Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra
Grupo de Estudos Monetários e Financeiros (GEMF)
Av. Dias da Silva, 165 – 3004-512 COIMBRA, PORTUGAL
http://www2.fe.uc.pt/~gemf/ - gemf@sonata.fe.uc.pt

Pedro Miguel Avelino Bação

Identificação de Vectores de Cointegração:
Análise de Alguns Exemplos

ESTUDOS DO GEMF

N.º 8 **2000**

PUBLICAÇÃO CO-FINANCIADA PELA
FUNDAÇÃO PARA A CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Identificação de Vectores de Cointegração: Análise de Alguns Exemplos

Pedro Miguel Avelino Bação*

Grupo de Estudos Monetários e Financeiros
Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra
Av. Dias da Silva, 165
3004-512 Coimbra
Portugal

E-mail: pmab@sonata.fe.uc.pt

Resumo

O objectivo deste texto é apresentar o problema da identificação de vectores de cointegração, através da análise de alguns exemplos, e as suas implicações para a realização de testes sobre os vectores de cointegração.

Na primeira parte deste trabalho, introduzimos de forma sumária as noções de cointegração e estacionaridade e um primeiro exemplo do problema da identificação, que é resolvido simplesmente através duma normalização arbitrária.

Na segunda secção, analisamos o problema da identificação de vectores de cointegração. Abordamos ainda a possibilidade de identificar vectores de cointegração através de restrições de exclusão e de normalização, fazendo uma breve referência a outros tipos de restrições sobre os vectores de cointegração. A questão da identificação de vectores de cointegração através de restrições sobre os coeficientes de ajustamento é deixada para o Apêndice.

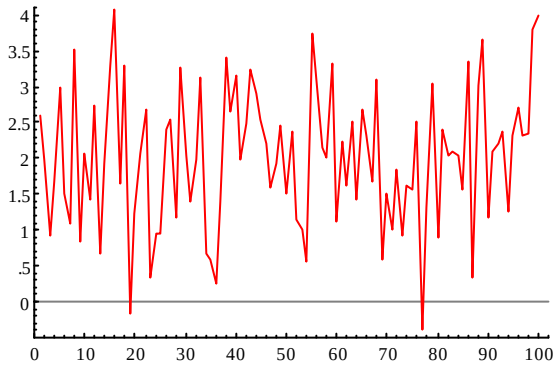
Na terceira secção do texto, tratamos a relação do problema da identificação com a formulação de hipóteses sobre o espaço de cointegração. Verifica-se, nessa secção, que as restrições suficientes para a identificação do espaço ou de um vector do espaço correspondente a uma relação de cointegração de interesse poderão não ser testáveis. Por outro lado, a imposição de restrições de identificação de vectores particulares poderá não ser necessária para efectuar o teste desejado.

A quarta secção conclui o trabalho.

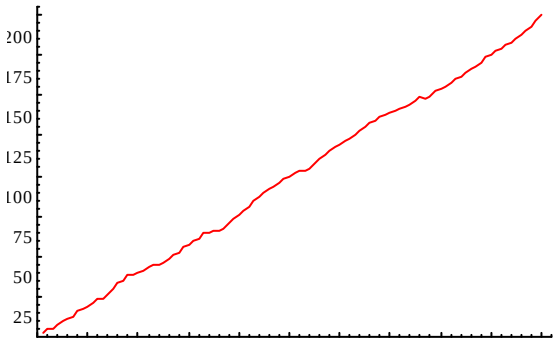
* Agradeço as sugestões e os comentários do Prof. Doutor João Sousa Andrade. Os erros remanescentes são da minha inteira responsabilidade.

1. Introdução

A análise econométrica de séries temporais baseia-se cada vez mais nos conceitos de estacionaridade e cointegração [veja-se Engle e Granger (1987)]. Este último conceito pretende descrever uma ideia simples: se existir uma relação de longo prazo entre certas variáveis, então haverá uma combinação (usualmente considerada linear) estacionária entre essas variáveis. Uma combinação (ou uma variável) estacionária é aquela cujas características (nomeadamente a média, a variância e as autocovariâncias) não se alteram ao longo do tempo.[1] Vejamos alguns gráficos exemplificativos:

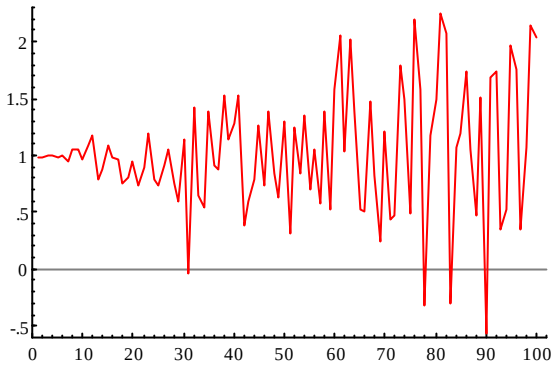


Este primeiro gráfico representa uma variável estacionária. Se olhássemos apenas para o comportamento da variável aí representada nos últimos períodos, atribuiríamos a essa variável as mesmas características que lhe teríamos atribuído caso tivéssemos olhado apenas para o comportamento da variável nos primeiros períodos, ou nos períodos intermédios.



A variável presente neste segundo gráfico tem um comportamento crescente, indiciando a sua não estacionaridade, dado que, se a realização for representativa, a

média da variável não será constante. Por exemplo, a média das primeiras 20 observações aparenta ser algo inferior a 25, enquanto que a média das últimas 20 observações estará próxima de 175.



No terceiro gráfico, a variável é não estacionária, em virtude de a sua variância ser crescente. Se calculássemos a variância das primeiras observações, obteríamos um valor muito inferior ao da variância das últimas observações.

A teoria econométrica que lida com variáveis não estacionárias é diferente da necessária para lidar com variáveis estacionárias, a qual constituía a base do ensino e da aplicação da econometria até ao início dos anos 80.[2] No entanto, pode acontecer, tal como indicado acima, que variáveis não estacionárias possam ser combinadas de forma a originarem uma variável estacionária. Vejamos o seguinte exemplo:

$$x_t = x_{t-1} + e_t$$
$$y_t = \frac{1}{2} x_t + u_t$$

Admitamos que ε e u são variáveis estacionárias às quais atribuímos as seguintes características:

$$\forall t, E(e_t) = m_e, E\left[(e_t - m_e)(e_{t-s} - m_e)\right] = s_{e,s}$$
$$\forall t, E(u_t) = m_u, E\left[(u_t - m_u)(u_{t-s} - m_u)\right] = s_{u,s}$$

As variáveis x e y são não estacionárias, mas a variável:

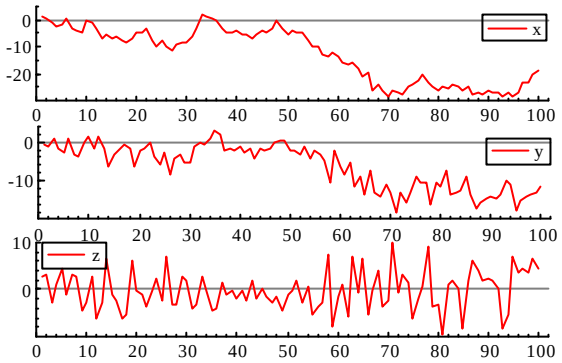
[1] Neste caso, fala-se mais propriamente em estacionaridade fraca, ou estacionaridade em sentido lato, ou estacionaridade em covariância, ou ainda estacionaridade de segunda ordem [veja-se, por exemplo, Hamilton (1994)].

$$z_t = x_t - 2\ y_t = -2\ u_t$$

é estacionária, pois:

$$\forall t, E(z_t) = -2E(u_t) = -2m_e = m_z$$
$$\forall t, E\left[(z_t - m_z)(z_{t-s} - m_z)\right] = 4E\left[(u_t - m_u)(u_{t-s} - m_u)\right] = 4s_{u,s} = s_{z,s}$$

Os gráficos seguintes ilustram uma possível realização das variáveis *x*, *y* e *z*.



Neste exemplo, sabemos que o vector (1, -2) é um vector de cointegração entre as variáveis *x* e *y*, ou seja, z = 1.x - 2.y é uma variável estacionária. Contudo, se *z* é uma variável estacionária, então ϕ.z também será uma variável estacionária, qualquer que seja ϕ. Isto é, (ϕ, -2ϕ) também será um vector de cointegração entre *x* e *y*.

Assim, o espaço de cointegração entre *x* e *y* é constituído pelos vectores da forma (h, -2h). A dimensão do espaço de cointegração é igual ao número de relações de cointegração entre as variáveis. Neste caso concreto, a dimensão é igual a um. Temos aqui um exemplo do chamado "problema da identificação" - veja-se, por exemplo, Johnston e DiNardo (1997) - porque há um número infinito de vectores que podem representar esta relação de cointegração entre *x* e *y*.

No entanto, este caso não é considerado um verdadeiro problema de identificação, pois basta normalizar o vector de cointegração em relação a uma das variáveis (ou seja, considerar que o coeficiente correspondente a essa variável no vector

[2] Para verificar esta evolução, comparem-se duas edições do mesmo livro, tais como, por exemplo, Johnston (1984) e Johnston e DiNardo (1997).

de cointegração é igual a um) para determinar um vector que representará a relação de cointegração existente entre x e y.

Deste modo, normalizando o vector em relação à variável x, obtemos o vector de cointegração:

$$\frac{1}{f}(f, -2f) = (1, -2)$$

Normalizando em relação a y, obtemos o vector de cointegração alternativo:

$$\frac{1}{-2f}(f, -2f) = (-\frac{1}{2}, 1)$$

Podemos encarar a passagem de um vector ao outro como uma mera mudança de unidades. Os verdadeiros problemas de identificação surgem quando há mais do que uma relação de cointegração (algo que não é possível acontecer quando se consideram apenas duas variáveis não estacionárias).

O objectivo deste texto é apresentar o problema da identificação de vectores de cointegração, através da análise de alguns exemplos, e as suas implicações para a realização de testes sobre os vectores de cointegração.[3]

Na segunda secção, analisaremos o problema da identificação de vectores de cointegração. Abordaremos ainda a possibilidade de identificar vectores de cointegração através de restrições de exclusão e de normalização, fazendo uma breve referência a outros tipos de restrições sobre os vectores de cointegração. Note-se, a propósito, que também é possível identificar vectores de cointegração através de restrições sobre os coeficientes de ajustamento das variáveis em direcção à relação de longo prazo. No entanto, é pouco provável que haja justificações teóricas para a imposição dessas restrições. Deixaremos a questão da identificação de vectores de cointegração através de restrições sobre os coeficientes de ajustamento para o Apêndice. Na terceira secção do texto, trataremos a relação do problema da identificação com a formulação de hipóteses sobre o espaço de cointegração. A quarta secção conclui o trabalho.

[3] Como se tornará claro mais adiante, será mais adequado dizer que os testes incidirão sobre o espaço de cointegração.

2. Identificação de Vectores de Cointegração

O exemplo clássico em questões de identificação é o da oferta e procura num mercado. Suponhamos então que as funções de oferta e de procura de um bem envolvem, no total, quatro variáveis: x, y, z e w. Para sermos mais concretos, podemos dizer que x representa o preço de uma matéria-prima importante no fabrico desse bem; y representa a quantidade transaccionada desse bem; z representa o preço do bem e w representa a intensidade da cor do bem transaccionado no mercado em questão.

Suponhamos ainda que os vectores de cointegração que representam os "verdadeiros" comportamentos de oferta e de procura são, respectivamente:

$$\left(b_1, b_2, b_3, b_4\right) \text{ e } \left(b_5, b_6, b_7, b_8\right)$$

Na relação que descreve o comportamento da oferta, b_1, b_2, b_3 e b_4 representam, respectivamente, os coeficientes de x, y, z e w. A mesma ordenação aplica-se ao comportamento da procura.

Novamente, se:

$$u = b_1.x + b_2.y + b_3.z + b_4.w$$

é uma variável estacionária, também ϕ_1.u será uma variável estacionária, qualquer que seja ϕ_1. Por outro lado, se:

$$v = b_5.x + b_6.y + b_7.z + b_8.w$$

é uma variável estacionária, também ϕ_2.v será uma variável estacionária, qualquer que seja ϕ_2. E se ϕ_1.u e ϕ_2.v são variáveis estacionárias, então também ϕ_1.u+ϕ_2.v será uma variável estacionária, quaisquer que sejam ϕ_1 e ϕ_2, pois combinações lineares de variáveis estacionárias são igualmente estacionárias.

Quer isto dizer que a variável definida da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
f_1.u + f_2.v &= f_1.\left(b_1.x + b_2.y + b_3.z + b_4.w\right) + f_2.\left(b_5.x + b_6.y + b_7.z + b_8.w\right) \\
&= \left(f_1.b_1 + f_2.b_5\right).x + \left(f_1.b_2 + f_2.b_6\right).y + \left(f_1.b_3 + f_2.b_7\right).z + \\
&\quad + \left(f_1.b_4 + f_2.b_8\right).w
\end{aligned}
$$

é uma variável estacionária e que, por conseguinte, o vector:

$$\left(f_1.b_1 + f_2.b_5, f_1.b_2 + f_2.b_6, f_1.b_3 + f_2.b_7, f_1.b_4 + f_2.b_8\right)$$

é também um vector de cointegração entre as quatro variáveis.

Podemos expor o mesmo fenómeno da seguinte maneira. O espaço de cointegração neste exemplo é gerado pelos vectores:

$$\left(b_1, b_2, b_3, b_4\right) \text{ e } \left(b_5, b_6, b_7, b_8\right)$$

os quais, por hipótese,[4] são linearmente independentes. O espaço de cointegração terá, portanto, dimensão igual a dois. Qualquer vector pertencente a este espaço será também um vector de cointegração entre as variáveis, mas não representará necessariamente nem a relação de oferta, nem a relação de procura. Poderá antes representar uma mistura das duas, se ϕ_1 e ϕ_2 forem simultaneamente não nulos. Se apenas ϕ_1 for diferente de zero, o vector de cointegração resultante (que será colinear com *u*) representará a relação da oferta. Se apenas ϕ_2 for diferente de zero, o vector de cointegração resultante (que será colinear com *v*) representará a relação da procura.

Podemos analisar o problema da identificação da forma que se segue. Admitamos que sabemos duas coisas: primeira, que há duas relações de cointegração entre as quatro variáveis; segunda, que dois determinados vectores geram o espaço de cointegração entre as quatro variáveis, *x*, *y*, *z* e *w*. Esses vectores são:

$$v_1 = \left(g_1, g_2, g_3, g_4\right) \text{ e } v_2 = \left(g_5, g_6, g_7, g_8\right)$$

Vamos supor que as componentes destes vectores são todas diferentes de zero (situação que será encontrada quase certamente na prática). Estes vectores são

linearmente independentes um do outro (uma vez que geram o espaço de cointegração, o qual tem dimensão igual a dois) e podem ser escritos como combinações lineares dos vectores que representam os "verdadeiros" comportamentos de oferta e de procura (que são desconhecidos pelo investigador, o qual procura inferir algo sobre eles através da análise de cointegração):

$$c_1 = (b_1, b_2, b_3, b_4) \text{ e } c_2 = (b_5, b_6, b_7, b_8)$$

Os vectores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ serão combinações lineares de $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$, uma vez que, obviamente, $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ pertencem ao espaço de cointegração.

Se estivermos na posse da informação relativa apenas aos valores tomados pelas componentes de $\mathbf{v_1}$ e de $\mathbf{v_2}$, não poderemos dizer nada[5] acerca dos valores tomados pelos parâmetros presentes nas funções de oferta e de procura (parâmetros esses que estão reunidos nos vectores $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$).

Porém, suponhamos agora que sabíamos que a variável *w* não pertence à relação de oferta (isto é, $b_4 = 0$), mas que pertence à relação correspondente ao comportamento da procura ($b_8 \neq 0$): vamos admitir que a intensidade da cor não influencia o comportamento da oferta (o custo de produção será o mesmo, independentemente da intensidade da cor do bem produzido), mas que os consumidores têm uma preferência quanto a essa intensidade da cor. Isto implica que os vectores pertencentes ao espaço de cointegração[6] que sejam da forma:

$$(d_1, d_2, d_3, 0)$$

representam a função oferta, uma vez que não é possível obter vectores desta forma através de uma combinação linear de $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$, a não ser que o peso dado a $\mathbf{c_2}$ seja igual a zero (na notação usada atrás, ϕ_2=0). Caso contrário, a quarta componente do vector resultante duma combinação linear de $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ seria diferente de zero. Mais concretamente, uma combinação linear entre $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$:

[4] Uma vez que estamos a partir do pressuposto de que há duas relações de cointegração entre as quatro variáveis.
[5] Ou quase nada: podemos apenas dizer qual é o espaço gerado por esses vectores.

$$f_1.(b_1, b_2, b_3, 0) + f_2.(b_5, b_6, b_7, b_8) =$$
$$= (f_1.b_1 + f_2.b_5, f_1.b_2 + f_2.b_6, f_1.b_3 + f_2.b_7, f_2.b_8)$$

só tem a forma pretendida (quarta componente igual a zero) se $f_2.b_8 = 0$, o que implica $f_2 = 0$, pois, por hipótese, $b_8 \neq 0$. Portanto, o peso dado à relação que representa o comportamento da procura é zero e o vector resultante da combinação linear reflecte apenas o comportamento da função oferta.

Voltemos aos vectores conhecidos pelo investigador, $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$. Podemos obter um vector da forma $(d_1, d_2, d_3, 0)$ subtraindo ao primeiro vector o segundo multiplicado por:

$$\frac{g_4}{g_8}$$

Temos assim:

$$v_1 - \frac{g_4}{g_8} v_2 = (g_1, g_2, g_3, g_4) - \frac{g_4}{g_8}(g_5, g_6, g_7, g_8)$$
$$= \left(g_1 - \frac{g_4.g_5}{g_8}, g_2 - \frac{g_4.g_6}{g_8}, g_3 - \frac{g_4.g_7}{g_8}, 0 \right)$$

Este vector é da forma $(d_1, d_2, d_3, 0)$ e, por isso, representa a função de oferta. Qualquer vector obtido a partir deste através da multiplicação por um escalar não nulo representará também essa relação de cointegração:[7]

$$f_1.\left(g_1 - \frac{g_4.g_5}{g_8}, g_2 - \frac{g_4.g_6}{g_8}, g_3 - \frac{g_4.g_7}{g_8}, 0 \right)$$

[6] E que, por consequência, possam ser escritos como combinação linear dos vectores $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$, ou dos vectores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

[7] De forma porventura mais esclarecedora, podemos dizer que, com a restrição imposta ($b_4 = 0$), identificámos o espaço associado ao comportamento da oferta.

No entanto, tal como vimos atrás, basta-nos normalizar o vector para identificar um vector representativo do comportamento da oferta. Admitamos que b_1 é diferente de zero, o que implica, quase certamente:

$$g_1 - \frac{g_4 \cdot g_5}{g_8} \neq 0$$

Podemos então normalizar o vector em relação à primeira variável[8] para o que fazemos:

$$f_1 = \frac{1}{g_1 - \frac{g_4 \cdot g_5}{g_8}}$$

o que implicará:

$$f_1 \cdot \left(g_1 - \frac{g_4 \cdot g_5}{g_8}, g_2 - \frac{g_4 \cdot g_6}{g_8}, g_3 - \frac{g_4 \cdot g_7}{g_8}, 0 \right) = \left(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_1}, 0 \right)$$

Deste modo, obtemos um único vector de cointegração para representar a oferta: aquele correspondente ao valor particular atribuído a ϕ_1. Este vector coincidirá com o "verdadeiro" vector de cointegração se β_1 for igual à unidade. Tal será o caso, por exemplo, se a primeira variável (no nosso exemplo, o preço da matéria-prima) for uma função das restantes da forma:

$$x_t = u_t - b_2 \cdot y_t - b_3 \cdot z_t - b_4 \cdot w_t$$

A variável (estacionária) u representaria o desvio em relação ao valor de equilíbrio de longo prazo da variável x. Esta normalização, à partida, não seria muito adequada. Em princípio, o investigador estaria mais interessado em normalizar o vector em relação à quantidade, ou, eventualmente, em relação ao preço. De qualquer modo, a

[8] O problema de testar a validade da normalização é tratado por Boswijk (1996) e Luukkonen, Ripatti, e Saikkonen (1999).

conclusão é que, com uma restrição de exclusão ($d_4 = 0$) e outra de normalização ($d_1 = 1$), conseguimos identificar um vector representativo da função oferta.

E quanto à função procura? Comecemos por supor que não há qualquer restrição em relação aos elementos desta segunda relação de cointegração. Quer isto dizer que, do ponto de vista do investigador (que conhece $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$, mas desconhece $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$), qualquer vector (d_5, d_6, d_7, d_8) poderá representar a função procura. Será que a normalização resolverá o problema da identificação? Isto é, será que há um só vector pertencente ao espaço de cointegração (gerado por $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$, ou, de forma equivalente, por $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$) que respeite a restrição de normalização, por exemplo, $d_6 = 1$?

Queremos então saber quais são os vectores pertencentes ao espaço de cointegração que respeitam a referida restrição, ou seja, quais são os vectores que satisfazem a seguinte igualdade:

$$f_1.(b_1, b_2, b_3, 0) + f_2.(b_5, b_6, b_7, b_8) = (d_5, 1, d_7, d_8)$$

Naturalmente, qualquer vector que satisfaça a igualdade que se segue:

$$f_1.b_2 + f_2.b_6 = 1$$

respeitará a restrição de normalização. Por conseguinte, há um número infinito de vectores pertencentes ao espaço de cointegração (correspondendo a diferentes pares de valores para ϕ_1 e ϕ_2) que satisfazem a restrição, incluindo vectores que atribuem um peso não nulo à relação da oferta (ϕ_1 diferente de zero), pelo que esta restrição é insuficiente para identificar um vector que represente a relação associada ao comportamento da procura. Nestas circunstâncias, esta relação seria não-identificada.

Suponhamos agora que a variável x não entra na relação de procura ($b_5 = 0$): os consumidores não têm em consideração (possivelmente nem conhecerão) o preço da matéria-prima quando decidem a quantidade a consumir do bem. Fazendo um raciocínio semelhante ao empregue anteriormente, concluímos que precisamos de determinar os vectores do espaço de cointegração que respeitam a seguinte igualdade:

$$f_1.(b_1, b_2, b_3, 0) + f_2.(0, b_6, b_7, b_8) = (0, 1, d_7, d_8)$$

Terá que se verificar:

$$f_1.b_1 + f_2.0 = 0 \Rightarrow f_1 = 0 \text{ (pois } b_1 \neq 0\text{, por hipótese)}$$

e

$$f_1.b_2 + f_2.b_6 = 1 \Rightarrow f_2 = \frac{1}{b_6}$$

Portanto, há um único vector, correspondente aos valores indicados para ϕ_1 e ϕ_2, que respeita estas restrições de exclusão e de normalização. O vector em causa é igual a:

$$\begin{aligned} f_1.\left(b_1,\ b_2,\ b_3, 0\right) + f_2.\left(0, b_6, b_7, b_8\right) &= \frac{1}{b_6}\left(0, b_6, b_7, b_8\right) \\ &= \left(0,1,\frac{b_7}{b_6},\frac{b_8}{b_6}\right) \end{aligned}$$

Este vector representa o comportamento da procura, pois o peso dado à relação de oferta é zero ($f_1 = 0$). Os leitores mais familiarizados com a teoria econométrica reconhecerão que se trata aqui, no fundo, de aplicar a condição de característica para a identificação de equações [veja-se, por exemplo, Johnston e DiNardo (1997)].

Até este momento, impusemos apenas restrições de exclusão e de normalização. Estes são os tipos de restrições mais discutidos e aplicados nos estudos sobre cointegração. Todavia, há situações em que são relevantes outras restrições. Suponhamos, por exemplo, que, de acordo com a teoria económica pertinente,[9] o coeficiente de *y* na relação correspondente à oferta é o simétrico do coeficiente de *x* nessa relação, ou seja:

$$b_2 = -b_1$$

Será esta restrição suficiente para identificar o espaço associado à relação da oferta? Isto é, que vectores pertencentes ao espaço de cointegração satisfazem esta restrição? Para respondermos, temos que analisar a seguinte equação:

$$f_1.(b_1, -b_1, b_3, b_4) + f_2.(b_5, b_6, b_7, b_8) = (d_1, -d_1, d_3, d_4)$$

A restrição será satisfeita se:

$$f_1.b_1 + f_2.b_5 = d_1 \text{ e } f_1.(-b_1) + f_2.b_6 = -d_1$$

o que implica:

$$f_1.b_1 + f_2.b_5 = f_1.b_1 - f_2.b_6 \Leftrightarrow f_2.(b_2 + b_6) = 0$$

Caso a restrição não se aplique também à relação que representa o comportamento da procura, ou seja, se:

$$b_6 \neq -b_5$$

então teremos $f_2 = 0$: o peso dado à relação da procura é zero. Logo, um vector da forma $(d_1, -d_1, d_3, d_4)$ pertence ao espaço gerado pela relação da oferta: a restrição identificou esse espaço. Se normalizarmos o vector de cointegração em relação à primeira variável, obtemos o vector:

$$\left(1, -1, \frac{b_7}{b_1}, \frac{b_8}{b_1}\right)$$

Sem mais restrições, a relação que reflecte o comportamento da procura estaria não-identificada.

[9] Será melhor ignorar a partir de agora as designações dadas às variáveis e raciocinar em abstracto, pois as restrições que iremos usar são meramente exemplificativas e poderão não fazer sentido.

Voltemos agora a supor que a variável *w* não entra na função oferta, mas aparece na função procura ($b_4 = 0$ e $b_8 \neq 0$). Esta restrição de exclusão, já sabemos, identifica o espaço associado à relação da oferta, mas não o associado ao comportamento da procura. Admitamos que a teoria económica sugeria uma outra restrição:

$$b_6 = b_1$$

Assim, o coeficiente da variável *y* na relação da procura é igual ao coeficiente da variável *x* na relação da oferta. Vejamos se esta restrição adicional seria suficiente para identificar o espaço associado à relação da procura. Analisemos então o sistema de equações:

$$f_1.(b_1, b_2, b_3, 0) + f_2.(b_5, b_1, b_7, b_8) = (d_1, d_2, d_3, 0)$$
$$f_3.(b_1, b_2, b_3, 0) + f_4.(b_5, b_1, b_7, b_8) = (d_5, d_1, d_7, d_8)$$

Do estudo anterior sabemos que a relação da oferta é identificada, isto é, $f_2 = 0$. Queremos agora saber se a relação da procura também é identificada, ou seja, se $f_3 = 0$ - queremos saber se os vectores da forma (d_5, d_1, d_7, d_8) pertencem ao espaço correspondente ao comportamento da procura. Temos:

$$f_1.b_1 = d_1 \wedge f_3.b_2 + f_4.b_1 = d_1 \Rightarrow (f_1 - f_4).b_1 = f_3.b_2$$

Desta condição não resulta que ϕ_3 tenha que ser igual a zero, excepto se β_1 for também igual a zero, o que equivaleria a impor duas restrições de exclusão: de *x* na relação da oferta ($b_1 = 0$) e de *y* na relação da procura ($b_6 = b_1 = 0$). Conclui-se que a restrição $b_6 = b_1$ não chegaria para identificar o espaço associado à função procura.

Se impuséssemos mais uma restrição, por exemplo, que o coeficiente de *z* na relação da procura seja o dobro do seu coeficiente na relação da oferta:

$$b_7 = 2.b_3 \text{ (com } b_3 \neq 0\text{)}$$

já identificaríamos o espaço associado ao comportamento da procura. Vejamos o correspondente sistema de equações:

$$f_1.(b_1, b_2, b_3, 0) + f_2.(b_5, b_1, 2.b_3, b_8) = (d_1, d_2, d_3, 0)$$
$$f_3.(b_1, b_2, b_3, 0) + f_4.(b_5, b_1, 2.b_3, b_8) = (d_5, d_1, 2.d_3, d_8)$$

Dado que a restrição de exclusão de *w* da relação da oferta identifica o espaço a ela associado, temos $f_2 = 0$. Temos também:

$$f_1.b_1 = d_1 \wedge f_3.b_2 + f_4.b_1 = d_1 \Rightarrow (f_1 - f_4).b_1 = f_3.b_2$$

e ainda

$$f_1.b_3 = d_3 \text{ e } f_3.b_3 + f_4.2.b_3 = 2.d_3$$

o que implica $2.f_1.b_3 = f_3.b_3 + f_4.2.b_3 \Leftrightarrow f_3 = 2.(f_1 - f_4)$

pois, por hipótese, $b_3 \neq 0$.

Resulta então:

$$(f_1 - f_4).b_1 = f_3.b_2 \Rightarrow (f_1 - f_4).b_1 = 2.(f_1 - f_4).b_2$$
$$\Rightarrow b_1 = 2.b_2 \vee f_1 = f_4$$

Como não impusemos a primeira restrição ($b_1 = 2.b_2$), aceitamos a segunda ($f_1 = f_4$), donde resulta:

$$f_3 = 2.(f_1 - f_4) = 0$$

Assim, a relação da procura está identificada: o espaço gerado por essa relação inclui os vectores pertencentes ao espaço de cointegração que são da forma $(d_5, d_1, 2d_3, d_8)$, sendo os vectores que representam a oferta da forma $(d_1, d_2, d_3, 0)$.

3. Identificação e Teste de Hipóteses

Num estudo da cointegração entre certas variáveis, o procedimento normalmente seguido[10] é o seguinte:

1º determinar a ordem de integração das variáveis de interesse - o habitual é empregar variáveis integradas de ordem um[11] no estudo;

2º determinar o número de relações de cointegração entre essas variáveis, isto é, determinar a dimensão do espaço de cointegração entre elas;

3º estimar vectores (em número igual à dimensão do espaço de cointegração) que gerem esse espaço de cointegração – na nossa notação de há pouco, admitindo a existência de duas relações de cointegração, neste passo estimam-se os vectores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$;

4º em face dos resultados obtidos nos passos anteriores, testar as hipóteses relevantes sobre o espaço de cointegração.

Continuemos no contexto do nosso exemplo com quatro variáveis (*x*, *y*, *z* e *w*) integradas de ordem um (1º passo) e suponhamos que os testes indicaram a existência de duas relações de cointegração (2º passo), as quais representam os comportamentos de oferta e de procura num mercado. O programa informático que utilizarmos para fazer a análise de cointegração fornecer-nos-á (3ª passo) dois vectores estimados:

$$\hat{v}_1 = (\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3, \hat{g}_4) \text{ e } \hat{v}_2 = (\hat{g}_5, \hat{g}_6, \hat{g}_7, \hat{g}_8)$$

que serão linearmente independentes e que podem ser encarados como o resultado de combinações lineares[12] das estimativas que o programa informático produziria para os "verdadeiros" vectores de cointegração, caso o programa informático dispusesse de um critério para as produzir:

[10] Empregando geralmente a metodologia de Johansen (1995).
[11] Ou seja, variáveis que não são estacionárias, mas cuja primeira diferença é estacionária.
[12] Determinadas em função da normalização adoptada por esse programa informático.

$$\hat{c}_1 = \left(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4\right) \text{ e } \hat{c}_2 = \left(\hat{b}_5, \hat{b}_6, \hat{b}_7, \hat{b}_8\right)$$

Assim:

$$\left(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3, \hat{g}_4\right) = l_1 \cdot \left(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4\right) + l_2 \cdot \left(\hat{b}_5, \hat{b}_6, \hat{b}_7, \hat{b}_8\right)$$
$$\left(\hat{g}_5, \hat{g}_6, \hat{g}_7, \hat{g}_8\right) = l_3 \cdot \left(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4\right) + l_4 \cdot \left(\hat{b}_5, \hat{b}_6, \hat{b}_7, \hat{b}_8\right)$$

Suponhamos que queremos testar a hipótese de existir um vector pertencente ao espaço de cointegração da forma $\left(d_1, d_2, d_3, 0\right)$. Isto é, queremos testar a hipótese de as três primeiras variáveis (*x*, *y* e *z*) serem cointegradas entre si. Para isso, terão que existir[13] ϕ_1 e ϕ_2 tais que:

$$\left(d_1, d_2, d_3, 0\right) = f_1 \cdot \left(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3, \hat{g}_4\right) + f_2 \cdot \left(\hat{g}_5, \hat{g}_6, \hat{g}_7, \hat{g}_8\right)$$

Daqui resulta:

$$f_1 \hat{g}_4 + f_2 \hat{g}_8 = 0$$

Como dificilmente o valor estimado para $\hat{g}_4$, ou para qualquer outro coeficiente, será exactamente igual a zero (ou suficientemente próximo de zero para causar problemas numéricos), o programa informático poderá sempre escolher um par (ϕ_1, ϕ_2) tal que:

$$f_1 = -\frac{f_2 \cdot \hat{g}_8}{\hat{g}_4}$$

e assim respeitar a restrição, quaisquer que sejam[14] os valores estimados para os vectores geradores do espaço de cointegração. Este facto significa que a referida restrição não é, na realidade, limitativa. Esta restrição identifica, como vimos atrás, o espaço associado à função oferta, mas, isoladamente, não é possível testar a sua

[13] Ou, mais correctamente, ser aceitável a sua existência, dado o nível de significância do teste.

validade. Efectivamente, *essa restrição não restringe o espaço de cointegração estimado*. Portanto, não fará sentido testar esta restrição e, caso a tentemos testar, o programa informático não efectuará o teste.[15]

No caso concreto do programa PCFIML,[16] aparecerá uma mensagem a informar que a restrição não limita o espaço de cointegração (é "not binding").

Acrescentar uma restrição de normalização não adiantaria. Suponhamos que queríamos testar $d_1 = 1$ e $d_4 = 0$. Teríamos:

$$(1, d_2, d_3, 0) = f_1 \cdot (\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3, \hat{g}_4) + f_2 \cdot (\hat{g}_5, \hat{g}_6, \hat{g}_7, \hat{g}_8)$$

$$f_1 \hat{g}_4 + f_2 \hat{g}_8 = 0 \Leftrightarrow f_1 = \frac{-f_1 \hat{g}_8}{\hat{g}_4}$$

$$f_1 \hat{g}_1 + f_2 \hat{g}_5 = 1 \Leftrightarrow f_2 = \frac{1}{\hat{g}_5 - \frac{\hat{g}_1 \cdot \hat{g}_8}{\hat{g}_4}}$$

Novamente, o programa informático poderá escolher o par resultante deste sistema de forma a respeitar as restrições, quaisquer que tenham sido os valores estimados para os vectores geradores do espaço de cointegração.[17] Assim, estas duas restrições continuam a não limitar o espaço de cointegração e, por isso, não são testáveis.

Passemos ao seguinte conjunto de restrições: $d_3 = 0$ e $d_4 = 0$. Com estas restrições, estamos a testar a hipótese de as variáveis x e y serem cointegradas entre si. Agora teremos:

---

[14] Ou quase – relembrem-se as palavras anteriores.

[15] Uma implicação deste exemplo é que se houver duas relações de cointegração entre quatro variáveis, então as variáveis serão cointegradas três a três: qualquer variável será cointegrada com quaisquer duas das outras três, podendo eventualmente existir um coeficiente nulo no vector de cointegração correspondente. Se houver três relações de cointegração entre quatro variáveis, então as variáveis serão cointegradas duas a duas: qualquer variável será cointegrada com qualquer uma das outras três. Do mesmo modo, se houver duas relações de cointegração entre três variáveis, então as variáveis serão cointegradas duas a duas: qualquer variável será cointegrada com qualquer uma das outras duas. Será necessário recorrer à teoria económica para identificar as relações de interesse. Davidson (1998) discute de forma aprofundada esta problemática.

[16] Veja-se Doornik e Hendry (1997).

$$(d_1, d_2, 0, 0) = f_1.(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3, \hat{g}_4) + f_2.(\hat{g}_5, \hat{g}_6, \hat{g}_7, \hat{g}_8)$$
$$(d_5, d_6, d_7, d_8) = f_3.(\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3, \hat{g}_4) + f_4.(\hat{g}_5, \hat{g}_6, \hat{g}_7, \hat{g}_8)$$

e as restrições resultam em:

$$f_1\hat{g}_3 + f_2\hat{g}_7 = 0 \Leftrightarrow f_1 = \frac{-f_2\hat{g}_7}{\hat{g}_3}$$
$$f_1\hat{g}_4 + f_2\hat{g}_8 = 0 \Leftrightarrow f_2.\left(\hat{g}_8 - \frac{\hat{g}_4.\hat{g}_7}{\hat{g}_3}\right) = 0 \Leftrightarrow f_2 = 0 \vee \hat{g}_8 = \frac{\hat{g}_4.\hat{g}_7}{\hat{g}_3}$$

Não podemos ter $f_2 = 0$, pois isso implicaria $f_1 = 0$ e, logo, a nulidade do vector de cointegração. Ficamos assim com a restrição:

$$\hat{g}_8 = \frac{\hat{g}_4\hat{g}_7}{\hat{g}_3}$$

a qual incide sobre o espaço de cointegração estimado pelo programa informático - esta restrição já poderá ser testada.

Vamos confirmar que as restrições de exclusão identificam o espaço associado à relação da oferta. Queremos determinar os vectores que satisfazem a igualdade:

$$(d_1, d_2, 0, 0) = l_1.(b_1, b_2, 0, 0) + l_2.(b_5, b_6, b_7, b_8)$$

Tem-se:

$$0 = l_1.0 + l_2.b_7 \text{ e } 0 = l_1.0 + l_2.b_8$$

[17] É improvável que $\hat{g}_5 - \frac{\hat{g}_1\hat{g}_8}{\hat{g}_4} = 0$ e que, em consequência, haja dificuldades na definição do par. Em nosso entender, esta afirmação pode ser entendida como uma implicação da análise de McManus (1992). Em relação à restrição de normalização, recorde-se, no entanto, a nota n.º 8.

donde resulta que $l_2 = 0$, uma vez que as restrições se aplicam apenas à relação da oferta. Assim, o peso dado à relação da procura é nulo e os vectores da forma $(d_1, d_2, 0, 0)$ representam a relação da oferta.

Estas restrições de exclusão identificam o espaço associado à relação da oferta, mas não um vector de cointegração em concreto. Para identificar um vector representativo do comportamento da oferta, bastaria normalizar o vector de cointegração. Contudo, isso não chegaria para identificar o vector relativo à procura. Do ponto de vista da realização do teste (conjunto) das restrições $d_3 = 0$ e $d_4 = 0$, é indiferente identificar ou não os vectores de cointegração. O resultado do teste será o mesmo, quer se imponham restrições para identificar os vectores, quer não.[18] No caso do programa PCFIML, o programa executa o teste conjunto e, caso os vectores não estejam identificados, normaliza-os arbitrariamente e imprime uma mensagem a referir a falta de identificação.

Para completar o exemplo, verifiquemos que as restrições $d_5 = 0$ e $d_6 = 1$ identificariam um segundo vector de cointegração, linearmente independente do primeiro (representativo do comportamento de oferta). Neste contexto, o sistema de equações seria:

$$(1, d_2, 0, 0) = l_1.(b_1, b_2, 0, 0) + l_2.(b_5, b_6, b_7, b_8)$$
$$(0, 1, d_7, d_8) = l_3.(b_1, b_2, 0, 0) + l_4.(b_5, b_6, b_7, b_8)$$

As restrições implicam:

$$1 = l_1.b_1 + l_2.b_5$$
$$0 = l_1.0 + l_2.b_7$$
$$0 = l_1.0 + l_2.b_8$$
$$0 = l_3.b_1 + l_4.b_5$$
$$1 = l_3.b_2 + l_4.b_6$$

Daqui resulta:

$$l_1 = \frac{1}{b_1}$$
$$l_2 = 0$$
$$l_3 = -\frac{l_4 . b_5}{b_1}$$
$$l_4 = \frac{b_1}{b_1 . b_6 - b_5 . b_2}$$

Estes resultados significam que há um único par de vectores pertencentes ao espaço de cointegração que satisfaz as restrições impostas. O primeiro vector representará o comportamento da oferta, pois $l_2 = 0$. O segundo vector não representará a função procura, uma vez que as restrições impostas não nos permitem concluir que λ_3 será igual a zero. Note-se que se tivéssemos suposto que a variável *x* não entrava na função procura ($b_5 = 0$) já estaríamos a identificar um vector pertencente ao espaço associado ao comportamento da procura, pois teríamos:

$$l_3 = -\frac{l_4 . b_5}{b_1} = 0$$

Para a realização do teste conjunto das restrições $d_3 = 0$ e $d_4 = 0$, seria indiferente impor estas restrições de identificação ($d_5 = 0$ e $d_6 = 1$), ou impor outras (como, por exemplo, $d_5 = 1$ e $d_6 = 0$), ou ainda, como se disse acima, não impor nenhuma destas restrições, uma vez que a restrição que incide sobre o espaço de cointegração estimado pelo programa informático continuaria a ser a mesma que determinámos atrás:

$$\hat{g}_8 = \frac{\hat{g}_4 \hat{g}_7}{\hat{g}_3}$$

As restrições de identificação adicionais apenas limitariam o conjunto de valores que o programa poderia escolher para os parâmetros ϕ.

[18] Desde que, evidentemente, essas restrições não imponham novas limitações ao espaço de cointegração. Note-se que a não imposição de restrições por parte do utilizador corresponde a deixar ao critério do programa informático a escolha das restrições necessárias para identificar os vectores de cointegração.

4. Conclusão

Neste texto procurámos esclarecer alguns aspectos relacionados com o problema da identificação de vectores de cointegração. Este tema é assume bastante relevância, pois da sua compreensão depende a capacidade de entender os resultados apresentados pelos programas informáticos utilizados no estudo da cointegração. A forma de apresentação desses resultados pode mascarar as relações de interesse para o investigador. A imposição e/ou o teste de restrições de identificação constitui o último, e talvez o mais importante, passo na análise de cointegração.

Na primeira parte deste trabalho, apresentámos de forma sumária as noções de cointegração e estacionaridade. Vimos que quando há apenas duas variáveis cointegradas, a dimensão do espaço de cointegração é igual a um e o problema da identificação de um vector de cointegração pode ser resolvido facilmente através da normalização desse vector.

Na segunda parte, vimos que aparecem complicações quando aumentamos a dimensão do espaço de cointegração (o que implica, necessariamente, o aumento do número de variáveis a estudar). Nesta situação, podemos definir dois níveis de identificação: primeiro, identificação do espaço gerado por uma das relações (teóricas) de cointegração; segundo, identificação de um vector particular pertencente a esse espaço. A identificação de um vector particular do espaço, depois deste ter sido identificado, usualmente é obtida através do recurso à normalização do vector. A dificuldade reside na identificação do espaço gerado pela relação de cointegração de interesse. Para identificar esse espaço, poderão ser utilizadas restrições que respeitem a tradicional condição de característica para a identificação de equações integradas em sistemas lineares.

Na terceira parte, analisámos brevemente a relação entre a identificação de vectores de cointegração e a realização de testes de hipóteses sobre esses vectores. Vimos que as restrições suficientes para a identificação do espaço ou de um vector do espaço correspondente a uma relação de cointegração de interesse poderão não ser testáveis. Por outro lado, a imposição de restrições de identificação de vectores particulares poderá não ser necessária para efectuar o teste desejado.

Referências

Boswijk, H. Peter (1996), "Testing Identifiability of Cointegrating Vectors", *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 14, n. 2, pp. 153-160.

Davidson, James (1998), "Structural Relations, Cointegration and Identification: Some Simple Results and their Application", *Journal of Econometrics*, 87, pp. 87-113.

Doornik, Jurgen A.; Hendry, David F. (1997), *Modelling Dynamic Systems using Pcfiml 9.0 for Windows*, London: International Thomson Business Press.

Engle, Robert F.; Granger, C. W. (1987), "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing", *Econometrica*, 55, n. 12, pp. 251-276.

Hamilton, James D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

Johansen, Søren (1995), *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Advanced Texts in Econometrics, Oxford University Press.

Johnston, Jack (1984), *Econometric Methods*, 3ª ed., McGraw-Hill.

Johnston, Jack; DiNardo, John (1997), *Econometric Methods*, 4ª ed., McGraw-Hill.

Luukkonen, Ritva; Ripatti, Antti; Saikkonen, Pentti (1999), "Testing for a Valid Normalization of Cointegrating Vectors in Vector Autoregressive Processes", *Journal of Business and Economic Statistics*, vol. 17, n. 2, pp. 195-204.

McManus, Douglas A. (1992), "How Common is Identification in Parametric Models?", *Journal of Econometrics*, 53, pp. 5-23.

Apêndice: Restrições sobre os coeficientes de ajustamento

De modo simplificado, o *Teorema da Representação de Granger* [veja-se Engle e Granger (1987)] diz que se *n* variáveis são cointegradas, existindo *r* relações de cointegração entre elas (0<r<n), então o processo gerador dessas variáveis pode ser escrito na forma:

$$\Delta W_t = \Pi . W_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \Gamma_i . \Delta W_{t-i} + x_t$$

W_t é o vector das observações das variáveis no período *t* e x_t é ruído branco com média nula. O símbolo Δ representa a primeira diferença das variáveis:

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$$

Para simplificar, vamos supor que não há componentes determinísticas no modelo e que a esperança da primeira diferença das variáveis é igual a zero. A matriz Π pode ser decomposta no produto de duas matrizes: Π=A.B', onde A e B são matrizes *n*x*r* com característica igual a *r*.

A metodologia de Johansen (1995) leva à estimação em primeiro lugar da matriz Π. As matrizes A e B são determinadas através da normalização adoptada para os vectores de cointegração: a normalização adoptada para o cálculo dos vectores de cointegração (matriz B) determina os valores dos elementos de A de forma a que a igualdade Π=A.B' se verifique.

No caso de termos duas variáveis (n=2) e uma relação de cointegração (r=1), ficamos com o sistema:

$$\begin{bmatrix}\Delta x_t\\ \Delta y_t\end{bmatrix} = \Pi.\begin{bmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{k}\Gamma_i.\begin{bmatrix}\Delta x_{t-i}\\ \Delta y_{t-i}\end{bmatrix} + x_t$$

$$= A.B'\begin{bmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix}g_{11}^{i} & g_{12}^{i}\\ g_{21}^{i} & g_{22}^{i}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\Delta x_{t-i}\\ \Delta y_{t-i}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}e_t\\ u_t\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix}g_{11}^{i} & g_{12}^{i}\\ g_{21}^{i} & g_{22}^{i}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\Delta x_{t-i}\\ \Delta y_{t-i}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}e_t\\ u_t\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}a_1.b_1 & a_1.b_2\\ a_2.b_1 & a_2.b_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix}g_{11}^{i} & g_{12}^{i}\\ g_{21}^{i} & g_{22}^{i}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\Delta x_{t-i}\\ \Delta y_{t-i}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}e_t\\ u_t\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_{t-1}\\ y_{t-1}\end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{k}\begin{bmatrix}g_{11}^{i} & g_{12}^{i}\\ g_{21}^{i} & g_{22}^{i}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\Delta x_{t-i}\\ \Delta y_{t-i}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}e_t\\ u_t\end{bmatrix}$$

Daqui resulta:

$$\Delta x_t = a_1.b_1.x_{t-1} + a_1.b_2.y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k}\left(g_{11}^{i}.\Delta x_{t-i} + g_{12}^{i}.\Delta y_{t-i}\right) + e_t$$

$$= a_1.\left(b_1.x_{t-1} + b_2.y_{t-1}\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(g_{11}^{i}.\Delta x_{t-i} + g_{12}^{i}.\Delta y_{t-i}\right) + e_t$$

$$\Delta y_t = a_2.b_1.x_{t-1} + a_2.b_2.y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k}\left(g_{21}^{i}.\Delta x_{t-i} + g_{22}^{i}.\Delta y_{t-i}\right) + u_t$$

$$= a_2.\left(b_1.x_{t-1} + b_2.y_{t-1}\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(g_{21}^{i}.\Delta x_{t-i} + g_{22}^{i}.\Delta y_{t-i}\right) + u_t$$

Calculando a esperança de cada expressão, chegamos à conclusão que:

$$E\left[b_1.x_{t-1} + b_2.y_{t-1}\right] = 0$$

Isto é, em equilíbrio,[19] as variáveis *x* e *y* verificarão a seguinte igualdade:

$$b_1.x = -b_2.y$$

Esta será a relação de longo prazo existente entre as variáveis *x* e *y*. O primeiro termo nas expressões que dão o comportamento das primeiras diferenças das variáveis *x* e *y* representa o ajustamento destas variáveis em direcção à relação de longo prazo.

Para que o ajustamento de x em direcção à relação de longo prazo se processe, é necessário que a_1 tenha sinal oposto ao de b_1. Para que a variável y se aproxime da relação de longo prazo com x é necessário que a_2 tenha sinal oposto ao de b_2. Não é obrigatório que as duas coisas aconteçam. O que é necessário para que o sistema convirja para a relação de equilíbrio é que se verifique o seguinte:

$$-2 < a_1 . b_1 + a_2 . b_2 < 0$$

Isto implica que pelo menos uma das parcelas ($a_1 . b_1$ ou $a_2 . b_2$) seja negativa, mas não necessariamente as duas. Deste modo, pelo menos uma das variáveis estará a corrigir o desequilíbrio em direcção à relação de longo prazo, enquanto que a outra variável, pelo menos, não se estará a afastar mais depressa dessa relação de longo prazo. Suponhamos que a_1 é negativo e b_1 é positivo. Quer isso dizer que quando o desvio em relação à relação de longo prazo for positivo, haverá tendência para a variação de x ser negativa:

$$b_1 . x_{t-1} + b_2 . y_{t-1} > 0 \Rightarrow x_{t-1} > -\frac{b_2}{b_1} y_{t-1} \text{ e } a_1 . \left(b_1 . x_{t-1} + b_2 . y_{t-1} \right) < 0$$

deverá ser acompanhado por uma variação de x:

$$\Delta x_t = a_1 . \left(b_1 . x_{t-1} + b_2 . y_{t-1} \right) + \sum_{i=1}^{k} \left(g_{11}^{i} . \Delta x_{t-i} + g_{12}^{i} . \Delta y_{t-i} \right) + e_t$$

tendencialmente negativa. Se o valor de x for muito elevado em relação ao valor de equilíbrio, o valor de x tenderá a diminuir. Naturalmente, se o valor de x for muito baixo em relação ao valor de equilíbrio, o valor de x tenderá a aumentar. A velocidade de ajustamento em direcção à situação de longo prazo é dada pelo coeficiente a_1. Quanto maior for o valor absoluto de a_1, mais rápido será o ajustamento. Suponhamos que o valor absoluto de a_1 é igual à unidade. Se nada mais se alterasse, daqui resultaria

[19] Isto é, quando as variáveis Δx_t, Δy_t, e_t, u_t e $\left(b_1 . x_{t-1} + b_2 . y_{t-1} \right)$ tomarem valores iguais às suas esperanças, não havendo, por isso, lugar a modificações dos valores assumidos por essas variáveis.

uma correcção total (a 100%) do desequilíbrio verificado no período anterior.[20] Se a_1 for igual a –0,1, a correcção já corresponderá apenas a 10% do desequilíbrio: o ajustamento será então mais lento.

Os quadros abaixo ilustram o ajustamento da variável x para diferentes valores de a_1, supondo que o vector de cointegração é (1, -0.5), que a_2 é igual a zero e que a variação de uma variável depende apenas do desequilíbrio verificado no período anterior:

$$\Delta x_t = a_1 \cdot \left(1 \cdot x_{t-1} - \frac{1}{2} \cdot y_{t-1}\right)$$

Como a_2 é igual a zero, a variável y não se altera. Vamos supor também que os valores iniciais de x e y são, respectivamente, 1 e 3. Nos quadros, "Erro" é o desequilíbrio em relação à relação de longo prazo; "xe|y" é o valor de equilíbrio de x dado o valor de y, "ye|x" é o valor de equilíbrio de y dado o valor de x; "dx" é a diferença entre x e o valor de equilíbrio; "dy" é a diferença entre y e o valor de equilíbrio.

a_1=-1							
t	x	y	Erro	xe|y	ye|x	dx	dy
1	1	3	-0,5	1,5	2	-0,5	1
2	1,5	3	0	1,5	3	0	0
3	1,5	3	0	1,5	3	0	0
4	1,5	3	0	1,5	3	0	0
5	1,5	3	0	1,5	3	0	0
6	1,5	3	0	1,5	3	0	0
7	1,5	3	0	1,5	3	0	0
8	1,5	3	0	1,5	3	0	0
9	1,5	3	0	1,5	3	0	0
10	1,5	3	0	1,5	3	0	0

[20] Devido ao facto de a normalização do vector de cointegração poder ser imposta arbitrariamente, o que implica a existência de arbitrariedade na determinação do valor do coeficiente de ajustamento, a interpretação do valor deste coeficiente como uma percentagem deverá ser reservada para a situação em que o valor do coeficiente da variável respectiva no vector de cointegração é igual à unidade.

a_1 =-0.9							
t	x	Y	Erro	xe|y	ye|x	dx	dy
1	1	3	-0,5	1,5	2	-0,5	1
2	1,45	3	-0,05	1,5	2,9	-0,05	0,1
3	1,495	3	-0,005	1,5	2,99	-0,005	0,01
4	1,4995	3	-0,0005	1,5	2,999	-0,0005	0,001
5	1,49995	3	-5E-05	1,5	2,9999	-5E-05	1E-04
6	1,499995	3	-5E-06	1,5	2,99999	-5E-06	1E-05
7	1,5	3	-5E-07	1,5	2,999999	-5E-07	1E-06
8	1,5	3	-5E-08	1,5	3	-5E-08	1E-07
9	1,5	3	-5E-09	1,5	3	-5E-09	1E-08
10	1,5	3	-5E-10	1,5	3	-5E-10	1E-09

a_1 =-0.5							
t	x	Y	Erro	xe|y	ye|x	dx	dy
1	1	3	-0,5	1,5	2	-0,5	1
2	1,25	3	-0,25	1,5	2,5	-0,25	0,5
3	1,375	3	-0,125	1,5	2,75	-0,125	0,25
4	1,4375	3	-0,0625	1,5	2,875	-0,0625	0,125
5	1,46875	3	-0,03125	1,5	2,9375	-0,03125	0,0625
6	1,484375	3	-0,01563	1,5	2,96875	-0,01563	0,03125
7	1,492188	3	-0,00781	1,5	2,984375	-0,00781	0,015625
8	1,496094	3	-0,00391	1,5	2,992188	-0,00391	0,007813
9	1,498047	3	-0,00195	1,5	2,996094	-0,00195	0,003906
10	1,499023	3	-0,00098	1,5	2,998047	-0,00098	0,001953

Depois desta digressão, estamos em melhores condições para analisar brevemente alguns exemplos de restrições impostas sobre os coeficientes de ajustamento.

Uma restrição será aceite se for possível encontrar matrizes A e B que respeitem essa restrição e ao mesmo tempo a igualdade[21] Π=A.B'. Se for possível encontrar matrizes A e B nestas condições, quaisquer que tenham sido os valores estimados para a matriz Π, então a restrição não será testável: a restrição não limitará o espaço de cointegração.

[21] Não de forma estrita: o que interessa no teste é avaliar o afastamento dos valores obtidos em relação a essa igualdade. A hipótese nula de validade da restrição será aceite se a matriz A.B' incorporando as restrições não se afastar significativamente da matriz Π estimada sem as restrições.

Vejamos o caso da restrição:

$a_1 = -1$ (100% de correcção do desequilíbrio no que toca à variável x)

Em relação à estimativa que o programa informático irá calcular para a matriz Π, temos:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1.b_1 & a_1.b_2 \\ a_2.b_1 & a_2.b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ a_2.b_1 & a_2.b_2 \end{bmatrix}$$

Esta restrição ($a_1 = -1$) não é testável: quaisquer que tenham sido os valores estimados para os elementos da matriz Π, podemos encontrar matrizes A e B nas condições acima indicadas. Basta fazer:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{11} \\ -p_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{p_{21}}{b_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{p_{22}}{b_2} \end{bmatrix}$$

Note-se que, por construção da matriz Π, $\frac{p_{21}}{b_1} = \frac{p_{22}}{b_2}$.

Vejamos agora o caso da restrição:

$a_2 = 0$ (a variável y não corrige o desequilíbrio – é *fracamente exógena*)

Temos:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1.b_1 & a_1.b_2 \\ a_2.b_1 & a_2.b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1.b_1 & a_1.b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora já não é possível encontrar valores para as matrizes A e B que respeitem a restrição $a_2 = 0$ e simultaneamente a igualdade Π=A.B', para todos os valores de Π. O

teste desta restrição irá avaliar até que ponto as estimativas (sem restrições impostas) de p_{21} e de p_{22} estão, em conjunto, próximas de zero (hipótese nula).

Repare-se que esta restrição não identifica o vector de cointegração. Suponhamos que os valores estimados para p_{11} e p_{12} eram, respectivamente, -2 e 1, e que a normalização arbitrária do programa informático determinava o vector de cointegração (1, -0.5), o que implicaria um valor estimado para a_1 igual a -2. Mas o programa informático poderia também escolher o vector de cointegração (2, -1), o que por sua vez implicaria um valor estimado para a_1 igual a -1. Isto é, a restrição $a_2 = 0$ por si só não identifica um vector de cointegração particular. Uma restrição adicional, como, por exemplo, $a_1 = -1$, bastaria para identificar um vector de cointegração, que neste caso seria (2, -1).[22] Tal como vimos anteriormente, do ponto de vista da realização do teste da fraca exogeneidade de y ($a_2 = 0$), é indiferente identificar ou não o vector de cointegração. O resultado do teste será o mesmo, quer se imponham restrições para identificar o vector, quer não.

[22] Neste momento, poderá ser útil recordar o conteúdo da nota n.º 20.

ESTUDOS DO G.E.M.F.

2000

Nº. 8 *Identificação de Vectores de Cointegração: Análise de Alguns Exemplos*
- Pedro Miguel Avelino Bação

Nº. 7 *Imunização e M-quadrado: Que relação?*
- Jorge Cunha

Nº. 6 *Eficiência Informacional nos Futuros Lisbor 3M*
- Nuno M. Silva

Nº. 5 *Estimation of Default Probabilities Using Incomplete Contracts Data*
- J. Santos Silva e J. Murteira

Nº. 4 *Un Essaie d'Application de la Théorie Quantitative de la Monnaie à l'économie portugaise, 1854-1998*
- João Sousa Andrade

Nº. 3 *Le Taux de Chômage Naturel comme un Indicateur de Politique Economique? Une application à l'économie portugaise*
- Adelaide Duarte e João Sousa Andrade

Nº. 2 *La Convergence Réelle Selon la Théorie de la Croissance: Quelles Explications pour l'Union Européenne?*
- Marta Cristina Nunes Simões

Nº. 1 *Política de Estabilização e Independência dos Bancos Centrais*
- João Sousa Andrade

1999

Nº. 9 *Nota sobre a Estimação de Vectores de Cointegração com os Programas CATS in RATS, PCFIML e EVIEWS*
- Pedro Miguel Avelino Bação

Nº. 8 *A Abertura do Mercado de Telecomunicações Celulares ao Terceiro Operador: Uma Decisão Racional?*
- Carlos Carreira

Nº. 7 *Is Portugal Really so Arteriosclerotic? Results from a Cross-Country Analysis of Labour Adjustment*
- John T. Addison e Paulino Teixeira

Nº. 6 *The Effect of Dismissals Protection on Employment: More on a Vexed Theme*
- John T. Addison, Paulino Teixeira e Jean-Luc Grosso

Nº. 5 *A Cobertura Estática e Dinâmica através do Contrato de Futuros PSI-20. Estimação das Rácios e Eficácia Ex Post e Ex Ante*
- Helder Miguel C. V. Sebastião

Nº. 4 *Mobilização de Poupança, Financiamento e Internacionalização de Carteiras*
- João Sousa Andrade

Nº. 3 *Natural Resources and Environment*
- Adelaide Duarte

Nº. 2 *L'Analyse Positive de la Politique Monétaire*
- Chistian Aubin

Nº. 1 *Economias de Escala e de Gama nos Hospitais Públicos Portugueses: Uma Aplicação da Função de Custo Variável Translog*
- Carlos Carreira

1998

Nº. 11 *Equilíbrio Monetário no Longo e Curto Prazos - Uma Aplicação à Economia Portuguesa*
- João Sousa Andrade

Nº. 10 *Algumas Observações Sobre o Método da Economia*
- João Sousa Andrade

Nº. 9 *Mudança Tecnológica na Indústria Transformadora: Que Tipo de Viés Afinal?*
- Paulino Teixeira

Nº. 8 *Portfolio Insurance and Bond Management in a Vasicek's Term Structure of Interest Rates*
- José Alberto Soares da Fonseca

Nº. 7 *Financial Innovation and Money Demand in Portugal: A Preliminary Study*
- Pedro Miguel Avelino Bação

Nº. 6 *The Stability Pact and Portuguese Fiscal Policy: the Application of a VAR Model*
- Carlos Fonseca Marinheiro

Nº. 5 *A Moeda Única e o Processo de Difusão da Base Monetária*
- José Alberto Soares da Fonseca

Nº. 4 *La Structure par Termes et la Volatilité des Taux d'intérêt LISBOR*
- José Alberto Soares da Fonseca

Nº. 3 *Regras de Comportamento e Reformas Monetárias no Novo SMI*
- João Sousa Andrade

Nº. 2 *Um Estudo da Flexibilidade dos Salários: o Caso Espanhol e Português*
- Adelaide Duarte e João Sousa Andrade

Nº. 1 *Moeda Única e Internacionalização: Apresentação do Tema*
- João Sousa Andrade

1997

Nº. 9 *Inovação e Aplicações Financeiras em Portugal*
- Pedro Miguel Avelino Bação

Nº. 8 *Estudo do Efeito Liquidez Aplicado à Economia Portuguesa*
- João Sousa Andrade

Nº. 7 *An Introduction to Conditional Expectations and Stationarity*
- Rui Manuel de Almeida

Nº. 6 *Definição de Moeda e Efeito Berlusconi*
- João Sousa Andrade

Nº. 5 *A Estimação do Risco na Escolha dos Portafólios: Uma Visão Selectiva*
- António Alberto Ferreira dos Santos

Nº. 4 *A Previsão Não Paramétrica de Taxas de Rentabilidade*
- Pedro Manuel Cortesão Godinho

Nº. 3 *Propriedades Assimptóticas de Densidades*
- Rui Manuel de Almeida

Nº. 2 *Co-Integration and VAR Analysis of the Term Structure of Interest Rates: an empirical study of the Portuguese money and bond markets*
-João Sousa Andrade e José Soares da Fonseca

Nº. 1 *Repartição e Capitalização. Duas Modalidades Complementares de Financiamento das Reformas*
- Maria Clara Murteira

1996

Nº. 8 *A Crise e o Ressurgimento do Sistema Monetário Europeu*
- Luis Manuel de Aguiar Dias

Nº. 7 *Housing Shortage and Housing Investment in Portugal a Preliminary View*
- Vítor Neves

Nº. 6 *Housing, Mortgage Finance and the British Economy*
- Kenneth Gibb e Nile Istephan

Nº. 5 *The Social Policy of The European Community, Reporting Information to Employees, a U.K. perspective: Historical Analysis and Prognosis*
- Ken Shackleton

Nº. 4 *O Teorema da Equivalência Ricardiana: aplicação à economia portuguesa*
- Carlos Fonseca Marinheiro

Nº. 3 *O Teorema da Equivalência Ricardiana: discussão teórica*
- Carlos Fonseca Marinheiro

Nº. 2 *As taxas de juro no MMI e a Restrição das Reservas Obrigatórias dos Bancos*
- Fátima Assunção Sol e José Alberto Soares da Fonseca

Nº. 1 *Uma Análise de Curto Prazo do Consumo, do Produto e dos Salários*
- João Sousa Andrade