

# Estudo comparativo de efeitos geometricamente não-lineares em pontes atirantadas

António M.S. Freire<sup>1</sup>

*Departamento de Engenharia Civil, Instituto Politécnico de Castelo Branco  
6000-767 Castelo Branco, Portugal*

João H.O. Negrão<sup>2†</sup>, Adelino V. Lopes<sup>2</sup>

*Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Coimbra  
3030-290 Coimbra, Portugal*

## RESUMO

Este texto tem como objectivo a avaliação da importância relativa das fontes de não-linearidade geométrica na resposta estrutural de pontes atirantadas metálicas sujeitas a carregamentos estáticos. As análises linear, pseudo-linear e não-linear foram realizadas com o propósito de salientar restrições e os efeitos do comportamento não-linear. As formulações matemáticas dos elementos finitos utilizados são apresentadas e o comportamento numérico destes testado de forma a garantir uma avaliação precisa da contribuição de cada efeito não-linear – o efeito de catenária, o efeito  $P-\Delta$  e o efeito  $P-\delta$  – na resposta estrutural. Confirma-se que o efeito de catenária e o efeito  $P-\Delta$  são as não-linearidades que mais contribuem para o comportamento altamente não-linear apresentado, especialmente quando são aplicadas sobrecargas de utilização e, mais particularmente, aquando da própria construção faseada da superestrutura. Ainda que requerendo um custo numérico mínimo e uma fácil adaptação a programas de análise linear por Elementos Finitos, conclui-se que a análise pseudo-linear se mostra extremamente limitada na obtenção de resultados satisfatórios na análise das pontes de tirantes actuais.

## 1. INTRODUÇÃO

O incremento das dimensões das pontes de tirantes actuais tem obrigado a análises cada vez mais complexas, de forma a simular com uma precisão satisfatória o seu real comportamento. Nesse intento, a consideração das não-linearidades é praticamente imprescindível. O objectivo fulcral de verificação de cotas de projecto e as restrições associadas a deslocamentos e tensões admissíveis, tanto na vida útil das pontes como durante a própria construção, obrigam à determinação de valores, com graus de exactidão crescentes, das forças de ancoragem a aplicar no sistema de suspensão.

A flexibilidade das longas pontes atirantadas metálicas torna secundário o efeito das não-linearidades associadas aos materiais, quando comparado com o efeito das não-linearidades geométricas. São geralmente apontadas como mais importantes o efeito de catenária, o efeito

---

<sup>1</sup> Assistente

<sup>2</sup> Professor Auxiliar

<sup>†</sup> Autor para quem a correspondência deverá ser enviada (jhnegrao@dec.uc.pt)

dos grandes deslocamentos (ou efeito  $P-\Delta$ ) e o efeito de viga-coluna (ou efeito  $P-\delta$ ), Wang (1995). No entanto, o primeiro destes é habitualmente apontado como o mais relevante, sendo praticamente inevitável a sua contabilização.

## 2. NÃO-LINEARIDADES E ELEMENTOS FINITOS

São apresentados a seguir os elementos finitos utilizados para a elaboração deste trabalho. A adopção de determinado tipo de elemento finito prende-se com a especificidade da análise estrutural efectuada. Para a análise linear foram utilizados o elemento de biela e o elemento de viga; para a análise pseudo-linear consideraram-se o elemento de módulo de elasticidade equivalente (Ernst) e o elemento de viga; para a análise não-linear utilizaram-se vários tipos de elementos finitos, em função das não-linearidades geométricas tidas em conta: para a avaliação isolada do efeito  $P-\Delta$  foram utilizados o elemento de biela e o elemento de viga de formulação geometricamente não-linear; para a avaliação do efeito de catenária foram utilizados o elemento de catenária elástica e o elemento de viga; para a análise não-linear prevendo todas as não-linearidades já referidas foram utilizados o elemento de catenária elástica e o elemento de viga-coluna contendo, para além das parcelas de rigidez geométrica  $P-\Delta$ , as parcelas de rigidez geométrica  $P-\delta$  sob forma de funções de estabilidade.

### 2.1. Tirantes: efeito de catenária

O elemento de biela é a opção mais simples na modelação dos cabos de pontes atirantadas. É largamente utilizado, tanto em análises envolvendo acções estáticas como dinâmicas. No entanto, deverá estar garantida a instalação de grandes esforços de tracção para que o efeito de catenária não seja significativo. Além disso, para que o efeito  $P-\Delta$  possa ser tido em conta em análises não-lineares, é necessário que a sua formulação envolva termos de rigidez geométrica.

O elemento de biela de módulo de elasticidade equivalente, Ernst (1965), traduz, ainda que limitadamente, o efeito de catenária em análises lineares de pontes de tirantes. No entanto, para uma análise satisfatória, os cabos deverão ser formulados com o propósito de poderem ter em conta tanto o efeito de catenária como o efeito  $P-\Delta$ . O método do módulo de elasticidade equivalente (ou Análise Pseudo-Linear ou ainda de Ernst) é o método mais utilizado em análises estática e dinâmica de pontes de tirantes, dada a sua capacidade de contabilização do efeito de catenária, a que acresce uma formulação simples e a utilização com programas de análise linear. O método assume uma configuração parabólica em vez da forma catenária para um cabo sujeito ao peso próprio, aproximação aceitável para curvaturas moderadas, como as verificadas em cabos altamente solicitados. O módulo de Ernst pode ser determinado pela sua definição tangente como

$$E_{eq} = E \frac{1}{1 + \frac{q^2 L_h^2}{12T^3} EA} = E \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2 E}{12\sigma^3} L_h^2} = E \frac{1}{1 + \frac{\gamma^2 E}{12\sigma^3} (L_0 \cos \alpha)^2} \quad (1)$$

onde  $T$ ,  $L_0$ ,  $L_h$ ,  $q_0$ ,  $E$ , e  $A$  são, respectivamente, o esforço de tracção, o comprimento do cabo e a sua componente horizontal, o peso próprio, o módulo de elasticidade e a área da secção transversal.  $\sigma = T/A$  é a tensão normal,  $\gamma = q/A$  é o peso específico e  $\cos \alpha = L_h/L_0$ .

Apesar de o método ser vocacionado para análise (pseudo-)linear, o processo de determinação de um módulo equivalente tem sido proposto para a utilização em análises não-lineares, Cheung (1988), Fleming (1979), Seif (1987). Essa abordagem foi tentada na análise do exemplo apresentado neste trabalho, mas revelou-se uma má opção, Freire (2002). Além de

não convergir monotonamente para uma solução, esta não correspondia minimamente ao expectável. Estudos mais aprofundados, Freire (2002), permitiram concluir pela não aplicabilidade do método quando estão envolvidas actualizações geométricas previstas pelas formulações Lagrangeanas dos elementos finitos.

### 2.1.1. O Elemento de catenária elástica

Para a formulação do elemento de catenária elástica foram obtidas três equações em função da coordenada Lagrangeana  $s_0$  que se desenvolve ao longo do elemento, a partir da consideração de um troço infinitesimal na posição deformada (ver Figura 1). A Eq. (2) traduz o equilíbrio vertical no troço. As Eqs. (3) e (4) representam a compatibilidade.

$$F_h \tan(\alpha + d\alpha) - F_h \tan \alpha = q ds_0 \quad (2)$$

$$ds_h = \cos \alpha ds_0 + \frac{F_h}{EA} ds_0 \quad (3)$$

$$ds_v = \sin \alpha ds_0 + \frac{F_h}{EA} \tan \alpha ds_0 \quad (4)$$

Substituindo a aproximação

$$\tan(\alpha + d\alpha) - \tan \alpha \approx d\alpha \sec^2 \alpha \quad (5)$$

na Eq.(2), a obtenção da configuração deformada do elemento resultará da resolução do sistema de equações não-lineares, formado pelas Eqs. (6), (7) e (8), obtidas por integração das Eqs. (2), (3) e (4) nos domínios  $\alpha \in [\alpha_A, \alpha_B]$  e  $s_0 \in [0, L_0]$

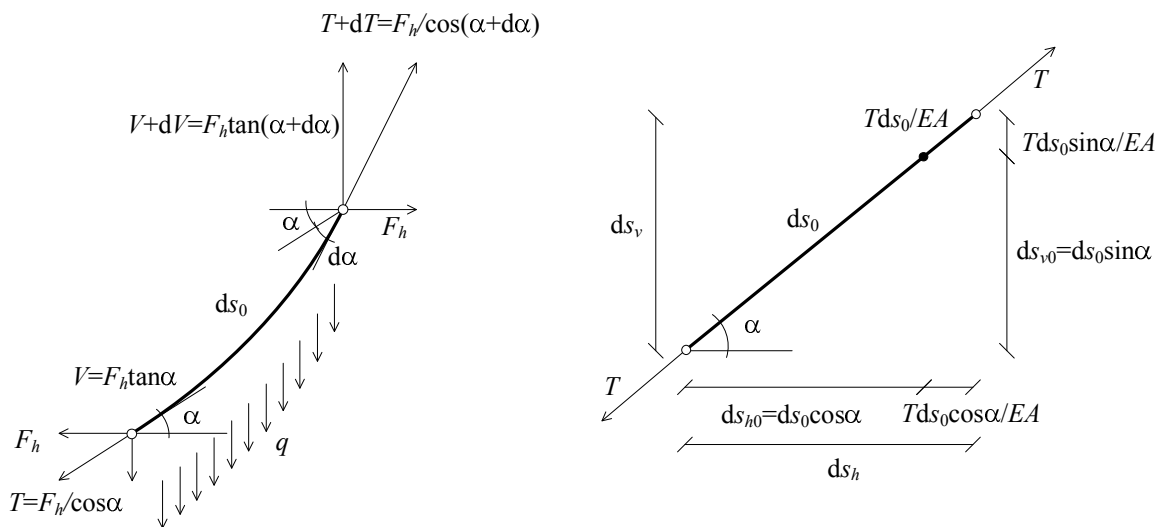


Figura 1 – Troço infinitesimal de catenária elástica

$$F_h (\tan \alpha_B - \tan \alpha_A) - qL_0 = 0 \quad (6)$$

$$L_v = L_{v0} + \Delta L_v = \frac{F_h}{q} (\sec \alpha_B - \sec \alpha_A) + \frac{F_h^2}{qEA} \frac{1}{2} (\sec^2 \alpha_B - \sec^2 \alpha_A) \quad (7)$$

$$L_h = L_{h0} + \Delta L_h = \frac{F_h}{q} \ln \left[ \frac{2}{1 + \sec \frac{\alpha_A + \alpha_B}{2} \sin \frac{\alpha_A - \alpha_B}{2}} - 1 \right] + \frac{F_h^2}{EAq} (\tan \alpha_B - \tan \alpha_A) \quad (8)$$

Para a determinação de  $F_h$ ,  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$  é necessário recorrer a métodos do tipo Newton-Raphson, pelo que foi estudado e implementado um algoritmo de continuação, que segue as trajetórias das soluções em função de um parâmetro de controlo, Rheinboldt (1981). Evita-se assim a convergência para soluções indesejadas e consegue-se a identificação de pontos singulares, como pontos de inflexão ou pontos de derivada nula. O problema é então definido como  $\mathbf{f}(F_h, \alpha_A, \alpha_B, \lambda) = \mathbf{0}$ , que representa um sistema de três equações algébricas dependentes das três variáveis a determinar e do parâmetro de controlo  $\lambda$ .

Uma formulação alternativa pode ser obtida tomando como ponto de partida a equação da catenária axialmente indeformável

$$L_0^2 - L_{v0}^2 = 4c^2 \sinh^2 \frac{L_{h0}}{2c} \text{ com } c = \frac{F_h}{q} \quad (9)$$

Introduzindo nesta as Eqs. (7) e (8), vem

$$L_0^2 - \left( L_v \frac{2EA}{2EA + F_h (\sec \alpha_A + \sec \alpha_B)} \right)^2 = 4c^2 \sinh^2 \left( \frac{L_h - \frac{F_h L_0}{EA}}{2c} \right) \quad (10)$$

Por equilíbrio dos nós extremos, e utilizando a Eq. (9), obtém-se

$$\sec \alpha_A + \sec \alpha_B = \frac{T_A}{F_h} + \frac{T_B}{F_h} = 2 \cosh \left( \frac{1}{2} \frac{q}{F_h} L_{h0} \right) \frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 - L_{v0}^2}} = \frac{qL_0}{F_h} \operatorname{coth} \left[ \frac{q}{2F_h} \left( L_h - \frac{F_h L_0}{EA} \right) \right] \quad (11)$$

Finalmente, substituindo 0) em 0), obtém-se

$$L_0^2 - \left( L_v \frac{2EA}{2EA + qL_0 \operatorname{coth} \left[ \frac{q}{2F_h} \left( L_h - \frac{F_h L_0}{EA} \right) \right]} \right)^2 = 4 \left( \frac{F_h}{q} \right)^2 \sinh^2 \left[ \frac{q}{2F_h} \left( L_h - \frac{F_h L_0}{EA} \right) \right] \quad (12)$$

Esta equação, independente dos ângulos nas ancoragens, permitirá a determinação da força horizontal  $F_h$  num processo iterativo muito menos complexo do que aquele que envolve a resolução do sistema constituído pelas Eqs. (6), (7) e (8). Os ângulos são posteriormente obtidos por equilíbrio

$$\tan \alpha_A = -\frac{V_A}{F_h} = -\frac{L_{0A}q}{F_h} \quad (13)$$

e

$$\tan \alpha_B = \frac{V_B}{F_h} = \frac{L_{0B}q}{F_h} \quad (14)$$

onde

$$L_{0A} = c \sinh \frac{L_{h0A}}{c} = \frac{F_h}{q} \sinh \frac{L_{h0} \mp c \operatorname{arctanh} \frac{L_{v0}}{L_0}}{c}$$

$$= \frac{F_h}{q} \sinh \left[ \frac{q}{2F_h} \left( L_h - \frac{F_h L_0}{EA} \right) \mp \operatorname{arctanh} \left( \frac{L_v}{L_0} \frac{2EA}{2EA + qL_0 \operatorname{coth} \left[ \frac{q}{2F_h} \left( L_h - \frac{F_h L_0}{EA} \right) \right]} \right) \right] \quad (15)$$

Todos os parâmetros geométricos e a configuração deformada do elemento, Figura 2, são determinados recorrendo às Eqs. (2), (3) e (4), dados os valores de  $F_h$ ,  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$ .

A modelação em bielas múltiplas ligadas em cadeia é uma das melhores formas de modelação de cabos, permitindo a consideração sem restrições do efeito de catenária e a determinação de modos de vibração do cabo. Em análise estática, essa forma de modelação permite que o cabo seja analisado no seu domínio como uma subestrutura independente sujeita a peso próprio e a deslocamentos diferenciais dos nós de fronteira. A análise desses subsistemas permite a obtenção das forças nodais dos extremos que são, em cada iteração, aplicadas na superestrutura. A análise iterativa processar-se-á até que a convergência seja atingida nos tirantes e na ponte. O elemento de catenária elástica apresentado foi testado contra esta forma de modelação de cabos, Freire (2002). Os resultados revelam ser convergentemente coincidentes quando o número de bielas encadeadas aumenta.

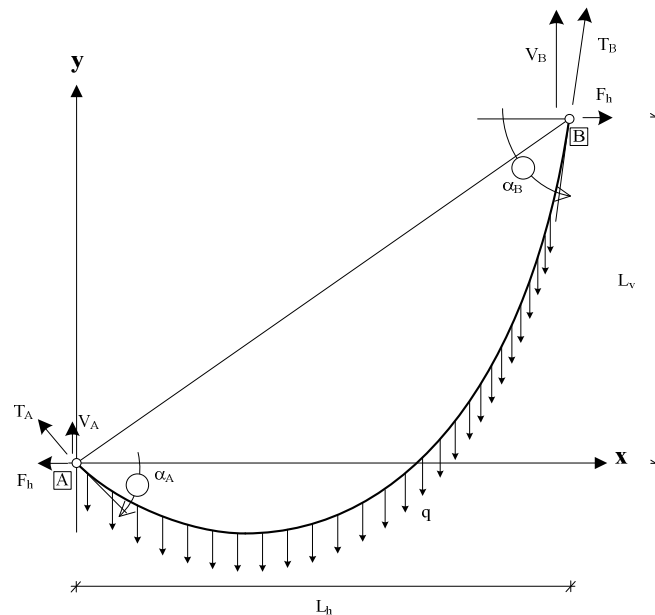


Figura 2 – Elemento de catenária elástica

### 2.1.2. Estudo paramétrico: biela, modulo equivalente e catenária elástica

Considere-se um cabo com corda horizontal. Considere-se ainda a coordenada cinemática horizontal do nó da direita. Admita-se uma força  $F_h$  inicial nula. Para um cabo real, tal corresponderá a uma configuração em que os nós extremos são coincidentes. Como facilmente se depreende e se pode verificar na Figura 3, nem o elemento de biela nem o elemento de Ernst – apesar de simular satisfatoriamente a rigidez aparente de um cabo – estarão de acordo com esta configuração. Para uma força nula, por exemplo, os nós não serão coincidentes.

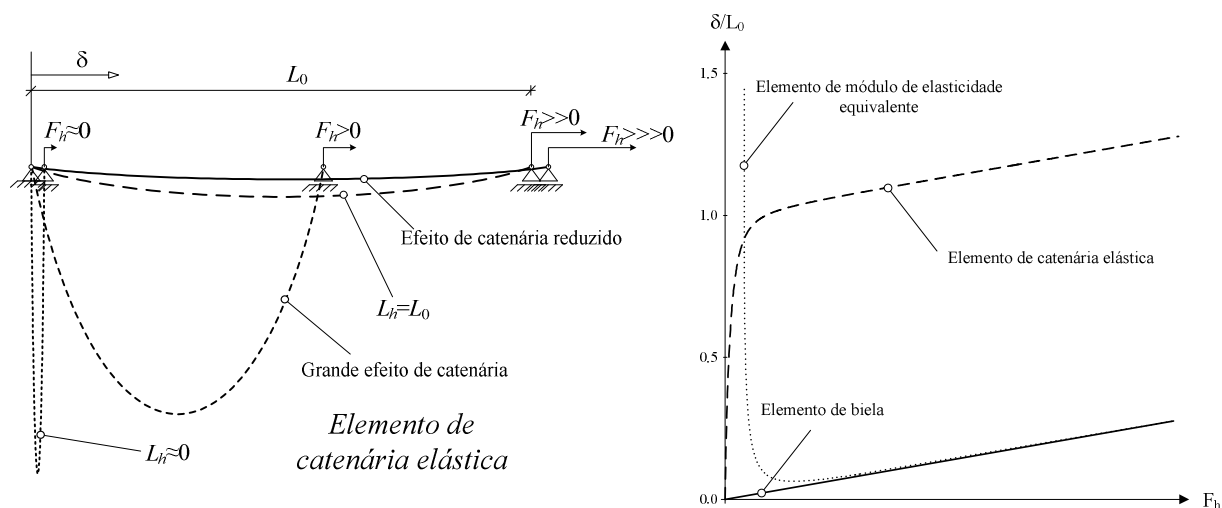


Figura 3 – Cabo sujeito a força horizontal; deslocamento para várias formulações elementares

## 2.2. Tabuleiro e torres: o elemento de viga-coluna

Um elemento finito de viga-coluna foi desenvolvido com o objectivo de ter em conta a interacção total de esforços. Nesse intuito, as interacções entre momento flector, torção, esforço axial e carga de vão, assim como o encurtamento flexional total, são contabilizadas pela definição de funções de estabilidade. Estas, aproximadas por recurso à expansão em séries de Taylor, modificam iterativamente os coeficientes da matriz de rigidez elementar e os elementos do vector segundo membro correspondentes aos esforços e forças nodais equivalentes devidas ao carregamento. Decorrendo destes factos, a formulação envolve expressões matemáticas complexas e extremamente extensas, pelo que não serão aqui apresentadas. Expressões similares podem, no entanto, ser encontradas em Freire (2002), Chen (1991), Kassimali (1991) e Oran (1973). A matriz de rigidez tangente é determinada, a partir das relações básicas anteriormente referidas, por derivação completa e, frequentemente, por recurso à derivação implícita em ordem às coordenadas cinemáticas elementares.

## 2.3. Deslocamentos e rotações finitas: efeito $P-\Delta$

O efeito  $P-\Delta$  deve ser suportado por todos os elementos finitos utilizados em análises geometricamente não-lineares. Os deslocamentos arbitrários e as rotações finitas devem ser suportados de forma a permitir expressar todas as quantidades estáticas (esforços e carregamentos) e todas as quantidades cinemáticas (deslocamentos, rotações e extensões), tanto no sistema inercial como nos sistemas de eixos intrínsecos aos elementos, Freire (2002). A matriz de rotação, que permite a actualização geométrica, escreve-se em termos de parâmetros de Euler, Weisstein (2002), evitando-se as possíveis singularidades normalmente associadas a outros tipos de definição. Esta matriz relaciona as quantidades estáticas e cinemáticas entre o sistema local elementar e os sistemas locais instantâneos que se encontram fixos nos nós elementares.

O elemento de viga-coluna constitui, nesse aspecto, o elemento mais complexo já que, em cada iteração, devem ser actualizados os eixos principais de inércia e, com estes, a definição dos esforços e dos carregamentos de vão (Figura 4). Note-se que o efeito de torção acrescenta complexidade ao problema, uma vez que as rotações espaciais não são comutativas e se consideraram rotações diferenciais arbitrárias na formulação *Lagrangeana Total* do elemento.

No intuito de ultrapassar tais dificuldades, determinou-se uma matriz de rotação de referência, que define as rotações obtidas em cada iteração numa secção de meio vão, Figura 4

$$\Lambda_r = \Lambda_A \exp\left(\frac{1}{2} \hat{\Phi}_{AB}\right) \quad (16)$$

Nesta expressão estão expressos: a fórmula de Rodrigues, Crisfield (1999),

$$\exp \hat{\theta} = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \hat{\theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \hat{\theta}^2, \quad \theta = \|\hat{\theta}\|, \quad \hat{\theta} \equiv \frac{1}{2} \hat{\Phi}_{AB} \quad (17)$$

onde o acento circunflexo opera a matriz anti-simétrica a partir do pseudo-vector de rotação  $\hat{\theta}$ ; a matriz de rotação  $\Lambda_A$  do nó A do elemento e o pseudo-vector de rotação  $\hat{\Phi}_{AB}$ . Este pode ser calculado a partir do produto das matrizes de rotação dos dois nós extremos A e B do elemento, utilizando-se um algoritmo de extracção de quaterniões, Klumpp (1976),  $\Lambda_A^T \Lambda_B = \exp \hat{\Phi}_{AB} \longrightarrow \hat{\Phi}_{AB}$ . A actualização da matriz de rotação dos nós do elemento em função da rotação  $\theta$  em torno do pseudo-vector unitário  $\hat{\theta}/\theta$  resulta de  $\Lambda_A = \exp[\hat{\Phi}_A] \cdot \Lambda_{0,A}$  e  $\Lambda_B = \exp[\hat{\Phi}_B] \cdot \Lambda_{0,B}$  onde  $\hat{\Phi}_A$  e  $\hat{\Phi}_B$  são os pseudo-vectores de rotação obtidos em cada iteração. Crisfield (1999), Jelenic (1999).

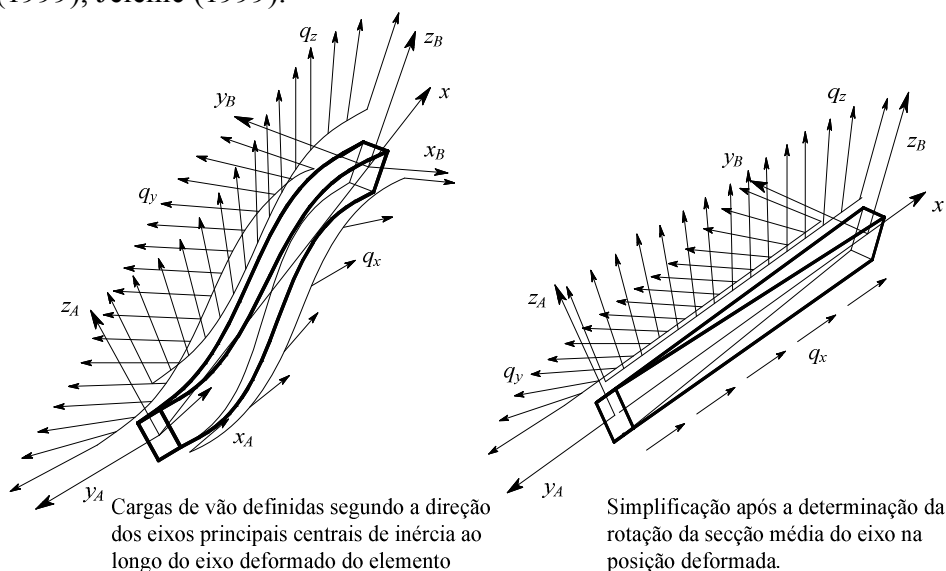


Figura 4 – Actualização geométrica elementar: definição de carregamentos de vão.

### 3. EXEMPLOS

É analisado o modelo tridimensional de uma ponte atirantada metálica, Figura 5, sujeita a quatro casos de carga distintos. Os casos de carga são definidos como carregamentos estáticos uniformemente distribuídos sobre o tabuleiro, resultando em carregamentos distribuídos sobre as carlingas. Esses valores, relativos a cargas permanentes e a sobrecargas, resultam nos valores de 30 kN/m e 50 kN/m, aos quais acresce o peso próprio de todos os elementos estruturais. Os deslocamentos horizontais relativos entre o tabuleiro e os pilares são livres, assim como os deslocamentos horizontais nos encontros. As características geométricas dos elementos estruturais, a geometria da ponte e as forças de esticamento dos tirantes foram determinadas recorrendo a um algoritmo de optimização não-linear, Negrão (1997), Simões (2000). Dada a limitação de espaço, esses valores não serão aqui apresentados. As principais fases construtivas foram também analisadas. Nestas apenas se considerou o peso próprio da

estrutura e as forças de esticamento. A análise pseudo-linear não pôde ser utilizada no estudo dessas fases pois o efeito de catenária excedeu os limites de aplicabilidade do método de Ernst.

As forças de esticamento são aplicadas como acções cinemáticas nos elementos que modelam os tirantes. O comprimento real do elemento de catenária elástica, por exemplo, foi determinado recorrendo às Eqs.0) e 0), partindo da força de esticamento que se assume correspondente ao esforço de tracção no nó de ancoragem de cota mais baixa de cada tirante.

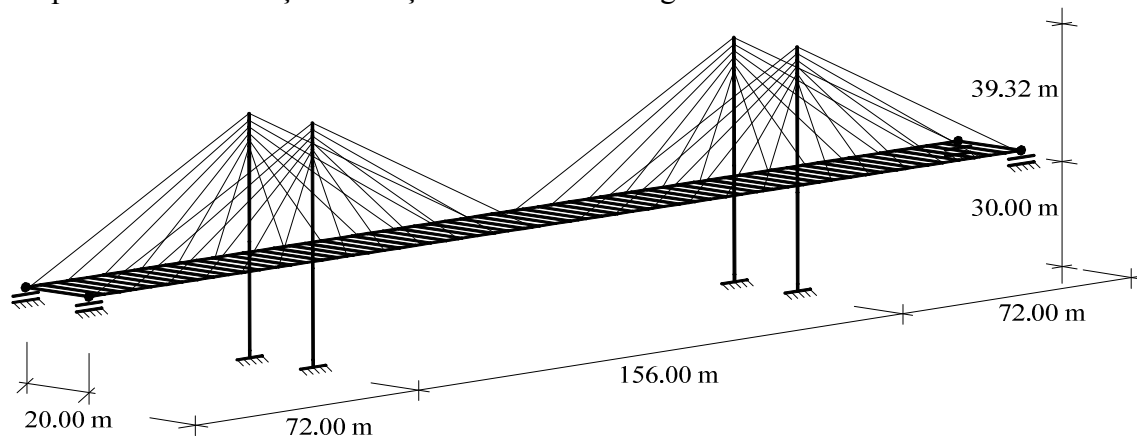


Figura 5 – Modelo numérico de ponte atirantada metálica.

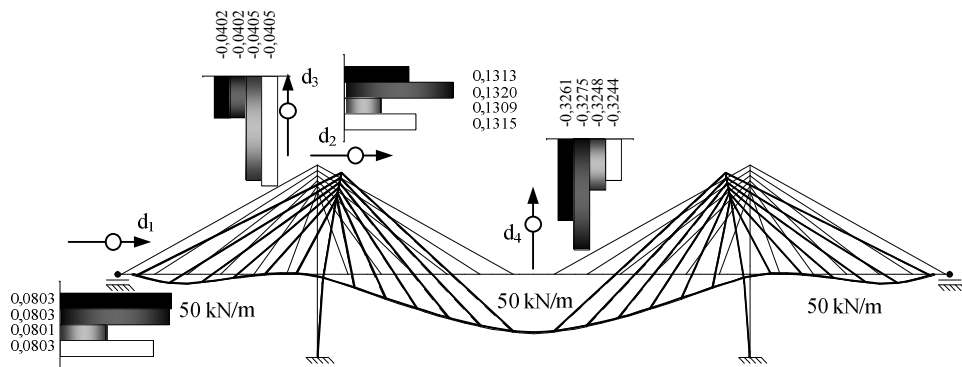
Os valores obtidos pelos diversos tipos de análise estrutural para os deslocamentos são apresentados de seguida. Não serão apresentados os valores dos esforços obtidos, já que estes seguem, em termos qualitativos, as mesmas tendências relativas dos valores dos deslocamentos, não acrescentando informações significativas para os objectivos do estudo.

### 3.1. Ponte em fase de utilização

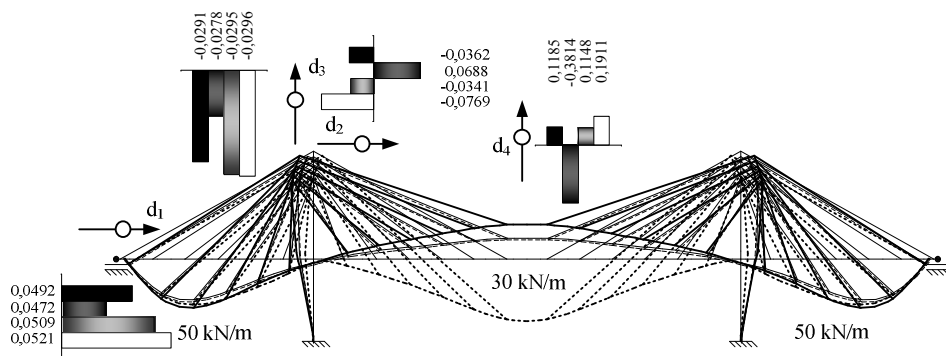
As deformadas da ponte de tirantes descrita anteriormente, sujeita a cada caso de carga, estão representadas na Figura 6. Nas ilustrações constam ainda os valores dos deslocamentos, obtidos em quatro dos seus nós por recurso a cada um dos métodos de análise descritos anteriormente.

Como se pode verificar, os diferentes tipos de análise estrutural não apresentam valores com diferenças significativas para os deslocamentos obtidos para os casos de carga [50 50 50] e [30 30 30]. No entanto, o caso de carga [50 30 50] revela diferenças enormes, tanto em termos relativos como absolutos, para os mesmos deslocamentos. O forte efeito de catenária associado a esse caso de carga pode ser verificado por análise dos deslocamentos  $d_2$  e  $d_4$ , onde: primeiro, a análise pseudo-linear demonstra ser uma opção inaceitável; segundo, os deslocamentos obtidos pelas análises linear e não-linear utilizando bielas são idênticos, contudo diferentes daqueles obtidos pela análise não-linear utilizando o elemento de catenária elástica. O deslocamento  $d_4$  obtido por esta última é 1.6 vezes aquele obtido pela análise linear e 1.7 vezes o obtido pela análise não-linear (biela), evidenciando um forte efeito de catenária. O efeito de grandes deslocamentos não parece ser importante para este caso de carga, ainda que essa avaliação seja difícil, já que os efeitos não-lineares não podem ser desacoplados. Note-se que, para além da limitação do efeito de catenária, a análise pseudo-linear não consegue comportar o efeito de grandes deslocamentos, tornando-se um método de análise pouco preciso.

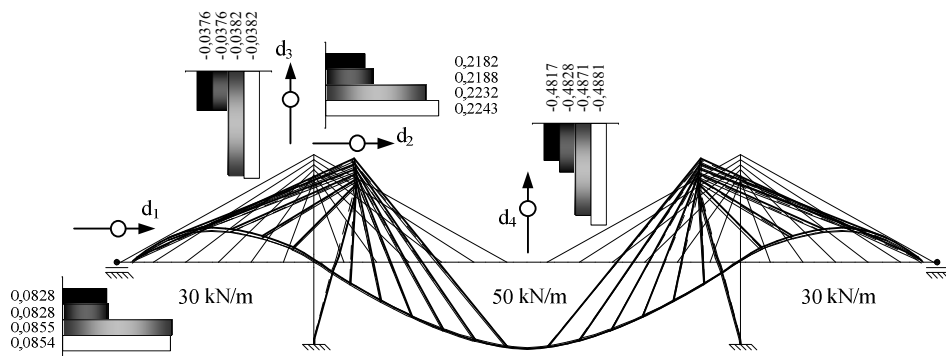




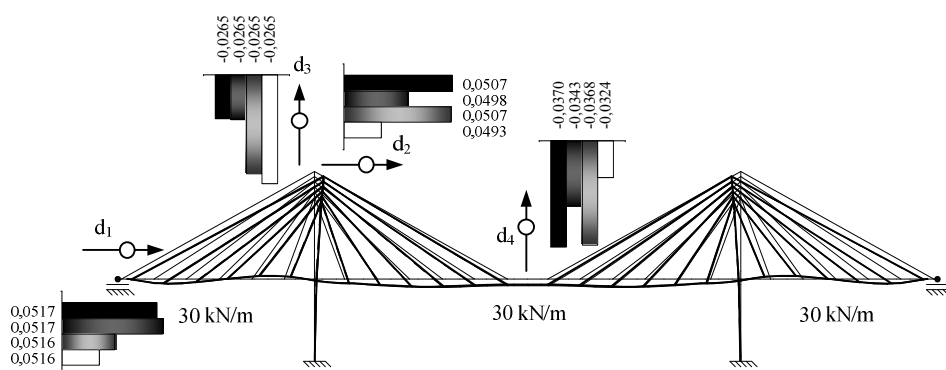
*Deformada para o caso de carga [50 50 50]*



*Deformada para o caso de carga [50 30 50]*



*Deformada para o caso de carga [30 50 30]*



*Deformada para o caso de carga [30 30 30]*



Figura 6 – Deformadas da ponte sujeita a 4 casos de carga.

As diferenças obtidas nos deslocamentos para o caso de carga [30 50 30] provêm principalmente do efeito de grandes deslocamentos. Estas são, no entanto, consideravelmente inferiores às diferenças obtidas para o caso de carga [50 30 50], devido ao efeito de catenária. Como se pode observar nos gráficos dos deslocamentos, os valores obtidos pelas análises linear e pseudo-linear são praticamente coincidentes. O mesmo se observa em relação às análises não-lineares. Tal evidencia um efeito de catenária sem significado na resposta estrutural, quando comparado com o efeito de grandes deslocamentos.

### 3.2. Fases Construtivas

Para a análise das fases construtivas foi necessária a introdução de uma nova ligação tabuleiro-pilar, já que, exceptuando a fase construtiva 5, cujo deslocamentos verticais dos nós junto aos encontros estão restringidos, todas as restantes fases apresentavam deslocamentos inadmissíveis, quando determinados recorrendo às análises não-lineares. Tal não foi previsto pela análise linear, evidenciando limitações na determinação de respostas estruturais adequadas. As diferenças obtidas para as fases construtivas, Figura 7, devem-se, essencialmente, ao efeito de catenária. Verifica-se que este é crescente com a dimensão da estrutura, já que, para além do efeito alternado da introdução de cada par de tirantes na estrutura no valor da tensão destes, os tirantes introduzidos são de dimensões crescentes, amplificando o efeito de catenária na estrutura. A fase construtiva 5 é aquela em que as diferenças são máximas, obtendo-se, pela análise não-linear com utilização do elemento de catenária, um deslocamento  $d_4$  1.5 vezes o obtido pela análise linear, uma diferença de 23 cm.

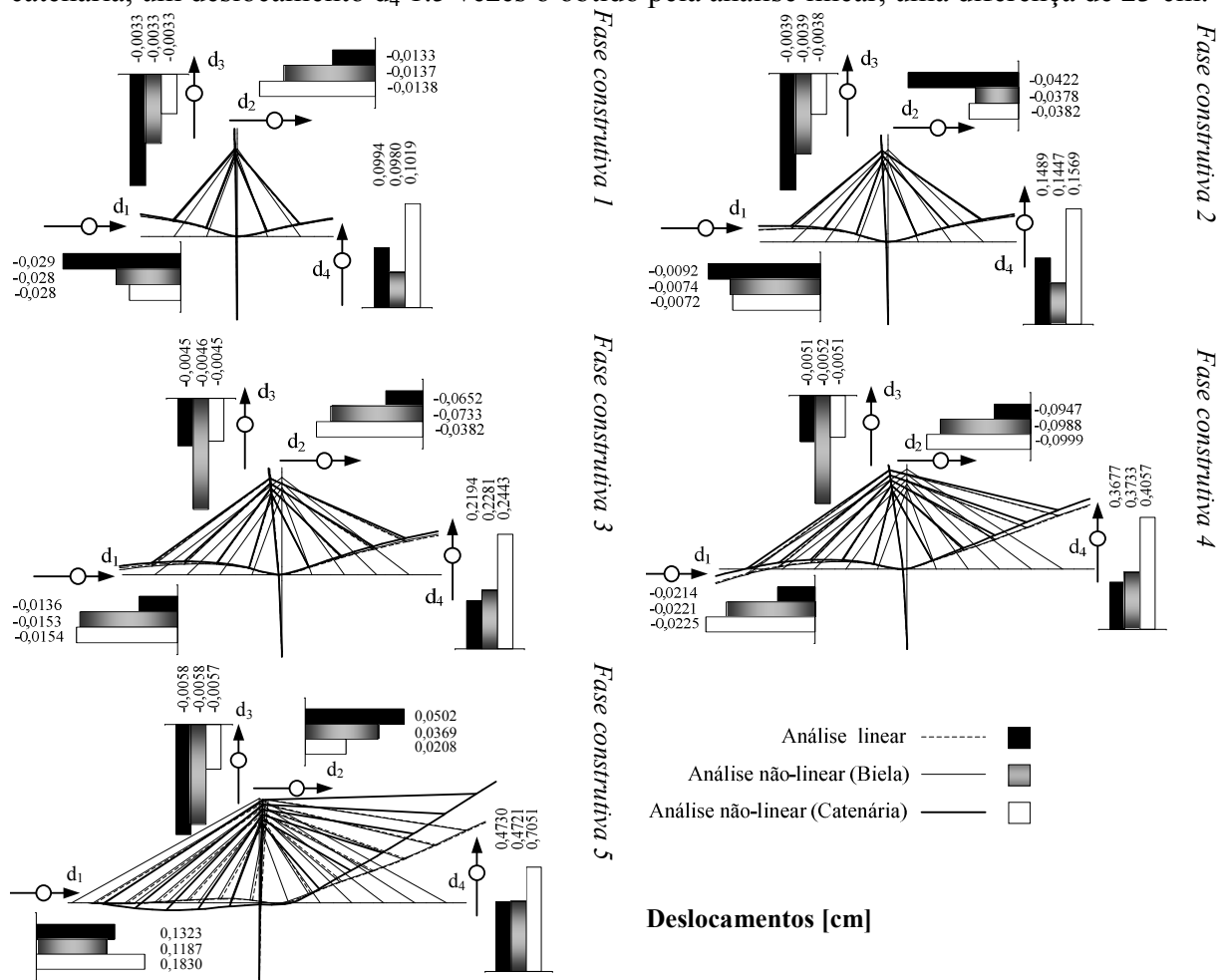


Figura 7 – Deformadas das fases construtivas

## 4. CONCLUSÕES

### 4.1. Quanto aos tipos de análise estrutural

A análise linear de pontes atirantadas de grande porte e/ou de flexibilidade pronunciada não permite a obtenção de resultados com o nível de qualidade necessário. A geometria das pontes, os elementos estruturais e os pré-esforços a instalar dependem largamente de todos os efeitos não-lineares materiais (onde se inserem os efeitos diferidos) e geométricos. Nestes últimos destacam-se o efeito  $P-\Delta$  e o efeito de catenária.

A utilização do método de Ernst na modelação dos tirantes de pontes deve ser encarada com reserva, devendo limitar-se a casos com efeitos de catenária moderados e a deslocamentos estruturais reduzidos. Apesar de ter sido estudado na óptica de uma análise linear, o método de Ernst tem sido utilizado em análises não-lineares. No entanto, ainda que modele quase perfeitamente a rigidez aparente de um cabo em função da tensão instalada, o elemento de Ernst apresenta um comportamento muito diferente de um cabo real, podendo levar a erros grosseiros.

A qualidade das soluções obtidas pela análise não-linear depende intrinsecamente da formulação matemática dos elementos que modelam cada parte estrutural. O refinamento da malha de elementos finitos associado a um método iterativo conveniente permite uma convergência para resultados satisfatórios. Esse refinamento, que normalmente resulta num acréscimo de custo computacional acentuado, pode ser ultrapassado pela utilização de elementos finitos mais específicos, como o elemento de viga-coluna e, especialmente, o elemento de catenária. Dada a dimensão dos tirantes, o elemento de catenária é aquele que mais contribui para a redução do volume de cálculo. Caso não seja possível a sua utilização, os autores propõem a discretização dos cabos em elementos de viga de grande flexibilidade à flexão ou mesmo de elementos de viga de nós semi-rígidos como alternativa à utilização de bielas ligadas em cadeia, evitando os problemas numéricos na resolução destas subestruturas de alto grau de hipostaticidade.

### 4.2. Quanto aos efeitos não-lineares

O efeito de catenária e o efeito  $P-\Delta$  revelaram-se, como esperado, as fontes de não-linearidade mais importantes. Contudo, a importância relativa de cada contribuição não é fácil de avaliar, já que são efeitos não desacopláveis e fortemente dependentes das características mecânicas/geométricas da estrutura e dos carregamentos que a solicitam. Para o exemplo estudado, entretanto, as análises individuais permitem reconhecer o efeito de catenária como predominante, especialmente para o caso de carga [50 30 50] e para a análise das fases construtivas.

O efeito  $P-\delta$  não parece ter uma contribuição significativa para a resposta estrutural. Embora potencialmente importante quando os esforços são elevados, o efeito  $P-\delta$  revela-se secundário quando comparado tanto com o efeito de catenária como com o efeito  $P-\Delta$ . Deve-se, no entanto, realçar o facto de que o efeito  $P-\delta$  é tendencialmente materializado pelo efeito  $P-\Delta$  com o refinamento da malha de elementos finitos. Isto sugere que uma parte importante do efeito  $P-\delta$  esteja já contabilizado no efeito  $P-\Delta$ , pelo que a inserção das complexas funções de estabilidade na formulação desses elementos se torna, em princípio, desnecessária.

## 5. REFERÊNCIAS

- Chen, W.F., Lui, E.M., *Stability design of steel frames*, CRC Press (1991).
- Cheung, M.S, Li, W., Jaeger, L.G., Nonlinear analysis of cable-stayed bridge by finite strip method, *Computers & Structures*, 29(4), 687-692 (1988).
- Crisfield, M.A., Jelenic, G., Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation, *The royal society of London*, 455, 1125-1147 (1999).
- Ernst, H.J., Der E-modul von seilen unter beruecksichtigung des durchhanges, *Der Bauingenieur*, 40(2) (1965).
- Fleming, J.F., Nonlinear static analysis of cable-stayed bridges structures, *Computers and Structures*, 10, 621 (1979).
- Freire, A., *Análise pseudo-linear e não-linear de pontes atirantadas metálicas*, MSc Thesis, Universidade de Coimbra (2002).
- Kassimali, A., Abbasnia, R., Large deformation analysis of elastic space frames, *Journal of structural Engineering*, 117(23), 2069-2087 (1991).
- Klumpp, A.R., Singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix, *Journal of Spacecraft*, 13(12), 754-755 (1976)
- Oran, C., Tangent stiffness in space frames, *Journal of the Structural Division*, 987-1001 (1973).
- Rheinboldt, W.C., Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems, *Computers & Structures*, 13(1-3), 103-113 (1981).
- Negrão, J.H.O., Simões, L.M.C., Optimization of cable-stayed bridges with three-dimensional modelling, *Computers & Structures*, 64(1-4), 741-758 (1997).
- Seif, S.P., Dilger, W.H., Nonlinear analysis and strength of prestressed concrete cable-stayed bridges, em: *International Conference on Cable-Stayed Bridges Bangkok* (1987)
- Simões L.M.C., Negrão J.H.J.O., Optimization of cable-stayed bridges with box-girder decks, *Advances in Engineering Software*, 31, 417-423 (2000).
- Wang, P.H., Yang, C.G., Parametric studies on cable-stayed bridges, *Computers & Structures*; 60(2), 243-260 (1995).