Boletim da SPM - nº 37
Outubro de 1997

# CONTRIBUIÇÕES DE VICENTE GONÇALVES NA TEORIA DOS POLINÓMIOS ORTOGONAIS*

*Amílcar Branquinho*
Dept. de Matemática, Univ. de Coimbra

Nos anos de 1942/43 Vicente Gonçalves publicou dois trabalhos na revista Portugaliæ Mathematicæ sobre polinómios ortogonais clássicos (Hermite, Laguerre, Jacobi e Bessel). Em [7] provou o seguinte resultado:

**Teorema 1** *Seja $y_n$ uma sucessão de polinómios mónicos, i.e. $y_n = x^n + \ldots$ para cada $n \in \mathbb{N}$; então, $\{y_n\}$ verifica*

$$(a_0x^2 + a_1x + a_2)y'' + (b_0x + b_1)y' + \lambda_n y = 0 \tag{1}$$

*se e somente se, existem duas sucessões $(\beta_n)$, $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}$, determinadas pelas constantes $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$, tais que*

$$xy_n = y_{n+1} + \beta_n y_n + \gamma_n y_{n-1},\ n \geq 1\,. \tag{2}$$

Note-se que, uma condição necessária e suficiente para que uma sucessão de polinómios mónicos seja ortogonal, é que os seus elementos verifiquem uma relação de recorrência do tipo (2) com $\gamma_{n+1} \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$.

A importância deste trabalho deriva de:

- pela primeira vez se ter apresentado de uma forma unificada o estudo das soluções polinomiais da equação (1);
- não se recorrer à teoria das funções hipergeométricas, que já tinha impedido Bochner [1] de obter os polinómios de Bessel como soluções de (1);
- anticipar o trabalho de Krall e Frink [5] sobre os polinómios de Bessel;

*Texto baseado na comunicação apresentada na Sessão Comemorativa do Centenário do Nascimento de José Vicente Gonçalves, realizada no dia 4 de Dezembro de 1996, no Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

- provou também que as soluções de (1) verificam

$$\begin{aligned}2(a_0x^2+a_1x+a_2)y_n'+(b_0x+b_1)y_n-(2a_0n+b_0)(x-\beta_n)y_n\\ =(\lambda_{n-1}-\lambda_{n+1})\gamma_n y_{n-1}\,,\quad n\geq 1\,.\end{aligned}$$

  antecipando assim o resultado atribuido na literatura desta teoria a Tricomi [6] (cf. [4]).

**Ideia da demonstração.**
**(a)** Começa por dar condições necessárias e suficientes para que a equação (1) tenha para cada $n\in\mathbb{N}$ uma única solução polinomial de grau $n$.
**(b)** Define $u_n=(a_0x^2+a_1x+a_2)((x-\beta_n)y_n)''+(b_0x+b_1)((x-\beta_n)y_n)'+\lambda_{n+1}(x-\beta_n)y_n$ e impõe que seja um polinómio de grau exactamente $n-1$.
**(c)** Prova, em seguida, que para cada $n\in\mathbb{N}$ existe uma constante real $K_n$ tal que $u_n=K_ny_{n-1}$.
**(d)** Determina $\gamma_n\in\mathbb{R}$ de forma que o polinómio $u_n-y_{n+1}-\gamma_ny_{n-1}$ seja solução de (1) com $\lambda_{n+1}$ no lugar de $\lambda_n$. Ficando concluída a demonstração.

Tendo em atenção este resultado demos juntamente com Marcellán [3] uma condição necessária e suficiente para a regularidade (no sentido exposto em [4]) das soluções da *equação de Pearson*

$$((a_0x^2+a_1x+a_2)w(x))'=(b_0x+b_1)w(x)\,. \tag{3}$$

Um ano mais tarde, Vicente Gonçalves deu em [8] uma representação diferencial para as soluções polinomiais $\{y_n\}$ de (1) (mesmo quando estas não são ortogonais).

**Teorema 2** *Seja $y_n(x)$ uma solução polinomial de (1) então*

$$y_n=w^{-1}(x)\left(w(x)\phi^n(x)\left(c_1+\int_{x_0}^x\frac{N(t)}{w(t)\phi^{n-1}(t)}dt\right)\right)^{(n)} \tag{4}$$

*onde $w$ é uma solução de (3), $\phi(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$, $\psi(x)=b_0x+b_1$, $c_1$ é uma constante real e $N$ é um polinómio de grau quando muito $n$.*

**Ideia da demonstração.**
**(a)** Efectuando a mudança de variável

$$\exp\left(\int_{x_0}^x\psi(t)\phi^{-1}(t)dt\right)y=\phi(x)z$$

a equação (1) toma a forma

$$(\phi z)'' - (\psi z)' + \lambda_n z = 0\,.$$

**(b)** Substituindo $z = v^{(n)}$ na anterior equação, obtemos

$$\phi v^{(n+2)} - (2\phi' - \psi) v^{(n+1)} + (\phi'' - \psi' + \lambda_n) v^{(n)} = 0\,.$$

Agora, a equação diferencial de ordem 2 tal que a sua derivada de ordem $n$ coincide com a última equação vem dada por

$$\phi v'' + (2\phi' - \psi - n\phi')v' + (\phi'' - \psi' + \lambda_n - n((n+1)a_0 + (4a_0 - b_0)))v = N'$$

onde $\deg N \leq n$; e portanto,

$$\phi v' + ((1-n)\phi' - \psi)v = N\,.$$

**(c)** Agora, temos somente que resolver uma equação diferencial linear de primeira ordem, e desfazer as mudanças de variável efectuadas para obter a desejada representação para a solução polinomial.

**Observação.** **(1).** Se tomarmos $N \equiv 0$ e $c_1 = 0$ na equação (4) obtemos a fórmula de Rodrigues para as sucessões de polinómios ortogonais clássicas:

$$y_n(x) \;=\; w^{-1}(x)\,(w(x)\phi^n(x))^{(n)}\;.$$

**(2).** Mostrámos em [2] que muitas das caracterizações dos polinómios ortogonais clássicas podem ser obtidas directamente destes dois resultados aqui apresentados.

## Referências

[1] S. Bochner. *Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme.* Math. Zeit. 29 (1929). 730-736.

[2] A. Branquinho. *Problemas Inversos na Teoria dos Polinómios Ortogonais*, Tese de Doutoramento, Univ. Coimbra, Dept. de Matemática. Coimbra. Portugal, Outubro de 1996.

[3] A. Branquinho, F. Marcellán. *Some inverse problems for second order structure relations.* Accepted for publishing in the proceedings of the Second International Conference on Approximation and Optimization.

[4] T.S. Chihara. *An introduction to orthogonal polynomials.* Gordon and Breach. New York 1978.

[5] H.L. Krall, O. Frink. *A new class of of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc. 65. (1949). 100-115.

[6] F. Tricomi. Vorlesungen über Orthogonalreihen. Springer-Verlag. 1970 (Second Edition).

[7] J. Vicente Gonçalves. *Sur une formule de recurrence.* Portugaliæ Math. 3 (3). (1942). 222-233.

[8] J. Vicente Gonçalves. *Sur la formule de Rodrigues.* Portugaliæ Math. 4 (1). (1943). 52-64.