{m+1}(z)-V_{m+1}(h(x))}{z-h(x)}\mathcal{P}_0(x) + B_m\frac{V_m(z)-V_m(h(x))}{z-h(x)}\mathcal{P}_0(x) + C_m\frac{V_{m-1}(z)-V_{m-1}(h(x))}{z-h(x)}\mathcal{P}_0(x).$$

Somando e subtraindo $zV_m(h(x))$ no numerador da expressão que aparece no primeiro membro da última equação e ao fazer actuar $\mathcal{U}_x$ em ambos os membros, tem-se que

$$z\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) + \mathcal{U}_x(\mathcal{B}_m) = A_m\mathcal{B}^{(1)}_m(z) + B_m\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) + C_m\mathcal{B}^{(1)}_{m-2}(z),$$

de onde, pela ortogonalidade de $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, se tem que

$$z\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) = A_m\mathcal{B}^{(1)}_m(z) + B_m\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) + C_m\mathcal{B}^{(1)}_{m-2}(z), \quad m \geq 1,$$

com condições iniciais $\mathcal{B}^{(1)}_{-1}(z) = 0_{N\times N}$ e $\mathcal{B}^{(1)}_0(z) = A_0^{-1}$. $\square$

O próximo objectivo a que nos propomos consiste em definir um *problema tipo Hermite-Padé* ao qual chamaremos *problema de aproximação de Hermite-Padé à esquerda*. Veremos então, que uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ seja ortogonal à esquerda relativamente a uma funcional vectorial $\mathcal{U}$ é que esta satisfaça um problema de aproximação tipo Hermite-Padé à esquerda.

Teorema III.5. *Sejam $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear quasi-definida, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de vectorial de polinómios, $\{\mathcal{B}^{(1)}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sua sucessão de polinómios associados de primeira espécie e $\mathcal{F}$ a função de Markov generalizada definida por* (II.25). *Então, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ se, e somente se,*

$$V_{m+1}(z)\mathcal{F}(z) - \mathcal{B}^{(1)}_m(z) = \Delta_{m+1}\frac{1}{z^{m+2}} + \cdots .$$

Demonstração. Da definição do polinómio $\mathcal{B}^{(1)}_m$, vem

$$\mathcal{B}^{(1)}_m(z) = V_{m+1}(z)\mathcal{F}(z) - \mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{B}_{m+1}(x)}{z-h(x)}\right),$$

ou seja, tem-se que

$$V_{m+1}(z)\mathcal{F}(z) - \mathcal{B}^{(1)}_m(z) = \mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{B}_{m+1}(x)}{z-h(x)}\right). \tag{III.4}$$

Mas,

$$\mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{B}_{m+1}(x)}{z-h(x)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((h(x))^n\mathcal{U}_x)(\mathcal{B}_{m+1}(x))}{z^{n+1}}.$$

Logo,

$$\mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{B}_{m+1}(x)}{z-h(x)}\right)=\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{((h(x))^n\mathcal{U}_x)(\mathcal{B}_{m+1}(x))}{z^{n+1}}=\Delta_{m+1}\frac{1}{z^{m+2}}+\cdots,$$

se, e somente se, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda relativamente a $\mathcal{U}_x$. □

2. Ortogonalidade matricial à direita

Devemos fazer notar que, nesta secção, devido à similitude com a secção anterior, em que abordámos o conceito de ortogonalidade matricial à esquerda e a sua relação com a ortogonalidade vectorial à esquerda, iremos omitir a demonstração de alguns resultados.

O teorema II.12 revela-nos a existência de uma sucessão de polinómios matriciais que designámos por $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e que permite escrever qualquer elemento da base dual $\{\mathcal{L}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ à custa da funcional vectorial $\mathcal{U}$ e vice-versa, tendo em conta que

$$\mathcal{L}_m=G_m^T(h(x))\mathcal{U},\ m\in\mathbb{N}. \tag{III.5}$$

Observámos anteriormente que esta sucessão de polinómios $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais e, que para além disso, esta sucessão de polinómios matriciais é ortogonal à direita relativamente a uma funcional vectorial $\mathcal{U}$ normalizada.

À semelhança do que acontece quando estudámos a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, também a sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ irá satisfazer um tipo de ortogonalidade matricial. Para tal, comecemos por introduzir o que se entende por ortogonalidade matricial à direita. Consideremos então, uma matriz de medidas W não necessariamente definida positiva em $\mathbb{R}$.

Definição III.2. Diz-se que uma sucessão $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de polinómios matriciais com G_m de grau m, é ortogonal à direita relativamente a uma matriz de medidas W em $\mathbb{R}$ de dimensão $N\times N$ não-singular se

$$\int_{\mathbb{R}} z^k dW(z)G_m(z)=\Omega_m^2\delta_{k,m},\quad k,m\geq 0,\ \text{e } \Omega_m^2 \text{ é triangular inferior não-singular.}$$

Teorema III.6. *Seja $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais com grau de G_m igual a m tal que os seus elementos satisfazem* (III.5). *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é ortogonal à direita relativamente a uma matriz de medidas* W.

(b) *Existem sucessões de matrizes numéricas* $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *e* $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *com* A_{m-1} *uma matriz triangular inferior e* C_{m+1} *uma matriz triangular superior, não singulares, para* $m \in \mathbb{N}$, *tal que a sucessão de polinómios matriciais* $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *satisfaz*

$$zG_m(z) = G_{m-1}(z)A_{m-1} + G_m(z)B_m + G_{m+1}(z)C_{m+1}, \quad m \geq 1 \qquad \text{(III.6)}$$

onde $G_{-1}(z) = 0_{N\times N}$ *e* $G_0(z) = I_{N\times N}$.

Demonstração. Demonstração análoga à do teorema III.2. □

Observe que este teorema, juntamente com o teorema II.12, ilustra a equivalência entre a ortogonalidade vectorial à direita e a ortogonalidade matricial à direita.

Estamos em condições de definir o que entendemos por polinómios associados à sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e à funcional linear $\mathcal{U}$.

Definição III.7. Seja $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais com coeficientes matriciais de dimensão $N \times N$ e G_m de grau m. Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear quasi-definida. A sucessão de polinómios $\{G_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de expressão

$$G_m^{(1)}(z) := \left[\left(\frac{G_{m+1}^T(z) - G_{m+1}^T(h(x))}{z - h(x)}\right)\mathcal{U}_x\right](\mathcal{P}_0(x)),$$

onde $\mathcal{U}_x$ representa a acção de $\mathcal{U}$ na variável x, é designada por *sucessão de polinómios associados de primeira espécie* à sucessão de polinómios $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e a $\mathcal{U}$.

Teorema III.8. *Seja* $\mathcal{U}$ *uma funcional vectorial quasi-definida e seja* $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais à direita relativamente a* $\mathcal{U}$ *definida por* (III.5). *Então, a sucessão de polinómios associados a* $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *e a* $\mathcal{U}$, $\{G_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$, *satisfaz a relação de recorrência a três termos com coeficientes matriciais de dimensão* $N \times N$, *dada por*

$$zG_{m-1}^{(1)}(z) = G_{m-2}^{(1)}(z)A_{m-1} + G_{m-1}^{(1)}(z)B_m + G_m^{(1)}(z)C_{m+1}, \quad m \geq 1,$$

com condições iniciais $G_{-1}^{(1)}(z) = 0_{N\times N}$ *e* $G_0^{(1)}(z) = C_1^{-1}$.

Demonstração. Tendo em consideração que os elementos da sucessão $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ são definidos por (III.5) e o teorema II.12 tem-se que

$$\begin{aligned} zG_m^T(z) &= A_{m-1}^T G_{m-1}^T(z) + B_m^T G_m^T(z) + C_{m+1}^T G_{m+1}^T(z) \\ h(x)G_m^T(h(x)) &= A_{m-1}^T G_{m-1}^T(h(x)) + B_m^T G_m^T(h(x)) + C_{m+1}^T G_{m+1}^T(h(x)). \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro as igualdades, somando e subtraindo o polinómio matricial $zG_m^T(h(x))$ ao primeiro membro da equação resultante e, posteriormente, multiplicando a equação obtida por $\dfrac{1}{z-h(x)}$ vem que,

$$\begin{aligned}
&\frac{zG_m^T(z) - zG_m^T(h(x)) + zG_m^T(h(x)) - h(x)G_m^T(h(x))}{z-h(x)} \\
&\qquad = A_{m-1}^T \frac{G_{m-1}^T(z) - G_{m-1}^T(h(x))}{z-h(x)} + B_m^T \frac{G_m^T(z) - G_m^T(h(x))}{z-h(x)} \\
&\qquad\qquad + C_{m+1}^T \frac{G_{m+1}^T(z) - G_{m+1}^T(h(x))}{z-h(x)}.
\end{aligned}$$

Multiplicando, da forma usual, ambos os membros da equação à direita pela funcional vectorial $\mathcal{U}_x$ que actua na variável x, tem-se

$$\begin{aligned}
&\left(z\frac{G_m^T(z) - G_m^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x + G_m^T(h(x))\mathcal{U}_x \\
&\qquad = A_{m-1}^T \left(\frac{G_{m-1}^T(z) - G_{m-1}^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x + B_m^T \left(\frac{G_m^T(z) - G_m^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x \\
&\qquad\qquad + C_{m+1}^T \left(\frac{G_{m+1}^T(z) - G_{m+1}^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x.
\end{aligned}$$

Fazendo actuar ambos os membros da anterior equação no elemento $\mathcal{P}_0$ da base para $\mathbb{P}^N$, vem que:

$$\begin{aligned}
&\left[z\left(\frac{G_m^T(z) - G_m^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x\right](\mathcal{P}_0) + \left[G_m^T(h(x))\mathcal{U}_x\right](\mathcal{P}_0) \\
&\qquad = \left[\left(\frac{G_{m-1}^T(z) - G_{m-1}^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x\right](\mathcal{P}_0)\, A_{m-1} \\
&\qquad\quad + \left[\left(\frac{G_m^T(z) - G_m^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x\right](\mathcal{P}_0)\, B_m \\
&\qquad\qquad + \left[\left(\frac{G_{m+1}^T(z) - G_{m+1}^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x\right](\mathcal{P}_0)\, C_{m+1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$zG_{m-1}^{(1)}(z) + \left[G_m^T(h(x))\mathcal{U}_x\right](\mathcal{P}_0) = G_{m-2}^{(1)}(z)A_{m-1} + G_{m-1}^{(1)}(z)B_m + G_m^{(1)}(z)C_{m+1}.$$

Como, por (III.5),

$$\mathcal{L}_m(\mathcal{P}_0) = \mathcal{L}_m(\mathcal{B}_0) = 0_{N\times N}, \quad m \geq 1$$

tem-se que

$$zG_{m-1}^{(1)}(z) = G_{m-2}^{(1)}(z)A_{m-1} + G_{m-1}^{(1)}(z)B_m + G_m^{(1)}(z)C_{m+1}, \quad m \geq 1,$$

como queríamos demonstrar. □

De forma semelhante ao que apresentámos na secção anterior, propomos-nos definir um *problema tipo Hermite-Padé* ao qual chamaremos *problema de aproximação de Hermite-Padé à direita*. Veremos que uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ seja ortogonal à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ é que esta satisfaça um problema de aproximação tipo Hermite-Padé à direita.

TEOREMA III.9. *Sejam $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear quasi-definida, $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais com G_m de grau m e satisfazendo* (III.5), *$\{G_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sua sucessão de polinómios associados de primeira espécie e $\mathcal{F}$ a função de Markov generalizada.*

Então, a sucessão de polinómios $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à direita relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ se, e somente se, satisfaz

$$\mathcal{F}(z)G_{m+1}(z) - G_m^{(1)}(z) = \Theta_{m+1}\frac{1}{z^{m+2}} + \cdots \ .$$

DEMONSTRAÇÃO. Tendo em conta a definição do polinómio $\{G_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$, tem-se

$$\begin{aligned} G_m^{(1)}(z) &= \left[\left(\frac{G_{m+1}^T(z) - G_{m+1}^T(h(x))}{z-h(x)}\right)\mathcal{U}_x\right](\mathcal{P}_0(x)) \\ &= \mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right)G_{m+1}(z) - \left(G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U}_x\right)\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{F}(z)G_{m+1}(z) - G_m^{(1)}(z) = \left(G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U}_x\right)\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right), \tag{III.7}$$

onde $\mathcal{F}$ é a função Markov generalizada.

Mas,

$$\left(G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U}_x\right)\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\left(\mathcal{L}_{m+1}^x\right)(\mathcal{P}_n(x)).$$

Logo,

$$\left(G_{m+1}^T(h(x))\mathcal{U}_x\right)\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right) = \Theta_{m+1}\frac{1}{z^{m+2}} + \cdots ,$$

se, e somente se, $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à direita relativamente a $\mathcal{U}_x$. □

3. Bi-ortogonalidade

Nesta secção iremos demonstrar um importante teorema, no qual provamos como a função de Markov generalizada, introduzida no anterior capítulo, não é mais do que uma medida complexa de ortogonalidade.

TEOREMA III.10. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear quasi-definida e seja $\mathcal{F}$ a função Markov generalizada associada. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *As sucessões $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ são bi-ortogonais relativamente a $\mathcal{U}$, isto é,*

$$(G_n^T(h(z))\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = I_{N\times N}\delta_{n,m},\ n,m\in\mathbb{N}.$$

(b) *As sucessões $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, onde $\mathcal{B}_m(z) = V_m(h(z))\mathcal{P}_0(z)$ para $m\in\mathbb{N}$, são bi-ortogonais relativamente a $2\pi i\mathcal{F}$, isto é,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C V_m(z)\mathcal{F}(z)G_n(z)dz = I_{N\times N}\delta_{n,m}, \quad n,m\in\mathbb{N}.$$

onde C é um caminho fechado em $\{z\in\mathbb{C} : |z| > |h(x)|,\ x\in\mathsf{L}\}$, com $\mathsf{L} = \cup_{j=1,\dots,N}\operatorname{supp} u_x^j$.

DEMONSTRAÇÃO. Tendo em consideração que

$$V_m(z)\mathcal{F}(z)G_n(z) = (G_n^T(z)\mathcal{U}_x)\left(\frac{V_m(z)\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right),$$

vem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C V_m(z)\mathcal{F}(z)G_n(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C (G_n^T(z)\mathcal{U}_x)\left(\frac{V_m(z)\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right)dz.$$

Como G_n, V_m e $\mathcal{P}_0$ são funções analíticas tem-se, pela fórmula integral de Cauchy, que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (G_n^T(z)\mathcal{U}_x)\left(\frac{V_m(z)\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right)dz = (G_n^T(h(x))\mathcal{U}_x)\left(V_m(h(x))\mathcal{P}_0(x)\right),$$

e, logo, temos para todo o n, $m\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C V_m(z)\mathcal{F}(z)G_n(z)dz = (G_n^T(h(x))\mathcal{U}_x)\left(\mathcal{B}_m(x)\right) = I_{N\times N}\delta_{n,m}.$$

De onde se obtém o resultado que queríamos demonstrar. □

O último teorema diz-nos que se $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonais à esquerda relativamente a* $\mathcal{U}$ é equivalente a dizer que a sucessão $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *associada a* $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é ortogonal à esquerda relativamente a* $\mathcal{F}$. De forma semelhante, dizer $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais à* *direita relativamente a* $\mathcal{U}$ é equivalente a dizer que $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é ortogonal à direita relativamente a* $\mathcal{F}$.

4. Identidade de Christoffel-Darboux

Nesta secção apresentaremos resultados algébricos com respeito ao comportamento das sucessões de polinómios $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, como é exemplo disso, uma *identidade do tipo Christoffel-Darboux* e suas fórmulas confluentes. Para além disso, mostra-se que a identidade do tipo Christoffel-Darboux caracteriza as sucessões de polinómios ortogonais matriciais.

Teorema III.11. *Seja h um polinómio escalar de grau fixo N e $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial quasi-definida. Sejam $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucessões de polinómios, com G_m um polinómio matricial de grau m, para todo o $m \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{B}_m$ um polinómio vectorial dado por $\mathcal{B}_m(x) = V_m(h(x))\mathcal{P}_0(x)$, onde V_m é um polinómio matricial de grau m, para todo o $m \in \mathbb{N}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente a $\mathcal{U}$.*

(b) *$\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funcionais vectoriais bi-ortogonal relativamente a $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{L}_n = G_n^T(h(x))\mathcal{U}$.*

(c) *$\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ verificam a fórmula tipo Christoffel-Darboux*

$$(x-z)\sum_{k=0}^{m} G_k(z)V_k(x) = G_m(z)A_mV_{m+1}(x) - G_{m+1}(z)C_{m+1}V_m(x), \tag{III.8}$$

com $x,\ z \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}$.

(d) *$\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazem a fórmula confluente*

$$G_m(x)A_mV_{m+1}(x) - G_{m+1}(x)C_{m+1}V_m(x) = 0_{N\times N}, \tag{III.9}$$

$$\sum_{k=0}^{m} G_k(x)V_k(x) = G_m(x)A_mV'_{m+1}(x) - G_{m+1}(x)C_{m+1}V'_m(x), \tag{III.10}$$

com $x \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}$.

(e) *$\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazem*

$$G_m(x)A_mV_{m+1}(x) - G_{m+1}(x)C_{m+1}V_m(x) = 0_{N\times N}, \tag{III.11}$$

$$\sum_{k=0}^{m} G_k(x)V_k(x) = G'_{m+1}(x)C_{m+1}V_m(x) - G'_m(x)A_mV_{m+1}(x), \tag{III.12}$$

com $x \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Para provar este resultado seguimos o seguinte esquema. $(a) \Leftrightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (e)$, $(e) \Rightarrow (b)$ e $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

A equivalência $(a) \Leftrightarrow (b)$ é provada no teorema II.12. Para provar que (b) implica (c) recordamos que as sucessões de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ verificam, respectivamente, as relações de recorrência

$$\begin{aligned} xV_m(x) &= A_mV_{m+1}(x) + B_mV_m(x) + C_mV_{m-1}(x) && \text{(III.13)} \\ zG_m(z) &= G_{m-1}(z)A_{m-1} + G_m(z)B_m + G_{m+1}(z)C_{m+1}. && \text{(III.14)} \end{aligned}$$

Subtraindo o resultado de multiplicar à esquerda ambos os membros de (III.13) por $G_m(z)$ ao resultado de multiplicar à direita ambos os membros de (III.14) por $V_m(x)$, temos que

$$\begin{aligned} (x-z)G_m(z)V_m(x) = &\left[G_m(z)A_mV_{m+1}(x) - G_{m-1}(z)A_{m-1}V_m(x)\right] \\ &- \left[G_{m+1}(z)C_{m+1}V_m(x) - G_m(z)C_mV_{m-1}(x)\right]. \end{aligned}$$

e, logo, tem-se (III.8). Para provar que (c) implica (d), basta tomar $z = x$ em (III.8) e então obtém-se (III.9). A equação (III.10) resulta de (III.8) diferenciando relativamente x e, tomando, posteriormente, $z = x$.

Para provar que (c) implica (e), devemos tomar $z = x$ em (III.8) e, então, (III.11) é válida. A equação (III.12) resulta de forma similar diferenciando (III.8) relativamente a z e tomando $z = x$.

Para completar a prova necessitamos mostrar que (d) implica (a). Podemos reescrever a equação (III.10) na forma

$$G_m(x)A_mV'_{m+1}(x) - G_{m+1}(x)C_{m+1}V'_m(x) = G_m(x)V_m(x) + \sum_{k=0}^{m-1} G_k(x)V_k(x),$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} G_m(x)V_m(x) = &\, G_m(x)[A_mV'_{m+1}(x) + C_mV'_{m-1}(x)] \\ &- [G_{m+1}(x)C_{m+1} + G_{m-1}(x)A_{m-1}]V'_m(x). \end{aligned}$$

Usando (III.9) temos que $[(A_mV_{m+1}(x) + C_mV_{m-1}(x))V_m^{-1}(x)]' = I_{N\times N}$. Então, temos que

$$[A_mV_{m+1}(x) + C_mV_{m-1}(x)]V_m^{-1}(x) = xI - B_n,$$

ou seja, $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaz uma relação de recorrência a três termos da forma

$$h(x)V_m = A_mV_{m+1}(h(x)) + B_mV_m(h(x)) + C_mV_{m-1}(h(x)).$$

Multiplicando ambos os membros da relação de recorrência a três termos por $\mathcal{P}_0$, da definição de $\mathcal{B}_m$ e do teorema II.6, o resultado é obtido.

Finalmente, para provar que $(e) \Rightarrow (b)$ procedemos de forma similar à prova de $(d) \Rightarrow (a)$ partindo de (III.12) e tendo em consideração o teorema II.12. □

Observe-se que este resultado já era conhecido para sucessões de polinómios ortonormais matriciais que satisfazem relações de recorrência simétricas, como ilustrámos no primeiro capítulo. Com o resultado que obtivemos estendemos este resultado a qualquer tipo de sucessões de polinómios matriciais ortogonais. Para além disso, como as ortogonalidades matriciais à esquerda e à direita são equivalentes às ortogonalidades vectorial à esquerda e à direita, respectivamente, temos que as ortogonalidades vectoriais são também caracterizadas pela identidade de tipo Christoffel-Darboux.

Observe-se que podemos ainda deduzir das relações (III.8), (III.9), (III.10) e (III.12), novas relações onde no lugar do polinómio matricial V_m apareça o polinómio vectorial $\mathcal{B}_m$, bastando para tal multiplicar as relações pelo elemento $\mathcal{P}_0$ da base para $\mathbb{P}^N$.

Teorema III.12 (Fórmula de Liouville-Ostrogradski). *Sejam $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucessões de polinómios bi-ortogonais relativamente a $\mathcal{F}$ com V_m definida por* (III.1) *e sejam $\{\mathcal{B}_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ as sucessões de polinómios associados de primeira espécie às sucessões $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Então,*

$$\mathcal{B}_m^{(1)} G_m - V_{m+1} G_{m-1}^{(1)} = A_m^{-1},$$

onde A_m é o coeficiente não-singular que aparece na relação de recorrência (III.3).

Demonstração. As sucessões de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_{m-1}^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazem as relações de recorrência (III.3) e (III.6) com as respectivas condições iniciais.

Para provar este resultado procedemos por indução. Para $m = 0$ o resultado é imediato tendo em conta as condições iniciais. Suponhamos então que a fórmula

$$\mathcal{B}_p^{(1)} G_p - V_{p+1} G_{p-1}^{(1)} = A_p^{-1},$$

é válida para $p = 1, \ldots, m-1$. Para provar que também é válida para $p = m$ consideremos os seguintes passos: Primeiro, usamos as relações de recorrência para $\mathcal{B}_m^{(1)}$ e V_{m+1}, isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_m^{(1)} G_m - V_{m+1} G_{m-1}^{(1)} = A_m^{-1}(zI_{N\times N} - B_m) &\left(\mathcal{B}_{m-1}^{(1)} G_m - V_m G_{m-1}^{(1)}\right) \\ - A_m^{-1} C_m &\left(\mathcal{B}_{m-2}^{(1)} G_m - V_{m-1} G_{m-1}^{(1)}\right).\end{aligned}$$

Segundo, provamos que $\mathcal{B}^{(1)}_{m-1} G_m - V_m G^{(1)}_{m-1} = 0_{N\times N}$. Multiplicando à direita (III.4) por G_m e multiplicando à esquerda (III.7) por V_m (substituindo m por $m-1$ nas relações (III.4) e (III.7)) e subtraindo membro a membro equações obtidas, vem que:

$$\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) G_m(z) - V_m(z) G^{(1)}_{m-1}(z).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) G_m(z) - V_m(z) G^{(1)}_{m-1}(z) &= \\ & V_m(z)(G_m^T(h(x))\mathcal{U}_x)\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right) - \mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{B}_m(x)}{z-h(x)}\right) G_m(z).\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $(G_m^T(h(x))\mathcal{U}_x)\left(\frac{\mathcal{B}_m(x)}{z-h(x)}\right)$ à última relação e tendo em consideração a ortogonalidade à esquerda e à direita

$$\mathcal{B}^{(1)}_m G_m - V_{m+1} G^{(1)}_{m-1} = -A_m^{-1} C_m \left(\mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_m - V_{m-1} G^{(1)}_{m-1}\right). \tag{III.15}$$

Novamente, aplicando as relações de recorrência a três termos de G_m e $G^{(1)}_{m-1}$ à expressão $\mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_m - V_{m-1} G^{(1)}_{m-1}$ vem,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_m - V_{m-1} G^{(1)}_{m-1} &= (\mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_{m-1} - V_{m-1} G^{(1)}_{m-2})(zI_{N\times N} - B_{m-1})C_m^{-1} \\ &\quad + (V_{m-1} G^{(1)}_{m-3} - \mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_{m-2}) A_{m-2} C_m^{-1}.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_{m-1} - V_{m-1} G^{(1)}_{m-2} = 0_{N\times N}$, tem-se que

$$\mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_m - V_{m-1} G^{(1)}_{m-1} = (V_{m-1} G^{(1)}_{m-3} - \mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_{m-2}) A_{m-2} C_m^{-1}.$$

Aplicando a última relação em (III.15)

$$\mathcal{B}^{(1)}_m G_m - V_{m+1} G^{(1)}_{m-1} = -A_m^{-1} C_m (V_{m-1} G^{(1)}_{m-3} - \mathcal{B}^{(1)}_{m-2} G_{m-2}) A_{m-2} C_m^{-1}.$$

De acordo com a hipótese de indução tem-se o resultado. □

Definição III.3. Designaremos por *polinómio Núcleo* o polinómio matricial em duas variáveis K_m definido por

$$K_m(x,y) = \sum_{k=0}^{m-1} G_k(h(y)) V_k(h(x)).$$

Observe-se que $K_m(x,y) \neq K_m(y,x)$.

Uma das propriedades mais importantes do polinómio núcleo é a sua propriedade reprodutora. O próximo teorema dá-nos esta propriedade no caso vectorial.

Teorema III.13. *Sejam $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear quasi-definida, $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios vectoriais à esquerda relativamente a $\mathcal{U}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais à direita relativamente a $\mathcal{U}$. Então, dado um polinómio vectorial $\pi \in \mathbb{P}^N$ de grau fixo m, isto é,*

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{m} \beta_k^m \mathcal{B}_k(x), \quad \beta_k^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C}) \tag{III.16}$$

temos que

$$\pi(x) = (K_{m+1}^T(x,z)\mathcal{U}_z)(\pi(z))\mathcal{P}_0(x).$$

Demonstração. De (III.16) e da noção de bi-ortogonalidade e do facto de os elementos da base dual se escreverem na forma $\mathcal{L}_n = G_n^T\mathcal{U}$, tem-se

$$\beta_k^m = \mathcal{L}_k(\pi(z)) = (G_k^T(h(z))\mathcal{U}_z)(\pi(z)).$$

Então,

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{m} (G_k^T(h(z))\mathcal{U}_z)(\pi(z))\mathcal{B}_k(x).$$

Mas,

$$(G_k^T(h(z))\mathcal{U}_z)(\pi(z))\mathcal{B}_k(x) = ((G_k(h(z))V_k(h(x)))^T\mathcal{U}_z))(\pi(z))\mathcal{P}_0(x).$$

Logo,

$$\pi(x) = (K_{m+1}^T(x,z)\mathcal{U}_z)(\pi(z))\mathcal{P}_0(x),$$

e obtém-se o resultado. $\square$

Tem-se, ainda, o seguinte lema:

Lema III.1. *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial linear quasi-definida e $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios ortogonais à esquerda relativamente a $\mathcal{U}$. Seja ainda, $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais tal que $\mathcal{B}_m(x) = V_m(h(x))\mathcal{P}_0(x)$, com $\mathcal{P}_0(x) = \begin{bmatrix}1\, x\, \dots\, x^{N-1}\end{bmatrix}^T$.*

Nestas condições, tem-se que

$$V_m(h(x)) = (K_{m+1}^T(x,z)\mathcal{U}_z)(\mathcal{B}_m(z)). \tag{III.17}$$

DEMONSTRAÇÃO. Tem-se que

$$\begin{aligned}
(K_{m+1}^T(x,z)\mathcal{U}_z)(\mathcal{B}_m(z)) &= (\sum_{j=0}^{m} V_j^T(h(x))G_j^T(h(z))\mathcal{U}_z)(\mathcal{B}_m(z)) \\
&= \sum_{j=0}^{m}(G_j^T(h(z))\mathcal{U}_z)(\mathcal{B}_m(z))V_j(h(x)) \\
&= \sum_{j=0}^{m}(\mathcal{L}_j)(\mathcal{B}_m(z))V_j(h(x)) \\
&= V_m(h(x)),
\end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar. $\square$

CAPíTULO IV

Classe Nevai

Neste capítulo apresentamos uma generalização do teorema de Markov matricial no caso não-simétrico. Generalizamos o conceito de Classe Nevai apresentado no primeiro capítulo para o caso não-simétrico e, na Clase Nevai apresentada, estudamos o comportamento assimptótico do quociente entre dois elementos consecutivos da mesma sucessão de polinómios ortogonais matriciais.

Estudamos também modificações de uma funcional vectorial, como a definida no segundo capítulo, por meio de uma *funcional Delta*. Entenda-se como *funcional Delta* uma funcional vectorial cujos elementos são combinações lineares de *deltas de Dirac* e suas derivadas, em um ou mais pontos. Estudaremos quando é que estas modificações por meio de uma *funcional Delta* tem associada uma sucessão de polinómios vectoriais.

Finalmente, como um exemplo de aplicação, mostraremos que à custa das funcionais vectoriais obtidas por uma modificação por uma funcional Delta, podemos descrever qualquer produto de Sobolev discreto [**2, 20, 23, 26, 27, 28, 30, 33**] e como podemos descrever um produto interno matricial modificado por uma Delta matriz [**44, 45**].

Para finalizar, apresentamos o comportamento assimptótico relativo entre duas sucessões de polinómios ortogonais matriciais quando uma destas sucessões pertence à classe Nevai matricial generalizada e a outra sucessão é ortogonal a uma modificação por uma funcional Delta.

A maioria dos resultados neste capítulo encontram-se nos trabalhos [**9, 8**].

1. Teorema de Markov Generalizado

Comecemos por recordar a matriz N-Jacobi

$$J = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & 0 & \\ C_1 & B_1 & A_1 & \ddots \\ 0 & C_2 & B_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{IV.1}$$

associada às sucessões de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, por meio das relações de recorrência a três termos não simétricas (III.3) e (III.6).

À semelhança do caso matricial simétrico, podemos relacionar os zeros dos polinómios matriciais G_m e V_m (i.e, os zeros dos polinómios escalares $\det G_m$ e $\det V_m$) com os valores próprios da matriz J_m, onde J_m é a matriz por blocos truncada de dimensão $mN \times mN$, da matriz J.

À semelhança do caso simétrico, tem-se que, para $m \in \mathbb{N}$, os zeros dos polinómios matriciais G_m e V_m são os mesmos do polinómio $\det(tI_{mN\times mN} - J_m)$ (com a mesma multiplicidade) onde $I_{mN\times mN}$ é a matriz identidade de dimensão $mN \times mN$. No entanto, como a matriz J_m é, em geral, não hermitiana, não temos a garantia que os zeros sejam reais.

Exemplo IV.1. Consideremos a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ gerada pela relação de recorrência a três termos

$$zV_m(z) = AV_{m+1}(z) + BV_m(z) + CV_{m-1}(z),\ m \geq 1,$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e com condições iniciais $V_{-1}(z) = 0_{2\times 2}$ e $V_0(z) = I_{2\times 2}$. Neste caso, a matriz de Jacobi truncada J_2 de dimensão 4×4 é da forma

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

e admite como valores próprios $1 + i\sqrt{65}$, $1 - i\sqrt{65}$, $1 + 3i\sqrt{7}$, $1 - 3i\sqrt{7}$. Logo, os zeros do polinómio V_2 são números complexos.

Devemos fazer notar que neste capítulo iremos utilizar muitos resultados sobre zeros de um polinómio matricial, a que fizemos referência no primeiro capítulo e que também podem ser encontrados nos trabalhos [**14, 15, 16, 21**]. Sempre que necessário, reescrevemo-los no caso não-simétrico.

Nestas condições, podemos então estabelecer uma fórmula de quadratura para a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que satisfaz uma relação de recorrência a três termos não-simétrica.

Teorema IV.1 (Fórmula de Quadratura). *Seja* $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de polinómios matriciais ortogonal à esquerda relativamente à matriz de medidas* W *no sentido da Definição III.1. Seja ainda* $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de polinómios definida por* (III.1) *e seja* $\{\mathcal{B}_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ *a sua sucessão de polinómios associados de primeira espécie. Consideremos* $x_{m,k}$, $k = 1, \ldots, s$, *(logo,* $s \leq mN$*), os zeros do polinómio matricial* V_m *e* $\Gamma_{m,k}$ *as matrizes definidas por*

$$\Gamma_{m,k} = \frac{l_k (\operatorname{adj}(V_m(x)))^{(l_k-1)}(x_{m,k})\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(x_{m,k})}{(\det(V_m(x)))^{(l_k)}(x_{m,k})},$$

para $k = 1, \ldots, s$ *onde* l_k *é a multiplicidade de* $x_{m,k}$.

Então, para qualquer polinómio V *de grau não superior a* $2m-1$, *tem-se*

$$\int V(h(x))dW(h(x)) = \sum_{k=1}^{s} V(x_{m,k})\Gamma_{m,k}.$$

Demonstração. Seja V um polinómio matricial de grau menor ou igual a $2m-1$. Como V_m tem coeficiente principal não-singular (cf. [**21**]), podemos reescrever V na forma

$$V(x) = C(x)V_m(x) + R(x),$$

com C e R polinómios matriciais de grau menor ou igual a $m-1$. Logo,

$$V(x)V_m^{-1}(x) = C(x) + R(x)V_m^{-1}(x),$$

sempre que x não é um zero de V_m.

Como o grau $R(x) \leq m-1$, pelo lema I.3 podemos escrever

$$R(x)V_m^{-1}(x) = \sum_{k=1}^{s} \frac{C_{m,k}}{x - x_{m,k}},$$

onde as matrizes $C_{m,k}$ são dadas por

$$C_{m,k} = \frac{l_k R(x_{m,k})(\operatorname{adj}(V_m(x)))^{(l_k-1)}(x_{m,k})}{(\det(V_m(x)))^{(l_k)}(x_{m,k})}.$$

De acordo com o lema I.2 tem-se que $V_m(x_{m,k})\left(\operatorname{adj}(V_m(x))\right)^{(l_k-1)}(x_{m,k}) = 0_{N\times N}$ e, tendo em consideração, que $R(x_{m,k}) = V(x_{m,k}) - C(x_{m,k})V_m(x_{m,k})$, a expressão anterior toma a forma

$$C_{m,k} = \frac{l_k V(x_{m,k})(\operatorname{adj}(V_m(x)))^{(l_k-1)}(x_{m,k})}{(\det(V_m(x)))^{(l_k)}(x_{m,k})}.$$

Portanto,

$$V(x) = C(x)V_m(x) + \sum_{k=1}^{s} C_{m,k}\frac{V_m(x)}{x - x_{m,k}}.$$

Relembrando que,

$$V_m(x_{m,k})\left(\operatorname{adj}\left(V_m(x)\right)\right)^{(l_k-1)}(x_{m,k}) = \left(\operatorname{adj}\left(V_m(x)\right)\right)^{(l_k-1)}(x_{m,k})V_m(x_{m,k}) = 0_{N\times N},$$

tem-se

$$V(x) = C(x)V_m(x) + \sum_{k=1}^{s} C_{m,k}\frac{V_m(x)-V_m(x_{m,k})}{x-x_{m,k}}.$$

Tomando $x = h(t)$, vem

$$V(h(t)) = C(h(t))V_m(h(t)) + \sum_{k=1}^{s} C_{m,k}\frac{V_m(x_{m,k})-V_m(h(t))}{x_{m,k}-h(t)}.$$

Assim, pela representação integral dos polinómios associados de primeira espécie, $\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}$, dada por

$$\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(z) = \int \frac{V_m(z)-V_m(h(x))}{z-h(x)}dW(h(x)),$$

vem que

$$\int V(h(t))dW(h(t)) = \int C(h(t))V_m(h(t))dW(h(t)) + \sum_{k=1}^{s} C_{m,k}\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(x_{m,k}).$$

Logo, pela ortogonalidade de $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ relativamente a W, tem-se

$$\int V(h(t))dW(h(t)) = \sum_{k=1}^{s} C_{m,k}\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(x_{m,k}),$$

como pretendíamos demonstrar. □

Observe-se que de forma análoga poderíamos encontrar uma fórmula de quadratura que envolvesse a sucessão de polinómios matricial $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ortogonal à direita relativamente a W.

O próximo resultado, que designamos por *Teorema de Markov Generalizado*, trata-se de uma extensão do resultado apresentado por A.J. Durán no trabalho [**15**]. Este resultado estabelece o comportamento assimptótico do quociente entre o m-ésimo polinómio ortogonal V_m relativamente à função de Markov generalizada $\mathcal{F}$ e o $(m-1)-$ésimo polinómio associado de primeira espécie $\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}$.

TEOREMA IV.2 (Teorema de Markov Generalizado). *Seja $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial quasi-definida, $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais à esquerda relativamente à função de Markov generalizada $\mathcal{F}$ e seja $\{\mathcal{B}_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios matriciais associada de primeira espécie à sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e a $\mathcal{U}$. Então,*

$$\lim_{m\to\infty} V_m^{-1}(z)\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(z) = \mathcal{F}(z),$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ *e a convergência é localmente uniforme sobre compactos em* $\mathbb{C} \setminus \Gamma$*, onde* $\Gamma = \cap_{N \geq 0} M_N$ *e* $M_N = \overline{\cup_{n \geq N}\{\text{zeros de } V_m\}}$.

Demonstração. Em primeiro lugar, pelo lema I.3, tem-se

$$V_m^{-1}(z)\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(z) = \sum_{k=1}^{s} \Gamma_{m,k} \frac{1}{z - x_{m,k}},$$

onde $\Gamma_{m,k}$ são as matrizes coeficientes da fórmula de quadratura apresentada no teorema IV.1 e onde os $x_{m,k}$ são zeros de V_m. Por outro lado, existem sempre números complexos $y_{m,k}$ tal que $h(y_{m,k}) = x_{m,k}$, e

$$V_m^{-1}(z)\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(z) = \sum_{k=1}^{s} \Gamma_{m,k} \frac{1}{z - h(y_{m,k})}.$$

Consideremos, agora, a sucessão discreta de matrizes de medidas $\{\mu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ definidas por

$$\mu_m = \sum_{k=1}^{s} \Gamma_{m,k} \delta_{y_{m,k}}.$$

Logo,

$$V_m^{-1}(z)\mathcal{B}_{m-1}^{(1)}(z) = \sum_{k=1}^{s} \Gamma_{m,k} \frac{1}{z - h(y_{m,k})} = \int \frac{d\mu_m(h(x))}{z - h(x)}, \tag{IV.2}$$

se z não é um zero de V_m. Tendo em consideração (IV.2), será então, suficiente provar que

$$\lim_{m \to \infty} \int \frac{d\mu_m(h(x))}{z - h(x)} = \mathcal{F}(z), \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

O primeiro passo para a demonstração deste resultado consiste em provar a convergência pontual. Caso contrário, suponhamos que existe um complexo $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, uma sucessão crescente não negativa de inteiros $\{m_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ e uma constante positiva C tal que

$$\left\| \int \frac{d\mu_{m_l}(h(x))}{z - h(x)} - \mathcal{F}(z) \right\|_2 \geq C > 0, \;\; l \geq 0, \tag{IV.3}$$

onde $\| \, . \, \|_2$ representa a norma espectral da matriz, isto é,

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \, \lambda \, \text{é um valor próprio de} \, A^* A\},$$

ou seja, $\| \, . \, \|_2$ corresponde a determinar o maior valor singular da matriz. Tomando em consideração uma sucessão crescente $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $a_k \to \infty$, e usando, o teorema Banach-Alaoglu, podemos encontrar uma subsucessão $\{r_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ de $\{m_l\}_{l \in \mathbb{N}}$, definida numa curva γ_k contida no disco $|z| < a_k$, com o mesmo k-ésimo momento que a funcional vectorial $\mathcal{U}$, para $k \leq 2r_l - 1$, tal que

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\gamma_k} f(h(x))d\mu_{r_l}(h(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(h(z))\mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right)dz.$$

Além disso,

$$\left\|\int \frac{d\mu_{r_l}(h(x))}{z-h(x)} - \mathcal{F}(z)\right\|_2 \leq \left\|\int_{\gamma_k} \frac{d\mu_{r_l}(h(x))}{z-h(x)} - \mathcal{F}(z)\right\|_2 + \left\|\int_{\ell_k} \frac{d\mu_{r_l}(h(x))}{z-h(x)}\right\|_2,$$

com ℓ_k no exterior do disco $|z| < a_k$. Escrevemos S_0 para o primeiro momento da matriz de medidas μ_{r_l} que é o primeiro momento de $\mathcal{U}$. Então, tomando k e r_l suficientemente grandes, de (IV.2) e de (IV.3) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{C}{2} &\leq \max\left(\frac{1}{|z-h(a_k)|}\right)\left\|\int_{\ell_k} d\mu_{r_l}(h(x))\right\|_2 \\ &\leq \max\left(\frac{1}{|z-h(a_k)|}\right)\|S_0\|_2\end{aligned}$$

Mas isto, leva-nos a $C = 0$ e, portanto, (IV.2) não é possível.

O próximo passo consiste em provar que as funções analíticas que são as entradas da matriz $\displaystyle\int \frac{d\mu_m(h(x))}{z-h(x)}$ são uniformemente limitadas em conjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Então, a convergência uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ resulta do teorema de Stieltjes-Vitali's.

Consideremos um compacto $K \subset \mathbb{C}\setminus\Gamma$, observe que $K \cap M_N \neq \emptyset$, para N suficientemente grande e, então, existe $A > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{z-h(x)}\right| \leq A, \text{ para } z \in K \text{ e } h(x) \in M_N.$$

Então, para $n \geq N$,

$$\left\|\int \frac{d\mu_n(h(x))}{z-h(x)}\right\| \leq A\, S_0\,.$$

A norma espectral de $\displaystyle\int \frac{d\mu_m(h(x))}{z-h(x)}$ é uniformemente limitada e, portanto, pela equivalência das normas em espaços de dimensão finita, obtemos o resultado. □

De forma análoga poderíamos obter o seguinte resultado assimptótico: Seja $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios ortogonais à direita relativamente à função de Markov generalizada $\mathcal{F}$ e seja $\{G_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios associada de primeira espécie à sucessão $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e a $\mathcal{U}$. Então,

$$\lim_{m\to\infty} G_{m-1}^{(1)}(z)G_m^{-1}(z) = \mathcal{F}(z),$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ e a convergência é localmente uniforme sobre compactos em $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, onde $\Gamma = \cap_{N \geq 0} M_N$ e $M_N = \overline{\cup_{n \geq N}\{\text{zeros de}\, G_m\}}$.

2. Assimptótica do quociente

Dadas as sucessões de matrizes $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, dizemos que uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ que satisfaça a relação de recorrência a três termos

$$zV_m(z) = A_m V_{m+1}(z) + B_m V_m(z) + C_m V_{m-1}(z), \quad m \geq 0, \tag{IV.4}$$

com A_m e C_m matrizes não-singulares, pertence à *classe matricial Nevai generalizada*, $M(A, B, C)$, se $\lim_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim_{m\to\infty} B_m = B$ e $\lim_{m\to\infty} C_m = C$. Dizemos ainda que, uma matriz de medidas $\mathcal{F}$ pertence à classe Nevai generalizada se alguma das sucessões correspondentes pertence a $M(A, B, C)$.

Observe que, a matriz de medidas $\mathcal{F}$ pode pertencer a mais de que uma classe Nevai generalizada, por causa da não unicidade das correspondentes sucessões de polinómios.

Quando A e C são matrizes não-singulares podemos introduzir a sucessão de polinómios matriciais $\{U_m^{A,B,C}\}_{m\in\mathbb{N}}$ definida pela relação de recorrência

$$zU_m^{A,B,C}(z) = AU_{m+1}^{A,B,C}(z) + BU_m^{A,B,C}(z) + CU_{m-1}^{A,B,C}(z), \quad m \geq 1, \tag{IV.5}$$

com condições iniciais $U_0^{A,B,C}(z) = I_{N\times N}$ e $U_{-1}^{A,B,C}(z) = 0_{N\times N}$. De acordo com o teorema III.2, esta sucessão é ortogonal à esquerda relativamente a uma matriz de medidas $\mathcal{F}_{A,B,C}$ não necessariamente definida positiva. A esta sucessão de polinómios matriciais chamamos *polinómios de Chebyshev de segunda espécie generalizados*. Observe que, de $U_0^{A,B,C}(z) = I_{N\times N}$ resulta que $\int d\mathcal{F}_{A,B,C}(z) = I_{N\times N}$.

Se consideramos uma sucessão de polinómios vectoriais $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ortogonal à esquerda relativamente à funcional vectorial $\mathcal{U}$ que satisfaz a relação de recorrência

$$z\mathcal{B}_m(z) = A\mathcal{B}_{m+1}(z) + B\mathcal{B}_m(z) + C\mathcal{B}_{m-1}(z), \quad m \geq 1,$$

com condições iniciais $\mathcal{B}_{-1}(z) = 0_{N\times 1}$ e $\mathcal{B}_0(z) = M\mathcal{P}_0(z)$, onde A, C e M são matrizes não-singulares, é verdade que, a sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\mathcal{B}_m(z) = V(h(z))\mathcal{P}_0(z)$$

e a sucessão de polinómios associados de primeira espécie $\{\mathcal{B}_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$, satisfazem a mesma relação de recorrência com as condições iniciais $V_{-1}(z) = 0_{N\times N}$, $V_0(z) = M_{N\times N}$, $\mathcal{B}_{-1}^{(1)}(z) = 0_{N\times N}$ e $\mathcal{B}_0^{(1)}(z) = A^{-1}M$, respectivamente.

Reescrevendo as relações de recorrência para $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{B}_m^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ na forma matricial por blocos, temos que

$$\begin{bmatrix} AV_{m+1} & A\mathcal{B}_m^{(1)} \\ V_m & \mathcal{B}_{m-1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} zI_{N\times N} - B & -C \\ I_{N\times N} & 0_{N\times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m & \mathcal{B}_{m-1}^{(1)} \\ V_{m-1} & \mathcal{B}_{m-2}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Como a matriz A é não-singular temos que a última equação é equivalente a

$$\begin{bmatrix} V_{m+1} & \mathcal{B}_m^{(1)} \\ V_m & \mathcal{B}_{m-1}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1}(zI_{N\times N} - B) & -A^{-1}C \\ I_{N\times N} & 0_{N\times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_m & \mathcal{B}_{m-1}^{(1)} \\ V_{m-1} & \mathcal{B}_{m-2}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad \text{(IV.6)}$$

Reescrevendo a última equação na forma

$$L_m = TL_{m-1},\ m = 1, 2, \ldots,$$

onde

$$L_m = \begin{bmatrix} V_{m+1} & \mathcal{B}_m^{(1)} \\ V_m & \mathcal{B}_{m-1}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} A^{-1}(zI_{N\times N} - B) & -A^{-1}C \\ I_{N\times N} & 0_{N\times N} \end{bmatrix},$$

temos que

$$L_m = T^m L_0$$

com L_0 dado por

$$L_0 = \begin{bmatrix} A^{-1}(zI_{N\times N} - B)M & A^{-1}M \\ M & 0_{N\times N} \end{bmatrix}.$$

Exemplo IV.2. Tomando A, B, C e M como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}.$$

As matrizes T e L_0 aparecem como

$$T = \begin{bmatrix} 1+z & 0 & 1 & 0 \\ -1 & z+1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$L_0 = \begin{bmatrix} m_{11}(1+z) & m_{12}(1+z) & m_{11} & m_{12} \\ -m_{11} + m_{21}(1+z) & -m_{12} + m_{22}(1+z) & m_{21} & m_{22} \\ m_{11} & m_{12} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz T tem o seguinte sistema de valores próprios

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+z-\sqrt{(z+1)^2-4}),\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(1+z+\sqrt{(z+1)^2-4}),$$
$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(1+z-\sqrt{(z+1)^2+4}),\ \lambda_4 = \frac{1}{2}(1+z+\sqrt{(z+1)^2+4})$$

e correspondentes vectores próprios são

$$v_1 = \left[-2, \frac{1}{2}(1+z-\sqrt{(z+1)^2+4}), \frac{4}{-1-z+\sqrt{(z+1)^2+4}}, 1\right],$$

$$v_2 = \left[-2, \frac{1}{2}(1+z+\sqrt{(z+1)^2+4}), -\frac{4}{1+z+\sqrt{(z+1)^2+4}}, 1\right],$$

$$v_3 = \left[0, \frac{1}{2}(1+z-\sqrt{(z+1)^2-4}), 0, 1\right],$$

e

$$v_4 = \left[0, \frac{1}{2}(1+z+\sqrt{(z+1)^2-4}), 0, 1\right]$$

A matriz T é diagonizável por semlhança e, portanto,

$$T^m = SD^mS^{-1},$$

onde $D^m = \text{diagonal}\,[\lambda_1^m, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \lambda_4^m]$, para $m \in \mathbb{N}$, e S é a matriz da forma $S = [v_1|\, v_2|\, v_3|\, v_4]$.

Usando a decomposição podemos determinar L_{m+1} e então, obter V_m e $\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}$:

$$V_m(z) = -\frac{1}{2}E_{m+2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1+z)m_{11} & (1+z)m_{12} \end{bmatrix} + E_{m+1}\begin{bmatrix} (1+z)m_{11} & (1+z)m_{12} \\ -\frac{m_{11}}{2} & -\frac{m_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ F_{m+1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2m_{21}(1+z)+m_{11}((1+z)z-2+z) & 2m_{22}(1+z)+m_{12}((1+z)z-2+z) \end{bmatrix}$$

$$+ E_m\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - F_m\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2m_{21}+m_{11}(1+z) & 2m_{22}+m_{12}(1+z) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(z) = -\frac{1}{2}E_{m+2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \\ m_{11} & m_{12} \end{bmatrix} + E_{m+1}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}F_m\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \\ m_{11} & m_{12} \end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}F_{m+1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \\ (1+z)m_{11}+2m_{21} & (1+z)m_{12}+2m_{22} \end{bmatrix}$$

onde

$$E_m = 2^{-m}\frac{(1+z+\sqrt{(z+1)^2+4})^m-(1+z-\sqrt{(z+1)^2+4})^m}{\sqrt{(1+z)^2+4}},$$

$$F_m = 2^{-m}\frac{(1+z+\sqrt{(z+1)^2-4})^m-(1+z-\sqrt{(z+1)^2-4})^m}{\sqrt{(1+z)^2-4}}.$$

Por cálculos directos obtemos $V_m^{-1}\,\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}$ e, então, tomamos o limite quando $m\to\infty$, e obtemos

$$\mathcal{F}_{A,B,C}(z)=\tfrac{1}{D_m}\begin{bmatrix} 2m_{11}m_{12} & 2m_{12} \\ \\ -2m_{11} & 2m_{11}m_{12} \end{bmatrix}$$

$$-\tfrac{1}{4D_m}(-(1+z)+\sqrt{(z+1)^2+4})(\sqrt{(z+1)^2+4}-\sqrt{(z+1)^2-4})\begin{bmatrix} m_{11}m_{12} & m_{12}^2 \\ \\ -m_{11}^2 & m_{11}m_{12} \end{bmatrix}$$

$$+\tfrac{1+z}{D_m}\begin{bmatrix} m_{12}m_{21}-m_{11}m_{22} & 0 \\ \\ 0 & m_{12}m_{22}+m_{11}m_{21} \end{bmatrix}$$

$$+\tfrac{\sqrt{(z+1)^2+4}-\sqrt{(z+1)^2-4}}{D_m}\begin{bmatrix} m_{12}m_{21}+m_{11}m_{22} & m_{21} \\ \\ m_{22} & m_{12}m_{22}-m_{11}m_{21} \end{bmatrix}$$

onde

$$D_m = -\frac{1}{2}(1+z+\sqrt{(1+z)^2-4})(1+z+\sqrt{(1+z)^2+4})\det M$$

.

É importante referir neste momento que o exemplo escolhido por nós não pertence a nenhum dos casos estudados por A.J. Durán no trabalho **[16]** e também não pode ser reduzido as esses casos através do método apresentado por H. Dette e seus colaboradores no trabalho **[12]**. Assim, este exemplo motiva-nos a estudar o comportamento assimptótico do quociente entre dois polinómios consecutivos de uma sucessão de polinómios pertencente à classe Nevai generalizada.

De agora em diante e sem perda de generalidade consideremos que a sucessão de polinómios matriciais definida por (IV.4) satisfaz $V_0(z) = I_{N\times N}$.

Antes de apresentar o resultado assimptótico necessitamos de introduzir o seguinte resultado auxiliar:

LEMA IV.1. *Seja $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais pertencente à classe Nevai generalizada $M(A,B,C)$. Então existe uma constante positiva M, que não depende de m, tal que $x_{m,k}$ está contido no disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < M\}$, para qualquer $x_{m,k}$ zero de V_m.*

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a matriz Jacobi J, definida por (IV.1), associada à relação de recorrência (IV.4). Relembre-se também, que os zeros de V_m são os valores próprios de J_m onde J_m é a matriz por blocos truncada de J, de dimensão $mN \times mN$.

Tendo em consideração que as sucessões $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergem e, utilizando, o teorema do disco de Gershgorin para a localização de valores próprios, tem-se que existe $M > 0$ tal que se $x_{m,k}$ é um zero de V_m então $x_{m,k} \in D$ onde $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < M\}$. Logo, Γ definido por

$$\Gamma = \cap_{N\geq 0} M_N,$$

onde $M_N = \overline{\cup_{n\geq N}\{\text{zeros of } V_m\}}$, está contido em D, e $\operatorname{supp}(W) \subset \Gamma \subset D$. □

Estão então, reunidas as condições necessárias, para enunciar e provar o teorema que estabelece o comportamento assimptótico de polinómios ortogonais matriciais consecutivos na classe Nevai generalizada $M(A,B,C)$, com A e C não-singulares. A técnica utilizada para provar este resultado é similar à técnica utilizada por A.J. Durán no trabalho [**16**].

TEOREMA IV.3. *Seja $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios matriciais ortogonais à esquerda relativamente à função de Markov generalizada $\mathcal{F}$. Assumindo que se tem $\lim_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim_{m\to\infty} B_m = B$, $\lim_{m\to\infty} C_m = C$ e que A e C são matrizes não-singulares. Então,*

$$\lim_{m\to\infty} V_{m-1}(z)V_m^{-1}(z)A_{m-1}^{-1} = \mathcal{F}_{A,B,C}(z), \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma,$$

onde $\mathcal{F}_{A,B,C}$ é matriz de medidas para os polinómios matriciais de Chebyshev de segunda espécie generalizados. Além disso, a convergência é uniforme para z pertencente a um subconjunto compacto de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, onde $\Gamma = \cap_{N\geq 0} M_N$, $M_N = \overline{\cup_{m\geq N}\Delta_m}$, com Δ_m o subconjunto dos zeros V_m

Demonstração. Primeiro, consideramos a sucessão de medidas matriciais discretas $\{\mu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$\mu_m = \sum_{k=1}^{s} V_{m-1}(h(y_{m,k}))\Gamma_{m,k}G_{m-1}(h(y_{m,k}))\,\delta_{y_{m,k}}, \quad m \geq 0,$$

onde os $y_{m,k}$ são números complexos tais que $h(y_{m,k}) = x_{m,k}$, com $x_{m,k}$, $k = 1,\ldots,s$ os zeros do polinómio V_m e onde a matriz $\Gamma_{m,k}$ é dada por

$$\Gamma_{m,k} = \frac{l_k(\mathrm{adj}\,(V_m(x)))^{(l_k-1)}(x_{m,k})\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(x_{m,k})}{(\det\,(V_m(x)))^{(l_k)}(x_{m,k})},\ k = 1,\ldots,s,$$

sendo l_k a multiplicidade de $x_{m,k}$ ($l_k \leq N$) e $\{\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios associados de primeira espécie a $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e a $\mathcal{U}$. Observe-se que a matriz $\Gamma_{m,k}$ é a matriz que aparece na fórmula de quadratura apresentada no teorema IV.1. Da fórmula de quadratura resulta ainda que

$$\int d\mu_m(h(x)) = I_{N\times N}, \quad \text{para} \quad m \geq 0.$$

A decomposição

$$V_{m-1}(z)V_m^{-1}(z) = \sum_{k=0}^{s} C_{m,k}\frac{1}{z-x_{m,k}},$$

é sempre possível mesmo que os zeros sejam números complexos ou possam ter multiplicidade superior a um (cf. [**6, 15**]). é claro que, as matrizes $C_{m,k}$ são da forma

$$C_{m,k} = \frac{l_kV_{m-1}(x_{m,k})(\mathrm{adj}\,(V_m(t)))^{(l_k-1)}(x_{m,k})}{(\det\,(V_m(t)))^{(l_k)}(x_{m,k})}.$$

Assim sendo,

$$C_{m,k}A^{-1}_{m-1} = \frac{l_kV_{m-1}(x_{m,k})(\mathrm{adj}\,(V_m(t)))^{(l_k-1)}(x_{m,k})A^{-1}_{m-1}C_m}{(\det\,(V_m(t)))^{(l_k)}(x_{m,k})}.$$

Da fórmula de Liouville-Ostrogradski apresentada no teorema III.12, resulta que

$$\begin{aligned} C_{m,k}A^{-1}_{m-1} = {} & \frac{l_kV_{m-1}(x_{m,k})(\mathrm{adj}\,(V_m(t)))^{(l_k-1)}(x_{m,k})}{(\det\,(V_m(t)))^{(l_k)}(x_{m,k})} \\ & \times\left(\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(x_{m,k})G_{m-1}(x_{m,k}) - V_m(x_{m,k})G^{(1)}_{m-2}(x_{m,k})\right). \end{aligned}$$

Como do lema I.2 se tem que para qualquer $\mathbf{a}$, zero do polinómio matricial V_m,

$$V_m(\mathbf{a})\,(\mathrm{adj}\,(V_m(t)))^{(p-1)}(\mathbf{a}) = (\mathrm{adj}\,(V_m(t)))^{(p-1)}(\mathbf{a})V_m(\mathbf{a}) = 0_{N\times N}, \qquad \text{(IV.7)}$$

obtemos

$$\begin{aligned} C_{m,k}A^{-1}_{m-1} &= \frac{l_kV_{m-1}(x_{m,k})(\mathrm{adj}\,(V_m(t)))^{(l_k-1)}(x_{m,k})}{(\det\,(V_m(t)))^{(l_k)}(x_{m,k})}\mathcal{B}^{(1)}_{m-1}(x_{m,k})G_{m-1}(x_{m,k}) \\ &= V_{m-1}(h(y_{m,k}))\Gamma_{m,k}G_{m-1}(h(y_{m,k})). \end{aligned}$$

Pela definição de μ_m concluímos que

$$V_{m-1}(z)V_m^{-1}(z)A_{m-1}^{-1} = \int \frac{d\mu_m(h(x))}{z-h(x)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma.$$

Consideremos então, os polinómios de Chebyshev de segunda espécie generalizados $\{U_m^{A,B,C}\}_{m\in\mathbb{N}}$ definidos por (IV.5). Prova-se por indução que

$$\lim_{m\to\infty} \int U_l^{A,B,C}(h(t))d\mu_m(h(t)) = \begin{cases} I_{N\times N}, & \text{para } l = 0; \\ 0_{N\times N}, & \text{para } l \neq 0. \end{cases} \tag{IV.8}$$

De acordo com a definição da matriz de medidas μ_m, temos que

$$\int U_l^{A,B,C}(h(t))d\mu_m(h(t)) = \sum_{k=1}^{s} U_l^{A,B,C}(h(t))(h(y_{m,k}))V_{m-1}(h(y_{m,k}))\Gamma_{m,k}G_{m-1}(h(y_{m,k})). \tag{IV.9}$$

Podemos escrever

$$U_l^{A,B,C}(t)V_{m-1}(t) = S_{l,m}(t)V_m(t) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_{i,l,m}V_{m-i}(t), \tag{IV.10}$$

onde $S_{l,m}(t)$ é uma matriz de grau no máximo $l-1$ e onde $\Delta_{i,l,m}$, $i = 1, \ldots, m$, são matrizes numéricas. Então, de (IV.9) e (IV.10), temos que

$$\begin{aligned} \int U_l^{A,B,C}(h(t))d\mu_m(h(t)) &= \sum_{k=1}^{s}\left(S_{l,m}(h(y_{m,k}))V_m(h(y_{m,k})) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_{i,l,m}V_{m-i}(h(y_{m,k}))\right) \\ &\times \Gamma_{m,k}G_{m-1}(h(y_{m,k})). \end{aligned}$$

Novamente, pela definição dos $\Gamma_{m,k}$ e (IV.7), tem-se que,

$$\int U_l^{A,B,C}(h(t))d\mu_m(h(t)) = \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{m} \Delta_{i,l,m}V_{m-i}(h(y_{m,k}))\right)\Gamma_{m,k}G_{m-1}(h(y_{m,k})).$$

Como $2m-1-i \leq 2m-1$, para $i = 1, \ldots, m$, pela fórmula de quadratura para V_m tem-se que

$$\begin{aligned} \int U_l^{A,B,C}(h(t))d\mu_m(h(t)) &= \sum_{i=1}^{m} \int \Delta_{i,l,m}V_{m-i}(h(t))dW(h(t))G_{m-1}(h(t)) \\ &= \Delta_{1,l,m}. \end{aligned}$$

O passo seguinte consiste em provar que

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_{k,l,m} = \begin{cases} I_{N\times N}, & \text{para } k = l+1; \\ 0_{N\times N}, & \text{para } k \neq l+1. \end{cases}$$

Para tal, usamos indução em l. Quando $l = 0$ o resultado é imediato já que se tem $\Delta_{1,0,m} = I_{N\times N}$ e $\Delta_{i,0,m} = 0_{N\times N}$, para $i \neq 1$. Agora, suponhamos que este resultado é válido até l e provemos que também é válido para $l+1$. A relação de recorrência para $\{U_m^{A,B,C}\}_{m\in\mathbb{N}}$ dá-nos

$$U_{l+1}^{A,B,C}V_{m-1}(t) = (C^{-1}tU_l^{A,B,C}(t) - C^{-1}BU_l^{A,B,C}(t) - C^{-1}AU_{l-1}^{A,B,C}(t))V_{m-1}(t).$$

Da fórmula (IV.10) e da relação de recorrência a três termos satisfeita pela sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, vem que

$$\begin{aligned}\Delta_{k,l+1,m} = C^{-1}(\Delta_{k,l,m}B_{m-k} + \Delta_{k-1,l,m}C_{m-k+1} + \Delta_{k+1,l,m}A_{m-1-k})\\ -C^{-1}B\Delta_{k,l,m} - C^{-1}A\Delta_{k,l-1,m}.\end{aligned}$$

Para $k \geq l+3$ e $k \leq l-1$, a hipótese de indução mostra que $\lim_{m\to\infty} \Delta_{k,l+1,m} = 0_{N\times N}$. Para $k = l, l+1, l+2$, da hipótese de indução e tomando em consideração que $\lim_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim_{m\to\infty} B_m = B$ e $\lim_{m\to\infty} C_m = C$, sai respectivamente que

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_{l,l+1,m} = C^{-1}A - C^{-1}A = 0_{N\times N},$$

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_{l+1,l+1,m} = C^{-1}B - C^{-1}B = 0_{N\times N},$$

e

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_{l+2,l+1,m} = C^{-1}C = I_{N\times N}$$

Estamos agora em condições de provar que

$$\lim_{m\to\infty} \int \frac{d\mu_m(h(x))}{z - h(x)} = \mathcal{F}_{A,B,C}(z), \quad z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma.$$

Caso contrário, conseguimos encontrar um número complexo $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$, e uma sucessão crescente de números inteiros não negativos $\{n_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, e uma constante positiva C tal que

$$\left\| \int \frac{d\mu_{n_l}(h(x))}{z-h(x)} - \mathcal{F}_{A,B,C}(z) \right\|_2 \geq C > 0, \ l \geq 0, \tag{IV.11}$$

onde escrevemos $\|\,.\,\|_2$ para a norma espectral de uma matriz.

Como $\{\mu_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de matrizes de medidas com suporte contido no disco D (ver lema IV.1), e recordando que $\int d\mu_m = I_{N\times N}$, obtemos, usando o teorema de Banach-Alaoglu, que a subsucessão $\{r_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ de $\{n_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, definida numa curva γ_M contida no disco D, com os mesmos k-ésimos momentos que a funcional vectorial $\mathcal{U}$, para $k \leq 2r_l - 1$, é tal que

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\gamma_M} f(h(x))d\mu_{r_l}(h(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_M} f(h(z))\mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right)dz,$$

para qualquer função matricial continua f definida em D.

Logo, tomando $f(h(x)) = U^{A,B,C}(h(x))$, temos que

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\gamma_M} U_l^{A,B,C}(h(x))d\mu_{r_l}(h(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_M} U_l^{A,B,C}(h(z))\mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right).$$

Por (IV.8) temos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_M} U_l^{A,B,C}(h(z))\mathcal{U}_x\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z-h(x)}\right) = \begin{cases} I_{N\times N}, & \text{para } l=0; \\ 0_{N\times N}, & \text{para } l\neq 0. \end{cases}$$

Mas, a sucessão de polinómios matriciais $\{U_m^{A,B,C}\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal relativamente a $\mathcal{F}_{A,B,C}$. Logo, $\{U_m^{A,B,C}\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma base para o espaço dos polinómios matriciais obtendo assim que (IV.11) é impossível.

Cada uma das entradas da matriz $\displaystyle\int \frac{d\mu_m(h(x))}{z-h(x)}$ é uniformemente limitada sobre conjuntos compactos de $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Assim, aplicando o Teorema de Stieltjes-Vitali, obtemos a convergência uniforme. $\square$

3. Modificações por Deltas funcionais

Nesta secção apresentamos o conceito de uma funcional vectorial que resulta de uma modificação por uma *funcional Delta* e veremos como este conceito está relacionado com os produtos internos de Sobolev discretos. Com uma aplicação ilustraremos como interpretar os produtos internos de Sobolev discretos na forma vectorial, que simultaneamente serve de motivação ao estudo das modificações acima citadas.

Para que melhor se compreenda o que se entende por uma funcional vectorial que resulta de uma modificação por uma *funcional Delta*, comecemos por introduzir algumas definições.

De forma genérica, podemos dizer que uma *funcional Delta* é uma funcional vectorial cujos elementos são combinações lineares de deltas de Dirac e suas derivadas em um ou mais pontos.

Se h é um polinómio fixo de grau fixo N, definido por

$$h(x) = \prod_{j=1}^{M}(x-c_j)^{M_j+1}, \tag{IV.12}$$

onde M_j+1 é multiplicidade de cada $c_j\in\mathbb{C}$ como zero de h, então podemos definir uma nova funcional vectorial, que resulta de uma modificação por uma funcional Delta relativamente a h, da seguinte forma:

DEFINIÇÃO IV.1. A funcional vectorial $\widetilde{\mathcal{U}}$ definida por

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda \boldsymbol{\delta}, \tag{IV.13}$$

onde Λ é uma matriz numérica completa de dimensão $N \times N$ e onde

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_{c_1}\, \delta'_{c_1}\, \ldots\, \delta^{(M_1)}_{c_1}\, \delta_{c_2}\, \delta'_{c_2} \ldots \delta^{(M_2)}_{c_2}\, \ldots\, \delta_{c_M}\delta'_{c_M} \ldots \delta^{(M_M)}_{c_M}]^T, \tag{IV.14}$$

sendo $N = M + \sum_{j=1}^{M} M_j$, é designada por *funcional vectorial modificada por uma funcional Delta relativamente a h.*

Observe-se que uma funcional Delta, isto é, uma funcional vectorial cujas componentes são combinações lineares de deltas de Dirac e das suas derivadas, pode sempre ser descrita pelo produto entre uma matriz numérica e um vector da forma (IV.14).

Começamos por apresentar um exemplo que motiva o estudo destas modificações. Este exemplo, estabelece uma reinterpretação vectorial para um produto de Sobolev discreto específico. Veremos mais tarde, a título de exemplo de aplicação, como podem ser reinterpretados todos os produtos de Sobolev discretos, de forma única, usando o modelo vectorial.

EXEMPLO IV.3. Consideremos o produto de Sobolev discreto

$$\langle f, g\rangle_S := \int_I fg d\mu + \lambda_{1,1} f'(0)g'(0), \quad \text{onde} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \tag{IV.15}$$

que pode ser encontrado nos trabalhos [**28**] e [**39**].

Para estabelecer o paralelismo entre a ortogonalidade vectorial e os produtos de Sobolev discretos, seja $\{\widetilde{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios ortonormais relativamente ao produto de Sobolev (IV.15), ou seja, são verificadas as seguintes condições de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{p}_n, x^k\rangle_S &= 0,\ k = 0, \ldots, n-1, \\ \langle \widetilde{p}_n, x^n\rangle_S &\neq 0. \end{aligned} \tag{IV.16}$$

Naturalmente o polinómio $h(x) = x^2$ é um operador simétrico relativamente a este produto de Sobolev, isto é,

$$\langle x^2 f, g\rangle_S = \langle f, x^2 g\rangle_S,\ \forall f,\ g \in \mathbb{P},$$

e, consequentemente, a sucessão de polinómios ortonormais $\{\widetilde{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que lhe está associada satisfaz a relação de recorrência a cinco termos

$$x^2\widetilde{p}_{n+1} = c_{n+3,2}\widetilde{p}_{n+3} + c_{n+2,1}\widetilde{p}_{n+2} + c_{n+1,0}\widetilde{p}_{n+1} + c_{n+1,1}\widetilde{p}_n + c_{n+1,2}\widetilde{p}_{n-1}, \tag{IV.17}$$

para $n \geq 0$.

Por outro lado, considerando o modelo vectorial a relação de recorrência (IV.17) admite a seguinte representação vectorial

$$x^2\widetilde{\mathcal{B}}_m(x) = \widetilde{A}_{m+1}\widetilde{\mathcal{B}}_{m+1}(x) + \widetilde{B}_m\mathcal{B}_m(x) + \widetilde{A}_m^T\mathcal{B}_{m-1}(x),\ m \geq 0$$

onde $\widetilde{\mathcal{B}}_m(x) = [\widetilde{p}_{2m}(x), \widetilde{p}_{2m+1}(x)]^T$,

$$\widetilde{A}_m = \begin{bmatrix} c_{2m,2} & 0 \\ c_{2m,1} & c_{2m+1,2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \widetilde{B}_m = \begin{bmatrix} c_{2m,0} & c_{2m+1,1} \\ c_{2m+1,1} & c_{2m+1,0} \end{bmatrix}.$$

Observe-se que $\widetilde{B}_m = \widetilde{B}_m^T$.

Então, pelo teorema II.6, existe uma funcional vectorial $\widetilde{\mathcal{U}}$ da forma

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \left[\widetilde{u}^1\ \widetilde{u}^2\right]^T,$$

tal que a sucessão de polinómios vectoriais $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda relativamente a $\widetilde{\mathcal{U}}$, satisfazendo as condições de ortogonalidade

$$\begin{aligned} (x^{2k}\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= 0_{2\times 2},\ k = 0, 1, ..., m-1 \\ (x^{2m}\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= \widetilde{\Delta}_m,\ m \in \mathbb{N} \end{aligned} \qquad \text{(IV.18)}$$

onde $\widetilde{\Delta}_m$ é uma matriz triangular superior não-singular.

A partir da definição II.1, as condições de ortogonalidade anteriores, são dadas explicitamente por

$$(x^{2k}\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) = \begin{bmatrix} \langle\widetilde{u}^1, x^{2k}\widetilde{p}_{2m}\rangle & \langle\widetilde{u}^2, x^{2k}\widetilde{p}_{2m}\rangle \\ \langle\widetilde{u}^1, x^{2k}\widetilde{p}_{2m+1}\rangle & \langle\widetilde{u}^2, x^{2k}\widetilde{p}_{2m+1}\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ k = 0, \ldots, m-1$$

e

$$(x^{2m}\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) = \begin{bmatrix} \langle\widetilde{u}^1, x^{2m}\widetilde{p}_{2m}\rangle & \langle\widetilde{u}^2, x^{2m}\widetilde{p}_{2m}\rangle \\ \langle\widetilde{u}^1, x^{2m}\widetilde{p}_{2m+1}\rangle & \langle\widetilde{u}^2, x^{2m}\widetilde{p}_{2m+1}\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet \end{bmatrix}.$$

A funcional vectorial $\widetilde{\mathcal{U}}$ representa o produto de Sobolev discreto (IV.15) apenas se é uma modificação por uma funcional Delta que passamos a descrever no que se segue. De facto, a funcional vectorial $\widetilde{\mathcal{U}}$ tem a seguinte representação

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda\boldsymbol{\delta} \qquad \text{(IV.19)}$$

onde

$$\mathcal{U} = [u\ xu]^T, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{1,1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = [\delta_0\ \delta_0']^T,$$

e onde u é uma funcional linear que actua sobre o espaço linear dos polinómios $\mathbb{P}$ da seguinte forma

$$u(p(x)) = \int_I p(x)\, d\mu(x),$$

onde μ é a função peso que aparece no produto de Sobolev discreto (IV.15).

Agora, temos que ilustrar que as condições de ortogonalidade (IV.16) e (IV.18) são equivalentes:

Primeiro, tomemos $k = 0$, em (IV.18)

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{U}}\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= \begin{bmatrix} \langle 1, \widetilde{p}_{2m}\rangle_S & \langle x, \widetilde{p}_{2m}\rangle_S \\ \langle 1, \widetilde{p}_{2m+1}\rangle_S & \langle x, \widetilde{p}_{2m+1}\rangle_S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

em seguida $k = 1, \dots m-1$,

$$\begin{aligned} (x^{2k}\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= \begin{bmatrix} \langle x^{2k}, \widetilde{p}_{2m}\rangle_S & \langle x^{2k+1}, \widetilde{p}_{2m}\rangle_S \\ \langle x^{2k}, \widetilde{p}_{2m+1}\rangle_S & \langle x^{2k+1}, \widetilde{p}_{2m+1}\rangle_S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Finalmente tomando $k = m$, tem-se que

$$\begin{aligned} (x^{2m}\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= \begin{bmatrix} \langle x^{2m}, \widetilde{p}_{2m}\rangle_S & \langle x^{2m+1}, \widetilde{p}_{2m}\rangle_S \\ \langle x^{2m}, \widetilde{p}_{2m+1}\rangle_S & \langle x^{2m+1}, \widetilde{p}_{2m+1}\rangle_S \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \neq 0 & \bullet \\ 0 & \neq 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, as anteriores igualdades ilustram que as condições de ortogonalidade (IV.16) e (IV.18) são equivalentes. Isto significa que o produto de Sobolev discreto (IV.15) está perfeitamente representado na forma vectorial por (IV.19).

Motivados por este exemplo a primeira questão que se coloca consiste em saber quando é que $\widetilde{\mathcal{U}}$ definido por (IV.13) é quasi-definida, isto é, quando é que existe uma sucessão de polinómios vectoriais $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ortogonais à esquerda relativamente a $\widetilde{\mathcal{U}}$. Assim, o primeiro passo é obter condições necessárias e suficientes para que $\widetilde{\mathcal{U}}$ seja quasi-definida. As condições que iremos obter, no caso do exemplo apresentado, são as encontradas por F. Marcellán e colaboradores em [**28**].

No que se segue, denotaremos por $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios vectoriais ortogonais à esquerda relativamente a $\mathcal{U}$ e $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios associada a $\widetilde{\mathcal{U}}$, isto é, a sucessão de polinómios vectoriais que satisfaz

$$\widetilde{\mathcal{U}}\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) = 0_{N\times N},\ m \geq 1 \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{U}}\left(\widetilde{\mathcal{B}}_0\right) \text{ é uma matriz não-singular.} \tag{IV.20}$$

Para além disso, à semelhança do apresentado anteriormente, denotaremos por $\{\widetilde{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios matriciais tal que

$$\widetilde{\mathcal{B}}_m(x) = \widetilde{V}_m(h(x))\mathcal{P}_0(x),$$

com $\mathcal{P}_0(x) = \left[1\, x\, \ldots\, x^{N-1}\right]^T$.

Antes de enunciarmos e provarmos quais são as condições para que $\widetilde{\mathcal{U}}$ seja quasi--definida, apresentamos o seguinte resultado auxiliar.

LEMA IV.2. *Seja* $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de polinómios vectoriais ortogonais à esquerda relativamente à funcional vectorial* $\mathcal{U}$ *e* $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de polinómios vectoriais associada, no sentido de* (IV.20), *à funcional vectorial* $\widetilde{\mathcal{U}}$ *definida por* (IV.13). *Então,*

$$\begin{aligned}(h^k\widetilde{\mathcal{U}})(\mathcal{B}_m) &= (h^k\mathcal{U})(\mathcal{B}_m) = 0_{N\times N},\ k \geq 1,\\ (h^k\widetilde{\mathcal{U}})(\widetilde{\mathcal{B}}_m) &= (h^k\mathcal{U})(\widetilde{\mathcal{B}}_m),\ k \geq 1.\end{aligned} \tag{IV.21}$$

DEMONSTRAÇÃO. A prova deste resultado é trivial. Basta ter em consideração o facto de, que para qualquer polinómio vectorial $\mathcal{P} \in \mathbb{P}^N$, se tem

$$(h^k\boldsymbol{\delta})(\mathcal{P}) = 0_{N\times N}, \quad \text{para} \quad k \geq 1,$$

obtendo de imediato as igualdades. □

O próximo teorema dá-nos uma condição necessária e suficiente para a existência de uma sucessão de polinómios vectoriais ortogonal à esquerda relativamente à funcional $\widetilde{\mathcal{U}}$ quando esta é definida por (IV.13).

Na extensa literatura sobre sucessões de polinómios ortogonais relativamente a um produto interno de Sobolev discreto (cf. [**1, 2, 3, 20, 27, 28, 29, 30, 35, 36, 38, 39**]) o leitor poderá encontrar as mesmas condições que se obtêm no seguinte resultado.

TEOREMA IV.4. *Seja* $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de polinómios vectoriais ortogonais à esquerda relativamente à funcional vectorial* $\mathcal{U}$, $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *a sucessão de polinómios vectoriais associada, no sentido* (IV.20), *à funcional vectorial* $\widetilde{\mathcal{U}}$ *definida por* (IV.13). *A funcional* $\widetilde{\mathcal{U}}$ *é quasi-definida se, e somente se,* Λ *é tal que*

$$I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l, c_l),\ m \in \mathbb{N}$$

é uma matriz não-singular para qualquer c_l*, zero de* h*, definido por* (IV.12).

Demonstração. Associadas às sucessões $\{\mathcal{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ têm-se as sucessões de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\widetilde{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\mathcal{B}_m(z) = V_m(h(z))\mathcal{P}_0(z) \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathcal{B}}_m(z) = \widetilde{V}_m(h(z))\mathcal{P}_0(z),$$

com $\mathcal{P}_0(z) = \left[1\, z\, \ldots\, z^{N-1}\right]^T$. Utilizando a propriedade (III.17) do núcleo, tem-se que

$$V_m(h(x)) = (K^T_{m+1}(x,z)\mathcal{U}_z)(\mathcal{B}_m(z)).$$

Semelhantemente, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_m(h(x)) &= (K^T_{m+1}(x,z)\mathcal{U}_z)(\widetilde{\mathcal{B}}_m(z)) \\ &= (K^T_{m+1}(x,z)\widetilde{\mathcal{U}}_z)(\widetilde{\mathcal{B}}_m(z)) - \sum_{j=0}^{m} \left(G_j^T(h(z))\Lambda\,\boldsymbol{\delta_z}\right)(\widetilde{\mathcal{B}}_m(z))V_j(h(x)),\end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{\delta_z}$ representa o vector $\boldsymbol{\delta}$ actuando na variável z. Na última equação, se analisarmos a segunda parcela do segundo membro, observamos que

$$\left(G_j^T(h(z))\Lambda\,\boldsymbol{\delta_z}\right)(\widetilde{V}_m(h(z))\mathcal{P}_0(z)) = \left(G_j^T(h(c_l))\Lambda\,\boldsymbol{\delta_z}\right)(\widetilde{V}_m(h(z))\mathcal{P}_0(z)),$$

com $(\beta_k^j)^T \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ para qualquer c_l, zero do polinómio h, independentemente da sua multiplicidade. Então,

$$\sum_{j=0}^{m}(G_j^T(h(z))\Lambda\,\boldsymbol{\delta_z})(\widetilde{\mathcal{B}}_m(z))V_j(h(x)) = \widetilde{V}_m(h(c_l))\sum_{j=0}^{m}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T G_j(h(c_l))V_j(h(x)).$$

Agora, para analisar a expressão $(K^T_{m+1}(z,x)\widetilde{\mathcal{U}}_z)(\widetilde{\mathcal{B}}_m(z))$ usamos a definição do núcleo $K_m(x,z) = \sum_{j=0}^{m-1} G_j(h(z))V_j(h(x))$ e consideramos a representação para G_m, $G_m(h(x)) = \sum_{k=0}^{m}\beta_k^m(h(x))^k$, $\beta_k^m \in \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$. Então, temos

$$(K^T_{m+1}(x,z)\widetilde{\mathcal{U}}_z)(\widetilde{\mathcal{B}}_m(z)) = \sum_{j=0}^{m}[(\sum_{k=0}^{j}(h(x))^k\widetilde{\mathcal{U}}_z)(\widetilde{\mathcal{B}}_m(z))\beta_k^j]V_j(h(x)).$$

Logo,

$$(K^T_{m+1}(x,z)\widetilde{\mathcal{U}}_z)(\widetilde{\mathcal{B}}_m(z)) = \widetilde{\Delta}_m\beta_m^m V_m(h(x))$$

se, e somente se, $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda relativamente a $\widetilde{\mathcal{U}}_z$, satisfazendo as condições de ortogonalidade

$$\begin{aligned}(h^k\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= 0_{N\times N},\ k = 0,1,...,m-1; \\ (h^m\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= \widetilde{\Delta}_m,\ m\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

onde $\widetilde{\Delta}_m$ é uma matriz não-singular.

Assim, tem-se que

$$\widetilde{V}_m(h(x)) = D_m V_m(h(x)) - \widetilde{V}_m(h(c_l))\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(x, c_l), \qquad \text{(IV.22)}$$

onde $D_m = \widetilde{\Delta}_m \beta_m^m$ é uma matriz não-singular. Fazendo $x = c_l$, obtém-se

$$\widetilde{V}_m(h(c_l)) = D_m V_m(h(c_l)) - \widetilde{V}_m(h(c_l))\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l, c_l),$$

ou seja,

$$\widetilde{V}_m(h(c_l))(I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l, c_l)) = D_m V_m(h(c_l)).$$

$\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é completamente determinado pelos dados se, e somente se,

$$I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l, c_l),$$

é uma matriz não-singular para qualquer c_l zero de h, independentemente da sua multiplicidade, com $m \geq 0$. □

Em seguida, iremos ilustrar como o modelo vectorial que envolve modificações por meio de uma funcional Delta descreve completamente qualquer produto de Sobolev discreto. O estudo de sucessões de polinómios ortogonais relativamente a um produto de Sobolev discreto tem sido realizado de forma intensa mas sempre de forma parcial, isto é, sendo estudado cada tipo de produto de Sobolev, individualmente. De facto, já foram estudadas diferentes sucessões de polinómios ortogonais relativamente a diferentes produtos de Sobolev discretos, mas tendo sempre em consideração a medida contínua nele envolvida.

Por exemplo, F. Marcellán e A. Ronveaux em [**30**], H. Bavinck e H.G. Meijer em [**5**] e M. Alfaro e colaboradores em [**1**] estudam o caso definido positivo. Nesses trabalhos podemos encontrar propriedades algébricas destes polinómios ortogonais, resultados sobre a distribuição de zeros e exemplos de aplicação. No entanto, a medida contínua envolvida no produto interno em causa é sempre particularizada.

Na procura de um caso mais geral, F. Marcellán, T. Pérez e M. Piñar apresentam no trabalho [**28**], um estudo sobre a forma bilinear simétrica

$$\varphi(p, q) = \langle p, q\rangle + \lambda p'(c)q'(c)$$

onde λ e c são números reais e p e q polinómios. Neste trabalho, apresentam condições necessárias e suficientes para a existência de uma sucessão polinómios ortogonais relativamente a φ. Para além disso, os autores apresentam ainda um exemplo não trivial considerando a funcional associada aos polinómios de Bessel.

A estrutura vectorial por nós estabelecida, permitirá então, descrever os produtos internos de Sobolev de uma forma unificadora bem como, caracterizar as correspondentes sucessões de polinómios associadas.

Na verdade, a primeira tentativa de unificar o estudo sobre os polinómios de Sobolev discretos aparece no trabalho [**14**] de A.J. Durán e W. Van Assche, ao qual fizemos referência no primeiro capítulo. Acontece que, a medida matricial de ortogonalidade descrita no trabalho [**14**], é de difícil manuseamento. A vantagem da estrutura vectorial por nós estabelecida é que esta permite visualizar de uma forma quase intuitiva qual a funcional vectorial a considerar quando se pretende descrever cada produto de Sobolev discreto.

Assim, veremos em seguida como podemos descrever, um por um, os produtos internos de Sobolev discretos mais trabalhados ao longo dos anos.

Na verdade, uma funcional vectorial $\widetilde{\mathcal{U}}$ definida por

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda\,\boldsymbol{\delta}, \tag{IV.23}$$

onde Λ é uma matriz numérica completa de dimensão $N \times N$ e

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_{c_1}\,\delta'_{c_1}\,\ldots\,\delta^{(M_1)}_{c_1}\;\delta_{c_2}\,\delta'_{c_2}\ldots\,\delta^{(M_2)}_{c_2}\;\ldots\;\delta_{c_M}\delta'_{c_M}\ldots\delta^{(M_M)}_{c_M}]^T, \tag{IV.24}$$

com $N = M + \sum_{j=1}^{M} M_j$, representa sempre um produto de Sobolev discreto da forma

$$\langle f, g\rangle_S = \int_I f(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{M_j} \lambda_{j,i} f^{(i)}(c_j)g^{(i)}(c_j), \tag{IV.25}$$

onde f e g são polinómios, $\lambda_{j,i} \geq 0$ e $N = M + \sum_{j=1}^{M} M_j$ sempre que $\mathcal{U}$ esteja bem representada e seja quasi-definida.

Observe-se que, a derivada é calculada em M pontos c_j e que, no ponto c_j, a derivada de maior ordem é de ordem M_j e que o polinómio h da forma

$$h(x) = \prod_{j=1}^{M}(x-c_j)^{M_j+1},$$

cujo grau é N e cujos zeros são os pontos c_j onde as derivadas no produto interno são calculadas é tal que

$$\langle hf, g\rangle_S = \langle f, hg\rangle_S,\ \forall f,\ g \in \mathbb{P}.$$

Assim, se $\{\widetilde{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão de polinómios ortonormais relativamente ao produto de Sobolev discreto (IV.25) então $\{\widetilde{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz a relação de recorrência da forma

$$h(x)\widetilde{p}_n(x) = c_{n,0}\widetilde{p}_n(x) + \sum_{k=1}^{N}\left[c_{n,k}\widetilde{p}_{n-k}(x) + c_{n+k,k}\widetilde{p}_{n+k}(x)\right],$$

com p_i, $i = 0, \ldots, N-1$, condições iniciais. Esta relação de recorrência, é um caso particular da relação de recorrência a $(2N+1)-$termos (I.14) e admite a seguinte reinterpretação vectorial

$$h(x)\widetilde{\mathcal{B}}_m(x) = \widetilde{A}_m\widetilde{\mathcal{B}}_{m+1}(x) + \widetilde{B}_m\widetilde{\mathcal{B}}_m(x) + \widetilde{A}_m^T\widetilde{\mathcal{B}}_{m-1}(x),$$

onde $\widetilde{B}_m$ é hermitiana e $\widetilde{\mathcal{B}}_m$ é definido por

$$\widetilde{\mathcal{B}}_m(x) = \left[\widetilde{p}_{mN}(x)\, \widetilde{p}_{mN+1}(x)\, \ldots\, \widetilde{p}_{(m+1)N-1}(x)\right]^T.$$

Então, pelo teorema II.6, existe uma funcional vectorial $\widetilde{\mathcal{U}}$ à qual a sucessão de polinómios vectoriais $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda de forma que satisfaz as condições de ortogonalidade

$$\begin{aligned}(h^k\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= 0_{N\times N}, \quad k = 0, 1, ..., m-1,\\ (h^m\widetilde{\mathcal{U}})\left(\widetilde{\mathcal{B}}_m\right) &= \widetilde{\Delta}_m, \quad m \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

onde $\widetilde{\Delta}_m$ é uma matriz triangular superior não-singular. Estamos então, em condições de estabelecer o seguinte teorema:

Teorema IV.5. *Seja $\widetilde{\mathcal{U}}$ uma funcional vectorial linear tal que*

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda\boldsymbol{\delta},$$

onde

$$\mathcal{U} = \left[u\, xu\, \ldots\, x^{N-1}u\right]^T, \quad \boldsymbol{\delta} = [\delta_{c_1}\, \delta'_{c_1}\, \ldots\, \delta_{c_1}^{(M_1)}\, \delta_{c_2}\, \delta'_{c_2} \ldots \delta_{c_2}^{(M_2)}\, \ldots\, \delta_{c_M}\delta'_{c_M} \ldots \delta_{c_M}^{(M_M)}]^T$$

e Λ é uma matriz de dimensão $N \times N$, com $N = M + \sum_{j=1}^{M} M_j$.

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) *A sucessão de polinómios ortogonais vectoriais $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é ortogonal à esquerda relativamente a $\widetilde{\mathcal{U}}$.*

(b) *A sucessão de polinómios escalares $\{\widetilde{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é ortogonal relativamente ao produto discreto de Sobolev*

$$\langle f, g\rangle_S = \int_I f(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{M_j}\lambda_{j,i}f^{(i)}(c_j)g^{(i)}(c_j), \qquad \text{(IV.26)}$$

onde f, g são polinómios e $\lambda_{j,i} \geq 0$.

Demonstração. A demonstração é imediata tendo em conta as considerações anteriores, as condições de ortogonalidade e a estrutura adequada para a matriz Λ. $\square$

O seguinte exemplo serve então para ilustrar como têm de ser escolhidos Λ e $\boldsymbol{\delta}$ no teorema anterior, para que a estrutura vectorial apresentada represente um determinado produto de Sobolev discreto.

Exemplo IV.4. Consideremos os seguintes produtos de Sobolev discretos:

(a) Estamos na presença de um produto de Sobolev em que as derivadas são calculadas no mesmo ponto $c = 0$, isto é, $c_j = c = 0$, com $j = 1, \ldots, M$. Assim, ao tomar o caso $M = 1$ e $M_j = N - 1$, obtém-se o seguinte produto interno de Sobolev discreto

$$\langle f, g \rangle_S = \int_I f(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{1,i} f^{(i)}(0)g^{(i)}(0),$$

com $h(x) = x^N$ como polinómio correspondente.

A funcional vectorial que representa este produto de Sobolev é dada por

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda \boldsymbol{\delta},$$

onde $\mathcal{U} = \left[u \, xu \, \ldots \, x^{N-1}u\right]^T$, $\boldsymbol{\delta} = \left[\delta_0 \, \delta_0' \, \ldots \, \delta_0^{N-1}\right]^T$ e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{1,0} & & & \\ & -\lambda_{1,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{N-1}(N-1)!\lambda_{1,N-1} \end{bmatrix}.$$

(b) Estamos na presença de um produto de Sobolev em que as derivadas são calculadas no mesmo ponto c, isto é, $c_j = c$, $j = 1, \ldots, M$. Assim, ao tomar o caso $M = 1$ e $M_j = N-1$, obtém-se o seguinte produto interno de Sobolev discreto

$$\langle f, g \rangle_S = \int_I f(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{1,i} f^{(i)}(c)g^{(i)}(c),$$

com $h(x) = (x - c)^N$ como polinómio correspondente.

A funcional vectorial que representa este produto de Sobolev é dada por

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda \boldsymbol{\delta},$$

onde $\mathcal{U} = \left[u\, xu\, \ldots\, x^{N-1}u\right]^T$, $\boldsymbol{\delta} = \left[\delta_c\, \delta_c'\, \ldots\, \delta_c^{(N-1)}\right]^T$ e

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{1,0} & & & & \\ c\lambda_{1,0} & -\lambda_{1,1} & & & \\ c^2\lambda_{1,0} & -2c\lambda_{1,1} & 2\lambda_{1,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c^{N-1}\lambda_{1,0} & -(N-1)c^{N-2}\lambda_{1,1} & (N-1)(N-2)c^{N-3}\lambda_{1,2} & \ldots & (-1)^{N-1}(N-1)!\lambda_{1,N-1} \end{bmatrix}.$$

(c) Estamos na presença de um produto em que adicionamos N pontos massa distintos, c_j, $j = 1, \ldots, N$ (extensão do caso Nevai, que por abuso de linguagem englobamos nos produtos de Sobolev discretos). Assim, ao tomamos o caso $M = N$ e, necessariamente, $M_j = 0$, $j = 1, \ldots, N$, obtemos o seguinte produto

$$\langle f, g\rangle_S = \int_I f(x)g(x)d\mu(x) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{j,0} f(c_j)g(c_j),$$

com $h(x) = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_N)$ como polinómio correspondente.

A funcional vectorial que representa este produto é dada por

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda\boldsymbol{\delta},$$

onde $\mathcal{U} = \left[u\, xu\, \ldots\, x^{N-1}u\right]^T$, $\boldsymbol{\delta} = [\delta_{c_1}\, \delta_{c_2}\, \ldots\, \delta_{c_N}]^T$

$$\text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{1,0} & \lambda_{2,0} & \lambda_{3,0} & \ldots & \lambda_{N,0} \\ c_1\lambda_{1,0} & c_2\lambda_{2,0} & c_3\lambda_{3,0} & \ldots & c_N\lambda_{N,0} \\ c_1^2\lambda_{1,0} & c_2^2\lambda_{2,0} & c_3^2\lambda_{3,0} & \ldots & c_N^2\lambda_{N,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^{N-1}\lambda_{1,0} & c_2^{N-1}\lambda_{2,0} & c_3^{N-1}\lambda_{3,0} & \ldots & c_N^{N-1}\lambda_{N,0} \end{bmatrix}.$$

(d) Estamos na presença de um produto escalar de Sobolev discreto da forma

$$\langle f, g\rangle_S = \int_I f(x)g(x)d\mu(x) + \lambda_{1,0}f(c_1)g(c_1) + \lambda_{1,1}f'(c_1)g'(c_1) + \lambda_{2,0}f(c_2)g(c_2).$$

Neste caso tomamos $M = 2$, $M_1 = 1$, $M_2 = 0$ e $h(x) = (x - c_1)^2(x - c_2)$ como polinómio correspondente.

A funcional vectorial que representa este produto de Sobolev é dada por

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda\boldsymbol{\delta},$$

onde $\mathcal{U} = [u\, xu\, x^2u]^T$, $\boldsymbol{\delta} = \left[\delta_{c_1}\, \delta_{c_1}'\, \delta_{c_2}\right]^T$ e $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{1,0} & 0 & \lambda_{2,0} \\ c_1\lambda_{1,0} & -\lambda_{1,1} & c_2\lambda_{2,0} \\ c_1^2\lambda_{1,0} & -2c_1\lambda_{1,1} & c_2^2\lambda_{2,0} \end{bmatrix}.$

4. Assimptótica relativa

Nesta secção, iremos analisar o comportamento assimptótico relativo entre uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais pertencente à classe matricial Nevai generalizada e uma sucessão que é ortogonal relativamente a uma modificação por meio de uma funcional Delta.

Foram os trabalhos sobre pertubações na classe matricial Nevai [**45, 44**], de H.O. Yakhlef, F. Marcellán e M. Piñar, que nos inspiraram a aplicar o nosso modelo na sua reinterpretação e, simultaneamente a fazer a análise assimptótica relativa na classe Nevai generalizada.

Primeiro, iremos reinterpretar o modelo estudado pelos autores sob um ponto de vista vectorial. Segundo, iremos então, apresentar o comportamento assimptótico relativo. Antes de o fazer, devemos ainda ter em consideração alguns resultados:

A função de Markov generalizada associada à funcional $\widetilde{\mathcal{U}}$ é denotada por $\widetilde{\mathcal{F}}$, sendo esta definida na forma:

$$\widetilde{\mathcal{F}}(z) = \widetilde{\mathcal{U}}_x\left(\frac{\mathcal{P}_0(x)}{z - h(x)}\right),$$

com z tal que $|h(x)| < |z|$ e com $x \in \widetilde{\mathsf{L}}$ onde

$$\widetilde{\mathsf{L}} = \cup_{j=1,\dots,N} \operatorname{supp} \widetilde{u}_x^j.$$

Aqui, $\widetilde{\mathcal{U}}_x$ representa a acção de $\widetilde{\mathcal{U}}$ na variável x e $\mathcal{P}_0(x) = \begin{bmatrix}1\, x\, \dots\, x^{N-1}\end{bmatrix}^T$.

O seguinte resultado que relaciona a função de Markov generalizada $\widetilde{\mathcal{F}}$ com a função de Markov generalizada $\mathcal{F}$, introduzida no segundo capítulo na definição II.5.

Teorema IV.6. *Sejam $\mathcal{U}$ uma funcional vectorial quasi-definida, $\widetilde{\mathcal{U}}$ uma funcional vectorial quasi-definida dada por* (IV.13) *e h um polinómio genérico de grau fixo N. Sejam $\mathcal{F}$ e $\widetilde{\mathcal{F}}$ as funções de Markov generalizadas associadas a $\mathcal{U}$ e a $\widetilde{\mathcal{U}}$, respectivamente. Então,*

$$z\widetilde{\mathcal{F}}(z) = z\mathcal{F}(z) + \boldsymbol{\delta_x}(\mathcal{P}_0(x))\Lambda^T, \tag{IV.27}$$

com $\mathcal{P}_0(x) = \begin{bmatrix}1\, x\, \dots\, x^{N-1}\end{bmatrix}^T$ e

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_{c_1}\, \delta'_{c_1}\, \dots\, \delta^{(M_1)}_{c_1}\ \delta_{c_2}\, \delta'_{c_2} \dots \delta^{(M_2)}_{c_2}\ \dots\ \delta_{c_M} \delta'_{c_M} \dots \delta^{(M_M)}_{c_M}]^T,$$

fazendo $N = M + \sum_{j=1}^{M} M_j$.

Demonstração. Da definição de $\widetilde{\mathcal{F}}$ temos que

$$\begin{aligned} z\widetilde{\mathcal{F}}(z) &= z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\mathcal{U}}_x(h(x))^k \mathcal{P}_0(x)}{z^{k+1}} \\ &= z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{U}_x((h(x))^k\mathcal{P}_0(x)) + (\Lambda\boldsymbol{\delta_x})((h(x))^k\mathcal{P}_0(x))}{z^{k+1}} \\ &= z\mathcal{F}(z) + (\Lambda\boldsymbol{\delta_x})(\mathcal{P}_0(x)), \end{aligned}$$

obtendo-se o resultado. □

No que se segue, iremos considerar h um polinómio genérico de grau fixo N, definido por $h(x) = \prod_{j=1}^{M}(x-c_j)^{M_j+1}$ onde M_j+1 é a multiplicidade de cada $c_j \in \mathbb{N}$ como zero de h e as sucessões de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ onde $V_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j^m (h(x))^m$ e $G_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j^m (h(x))^m$. Estas sucessões são bi-ortogonais relativamente à função de Markov generalizada $\mathcal{F}$ e satisfazem as relações de recorrência (IV.4) e (II.23), respectivamente. Por outro lado, devemos ainda considerar as sucessões de polinómios matriciais $\{\widetilde{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\widetilde{G}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ onde $\widetilde{V}_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m} \widetilde{\alpha}_j^m (h(x))^m$ e $\widetilde{G}_m(h(x)) = \sum_{j=0}^{m} \widetilde{\beta}_j^m (h(x))^m$ que são bi-ortogonais relativamente a $\widetilde{\mathcal{F}}$ dada por (IV.27). O seguinte resultado apresenta como estas sucessões se encontram relacionadas:

Teorema IV.7. *Seja $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios matriciais ortogonais à esquerda relativamente a $\mathcal{F}$ e que satisfaz a relação de recorrência a três termos*

$$h(x)V_m(h(x)) = A_m V_{m+1}(h(x)) + B_m V_m(h(x)) + C_m V_{m-1}(h(x)), \quad m \geq 1.$$

Seja ainda $\{\widetilde{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ a sucessão de polinómios ortogonais à esquerda relativamente a $\widetilde{\mathcal{F}}$, definido como anteriormente. Então, as sucessões de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{\widetilde{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazem

$$h(x)\widetilde{V}_m(h(x)) = \alpha_{m+1}^1 V_{m+1}(h(x)) + \alpha_m^2 V_m(h(x)) + \alpha_{m-1}^3 V_{m-1}(h(x)). \quad \text{(IV.28)}$$

com α_{m+1}^1, α_m^2 e α_{m-1}^3 dados por:

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1}^1 &= D_m A_m - L_m \beta_0^m A_m \\ \alpha_m^2 &= D_m B_m + L_m \beta_0^{m+1} C_{m+1} \\ \alpha_{m-1}^3 &= D_m C_m, \end{aligned}$$

com $L_m = D_m V_m(h(c_j))[I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l)]^{-1}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T$ e $D_m = (\widetilde{\beta}_m^m)^{-1}\beta_m^m$.

Demonstração. Da demonstração do teorema IV.4, tem-se

$$\widetilde{V}_m(h(c_l)) = D_m V_m(h(c_l))[I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l)]^{-1}.$$

Então, (IV.22) do mesmo teorema toma a forma

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_m(h(x)) &= D_m V_m(h(x)) \\ &\quad - D_m V_m(h(c_j))[I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l)]^{-1}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(x,c_l)\end{aligned}$$

Para simplificação de cálculos, designemos por L_m, a matriz

$$L_m = D_m V_m(h(c_j))[I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l)]^{-1}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T.$$

Então,

$$\widetilde{V}_m(h(x)) = D_m V_m(h(x)) - L_m K_{m+1}(x,c_l)).$$

Utilizando a definição de núcleo, tem-se que

$$\begin{aligned}h(x)\widetilde{V}_m(h(x)) &= D_m h(x) V_m(h(x)) \\ &\quad + L_m G_{m+1}(h(c_l))C_{m+1}V_m(h(x)) - L_m G_m(h(c_l))A_m V_{m+1}(h(x)).\end{aligned}$$

Utilizando a relação de recorrência satisfeita pela sucessão de polinómios matriciais $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tem-se que

$$\begin{aligned}h(x)\widetilde{V}_m(h(x)) &= [D_m A_m - L_m G_m(h(c_l))A_m]V_{m+1}(h(x)) \\ &\quad + [D_m B_m + L_m G_{m+1}(h(c_l))C_{m+1}]V_m(h(x)) \\ &\quad + D_m C_m V_{m-1}(h(x)).\end{aligned}$$

Então, por comparação com os coeficientes em (IV.28), temos

$$\begin{aligned}\alpha^1_{m+1} &= D_m A_m - L_m G_m(h(c_l))A_m \\ \alpha^2_m &= D_m B_m + L_m G_{m+1}(h(c_l))C_{m+1} \\ \alpha^3_{m-1} &= D_m C_m,\end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar. □

Vejamos então, como reinterpretar o modelo estudado pelos autores H.O. Yakhlef, F. Marcellán e M. Piñar em termos do modelo de ortogonalidade vectorial apresentado neste trabalho. Para tal, sejam $\{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\widetilde{\mathcal{B}}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ bi-ortogonais relativamente a $\widetilde{\mathcal{U}}$, isto é,

$$\widetilde{G}^T_n(h(x))\widetilde{\mathcal{U}}(\widetilde{\mathcal{B}}_m) = I_{N\times N}\delta_{n,m}, \tag{IV.29}$$

onde $\widetilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} + \Lambda\boldsymbol{\delta}$ com Λ uma matriz numérica de dimensão $N \times N$,

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_{c_1}\, \delta'_{c_1}\, \ldots\, \delta^{(M_1)}_{c_1}\ \delta_{c_2}\, \delta'_{c_2} \ldots \delta^{(M_2)}_{c_2}\ \ldots\ \delta_{c_M}\delta'_{c_M} \ldots \delta^{(M_M)}_{c_M}]^T,$$

h é definido por (IV.12) e $\delta_{n,m}$ é o símbolo de Kronecker.

De (IV.29) temos que

$$(\widetilde{G}^T_n(h(x))(\mathcal{U} + \Lambda\,\boldsymbol{\delta_x}))(\widetilde{\mathcal{B}}_m) = (\widetilde{G}^T_n(h(x))\mathcal{U})(\widetilde{\mathcal{B}}_m) + ((\widetilde{G}_n(h(c_l)))^T\Lambda\,\boldsymbol{\delta_x})(\widetilde{\mathcal{B}}_m),$$

onde c_l é qualquer zero do polinómio h.

Mas,

$$((\widetilde{G}_n(h(c_l)))^T\Lambda\,\boldsymbol{\delta_x})(\widetilde{\mathcal{B}}_m)\widetilde{V}_m(h(c_l))\boldsymbol{\delta_x}(\mathcal{P}_0)\Lambda^T\widetilde{G}_n(h(c_l)).$$

Então, temos

$$(\widetilde{G}^T_n(h(x))(\mathcal{U} + \Lambda\,\boldsymbol{\delta_x}))(\widetilde{\mathcal{B}}_m) = (\widetilde{G}^T_n(h(x))\mathcal{U})(\widetilde{\mathcal{B}}_m) + \widetilde{V}_m(h(c_l))\boldsymbol{\delta_x}(\mathcal{P}_0)\Lambda^T\widetilde{G}_n(h(c_l)).$$

Pela bi-ortogonalidade, temos a seguinte interpretação matricial

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \widetilde{V}_m(z)\widetilde{\mathcal{F}}(z)\widetilde{G}_m(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \widetilde{V}_m(z)\mathcal{F}(z)\widetilde{G}_m(z)dz \\ + \widetilde{V}_m(h(c_l))\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T\widetilde{G}_n(h(c_l))\end{aligned}$$

de onde se obtém o mesmo modelo que o estudado por F. Marcellán, M. Piñar e H.O. Yakhlef quando escolhemos todos os zeros do polinómio h iguais a c.

Em seguida, deduzimos a assimptótica relativa de $\widetilde{V}_m(V_m)^{-1}$ quando a sucessão $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ pertence à classe matrcial Nevai generalizada. Para tal, necessitamos do seguinte lema auxiliar:

Lema IV.3. *Sejam* $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *e* $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *com* $G_m(h(x)) = \sum_{j=0}^m \beta_j^m(h(x))^j$ *sucessões de polinómios bi-ortogonais relativamente à função de Markov generalizada* $\mathcal{F}$. *Sejam também,* $\{\widetilde{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *e* $\{\widetilde{G}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *com* $\widetilde{G}_m(h(x)) = \sum_{j=0}^m \widetilde{\beta}_j^m(h(x))^j$ *sucessões de polinómios matriciais bi-ortogonais com respeito a* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *definido por* (IV.27).

Então,

$$\begin{aligned}&\left((\beta^m_m)^{-1}\widetilde{\beta}^m_m\right)\left(\widetilde{\alpha}^m_m(\alpha^m_m)^{-1}\right) = I_{N\times N} \\ &\quad - V_m(h(c_l))(I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l))^{-1}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T G_m(h(c_l))\end{aligned} \quad \text{(IV.30)}$$

onde α^m_m *e* $\widetilde{\alpha}^m_m$ *são as matrizes não-singulares que aparecem nas expansões* $V_m(h(x)) = \sum_{k=0}^m \alpha^m_k(h(x))^k$ *e* $\widetilde{V}_m(h(x)) = \sum_{k=0}^m \widetilde{\alpha}^m_k(h(x))^k$.

Demonstração. Como de (IV.22) temos que

$$\widetilde{V}_m(h(x)) = D_m V_m(h(x)) - \widetilde{V}_m(h(c_l))\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(x, c_l),$$

onde $D_m = (\widetilde{\beta}_m^m)^{-1}\beta_m^m$ (ver teorema II.13), podemos determinar o seguinte integral

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int \widetilde{V}_m(h(x))\mathcal{F}(h(x))G_m(h(x))dh(x)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int (D_m(V_m(h(x)) - V_m(h(c_l))\left(I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l, c_l)\right)^{-1}\\
&\qquad\qquad \times \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(x, c_l)))\mathcal{F}(h(x))G_m(h(x))dh(x)\\
&= D_m[I_{N\times N} - V_m(h(c_l))\left(I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l, c_l)\right)^{-1}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T G_m(h(c_l))]
\end{aligned}$$

Isto significa que,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_m^m(\alpha_m^m)^{-1} &= D_m[I_{N\times N} - V_m(h(c_l))\\
&\qquad \times \left(I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l, c_l)\right)^{-1}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T G_m(h(c_l))]
\end{aligned}$$

obtendo-se o resultado pretendido. □

Observe que, na classe matricial Nevai generalizada, o limite

$$\lim_{m\to\infty}(\beta_m^m)^{-1}\widetilde{\beta}_m^m\widetilde{\alpha}_m^m(\alpha_m^m)^{-1}$$

está perfeitamente determinado e vem dado por

$$\lim_{m\to\infty}(\beta_m^m)^{-1}\widetilde{\beta}_m^m\widetilde{\alpha}_m^m(\alpha_m^m)^{-1} = I_{N\times N} + \mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l))(\mathcal{F}'_{A,B,C}(h(c_l)))^{-1}\mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l)).$$

Se estabelecermos que

$$\Xi(c_l) = I_{N\times N} + \mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l))(\mathcal{F}'_{A,B,C}(h(c_l)))^{-1}\mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l))$$

e recordarmos que

$$\lim_{m\to\infty}\beta_m^m = \lim_{m\to\infty}(\Delta_m)^{-1} = \lim_{m\to\infty}(C_m C_{m-1}\ldots C_1\Delta_0)^{-1} = (C.C\ldots C\Delta_0)^{-1}$$

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_m^m = \lim_{m\to\infty}(\Theta_m)^{-1} = \lim_{m\to\infty}(\Theta_0 A_{-1}A_0\ldots A_m)^{-1} = (\Theta_0 A.A\ldots A)^{-1},$$

temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\widetilde{\beta}_m^m\widetilde{\alpha}_m^m &= \lim_{m\to\infty}\beta_m^m\,\Xi(c_l)\,\lim_{m\to\infty}\alpha_m^m\\
&= (C.C\ldots C\Delta_0)^{-1}\Xi(c_l)(\Theta_0 A.A\ldots A)^{-1}
\end{aligned}$$

Estamos, então, em condições de provar o seguinte resultado assimptótico. Para tal, estabelecemos que $\lim_{m\to\infty}(\beta_m^m)^{-1}\widetilde{\beta}_m^m = \Psi(c_l)$.

TEOREMA IV.8. *Seja $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de polinómios matriciais ortogonais à esquerda com respeito à função de Markov generalizada $\mathcal{F}$ e $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ e $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ as sucessões de matrizes númericas que aparecem na relação* (IV.4) *satisfazendo* $\lim_{m\to\infty} A_m = A$, $\lim_{m\to\infty} B_m = B$ e $\lim_{m\to\infty} C_m = C$. *Então, existe uma sucessão de polinómios matriciais $\{\widetilde{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ortogonal à esquerda relativamente a $\widetilde{\mathcal{F}}$ definida por*(IV.27) *tal que, para $\mathbb{C}\setminus\{\Gamma\cup\{c\}\}$, se tem*

$$\lim_{m\to\infty}\widetilde{V}_m(h(x))V_m^{-1}(h(x)) = ([\Psi(c_l)]^{-1}(I_{N\times N} - \frac{1}{h(x)-h(c_l)}I_{N\times N} \\ - [\Xi(c_l)]((\mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l)))^{-1} - (\mathcal{F}_{A,B,C}(h(x)))^{-1}), \quad \text{(IV.31)}$$

onde $\Xi(c_l) = I_{N\times N} + \mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l))(\mathcal{F}'_{A,B,C}(h(c_l)))^{-1}\mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l))$ *e c_l é um zero de h.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l)$, $m\in\mathbb{N}$ é não-singular, para qualquer c_l zero de h definido por (IV.12), temos que

$$\widetilde{V}_m(h(x)) = D_m V_m(h(x)) - \widetilde{V}_m(h(c_l))\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(x,c_l)$$

onde $\widetilde{V}_m(h(c_l)) = D_m V_m(h(c_l))\left(I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l)\right)^{-1}$ e $D_m = (\widetilde{\beta}^m_m)^{-1}\beta^m_m$. Então, multiplicando a última relação à direita por V_m^{-1}, obtemos

$$\widetilde{V}_m(h(x))V_m^{-1}(h(x)) = D_m(V_m(h(x)) - V_m(h(c_l)) \\ \times\left(I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l)\right)^{-1}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(x,c_l))V_m^{-1}(h(x))$$

Mas, da fórmula de Christoffel-Darboux, (III.8), temos que

$$K_{m+1}(x,c_l) = \frac{1}{h(x)-h(c_l)}\left[G_m(h(c_l))A_m V_{m+1}(h(x)) - G_{m+1}(h(c_l))C_{m+1}V_m(h(x))\right],$$

e então, $\widetilde{V}_m V_m^{-1}$ pode ser escrito como

$$\widetilde{V}_m(h(x))V_m^{-1}(h(x)) = D_m(I_{N\times N} - \frac{V_m(h(c_l))}{h(x)-h(c_l)} \\ \times\left(I_{N\times N} + \boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T K_{m+1}(c_l,c_l)\right)^{-1}\boldsymbol{\delta_z}(\mathcal{P}_0(z))\Lambda^T G_m(h(c_l)) \\ \times(A_m V_{m+1}(h(x))V_m^{-1}(h(x)) - G_m^{-1}(h(c_l))G_{m+1}(h(c_l))C_{m+1})$$

Usando (IV.30) na última relação, obtemos

$$\widetilde{V}_m(h(x))V_m^{-1}(h(x)) = [(\beta^m_m)^{-1}\widetilde{\beta}^m_m]^{-1}(I_{N\times N} - \frac{1}{h(x)-h(c_l)}I_{N\times N} \\ +[(\beta^m_m)^{-1}\widetilde{\beta}^m_m][\widetilde{\alpha}^m_m(\alpha^m_m)^{-1}](A_m V_{m+1}(h(x))V_m^{-1}(h(x)) - G_m^{-1}(h(c_l))G_{m+1}(h(c_l))C_{m+1})). \quad \text{(IV.32)}$$

Escrevendo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_m &= G_m^{-1}(h(c_l))G_{m+1}(h(c_l))C_{m+1} - A_m V_{m+1}(h(x))V_m^{-1}(h(x))\\ &= C_{m+1}^{-1}G_{m+1}^{-1}(h(c_l))G_m(h(c_l)) - V_m(h(x))V_{m+1}^{-1}A_m^{-1}\end{aligned}$$

(IV.32) torna-se

$$\widetilde{V}_m(h(x))V_m^{-1}(h(x)) = [(\beta_m^m)^{-1}\widetilde{\beta}_m^m]^{-1}(I_{N\times N} - \frac{1}{h(x)-h(c_l)}I_{N\times N} \\ - [(\beta_m^m)^{-1}\widetilde{\beta}_m^m][\widetilde{\alpha}_m^m(\alpha_m^m)^{-1}]\boldsymbol{E}_m) \quad \text{(IV.33)}$$

Do teorema IV.3 e o seu análogo para a sucessão de polinómios matriciais $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, temos que

$$\lim_{m\to\infty}\boldsymbol{E}_m = (\mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l)))^{-1} - (\mathcal{F}_{A,B,C}(h(x)))^{-1}.$$

Como, existe uma sucessão de polinómios matriciais $\{\widetilde{V}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{m\to\infty}(\beta_m^m)^{-1}\widetilde{\beta}_m^m = \Psi(c_l)$$

obtemos

$$\lim_{m\to\infty}\widetilde{V}_m(h(x))V_m^{-1}(h(x)) = [\Psi(c_l)]^{-1}(I_{N\times N} - \frac{1}{h(x)-h(c_l)}I_{N\times N} \\ - [\Xi(c_l)]((\mathcal{F}_{A,B,C}(h(c_l)))^{-1} - (\mathcal{F}_{A,B,C}(h(x)))^{-1}),$$

como prentendíamos demonstrar. □

Bibliografia

[1] M. Alfaro, F. Marcellán, M.L. Rezola e A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials of Sobolev-type: Algebraic properties and zeros*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 737–757.

[2] M. Alfaro, F. Marcellán e M.L. Rezola, *Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: Old and new directions*, J. Comput. App. Math. **48** (1993), 113–131.

[3] M. Alfaro e M.L. Rezola, *Ceros de polinomios ortogonales de Sobolev*, Margarita Mathematica en memoria José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández, (Luis Español y Juan L. Varona, editores). Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja (2001), 569–576.

[4] A.I. Aptekarev e E.M. Nikishin, *The scattering problem for discrete Sturm-Liouville operator*, Mat. Sb. **121** (1983), no. 163, 327–358, English transl. in Math. USSR Sb. 49 (1984), 325-355.

[5] H. Bavinck e H.G. Meijer, *On orthogonal polynomials with respect with an inner product involving derivatives:zeros and recurrence relations*, Indag. Mathem., N.S. **1** (1990), 7–14.

[6] C. Berg, *The matrix moment problem*, Coimbra Lecture Notes on Orthogonal Polynomials, A. Branquinho and A. Foulquié Editors. Nova Publishers, New York (2008), 1–57.

[7] A. Branquinho, *The Christoffel-Darboux identity for matrix orthonormal polynomials*, DMUC, The J. A. Sampaio Martins Anniversary Volume, Textos Mat. Sér. B (2004), no. 34, 33–36.

[8] A. Branquinho, F. Marcellán e A. Mendes, *Relative asymptotics for orthogonal matrix polynomials*, (em preparação).

[9] ———, *Vector interpretation of the matrix orthogonality on the real line*, Pré-Publicações do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 09-41 (2009), arXiv:0910.1737v2, (submetido para publicação).

[10] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[11] D. Damanik, A. Pushnitski e B. Simon, *The analytic theory of matrix orthogonal polynomials*, Surveys in Approximation Theory **4** (2008), 1–85.

[12] H. Dette, B.Reuther, W.J. Studden e M. Zygmunt, *Matrix measures and random walks with a block tridiagonal transition matrix*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **29** (2006), no. 1, 117–142.

[13] A.J. Durán, *A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation*, J. Approx. Theory **74** (1993), no. 1, 83–109.

[14] ———, *On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures*, Canad. J. Math **47** (1995), 88–112.

[15] ———, *Markov theorem for orthogonal matrix polynomials*, Canad. J. Math **48** (1996), 1180–1195.

[16] ———, *Ratio asymptotics for orthogonal matrix polynomials*, J. Approx. Theory **100** (1999), 304–344.

[17] A.J. Durán e W. Van Assche, *Orthogonal matrix polynomials and higher-order recurrence relations*, Linear Algebra Appl. **219** (1995), 261–280.

[18] A.J. Durán e E. Daneri-Vias, *Ratio asymptotics for orthogonal matrix polynomials with unbounded recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **110** (2001), 1–17.

[19] A.J. Durán e P. Lopez-Rodriguez, *Orthogonal matrix polynomials: Zeros and Blumenthal's theorem*, J. Approx. Theory **84** (1996), 96–118.

[20] W.D. Evans, L.L. Littlejohn, F. Marcellán, C. Markett e A. Ronveaux, *On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 446–467.

[21] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, vol. 1, Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

[22] J.S. Geronimo, *Scattering theory and matrix orthogonal polynomials on the real line*, Circuits Systems Signal Process. **1** (1982), 471–495.

[23] A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Norset e J.M. Sanz-Serna, *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*, J. Approx. Theory **65** (1991), 151–175.

[24] M.G. Krein, *Fundamental aspects of the representation theory of hermitian operators with deficiency index(m,n)*, Ukrain. Mat. Z. **1** (1949), 3–66, English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 97 (1970), 75-143.

[25] ———, *Infinite J-matrices and a matrix moment problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **69** (1949), no. 2, 125–128.

[26] G. López, F. Marcellán e W. Van Assche, *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Constr. Approx. **11** (1995), 107–137.

[27] F. Marcellán, T.E. Pérez e M.A. Piñar, *On zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials*, Rendi. di. Mat. Roma (serie 7) **12** (1992), 455–473.

[28] ———, *Regular Sobolev type orthogonal polynomials: The Bessel case*, Rocky Mount J. Math. **25** (1995), 1431–1457.

[29] F. Marcellán, T.E. Pérez, M.A. Piñar e A. Ronveaux, *General Sobolev orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **200** (1996), 614–634.

[30] F. Marcellán e A. Ronveaux, *On a class of polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Indag. Math. NS **1** (1990), 451–464.

[31] F. Marcellán e G. Sansigre, *On a class of matrix orthogonal polynomials on the real line*, Linear Alg. Appl. **181** (1993), 97–110.

[32] F. Marcellán e S.M.Zagorodnyuk, *On the basic set of solutions of a higher order linear difference equation*, J. Diff. Eq. Appl. **12** (2006), 213–228.

[33] F. Marcellán e W. Van-Assche, *Relative asymptotics for orthogonal polynomials with a Sobolev inner product*, J. Approx. Theory **72** (1993), no. 2, 193–209.

[34] F. Marcellán e H.O. Yakhlef, *Recent trends on analytic properties of matrix orthogonal polynomials*, Electr. Trans. Numer. Anal. **14** (2002), 127–141.

[35] A. Martínez-Finkelshtein, *Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials*, J. Comp. App. Math. **99** (1998), 491–510.

[36] ———, *Analytic aspects of Sobolev orthogonal polynomials revisited*, J. Comp. App. Math. **127** (2001), 255–266.

[37] P. Nevai, *Orthogonal Polynomials*, vol. 213, Memoirs Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1979.

[38] T.E. Pérez e M.A. Piñar, *Global properties of zeros for Sobolev-type orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **4** (1993), 225–232.

[39] M.A. Piñar, *Polinomios ortogonales de tipo Sobolev. Aplicaciones*, Ph.D. thesis, Universidad de Granada, Granada, 1992.

[40] A. Santos, *Polinómios ortogonais matriciais*, Master's thesis, Aveiro Univ., Dept. de Matemática. Aveiro. Portugal, 2002.

[41] J.A. Shohat, *The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell*, Amer. J. Math. **58** (1936), 453–464.

[42] A. Sinap e W. Van Assche, *Orthogonal matrix polynomials and applications*, J. Comput. Appl. Math. **66** (1996), 27–52.

[43] M. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications to Analysis*, vol. 15, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, Rhode Island, 1932.

[44] H.O. Yakhlef, F. Marcellán e M.A. Piñar, *Perturbations in the Nevai matrix class of orthogonal matrix polynomials*, Linear Algebra Appl. **336** (2001), 231–254.

[45] ———, *Relative asymptotics for orthogonal matrix polynomials with convergent recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **111** (2001), 1–30.

[46] S.M. Zagorodnyuk, *On a five-diagonal Jacobi matrices and orthogonal polynomials on rays in the complex plane*, Serdica Math. J. **24** (1998), 257–282.

[47] ———, *Analog of Favard's theorem for polynomials connected with difference equation of 4-th order*, Serdica Math. J. **27** (2001), 193–202.

[48] ———, *On a class of functions connected with a moments problem*, Matem. phizika analiz geometriya **8** (2001), 251–260.

[49] ———, *On a characteristic property of polynomials satisfying difference equation of 4-th order*, Visnyk KharkivsŠkogo Univ., seriya "Matem., prykl. matem. i mech.ťť **582** (2003), 15–25.

[50] ———, *On generalized Jacobi matrices and orthogonal polynomials*, New York J. Math. **9** (2003), 117–136.

Índice